漢譯

龍氏平面三角法

新亞書店發行

龍氏平面三角法

Loney: Plane Trigonometry

章彬 譯述

新亞書店印行

漢譯龍氏平面三角法

定價國幣
(外埠酌加寄費)

譯述者	章彬
校訂者	吳靜山
發行者	陳邦楨
印刷者	新亞書店
發行所	新亞書店 上海河南路一五九號

中華民國三十八年六月十八版

原　　序

著者頗望本書得爲初等平面三角法之完善課本，適合一般學校採用．書內較高部分，間有涉及複雜數量之近代理論者，著者於敍述時，靡不力求簡易，俾學者於開始學習較深之一章時，絕不感覺困難．

三角法含有甚多之公式，以及此等公式之應用，故於編首附一重要公式表，學者應熟記之．此等公式之尤較重要者，課文內概以粗體黑字印刷，可以一望而知．其他之僅以普通字體印刷者，多爲輔助性質或重要性較少者．

習題之題數極多，初學三角法者得選習之．

又節數前之附有星號者，初學可略．

下略．　　　　　　　　　　　　　　　　S. L. Loney.

再 版 序 言

本書於再版時業經詳愼校訂，不論課文或答案中，當不至有嚴重之謬誤．

對數及對數表等數章，已加以相當之改編，編末並增射影一章．

五 版 序 言

本版係重新排印；課文內新增材料不少，而於書末之附表中並加入弧度量法一表．

主要三角公式

I. 圓周 $=2\pi r$. (§ 12)

$\pi=3.14159\cdots\cdots\left[\text{約爲}\ \frac{22}{7}\ \text{及}\ \frac{355}{113}\right]$. (§ 13)

一 弳 $=57^\circ 17' 44.8''$ (約) (§ 16)

二直角 $=180^\circ=200^g=\pi$ 弳. (§ 19)

角 $=\dfrac{\text{弧}}{\text{半徑}}\times$ 弳. (§ 21)

II.

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1;$$

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta;$$

$$\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta. \qquad (\S\ 27)$$

III.

$$\sin 0^\circ=0; \qquad \cos 0^\circ=1. \qquad (\S\ 36)$$

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}; \qquad \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (\S\ 34)$$

$$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (\S\ 33)$$

$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 60^\circ=\frac{1}{2}. \qquad (\S\ 35)$$

$$\sin 90^\circ=1; \qquad \cos 90^\circ=0. \qquad (\S\ 37)$$

$$\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}; \qquad \cos 15^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}. \qquad (\S\ 106)$$

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}; \qquad \cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}. \qquad (\S\S\ 120,\ 121)$$

IV.

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta; \qquad \cos(-\theta)=\cos\theta. \qquad (\S\ 68)$$

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta; \qquad \cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta. \qquad (\S\ 69)$$

$$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta;\qquad \cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta.\qquad (\S\ 70)$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta;\qquad \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta.\qquad (\S\ 72)$$

$$\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta;\qquad \cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta.\qquad (\S\ 73)$$

V.

若 $\sin\theta=\sin\alpha$, 則 $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$ (§ 82)

若 $\cos\theta=\cos\alpha$, 則 $\theta=2n\pi\pm\alpha$. (§ 83)

若 $\tan\theta=\tan\alpha$, 則 $\theta=n\pi+\alpha$. (§ 84)

VI.

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.\qquad (\S\ 88)$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.\qquad (\S\ 90)$$

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}.\qquad (\S\ 94)$$

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B).$$

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B).$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B).$$

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B).\qquad (\S\ 97)$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.\qquad (\S\ 98)$$

$$\sin 2A=2\sin A\cos A.$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1.\qquad (\S\ 105)$$

$$\sin 2A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A};\qquad \cos 2A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.\qquad (\S\ 109)$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}. \qquad (\S\ 105)$$

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A.$$

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}. \qquad (\S\ 107)$$

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}; \quad \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}. \qquad (\S\ 110)$$

$$2\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1+\sin A} \pm \sqrt{1-\sin A}.$$

$$2\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1+\sin A} \mp \sqrt{1-\sin A}. \qquad (\S\ 113)$$

$$\tan(A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_n) = \frac{s_1 - s_3 + s_5 - \cdots\cdots}{1 - s_2 + s_4 - \cdots\cdots}. \qquad (\S\ 125)$$

VII.

$$\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n.$$

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.$$

$$\log_a m^n = n\log_a m. \qquad (\S\ 136)$$

$$\log_a m = \log_b m \times \log_a b. \qquad (\S\ 147)$$

VIII.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}. \qquad (\S\ 163)$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \qquad (\S\ 164)$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \cdots\cdots \qquad (\S\ 165)$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \cdots\cdots \qquad (\S\ 166)$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \cdots\cdots \qquad (\S\ 167)$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \cdots\cdots \qquad (\S\ 169)$$

$$a=b\cos C+c\cos B,\cdots\cdots \qquad (§\,170)$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2},\cdots\cdots \qquad (§\,171)$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C \qquad (§\,198)$$

IX. $$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{4S}. \qquad (§§\,200,\,201)$$

$$r=\frac{S}{s}=(s-a)\tan\frac{A}{2}=\cdots\cdots=\cdots\cdots \qquad (§§\,202,\,203)$$

$$r_1=\frac{S}{s-a}=s\tan\frac{A}{2}. \qquad (§§\,205,\,206)$$

圓之內接四邊形之面積 $=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. (§ 219)

X. 當 θ 極小時, $\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$. (§ 228)

半徑 r 之圓面積 $=\pi r^2$. (§ 233)

XI. $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots$ 至 n 項

$$=\frac{\sin\left\{\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right\}\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}. \qquad (§\,241)$$

$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots$ 至 n 項

$$=\frac{\cos\left\{\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right\}\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}. \qquad (§\,242)$$

常 數 表

一 弳 $= 57^\circ\,17'\,45''$ 約 $= 206265''$;

$\log 206265 = 5{\cdot}3144255.$

$\pi = 3{\cdot}14159265.$	$\log\pi = 0{\cdot}4971499.$
$\dfrac{1}{\pi} = 0{\cdot}31830989.$	$\log\dfrac{1}{\pi} = \bar{1}{\cdot}5028501.$
$\dfrac{\pi}{180} = 0{\cdot}01745329.$	$\log\dfrac{\pi}{180} = \bar{2}{\cdot}2418774.$
$\dfrac{180}{\pi} = 57{\cdot}2957795.$	$\log\dfrac{180}{\pi} = 1{\cdot}7581226.$
$\pi^2 = 9{\cdot}86960440.$	$\log\pi^2 = 0{\cdot}9942997.$
$\dfrac{1}{\pi^2} = 0{\cdot}10132118.$	$\log\dfrac{1}{\pi^2} = \bar{1}{\cdot}0057003.$
$\sqrt{\pi} = 1{\cdot}77245385.$	$\log\sqrt{\pi} = 0{\cdot}2485749.$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{\cdot}56418958.$	$\log\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} = \bar{1}{\cdot}7514251.$
$\sqrt[3]{\pi} = 1{\cdot}46459189.$	$\log\sqrt[3]{\pi} = 0{\cdot}1657166.$
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = 0{\cdot}68278406.$	$\log\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = \bar{1}{\cdot}8342834.$

$\sqrt{2} = 1{\cdot}4142135..$	$\sqrt{3} = 1{\cdot}7320508..$
$\sqrt{5} = 2{\cdot}2360679..$	$\sqrt{6} = 2{\cdot}4494897...$
$\sqrt{7} = 2{\cdot}6457513...$	$\sqrt{8} = 2{\cdot}8284271...$
$\sqrt{10} = 3{\cdot}1622776...$	

目　次

龍　氏

平面三角法

第一章

角之量度;六十分法,百分法,及弧度法

1. 在幾何學中以直角爲量角之單位,惟其量過大不便使用.

2. **六十分法**者,分一直角爲90等分曰**度**,分一度爲60等分曰**分**,復分一分爲60等分曰**秒**.度,分,秒以1°, $1'$, $1''$記之.

於是　60秒$(60'')$爲1分$(1')$,

60分$(60')$爲1度(1°),

90度(90°)爲1直角.

六十進與九十進雖不便於計算,但此法沿用已久,故三角法中仍採用之.

3. 因此另有**百分法**,或稱法國法者.其法分一直角爲100等分曰**百分度**,分一百分度爲100等分曰**分**,復分一分爲100等分曰**秒**.百分度,分,秒以1^g, $1^`$, $1^{``}$記之.

於是　　100 秒 (100'') 爲 1 分 (1'),

100 分 (100') 爲 1 百分度 (1^g),

100 百分度 (100^g) 爲 1 直角.

4. 此法雖較六十分法便於計算,但於應用時,一切函數表及函數對數表必須重行推算.以此尚未能施諸實用.

5. 六十分法與百分法之換算.

因一直角等於 90° 又等於 100^g,

故　$$90^\circ = 100^g.$$

$$\therefore \quad 1^\circ = \frac{10^g}{9}, \text{ 又 } 1^g = \frac{9^\circ}{10}.$$

因此,化度爲百分度,加九分之一,化百分度爲度,減十分之一.

例.　$$36^\circ = (36 + \tfrac{1}{9} \times 36)^g = 40^g,$$

又　$$64^g = (64 - \frac{1}{10} \times 64)^\circ = (64 - 6.4)^\circ = 57.6^\circ.$$

角之含有分與秒者;應先化爲度之小數,然後化爲百分度.實則計算時以先化爲直角之小數爲尤便.茲特示兩例於下:

例 1. 化 63°14′51″ 爲百分度單位.

$$51'' = \frac{17'}{20} = .85',$$

又　$$14'51'' = 14.85' = \frac{14.85^\circ}{60} = .2475^\circ,$$

$$\therefore \quad 63^\circ 14' 51'' = 63.2475^\circ = \frac{63.2475}{90} \text{ 直角}$$

$$= .70275 \text{ 直角}$$

$$= 70.275^g = 70^g 27.5' = 70^g 27' 50''.$$

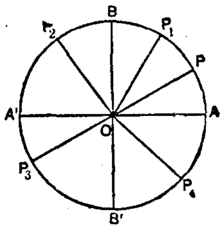
例 2. 化 $94^g 23' 87''$ 爲六十分度單位.

$$
\begin{array}{rl}
94^{g}23^{\backprime}87^{\backprime\backprime} = .942387 & 直角 \\
90 & \\
\hline
84.81483 & 度 \\
60 & \\
\hline
48.8898 & 分 \\
60 & \\
\hline
53.3880 & 秒
\end{array}
$$

$\therefore\ 94^{g}23^{\backprime}87^{\backprime\backprime} = 84^{\circ}48'53.388''.$

6. 任意角

設 AOA' 及 BOB' 兩直線正交於 O,又設一直線 OP 由 OA 開始依反時針方向繞定點 O 而轉動.此轉動之線(或稱動徑)轉至 OA 與 OB 之間如 OP_1,則得小於一直角之角 AOP_1.



此線繼續轉動至 OP_2 在 OB 與 OA' 之間,則得角 AOP_2 大於一直角.

