

萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

材料強度學

陸志鴻著



商務印書館發行

萬有文庫

第一卷 一千號

德 蘭 著
王 雲 五

商務印書館發行

041209

材料強度學

廣志鴻著

工業小叢書

序

材料強度學爲工學基礎。吾邦尙乏此必須有之書籍。爰於課餘之暇，略就下列各種參考文獻，編成此冊。以供工科大學中教科或參考之用。或有未盡之處，尙祈讀者指教是幸。

民國十七年十一月，編者誌於國立中央大學。

參 考 書 籍

野口尙一：“材料強弱學。”

田中不二：“應用力學第一編。”

小野鑑正：“材料力學。”

Arthur Morley: “Strength of Materials.”

C. E. Fuller and W. A. Johnston: “Applied Mechanics,”
Vol. II.

Bach-Baumann: “Elastizität und Festigkeit.”

目 錄

	頁數
第一章 緒論 [1-22]	
1. 材料強度學 1	
2. 內力 2	
3. 內力之種類 4	
4. 變形 6	
5. 彈性 7	
6. 彈性係數 8	
7. 內力與歪之關係 9	
8. 材料之最大強度 12	
9. 荷重之種類 15	
10. 安全率... .. 16	
11. 物質之機械的性質 18	
12. 材料 19	
13. 材料試驗 21	
第二章 拉及壓 [23-40]	
14. 垂直內力與其歪 23	
15. 傾斜內力 26	
問題 37	
第三章 剪 [41-58]	

	頁 數
16. 橫彈性係數	41
17. 容積彈性係數	43
18. 單純剪與共衡剪	44
19. 各種彈性係數間之關係	47
問題	57
第四章 樑 [59-203]	
20. 樑之平衡	59
21. 剪力及彎曲能率	61
22. 樑與荷重之種類	63
23. 突出樑	64
24. 支持樑	73
25. 剪力與彎曲能率之關係	82
26. 支點外有荷重時之支持樑	85
27. 彎曲所生之內力	92
28. 慣性能率	101
29. 重要平面形之慣性能率與斷面係數	105
30. 慣性能率,幾何學的能率,及重心之圖 式求法	128
31. 材料之性質與斷面形	133
32. 樑之傾斜及曲率	135
33. 樑之撓屈	139
34. 固着樑	142

	頁數
35. 連續樑… … … … …	149
36. 一端固着而他端支持之樑… … …	158
37. 有移動荷重之樑 … … … … …	167
38. 均一強度之樑 … … … … …	170
39. 疊板彈條 … … … … …	175
40. 樑之橫斷面上剪內力之分布 … … …	178
41. 應用例題 … … … … …	183
問題 … … … … …	198
第五章 柱 … … … … …	[205-231]
42. 柱 … … … … …	205
43. 柱端之附着 … … … … …	206
44. 關於柱之 <u>屋伊勒</u> 公式 … … … … …	207
45. <u>古爾屯藍慶</u> 之公式 … … … … …	214
46. 其他之公式 … … … … …	218
47. 偏心荷重作用之柱 … … … … …	221
問題 … … … … …	229
第六章 扭及軸 … … … … …	[233-247]
48. 圓軸之扭 … … … … …	233
49. 軸之扭角 … … … … …	236
50. 傳送已知馬力之圓軸 … … … … …	237
51. 異形軸… … … … …	240

	頁 數
問題	245
第七章 螺旋彈條	[249-256]
52. 螺旋彈條	249
問題	255
第八章 圓筒及管	[257-283]
53. 壁之厚與內力之分布	257
54. 薄圓筒受內壓時之強度	258
55. 受內壓力之薄球面殼	263
56. 有接縫圓筒或球面殼之強度	264
57. 受外壓之圓筒	265
58. 管或圓筒凹陷之公式	266
59. 厚壁圓筒	267
60. 決定圓筒或圓管尺寸之公式	272
61. 圓環或輪邊之迴轉	273
62. 圓板之迴轉	275
問題	282
第九章 鉚釘接縫	[285-316]
63. 鉚釘及其接縫	285
64. 接縫之種類	285
65. 鉚釘接縫之強度計算	287
66. 鉚釘之直徑與板之厚	293

	頁 數
67. 板及鉚釘材料之強度	293
68. 各種鉚釘接縫之效率	295
問題	316
第十章 螺絲接合	[317-328]
69. 螺絲及螺絲接合	317
70. 螺絲之種類	319
71. 螺帽釘端入螺帽釘,及釘帽... ..	319
72. 螺帽釘端入螺帽釘,及釘帽之尺寸... ..	321
第十一章 橫栓接合及縱栓接	
合... ..	[329-346]
73. 串釘接合	329
74. 榫接合... ..	334
75. 縱栓接合	343
第十二章 聯合內力	[347-368]
76. 主內力... ..	347
77. 主歪	351
78. 傾斜面上之內力	355
79. 內力之橢圓	358
80. 物體之彈性的破損	359
81. 彎與扭之聯立	361

	頁數
問題	368
第十三章 曲樑	[369-409]
82. 曲樑	369
83. A_1 量之計算	376
84. 鉤	381
85. 圓環	386
86. 曲樑之撓屈	395
87. 簡單形之鏈環	397
88. 渦卷彈條	400
89. 懸垂鏈或懸垂線	404
問題	408
第十四章 歪能	[411-435]
90. 拉伸歪能	411
91. 最大彈性歪能	413
92. 彈性限界以內之活荷重	414
93. 樑之歪能	418
94. 樑之橫方向上曲率	422
95. 剪斷歪能	424
96. 樑因剪作用所起之撓屈	427
97. 用歪能可解決之問題	430

	頁數
第十五章 平面板 [437-463]	
98. 平面板... .. 437	437
99. 圓板之內力與歪 437	437
100. 周緣支持而面上受均布壓力之圓板	443
101. 周緣固着一面受均布壓力之圓板 ...	449
102. 周緣支持中央受荷重之圓板	451
103. 周緣固着中央受荷重之圓板	455
104. 對於圓板之近似方法	456
105. 周緣支持受均布壓力之橢圓板 ...	458
106. 周緣支持受均布壓力之方板	460
107. 周緣支持受均布壓力之矩形板 ...	461
問題	463
材料強度學術名中英對譯表 [465-474]	

材 料 強 度 學

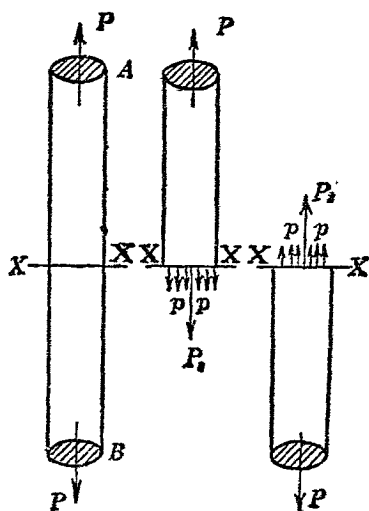
第 一 章

緒 論

1. 材料強度學. 材料強度學 (strength of materials) 者, 爲應用力學之一部, 研究工業用材料及構造物諸部內力 (stress) 之性質及其影響. 機械及他構造物 (structure) 上必有外力作用. 若某部分材料不能充分抵抗外力時, 則該機械或構造物必破壞. 若對於所作用之外力, 構造物各部大小過大時, 雖無破壞之虞, 而使用不必要之材料, 不免有不經濟之弊. 故設計構造物時, 其各部內力與所加荷重 (load, 即外力) 之關係, 及構造物材料強弱之性質, 須完全知悉. 俾免材料之損失, 且可對於外力, 得充分安全. 此謂之經濟的設計法.

凡任何學問，理論及應用不可分離。理論待實地應用始奏其效，而實際應用必先通曉理論，而後可盡其妙。材料強弱學亦須學理研究及應用計算，讀者當致意於此焉。

2. 內力。物體上加外力時，不論力之大小，必生變形。而物體內部各分子生一種之抵抗力，稱曰內力 (stress)。例如第1圖上棒 AB 一端加 P 力時，他端必加以相等反向之力，方可平衡



第 1 圖

(作用於物體上力之和與能率之和皆為零時，物體始在平衡狀態)。今設棒之軸線上，假想一直交橫斷面 XX 。若無抵抗外力 P ， P 之力作用於此面時，則因 P ， P 二力，棒將於此面分離。然事實上棒並不分離，故 XX 之假想斷面上，必有與外力 P ， P 相等反向之內力 P_1 ， P_2 ，以與外力相平衡。此內力必不為單一而成對，其大小相等而方向相反。

內力之分布於斷面狀況，因外力作用狀態，棒之形狀，與性質等而不同。棒長而外力沿軸線作用時，則可視為平均分布於橫斷面上。此時單位面積上內力之強 (intensity of stress) p 為

$$p = \frac{P}{A}$$

但 A 為斷面積。一般平均分布之內力甚鮮，此時微小面積 dA 上內力 dP 可視為平均分布。故

$$p = \frac{dP}{dA}$$

上述內力之強以單位面積上內力之大小表

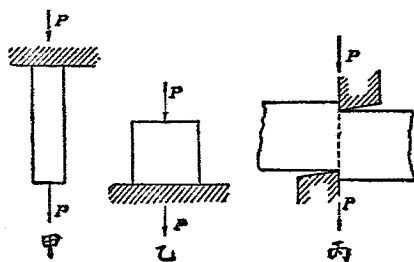
之。力之單位及面積之單位，須採用通常所用者。力之單位有尪 (kilogram) 及磅 (pound)，若力甚大時有米突制噸 (metric ton = 1000 kg.) 及英噸 (= 2240 lb.) 等。面積單位用平方糎 (sq. cm.) 及平方吋 (sq. in.)。故內力強度之單位為「尪每平方糎 (kg./sq. cm.)」或「磅每平方吋 (lb./sq. in.)」或「噸每平方吋 (tons/sq. in.)」等。但英國單位與米突制單位不可混用。

3. 內力之種類。內力為物體對於外力之抵抗，故方向與外力相反。而外力有各種作用方法，因之內力亦生相異之種類。

對於物體某斷面上，外力垂直作用時，內力亦垂直於該面。此謂之垂直內力 (normal stress) 或縱內力 (direct stress)。因其方向之不同，有拉內力 (tensile stress) 與壓內力 (compressive stress) 之分。例如第2圖上甲沿軸線方向將棒兩端拉伸。垂直於軸線之斷面上內力，與欲將棒沿此面分為二部之外力相抵抗。故稱為拉內力。同圖

乙上，將短柱沿軸線方向壓縮時，軸線之垂直斷面上內力，與欲將棒之二部壓合之外力相抵抗，故稱為壓內力。

若外力如第2圖丙，沿斷面平行作用時，則內力接觸於面，與欲將棒沿此面剪斷為二部之外力相抵抗。稱曰切線內力 (tangential stress) 或剪內力 (shearing stress)。



第 2 圖

以上三種內力最為簡單。他各種內力均可分解為此三種。故此三種內力稱曰簡單內力 (simple stress)。由此三種內力，多數合成之內力曰合成內力 (combined stress)。例如將棒彎曲

或扭轉時所生內力，均為合成內力。

4. 變形。歪。內力所生物體之變形曰歪 (strain)。因各種內力生各種變形。有拉伸歪，壓縮歪，剪斷歪，彎曲歪，扭轉歪等之區別。

(1) 拉伸歪 (tensile strain)。拉力作用時，沿其方向上生伸長 (elongation)。歪之絕對量因材料大小而不一定，長者較短者，對於同一內力，生多量之歪。故不能以歪量比較變形。吾人常以對於單位長之歪表示歪量。因之伸長時，棒之原長設為 l ，全體伸長為 δl ，則歪量為

$$\text{伸長歪} = \frac{\delta l}{l}$$

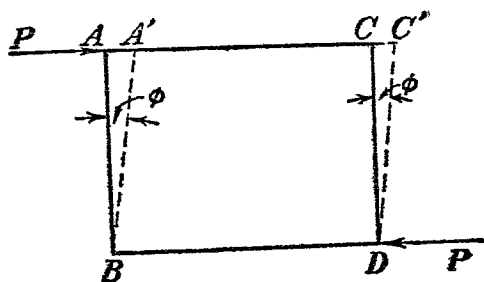
即示單位長之平均伸長也。

(2) 壓縮歪 (compressive strain)。壓內力作用時，其長度短縮。原長設為 l ，全體短縮為 δl ，則

$$\text{壓縮歪} = \frac{\delta l}{l}$$

亦為單位長之平均短縮。

(3) 剪斷歪 (shearing strain). 受剪內力時, 與外力平行之物體層, 於其方向上生平行之相互移動. 如第 3 圖 $ABCD$ 變形為 $A'BC'D$. 即對於 AB 之長生 AA' 之變形. 此時歪以 $(AA' \div AB)$ 表之. 即 AB 與 $A'B$ 所成角度 ϕ 之弧度法 (circular measure) 也.



第 3 圖

5. 彈性. 增加外力時, 內力亦增, 而歪亦增大. 由實驗結果, 就多數材料, 內力大小在一定限界內, 若取去外力時, 內力消失, 而同時歪亦全消失. 物體復歸於原狀. 此性質稱曰彈性 (elasticity). 若外力更增加, 至內力大小超過一

定限界時，則雖取去外力，而物體不能完全恢復原形，殘留多少之歪。此一定限界名曰彈性限界 (elastic limit)。彈性限界以內所生之歪曰彈性歪 (elastic strain)。超過彈性限界後，殘留而不消失之歪曰不復歪 (permanent set) 或永久變形。

6. 彈性係數。彈性限界以內，內力與其所生之歪成正比例。此為呼克法則 (Hooke's law)。但此法則並非對於任何材料均可適合。僅就多數金屬材料大體可成立耳。其表示法如下：

$$\frac{\text{內力}}{\text{歪}} = \text{常數} \quad \text{或} \quad \text{內力} = \text{常數} \times \text{歪}$$

此常數稱曰彈性係數 (modulus of elasticity)。彈性係數有縱彈性係數 (modulus of direct elasticity) 與橫彈性係數 (modulus of transverse elasticity) 之別。前者示拉內力與拉伸歪之關係，亦名楊氏係數 (Young's modulus)。通常以 E 表之。設原長為 l ，拉伸歪為 δl ，內力之強為 p ，則

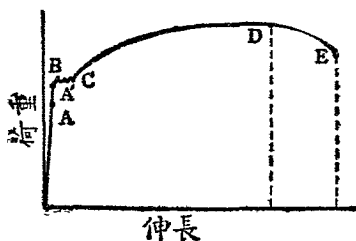
$$\frac{p}{\frac{\delta l}{l}} = E$$

但壓內力與壓縮歪之關係略與上同。橫彈性係數示剪內力與剪斷歪之關係，普通稱曰剛性係數(modulus of rigidity)，以 N 表之(或用 G ，或用 C)。設 q 為剪內力之強，剪斷歪為 ϕ (第 3 圖)，則

$$\frac{q}{\phi} = N$$

7. 內力與歪之關係。將物體之變形取於水平軸，外力取於垂直軸，可表示物體上荷重與變形之關係。名曰荷重變形線圖(load-deformation diagram)。若變形為拉伸歪，則為荷重伸長線圖(load-elongation diagram)。若變形為壓縮歪，則為荷重壓縮線圖(load-compression diagram)。又若線圖上表示內力之強與歪時，則得內力歪線圖(stress-strain diagram)。後者多用之。但所謂內力依習慣上以原斷面除各瞬間荷重而得者。

今將軟鋼 (mild steel) 之荷重伸長線圖示於第 4 圖。 OA 部爲直線, $ABCDE$ 爲曲線。未至 A 點時, 荷重與伸長成正比例。 A 點稍上方至 B 處, 伸長較荷重增加驟速。 B, C 間荷重雖不增加而伸長急增。此 B 點曰降伏點 (yield point)。 C 至 D 處, 荷重與伸長又共增, 惟伸長之增加較荷重爲大。過 D 點後, 荷重減小, 而伸長仍增。卒至 E 點而物體破斷。



第 4 圖

OA 間荷重與伸長成正比例, 過 A 點後則否。此 A 點名曰比例限界 (limit of proportionality)。 OA' 間取去內力時, 歪幾完全消失。過 A' 點後始有較大之殘留伸長。此 A' 點曰彈性限界

(limit of elasticity). A' 點以後,若取去內力,有一部永久變形之殘留,物體呈萎性(plasticity). 加以一定荷重時,歪與時間共增大. A' 至 D 間物體一部分為彈性,一部分為萎性. D 點附近完全呈萎性. OD 間物體全部伸長,而 DE 間則生局部伸長(local elongation),而變形驟增. D 點荷重最大. E 點之破壞荷重較此尚小. 然 DE 間局部變形,斷面積縮小甚速. 故實際之破壞內力較 D 點內力為大. 圖上各點之內力如下:

$$\text{比例界限 } p_A = \frac{P_A}{F}$$

$$\text{彈性界限 } p_{A'} = \frac{P_{A'}}{F}$$

$$\text{降伏點 } p_B = \frac{P_B}{F}$$

$$\text{最大強度 } p_D = \frac{P_D}{F}$$

$$\text{破壞內力 } p_E = \frac{P_E}{F}$$

$$\text{實際破壞內力 } p'_E = \frac{P_E}{F'}$$

但 F 爲原有斷面積, F' 爲破斷後斷面積。

8. 材料之最大強度。物體上加外力而破壞者,因內部抵抗力即內力不足以抵抗其時之外力故也。因小外力而破斷之材料,其生內力之能力小。因大外力而破斷之材料,其生內力之能力大。故材料之強弱可由生內力之能力以比較之。

材料所可生內力較外力大時,無破壞之虞。若外力較可生內力大,則即破壞。破壞瞬間之內力爲材料所可生之最大內力。稱爲該材料之最大強度 (ultimate strength) 或破壞強度 (breaking strength)。通常最大強度當材料試驗時,以最初原有斷面積除試驗棒 (test-piece) 所可支持之最大荷重而得之內力強度以表之。即上圖 B 點之內力也。

各材料之最大強度及彈性係數表之如次。

材料強弱表 (金屬) (其一)

材 料	重 量 lb./cu. in.	最大力內 lb./sq. in.			彈性係數 lb./sq. in.	
		拉	壓	剪	縱	橫
鑄 鐵	.271	16,000	95,000	27,000	17,000,000	6,300,000
鍊 鐵	.278	50,000	50,000	40,000	29,000,000	10,500,000
軟鋼(板)	.283	70,000	65,000	55,000	31,000,000	13,000,000
極軟鋼(板) (汽鍋用)	.283	65,000	—	52,000	30,000,000	—
鑄 鋼	.287	72,000	—	—	30,000,000	12,000,000
鑄 銅	.310	20,000	58,000	24,000	13,000,000	5,000,000
銅 板	.321	30,000	—	—	15,000,000	6,300,000
砲金(青銅)	.319	30,000	—	—	11,500,000	4,100,000
磷 青 銅	.310	35,000	—	29,000	13,500,000	5,200,000
黃 銅	.304	18,000	10,500	—	9,000,000	3,400,000
鋁	.096	19,000	—	13,500	10,000,000	—

材料強弱表 (木材石材等) (其二)

材 料	重 量 lb./cu. ft.	最大內力 lb./sq. in.			縱彈性係數 lb./sq. in.
		拉	壓	剪	
杉	24	6,400	5,700	800	1,000,000
檜	29	8,200	7,400	1,000	1,300,000
榧	21	4,000	4,800	640	850,000
樅	27	7,200	6,300	930	1,350,000
松	33	8,200	7,300	1,170	1,400,000
栗	31	8,500	5,000	1,000	1,150,000
櫻	63	17,000	7,300	1,700	—
樺	42	12,500	7,500	1,600	1,200,000
花崗岩	162	650	16,500	—	—
安山岩	141	—	7,200	—	—
凝灰岩	139	—	6,400	—	—
甄	96	95	650	—	—
	109	305	3,900	—	—
混凝土	—	—	3,500	—	—
皮 革	—	2,900	—	—	—
		6,500			
木 棉	—	5,000	—	—	—
		10,000			
麻	—	6,600	—	—	—
		17,000			

9. 荷重之種類. 作用於機械或構造物上之外力曰荷重 (load). 荷重分兩大類. 如懸錘之重或材料自身之重等靜止荷重, 又或徐徐所加之一定不變之外力等, 均稱爲死荷重 (dead load). 反之, 如急激所加之外力, 或外力大小有變化者, 稱爲活荷重 (live load). 例如鐵道橋自身之重或軌道重量等爲死荷重, 而火車之進行重量或風壓等爲活荷重.

活荷重中外力大小雖變化而方向不變者, 曰反覆荷重 (repeated load). 方向大小同變化者, 曰交變荷重 (alternate load). 例如拉棒之力有變化時爲反覆荷重, 若或拉或壓, 外力大小自一方變化至他方向者爲交變荷重.

急激加外力於物體時之內力與同大死荷重所生內力之二倍相當. 故活荷重對於材料之影響較死荷重大. 因之因荷重種類之不同, 材料之安全度亦異. 普通之材料試驗時, 試驗片上徐受荷重, 故爲死荷重. 前節二表所示強度

乃對於死荷重而得者。

10. 安全率. 材料上生最大內力時即破壞. 故機械或構造物上各部荷重須小於最大荷重. 又若荷重所生內力超過彈性限界時, 則材料上生不復歪, 而變形永久殘留. 使材質生變化, 易於破壞. 故甚危險. 是以期機械或構造物之安全時, 須使材料各部內力必在其彈性限界以內. 此安全範圍內可容許之內力, 曰可容內力 (allowable stress) 或安全內力 (safe working stress). 生此內力之荷重曰可容荷重 (allowable load) 或安全荷重 (safe working load).

最大荷重與可容荷重之比或最大內力與可容內力之比, 稱曰安全率 (factor of safety).

$$\text{安全率} = \frac{\text{最大內力}}{\text{可容內力}} \quad \text{或} \quad \text{可容內力} = \frac{\text{最大內力}}{\text{安全率}}$$

安全率必大於1. 因材料之性質與荷重之種類而定. 材料性質不均一而不可信用時, 或因周圍狀況易於變質時, 安全率之值須大. 荷重之

量不能確知而荷重有急激增加時，安全率之值亦須大。反覆荷重時安全率之值，普通為死荷重時之一倍半，交變荷重時為死荷重時之三倍。

若製作一機械或構造物，欲使各部有平等強度時，則對於各部之可容內力，不可取同一之安全率。蓋某部分上或僅受死荷重而他部分上或受活荷重，或又有受衝擊(shock)者。若用同一安全率計算各部時，則受衝擊之部必先破壞。故受衝擊之處必取較大之安全率，而須充分強大。

因材料之種類及荷重之性質，安全率之標準略如下。

材 料	死荷重	活 荷 重	衝 擊
		反覆荷重~交變荷重	
鑄鐵等脆金屬與合金	4	6~10	15
鍊 鐵 及 軟 鋼	3	5~ 8	12
鑄 鋼	3.5	5~ 8	15
銅等軟金屬與合金	5	6~ 9	15
木 材	6	8~12	20
石 材 甄 類	10	15~20	—

11. 物質之機械的性質. 物體上加外力時, 形狀生變化, 稱爲機械的變化. 關於此性質曰機械的性質 (mechanical property).

(1) 彈性. 物體上加外力時, 則生內力而起歪. 若取去外力而歪同時安全消失時, 此性質曰彈性. 多數金屬在彈性限界內幾有完全彈性.

(2) 萎性. 若取去外力, 歪不能完全消失而有殘留者, 稱曰萎性 (plasticity). 例如粘土卽爲一例. 因外力而生永久變形, 有彈性之物質在彈性限界以外, 生部分的萎性. 金屬上施機械的作業而付以一定之形時, 卽利用此彈性限界以外之萎性也. 若爲完全彈性, 則雖任何加工, 苟取去外力卽復原形, 故機械的作業爲無効.

萎性物質加以荷重時, 因時間經過, 而歪亦增大. 宛如流體之呈流 (flow) 之現象. 如由小孔將金屬拉成細線時, 卽爲其例.

(3) 延性. 受拉伸作用時, 物體增長而減細, 或展成板狀. 此性質曰延性 (ductility). 又或稱爲可鍛性 (malleability). 各金屬之延性各不相同.

(4) 脆性. 缺除延性之物質曰脆性 (brittleness). 例如玻璃, 甄所生之歪極小而即破壞. 有脆性之物質無預兆而即突然破壞. 須審慎用於機械及構造物上.

12. 材料. 工業用材料大別之爲金屬與非金屬兩種. 前者如鐵, 銅, 錫, 鉛, 鋅, 鋁, 鎳等, 後者如木材, 石材, 甄, 水泥, 混凝土, 皮革, 木棉, 麻等. 而其中尤以鐵之用途爲最廣. 但工業上所用者非爲純鐵, 而爲鐵與他金屬或非金屬之合金. 例如最近所用之配合物質爲鎳, 鉻等, 稱爲鎳鋼, 鎳鉻鋼等類. 此種尙爲特殊合金. 鐵中最普通所含元素爲炭素, 硅素, 錳, 磷, 硫黃等. 其中炭素之量可變換鐵之性質. 炭素含量大者

脆而難鍛，含量小者軟而易鍛。普通實用上就鐵之種類分別如下：

I. 生鐵 (pig iron) (炭素含量 2% 以上)

- a. 白生鐵 (white pig iron) (炭素與鐵為化合狀態而不遊離。斷面白色。用於製鐵或特種鑄物用。)
- b. 灰生鐵 (gray pig iron) (炭素一部成為黑鉛而遊離。斷面灰色。普通用於鑄造，稱為鑄鐵 cast iron.)

II. 可鍛鐵 (malleable iron) (炭素含量 2% 以下)

- a. 鍊鐵 (wrought iron). 鍊鋼 (wrought steel). (半熔融狀態時製造者，含有熔滓 slag.)
- b. 鑄鐵 (ingot iron). 鑄鋼 (ingot steel). (熔融狀態時製造者，不含熔滓.)

鐵與鋼之區別非為顯然。大體言之，可鍛鐵中炭素含量多者有可硬燒性 (hardening)，炭素少者無之。前者曰鋼，後者曰鐵。但以炭素量，

實難明白區別。大抵言之，可以炭素 0.5% 為境界。然較此少者亦有多少可硬性者也。鋼中又可分為炭素鋼及特殊鋼二種。前者有軟鋼硬鋼之分，而後者如鎳鋼，鉻鋼等是也。

13. 材料試驗。工業用材料之重要性質，用種種試驗方法以闡明之。就金屬材料之試驗方法，自物理的與化學的性質之試驗而外，尚有下之各項：

1. 靜力試驗 (拉, 壓, 彎, 扭, 剪等試驗)。
2. 衝擊試驗
3. 反覆內力試驗
4. 硬度試驗
5. 加工試驗
6. 組織試驗

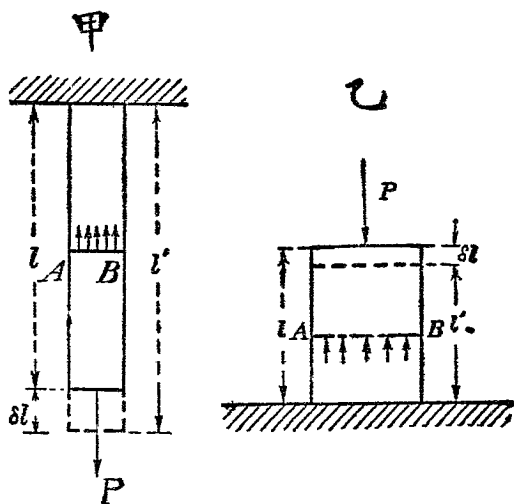
通常研究彈性及強度上, 1, 2, 3 三項必須施行, 以明其對於靜的荷重及衝擊與周期變化的荷重諸影響。區別硬度時, 用硬度試驗。檢

別其對於工作上之適否，用加工試驗。 輒近因冶金學之進步，金屬組織之試驗亦成一分科。材料研究上得益良多。

第 二 章

拉 及 壓

14. 垂直內力與其歪. 第5圖上一端固定之棒, 他端加以拉力或壓力, 則棒內部生內力以與此抵抗, 因之生歪. 此時內力全量必與外力 P 相平衡. 設棒之橫斷面為 A , 內力之強為 p , 則



第 5 圖

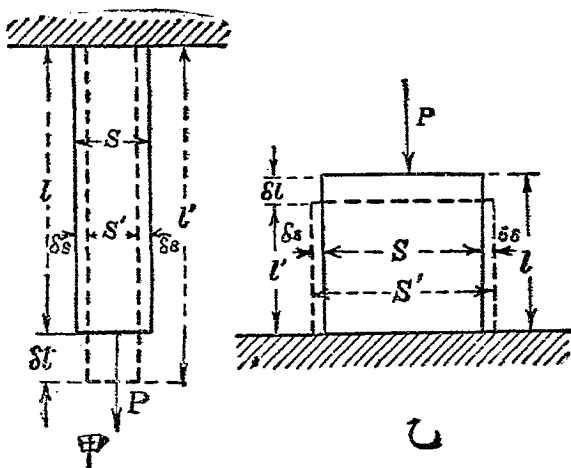
$$p \cdot A = P \quad \therefore p = \frac{P}{A} \dots \dots \dots (1)$$

設棒原長為 l , 長之變化為 δl , 則歪 λ 為

$$\lambda = \frac{\delta l}{l} \dots \dots \dots (2)$$

由呼克法則, 彈性限界內, 內力與歪成比例. 其比例常數即彈性係數. 設拉及壓之彈性係數為 E , 則

$$E = \frac{p}{\lambda} = \frac{Pl}{A\delta l} \dots \dots \dots (3)$$



第 6 圖

此 E 稱曰縱彈性係數或楊氏係數。 E 爲生單位歪時，單位面積上所作用之力。 其值如第 8 節表中所示爲甚大。 實際上不存在。 故 Bach 教授取 E 之逆數 α ，名曰伸長係數 (Dehnungszahl)。 卽

$$\alpha = \frac{1}{E} = \frac{\lambda}{p} \dots \dots \dots (3a)$$

物體受拉伸時，其內力方向上生伸長而斷面積縮小。 如第 6 圖所示。 受壓縮時，內力方向上生縮短而斷面積膨大。 此長短之變化稱曰縱歪 (longitudinal strain)，而斷面積之變化稱曰橫歪 (transverse strain)。 橫歪之量以橫方向上長度之變化對於原長之比以測之。 卽拉伸時爲 $(S-S')/S$ ，壓縮時爲 $(S'-S)/S$ 。

由實驗結果，某材料之橫歪與縱歪之比常一定。 此定比稱曰包生比 (Poisson's ratio)。 其值小於 1。 因各材料而異其值。

$$\text{包生比} = \frac{1}{m} = \frac{\frac{\delta s}{s}}{\frac{\delta l}{l}} = \frac{l}{s} \cdot \frac{\delta s}{\delta l} \dots \dots \dots (4)$$

m 之值通常在 3 與 5 之間，對於金屬略近於 4。

15. 傾斜內力。前述內力均與一假想斷面成垂直或平行者。但一般作用於某面上內力，其方向為傾斜。謂之傾斜內力 (inclined stress)。上述垂直內力及切線內力可視為其特別情形。傾斜內力可分為垂直於面之垂直內力與接觸於面之切線內力二分力。其垂直分內力 (normal component stress) 因外力方向，或為拉力，或為壓力。切線分內力 (tangential component stress) 為剪內力。

第 7 圖上棒之橫斷面積為 A ，拉伸荷重 P 作用時，斷面上之內力均垂直於面。強度為 $p = \frac{P}{A}$ 。無切線內力。今假想一他面與橫斷面成 θ 角，則對於此面之內力為傾斜內力，將此分為垂直與切線二分內力。棒上作用之外力 P 對於此

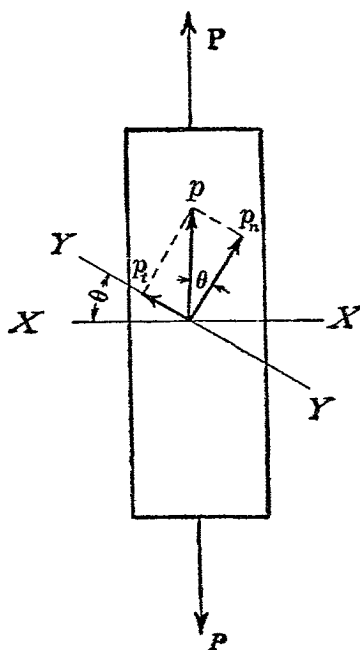
面之垂直及平行二分力各爲

$$P_n = P \cos \theta, \quad P_t = P \sin \theta$$

假想面 YY 之面積爲

$$A' = A \sec \theta$$

故垂直分內力 p_n 與切線分內力 p_t 各爲



第 7 圖

$$\left. \begin{aligned} p_n &= \frac{P_n}{A'} = \frac{P \cos \theta}{A \sec \theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = p \cos^2 \theta \\ p_t &= \frac{P_t}{A'} = \frac{P \sin \theta}{A \sec \theta} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = \frac{p}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

故垂直內力與切線內力之值均因面之傾斜角而變化。 p_t 之值當 $\sin 2\theta = 1$ 時為最大。即 $\theta = 45^\circ$ 。此時

$$\text{最大之 } p_t = \frac{1}{2} p \dots\dots\dots(6)$$

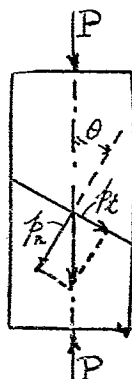
由此觀之，雖為單純之拉或壓，而傾斜面上可誘起切線內力。對於此剪力抵抗較弱之材料，往往因此切線內力，沿傾斜面而裂破。脆質物如鑄鐵，硬鋼，軋，石材，水泥等受壓縮時，多沿傾斜面而破壞。破壞面上若無摩擦，則該面之傾斜度 θ 當為 45° 。但因有摩擦，故摩擦靜止角亦當加入。

今設 p 為荷重軸上壓內力之強， q 為最大剪

內力之強， μ 爲二部分摩擦係數， ϕ 爲靜止角 (angle of repose)，即 $\tan \phi = \mu$ 。抵抗於沿面滑動而破壞之力爲 $q + \mu p_n$ 即 $q + \mu p \cos^2 \theta$ 。此時切線內力 p_t 爲 $p \sin \theta \cos \theta$ ，

$$\therefore q + \mu p \cos^2 \theta = p \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore p = \frac{q}{\sin \theta \cos \theta - \mu \cos^2 \theta}$$



第 8 圖

壓縮破壞面必沿壓內力 p 爲最小時之 θ 之面而起。即

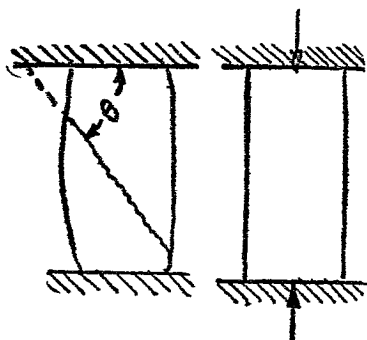
$$\frac{dp}{d\theta} = 0$$

$$\therefore \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \mu \cdot 2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\text{或} \quad \cot 2\theta = -\mu = -\tan \phi = \cot \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$$

鑄鐵受壓縮時，破壞角 θ 約爲 55° 內外。故 ϕ 約爲 20° 。其狀若第 9 圖。



第 9 圖

例 1. 今有可容內力 1400 lb./sq. in. 之松材, 須支持 25 噸之荷重. 問當用幾吋方木?

$$P = 25 \text{ tons} = 25 \times 2240 \text{ lb.}$$

$$p = 1400 \text{ lb./sq. in.}$$

$$\therefore A = \frac{P}{p} = \frac{25 \times 2240}{1400} = 40 \text{ sq. in.}$$

故每邊長 = $\sqrt{40} = 6.32 \text{ in.}$

例 2. 有軟鋼圓棒, 以 18000 kg. 之力拉之. 其最大內力設為 36 kg./sq. cm., 安全率為 4. 則須直徑若干?

可容內力 $p = \frac{36}{4} = 9 \text{ kg./sq. cm.}$

$$\therefore A = \frac{P}{p} = \frac{18000}{9} = 2000 \text{ sq. cm.}$$

所求直徑 d 爲 $\frac{\pi}{4}d^2 = 2000$

$$\therefore d = \sqrt{\frac{2000 \times 4}{3.14}} = 50.5 \text{ cm.}$$

例 3. 有直徑 2 吋之軟鋼圓棒。可容內力爲 12000 lb./sq. in. 問可加至若干噸拉力？

$$A = \frac{\pi}{4} \times 2^2 = 3.14 \text{ sq. in.}, \quad p = 12000 \text{ lb./sq. in.}$$

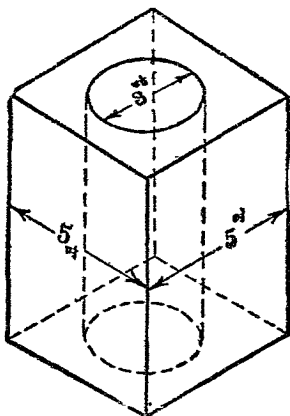
$$\therefore P = pA = 3.14 \times 12000 = 37,680 \text{ lb.} = 16.85 \text{ tons.}$$

例 4. 有每邊 5 吋之正方形短柱，內部有直徑 3 吋之孔。可容內力若爲 3.8 ton/sq. in.，則可支持若干噸荷重（第 10 圖）？

$$A = (5 \times 5) - \left(\frac{\pi}{4} \times 3^2 \right) = 17.93 \text{ sq. in.}$$

$$p = 3.8 \text{ ton/sq. in.}$$

$$\therefore P = pA = 3.8 \times 17.93 = 68.1 \text{ tons.}$$



第 10 圖

例 5. 長 10 呎直徑 1 吋之軟鋼圓棒，以 4 噸之力拉時，伸長若干？但縱彈性係數為 13000 ton/sq. in.

$$P = 4 \text{ tons}$$

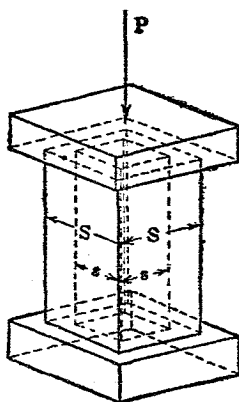
$$l = 10 \times 12 = 120 \text{ 吋}$$

$$A = \frac{\pi}{4} \times 1^2 = 0.785 \text{ sq. in.}$$

$$E = 13,000 \text{ ton/sq. in.}$$

$$\therefore \delta l = \frac{Pl}{EA} = \frac{4 \times 120}{13000 \times 0.785} = 0.047 \text{ in.}$$

例 6. 第 11 圖二柱中, 外柱爲鋼, 內柱爲鍊鐵. 其每邊長各爲 S 與 s , 高爲 l . 今支持重量 P 時, 求各柱中所誘起之內力, 及兩柱共通之短縮幾何.



第 11 圖

設 E_W 爲鍊鐵之縱彈性係數, E_S 爲鋼之縱彈性係數. p_W 爲鍊鐵上內力, p_S 爲鋼之內力. 則

$$A_W = s^2, \quad A_S = S^2 - s^2$$

設共通短縮爲 δl , 則

$$P = p_W A_W + p_S A_S = p_W s^2 + p_S (S^2 - s^2) \dots (a)$$

$$\delta l = \frac{p_W l}{E_W} \dots \dots \dots (b)$$

$$\delta l = \frac{p_s l}{E_s} \dots\dots\dots (c)$$

由 (b) 及 (c),

$$\frac{p_w l}{E_w} = \frac{p_s l}{E_s}, \text{ 或 } \frac{p_w}{p_s} = \frac{E_w}{E_s}$$

將此 p_w 值代入 (a) 式,

$$p_s \frac{E_w}{E_s} s^2 + p_s (S^2 - s^2) = P$$

或

$$p_s = \frac{P E_s}{E_w s^2 + E_s (S^2 - s^2)}$$

同樣

$$p_w = \frac{P E_w}{E_w s^2 + E_s (S^2 - s^2)}$$

又

$$\delta l = \frac{l p_w}{E_w} = \frac{l p_s}{E_s} = \frac{P l}{E_w s^2 + E_s (S^2 - s^2)}$$

例 7. 將直徑 1 吋之鍊鐵圓棒垂直懸垂。因自己重量所誘起之最大內力為 6 tons/sq. in. 時，問棒長若干？但鍊鐵每立方吋重 0.28 磅。

均一斷面積之棒懸垂時，其最大內力生於最上部。

$$\text{最大之 } p = \frac{\frac{\pi}{4} d^2 l w}{\frac{\pi}{4} d^2} = l w$$

或

$$l = \frac{\text{最大之 } p}{w}$$

但 d 爲棒直徑, l 爲棒長, w 爲單位體積之材料重量. 故棒長與直徑無關, 其最大內力僅因單位體積之重量而定. 今

$$\text{最大之 } p = 6 \text{ tons/sq. in.} = 13,440 \text{ lb./sq. in.}$$

$$w = 0.28 \text{ lb./sq. in.}$$

$$\text{故 } l = \frac{13440}{0.28} = 48,000 \text{ 吋} = 4,000 \text{ 呎}$$

例 8. 有軟鋼拉伸棒, 長 50 呎, 斷面積 1.5 sq. in., 支持 5 噸之拉力時, 生 0.15 吋之伸長. 問縱彈性係數若干? 又此荷重所生之內力與歪各幾何?

$$P = 5 \text{ tons, } A = 1.5 \text{ sq. in., } l = 50 \times 12 = 600 \text{ in.}$$

$$\delta l = 0.15 \text{ in.}$$

$$\therefore p = \frac{P}{A} = \frac{5 \times 2240}{1.5} = 7,467 \text{ lb./sq. in.}$$

$$\lambda = \frac{\delta l}{l} = \frac{0.15}{600} = 0.00025$$

$$\therefore E = \frac{pl}{\delta l} = \frac{7467 \times 600}{0.15} = 29,868,000 \text{ lb./sq. in.}$$

例 9. 以 $1\frac{1}{4}$ 吋方之鍊鐵棒製成平均直徑 40 吋之輪. 加熱時膨脹而為平均直徑 $40\frac{1}{64}$ 吋. 以之嵌入於 $40\frac{1}{64}$ 吋之圓筒周而冷卻之. 輪收縮時生拉內力於材料中. 設縱彈性係數為 12500 噸/平方吋. 求內力之值.

因膨脹所生之伸長為 $\delta l = \pi(40\frac{1}{64} - 40) = 0.0491$ 吋. 輪周初長為 $l = \pi \times 40 = 125.6$ 吋.

$$\therefore p = \frac{E\delta l}{l} = \frac{12500 \times 0.0491}{125.6} = 4.87 \text{ 噸/平方吋.}$$

例 10. 有拉伸棒, 軸向上受 5 噸/平方吋之拉內力. 與橫斷面成 40° 之傾斜面上, 垂直內力與切線內力之大小幾何?

橫斷面積1平方吋之棒一部分，其傾斜面上面積爲

$$A' = 1 \times \sec 40^\circ \text{ 平方吋}$$

傾斜面上垂直拉分力爲 $P_n = 5 \times \cos 40^\circ$ 噸。

傾斜面上平行拉分力爲 $P_t = 5 \times \sin 40^\circ$ 噸。

故傾斜面上垂直內力及切線內力各爲

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{5 \times \cos 40^\circ}{1 \times \sec 40^\circ} = 5 \times \cos^2 40^\circ = 5 \times 0.7660 \times 0.7660 \\ &= 2.933 \text{ 噸/平方吋。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{5 \times \sin 40^\circ}{1 \times \sec 40^\circ} = 5 \times \cos 40^\circ \times \sin 40^\circ \\ &= 5 \times 0.7660 \times 0.6428 = 2.462 \text{ 噸/平方吋。} \end{aligned}$$

問 題

1. 支持10噸死荷重之鍊鐵拉棒 (tie rod)，其可容內力爲6噸/平方吋。求(1)棒之斷面積，(2)圓形斷面時之直徑，(3)正方形斷面時每邊之長，(4)一邊長1吋時矩形斷面之他邊長。

2. 直徑 $1\frac{1}{4}$ 吋之麻繩吊懸17,200磅之重量，可

得安全. 若麻之最大拉伸強為 $7,000 \text{ lb./sq. in.}$ 時, 問所取安全率數幾何? 又可容最大內力若干?

3. 有圓形鑄鐵柱, 外徑 10 吋, 內徑 8 吋, 長 10 呎. 支持 60 噸之壓縮荷重. 問當生短縮幾何? 但鑄鐵之 E 值為 8000 噸/平方吋.

4. 有每邊長 h 正方形脚之柱, 載於輒基臺上. 使柱支持 80 噸荷重. 求 h 之長. 但輒之可容壓內力為 200 lb./sq. in. 又柱斷面為圓形, 而鑄鐵之可容壓內力為 8000 lb./sq. in. 求其直徑.

5. 直徑 0.4 吋, 長 100 呎之銅線, 以 250 磅之力拉之, 其伸長為 0.14 吋. 求銅之縱彈性係數.

6. 斷面 1 平方呎之鑄鐵柱, 支持 2000 噸荷重. 問生壓內力幾何, 及歪幾何? 但鑄鐵之縱彈性係數為 17,000,000 磅/平方吋.

7. 直徑 1 吋長 40 吋之鋼棒, 以外力一噸伸長 0.00384 吋. 求鋼之縱彈性係數.

8. 斷面積 0.62 平方吋長 14 呎之鋼棒, 使伸長

$\frac{1}{16}$ 吋。問須加幾噸荷重？但鋼之縱彈性係數為14000噸/平方吋。

9. 1吋直徑銅圓棒，寬插入於內徑1吋厚 $\frac{1}{8}$ 吋之鋼管內，固定其兩端。此合成棒以10噸力拉之。問鋼與銅上之內力幾何？但縱彈性係數鋼為13000噸/平方吋，銅為6000噸/平方吋。

10. 由彈性限界內單純之拉內力，鋼棒伸長初長之 $\frac{1}{1000}$ 。問容積變化幾何？但包生比為0.25。

11. 相隔25呎之對立二壁，以直徑1吋之軟鋼拉棒拉緊之。其法熱棒至 300°F ，使膨脹伸長時，裝緊於壁上適當距離。若壁可充分抵抗壓縮力時，問冷却至常溫(60°F)時棒上所加荷重幾何？但軟鋼對於華氏升高1度，伸長0.0000062，其縱彈性係數為13500磅/平方吋。

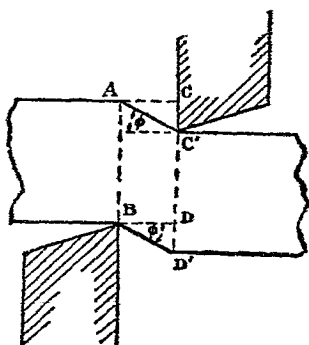
12. 二厚銅板以軟鋼螺帽釘(bolt)緊着之。溫

度 200°F . 時, 釘上生幾何之拉內力? 但鋼之膨脹係數為 0.0000062 , 銅之膨脹係數為 0.00001 , 鋼之縱彈性係數為 13500 噸/平方吋.

第三章

剪

16. 橫彈性係數. 第12圖上 AB, CD 二斷面, 自材料之反對側加外力 P, P , 則一般兩斷面間生彎曲. 若兩斷面相距極近, 則無彎曲而材料於兩斷面間被截斷成二部. 例如以剪刀剪物即其一例.



第 12 圖

此時 AB, CD 間平行各斷面上有內力作用, 即

剪內力是也。拉與壓時，內力垂直作用於斷面，而剪內力則沿斷面而平行作用。其全量與外力 P 相平衡。故斷面積設為 A ，則剪內力之強為

$$q = \frac{P}{A} \dots\dots\dots(7)$$

或 $P = qA \dots\dots\dots(8)$

此與拉及壓時同樣。

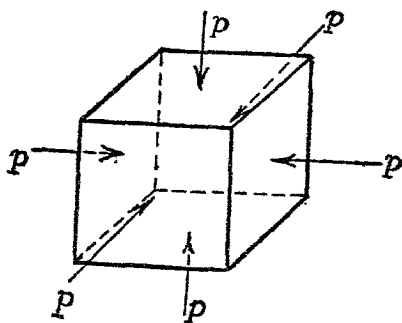
又同圖上 AB, CD 二斷面，因剪內力沿力向滑動， BD 變為 BD' 。 DD' 即滑動總量。對於 BD 之長，滑動 DD' ，故剪內力所生之歪為 $\frac{DD'}{BD}$ ，即圖中 ϕ 角 (radian)。

由呼克法則，彈性限界以內，內力與歪成正比。其常數為彈性係數。名曰橫彈性係數 (modulus of transverse elasticity 或 modulus of rigidity)。普通以 N (或 G 或 C) 表之。

$$N = \frac{q}{\phi} = \frac{P}{\phi A} \dots\dots\dots(9)$$

或 $q = N\phi \dots\dots\dots(10)$

17. 容積彈性係數. 今如第 13 圖所示, 取正方體材料, 其周圍六面上, 每單位面積, 加以平均分布之外力 p 而拉之或壓之. 則材料生相當之歪. 其結果必生容積變化. 稱為容積歪 (volumetric strain).



第 13 圖

容積歪以對於原容積單位容積之容積變化表之. 設原容積為 v , 容積變化為 δv , 則

$$\text{容積歪} = \frac{\delta v}{v}$$

由實驗結果, 容積歪與外力 p 之比為常數. 設其值為 k , 則

$$k = \frac{p}{\left(\frac{\delta v}{v}\right)} = \frac{pv}{\delta v} \dots\dots\dots (11)$$

此為容積彈性係數 (bulk modulus 或 modulus of elasticity of volume).

今設一立方體每邊長 a . 各邊變形後其長為

$$a \pm \delta a$$

其歪為 $\frac{\delta a}{a}$

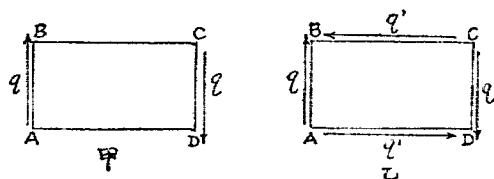
但容積變化為 $(a \pm \delta a)^3 - a^3$, 或因 δa 為甚小, 略為

$$\pm 3a^2\delta a$$

故容積歪為 $\frac{3a^2\delta a}{a^3} = 3 \cdot \frac{\delta a}{a}$

即容積歪為直線歪之三倍.

18. 單純剪與共衡剪. 今如第14圖甲所示, 一矩形體 $ABCD$, 受剪力, 其強為 q . 若僅有 AB , DC 二平行面上之一對剪力, 則物體必不能平衡. 蓋此二力成一偶力, 有迴轉能率 (turning



第 14 圖

moment) 故也。此時若須平衡，則不得不另有一相反等大之能率以與之抵抗。故 AD, BC 二平行面上亦必另有一剪力之存在。設其強為 q' ， $ABCD$ 與紙面直角之厚為 t ，則 AB, BC, CD, DA 四面上各力為

$$AB.t.q, BC.t.q', CD.t.q, DA.t.q'.$$

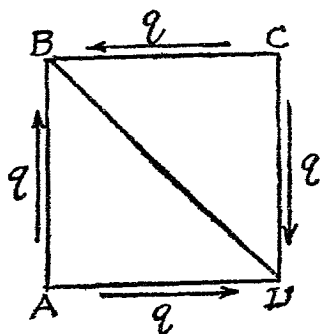
二偶力之能率必相等。

$$\therefore AB.t.q \times BC = BC.t.q' \times AB$$

$$\therefore q = q'$$

此 q, q' 二剪力曰共衡剪 (complementary shear stresses)。第 14 圖甲所示僅有相等強 q 之剪內力作用者，曰單純剪 (simple shear)。

第 15 圖上 $ABCD$ 正方體各邊長 s ，紙面直角之



第 15 圖

厚 t . 今想 BCD 之平衡. 將 q 分解爲對角線 BD 之垂直與平行二分力. 則前者即垂直於 BD 面之力爲 $2qst \cdot \cos 45^\circ = 2 \frac{qst}{\sqrt{2}}$. 但 BD 面積爲 $BD \times t$ 即 $\sqrt{2} \cdot st$. 故 BD 上垂直內力 p_n 爲

$$p_n \times \sqrt{2} \cdot st = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot qst$$

∴

$$p_n = q$$

此 p_n 對於 BD 面爲壓內力. 同樣可知 AC 面上拉內力亦等於 q .

又後者即平行於 BD 或 AC 之分力，易知其爲零。故單純剪對於剪力之 45° 傾斜面上生拉內力或壓內力。其值與剪力之強相等。

19. 各種彈性係數間之關係。彈性係數有縱彈性係數，橫彈性係數，及容積彈性係數之三種，三者間常有一定之關係。

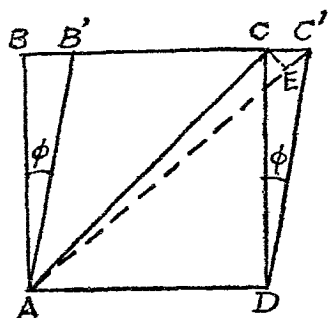
今設第 16 圖上 $ABCD$ 立方體受單純剪，其變形後爲 $AB'C'D$ 。則

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{CD} = \phi = \frac{q}{N}$$

對角線 AC 之伸長爲 EC' ，其拉伸歪爲

$$\begin{aligned} \frac{EC'}{AC} &= \frac{CC' \cdot \cos 45^\circ}{CD \cdot \sec 45^\circ} = \frac{CC' \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{CD \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{CC'}{CD} = \frac{1}{2} \cdot \phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{N} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{N} \quad (\S 18). \end{aligned}$$

對角線 AC 伸長而 BD 短縮。其內力強相等 (§18)，各設爲 p 。今 AC 上拉內力 p 單獨作用時，伸長爲 $\frac{p}{E}$ 。但 BD 上同時有拉內力 p ，使其直角方向



第 16 圖

即 AC 上變形增加 $\frac{1}{m} \cdot \frac{p}{E}$ (§14). 故 AC 上總伸長為

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{N} = \frac{p}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

$$\therefore \frac{N}{E} = \frac{m}{2(m+1)} \dots\dots\dots(12)$$

今又設第13圖上, 一立方體各面受壓力強 p . 各邊短縮 $\frac{p}{E}$. 但各邊同時又因其垂直方向上二對力之作用, 其伸長為 $2 \times \frac{1}{m} \cdot \frac{p}{E}$ (§14). 故每邊總歪為

$$\frac{p}{E} \left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

而容積歪爲

$$3 \cdot \frac{p}{E} \left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

由定義 (§17),

$$\frac{p}{k} = 3 \cdot \frac{p}{E} \left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

$$\therefore \frac{k}{E} = \frac{m}{3(m-2)} \dots\dots\dots(13)$$

由 (12) 與 (13), $E = \frac{9kN}{N+3k} \dots\dots\dots(14)$

$$N = \frac{mE}{2(m+1)} \dots\dots\dots(15)$$

$$k = \frac{mE}{3(m-2)} \dots\dots\dots(16)$$

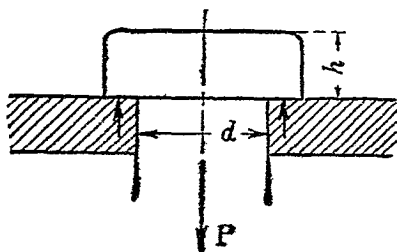
若 $m=3$, 則 $N = \frac{3}{8}E$, $k = E$

若 $m=4$, 則 $N = \frac{2}{5}E$, $k = \frac{2}{3}E$

故包生比若已知時, 由一種彈性係數之值可

求他種之彈性係數。一般縱彈性係數由實驗求得。

例 1. 圖示之鋼製螺帽釘 (bolt), 支持 10 噸荷重。求頭高與桿直徑。但鋼之可容內力, 拉伸時為 14,000 lb./sq. in., 剪斷時為 11,000 lb./sq. in.



第 17 圖

釘之桿部受拉力, 若略去自重, 則 $A = \frac{P}{p_t}$.

但 $A = \frac{\pi}{4} d^2$, $P = 10 \text{ 噸} = 22,400 \text{ lb.}$,

$$p_t = 14,000 \text{ lb./sq. in.}$$

$$\therefore d = \sqrt{\frac{4 \times 22400}{3.14 \times 14000}} = 1.43 \text{ 吋} \text{ 約 } 1\frac{7}{16} \text{ 吋.}$$

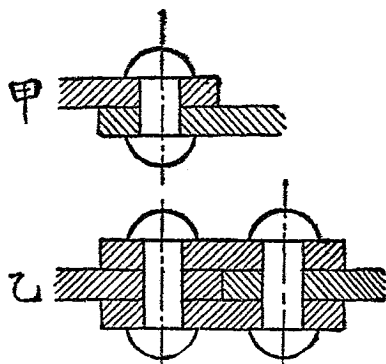
次釘頭中央部受桿部之拉力, 而周圍部受向上之支持力。故周圍部適當之處, 高 h 之圓筒

形表面上受剪內力。故

$$A = \pi dh, P = 22,400 \text{ lb.}, p_s = 11,000 \text{ lb./sq. in.}$$

$$\therefore h = \frac{22400}{3.14 \times 1.43 \times 11000} = 0.45 \text{ 吋} \doteq \frac{1}{2} \text{ 吋.}$$

例 2. 鑄釘 (rivet) 一般受剪作用。將二板重疊接合時，稱曰疊接縫 (lap joint)，鑄釘僅於兩板接觸部斷面上生剪內力。若將板端對接，兩側重以縫板 (butt straps) 時，稱曰對接縫 (butt joint)。此時板與縫板接觸部二斷面上鑄釘生剪內力。前者曰單剪 (single shear)，後者曰複剪 (double shear)。



第 18 圖

今鑼釘直徑 $\frac{3}{4}$ 吋，受拉力 12 噸時，須用幾個之釘？但釘為軟鋼，其可容剪內力為 8,500 lb./sq. in.

單剪時，釘數設為 n ，則生剪內力之斷面數亦為 n 。

$$\therefore A = n \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{3.14}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 n = 0.4422n$$

但 $p_s A = P$,

故 $0.4422n = \frac{12 \times 2240}{8500} = 3.16$

$$\therefore n = \frac{3.16}{0.442} = 7.16$$

約須 8 個。

複剪時，每釘有二抵抗斷面，故

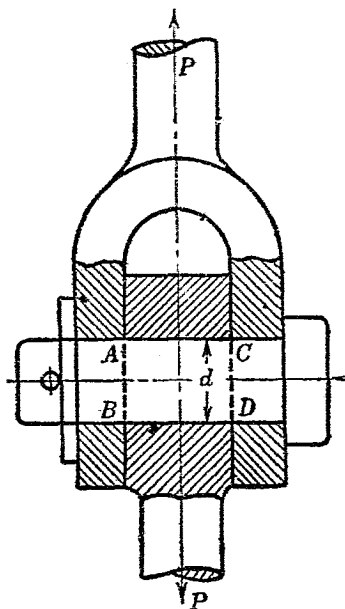
$$A = 2n \frac{\pi}{4} d^2 = 2n \cdot \frac{3.14}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.884n$$

$$\therefore 0.884n = 3.16 \quad \therefore n = 3.58$$

約須 4 個。

例 3. 第 19 圖示之釘 (pin)，受外力 P 時， AB ， CD 二斷面受剪內力。今 p 為 12 噸，釘之可容剪

內力爲 8,000 lb./sq. in. 求釘之所需直徑幾何.



第 19 圖

所要直徑設爲 d , 則

$$A = 2 \times \frac{\pi}{4} d^2$$

而

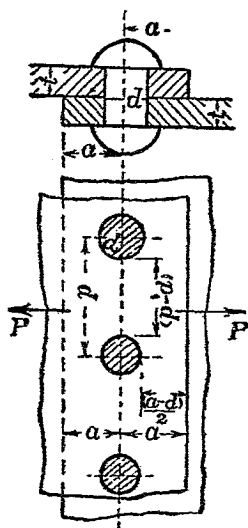
$$p_s = \frac{P}{A}$$

∴

$$d^2 = \frac{12 \times 2240 \times 4}{2 \times 3.14 \times 8000} = 2.14$$

∴ $d = 1.46$ 吋, 約 $1\frac{1}{2}$ 吋.

例 4. 圖示之鑄釘板上加外力拉之, 因釘與板之孰強而生破壞於其中一者. 今釘直徑 d , 板厚 t , 板與釘為等強時, 所要釘中心間距離 (pitch) 及釘中心至板邊緣之距離各幾何?



第 20 圖

釘受剪內力, 故每釘所可支持外力為

$$P_1 = p_s A = \frac{\pi}{4} d^2 p_s$$

釘與釘間斷面爲寬 $(p-d)$, 厚 t , 故板之可支持外力爲

$$P_2 = p_t A = (p-d)tp_t$$

又釘一個將寬 $(a - \frac{d}{2})$ 之板支持於二處。故板之支持外力爲

$$P_3 = p_s A = 2\left(a - \frac{d}{2}\right)tp_s$$

此三個 P 之值相等。由此可求 p 及 a 之值。但鋼之 p_s 約爲 p_t 之 0.8 倍。

$$\frac{\pi}{4}d^2p_s = (p-d)tp_t = 2\left(a - \frac{d}{2}\right)tp_s$$

$$p-d = \frac{\pi}{4}d^2p_s \cdot \frac{1}{tp_t} = \frac{3.14}{4} \cdot \frac{d^2}{t} \cdot \frac{p_s}{p_t}$$

或
$$p = d + \frac{3.14}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{d^2}{t} = d \left(1 + \frac{3.14}{5} \cdot \frac{d}{t}\right)$$

又
$$a - \frac{d}{2} = \frac{\pi}{4}d^2p_s \cdot \frac{1}{2tp_s} = \frac{3.14}{4} \cdot \frac{d^2}{2t}$$

或
$$a = \frac{d}{2} + \frac{3.14}{4} \cdot \frac{d^2}{2t} = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{3.14}{4} \cdot \frac{d}{t}\right)$$

今設
$$d = 2t,$$

$$\text{則} \quad p = d \left(1 + \frac{3.14}{5} \times 2 \right) = 2.26d$$

$$a = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{3.14}{4} \times 2 \right) = 1.3d$$

例 5. 某材料之楊氏係數為 6000 噸/平方吋，其橫彈性係數為 2300 噸/平方吋。求其容積彈性係數。又一圓棒直徑 1 吋，長 10 呎，伸長 0.1 吋時，其傍側面縮小幾何？

$$\text{由公式 (15)} \quad N = \frac{mE}{2(m+1)}$$

$$\frac{E}{N} = \frac{2(m+1)}{m} = 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

$$\therefore \quad \frac{6000}{2300} = 2 \times \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

$$\text{由此} \quad m = \frac{23}{7}$$

$$\text{再由公式 (16)} \quad k = \frac{mE}{3(m-2)} = \frac{E}{3 \left(1 - \frac{2}{m} \right)}$$

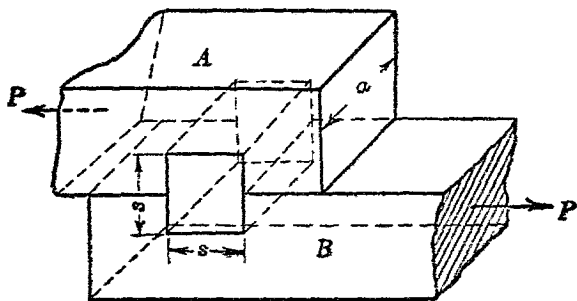
$$= \frac{6000}{3 \left(1 - \frac{14}{23} \right)} = 5111 \text{ 噸/平方吋.}$$

$$\text{橫側之歪} = \frac{7}{23} \times \frac{0.1}{12 \times 10}$$

$$\therefore \text{傍側面縮小} = \frac{7}{27600} = 0.000254 \text{ 吋.}$$

問 題

1. 互相以平面接觸之 A, B 二物體間, 有正方形斷面之楔 (wedge) C 插入, 以結合 A, B . 今以 10 噸之力拉 A, B 時, 楔上最大內力不得過 8000 lb./sq. in., 問楔之斷面幾何? 但楔長 2 吋.

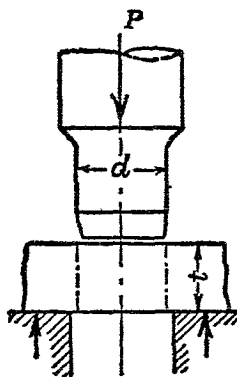


第 21 圖

2. 寬 3 吋, 厚 $\frac{1}{2}$ 吋之鋼板二塊, 以疊接法接合之. 鋼鑼釘直徑為 1 吋. 求此鑼釘所能耐之最

大拉力。但鋼之最大剪內力爲最大拉內力之0.8倍，而最大拉內力爲28噸/平方吋。

3. 鋼板，鐵板上穿孔時，以等於孔徑之硬鋼圓棒壓於板上，由剪斷作用而穿孔 (punch)。今厚 $\frac{3}{4}$ 吋之鋼板上欲穿直徑1吋之孔時，問須要壓力幾何？但鋼之最大剪內力爲22噸/平方吋。



第 22 圖

4. 直徑 0.750 吋，高 1.245 吋之鑄鐵短圓柱，受壓縮荷重 21.2 噸而破壞。其破壞面與底面成 59 度之角。求最大壓內力，破壞面上剪內力，及最大剪內力。以噸/平方吋表之。

第四章

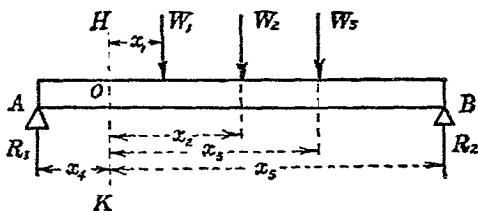
樑

20. 樑之平衡. 一般對於自己縱軸, 受斜向之外力者曰樑 (beam). 作用於樑之外力為荷重與反作用力 (reaction). 其垂直於縱軸之分力使樑生彎曲 (bending).