OP_3 為 OA' 與 OB' 間之任一位置,線轉至此,則得角 AOP_3,卽 $AOB+BOA'+A'OP_3$,亦卽 2 直角 $+A'OP_3$,故所得之角大於二直角.

若轉至 OB' 與 OA 間之任一位置 OP_4,則此角大於三直角.

此線轉動一周復與 OA 相合,則已轉四直角.

倘 OP 繼續轉動第二次至 OP_1,則所得之角非復 AOP_1 而為 4 直角 $+AOP_1$.

同理,此線已轉二周,復至 OP_2,則所得之角為 8 直角 $+AOP_2$.

7. 設 OP 轉至 OA 與 OB 之間,謂為在第一象限;至 OB 與 OA' 間,則在第二象限;至 OA' 與 OB' 間,則在第三象限;至 OB' 與 OA 之間,則在第四象限.

8. **例**　一線已轉過 (1) 225°, (2) 480° (3) 1050°;問此線之位置應在何處?

(1) 因 $225°=180°+45°$, 此線已轉過二直角又 $45°$, 應在第三象限,且平分 OA' 與 OB' 所成之角.

(2) 因 $480°=360°+120°$, 此線已轉一周又 $120°$, 故在第二象限, 卽 OB 與 OA' 之間,而與 OB 成 $30°$ 之角.

(3) 因 $1050°=11\times 90°+60°$, 此線已轉過十一直角又 $60°$, 故在第四象限, 卽 OB' 與 OA 之間,而與 OB' 成 $60°$ 之角.

習題一

下列諸角, 用直角表之:

1. $60°$.　　2. $75°15'$.　　3. $63°17'25''$.

4. $130°30'$.　　5. $210°30'30''$.　　6. $370°20'48''$.

下列諸角, 用百分度之諸單位表之:

7. $30°$.　　8. $81°$.　　9. $138°30'$.

10. $35°47'15''$.　　11. $235°12'36''$.　　12. $475°13'48''$.

下列諸角,用直角及六十分度之諸單位表之:

13. 120^{g}.　　14. $45^{g}35^{\backprime}24^{\backprime\backprime}$.　　15. $39^{g}45^{\backprime}36^{\backprime\backprime}$.

16. $255^{g}8^{\backprime}9^{\backprime\backprime}$.　　17. $759^{g}0^{\backprime}5^{\backprime\backprime}$.

下列諸角,求其動徑之位置:

18. $\frac{4}{3}$ 直角.　　19. $3\frac{1}{2}$ 直角.　　20. $13\frac{1}{3}$ 直角.

21. $120°$.　　22. $315°$.　　23. $745°$.　　24. $1185°$.

25. 150^{g}.　　26. 420^{g}.　　27. 875^{g}.

28. 問時間經過 $11\frac{1}{3}$ 分鐘,則時鐘之分針與時針各轉過幾度,分,秒?

29. 直角三角形之一銳角,所含六十分度之度數等於他一銳角所含百分度之度數;此兩角試各以六十分度表之:

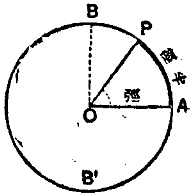
30. 求證任何角所含六十分度之分數與百分度之分數相比為 $27:50$.

31. 分 $44°8'$ 為兩分, 其一分所含六十分度之秒數等於他一分所含百分度之秒數.

弧度法

9. 弧度法為第三種量角法,高等數學中皆採用之.其單位之求法如下:

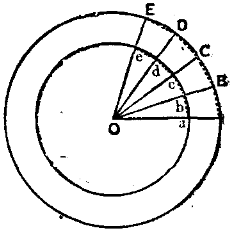
取任意圓 $APBB'$，其圓心為 O，於圓周上截取弧 AP 與半徑等長．連接 OA 與 OP．則角 AOP 為量角之單位，此單位名曰一弳，或曰弧度，以 1^c 記之．



10. 凡單位必須為定量，則弧度亦應為定量之角，玆證明於下：

11. **定理**　任一圓之圓周與其直徑之比為常數．

取任意兩同心圓其圓心為 O．作大圓之內接 n 邊正多邊形 $ABCD$……



設 $OA, OB, OC,$……交小圓於 $a, b, c, d,$……；連接 $ab, bc, cd,$……

依幾何學定理，$abcd$……為小圓之內接 n 邊正多邊形．

因 $Oa=Ob$，又 $OA=OB$，則 ab 與 AB 平行，

於是
$$\frac{AB}{ab}=\frac{OA}{Oa}.$$

次因外多邊形 $ABCD$……為正多邊形，其周界為各等邊之和，等於 $n\cdot AB$.

同理內多邊形之周界為 $n\cdot ab$．因此

$$\frac{\text{外多邊形之周界}}{\text{內多邊形之周界}}=\frac{n\cdot AB}{n\cdot ab}=\frac{AB}{ab}=\frac{OA}{Oa}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此式不論多邊形之邊數為任何值時均能成立．

設多邊形之邊數無限增加（即 n 增至無窮大），則外多邊形之周界將等於外圓之圓周，而內多邊形之周界將等於內圓之圓周．

由是式(1)變爲

$$\frac{\text{外圓圓周}}{\text{內圓圓周}}=\frac{OA}{Oa}=\frac{\text{外圓半徑}}{\text{內圓半徑}}.$$

即
$$\frac{\text{外圓圓周}}{\text{外圓半徑}}=\frac{\text{內圓圓周}}{\text{內圓半徑}}.$$

因兩圓之大小不受任何之限制,故

$$\frac{\text{任何圓之圓周}}{\text{同圓之半徑}}$$

在一切圓內均相等.

於是,圓周與半徑之比,或圓周與直徑之比,爲一定量.

12. 由上節之結果,知圓周與直徑之比爲一定量.此定量稱爲圓周率,以希臘字母 π 表之,故 π 爲一數.

故
$$\frac{\text{圓周}}{\text{直徑}}=\text{常數}\ \pi.$$

因得定理如下;圓周等於其直徑之 π 倍或半徑之 2π 倍.

13. 惜 π 之值非整數,亦非一普通之分數,故不能以有限小數或循環小數表之. π 爲一不可度量之數,其量不能以兩整數之比表出者.

其值,若準確至小數點下八位,則爲

$$3.14159265\cdots\cdots$$

分數 $\frac{22}{7}$ 有時亦用以表 π 之值,惟準確至小數點下二位,因 $\frac{22}{7}=3.14285\cdots\cdots$

若以 $\frac{355}{113}$ 表示 π,則所得之值較爲準確,以其準確至小數點下6位也; $\frac{355}{113}=3.14159203\cdots\cdots$

[附註　爲便利記憶此分數$\frac{355}{113}$起見,可將最初之連續三奇數重複寫出,爲113355;等分爲兩節,而以左節除右節,如113)355(即得.]

總之.π之近似值,如準確至小數點下二位則爲$\frac{22}{7}$,較精密之值則爲3.14159……

應用除法,得

$$\frac{1}{\pi}=.3183098862\ldots\ldots$$

14. 例1. 自行車輪之直徑爲28吋;輪轉一次,則軸行幾何?

半徑r爲14吋.

故圓周$=2\cdot\pi\cdot14=28\pi$吋.

若取$\pi=\frac{22}{7}$,則圓周$=28\times\frac{22}{7}$吋$=7$呎4吋(約).

若取較精密之值$\pi=3.1459265\ldots\ldots$,則圓周$=28\times3.14159265\ldots\ldots\ldots\ldots$吋$=7$呎$3.96459\ldots\ldots$吋.

例2. 於運動場之跑道爲圓形一運動員跑五周即得一哩,求此圓形之半徑.

圓周爲$\frac{1}{5}\times1760$,即352碼.

設r爲跑道之半徑,則$2\pi r=352$,

即
$$r=\frac{176}{\pi}\text{碼}.$$

若取$\pi=\frac{22}{7}$,則得$r=\frac{176\times7}{22}=56$碼.

若取較精密之值$\frac{1}{\pi}=.31831$,則得

$$r=176\times.31831=56.02256\text{碼}.$$

習題二

1. 若地球之半徑爲4000哩,則其周長幾何?
2. 客車車輪直徑3呎,每秒鐘轉3次,則客車之速度如何?
3. 風車翼長18呎,每分鐘轉10次,問翼尖每時行程幾何?
4. 半辨士之銅幣直徑1吋;一線繞此幣邊緣適無餘,求線長.
5. 地球繞日而行,設軌道爲一半徑92500000哩之圓,問地球每年行程幾哩?

6. 客車車輪之半徑爲1呎9吋,於$\frac{1}{5}$秒鐘內轉過80°之中心角;問輪緣上之一點每時行路幾哩?

15. 定理 弳爲一定量之角.

取第9節之圖.設弧AB之長爲一象限,即圓周之四分之一.則AB之長爲$\frac{\pi r}{2}$.

依幾何學定理,兩圓心角之比如其所對弧之比.

故
$$\frac{\angle AOP}{\angle AOB}=\frac{\widehat{AP}}{\widehat{AB}}=\frac{r}{\frac{\pi r}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

$$\therefore\quad \angle AOP=\frac{2}{\pi}\angle AOB.$$

茲命角AOP爲一弳.

則一弳 $=\frac{2}{\pi}\cdot\angle AOB$

$=\frac{2}{\pi}$直角.

今直角爲一定量之角,π復爲一常數,故弳爲一定量之角,在任何圓內均相等.

16. 弳之值

由上節,知1弳 $=\frac{2}{\pi}\times 1$直角 $=\frac{180^\circ}{\pi}$

$=180^\circ\times .3183098862\cdots\cdots=57.2957795^\circ$

$=57^\circ 17' 44.8''$ (約).

17. 因 1弳 $=\frac{2}{\pi}$直角,

故 1直角 $=\frac{\pi}{2}$弳,

因此 $180^\circ=2$直角 $=\pi$弳,

$360^\circ=4$直角 $=2\pi$弳.

由是,當動徑(第6節)旋轉一周,則得 $2\pi^c$ 之角;旋轉三周,則得 $6\pi^c$ 之角;旋轉 n 周,則得 $2n\pi^c$ 之角.

18. 實用時"c"字可以省略,故不寫"角 π^c"而寫"角 π". 惟學者於此切須留意. 凡論及角之單位,必須同時憶及"弳",庶免以 π 即爲 180° 之謬誤. 蓋 π 弳 (π^c) 乃爲 180°, 而 π 則爲一數且僅爲一數也.

19. 弧度法與六十分法及百分法之換算.

學者應熟記下列之關係:

$$\text{兩直角}=180^\circ=200^g=\pi\text{ 弳},$$

則換算僅爲一算術問題而已.

例. (1) $.45\pi^c=.45\times180^\circ=81^\circ=90^g$.

(2) $3^c=\frac{3}{\pi}\times\pi^c=\frac{3}{\pi}\times180^\circ=\frac{3}{\pi}\times200^g$.

(3) $40^\circ15'36''=40^\circ15\frac{3}{5}'=40.26^\circ$.

$$=40.26\times\frac{\pi^c}{180}=.223\dot{6}\ \pi\text{ 弳}.$$

(4) $40^g15`36``=40.1536^g=40.1536\times\frac{\pi^c}{200}$

$$=.200768\ \pi\text{ 弳}.$$

20. 例 1. 三角形之三內角成 A. P. 其最小角所含之百分度數與最大角所含之弳數相比如 $40:\pi$; 求此三角形諸內角所含之六十分度數.

設此三內角爲 $(x-y)^\circ$, x°, $(x+y)^\circ$.

因三角形三內角之和爲 180°, 故

$$180^\circ=x-y+x+x+y=3x,$$

即 $$x=60^\circ,$$

故所求之角爲 $(60-y)^\circ$, 60°, $(60+y)^\circ$.

今 $$(60-y)^\circ=\frac{10}{9}(60-y)^g,$$

又 $$(60+y)^\circ=\frac{\pi}{180}(60+y)\text{ 弳}.$$

故
$$\frac{10}{9}(60-y):\frac{\pi}{180}(60+y)::40:\pi,$$

$$\therefore\quad \frac{200}{\pi}\cdot\frac{60-y}{60+y}=\frac{40}{\pi},$$

即
$$5(60-y)=60+y,$$

即
$$y=40.$$

故所求之角為20°, 60°, 100°.

例 2. 求正十邊形之內角以三種單位表之.

依幾何學定理,凡正多邊形諸內角與四直角之和,等於與邊數相等之直角之二倍.

設正十邊形每一內角含x直角,故諸內角之和必為$10x$直角.由上述之定理,得

$$10x+4=20,$$

故
$$x=\tfrac{8}{5}\text{直角}.$$

但一直角 $=90^\circ=100^g=\dfrac{\pi^c}{2}$.

故所求之角 $=144^\circ=160^g=\dfrac{4\pi^c}{5}$.

習　題　三

下列諸角,用六十分度之諸單位表之:

1. $\dfrac{\pi^c}{3}$.　　2. $\dfrac{4\pi^c}{3}$.　　3. $10\pi^c$.　　4. 1^c.　　5. 8^c.

下列諸角,用百分度之諸單位表之:

6. $\dfrac{4}{5}\pi^c$.　　7. $\dfrac{7\pi^c}{6}$.　　8. $10\pi^c$.

下列諸角,用弳表之:

9. 60°.　　10. $110^\circ 30'$.　　11. $175^\circ 45'$.　　12. $47^\circ 25' 36''$

13. 395°.　　14. 60^g.　　15. $110^g 30^`$.　　16. $345^g 25^` 36^{``}$.

17. 直角三角形兩銳角之差為$\frac{2}{5}\pi$弳;試以度數表此兩銳角.

18. 三角形之三角其一為$\frac{2}{3}x$百分度,一為$\frac{3}{2}x$度,又其一為$\dfrac{\pi x}{75}$弳;試求三角所含之度數.

19. 三角形之兩角各為$\frac{1}{2}$與$\frac{1}{3}$弳;則第三角為幾度?

20. 三角形之三角成$A.P.$其最小角所含之度數與最大角所含弳數之比如$60:\pi$;求此三角所含之度數.

21. 三角形之三角成 $A.P.$ 其最小角所含之弳數與第二角所含之度數相比如 $1:120$; 求此三角所含之弳數.

22. 求(1)正五邊形,(2)正七邊形,(3)正八邊形,(4)正十二邊形,(5)正十七邊形之每一內角所含之弳數及度數.

23. 兩正多邊形每一內角之比為 $3:2$, 其邊數之比如 $2:1$; 求此兩正多邊形之邊數.

24. 兩正多邊形邊數之比為 $5:4$; 內角之差為 9°; 求此兩正多邊形之邊數.

25. 求兩正多邊形,其邊數之比為 $3:4$, 第一正多邊形一內角所含之度數比第二正多邊形一內角所含之百分度數為 $4:5$.

26. 四邊形之諸內角成 $A.P.$ 而最大角為最小角之二倍;求最小角所含之弳數.

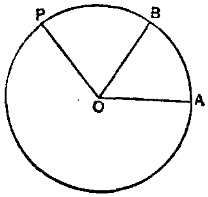
27. 時鐘之時針與分針所夾之角,以三種不同單位表之:(1)三時三十分,(2)六時缺二十分,(3)十一時十五分.

28. (1)四時與五時間,時針與分針成 78° 之角應在何時?

(2)七時與八時間,時針與分針成 54° 之角應在何時?

21. 定理 一任意角所含之弳數,等於在任何半徑所作之圓中,以對此角之弧長為分子,而以半徑為分母所得之分數.

設 AOP 為任意角,由 OA 旋轉至 OP 而成.



以 O 為圓心,任意半徑作圓,截 OA 與 OP 於 A 與 P.

設角 AOB 為一弳,則弧 AB 與半徑 OA 等長.

依幾何學定理,

$$\frac{\angle AOP}{\text{一弳}}=\frac{\angle AOP}{\angle AOB}=\frac{\text{弧}AP}{\text{弧}AB}=\frac{\text{弧}AP}{\text{半徑}}.$$

即
$$\angle AOP=\frac{\text{弧}AP}{\text{半徑}}\text{弳}.$$

此即上之定理之證.

22. 例 1. 一圓之半徑爲3呎,弧長1呎.求中心角.

中心角所含之弳數 $=\dfrac{\text{弧長}}{\text{半徑}}=\frac{1}{3}$.

故此角 $=\frac{1}{3}^{c}=\frac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{\pi}$ 直角 $=\dfrac{2}{3\pi}\times 90^{\circ}=\dfrac{60^{\circ}}{\pi}=19\dfrac{1}{11}^{\circ}$.

取 $\dfrac{22}{7}$ 爲 π 之值.

例 2. 一圓之半徑爲5呎,中心角爲 $33^{\circ}15'$,求弧長.

設弧長爲 x 呎,則

$$\frac{x}{5}=33^{\circ}15' \text{ 所含之弳數}$$

$$=\frac{33\frac{1}{4}}{180}\pi \text{ (第 19 節)}$$

$$=\frac{133}{720}\pi.$$

$$\therefore\quad x=\frac{133}{144}\pi \text{ 呎}=\frac{133}{144}\times\frac{22}{7} \text{ 呎 (約)}$$

$$=2\frac{65}{72} \text{ 呎 (約)}.$$

例 3. 地球與太陽之平均距離約爲 92500000 哩,一人在地球上見太陽所張之角爲 $32'$;求太陽之直徑.

設太陽之直徑爲 D 哩.

因太陽所張之角甚微,故太陽之直徑與以人目爲圓心作圓所截之弧無甚區別.今太陽所張之角爲 $32'$.

依第21節之定理,得

$$\frac{D}{92500000}=32' \text{ 所含之弳數}$$

$$=\frac{8}{15}^{\circ} \text{ 所含之弳數}$$

$$=\frac{8}{15}\times\frac{\pi}{180}=\frac{2\pi}{675}.$$

$$\therefore\quad D=\frac{185000000}{675}\pi \text{ 哩}$$

$$=\frac{185000000}{675}\times\frac{22}{7} \text{ 哩}$$

$$=862000 \text{ 哩 (約)}.$$

例 4. 目力正常之人能讀遠處之文字其視角不小於 $5'$ 者,則 (1) 離人 12 呎處所能閱讀之文字,其大小如何? (2) 半哩外之文字復如何?

(1) 設字高 x 呎.

x 可視作一弧,以 12 呎為半徑,而 $5'$ 為對弧之中心角.

故
$$\frac{x}{12}=5' \text{ 所含之弳數}$$
$$=\frac{1}{12}\times\frac{\pi}{180}.$$
$$\therefore\quad x=\frac{\pi}{180}\text{ 呎 }=\frac{1}{180}\times\frac{22}{7}\text{ 呎}$$
$$=\frac{1}{15}\times\frac{22}{7}\text{ 吋 }=\tfrac{1}{5}\text{ 吋 (約)}.$$

(2) 設字高 y 呎.

則
$$\frac{y}{440\times 3}=5' \text{ 所含之弳數}.$$
$$=\frac{1}{12}\times\frac{\pi}{180}.$$

故
$$y=\frac{11}{18}\pi=\frac{11}{18}\times\frac{22}{7}\text{ 呎 (約)}$$
$$=23\text{ 吋 (約)}.$$

習　題　四

[命 $\pi=3.14159\cdots\cdots$, $\frac{1}{\pi}=.31831$.]

1. 弧長為半徑之 .357 倍,求對弧之中心角之度數.

2. 一圓之半徑為 25 呎,弧長 15 呎,求對弧之中心角之度數及弳數.

3. 一刻度之圓,其邊緣上每格為 $5'$,而兩畫間相距 .1 吋,求此圓之半徑.

4. 一刻度之圓直徑為 6 呎,邊緣上每格為 $5'$,求兩畫間之距離.

5. 求一球之半徑,已知在同一經線上之兩點相距半吋時,其緯度之差為 $1°10'$.

6. 地球之半徑約 4000 哩,地面上一點在他點之北 100 哩,求兩地緯度之差.

7. 設地為一球形,地面上兩平行之緯線相距 $69\frac{1}{5}$ 哩時,則緯度相差 $1°$,求地球之半徑.

8. 一圓之半徑爲3呎,弦長亦爲3呎,則弧長約爲幾何?

9. 兩圓周上截取等長之弧.而對弧之中心角一爲60°,一爲75°,求此兩圓半徑之比.

10. 直徑8呎之圓周上截取10呎長之弧,此弧所對之中心角爲143°14′22″,求π之值至小數點下四位.

11. 分圓周爲五分使成等差級數,其最長一段爲最短一段之6倍,求各段所對中心角所含之弳數.

12. 一扇形之周等於等圓周長之半,求扇形之角之度數.

13. 一6呎高之人,張10′之角,則此人距測處幾呎?

14. 一哩外之物,視角爲1′,其高若何?

15. 直徑$5\frac{1}{2}$吋之球,視角爲6′,求此球之距離.

16. 塔高51呎,視角爲$5\frac{5}{11}'$,則此塔距測處幾何?

17. 已知塔尖高100呎,於遠處測之得視角爲9′;求測處與塔之距離.

18. 斜面每210碼升高$3\frac{1}{2}$呎,求此斜面與地平所成之角約爲幾分.

19. 地球之半徑約爲3960哩,而月與地球之距離60倍之.在地球上測月之半徑得視角爲16′,求月之半徑.

20. 地球之半徑爲3960哩,對於月之中心張57′之角,求月與地球之距離.

21. 設地球之半徑向太陽所張之角爲8.76″,求證太陽與地球之距離約爲81,000,000浬;而1浬所對地球之中心角爲1′.并求地球直徑與周圍之浬數.

22. 設地球之軌道爲圓,其半徑約爲92700000哩,向天狼星所張之角約爲.4″;求天狼星與地球之約略距離.

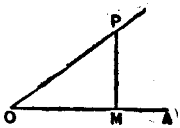
第二章

銳角之三角比值

23. 本章所討論者,均爲小於直角之角.

設一線由 OA 轉至 OP 而得角 AOP.