實際上樑多成水平, 而荷重即為重力. 故視樑為水平, 外力為垂直較便. 且無特別申明時, 若視樑為無重量, 則此便法無何妨礙.

第23圖上兩端支持之樑, 垂直於軸之外力為 W_1, W_2, W_3 等. 兩支點上必生 R_1, R_2 之反作用力, 與上之外力相平衡.

物體之平衡條件為諸力垂直分力之代數和與水平分力之代數和各等於零, 且同時對於任一點諸力之能率之代數和亦為零.



第 23 圖

今外力均垂直，而水平分力不存在。故滿足於第一條件時，必

$$W_1 + W_2 + W_3 - R_1 - R_2 = 0$$

或
$$W_1 + W_2 + W_3 - R_1 = R_2$$

設樑中任一斷面 HK 中任意一點 O ，取諸力對於此點之能率 (moment)，則滿足於第二條件時，必

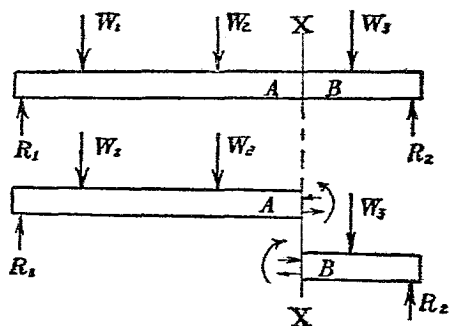
$$W_1x_1 + W_2x_2 + W_3x_3 + R_1x_4 - R_2x_5 = 0$$

或
$$W_1x_1 + W_2x_2 + W_3x_3 + R_1x_4 = R_2x_5$$

故外力作用之樑若在平衡狀態時，上二條件式為必要。由第一條件式視之，則斷面右方諸力之代數和等於斷面左方諸力之代數和。由

第二條件式，則斷面右方諸力能率之代數和等於斷面左方諸力能率之代數和。

21. 剪力及彎曲能率. 第24圖示外力作用之樑中，假想一斷面 XX ，分樑為 A, B 二部。則此二部亦各平衡。然由前節斷面兩側力之代數和與其能率代數和皆各相等。故該斷面上內力，由右方諸力所生者與由左方諸力所生者，必大小同而方向反也。故欲知內力大小時，僅就右或左任一側研究其外力之作用即可。



第 24 圖

今使 A 部平衡之力為外力 W_1, W_2 ，及 R_1 與斷面 XX 上之內力。物體因外力作用必生歪與內

力，故樑受外力時，亦必生歪，即起彎曲。而與此屈曲相當之內力起於斷面 XX ，可視為 B 部作用於 A 部上之力也。

水平分力之代數和為零，今外力無水平分力，故內力之水平分力之代數和必為零。然斷面為垂直面，故水平力必垂直於斷面，而為拉或壓之作用。此條件示作用於斷面 XX 上縱內力之代數和必為零。

次垂直分力之代數和必為零。即外力與內力垂直分力之代數和須為零。作用於 A 部之外力向下，為 $(W_1 + W_2 - R_1)$ ，故 B 部作用於 A 部之力須向上而等於 $(W_1 + W_2 - R_1)$ 。此力與斷面平行，對於斷面成剪內力。即作用於斷面一側諸垂直力生剪內力於斷面上。其代數和稱為作用於該斷面之剪力 (shearing force)。

由上二條件觀之，斷面 XX 上縱內力與剪內力同時作用。二者合成而為彎內力 (bending stress)。

又平衡之第二條件謂諸力之能率之代數和爲零。今就斷面 XX 上任一點，因剪內力能率爲零，故斷面左方外力能率之代數和等於作用於斷面上縱內力能率之代數和。

任意一斷面之一側諸外力對於該斷面之能率之代數和，稱曰作用於該斷面之彎曲能率 (bending moment)。作用於該斷面上縱內力之能率之代數和，稱曰抵抗能率 (moment of resistance)。彎曲能率與抵抗能率相平衡，大小相等而方向相反。

加荷重於樑時，所生彎曲能率及剪力之大小，沿樑中各斷面而異其值。取樑之長爲橫坐標，彎曲能率或剪力之值爲縱坐標時，可得圖法的表示。如此所得線圖，稱曰彎曲能率圖 (bending moment diagram) 或剪力圖 (shearing force diagram)。

22. 樑與荷重之種類。作用樑上之彎曲能率與剪力之大小對於樑長之變化，因樑之支持

法與外力性質而異。若同一大小之樑，同總量之荷重作用時，亦因支持方法與荷重分布狀況而樑之強弱有不同者。

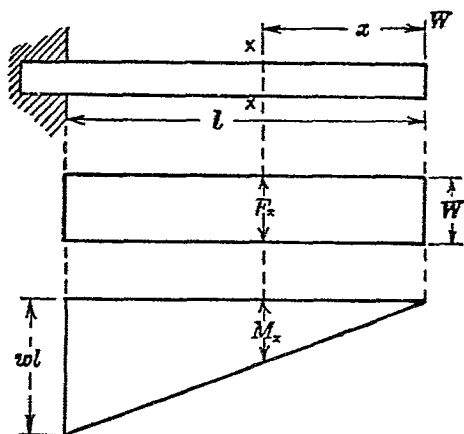
樑之支持法可分三種。(a) 固着樑之一端，其他端自由者，稱曰突出樑 (cantilever)。(b) 有二個支點者為普通種類，分為支持樑 (supported beam) 與固着樑 (fixed beam 或 built-in beam 或 encastré beam) 二種。(c) 有三個以上之支點者曰連續樑 (continuous beam)。

荷重可分二種。若作用於樑之跨徑 (span) 中甚小部者，可視為集中於一點或數點。稱曰集中荷重 (concentrated load)。若連續作用於樑之全長或一部者，稱為分布荷重 (distributed load)。分布荷重中普通為分布狀態均一之樑，稱曰均布荷重 (uniform load)。

23. 突出樑。研究樑時有二要件。一為樑之支持法及荷重之作用法所生之彎曲能率與剪力等外部狀態；一為內部所生之內力與抵抗能

率等內部狀態是也。今先就外力諸關係研究之。

(1) 有一端上集中荷重者(第 25 圖)。



第 25 圖

樑之自由端 (free end) 上有集中荷重 W 時, 離荷重任意距離 x 處斷面 XX 上剪力及彎曲能率可求之如次。斷面右方僅有荷重 W 向下作用, 故剪力在任何斷面上為一定之值 W 。因之剪力圖為高 W 之矩形。而

$$F_x = W \dots \dots \dots (17)$$

次該斷面上彎曲能率之值 M_x 爲

$$M_x = Wx \dots \dots \dots (18)$$

故 M_x 與 x 成比例，在固着端 (fixed end) 上爲最大。有最大值 M_0 爲

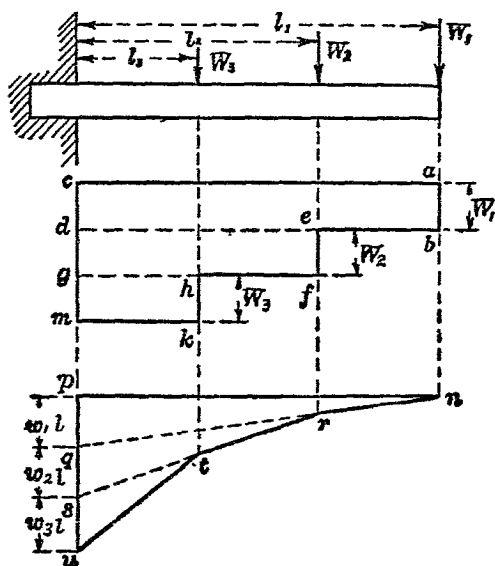
$$M_0 = Wl \dots \dots \dots (18a)$$

圖上爲直角三角形，自由端之高爲零，而固着端之高爲 M_0 。

剪力圖與彎曲能率之圖，正負符號之定法全爲任意。上圖中剪力以將右部自左部剪下者爲正，而彎曲能率以時針方向者爲正。

樑中一斷面上作用之彎曲能率與其所生內力相比例，故若樑有均一斷面時，當彎曲能率最大之斷面上內力最大。此最大內力之斷面在全樑中爲最危險，故稱曰危險斷面 (dangerous section)。本項中固着端之斷面即危險斷面。論樑之強弱時，求危險斷面之內力即可。

(2) 有多數集中荷重者(第26圖)。



第 26 圖

如圖所示 W_1, W_2, W_3 為集中荷重。其與固着端之距離各為 l_1, l_2, l_3 。此時可視為上項多數同時起生者。故剪力圖與彎曲能率圖將前項線圖重合而得。

剪力圖對於 W_1 為 $abcd$ ，對於 W_2 為 $efgd$ ，對於 W_3 為 $hkmg$ 。故全樑之剪力圖為 $abefhkmc$ 。以式示之如下：

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ 大於 } l_2 \text{ 時,} \\ x \text{ 在於 } l_2 \text{ 與 } l_3 \text{ 間時,} \\ x \text{ 小於 } l_3 \text{ 時,} \end{array} \right\} \begin{array}{l} F_x = W_1 \\ F_x = W_1 + W_2 \\ F_x = W_1 + W_2 + W_3 \end{array} \dots\dots(19)$$

彎曲能率圖對於荷重 W_1 爲 npq , 對於 W_2 爲 rqs , 對於 W_3 爲 tsu . (此等彎曲能率圖沿縱直線而表示, 故 qr 與 st 雖傾斜, 其縱長仍與水平同.) 故全樑之線圖爲 $nrtup$.

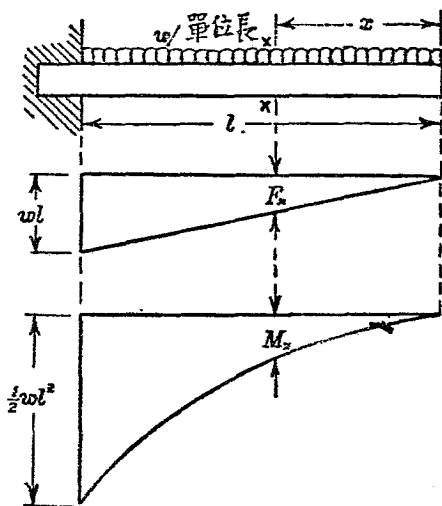
$$\left. \begin{array}{l} x \text{ 大於 } l_2 \text{ 時,} \\ x \text{ 在 } l_3 \text{ 與 } l_2 \text{ 間時,} \\ x \text{ 小於 } l_3 \text{ 時,} \end{array} \right\} \begin{array}{l} M_x = W_1(l_1 - x) = W_1l_1 - W_1x \\ M_x = W_1(l_1 - x) + W_2(l_2 - x) \\ \quad = W_1l_1 + W_2l_2 - (W_1 + W_2)x \\ M_x = W_1(l_1 - x) + W_2(l_2 - x) \\ \quad \quad + W_3(l_3 - x) \\ \quad = W_1l_1 + W_2l_2 + W_3l_3 \\ \quad \quad - (W_1 + W_2 + W_3)x \end{array} \dots\dots(20)$$

最大彎曲能率在於 $x=0$ 處即固着端上.

$$M_0 = W_1l_1 + W_2l_2 + W_3l_3 \dots\dots\dots(20a)$$

(3) 樑全長上有均布荷重者(第27圖).

突出樑全長上有均布荷重時, 就隔離自由端 x 處之 XX 斷面論之, 則其右方每單位長有 w 荷重之作用, 故 x 長共有 wx 荷重, 而



第 27 圖

$$F_x = wx \dots \dots \dots (21)$$

即剪力與 x 成比例。其線圖為圖示之三角形，固着端之剪力最大，其值為

$$F_x = wl \dots \dots \dots (21a)$$

次因數多力之能率相等於合成力之能率。故彎曲能率可視為 wx 之集中荷重作用於 $\frac{1}{2}x$ 之距離處而生者也。即

$$M_x = wx \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}wx^2 \dots \dots \dots (22)$$

上式又可由微積分觀念證明之。蓋

$$dF_x = w \quad \therefore F_x = \int_0^x w dx = wx$$

$$dM_x = F_x dx \quad \therefore M_x = \int_0^x wx dx = \frac{1}{2}wx^2$$

(22) 式爲拋物線 (parabola) 式。其彎曲能率線圖爲拋物線。彎曲能率之最大值生於固着端。而

$$M_0 = \frac{1}{2}wl^2 \dots \dots \dots (22a)$$

或荷重全量設爲 W ，則 $W = wl$ ，

$$\therefore M_0 = \frac{1}{2}Wl \dots \dots \dots (22b)$$

(4) 均布荷重與集中荷重兼有者。

此時將前項計算合加之即可。即剪力與彎曲能率爲

$$F_x = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + wx \dots \dots \dots (23)$$

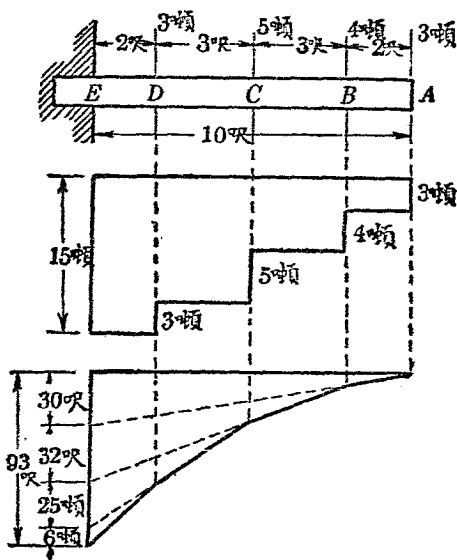
$$M_x = W_1(l_1 - x) + W_2(l_2 - x) + W_3(l_3 - x) \\ + \dots + \frac{1}{2}wx^2 \dots \dots \dots (24)$$

其最大值生於固着端，各爲

$$F_0 = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + wl \dots \dots \dots (23a)$$

$$M_0 = W_1 l_1 + W_2 l_2 + W_3 l_3 + \dots + \frac{1}{2} wl^2 \dots \dots (24a)$$

例 1. 圖示突出樑上加荷重時，求剪力圖與彎曲能率圖。并求最大剪力與最大彎曲能率之值。



第 28 圖

$$F_B = 3 \text{ 噸}$$

$$F_C = 3 + 4 = 7 \text{ 噸}$$

$$F_D = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ 噸}$$

$$F_0 = 3 + 4 + 5 + 3 = 15 \text{ 噸}$$

$$M_B = 3 \times 2 = 6 \text{ 呎噸}$$

$$M_G = (3 \times 5) + (4 \times 3)$$

$$= 15 + 12 = 27 \text{ 呎噸}$$

$$M_D = (3 \times 8) + (4 \times 6) + (5 \times 3)$$

$$= 24 + 24 + 15 = 63 \text{ 呎噸}$$

$$M_0 = M_E = (3 \times 10) + (4 \times 8)$$

$$+ (5 \times 5) + (3 \times 2)$$

$$= 30 + 32 + 25 + 6 = 93 \text{ 呎噸}$$

例 2. 前題中若樑每呎重 $\frac{1}{5}$ 噸時，最大剪力及最大彎曲能率之值如何？

樑自身重為均布荷重。故將集中荷重與均布荷重合成之。

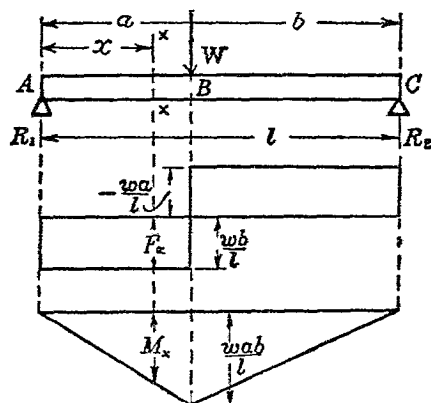
$$F_0 = 15 + \left(\frac{1}{5} \times 10\right) = 15 + 2 = 17 \text{ 噸}$$

$$M_0 = 93 + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times 10^2 \right) = 93 + 10 = 103 \text{ 呎噸.}$$

24. 支持樑. (1) 有一個集中荷重者(第29圖). 圖中 ABC 為樑, A 及 C 為支點. 二點間任意一點 B 處有集中荷重 W . 此時 A 及 C 之支點僅受外力作用, 樑端彎曲時對於方向之變動, 毫無影響. 此謂之支持樑. 其兩端毫無彎曲能率之作用.

由平衡之條件, 求支點 A, C 上之反作用力.

$$-R_1 + W - R_2 = 0 \text{ (力之代數和)}$$



第 29 圖

$Wa - R_2 l = 0$ (對於 A 點能率代數和)

$$\therefore R_1 = W \frac{b}{l}, \quad R_2 = W \frac{a}{l} \dots\dots\dots(25)$$

由此即可求剪力與彎曲能率。

剪力如下：

$$\left. \begin{array}{l} AB \text{ 間 } (F_x)_1 = R_1 = W \frac{b}{l} \\ BC \text{ 間 } (F_x)_2 = -R_2 = -W \frac{a}{l} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

彎曲能率如下：

$$\left. \begin{array}{l} AB \text{ 間 } (M_x)_1 = R_1 x_1 = W \frac{b}{l} x_1 \\ BC \text{ 間 } (M_x)_2 = R_1 x_2 - W(x_2 - a) \\ \qquad \qquad \qquad = Wa - (W - R_1)x_2 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

故 $(M_x)_1$ 當 x_1 最大即 $x_1 = a$ 時為最大值。

$$M_0 = M_B = W \frac{ab}{l} \dots\dots\dots(27a)$$

此值與 $(M_x)_2$ 中 x_2 最小時即 $x_2 = a$ 時之值相等。

將此等值表於線圖即得第 29 圖。剪力圖由二矩形而成。於荷重作用點上自正移於負，而正面積與負面積相等。彎曲能率為三角形，荷

重作用點上有最大值。

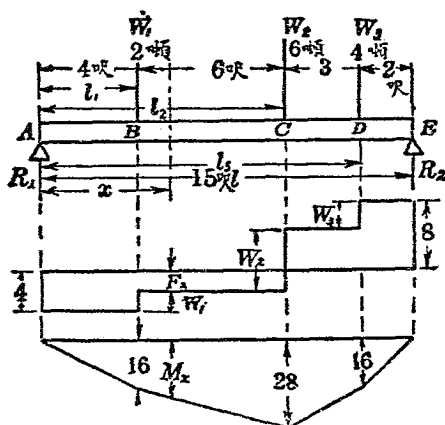
特別情形. 支持樑上 W 在支點中央時最普通. 此時 $a=b=\frac{l}{2}$.

$$\therefore R_1 = R_2 = \frac{W}{2} \dots\dots\dots(25a)$$

$$(F_x)_1 = \frac{W}{2}, \quad (F_x)_2 = -\frac{W}{2} \dots\dots\dots(26a)$$

$$(M_x)_1 = \frac{W}{2} x_1, \quad (M_x)_2 = W \left(a - \frac{x_2}{2} \right) \dots\dots\dots(27b)$$

$$M_0 = M_B = \frac{1}{4} Wl \dots\dots\dots(27c)$$



第 30 圖

(2) 有多數集中荷重者(第 30 圖).

圖示集中荷重三個時與他數集中荷重時,其方法相同.

由平衡條件,

$$-R_1 + W_1 + W_2 + W_3 - R_2 = 0 \text{ (力)}$$

$$R_2 l - W_1 l_1 - W_2 l_2 - W_3 l_3 = 0 \text{ (能率)}$$

由此得反作用力為

$$R_1 = \frac{W_1(l-l_1) + W_2(l-l_2) + W_3(l-l_3)}{l}$$

$$R_2 = \frac{W_1 l_1 + W_2 l_2 + W_3 l_3}{l}$$

剪力大小當集中荷重時,於外力作用點上始有變化. 外力與外力之間為一定值. 而彎曲能率之大小於外力與外力之間,亦與樑長相比例而變化. 故線圖為直線所成. 其作法先求外力作用點上彎曲能率之值即可,而後以直線連結圖上各點即得.

$$M_A = 0$$

$$M_B = R_1 l_1$$

$$M_C = R_1 l_2 - W_1(l_2 - l_1)$$

$$M_D = R_1 l_3 - W_1(l_3 - l_1) - W_2(l_3 - l_2)$$

$$M_E = 0$$

例 3. 第 30 圖中附記數值試計算之。

$$R_1 = \frac{2 \times 11 + 6 \times 5 + 4 \times 2}{15} = 4 \text{ 噸}$$

$$R_2 = \frac{2 \times 4 + 6 \times 10 + 4 \times 13}{15} = 8 \text{ 噸}$$

剪力如下：

$$AB \text{ 間, } F_x = R_1 = 4 \text{ 噸}$$

$$BC \text{ 間, } F_x = R_1 - W_1 = 4 - 2 = 2 \text{ 噸}$$

$$CD \text{ 間, } F_x = R_1 - W_1 - W_2 = 4 - 2 - 6 = -4 \text{ 噸}$$

$$DE \text{ 間, } F_x = R_1 - W_1 - W_2 - W_3 \\ = 4 - 2 - 6 - 4 = -8 \text{ 噸}$$

彎曲能率如下：

$$M_A = 0$$

$$M_B = R_1 l_1 = 4 \times 4 = 16 \text{ 呎噸}$$

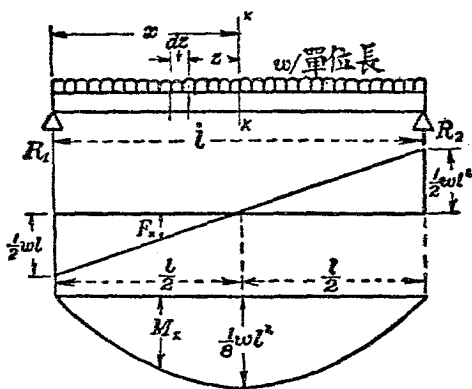
$$M_C = R_1 l_2 - W_1(l_2 - l_1) \\ = 4 \times 10 - 2 \times 6 = 40 - 12 = 28 \text{ 呎噸}$$

$$M_D = R_1 l_3 - W_1(l_3 - l_1) - W_2(l_3 - l_2)$$

$$= 4 \times 13 - 2 \times 9 - 6 \times 3 = 52 - 18 - 18 = 16 \text{ 呎噸}$$

$$M_E = 0$$

(3) 支點間全長上有均布荷重者(第31圖).



第 31 圖

均布荷重每單位長上設為 w ，則跨徑全長 l 上總荷重為 wl 。此時荷重分布與樑之支持法對於中央垂直線成對稱(symmetry)。故 R_1 與 R_2 為同大。即

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{2}wl \dots\dots\dots(28)$$

剪力在離 R_1x 處之橫斷面 XX 上為

$$F_x = R_1 - wx = \frac{1}{2}wl - wx \dots\dots\dots(29)$$

故剪力與 x 相比例而變化，其圖為傾斜直線。

$x = \frac{l}{2}$ 處為零，而變符號。極近支點之斷面處

$$F_0 = \frac{1}{2}wl \text{ (或 } F_0 = -\frac{1}{2}wl) \dots\dots\dots(29a)$$

彎曲能率在 XX 斷面上為

$$\begin{aligned} M_x &= R_1x - wx \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2}wlx - \frac{1}{2}wx^2 \\ &= \frac{1}{2}wx(l-x) \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

此關係為拋物線， M_x 在跨徑中央即 $x = \frac{l}{2}$ 處為最大。其值為

$$M_0 = \frac{1}{8}wl^2 \dots\dots\dots(30a)$$

上之結果以微積分求之如下。

斷面 XX 左方距離 z 處設有 dz 之長。其上之荷重為 $w dz$ 。其對於 XX 之能率為 $z \cdot w dz$ 。

$$\therefore M_x = R_1 x - \int_0^x w z dz = \frac{1}{2} w l x - \frac{1}{2} w x^2 = \frac{1}{2} w x (l - x)$$

M_x 之最大值必滿足於

$$\frac{dM_x}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dM_x}{dx} = \frac{1}{2} w l - w x = 0$$

即 $x = \frac{1}{2} l$ 時, M_x 為最大, 其值易知其為 $\frac{1}{8} w l^2$.

(4) 支點間一部有均布荷重者(第32圖).

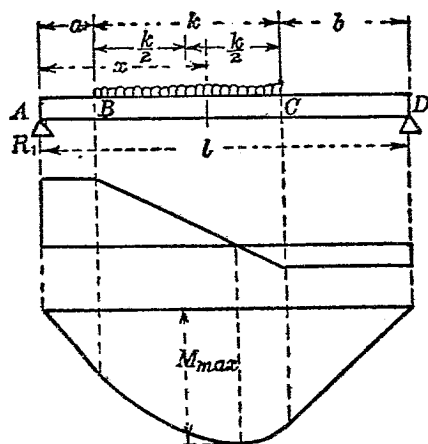
圖示由兩支點相隔 a, b 處有均布荷重之兩端, 其長 k , 單位長上荷重為 w . 則荷重全量為 wk .

$$-R_1 + wk - R_2 = 0$$

$$R_1 l - wk \left(b + \frac{k}{2} \right) = 0$$

$$\therefore R_1 = \frac{wk}{l} \left(b + \frac{k}{2} \right), \quad R_2 = \frac{wk}{l} \left(a + \frac{k}{2} \right) \dots \dots (31)$$

剪力如下:



第 32 圖

$$\begin{aligned}
 AB \text{ 間 } F_x &= R_1 \\
 BC \text{ 間 } F_x &= R_1 - w(x-a) \\
 CD \text{ 間 } F_x &= R_1 - wk = -(wk - R_1) = -R_2
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} AB \\ BC \\ CD \end{aligned}} \right\} \dots\dots(32)$$

故 BC 間剪力大小與 x 相比比例而變化，為傾斜直線。BC 間由正變負，通過於零。即

$$R_1 - w(x_0 - a) = 0$$

$$x_0 = a + \frac{R_1}{w} = a + \frac{k}{l} \left(b + \frac{k}{2} \right) \dots\dots\dots(32a)$$

彎曲能率如下：

$$\begin{aligned}
 AB \text{ 間 } M_x &= R_1 x \dots\dots\dots (\text{傾斜直線}) \\
 BC \text{ 間 } M_x &= R_1 x - w(x-a) \frac{(x-a)}{2} \\
 &= R_1 x - \frac{w}{2}(x-a)^2 \dots\dots\dots (\text{拋物線}) \\
 CD \text{ 間 } M_x &= R_1 x - wk \left(x - a - \frac{k}{2} \right) \\
 &= wk \left(a + \frac{k}{2} \right) - (wk - R_1) x \dots\dots (\text{傾斜直線})
 \end{aligned} \quad (33)$$

最大彎曲能率作用於剪力零之斷面上。其值爲

$$M_0 = R_1 \left\{ a + \frac{k}{2l} \left(b + \frac{k}{2} \right) \right\} \dots\dots\dots (33a)$$

特別情形。若均布荷重在跨徑中央時， $a = b$ 。

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{2} wk \dots\dots\dots (31a)$$

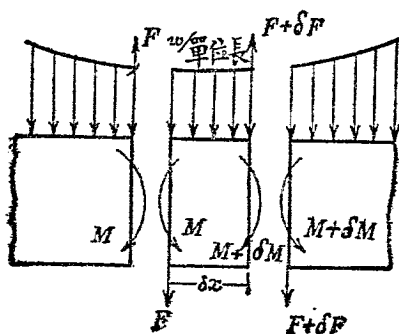
$$x_0 = a + \frac{k}{2} = \frac{l}{2} \dots\dots\dots (31b)$$

$$M_0 = \frac{wk}{2} \left(a + \frac{k}{4} \right) = \frac{wk}{4} \left(l - \frac{k}{2} \right) \dots\dots\dots (33b)$$

25. 剪力與彎曲能率之關係。今取連續分布荷重之樑之一部分，其極小長 δx 上，則荷重

可視為均一。設其單位長上荷重為 w 。長 δx 兩端之剪力設為 F 及 $F + \delta F$ ，彎曲能率設為 M 及 $M + \delta M$ ，則由力之平衡條件，

$$(F + \delta F) = F + w\delta x$$



第 33 圖

因之 $\delta F = w\delta x$ ，或 $\frac{\delta F}{\delta x} = w$ 。 δx 若為無限小時，

$$\frac{dF}{dx} = w \dots \dots \dots (34)$$

即樑長上剪力之變化率等於荷重單位長之強。若集中荷重，則荷重間無他荷重，而無剪力之變化，故剪力值為一定。若均布荷重，則 w 之值

一定，而剪力之變化率亦一定。其線圖易知其為傾斜直線。

對於自原點 x_1, x_2 距離處二斷面積分之，則

$$I_2 - I_1 = \int_{x_1}^{x_2} w dx$$

示剪力變化之總量。其值與剪力圖上 x_1, x_2 兩縱坐標間之面積相當。

次求對於此微小片左端之能率，求平衡之條件，

$$M + (F + \delta F)\delta x - w\delta x \cdot \frac{\delta x}{2} - (M + \delta M) = 0$$

略去其中二次微小量，則

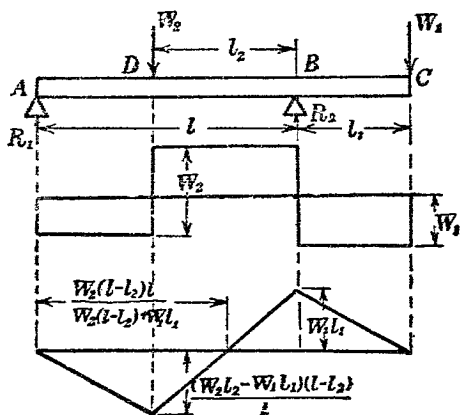
$$F\delta x - \delta M = 0 \quad \therefore \frac{\delta M}{\delta x} = F$$

若 δx 無限小時，

$$\frac{dM}{dx} = F \dots\dots\dots(35)$$

即對於樑長之彎曲能率變化率等於剪力。若集中荷重時，兩荷重間剪力一定，故彎曲能率變化率亦一定，其線圖為傾斜直線。

剪力之值通過零時，變其符號。由上式 $\frac{dM}{dx}=0$ ，故該點上彎曲能率為極大或極小。此極大值或極小值中絕對值之最大者為最大彎曲能率。此原理對於求支持梁中危險斷面之位置上，應用甚廣。而集中荷重時，則僅荷重作用點上，變化剪力之值。



第 34 圖

26. 支點外有荷重時之支持梁。上述之支持梁上，荷重均在兩支點間，而支點上彎曲能率為零。若梁之支點外突出部上有荷重時，則支

點上彎曲能率不爲零。第34圖上支點 A, B 外突出部 C 處有集中荷重 W_1 之作用。若 A, B 間無他荷重時，則 A 處反作用力因與 W_1 平衡，必向下。

A, B 間若有他荷重 W_2 ，則其值未達適當大小時， A 處反動力亦向下。 W_2 增加時， R_1 減小，後爲零而變爲向上。

由平衡條件而求反作用力，則

$$-R_1 + W_2 - R_2 + W_1 = 0$$

$$R_1 l - W_2 l_2 + W_1 l_1 = 0$$

$$\text{由此} \quad \left. \begin{aligned} R_1 &= -\frac{W_1 l_1 - W_2 l_2}{l} \\ R_2 &= \frac{W_1(l + l_1) + W_2(l - l_2)}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

故 $W_1 l_1 > W_2 l_2$ 時， R_1 向下， $W_1 l_1 = W_2 l_2$ 時， $R_1 = 0$ ， $W_1 l_1 < W_2 l_2$ 時， R_1 向上。圖所示者乃 $W_1 l_1 < W_2 l_2$ 也。

剪力之值如下：

$$AD \text{ 間} \quad F_x = R_1 = \frac{W_2 l_2 - W_1 l_1}{l}$$

$$DB \text{ 間} \quad F_x = R_1 - W_2 = -\frac{W_2(l-l_2) + W_1 l_1}{l}$$

$$BC \text{ 間} \quad F_x = R_1 - W_2 + R_2 = W_1$$

彎曲能率之值如下：

$$M_A = 0$$

$$M_D = R_1(l-l_2) = \frac{(W_2 l_2 - W_1 l_1)(l-l_2)}{l}$$

$$M_B = R_1 l - W_2 l_2 = -W_1 l_1$$

$$M_C = 0$$

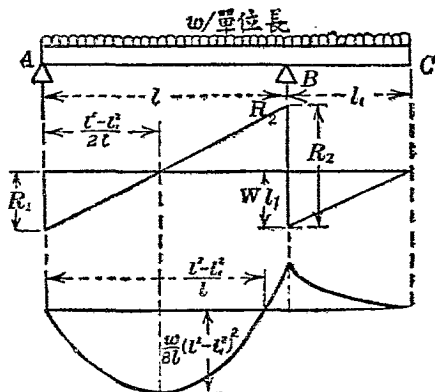
M_D 爲正而 M_B 爲負，故其間彎曲能率必有爲零之處。但線圖爲一直線，故此零點惟一。今設由 A 至該點之距爲 x_0 ，則

$$R_1 x_0 - W_2 \{x_0 - (l-l_2)\} = 0$$

$$\text{或} \quad (R_1 - W_2)x_0 + W_2(l-l_2) = 0$$

$$\text{故} \quad x_0 = \frac{W_2(l-l_2)}{W_2 - R_1} = \frac{W_2 l(l-l_2)}{W_2(l-l_2) + W_1 l_1} \dots\dots\dots(37)$$

均布荷重分布於樑之全長時如第 35 圖。此時荷重全量爲 $w(l+l_1)$ ，故



第 35 圖

$$-R_1 + w(l + l_1) - R_2 = 0$$

$$-R_2 l + w(l + l_1) \frac{l + l_1}{2} = 0$$

故

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{w(l + l_1)(l - l_1)}{2l} \\ R_2 &= \frac{w(l + l_1)^2}{2l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

(圖中 $l > l_1$, 若 $l_1 > l$, 則 R_1 爲負而向上.)

剪力大小如下:

$$F_A = R_1 = \frac{w(l^2 - l_1^2)}{2l}$$

$$F_{(B-0)} = R_1 - wl = -\frac{w(l^2 + l_1^2)}{2l}$$

$$F_{(B+0)} = R_1 - wl + R_2 = wl_1$$

剪力在 A 處爲正, B 處爲負. 故其間必有等於零之處. 然其線圖爲一直線, 故零點惟一. 設自 A 至此點之距爲 x_0 , 則

$$R_1 - wx_0 = 0 \quad \text{或} \quad \frac{w(l^2 - l_1^2)}{2l} - wx_0 = 0$$

$$\therefore x_0 = \frac{l^2 - l_1^2}{2l}$$

此點上彎曲能率爲極大或極小. 而彎曲能率之值如下:

$$AB \text{ 間} \quad M_x = R_1x - \frac{1}{2}wx^2 = \left(R_1 - \frac{1}{2}wx\right)x$$

$$BC \text{ 間} \quad M_x = R_1x - \frac{1}{2}wx^2 + R_2(x-l)$$

$$= w(l+l_1)x - \frac{1}{2}wx^2 - R_2l$$

由此求 M_B , 則 $M_B = -\frac{1}{2}wl_1^2$.

$x = x_0$ 時, 則彎曲能率爲極大或極小, 故

$$M_0 = \frac{w}{8l^2} (l^2 - l_1^2)^2$$

此值爲正，故至 B 間必有爲零之處。設 A 點至該處之距爲 x_1 ，則

$$\frac{w}{2l} (l^2 - l_1^2)x_1 - \frac{w}{2}x_1^2 = 0$$

因之 $(l^2 - l_1^2)x_1 - lx_1^2 = 0$

或 $x_1(l^2 - l_1^2 - lx_1) = 0$

故 $x_1 = 0$ 或 $x_1 = \frac{l^2 - l_1^2}{l}$

但 $x_1 = 0$ 即 A 點。

例 4. 第 36 圖上支點外有荷重之樑，求剪力圖與彎曲能率圖。并計算最大剪力與最大彎曲能率。

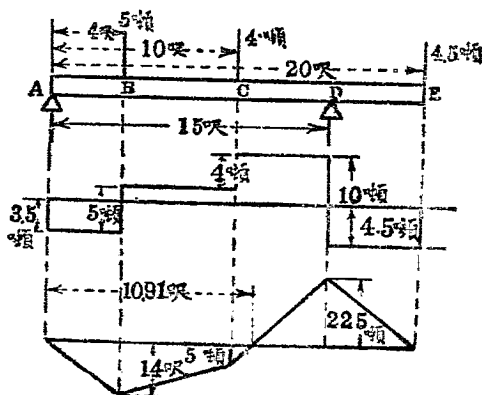
先求反作用力如下：

$$-R_1 + 5 + 4 - R_2 + 4.5 = 0$$

$$(5 \times 4) + (4 \times 10) - 15R_2 + (4.5 \times 20) = 0$$

$$\therefore R_1 = 3.5 \text{ 噸}$$

$$R_2 = 10 \text{ 噸}$$



第 36 圖

次求剪力如下：

$$AB \text{ 間 } F_x = R_1 = 3.5 \text{ 噸}$$

$$BC \text{ 間 } F_x = R_1 - 5 = -1.5 \text{ 噸}$$

$$CD \text{ 間 } F_x = R_1 - 5 - 4 = -5.5 \text{ 噸}$$

$$DE \text{ 間 } F_x = R_1 - 5 - 4 + R_2 = 4.5 \text{ 噸}$$

故最大剪力作用於 CD 間各斷面，其值為

$$F_0 = -5.5 \text{ 噸}$$

彎曲能率如下：

$$M_A = 0$$

$$M_B = 3.5 \times 4 = 14 \text{ 呎噸}$$

$$M_C = 3.5 \times 10 - 5(10 - 4) = 5 \text{ 呎噸}$$

$$M_D = 3.5 \times 15 - 5(15 - 4) - 4(15 - 10) = -22.5 \text{ 呎噸}$$

$$M_E = 0$$

故最大彎曲能率作用於 D 點，其值為

$$M_0 = -22.5 \text{ 呎噸}$$

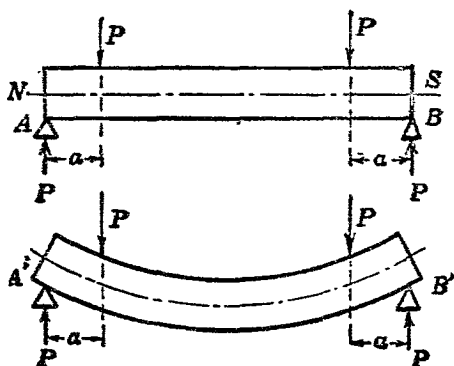
次求彎曲能率為零之位置如下：

$$3.5x_0 - 5(x_0 - 4) - 4(x_0 - 10) = 0$$

$$\therefore x_0 = \frac{60}{5.5} = 10.91 \text{ 呎}$$

27. 彎曲所生之內力。外力垂直作用於樑之橫軸使生彎曲時，則對於彎曲能率生縱內力之抵抗能率，而同時樑之各斷面上生剪內力以抵抗外力。此二種內力合成而為彎曲內力。若樑之兩端僅有偶力作用使彎曲時，則剪內力不生，僅有彎曲能率之作用。此謂之單純彎曲 (simple bending)。實際上樑一般不僅受單純彎曲，而必同生剪內力。但此剪內力較縱內力為甚小，故除特別情形外，近似的可視為僅有縱

內力作用之單純彎曲作用。

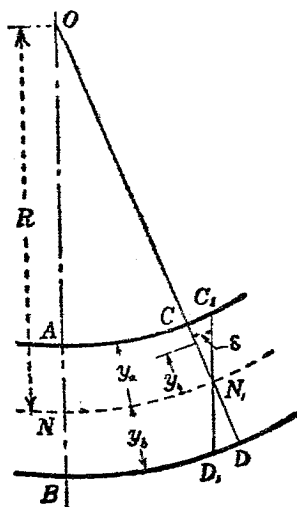


第 37 圖

第 37 圖上 AB 爲均一斷面之樑，兩端加以等大反向之偶力，則樑如 $A'B'$ 而彎曲。此時樑之上側較原長短縮，而下側較原長伸長。因之上側有壓內力而下側有拉內力之作用也明矣。如此樑之上下側生反對之歪，則其中間必有無伸縮之面之存在。此面稱曰中性面 (neutral surface)。加外力時，中性面僅受彎曲而毫無伸縮。此面互於樑之全長而與外力成直角。中性面與橫斷面相交之直線，稱曰該斷面之中性軸

(neutral axis). 故中性面爲中性軸之連續軌跡.

研究彎曲作用時,普通由下之假定爲便. 卽橫斷面(平面)當彎曲後亦仍保持其平面,且仍與樑之縱軸成直角.



第 38 圖

第 38 圖上 NN_1 爲中性面. AB, CD 爲樑中相接近之二橫斷面. 此二斷面不受外力作用時相平行. 但加荷重後樑生彎曲, 而二斷面傾斜, 其沿長相交於 O . 今通過 N_1 作 $C_1N_1D_1$ 與 AB 平行, 則

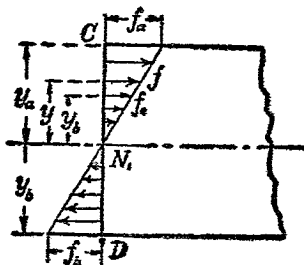
AC_1 及 BD_1 均等於 NN_1 , 即各等於 AC 及 BD 之原長。因之彎曲後, 上面縮短 CC_1 而下面伸長 DD_1 。

設彎曲所生之歪在彈性限界以內, 而 C 及 D 處內力各為 f_a 與 f_b , 則由呼克法則,

$$\overline{CC_1} = \frac{f_a \times \overline{AC_1}}{E} = f_a \cdot \frac{\overline{NN_1}}{E}$$

$$\overline{DD_1} = \frac{f_b \times \overline{BD_1}}{E} = f_b \cdot \frac{\overline{NN_1}}{E}$$

如第 39 圖所示, C 處內力為垂直壓內力, 而 D 處內力為垂直拉內力。



第 39 圖

平行於中性面之他面上, 其伸長或短縮之量與由 NN_1 至該面之距離成正比例。故 CN_1 或 N_1D 等面上任意點之內力亦與由 NN_1 至該點

距離成正比例。而內力分布狀況可以三角形表示之。今由 NN_1 相距 y 處之點上內力設為 f ，而歪為 ε ，則有下之比例式，

$$\frac{\varepsilon}{CC_1} = \frac{f}{f_a}$$

但

$$\frac{\varepsilon}{CC_1} = \frac{y}{y_a}$$

$$\therefore \frac{f}{f_a} = \frac{y}{y_a}$$

或

$$f = f_a \cdot \frac{y}{y_a} \dots\dots\dots(39)$$

若由 NN_1 單位距離處之內力設為 f_0 ，則

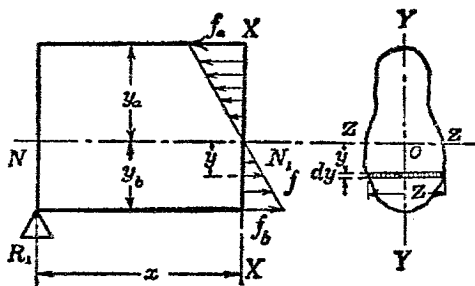
$$f_a = f_0 y_a, \quad f_b = f_0 y_b \dots\dots\dots(39a)$$

一般

$$f = f_0 y \dots\dots\dots(39b)$$

今欲示作用於斷面 XX 上彎曲能率與抵抗能率之關係，將斷面與縱內力示如第 40 圖。 NN_1 為中性面， ZZ 為中性軸。斷面 XX 上縱內力之值因與中性軸之距離而異。但取一極小部分，則可視為有均一之內力。今距中性軸 y 處一平行微小面積 a ，其上內力之強設為 f ，則

該面積上力之全量為 fa 。而此力對於中性軸之能率為 fay 。



第 40 圖

斷面 XX 由多數平行於 ZZ 軸之微小面積 a 集合而成。設此等微小面積各為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 。其上之內力各為 $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ 。自中性軸至此等微小面積之距各為 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ 。則此等微小面積上作用之力各為 $f_1 a_1, \dots, f_n a_n$ 。而其代數和必等於全斷面上作用內力之總量。由平衡條件，此等縱內力之代數和必為零，故

$$f_1 a_1 + f_2 a_2 + f_3 a_3 + \dots + f_n a_n = 0$$

但 $f = f_0 y$ ，故

$$f_0 a_1 y_1 + f_0 a_2 y_2 + f_0 a_3 y_3 + \dots + f_0 a_n y_n = 0$$

$$\text{或} \quad f_0(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \cdots + a_ny_n) = 0$$

然 f_0 爲一定值，非等於零，故上式若成立時，必

$$a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \cdots + a_ny_n = 0$$

此 $(a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n)$ 爲微小面積至中性軸之距離與微小面積之相乘積之總和。此謂之斷面積之幾何學的能率 (geometrical moment of area)。若以微積分記號表示之，則微小面積上總內力爲 $fzdy$ 。故全斷面上總內力爲 $\int_{y_b}^{y_a} fzydy$ 。

$$\therefore \int_{y_b}^{y_a} fzydy = 0$$

或

$$f_0 \int_{y_b}^{y_a} zydy = 0$$

此 $\int_{y_b}^{y_a} zydy$ 爲面積之幾何學的能率。

故樑之任意斷面上縱內力之代數和爲零時，其對於中性軸上斷面之幾何學的能率必爲零。但面積之幾何學的能率爲零之軸必通過該面積之重心，故中性軸必通過斷面之重心。

何者，設某平面形上任意軸至重心之距爲 \bar{y} ，則

$$\bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \cdots + a_n y_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}$$

故若該軸通過重心時，必 $\bar{y}=0$ ，因之 $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n = 0$ 。反之，若 $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n = 0$ ，則 \bar{y} 易知其爲零，故軸過重心。但樑假定其爲等質 (homogeneous)。

次內力對於中性軸之能率代數和即爲抵抗能率，設以 M_r 表之，則因 $f=f_0 y$ ，故

$$M_r = f_0 (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + \cdots + a_n y_n^2)$$

此 $(a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \cdots + a_n y_n^2)$ 爲對於中性軸上斷面之慣性能率 (moment of inertia)，通常以 I 表之。或以微積分記號表之，則微小面積上總計內力之能率爲

$$dM_r = (fz dy) \times y = f y z dy$$

但 $f=f_0 y$ ，

$$\therefore dM_r = f_0 z y^2 dy$$

故
$$M_r = f_0 \int_{y_b}^{y_a} zy^2 dy$$

而
$$I = \int_{y_b}^{y_a} zy^2 dy$$

$$\therefore M_r = f_0 I$$

或因
$$f_0 = \frac{f}{y}$$

$$\therefore M_r = f \frac{I}{y} \dots \dots \dots (40)$$

然抵抗能率等於對於同軸之外力能率，即等於該斷面上之彎曲能率。設彎曲能率以 M 表之，則

$$M_r = M$$

因之
$$M = f \frac{I}{y} \dots \dots \dots (41)$$

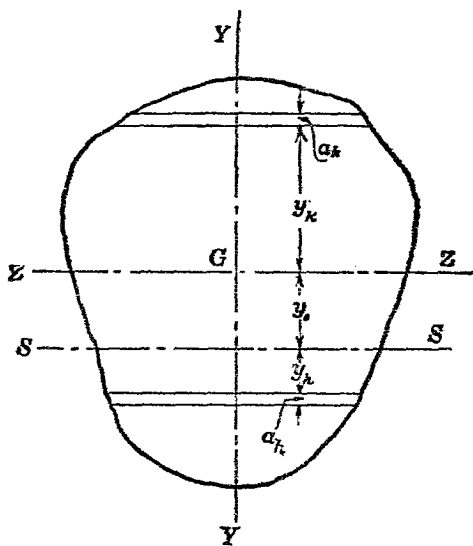
樑之最上面或最下面受最大之內力，故樑之強度以此等面上內力定之。此謂之表皮內力 (skin stress)。故

$$M = f_a \frac{I}{y_a} \text{ 或 } M = f_b \frac{I}{y_b} \dots \dots \dots (41a)$$

$\frac{I}{y_a}$ 或 $\frac{I}{y_b}$ 因樑之斷面形狀與大小而定。對於材料性質毫無關係。此謂之斷面係數(modulus of section)。通常以 Z 表之。故上式又可書之如下：

$$M = fZ \dots \dots \dots (41b)$$

28. 慣性能率。前節所述面積之慣性能率均對於中性軸即通過斷面重心之軸者也。但一般面積之慣性能率可對於任何軸而求得之。



第 41 圖

圖中 G 爲平面形重心, ZZ 爲通過重心之軸 (樑斷面上之中性軸), SS 爲相距 y_0 之他平行軸. 平面形面積設爲 A , 今分成平行於軸之多數微小面積 a_1, a_2, \dots, a_n , 則對於 ZZ 之慣性能率爲

$$I_0 = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2$$

或
$$I_0 = \int y^2 dA = \int_{y_b}^{y_a} y^2 z dy$$

對於 SS 之慣性能率同樣爲

$$\begin{aligned} I &= a_1 (y_1 \pm y_0)^2 + a_2 (y_2 \pm y_0)^2 + \dots + a_n (y_n \pm y_0)^2 \\ &= a_1 (y_1^2 \pm 2y_0 y_1 + y_0^2) + a_2 (y_2^2 \pm 2y_0 y_2 + y_0^2) + \dots \\ &\quad + a_n (y_n^2 \pm 2y_0 y_n + y_0^2) \\ &= (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2) \pm 2y_0 (a_1 y_1 + a_2 y_2 \\ &\quad + \dots + a_n y_n) + (a_1 + a_2 + \dots + a_n) y_0^2 \end{aligned}$$

但
$$\begin{aligned} a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2 &= I_0 \\ a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n &= 0 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n &= A \end{aligned}$$

故
$$I = I_0 + A y_0^2 \dots \dots \dots (42)$$

故對於通過重心之軸, 慣性能率若已知時, 則

對於他平行軸之慣性能率亦可求得。或上式變形為

$$I_0 = I - Ay_0^2 \dots\dots\dots (42a)$$

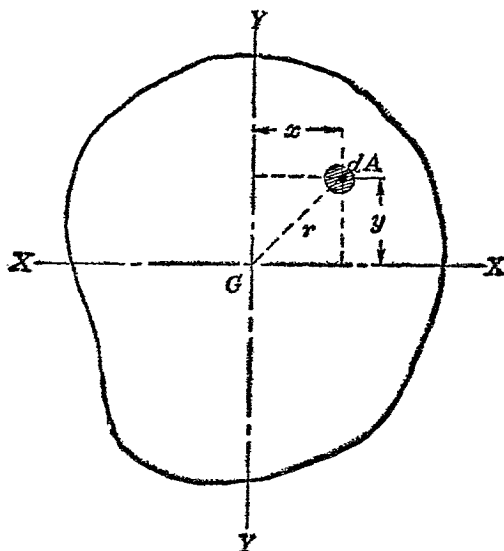
則對於任意軸之慣性能率若已知時，對於通過重心之平行軸，其慣性能率亦可求得。

$\sqrt{\frac{I}{A}}$ 稱曰對於 SS 軸，某平面形之回轉半徑 (radius of gyration)。普通以 k 表之，即

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \text{ 或 } Ak^2 = I \dots\dots\dots (43)$$

複雜平面形之慣性能率，可分成多數慣性能率已知之平面形，而用 (42) 及 (42a) 之形以求之。

極慣性能率。以上所述者乃對於平面形上之軸之慣性能率也。若對於通過平面形重心而垂直於平面之軸之慣性能率，則稱曰極慣性能率 (polar moment of inertia)。通常以 J 表之。第 42 圖中 G 為平面形重心，對於 G 上垂直於平面之軸，其慣性能率如下：



第 42 圖

$$J_0 = a_1 r_1^2 + a_2 r_2^2 + \dots + a_n r_n^2$$

今 XX, YY 爲平面上通過 G 之兩直角軸, 則

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore J_0 = a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2(x_2^2 + y_2^2) + \dots$$

$$+ a_n(x_n^2 + y_n^2)$$

$$= (a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2)$$

$$+ (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2)$$

$$\begin{aligned} \text{但} \quad & a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2 = I_x \\ & a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + \dots + a_ny_n^2 = I_y \\ \therefore \quad & J_0 = I_x + I_y \dots \dots \dots (44) \end{aligned}$$

故極慣性能率等於對於重心上二直角軸之慣性能率之和。

或以微積分表之如下：

$$\begin{aligned} J_0 &= \int r^2 dA, \text{ 但 } r^2 = x^2 + y^2, dA = dx dy, \\ \therefore \quad J_0 &= \int \int (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int \int x^2 dx dy + \int \int y^2 dx dy \\ &= \int x^2 y dx + \int xy^2 dy = I_x + I_y \end{aligned}$$

圓，正方形等可以相成直角二軸分成四同形同大之面積，故 $I_x = I_y$ ，因之對於此等平面形，

$$J_0 = 2I_x = 2I_y \dots \dots \dots (44a)$$

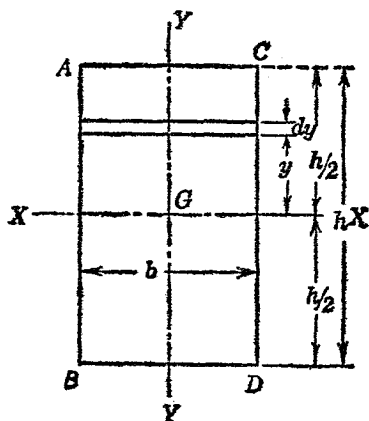
29. 重要平面形之慣性能率與斷面係數。

通常所用樑之斷面形多為對稱的有規則平面形。其慣性能率與斷面係數可由數學的方法

求出之。但用積分法爲便。

(1) 矩形。矩形斷面 (rectangular section) 之樑，外力常垂直於其一邊。故對於通過重心而平行於一邊之二軸之慣性能率最重要。第 43 圖中 G 爲重心， XX , YY 爲平行於一邊之直角二軸。先求矩形 $ABCD$ 對於 XX 軸之慣性能率 I_x 。平行於 XX 之微小面積 dA 爲 $b dy$ ，故微小面積對於 XX 之慣性能率爲

$$dI_x = y^2 dA = b y^2 dy$$



第 43 圖

$$\begin{aligned}
 \therefore I_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} by^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\
 &= \frac{b}{3} \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right\} = \frac{b}{3} \cdot \frac{h^3}{4} \\
 &= \frac{1}{12} bh^3 \\
 \therefore I_x &= \frac{bh^3}{12} \dots\dots\dots(45)
 \end{aligned}$$

$Z_x = \frac{I_x}{y}$, 而 y 之最大值為 $\frac{h}{2}$, 故

$$Z_x = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} \dots\dots\dots(45a)$$

又對於平行於 XX 之底邊 BC 之慣性能率 I_b 為

$$I_b = I_x + bh \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3} \dots\dots\dots(45b)$$

同樣對於 YY 軸與 CD 邊之慣性能率, 可於上式中交換 b 及 h 而得。即

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \dots\dots\dots(45c)$$

$$Z_y = \frac{hb^2}{6} \dots \dots \dots (45d)$$

$$I_x = \frac{hb^3}{3} \dots \dots \dots (45e)$$

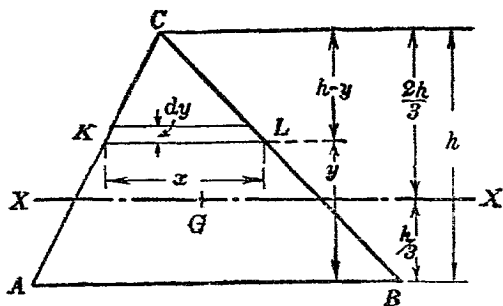
(2) 正方形 正方形 (square section) 乃矩形各邊相等者，即矩形斷面諸式中使 $b=h$ 即可。設正方形一邊之長為 h ，則

$$I_x = I_y = \frac{h^4}{12} \dots \dots \dots (46)$$

$$Z_x = Z_y = \frac{h^3}{6} \dots \dots \dots (46a)$$

$$I_b = I_o = \frac{h^4}{3} \dots \dots \dots (46b)$$

(3) 三角形 三角形斷面 (triangular section) 之樑普通為正三角形或二等邊三角形，而外力垂直加於底邊。對於平行於底邊之軸之慣性能率為必要。然其求法與不等邊三角形無異。故示其一般如下。但先求對於底邊之慣性能率，而後求對於通過重心之軸之慣性能率。



第 44 圖

第 44 圖中, ABC 爲已知三角形, 底邊 AB 之長爲 b , 高爲 h , 作 AB 之平行線 KL , 則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle KLC$ 相似. 故

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$

即

$$x = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$dA = x dy = \frac{b}{h}(h-y) dy$$

故

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h \frac{b}{h}(h-y)y^2 dy = \frac{b}{h} \int_0^h (hy^2 - y^3) dy$$

$$= \frac{b}{h} \left[\frac{h}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^h = \frac{b}{h} \left\{ \frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right\} = \frac{bh^3}{12} \dots\dots (47)$$

三角形之重心設為 G , 則 G 距 AB 為 $\frac{h}{3}$. 而 AB

與 XX 之距離為 $\frac{h}{3}$. 故

$$I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{3} \right)^2 = \frac{bh^3}{36} \dots\dots (47a)$$

對於通過頂點平行於底邊之軸, 則

$$I_c = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2} \left(\frac{2}{3}h \right)^2 = \frac{bh^3}{4} \dots\dots (47b)$$

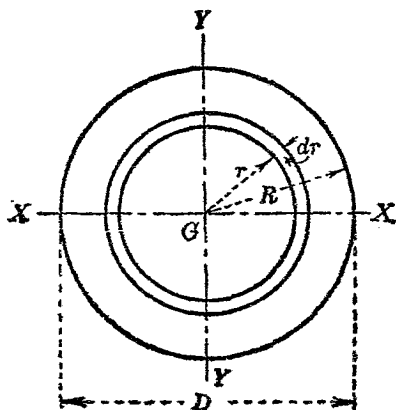
斷面係數有二值. 即

$$\left. \begin{aligned} y_1 = \frac{h}{3}, \quad Z_1 = \frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{h}{3}} = \frac{bh^2}{12} \\ y_2 = \frac{2}{3}h, \quad Z_2 = \frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{2}{3}h} = \frac{bh^2}{24} \end{aligned} \right\} \dots\dots (47c)$$

(4) 圓形. 圓形斷面 (circular section) 之樑, 如前所述, 有 $J_0 = 2I_x = 2I_y$ 之關係. 故先求 J_0 為便.

如第 45 圖所示, 將圓分爲多數同心環, 則微小環面積爲

$$dA = 2\pi r dr$$



第 45 圖

對於通過中心垂直軸之小面積極慣性能率爲

$$dJ_0 = r^2 dA = 2\pi r^3 dr$$

故圓形斷面之極慣性能率爲

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ &= \frac{\pi R^4}{2} \end{aligned}$$

$$\text{或 } R = \frac{D}{2}, \quad \therefore J_0 = \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

因之對於通過中心之軸 XX 或 YY 之慣性能率為

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi D^4}{64} \dots\dots\dots(48)$$

y 之最大值為 $\frac{D}{2}$, 故

$$Z_x = Z_y = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32} \dots\dots\dots(48a)$$

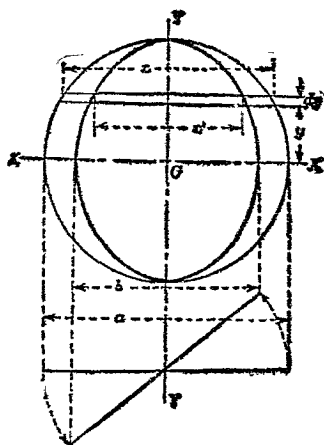
(5) 橢圓形. 橢圓形斷面 (elliptic section) 之樑, 普通外力直角作用於長軸 (major axis) 或短軸 (minor axis). 如第 46 圖所示, 橢圓可視為圓之傾斜射影. a 與 b , x 與 x' 間有次之關係.

$$b = a \cos \theta, \quad x' = x \cos \theta$$

故橢圓上平行於 XX 軸之微小面積為

$$x' dy = x dy \cdot \cos \theta$$

其對於 XX 軸之慣性能率為 $y^2 x' dy = xy^2 dy \cdot \cos \theta$.



第 46 圖

$$\therefore I_x = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} xy^2 \cos \theta \cdot dy$$

但 $\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} xy^2 dy$ 為對於 XX 軸，圓形斷面之慣性能

率，其值由 (48) 為 $\frac{\pi a^4}{64}$ 。故

$$I_x = \frac{\pi a^4}{64} \cos \theta = \frac{\pi a^3}{64} \cdot a \cos \theta = \frac{\pi a^3 b}{64} \dots \dots (49)$$

y 之最大值為 $\frac{a}{2}$ ，故

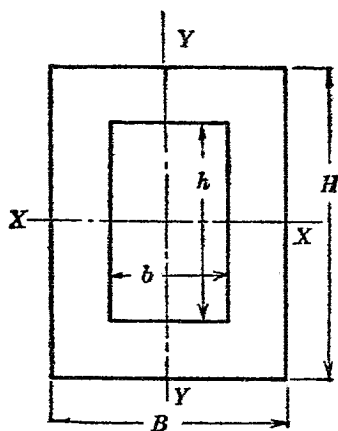
$$Z_x = \frac{\frac{\pi a^3 b}{64}}{\frac{a}{2}} = \frac{\pi a^2 b}{32} \dots \dots \dots (49a)$$

對於 YY 軸，則交換上式中 a 與 b 即可。

$$I_y = \frac{\pi a b^3}{64} \dots \dots \dots (49b)$$

$$Z_y = \frac{\pi a b^2}{32} \dots \dots \dots (49c)$$

以上所述均最重要之簡單斷面形。他之複雜斷面形可視為此等簡單形之合成，應用以上結果而算出其慣性能率也。



第 47 圖

(6) 中空矩形(第47圖). 中空斷面形之慣性能率可自外形實體之慣性能率與對於同軸中空部分之慣性能率之相差而求得之. 內外矩形之重心相一致,故通過重心之軸亦合一.

$$I_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \frac{BH^3 - bh^3}{12} \dots\dots\dots (50)$$

$$Z_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H} \dots\dots\dots (50a)$$

同樣 $I_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12} \dots\dots\dots (50b)$

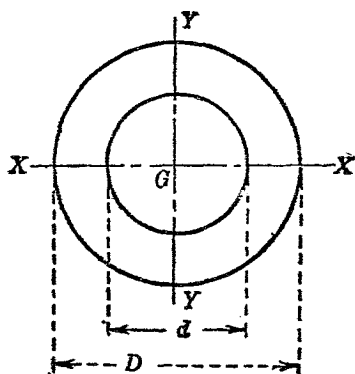
$$Z_y = \frac{HB^3 - hb^3}{6B} \dots\dots\dots (50c)$$

(7) 中空正方形. 就(50)式中 $B=H$, $b=h$ 即得.

$$I_x = I_y = \frac{H^4 - h^4}{12} \dots\dots\dots (51)$$

$$Z_x = Z_y = \frac{H^4 - h^4}{6H} \dots\dots\dots (51a)$$

(8) 中空圓形(第48圖). 此為直徑 D 圓之慣性能率與直徑 d 圓之慣性能率之相差.