在線 OP 上任取一點 P, 作 PM 垂直於初線 OA.



於三角形 MOP 中, OP 爲弦, PM 爲垂線, 而 OM 爲底.

則角 AOP 之三角比值,或稱三角函數,其定義如下:

$\frac{MP}{OP}$, 即 $\frac{\text{垂線}}{\text{弦}}$, 稱爲角 AOP 之**正弦**;

$\frac{OM}{OP}$, 即 $\frac{\text{底}}{\text{弦}}$, 稱爲角 AOP 之**餘弦**;

$\frac{MP}{OM}$, 即 $\frac{\text{垂線}}{\text{底}}$, 稱爲角 AOP 之**正切**;

$\frac{OM}{MP}$, 即 $\frac{\text{底}}{\text{垂線}}$, 稱爲角 AOP 之**餘切**;

$\frac{OP}{MP}$, 即 $\frac{\text{弦}}{\text{垂線}}$, 稱爲角 AOP 之**餘割**;

$\frac{OP}{OM}$, 即 $\frac{\text{弦}}{\text{底}}$, 稱爲角 AOP 之**正割**;

又餘弦較1所少之量,即 $1-\cos AOP$ 稱爲角 AOP 之正矢;而正弦較1所少之量,即 $1-\sin AOP$ 稱爲角 AOP 之餘矢.

24. 凡三角比值皆爲不名數.

此八種比值爲簡便計得縮寫爲 $\sin AOP$, $\cos AOP$, $\tan AOP$, $\cot AOP$, $\operatorname{cosec} AOP$, $\sec AOP$, $\operatorname{vers} AOP$, 及 $\operatorname{covers} AOP$. 但末二比值應用極鮮.

25. 由三角比值之定義,顯見餘割爲正弦之逆數,故

$$\operatorname{cosec} AOP=\frac{1}{\sin AOP}.$$

同理正割爲餘弦之逆數,即

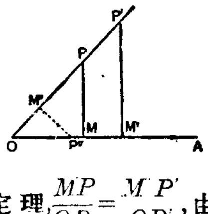
$$\sec AOP=\frac{1}{\cos AOP}.$$

又餘切爲正切之逆數,即

$$\cot AOP=\frac{1}{\tan AOP}.$$

26. 求證某定角之三角比值必爲定量.

於線 OP 上之另一點 P' 作 $P'M'$ 垂直於 OA, 則由三角形 $OP'M'$ 所得之比值必與三角形 OPM 所得之比值相同.



因在此兩三角形內,角 O 爲公有, M 與 M' 處之兩直角復相等.

故此兩三角形爲等角三角形,依幾何學定理, $\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}$, 由是角 AOP 之正弦,不論線 OP 上所取之點何在,恆爲定值.

同理,得 $\frac{OM}{OP}=\frac{OM'}{OP'}$ 又 $\frac{MP}{OM}=\frac{M'P'}{OM'}$, 即餘弦與正切亦爲定值,其他各比值亦然.

次設 OA 爲動徑,於此線上任取一點 P'',作 $P''M''$ 垂直於 OP,則由三角形 $OP''M''$ 所得之比值必與以上相同.

因在兩三角形 OPM 及 $OP''M''$ 中,角 $P''OM''$ 與角 POM,又角 $OM''P''$ 與角 OMP 兩兩相等,此兩三角形爲等角三角形故相似,於是

$$\frac{M''P''}{OP''}=\frac{MP}{OP},\quad 又\ \frac{OM''}{OP''}=\frac{OM}{OP}.$$

27. 三角比值之基本關係.

若三角比值之一爲已知,則其餘比值不難求得.

命角 AOP (第 23 節之圖) 爲 θ.

在直角三角形 MOP 中,

$$MP^2+OM^2=OP^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

各項以 OP^2 除之,則得

$$\left(\frac{MP}{OP}\right)^2+\left(\frac{OM}{OP}\right)^2=1,$$

即
$$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1.$$

$(\sin\theta)^2$ 恆記作 $\sin^2\theta$,其他比值亦然.

故得關係式

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

次以 OM^2 除式 (1) 之各項,則得

$$\left(\frac{MP}{OM}\right)^2+1=\left(\frac{OP}{OM}\right)^2,$$

即
$$(\tan\theta)^2+1=(\sec\theta)^2,$$

故得
$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

復次,以 MP^2 除式 (1) 之各項,則得

$$1+\left(\frac{OM}{MP}\right)^2=\left(\frac{OP}{MP}\right)^2,$$

即 $$1+(\cot\theta)^2=(\operatorname{cosec}\theta)^2,$$

故得 $$\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

次因 $$\sin\theta=\frac{MP}{OP} \text{ 又 } \cos\theta=\frac{OM}{OP},$$

則 $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{MP}{OP}\div\frac{OM}{OP}=\frac{MP}{OM}=\tan\theta.$$

故得 $$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

同理 $$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

28. 例 1. 求證 $\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\operatorname{cosec}A-\cot A.$

證. $$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\frac{(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A}}=\frac{1-\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}=\frac{1-\cos A}{\sin A}\quad\text{(用上節式 2)}$$

$$=\frac{1}{\sin A}-\frac{\cos A}{\sin A}=\operatorname{cosec}A-\cot A.$$

例 2. 求證 $\sqrt{\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A}=\tan A+\cot A.$

證. 因 $$\sec^2 A=1+\tan^2 A,$$

又 $$\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A,$$

$$\therefore\ \sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A=\tan^2 A+2+\cot^2 A$$

$$=\tan^2 A+2\tan A\cot A+\cot^2 A$$

$$=(\tan A+\cot A)^2,$$

故 $$\sqrt{\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A}=\tan A+\cot A.$$

例 3. 求證 $(\operatorname{cosec}A-\sin A)(\sec A-\cos A)(\tan A+\cot A)=1.$

證. 左邊 $$=\left(\frac{1}{\sin A}-\sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A}-\cos A\right)\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)$$

$$=\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}\cdot\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}\cdot\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2 A}{\sin A}\cdot\frac{\sin^2 A}{\cos A}\cdot\frac{1}{\sin A\cos A}$$

$$=1.$$

習　題　五

證明下列諸恆等式:

1. $\cos^4 A-\sin^4 A+1=2\cos^2 A.$

2. $(\sin A+\cos A)(1-\sin A\cos A)=\sin^3 A+\cos^3 A.$

3. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=2\operatorname{cosec} A.$

4. $\cos^6 A+\sin^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A.$

5. $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sec A-\tan A.$

6. $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A-1}+\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A+1}=2\sec^2 A.$

7. $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\cot A+\tan A}=\cos A.$

8. $(\sec A+\cos A)(\sec A-\cos A)=\tan^2 A+\sin^2 A.$

9. $\dfrac{1}{\cot A+\tan A}=\sin A\cos A.$

10. $\dfrac{1}{\sec A-\tan A}=\sec A+\tan A.$

11. $\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}=\dfrac{\cot A-1}{\cot A+1}.$

12. $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}.$

13. $\dfrac{\sec A-\tan A}{\sec A+\tan A}=1-2\sec A\tan A+2\tan^2 A.$

14. $\dfrac{\tan A}{1-\cot A}+\dfrac{\cot A}{1-\tan A}=\sec A\operatorname{cosec} A+1.$

15. $\dfrac{\cos A}{1-\tan A}+\dfrac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A.$

16. $(\sin A+\cos A)(\cot A+\tan A)=\sec A+\operatorname{cosec} A.$

17. $\sec^4 A-\sec^2 A=\tan^4 A+\tan^2 A.$

18. $\cot^4 A+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^4 A-\operatorname{cosec}^2 A.$

19. $\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}=\cos A\operatorname{cosec} A.$

20. $\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A=\tan^2 A+\cot^2 A+2.$

21. $\tan^2 A-\sin^2 A=\sin^4 A\sec^2 A.$

22. $(1+\cot A-\operatorname{cosec} A)(1+\tan A+\sec A)=2.$

23. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A-\cot A}-\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{1}{\sin A}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A+\cot A}.$

24. $\dfrac{\cot A\cos A}{\cot A+\cos A}=\dfrac{\cot A-\cos A}{\cot A\cos A}.$

25. $\dfrac{\cot A+\tan B}{\cot B+\tan A}=\cot A\tan B.$

26. $\left(\dfrac{1}{\sec^2\alpha-\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha-\sin^2\alpha}\right)\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{2+\cos^2\alpha\sin^2\alpha}.$

27. $\sin^8 A-\cos^8 A=(\sin^2 A-\cos^2 A)(1-2\sin^2 A\cos^2 A).$

28. $\dfrac{\cos A\operatorname{cosec} A-\sin A\sec A}{\cos A+\sin A}=\operatorname{cosec} A-\sec A.$

29. $\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}.$

30. $(\tan\alpha+\operatorname{cosec}\beta)^2-(\cot\beta-\sec\alpha)^2=2\tan\alpha\cot\beta(\operatorname{cosec}\alpha+\sec\beta).$

31. $2\sec^2\alpha-\sec^4\alpha-2\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{cosec}^4\alpha=\cot^4\alpha-\tan^4\alpha.$

32. $(\sin\alpha+\operatorname{cosec}\alpha)^2+(\cos\alpha+\sec\alpha)^2=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+7.$

33. $(\operatorname{cosec} A+\cot A)\operatorname{covers} A-(\sec A+\tan A)\operatorname{vers} A$

$$=(\operatorname{cosec} A-\sec A)(2-\operatorname{vers} A\operatorname{covers} A).$$

34. $(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)=\dfrac{\sec A}{\operatorname{cosec}^2 A}-\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\sec^2 A}.$

35. $2\operatorname{vers} A+\cos^2 A=1+\operatorname{vers}^2 A.$

29. 三角函數之限值.

由第27節之式(2),知

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

今$\sin^2\theta$及$\cos^2\theta$,俱爲實數之平方,其值爲正.又因其和爲1,故二者中之任何一值不能大於1.

[因設二者中之一值如$\sin^2\theta$大於1,則$\cos^2\theta$將爲負,於理不合.]

故正弦或餘弦,其絕對值决不能大於1.

次因 $\sin\theta$ 旣不能大於1, 則 $\frac{1}{\sin\theta}$, 卽 $\operatorname{cosec}\theta$ 之絕對值決不能小於1.

同理, $\sec\theta$ 之絕對值不能小於1.

30. 上之結果觀於第23節之圖尤爲顯明.

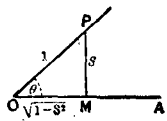
不論角 AOP 之大小如何, OM 或 MP 決不能大於 OP.

MP 旣不能大於 OP, 則 $\frac{MP}{OP}$ 之值不能大於 1, 卽角之正弦不能大於1.

次因 OM 不能大於 OP, 則 $\frac{OM}{OP}$ 之值不能大於1, 卽餘弦不能大於1.

31. 一角之函數得以他函數表出,茲舉例以明之.

例1. 試以正弦表示其他三角函數.



設角 AOP 爲任意角 θ.

次設 OP 之長爲1, 而 MP 之相當值爲 s.