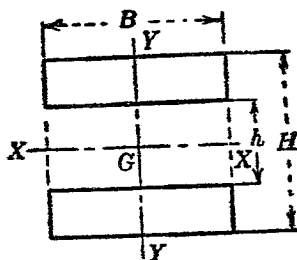


第 48 圖

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \dots \dots \dots (52)$$

$$Z_x = Z_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \dots \dots \dots (52a)$$

(9) 非相似形之中空斷面形。上述之中空斷面形，外形與中空部相似，重心共通。今內外形雖不相似，若重心共通時，亦可由同樣方法求其慣性能率。例如第49圖之形，外形矩形與中空矩形非相似，但其重心共通。故對於XX及YY軸之慣性能率各為



第 49 圖

$$I_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{Bh^3}{12} = \frac{B(H^3 - h^3)}{12} \dots \dots \dots (53)$$

$$I_y = \frac{HB^3}{12} - \frac{hB^3}{12} = \frac{B^3(H - h)}{12} \dots \dots \dots (53a)$$

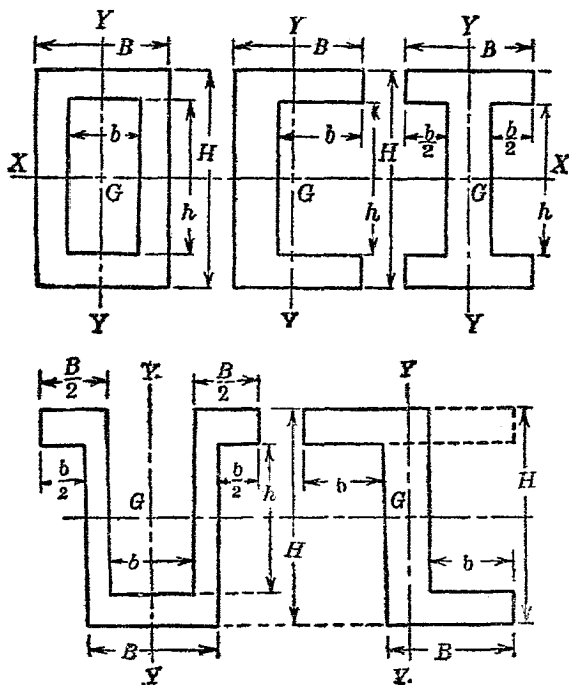
因之

$$Z_x = \frac{\frac{B(H^3 - h^3)}{12}}{\frac{H}{2}} = \frac{B(H^3 - h^3)}{6H} \dots \dots \dots (53b)$$

$$Z_y = \frac{\frac{B^3(H - h)}{12}}{\frac{B}{2}} = \frac{B^2(H - h)}{6} \dots \dots \dots (53c)$$

由此種方法，通常樑之斷面如方格形斷面 (box section)，溝形斷面 (channel section)，I 形斷面

(I section), Z形斷面 (Z section), U形斷面 (U section) 等之慣性能率可計算之。但實際斷面稜角上均附圓部, 然其差甚小, 可略視之。



第 50 圖

上示諸斷面形, 對於通過重心平行於底邊之 XX 軸之慣性能率 I_x , 均可視為外形矩形之慣

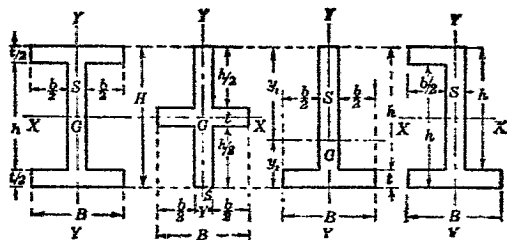
性能率與中空部矩形之慣性能率之差。故

$$I_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \frac{BH^3 - bh^3}{12} \dots\dots\dots (54)$$

$$Z_x = \frac{\frac{BH^3 - bh^3}{12}}{\frac{H}{2}} = \frac{BH^3 - bh^3}{6H} \dots\dots\dots (54a)$$

對於 YY 軸之慣性能率，則自方格形斷面外，均須用他法求之。

第 51 圖上諸斷面形對於 YY 軸上有同一之慣性能率。即 I 形斷面，十字形斷面 (star section)，T 形斷面 (T section)，Z 形斷面等。



第 51 圖

此等斷面對於 YY 軸之慣性能率，可視為 B 與 t 矩形之慣性能率及 h 與 s 矩形之慣性能率之和。

$$\begin{aligned}
 & I_y = \frac{tB^3}{12} + \frac{hs^3}{12} \\
 \text{或} \quad & I_y = \frac{1}{12} \left\{ (H-h)B^3 + h(B-b)^3 \right\} \\
 & Z_y = \frac{\frac{1}{12} \left\{ (H-h)B^3 + h(B-b)^3 \right\}}{\frac{B}{2}} \\
 & = \frac{(H-h)B^3 + h(B-b)^3}{6B} \dots\dots\dots (55a)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} I_y = \frac{tB^3}{12} + \frac{hs^3}{12} \\ I_y = \frac{1}{12} \left\{ (H-h)B^3 + h(B-b)^3 \right\} \end{aligned}} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

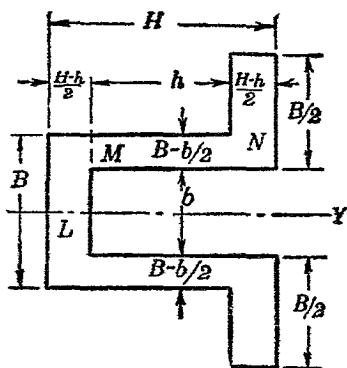
對於 XX 軸之慣性能率均不相同。I 形及 Z 形斷面已示於 (54) 及 (54a)。十字形斷面則交換 B 與 H , b 與 h 即可。

對於 YY 軸溝形斷面之慣性能率，對於 XX 軸 T 形斷面之慣性能率，及角形斷面 (angle section) 之對於 XX 軸與 YY 軸之慣性能率等，因此等斷面對於軸為非對稱，故不能由上述簡單方法求之。

(10) 非對稱斷面形。對稱斷面形上，對稱軸通過重心，軸之位置易知。然上示之溝形斷面，

T形斷面, 角形斷面等之 XX 軸, 或 YY 軸, 或兩者皆不為對稱軸, 故先定重心位置, 而後可定 XX 軸與 YY 軸。

例 5. U形斷面對於 YY 軸之慣性能率試計算之。



第 52 圖

此時慣性能率之計算法有種種。若分為 L , M , N 之三部而計算之, 則 L 部之慣性能率由 (45),

$$I_L = \frac{\frac{H-h}{2} B^3}{12} = \frac{B^3(H-h)}{24}$$

M, N 部之慣性能率由 (53),

$$I_m = \frac{h(B^3 - b^3)}{12}$$

$$I_n = \frac{\frac{H-h}{2} \{ (B+b)^3 - b^3 \}}{12} = \frac{(H-h) \{ (B+b)^3 - b^3 \}}{24}$$

$$\therefore I_y = I_1 + I_m + I_n$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{24} \left[B^3(H-h) + 2h(B^3 - b^3) \right. \\ &\quad \left. + (H-h) \{ (B+b)^3 - b^3 \} \right] \\ &= \frac{B^3H - b^3h}{12} + \frac{Bb(B+b)(H-h)}{8} \dots\dots\dots (56) \end{aligned}$$

$$Z_y = \frac{I_y}{\frac{B+b}{2}} = \frac{B^3H - b^3h}{6(B+b)} + \frac{Bb(H-h)}{4} \dots\dots\dots (56a)$$

例 6. 試計算 T 形斷面對於 XX 軸之慣性能率。(第 51 圖參照.)

此時須先求重心 G 之位置。今分為矩形 B 與 t 及 h 與 S 二部。則各矩形之重心在對角線交點上。

面積 Sh 之重心 g_1 在底邊上方 $t + \frac{h}{2}$ 處。

面積 Bt 之重心 g_2 在底邊上方 $\frac{t}{2}$ 處。

故底邊至 G 之高設為 y_2 ，則

$$(Sh + Bt)y_2 = Sh\left(t + \frac{h}{2}\right) + Bt\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\therefore y_2 = \frac{Sh(2t + h) + Bt^2}{2(Sh + Bt)}$$

但 $t = H - h$, $S = B - b$,

$$\begin{aligned} \text{則 } y_2 &= \frac{(B - b)h(2H - h) + B(H - h)^2}{2(BH - bh)} \\ &= \frac{BH^2 - 2bHh + bh^2}{2(BH - bh)} \dots \dots \dots (57) \end{aligned}$$

故頂邊至 G 之距為

$$y_1 = H - y_2 = \frac{BH^2 - bh^2}{2(BH - bh)} \dots \dots \dots (57a)$$

次求慣性能率。將前述所分成二矩形，對於通過重心之軸，求其慣性能率。

$$\text{面積 } Sh \text{ 之慣性能率 } I_1' = \frac{Sh^3}{12} = \frac{(B - b)h^3}{12}$$

面積 Bt 之慣性能率 $I_2' = \frac{Bt^3}{12} = \frac{B(H-h)^3}{12}$

故對於通過 G 之 XX 軸, 則

對於面積 Sh $I_1 = I_1' + Sh\left(t + \frac{h}{2} - y_2\right)^2$

對於面積 Bt $I_2 = I_2' + Bt\left(y_2 - \frac{t}{2}\right)^2$

由 (57) 式 y_2 之值, 則

$$\left(t + \frac{h}{2} - y_2\right)^2 = \frac{\{BH(H-h)\}^2}{\{2(BH-bh)\}^2} = \frac{B^2H^2(H-h)^2}{4(BH-bh)^2}$$

$$\left(y_2 - \frac{t}{2}\right)^2 = \frac{\{Hh(B-b)\}^2}{\{2(BH-bh)\}^2} = \frac{H^2h^2(B-b)^2}{4(BH-bh)^2}$$

因之

$$I_1 = \frac{(B-b)h^3}{12} + \frac{(B-b)hB^2H^2(H-h)^2}{4(BH-bh)^2}$$

$$I_2 = \frac{B(H-h)^3}{12} + \frac{B(H-h)H^2h^2(B-b)^2}{4(BH-bh)^2}$$

故對於 XX 軸全斷面之慣性能率為

$$I_x = I_1 + I_2 = \frac{(B-b)h^3 + B(H-h)^3}{12} + \frac{BH^2(B-b)(H-h)h\{B(H-h) + h(B-b)\}}{4(BH-bh)^2}$$

$$\therefore I_x = \frac{(BH^2 - bh^2)^2 - 4BbHh(H-h)^2}{12(BH - bh)} \dots (58)$$

T形斷面對於YY軸爲對稱，故 I_y 易於計算。角形斷面對於XX, YY, 均非對稱。可由本例方法得同樣結果。上之(58)式亦可用於角形斷面對於XX軸之慣性能率之計算也。溝形斷面對於YY軸之慣性能率，可於上式中交換B與H, 及b與h而得。

通過重心之軸不在斷面中央時，自軸至最遠部距離，軸之兩側不等。故斷面係數有二。即

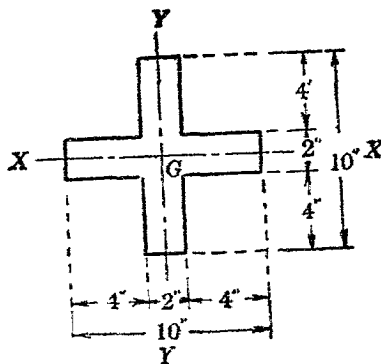
$$Z_1 = \frac{I}{y_1}, \quad Z_2 = \frac{I}{y_2}$$

例7. 第53圖之十字形斷面對於通過重心之XX, YY軸之慣性能率與斷面係數如何？

此斷面積對於XX, YY之關係全相同。故 $I_x = I_y$ 。

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} \left\{ (H-h)H^3 + h(H-h)^3 \right\}$$

今 $H-h=2$ 吋, $H=10$ 吋, $h=8$ 吋,



第 53 圖

$$\begin{aligned} \therefore I_x = I_y &= \frac{1}{12} \{ 2 \times 10^3 + 8 \times 2^3 \} \\ &= \frac{1}{12} (2000 + 64) = 172 \text{ (吋}^4\text{)} \end{aligned}$$

y 之最大值為 $\frac{10}{2} = 5$ 吋。故

$$Z_x = Z_y = \frac{172}{5} = 34.4 \text{ (吋}^3\text{)}$$

例 8. 求對於正方形斷面之對角線之慣性能率。

本問題之解法有種種。今舉其一二如下。

(a) 正方形由對角線分爲全等之兩個二等邊直角三角形。其底邊之長，設正方形每邊長 H 時，當爲 $\sqrt{2} H$ 。而三角形之高爲 $\frac{H}{\sqrt{2}}$ 。故對於底邊求三角形之慣性能率，得

$$\frac{1}{12} \times \sqrt{2} H \times \left(\frac{H}{\sqrt{2}} \right)^3 = \frac{H^4}{24}$$

但此三角形有二，故對於對角線，正方形之慣性能率爲

$$I_d = \frac{H^4}{24} \times 2 = \frac{H^4}{12}$$

(b) 正方形對於平行於各邊之二軸爲對稱，又對於二對角線亦對稱。故對於通過其交點（即重心）而垂直於面之軸之極慣性能率 J_0 爲

$$J_0 = 2I_x = 2I_y$$

又
$$J_0 = 2I_d$$

故
$$I_d = \frac{J_0}{2} = I_x = \frac{H^4}{12}$$

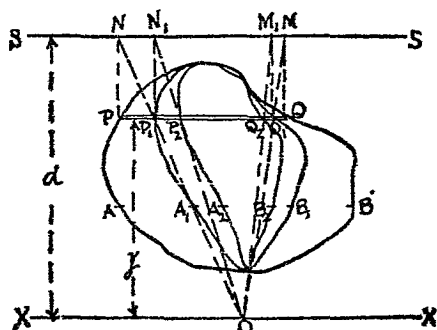
例 9. 內徑 8 吋，外徑 10 吋之同心圓所成之圓環，對於直徑之慣性能率及斷面係數若何？

$$I_x = \pi \frac{(D^4 - d^4)}{64} = \frac{3.14(10^4 - 8^4)}{64} = 290 \text{ (吋}^4\text{)}$$

$$Z_x = \frac{290}{5} = 58 \text{ (吋}^3\text{)}$$

30. 慣性能率, 幾何學的能率, 及重心之圖式求法. 對於複雜斷面形, 其斷面積之重心, 幾何學的能率, 與慣性能率之求法, 以圖式的方法 (graphical methodes) 爲便. 而平面積則用面積計 (planimeter) 以求得之.

第54圖上 $APQB$ 爲任意斷面形. 今求對於任一軸 XX 與通過重心之平行軸之慣性能率及幾何學的能率如下.



第 54 圖

作 SS 與 XX 平行, 其距爲 d . 取任一極點 (pole) O 於 XX 上. (此點近於 $APQB$ 者爲便.) 作數多平行線如 PQ 及 AB 等, 平行於 XX . 自 P, Q 等作 SS 之垂直線, 與之交於 N, M 等點. 將 N, M 等與 O 相連, 交 PQ 於 P_1, Q_1 , 及 AB 於 A_1, B_1 等. 由此得 $P_1Q_1B_1A_1$ 之面積. 將此面積仿上法, 自 P_1, Q_1 作垂直線, 得垂足 N_1, M_1 . 由此得 P_2, Q_2 等點. 又得第二面積 $P_2Q_2B_2A_2$. 由此則

面積 $P_1Q_1B_1A_1 \times d =$ 對於 XX 之 $PQBA$ 形之
幾何學的能率, 即 $\Sigma(y \cdot \delta A)$.

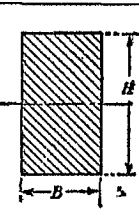
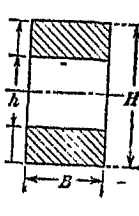
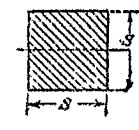
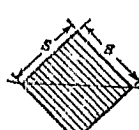
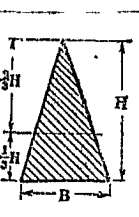
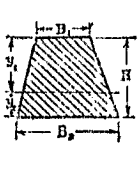
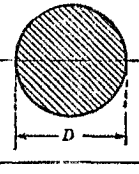
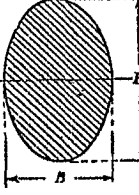
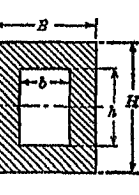
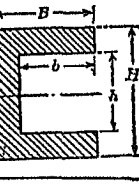
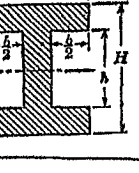
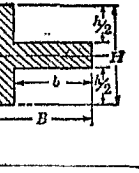
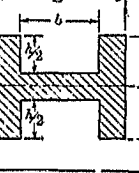
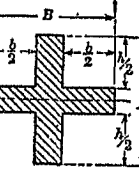
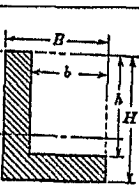
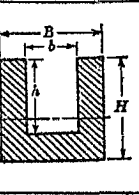
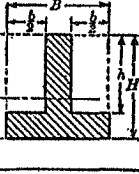
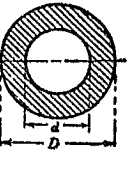
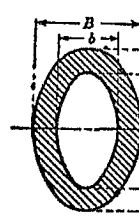
$$I_x = \text{面積 } P_2Q_2B_2A_2 \times d^2$$

對於通過重心之平行軸, 則

$$I_G = I_x - \frac{(\text{面積 } P_1Q_1B_1A_1)^2}{(\text{面積 } PQBA)} \cdot d^2$$

證明.—設面積 $PQBA, P_1Q_1B_1A_1$ 及 $P_2Q_2B_2A_2$ 各爲 A, A_1, A_2 . 離 XX 軸 y 距離處之寬設各爲 z, z_1 及 z_2 . 則微小面積 PQ, P_1Q_1, P_2Q_2 (或 $\delta A, \delta A_1, \delta A_2$) 各爲 $zdy, z_1dy, \text{及 } z_2dy$. 由 $\triangle OMN$ 及 $\triangle OP_1Q_1$

面積慣性能率及斷面係數表

斷面形	面積 A	慣性能率 I	斷面係數 Z
(1) 	BH	$\frac{BH^3}{12}$	$\frac{BH^2}{6}$
(2) 	$B(H-h)$	$\frac{B(H^3-h^3)}{12}$	$\frac{B(H^3-h^3)}{6H}$
(3) 	S^2	$\frac{S^4}{12}$	$\frac{S^3}{6}$
(4) 	S^2	$\frac{S^4}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}S^3$
(5) 	$\frac{BH}{2}$	$\frac{BH^3}{36}$	$\frac{I}{y_1} = \frac{BH^2}{24}, \frac{I}{y_2} = \frac{BH^2}{12}$
(6) 	$\frac{(B_1+B_2)H}{2}$	$\frac{(B_1^2+4B_1B_2+B_2^2)H^3}{36(B_1+B_2)}$	$\frac{I}{y_1} = \frac{(B_1^2+4B_1B_2+B_2^2)H^2}{12(2B_1+B_2)}$ $\frac{I}{y_2} = \frac{(B_1^2+4B_1B_2+B_2^2)H^2}{12(B_1+2B_2)}$
(7) 	$\frac{\pi D^2}{4}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^3}{32}$
(8) 	$\frac{\pi BH}{4}$	$\frac{\pi BH^3}{64}$	$\frac{\pi BH^2}{32}$
(9) 	$BH-bh$	$\frac{BH^3-bh^3}{12}$	$\frac{BH^3-bh^3}{6H}$
(10) 			
(11) 			
(12) 	$BH-bh$	$\frac{(B-b)H^3+b(H-h)^3}{12}$	$\frac{(B-b)H^3+b(H-h)^3}{6H}$
(13) 			
(14) 			
(15) 	$BH-bh$	$\frac{(BH^2-bh^2)^2-4BHbh(H-h)^2}{12(BH-bh)}$	$\frac{I}{y_1} = \frac{(BH^2-bh^2)^2-4BHbh(H-h)^2}{6(BH^2-bh^2)}$ $\frac{I}{y_2} = \frac{(BH^2-bh^2)^2-4BHbh(H-h)^2}{6(BH^2-2bhH+bh^2)}$
(16) 			
(17) 			
(18) 			
(19) 	$\frac{\pi(BH-bh)}{4}$	$\frac{\pi(BH^3-bh^3)}{64}$	$\frac{\pi(BH^3-bh^3)}{32H}$

二相似形，知 PQ 與 P_1Q_1 之比等於 d 與 y 之比。

$$\therefore \delta A_1 = \frac{y}{d} \cdot \delta A, \text{ 或 } z_1 dy = \frac{y}{d} \cdot z dy$$

$$\begin{aligned} \text{今 } A_1 &= \Sigma(\delta A_1) = \Sigma\left(\frac{y}{d} \cdot \delta A\right) = \frac{1}{d} \Sigma(y \cdot \delta A) \\ &= \frac{1}{d} \Sigma(y \cdot z \cdot dy) \end{aligned}$$

$$\text{或 } \int z_1 dy = \frac{1}{d} \int yz dy$$

故 A_1 與對於 XX 軸 A 之幾何學的能量為比例。

而後者等於 $A_1 \cdot d$ 。

面積 A 之重心距 XX 軸設為 \bar{y} ，則

$$\bar{y} = \frac{\Sigma(y \cdot \delta A)}{\Sigma(\delta A)} = \frac{A_1}{A} \cdot d$$

又由相似三角形 OM_1N_1 及 OP_2Q_2 ，則 P_1Q_1 與 P_2Q_2 之比等於 d 與 y 之比。故

$$\delta A_2 = \frac{y}{d} \delta A_1 = \frac{y^2}{d^2} \delta A$$

$$\text{或 } z_2 dy = \frac{y}{d} z_1 dy = \frac{y^2}{d^2} z dy$$

而

$$\begin{aligned} A_2 &= \Sigma(\delta A_2) = \Sigma\left(\frac{y}{d} \cdot \delta A_1\right) = \frac{1}{d} \Sigma(y \cdot \delta A_1) \\ &= \frac{1}{d^2} \Sigma(y^2 \cdot \delta A) \end{aligned}$$

或

$$\int z_2 dy = \frac{1}{d} \int y z_1 dy = \frac{1}{d^2} \int y^2 z dy$$

故 A_2 與對於 XX 軸 A 之慣性能率為比例，而後者等於 $A_2 \times d^2$ 。

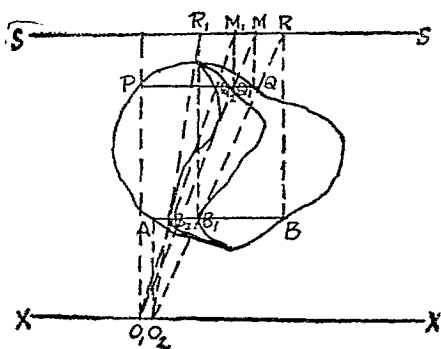
A 之重心距 XX 為 $\frac{A_1}{A} \cdot d$,

$$\begin{aligned} \therefore I_G &= A_2 \cdot d^2 - A \bar{y}^2 = A_2 \cdot d^2 - A \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 d^2 \\ &= d^2 \left(A_2 - \frac{A_1^2}{A}\right) \end{aligned}$$

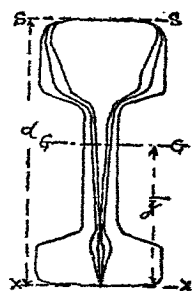
又或如第 55 圖之方法，則極點可變換。而 A ， A_1 ， A_2 諸面積之左邊相共通。此法較簡便。第 56 至 62 諸圖示其實例。第 56 與 57 圖為鐵軌斷面形，用第 54 圖之法求得。第 58 與 59 圖乃同上二圖之鐵軌用第 55 圖法以求出之。第 60 與 61 圖示 I 形斷面，由第 54 圖法以求慣性能率。但

第61圖則對於中性軸之慣性能率直接求得。

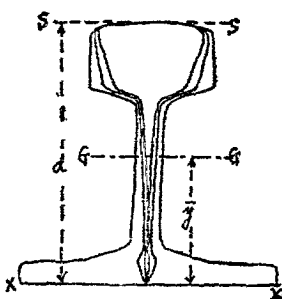
第62圖則用第55圖法以求之。



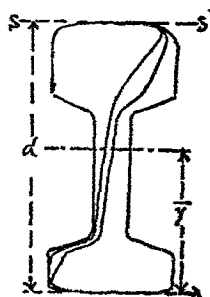
第 55 圖



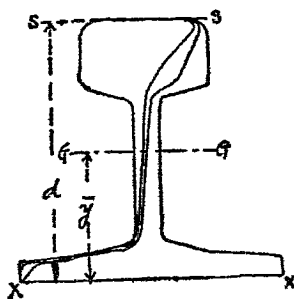
第 56 圖



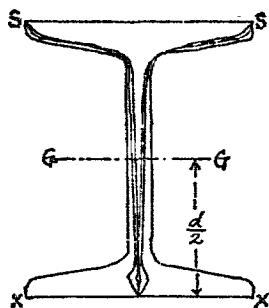
第 57 圖



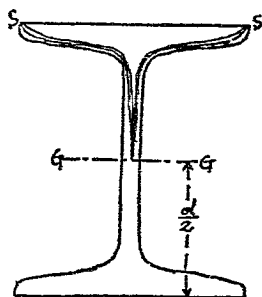
第 58 圖



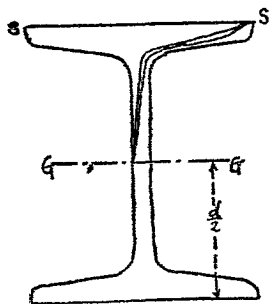
第 59 圖



第 60 圖



第 61 圖



第 62 圖

31. 材料之性質與斷面形。彎曲能率與內力之關係爲

$$M=fZ$$

故受同一彎曲能率之樑之斷面上，斷面係數大

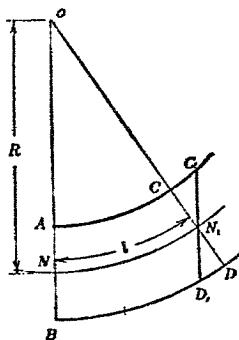
者所生內力小。又若生同一內力時，則斷面係數大者，所可耐之彎曲能率大。要之斷面係數大者，對於彎曲作用強。對於同形斷面，則斷面積大者斷面係數大。但所用材料增加而重量大。故經濟的設計法，不使斷面積增大，而變斷面之形，以增大斷面係數。

由慣性能率與斷面係數之定義，則中性軸至斷面最上面或最下面距離一定時，面積大部分之分布須遠離中性軸，方可使斷面係數大。故面積一定而 y 之最大值一定時，中空斷面，或溝形，I 形，T 形，十字形等斷面較圓形，正方形，矩形等，其強度大。此蓋距中性軸遠處有較多之面積故也。自中性軸遠隔之面，與中性軸距離二乘成比例而增樑之強度。例如矩形斷面，則短邊平行中性軸時，較長邊平行者，其強度大。又橢圓斷面時，則短軸平行於中性軸時，其強度大。

又材料性質對於決定斷面形時，亦甚重要。

一斷面中內力大小與自中性軸之距離成比例。若中性軸通過斷面中央，則中性軸至最上面及最下面之距相等。而最外側壓內力與最外側拉內力相等。反之，若T形斷面，角形斷面等，中性軸不通過斷面中央，則中性軸至最上面與最下面之距相異，故最外側壓內力與最外側拉內力亦不同。鍊鐵，鋼等材料拉伸強度與壓縮強度略等，故中性軸宜通過斷面之中央。使拉伸側與壓縮側有同等強度。鑄鐵之壓縮強度較拉伸大，約有五倍。若使最外側壓內力與拉內力相同，則樑之壓縮側較拉伸側有五倍之強，材料使用上甚不經濟。故中性軸至最外側壓縮面之距離須為至最外側拉伸面之五倍，若擇此斷面，則可有均等強度。

32. 樑之傾斜及曲率。樑受彎曲時，含樑縱軸而垂直於中性面之平面與中性面之交線為一曲線。此稱曰彈性曲線(elastic curve)。此線在中性面上，故僅受彎曲而無長短之伸縮。



第 63 圖

此彈性曲線一般自特別情形外，非為圓弧。吾人論曲線時，一般視為種種相異半徑之無數微小圓弧之集合。各假想半徑稱曰該部分之曲率半徑(radius of curvature)。第63圖中， NN_1 極近時， AB, CD 延長之交點 O 為曲率中心， ON 為半徑之圓弧 NN_1 近似的與彈性曲線 NN_1 相一致。而 ON 即曲率半徑。過 N_1 作 C_1D_1 與 AB 平行，而圓弧之長極小，可視為直線。得相似三角形 ONN_1 及 N_1DD_1 。設 ON 之長為 R ，則

$$\frac{\overline{DD_1}}{\overline{NN_1}} = \frac{\overline{N_1D_1}}{\overline{ON}} = \frac{y}{R}$$

但 $\overline{DD_1}$ 爲 DB 之歪, 設以 λ 表之, 則

$$\lambda = \frac{fl}{E}, \text{ 或 } \frac{f}{E} = \frac{\lambda}{l}$$

式中 f 爲 D 處拉內力, l 爲 NN_1 之長, E 爲樑材料之縱彈性係數. 由上二式,

$$\frac{f}{E} = \frac{\lambda}{l} = \frac{y}{R}, \text{ 或 } \frac{1}{R} = \frac{f}{yE}$$

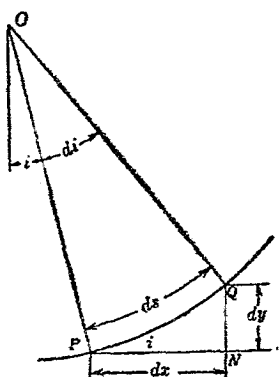
由 (41) 式, $M = f \frac{I}{y}$, 或 $\frac{f}{y} = \frac{M}{I}$

$$\therefore \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \dots \dots \dots (50)$$

此 $\frac{1}{R}$ 名曰曲率 (curvature). 故斷面均一之樑上, 受最大彎曲能率之斷面處, 曲率最大. 即曲度最急. 又彎曲能率對於各斷面均一時, 曲率半徑一定, 即樑彎成圓弧.

第 64 圖上, x 爲水平距, y 爲垂直距, i 爲對於 x 軸之傾斜 (slope), 以弧度法表之, s 爲樑彎曲時中性線弧之長. 圖中 PQ 爲 δs . PN, QN 各與 x 及 y 軸平行.

$$PN = \delta x, \quad QN = \delta y, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \tan i \approx i$$



第 64 圖

但 i 爲極小，曲線之曲率爲弧單位長上傾斜之變化率。今連結曲率中心與 P, Q ，則其間之角 δi 爲對於 δs 之傾斜之變化。

$$\frac{1}{R} = \frac{\delta i}{\delta s}$$

但 δi 極小， δs 與 δx 略等。故極限時，

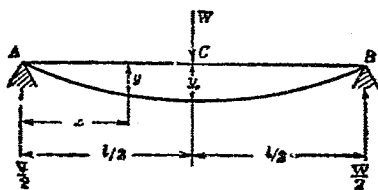
$$\frac{1}{R} = \frac{di}{ds} = \frac{di}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \dots\dots\dots (60)$$

由此積分之，

$$i = \frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = \int \frac{M}{EI} dx \dots \dots \dots (61)$$

33. 樑之撓屈. 樑受外力, 則中性面沿彈性曲線而彎曲. 各點沿外力方向而變化其位置. 未加外力前之中性面與加外力而彎曲後之中性面間垂直距離, 稱曰樑之撓屈 (deflection of beam). (樑為水平, 外力垂直, 故稱曰垂直距離.) 撓屈之計算須借微分方程式之力. 茲示其二例如下.



第 65 圖

由 (61) 積分之, 得

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx = \int i dx = \int \int \frac{M}{EI} dx dx \dots \dots \dots (62)$$

第 65 圖上 $M = \frac{W}{2}x$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{Wx}{2EI}$$

就 x 積分之，則

$$i = \frac{dy}{dx} = \int \frac{Wx}{2EI} dx = \frac{W}{2EI} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$x = \frac{l}{2}$ 即 C 點處， $i = 0$ ，

$$\frac{W}{2EI} \cdot \frac{l^2}{8} + C_1 = 0$$

$$\therefore C_1 = -\frac{W}{2EI} \cdot \frac{l^2}{8}$$

因之

$$i = \frac{W}{2EI} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{W}{2EI} \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{W}{4EI} \left(x^2 - \frac{l^2}{4} \right)$$

又對於 x 積分之，則

$$y = \int \frac{W}{4EI} \left(x^2 - \frac{l^2}{4} \right) dx = \frac{W}{4EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{l^2x}{4} \right) + C_2$$

$x = 0$ 即 A 點處 $y = 0$ ，故 $C_2 = 0$ 。

因之

$$y = \frac{W}{4EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{l^2x}{4} \right)$$

y 之最大值，起於 $\frac{dy}{dx} = 0$ 之處。故起於 C 點。而

$$y_0 = \frac{W}{4EI} \left(\frac{l^3}{3 \times 8} - \frac{l^3}{4 \times 2} \right) = -\frac{Wl^3}{48EI}$$

y_0 向下撓屈，故為負號。

$$\text{若荷重均布時， } M = \frac{w}{2}(lx - x^2)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{2EI}(lx - x^2)$$

$$i = \frac{dy}{dx} = \int \frac{w}{2EI}(lx - x^2)dx = \frac{w}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$x = \frac{l}{2} \text{ 時， } i = 0. \quad \therefore C_1 = -\frac{wl^3}{24EI}$$

$$\therefore i = \frac{w}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{l^3}{12} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{而 } y &= \int \frac{w}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{l^3}{12} \right) dx \\ &= \frac{w}{2EI} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{l^3x}{12} \right) + C_2 \end{aligned}$$

$x=0$ 時， $y=0$ ，故 $C_2=0$ 。

$$\therefore y = \frac{w}{24EI} (2lx^3 - x^4 - l^3x)$$

最大撓屈起於跨徑中央即 $x = \frac{l}{2}$ 處，

$$y_0 = \frac{w}{24EI} \left(\frac{2l^4}{8} - \frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{2} \right) = - \frac{5wl^3}{384EI}$$

但 $W = wl$,

$$\therefore y_0 = \frac{5Wl^3}{384EI}$$

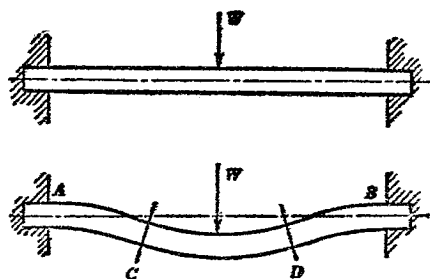
較之集中荷重之撓屈約 $\frac{5}{8}$.

34. 固着樑. 固定樑之兩端而支持者, 兩端傾斜一定. 荷重雖任何狀態而傾斜不變. 此曰固着樑 (built-in beam). 固着樑兩端之方向雖可任何, 但普通樑之兩端在一水平線, 而傾斜角爲零.

固着樑較之同跨徑同荷重之支持樑, 其強度與剛性均大. 即最外側內力與撓屈之量可減小.

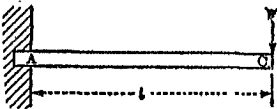
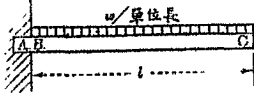
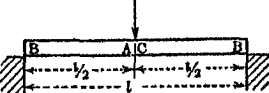
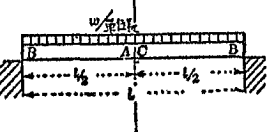
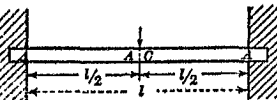
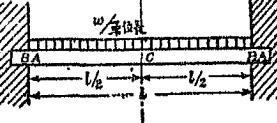
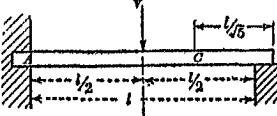
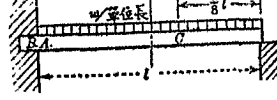
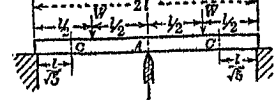
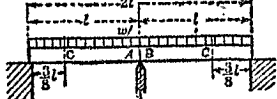
支持樑上無保持樑之一定方向之作用. 故兩端斷面不受彎曲能率之作用. 且彎曲能率之符號, 自特別情形外, 對於跨徑全體常一定. 中途無等於零之值. 而樑之彎曲亦同一方向, 內側生壓內力, 外側生拉內力. 若固着樑, 則樑

兩端支持部防止因荷重而變其方向 故樑兩端之彎曲能率不爲零,且與中央部分彎曲能率之符號相反. 因之固着樑上彎曲能率圖至少有二次通過於零. 第66圖示中央有一個集中荷重之固着樑之彎曲狀態. AC 與 BD 部分自中性面上側受拉內力,下側受壓內力. 中央 CD 部與之相反,上側受壓內力,下側受拉內力. 因之中性面之一側,拉內力與壓內力連續而生,且此正反對之內力必漸次變化. 故其間必有全無內力作用之斷面. 換言之,即彎曲能率爲零之斷面必存在也.



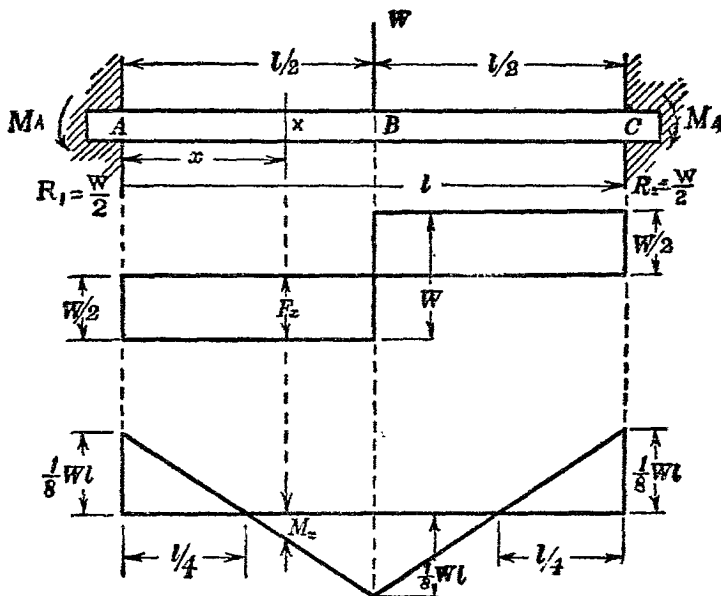
第 66 圖

彎曲能率 剪力及撓屈表

梁之種類	最大彎曲能率 M_0	最大剪力 F_0	最大撓屈 δ_0
(1) 	Wl	W	$\frac{Wl^3}{3EI}$
(2) 	$\frac{wl^2}{2}$	wl	$\frac{wl^4}{8EI}$
(3) 	$\frac{Wl}{4}$	$\frac{W}{2}$	$\frac{Wl^3}{48EI}$
(4) 	$\frac{wl^2}{8}$	$\frac{wl}{2}$	$\frac{5wl^4}{384EI}$
(5) 	$\frac{Wl}{8}$	$\frac{W}{2}$	$\frac{Wl^3}{192EI}$
(6) 	$\frac{wl^2}{12}$	$\frac{wl}{2}$	$\frac{wl^4}{384EI}$
(7) 	$\frac{3Wl}{16}$	$\frac{11W}{16}$	$\frac{Wl^3}{107EI}$
(8) 	$\frac{wl^2}{8}$	$\frac{5wl}{8}$	$\frac{wl^4}{188EI}$
(9) 	$\frac{3Wl}{16}$	$\frac{11W}{16}$	$\frac{Wl^3}{107EI}$
(10) 	$\frac{wl^2}{8}$	$\frac{5wl}{8}$	$\frac{wl^4}{187EI}$

彎曲能率爲零之斷面位置，須研究彈性曲線之性質而後可求。今示其例如下。

(1) 中央有一個集中荷重之固着樑(第67圖)。圖中 AC 爲固着樑，中央 B 有一個集中荷重 W 。此時 A 及 C 兩端之彎曲能率不爲零，稱曰固着能率 (fixing moment)。設固着能率各爲 M_A 及 M_C ，則 AB 間任意斷面 X 之彎曲能率爲



第 67 圖

$$M_x = M_A + \frac{W}{2}x$$

但 $\frac{W}{2}$ 爲 A 處反作用力, x 爲 A 至 X 之距離. 由 (60),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI} \left(M_A + \frac{W}{2}x \right)$$

但 E, I 爲常數. 積分之,

$$\frac{dy}{dx} = i = \frac{1}{EI} \left(M_A x + \frac{W}{4}x^2 \right) + C_1$$

$x=0$ 時, 卽 A 上 $i=0$. 故 $C_1=0$

$x=\frac{l}{2}$ 卽 B 處 $i=0$. 故

$$\frac{1}{EI} \left\{ M_A \frac{l}{2} + \frac{W}{4} \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right\} = 0$$

或
$$M_A = -\frac{1}{8} Wl$$

由此得

$$M_x = -\frac{1}{8} Wl + \frac{1}{2} Wx$$

設彎曲能率爲零之斷面距 A 爲 x_0 , 則

$$0 = -\frac{1}{8} Wl + \frac{1}{2} Wx_0$$

或
$$x_0 = \frac{l}{4}$$

B 處之彎曲能率 M_B 爲

$$M_B = -\frac{1}{8}Wl + \frac{1}{2}W\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{8}Wl$$

樑及荷重狀況爲對稱, 故

$$M_O = M_A = -\frac{1}{8}Wl$$

而彎曲能率距 O 點 $\frac{l}{4}$ 處亦爲零。

(2) 有均布荷重之固着樑(第 68 圖)。與上同樣,

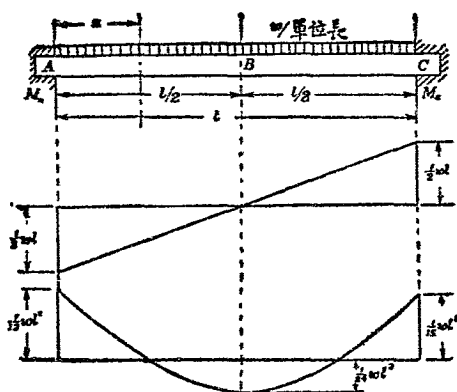
$$M_x = M_A + \frac{wl}{2}x - wx \cdot \frac{x}{2}$$

但 $\frac{wl}{2}$ 爲左端 A 之反作用力。因之

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI} \left(M_A + \frac{wl}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left(M_A x + \frac{wl}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 \right) + C_1$$

左端 A 處 $i=0$, 故 $C_1=0$ 。



第 68 圖

再積分之，

$$y = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} M_A x^2 + \frac{wl}{12} x^3 - \frac{w}{24} x^4 \right) + C_2$$

$x=0$ 即 A 處, $y=0$. 故 $C_2=0$

$x=l$ 即 C 處, $y=0$. 故

$$\frac{1}{2} M_A l^2 + \frac{wl^4}{12} - \frac{wl^4}{24} = 0$$

或
$$M_A = -\frac{1}{12} wl^2 = M_C$$

由此得
$$M_x = \frac{w}{2} \left(-\frac{1}{6} l^2 + lx - x^2 \right)$$

$$F_s = \frac{w}{2}(l-2x) = \frac{wl}{2} - wx$$

$$i = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{2EI} \left(\frac{1}{6}l^2x + \frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{3}x^3 \right)$$

$$y = \frac{w}{24EI} (-l^2x^2 + 2lx^3 - x^4)$$

中央之彎曲能率爲

$$M_B = \frac{w}{2} \left(-\frac{1}{6}l^2 + \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{4}l^2 \right) = \frac{1}{24}wl^2$$

中央之撓屈爲

$$y_B = \frac{w}{24EI} \left(-l^2 \cdot \frac{l^2}{4} + 2l \cdot \frac{l^3}{8} - \frac{l^4}{16} \right) = -\frac{wl^4}{384EI}$$

$M_x=0$ 之斷面位置 x_0 爲

$$-\frac{1}{6}l^2 + lx_0 - x_0^2 = 0 \quad \therefore x_0 = \left(\frac{1}{2} \pm 0.289 \right) l$$

例 10. 跨徑 12 呎之固着樑上有全重量 6 噸之均布荷重。斷面之厚爲 10 吋，慣性能率爲 120 (吋單位)，則最大值之內力若干？

作用於樑之最大彎曲能率在兩固着端。其大小爲

$$M = -\frac{wl^2}{12}$$

但 $l=12$ 呎, $w=\frac{6}{12}=0.5$ 噸.

$$M=-\frac{0.5 \times 12^2}{12} = -6 \text{ 呎噸} = -72 \text{ 吋噸}$$

又 $f=\frac{My}{I}$, $y=5$ 吋, $I=120$ 吋單位.

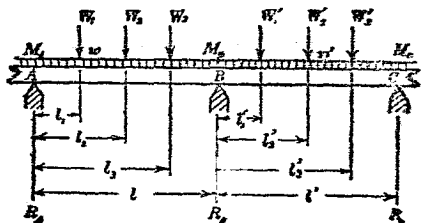
$$\therefore f=\frac{72 \times 5}{120} = 3 \text{ 噸/平方吋}$$

35. 連續樑. 以上所述者, 樑之支點均在二個以下. 反作用力容易求得. 若有三個以上之支點, 二個以上之跨徑者, 則表示平衡條件之二式不足以求三個以上之反作用力. 故不能以上述簡單方法解決之. 此種之樑曰連續樑 (continuous beam).

連續樑之支點中最端部者, 不論其固着或支持, 與普通二支點之樑相同. 其中間支點則如固着樑之固着端, 受彎曲能率之作用, 又其左右, 樑之傾斜角有同一之值,

連續樑之計算法有種種。今示克拉比倫之
三能率定理(Clapeyron's theorem of three moments)
如下。此定理示連續樑中任意相隣三支點間，
荷重與支點上彎曲能率之關係。

第69圖上 A, B, C 為相隣三支點。各點上彎
曲能率設各為 M_A, M_B, M_C 。第一跨徑 l 間有均布
荷重 w 與集中荷重 W_1, W_2, W_3 。後者距左方支
點各為 l_1, l_2, l_3 。次第二跨徑 l' 間有均布荷重 w'
與集中荷重 W_1', W_2', W_3' 。其自左方支點之距
各為 l_1', l_2', l_3' 。今加以荷重時，設三支點不沉下，
而常在一直線上，則三能率定理如次：



第 69 圖

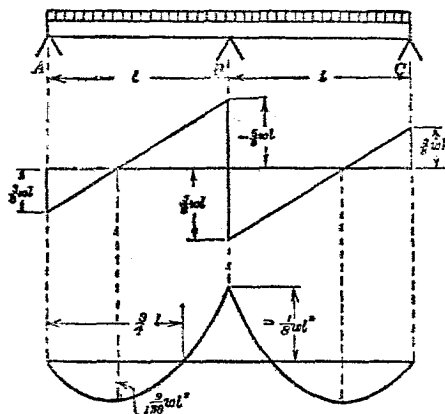
$$\begin{array}{l}
 \text{(彎曲能率)} \\
 \text{(集中荷重)} \\
 \text{(均布荷重)}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 M_A l + 2M_B(l+l') + M_C l' \\
 (l) \quad + \frac{1}{l} \{ W_1 l_1 (l^2 - l_1^2) + W_2 l_2 (l^2 - l_2^2) \\
 \qquad \qquad \qquad + W_3 l_3 (l^2 - l_3^2) \} \\
 (l') \quad + \frac{1}{l'} \{ W_1' l_1' (2l'^2 - 3l'l_1' + l_1'^2) \\
 \qquad \qquad \qquad + W_2' l_2' (2l'^2 - 3l'l_2' + l_2'^2) \\
 \qquad \qquad \qquad + W_3' l_3' (2l'^2 - 3l'l_3' + l_3'^2) \} \\
 + \frac{1}{4} w l^2 + \frac{1}{4} w' l'^2 = 0 \dots \dots \dots (63)
 \end{array} \right.$$

支點數若有 n 時，各取三個，依次用上之公式，可得 $n-2$ 個之式。更加以表示樑兩端狀態之二式，則可得含有 M_A, M_B, \dots, M_N 等 n 個未知數之 n 個式。由此可求各支點之彎曲能率。兩端支持時，兩端支點上彎曲能率為零。兩端固着時，則兩端方向為水平，可取為條件之一。

注意。連續樑詳細說明當參考高等應用力學，例如 Morley's Strength of Materials, chap. VII, pp. 213 ~ 227.

次示計算之一二例如下。

(1) 有均布荷重之相等二跨徑連續樑 (第 70 圖)。



第 70 圖

圖示 ABC 為連續樑，跨徑 AB 與 BC 相等。此時無集中荷重，且 $l=l'$ ，故由三能率公式，

$$M_A l + 2M_B(l+l') + M_C l' + \frac{1}{4} w l^3 + \frac{1}{4} w l'^3 = 0$$

兩端 A, C 僅為支持，故 $M_A = 0, M_C = 0$ 。故上式為

$$4M_B l + \frac{1}{2} w l^3 = 0$$

$$\therefore M_B = -\frac{w l^2}{8}$$

樑兩端 A, C 之反作用力設為 R_A 及 R_C , 則此樑對於 B 為對稱. 故 $R_A = R_C$. 跨徑中間自 A 距 x 處斷面 X 上之彎曲能率 M_x 為

$$M_x = R_A x - \frac{wx^2}{2}$$

$x=l$, 則 $M_x = M_B$

$$\therefore M_B = R_A l - \frac{wl^2}{2} = -\frac{wl^2}{8}$$

$$\therefore R_A l = \frac{wl^2}{2} - \frac{wl^2}{8} = \frac{3}{8}wl^2$$

因之 $R_A = \frac{3}{8}wl$

而 $R_C = \frac{3}{8}wl$

$$R_B = 2wl - 2 \times \frac{3}{8}wl = \frac{10}{8}wl$$

由此可求剪力與彎曲能率之值.

$$F_A = R_A = \frac{3}{8}wl$$

自 A 至 B $F_x = R_A - wx$

$$F_{B-0} = \frac{3}{8}wl - wl = -\frac{5}{8}wl$$

$$F_{B+0} = -\frac{5}{8}wl + \frac{10}{8}wl = \frac{5}{8}wl$$

自 B 至 C $F_x = \frac{5}{8}wl - w(x-l)$

$$F_C = \frac{5}{8}wl - wl = -\frac{3}{8}wl$$

$F_x=0$ 之斷面在 AB 間 $\frac{3}{8}wl - wx_0 = 0 \therefore x_0 = \frac{3}{8}l$

在 BC 間 $\frac{5}{8}wl - w(x_1-l) = 0 \therefore x_1 = l + \frac{5}{8}l$

或自 B $x_1' = \frac{5}{8}l$

此等之點，彎曲能率最大。

$$M_A = 0$$

A 至 B 間 $M_x = \frac{3}{8}wlx - \frac{1}{2}wx^2$

$$M_B = \frac{3}{8}wl^2 - \frac{1}{2}wl^2 = -\frac{wl^2}{8}$$

B 至 C 間 $M_x = -\frac{1}{8}wl^2 + \frac{5}{8}wl(x-l) - \frac{1}{2}w(x-l)^2$

$$M_C = 0$$

最大彎曲能率作用於 $x = \frac{3}{8}l$ ，其值為

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \frac{3}{8}wl \times \frac{3}{8}l - \frac{1}{2}w \left(\frac{3}{8}l\right)^2 \\
 &= \frac{9}{64}wl^2 - \frac{9}{128}wl^2 = \frac{9}{128}wl^2
 \end{aligned}$$

彎曲能率爲零之斷面，則

$$M_x = \frac{3}{8}wlx_2 - \frac{1}{2}wx_2^2 = 0$$

$$\therefore x_2 = 0, \text{ 或 } x_2 = \frac{3}{4}l$$

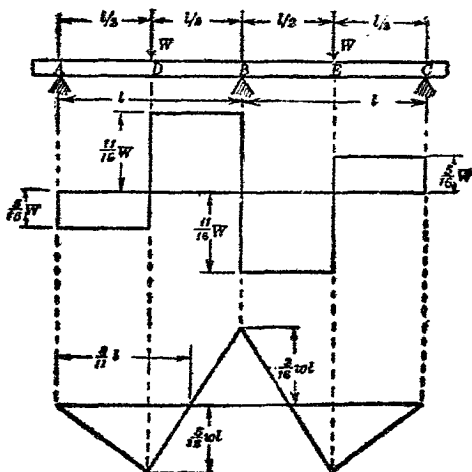
其線圖 (diagrams) 如第 70 圖。

(2) 跨徑中央有相等集中荷重之二等跨徑連續樑 (第 71 圖)。此時僅有集中荷重而無均布荷重。故 $w=0, w'=0$ 。兩端僅爲支持，故 $M_A=0, M_C=0$ 。

集中荷重在跨徑中央，且相等。故 $W=W'$ ， $l_1=l_1'=\frac{l}{2}$ 。

由三能率定理，

$$\begin{aligned}
 4M_B l + \frac{1}{l} \times W \times \frac{l}{2} \left\{ l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \right\} \\
 + \frac{1}{l} \times W \times \frac{l}{2} \left\{ 2l^2 - 3l \times \frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \right\} = 0
 \end{aligned}$$



第 71 圖

$$\therefore 4M_B l + \frac{3}{4} W l^2 = 0$$

$$\therefore M_B = -\frac{3}{16} W l$$

\$A\$ 處反作用力設為 \$R_A\$, 則 \$DB\$ 間

$$M_x = R_A x - W \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

\$x=l\$, 則 \$M_x = M_B\$, 故

$$M_B = R_A l - W \times \frac{l}{2} = -\frac{3}{16} W l$$

$$\therefore R_A = \frac{5}{16}W$$

$$R_C = \frac{5}{16}W$$

$$R_B = 2W - \frac{5}{8}W = \frac{11}{8}W$$

反作用力既求得後，剪力與彎曲能率可求之如下。

$$F_A = R_A = \frac{5}{16}W$$

自 A 至 D, $F_x = R_A = \frac{5}{16}W$

$$F_{D+0} = \frac{5}{16}W - W = -\frac{11}{16}W$$

自 D 至 B, $F_x = -\frac{11}{16}W$

$$F_{B+0} = -\frac{11}{16}W + \frac{11}{8}W = \frac{11}{16}W$$

自 B 至 E, $F_x = \frac{11}{16}W$

$$F_{E+0} = \frac{11}{16}W - W = -\frac{5}{16}W$$

$$\text{自 } B \text{ 至 } C, \quad F_x = -\frac{5}{16}W$$

$$M_A = 0$$

$$AD \text{ 間} \quad M_x = R_A x = \frac{5}{16}Wx$$

$$M_D = \frac{5}{16}W \times \frac{l}{2} = \frac{5}{32}Wl$$

$$DB \text{ 間} \quad M_x = \frac{5}{16}Wx - W\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

$$M_B = \frac{5}{16}Wl - W \times \frac{l}{2} = -\frac{3}{16}Wl$$

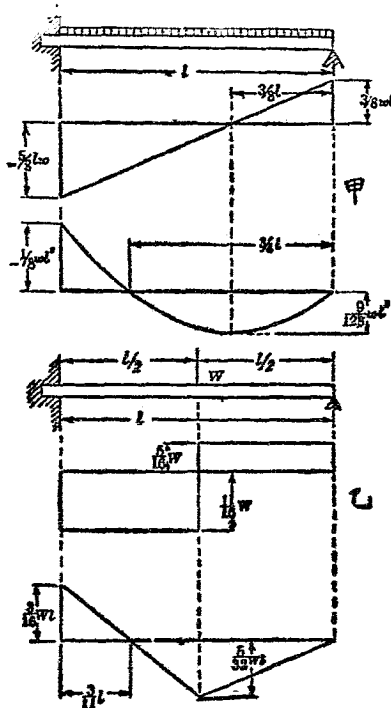
D 處彎曲能率爲正, B 處爲負. 且其間彎曲能率圖爲一直線. 故 DB 間之彎曲能率惟有一處斷面上爲零. 自 A 至該斷面設爲 x_1 . 則

$$M_x = \frac{5}{16}Wx_1 - W\left(x_1 - \frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{8}{11}l$$

36. 一端固着而他端支持之樑. 此種之樑可視爲前例三支點連續樑自其中央支點分爲左右二部分而得者. 蓋中央支點上樑之方向

常成水平，與固着端在同一狀態。因之左右兩部分可各視爲固着其一端而支持其他端之樑。第72圖甲乙卽示與第70, 71兩圖相當者。



第 72 圖

例 11. 支於五支點之樑 $ABCDE$. 其四跨徑皆相等. 全長上有均布荷重. 求各支點之反

作用力及彎曲能率之值，並作剪力圖與彎曲能率圖。（第73圖。）

由題意此連續樑對於支點 C 為對稱。故

$$M_A = M_E, \quad M_B = M_D, \quad R_A = R_E, \quad R_L = R_D.$$

且兩端支持，故

$$M_A = M_E = 0$$

次就 ABC 部用三能率定理，

$$0 + 4M_{Bl} + M_{Cl} + \frac{1}{2}wl^3 = 0 \dots\dots\dots (a)$$

又就 BCD 部

$$M_{Bl} + 4M_{Cl} + M_{Dl} + \frac{1}{2}wl^3 = 0$$

或

$$2M_{Bl} + 4M_{Cl} + \frac{1}{2}wl^3 = 0 \dots\dots\dots (b)$$

由 (a), (b) 二式求 M_B, M_C 如下。

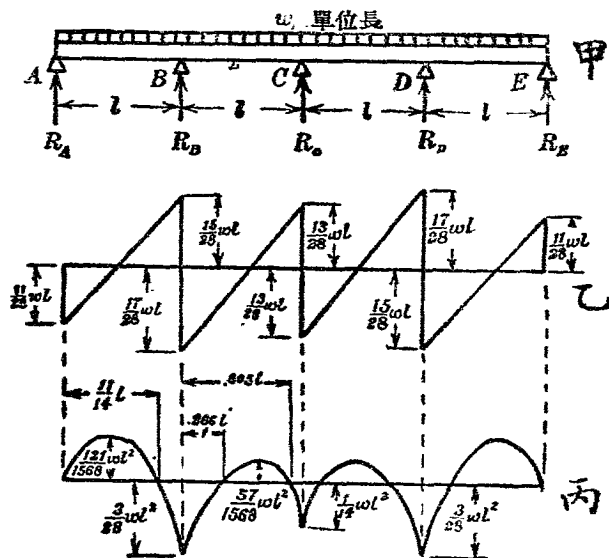
$$(b) \times 2 - (a)$$

$$7M_{Cl} = -\frac{1}{2}wl^3$$

$$\therefore M_C = -\frac{1}{14}wl^3$$

$$2M_{B1} = \frac{2}{7}wl^3 - \frac{1}{2}wl^3$$

$$\therefore M_B = -\frac{3}{28}wl^2 = M_D$$



第 73 圖

$ABCDE$ 之反作用力設各為 R_A, R_B, R_C, R_D, R_E ,

則就 B 點取能率, 得

$$R_A l - \frac{1}{2}wl^2 = M_B = -\frac{3}{28}wl^2$$

$$\therefore R_A = \frac{1}{2}wl - \frac{3}{28}wl = \frac{11}{28}wl = R_B$$

就 O 點取能率, 得

$$R_A \cdot 2l + R_B l - 2wl^2 = M_O = -\frac{1}{14}wl^2$$

$$\therefore \frac{11}{14}wl^2 + R_B \cdot l - 2wl^2 = -\frac{1}{14}wl^2$$

$$\therefore R_B = -\frac{1}{14}wl - \frac{11}{14}wl + 2wl = \frac{8}{7}wl = R_D$$

因之 $R_C = 4wl - 2R_A - 2R_B = 4wl - \frac{11}{14}wl - \frac{16}{7}wl$
 $= \frac{13}{14}wl$

A 處剪力等於 R_A , 即

$$F_A = \frac{11}{28}wl$$

自 A 至 B , $F_{B-0} = F_A - wl = -\frac{17}{28}wl$

AB 間剪力圖爲一直線.

$$F_{B+0} = -\frac{17}{28}wl + R_B = -\frac{17}{28}wl + \frac{8}{7}wl = \frac{15}{28}wl$$

同樣 $F_{C-0} = F_{B+0} - wl = \frac{15}{28}wl - wl = -\frac{13}{28}wl$

$$F_{C+0} = F_{C-0} + R_C = -\frac{13}{28}wl + \frac{13}{14}wl = \frac{13}{28}wl$$

$$F_{D-0} = F_{C+0} - wl = \frac{13}{28}wl - wl = -\frac{15}{28}wl$$

$$F_{D+0} = F_{D-0} + R_D = -\frac{15}{28}wl + \frac{8}{7}wl = \frac{17}{28}wl$$

$$F_E = F_{D+0} - wl = \frac{17}{28}wl - wl = -\frac{11}{28}wl = -R_E$$

由此得第 73 圖。

彎曲能率之值如下。對於跨徑 AB ，則以 A 爲原點，

$$M_x = F_A x - \frac{1}{2}wx^2 = \frac{11}{28}wlx - \frac{1}{2}wx^2 = \frac{1}{2}wx \left(\frac{11}{14}l - x \right)$$

故 $x = \frac{11}{14}l$ 處， $M_x = 0$ 。 x 大於此值，則取負值。 $x = l$

即 B 處， $M_B = -\frac{3}{28}wl^2$ 。 而其間爲拋物線。 對於

跨徑 BC ，則以 B 爲原點，向方取 x ，得

$$\begin{aligned} M_x &= M_B + F_B x - \frac{1}{2}wx^2 = -\frac{3}{28}wl^2 + \frac{15}{28}wlx - \frac{1}{2}wx^2 \\ &= -\frac{1}{2}w \left(x^2 - \frac{15}{14}lx + \frac{3}{14}l^2 \right) \end{aligned}$$

故由 B , $x=0.266l$ 及 $x=0.805l$ 二點上彎曲能率爲零。其二點間取正值。 $x=l$ 即 C 點上取負值。 $M_C = -\frac{1}{14}wl^2$ 。對於 C 點，連續樑爲對稱。故 ABC 部彎曲能率既知後，可畫出全樑之彎曲能率圖。

例 12. 第 74 圖甲之連續樑，跨徑各爲 10 呎，12 呎，8 呎。各跨徑左端起順次 7 呎，4 呎，2 呎之斷面上，各有 5 噸，7 噸，6 噸之集中荷重。求各支點上反作用力與彎曲能率。

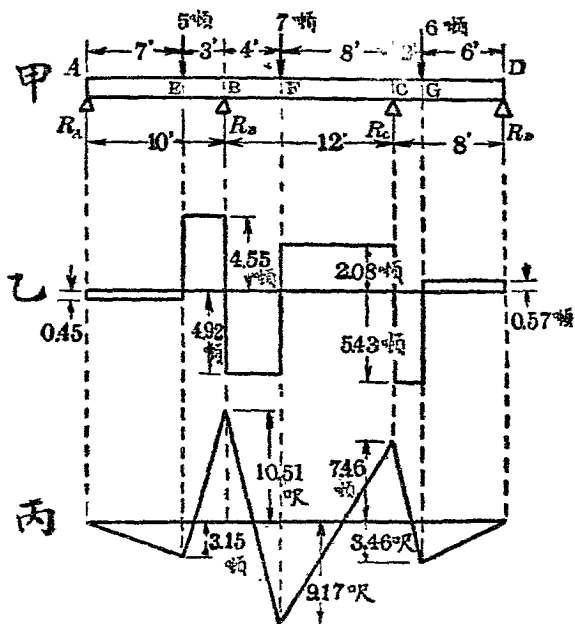
兩端爲支持，故 $M_A = M_D = 0$ 。對於 ABC 部分，應用三能率公式，

$$0 + 2M_B(10+12) + M_C \times 12 + \frac{1}{10} \times 5 \times 7 \times (10^2 - 7^2) \\ + \frac{1}{12} \times 7 \times 4 \times (2 \times 12^2 - 3 \times 12 \times 4 + 4^2) = 0$$

$$\text{或} \quad 44 M_B + 12 M_C = -551.8 \dots \dots \dots (a)$$

對於 BCD 部分，則

$$M_B \times 12 + 2M_C(12+8) + 0 + \frac{1}{12} \times 7 \times 4 \times (12^2 - 4^2) \\ + \frac{1}{8} \times 6 \times 2 \times (2 \times 8^2 - 3 \times 8 \times 2 + 2^2) = 0$$



第 74 圖

或 $12M_B + 40M_C = -424.6 \dots\dots\dots (b)$

由 (a), (b) 二式, 得

$$M_B = -10.51 \text{ 呎噸,}$$

$$M_C = -7.46 \text{ 呎噸.}$$

次求反作用力. 取 B 左側之能率,

$$R_A \times 10 - 5 \times 3 = -10.51$$

$$\therefore R_A = 0.45 \text{ 噸}$$

又取 C 左側之能率,

$$R_A \times 22 - 5 \times 15 + R_B \times 12 - 7 \times 8 = -7.46$$

$$\therefore R_B = 9.47 \text{ 噸}$$

次取 C 右側之能率,

$$R_D \times 8 - 6 \times 2 = -7.46$$

$$\therefore R_D = 0.57 \text{ 噸}$$

因之 $R_C = (5 + 7 + 6) - (R_A + R_B + R_D) = 7.51 \text{ 噸}$

由此得剪力如下:

$$AE \text{ 間 } F = R_A = 0.45 \text{ 噸}$$

$$EB \text{ 間 } F = 0.45 - 5 = -4.55 \text{ 噸}$$

$$BF \text{ 間 } F = -4.55 + 9.47 = 4.92 \text{ 噸}$$

$$FC \text{ 間 } F = 4.92 - 7.00 = -2.08 \text{ 噸}$$

$$CG \text{ 間 } F = -2.08 + 7.51 = 5.43 \text{ 噸}$$

$$GD \text{ 間 } F = 5.43 - 6.00 = -0.57 \text{ 噸} = -R_D$$

又彎曲能率如下:

$$M_A = 0$$

$$M_B = F_A \times 7 = 0.45 \times 7 = 3.15 \text{ 呎噸}$$

$$M_B = -10.51 \text{ 呎噸}$$

$$M_F = M_B + F_B \times 4 = -10.51 + 4.92 \times 4 = 9.17 \text{ 呎噸}$$

$$M_C = -7.46 \text{ 呎噸}$$

$$M_G = M_C + F_C \times 2 = -7.46 + 5.43 \times 2 = 3.40 \text{ 呎噸}$$

$$M_D = 0$$

37. 有移動荷重之樑。上述之樑，其荷重作用位置均一定。而所生剪力與彎曲能率之值，對於樑之各斷面，唯有一值。最大彎曲能率之作用斷面亦一定不變，而其值一定。故苟知此斷面上之內力時，即可知樑之強度。

若荷重移動於樑之左右時，則最大彎曲能率作用之斷面亦移動。而最大彎曲能率之值亦因荷重位置而變化。又對於一定斷面上，則因荷重之移動，其彎曲能率之作用有變化。若荷重加於該斷面上時，其彎曲能率為最大。故移動荷重之樑，若不求各斷面最大彎曲能率，及最大彎曲能率中之極大值作用於何處斷面，又其值若何，則不能決定樑之強度及其尺寸。

移動荷重之樑實例甚多。例如車輛通過於橋架，屋內起重機運行於橫樑上等是也。移動速度若大時，則有慣性力之作用。須依活荷重計算之。其詳在本書範圍之外。

移動荷重有多數，而移動速度不同一時，最為複雜。茲僅就一個集中荷重移動於支持樑時，述其解法如下。

第75圖上 AB 為支持樑，自一端 A 相距 x 處之斷面上有集中荷重 W 。此時支點 A, B 之反作用力為

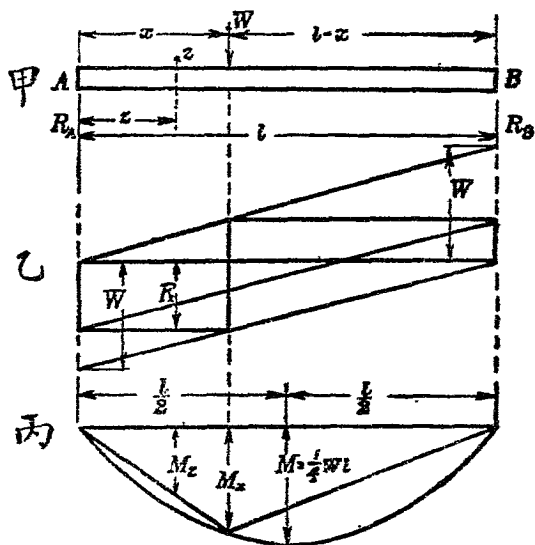
$$R_A = \frac{l-x}{l}W, \quad R_B = \frac{x}{l}W$$

故 R_A, R_B 隨 x 而變化。

今自一端 A 相距 x 處斷面上之剪力與彎曲能率求之如下。

$$F_x = R_A = \frac{l-x}{l}W$$

$$M_x = R_A x = \frac{l-x}{l}Wx$$



第 75 圖

故對於一定之 x 值, R_2 爲一定, M_z 之值與 z 爲比例而變化. z 最大即 $z=x$ 時, M_z 之值最大. 故不論 x 之如何, 荷重作用處之斷面上有最大彎曲能率之作用. 然則最大彎曲能率之極大值果如何乎?

$$M_z = \frac{(l-x)x}{l} W$$

就 x 取微分而使等於零, 則

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{W}{l}(l-2x) = 0$$

但 $\frac{W}{l} \neq 0$, $\therefore l-2x=0$, $x = \frac{l}{2}$.

因之

$$M_{max} = \frac{W}{l} \left(l - \frac{l}{2} \right) \frac{l}{2} = \frac{1}{4} Wl$$

即最大彎曲能率之極大值作用於跨徑中央，其值為 $\frac{1}{4} Wl$ 。 F_z 之式對於 x 為一次， F_z 與 x 有直線的關係。 $x=0$ 時 F_z 有最大值， $F_{max}=W$ 。 $x=l$ 時 F_z 有最小值， $F_{min}=0$ 。 其線圖如第 75 圖乙。

M_x 為 x 之二次式，故 M_x 對於 x 為拋物線之關係。 自基線至拋物線上縱線之長示該斷面上最大彎曲能率之值。 如第 75 圖丙。

38. 均一強度之樑。 樑上各斷面彎曲能率之值相異。 危險斷面上彎曲能率最大。 若樑之斷面與危險斷面等大之均一斷面時，則危險斷面以外斷面上受較小之內力，有必要以上之強度，而使用不經濟之材料。

故對於彎曲能率，計算適當大小之斷面，而使各斷面上最大內力均有同一之值。如是方為經濟的設計。此種之樑稱曰均一強度之樑 (beam of uniform strength)。

集多數之片而組成之合成樑，普通有均一強度。而樑之形複雜，所要建造費反大，反有不經濟者。

樑之斷面與彎曲能率之關係為

$$M = fZ$$

f 之值使一定時， M 與 Z 成正比例。反之 M 與 Z 成正比例時， f 之值一定，而得均一強度之樑。 Z 與 M 正比例時，其變化因種種斷面之形而異。例如圓形斷面樑時，斷面在任何處均為圓。其 Z 之變化，由

$$Z = \frac{M}{f} = \frac{\pi}{32} d^3$$

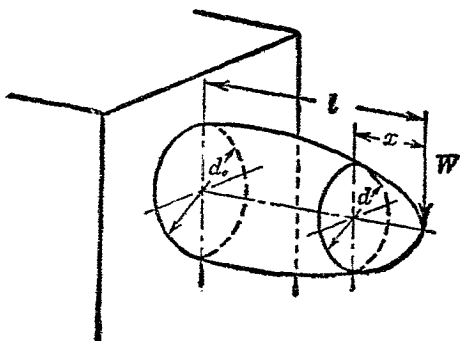
$$\therefore d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \cdot \frac{M}{f}}$$

d 與 M 之三乘根為比例。第76圖示自由端有一

個集中荷重之突出樑之例。

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi f} \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$d_0 = \sqrt[3]{\frac{32Wl}{\pi f}}$$



第 76 圖

若用矩形斷面，則 $Z = \frac{1}{6}bh^2$ ，故斷面大小之變化法有三種。

(a) 厚度一定而變化其寬度者。此時

$$b = \frac{6}{h^2 f} M$$

第 77 圖示自由端有一個集中荷重之突出樑。

$$M_x = Wx, \quad b = \frac{6W}{h^2 f} x, \quad b_0 = \frac{6Wl}{h^2 f}.$$

x 與 b 之關係爲一次，故樑之兩側爲直線。其平面圖爲三角形。

(b) 寬度一定而變化其厚度者。此時

$$h^2 = \frac{6}{bf} M$$

或如上例

$$h^2 = \frac{6W}{bf} x$$

h 與 x 之關係爲二次。故樑之上下面(或一面爲平面)爲拋物線形。如第 77 圖乙。

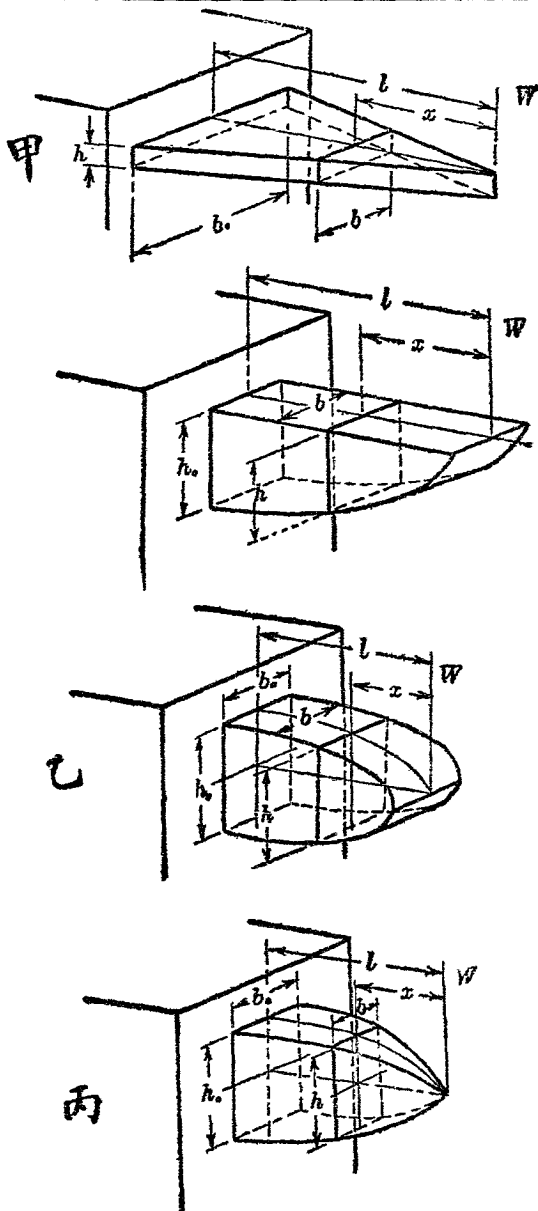
(c) 變化寬度及厚度，但斷面爲相似形者。此時

$$bh^2 = \frac{6}{f} M$$

或如上例，

$$bh^2 = \frac{6W}{f} x$$

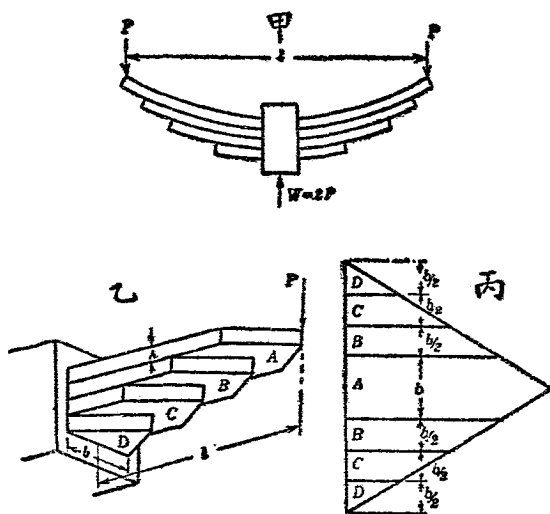
但 b 與 h 之比一定，故 $h = nb$ 。由此可得僅含 b 或 h 之式，而可計算 b 及 h 之值。此時 b 或 h 與 x 之關係爲三次。如第 77 圖丙。



第 77 圖

39. 疊板彈條. 鐵道車輛或如汽車馬車等車臺下減少振動用之彈條, 多用鋼板疊合成弓形而製成. 此曰疊板彈條 (laminated spring). 此彈條應用均一強度之突出樑.

第 78 圖甲 示一疊板彈條, 可視為二個突出樑



第 78 圖

如乙. 將各個除最長片外切成二片, 並合成丙圖之形. 為一三角形彈條. 此與前節 (a) 相當.

實際之彈條因工作上之方便，板端不為尖形而有適當寬度。故與三角形板之計算略不一致。然普通仍使用三角形板之計算。

$$Pl = n \frac{bh^2}{6} f$$

略去中 鐵之影響，設跨徑為 L ，全荷重為 W 。則

$$WL = \frac{2}{3} n b h^2 f \dots \dots \dots (64)$$

用此式可計算疊板彈條之強度。若求此彈條之撓屈，則因曲率變化為均一，對於最長彈條片，其中央撓屈為

$$d = \frac{1}{8} \cdot \frac{ML^2}{EI}$$

(參照 Morley's "Strength of Materials," p. 157)

但
$$M = \frac{1}{n} \left(\frac{WL}{4} \right)$$

$$\therefore d = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{WL^3}{4EI} = \frac{12}{8 \times 4} \cdot \frac{WL^3}{E n b h^3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{WL^3}{E n b h^3} \dots \dots \dots (65)$$

例 13. 鋼製疊板彈條之跨徑 30 吋，荷重 $\frac{1}{2}$

噸。板寬 3 吋，厚 $\frac{1}{4}$ 吋。最大可容內力 12 噸/平方吋時，問須用若干塊之板？又彈條中央之撓屈幾何？

板之數若為 n ，則由 (64) 式

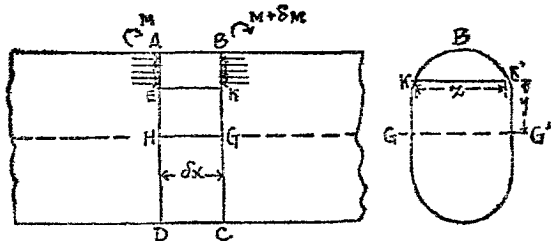
$$\frac{1}{2} \times 30 = \frac{2}{3} \times n \times 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 12$$

$$\therefore n = \frac{30 \times 3 \times 4 \times 4}{2 \times 2 \times 3 \times 12} = 10$$

又由 (65) 式
$$d = \frac{3}{8} \times \frac{\frac{1}{2} \times 30^3}{13,000 \times 10 \times 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3}$$

$$= 0.83 \text{ 吋}$$

但 13,000 噸/平方吋為鋼之縱彈性係數。



第 79 圖

40. 樑之橫斷面上剪內力之分布. 第79圖上 AD, BC 爲樑中二橫斷面, 其相距爲 δx . AD 上之彎曲能率設爲 M , BC 上彎曲能率設爲 $M + \delta M$. 離中性面上 y 處, AD 斷面之縱內力之強爲

$$p = \frac{My}{I}$$

今就 $ABKE$ 部分之平衡考察之. 微小面積 $z \cdot dy$ 上縱內力全量, 在 AE 側爲

$$p \cdot z \cdot dy = \frac{My}{I} \cdot z \cdot dy$$

在 BK 側爲

$$\frac{(M + \delta M)y}{I} \cdot z \cdot dy$$

故 BK 側微小面積上縱內力大於 AE 側之相當微小面積. 其差爲 $\frac{\delta M}{I} y \cdot z \cdot dy$. BK 面積較 AE 面積, 縱內力全量之相差爲

$$\int_y^{y_1} \frac{\delta M}{I} \cdot y \cdot z \cdot dy, \text{ 或 } \frac{\delta M}{I} \int_y^{y_1} y \cdot z \cdot dy$$

但 y_1 爲最外側 y 之值. $ABKE$ 部分之水平合力爲零, 故上之 BK 面上較大之水平內力必與 EK 面上水平剪力相平衡. 此水平剪力因樑橫斷面上垂直剪力而生 (§ 18). 設高 y 處剪內力之平均強爲 q (δx 上 q 之變化略去之), 則 EK 面上水平剪力爲 $q \cdot z \cdot \delta x$.

$$\therefore q \cdot z \cdot \delta x = \frac{\delta M}{I} \int_y^{y_1} y \cdot z \cdot dy$$

因之

$$q = \frac{\delta M}{\delta x} \cdot \frac{1}{I \cdot z} \int_y^{y_1} y \cdot z \cdot dy = \frac{F}{I \cdot z} \int_y^{y_1} y \cdot z \cdot dy$$

但 $F = \frac{dM}{dx}$, 爲樑橫斷面上剪力之全量. 但實際上 y 處剪內力之強對於 EK 方向上尚有變化, 在中央部最大. 上之積分記號外之 z 爲 BK 斷面最低部 y 處之寬. 積分記號內之 z 爲 y 與 y_1 間寬度之變數. $\int_y^{y_1} y \cdot z \cdot dy$ 爲 KBK' 面積對於中性軸 GG' 之幾何學的能率, 而等於該面積與

其重心至 GG' 之距之相乘積。或由 § 30, 等於第一次作圖所得面積與 HA 即 y_1 之相乘積。故

$$q = \frac{F}{I \times KK'} \times (\text{面積 } KBB') \times (\text{其重心至 } GG' \text{ 之距})$$

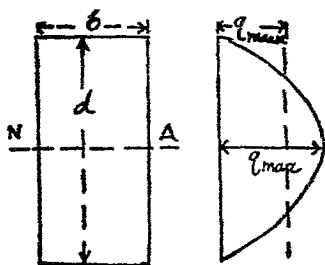
或

$$q = \frac{F \times y_1}{I \times KK'} \times (B \text{ 與 } KK' \text{ 間第一次作圖面積})$$

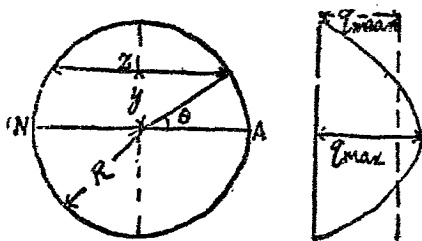
由上知積分下限爲零即在中性面上時, q 爲極大值。上下兩側即 $y = y_1$ 或 $y = -y_1$ 時, q 爲零。

(1) 矩形斷面(第 80 圖)。設寬爲 b , 高爲 d 。自中性軸高 y 處, z 爲定數 b 。故

$$\begin{aligned} q &= \frac{F}{I_z} \int_y^{\frac{d}{2}} y \cdot z \cdot dy \\ &= \frac{F}{I} \int_y^{\frac{d}{2}} y dy \\ &= \frac{12F}{bd^3} \left(\frac{1}{2} y^2 \right)^{\frac{d}{2}} = \frac{6F}{bd^3} \left\{ \left(\frac{d}{2} \right)^2 - y^2 \right\} \end{aligned}$$



第 80 圖



第 81 圖

若以 d 為基線, q 之值示於其直角方向上, 則得拋物線. $y=0$ 時, $q = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{bd}$. 剪內力之平均強為 $F \div bd$, 故 q 之極大值為平均值之 1.5 倍.

(2) 圓形斷面(第 81 圖). 設 R 為半徑, 則

$$y = R \sin \theta, \quad z = 2R \cos \theta$$

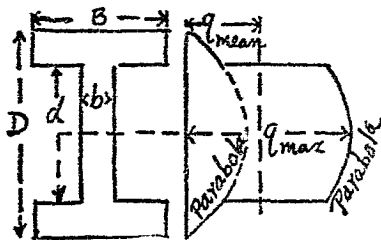
$$dy = R \cos \theta \cdot d\theta, \quad I = \frac{\pi R^4}{4}$$

由此

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{4F \times 2R^3}{\pi R^4 \times 2R \cos \theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta \, d\theta \\
 &= \frac{4F}{\pi R^2 \cos \theta} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4F}{3\pi R^2} \cos^2 \theta \\
 &= \frac{4F}{3\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right)
 \end{aligned}$$

中性軸上 $\theta=0$ 或 $y=0$, 故 $q = \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{\pi R^2}$, 而 q 之極大值為平均值之 $\frac{4}{3}$ 倍. 全斷面上 q 之變化為拋物線.

(3) I形斷面(第82圖). 先對於緣邊部(flange)求之.



第 82 圖

$$q = \frac{F}{IB} \int_y^{\frac{D}{2}} yB \cdot dy = \frac{F}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right)$$

$$y = \frac{d}{2} \text{ 時, } q = \frac{F}{I} \cdot \frac{D^2 - d^2}{8}$$

次對於中央部(web)求之。

$$q = \frac{F}{Ib} \int_y^{\frac{D}{2}} y \cdot z \cdot dy$$

但 z 在邊緣部爲 B , 在其餘爲 b . 故

$$q = \frac{F}{Ib} \left(B \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} y dy + b \int_y^{\frac{d}{2}} y dy \right)$$

$$= \frac{F}{I} \left(\frac{B}{b} \cdot \frac{D^2 - d^2}{8} + \frac{d^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right)$$

$$y = \frac{d}{2} \text{ 時, } q = \frac{F}{I} \cdot \frac{D^2 - d^2}{8} + \frac{B}{b}$$

$$y = 0 \text{ 時, } q = \frac{F}{I} \left\{ \left(\frac{B}{b} \cdot \frac{D^2 - d^2}{8} \right) + \frac{d^2}{8} \right\}$$

41. 應用例題. 以下示本章之例.

例 14. 由自由端 12 呎之內每呎 10 磅之均布

荷重所作用之突出樑，其長共16呎。求最大彎曲能率。又樑斷面若為寬3吋之矩形，材料之可容內力為1,200磅/平方吋，則其厚若何？

突出樑之最大彎曲能率在固着端。故

$$M_0 = wk \left(l - \frac{k}{2} \right) = 10 \times 12 (16 - 6) = 1,200 \text{ 呎磅}$$

$$= 14,400 \text{ 吋磅}$$

$$Z = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{M_0}{f}$$

但 $b = 3$ 吋， $f = 1,200$ 磅/平方吋

$$\therefore h^2 = \frac{6 \times 14,400}{3 \times 1,200} = 24 \quad \therefore h = 4.9 \text{ 吋約 } 5 \text{ 吋}$$

例 15. 有鋼製突出樑，其長5呎。斷面為長方形，寬2吋厚3吋。鋼之可容內力為12,000磅/平方吋。求自由端上所可加之最大集中荷重。

最大荷重設為 W 磅，則固着端上彎曲能率為

$$M_0 = Wl = W \times 5 \times 12 = 60W \text{ 吋磅}$$

$$Z = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} \times 2 \times 3^2 = 3 \text{ (吋)}^3$$

故 $M_0 = fZ$

即 $60W = 3 \times 12000$

$$\therefore W = \frac{3 \times 12000}{60} = 600 \text{ 磅}$$

例 16. 設某木材之突出樑, 其長 2 呎, 寬 1 吋, 厚 $1\frac{1}{2}$ 吋. 自由端上加 125 磅之外力, 而適破壞. 求該木材之最大強度.

最大彎曲能率 $M_0 = 125 \times 2 \times 12 = 3,000$ 吋磅

斷面係數 $Z = \frac{1}{6} \times 1 \times 1.5^2 = 0.375$ (吋)³

$$\therefore f = \frac{M_0}{Z} = \frac{3000}{0.375} = 8,000 \text{ 磅/平方吋}$$

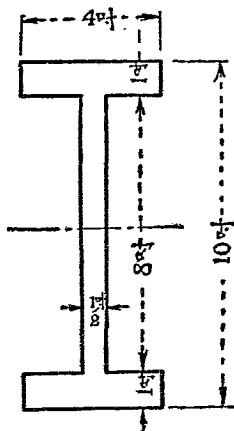
例 17. 第 83 圖之 I 形斷面支持樑, 長 16 呎. 略去自己重量時, 可容內力為 4 噸/平方吋. 問樑之中央可加至若干重量?

最大荷重設為 W 噸, 則樑之最大彎曲能率為

$$M_0 = \frac{1}{4} W \times 16 \times 12 = 48W \text{ 吋噸}$$

樑斷面之慣性能率為

$$I = \frac{4 \times 10^3 - 3.5 \times 8^3}{12} = \frac{4000 - 1792}{12} = 184 (\text{吋})^4$$



第 83 圖

故斷面係數爲 $Z = \frac{184}{5} = 36.8 (\text{吋})^3$

因之 $48W = 4 \times 36.8$

$$\therefore W = \frac{4 \times 36.8}{48} = 3.07 \text{ 噸約 } 3 \text{ 噸.}$$

例 18. 跨徑 12 呎之方 12 吋木樑支於兩端, 中央有荷重 2 噸. 求彎曲能率最大之斷面上最大之內力.

最大彎曲能率作用於跨徑中央之斷面。

$$M_0 = \frac{1}{4} \times 2 \times 2240 \times 12 \times 12 = 161,280 \text{ 吋磅}$$

$$Z = \frac{1}{6} \times 12^3 = 288 \text{ (吋)}^3$$

$$\therefore f = \frac{M_0}{Z} = \frac{161280}{288} = 560 \text{ 磅/平方吋}$$

例 19. 直徑 1 吋之圓棒，其彎曲能率可耐至 0.4 吋噸。若支於兩端，則可耐自己重量之最大長度若干？但圓棒重量每長 1 吋為 0.22 磅。

若斷面均一，則棒重可視為均布荷重。今棒長設為 l 吋，則

$$M_0 = \frac{1}{8} wl^2 = \frac{1}{8} \times 0.22 \times l^2 \text{ 吋磅}$$

$$\therefore \frac{1}{8} \times 0.22 \times l^2 = 0.4 \times 2240$$

或
$$l^2 = \frac{0.4 \times 2240 \times 8}{0.22} = 32,580 \text{ (吋)}^2$$

$$\therefore l = 180.5 \text{ 吋} = 15 \text{ 呎 } \frac{1}{2} \text{ 吋}$$

例 20. 方 1 吋之鋼棒曲成 50 呎之半徑時，求棒之最大之內力。但彎曲時，曲於一邊之平面

內。鋼之縱彈性係數爲 13,000 噸/平方吋。

曲率半徑與彎曲能率之關係爲

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

今 $R = 50 \times 12 = 600$ 吋, $I = \frac{1}{12} \times 1^4 = \frac{1}{12}$ (吋)⁴

$$M = \frac{EI}{R} = \frac{13000}{600 \times 12} = 1.8 \text{ 吋噸}$$

$$Z = \frac{1}{6} \times 1^3 = \frac{1}{6} \text{ (吋)}^3$$

$$f = \frac{M}{Z} = 1.8 \times 6 = 10.8 \text{ 噸/平方吋}$$

例 21. 厚爲寬 3 倍之矩形斷面樑與正方斷面樑, 其彎曲強度相等。求其重量之比。

彎曲強度相等者, 斷面係數相等之謂也。蓋受同大彎曲能率時, 所生最大內力相等故也。若材料同一, 則重量與容積成比例。同長之樑容積與橫斷面爲比例, 故本題乃求斷面係數相等之矩形與正方形之面積比也。

設矩形寬爲 b , 正方形一邊爲 s , 則

$$\text{矩形 } Z_1 = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}b(3b)^2 = \frac{3}{2}b^3$$

$$\text{正方形 } Z_2 = \frac{1}{6}s^3$$

$$\text{但 } Z_1 = Z_2, \therefore \frac{3}{2}b^3 = \frac{1}{6}s^3,$$

$$\text{或 } s = 2.08b$$

由此求面積,

$$\text{矩形 } A_1 = bh = 3b^2$$

$$\text{正方形 } A_2 = s^2 = 4.32b^2$$

$$\therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{3}{4.32} = \frac{1}{1.44}$$

例 22. 有一均一強度之突出樑, 其全長受均布荷重. 斷面為一定寬之矩形. 求外形之方程式.

樑長設為 l , 固着端之厚設為 h_0 , 由自由端相距 x 處斷面之厚設為 h , 則

$$f = \frac{6wl^2}{2bh_0^2} = \frac{6wx^2}{2bh^2}$$

$$\text{或 } \frac{l^2}{h_0^2} = \frac{x^2}{h^2} \quad \therefore \frac{h}{h_0} = \frac{x}{l}$$

h 與 x 之關係為一次，故為直線的變化。即樑之正面圖為三角形。

例 23. 矩形斷面之松材樑，寬 9 吋，厚 12 吋，支於兩端，跨徑 30 呎。中央懸 3,000 磅之重量時，求中央之曲率半徑及撓屈。但 E 為 1,230,000 磅/平方吋。且假定樑無重量。

中央之彎曲能率

$$M_0 = \frac{1}{4} Wl = \frac{1}{4} \times 3000 \times 30 \times 12 = 270,000 \text{ 吋磅}$$

$$\text{斷面慣性能率 } I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} \times 9 \times 12^3 = 1296 \text{ (吋)}^4$$

$$\begin{aligned} \text{故曲率半徑 } R &= \frac{EI}{M_0} = \frac{1230000 \times 1296}{270000} \\ &= 5904 \text{ 吋} = 492 \text{ 呎} \end{aligned}$$

又由撓屈之公式

$$d_0 = \frac{Wl^3}{48EI} = \frac{3000 \times 30^3 \times 12^3}{48 \times 1230000 \times 1296} = 1.83 \text{ 吋}$$

例 24. 支於兩端而中央有集中荷重之矩形斷面樑。最大撓屈若不超過跨徑之 $\frac{1}{n}$ 時，樑之

厚與跨徑之比須大於 $\frac{nf}{6E}$ 。試證明之。

中央有集中荷重之支持樑，最大撓屈起於荷重作用處。其值對於矩形斷面為

$$d_0 = \frac{Wl^3}{48EI} = \frac{Wl^3}{4Ebh^3}$$

由題意此必等於或小於 l/n 。

$$\therefore \frac{Wl^3}{4Ebh^3} \leq \frac{l}{n}$$

或
$$\frac{1}{4} Wl \leq \frac{Ebh^3}{nl}$$

或 $\frac{1}{4} Wl$ 為樑中央之最大彎曲能率，故

$$\frac{1}{4} Wl = \frac{1}{6} bh^2 f$$

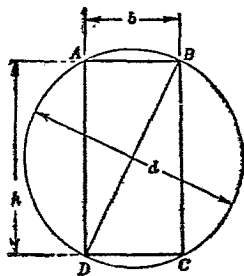
由上二式，

$$\frac{Eh}{nl} \geq \frac{f}{6}$$

即
$$\frac{h}{l} \geq \frac{nf}{6E}$$

例 25. 由原木截成最強矩形斷面之樑，其法如何？

第 84 圖圓 $ABCD$ 示原木之橫斷面。矩形 $ABCD$ 爲由原木所切成者。今決定此矩形之邊長，使成最強之樑。設此矩形一邊長爲 b ，他邊爲 h ，則由直角三角形三邊之關係，



第 84 圖

$$b^2 + h^2 = d^2 = \text{定數}$$

或

$$h^2 = d^2 - b^2$$

$$\therefore M = \frac{1}{6}fb(d^2 - b^2)$$

因 b 之變化， M 亦變化。

今求 M 最大時之 b 值，

$$\frac{dM}{db} = \frac{1}{6}f(d^2 - b^2 - 2b^2) = 0$$

$$\text{但} \quad \frac{1}{6}f \neq 0, \quad \therefore 3b^2 = d^2$$

$$\text{即} \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}d$$

$$\text{因之} \quad h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$$

例 26. 最大可容內力 1,500 磅/平方吋時，外徑 6 吋內徑 $4\frac{1}{2}$ 吋之鑄鐵管，其可耐之最大彎曲能率幾何？

視管為樑，其斷面為中空圓形，故

$$Z = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{3.14}{32} \times \frac{6^4 - 4.5^4}{6} = 14.6 \text{ (吋)}^3$$

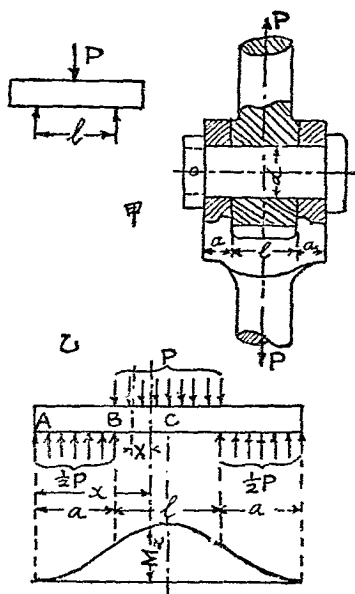
$$\therefore M = fZ = 1500 \times 14.6 = 21,900 \text{ 吋磅}$$

例 27. 叉接合 (knuckle joint) 上釘 (pin) 之強度。叉接合上釘受剪作用，彎作用與壓作用。簡單言之，釘可視為兩端支持，中央受荷重或分布荷重之樑。如第 85 圖。

此時集中荷重時， $M_{max} = \frac{1}{4} Pl$ ；分布荷重時，

$$M_{max} = \frac{1}{8} Pl.$$

然實際釘受分布荷重,且反作用力亦為分布之力,如第85圖乙.



第 85 圖

AB間彎曲能率為

$$M_x = \frac{wl}{4a} x^2 \dots \dots \dots (a)$$

但

$$w = \frac{P}{l}$$

B點彎曲能率為

$$M_B = \frac{1}{4} wal$$

BC間彎曲能率爲

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{x-a}^x \frac{\frac{1}{2}wl}{a} X dX - \int_0^{x-a} wX dX \\ &= \frac{wl}{4a} [x^2 - (x-a)^2] - \frac{w}{2} (x-a)^2 \\ &= \frac{w}{2} \left[l(x - \frac{a}{2}) - (x-a)^2 \right] \dots\dots\dots (b) \end{aligned}$$

上式中 M_x 當 $x = a + \frac{1}{2}l$ 時爲最大。而

$$M_{max} = \frac{1}{8} wl(2a+l) \dots\dots\dots (c)$$

普通 $a = \frac{1}{2}l$, 故 $M_{max} = \frac{1}{4} wl^2 = \frac{1}{4} Pl \dots\dots\dots (c')$

釘之剪斷抵抗由 § 40,

$$f_s = \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{(\text{面積})} = \frac{4}{3} \cdot \frac{P}{2 \times \frac{\pi}{4} d^2} = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{P}{d^2} \dots\dots\dots (d)$$

棒受拉伸時,

$$f_t = \frac{P}{\frac{\pi}{4} D^2} \dots\dots\dots (e)$$

但 D 爲棒直徑, f_t 爲棒之拉內力。

由 (c') 式 $\frac{1}{4}Pl = \frac{\pi}{32}f_b d^3 \dots\dots\dots (f)$

由 (e), (f) 兩式,

$$d = \sqrt[3]{2lD^2 \frac{f_t}{f_b}} \dots\dots\dots (g)$$

若 $l = D, f_t = f_b$, 則 $d = D\sqrt[3]{2} = 1.26 D$

更由 (d), (e) 兩式;

$$d = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{f_t}{f_s} D^2} \dots\dots\dots (h)$$

若 $f_t = f_s$,

$$d = D\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.817 D$$

故由彎作用, 則 $d = 1.26D$; 由剪作用, 則 $d = 0.817D$.

但實際上普通 $d = D$.

若由壓作用, 則

$$P = f_c l d = f_c \frac{\pi}{4} D^2$$

設 $l = D$, 則

$$d = \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{f_t}{f_c} D^2} \dots\dots\dots (i)$$

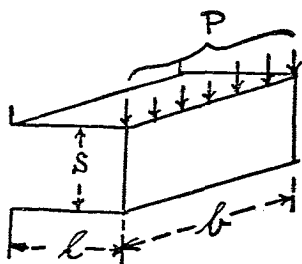
$\frac{f_t}{f_c}$ 略為 $\frac{4}{3}$, 則 d 可略等於 D .

例 28. 齒輪步距 (pitch) 之計算. 速度較低之齒, 以強度為眼目而定齒之尺寸. 第 86 圖上示一齒, 沿其尖端所傳之力 P 設為平均分布. 今齒高設為 l , 厚為 s , 寬為 b . P 所生之彎曲內力若使不超過 f_b , 則

$$f_b = \frac{6Pl}{bs^2}$$

或

$$P = \frac{bs^2 f_b}{6l}$$



第 86 圖

設 p 為步距, 而普通 $l = 0.7 p$, $s = 0.5 p$, 則

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{0.5^2}{0.7} f_b b p = 0.06 f_b b p$$

今設馬力為 H.P., 步距圓半徑為 r , 齒數為 n , 一

分間回轉數為 N . 則

$$2\pi r = np$$

因之
$$Pr = \frac{0.06}{2\pi} \cdot f_b n b p^2$$

P 若視為作用於比距圓, 則 Pr 為迴轉能率 T .

今設 $b = 2p$, 則

$$0.06 f_b n p^3 = T\pi$$

或

$$p = \sqrt[3]{\frac{\pi}{0.06 f_b n} T}$$

又

$$\text{H.P.} = \frac{Pr \times 2\pi N}{33000} = \frac{2\pi NT}{33000}$$

$$\therefore T = \frac{33000 \text{ H.P.}}{2\pi N}$$

因之

$$p = \sqrt[3]{\frac{16500 \text{ H.P.}}{0.06 f_b n N}}$$

問 題

1. 長 12 呎之突出樑上每長 1 呎 300 磅之均布荷重作用時, 求最大彎曲能率.

2. 跨徑 42 呎之樑, 支於兩端. 自一支點相距 1, 6, 14, 24, 31 呎之處各有 5, 5, 11, 12, 9 噸之荷重

作用之。求兩支點上反作用力及荷重作用點上各彎曲能率。

3. 支點間距離 32 呎之樑，由其左端全長 $\frac{1}{2}$ 之間有每呎 1 噸之均布荷重作用之。求最大彎曲能率及危險斷面之位置。

4. 支距間距離 24 呎，全長有總量 60 噸之均布荷重，及自左方支點距 6 呎處向右方 8 呎之間有總量 12 噸之均布荷重。求危險斷面之位置及最大彎曲能率。

5. 最大之內力 7.5 噸/平方吋，高 10 吋，慣性能率 145 (吋)⁴。求此斷面之樑之抵抗能率。

6. 兩支點間距 l 之樑，兩支點外各突出 a, b 之長。第一端上有 W_a ，第二端上有 W_b 荷重之作用。則兩支點中央彎曲能率之值為一定，且與 l 無關。試證明之。

7. 長 6 呎之木材突出樑，使支持總量 1200 磅之均布荷重。斷面之寬若為 4 吋，則厚須幾吋？但木材之最大強度為 9,000 磅/平方吋，安全率

爲5.

8. 長20呎之支持樑,支持總量1噸之均布荷重. 自一端距7呎處斷面之彎曲能率幾何?

9. 跨徑14呎之木材支持樑,其斷面爲寬8吋,厚12吋之矩形斷面. 跨徑中央有3噸之集中荷重. 求所生最大之內力與中央之曲率半徑.

10. 矩形斷面之木材樑,支於兩端,跨徑30呎,有每呎0.5噸之均布荷重作用之. 樑之厚爲寬之1.6倍. 木材之最大強度爲14,700磅/平方吋,安全率爲14. 求斷面之尺寸.

11. 車軸上負擔6噸之荷重,兩車輪距離6呎. 軸座(bearing)距離5呎時,求剪力圖與彎曲能率圖.

12. 跨徑24呎之樑,支於兩端,跨徑之各四等分點上有20噸,30噸,40噸之荷重. 求兩支點上反作用力及荷重作用處彎曲能率. 並作剪力圖與彎曲能率圖.

13. 長18呎寬4吋厚12吋之木材樑,支於兩

端。求作自己重量所生之剪力及彎曲能率圖。但木材每立方呎重量爲48磅。

14. 高14吋慣性能率440 (吋)⁴之I形斷面樑，支於跨徑20呎時，使最大撓屈不超過 $\frac{1}{4}$ 吋。則中央可懸若干荷重？又此荷重作用時，所生最大值內力幾何？

15. 前題若不爲中央之集中荷重而爲均布荷重則如何？

16. 長40呎之樑，支於各距兩端8呎處。全長上受1噸/呎之均布荷重。求彎曲能率圖及剪力圖。

17. 有I形斷面之樑，高12吋，上下邊 (flange) 寬6吋，厚1吋，中部 (web) 厚 $\frac{7}{8}$ 吋。此樑與他矩形樑，其重量相等，高爲寬之2倍，試比較其強度。

18. 兩邊長3吋與9吋之矩形斷面樑。短邊置於水平時，與長邊置於水平時強度之比如何？

19. 有正方形斷面之樑。使用時一邊垂直與對角線垂直之強度比如何？

20. 將直徑 $\frac{1}{4}$ 吋鋼線彎成圓弧。使鋼線內力不超過 $6\frac{1}{2}$ 噸/平方吋時，圓之直徑最小幾何？但 $E=13,000$ 噸/平方吋。

21. 斷面厚 $\frac{1}{20}$ 吋之鋼板捲成直徑 2.5 呎之圓筒。所生最大值之內力幾何？但 $E=13,500$ 噸/平方吋。

22. 兩端固着，長 20 呎之樑上，有總量 12 噸之均布荷重。求最大值之內力。但樑斷面之高為 12 吋，慣性能率為 220 (吋)⁴。

23. 斷面大小一定之連續樑，支於三點。第一跨徑長為 l ，第二跨徑長為 $2l$ 。第一跨徑上有每單位長 $2w$ 之均布荷重，第二跨徑上有每單位長 w 之均布荷重。求支點上反作用力及各跨徑之最大彎曲能率與中央支點之彎曲能率。

24. 有貨車用疊板彈條。寬 4 吋，厚 $\frac{1}{2}$ 吋之

板共 10 塊. 跨徑 4 呎. 最大撓屈 1.5 吋時可支荷重幾何? 又此荷重作用時, 所生內力幾許? 但 $E=13,000$ 噸/平方吋.

第五章

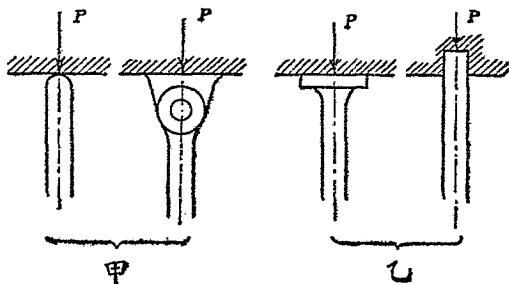
柱

42. 柱. 前述拉與壓時,對於拉無特別制限,而壓縮時則棒之橫斷面積須較其長為相當大者. 蓋若長度在橫之最小尺寸三倍以下之短棒,則內力略平均分布於斷面. 而斷面積為 A ,破壞內力為 f 時,則最大荷重可滿足於 $P=fA$ 之關係. 然棒若長則必同時生多少之彎曲作用,外力未達 fA 而棒已早破壞. 故上式不能應用於長棒. 壓縮時,同時起彎曲作用之長棒稱曰柱(column or pillar)或撐(strut). 另有公式計算之. 一般稱曰長柱(long column)之公式.

細長棒兩端沿棒向壓縮之,必多少彎曲. 由此受彎曲內力之作用. 故此時為壓縮內力與彎曲內力之合成作用. 若短棒則無彎曲作用,僅有壓縮內力. 外觀上若能耐大內力者.

43. 柱端之附着. 柱之強度因彎曲作用而定. 故長與斷面之比例, 其影響甚大. 即棒長而細者易於彎曲而破壞. 且破壞難易不僅由於尺寸之如何, 又為兩端附着法所支配. 同大之柱, 若附着法易於彎曲者, 易於破壞.

第 87 圖甲 示活動附着端或自由端 (hinged end or rounded end). 棒之軸線方向對於此端可自由傾斜. 同圖乙 示固着端 (fixed end or flat end). 柱之軸線方向在此端上, 雖任何彎曲, 受限制而一定不變者也. 故同一尺寸之柱, 若兩端同為活動附着端, 則彎曲最易. 一端固着者較稍難. 兩端同固着者最難彎曲而柱最強.



第 87 圖

柱起彎曲之方向因橫斷面之形而異。屈曲時，慣性能率較斷面大小其關係尤大。對於柱軸線為對稱之斷面即圓，中空圓等，屈曲方向不定，因周圍狀態而異。然非對稱斷面時，則慣性能率最小軸之直角方向上生彎曲。

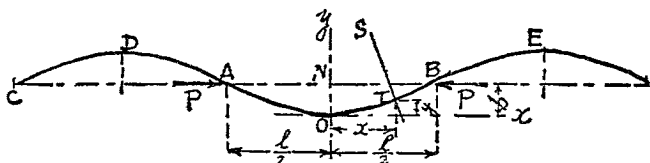
44. 關於柱之屋伊勒 (Euler) 公式。關於柱之公式自分兩種。一為純數理的，對於理想的假定而求得者。一為由實驗的數值應用於數理的公式而得者。後者少與理論的不合一，而能一致於實驗的結果。要之柱之公式研究複雜之合成內力，故不得與單內力或樑之計算得同一程度之精確。

理論的公式有屋伊勒式。此式對於橫斷面小而長度甚大之均質直棒，沿軸向上外力作用時可適用之。

第 88 圖 AB 為細長棒。兩端受軸線的荷重 PP ，則棒彎曲成 AOB 。此彎曲狀態繼續於棒之左右，成 $CDAOBE$ 之波形。或 AB 間波之頂部不

止一個而有數多波形，亦未可知。但此時為不安定。由數學上理論，知曲率半徑 R 為

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$



第 88 圖

但傾斜 $\frac{dy}{dx}$ 為極小，故上式右邊分母可視為 1。因之

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

長柱之曲度甚小，故第 88 圖上 OY 及 ST 可視為平行。故對於斷面 T ，

$$\frac{1}{R} = \frac{(b-y)P}{EI}$$

或
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EI} (b-y) \dots \dots \dots (a)$$

若長柱斷面均一時, I 為常數, $\frac{P}{EI}$ 亦為定數. 故

微分方程式(a)之兩邊乘以 $2\frac{dy}{dx}$ 而積分之, 則

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{P}{EI}(2by - y^2) + C_1$$

$x=0$ 時, $\frac{dy}{dx}=0, y=0$. 故 $C_1=0$.

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{P}{EI}(2by - y^2) \dots\dots\dots(b)$$

或
$$\frac{dy}{\sqrt{2by - y^2}} = \sqrt{\frac{P}{EI}} dx$$

或
$$\frac{d(b-y)}{\sqrt{b^2 - (b-y)^2}} = -\sqrt{\frac{P}{EI}} dx$$

再積分之,

$$\sin^{-1} \frac{b-y}{b} = -\sqrt{\frac{P}{EI}} x + C_2$$

但 $x=0, y=0 \quad \therefore C_2 = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \sin^{-1} \frac{b-y}{b} = -\sqrt{\frac{P}{EI}} x + \frac{\pi}{2}$$

或
$$\frac{b-y}{b} = \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \dots\dots\dots(c)$$

$x = \frac{l}{2}$ 時, $y = b$.

$$\therefore 0 = \cos\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

或 $P = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$ (第 89 圖甲).....(66)

此式為兩端自由之柱之公式。

兩端固着時, 可由 (66) 式導出。即此時兩端軸線方向不變。因之彎曲後軸線形狀如第 88 圖之 $DAOBE$ 之正弦曲線 (sine curve)。而柱長自 D 至 E 。此時 (66) 中 l 為 $\frac{1}{2}l$ 。故得

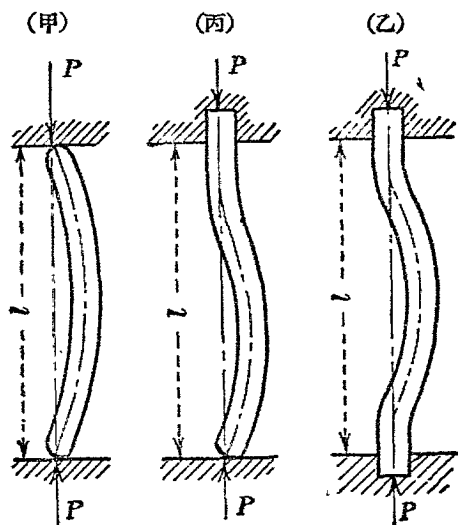
$$P = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2} \text{ (第 89 圖乙) } \dots\dots\dots(67)$$

一端固着一端自由之柱, 則 (66) 中之 l 為 $\frac{3}{4}l$ 。故

$$P = \frac{9}{4}\pi^2 \frac{EI}{l^2} = 2\pi^2 \frac{EI}{l^2} \text{ (第 89 圖丙) } \dots\dots\dots(68)$$

以上各式中 P 為柱開始彎曲時之荷重, E 為

柱之縱彈性係數, I 爲柱橫斷面之最小慣性率, l 爲柱之有效長。



第 89 圖

上諸式中不含材料之壓縮強度, 且在彈性限界以內, 雖在任何彎曲位置, 可保平衡. 故開始彎曲之荷重爲安全荷重, 而亦爲破壞荷重. 較屋伊勒公式所示者更小之荷重, 可使柱保持其直線形. 因之僅有壓縮內力之作用. 荷重若達上式 P 值時, 柱生彎曲. 且撓屈之值不因

P 之大小,可達任何值. 而彎曲能率與撓屈成正比例,因之屈曲內力亦增,最後達破壞. 故開始彎曲之荷重,可視為破壞荷重也.

若荷重未達 P 時,而內力已達壓縮之降服點或壓縮之最大強度之短柱,則屋伊勒公式不能適用. 其限界如次.

屋伊勒公式一般寫為

$$P = n\pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

n 表常數 1, 2, 4. $I = Ak^2$. 故

$$\frac{P}{A} = p_0 = n\pi^2 E \frac{k^2}{l^2}$$

但 p_0 為降服點內力, k 為斷面之迴轉半徑, A 為斷面積. p_0 與 E 已知時, $\frac{k}{l}$ 之最大值可求. 此為公式適用之限界. 即

$$\frac{l}{k} = \pi \sqrt{n} \sqrt{\frac{E}{p_0}}$$

今就重要材料,求 $\frac{l}{k}$ 之值如下:

$$\text{鑄鐵} \quad \pi\sqrt{\frac{17,000,000}{40,000}} = 65 \quad (\text{約})$$

$$\text{軟鋼} \quad \pi\sqrt{\frac{30,000,000}{36,000}} = 91 \quad (\text{約})$$

$$\text{木材} \quad \text{平均} \quad 53$$

此等之值乘以 n 可得 $\frac{l}{k}$ 之最小值。即兩端均自由時，爲上記之值。一端固着時，須乘以 $\sqrt{2} = 1.41$ 。兩端均固着時，須乘以 2。

例 1. 對於圓形斷面之柱，求屋伊勒公式之適用限界。

設圓形斷面之直徑爲 d ，則

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{64}d^4}{\frac{\pi}{4}d^2}} = \frac{d}{4}$$

$$\therefore \frac{l}{k} = \frac{4l}{d}$$

對於兩端之軟鋼棒，則

$$\frac{l}{k} = 91 = \frac{4l}{d}$$

$$\therefore \frac{l}{d} = 22.75, \text{ 或 } l = 22.75 d.$$

例 2. 以 6 吋方之松材，作 12 呎長之自由端柱。其安全荷重如何？

對於松材， $E=1,400,000$ 磅/平方吋， $p_0=5,500$ 磅/平方吋，故對於自由端，

$$\frac{l}{k} = \pi \sqrt{\frac{1,400,000}{5,500}} = 50 \text{ (約)}$$

但 $l=12$ 呎 $=144$ 吋，

$$\therefore k = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} \times 6^4}{6^2}} = \sqrt{3} = 1.732 \text{ 吋}$$

即
$$\frac{l}{k} = \frac{144}{1.732} = 83 \text{ (約)}$$

故屋伊勒公式可適用。其破壞荷重爲

$$P = \pi^2 \frac{EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 1,400,000 \times \frac{6^4}{12}}{(12 \times 12)^2} = 71,950 \text{ 磅} = 32.1 \text{ 噸}$$

若安全率爲 10，則
$$P_s = \frac{P}{10} = 3.21 \text{ 噸}.$$

45. 古爾屯藍慶 (Gordon-Rankine) 之公式.

台爾屯藍慶公式爲現時計算柱之強度上最多用者。其形自屋伊勒理論式導出，而加以實驗的係數者也。

$$\text{對於短柱,} \quad P_1 = fA$$

$$\text{對於長柱,} \quad P_2 = n\pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

故對於任何之柱可書爲

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}$$

但 P 爲破壞荷重。蓋若極短柱，則 P_2 極大，而

$\frac{1}{P_2}$ 甚小，可略去之。因之 $P = P_1$ 。若極長柱，則

可略去 $\frac{1}{P_1}$ 而 $P = P_2$ 。故上式兩極端時與理論一

致。因之

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\frac{1}{fA} + \frac{1}{n\pi^2 EI}} = \frac{fA}{1 + \frac{fl^2}{n\pi^2 Ek^2}} \\ &= \frac{fA}{1 + n'a \left(\frac{l}{k}\right)^2} \end{aligned}$$

但 n' 爲兩端附着法之常數, a 及 f 爲實驗係數。上之公式明記之如下:

(1) 兩端自由之柱(第 89 圖甲)

$$P = \frac{fA}{1 + 4a\left(\frac{l}{k}\right)^2} \dots\dots\dots(69)$$

(2) 一端固着他端自由之柱(第 89 圖丙)

$$P = \frac{fA}{1 + 2a\left(\frac{l}{k}\right)^2} \dots\dots\dots(70)$$

(3) 兩端固着之柱(第 89 圖乙)

$$P = \frac{fA}{1 + a\left(\frac{l}{k}\right)^2} \dots\dots\dots(71)$$

但 P 爲破壞壓縮荷重, f 爲實驗上之壓縮強度, l 爲柱之有效長, A 爲柱之橫斷面積, k 爲斷面之最小迴轉半徑, a 爲關係於材料之實驗係數。次示重要材料之 f 及 a 之值。

材 料	f 磅/平方吋	a
鍊 鐵	36,000	$\frac{1}{36,000}$
鑄 鐵	80,000	$\frac{1}{6,400}$
軟 鋼	48,000	$\frac{1}{30,000}$
硬 鋼	70,000	$\frac{1}{20,000}$
乾 燥 木 材	7,200	$\frac{1}{3,000}$

由實驗結果,則 $\frac{l}{k}$ 在 20 至 100 內外之間,古爾屯藍慶之公式甚與實際之值相一致. $\frac{l}{k}$ 在 150 以上,則屋伊勒公式為適用. 但實際 $\frac{l}{k}$ 無此大值,故多用古爾屯藍慶之公式

例 3. 兩端自由之軟鋼支柱,長 6 呎,斷面積為 3.634 平方吋. 斷面之最小慣性能率為 4.7(吋)⁴. 問加幾噸外力壓縮時方破壞?

$$\text{先求 } \frac{l}{k} \text{ 之值. } k^2 = \frac{I}{A} = \frac{4.7}{3.634} = 1.293 \text{ (吋)}^2.$$

$$\left(\frac{l}{k}\right)^2 = \frac{(6 \times 12)^2}{1.293} = 4,000, \quad \therefore \frac{l}{k} = 63.2$$

故以古爾屯藍慶公式計算之爲適當。

$$\text{對於軟鋼, } f = 48,000 \text{ 磅/平方吋, } a = \frac{1}{30,000}$$

$$\therefore P = \frac{48,000 \times 3.634}{1 + \frac{4}{30,000} \times 4,000} = 114,000 \text{ 磅} = 50.8 \text{ 噸}$$

例 4. 兩端活動附着之木材直柱,長 9 呎,斷面積爲 8 吋 \times 10 吋之矩形,安全使用內力爲 900 磅/平方吋時,安全荷重幾何?

最小慣性能率爲

$$I = \frac{1}{12} \times 10 \times 8^3 = 426.7 \text{ (吋)}^4$$

柱之斷面積爲 $A = 8 \times 10 = 80$ 平方吋。

$$k^2 = \frac{I}{A} = \frac{426.7}{80} = 5.33 \text{ (吋)}^2$$

$$\text{故 } P = \frac{900 \times 80}{1 + \frac{4 \times (9 \times 12)^2}{3,000 \times 5.33}} = 18,370 \text{ 磅} = 8.20 \text{ 噸}$$

46. 其他之公式. 實用上公式自古爾屯藍

慶公式外尚有數多。茲舉其一二如下。

江遜 (Johnson) 公式。江遜將 $\frac{l}{k}$ 與 p_0 之關係以拋物線式表之如下：

$$p_0 = f_c - b \left(\frac{l}{k} \right)^2 \dots\dots\dots (72)$$

但 f_c 爲對於壓縮之降服點內力， b 爲實驗常數。對於兩端無摩擦之柱，與屋伊勒公式相比較，則

$b = \frac{f_c^2}{4\pi^2 E}$ 。但實際有摩擦等影響，故江遜對於自

由端用 $\frac{f_c^2}{64E}$ ，對於固着端用 $\frac{f_c^2}{100E}$ 。

李里 (Lilly) 公式。李里氏就多數之活動附着端之鋼製小管柱實驗之。發見古爾屯藍慶之公式中 f 之值起於管之第二種撓屈 (secondary flexure)。此第二種撓屈與柱長無關，僅由管厚及其回轉半徑而定。此等與古爾屯藍慶式中 f 之關係爲

$$f = \frac{F}{1 + \beta \left(\frac{l}{t} \right)^2} \dots\dots\dots (73)$$

但 F 為材料之壓縮強度, β 為實驗係數, 對於鍊鐵及軟鋼取為 $\frac{1}{60}$, t 為管厚, k 為斷面之回轉半徑. 此公式乃求出古爾屯藍慶公式中 f 之值, 由此所得之 f 代入於古爾屯藍慶公式中者也. 但此式不適用於管厚對於直徑為大者, $\frac{k}{t}$ 漸小時, f 略與 F 相等.

例 5. 外徑及內徑各為 5 吋與 4.5 吋之軟鋼管, 長 100 吋, 兩端活動附着. 用李里公式求 f 之值而計算破壞荷重, 但 $F=30$ 噸/平方吋.

柱橫斷面為中空圓形,

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4), \quad A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$$

$$\therefore k^2 = \frac{I}{A} = \frac{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)} = \frac{1}{16}(D^2 + d^2)$$

故 $k^2 = \frac{5^2 + 4.5^2}{16} = \frac{45.25}{16} = 2.83 \text{ (吋)}^2$

$$A = \frac{3.14}{4}(5^2 - 4.5^2) = \frac{3.14 \times 4.75}{4} = 3.73 \text{ 平方吋}$$

$$t = \frac{1}{2}(D-d) = \frac{1}{2}(5-4.5) = 0.25 \text{ 吋}$$

$$\therefore \left(\frac{k}{t}\right)^2 = \frac{2.83}{0.25^2} = 45.25$$

$$\text{因之 } f = \frac{30}{1 + \frac{1}{60} \times 45.25} = \frac{30}{1.754} = 17.1 \text{ 噸/平方吋}$$

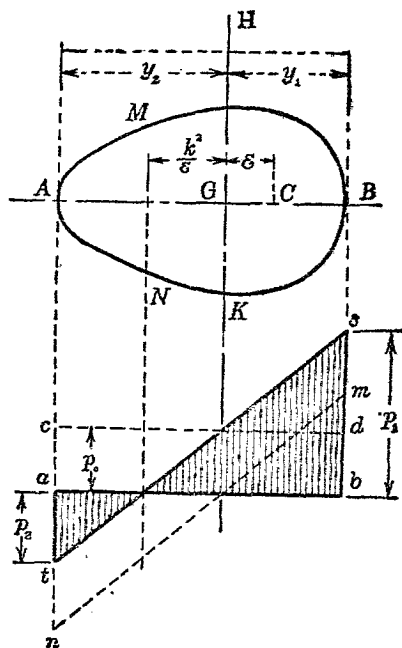
$$\therefore P = \frac{17.1 \times 3.73}{1 + \frac{4}{36,000} \times \frac{100^2}{2.83}} = \frac{17.1 \times 3.73}{1.393} = 45.8 \text{ 噸}$$

47. 偏心荷重作用之柱. 上述之柱, 外力作用於軸線上, 即受軸線荷重(axial load)者也. 然實際上往往壓縮力之作用線不在軸向上, 而在其平行方向, 偏於軸線一側. 此曰偏心荷重(eccentric load). (荷重作用方向若與軸傾斜時, 當另研究之.) 對於此種之柱, 橫斷面上內力分布不能視為平均分布. 大部分內力與偏心(eccentricity)成比例而作用於偏向之側. 以較軸線荷重更小之荷重而破壞.

(1) 短柱. 第90圖示偏心荷重作用之柱之

橫斷面。 G 爲斷面重心，即軸線之切口。 C 爲荷重作用線之切口。 設荷重大小爲 P ，則縱內力爲

$$p_0 = \frac{P}{A}$$



第 90 圖

又此斷面上有 $P\epsilon$ 彎曲能率之作用，故有彎曲

內力 p_0 之作用。圖示 $abcd$ 爲僅有壓縮內力之線圖, $abmn$ 爲僅有彎曲內力之線圖。故斷面上作用之內力, 爲此兩內力之合成。即圖上 $abst$ 所表示者。

$$p_0 = \frac{P}{A}$$

$$p_b = \frac{P\varepsilon}{Z} = \frac{P\varepsilon y}{I}$$

但 $I = Ak^2$, $\therefore p_b = \frac{P\varepsilon y}{Ak^2} = \frac{P}{A} \left(\frac{\varepsilon y}{k^2} \right) = p_0 \frac{\varepsilon y}{k^2}$

故

$$p = p_0 + p_b = p_0 \left(1 + \frac{\varepsilon y}{k^2} \right)$$

y 對於 G 在荷重同側者爲正, 異側者爲負。因之兩端內力爲

$$p_1 = p_0 \left(1 + \frac{\varepsilon y_1}{k^2} \right)$$

$$p_2 = p_0 \left(1 - \frac{\varepsilon y_2}{k^2} \right)$$

p_1 爲最大內力。

若斷面對於 HK 爲對稱, 則 $y_1 = y_2 = \frac{h}{2}$ 。

$$\therefore p_1 = p_0 \left(1 + \frac{\varepsilon h}{2k^2} \right), \quad p_2 = p_0 \left(1 - \frac{\varepsilon h}{2k^2} \right)$$

$y = -\frac{k^2}{\varepsilon}$ 時, $p = 0$. 故 $\frac{k^2}{\varepsilon}$ 較 y_2 小時, 此部分在斷面內, 而生無內力作用之部分. 圖中 MN 即此也. 此即中性軸. 若 $\frac{k^2}{\varepsilon}$ 較 y_2 大時, 則斷面中無內力爲零之部. 即僅有壓縮內力之作用. 荷重偏向側端面內力最大, 其反對側端面內力最小. 又荷重之反對側可生拉內力, 故鑄鐵等耐壓強而耐拉弱之材料, 反因拉內力而破壞者.

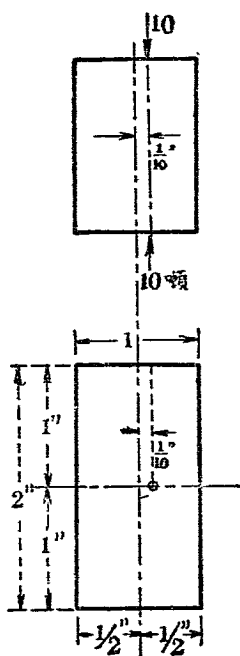
例 6. 第 91 圖所示矩形斷面之短柱, 以 10 噸之力, $\frac{1}{10}$ 吋之偏心壓之. 求所生最大値之內力.

壓縮內力爲

$$p_0 = \frac{P}{A} = \frac{10}{2 \times 1} = 5 \text{ 噸/平方吋}$$

$$k^2 = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{bh} = \frac{1}{12}h^2 = \frac{1}{12} \times 1^2 = \frac{1}{12} (\text{吋})^2$$

$$y_1 = \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \text{ 吋}$$



第 91 圖

故最大值內力爲

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_0 \left(1 + \frac{\varepsilon y_1}{k^2} \right) = 5 \left(1 + \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} \right) \\
 &= 5 \times \left(\frac{5+3}{5} \right) = 8 \text{ 噸/平方吋}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_2 &= p_0 \left(1 - \frac{\varepsilon y_2}{k^2} \right) = 5 \left(1 - \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} \right) \\
 &= 5 \left(\frac{5-3}{5} \right) = 2 \text{ 噸/平方吋}
 \end{aligned}$$

例7. 外徑8吋, 內徑6吋之管狀鑄鐵柱. 自中心 $1\frac{3}{4}$ 吋偏心處有20噸荷重之作用. 求最大值內力.