則 $$OM=\sqrt{OP^2-MP^2}=\sqrt{1-s^2}.$$

故 $$\sin\theta=\frac{MP}{OP}=\frac{s}{1}=s,$$

$$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\sqrt{1-s^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta},$$

$$\tan\theta=\frac{MP}{OM}=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}},$$

$$\cot\theta=\frac{OM}{MP}=\frac{\sqrt{1-s^2}}{s}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta},$$

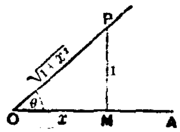
$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{MP}=\frac{1}{s}=\frac{1}{\sin\theta},$$

$$\sec\theta=\frac{OP}{OM}=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}.$$

末五式卽爲所求.

例 2. 試以餘切表示其他三角函數.

如右圖,設 MP 之長爲 1,而 OM 之相當值爲 x.



則　$OP=\sqrt{OM^2+MP^2}=\sqrt{1+x^2}$.

故　$$\cot\theta=\frac{OM}{MP}=\frac{x}{1}=x,$$

$$\sin\theta=\frac{MP}{OP}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}},$$

$$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}},$$

$$\tan\theta=\frac{MP}{OM}=\frac{1}{x}=\frac{1}{\cot\theta},$$

$$\sec\theta=\frac{OP}{OM}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta},$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{MP}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{1}=\sqrt{1+\cot^2\theta}.$$

末五式卽爲所求.

由上之兩例,知用以表已知函數之分數,則取 1 爲其分母.如例 1, $\sin\theta=\frac{MP}{OP}$, 則取 OP 爲 1. 例 2 之 $\cot\theta=\frac{OM}{MP}$, 則取 MP 爲 1

同理,若以餘弦表其他函數,因餘弦等於 $\frac{OM}{OP}$, 則取 OP 爲 1 而 OM 爲 c. 其解法與上之兩例相似.

次更舉兩例,其函數皆以數值表示者.

例 3. 若 $\cos\theta$ 爲 $\frac{3}{5}$, 求其他各函數之值.

於初線 OA 上取 OM 於等 3, 作垂線 MP.

取 OP 之長爲 5, 截垂線 MP 於 P. 則角 θ 爲 AOP.

依幾何學定理, $MP=\sqrt{OP^2-OM^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

則得　$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{4}{3}$, $\cot\theta=\frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec}\theta=\frac{5}{4}$, $\sec\theta=\frac{5}{3}$.

例 4. 設 $\sin\theta=\frac{1}{3}$, 求其他各函數之値.

今 $\sin\theta=\frac{1}{3}$, 由第 27 節式 (2),

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^2+\cos^2\theta=1,$$

即
$$\cos^2\theta=1-\tfrac{1}{9}=\tfrac{8}{9},$$

即
$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

故
$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=2\sqrt{2},$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=3,$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{vers}\theta=1-\cos\theta=1-\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

又
$$\operatorname{covers}\theta=1-\sin\theta=1-\tfrac{1}{3}=\tfrac{2}{3}.$$

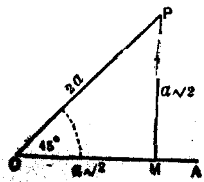
32. 下表所列,爲以一種三角函數表示其他函數之結果.

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
$\operatorname{cosec}\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\operatorname{cosec}\theta$

習　題　六

1. 試以餘弦表各種三角函數.
2. 試以正切表各種三角函數.
3. 試以餘割表各種三角函數.
4. 試以正割表各種三角函數.
5. 某角之正弦為 $\frac{1}{4}$; 試求其他函數之值.
6. 若 $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$, 求 $\tan\theta$ 及 $\operatorname{vers}\theta$.
7. 若 $\sin A=\dfrac{11}{61}$ 求 $\tan A$, $\cos A$, 與 $\sec A$.
8. 若 $\cos\theta=\frac{4}{5}$, 求 $\sin\theta$ 與 $\cot\theta$.
9. 若 $\cos A=\dfrac{9}{41}$, 求 $\tan A$ 與 $\operatorname{cosec} A$.
10. 若 $\tan\theta=\frac{3}{4}$, 求角 θ 之正弦,餘弦,正矢,餘割.
11. 若 $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$, 求 $\dfrac{\operatorname{cosec}^2\theta-\sec^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta+\sec^2\theta}$ 之值.
12. 若 $\cot\theta=\dfrac{15}{8}$, 求 $\cos\theta$ 與 $\operatorname{cosec}\theta$.
13. 若 $\sec A=\frac{5}{2}$, 求 $\tan A$ 與 $\operatorname{cosec} A$.
14. 若 $2\sin\theta=2-\cos\theta$, 求 $\sin\theta$.
15. 若 $8\sin\theta=4+\cos\theta$, 求 $\sin\theta$.
16. 若 $\tan\theta+\sec\theta=1.5$, 求 $\sin\theta$.
17. 若 $\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta=5$, 求 $\cos\theta$.
18. 若 $3\sec^4\theta+8=10\sec^2\theta$, 求 $\tan\theta$ 之值.
19. 若 $\tan^2\theta+\sec\theta=5$, 求 $\cos\theta$.
20. 若 $\tan\theta+\cot\theta=2$, 求 $\sin\theta$.
21. 若 $\sec^2\theta=2+2\tan\theta$, 求 $\tan\theta$.
22. 若 $\tan\theta=\dfrac{2x(x+1)}{2x+1}$, 求 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$.

特別角之函數



33. 45° 之角.

設角 AOP 為 45°.

則因三角形三內角之和等於二直角.

$$\angle OPM = 180^\circ - \angle POM - \angle PMO = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ = \angle POM.$$

$$\therefore \quad OM = MP.$$

令 $OP=2a$, 則

$$4a^2 = OP^2 = OM^2 + MP^2 = 2 \cdot OM^2,$$

故
$$OM = a\sqrt{2}.$$

$$\therefore \quad \sin 45^\circ = \frac{MP}{OP} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

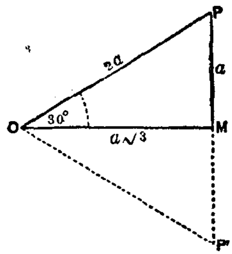
$$\cos 45^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 45^\circ = 1.$$

34. 30° 之角.

設角 AOP 爲 30°.

延長 PM 至 P' 使 MP' 等於 PM.



則兩三角形 OMP 與 OMP' 中,夾直角之兩邊 OM 與 MP 各等於 OM 與 MP' 且所夾之角亦相等.

故 $OP'=OP$, 而 $\angle OP'P = \angle OPP' = 60^\circ$, 因此三角形 $P'OP$ 爲等邊三角形.

令 $OP=2a$, 則

$$MP = \tfrac{1}{2}P'P = \tfrac{1}{2}OP = a.$$

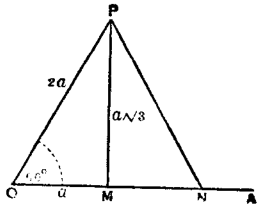
又
$$OM = \sqrt{OP^2 - MP^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\therefore \quad \sin 30^\circ = \frac{MP}{OP} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

35. 60° 之角.



設角 AOP 爲 60°.

於 OA 上取一點 N, 使

$$MN = OM = a \text{ (假定)}$$

於兩三角形 OMP 與 MNP 中, 夾直角之兩邊 OM 與 MP 各等於 NM 與 MP, 則此兩三角形爲全同三角形.

$$\therefore\quad PN = OP, \text{ 又 } \angle PNM = \angle POM = 60^\circ.$$

故三角形 OPN 爲等邊三角形, 則

$$OP = ON = 2OM = 2a.$$

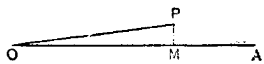
$$\therefore\quad MP = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{4a^4 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad \sin 60^\circ = \frac{MP}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}.$$

36. 0° 之角.



設角 MOP 爲值甚微, 則 MP 亦爲極小之值, 而在此角小至所能覺察之前, MP 之值將小至不可思議, 命之爲 0.

今在此情形之下, M 與 P 幾至相合, 角 AOP 愈小, 則此二點愈相合.

由是,若角 AOP 爲零,則 OM 與 OP 等長,而 MP 爲零.

故
$$\sin 0^\circ=\frac{MP}{OP}=\frac{0}{OP}=0,$$

$$\cos 0^\circ=\frac{OM}{OP}=\frac{OP}{OP}=1,$$

$$\tan 0^\circ=\frac{0}{1}=0.$$

又
$$\cot 0^\circ=\text{當 } M \text{ 與 } P \text{ 相合時 } \frac{OM}{MP} \text{ 之值}$$
$$=\text{一量與無窮小之比值}$$
$$=\text{無窮大之值},$$

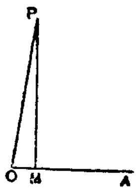
此值常以 ∞ 記之.

故
$$\cot 0^\circ=\infty.$$

同理
$$\operatorname{cosec} 0^\circ=\frac{OP}{MP}=\infty.$$

又
$$\sec 0^\circ=\frac{OP}{OM}=1.$$

37. 90° 之角.



設角 AOP 爲一近於直角,而非確爲直角者.

但當 OP 確轉至直角時,M 與 O 二點相合,則 OM 爲零,而 OP 與 MP 相等.

故
$$\sin 90^\circ=\frac{MP}{OP}=\frac{OP}{OP}=1,$$

$$\cos 90^\circ=\frac{OM}{OP}=\frac{0}{OP}=0,$$

$$\tan 90^\circ=\frac{MP}{OM}=\frac{\text{有限值}}{\text{一無窮小之值}}$$
$$=\text{一無窮大之值}=\infty.$$

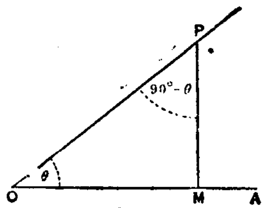
$$\cot 90^\circ=\frac{OM}{MP}=\frac{0}{MP}=0,$$

$$\sec 90^\circ=\frac{OP}{OM}=\infty,$$ 與求正切之法同,

又 $$\operatorname{cosec} 90^\circ=\frac{OP}{MP}=\frac{OP}{OP}=1.$$

38. 餘角 定義 二角之和爲一直角,則稱此二角互爲餘角.故角 θ 與角 $90^\circ-\theta$ 互爲餘角.

39. 兩餘角函數之關係.



一線由 OA 轉動而得一銳角 AOP,其值爲 θ.於線 OP 上之任一點 P 作 PM 垂直於 OA.

因三角形諸內角之和爲兩直角,而角 OMP 爲一直角,則角 MOP 與角 OPM 之和必爲一直角.

故此兩角互爲餘角,而 $\angle OPM=90^\circ-\theta$.

[對於角 OPM 而言,稱 PM 爲"底"而 MO 爲"垂線".]

於是

$$\sin(90^\circ-\theta)=\sin MPO=\frac{MO}{PO}=\cos AOP=\cos\theta,$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\cos MPO=\frac{PM}{PO}=\sin AOP=\sin\theta,$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\tan MPO=\frac{MO}{PM}=\cot AOP=\cot\theta,$$

$$\cot(90^\circ-\theta)=\cot MPO=\frac{PM}{MO}=\tan AOP=\tan\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec} MPO=\frac{PO}{MO}=\sec AOP=\sec\theta,$$

$$\sec(90^\circ-\theta)=\sec MPO=\frac{PO}{PM}=\operatorname{cosec} AOP=\operatorname{cosec}\theta.$$

由上之結果,知

某角之正弦＝其餘角之餘弦,

某角之正切＝其餘角之餘切,

某角之正割＝其餘角之餘割.

餘弦,餘切,餘割之名卽由此而得.

40. 學者應先將下表熟習,方可更求進益.[此表至第76節再事擴充.]

角	0°	30°	45°	60°	90°
正弦	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
餘弦	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
正切	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
餘切	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
餘割	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
正割	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞

表中粗線所圍之部分必須熟記,其餘可以設法推求.

因

(1)　60°與90°之正弦各爲30°與0°之餘弦,　　　(第39節)

(2)　60° 與 90° 之餘弦各爲 30° 與 0° 之正弦.　(第 39 節)
故得第二與第三兩行.

(3)　某角之正切爲此角之正弦除以餘弦所得之商.
故第二行之各值除以第三行之對應值遂得第四行之各值.

(4)　某角之餘切爲其正切之逆數,故第五行之各值可由第四行之逆數得之.

(5)　因 $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, 故第六行可由第一行各值之逆數得之.

(6)　因 $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$,故第七行可由第二行依同理求之.

習　題　七

1. 設 $A=30°$, 求證

(1)　$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1$,

(2)　$\sin 2A=2\sin A\cos A$,

(3)　$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$,

(4)　$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$,

(5)　$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$.

2. 設 $A=45°$, 求證

(1)　$\sin 2A=2\sin A\cos A$,

(2)　$\cos 2A=1-2\sin^2 A$,

(3)　$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$.

求證

3. $\sin^2 30°+\sin^2 45°+\sin^2 60°=\frac{3}{2}$.

4. $\tan^2 30^\circ + \tan^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ = 4\frac{1}{3}$.

5. $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = 1$.

6. $\cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

7. $\frac{4}{3}\cot^2 30^\circ + 3\sin^2 60^\circ - 2\operatorname{cosec}^2 60^\circ - \frac{3}{4}\tan^2 30^\circ = 3\frac{1}{3}$.

8. $\operatorname{cosec}^2 45^\circ \cdot \sec^2 30^\circ \cdot \sin^3 90^\circ \cdot \cos 60^\circ = 1\frac{1}{3}$.

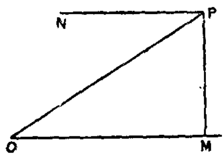
9. $4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^3 30^\circ = \frac{1}{8}$.

第三章

高與距離之簡易問題

41. 三角法目的之一,在求兩點間之距離,或其高度之差,而不必加以實際度量者.

42. 設 O 與 P 爲兩點,而 P 高於 O.



設由 O 所作之水平線與由 P 所作之垂直線相交於 M. 角 MOP 稱爲由 O 視 P 之**仰角**.

作 PN 平行於 MO, 則 PN 爲過點 P 之水平線. 角 NPO 稱爲由 P 視 O 之**俯角**.

43. 經緯儀與六分儀爲測量時所用之兩種儀器.

經緯儀用以測量水平面上或垂直平面上之角者. 其構造之簡者爲一平板上附一望遠鏡,而平板則裝於三脚架上.

置水平之平板於 O, 先令望遠鏡正指 OM, 然後令其在垂直平面上旋轉至準對點 P 而止. 則自水平線所旋轉之角度,即仰角 MOP, 得由附於望遠鏡上圓盤之刻度指出之.

同理,置儀器於 P, 由水平線向下旋轉所得之角 NPO, 即爲由 P 所求之俯角.

此儀器亦用於測量水平面上之角.

44. 六分儀用以測任何兩點 D 與 E 對於第三點 F 所張之角. 常於航海時用之.

其構造及應用方法較爲繁複,非此處所能詳述.

45. 玆舉關於高與距離之簡單例題數則於下:

例 1. 平地上立一竿,於離竿足 150 呎處測竿頂之仰角得 30°;求竿高.

設 MP (第 42 節之圖) 爲竿,而 O 爲所由　仰角之點.

則　$OM=150$ 呎, 又 $\angle MOP=30°$.

因 PMO 爲一直角,故

$$\frac{MP}{OM}=\tan MOP=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad (\text{第 34 節})$$

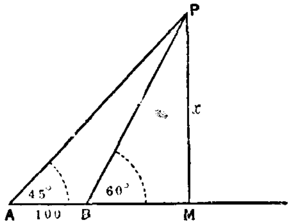
$$\therefore\quad MP=\frac{OM}{\sqrt{3}}=\frac{150}{\sqrt{3}}=\frac{150\sqrt{3}}{3}=50\sqrt{3}.$$

用開平方法, 得 $\sqrt{3}=1.73205\cdots\cdots$

故　$MP=50\times1.73205\cdots\cdots$ 呎 $=86.6025$ 呎.

例 2. 於平地上之一點測一塔尖得仰角爲 45°;向塔前進 100 呎復測之得仰角爲 60°;求塔高及其與第一測處之距離.

設 P 爲塔頂,二測處爲 A 與 B, 由 P 作 PM 垂直於 AB 之延長線,次設 MP 爲 x.



已知　$AB=100$ 呎,

$\angle MAP=45°$,

又　$\angle MBP=60°$.

得　$\dfrac{AM}{x}=\cot 45°=1,$

又　$\dfrac{BM}{x}=\cot 60°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

故　$AM=x,\ BM=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

$$\therefore\quad 100=AM-BM=x-\frac{x}{\sqrt{3}}=x\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}.$$

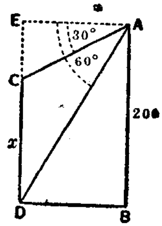
$$\therefore\quad x=\frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{100\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1}=50(3+\sqrt{3})$$

$$=50[3+1.73205\cdots\cdots]=236.6\cdots\cdots\text{呎}.$$

次因　$AM=x$, 故塔與第一測處之距離亦爲 $236.6\cdots\cdots$ 呎.

例 3. 在 200 呎高之峭壁上測一塔,得塔頂與塔基之俯角各爲 30° 與 60°. 求塔高.

設 A 爲測點, BA 爲峭壁之高,而 CD 爲塔.



作水平線 AE, 故 $\angle EAC=30°$ 而 $\angle EAD=0°$.

次設塔高爲 x 呎,延長 DC 與 AE 交於 E.

則 $$CE=AB-x=200-x.$$

因 $$\angle ADB=\angle DAE=60°,$$

$$\therefore\quad DB=AB\cot ADB=200\cot 60°=\frac{200}{\sqrt{3}}.$$

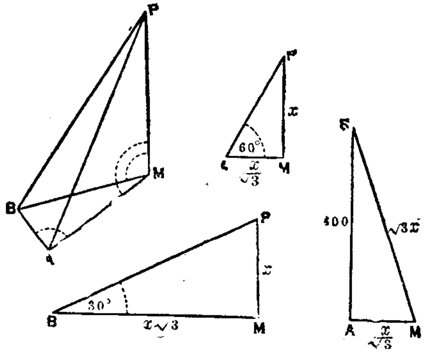
又 $$\frac{200-x}{DB}=\frac{CE}{EA}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad 200-x=\frac{DB}{\sqrt{3}}=\frac{200}{3},$$

故得 $$x=200-\frac{200}{3}=133\frac{1}{3}\text{ 呎}.$$

例 4. 一人在塔南平地上之一點測塔頂之仰角爲 60°; 其人向西行 300 呎後測之得仰角爲 30°; 求塔高及此塔與原測處之距離.

設 P 爲塔頂, PM 爲塔高, A 在塔之南而 B 在 A 之西.



則諸角 PMA, PMB, MAB 皆爲直角.

因諸三角形 PAM, PBM, ABM 俱不在同一平面上,另按其大小之比例作圖,俾更明顯.

已知 $AB=300$ 呎, $\angle PAM=60°$, 又 $\angle PBM=30°$.

設塔高爲 x 呎.

由圖 2, 得

$$\frac{AM}{x}=\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

故 $$AM=\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

由圖3,

$$\frac{BM}{x}=\cot 30^\circ=\sqrt{3},$$

故　　$BM=x\sqrt{3}.$

復由圖4,得

$$BM^2=AM^2+AB^2,$$

卽　　$3x^2=\frac{1}{3}x^2+300^2,$

$$\therefore\quad 8x^2=3\times 300^2,$$

$$\therefore\quad x=\frac{300\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=150\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=75\times\sqrt{6}$$

$$=75\times 2.44949\cdots\cdots=183.71\cdots\cdots\text{呎}.$$

又原測處與塔之距離

$$=x\cot 60^\circ=\frac{x}{\sqrt{3}}=75\times\sqrt{2}$$

$$=75\times 1.4142\cdots\cdots=106.065\cdots\cdots\text{呎}.$$

習　題　八

1. 有人自河畔測得對岸樹頂之仰角爲60°;由此後退40呎復測之得仰角爲30°;求樹高及河闊.

2. 自平地上之一點測塔之仰角,得此角之餘切爲$\frac{3}{5}$;向塔前進32呎復測之,則仰角之餘切爲$\frac{2}{5}$.求塔高.

3. 從一點A,測塔頂之仰角其正切爲$\frac{5}{12}$向塔前進240呎則仰角之正切成爲$\frac{3}{4}$;求塔高.

4. 求一煙突之高在平地上前行100呎時,則其頂端之仰角乃由30°增至45°.

5. 在高出海面200呎之絕壁上,有人測海面上停泊之兩船,其俯角各爲45°與30°;求兩船間之距離,設此人與兩船同在一垂直平面上.

6. 在懸崖之絕頂測海中同方向之遠近兩浮筒,其俯角一爲39°,一爲26°;兩浮筒間相距300碼;求懸崖之高度及其與較近浮筒之距離,已知$\cot 26^\circ=2.0503$,又$\cot 39^\circ=1.2349$.

7. 一樹之上段爲風吹折與地面成30°之角,樹根與樹頂着地處相去50呎;求此樹原有之高度.

8. 兩塔相距60呎,由一塔之頂俯視他塔之頂,得俯角30°;已知第二塔

高150呎,求第一塔之高.

9. 在離塔基120呎處測一尙未完工之塔,得其仰角爲$45°$;若在同一地點欲得$60°$之仰角,問此塔尙須再築幾呎?

10. 100呎闊之路,其兩旁有等高之二柱,在二柱間路上之一點測柱頂之仰角各爲$60°$與$30°$;求柱高及測點之所在.

11. 在平地上之某處測塔頂之仰角爲$60°$;由測點直升40呎後復測之得仰角爲$45°$;求塔高及地上測點與塔之距離.

12. 於山麓測山峯得仰角爲$45°$;沿傾斜$30°$之山坡直上一哩則山峯之仰角爲$60°$.求山高.

13. 竿影之長爲竿長之$\sqrt{3}$倍,則太陽之仰角爲何?