斷面積為

$$A = \frac{\pi}{4}(8^2 - 6^2) = 22.0 \text{ 平方吋}$$

壓縮內力強

$$p_0 = \frac{20}{22} = 0.909 \text{ 噸/平方吋}$$

斷面慣性能率

$$I = \frac{\pi}{64}(8^4 - 6^4) = 137.5 (\text{吋})^4$$

迴轉半徑

$$k^2 = \frac{I}{A} = \frac{137.5}{22} = 6.25 (\text{吋})^2$$

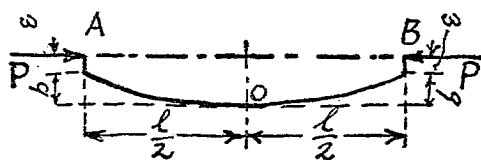
$$\therefore p_1 = p_0 \left(1 + \frac{\varepsilon y_1}{k^2} \right) = 0.909 \left(1 + \frac{1.75 \times 4}{6.25} \right)$$

$$= 1.927 \text{ 噸/平方吋 (壓內力)}$$

$$p_2 = p_0 \left(1 - \frac{\varepsilon y_2}{k^2} \right) = 0.909 \left(1 - \frac{1.75 \times 4}{6.25} \right)$$

$$= -0.109 \text{ 噸/平方吋 (拉內力)}$$

(2) 長柱. 今設如第 92 圖所示兩端自由之長柱, 荷重作用處偏心為 ε , 則由 § 44 之方法得



第 92 圖

$$\frac{b + \varepsilon - y}{b + \varepsilon} = \cos \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

$$x = \frac{1}{2}l, y = b. \quad \therefore \frac{\varepsilon}{b + \varepsilon} = \cos \left(\frac{1}{2}l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

對於 O 處斷面, $p_a = \frac{P}{A}$

$$p_b = \frac{P(b + \varepsilon)}{Z} = \frac{y}{I} P \varepsilon \sec \left(\frac{1}{2}l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad p &= p_0 + p_b = \frac{P}{A} \left\{ 1 + \frac{\epsilon y}{k^2} \sec \left(\frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \right\} \\ &= p_0 \left\{ 1 + \frac{\epsilon y}{k^2} \sec \left(\frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \right\} \end{aligned}$$

此 p 之值不得大於材料降伏點之壓縮內力 f_c 。故兩端自由之長柱，

$$p_0 = \frac{f_c}{1 + \frac{\epsilon y}{k^2} \sec \left(\frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} \dots\dots\dots (74)$$

同樣對於兩端固着之長柱，則

$$p_0 = \frac{f_c}{1 + \frac{\epsilon y}{k^2} \sec \left(\frac{1}{4} l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} \dots\dots\dots (75)$$

例 8. 例 7 之管形柱，長 40 呎，兩端固着。20 噸荷重自中心 $1\frac{3}{4}$ 偏心處作用時，求最大值之內力。 $E=5,000$ 噸/平方吋。

$$k^2 = 6.25 \text{ (吋)}^2$$

$$\begin{aligned} \sec \left(\frac{1}{4} l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) &= \sec \left(\frac{1}{4} l \sqrt{\frac{p_0 A}{E A k^2}} \right) \\ &= \sec \left(\frac{1}{4} l \sqrt{\frac{p_0}{E k^2}} \right) \end{aligned}$$

$$= \sec \frac{480}{4} \sqrt{\frac{0.909}{5,000 \times 6.25}} = \sec 0.646 = \sec 37^\circ$$

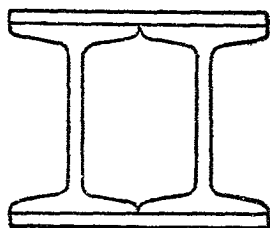
$$= 1.25$$

$$\therefore f_c = p_0 \left(1 + \frac{1.75 \times 4}{6.25} \times 1.25 \right) = 0.909 (1 + 1.4)$$

$$= 2.18 \text{ 噸/平方吋}$$

問 題

1. 圖示合成斷面之鋼柱，其橫斷面積為 39.88 平方吋，最小迴轉半徑為 3.84 吋。長 40 呎，兩端固着。由屋伊勒及古爾屯藍慶公式求其最大荷重。



第 93 圖

2. 圓管形鑄鐵柱，外徑 8 吋，長 20 呎，兩端固着。支持 80 噸荷重時，設安全率為 6，求管之必要厚度。（用古爾屯藍慶公式為便。）

3. 直徑 4 吋長 5 呎之鍊鐵圓棒，一端固着，一端自由。安全率為 8。試用古爾屯藍慶公式求安全荷重。

4. 一邊長 7 吋之方松柱，全長 8 呎，其端為活動附着。設安全內力為 700 磅/平方吋，由古爾屯藍慶公式求安全荷重。

5. 正方形斷面之長 12 呎之兩端固定木柱，須安全支持 15 噸之荷重。安全率為 10，求斷面每邊長。

6. 兩端自由之軟鋼棒，斷面積 4.77 平方吋，慣性能率 $6.07(\text{吋})^4$ 。安全支持 4 噸之壓縮力時，求最大之長。但安全率為 4。

7. 鑄鐵短柱，有外徑 6 吋，內徑 5 吋之管形斷面。受 12 噸荷重。荷重作用點離中心 $\frac{1}{2}$ 吋時，求最大及最小壓內力。

8. 起重機柱之斷面為 I 形，斷面積 24 平方吋，高 25 吋，慣性能率 3,000 $(\text{吋})^4$ 。吊 10 噸荷重於水平半徑 14 呎之處。求最大壓內力與拉內力。

(短柱之計算)

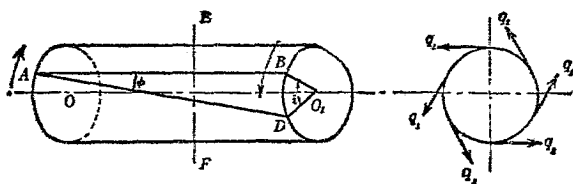
9. 中空矩形斷面之鑄鐵柱, 外形爲4吋×5吋, 內形爲3吋×4吋. 兩端固着, 長18呎. 由古爾屯藍慶公式求安全荷重. 但安全率爲8.

10. 軟鋼圓棒之支柱, 長5呎, 兩端爲自由之活動附着. 受12噸之壓縮力. 若壓縮力作用線自軸線偏 $\frac{1}{10}$ 吋時, 使最大內力不超過6噸/平方吋. 求直徑幾何. $E=13,000$ 噸/平方吋.

第 六 章

扭 及 軸

43. 圓軸之扭. 圓形之均等橫斷面之棒或圓軸, 固定其一端而他端加以偶力扭轉時, 軸之各部生扭內力而生歪. 此時之內力為單純之剪斷內力. 第94圖示圓軸表面平行於軸線 OO_1 之 AB 直線, 變形後取 AD 之位置. 半徑 O_1B 移至 O_1D 之位置. 其歪可視為各橫斷面對於其隣接斷面所扭轉之角度, 而扭轉之量與自固定端之距離成正比例. 故線 AD 各部分與其原線方向所成之角 ϕ 為一定, 線 AD 成一螺旋狀 (helix).



第 94 圖

而角 ϕ 稱曰歪角 (angle of shears). 然扭轉之量與自 A 之距成比例, 故 BD 最大. 此值為各少量扭轉沿軸長方向上所集成, 故取其單位長上之扭轉量以表歪. 即 ϕ 角以弧度法表之者是也.

斷面 O_1BD 上半徑 O_1B 與 O_1D 間之角 i , 稱曰扭角 (angle of twist). 其值與 AB 之長成比例.

今設任意橫斷面 EF , 作用於軸外周面之剪內力為 q_1 , 軸半徑為 r_1 , 則

$$q_1 = N\phi$$

$$\text{又} \quad i = \frac{BD}{r_1} = \frac{l\phi}{r_1}$$

但 l 為 AB 之長. 故

$$i = \frac{q_1 l}{Nr_1}$$

此為外周面上之關係. 次就圓軸內部之內力及歪考察之. 半徑 O_1B 扭轉後成半徑 O_1D , 亦為直線. 故斷面各點歪之值與中心距離為比例. 因之內力之強亦與中心距離即半徑為比例. 故任意半徑 r 處之剪內力 q 為

$$\frac{q}{r} = \frac{q_1}{r_1}$$

或

$$q = \frac{q_1 r}{r_1}$$

今設半徑 r , 半徑方向上寬 dr 之微小輪狀面, 而求該面積上剪內力之總量. 設此部分上剪內力強為 q , 則剪力總量為 $q \cdot 2\pi r \cdot dr$, 或 $\frac{q_1}{r_1} \cdot r \times 2\pi r dr$. 其對於軸中心, 此力之能率為

$$\frac{q_1}{r_1} \times r \times 2\pi r dr \times r = \frac{q_1}{r_1} \cdot 2\pi r^3 \cdot dr$$

對於斷面全體積分之, 總能率為

$$\int_0^{r_1} 2\pi \cdot \frac{q_1}{r_1} r^3 dr = \frac{\pi}{2} q_1 r_1^3$$

若中空圓軸, 則 r 由內部半徑 r_2 至外部半徑 r_1 . 故總能率為

$$\int_{r_2}^{r_1} 2\pi \cdot \frac{q_1}{r_1} r^3 dr = \frac{\pi}{2} q_1 \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1}$$

此為對於外部所加扭作用而抵抗之內力對於中心之能率. 故稱曰極抵抗能率 (polar resisting moment).

外部所加偶力之能率，稱曰扭轉能率 (twisting moment)。普通以 T 表之。圓軸之平衡關係為扭轉能率等於極抵抗能率。故

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{\pi}{2} q_1 r_1^3 \quad (\text{實體圓軸}) \\ T &= \frac{\pi}{2} q_1 \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1} \quad (\text{中空圓軸}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (76)$$

或 q_1 即材料之可容最大剪內力 f_s ，又半徑以直徑表之，則上式為

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{\pi}{16} f_s d^3 \quad (\text{實體圓軸}) \\ T &= \frac{\pi}{16} f_s \frac{d^4 - d_0^4}{d} \quad (\text{中空圓軸}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (76a)$$

但 d_0 為中空部直徑。上式即普通所用計算圓軸強度之式。

49. 軸之扭角。扭角之式如上所示

$$i = \frac{q_1 l}{N r_1} = \frac{2 f_s l}{N d}$$

由 (76a) 得

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{32}{\pi N} \cdot \frac{T l}{d^3} \quad (\text{實體圓軸}) \\ i &= \frac{32}{\pi N} \cdot \frac{T l}{d^4 - d_0^4} \quad (\text{中空圓軸}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (77)$$

此即示軸之剛度之式也。故強度雖大而長度過長者，扭角太大，不適於用。此時須由剛度之式以決定棒之尺寸。

50. 傳送已知馬力之圓軸。扭轉能率 T 作用之半徑設為 R 吋，其外力設為 P 磅，軸每分間迴轉數設為 n ，則

$$T = PR$$

軸上所加外力即軸上所加扭轉能率有常為同一值者，又有常多少變少者。後者須特別考察之。蓋定軸之強度，剛度等時，須就最大扭轉能率作用時計算之。然計算馬力時，則非常有最大值之作用，須用其平均值。

設傳送馬力為 H.P.，則

$$\text{H.P.} = \frac{2\pi R \cdot n P_m}{33,000 \cdot 12}$$

故
$$T_m = P_m R = \frac{33,000 \times 12 \text{ H.P.}}{2\pi n}$$

或
$$T_m = 63,000 \frac{\text{H.P.}}{n} \dots\dots\dots (78)$$

但 P_m 及 T_m 爲 P 與 T 之平均值。

軸之大小須由 P 或 T 之最大值求之。今設

$$T_{max} = KT_m$$

但 K 爲係數而大於 1。則

$$KT_m = 63,000 \frac{K \text{ H.P.}}{n} = \frac{\pi}{16} f_s d^3$$

$$\therefore d = \sqrt[3]{\frac{321,000 \cdot K \text{ H.P.}}{f_s \cdot n}} \dots \dots \dots (79)$$

f_s 之值由普通使用材料而定，示其一二如下：

鍊鐵	9,000 磅/平方吋
鋼	13,000 磅/平方吋
鑄鐵	4,500 磅/平方吋

K 之值各種不同。就往復蒸汽機關之曲柄軸 (crank shaft) 言之，則

單汽筒機關	$K=2.10$	$\sqrt[3]{K}=1.28$
曲柄角 90° 雙筒機關	$K=1.37$	$\sqrt[3]{K}=1.11$
曲柄角 90° 複式機關	$K=1.48$	$\sqrt[3]{K}=1.14$
曲柄角 120° 複式機關	$K=1.77$	$\sqrt[3]{K}=1.21$

此等蒸汽機關之 K 值, 由曲柄回轉力線圖 (crank effort diagram) 求得之. 而單汽筒機關上取

$$T_{max} = (\text{曲柄長, 吋}) \times (\text{動塞上最大總壓力, 磅})$$

$$f = 5000 \text{ 磅/平方吋}$$

以計算之.

有時由剛度求直徑, 此時以扭轉能率及可容最大扭角以表直徑. 今 i_0 設為最大扭角度數, 則

$$d = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi N} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{l}{i_0} \cdot T_{max}} \dots\dots\dots (80)$$

對於普通所用材料 N 之值略定, 故

$$\left. \begin{array}{l} \text{鍊鐵軸 } d = 0.0863 \sqrt[4]{\frac{l}{i_0} \cdot T_{max}} \\ \text{鋼 軸 } d = 0.0835 \sqrt[4]{\frac{l}{i_0} \cdot T_{max}} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (81)$$

利用扭角而測馬力, 則可不中斷馬力傳送而定之. 即所以求軸馬力 (shaft horse power) 者也. 此由已知軸之直徑, 其材料之種類, 其回轉數, 及軸上任意二點間距離, 而測定其間之扭角,

則可由前記數式以求馬力。即

$$i = \frac{32}{\pi N} \cdot \frac{Tl}{d^4}$$

或 i 以度數表之，則

$$i = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{32}{\pi N} \cdot \frac{Tl}{d^4}$$

但

$$T = 63,000 \frac{\text{H.P.}}{n}$$

故

$$\text{H.P.} = \frac{\pi^2 N d^4 n i}{363,000,000 l} \dots\dots\dots (82)$$

51. 異形軸。圓軸以外之軸使用甚鮮，而精確之計算亦難。原來軸之扭轉理論中，假定始為平面之橫斷面，扭轉後仍保持為平面。此對於圓形斷面，與實際一致。但圓形以外之斷面，則外周各點至中心之距不相等，扭轉後，斷面上生歪，不能保持其平面。故前述理論不能適用於異形軸。關於異形軸之研究，則 St. Venant 最有名。非對稱形之不整形斷面，幾無用之為軸者，大抵如橢圓形，正方形，或矩形等斷面有用之者。

正方形斷面 (square section). 每邊長 s 時, 最大之內力起於各邊中央. 扭轉能率之式如次:

$$T = 0.208 s^3 f_s \dots \dots \dots (83)$$

扭角與扭轉能率之關係為

$$i = 7.11 \frac{Tl}{Ns^4} \dots \dots \dots (84)$$

橢圓形斷面 (elliptic section). 設長軸為 a , 短軸為 b . 最大之內力起於短軸兩端. 扭轉能率之關係如次:

$$T = \frac{\pi}{16} a b^2 f_s \dots \dots \dots (85)$$

扭角與扭轉能率之關係為

$$i = \frac{16(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \cdot \frac{Tl}{N} \dots \dots \dots (86)$$

矩形斷面 (rectangular section). 設長邊為 a , 短邊為 b , 最大之內力起於長邊中央. 扭轉能率之式如下:

$$T = \frac{a^2 b^2}{3a + 1.8b} \cdot f_s \dots \dots \dots (87)$$

而扭角與扭轉能率之關係可如次求之. 一

般對於對稱的斷面，扭角與扭轉能率之關係為

$$i = \frac{40J}{A^4} \cdot \frac{Tl}{N} \dots \dots \dots (88)$$

但 J 為斷面之極慣性能率， A 為斷面積。40 之數為實驗常數，圓形或橢圓形斷面時，用 $4\pi^2$ 之數， a 與 b 之比在 3 以下之矩形斷面時，用 42。

故對於矩形斷面，則

$$J = I_x + I_y = \frac{1}{12} ab(a^2 + b^2), \quad A = ab$$

$$\therefore i = \frac{42(a^2 + b^2)ab}{12a^4b^4} \cdot \frac{Tl}{N} = 3.5 \frac{a^2 + b^2}{a^3b^3} \cdot \frac{Tl}{N} \dots \dots \dots (89)$$

有縱栓之圓形斷面。軸上裝拖帶輪等時，普通用縱栓 (key)。圓形斷面之一部分凹入。內力之值對於同一扭轉能率為大。換言之，有同值最大內力時，其所耐扭轉能率為小。縱栓孔寬設為 w ，深為 h ，軸之直徑為 d ，則

$$T = \left(1.0 - 0.2 \frac{w}{d} - 1.1 \frac{h}{d}\right) f_s \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \dots \dots \dots (90)$$

$$i = \left(1.0 + 0.4 \frac{w}{d} + 0.7 \frac{h}{d}\right) \frac{32}{\pi N} \cdot \frac{Tl}{d^4} \dots \dots \dots (91)$$

上式括弧中係數為實驗所得者。

例 1. 每分 58 回轉, 傳送 600 馬力之鋼製圓形斷面軸, 其直徑如何? 但內力之極限為 10,000 磅/平方吋。

由公式 (79), $K=1$, H.P.=600, $f_s=10,000$, $n=58$ 。

$$d = \sqrt[3]{\frac{321,000 \times 600}{10,000 \times 58}} = 6.93 \text{ 或 } 6\frac{15}{16} \text{ 吋。}$$

例 2. 前題之軸若為內徑為外徑之 $\frac{3}{4}$ 倍之中空斷面, 則內徑與外徑之值如何?

設外徑為 d , 內徑為 d_0 , 則

$$d_0 = \frac{3}{4}d = 0.75d$$

$$\frac{d^4 - d_0^4}{d} = (1 - 0.75^4)d^3 = 321,000 \frac{\text{H.P.}}{nf_s}$$

$$\therefore d = \sqrt[3]{\frac{321,000 \times 600}{0.684 \times 58 \times 10,000}} = 7.87 \text{ 吋, 或 } 7\frac{7}{8} \text{ 吋。}$$

因之 $d_0 = 0.75 \times 7.87 = 5.87 \text{ 吋, 或 } 5\frac{7}{8} \text{ 吋。}$

例 3. 試比較前二題軸之重量。

前二題之軸以同一強度之條件計算者, 但重

量相異。中空軸輕而有利。二者爲同一材料，故重量與體積爲比例。設軸長相同，則與斷面積爲比例。求其斷面積即可。

$$\begin{aligned} \text{實體斷面, } A_1 &= \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} \times (6.9375)^2 \\ &= 37.8 \text{ 平方吋} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{中空斷面, } A_2 &= \frac{\pi}{4} (d^2 - d_0^2) = \frac{\pi}{4} (7.875^2 - 5.875^2) \\ &= 21.6 \text{ 平方吋} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{A_1}{A_2} = \frac{37.8}{21.6} = \frac{1}{0.572}$$

例 4. D. K. Clark 氏謂扭角之最大可容限度爲每長 $20d$ 可有 1° 。就此極限求最大值內力。但軸之材料爲鍊鐵。

$$\text{由公式 (77) } i = i^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{32}{\pi N} \cdot \frac{Tl}{d^4}$$

但此時 $l = 20d$, $i^\circ = 1$, $N = 10,500,000$ 磅/平方吋。

$$\therefore T = \frac{\pi^2}{180} \times \frac{N}{32} \times \frac{d^4}{20d} = \frac{\pi^2 \times 10,500,000 \times d^3}{180 \times 32 \times 20}$$

$$\text{又由公式 (76a), } T = \frac{\pi}{16} f_s d^3$$

$$\therefore \frac{\pi}{16} f_s d^3 = \frac{\pi^2 \times 10,500,000}{180 \times 32 \times 20} d^3$$

$$\therefore f_s = \frac{\pi \times 16 \times 10,500,000}{180 \times 32 \times 20} = 4,580 \text{ 磅/平方吋}$$

例5. 直徑3吋之實體軸，生內力9,000磅/平方吋。求其扭轉能率。

由公式 (76a),

$$T = \frac{\pi}{16} f_s d^3 = \frac{\pi}{16} \times 9,000 \times 3^3 = 47,750 \text{ 吋磅}$$

例6. 前題之軸 N 為 12×10^6 磅/平方吋時，對於10呎之扭角如何？

由公式 (77),
$$i = i^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{32}{\pi N} \times \frac{Tl}{d^4}$$

$$\therefore i^\circ = \frac{180 \times 32 \times 47,750 \times 10 \times 12}{\pi \times \pi \times 12 \times 10^6 \times 3^4} = 3.43^\circ$$

問 題

1. 直徑3吋之鋼軸，扭角限度為每長5呎1°。求最大值內力。但 $N=5,200$ 噸/平方吋。

2. 最大扭轉能率較平均扭轉能率增30%。最大值內力為8,000磅/平方吋時，每分60迴轉，

傳送 80 馬力之軸直徑如何？

3. 前題之軸，橫彈性係數為 12,000,000 磅/平方吋時，長 10 呎之扭角幾何？

4. 每分 150 回轉，傳送 100 馬力，直徑 3 吋之軸。最大扭轉能率為平均扭轉能率之 $1\frac{1}{4}$ 倍。求軸之最大值內力。

5. 受 1,800 吋噸之中空推進器軸，內徑 8 吋，外徑 16 吋。求其最大值內力。

6. 前題之軸之橫彈性係數設為 5,200 噸/平方吋。則對於外徑 20 倍之長度，其扭角如何？

7. 與第 5 題之軸同一斷面積（即同一重量）之實體軸直徑如何？試比較其對於扭之強度與剛度。

8. 鍊鐵製實體軸與等外徑之鋼製中空軸，其內徑為外徑之 $\frac{1}{2}$ 。設鋼之強度為鍊鐵之 1.5 倍，比較兩軸之強度。

9. 每分 140 回轉，傳送 9,000 馬力之中空鋼軸，

內徑爲外徑之 $\frac{9}{16}$. 可容內力爲6,600磅/平方吋.

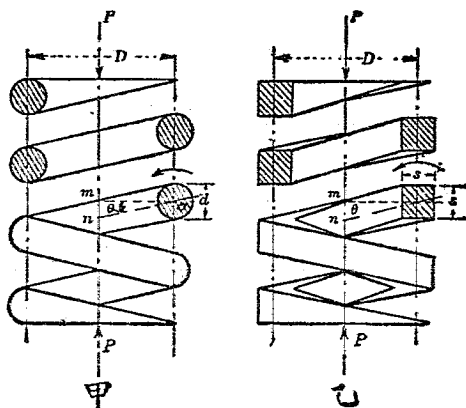
求所需外徑及內徑幾何?

10. 可容內力3.5噸/平方吋, 傳送352吋噸之扭轉能率, 求軸之直徑.

第七章

螺旋彈條

52. 螺旋彈條. 彈條有種種形式, 其一種之疊板彈條已述於第四章. 此式中板受彎曲作用. 但本章之彈條, 用圓棒, 方棒等捲成螺旋形, 稱為螺旋彈條 (helical spring). 此棒受扭轉作用者也. 第95圖示螺旋彈條之一部分, 甲為圓形斷面, 乙為正方形斷面.



第 95 圖

此彈條上加外力 P ，而拉伸或壓縮時，生伸長或縮短。今設彈條鋼棒之任意斷面，由外力而受扭轉能率。其值 T 為外力與彈條平均半徑之乘積。即

$$T = P \cdot \frac{D}{2}$$

圖示 Om 線扭轉後至 On 位置，角 mOn 即扭角。設為 θ ，則某斷面扭轉 θ 角時， m 移至 n ，因之彈條有 mn 之伸長或短縮。但 θ 甚小，故 mn 可視為圓弧長，

$$mn = Om \times \theta = \frac{D}{2} \theta$$

此即每捲沿彈條中心軸線上長度之變化。由扭角與扭轉能率之關係公式，則圓形斷面棒時，

$$\theta = \frac{32Tl}{\pi d^4 N} \dots\dots\dots(92)$$

正方形斷面時，

$$\theta = \frac{7.2Tl}{s^4 N} \dots\dots\dots(92a)$$

設 mn 以 δ_0 表之，則

$$\text{圓形斷面, } \delta_0 = \frac{D}{2} \theta = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{Tl}{Nd^4}$$

$$\text{正方形斷面, } \delta_0 = \frac{D}{2} \theta = 7.2 \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{Tl}{Ns^4}$$

但 $T = \frac{P \cdot D}{2}$, l 爲每捲之長, 故爲 πD . 因之

$$\text{圓形斷面, } \delta_0 = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{PD}{2Nd^4} \cdot \pi D = \frac{8PD^3}{Nd^4}$$

$$\text{正方形斷面, } \delta_0 = \frac{7.2D}{2} \cdot \frac{PD}{2Ns^4} \cdot \pi D = \frac{5.6PD^3}{Ns^4}$$

δ_0 爲每捲彈條之歪, 設捲數 n 之彈條全體歪爲 δ , 則

$$\delta = n\delta_0$$

$$\text{故 圓形斷面, } \delta = \frac{8nPD^3}{Nd^4} \dots\dots\dots(93)$$

$$\text{正方形斷面, } \delta = \frac{5.6nPD^3}{Ns^4} \dots\dots\dots(93a)$$

求最大值內力之公式與軸同樣。即

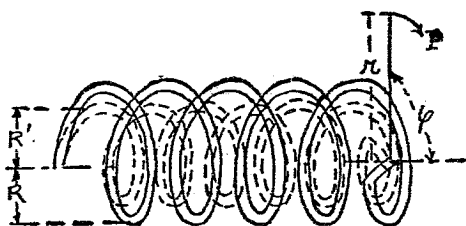
$$\text{圓形斷面, } T = P \cdot \frac{D}{2} = \frac{\pi}{16} d^3 p_s$$

$$\text{或 } P = \frac{\pi d^3 p_s}{8D}, \quad p_s = \frac{8PD}{\pi d^3} \dots\dots\dots(94)$$

正方形斷面, $T = P \cdot \frac{D}{2} = 0.208s^3 p_s$

或 $P = \frac{0.416s^3 p_s}{D}, p_s = \frac{2.4PD}{s^3} \dots\dots\dots(94a)$

以上為彈條軸線方向上加拉力或壓力時之公式。若固定彈條一端，他端加偶力扭轉時，則彈條上棒之各斷面，有彎曲能率之作用，其方向因偶力方向而定。例如第96圖上所示之偶力方向時，則將彈條各捲輪變成小直徑，而增



第 96 圖

其捲數。今彎曲能率(即偶力能率)設為 M ，各捲輪平均半徑設自 R 減為 R' ，捲數自 n 增為 n' 。全長 l 不變，故

$$l = 2\pi nR = 2\pi n'R'$$

彎曲能率與曲率變化為比例(第四章參照),
故

$$M = EI \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) = \frac{2\pi EI(n' - n)}{l}$$

或
$$n' - n = \frac{Ml}{2\pi EI}$$

設全體扭角為 φ , 則

$$\varphi = 2\pi(n' - n) = \frac{Ml}{EI} \text{ (radian)}$$

因
$$l = n\pi D,$$

$$\therefore \varphi = \frac{n\pi DM}{EI} \text{ (radian)}$$

圓形斷面時,
$$I = \frac{\pi}{64} d^4,$$

$$\therefore \varphi = \frac{64nDM}{Ed^4} \dots\dots\dots(95)$$

正方形斷面時,
$$I = \frac{s^4}{12},$$

$$\therefore \varphi = \frac{12\pi nDM}{Es^4} \dots\dots\dots(95a)$$

內力計算可由彎曲能率與斷面係數求之。

例 1. 直徑 $\frac{3}{8}$ 吋圓鋼棒, 捲成平均直徑 5 吋之螺旋彈條, 以 40 磅之力拉時, 使伸長略為 3 吋. 求捲數幾何. 但鋼之橫彈性係數為 12,000,000 磅/平方吋.

由圓棒時公式

$$\delta = \frac{8nPD^3}{Nd^4}, \quad \text{或} \quad n = \frac{8Nd^4}{8PD^3}$$

$$\therefore n = \frac{3 \times 12,000,000 \times (\frac{3}{8})^4}{8 \times 40 \times 5^3} = 17.8 \text{ 約 } 18 \text{ 捲.}$$

例 2. 前題彈條上鋼棒之最大值內力幾何?

由公式, 圓棒時

$$p_s = \frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{8 \times 40 \times 5}{3.14 \times (\frac{3}{8})^3} = 9,660 \text{ 磅/平方吋}$$

例 3. 每邊長 $\frac{1}{4}$ 吋之正方形斷面棒, 造成螺旋彈條, 加 200 磅荷重時, 使最大值內力不超過 60,000 磅/平方吋. 求捲輪之平均直徑.

對於正方形斷面, 由公式

$$p_s = \frac{2.4PD}{s^3} \quad \text{或} \quad D = \frac{p_s s^3}{2.4P}$$

$$\text{故 } D = \frac{60,000 \times (\frac{1}{4})^3}{2.4 \times 200} = 1.95 \text{ 吋 約 } 1\frac{15}{16} \text{ 吋}$$

例 4. 前題彈條捲數若為 12 吋, 生最大值內力之際, 須有若干縮短? 但 $N=12,000,000$ 磅/平方吋.

由公式

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{5.6nPD^3}{Ns^4} = \frac{5.6 \times 12 \times 200 \times 1.95^3}{12,000,000 \times (\frac{1}{4})^4} \\ &= 2.125 \text{ 吋} = 2\frac{1}{8} \text{ 吋} \end{aligned}$$

問 題

1. 直徑 $\frac{1}{4}$ 吋之圓形斷面鋼棒, 作成平均直徑 4 吋之螺旋彈條, 捲數為 10. 加以 20 磅之力而拉伸時, 伸長幾吋? 但 $N=12,000,000$ 磅/平方吋.

2. $\frac{1}{2}$ 吋直徑之圓形斷面鋼棒, 作成平均直徑 10 吋, 捲數 10 捲之螺旋彈條, 加以 40 磅荷重時, 求壓縮及最大值內力. 但 $N=12,000,000$ 磅/平方吋.

3. 今不壓縮前記彈條而以 125 磅吋能率之

偶力扭轉時,求最大彎曲內力及自由端之扭角.
但 $E=30,000,000$ 磅/平方吋.

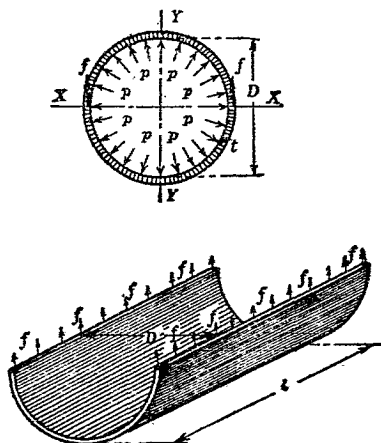
4. 可容最大內力爲 50,000 磅/平方吋,每邊長 $\frac{1}{4}$ 吋之正方形斷面鋼棒,作成平均直徑 2 吋,捲數 10 之螺旋彈條. 求其可支持最大荷重與其縮短之值. 但 $N=12,000,000$ 磅/平方吋.

第八章

圓筒及管

53. 壁之厚與內力之分布. 汽鍋之胴(drum), 蒸汽機關之汽筒, 蒸汽管等或水壓機械之圓筒, 送水管及其他藏容有壓力之液體或氣體之圓筒中壓力平均分布於各部分, 與壁面成直角. 其結果生擴大圓筒之作用, 而圓筒材料內部, 沿其周圍生拉內力. 此曰周圍張力 (hoop tension or circumferential tension). 此周圍張力之強, 自圓筒內面至外面, 各半徑之圓周上, 其值各異. 內面最大而漸次減小, 至外面為最小. 任意半徑之周圍上, 周圍張力之強之計算法較複雜. 然圓筒壁厚對於內徑為小時, 則周圍張力之差異甚小, 而可視為均一強度. 因之薄圓筒之強度計算法較簡單.

54. 薄圓筒受內壓時之強度。薄圓筒上，壁中周圍張力可視為均一。今圓筒長度相當大時，縱方向內力可視為均一。取圓筒一部分長 l 部考察之。第 97 圖上以含中心線之平面 XX ，



第 97 圖

分圓筒為上下二部。上半面作用壓力之全量與下半面作用壓力之全量相等，而方向相反，以保持平衡。但若僅取下半面論之，則與下半面作用壓力總量相平衡之力，為斷面 XX 上向上作用之周圍張力 f 之全量也。

壓力均垂直於壁面。下半面上作用之向下力全量，爲各壓力之向下分力而求其和者也。設壓力強爲 p 磅/平方吋，圓筒內徑爲 D 吋，則向下力全量爲 pDl 磅。今設圓筒長 l 吋，管壁厚 t 吋，則周圍張力作用之面積爲 $2tl$ 平方吋。故張力全量爲 $f \cdot 2tl$ 磅。此二力相平衡時，

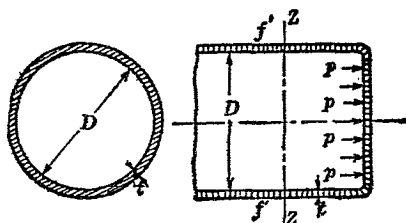
$$pDl = 2ftl, \text{ 或 } pD = 2ft.$$

即

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{pD}{2f} \\ f = \frac{pD}{2t} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (96)$$

以上所論者，圓筒對於含中心軸線平面，沿縱方向而破壞之作用也。其他若圓筒兩端閉塞時，則同一之內壓力沿軸線方向作用於兩端面，而與之抵抗之拉內力生於筒壁橫斷面上。前述之周圍張力垂直於縱斷面，而此處所述之拉內力垂直於橫斷面。

第 98 圖爲有端面圓筒之一部分縱斷面。作用於端面上壓力全量與筒壁橫斷面圓環上作



第 98 圖

用之內力全量相平衡。今設 p 磅/平方吋爲內壓力之強， D 吋爲圓筒內徑， t 吋爲筒壁之厚， f' 磅/平方吋爲筒壁材料中拉內力。則端面上內壓力全量爲 $\frac{\pi}{4} D^2 p$ 磅，而管壁橫斷面上拉內力全量略爲 $\pi D t f'$ (精確言之，爲 $\pi(D+t)t f'$)，故平衡條件爲

$$\frac{\pi}{4} D^2 p = \pi D t f'$$

或

$$p D = 4 t f'$$

故

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{p D}{4 f'} \\ f' &= \frac{p D}{4 t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(97)$$

與上之縱斷面上內力之公式比較之，則 $p, D,$

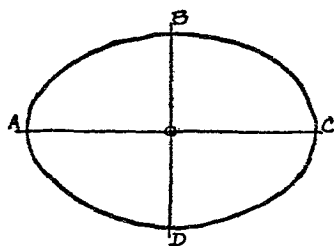
t 爲同一，故

$$f = \frac{pD}{2t} = 2f'$$

即均一內壓力作用之圓筒壁，其縱斷面上拉內力爲橫斷面上拉內力之二倍。即圓筒之橫斷面有縱斷面上二倍之強度。故受內壓力之圓筒若破壞時，必沿縱斷面而破裂。計算圓筒強度，亦須以縱斷面上內力爲主眼也。

橢圓形斷面之薄圓筒（如第 99 圖），則周邊上周圍內力各處不同。且受內壓力時，橢圓形欲變爲圓形。最小曲率之 B, D 及最大曲率之 A, C 有反方向之彎曲能率之作用。周圍張力之求法與上相同，即 A, C 處爲 $\frac{p \times AC}{2t}$ ，而 B, D 處爲 $\frac{p \times BD}{2t}$ 。其縱斷面上拉內力，則

$$f' = \frac{p \times (\text{管端內面積})}{t \times (\text{管周})}$$



第 99 圖

例 1. 送 1,350 磅/平方吋之壓力水, 用內徑 $\frac{3}{4}$ 吋銅管. 問厚度如何? 但可容內力為 950 磅/平方吋.

$$\text{由公式 } t = \frac{pD}{2f} = \frac{1,350 \times \frac{3}{4}}{2 \times 950} = 0.533 \text{ 吋約 } \frac{17}{32} \text{ 吋}$$

例 2. 設接縫強度為 $\frac{1}{2}$, 以可容內力 10,000 磅/平方吋之鋼板造成內徑 8 呎 4 吋, 板厚 $1\frac{1}{4}$ 吋之汽鍋胴. 問可耐蒸汽壓力若干?

內徑改為吋, 則 $D = 8 \text{ 呎 } 4 \text{ 吋} = 100 \text{ 吋}$.

$$f = 10,000 \times \frac{1}{2} = 5,000 \text{ 磅/平方吋}$$

$$\therefore p = \frac{2tf}{D} = \frac{2 \times 5,000 \times 1.25}{100} = 125 \text{ 磅/平方吋}$$

例 3. 內徑 10 吋壁厚 $\frac{1}{4}$ 吋之鑄鐵管, 通以 50 磅/平方吋壓力之蒸汽, 問所生拉內力幾何?

$$f = \frac{pD}{2t} = \frac{50 \times 10}{2 \times \frac{1}{4}} = 1,000 \text{ 磅/平方吋}$$

55. 受內壓力之薄球面殼. 球面殼 (spherical shell) 受內壓力時, 其殼壁內力可與圓筒壁時同樣計算. 實際上鮮純粹之內壓球形容器, 而多用球面之一部者. 例如汽鍋胴之碟形端板是也. 此時雖不可直接應用球形計算式, 但不乏其例.

今以含中心一平面, 分球為兩部分, 則半球內面全壓力之切斷平面上分力, 必與切斷面圓環上拉內力全量相平衡. 設內壓力強為 p 磅/平方吋, 球內徑為 D 吋, 殼壁厚為 t 吋, 拉內力為 f 磅/平方吋, 則

$$\frac{\pi}{4} D^2 p = \pi D t f$$

或

$$pD = 4ft$$

故

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{pD}{4f} \\ f &= \frac{pD}{4t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (98)$$

56. 有接縫圓筒或球面殼之強度. 上述之圓筒或球面殼均無接縫 (seams). 然實際汽鍋胴或板製筒等有縱方向及橫方向之接縫. 故不能直接應用上之無接縫時之公式. 接縫普通用鉚釘 (rivet), 其強度因釘之大小, 數, 及配列法而異, 但必較無接縫者為弱. 有鉚釘部強度對於無接縫時強度之比, 曰鉚釘之効率 (Efficiency of riveted joint), 必小於 1. 設効率為 η , 則前記公式可如次應用之.

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{pD}{2f\eta} \\ f &= \frac{pD}{2t\eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (96a)$$

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{pD}{4f\eta} \\ f &= \frac{pD}{4t\eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (97a, 98a)$$

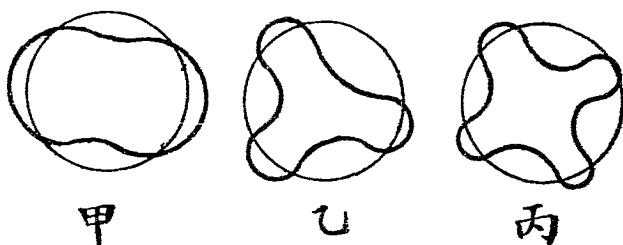
57. 受外壓之圓筒. 圓筒受外壓時, 筒壁厚者無凹入之虞, 其計算法與受內壓時相同, 但壁上非生拉內力, 而生壓內力. 若筒壁薄者, 則備有堅固兩端而圓筒長較小者, 可防其變形, 可由上述內壓力時薄圓筒之公式以計算之. 即設 p 磅/平方吋為均一作用之外壓力, D 吋為圓筒平均直徑, t 吋為其厚, f 磅/平方吋為縱斷面上壓內力, 則

$$p = \frac{2ft}{D} \dots\dots\dots (99)$$

但受外壓力時不若受內壓力時之安定, 受內壓力時, 圓筒因壓力而受變成真圓之作用. 然受外壓力時, 則少生變形後, 即益增大之. 因外壓而圓筒或圓管破壞時, 生凹陷 (collapse). 凹陷形狀對於管長 L , 與直徑 D 之比有關係. 設 n 為凹陷後突出部之數, 則

$\frac{L}{D}$	15~7.5	7.5~3.75	3.75~2.5
n	2	3	4~5

第 100 圖示凹陷狀況之略圖，甲有突出部 2，乙有突出部 3，丙有突出部 4。



第 100 圖

58. 管或圓筒凹陷之公式. 關於管或圓筒之凹陷，與長柱之情形極相似。由種種假定所得理論的公式，與實驗的結果所得實驗的公式均有之。然理論的公式與實際難一致，故須根據於實驗的公式為是。

Fairbairn 之實驗的公式如下：

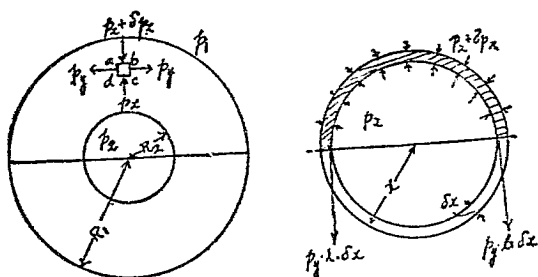
$$p = 9,672,000 \frac{t^{2.19}}{LD} \dots\dots\dots (100)$$

但此式有 2.19 之乘方數，須用對數表計算，較不便。故省略之而為下式：

$$p = 9,672,000 \frac{t^2}{LD} \dots\dots\dots (100a)$$

對於管厚 $\frac{3}{8}$ 吋以上，其誤差甚小。上二式中 p 磅/平方吋為開始凹陷時外壓力之強， t 吋為管厚， L 吋為管長， D 吋為圓直徑。

對於汽鍋之焰管 (flue) 等，通常安全率為 3 至 4。



第 101 圖

59. 厚壁圓筒。第 101 圖上 R_2 與 R_1 為圓筒內半徑及外半徑。 p_2 , p_1 為內面及外面之流體壓力之強。今就橫斷面上任意半徑 x 處一微小面之圓環考察之。該圓環內微小部 $abcd$ 上作用

之內力有三種。即周圍張力 p_y ，半徑方向上壓內力 p_x ，及與圓筒軸線平行方向之縱內力。今設橫斷面受壓力作用後仍為平面（此假定對於距兩端面相當距離處可視為真），則橫斷面上任何點之縱向歪為常數，與 x 無關。取上之薄圓環之半部，其半徑為 x ，厚為 δx ，長為 l ，則其平衡條件必為內外側壓力之合力與直徑斷面上周圍張力之全量相等。即

$$(p_x \times 2x l) - (p_x + \delta p_x) 2(x + \delta x) l = 2p_y l \delta x$$

或
$$-p_x \delta x - x \delta p_x - \delta x \delta p_x = p_y \delta x$$

上之薄圓環之厚 δx 為極小時，

$$p_y = -p_x - x \frac{d p_x}{d x} = -\frac{d}{d x} (p_x x) \dots \dots \dots (a)$$

若軸線平行方向上縱內力均布於橫斷面，而設其強為 f_1 ，又軸線方向上縱歪設為 e ，則

$$e = \frac{1}{E} \left(f_1 - \frac{p_y}{m} + \frac{p_x}{m} \right)$$

由上述假定，則 e 與 x 無關係而為定數。今 e ， E ， f_1 ，及 m 皆為常數時， $p_y - p_x$ 亦必為常數。故

$$p_y - p_x = 2a \dots \dots \dots (b)$$

以 (a) 代入, 則

$$-2p_x - x \frac{dp_x}{dx} = 2a$$

或
$$\frac{dp_x}{p_x + a} = -\frac{2dx}{x}$$

積分之, $\log(p_x + a) = -\log x^2 + \text{常數}$

或
$$p_x + a = \frac{b}{x^2}$$

$$\therefore p_x = \frac{b}{x^2} - a \dots \dots \dots (c)$$

但 b 與 a 皆常數, 由內外側壓力而決定之。再由 (b), 得

$$p_y = \frac{b}{x^2} + a \dots \dots \dots (d)$$

$x = R_1$ 時 $p_x = p_1$, 又 $x = R_2$ 時 $p_x = p_2$, 故

$$b = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} (p_2 - p_1), \quad a = \frac{p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2}{R_1^2 - R_2^2}$$

故

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left\{ \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} (p_2 - p_1) - (p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2) \right\} \\ p_y &= \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left\{ \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} (p_2 - p_1) + (p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2) \right\} \end{aligned} \right\} (101)$$

受內壓力之厚圓筒。設內壓力之強為 p_2 ，而外壓力 p_1 為零。例如壓力水管等，則

$$p_x = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left\{ \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} \cdot p_2 - p_2 R_2^2 \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{或} \\ \text{同樣} \end{array} \right\} \begin{array}{l} p_x = p_2 \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{R_1^2}{x^2} - 1 \right) \\ p_y = p_2 \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{R_1^2}{x^2} + 1 \right) \end{array} \dots\dots\dots(102)$$

例 4. 內徑 6 吋，壁厚 2 吋之送水管，水壓為 1,000 磅/平方吋。求橫斷面上各點之周圍張力與半徑方向上壓內力 (radial compressive stress)。

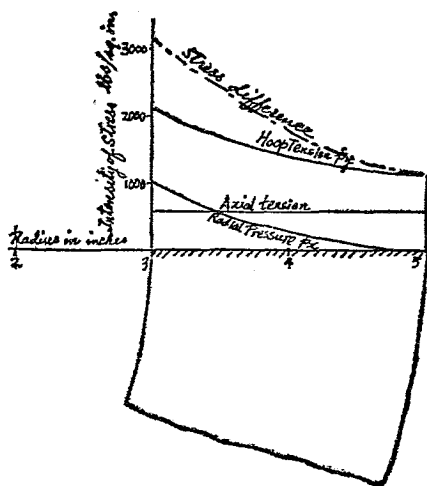
$R_1 = 5$ 吋， $R_2 = 3$ 吋， $p_2 = 1,000$ 磅/平方吋。

由 (102) 式，

$$p_x = \frac{9000}{16} \left(\frac{25}{x^2} - 1 \right)$$

$$p_y = \frac{9000}{16} \left(\frac{25}{x^2} + 1 \right)$$

橫斷面各點之 p_x 及 p_y 示於第 102 圖。內面上 $x = 3$ ，故



第 102 圖

$$p_x = \frac{9000}{16} \left(\frac{25}{9} - 1 \right) = 1,000 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_y = \frac{9000}{16} \left(\frac{25}{9} + 1 \right) = 2,126 \text{ 磅/平方吋}$$

外面上 $x=5$, 故

$$p_x = 0$$

$$p_y = \frac{9000}{16} (1+1) = 1,125 \text{ 磅/平方吋}$$

受外壓力之厚圓筒。設外壓力為 p_1 , 而內壓力 p_2 為零, 則

$$p_x = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left\{ \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} (-p_1) + p_1 R_1^2 \right\}$$

$$\text{或 } p_x = p_1 \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{x^2} \right) \left. \vphantom{\frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2}} \right\} \dots\dots\dots (103)$$

$$\text{同樣, } p_y = -p_1 \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{x^2} \right)$$

p_y 之負號示周圍張力為壓內力。

60. 決定圓筒或圓管尺寸之公式。圓筒斷面上內力之分布已示於第102圖。圓管受內壓力時，最大值內力為內側面即 $x=R_2$ 時之周圍張力。其值為

$$p_{y_2} = p_2 \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \dots\dots\dots (a)$$

今設 p 為材料之彈性限界內可作用之最大內壓力，即 p_2 。 t 為圓筒壁厚度，即為 $R_1 - R_2$ 。 d 為內徑，即 $2R_2$ 。 又設 $\frac{R_1}{R_2}$ ，即 $\frac{d+2t}{d} = k$ ，而 $\frac{t}{d} = a = \frac{1}{2}(k-1)$ 。 f 為彈性限界內最大可容內力，即 p_{y_2} 。

由上式(a)，得

$$f = p \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$$

而

$$\frac{p}{f} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1},$$

$$k = \sqrt{\frac{1 + p/f}{1 - p/f}}, \text{ 或 } \sqrt{\frac{f+p}{f-p}}.$$

$$\therefore \alpha = \frac{t}{d} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{1 + p/f}{1 - p/f}} - 1 \right\},$$

$$\text{或 } \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{f+p}{f-p}} - 1 \right\} \dots\dots\dots(104)$$

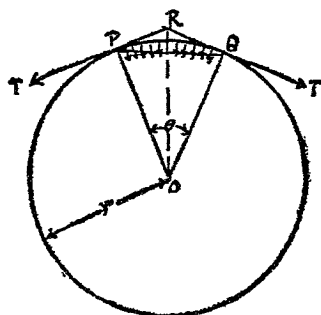
但此式對於鑄鐵管，可與實際相近。

61. 圓環或輪邊之迴轉。圓環以通過中心之垂直軸迴轉時，因離心力生周圍張力於環內。若半徑大而環斷面小時，則周圍張力均布於斷面上。與受內壓力之薄圓筒相似。今設半徑為 r 吋，角速度為 ω ，或直線速度為每秒 v 吋。若以等速度迴轉時，環上各質點受向內之半徑方向上加速度每秒每秒 $\omega^2 r$ ，或 $\frac{v^2}{r}$ 吋。若 A 為斷面積之平方吋數， w 為材料每立方吋重量，則環邊長 δs 吋部分之向心力為

$$\frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r} A \delta s \text{ 磅}$$

但 g 爲每秒每秒 32.2×12 吋。或圓弧單位長上
向心力爲

$$\frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r} A \text{ 磅}$$



第 103 圖

今於第 103 圖上，圓弧 PQ ，即 $r\theta$ 上之半徑方
向合力爲

$$\frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r} A \times \text{弦 } PQ,$$

或

$$\frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r} A \times 2r \sin \frac{\theta}{2}$$

其作用方向爲 RO 。此力必爲 P 與 Q 處張力

(tension) T 之合力。今將 T 分解於 EO 方向上, 則

$$2T \sin \frac{\theta}{2} = A \cdot \frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r} \times 2r \sin \frac{\theta}{2}$$

或
$$T = A \frac{w}{g} v^2, \text{ 或 } A \frac{w}{g} \cdot \omega^2 r^2$$

故環邊拉內力之強為

$$p = \frac{T}{A} = \frac{w}{g} v^2 = \frac{wv^2}{12 \times 32.2} \text{ 磅/平方吋} \dots\dots(105)$$

此式對於滑輪 (pulley) 上拖帶 (belt) 之離心張力亦可應用。

設 f 為輪邊 (wheel rim) 最大安全內力, 則輪邊之極限速度為

$$f = \frac{w}{g} v^2$$

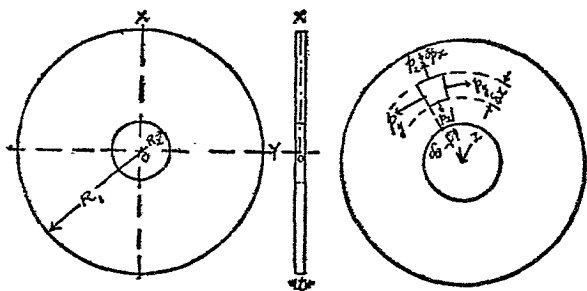
$$\therefore v = \sqrt{\frac{fg}{w}} = \sqrt{\frac{f \times 12 \times 32.2}{w}} \text{ 吋/秒}$$

上式中 v 與 g 若以呎為單位, 則

$$p = \frac{12wv^2}{g} = \frac{12wv^2}{32.2} = 0.3722wv^2 \text{ 磅/平方吋}$$

62. 圓板之迴轉。設圓板厚度均一, 且較直

徑爲甚小，而迴轉於其軸周。此時圓板面垂直方向上無內力之作用。第104圖上半徑方向上內力設爲 p_r ，周圍張力設爲 p_t ，二者拉伸方向時設爲正。 t 爲圓板之均一厚度， R_1 與 R_2 爲外側半徑與內側半徑。 w 爲每單位容積材料之重量， ω 爲其等角速度。



第 104 圖

今於圓板中半徑 x 處取一極小部分，對於中心成 $\delta\theta$ 之角，其半徑方向上之寬爲 δx 。則其微小容積爲 $x\delta\theta \times \delta x \times t$ 。其半徑方向上向內之力略爲

$$\frac{w}{g} \omega^2 x \cdot t \cdot x \delta\theta \cdot \delta x \dots\dots\dots (a)$$

此必為該微小部分上 p_x 與 p_y 全量之合成力。故將此二者分解之如前節，則

$$t \left\{ p_y \cdot \delta x \cdot 2 \sin \frac{\delta \theta}{2} + p_x \cdot 2x \sin \frac{\delta \theta}{2} - (p_x + \delta p_x) 2(x + \delta x) \sin \frac{\delta \theta}{2} \right\}$$

或近似的為

$$t(p_y \cdot \delta x - p_x \delta x - x \delta p_x) \delta \theta \dots \dots \dots (b)$$

$\delta \theta$ 為極小。使 (a), (b) 兩式相等時，

$$p_y = \frac{w}{g} \omega^2 x^2 + p_x + x \frac{d p_x}{d x}$$

或
$$p_y = \frac{w}{g} \omega^2 x^2 + \frac{d}{d x} (x p_x) \dots \dots \dots (c)$$

今設變形即歪歪起於半徑方向，而 x 變為 $x+u$ ，則圓周上所生歪為

$$\frac{2\pi(x+u) - 2\pi x}{2\pi x} = \frac{u}{x} \dots \dots \dots (d)$$

變形後上之微小部分在半徑方向上之寬為

$$x + \delta x + u + \delta u - (x + u) = \delta x + \delta u$$

而該部分半徑方向之歪(若正號時為拉伸歪)為

$$\frac{\delta x + \delta u - \delta x}{\delta x} = \frac{du}{dx} \dots\dots\dots(e)$$

因圓盤軸線之平行方向上內力爲零，故由(d)，
(e)兩式，

$$\frac{u}{x} = \frac{1}{E} \left(p_y - \frac{p_x}{m} \right) \dots\dots\dots(f)$$

但 $\frac{1}{m}$ 爲包生比。

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{E} \left(p_x - \frac{p_y}{m} \right) \dots\dots\dots(g)$$

解(f)，(g)兩聯立方程式，

$$p_y = \frac{Em}{m^2-1} \left(m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} \right) \dots\dots\dots(h)$$

$$p_x = \frac{Em}{m^2-1} \left(\frac{u}{x} + m \frac{du}{dx} \right) \dots\dots\dots(i)$$

將此代入於(c)，

$$x \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = -\frac{w}{g} \omega^2 \cdot \frac{m^2-1}{m^2E} x^2$$

或
$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = -\frac{w}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{m^2-1}{m^2E} x \dots\dots\dots(j)$$

此微分方程式由 Lamb's "Infinitesimal Calculus,"

§ 191. 先就

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{x} \right) = 0$$

積分之,

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 2A \dots\dots\dots (k)$$

或

$$x \frac{du}{dx} + u = 2Ax$$

又積分一次,

$$ux = Ax^2 + B$$

∴

$$\frac{u}{x} = A + \frac{B}{x^2} \dots\dots\dots (l)$$

由 (k), (l)

$$\frac{du}{dx} = A - \frac{B}{x^2} \dots\dots\dots (m)$$

今設 $u = Cx^3$; 二次微分之, 代入於 (j), 則

$$C = -\frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2}$$

因 $\frac{u}{x} = Cx^2$, $\frac{du}{dx} = 3Cx^2$, 故

$$\frac{u}{x} = A + \frac{B}{x^2} - \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} x^2 \dots\dots\dots (n)$$

$$\frac{du}{dx} = A - \frac{B}{x^2} - \frac{3w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} x^2 \dots\dots\dots (p)$$

以此代入於 (i),

$$p_x = \frac{Em}{m^2 - 1} \left\{ (m+1)A - (m-1)\frac{B}{x^2} - (3m+1)\frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} x^2 \right\} \dots\dots (q)$$

對於二半徑處 p_x 已知時, 可求 A 與 B .

中央有孔之圓盤. 此時 $x=R_1$, $p_x=0$, 又 $x=R_2$, $p_x=0$, 故

$$A = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{(3m+1)(m-1)}{m^2} (R_1^2 + R_2^2)$$

$$B = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{(3m+1)(m+1)}{m^2} R_1^2 R_2^2$$

由此得

$$p_x = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} (3m+1) \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} - x^2 \right) \dots (106)$$

又由 (h), (n), (p), 得

$$p_y = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} \left\{ (3m+1) \left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} \right) - (m+3)x^2 \right\} \dots (107)$$

p_y 之值常為正, 因 x 之增加而減少. $x=R_2$ 為最

大,其值爲

$$p_y(max.) = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{4m} \{ (3m+1)R_1^2 + (m-1)R_2^2 \} \dots (108)$$

若 R_2 極小時,其近似值爲

$$\frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{4m} (3m+1)R_1^2$$

若 R_2 極近於 R_1 , 則其值極近於 §61 之公式 (105).

$x=R_1$ 及 $x=R_2$ 時 p_x 之值爲零, x 在 R_1 至 R_2 之間, p_x 爲正. 而

$$\frac{dp_x}{dx} \propto \left(\frac{2R_1^2 R_2^2}{x^3} - 2x \right),$$

當 $x = \sqrt{R_1 R_2}$ 時,其值爲零.

在此半徑處,半徑方向之張力爲極大,其值爲

$$p_x(max.) = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} (3m+1)(R_1 - R_2)^2$$

實體圓盤. 若圓盤無中央孔時,則在 (n) 式中, $x=R_1$ 時 $p_x=0$, $x=0$ 時 $w=0$. 由後之條件,自 (n) 式得 $B=0$. 由前之條件,自 (q) 式得

$$A = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{(3m+1)(m-1)}{m^2} R_1^2$$

由 (h) 式,

$$p_v = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} \{ (3m+1)R_1^2 - (m+3)x^2 \} \dots\dots(109)$$

$x=0$ 時, 即在中心處為極大. 故

$$p_v(max.) = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} (3m+1)R_1^2$$

或

$$= \frac{3m+1}{8m} \cdot \frac{w}{g} (\omega R_1)^2 \dots\dots\dots(110)$$

又由 (i) 式,

$$p_x = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} (3m+1)(R_1^2 - x^2) \dots\dots\dots(111)$$

此常為正值, 自中心至外側漸次減小, 在中心為極大, 即

$$p_x(max.) = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} (3m+1)R_1^2$$

與周圍張力之極大值相等.

問 題

1. 內徑 4 吋之無接縫管, 通過 200 磅/平方吋壓力之液體. 材料中拉內力若不超過 12,000 磅/平方吋時, 管之厚度幾何?

2. 厚 $\frac{5}{8}$ 吋鋼板所作成內徑 6 呎之汽鍋胴.

合接縫強度計算之,使最大內力不超過 10,000 磅/平方吋. 問可容內壓力幾何?

3. 內徑 6 吋之鋼管,加以 400 磅/平方吋之內壓力,設可容內力為 6,000 磅/平方吋時,求管厚.

4. 板厚 $\frac{7}{8}$ 吋,內徑 7 呎之蒸汽胴,蒸汽壓力 200 磅/平方吋時,縱及橫斷面上所生內力如何?

5. 有大小二個同材料之管,大管內徑 10 吋,小管內徑 5 吋. 大管厚 $\frac{1}{2}$ 吋時,問耐同一壓力之小管厚度幾何?

6. 厚 $\frac{7}{8}$ 吋,內徑 7 呎之蒸汽胴,對於 200 磅/平方吋之內壓力為安全. 用同一材料之厚 $\frac{5}{8}$ 吋,內徑 6 呎之蒸汽胴,問其可容內壓力幾何?

7. 直徑 3 呎之鋼輪薄邊,重量為每立方吋 0.28 磅. 若使內力不超過 10 噸/平方吋時,每分迴轉數若何? 但 $E=30 \times 10^6$ 磅/平方吋.

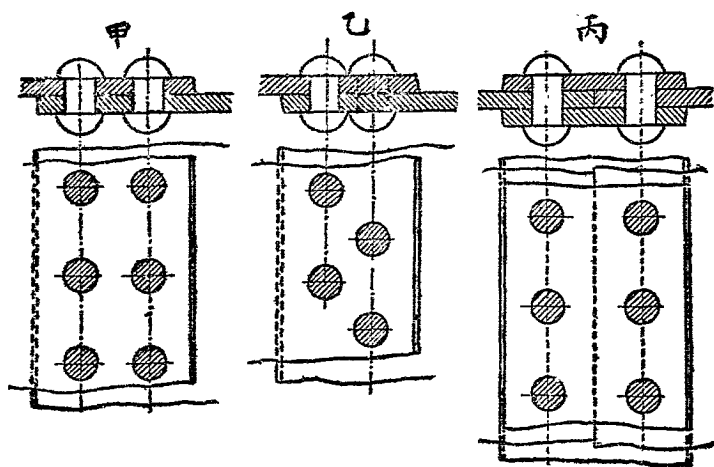
第九章

鉚釘接縫

63. 鉚釘及其接縫. 汽鍋, 水槽, 橋樑等之鋼板或鋼條結合時, 一般用鉚釘 (rivet). 鉚釘者, 兩端有鉚釘頭 (rivet head) 之擴大部, 而中央有鉚釘頸 (shank) 之圓棒. 用此釘之接縫 (joint) 為永久的接合, 僅能切去釘頭, 方可分離. 故須常時解離之部, 不可用鉚釘. 釘為鍊鐵 (wrought iron) 或極軟鋼 (soft steel) 等柔軟而強韌之材料所製成, 一端釘頭造成後, 亦熱之插入孔中, 打擊而造成他端之釘頭. 一般釘上作用之力, 由板而垂直加於釘頸. 故主為剪作用.

64. 接縫之種類. 鉚釘接縫大別之為二種, 即疊接縫 (lap joint) 與對接縫 (butt joint) 是也

疊接縫者如第 105 圖甲乙所示，將兩板重縫，以
 一列或數列之釘固着之。因釘之列數，有一列
 鉚釘疊接縫 (single-riveted lap joint)，二列鉚釘
 (double riveted)，三列鉚釘 (treble riveted) 等之名。
 二列以上有如第 105 圖甲之並列鉚釘 (chain
 riveting) 與乙之間列鉚釘 (zig-zag riveting or stag-



第 105 圖

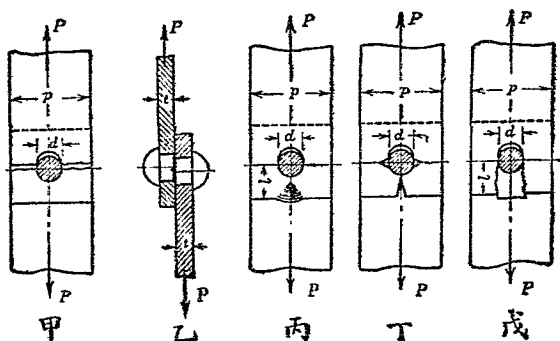
gered riveting) 之別。對接縫者將兩板之邊緣相
 對合，其一側或兩側之接縫處覆以縫板 (butt

strap or cover plate), 而以釘固着之。如第 105 圖丙所示。縫板用於板之一側者, 曰一重縫板對接縫 (butt joint with single butt strap)。若用於兩側者曰二重縫板對接縫 (butt joint with double butt strap)。一重縫板之接合, 其構造上因板之伸縮, 而接合部交互受彎曲作用, 縫板中央易生破壞。因之信賴之程度低, 不宜多用之。汽鍋胴之縱接縫, 其內側與外側有用寬度相異之縫板 (butt joint with double strap of unequal width)。此時鉚釘之中心間距離須變更之。又橋樑, 家屋等鐵骨上之鉚釘接縫, 僅抵抗外力而對於漏洩無顧慮。對接縫中亦有二列鉚釘, 三列鉚釘等。

65. 鉚釘接縫之強度計算。鉚釘接縫之強度, 須自二方面考察之。即板之強度與釘之強度是也。此時釘及板之大小, 釘之配列法, 及相隣二釘間心距 (pitch), 均為必須知之者。心距對於壓力容器中之漏洩有大影響。若心距在

某程度以上時，則板緣之搞緊 (caulking) (釘頭周圍及板之接觸端緣等，置以尖鈍工具，錘擊之，使金屬充分接觸，以防漏洩。) 爲無效。強度之計算雖充分，而漏洩預防上，尚須縮短心距也。

今就第 106 圖上一列鉚釘疊接之一心距研究之。此接縫破壞時有下之五種情形：



第 106 圖

(甲) 釘與釘間之板裂開而破壞(第 106 圖甲).

(乙) 因釘之剪斷而破壞(第 106 圖乙).

(丙) 因釘或板之壓縮而破壞(第106圖丙).

(丁) 因板之彎曲而破壞(第106圖丁).

(戊) 因板之剪斷而破壞(第106圖戊).

今計算時設有以下之符號:

P = 一心距之鉚釘接縫上作用之全荷重(今假定為張力).

t = 板厚.

d = 釘之直徑.

p = 釘之心距.

l = 釘之中心至板邊緣之距離.

f_t = 板之拉伸強度.

f_c = 板或釘之壓縮強度.

f_s = 板或釘之剪斷強度.

f_b = 板之彎曲強度.

先就(甲)論之,板之寬因釘孔而減小. 故有效面積為 $(p-d) \times t$.

$$\therefore P_1 = f_t t (p - d) \dots \dots \dots (112)$$

(乙)時釘僅受剪斷,故

$$P_2 = f_s \frac{\pi}{4} d^2 \dots \dots \dots (113)$$

(丙)時內力分布不明,近似的取爲

$$P_3 = f_c t d \dots \dots \dots (114)$$

(丁)時,可視爲釘孔部分板之端緣固着於兩端而中央受荷重之樑。則彎曲能率之值爲

$$M = \frac{1}{8} P_4 d$$

中央板深爲 $(l - \frac{1}{2}d)$, 故斷面係數之值爲

$$Z = \frac{1}{6} t (l - \frac{1}{2}d)^2$$

故
$$\frac{1}{8} P_4 d = \frac{1}{6} t (l - \frac{1}{2}d)^2 f_b$$

即
$$P_4 = \frac{1}{3} f_b \cdot \frac{t(2l-d)^2}{d} \dots \dots \dots (115)$$

(戊)時釘孔兩端受剪斷,

$$P_5 = 2 f_s l t \dots \dots \dots (116)$$

以上五式均為某假定下之近似式，非為精確。然適用於實際，無大誤謬。

上示五式中 P 值均必相等，由此條件及材料之 f_t, f_c, f_s, f_b 等值，可計算 p, d, t, l 等之值。

由 (112) 及 (113) 兩式，

$$f_t \cdot t \cdot (p-d) = f_s \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

或
$$p = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d^2}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots\dots\dots (117)$$

此為定心距之式。

由 (114), (115) 兩式，

$$f_c t d = \frac{1}{3} \cdot f_b \cdot \frac{t(2l-d)^2}{d}$$

或
$$l = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3f_c}{f_b}} \right) d \dots\dots\dots (118)$$

此為可不因壓縮而破壞之重疊處板寬。

由 (113), (115) 兩式，

$$f_s \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{1}{3} f_b \frac{t(2l-d)^2}{d}$$

或
$$l = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3\pi f_s \cdot d}{4f_b \cdot t}} \right) d \dots \dots (119)$$

此為可不因剪斷而破壞之重疊處板寬。

由 (112), (115) 兩式,

$$f_t \cdot t(p-d) = \frac{1}{3} f_b \cdot \frac{t(2l-d)^2}{d}$$

或
$$l = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3f_t \cdot p-d}{f_b \cdot d}} \right) d \dots \dots \dots (120)$$

此為可不因彎曲而破壞之重疊處板寬。

最後由 (113), (114) 兩式,

$$f_s \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = f_c t d$$

或
$$d = \frac{4f_c t}{\pi f_s} \dots \dots \dots (121)$$

此為板厚與直徑之比例公式。

上示疊接時之重疊處板寬有公式三個, 各生相異值之 l 。當採用其中之最大者。

66. 鉚釘之直徑與板之厚. 鉚釘之直徑與板之厚之比例, 由前記公式(121)可算出之. 鉚釘及板之材料如汽鍋等所用者, 範圍略一定, 而 f_c 與 f_s 之比亦略為一定. 因釘直徑與板厚亦有一定比例, 故作釘直徑與板厚比例之表, 可不用計算而求之. 但用特殊材料時, 須計算之.