14. 日高由$30°$升至$45°$,則塔影加長60呎.求證塔高爲$30(1+\sqrt{3})$呎.

15. 沿海岸有在一直線上之A, B, C三點而$AB=BC=2$哩.一船正對B行駛其方向與海岸相垂直.在某處測得AC所張之角爲$60°$,前進十分鐘後其所張之角成爲$120°$;求此船進行之速度.

16. 平地上植長短兩竿.A, B爲竿足間所聯直線上之兩點.在點A測兩竿頂之仰角一爲$30°$,一爲$50°$,在點B測之則爲$60°$與$45°$.設A,B間之距離爲30呎,求兩竿之高及其間之距離.

17. P爲平地上一塔之頂,而Q爲其基.A與B爲平地上之兩點,已知AB長33呎又QAB爲直角.今測得$\cot PAQ=\frac{2}{5}$又$\cot PBQ=\frac{3}{5}$;求塔高.

18. 平地上建一方形之塔.由地上之某處可見塔頂之三隅,其仰角各爲$45°$, $60°$, $45°$.求證塔高與一邊長之比爲$\sqrt{6}(\sqrt{5}+1)$比4.

19. 一面北之燈塔,射出扇形之光由北東乃至北西.一舟正向西行,於離塔3哩處始見光,在光中續行者凡$30\sqrt{2}$分鐘.求此船之速度.

20. 河之兩岸平行,XY爲一岸上之兩點,一人於X處觀察彼岸之一點Z,測得ZX與XY成$30°$之角,其人沿河向B行200碼則得角ZYX爲$60°$.求河闊.

21. 一人測得在東方之一氣球,此球以不變之高度向北西駛行,其仰角爲$60°$.此人向北行400碼則見此球恰在其頂上,求氣球之高.

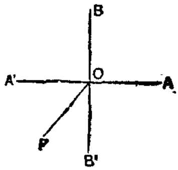
第四章

代數符號在三角法上之應用

46. 正負角 第 6 節中所論角之大小,恆以一線與錶面時針相反之方向轉動而得,此方向稱為反時針方向,謂此方向為正,其所得之角為正角.

設此線依相反之方向轉動,即與時針之向相同時,謂此向為負,其所得之角為負角.此方向即所謂順時針方向.

47. 設此線由 OA 轉至 OP, 在 OA' 與 OB' 之間而平分角 $A'OB'$.



若其進行之方向為正,則所得之角為正角,其值為 $+225°$.

若其方向為負,則所得為 $-135°$ 之負角.

但僅以此線所在之地位而論,此線或已轉過一周乃至二,三,……周復加 $+225°$ 之正角.或已向相反方向轉過一,二,三,……周後復轉 $-135°$ 之負角.

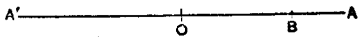
就第一點而言,則轉過之角為 $225°$, 或 $360°+225°$, 或為 $2\times 360°+225°$, 或為 $3\times 360°+225°$…… 即 $225°$, 或 $585°$, 或 $945°$, 或為 $1305°$ 等等.

就第二點言,則轉過之角爲 $-135°$, 或 $-360°-135°$, 或爲 $-2\times 360°-135°$, 或爲 $-3\times 360°-135°$……卽 $-135°$, 或 $-495°$, 或 $-855°$, 或爲 $-1215°$ 等等.

48. 線之正負 設有人由一哩石沿路行1000碼而止.若不指明此人進行之方向則無由確定其現在之位置爲在哩石之左或右,所知者祇爲其人離哩石1000碼而已.

故在直線上量取距離,必須有規定之方向;謂合於此向者爲正,其所量之距離爲正量.凡與此向相反者爲負,而所量之距離爲負量.

依通例,常以向右爲正.



如圖,OA 之向爲正,而 OA' 之向爲負.設 OA 或 OA' 之長爲 a, 則由 O 至點 A 之距離爲 $+a$, 由 O 至點 A' 之距離爲 $-a$.

故線之向右者應冠以正號,向左者應冠以負號.

設一點由 O 依正向移動而得 OA, 復依相反之向移動而得 AB, 謂其絕對值爲 b, 則此點依正向所經之距離爲 $OA+AB$,

$$\text{卽}\quad +a+(-b),\quad \text{卽}\quad a-b.$$

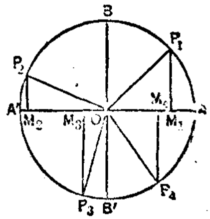
49. 與 AA' 正交之線,則謂由 O 向上者爲正,卽 OB 之向爲正(第47節之圖);由 O 向下者,卽 OB' 之向爲負.

50. 任何角之三角函數.

設 OA 爲初線其向爲正,又 OA' 與 OA 異向.

次設 BOB' 爲與 OA 正交之線,其正向爲 OB.

今有一線 OP 由 OA 依正向或負向轉動而得一任意角.於 OP 上之任一點 P 作 PM 垂直於 AOA'.



[如圖,此轉動之線於每一象限內得一位置,而於其下加1,2 3,4等字以識別之.]

則三角函數之定義,在第23節之限於銳角者,茲可推廣之如下:

$\dfrac{MP}{OP}$稱為角AOP之**正弦**,

$\dfrac{OM}{OP}$稱為角AOP之**餘弦**,

$\dfrac{MP}{OM}$稱為角AOP之**正切**,

$\dfrac{OM}{MP}$稱為角AOP之**餘切**,

$\dfrac{OP}{OM}$稱為角AOP之**正割**,

$\dfrac{OP}{MP}$稱為角AOP之**餘割**.

又$1-\cos AOP$及$1-\sin AOP$之值則稱為角AOP之**正矢**及**餘矢**.

51. 如第27節所示,不論角$AOP(=\theta)$之值為何,得證

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta,$$

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta,$$

$$\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta.$$

52. 三角函數之正負

第一象限. 設此轉動之線(動徑)常為正.其在第一象限內者如OP_1,則因OM_1與M_1P_1皆為正,故各函數之值皆為正.

第二象限. 動徑之在第二象限內者如 OP_2, 則因 M_2P_2 爲正而 OM_2 爲負,故

正弦爲正量與正量之比,其值爲正,

餘弦爲負量與正量之比,其值爲負,

正切爲正量與負量之比,其值爲負,

餘切爲負,

餘割爲正,

正割爲負.

第三象限. 動徑之在第三象限內者如 OP_3, 則因 M_3P_3 與 OM_3 皆爲負,故

正弦爲負,

餘弦爲負,

正切爲正,

餘切爲正,

餘割爲負,

正割爲負.

第四象限. 動徑之在第四象限內者如 OP_4,則因 M_4P_4 爲負而 OM_4 爲正,故

正弦爲負,

餘弦爲正,

正切爲負,

餘切爲負,

餘割爲負,

正割爲正.

動徑之在某象限內者,其角之函數之正負,列表如下.

B

sin	+	sin	+
cos	−	cos	+
tan	−	tan	+
cot	−	cot	+
cosec	+	cosec	+
sec	−	sec	+

A′　　　O　　　A

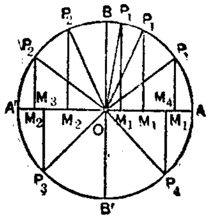
sin	−	sin	−
cos	−	cos	+
tan	+	tan	−
cot	+	cot	−
cosec	−	cosec	−
sec	−	sec	+

B′

53. 三角函數之變化

設動徑 OP 爲定長 a.

當 OP 與 OA 相合,則 OM_1 之長爲 a; 若與 OB 相合,則點 M_1 與 O 合而 OM_1 爲零.由是,OP 由 OA 轉至 OB 時,OM_1 之值將由 a 減小而至於 0.



當 OP 在第二象限卽由 OB 轉至 OA' 時,OM_2 之值將爲負而其絕對值由 0 增至 a〔卽代數值由 0 減小而至於 $-a$〕.

在第三象限內,OM_3 由 $-a$ 增大至於 0; 又在第四象限內,OM_4 將由 0 增大至於 a.

在第一象限內,M_1P_1 之值由 0 增大至於 a; 在第二象限內 M_2P_2 由 a 減小至於 0; 在第三象限內,M_3P_3 由 0 減小至於 $-a$; 而在第四象限內,則 M_4P_4 由 $-a$ 增大至於 0.

54. 正弦之變化 在第一象限內,當某角由0°增至90°時,則其正弦,即$\frac{M_1P_1}{a}$,將由$\frac{0}{a}$增大至於$\frac{a}{a}$,即由0增大至於1.

在第二象限內,當某角由90°增至180°時,其正弦將由$\frac{a}{a}$減小至於$\frac{0}{a}$,即由1減小至於0.

在第三象限內,當某角由180°增至270°時,其正弦將由$\frac{0}{a}$減小至於$\frac{-a}{a}$,即由0減小至於-1.

在第四象限內,當某角由270°增至360°時,其正弦將由$\frac{-a}{a}$增大至於$\frac{0}{a}$,即由-1增大至於0.

55. 餘弦之變化 在第一象限內,因餘弦之值為$\frac{OM_1}{a}$,將由$\frac{a}{a}$減小至於$\frac{0}{a}$,即由1減小至於0.

在第二象限內,其值由$\frac{0}{a}$減小至於$\frac{-a}{a}$,即由0減小至於-1.

在第三象限內,其值由$\frac{-a}{a}$增大至於$\frac{0}{a}$,即由-1增大至於0.

在第四象限內,其值由$\frac{0}{a}$增大至於$\frac{a}{a}$,即由0增大至於1.

56 正切之變化 在第一象限內,M_1P_1由0增大至於a,而OM_1由a減小至於0,於是$\frac{M_1P_1}{OM_1}$將逐漸增大(因分子逐漸增大,而分母逐漸減小).

當OP_1與OA相合,則正切為0;但當動徑轉至一較直角略小之角時,OP_1幾與OB相合,從而M_1P_1漸近於a而OM_1則為值甚微.故$\frac{M_1P_1}{OM_1}$之比值甚大,且當OP_1愈近OB時愈大,正切之

值得令其大於任何可以想像之數.簡言之,當一角為$90°$時,則其正切為無窮大.無窮大常以∞記之.

由是,在第一象限內,角之正切由0增大至於∞.

在第二象限內,當某角為一較直角略大之角AOP_2,則M_2P_2近於a而OM_2為甚小之負量,故正切為甚大之負數.

次設動徑由OB轉至OA',M_2P_2由a減小至於0,而OM_2為負量,其值由0減小至於$-a$,直至此線與OA'相合時,角之正切為0.

由是,在第二象限內,角之正切由$-\infty$增大至於0.

在第三象限內,M_3P_3與OM_3皆為負,其比值則為正.而當動徑與OB'相合時,角之正切為無窮大.

由是,在第三象限內,角之正切由0增大至於∞.

在第四象限內,M_4P_4為負而OM_4為正,其比值為負.又當動徑經OB'時,角之正切由$+\infty$突變而為$-\infty$(與經OB時同).

由是,在第四象限內,角之正切由$-\infty$增大至於0.