次示 Lloyd Rule 及 Board of Trade Rule 之表如下(第294頁).

67. 板及鉚釘材料之強度. 鉚釘主用於汽鍋及種種鐵骨工事. 其材料略一定, 而強度亦比較的限定於狹小範圍內. 汽鍋用材料, 品質良好, 須擇軟韌而富展延性者. 強度可較小. 從來用鍊鐵板及鍊鐵釘, 而近來製鋼發達, 一切鍊鐵均為極軟鋼所驅逐.

德國定為拉伸強度每平方吋 34 至 36 噸者用於汽鍋板, 釘之剪斷強度為其 0.8 倍. 或拉伸強度為每平方吋 55,000 至 65,000 磅, 伸長率 20 至 25%, 而釘之剪斷強度取為 0.8 倍.

Lloyd Rule

板之厚(吋)	釘直徑(吋)			
	一列釘接縫	二列釘接縫	三列釘接縫	二列釘二重縫板接縫
5/16	11/16	—	—	—
3/8	13/16	11/16	—	—
7/16	15/16	3/4	—	—
1/2	1	13/16	3/4	5/8
9/16	1 1/8	15/16	13/16	11/16
5/8	1 3/16	1	7/8	3/4
11/16	—	1 1/16	1	13/16
3/4	—	1 1/8	1 1/16	15/16
13/16	—	—	1 1/8	1
7/8	—	—	1 3/16	1 1/16
15/16	—	—	1 1/4	1 1/8
1	—	—	1 5/16	1 3/16

Board of Trade Rule

板之厚(吋)	釘直徑(吋)			
	一列釘接縫	二列釘接縫	三列釘接縫	二列釘二重縫板接縫
5/16	11/16	—	—	—
3/8	13/16	3/4	—	—
7/16	15/16	13/16	—	—
1/2	1 1/16	7/8	13/16	11/16
9/16	1 1/8	1	7/8	3/4
5/8	1 3/16	1 1/16	15/16	13/16
11/16	—	1 1/8	1 1/16	7/8
3/4	—	1 1/4	1 1/8	15/16
13/16	—	—	1 3/16	1
7/8	—	—	1 1/4	1 1/8
15/16	—	—	1 1/4	1 3/16
1	—	—	1 5/16	1 1/4

鍊鐵時，拉伸強度為 40,000 至 55,000 磅/平方吋，釘之剪斷強度略與此等。

汽鍋時安全係數取為 4.0 至 4.5。

鐵骨工事上所有材料普通為軟鋼，而釘多用極軟鋼。其強度與汽鍋時相同。安全強度如次：

$$f_s = 8,000 \text{ 磅/平方吋}$$

$$f_t = 10,000 \text{ 磅/平方吋}$$

$$f_e = 12,500 \text{ 磅/平方吋}$$

$$f_b = 15,000 \text{ 磅/平方吋}$$

68. 各種鉚釘接縫之效率。以鉚釘接合之板，較之完全部分，則接縫部分，因釘孔而斷面縮小，故為最弱之部，破損必沿釘列而起於接縫部。

換言之，有接縫之板，不能生實體板所可有之最大力，而破損必起於較小之力。鉚釘接縫所可抵抗之最大力與實體板所可抵抗之最大力之比，稱曰鉚釘接縫之效率 (Efficiency of riveted joint)。

鉚釘接縫之效率，詳言之，可分為板之效率與

釘之效率。又二列釘三列釘時更生相異之效率。

今取一心距 (pitch) 時，實體板所可抵抗之最大力 P_0 為

$$P_0 = f_t p t \dots\dots\dots(122)$$

但 p 為心距， t 為板厚， f_t 為板之拉伸強度。由此可計算鉚釘接縫之效率。

(a) 一列鉚釘疊接縫 (第 107 圖)。此為前述鉚釘之強度計算中所引例之最簡單者也。今設由前述方法，已求得心距，釘之直徑，板之厚，釘孔中心至板緣之距離等。此時設板之拉伸抵抗為 P_1 ，則

$$P_1 = f_t t (p - d)$$

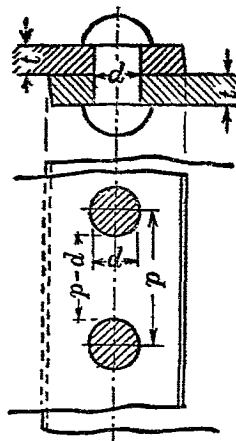
釘之剪斷抵抗設為 P_2 ，則

$$P_2 = f_s \cdot \frac{\pi}{4} d^2$$

由此二式求接縫之效率 R ，以百分率表之。

$$\text{板之效率} \quad R_1 = \frac{P_1}{P_0} \times 100 = \frac{p-d}{p} \times 100 \dots(123)$$

釘之效率 $R_2 = \frac{P_2}{P_0} \times 100 = \frac{\frac{\pi}{4} d^2 f_s}{p t f_t} \times 100 \dots (124)$



第 107 圖

若使 R_1 與 R_2 相等，則

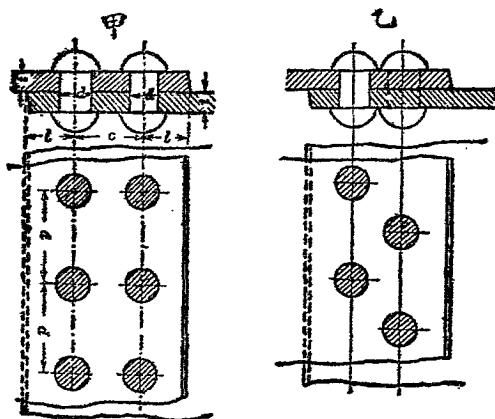
$$\frac{p-d}{p} = \frac{\frac{\pi}{4} d^2}{p t} \cdot \frac{f_s}{f_t}$$

或 $p = \frac{\frac{\pi}{4} d^2}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots (117)$

若用鋼板及鋼鉚釘，則 $f_s = 0.8 f_t$ ，故

$$p = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{d^2}{t} + d \dots (125)$$

(b) 二列鉚釘疊接縫(第108圖). 此有間列配置與並列配置之分,但求法同一.



第 108 圖

$$P_1 = f_t \cdot t \cdot (p - d)$$

$$P_2 = f_s \cdot 2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \right)$$

故

$$R_1 = \frac{p - d}{p} \times 100$$

$$R_2 = \frac{2 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{p t} \cdot \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

若 $R_1 = R_2$, 則

$$p = \frac{2 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots \dots \dots (126)$$

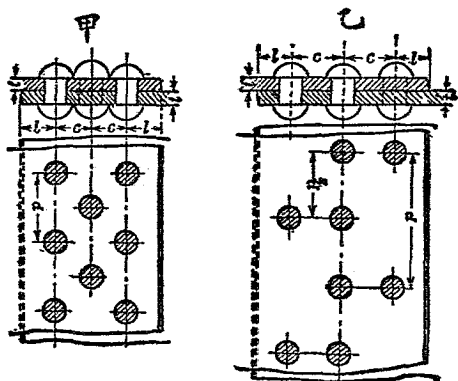
二列以上之鉚釘列，各列間之距離為問題，但一釘中心與相隣釘之中心間之距離不得小於釘直徑之二倍。即並列配置時，

$$c \cong 2d$$

間列配置時，

$$c \cong \sqrt{(2d)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

(c) 三列鉚釘疊接縫(第109圖)。此時有並列



第 109 圖

配置與間列配置之分，其求法同一。可與前例同樣。板之可抵抗之最大力 P_1 為

$$P_1 = f_t \cdot t \cdot (p - d)$$

$$P_2 = 3 \times \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) f_s$$

故

$$R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

$$R_2 = \frac{3 \times \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{p t} \cdot \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

若 $R_1 = R_2$, 則

$$p = \frac{3 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots \dots \dots (127)$$

若如第 109 圖乙所示, 內列鉚釘之心距爲外列鉚釘之二分之一, 則

$$P_2 = 4 \times \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) f_s$$

$$R_2 = \frac{4 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{p t} \cdot \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

因之

$$p = \frac{4 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots \dots \dots (127a)$$

又此種鉚釘接縫上內列板之斷面更小, 故此列之板之強度須研究之。但此時外列釘對於板之破斷亦抵抗, 故須合併研究之。即內列所

可耐之最大力 P_3 爲

$$P_3 = \frac{\pi}{4} d^2 f_s + (p - 2d) t f_t$$

或

$$R_3 = \frac{\frac{\pi}{4} d^2 f_s + (p - 2d) t f_t}{p t f_t} \times 100$$

$$= \frac{R_2}{4} + \frac{p - 2d}{t} \times 100$$

故若 $R_3 = R_1 = R_2$, 則

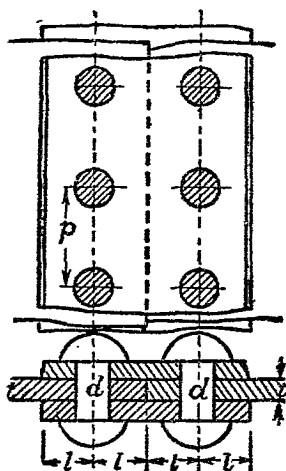
$$p = \frac{4 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots \dots \dots (127a)$$

及

$$d = \frac{t}{\left(\frac{\pi}{4} \right)} \cdot \frac{f_t}{f_s} = \frac{5t}{\pi} = 1.59t \dots \dots (127b)$$

(但指鋼板及鋼鉚釘)

(d) 一列鉚釘對接縫(第110圖). 對接縫中一重縫板, 宛如二個疊接縫之相連者. 故如疊接縫之求法即可. 但縫板厚爲板厚之 $1\frac{1}{8}$ 倍左右者爲普通. 用二重縫板時, 縫板厚度內外均爲板厚之 $\frac{5}{8}$ 倍. 釘受複剪斷, 故較疊接縫爲甚強.



第 110 圖

板之可耐最大力 P_1 爲

$$P_1 = (p-d)tf_s$$

故板之效率爲

$$R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

釘之可耐最大力 P_2 爲

$$P_2 = C \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) f_s$$

故鉚釘之效率爲

$$R_2 = \frac{C \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{pt} \cdot \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

若 $R_1 = R_2$, 則

$$p = \frac{C \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots \dots \dots (128)$$

但 C 為某常數, 若剪作用完全, 則複剪時當為 2. 然安全上有取小於 2 者. 例如 Board of Trade Rule 指定 $C=1.75$.

鉚釘之直徑與板之厚度間之關係由 § 65 公式 (113), 可變為複剪斷而求之. 一般對於二重縫板一列鉚釘之對接縫, 用次之比例:

$$\left. \begin{array}{l} d = t + \frac{1}{4} \text{ 吋} \quad \text{鐵板及鐵鉚釘} \\ d = t + \frac{5}{16} \text{ 吋} \quad \text{鋼板及鋼鉚釘} \end{array} \right\} \dots \dots (129)$$

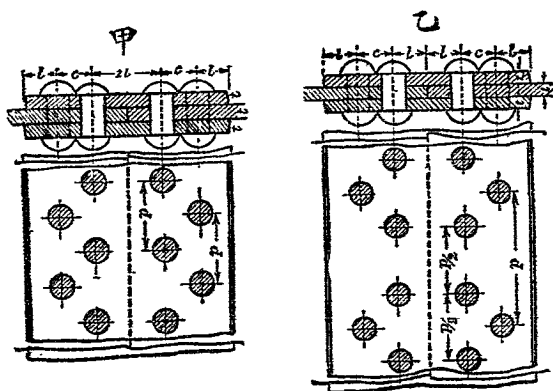
(e) 二列鉚釘對接縫 (第 111 圖). 二列鉚釘對接縫普通為間列配列之鉚釘, 如上圖甲, 其心距相同, 或如上圖乙, 將內列鉚釘配列為二分之一之心距.

甲時,
$$R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

$$R_2 = \frac{2C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{pt} \cdot \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

若 $R_1 = R_2$, 則

$$p = \frac{2C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots\dots\dots(130)$$



第 111 圖

釘之直徑與板之厚之關係爲

$$\left. \begin{array}{l} d = t + \frac{3}{16} \text{ 吋, 鐵板或鐵鉚釘} \\ d = t + \frac{1}{4} \text{ 吋, 鋼板或鋼鉚釘} \end{array} \right\} \dots\dots(131)$$

乙時,
$$R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

$$R_2 = \frac{3C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{pt} \times \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

使 $R_1 = R_2$, 則

$$p = \frac{3C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{t} \times \frac{f_t}{f_s} + d \dots \dots (130a)$$

又考察內列鉚釘間板之破斷, 則外列鉚釘亦抵抗之。故合計二者之抵抗,

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)f_s + (p-2d)tf_t}{ptf_t} \times 100 \\ &= \frac{R_2}{3} + \frac{(p-2d)}{p} \times 100 \end{aligned}$$

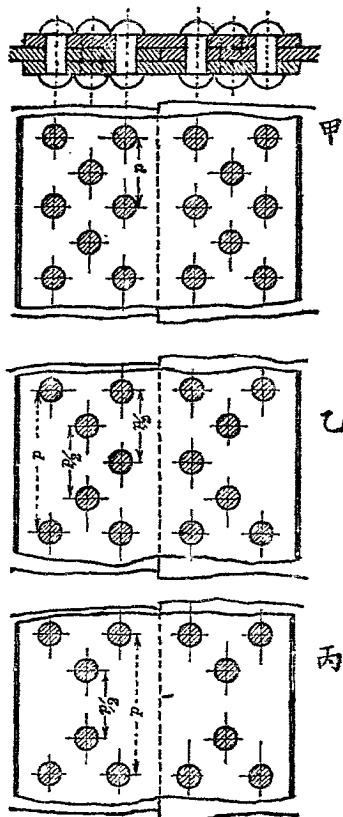
普通所用鉚釘之直徑與板厚之關係爲

$$\left. \begin{aligned} d &= t + \frac{1}{8} \text{ 吋 鐵板或鐵鉚釘} \\ d &= t + \frac{3}{16} \text{ 吋 鋼板或鋼鉚釘} \end{aligned} \right\} \dots \dots (131a)$$

用此尺寸之鉚釘, 則 R_3 較 R_1 或 R_2 爲大, 因之鉚釘接縫之效率由 R_1 或 R_2 決定之。

(f) 三列鉚釘對接縫(第112圖)。此接縫有下

之各種配列法。(甲)各列有同一心距之配列,(乙)僅最外列有大心距之配列,(丙)內外列同一心距,而中列爲 $\frac{1}{2}$ 心距之配列。



第 112 圖

$$\text{甲時, } R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

$$R_2 = \frac{3C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{pt} \times \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

若 $R_1 = R_2$, 則

$$p = \frac{3C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{pt} \times \frac{f_s}{f_t} + d \dots\dots\dots(132)$$

鉚釘直徑與板厚之比之關係如下:

$$\left. \begin{array}{l} d = t + \frac{1}{16} \text{ 吋 鐵板及鐵鉚釘} \\ d = t + \frac{1}{8} \text{ 吋 鋼板及鋼鉚釘} \end{array} \right\} \dots\dots(133)$$

$$\text{乙時, } R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

$$R_2 = \frac{5C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{pt} \times \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

$$\text{使 } R_1 = R_2, \text{ 則 } p = \frac{5C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{t} \times \frac{f_s}{f_t} + d \dots\dots\dots(132a)$$

鉚釘之直徑對於 $\frac{5}{8}$ 吋至 $\frac{7}{8}$ 吋之厚板時,

$$\left. \begin{array}{l} d = t + \frac{1}{8} \text{ 吋} \\ \text{對於 1 吋 以上之厚板時,} \\ d = t \text{ 吋} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(133a)$$

對於中列鉚釘之切斷，外列鉚釘亦生作用，故

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{C \frac{\pi}{4} d^2 f_s + (2p - d) t f_t}{p t f_t} \times 100 \\ &= \frac{R_2}{5} + \frac{(p - 2d)}{p} \times 100 \end{aligned}$$

但對於前記鉚釘之直徑，則 R_3 較 R_1 或 R_2 大。

$$\text{丙時,} \quad R_1 = \frac{p - d}{p} \times 100$$

$$R_2 = \frac{4C \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{p t} \times \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

$$\text{使 } R_1 = R_2, \text{ 則} \quad p = \frac{4C \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{t} \times \frac{f_s}{f_t} + d \dots\dots\dots(132b)$$

鉚釘直徑與乙時同樣，中列之效率亦與乙時同樣。

(g) 寬度相異之二重縫板對接縫(第113圖). 此接縫多用於汽鍋胴之縱向接縫(longitudinal seam). 主為三列鉚釘者. 第113圖所示為最普通之種類之接縫.

$$R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

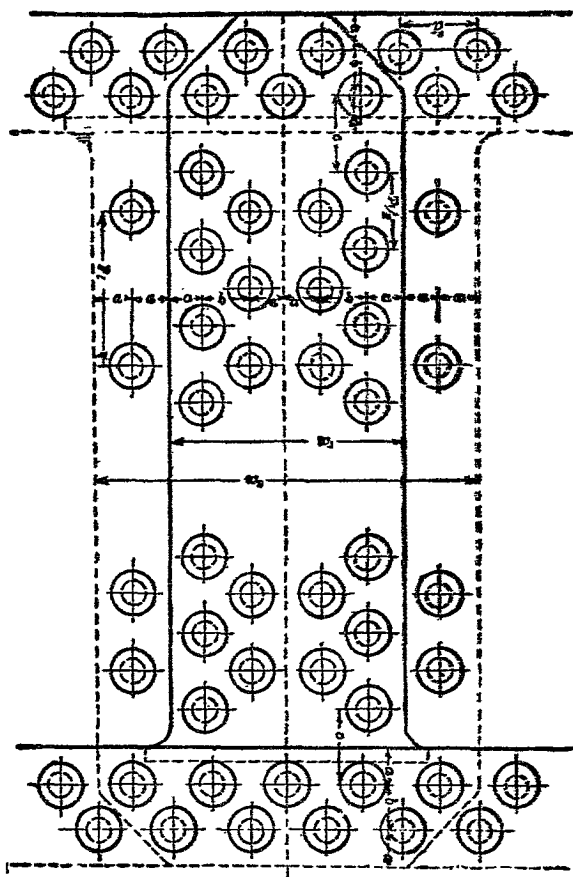
$$R_2 = \frac{(4C+1) \frac{\pi}{4} d^2}{pt} \times \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

內側四鉚釘為複剪斷, 而最外列一鉚釘為單剪斷.

中列鉚釘間板之破斷時, 外列之鉚釘亦有影響. 故

$$R_3 = \frac{\frac{\pi}{4} d^2 f_s + (p-2d) t f_t}{p t f_t} \times 100$$

由此三式, 使 $R_1 = R_2 = R_3$, 求 p, t 及 d 之關係. 但一般此法所得 p 值過大, 對於漏洩不完全. 故適當定 p 值後, 算出 R_1, R_2 及 R_3 . 取其最小值為接縫之效率.



第 113 圖

今示 Board of Trade Rule 之鉚釘接縫最大心距
之表如下:

$$p = kt + 1\frac{5}{8} \text{ 吋.}$$

一心距間之鉚釘數	1	2	3	4	5
疊接縫	$k=1.31$	2.62	3.47	4.14	—
對接縫	$k=1.75$	3.50	4.63	5.52	6.00

但 p 不超過 10 吋。

以上主為汽鍋胴之鉚釘接縫或水槽之鉚釘接縫等。對於心距有極大尺寸，即有多數鉚釘連續時之計算也。

若如帶片等寬度狹小，不過心距之數倍者，可不求接縫效率而直接計算各列鉚釘之強度。茲舉數例如下。

例 1. 鋼板厚 $\frac{9}{16}$ 吋，鉚釘直徑 1 吋，鉚釘之心距 $2\frac{1}{8}$ 吋，自釘中心至板之邊緣距離 $1\frac{1}{2}$ 吋時，試計算此一系列鉚釘疊接縫之各種強度。但 $f_t = 12,500$ 磅/平方吋， $f_s = 10,000$ 磅/平方吋， $f_c = 23,000$ 磅/平方吋。

由題意,

$$t = \frac{9}{16} \text{ 吋}, \quad d = 1 \text{ 吋}, \quad p = 2\frac{1}{8} \text{ 吋}, \quad l = 1\frac{1}{2} \text{ 吋}.$$

由公式 (112), (113), (114), (115), 及 (116), 得

$$P_1 = (p-d)tf_t = (2.125-1) \times 0.5625 \times 12,500 = 7,900 \text{ 磅}$$

$$P_2 = \frac{\pi}{4}d^2f_s = \frac{3.14}{4} \times 1^2 \times 10,000 = 7,840 \text{ 磅}$$

$$P_3 = f_c td = 0.5625 \times 1 \times 23,000 = 12,900 \text{ 磅}$$

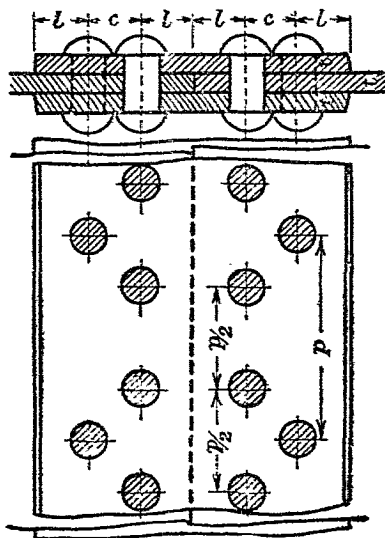
$$P_4 = \frac{1}{3}f_b \cdot \frac{t(2l-d)^2}{d} = \frac{1}{3} \times 15,000 \times \frac{0.5625(3.00-1)^2}{1}$$

$$= 11,250 \text{ 磅}$$

$$P_5 = 2f_s lt = 2 \times 10,000 \times 1.5 \times 0.5625 = 16,900 \text{ 磅}$$

由此則若用普通之 $l=1.5d$ 之比例, 則 P_4, P_5 較 P_1, P_2 甚大, 而接縫之破損由板之破斷或釘之剪斷而生.

例 2. 有二列鉚釘二重縫板之對接縫, 鋼板厚 $\frac{9}{16}$ 吋, 鉚釘直徑 $\frac{3}{4}$ 吋, 求他之尺寸如何? 但鉚釘之配列如第 114 圖.



第 114 圖

先求板之效率,

$$R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

次求鉚釘之效率,

$$R_2 = \frac{3C \frac{\pi}{4} d^2}{pt} \times \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

取 C 為 2, 且對於鋼板鋼鉚釘,

$$\frac{f_s}{f_t} = 0.8$$

故
$$R_2 = \frac{6 \cdot \frac{\pi}{4} d^2}{pt} \times 0.8 \times 100$$

若 $R_1 = R_2$, 則
$$p = \frac{6 \cdot \frac{\pi}{4} \times d^2}{t} \times 0.8 + d$$

$$= \frac{6 \times 3.14 \times 0.752 \times 0.8}{0.5625 \times 4} + 0.75$$

$$= 3.78 + 0.75 = 4.53 = 4 \frac{1}{2} \text{ 吋}$$

若採用此心距, 則效率爲

$$R_1 = \frac{4.5 - 0.75}{4.5} \times 100 = 83.3 \%$$

$$R_2 = \frac{6 \times \frac{3.14}{4} \times 0.75^2}{4.5 \times 0.5625} \times 0.8 \times 100 = 83.8 \%$$

內列鉚釘間之板切斷而外列鉚釘剪斷時,

$$R_3 = \left\{ \frac{C \frac{\pi}{4} d^2 f_s}{ptf_t} + \frac{(p - 2d)tf_t}{ptf_t} \right\} \times 100$$

$$= \frac{R_2}{3} + \frac{p - 2d}{p} \times 100$$

$$= \frac{83.8}{3} + \frac{4.5 - 1.5}{4.5} \times 100$$

$$= 27.9 + 66.7 = 94.6 \%$$

此較 R_1 及 R_2 爲甚大。

板或釘在釘孔部分壓壞時，

$$R_4 = \frac{3d}{p} \times \frac{f_c}{f_t} \times 100$$

今設 $\frac{f_c}{f_t} = 2.00$ ，則

$$R_4 = \frac{3 \times 0.75 \times 2}{4.5} \times 100 = 100 \%$$

定縫板之厚時，內列鉚釘間，縫板切斷之荷重與外列鉚釘間板切斷之荷重若相等，則

$$P_1 = (p-d) \cdot t f_t = 2(p-2d)t_1 f_t$$

$$\therefore t_1 = t \frac{p-d}{2(p-2d)}$$

但實際取此厚度之 $1\frac{1}{4}$ 倍。

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{5}{8} \cdot \frac{p-d}{p-2d} t = \frac{5}{8} \cdot \frac{4.5-0.75}{4.5-2 \times 0.75} \times \frac{9}{16} \\ &= 0.439 \doteq \frac{7}{16} \text{ 吋} \end{aligned}$$

板孔中心至板緣距離

$$l = 1.5d = 1.5 \times 0.75 = 1\frac{1}{8} \text{ 吋}$$

釘列間間隔

$$C = 2d = 2 \times 0.75 = 1.5 \text{ 吋}$$

問 題

1. 鋼板厚 $\frac{1}{2}$ 吋，全拉荷重 18,000 磅之二重縫板對接縫，其適當尺寸如何？但鋼之拉伸強度 10,000 磅/平方吋，剪斷強度為 $\frac{8}{10}$ 倍。壓縮強度為 12,500 磅/平方吋。

2. 一列鉚釘疊接縫之板厚 $\frac{1}{2}$ 吋，鉚釘直徑 $\frac{15}{16}$ 吋，釘心距 $2\frac{1}{16}$ 吋，用鋼板及鋼鉚釘。鋼之拉伸強度為 28 噸/平方吋，剪斷強度為 23 噸/平方吋時，計算各效率。

3. 厚 $\frac{5}{8}$ 吋之汽鍋用鋼板，用三列鉚釘疊接縫。鋼鉚釘直徑設為 $\frac{15}{16}$ 吋。求他之尺寸如何？

第十章

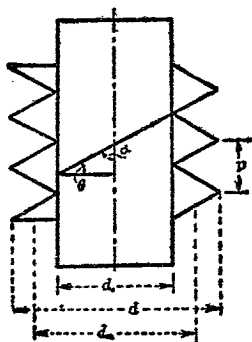
螺絲接合

69. 螺絲及螺絲接合. 圓筒表面上以與中心線成某角度(但除直角)之一直線捲附之, 生一種立體曲線, 此曰螺旋線. 沿該線而迴繞圓筒一次, 則於其中心線方向上進行一定距離. 換言之, 以平行於圓筒中心線之圓筒面上直線切螺旋線時, 該直線為螺旋線所分為相等多數部分. 此各線分之長曰螺旋之步距 (pitch). 即一迴轉時所進行之距離也.

沿此螺旋線, 以三角形或四角形斷面捲附時, 則得如第 115 圖所示. 圓筒表面上生螺旋狀配列之高部與低部. 如此所成螺旋狀突起曰螺絲 (screw thread).

今若作成使與螺絲相抱圍而嵌合之螺旋狀之部體 (element), 固定一方, 使他方迴轉時, 則每

一迴轉,其圓筒中心線方向上之相互移動爲一步距. 一般供實用之螺絲必須兼備此兩部. 圓筒外面有螺旋之部體曰雄螺旋 (male screw), 內面有螺旋之部體曰雌螺旋 (female screw).



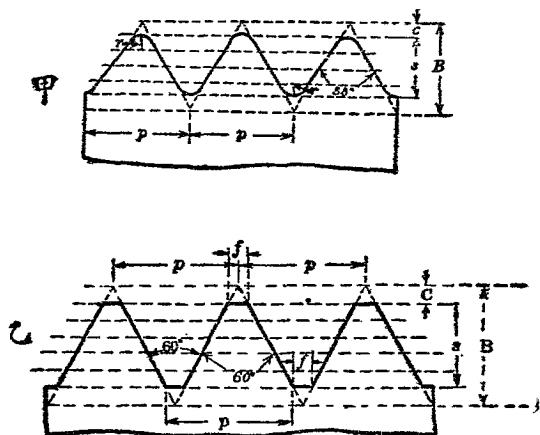
第 115 圖

將雄螺旋與雌螺旋生相互迴轉時,其中心線方向上生關係運動. 若不使迴轉時,則中心線方向不能生關係運動. 而具有雄螺旋及雌螺旋兩部體互相結合. 故可應用於各部分之接合. 且必要時得容易分離. 前章所述鉚釘接縫爲永久接合 (permanent joint), 而此種接合曰一時接合 (temporary joint).

70. 螺絲之種類. 上述螺絲有三角形四角形等種種形狀. 然種種異形主用於運動傳送之目的. 對於接合則僅用二等邊三角形之螺絲. 然使用多數螺絲時, 若用各別之比例, 則不得彼此交換, 且製作上設備與手續均繁. 故螺絲形狀宜有一定標準以期統一. 標準螺絲其種類不止一二, 然應用最廣之代表的形狀為英國式魏垣氏標準螺絲 (Whitworth standard thread) 及美國式守巒氏標準螺絲 (Sellers standard thread). 其尺寸如第116圖甲乙所示.

71. 螺帽釘, 端入螺帽釘, 及釘帽. 螺絲接合, 具雄螺旋及雌螺旋. 爲螺帽釘或端入螺帽釘與釘帽所成.

螺帽釘 (bolt) 者, 爲一端具有頭部 (head) 之圓棒. 棒之他端有螺絲, 與具有雌螺旋之部體即釘帽 (nut) 相嵌合. 螺帽釘之棒, 通過於所結合兩部體之孔中, 將兩部體挾入於釘頭與釘帽之間, 而緊着之.



第 116 圖

(甲) 魏垣氏

 $p = \text{步距, 吋}$ $s = 0.64 p$ $r = 0.137 p$ $B = 0.96 p$ $C = \frac{1}{6} B = 0.16 p$

(乙) 守替氏

 $p = \text{步距, 吋}$ $s = 0.65 p$ $B = 0.866 p$ $C = \frac{1}{8} B = 0.108 p$ $f = \frac{1}{8} p$

端入螺帽釘 (stud) 者, 用於上之螺帽釘不適用之處。圓棒兩端刻有螺絲, 一端雄螺旋嵌入於所結合部體中一者之雌螺旋中。而棒貫通

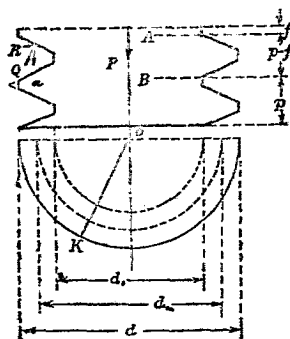
他方部體之孔後，他端嵌入於釘帽而緊着之。

釘頭及釘帽之外側普通爲六角形，具有迴螺器 (spanner) 之鉗挾面。有時亦有爲四角形者。或亦有其他之適當形狀者。

72. 螺帽釘，端入螺帽釘，及釘帽之尺寸。螺帽釘及端入螺帽釘須自強度計算其大小。接合時外力主爲中心方向上拉力。故對於此拉力而求之。

因此拉力結果，螺帽釘主體受拉力作用，其螺絲部受自主體剪斷之作用，又與本體接續部如突出樑時，有折斷之作用。同時釘帽上薄邊受螺絲面上壓力之分力，有破裂之作用。此四作用須同時研究。但一般釘帽與螺帽釘之尺寸比例有一定，故常就第一之內力而計算之。

第117圖中抵抗拉力之面積須就螺絲底測之。設拉力之值爲 P 磅，螺絲底直徑爲 d_0 吋，材料之可容拉內力爲 p_t 磅/平方吋。則



第 117 圖

$$P = \frac{\pi}{4} d_0^2 p_t \dots\dots\dots (134)$$

次就螺絲之剪斷論之。設各螺絲同樣接觸，則抵抗剪斷之面積，其寬為圖上 AB 即 $(p-f)$ (但 p 為步距)，而長為沿螺絲上接觸開始處至終了處之長。設釘帽高為 h 吋，每一吋之螺絲數為 n ，則螺絲總數為 nh 。每螺絲之長為 πd_0 吋，故全體接觸部長為 $\pi d_0 nh$ 。故

$$P = \pi d_0 nh (p-f) p_s \dots\dots\dots (135)$$

但 p_s 為材料之可容剪內力 (磅每平方吋表之)

今設對於剪作用之強度與對於拉力作用之

強度若相等，則可定釘帽之高。即

$$\frac{\pi}{4} d_0^2 p_t = P = \pi d_0 n h (p-f) p_s$$

$$\therefore h = \frac{p_t}{p_s} \cdot \frac{d_0}{4n(p-f)}$$

對於鋼則 $p_s = 0.8 p_t$ ，則

$$h = \frac{5d_0}{16n(p-f)}$$

魏垣氏螺絲， $f=0$ 。 守巒氏螺絲 $f = \frac{1}{8} p$ 。且 $n =$

$\frac{1}{p}$ 。故由上式，

$$\text{魏垣氏式 } h = \frac{5pd_0}{16p} = \frac{5}{16} d_0 = 0.313 d_0 \dots \dots (136)$$

$$\text{守巒氏式 } h = \frac{5pd_0}{16 \times \frac{7}{8} p} = \frac{5}{14} d_0 = 0.357 d_0 \dots (136a)$$

一般釘帽之高 h 等於螺帽釘外徑 d ，故無須考慮剪斷之破壞。

次視螺絲為突出樑，則彎曲能率如下。設荷重集中於螺絲高之中央，

$$M = P \times \frac{s}{2}$$

但 s 爲螺絲之高, 魏垣氏式 $s=0.64p$, 守巒氏式 $s=0.65p$. 抵抗面與對於剪斷之面同一. 即寬 $\pi d_0 n h$, 厚 p 或 $\frac{7}{8}p$. 故斷面係數爲

$$Z = \frac{1}{6} \pi d_0 n h p^2 \quad \text{或} \quad Z = \frac{1}{6} \pi d_0 n h \left(\frac{7}{8} p \right)^2$$

由此二式,

$$\text{魏垣氏式} \quad \frac{P_s}{2} = \frac{1}{6} \pi d_0 n h p^2 p_t$$

$$\text{守巒氏式} \quad \frac{P_s}{2} = \frac{1}{6} \pi d_0 n h \left(\frac{7}{8} p \right)^2 p_t$$

因之

$$\begin{aligned} \text{魏垣氏式} \quad P &= \frac{\pi d_0 n h p^2 p_t}{3s} \\ &= \frac{\pi d_0 h p p_t}{3s} \dots\dots\dots(137) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{守巒氏式} \quad P &= \frac{49 \pi d_0 n h p^2 p_t}{192s} \\ &= \frac{49 \pi d_0 h p p_t}{192s} \dots\dots\dots(137a) \end{aligned}$$

今使對於彎曲之強度與對於拉伸之強度相等, 而決定 h .

$$\frac{\pi}{4}d_0^2 p_t = P = \frac{\pi d_0 h p p_t}{3s}$$

或
$$\frac{\pi}{4}d_0^2 p_t = P = \frac{49\pi d_0 h p p_t}{192s}$$

以 s 之值代入上式, 得

魏垣氏式
$$h = \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{p} d_0 = \frac{3}{4} \times 0.64 d_0$$

$$= 0.48 d_0 \dots\dots\dots(188)$$

守巒氏式
$$h = \frac{192}{4 \times 49} \cdot \frac{s}{p} d_0 = \frac{192}{4 \times 49} \times 0.65 d_0$$

$$= 0.636 d_0 \dots\dots\dots(188a)$$

故對於彎曲之破壞亦無須考慮之。

次就釘帽之破裂論之。設軸線方向之拉力在螺絲表面直角作用之壓力為 Q , 則

$$Q = \frac{P}{2} \sec \frac{\alpha}{2}$$

但 α 為螺絲頂角。魏垣氏式 為 55° , 守巒氏式 為 60° 。故

魏垣氏式
$$Q = \frac{P}{2} \times \frac{1}{\cos 27^\circ 30'} = \frac{P}{2} \times \frac{1}{0.88701}$$

$$= 0.564 P$$

$$\begin{aligned} \text{守巒氏式 } Q &= \frac{P}{2} \times \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{P}{2} \times \frac{1}{0.86603} \\ &= 0.578 P \end{aligned}$$

今求上力之半徑方向分力 R .

$$\begin{aligned} \text{魏垣氏式 } R &= Q \sin 27^\circ 30' = 0.564 P \times 0.46175 \\ &= 0.260 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{守巒氏式 } R &= Q \sin 30^\circ = 0.578 P \times 0.50000 \\ &= 0.289 P \end{aligned}$$

此 R 力作用於相反對之半徑方向，而使釘帽破裂。實際上 R 各少量作用於螺絲全面上，自釘帽上方至下方放射狀作用於各方向。今簡單上如上假定，極為安全。

抵抗此力之面為釘帽之縱斷面。其高 h 等於螺帽釘外徑 d ，其邊厚為 $\frac{1}{2}(D-d)$ 。但 D 為釘帽上一側面至對側面之寬。故抵抗面積在兩側為 $(D-d)d$ 平方吋。因之

$$\text{魏垣氏式} \quad R = 0.260 P = (D-d) d p_t$$

$$\text{守巒氏式} \quad R = 0.289 P = (D-d) d p_t$$

今設螺帽釘對於拉伸之強度與釘帽對於破裂之強度相等，而決定 D 。則

$$\text{魏垣氏式} \quad \frac{\pi}{4} d_0^2 p_t = P = \frac{(D-d) d p_t}{0.260}$$

$$\text{守巒氏式} \quad \frac{\pi}{4} d_0^2 p_t = P = \frac{(D-d) d p_t}{0.289}$$

故

$$\text{魏垣氏式} \quad D = 0.260 \times \frac{\pi}{4} \times \frac{d_0^2}{d} + d \dots \dots \dots (139)$$

$$\text{守巒氏式} \quad D = 0.289 \times \frac{\pi}{4} \times \frac{d_0^2}{d} + d \dots \dots \dots (139a)$$

d_0 與 d 之關係因步距大小而異。若 p 未知，則不能解上式。但大略 d_0 以 d 代之，則上式為

$$\text{魏垣氏式} \quad D = 1.204 d \dots \dots \dots (139b)$$

$$\text{守巒氏式} \quad D = 1.227 d \dots \dots \dots (139c)$$

然六角之一側面至對側面略為 $1.732 d$ ，且上記之計算極近似而簡略者。實際之值較之尚小。故實際所用尺寸比例極為安全。

例 1. 直徑 1 吋之圓鋼棒，其頂部切螺絲，而嵌入於釘帽，以支持重量。若可容拉內力為

10,000 磅/平方吋時，問可支持幾許長度？但鋼重量為每立方吋 0.284 磅。

由魏垣氏標準螺絲，若直徑 1 吋，每吋有 8 個螺絲。故螺絲底直徑 d_0 為

$$d_0 = d - 2s = 1 - 2 \times 0.64 \times \frac{1}{8} = 0.840 \text{ 吋}$$

有效面積為

$$\frac{\pi}{4} \times 0.840^2 = 0.5542 \text{ 平方吋}$$

故可支持之最大重量為

$$P = p_t \times 0.5542 = 10,000 \times 0.5542 = 5,542 \text{ 磅}$$

直徑 1 吋長 1 吋之圓棒重量為 $\frac{\pi}{4} \times 0.284 = 0.223$ 磅，故可支持之最大長度 l 為

$$l = \frac{5,542}{0.223} = 24,852 \text{ 吋} = 2,071 \text{ 呎}$$

第 十 一 章

橫 栓 接 合 及 縱 栓 接 合

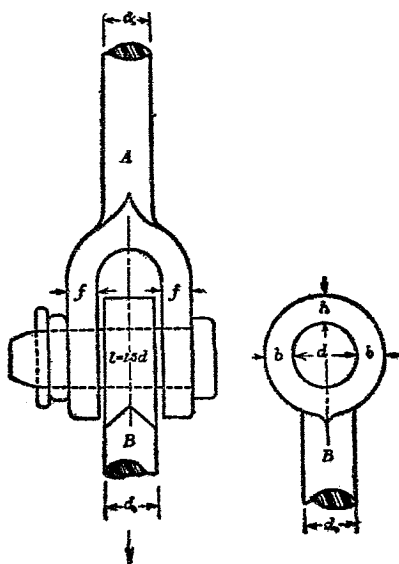
73. 串釘接合. 甲乙二物體接合時, 可使相互迴轉於軸周者, 其法以前記迴轉軸爲中心線, 穿圓孔於甲乙二物體之上, 插入一釘於此孔中, 得所要之接合. 此稱曰串釘接合 (pin joint). 此時釘全自由, 而甲乙二物或皆不固定, 或固定其一. 有不能解離之永久接合, 亦有可解離之一時接合.

串釘接合多用以傳力於甲乙兩物體間. 受拉力或壓力或兩者之作用. 此時釘受剪斷作用, 故以複剪斷爲有利. 使一方物體爲叉形, 他方物體挾於其間, 而貫以釘. 卽所謂叉接合 (forked joint) 是也. 釘對於甲乙兩部體 (大多爲棒形) 之軸線成橫方向, 故稱爲橫栓接合.

計算串釘接合各部之強度時，參照第 118 圖。釘之外，棒之強度亦須考察之。棒若受壓縮時，成長柱之作用，較為複雜。今就拉伸時論之。

設所加拉力之大小為 P 磅，材料之可容最大拉內力為 p_t 磅/平方吋，而棒為圓形斷面，則其直徑 d_0 為

$$d_0 = \sqrt{\frac{4P}{\pi p_t}} \dots\dots\dots(140)$$



第 118 圖

或
$$P = \frac{\pi}{4} d_0^2 p_t \dots \dots \dots (140a)$$

次就釘之剪斷論之。因複剪斷，故其直徑 d 吋爲

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 \times 1.75 \times p_s \dots \dots \dots (141)$$

(此係數不爲 2 而爲 1.75 者，蓋期安全也。參觀前章鉚釘接縫。)

或 $p_s = 0.8 p_t$ ，故

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi}{4} d^2 p_t \times 1.75 \times 0.8 \\ &= 1.4 \times \frac{\pi}{4} d^2 p_t \dots \dots \dots (141a) \end{aligned}$$

故棒與釘若有同一強度時，

$$\frac{\pi}{4} d_0^2 p_t = 1.4 \times \frac{\pi}{4} d^2 p_t$$

或
$$d = \frac{1}{\sqrt{1.4}} d_0 = 0.845 d_0 \dots \dots \dots (141b)$$

若 A 部體之叉部與 B 部體外側相密着，則釘僅受剪斷作用。但大多數之情形，則兩者間鬆寬，且使用中亦生摩滅而有空隙。故釘自剪斷作用外，尚受樑之彎曲作用。然荷重之分布與

支點之位置不明，因串釘接合之狀態而不一定。故多設假定而求釘之尺寸。

設荷重分布於釘上，而兩支點跨徑為 $1.5 d$ 。此長度即兩叉點內側間距離與外側間距離之中間之長。因之

$$M = \frac{Pl}{8} = \frac{3Pd}{8 \times 2} = \frac{3}{16}Pd \quad (P \text{ 爲均布荷重})$$

$$Z = \frac{\pi}{32}d^3$$

故
$$\frac{3}{16}Pd = \frac{\pi}{32}d^3 p_t \dots\dots\dots(142)$$

或
$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 p_t \dots\dots\dots(142a)$$

若對於彎曲之強與對於拉伸之強相等，則

$$\frac{\pi}{4} d_0^2 p_t = P = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 p_t$$

因之
$$d = \sqrt{\frac{3}{2}} d_0 = 1.225 d_0 \dots\dots\dots(142b)$$

普通採 $d = 0.845 d_0$ 及 $d = 1.225 d_0$ 之中間值 $d = d_0$ 。

次求圓孔兩側及頂上之厚度。其精確計算甚難。僅能由種種假定而計算之，以供參考耳。

設兩側厚爲 b , 則抵抗拉力之面積爲 $2bd$. 故

$$P = 2bdp_t \dots \dots \dots (143)$$

然 $d = d_0$, 故

$$\frac{\pi}{4}d^2p_t = P = 2bdp_t$$

或
$$b = \frac{\pi d}{8} = 0.393d \dots \dots \dots (143a)$$

普通之尺寸爲 $b = 0.5d \sim 0.75d$.

對於頂上部, 則可視爲一樑, 荷重均布於其上. 若跨徑等於 d , 厚度爲 h , 則

$$M = \frac{Pd}{8} = \frac{1}{6}dh^2p_t$$

或
$$P = \frac{4}{3}h^2p_t \dots \dots \dots (144)$$

故
$$\frac{\pi}{4}d^2p_t = P = \frac{4}{3}h^2p_t$$

或
$$h = \sqrt{\frac{3\pi}{16}}d = 0.768d \dots \dots \dots (144a)$$

實際上尙較此安全. 普通比例爲 $h = 0.75d$.

兩叉部之寬合計之, 普通約爲中央部體之 1.25 倍乃至 1.50 倍. 此蓋備力之分布不均勻, 而荷重偏於一方時之用也.

例1. 受 $3\frac{1}{2}$ 噸拉力之棒上設有串釘接合. 鋼之可容最大拉內力爲10,000磅/平方吋. 求各部之尺寸.

設棒之直徑爲 d_0 , 由公式(140),

$$d_0 = \sqrt{\frac{4P}{\pi p_t}} = \sqrt{\frac{4 \times 3.5 \times 2240}{3.14 \times 10,000}} = 1 \text{ 吋}$$

故釘之直徑亦爲1吋.

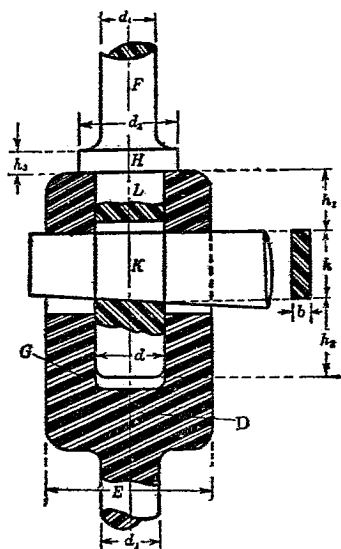
圓孔兩側厚 $b = 0.5d = \frac{1}{2}$ 吋

圓孔頂上厚 $h = 0.75d = \frac{3}{4}$ 吋

兩叉部寬 $f = 0.625d = \frac{5}{8}$ 吋

74. 楔接合. 橫栓接合中自串釘接合而外, 尚有用楔(cotter)之楔接合(cotter joint). 楔接合與串釘接合同樣, 對於拉伸及壓縮而設計之. 然使用有扁平側面之矩形或其他類似之斷面之楔, 故兩物體結合而成爲若一物體者. 其間不能生關係運動. 但有時軸線方向上楔孔之長較楔之長大, 使兩物體位置可有軸線方向上之調整.

若楔孔各側與楔各側密着時，則拉伸與壓縮二者均可由楔傳達。若軸線方向有空隙時，則其一者必由他法傳達。普通拉力以楔傳送，而壓力以他法傳送。第 119 圖上方部體 F 上有鐳 (collar)，與下方部體 B 之承孔 (socket) G 之上面相接觸。由此以傳達壓力。有時無鐳，承孔內面及其插入之上方部體 L 不為圓筒形，而附有



第 119 圖

傾斜。由此以傳壓力。長度之調整，因摩擦所生之空隙。故楔之一側為傾斜面，移動於長之方向可調整之。楔面之斜度普通為 $\frac{1}{8}$ 乃至 $\frac{1}{4}$ 。

強度計算略與串釘接合時同。但楔之厚小，故支承面之壓力相當大。今詳述之可分為受拉力部分，受剪力部分，及受壓力部分之三種。又受彎曲作用之部分亦存在。第119圖上受拉力部分為棒 E 及 F ，延長部 L ，及承孔 G 。受剪力部分為承孔內側之楔斷面，楔上部之承孔壁，鏢 H ，及楔下部之 L 。受壓力部分為楔， L ，承孔 G 及鏢 H 。又楔亦受彎曲作用。

楔上力之作用狀態雖不明，今假定其為均布荷重作用之樑而計算之(119圖參照)。

先由受拉力部分求之。

$$\text{棒 } E \text{ 及 } F \text{ 上 } P = \frac{\pi}{4} d_1^2 p_t \dots\dots\dots(145)$$

$$\text{延長部 } L \text{ 上 } P = \left(\frac{\pi}{4} d^2 - bd \right) p_t \dots\dots\dots(145a)$$

承孔 G 上 $P = \left[\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) - b(D - d) \right] p_t$ (145b)

次由受剪力部分求之。

楔 K 上 $P = 2bh p_s$ (146)

延長部 L 上 $P = 2dh_2 p_s$ (146a)

承孔 G 上 $P = 2(D - d)h_1 p_s$ (146b)

鐳 H 上 $P = \pi d h_3 p_s$ (146c)

次由受壓力部求之。

楔 K 上 $P = bd p_c$ (147)

延長部 L 上 $P = bd p_c$ (147a)

承孔 G 上 $P = b(D - d) p_c$ (147b)

鐳 H 上 $P = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d^2) p_c$ (147c)

次由受彎曲作用部求之。

楔 K 上, $M = \frac{Pd}{8} = \frac{bh^2}{6} p_t$

或 $P = \frac{4}{3} \cdot \frac{bh^2}{d} p_t$ (148)

今先由 (146), (148) 二式, 則

$$2bh p_s = P = \frac{4}{3} \cdot \frac{bh^2}{d} p_t$$

對於鋼則 $p_s = 0.8p_t$, 故

$$h = \frac{2 \times 0.8 \times 3}{4} d = 1.2d \dots\dots\dots(149)$$

將此值代入於(146), 與(145a)組合之, 得

$$2.4bdp_s = P = \left(\frac{\pi}{4}d - b\right)dp_t$$

或 $2.4 \times 0.8b = \frac{\pi}{4}d - b$

故 $(1.92 + 1)b = \frac{3.14}{4}d$

$$b = \frac{3.14}{2.92 \times 4}d = 0.269d \dots\dots\dots(149a)$$

普通 $b = \frac{1}{4}d$.

由(147a)及(147b), 得

$$bdp_c = P = b(D - d)p_c$$

或 $D = 2d \dots\dots\dots(150)$

自他式求 D 時, 尚較此值為小, 故取此值.

延長部 L 之支承面充分與否, 由(145a)及(147a)

比較之,

$$bdp_c = P = \left(\frac{\pi}{4}d - b\right)dp_t$$

但 $b = \frac{1}{4}d$, 故

$$\frac{1}{4}d^2p_c = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\right)d^2p_t$$

因之, $p_c = (\pi - 1)p_t = 2.14p_t \dots\dots\dots(151)$

此值實用上可無妨礙.

次由剪力可計算承孔 G 及延長部 L 處長度 h_1 及 h_2 . 而鏢 H 之尺寸, 則取鏢之可容支承壓力為楔之 $\frac{2}{3}$, 組合 (147) 與 (147c),

$$bdp_c = P = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d^2)\frac{2}{3}p_c$$

或 $\frac{4}{\pi} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{d^2}{4} = d_2^2 - d^2$

$$\therefore d_2 = \sqrt{\frac{3}{2\pi} + 1} \cdot d = 1.215d \dots\dots\dots(152)$$

由 (146) 及 (146c), 可求厚度.

$$2bh p_s = P = \pi d h_3 p_s$$

或 $2\left(\frac{1}{4}d\right)\left(\frac{5}{4}d\right) = \pi d h_3$

$$\text{故} \quad h_3 = \frac{2 \times 5}{4 \times 4 \times \pi} d = 0.199d \dots \dots \dots (152a)$$

最後求棒直徑 d_1 與延長部直徑 d 之關係。由 (145) 及 (145a), 且 $b = \frac{d}{4}$, 得

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 p_t = P = \left(\frac{\pi}{4} d^2 - \frac{1}{4} d^2 \right) p_t = \frac{2.14}{4} d^2 p_t$$

$$\text{故} \quad d = \sqrt{\frac{3.14}{2.14}} d_1 = 1.21d_1 \dots \dots \dots (153)$$

以上計算, 假定楔與棒為同一材料, p_t, p_s, p_c 等均有同一值。但有時楔特用強韌材料, 因之尺寸比例與上述稍異。此時楔之 p_t, p_s, p_c 值與棒之 p_t, p_s, p_c 值各應用於前記十二個式中以求適當之尺寸比例也。

例 2. 第 120 圖所示楔接合上, 加以 $3\frac{1}{2}$ 噸之拉力。求各部內力之值。

$$\text{由題意} \quad P = 3.5 \text{ 噸} = 7,840 \text{ 磅}$$

$$d = 1\frac{1}{4} \text{ 吋}, \quad d_1 = 1 \text{ 吋}$$

$$D = 2\frac{1}{2} \text{ 吋,}$$

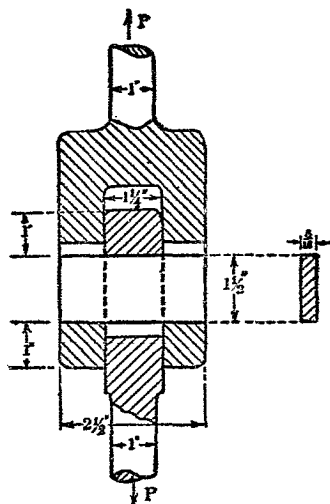
$$b = \frac{5}{16} \text{ 吋,} \quad h = 1\frac{1}{2} \text{ 吋}$$

$$h_1 = 1 \text{ 吋,} \quad h_2 = 1 \text{ 吋}$$

代入上之各式, 求 p_t , p_s , p_o .

對於棒, 則由 (145),

$$p_t = \frac{4}{3.14} \times 7,840 = 10,000 \text{ 磅/平方吋}$$



第 120 圖

對於延長部，則由 (145a), (146a) 及 (147a),

$$p_t = \frac{7,840}{\left\{ \frac{3.14}{4} \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{5}{16} \times \frac{5}{4} \right\}}$$

$$= 9,400 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_s = \frac{7,840}{2 \times \frac{5}{4} \times 1} = 3,140 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_c = \frac{7,840}{\frac{5}{16} \times \frac{5}{4}} = 20,000 \text{ 磅/平方吋}$$

對於承孔，則由 (145b), (146b), 及 (147b),

$$p_t = \frac{7,840}{\left[\frac{3.14}{4} (2.5^2 - 1.25^2) - \frac{5}{16} (2.5 - 1.25) \right]}$$

$$= 2,380 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_s = \frac{7,840}{2 \times (2.5 - 1.25) \times 1} = 3,140 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_c = \frac{7,840}{\frac{5}{16} (2.5 - 1.25)} = 20,000 \text{ 磅/平方吋}$$

對於楔，則由 (146), (147), 及 (148),

$$p_s = \frac{7,840}{2 \times \frac{5}{16} \times \frac{3}{2}} = 8,360 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_c = \frac{7,840}{\frac{5}{16} \times \frac{5}{4}} = 20,000 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_t = \frac{7,840 \times 3 \times \frac{5}{4}}{4 \times \frac{5}{16} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 10,460 \text{ 磅/平方吋}$$

75. 縱栓接合. 縱栓(key)者, 插入於軸與其附着部分之間, 而傳達迴轉運動者也. 受剪斷作用. 有三種: 僅與軸表面因摩擦而接觸運動者, 曰摩擦縱栓(friction key); 以平面接觸於軸表面而傳運動者, 曰平面上縱栓(key on the flat); 軸表面有栓溝(key-way), 嵌入於其內而傳運動者, 曰嵌入縱栓(sunk key). 前二種比較鮮用, 而嵌入縱栓最多用之. 以上任何種類, 軸上附着之物體中均設有栓溝, 以縱栓背部嵌入於其內.

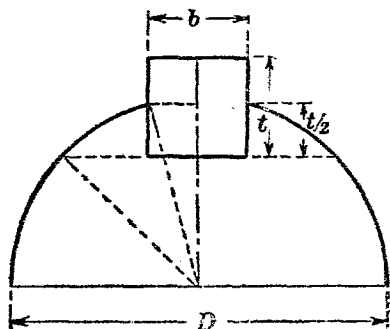
縱栓為正方形或矩形之斷面, 兩側密着於栓溝而傳力. 但上下兩面未必須密着於栓溝底

面。傳達迴轉運動時，若同時須防附着物體之軸線方向移動時，則上下兩面使不平行而附以極小之傾斜。擊入時如楔之作用。

軸之直徑與縱栓大小之比例普通有一定之表。以用實驗的數值為宜。計算時先用前述扭作用之軸之計算法，而與次述縱栓計算相比較，使軸與縱栓略有同一強度而決定之。

縱栓於長方向上受剪力而破斷，同時接觸於軸或殼之側面受壓力。故須研究此二種之抵抗。

第 121 圖上壓縱栓側面之力設為 P 磅，縱栓



第 121 圖

之寬爲 b 吋，長爲 l 吋時，

$$P = blp_s \dots\dots\dots(154)$$

設加於軸上之扭轉能率爲 T 吋磅，軸之外徑爲 D 吋，則

$$T = P \frac{D}{2}, \quad P = \frac{2T}{D}.$$

而
$$p_s = \frac{2T}{blD} \dots\dots\dots(154a)$$

由軸之強度考察之，則

$$T = \frac{\pi}{16} D^3 p_s'$$

故
$$\frac{blD}{2} p_s = \frac{\pi}{16} D^3 p_s'$$

若軸與縱栓爲同一材料所成，則 $p_s = p_s'$ ，故

$$b = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{D^2}{l} \dots\dots\dots(155)$$

次由縱栓側面之壓力考察之，則支承面寬 $\frac{t}{2}$

吋，長 l 吋，故

$$P = \frac{t}{2} l \cdot p_c \dots\dots\dots(156)$$

或
$$p_c = \frac{4T}{tD} \dots\dots\dots(156a)$$

由此式與(154 a), 則

$$t = 2 \frac{p_s b}{p_c} \dots\dots\dots(157)$$

對於鋼則
$$p_c = 2p_s$$

故
$$t = b \dots\dots\dots(157a)$$

第十二章

聯合內力

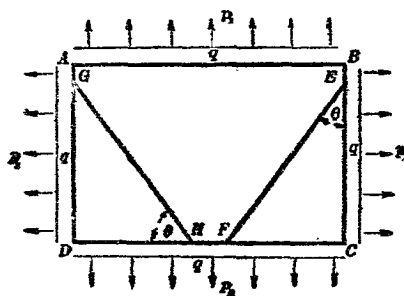
76. 主內力. 以上各章大體就材料強度學之初步論之, 今稍涉及高等研究.

一物體於種種方向之平面上受垂直內力與剪內力之作用. 其方向及內力之大小若均已知時, 則某方向平面上所作用之垂直內力與剪內力之大小及方向, 可就各內力對於該平面之方向, 求其垂直及平行諸分內力而計算其代數和即可.

若就通過物體內一點之平面, 由前記方法求其上之內力, 而適無剪內力之存在, 僅有垂直內力作用時, 則此方向之平面曰主平面 (principal plane). 該平面上作用之垂直內力之強, 曰該點上主內力 (principal stress).

內力狀態雖任何複雜，常有三個互成直角之主平面之存在。其對應三主內力中，一個較他二者為大，他一個較他二者為小。且有時主內力中之一有為零或為極小而可視為零者。若此時則無考論立體之必要，僅為平面的，以下先就此論之。

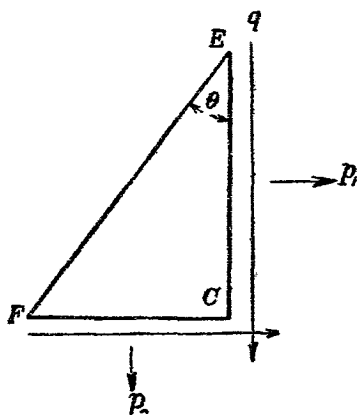
今設互成直角二平面，其一方加以垂直內力 p_1 ，他方加以垂直內力 p_2 。且其上各有 q 之剪內力。第 122 圖示上述之矩形片 $ABCD$ ，其厚為單位長。平行於紙面之平面上無內力作用。上記內力若距離大時，或有變化。但設矩形甚小



第 122 圖

故視爲無變化者。此等 p_1 , p_2 , 及 q 之內力可視爲多數外力之結果, 求各外力之垂直及平行分力, 合成之而得 p_1 , p_2 , 與 q 。

如上之內力狀態已知後, 若須求主平面之方向及主內力之值, 則如下法。第 122 圖上與 BC 面成某角度之 EF 面設爲主平面之一。則該面上內力 p 必全垂直於平面, 而無剪內力之存在。今取離此三角形板 EFC 而研究其平衡條件。(第 123 圖參照.) 作用於面 EF , EC , FC 之力各爲



第 123 圖

$p \cdot \overline{EF}$, $p_1 \cdot \overline{EC}$, $q \cdot \overline{EC}$, $p_2 \cdot \overline{FC}$ 及 $q \cdot \overline{FC}$. 此等之力平行於 EC 之分力, 及平行於 FC 之分力必須各平衡. 故

$$p \cdot \overline{EF} \cos \theta = p_1 \cdot \overline{EC} + q \cdot \overline{FC}$$

$$p \cdot \overline{EF} \sin \theta = p_2 \cdot \overline{FC} + q \cdot \overline{EC}$$

然 $\overline{EC} = \overline{EF} \cos \theta$, $\overline{FC} = \overline{EF} \sin \theta$,

故 $p \cdot \cos \theta = p_1 \cos \theta + q \cdot \sin \theta$

$$p \cdot \sin \theta = p_2 \sin \theta + q \cdot \cos \theta$$

或 $(p - p_1) \cos \theta = q \cdot \sin \theta \dots\dots\dots(158)$

$$(p - p_2) \sin \theta = q \cdot \cos \theta \dots\dots\dots(159)$$

或 $p - p_1 = q \cdot \tan \theta \dots\dots\dots(158a)$

$$p - p_2 = q \cdot \cot \theta \dots\dots\dots(159a)$$

因之, $p_1 - p_2 = q (\cot \theta - \tan \theta) = \frac{2q}{\tan 2\theta}$

或 $\tan 2\theta = \frac{2q}{p_1 - p_2} \dots\dots\dots(160)$

正切之值由 $+\infty$ 至 $-\infty$ 均存在. 故 q , p_1 , p_2 雖爲任何值, θ 之值必可存在. 由上式則 θ 有相差 90 度之二值存在. 即必可有相成直角之二主

平面也明矣。

次設主內力之值爲 p 及 p' ，則將 (158) 與 (159) 相乘，得

$$(p-p_1)(p-p_2)=q^2\cdots\cdots\cdots(161)$$

或
$$p^2-p(p_1+p_2)+(p_1p_2-q^2)=0\cdots\cdots(161a)$$

解此二次式，可得 p 及 p' 。其值爲

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{p_1+p_2}{2} + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4}(p_1-p_2)^2} \\ p' &= \frac{p_1+p_2}{2} - \sqrt{q^2 + \frac{1}{4}(p_1-p_2)^2} \end{aligned} \right\} \cdots\cdots(162)$$

p 爲最大內力，與 p_1 及 p_2 有同一方向。 p' 作用於 p 平面之直角平面 GH 上。若 q^2 較 p_1p_2 大時，與 p 有反對之方向。

77. 主歪。第二章中曾述內力之強 p_1 (例如拉內力) 在彈性限界以內時，則其作用方向上生 e_1 之歪。若橫方向上之歪被制止時，則 e_1 之值爲

$$e_1 = \frac{p_1}{E}$$

但 E 爲縱彈性係數. 然內力 p_1 方向之諸直角方向上, 生反對之歪 (此時爲收縮). 其值爲 $\frac{p_1}{mE}$. 但 $\frac{1}{m}$ 爲包生比. 同樣, p_1 之直角方向上所加內力 p_2 , 對於其作用方向上生

$$e_2 = \frac{p_2}{E}$$

之歪. 而其直角方向上生 $-\frac{p_2}{mE}$ 之歪. 而 p_1 方向上亦受此歪.

若第三內力 p_3 作用於 p_1, p_2 之直角方向時, 則 p_3 方向上生

$$e_3 = \frac{p_3}{E}$$

之歪. 同時 p_1 及 p_2 方向上生 $-\frac{p_3}{mE}$ 之歪.

今設此 p_1, p_2, p_3 之互成直角三內力爲某點上三主內力, 則此等各獨立作用時, 各生 e_1, e_2, e_3 之歪於其自己方向, 而生 $-\frac{e_1}{m}, -\frac{e_2}{m}, -\frac{e_3}{m}$ 之歪於其直角方向上. 但此等同時作用, 故一

內力方向上之歪受他內力所生之歪之影響。因之，

$$e_1 = \frac{p_1}{E} - \frac{p_2 + p_3}{mE} \dots\dots\dots(163)$$

$$e_2 = \frac{p_2}{E} - \frac{p_3 + p_1}{mE} \dots\dots\dots(163a)$$

$$e_3 = \frac{p_3}{E} - \frac{p_1 + p_2}{mE} \dots\dots\dots(163b)$$

此計算中 p_1, p_2, p_3 各設為拉內力。但其中若有壓內力，或皆為壓內力時，可變內力之符號而容易求得。此 e_1, e_2, e_3 各為與主內力 p_1, p_2, p_3 相當之主歪 (principal strain)。

例 1. 有一棒裝置之使不生橫方向上收縮，而拉伸之。則縱方向上彈性係數受如何變化？

縱彈性係數為收縮可自由時，內力與歪之比。故

$$E = \frac{p_1}{e_1}$$

若防止收縮後歪量為 e_1' ，則此時彈性係數為

$$E' = \frac{p_1}{e_1'}$$

E 與 E' 相異。防止收縮時， p_1 直角方向之 p_2, p_3 內力必作用，此三內力為主內力。

由 (163a) 與 (163b)，

$$e_1' = \frac{p_1}{E} - \frac{p_2 + p_3}{mE} \dots\dots\dots (a)$$

$$0 = \frac{p_2}{E} - \frac{p_3 + p_1}{mE} \dots\dots\dots (b)$$

$$0 = \frac{p_3}{E} - \frac{p_1 + p_2}{mE} \dots\dots\dots (c)$$

由 (b), (c) 二式，

$$p_2 = p_3$$

代入於 (b)，

$$p_2 = \frac{p_2 + p_1}{m} \quad \text{或} \quad p_2 = \frac{p_1}{m-1}$$

代入於 (a)，

$$e_1' = \frac{p_1}{E} - \frac{2p_1}{m(m-1)E}$$

或
$$e_1' = \frac{p_1}{E} \left\{ 1 - \frac{2}{m(m-1)} \right\} = \frac{p_1}{E} \cdot \frac{(m+1)(m-2)}{m(m-1)}$$

但

$$e_1' = \frac{p_1}{E'}$$

故

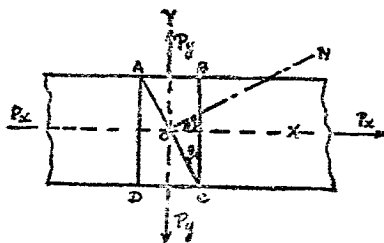
$$E' = E \times \frac{m(m-1)}{(m+1)(m-2)}$$

設 $m=4$, 則

$$E' = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} E = 1.2E$$

78. 傾斜面上之內力. 互成直角二面上作用之垂直內力爲已知, 而該兩面之垂直面上無內力作用時, 則垂直於第三面而與初二面成傾斜之他一面上所作用之內力可求. 即主內力已知時, 對於主平面傾斜之面上所作用內力可求也.

第 124 圖上主內力 p_x, p_y 設爲同一種類之內



第 124 圖

力. $ABCD$ 之矩形片 (厚爲單位長) 爲平衡. 今以與 BC 成 θ 角之面分爲二三面形片. 面 AC 上內力有垂直內力 p 及剪內力 q . 此與 AB 及 BC

面上垂直內力 p_1 及 p_2 相平衡. 故取 AC 之垂直及平行之分力, 則

$$p \cdot \overline{AC} = p_x \cdot \overline{BC} \cdot \cos \theta + p_y \cdot \overline{AB} \cdot \sin \theta$$

$$q \cdot \overline{AC} = p_x \cdot \overline{BC} \cdot \sin \theta - p_y \cdot \overline{AB} \cdot \cos \theta$$

兩式各邊以 \overline{AC} 除之, 則因

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \cos \theta, \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \sin \theta,$$

$$\text{故} \quad p = p_x \cos^2 \theta + p_y \sin^2 \theta \dots\dots\dots(164)$$

$$q = (p_x - p_y) \sin \theta \cos \theta = \frac{p_x - p_y}{2} \sin 2\theta \dots\dots(165)$$

由(165)可求 q 之最大值. 即 $\sin 2\theta$ 當 $2\theta = 90^\circ$ 或 $\theta = 45^\circ$ 時為最大. 故

$$q_{max} = \frac{p_x - p_y}{2} \dots\dots\dots(166)$$

此時之 p 為

$$p = \frac{p_x + p_y}{2} \dots\dots\dots(167)$$

若 p_x 與 p_y 為反對種類之內力, 則符號相異. 即以 $-p_y$ 代 p_y 或 $-p_x$ 代 p_x 可也. 此時

$$p = p_x \cos^2 \theta - p_y \sin^2 \theta \dots\dots\dots(164a)$$

$$q = \frac{p_x + p_y}{2} \sin 2\theta \dots\dots\dots(165a)$$

$\theta = 45^\circ$ 時,

$$q_{max} = \frac{p_x + p_y}{2} \dots\dots\dots(166a)$$

$$p = \frac{p_x - p_y}{2} \dots\dots\dots(167a)$$

若 $\theta = 45^\circ$, 而 $p_x = p_y$, 則 $p = 0$, $q = p_x$. 即單純剪之狀態也。

今設 AC 面上 p, q 之合內力為 r . 則 $r \times \overline{AC}$ 必與 AB, BC 面上垂直內力總量之合力相平衡。

$$\begin{aligned} \therefore r \cdot \overline{AC} &= \sqrt{(p_x \cdot \overline{BC})^2 + (p_y \cdot \overline{AB})^2} \\ &= AC \sqrt{p_x^2 \cos^2 \theta + p_y^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

故 $r = \sqrt{p_x^2 \cos^2 \theta + p_y^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{p^2 + q^2} \dots\dots(168)$

每 AC 平面單位面積上沿 OX, OY 之分力各為 $p_x \cos \theta, p_y \sin \theta$. 設合內力 r 與 OX 成 α 角, 則

$$\tan \alpha = \frac{p_y \sin \theta}{p_x \cos \theta} = \frac{p_y}{p_x} \cdot \tan \theta \dots\dots\dots(169)$$

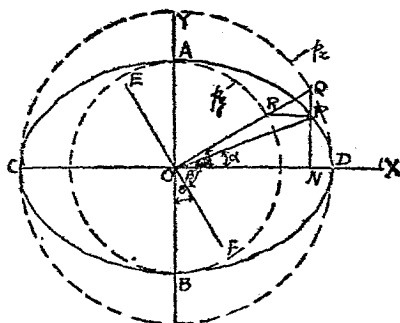
又設合內力 r 與 AC 平面成 β 角, 則

$$\tan \beta = \frac{p}{q} = \frac{p_x \cos^2 \theta + p_y \sin^2 \theta}{(p_x - p_y) \sin \theta \cos \theta}$$

79. 內力之橢圓. 第 124 圖上二主內力 p_x, p_y 爲已知, 而紙面上直角方向無第三主內力. 任何平面上內力之大小與方向可由圖式求之.

第 125 圖上以 O 爲中心作二圓 CQD 及 ARB . 其半徑各與二主內力 p_x, p_y 爲比例. 任意一中間平面 EF 上作垂直線 OQ , 與大圓交於 Q , 與小圓交於 R . 作 QN 垂直於 OX , 及 RP 垂直於 OY , 與 QN 交於 P . 則 OP 卽表該平面上合內力 r 之大小與方向. 對於各傾斜平面求 P 點軌跡, 可知其爲一橢圓. 蓋

$$ON = OQ \cos \theta = p_x \cos \theta$$



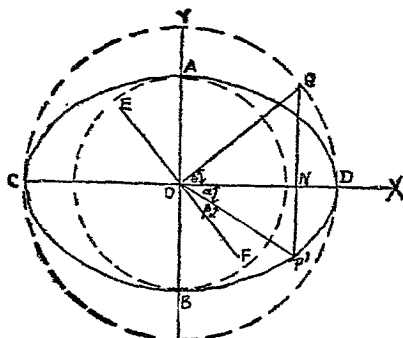
第 125 圖

$$PN = OR \sin \theta = p_y \sin \theta$$

而橢圓之軸即為二主內力方向。且

$$\tan \alpha = \frac{p_y \sin \theta}{p_x \cos \theta} = \frac{p_y \tan \theta}{p_x}$$

若 p_y 為負, p_x 為正, 則如第 126 圖, OP' 表合內力之大小及方向。 $\tan \alpha$ 為負, β 較上圖之 β 為小。若 $p_x = p_y$, 則橢圓成為圓。



第 126 圖

80. 物體之彈性的破損。欲知使用內力在彈性限界內若何之點可無害, 此須先知自單純縱內力外, 物體之破損抑當最大主內力達一定值時而起乎? 抑當最大主歪達一定值時而起乎?

對於此彈性的破損 (elastic failure) 有下之三說。

(a) 最大主內力說, 即最大主內力達一定值時而起破損。

(b) 最大主歪說, 即最大主歪達一定值時而起破損。

(c) 最大剪內力說, 即最大剪內力達一定值時而起破損。此最大剪內力即與主內力之最大差為比例。 (§ 78 (166) 式.)

第一之 (a) 說為藍慶 (Rankine) 之主張, 主行於英國。第二說之 (b) 主發達於歐洲大陸, 而第三說之 (c) 則係最近之學說, 為蓋斯脫 (J. J. Guest) 所主唱。其理論與實驗結果之關係, 目下正研究之也。

脆性 (brittle) 材料似以最大主內力說為正, 延性 (ductile) 材料似因最大剪內力說而破損。對於一般材料之共通關係式雖有, 但須求實驗常數, 未有確論。

今就同一面上垂直內力 p_1 及剪內力 q 作用

時，例示上記三說如次。

由最大主內力說，則最大主內力爲

$$p = \frac{1}{2} p_1 + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} p_1^2} \dots\dots\dots(170)$$

由最大主歪說，則最大主歪爲

$$e_1 = \frac{p}{E} - \frac{p'}{mE} = \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2} p_1 + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} p_1^2} \right\} \\ - \frac{1}{mE} \left\{ \frac{1}{2} p_1 - \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} p_1^2} \right\}$$

或 $Ee_1 = \frac{1}{2} p_1 \left(1 - \frac{1}{m} \right) + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} p_1^2} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \dots\dots(171)$

但 $\frac{1}{m}$ 爲包生比。

若 $m=4$ ，則相當單純內力 (equivalent simple stress) 爲

$$Ee_1 = \frac{3}{8} p_1 + \frac{5}{4} \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} p_1^2} \dots\dots\dots(171a)$$

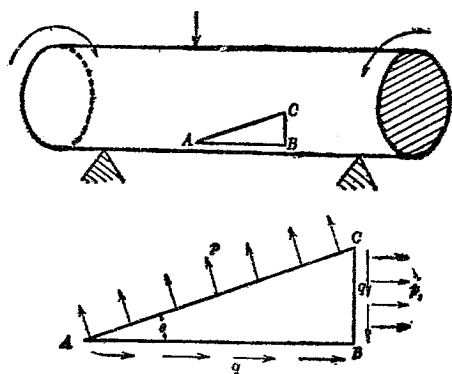
由最大剪內力說，則

$$\frac{p-p'}{2} = \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} p_1^2} \dots\dots\dots(172)$$

81. 彎與扭之聯立。 軸迴轉時若僅有偶力

所生之扭作用，則如前所述，惟受剪內力。然大多因軸自身重量與運轉力，受彎曲能率之作用。因之自剪內力外常受他種內力。故此時作用於軸上之內力為垂直於軸線之面上之剪內力，平行於軸線方向上作用之垂直內力，及平行於軸線面上作用之剪內力是也。

今於第127圖上，軸之外皮當垂直內力與剪內力最大之處，設有一微小直角三角形 ABC 。而設 AC 為主平面之一。 AC 上作用之內力必皆為垂直內力，而為內力中最大或最小者也。因



第 127 圖

彎曲作用所生內力，爲平行於 AB ，而作用於 BC 上之 p_1 ，因扭作用所生之內力，爲沿 AB 與 BC 作用之 q 。故垂直於 AC 之主內力 p ，由 (162)

$$p = \frac{p_1}{2} + \sqrt{q^2 + \frac{p_1^2}{4}}$$

$$p' = \frac{p_1}{2} - \sqrt{q^2 + \frac{p_1^2}{4}}$$

今設 M 爲作用於軸之彎曲能率， T 爲作用於軸之扭轉能率， d 爲軸之外徑，則

$$M = p_1 \frac{\pi}{32} d^3, \quad \text{或} \quad p_1 = \frac{32M}{\pi d^3}$$

$$T = q \frac{\pi}{16} d^3, \quad \text{或} \quad q = \frac{16T}{\pi d^3}$$

以此值代入前式，得最大值 p 爲

$$p = \frac{16}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + T^2}) \dots\dots\dots(173)$$

或

$$p = \frac{32}{\pi d^3} \left(\frac{M}{2} + \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{2} \right) \dots\dots\dots(174)$$

即 (173) 示與括弧內相等值之扭轉能率作用時所生軸之內力之式，而 (174) 示與括弧內相等

值之彎曲能率作用時所生軸之內力之式。設 T_i 爲相當扭轉能率 (equivalent twisting moment), M_i 爲相當彎曲能率 (equivalent bending moment). 假想 T 與 M 不同時作用, 而僅有 T_i 或 M_i 單獨作用. 此時

$$T_i = M + \sqrt{M^2 + T^2} \dots\dots\dots(173a)$$

$$M_i = \frac{1}{2}(M + \sqrt{M^2 + T^2}) \dots\dots\dots(174a)$$

若由英國之最大主內力說 (maximum principal stress theory), 則 (173), (174) 兩式示材料之安全使用內力. 而上示之 T_i 與 M_i 爲由最大主內力說之相當扭轉能率與相當彎曲能率. 若由歐洲大陸所使用之最大主歪說 (maximum principal strain theory), 則

$$e = \frac{p}{E} - \frac{p'}{mE}$$

$$\text{或} \quad Ee = \frac{p_1}{2} + \sqrt{q^2 + \frac{p_1^2}{4}} - \frac{1}{m} \left(\frac{p_1}{2} - \sqrt{q^2 + \frac{p_1^2}{4}} \right)$$

$$= \frac{p_1}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) + \sqrt{q^2 + \frac{p_1^2}{4}} \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

若 $m=4$, 則 $Ee = \frac{3}{8}p_1 + \frac{5}{4}\sqrt{q^2 + \frac{p_1^2}{4}}$

或 $Ee = \frac{3}{8} \cdot \frac{32M}{\pi d^3} + \frac{5}{4} \cdot \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{T^2 + M^2}$

或 $Ee \cdot \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{3}{4}M + \frac{5}{4} \cdot \sqrt{M^2 + T^2} \dots (173b)$

$$Ee \cdot \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{3}{8}M + \frac{5}{8} \sqrt{M^2 + T^2} \dots (174b)$$

故 $T'_i = \frac{3}{4}M + \frac{5}{4} \sqrt{M^2 + T^2} \dots (173c)$

$$M'_i = \frac{3}{8}M + \frac{5}{8} \sqrt{M^2 + T^2} \dots (174c)$$

T'_i 爲由最大主歪說之相當扭轉能率, M'_i 爲其相當彎曲能率. (174c) 中右邊 M 之係數在德國書籍中爲 0.35, 而第二項之係數爲 0.65.

若由最近之最大剪內力說 (maximum shear stress theory), 則由 (172),

$$\begin{aligned} \frac{p-p'}{2} &= \sqrt{q^2 + \frac{1}{4}p_1^2} = \sqrt{\frac{16^2 T^2}{\pi^2 d^6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{32^2 M^2}{\pi^2 d^6}} \\ &= \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{T^2 + M^2} \dots (173d) \end{aligned}$$

故 $T_i'' = \sqrt{T^2 + M^2} \dots \dots \dots (173e)$

T_i'' 爲由最大剪內力說之相當扭轉能率。

通常 (173a) 稱曰藍慶 (Rankine) 之公式, (173e) 稱曰蓋斯脫 (Guest) 之公式。由藍慶公式設計之圓軸, 較由蓋斯脫公式者爲小。

例 2. 直徑 3 吋之圓棒受 40,000 磅吋之扭轉能率, 與 10,000 磅吋之彎曲能率。求最大主內力。剪內力之強爲

$$q = \frac{16 \times 40,000}{\pi \times 3^3} = 7,544 \text{ 磅/平方吋}$$

垂直內力之強爲

$$p_1 = \frac{32 \times 10,000}{\pi \times 3^3} = 3,722 \text{ 磅/平方吋}$$

故最大主內力爲

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \times 3,722 + \sqrt{7,544^2 + \frac{1}{4} \times 3,722^2} \\ &= 9,664 \text{ 磅/平方吋} \end{aligned}$$

例 3. 有 36,000 磅吋之扭轉能率與 40,850 磅吋之彎曲能率同時作用之鋼軸, 設安全使用內力爲 10,000 磅/平方吋時, 求所需直徑幾何?

由最大主內力說，求相當彎曲能率，

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{1}{2}(M + \sqrt{T^2 + M^2}) \\ &= \frac{1}{2}(40,850 + \sqrt{36,000^2 + 40,850^2}) \\ &= \frac{1}{2}(40,850 + 54,450) = 47,650 \text{ 磅吋} \end{aligned}$$

故 $d = \sqrt[3]{\frac{32 \times 47,650}{\pi \times 10,000}} = 3,647 \text{ 吋}$

由最大主歪說，求相當彎曲能率，

$$\begin{aligned} M_i' &= \frac{3}{8}M + \frac{5}{8}\sqrt{T^2 + M^2} \\ &= \frac{3}{8}40,850 + \frac{5}{8} \times 54,450 = 15,320 + 34,030 \\ &= 49,350 \text{ 磅吋} \end{aligned}$$

故 $d = \sqrt[3]{\frac{32 \times 49,350}{3.14 \times 10,000}} = 3.693 \text{ 吋}$

由最大剪內力說，求相當扭轉能率，

$$T_i'' = \sqrt{M^2 + T^2} = 54,450 \text{ 磅吋}$$

此時安全剪內力爲

$$\frac{10,000}{2} = 5,000 \text{ 磅/平方吋,}$$

故
$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 54,450}{\pi \times 5,000}} = 3.81 \text{ 吋}$$

問 題

1. 直徑 12 吋之軸受 100 呎噸之扭轉能率與 20 呎噸之彎曲能率。求其所生之最大內力。

2. 直徑 4 吋之鋼軸，其所受彎曲能率為扭轉能率之 $\frac{5}{8}$ 。設最大安全內力為 10,000 磅/平方吋，軸之迴轉數每分為 180，問可傳送馬力幾何？

3. 橫方向中一者之膨脹全為阻止時之彈性係數，與自由可膨脹時對於普通壓縮之彈性係數，其關係如何？

4. 受 160 呎噸扭轉能率與 40 呎噸彎曲能率之軸，其最大安全內力限定於 4 噸/平方吋時，實體圓軸之直徑幾何？

5. 前題之軸若為內徑等於外徑之 0.6 倍之中空圓軸，其外徑幾何？

6. 直徑 $2\frac{1}{2}$ 吋，每分 100 迴轉之軸，受 6 呎噸之彎曲能率時，若限定其最大安全內力為 5 噸/平方吋，則可傳馬力幾何？

第十三章

曲 樑

82. 曲樑. 第四章所述之樑,其軸線爲直線然受彎曲作用,可視爲樑之機械部分,有彎曲之軸線者亦復不少. 此等之樑曰曲樑 (curved beam). 其解法與直樑 (straight beam) 稍異.

曲樑之曲率 (curvature) 小時,即對於斷面尺寸,曲率半徑 (radius of curvature) 大時,可將直樑之公式少變形後應用之.

例如曲樑之最初半徑爲 R , 彎曲後半徑爲 R_1 , 則橫斷面上距中性軸 y 處之點上作用之內力 f 爲

$$f = E \cdot y \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \dots\dots\dots (1/5)$$

(參照第四章公式 (40) 及 (59).)

此彎曲時所需彎曲能率 M 爲

$$M = EI \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \dots \dots \dots (176)$$

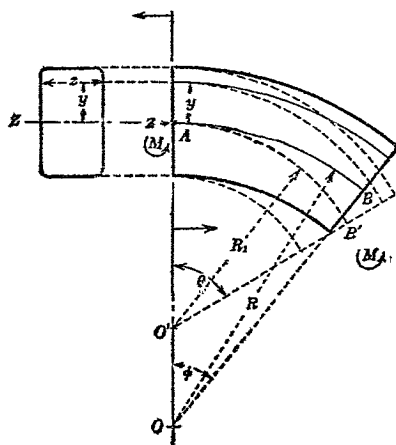
但 E, I 之意義與第四章同。

然曲率大之曲樑，例如鉤 (hook)，環 (link) 等，則此等之式不能即應用之。

此等曲樑之橫斷面尺寸較樑之長或曲率半徑為大，故不在直樑時所假定之制限內。因之由直樑之理論而解決時，理論上非屬嚴密，不過為實用上近似解法耳。

今假定通過斷面中心之中心線，當彎曲前後，在同一平面內，且斷面為均一。設 R 為最初軸線之曲率半徑， R_1 為彎曲後曲率半徑。此彎曲時，設樑兩端加以等大反向之偶力 M 。此即如直線樑時之單純彎曲也。

如圖所示垂直於軸線之切斷面上，設有 ZZ 線通過中心而與曲率半徑成直角。任意點自此線之距設為 y ，自曲率中心向外者為正，向內者為負。又設垂直於 y 之寬設為 z ，斷面積為 A 。



第 128 圖

就曲樑中一小部分 AB , 延長其兩端面交於 O . 其間角度設為 ϕ . 彎曲後之交點即曲率中心設為 O' , 中心角度設為 θ . 則自中央軸線 ZZ 距 y 處層之最初長度為

$$(R+y)\phi$$

彎曲後 y 變為 y_1 , 而其長為

$$(R_1+y_1)\theta$$

故此層長度之變化為

$$(R_1+y_1)\theta - (R+y)\phi$$

而歪 e 爲

$$e = \frac{(R_1 + y_1)\theta}{(R + y)\phi} - 1 \dots\dots\dots(177)$$

設中心線之歪爲 e_0 , 其彎曲後長度爲

$$R_1\theta = R\phi(1 + e_0) \dots\dots\dots(178)$$

因之

$$\frac{\theta}{\phi} = (1 + e_0) \frac{R}{R_1} \dots\dots\dots(179)$$

此值代入於(177), 則

$$\begin{aligned} e &= \frac{R_1 + y_1}{R + y} \times \frac{R}{R_1} (1 + e_0) - 1 \\ &= \frac{1 + \frac{y_1}{R_1}}{1 + \frac{y}{R}} (1 + e_0) - 1 \dots\dots\dots(180) \end{aligned}$$

實際上 y 與 y_1 之差甚小, 可略去之, 因之 $y = y_1$, 則上式爲

$$\begin{aligned} e &= \frac{1 + \frac{y}{R_1}}{1 + \frac{y}{R}} (1 + e_0) - 1 \\ &= \frac{y(1 + e_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right)}{1 + \frac{y}{R}} + e_0 \dots\dots\dots(181) \end{aligned}$$

次設此歪如普通之拉伸歪可自由起生，而求與此歪 e 相當之內力 f ，則

$$f = eE$$

與直樑時同樣，內力總和爲零，則

$$\Sigma f dA = 0, \text{ 或 } E \Sigma e dA = 0$$

由 (181),

$$(1 + e_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \Sigma \left(\frac{y}{1 + \frac{y}{R}} dA \right) + e_0 \cdot A = 0 \dots (182)$$

或

$$R(1 + e_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \Sigma \left(\frac{y}{R + y} dA \right) + e_0 \cdot A = 0 \dots (182a)$$

又彎曲能率與抵抗能率相等，由此求 M 之關係，得

$$\begin{aligned} M &= \Sigma (f \cdot dA \cdot y) \\ &= E \left\{ e_0 \Sigma (y dA) + R(1 + e_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \Sigma \left(\frac{y^2 dA}{R + y} \right) \right\} \end{aligned}$$

但

$$\Sigma (y \cdot dA) = 0$$

故

$$M = ER(1 + e_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \Sigma \left(\frac{y^2 dA}{R + y} \right) \dots (183)$$

或

$$\frac{M}{E} = R(1 + e_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \Sigma \left(\frac{y^2 dA}{R + y} \right) \dots (183a)$$

由(182)及(183),可自已知斷面,曲率半徑及偶力之值而求未知數 R_1 與 e_0 . 由此二值,自(181)可求 e 值. 因之可得 f 之值. 但如上所求得之 R_1 與 e_0 中含有 $\Sigma\left(\frac{y}{R+y}dA\right)$ 及 $\Sigma\left(\frac{y^2}{R+y}dA\right)$ 之二量,此等之量因斷面形狀與大小,有一定之值. 由積分法或圖法可求得之. 然求此二量時,手續繁雜,用 $R\Sigma\left(\frac{dA}{R+y}\right)$ 之補助量以表二值,則求得一量即可. 此量與面積 A 為同等量,故以 A_1 表之. 即

$$\begin{aligned}\Sigma\left(\frac{y}{R+y}dA\right) &= \Sigma\left\{\left(1 - \frac{R}{R+y}\right)dA\right\} \\ &= \Sigma(dA) - R\Sigma\left(\frac{dA}{R+y}\right) \\ &= A - A_1 \dots\dots\dots(184)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma\left(\frac{y^2}{R+y}dA\right) &= \Sigma\left\{\left(y - R + \frac{R^2}{R+y}\right)dA\right\} \\ &= \Sigma(ydA) - R\Sigma(dA) + R^2\Sigma\left(\frac{dA}{R+y}\right) \\ &= RA_1 - RA = R(A_1 - A) \dots\dots\dots(185)\end{aligned}$$

將此代入 (182a) 與 (183a), 則得

$$R(1+e_0)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}\right)(A_1-A)=e_0A \dots\dots(186)$$

$$R^2(1+e_0)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}\right)(A_1-A)=\frac{M}{E} \dots\dots(187)$$

由此求 e_0 及 R_1 , 則

$$e_0=\frac{M}{EAR} \dots\dots(188)$$

$$\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}=\frac{M}{EAR+M} \times \frac{A}{(A_1-A)R} \dots\dots(189)$$

此值代入於 (181), 則

$$e=\frac{y\left(1+\frac{M}{EAR}\right)\left(\frac{M}{EAR+M} \times \frac{A}{(A_1-A)R}\right)+\frac{M}{EAR}}{1+\frac{y}{R}}$$

$$=\frac{M}{ER} \left\{ \frac{y}{(R+y)(A_1-A)} + \frac{1}{A} \right\} \dots\dots(190)$$

或因 $f=E \cdot e$, 故

$$f=\frac{M}{E} \left\{ \frac{y}{(R+y)(A_1-A)} + \frac{1}{A} \right\} \dots\dots(191)$$

或

$$f=\frac{M}{(R+y)A} \left\{ 1 + \frac{y}{R} \cdot \frac{A_1}{A_1-A} \right\} \dots\dots(191a)$$

$$\text{或} \quad f = \frac{M}{R(A_1 - A)} \left\{ \frac{A_1}{A} - \frac{R}{R + y} \right\} \dots\dots\dots(191b)$$

(191a) 中, $f=0$ 時, 則

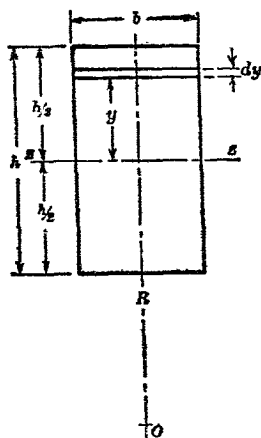
$$y_0 = -R \cdot \frac{A_1 - A}{A_1} \dots\dots\dots(192)$$

即定中性面之位置。故曲樑上中性面不通過斷面之中心, 而為負值, 即在中心線內側, 偏近於曲率中心。

又由(191b), 則中心線外側之內力, 當 y 達最大值時, 為最大。而中心線內側之內力, 當 y 達最大負值時為最大。故曲樑時最大內力作用於樑之最外面及最內面。然 M 為正值時, 外側為拉內力, 內側為壓內力, 而增加樑之曲率。

83. A_1 量之計算。前節所述曲樑之解法中, 須求 A_1 之量。此 A_1 量由曲樑之斷面形狀與大小而定。若斷面形狀為矩形, 圓形等簡單整正之形時, 可由計算容易求得 A_1 。若斷面為不規則之形(但為對稱形), 或複雜之形時, 以圖法求之為便。

(a) 矩形斷面. 第129圖所示矩形斷面, 寬為 b , 高為 h . 其中心自曲率中心 O 相距為半徑 R . 由通過中心之軸相距 y 部分上設有微小面積 dA . 則 $dA = b \cdot dy$, 故



第 129 圖

$$A_1 = Rb \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{dy}{R+y} = Rb \log_e \frac{2R+h}{2R-h} \dots\dots(193)$$

但 $A = bh$, 故

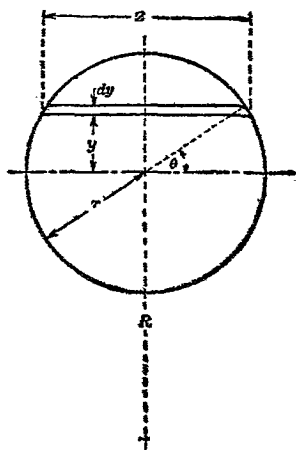
$$y_0 = - \frac{R \log_e \frac{2R+h}{2R-h} - h}{\log_e \frac{2R+h}{2R-h}} \dots\dots(194)$$

上爲正確之式，但實用上可用近似值。今將(193)展開之，則得

$$A_1 = bh \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \frac{1}{80} \left(\frac{h}{R} \right)^4 + \dots \right\}$$

今取至 $\left(\frac{h}{R} \right)^2$ 之項，或四乘方之項，可得精密度相異之結果。取至六乘方之項，殆無必要。

(b) 圓形斷面。第130圖示圓形斷面，半徑爲 r 。其中心與曲率中心之距爲半徑 R 。由通過中心之軸距 y 處設有微小面積 dA ，則



第 130 圖

$$dA = zdy$$

但

$$z = 2r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta, \quad dy = r \cos \theta \cdot d\theta$$

故

$$dA = 2r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot d\theta$$

$$R + y = R + r \sin \theta$$

因之

$$\begin{aligned} A_1 &= R \int_{-r}^r \frac{zdy}{R+y} = 2r^2 R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \cdot d\theta}{R+r \sin \theta} \\ &= 2r^2 R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{r} \sin \theta + \frac{R}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^2 - R^2}{R+r \sin \theta} \right\} d\theta \\ &= 2\pi R^2 - 2\pi R \sqrt{R^2 - r^2} \\ &= 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2}) \dots\dots\dots (195) \end{aligned}$$

(c) 一般斷面. 對於一般斷面, 則

$$\begin{aligned} A_1 &= \Sigma \left\{ \frac{R}{R+y} dA \right\} \\ &= \Sigma \left\{ \left(1 - \frac{y}{R} + \frac{y^2}{R^2} - \frac{y^3}{R^3} + \frac{y^4}{R^4} - \dots \right) dA \right\} \end{aligned}$$

對於內外對稱之斷面, 則 $\frac{y}{R}$ 之奇數乘方項為零.

$$\begin{aligned}
 \text{故 } A_1 &= \Sigma(dA) + \Sigma\left(\frac{y^2}{R^2}dA\right) + \Sigma\left(\frac{y^4}{R^4}dA\right) + \dots\dots \\
 &= A + \frac{I}{R^2} + \frac{1}{R^4}\Sigma(y^4dA) + \dots\dots\dots, \dots\dots(196)
 \end{aligned}$$

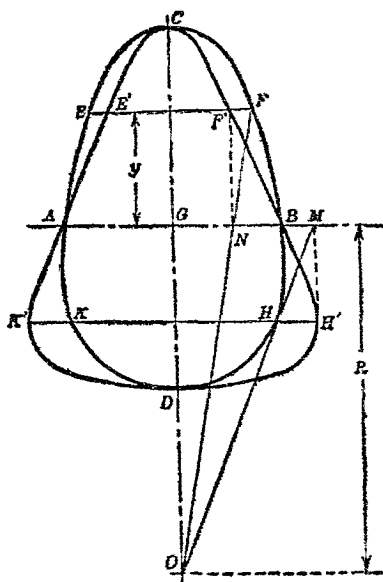
但 I 爲該斷面對於同一軸線之慣性能率。若 $\left(\frac{y}{R}\right)$ 之四乘方以下可略去時，則

$$\frac{I}{R^2} = A_1 - A$$

(d) 圖式求法。求 $A_1 = R\Sigma\left(\frac{dA}{R+y}\right)$ 時，若斷面之形比較的非爲簡單者，以圖式求法爲便。第 131 圖示其一例。AECFBHDK 爲已知斷面形，其中心爲 G 。

取 GO 等於曲率半徑 R ，定 O 點位置。引平行於軸之任意線 EF ，求 EF 之寬。取 $E'F'$ 等於 $\frac{\overline{EF} \times R}{R+y}$ 。其法將 E 及 F 與 O 點連結，交軸線 AB 於 M, N 。作 ME', NF' 與 AB 垂直，可得 E', F' 點。對於 AB 內側部分， y 爲負值，其圖法全相同。例如對於 KH 求 $K'H'$ 之法，全與 $E'F'$ 之作法

同。如此得 $AE'CF'BH'DK'$ 諸點，以適當曲線連結之。此形狀若 $E'F'$ 等線愈多取時愈正確。此形面積即表示 A_1 。蓋其寬對於已知斷面形寬之比為 $\frac{R}{R+y}$ 故也。

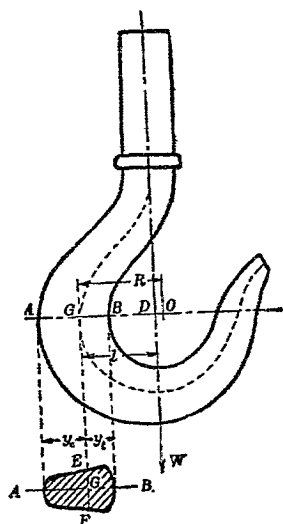


第 131 圖

84. 鉤。起重機上懸荷重之鉤(hook)為曲樑之一例。其主斷面即通過曲率中心之水平面

上彎曲內力，可應用前數節解法以求之。

第132圖示普通之鉤。對於主斷面 AB 之曲率中心為 O 。荷重雖垂直懸於鉤上，而作用線未必通過 O 點。設荷重為 W ， G 為斷面 AB 之中心，則曲率半徑 R 等於 OG 之長。荷重對於斷面上作用之彎曲能率 M 為 Wl 。斷面 $AEBF$ 之面積設為 A 。由前節方法所得補助函數 A_1 ，可用之



第 132 圖

以求彎曲作用所生之內力。即

$$f_b = \frac{Wl}{R(A_1 - A)} \left(\frac{R}{R + y} - \frac{A_1}{A} \right)$$

但此外尚有因荷重而生之直接內力作用於斷面上。此內力總計為 W ，而為拉內力。今設均布於斷面上，則

$$f_t = \frac{W}{A}$$

斷面各點 f_b 與 f_t 同時作用。彎曲內力最大值作用於 A, B ，而 A 為壓內力， B 為拉內力。此時彎曲能率作用於減少曲樑曲率之方向。故 A 處內力為

$$f_1 = f_t - f_b = \frac{W}{A} - \frac{Wl}{R(A_1 - A)} \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R}{R + y_a} \right) \dots\dots(197)$$

B 處內力為

$$f_2 = f_t + f_b = \frac{W}{A} + \frac{Wl}{R(A_1 - A)} \left(\frac{R}{R + y_b} - \frac{A_1}{A} \right) \dots\dots(198)$$

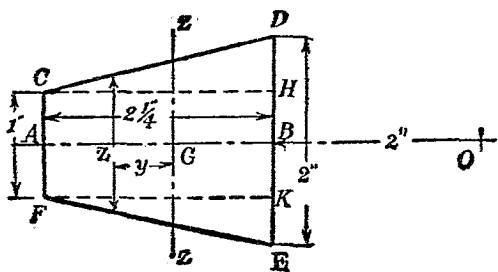
設計時當使上之二值相差不遠。

例 1. 鉤之主斷面設為對稱梯形。高 $2\frac{1}{2}$ 吋，內側寬 2 吋，外側寬 1 吋。荷重作用線設通過曲率

中心。曲率中心之位置自斷面內側距2吋。懸1½噸荷重時，求內力之最大値。

斷面中心須先求得。視梯形爲矩形與三角形之和，如第133圖所示。梯形 $CDEF$ 可分爲矩形 $CHKF$ 及三角形 CDH 與 EKF 。對於 DE 求各面積之能率，此當與全面積乘 BG 之能率相等。由此可得中心 G 之位置。矩形面積 a_1 爲

$$a_1 = 1 \times 2 \frac{1}{4} = 2.25 \text{ 平方吋。}$$



第 133 圖

三角形面積 a_2 爲

$$a_2 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \frac{1}{4} = 1.125 \text{ 平方吋。}$$

故全面積 A 爲

$$A = a_1 + a_2 = 2.25 + 1.125 = 3.375 \text{ 平方吋.}$$

今取對於 DE 之面積能率, 則

$$A \times \overline{BG} = (a_1 \times 1.125) + \left(a_2 \times \frac{1}{3} \times 2.25 \right) = 3.375 (\text{吋})^3$$

故 $\overline{BG} = 1$ 吋.

因之對於 G 之曲率半徑爲

$$R = \overline{OG} = 1 + 2 = 3 \text{ 吋}$$

次求補助函數 A_1 , 得

$$A_1 = R \int \frac{dA}{R+y} = R \int \frac{z dy}{R+y}$$

今設 ZZ 軸上之寬爲 z_0 , 則 $z_0 = 1\frac{5}{9}$ 吋.

$$z = z_0 - \frac{4}{9}y = 1\frac{5}{9} - \frac{4}{9}y = \frac{4}{9} \left(\frac{7}{2} - y \right)$$

故

$$\begin{aligned} A_1 &= 3 \int_{-1}^{1.25} \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{7}{2} - y \right) dy}{3+y} = 3 \times \frac{4}{9} \int_{-1}^{1.25} \frac{3.5 - y}{3+y} dy \\ &= \frac{4}{3} \int_{-1}^{1.25} \left(-1 + \frac{6.5}{y+3} \right) dy = \frac{4}{3} \left[-y + 6.5 \log_e(y+3) \right]_{-1}^{1.25} \\ &= \frac{4}{3} \left(-2.25 + 6.5 \log_e \frac{4.25}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{3}(-2.25 + 6.5 \log_e 2.125) \\
 &= \frac{4}{3}(-2.25 + 6.5 \times 2.303 \times 0.3273) = 3.5381 \text{ 平方吋}
 \end{aligned}$$

故 $A_1 - A = 3.5381 - 3.375 = 0.1631$ 平方吋

由此得 A 處最大壓內力爲

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{1.25 \times 3}{3 \times 0.1631} \left(\frac{3.5381}{3.375} - \frac{3}{4.25} \right) - \frac{1.25}{3.375} \\
 &= \frac{1.25}{0.1631} \times 0.3423 - 0.37 = 2.62 - 0.37 \\
 &= 2.25 \text{ 噸/平方吋}
 \end{aligned}$$

B 處最大拉內力爲

$$\begin{aligned}
 f_2 &= \frac{1.25 \times 3}{3 \times 0.1631} \left(\frac{3}{2} - \frac{3.5381}{3.375} \right) + \frac{1.25}{3.375} \\
 &= \frac{1.25}{0.1631} \times 0.4517 + 0.37 = 3.46 + 0.37 \\
 &= 3.83 \text{ 噸/平方吋}
 \end{aligned}$$

85. 圓環. 計算圓環內力時, 以用曲樑公式爲最精確. 有時雖設種種假定而用直樑式以計算之, 但不過近似法耳.

A 至 F 間方向變換之總和爲零。換言之，其反對方向之彎曲作用相等。

今設與拉力作用線成 θ 角之橫斷面 XX 上，增加曲率之彎曲能率爲 M ，橫斷面 EF 上之彎曲能率爲 M_1 ，則環之一部分 $XFEX$ 必在平衡狀態，故對於斷面 XX 之中心取能率，則得

$$M = M_1 + \frac{P}{2} R_0 (1 - \sin \theta) \dots \dots \dots (199)$$

由 §82 之 (183), (185),

$$M = ER_0^2 (1 + e_0) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) (A_1 - A) \dots \dots \dots (200)$$

然 A 至 F 間撓屈總和爲零，故

$$\int_0^{\theta = \frac{\pi}{2}} di = \int_0^{\theta = \frac{\pi}{2}} \frac{M}{EI} ds = \frac{R_0}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\theta = 0$$

但 i 爲傾斜， s 爲樑長， $ds = R_0 d\theta$ 。上式應用直樑之式而得。故可得近似的解法。但正確方法如下。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\theta = ER_0(A_1 - A) \\ \times \left\{ \int_0^{\theta = \frac{\pi}{2}} \frac{1 + e_0}{R} ds - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + e_0) d\theta \right\} \dots \dots \dots (201)$$

若取四分之一圓周，則變形後， OS 與 OL 間亦為直角。故

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1 + e_0}{R} ds = \frac{\pi}{2}$$

故 (201) 式為

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\theta = ER_0(A_1 - A) \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e_0 d\theta \right\} \\ = -ER_0(A_1 - A) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e_0 d\theta \dots \dots \dots (202)$$

橫斷面上作用之直接內力總和為

$$\frac{P}{2} \sin \theta = E \Sigma (e \cdot dA) \\ = E \left\{ R_0(1 + e_0) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) (A - A_1) + e_0 A \right\} \dots \dots (203)$$

由此式及 (199), (200), 得

$$e_0 = \frac{M_1}{EAR_0} + \frac{P}{2EA} \dots\dots\dots(204)$$

由此式及 (202), 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\theta = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{A_1 - A}{A} \left(M_1 + \frac{PR_0}{2} \right) \dots\dots(205)$$

但將 (199) 積分之,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\theta = \frac{\pi}{2} M_1 + \frac{PR_0}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \dots\dots\dots(206)$$

故使 (205) 與 (206) 相等, 則

$$M_1 = \frac{PR_0}{\pi} \left(\frac{A}{A_1} - \frac{\pi}{2} \right) \dots\dots\dots(207)$$

將此值代入於 (199), 得

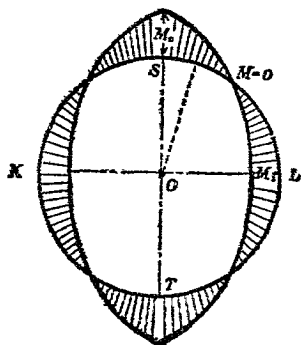
$$M = PR_0 \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \sin \theta \right) \dots\dots\dots(208)$$

此值當 θ 爲零時有最大值. 故此時

$$M_0 = \frac{PR_0}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} = 0.318 PR_0 \cdot \frac{A}{A_1} \dots\dots\dots(209)$$

由 (208), (209) 知彎曲能率與斷面形狀及大小有

關係。彎曲能率當 $\sin \theta = \frac{2A}{\pi A_1}$ 時爲零。由 (208) 可求對於各 θ 值之 M 。若作成線圖，如第 135 圖。彎曲能率之值已知時，則對於已知橫斷面形狀及大小，即可求內力之值。且各斷面受 $\frac{P}{2} \sin \theta$ 之直接內力，其強爲 $\frac{P \sin \theta}{2A}$ 。又有總量 $\frac{P}{2} \cos \theta$ 之剪內力，成某種分布狀態。其分布因斷面形狀而異。圓形斷面時，兩極端爲零，中心軸線上最大，爲平均值即 $\frac{P \cos \theta}{2A}$ 之 $\frac{4}{3}$ 倍。



第 135 圖

定環之強度時，須求最內側與最外側之內力。就彎曲能率及直接內力最大之斷面而求其值即可。

今設最內側距中心軸線爲 y_1 ，而求內力，則

$$f_1 = \frac{P \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \sin \theta \right) \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R_0}{R_0 - y_1} \right) + \frac{P \sin \theta}{2A}}{A_1 - A}, \quad (210)$$

此值當 $\theta = 0$ 及 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時達極限值。

$$\theta = 0, \text{ 則 } f_1 = \frac{P}{\pi(A_1 - A)} \left(1 - \frac{A}{A_1} \cdot \frac{R_0}{R_0 - y_1} \right) \dots \dots (210a)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \text{ 則}$$

$$f_1 = \frac{P \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R_0}{R_0 - y_1} \right) + \frac{P}{2A}}{A_1 - A} \dots (210b)$$

上二式中正值示拉內力，負值示壓內力。

次設最外側距中心軸線爲 y_2 ，而求內力，則

$$f_2 = \frac{P \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \sin \theta \right) \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R_0}{R_0 + y_2} \right) + \frac{P \sin \theta}{2A}}{A_1 - A}, \quad (211)$$

$$\theta = 0, \text{ 則 } f_2 = \frac{P}{\pi(A_1 - A)} \left(1 - \frac{A}{A_1} \cdot \frac{R_0}{R_0 + y_2} \right) \dots \dots (211a)$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$, 則

$$f_2 = \frac{P \left(\frac{1}{\pi} \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \right)}{A_1 - A} \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R_0}{R_0 + y_2} \right) + \frac{P}{2A} \dots\dots(211b)$$

例 2. 圓環上有通過中心之拉力 P . 斷面爲圓形, 斷面半徑爲環平均半徑之 $\frac{1}{3}$. 求環內側及外側之內力.

設斷面半徑爲 r , 環之平均半徑爲 R_0 , 則 $R_0 = 3r$. 由 (195) 式,

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\pi R_0 (R_0 - \sqrt{R_0^2 - r^2}) = 6\pi r (3r - r\sqrt{9-1}) \\ &= 6\pi r^2 (3 - \sqrt{8}) = 1.0294\pi r^2 \end{aligned}$$

又 $A = \pi r^2$

故 $A_1 - A = 1.0294\pi r^2 - \pi r^2 = 0.0294\pi r^2$

$$\frac{A_1}{A} = 1.0294$$

以此代入於 (210) 及 (211), 可得內力之值.

內側面上作用之內力爲

$$f_1 = \frac{P \left(\frac{0.9714}{\pi} - \frac{1}{2} \sin \theta \right)}{0.0294\pi r^2} (1.0294 - 1.5) + \frac{P \sin \theta}{2\pi r^2}$$

$$= -\frac{P}{\pi r^2} (4.95 - 8.5 \sin \theta)$$

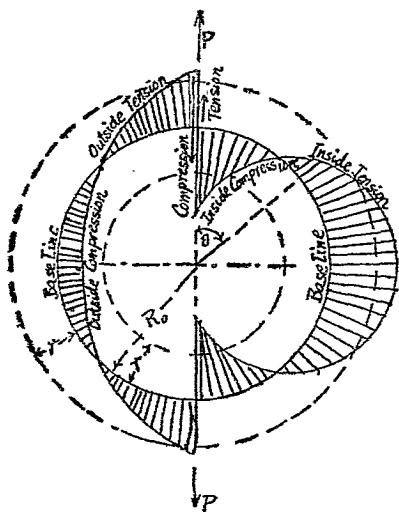
$\theta=0$ 時, f_1 最大, 而壓內力爲

$$f_1 = \frac{4.95P}{\pi r^2}$$

$\sin \theta = \frac{4.95}{8.5} = 0.5830$ 或 $\theta = 35^\circ 40'$ 之橫斷面上, f_1

爲零.

次求外側面上之內力,



第 136 圖

但由直線樑之式，

$$\frac{di}{ds} = \frac{M}{EI}, \quad \text{或} \quad di = \frac{M}{EI} ds$$

故因 ds 之彎曲，所生弦 AB 之變化 EF 爲

$$EF = \frac{M}{EI} y ds$$

故全體彎曲所生之變化爲

$$\int \frac{My}{EI} ds \dots\dots\dots (212)$$

例如圓環之變化，生於主要直徑即平行及垂直於力之直徑上。因

$$y = R_0 \cos \theta, \quad ds = R_0 d\theta,$$

而
$$M = PR_0 \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \sin \theta \right)$$

代入於 (212)，而求第 134 圖上直徑 KL 之減小。

即

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR_0}{EI} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \sin \theta \right) R_0 \cos \theta \cdot R_0 d\theta \\ & = \frac{2PR_0^3}{EI} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{4} \right) \dots\dots\dots (213) \end{aligned}$$

其直角之直徑 ST (第134圖) 上長度之增加如下,

$$\text{因} \quad y = R_0 \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR_0}{EI} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \sin \theta \right) R_0 \sin \theta \cdot R_0 d\theta \\ = \frac{2PR_0^3}{EI} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{\pi}{8} \right) \dots\dots\dots(214) \end{aligned}$$

但長度之減少視爲正, 故此增加爲負值。

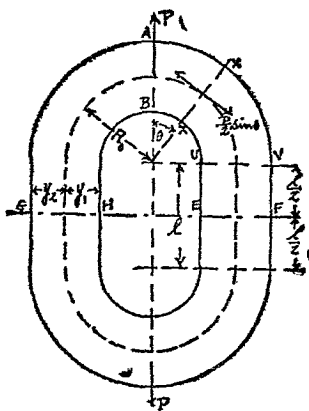
87. 簡單形之鏈環. 鏈環之最簡單形者爲半圓形兩端, 與直線形兩邊. 可用圓環之計算以求近似的內力之計算式。

第138圖上 R_0 爲兩端半圓部之平均半徑, l 爲兩側直邊之長. 設 UV 斷面上彎曲能率爲 M_1 , 而直線部各斷面亦與此相同. XX 斷面上彎曲能率 M 爲

$$M = M_1 + \frac{P}{2} R_0 (1 - \sin \theta) \dots\dots\dots(a)$$

A 與 F 間方向變更之總和爲零, 故

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{M}{EI} ds + \frac{M_1}{EI} \times \frac{l}{2} = 0$$



第 138 圖

但上式第二項表示 V 至 F 間之角度變化。由此得

$$\frac{R_0}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ M_1 + \frac{PR_0}{2} (1 - \sin \theta) \right\} d\theta + \frac{M_1 l}{2EI} = 0$$

$$\text{或} \quad R_0 M_1 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{PR_0^2 \pi}{4} - \frac{PR_0^2}{2} + M_1 \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\text{故} \quad M_1 = \frac{PR_0^2}{2} \left(\frac{2 - \pi}{\pi R_0 + l} \right), \text{ 或} \quad \frac{PR_0}{2} \left(\frac{2R_0 - \pi R_0}{\pi R_0 + l} \right) \dots\dots(b)$$

將此代入於 (a). 得

$$M = \frac{PR_0^2}{2} \cdot \frac{2-\pi}{\pi R_0+l} + \frac{P}{2} \cdot R_0(1-\sin \theta)$$

$$= \frac{PR_0}{2} \left(\frac{2R_0+l}{\pi R_0+l} - \sin \theta \right) \dots\dots\dots (c)$$

AB斷面上 $\theta=0$, 故 $M_0 = \frac{PR_0}{2} \cdot \frac{2R_0+l}{\pi R_0+l} \dots\dots\dots (d)$

此值常為正, 而較 (b) 式為大. 且與 l 同增加.

彎曲能率既知後可求各斷面上內側與外側之彎曲內力. 其他尚有 $\frac{P}{2A} \sin \theta$ 之直接內力. 故

AB斷面上 B處之壓內力為

$$\frac{M_0}{R_0(A_1-A)} \left(\frac{R_0}{R_0-y_1} - \frac{A_1}{A} \right)$$

$$= \frac{P(2R_0+l)}{2(\pi R_0+l)(A_1-A)} \left(\frac{R_0}{R_0-y_1} - \frac{A_1}{A} \right) \dots\dots\dots (e)$$

UV以下直線部斷面上, 則上式中 M_0 易以 M_1 所得之值與直接拉內力 $\frac{W}{2A}$ 之代數和.

AB斷面上 A處拉內力為

$$\frac{M_0}{R_0(A_1-A)} \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R_0}{y_2+R_0} \right)$$

$$= \frac{P(2R_0+l)}{2(\pi R_0+l)(A_1-A)} \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R_0}{y_2+R_0} \right) \dots\dots(f)$$

UV以下直線部斷面上之外側內力同樣亦可知。

以上所述為近似的計算法。若精確之法則如前節圓環時，就四分之一部分，角度變化在變形後為

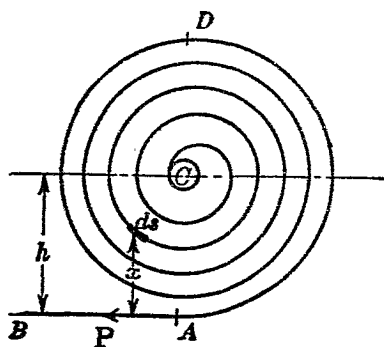
$$\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{(1+e_0)ds}{R} = \frac{\pi}{\pi} - \frac{M_1 l}{2EI} \quad \left(\text{不為 } \frac{\pi}{2} \right)$$

由§83之(196)式，取其第一次近似值，則

$$M_0 = \frac{PR_0}{2} \cdot \frac{2R_0+l}{\frac{A_1}{A}\pi R_0+l}$$

88. 渦卷彈條。渦卷彈條(spiral spring)多用於時計等，為各種機構動力之用。

第139圖上彈條一端A為自由，沿AB方向加P力拉之。他端C固定於心棒。距AB線x處微小部分ds上所作用之彎曲能率為



第 139 圖

$$M = Px$$

因 ds 部分之變位所生傾斜為

$$\frac{di}{ds} = \frac{M}{EI}$$

或

$$di = \frac{M}{EI} ds = \frac{Px}{EI} ds$$

故因拉力 P 所生全角度變化 i 為

$$i = \frac{P}{EI} \int x ds \dots\dots\dots(215)$$

但普通斷面為均一，而 I 為常數。上之積分為彈條中心線對於 AB 線之能率，故等於彈條中心線全長與其重心至 AB 之距之乘積。然彈條

重心可視為在心棒之中心。故

$$\int x ds = hl$$

但 l 為彈條全長, h 為中心至 AB 之距。故

$$i = \frac{P}{EI} hl = \frac{M_0 l}{EI} \dots\dots\dots (216)$$

但 $M_0 = Ph$

實際上 A 為固定而 C 與心棒同迴轉。故略與 AB 平行之力加於 A 上, 而同時等大反向之力加於 C , 成偶力 Ph 。但作用於 A 之力 P 略垂直於 AC , 彈條各部不相接觸, 而彈條重心略在 C 時, 則上述關係可成立。角 i 與 M_0 或 P 成比例。彈條中所藏之勢力為

$$\frac{1}{2} M_0 i = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_0^2 l}{EI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P^2 h^2 l}{EI} \dots\dots\dots (217)$$

彈條各部作用之內力由彎曲能率與斷面係數可求。普通彈條材料之厚極小, 故可由直樑公式而計算之。但彎曲能率最大部分為自 AB 線最遠之 D 部分。而近似的

$$M_D = 2Ph$$

彈條斷面為矩形，故 $Z = \frac{1}{6}bt^2$

但 b 為斷面寬， t 為厚。故

$$f = \frac{12Ph}{bt^2} = \frac{12M_0}{bt^2} \dots \dots \dots (218)$$

或設 f 為最大可容內力，則最大拉力 P_{max} 或最大偶力 M_{max} 為

$$P_{max} = \frac{fbt^2}{12h} \quad \text{或} \quad M_{max} = \frac{fbt^2}{12} \dots \dots \dots (218a)$$

故所可藏最大之勢力為

$$\begin{aligned} U_{max} &= \frac{1}{2} \left(\frac{fbt^2}{12} \right)^2 \cdot \frac{l}{EI} = \frac{1}{24} \cdot \frac{f^2}{E} \cdot btl \\ &= \frac{1}{24} \cdot \frac{f^2}{E} \times (\text{彈條容積}) \dots \dots \dots (219) \end{aligned}$$

例 3. 厚 $\frac{1}{40}$ 吋寬 $\frac{1}{2}$ 吋之鋼條所成渦卷彈條，全長 10 呎。一端固定於心棒，他端固定於一定點。該彈條全在寬放狀態時，捲以三捲，則心棒上所加偶力幾何？此時彈條上所加之勢力幾何？又彈條上作用之最大內力幾何？但對

於鋼 $E=3 \times 10^7$ 磅/平方吋。

彈條斷面爲矩形，故

$$I = \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{40}\right)^3 = \frac{1}{1,536,000} (\text{吋})^4$$

三捲時角度爲 $i=6\pi$ (radian)，故由 (216)，

$$M_0 = \frac{EIi}{l} = \frac{3 \times 10^7 \times 6\pi}{1,536,000 \times 120} = 3.068 \text{ 吋磅}$$

勢力 U 爲

$$U = \frac{1}{2} M_0 i = \frac{1}{2} \times 3.068 \times 6\pi = 28.91 \text{ 吋磅}$$

最大內力由 (218)

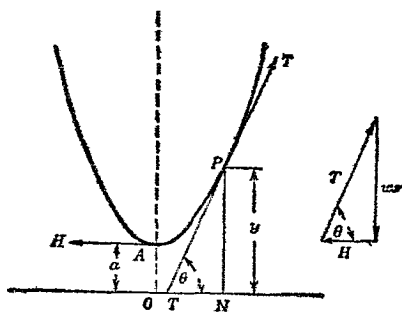
$$f = \frac{12M_0}{bt^2} = \frac{12 \times 3.068}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{40}\right)^2} = 117,800 \text{ 磅/平方吋}$$

89. 懸垂鏈或懸垂線。支持兩端之鏈或線因自己重量受垂直荷重。此時線生寬垂 (sag)，成一種曲線。可視爲曲樑。但一般對於線之尺寸，其長度極大。故彎曲內力甚小，可略去之，其強度可僅由直接內力以決定之。

自兩端支持點自由懸垂之均一斷面之線或鏈，其所取形狀成懸垂曲線 (catenary)。第 140 圖上曲線之單位長重量設為 w ，任意一點 P 處張力為 T 。其水平分力 H 設有一定之值。今就 AP 部平衡考察之。 PA 之長設為 s ，原點取於 A 之下方，而 A 之坐標為 a 。則

$$ws = H \cdot \tan \theta,$$

$$s = \frac{H}{w} \tan \theta = a \tan \theta \dots \dots \dots (220)$$



第 140 圖

但 $a = \frac{H}{w}$ ，即長 a 之線垂直懸於 A 點時，因其重量所生張力，適與 A 點之 H 相等。但

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx}, \quad \cos \theta = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \theta = \frac{dy}{ds}$$

又就 (220) 式對於 θ 取微分, 則

$$\frac{ds}{d\theta} = a \sec^2 \theta$$

故
$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta} = \sin \theta \cdot a \sec^2 \theta = a \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

因之
$$y = a \int \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta + y_0 = a \sec \theta + y_0 \cdots (221)$$

但 $\theta=0$ 時, $y=a$, $\therefore y_0=0$.

又
$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta} = \cos \theta \cdot a \sec^2 \theta = a \sec \theta$$

故
$$\begin{aligned} x &= a \int \sec \theta d\theta + x_0 = a \log_e \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \\ &= a \log_e (\sec \theta + \tan \theta) + x_0 \end{aligned}$$

但 $\theta=0$ 時, $x=0$, 故 $x_0=0$.

因之
$$e^{\frac{x}{a}} = \sec \theta + \tan \theta \cdots \cdots (222)$$

若取反數, 則
$$e^{-\frac{x}{a}} = \sec \theta - \tan \theta \cdots \cdots (223)$$

上二式相加, 以 2 除之, 則

$$\frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = \sec \theta = \frac{y}{a}$$

或
$$\cosh \frac{x}{a} = \frac{y}{a}$$

或
$$y = a \cosh \frac{x}{a} \dots\dots\dots(224)$$

此即懸垂曲線之式也。將上式展開之，則

$$y = a \left(1 + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^4}{12a^4} + \dots\dots \right) \dots\dots(224a)$$

x 若小時，略去 $\left(\frac{x}{a}\right)$ 之高次乘方項，

$$y = a + \frac{x^2}{2a} = a + \frac{wx^2}{2H} \dots\dots\dots(224b)$$

此表示拋物線之式也。故寬垂比跨徑小時，普通視懸垂線形為拋物線。若取最下點為原點，

則
$$y = \frac{wx^2}{2H} \dots\dots\dots(225)$$

此為通常電線，懸橋纜 (suspension-bridge cable) 等所用之式。任意點上之張力可由圖知

$$T = H \sec \theta = wy$$

即等於 y 長度之線垂直懸垂時之重量也。

自頂點 A 之曲線長 s 為

$$\begin{aligned}
 s &= \int \frac{ds}{dx} dx = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int \sqrt{\left(1 + \sinh^2 \frac{x}{a}\right)} dx \\
 &= \int \cosh \frac{x}{a} dx = a \sinh \frac{x}{a}
 \end{aligned}$$

上之積分常數爲零，蓋 $x=0$ 時 $s=0$ 故也。

問 題

1. 寬 2 吋高 3 吋之矩形斷面棒，於高之平行平面上彎成曲樑，平均曲率半徑爲 4 吋。若受 15 吋噸之彎曲能率，使減少曲度時，求最大之拉與壓之彎曲內力。

2. 直徑 $1\frac{1}{2}$ 吋之圓形斷面棒彎成平均直徑 $1\frac{1}{2}$ 吋之曲棒。若受 4000 磅吋之彎曲能率增加棒之曲率時，其拉伸與壓縮內力之最大值幾何？

3. 鉤之主斷面爲梯形，高 3 吋，內側寬 3 吋，外側寬 1 吋。曲率中心離內側距 $2\frac{3}{4}$ 吋。外力作用線通過於距內側 $2\frac{1}{4}$ 吋處。若最大拉內力不超過 7 噸/平方吋時，求此鉤之安全荷重。

4. 直徑 1 吋之圓鋼棒所成之圓環，平均直徑爲 5 吋。若受拉力 2000 磅時，求最大之拉內力

與壓內力。

5. 第四題之圓環,沿拉力方向直徑之增加,及其垂直方向直徑之縮小各幾何? 但 $E=30 \times 10^6$ 磅/平方吋。

6. 矩形斷面之渦卷彈條,寬1吋,厚 $\frac{1}{8}$ 吋,長20吋。若彎曲內力不超過100,000磅/平方吋時,求其作用於心棒上之迴轉能率幾何?

第十四章

歪能

90. 拉伸歪能。因拉伸內力生其相當之歪。若拉伸荷重漸增加時，該方向上之歪亦漸增。故必須相當量之功。力之大小常有變化，故對於全體伸長所需之功，不能以簡單之積表之。今對於微小伸長 dx ，則其間之力可視為一定。設為 P 磅，則其間所費之功為

$$dW = P \cdot dx \text{ 吋磅}$$

對於全體伸長 ε 吋所費之功為

$$W = \int_0^{\varepsilon} P \cdot dx \text{ 吋磅}$$

但

$$P = f(x)$$

將荷重 (load) 及伸長 (elongation)，取為直角坐標，作荷重伸長線圖，則荷重曲線與橫坐標軸

間之面積即表伸長時所需功量。其單位因荷重與伸長兩單位而定之。

全功量中與彈性歪相當之部，藏蓄為歪能 (strain energy)。取去荷重，該功量同時放出於外界。例如撓曲鋼板，放寬時可彈物等是也。反之對於彈性限界以上之歪所費之功，消費於打破材料分子之結合力。其結果熱與變形同生，而不能回收之。屬於呼克法則之材料，則彈性部分之荷重曲線為一直線。故藏蓄為歪能之功量，可以三角形面積表之。其值為

$$\frac{1}{2} \times (\text{荷重}) \times (\text{伸長})$$

但上式僅於彈性限界以內可成立。超過彈性限界時，則須用前示之一般式。

今於彈性限界以內，受均一強度之拉內力 p 之材料片，其橫斷面積為 A ，長為 l ，則全荷重為 pA ，而伸長量 ε 為

$$\varepsilon = \frac{p}{E} l$$

但 E 為材料之縱彈性係數。此時歪能之量為

$$\frac{1}{2} \cdot pA \cdot \frac{p}{E} l = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{E} \cdot lA = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{E} \times (\text{體積}) \cdots (226)$$

或單位體積所貯蓄之歪能為

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{E} \cdots \cdots (226a)$$

91. 最大彈性歪能。未生永久變形以前，材料中所可貯蓄之最大歪能，曰最大彈性歪能 (proof resilience)。設 p_e 為彈性限界處內力之強，則最大彈性歪為

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p_e^2}{E} \cdot Al \cdots \cdots (227)$$

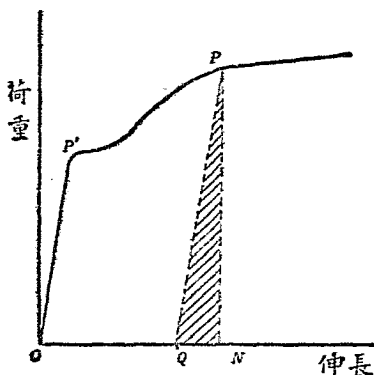
或對於單位體積為

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p_e^2}{E} \cdots \cdots (227a)$$

超過彈性限界後，加內力時，對於其歪所需之功一部分，當內力除去時亦同時放出。此亦稱為歪能。如第 141 圖中，面積 $OP'PNO$ 為對於歪所需功之總量，面積 $QPNQ$ 為歪能。而 PQ 平行於 $P'O$ 。設與 PN 相當之內力為 p ，則 $QPNQ$ 之

面積爲

$$\frac{1}{2} \times \frac{p^2}{E} \times (\text{體積}).$$



第 141 圖

92. 彈性限界以內之活荷重. 一棒上急激加以荷重, 使生不超過彈性限界之內力, 則該棒宛如彈條, 生振動於荷重之方向. 其平均位置之上下振幅與同一大小靜荷重所生伸長之量相等. 故瞬間的最大歪爲同一大小靜荷重所生歪之二倍.

設橫斷面積 A 之棒上, 急激加以拉力 W , 則瞬間的歪爲

$$e = 2 \cdot \frac{W}{A} \times \frac{1}{E}$$

與此相當之瞬間內力爲

$$p = Ee = 2 \cdot \frac{W}{A}$$

即爲靜荷重 W 所生內力之二倍。 E 之值因荷重作用方法亦相異，但實際上可視爲相同。

靜荷重 W_0 作用之棒上，加以同一性質之活荷重 W ，若合成內力不超過彈性限界時，則最大內力爲

$$\frac{W_0}{A} + \frac{2W}{A} = \frac{W_0 + W}{A} + \frac{W}{A}$$

即等於兩荷重和之靜荷重所生內力與荷重變化量所生內力之和。

若活荷重 W 爲反對方向，則瞬間的內力爲

$$\frac{W_0}{A} - 2\frac{W}{A} = \frac{W_0 - W}{A} - \frac{W}{A}$$

此與同一方向時之結論相同。

例 1. 求與次二項生同樣歪時，靜荷重之值。

(a) 受 40 噸拉靜荷重與 10 噸拉活荷重。

(b) 受 20 噸拉靜荷重與 30 噸壓活荷重。

(a) $W_0 = 40$ 噸, $W = 10$ 噸

$$W_0 + W = 40 + 10 = 50 \text{ 噸,}$$

$$(W_0 + W) + W = 50 + 10 = 60 \text{ 噸(拉)}$$

(b) $W_0 = 20$ 噸, $W = -30$ 噸

$$W_0 + W = 20 - 30 = -10 \text{ 噸,}$$

$$(W_0 + W) + W = -10 - 30 = -40 \text{ 噸(壓)}$$

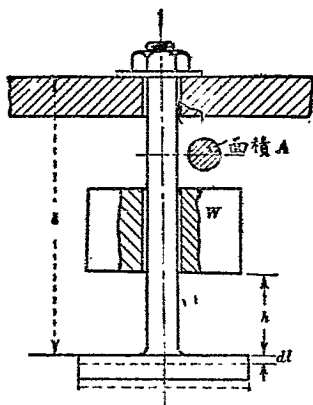
生拉力之衝擊。此時如落下重錘急激所生張力等是也。內力若在彈性限界以內，則棒吸收之歪能與重錘失去之運動能相等。但棒以外部分剛性設為極大。

今設第 142 圖上重錘 W 磅落下 h 吋，擊於棒之鏢上，使棒生 dl 吋之伸長而靜止。則重錘所失去之運動能為 $W(h+dl)$ 吋磅。

設棒長 l 吋，斷面積 A 平方吋，縱彈性係數為 E ，則棒所吸收之歪能為

$$\frac{1}{2} EeAdl = \frac{1}{2} F \cdot dl \text{ 吋磅}$$

但 $Ee \cdot A$ 為與歪相當之靜荷重，以 F 磅表之。



第 142 圖

$$\text{故 } W(h+dl) = \frac{1}{2} Ee^2 \times Al = \frac{1}{2} Ee^2 \times (\text{體積})$$

$$\text{或 } W(h+dl) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{E} \times (\text{體積})$$

$$\text{故 } p^2 = \frac{2E \times W(h+dl)}{(\text{體積})} \dots\dots\dots (228)$$

dl 爲極小，若略去之，則

$$p^2 = \frac{2EWh}{(\text{體積})}, \text{ 或 } p = \sqrt{\frac{2EWh}{Al}} \dots\dots\dots (229)$$

故 E 若已知時，則由 W 及 h ，可求 p 。

(228) 式中 $h=0$ ，即爲急激所加荷重。此時

$$p^2 = \frac{2EW \cdot dl}{Al} = 2 \cdot \frac{W}{A} \cdot E \cdot \frac{dl}{l} = 2 \cdot \frac{W}{A} Ee = 2 \frac{W}{A} p$$

故
$$p = 2 \cdot \frac{W}{A}$$

此與前之結果相符。

例 2. 224 磅重錘落下 2 吋，使直徑 $1\frac{1}{2}$ 吋長 10 呎之鋼棒伸長，求伸長量及內力之值。但鋼之縱彈性係數為 3×10^7 磅/平方吋。

設伸長為 x 吋，內力為 p 磅/平方吋，則

$$224(2+x) = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^7 \times \frac{x}{120} \times \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times x$$

故
$$x^2 - 0.001x - 0.00203 = 0$$

即
$$x = 0.0455 \text{ 吋}$$

$$p = \frac{0.0455}{120} \times 3 \times 10^7 = 11,370 \text{ 磅/平方吋}$$

93. 樑之歪能。樑若不超過彈性限界而彎曲時，其材料因其位置而受種種之拉內力或壓內力，生其相當之歪，而蓄積歪能。其量可表之如次：

$$c \times \frac{p^2}{E} \times (\text{體積}) \cdots \cdots (230)$$

但 p 爲樑所受之最大垂直內力， c 爲關於樑之荷重及支持狀態之常數。其值常小於 $\frac{1}{2}$ 。又設 p_e 爲樑材料在彈性限界時內力之強，則最大彈性歪能爲

$$c \times \frac{p_e^2}{E} \times (\text{體積}) \dots \dots \dots (230a)$$

若僅有一集中荷重之樑，則歪能爲

$$\frac{1}{2} \times W \times (\text{荷重點之撓屈}) \dots \dots \dots (231)$$

故對於荷重 W 作用於自由端之突出樑，則自由端之撓屈爲

$$\frac{Wl^3}{3EI}$$

因之歪能之量爲

$$c \times \frac{p^2}{E} \times (\text{體積}) = \frac{1}{2} \cdot W \times \frac{Wl^3}{3EI}$$

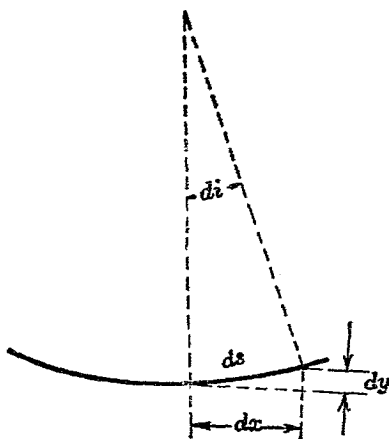
若樑之橫斷面爲矩形，寬爲 b ，厚爲 h ，則

$$I = \frac{M}{Z} = \frac{6Wl}{bh^2}, \quad I = \frac{1}{12}bh^3$$

$$(\text{體積}) = bhl$$

故
$$c = \frac{1}{2} \times \frac{12W^2l^3}{3Ebh^3} \times \frac{Eb^2h^4}{36W^2l^2 \cdot bhl} = \frac{1}{18} \dots \dots \dots (232)$$

或
$$\text{歪能} = \frac{1}{18} \times \frac{p^2}{E} \cdot bhl \dots \dots \dots (233)$$



第 143 圖

歪能一般可以彎曲能率之式表之。即第 143 圖上取樑之微小部 dx ，設其上之彎曲能率為 M ，傾斜之變化為 di ，則歪能量為

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot di$$

故對於樑之全長為

$$\frac{1}{2} \int M di$$

$$\text{或 } \frac{1}{2} \int M \frac{di}{dx} dx = \frac{1}{2} \int M \frac{d^2y}{dx^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx \dots (234)$$

故 E, I 爲常數, 則

$$\frac{1}{2EI} \int M^2 dx \dots \dots \dots (234a)$$

由此式可計算任意樑之歪能。但積分範圍當於每 M 值同一之範圍內取之。故受單一彎曲作用時, M 對於全長爲一定。故

$$\frac{M^2}{2EI} \int_0^l dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2 l}{EI} \dots \dots \dots (235)$$

若樑爲矩形斷面, 寬爲 b , 高爲 d 。則 $p = \frac{6M}{bd^2}$ 。故

歪能爲 $c \times \frac{p^2}{E} \times (\text{體積})$ 。或

$$c \times \frac{36M^2}{Eb^2d^4} \times bdl = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2 l \times 12}{Ebd^3}$$

故 $c = \frac{1}{6}$, 而歪能爲

$$\frac{1}{6} \times \frac{p^2}{E} \cdot bdl$$

例 3. 矩形斷面之樑支於兩端, 受均布荷重。

試以最大內力及樑之體積表示歪能之量。

設 w 爲均布荷重強度, l 爲跨徑, 則

$$M = \frac{w}{2}(lx - x^2)$$

歪量爲

$$\frac{1}{2EI} \int M^2 dx = \frac{1}{2EI} \int \frac{w^2}{4} (l^2x^2 - 2lx^3 + x^4) dx = \frac{w^2 l^5}{240EI}$$

若樑之斷面之寬爲 b , 高爲 h , 則最大內力在樑之中央, 其值爲

$$p = \frac{1}{8}wl^2 \times \frac{6}{bh^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{wl^2}{bh^2}$$

故
$$\frac{w^2 l^5}{240EI} = \frac{w^2 l^5}{20Ebh^3} = \frac{c}{E} \times p^2 \times (\text{體積})$$

$$= \frac{c}{E} \times \frac{9}{16} \times \frac{w^2 l^4}{b^2 h^4} \times bhl$$

故 $c = \frac{4}{45}$, 或歪能爲

$$\frac{4}{45} \cdot \frac{p^2}{E} \times (\text{體積})$$

94. 樑之橫方向上曲率. 若水平樑彎曲之, 使向上成凹形, 則上側面壓縮而下側面拉伸. 其橫方向上伸縮使上側面增寬而下側面減狹. 此橫方向上之歪與縱方向上之歪成比例, 而與自中性面距離成比例. 故橫向彎曲與縱向彎

曲同生。今橫向歪爲縱向歪之 $\frac{1}{m}$ 倍 (但 $\frac{1}{m}$ 爲包生比), 故橫向曲率亦爲縱向曲率之 $\frac{1}{m}$ 倍。設縱向曲率半徑爲 R , 橫向曲率半徑爲 R' , 則

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{mR}, \text{ 或 } R' = mR \quad (\text{第 144 圖})$$

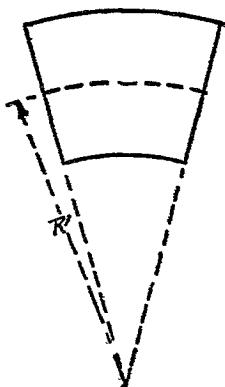
但上式假定橫向各纖維運動自由, 不受相隣層間之妨礙。若橫斷面之高較寬大時, 此假定可視爲真。但寬度大者, 實際上無橫向彎曲。惟上下側邊緣因運動自由少有彎曲耳。此時與 § 77 之例相當, 卽一方向之橫向歪受妨礙時是也。設樑之縱方向上歪爲 e_1 , 寬之方向上爲 e_2 , 而第三主內力爲零。故

$$e_1 = \frac{p_1}{E} - \frac{p_2}{mE}$$

$$0 = \frac{p_2}{E} - \frac{p_1}{mE}$$

故
$$e_1 = \frac{p_1}{E} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) = \frac{p_1(m^2 - 1)}{m^2 E}$$

或
$$p_1 = e_1 \times E \frac{m^2}{m^2 - 1}$$

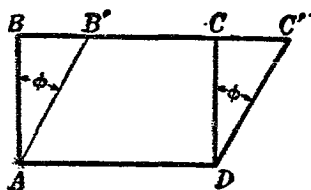


第 144 圖

95. 剪斷歪能. 彈性限界以內, 物體受剪歪時, 貯蓄剪斷歪能 (shearing resilience). 與垂直內力時相同. 剪力分布簡單時, 其歪能可易求. 例如第 145 圖上垂直於紙面方向上長 l 之材料片, 面 BC 上有均布強度 q 之剪內力之作用, 而剪斷歪 ϕ , B 移於 B' . 則歪能之量為

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \times (\overline{BC} \cdot lq) \times (\overline{BB'}) &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \cdot lq \times \overline{AB} \cdot \phi \\
 &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot l \cdot \frac{q^2}{N} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{N} \times (\text{體積}) \dots \dots \dots (236)
 \end{aligned}$$

但 N 為材料之橫彈性係數。故均布剪內力時
歪能之式與垂直內力時之形相同。



第 145 圖

扭轉軸時，橫斷面剪內力之分布不為均一。
不能直接應用上式。今設平均半徑 r ，厚 dr ，長
 l 之筒形體，扭轉之使生彈性限界以內之剪內
力。今 dr 為甚小，故剪內力可視為平均分布。
因之由 (236) 式，

$$\begin{aligned} \text{歪能} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{N} \times (\text{體積}) = \frac{1}{2} \times \frac{q^2}{N} \times 2\pi r \cdot dr \cdot l \\ &= \frac{\pi l}{N} q^2 r \cdot dr \end{aligned}$$

但此筒形體為軸之一部，故

$$q = \frac{f_s}{R} \cdot r$$

$$\begin{aligned} \text{故 歪能全量} &= \frac{\pi l f_s^2}{N R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi l f_s^2 R^2}{4 N} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{f_s^2}{N} \times (\text{體積}) \dots \dots \dots (237) \end{aligned}$$

若中空軸時，則

$$\begin{aligned} \text{歪能全量} &= \frac{\pi l f_s^2}{N R^2} \int_{R_0}^R r^3 dr = \frac{\pi l f_s^2}{4 N R^2} (R^4 - R_0^4) \\ &= \frac{R^2 + R_0^2}{R^2} \times \frac{1}{4} \times \frac{f_s^2}{N} \times (\text{體積}) \dots \dots \dots (238) \end{aligned}$$

若上二式中 f_s 表彈性限界處剪內力時，則上二式表最大彈性歪能。

求軸之歪能之別法可由扭轉能率 T 及扭角 θ 以計算之。蓋彈性限界內扭轉時所費之功爲

$$\frac{1}{2} \cdot T \cdot \theta \dots \dots \dots (239)$$

以 § 48 及 § 49 之 (76), (77) 公式代入之，可得上之結果。

對於圓形以外諸斷面可同法求之。

96. 樑因剪作用所起之撓屈. 樑之撓屈, 自彎曲能率外, 單純彎曲以外之水平樑, 尚因垂直之剪內力而生撓屈.

例如長 l 之突出樑, 一端受荷重 W 之作用. 若剪力 $F (= W)$ 均布於橫斷面, 則自由端因剪斷所生撓屈為

$$l \times (\text{剪斷歪之角度})$$

$$\text{或} \quad \phi \cdot l = \frac{q}{N} \cdot l = \frac{Wl}{AN}$$

但 A 為橫斷面積. 若斷面為矩形, 其寬為 b , 高為 h , 則對於均布剪內力, 撓屈為

$$\frac{Wl}{bhN}$$

但由 § 40, 剪內力並非均布於樑之橫斷面. 中性面上為極大, 最上側與最下側為極小. 因之撓屈尚較 $\frac{Wl}{AN}$ 為大. 但其值較彎曲能率所生之撓屈為甚小. 今設剪內力分布如 § 40 所示, 而就數例計算如下.

(a) 一端受荷重之矩形斷面突出樑. 今設

一薄層，長 l ，寬 b ，厚 dy 。與中性面平行，距中性面為 y 。則其剪斷歪能為

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{N} \cdot bl \cdot dy$$

但由 § 40,

$$q = \frac{6F}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

而 $F = W$ ，故

$$q^2 = \frac{36 W^2}{b^2 h^6} \left(\frac{h^4}{16} + y^4 - \frac{h^2 y^2}{2} \right)$$

因之，

$$\begin{aligned} \text{歪能全量} &= \frac{bl}{2N} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} q^2 \cdot dy \\ &= \frac{18 W^2 l}{N b h^6} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2 y^2}{2} + y^4 \right) \cdot dy \dots (239) \end{aligned}$$

或

$$= \frac{36 W^2 l}{N b h^6} \left(\frac{y h^4}{16} - \frac{y^3 h^2}{6} + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^{\frac{h}{2}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{W^2 l}{N b h}$$

若 δ 為自由端因剪斷所生之撓屈，則

$$\frac{1}{2} \cdot W \delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{W^2 l}{N b h}$$

$$\text{因之, } \delta = \frac{6}{5} \cdot \frac{Wl}{Nbh} = \frac{6}{5} \times \left(\frac{q \text{ 之平均值}}{N} \right) \times (l) \dots \dots (240)$$

此值較均布剪內力時之撓屈大 20%。

若長 l 之支持樑，受中央荷重 W ，則上式中以 $\frac{l}{2}$ 代 l ， $\frac{W}{2}$ 代 W 即可。其因剪斷所生撓屈為

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{Wl}{Nbh} \dots \dots \dots (241)$$

此樑因彎曲與剪斷所生二種撓屈之總量為

$$\frac{Wl^3}{48EI} + \frac{3}{10} \cdot \frac{Wl}{Nbh} = \frac{Wl^3}{4Ebh^3} \left\{ 1 + \frac{6}{5} \cdot \frac{E}{N} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right\} \dots \dots (242)$$

(b) 圓形斷面。若圓形斷面之突出樑，則由 § 40,

$$q = \frac{4F}{3\pi R^2} \cos^2 \theta$$

$$\text{但 } y = R \sin \theta, z = 2R \cos \theta, dy = R \cos \theta \cdot d\theta$$

因之，

$$\begin{aligned} \text{歪能全量} &= 2 \cdot \frac{l}{2N} \cdot \frac{16W^2}{9\pi^2 R^4} \cdot 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta \cdot d\theta \\ &= \frac{5}{9} \cdot \frac{W^2 l}{\pi N R^2} = \frac{1}{2} W\delta \end{aligned}$$

$$\text{故 } \delta = \frac{10}{9} \cdot \frac{W}{\pi R^2} \cdot \frac{l}{N} = \frac{10}{9} \times \frac{q \text{ 之平均值}}{N} \times l \dots (243)$$

撓屈總量爲

$$\frac{Wl^3}{3EI} + \frac{10}{9} \cdot \frac{W}{\pi R^2} \cdot \frac{l}{N} = \frac{64Wl^3}{3\pi d^4 E} \left\{ 1 + \frac{5}{24} \cdot \frac{E}{N} \cdot \left(\frac{d}{l} \right)^2 \right\} \dots (244)$$

若爲支持樑，則

$$\frac{4Wl^3}{3\pi d^4 E} \left\{ 1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{E}{N} \left(\frac{d}{l} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots (245)$$

97. 用歪能可解決之問題。普通物體在平衡狀態時，外力之代數和及外力能率之代數和各爲零。因之未知量之數若在條件數以上時，問題爲不定，而可生無數解答。但不定之自然現象當變化時，使所費功量爲最小而變化。此法則由實驗上而得，稱曰最小功法則 (principle of least work)。由此法則可解決不定問題。即設物體生某種歪時，由此算出其物體內所貯蓄之歪能。今設使全歪能之量爲最小時而生歪，可解決問題。舉例如下。

今水平支持不變形矩形板之四隅，置某重量於板上，則支持力之值有四種，不能由平衡條

件求之。

若支點均爲剛性，不生變形，則此問題全屬不定。今若支點皆爲彈性，而可生歪，則由歪能全量爲最小之法則，可算出各支持力。

第146圖上 $PQES$ 處支持力設各爲 W_1, W_2, W_3, W_4 ，則

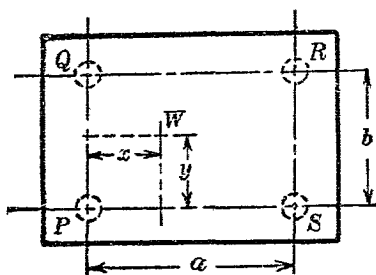
$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = W \dots\dots\dots(246)$$

但板設無重量，而荷重爲 W 。對於 PQ 線取能率，則

$$Wx = (W_3 + W_4)a \dots\dots\dots(247)$$

對於 PS 線取能率，則

$$Wy = (W_2 + W_3)b \dots\dots\dots(248)$$



第 146 圖

若各支點之歪皆為彈性歪，則四支點即四個之脚所貯蓄歪能全量如下。設長各為 l ，其橫斷面積各為 A 時，

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{1}{E} \times \left(\frac{W_1^2}{A^2} + \frac{W_2^2}{A^2} + \frac{W_3^2}{A^2} + \frac{W_4^2}{A^2} \right) \times Al$$

故視 W_1 為變數，則歪能為最小之條件為

$$\frac{dU}{dW_1} = 0$$

$$\text{即 } W_1 + W_2 \cdot \frac{dW_2}{dW_1} + W_3 \cdot \frac{dW_3}{dW_1} + W_4 \cdot \frac{dW_4}{dW_1} = 0 \dots (249)$$

由 (246), (247), (248) 及 (249) 之四式，可求 W_1 , W_2 , W_3 及 W_4 。

$$\text{由 (247), } W_4 = W \frac{x}{a} - W_3$$

$$\text{由 (248), } W_2 = W \frac{y}{b} - W_3$$

代入於 (246),

$$W_1 + W \frac{y}{b} - W_3 + W_3 + W \frac{x}{a} - W_3 = W$$

$$\text{或 } W_1 - W_3 + W \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} \right) = W$$

因之，

$$\left. \begin{aligned}
 W_3 &= W_1 + W \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1 \right) \\
 W_4 &= W \cdot \frac{x}{a} - W_1 - W \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1 \right) \\
 &= W \left(1 - \frac{y}{b} \right) - W_1 \\
 W_2 &= W \cdot \frac{y}{b} - W_1 - W \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1 \right) \\
 &= W \left(1 - \frac{x}{a} \right) - W_1
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (250)$$

此式對於 W_1 取微分, 則 W 爲常數, 故

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dW_3}{dW_1} &= +1 \\
 \frac{dW_4}{dW_1} &= -1 \\
 \frac{dW_2}{dW_1} &= -1
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (251)$$

代入於 (249),

$$\begin{aligned}
 W_1 + W_1 - W \left(1 - \frac{x}{a} \right) + W_1 + W \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1 \right) \\
 + W_1 - W \left(1 - \frac{y}{b} \right) = 0
 \end{aligned}$$

或
$$4W_1 = W \left(3 - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} \right)$$

即
$$W_1 = W \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} \right) \dots\dots\dots (252)$$

故
$$W_2 = W \left(1 - \frac{x}{a} \right) - W \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} \right)$$

$$= W \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} \right) \dots\dots\dots (253)$$

$$W_3 = W \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} \right) + W \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1 \right)$$

$$= W \left(\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - \frac{1}{4} \right) \dots\dots\dots (254)$$

$$W_4 = W \left(1 - \frac{y}{b} \right) - W \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} \right)$$

$$= W \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} \right) \dots\dots\dots (255)$$

若重量置於四腳中央，則各支持力相等，而皆為 $\frac{1}{4}W$ 。上式中 $x = \frac{a}{2}$ ， $y = \frac{b}{2}$ 即得。

又若置於一脚上，例如置於 P 處，則 $x=0$ ， $y=0$ 。

故
$$W_1 = \frac{3}{4}W$$

$$W_2 = W_4 = \frac{1}{4}W$$

$$W_3 = -\frac{1}{4}W$$

R 脚受拉力。若各脚固定於下,可得此狀態。若非固定,僅放置時,則無拉力作用,故僅以三脚支持。可用普通解法求之。

第 十 五 章

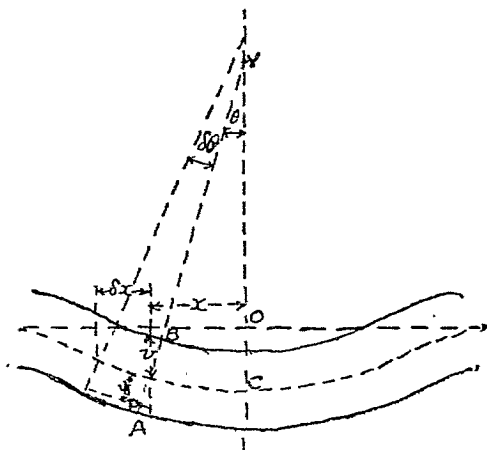
平 面 板

98. 平面板。平面板支持於邊緣而受垂直外力，平面生屈曲。其研究法與直樑相似。但彎曲不皆在一平面或非平行於一平面，而可在板之任何垂直平面中。

圓板受對稱荷重時，理論最簡單，且最為實用。其邊緣或固着或支持。

99. 圓板之內力與歪。今設平面板厚度較直徑甚小，且荷重為對稱。故內力與歪對於通過中心之垂直軸亦為對稱。板可視為水平，而荷重為垂直。板中垂直線當變形後，可視為仍為直線，而傾斜於垂直軸。同半徑處垂直線之變形後傾斜，由對稱條件可知其相同。且必與垂直軸同交於一點。如第147圖上 COV 為軸之

圓筒面變形後成爲圓錐面。設任一點 P 當變形前離中心垂直軸爲 x ，該點離板之中央面爲 y ，向下者取爲正。半徑 x 處垂直線當變形後之傾斜設爲 θ 。設 e_x 及 p_x 爲半徑方向之歪與內力， e_z 及 p_z 爲圓周之歪與內力，而拉內力視爲正。



第 147 圖

變形後，半徑與圓周方向上，凹側受壓縮，凸側受拉伸。中央平面則不生歪而爲中性面。 P 處半徑增加爲 $x + \theta y$ 。故離中性面 y 處之圓周歪爲

$$e_x = \frac{2\pi(x + \theta y) - 2\pi x}{2\pi x} = \frac{\theta y}{x}$$

若 $\rho = \frac{x}{\theta}$, 則 $e_x = \frac{y}{\rho}$. 但 ρ 為 P 點在通過 BV 而垂直於 BVO 面之平面內之曲率半徑. 半徑 $x + \delta x$ 處對於垂直位置之傾斜設為 $\theta + \delta\theta$, 則距中央面 y 處之 δx 增加而為 $\delta x + y\delta\theta$. 故半徑方向之歪為

$$e_x = y \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

若 $\rho' = \frac{dx}{d\theta}$, 則 $e_x = \frac{y}{\rho'}$. 但 ρ' 為 BVC 平面內之曲率半徑. 今軸向之主內力為零, 故由 §77,

$$e_x = \frac{\theta y}{x} = \frac{1}{E} \left(p_x - \frac{p_x}{m} \right) \dots \dots \dots (256)$$

$$e_x = y \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{E} \left(p_x - \frac{p_x}{m} \right) \dots \dots \dots (257)$$

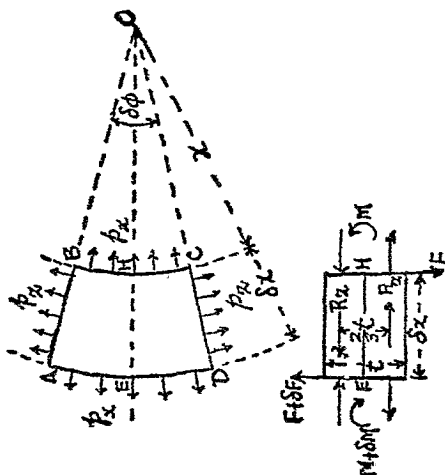
解此聯立方程式, 得

$$p_x = \frac{Em}{m^2 - 1} \cdot y \left(m \frac{\theta}{x} + \frac{d\theta}{dx} \right) \dots \dots \dots (258)$$

$$p_x = \frac{Em}{m^2 - 1} \cdot y \left(\frac{\theta}{x} + m \frac{d\theta}{dx} \right) \dots \dots \dots (259)$$

由此知 AB 斷面上半徑與周圍兩方向之內力之強與自中性面距離 y 成比例。與樑之彎曲內力之強相同。

今就第 148 圖上一微小部分之平衡考察之。圖之上部爲水平斷面，在中性面下方。故 p_x 與 p_z 爲拉內力。而中性面上方之內力爲壓內力。



第 148 圖

(1) 微小部分上周圍內力之合成力。 AB , CD 面上 p_x 對於中央半徑線 OHE 之傾斜爲

$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta\phi}{2}\right)$. 各側面微小面積 δa 上作用之力為 $p_z \cdot \delta a$. 分解之為平行及垂直於 BH . 垂直分力之合力為零, 蓋 AB, CD 兩面上垂直分力相等而反向故也. 平行於 BH 之力為

$$2p_z \cdot \delta a \cdot \sin \frac{\delta\phi}{2} = p_z \cdot \delta a \cdot \delta\phi$$

中性面兩側之 p_z 有反對符號. 故平行於 BH 之分力之合力亦為零. 對於中性面上垂直於 OH 之軸, 上之偶力之總能率為

$$\delta\phi \Sigma(y \cdot p_z \cdot \delta a)$$

但就 AB 或 CD 面上取其總和. 由 (258) 式得

$$\delta\phi \cdot \frac{Em}{m^2 - 1} \left(m \frac{\theta}{x} + \frac{d\theta}{dx} \right) \Sigma(y^2 \cdot \delta a) \dots \dots \dots (260)$$

若 t 為板之厚度, 則 $\Sigma(y^2 \cdot \delta a)$ 為矩形 AB 之慣性能率, 即等於 $\frac{1}{12} \cdot \delta x \cdot t^3$. 而周圍內力對於垂直於 BH 之軸之能率為

$$\frac{1}{12} \cdot \delta x \cdot \delta\phi \cdot t^3 \cdot \frac{Em}{m^2 - 1} \left(m \frac{\theta}{x} + \frac{d\theta}{dx} \right) \dots \dots \dots (260a)$$

上之能率又可書為

$$R_z \times \frac{2}{3}t \dots\dots\dots(261)$$

但 $R_z = \delta\phi \Sigma(p_x \cdot \delta a)$, 即中性面一側 EO 方向之總內力, 由 AB 及 DC 面上周圍內力所生. 而 $\frac{2}{3}t$ 為拉力中心與壓力中心間偶力之臂. 若 θ 為正, 即圓錐頂點 V 在板上方, 而 $\frac{d\theta}{dx}$ 為正, 即板向下凸出, 則 (260a) 之值自 DC 側視之為反時針方向.

(II) 微小部分上半徑內力之合成力. BC 面上微小部分 δa 上作用之力分解為平行於 EH , 則略為

$$p_x \cdot \delta a$$

BC 面上半徑內力之總和為零, 中性面兩側內力為反對方向, 合成力為偶力. 其能率為

$$\Sigma(p_x \cdot y \cdot \delta a)$$

但就 BC 面上取總和. 而 BC 面之面積為 $t \cdot x \cdot \delta\phi$. 由 (259) 式得

$$M = \frac{E m}{m^2 - 1} \left(\frac{\theta}{x} + m \frac{d\theta}{dx} \right) \Sigma(y^2 \cdot \delta a)$$

$$= \frac{x \cdot \delta\phi \cdot t^3}{12} \cdot \frac{Em}{m^2 - 1} \left(\frac{\theta}{x} + m \frac{d\theta}{dx} \right) \dots \dots \dots (262)$$

同樣 AD 面上能率 $M + \delta M$ 亦可以 $x + \delta x$ 及 $\theta + \delta\theta$ 表之。 M 與 $M + \delta M$ 之相差 δM 爲 $\frac{dM}{dx} \cdot \delta x$ 。 其值由 (262) 取微分而得

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{\delta x \cdot \delta\phi \cdot t^3 \cdot Em}{m^2 - 1} \left(\frac{d\theta}{dx} + m \frac{d^2\theta}{dx^2} + m x \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \right) \dots \dots (263)$$

若 θ 與 $\frac{d\theta}{dx}$ 爲正，則 (262) 式之 M 爲反時針方向，與 (260a) 相一致。 今若 $\frac{dM}{dx}$ 亦爲正，即 M 與 x 同增加，則 AD 面之時針向能率 $M + \delta M$ 大於 BC 面上反時針向能率。 而 (263) 爲時針向能率，與 (260a) 之能率相反對。

(260a) 及 (263) 所示偶力之合力必與外力平衡。 此外力即荷重與反作用力是也。 今就各例論之。

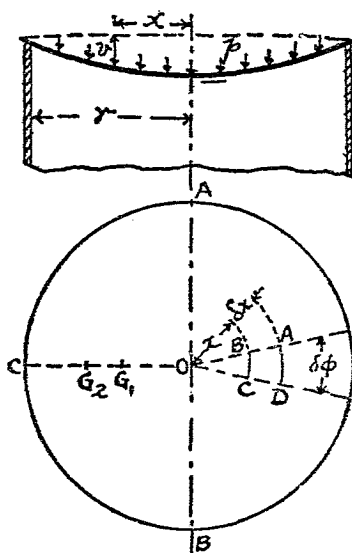
100. 周緣支持而面上受均布壓力之圓板。 設 p 爲板之單位面積上均布壓力， r 爲圓板半徑， t 爲板之厚度。 第 149 圖上半徑 x 處同心圓

部分之垂直外力爲 $p \cdot \pi x^2$ ，故該圓所成垂直圓筒面上受 $p\pi x^2$ 之剪力。而第 148 或 149 圖上 BC 面之垂直剪力爲

$$F = p\pi x^2 \times \frac{\delta\phi}{2\pi} = \frac{px^2}{2} \cdot \delta\phi$$

同樣 AD 面上之剪力 $F + \delta F$ 爲

$$\frac{p}{2}(x + \delta x)^2 \delta\phi$$



第 149 圖

對於中性面內垂直於 EH 之軸 (第 148 圖), 外力之能率近似值爲

$$F \cdot \delta x = \frac{px^2}{2} \cdot \delta\phi \cdot \delta x \dots\dots\dots(264)$$

由 DC 側視之爲時針方向。

就微小部 $ABCD$ 之平衡言之, 則 (264) 之能率與 (260a) 及 (263) 之能率相平衡。故

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{Emt^3}{m^2-1} \cdot \delta x \cdot \delta\phi \left\{ \left(m \frac{\theta}{x} + \frac{d\theta}{dx} \right) - \left(mx \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} + m \frac{d\theta}{dx} \right) \right\} \\ - \frac{px^2}{2} \cdot \delta\phi \cdot \delta x = 0$$

或以 $\frac{Em^2t^3}{12(m^2-1)} \cdot \delta x \cdot \delta\phi$ 除之, 得

$$x \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{x} = - \frac{6(m^2-1)p}{Em^2t^3} x^2 \dots\dots(265)$$

此與 § 62 之 (j) 式同形, 其解如下:

$$\frac{\theta}{x} = A + \frac{B}{x^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot x^2 \dots\dots(266)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = A - \frac{B}{x^2} - \frac{9}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot x^2 \dots\dots(267)$$

積分常數 A, B 可自中央與周緣之條件定之。在

中心則 $x=0$, $\theta=0$. 故由 (266) 式 $B=0$. 在邊緣則 $x=r$, $p_x=0$. 將 (266) 及 (267) 代入 (259), 得

$$0 = \frac{\theta}{x} + m \frac{d\theta}{dx} = A(m+1) - (3m+1) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot r^2$$

$$\therefore A = \frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)pr^2}{Em^2t^3}$$

以此代入, 則 (266) 及 (267) 爲

$$\frac{\theta}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - x^2 \right) \dots \dots \dots (268)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - 3x^2 \right) \dots \dots \dots (269)$$

故由 (258), 則周圍內力之強爲

$$p_x = \frac{3}{4} \cdot \frac{py}{mt^3} \left\{ (3m+1)r^2 - (m+3)x^2 \right\} \dots \dots \dots (270)$$

又由 (259), 則半徑內力之強爲

$$p_x = \frac{3}{4} \cdot \frac{py}{mt^3} (3m+1)(r^2 - x^2) \dots \dots \dots (271)$$

此二種內力當中心即 $x=0$ 時, 在板之兩側, 即

$y = \pm \frac{t}{2}$ 處爲極大. 其值爲

$$(\max.) p_x = (\max.) p_x = \pm \frac{3pr^2}{8t^2} \cdot \frac{3m+1}{m} \dots \dots \dots (272)$$

若 $m=3$, 則

$$(\max.) p_x = (\max.) p_z = \frac{5}{4} p \frac{r^2}{t^2} \dots\dots\dots (272a)$$

若 $m=4$, 則

$$(\max.) p_x = (\max.) p_z = \frac{39}{32} p \frac{r^2}{t^2} \dots\dots\dots (272b)$$

若 r 與 t 之單位相同, 例如吋, 則內力之強 p_x 與 p_z 之單位與 p 相同, 例如磅/平方吋。

由 (268) 與 (269), 則

$$e_z = y \cdot \frac{\theta}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)py}{Em^2t^3} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - x^2 \right) \dots\dots (273)$$

$$e_x = y \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)}{Em^2t^3} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - 3x^2 \right) \dots\dots (274)$$

$x=0$, $y = \pm \frac{t}{2}$ 處均為極大。其值為

$$\begin{aligned} (\max.) E \cdot e_x &= (\max.) E \cdot e_z \\ &= \pm \frac{3}{8} \cdot \frac{(m-1)(3m+1)}{m^2} \cdot p \cdot \frac{r^2}{t^2} \dots\dots\dots (275) \end{aligned}$$

若 $m=3$, 則 $(\max.) E e_x = (\max.) E e_z = \frac{5}{6} \cdot p \cdot \frac{r^2}{t^2} \dots\dots (275a)$

若 $m=4$, 則 $(\max.) E e_x = (\max.) E e_z = \frac{117}{128} \cdot p \cdot \frac{r^2}{t^2} \dots\dots (275b)$

半徑 x 處平均剪力強為 $F \div t \cdot x \cdot \delta\phi$, 或

$$p\pi x^2 \div 2\pi xt = \frac{px}{2t}$$

若其分布如矩形斷面直樑時之變化，則中央面 $y=0$ 處有極大強度，其值為平均值之 $\frac{3}{2}$ 。故為

$\frac{3}{4} \cdot \frac{px}{t}$ 。而其最大值在周緣，即 $x=r$ 處。此時其值為 $\frac{3}{4} \cdot \frac{pr}{t}$ 。

設半徑 x 處板之中性面自原位置之撓屈為 v ，則 $-\frac{dv}{dx} = \tan \theta$ 。傾斜與撓屈為甚小時，則近似為

$$-\frac{dv}{dx} = \theta = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 x - x^3 \right) \dots (276)$$

$$\therefore v = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \left(\frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C \right) \dots (277)$$

$x=r$ 時， $v=0$ 。故

$$C = -\frac{r^4}{4} \cdot \frac{5m+1}{m+1}$$

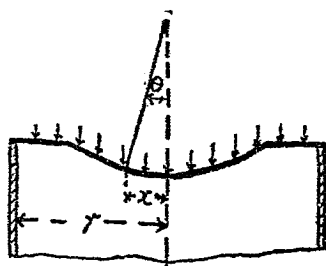
故
$$v = -\frac{3}{8} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{5m+1}{m+1} \cdot \frac{r^4}{2} \right) \dots (278)$$

中心 $x=0$ 處, 撓屈為極大, 其值為

$$\frac{3}{16} \cdot \frac{(m-1)(5m+1) \cdot pr^4}{m^2 Et^3} \dots \dots \dots (279)$$

若 $m=3$, 則為 $\frac{2}{3} \cdot \frac{pr^4}{Et^3} \dots \dots \dots (279a)$

101. 周緣固着, 一面受均布壓力之圓板. 水平圓板固着其周緣於水平方向時, 其對於周緣支持圓板之關係與固着樑及支持樑之關係相同. 上節 (266) 與 (267) 以前諸式均可成立.



第 150 圖

今 $x=0$, 則 $\theta=0$. 故 $B=0$. 周緣上 $x=r$, 則 $\theta=0$
故由 (266),

$$A = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot r^2$$

代入於(266)與(267), 得

$$\frac{\theta}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot (r^2-x^2) \dots\dots\dots (280)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot (r^2-3x^2) \dots\dots\dots (281)$$

代入於(258), (259), 得

$$p_x = \frac{3}{4} \cdot \frac{py}{mt^3} \left\{ (m+1)r^2 - (m+3)x^2 \right\} \dots\dots\dots (282)$$

$$p_x = \frac{3}{4} \cdot \frac{py}{mt^3} \left\{ (m+1)r^2 - (3m+1)x^2 \right\} \dots\dots\dots (283)$$

此二種內力在中央 $x=0$ 與周緣 $x=r$ 處, 在板之兩側, 達其正負符號之極大值. 彎曲內力之最大值之強為周緣之半徑內力. 若 $x=r$, 則

$$p_x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{pyr^2}{t^3} \dots\dots\dots (284)$$

$y = \pm \frac{t}{2}$ 時,

$$(\max.) p_x = \mp \frac{3}{4} \cdot \frac{r^2}{t^2} \cdot p \dots\dots\dots (285)$$

當 $x=0, y = \pm \frac{t}{2}$ 時,

$$p_x = p_y = \frac{3}{8} \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{r^2}{t^2} \cdot p \dots\dots\dots (286)$$

最大歪起於 $x=r$ 處半徑方向之歪。 $x=r$,
 $y=\pm\frac{t}{2}$ 時,

$$(\max.)e_x = \pm y \cdot \frac{d\theta}{dx} = \mp \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2-1}{Em^2} \cdot \frac{r^2}{t^2} \cdot p \dots (287)$$

$x=0$ 處符號相反, 而其值爲上之半。 且 e_x 與 e_z
 有同值。 又

$$-\frac{dv}{dx} = \theta = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} (r^2x - x^3) \dots (288)$$

$$\therefore v = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \left(\frac{r^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C \right) \dots (289)$$

$x=r$ 時, $v=0$ 。 故 $C = -\frac{r^4}{4}$ 。

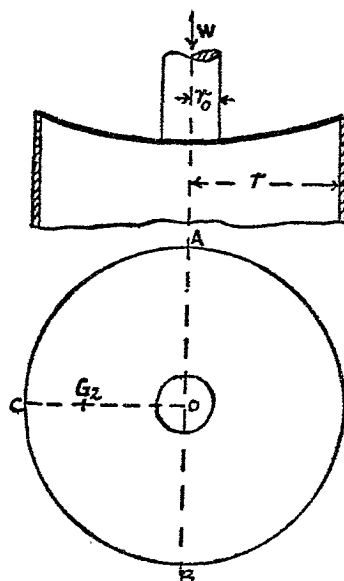
$$\therefore v = \frac{3}{16} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot (r^2 - x^2)^2 \dots (290)$$

中心 $x=0$ 時有極大值。 其值爲

$$\frac{3}{16} \cdot \frac{(m^2-1)}{Em^2t^3} \cdot pr^4 \dots (290a)$$

若 $m=3$, 則爲 $\frac{1}{6} \cdot \frac{pr^4}{Et^3} \dots (290b)$

102. 周緣支持, 中央受荷重之圓板。 若荷
 重集中於板之中心一點, 則材料爲完全彈性時,



第 151 圖

板之中心上內力與歪為無限大。故中心上集中荷重假定其均布於半徑 r_0 之同心小圓內。如第 151 圖所示。設 W 為全荷重，受荷重部分之每單位面積上均布荷重設為 p ，則

$$p = \frac{W}{\pi r_0^2}$$

§100 之 (265) 式之解為

$$\frac{\theta}{x} = A + \frac{B}{x^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)W}{Em^2t^3\pi r_0^2} \cdot x^2 \dots \dots \dots (291)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = A - \frac{B}{x^2} - \frac{9}{4} \cdot \frac{(m^2-1)W}{Em^2t^3\pi r_0^2} \cdot x^2 \dots \dots \dots (292)$$

對於受荷部以外之部分，則第 148 圖上微小部分 $ABCD$ 之外力能率爲

$$F \times \delta x = \frac{pr_0^2}{2} \cdot \delta\phi \cdot \delta x$$

故對於此部分，§100 之 (265) 式爲

$$x \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{x} = - \frac{6(m^2-1)W}{\pi Em^2t^3} = \text{常數} \dots \dots (293)$$

其解爲

$$\frac{\theta}{x} = C + \frac{D}{x^2} - \frac{3(m^2-1)W}{\pi Em^2t^3} \log_e x \dots \dots \dots (294)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = C - \frac{D}{x^2} - \frac{3(m^2-1)W}{\pi Em^2t^3} (\log_e x + 1) \dots \dots (295)$$

常數 A, B, C, D 由下之四條件定之。

- (a) $x=0$ 則 $\theta=0$ ，故 (291) 式中 $B=0$ 。
- (b) $x=r_0$ 則 (291) 與 (294) 兩式之 θ 相同。
- (c) $x=r_0$ 則 (292) 與 (295) 兩式之 $\frac{d\theta}{dx}$ (曲率) 相同。

上之三條件，當板之邊緣或固着或支持，均可成立。對於支持邊緣，則第四條件為

(d) $x=r$ 時, $p_x=0$. 故由 (259) 式,

$$\frac{\theta}{x} + m \frac{d\theta}{dx} = 0$$

由 (b), (c), (d) 三條件, 得

$$A = \frac{3(m^2-1)W}{\pi E m^2 t^3} \cdot \left(\frac{m}{m+1} + \log_e \frac{r}{r_0} - \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{r_0^2}{4r^2} \right)$$

$$C = \frac{3(m^2-1)W}{\pi E m^2 t^3} \cdot \left(\frac{m}{m+1} + \log_e r - \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{r_0^2}{4r^2} \right)$$

$$D = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)W r_0^2}{\pi E m^2 t^3}$$

將此代入於 (291), (292), (293), (294), (295) 諸式並由 §99 之 (258), (259) 及 e_z, e_x 諸式, 可求板中任何部分之內力與歪。其最大值起於中心。

$x=0, y=\pm \frac{t}{2}$ 處,

$$\begin{aligned} (\max.) p_x &= (\max.) p_x = \frac{E m y}{m^2 - 1} (m+1) A \\ &= \pm \frac{3(m+1)W}{2\pi m t^2} \cdot \left(\frac{m}{m+1} + \log_e \frac{r}{r_0} - \frac{(m-1)}{(m+1)} \cdot \frac{r_0^2}{4r^2} \right), \quad (296) \end{aligned}$$

若 $r_0=r$, 則與 (272) 式相一致. 若 $\frac{r_0}{r}$ 甚小時, 上式最後之項可略去之, 而 r_0 漸趨近於零時, $\log_e \frac{r}{r_0}$ 漸為無限大.

103. 周緣固着, 中央受荷重之圓板. 上節中第四條件為 $x=r$, 則 $\theta=0$. 故

$$A = \frac{3(m^2-1)W}{\pi E m^2 t^3} \left(\log_e \frac{r}{r_0} + \frac{r_0^2}{4r^2} \right)$$

$$C = \frac{3(m^2-1)W}{\pi E m^2 t^3} \left(\log_e r + \frac{r_0^2}{4r^2} \right)$$

$$D = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)W r_0^2}{\pi E m^2 t^3}$$

由此可求各部分之內力與歪. $x=0$, $y=\pm \frac{t}{2}$ 時,

$$\begin{aligned} p_x = p_z &= \frac{E m y}{m^2-1} (m+1) A \\ &= \frac{3(m+1)W}{2\pi m t^2} \left(\log_e \frac{r}{r_0} + \frac{r_0^2}{4r^2} \right) \dots\dots\dots (297) \end{aligned}$$

$\frac{r_0}{r}$ 若小時最後項可略去. $r_0=r$ 時上式與 (286)

式相一致. $x=r$ 時,

$$p_x = \frac{E m y}{m^2-1} \left[(m+1)C - (m-1) \frac{D}{r^2} \right]$$

$$-\frac{3(m^2-1)W}{\pi E m^2 t^3} \{(m+1) \log_e r + m\}]$$

$y = \pm \frac{t}{2}$ 時, 以 C, D 之值代入, 則

$$p_x = \mp \frac{3}{2} \cdot \frac{W}{\pi t^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{2r^2}\right) \text{ 或 } \frac{W}{\pi t^2} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{r_0^2}{r^2}\right) \dots (298)$$

若 $r_0 = r$ 則與 (285) 式相一致。

104. 對於圓板之近似方法。用下之近似方法可求對稱形板之最大彎曲內力。其法由荷重與反作用力而求對稱軸側一部分之彎曲能率。故僅適用於周緣支持之板, 不可用於固着者。

(a) 單位面積受均布荷重 p (第 149 圖)。就 ACD 半部分之板考察之。其上壓力為 $\frac{\pi r^2}{2} \cdot p$, 合成力作用線通過於重心 G_1 , 而 $OG_1 = \frac{4r}{3\pi}$ 。邊緣 ACB 反作用力亦為 $\frac{\pi r^2}{2} \cdot p$, 其作用中心為 G_2 , OG_2 為 $\frac{2r}{\pi}$ 。荷重與反作用力對於 AOB 斷面之彎曲能率為

$$M = \frac{\pi r^2}{2} \cdot p \left(\frac{2r}{\pi} - \frac{4r}{3\pi} \right) = \frac{pr^3}{3} \dots\dots\dots (299)$$

斷面 AOB 上兩外側面垂直於 AB 之彎曲內力平均強可以 AB 上斷面係數 $\frac{1}{6} \cdot 2r \cdot t^2$ 或 $\frac{1}{3} r t^2$ 除彎曲能率而求得。即

$$\frac{pr^3}{3} \div \frac{1}{3} r t^2 = p \cdot \frac{r^2}{t^2} \dots\dots\dots (300)$$

但由 §100 之 (272) 式，則 O 點之最大內力之強爲上之平均值乘以 $\frac{3}{8} \cdot \frac{3m+1}{m}$ ，或 $m=3$ 時，乘以 1.25 而得。即最大內力之強爲 $1.25 p \frac{r^2}{t^2}$ 。

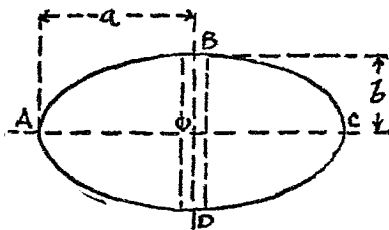
(b) 中央受荷重 W (第 151 圖)。若中央荷重 W 均布於半徑 r_0 之同心圓，則對於 AB 之能率爲

$$\frac{W}{2} \left(\frac{2r}{\pi} - \frac{4r_0}{3\pi} \right) = \frac{W}{\pi} \left(r - \frac{2r_0}{3} \right)$$

而斷面係數爲 $\frac{1}{3} r t^2$ ，故彎曲內力平均強爲

$$\frac{W}{\pi t^2} \left(3 - 2 \frac{r_0}{r} \right) \dots\dots\dots (301)$$

由 §102 之 (296), 則求最大內力強之所乘係數與 $\frac{r_0}{r}$ 有關係. 若 $\frac{r_0}{r}$ 為大, 而 $m=3$, 則近於 1.25. 若 $\frac{r_0}{r} = \frac{1}{10}$, 則其值為 2.2.



第 152 圖

105. 周緣支持, 受均布壓力之橢圓板. 第 152 圖上 $ABCD$ 為橢圓板, 支於其周圍. 最大撓屈 δ 起於中心 O , 其傾斜 θ 為零. OB 上平均傾斜為 $\frac{\delta}{b}$, 平均曲度或單位長之傾斜變化為 $\frac{\delta}{b^2}$, 而最大曲度在 O 處. 同樣 OA 間平均曲度為 $\frac{\delta}{a^2}$, 而最大在 O 點. 中心 O 上彎曲內力之強因各方向而異, 由 (259) 式, 其值與 $\frac{d\theta}{dx}$ 為比例. 若 OA , OB 上內力變化依同一法則, 則 O 點上 OB 方向

內力爲其直角方向上內力之 $\frac{a^2}{b^2}$ 倍。若 a 大於 b , O 點上 OB 方向內力較其直角方向爲大, 而爲各方向中最大者。

今設 a 爲甚大而 b 爲甚小之橢圓。若以 BD 爲中心線, 切取單位寬之狹片, 則均布壓力 p 對於 O 所生之彎曲能率爲 $\frac{1}{8}p(2b)^2$ 或 $\frac{1}{2}pb^2$ 。而斷面係數爲 $\frac{1}{6}t^2$, 故 OB 方向之彎曲內力之強爲

$$\frac{1}{2}pb^2 \div \frac{1}{6}t^2 = 3p \frac{b^2}{t^2}.$$

但實際上因受隣近諸狹片之影響, 內力之值較上尙小。而上示之值爲甚長橢圓之上限。

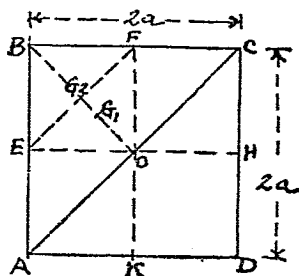
若 $a=b$, 則由 (272 a), 中心上內力爲 $1.25p \frac{b^2}{t^2}$ 。對於上述二者中間之橢圓, 則由實驗而定係數。

此係數爲 $\frac{b}{a}$ 之直線函數。 $\frac{b}{a}=0$ 時爲 $2\frac{1}{2}$, $\frac{b}{a}$ 爲

1 時爲 1.25。故彎曲內力之最大值略爲

$$1.25 \left(2 - \frac{b}{a} \right) p \cdot \frac{b^2}{t^2} \dots \dots \dots (302)$$

106. 周緣支持, 受均布壓力之方板. 第 153 圖 $ABCD$ 示方板, 沿其周緣支持. 彎曲能率可對於一對角線或垂直於邊之一對稱軸取之. 但後者周緣反動力之分布為未知, 故就對角線 AC 之斷面而論之. O 點彎曲內力之強由對稱知 OC 與 OB 方向為同一. 又 OF 與 OH 方向之內



第 153 圖

力亦由對稱知其相同. 故內力橢圓為圓. 因之彎曲內力無有過於斷面 AC 之垂直方向者. 若每邊長 $2a$, 單位面積上均布內力為 p , 則正方形半分之壓力為 $2a^2p$. BC 邊上反作用力 pa^2 之合成力必通過邊之中點 F . 同樣 AB 邊上反作用力 pa^2 必通過 E 點. 故二反作用力合成力必

通過 EF 中點 G_2 , 而 $OG_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. ABC 三角形上壓力中心必為 G_1 , 而 $OG_1 = \frac{1}{3}OB = \frac{\sqrt{2}}{3}a$. 故 AC 斷面上彎曲能率為

$$2a^2p \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}a \right) = \frac{2a^3p}{3\sqrt{2}}$$

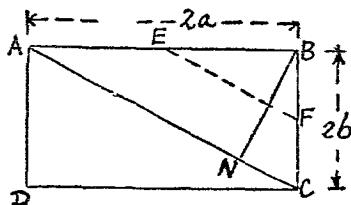
設板厚為 t , 則 AC 之斷面係數為

$$\frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{2}a \cdot t^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a \cdot t$$

故垂直於 AC 之表面彎曲內力之平均強為

$$\frac{2a^3p}{3\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{2}}{3}at^2 = p \cdot \frac{a^2}{t^2} \dots\dots\dots(303)$$

107. 周緣支持, 受均布壓力之矩形板. 第 154 圖上矩形 $ABCD$ 之 AB 與 BC 邊之長設各為



第 154 圖

2a 與 2b. 若兩邊非甚差, 則垂直於對角線 AC 之內力可視為與任何他方向之內力相等. 設 NB 垂直於 AC . AB 及 BC 兩邊之反作用力各通過中點 E 與 F . 二反作用力合成力必通過 EF 線, 故作用點距 AC 為 $\frac{1}{2}BN$. ABC 三角形上壓力中心在其重心, 其距 AC 為 $\frac{1}{3}BN$. 而壓力與反作用力之值為 $2abp$, 故對於 AC 之彎曲能率為

$$2abp\left(\frac{1}{2}BN - \frac{1}{3}BN\right) = \frac{1}{3}ab \cdot p \cdot BN$$

$$\text{又 } \frac{BN}{BC} = \frac{AB}{AC}, \text{ 或 } BN = \frac{4ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

AC 斷面之斷面係數為

$$\frac{1}{6} \times 2\sqrt{a^2+b^2} \times t^2 = \frac{t^2}{3} \sqrt{a^2+b^2}$$

故垂直於 AC 之彎曲內力之平均強為

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot p \div \frac{t^2}{3} \sqrt{a^2+b^2} = \frac{2a^2}{a^2+b^2} \cdot p \cdot \frac{b^2}{t^2} \dots\dots (304)$$

若甚長矩形, 則 $\frac{a}{b}$ 甚大, 上式漸近於 $2p \cdot \frac{b^2}{t^2}$.

問 題

1. 直徑 20 吋厚 $\frac{3}{4}$ 吋之圓板, 支持於周緣. 若內力之強不過於 10,000 磅/吋² 時, 則該板可耐之每平方吋上壓力幾何? (包生比 爲 0.3)
2. 上例之周緣若固着則如何?
3. 厚 $\frac{1}{2}$ 吋圓板, 支持其邊緣, 受 100 磅/吋² 之壓力, 若內力限於 5 噸/吋² 以內時, 板之最大可容直徑若干? (包生比 = 0.3).

材料強度學術名

中英對譯表

Strength of materials	…	…	材	料	強	度	學
Stress	…	…	內				力
Structure	…	…	構		造		物
Load	…	…	荷				重
Intensity of stress	…	…	內	力	之		強
Normal stress	…	…	垂	直	內		力
Direct stress	…	…	縱		內		力
Tensile stress	…	…	拉		內		力
Compressive stress	…	…	壓		內		力
Tangential stress	…	…	切	線	內		力
Shearing stress	…	…	剪		內		力
Simple stress	…	…	簡	單	內		力
Combined stress	…	…	合	成	內		力
Strain	…	…			歪		
Tensile strain	…	…	拉		伸		歪
Elongation	…	…	伸				長
Compressive strain	…	…	壓		縮		歪
Shearing strain	…	…	剪		斷		歪
Elasticity	…	…	彈				性

Elastic limit	彈	性	限	界
Elastic strain	彈	性	歪	
Permanent set	不	復	歪, 永	久 變 形
Hooke's law	呼	克	法	則
Modulus of elasticity	彈	性	係	數
Modulus of direct elasticity	縱	彈	性	係 數
Modulus of transverse elasticity	橫	彈	性	係 數
Young's modulus	楊	氏	係	數
Modulus of rigidity	剛	性	係	數
Load deformation diagram	荷	重	變 形	線 圖
Load elongation diagram	荷	重	伸 長	線 圖
Load compression diagram	荷	重	壓 縮	線 圖
Stress-strain diagram	內	力	歪	線 圖
Yield point	降	伏		點
Limit of proportionality	比	例	限	界
Limit of elasticity	彈	性	限	界
Plasticity	萎			性
Local elongation	局	部	伸	長
Ultimate strength	最	大	強	度
Breaking strength	破	壞	強	度
Test piece	試	驗		棒
Dead load	死	荷		重
Live load	活	荷		重

Repeated load	反	覆	荷	重
Alternate load	交	變	荷	重
Allowable stress	可	容	內	力
Safe working stress	安	全	內	力
Allowable load	可	容	荷	重
Safe working load	安	全	荷	重
Factor of safety	安	全		率
Shock	衝			擊
Mechanical property	機	械	的	性
Ductility	延			性
Malleability	可	鍛		性
Brittleness	脆			性
Pig iron	生			鐵
White pig iron	白	生		鐵
Gray pig iron	灰	生		鐵
Cast iron	鑄			鐵
Malleable iron	可	鍛		鐵
Wrought iron, Wrought steel	鍊	鐵,	鍊	鋼
Ingot iron, Ingot steel	鑄	鐵,	鑄	鋼
Slag	熔			滓
Longitudinal strain	縱			歪
Transverse strain	橫			歪
Poisson's ratio	包	生		比
Normal component stress ...	垂	直	分	內

Tangential component stress...	切	線	分	內	力
Inclined stress	傾	斜	內	力	
Angle of repose... ..	靜	止	角		
Shear	剪,	剪	斷		
Volumetric strain	容	積	歪		
Bulk modulus	容	積	彈	性	係
Turning moment	迴	轉	能	率	
Moment	能			率	
Energy			能		
Work			功		
Power	功			率	
Complementary shear stress ...	共	衡	剪	內	力
Simple shear	單	純	剪		
Bolt	螺	帽	釘		
Rivet	鉚		釘		
Lap joint	疊	接	縫		
Butt joint	對	接	縫		
Butt straps	縫		板		
Single shear	單		剪		
Double shear	複		剪		
Pitch	心	距,	步	距	
Beam		樑			
Reaction	反	作	用	力	
Shearing force	剪			力	

Bending	彎,	彎	曲
Bending stress	彎	內	力
Bending moment	彎	曲	能率
Moment of resistance	抵	抗	能率
Bending moment diagram	彎	曲	能率圖
Shearing force diagram	剪	力	圖
Canti-lever	突	出	樑
Supported beam	支	持	樑
Fixed beam, Built-in beam, Encastré beam	固	着	樑
Continuous beam	連	續	樑
Span	跨		徑
Concentrated load	集	中	荷重
Distributed load	分	布	荷重
Uniformly distributed load	均	布	荷重
Free end	自	由	端
Fixed end	固	着	端
Dangerous section	危	險	斷面
Simple bending	單	純	彎曲
Neutral surface	中	性	面
Neutral axis	中	性	軸
Geometrical moment of area	面積之幾何學的能率		
Moment of inertia	慣	性	能率
Skin stress	表	皮	內力

Modulus of section	斷	面	係	數
Radius of gyration	迴	轉	半	徑
Polar moment of inertia	極	慣	性	能
Planimeter	面	積	計	線
Elastic curve	彈	性	曲	線
Curvature	曲	率	半	徑
Radius of curvature	曲	率	半	徑
Slope	傾			斜
Deflection of beam	樑	之	撓	屈
Fixing moment	固	着	能	率
Theorem of three moments	三	能	率	定
Diagram	線			圖
Beam of uniform strength	均	一	強	度
Laminated spring	疊	板	彈	條
Knuckle joint	叉	接		合
Pin		釘		
Long column	長			柱
Strut		撐		
Tie rod	拉			棒
Hinged end, Rounded end	活	動	附	着
Fixed end, Flat end	固		着	端
Euler's formula	屋	伊	勒	公
Gordon-Rankine's formula	古	爾	屯	藍
Johnson's formula	江	遜	公	式

Lilly's formula...	李里公式
Axial load...	軸線荷重
Eccentric load...	偏心荷重
Eccentricity	偏心
Torsion	扭, 扭轉
Helix	螺旋
Angle of shear	歪角
Angle of twist	扭角
Polar resisting moment	極抵抗能率
Twisting moment	扭轉能率
Shaft	軸
Solid shaft	實體軸
Hollow shaft	中空軸
Crank shaft	曲柄軸
Crank effort diagram	曲柄迴轉力線圖
Shaft horse power, Brake horse power	軸馬力
Key	縱榫
Helical spring	螺旋彈條
Hoop tension, Circumferential tension	周圍張力
Spherical shell	球形殼
Cylinders	筒
Collapse	凹陷

Whitworth standard thread ...	魏垣氏標準螺絲
Sellers standard thread ...	守巒氏標準螺絲
Nut ...	釘帽
Stud ...	端入螺帽釘
Spanner ...	迴螺器
Pin joint ...	串釘接合
Forked joint ...	叉接合
Cotter joint ...	楔接合
Wedge ...	楔
Cotter ...	楔
Socket ...	承孔
Friction key ...	摩擦縱栓
Key on the flat ...	平面上縱栓
Key way ...	栓溝
Sunk key ...	嵌入縱栓
Principal plane ...	主平面
Principal stress ...	主內力
Compound stress ...	聯合內力
Principal strain ...	主歪
Elastic failure ...	彈性的破損
Equivalent simple stress ...	相當單純內力
Equivalent twisting moment ...	相當扭轉能率
Equivalent bending moment ...	相當彎曲能率

Maximum principal stress								
theory	最	大	主	內	力	說		
Maximum principal strain								
theory	最	大	主	歪	說			
Maximum shear stress theory	最	大	剪	內	力	說		
Curved beam	曲							樑
Hook							鉤	
Link							環	
Chain link	鏈							環
Catenary	懸	垂	曲					線
Suspension-bridge cable... ..	懸		橋					纜
Strain energy, Resilience ...	歪							能
Proof resilience	彈	性	歪					能
Shearing resilience... ..	剪	斷	歪					能
Principle of least work	最	小	功	法				則

編主五雲王
庫文有萬
種千一集一第
學度強料材
著鴻志陸

路南河海上
五雲王 人行發

路南河海上
館書印務商 所刷印

埠各及海上
館書印務商 所行發

版初月二十年二十二國民華中

究必印翻權作著有書此

The Complete Library

Edited by

Y. W. WONG

THE STRENGTH OF MATERIALS

BY LU CHIH HUNG

PUBLISHED BY Y. W. WONG

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.

Shanghai, China

1933

All Rights Reserved

041209