57. 餘切之變化　當動徑開始轉動之時與OA相合,M_1P_1為量極微而OM_1則幾與a相等,故餘切等於$\frac{OM_1}{M_1P_1}$之比值將為無窮大.又當動徑由OA轉至OB,則M_1P_1之值由0增大至於a,而OM_1則由a減小至於0.

由是,在第一象限內,餘切之值由∞減小至於0.

在第二象限內,M_2P_2為正而OM_2為負,故餘切由0減小至

於$\frac{-a}{0}$,即由0減小至於$-\infty$.

在第三象限內,其值爲正而由∞減小至於0(因當動徑經過OA'時,角之餘切將由$-\infty$突變而爲$+\infty$也).

在第四象限內,其值爲負而由0減小至於$-\infty$.

58. 正割之變化 當動徑與OA相合時,OM_1之值爲a,故正割之值爲1.但此線由OA轉至OB,OM_1由a減小至於0,直至與OB相合時,則正割之值爲$\frac{a}{0}$,即∞.

由是,在第一象限內,正割之值由1增大至於∞.

在第二象限內,OM_2爲負且由0減小至於$-a$.故在此象限內,正割由$-\infty$增大至於-1(因當動徑經過OB時,OM_1之號由正而變爲負故正割由$+\infty$變爲$-\infty$).

在第三象限內,OM_3常爲負其值由$-a$增大至於0;故正割由-1減小至於$-\infty$).

在第四象限內,OM_4常爲正且由0增大至於a.故在此象限內,正割由∞減小至於$+1$.

59. 餘割之變化 可用求正割變化之方法求之.

在第一象限內,其值由∞減小至於$+1$.

在第二象限內,其值由$+1$增大至於$+\infty$.

在第三象限內,其值由$-\infty$增大至於-1.

在第四象限內,其值由-1減小至於$-\infty$.

60. 上之結果可歸納於下表.

B

在第二象限		在第一象限	
正弦自	1減至 0	正弦自	0增至 1
餘弦自	0減至 -1	餘弦自	1減至 0
正切自	$-\infty$增至 0	正切自	0增至 ∞
餘切自	0減至 $-\infty$	餘切自	∞減至 0
正割自	$-\infty$增至 -1	正割自	1增至 ∞
餘割自	1增至 ∞	餘割自	∞減至 1

A′　　　　O　　　　A

在第三象限		在第四象限	
正弦自	0減至 -1	正弦自	-1增至 0
餘弦自	-1增至 0	餘弦自	0增至 1
正切自	0增至 ∞	正切自	$-\infty$增至 0
餘切自	∞減至 0	餘切自	0減至 $-\infty$
正割自	-1減至 $-\infty$	正割自	∞減至 1
餘割自	$-\infty$增至 -1	餘割自	-1減至 $-\infty$

B′

61. 三角函數之週期

當動徑旋轉一週卽其所成之角由 0 增至 2π 弳,其正弦初則由 0 增大至於 1,次由 1 減小至於 -1,再由 -1 增大復歸於 0.

同理,此角由 2π 弳增至 4π 弳時,正弦之變化亦同於前.

凡兩角之差爲四直角,卽相差 2π 弳者,其正弦恆相等.

故曰正弦之週期爲 2π.

同理,餘弦,正割,餘割之變化亦以 2π 爲週期.

至於正切,則一切變化之範圍皆在 0 與 π 弳之內,卽在兩直角之內已完備矣.餘切亦然.

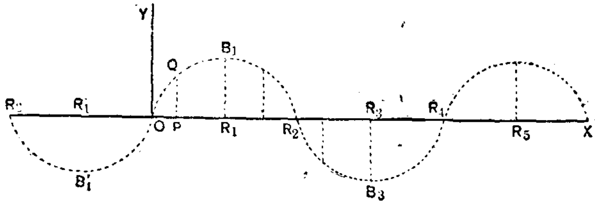
故正弦,餘弦,正割,餘割之週期爲 2π 弳,而正切與餘切之週期則爲 π 弳.

當一角依次增大時,其三角函數之值週而復始,故稱爲週

期函數.

*62. 三角函數之變化以圖表示更爲明顯.

正弦曲線



設 OX 與 OY 爲正交之兩直線,而角之大小則以線 OX 上之長表示之.

設 $R_1, R_2, R_3, \cdots\cdots$ 爲等距離之諸點,故 $OR_1, R_1R_2, R_2R_3 \cdots\cdots$ 皆相等.若 OR_1 之長表一直角,則 $OR_2, OR_3, OR_4 \cdots\cdots$ 表二,三,四,……直角.

次設 P 爲線 OX 上之任一點,則 OP 之長將表示一角而此角與直角之比猶 OP 與 OR_1 之比.

(例如,OP 爲 $\frac{1}{3}OR_1$,則 OP 等於三分之一直角;若 P 平分 R_3R_4,則 OP 爲 $3\frac{1}{2}$ 直角.)

復次,設 OR_1 爲長度之單位相當於一弳;則因 OR_2 爲兩直角,即 π 弳,於是 OR_2 等於長度單位之 π 倍,約計 $3\frac{1}{7}$ 倍.

同理,OR_1', $OR_2' \cdots\cdots$ 表示負角,由點 O 向負向量取之.

由點 P 所作之垂線 PQ,其長爲 OP 所表角之正弦.若正弦爲正,則 PQ 取正向,正弦爲負則 PQ 取負向.

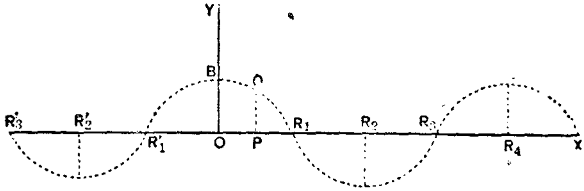
(例如,OR_1 若爲一直角,其正弦爲1,因作一垂線 R_1B_1 等於一單位之長;OR_2 爲二直角其正弦爲0,則作一垂線其長度爲零;OR_3 爲三直角,其正弦爲 -1,則作一垂線其長等於 -1,即作一向下之垂線 R_3B_3 等於一單位之

長;若 OP 為 OR_1 之三分之一,即 $\frac{1}{3}$ 直角,或 30°,其正弦為 $\frac{1}{2}$,所作之垂線為單位長之半.)

用上法所作諸垂線之頂點相連所得之曲線將與上圖相似.

以與曲線 $OB_1R_2B_3R_4$ 相同之線段依次平列,則得一連續之曲線.從而某角增大 2π 時,其正弦與前相同.

***63. 餘弦曲線**

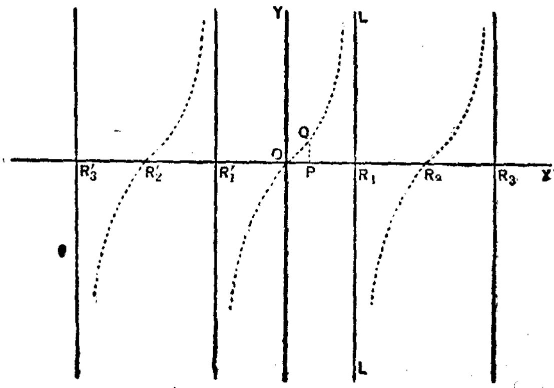


餘弦曲線作法與正弦曲線同,祇 FQ 之長為 OP 所表角之餘弦而非正弦耳.

若將第 62 節之圖形,移點 O 於 R_1,移 OY 於 R_1B_1,即得此圖.

***64. 正切曲線**

因直角之正切為無窮大,設 OR_1 表一直角,則於 R_1 所作之



垂線將與虛線所表示之正切曲線相遇於無窮遠處.

較直角略大之角其正切爲無窮大之負値,故虛線之在於 LR_1L' 外者,將於 OX 下之無窮遠處開始.

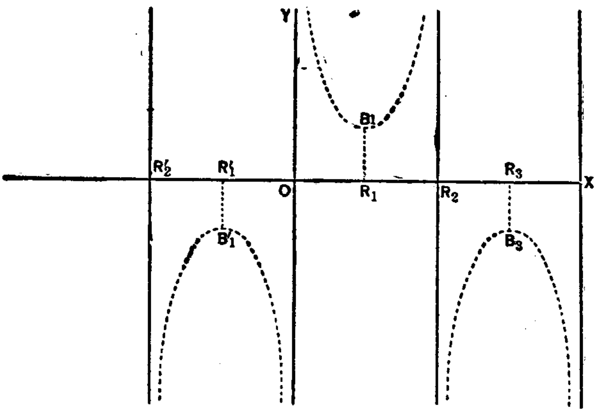
正切曲線爲諸相似而不相連續之各部所成,彼此並行排列.此種曲線稱爲不連續曲線.至若正弦曲線與餘弦曲線則稱爲連續曲線.

*65. 餘切曲線

如以同理作餘切曲線時,則見此曲線與 OY 相遇於點 O 上無窮遠處.此曲線經 R_1 而與過 R_2 所作之垂線相遇於 OX 下之無窮遠處.過 R_2 後復由 R_2 上之無窮遠處下行,作法同前.

此曲線亦爲不連續曲線,並行排列而成.

*66. 餘割曲線



若某角爲零,則其正弦爲零,故餘割爲無窮大.

故此曲線遇 OY 於無窮遠處.

當此角等於一直角時,餘割爲 1,故 R_1B_1 之長爲 1.

此角為二直角時,餘割為無窮大,故與經 R_2 所作之垂線相遇於無窮遠處.

次,當此角由略小於二直角而增大至略大於二直角時,其餘割由 $+\infty$ 突變而為 $-\infty$.

故在 R_2 之右,曲線將由 OX 下之無窮遠處開始.

***67. 正割曲線**

若以同法作正割曲線則所得之曲線將與餘割曲線相同,所不同者祇為 OY 之地位移至 R_1B_1 之處.

(關於其他曲線圖形之例,見本書第120,121,122,134,及239諸頁.)

習　題　九

1. 三角形一角所含之百分度數等於他一角所含之六十分度數.而第三角所含之百分度秒數等於他二角之和所含六十分度秒數.求此三角所含之弳數.

2. 一圓之半徑為5呎,弧長6呎,求對此弧之中心角以六十分度之諸單位表之.

3. 求證由弳數化為秒數則乘以206265,由秒數化為弳數則乘以.0000048.

4. 若 $\sin\theta=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,求 $\cos\theta$ 與 $\cot\theta$.

5. 若 $\sin\theta=\frac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}$,

求證　$\tan\theta=\frac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}$.

6. 若 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$,

求證　$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$.

7. 求證 $\operatorname{cosec}^6\alpha-\cot^6\alpha=3\operatorname{cosec}^2\alpha\cot^2\alpha+1$.

8. 試以 $\tan A$ 表下式:

$$2\sec^2 A-\sec^4 A-2\operatorname{cosec}^2 A+\operatorname{cosec}^4 A.$$

9. 解方程式 $3\operatorname{cosec}^2\theta=2\sec\theta$.

10. 有人在海畔之絕壁上見對面駛來一船,其俯角爲 30°. 三分鐘後此船之俯角爲 60°. 問此船何時可以到達?

11. 求證方程式 $\sin\theta=x+\dfrac{1}{x}$,當 x 爲實數時爲不可能.

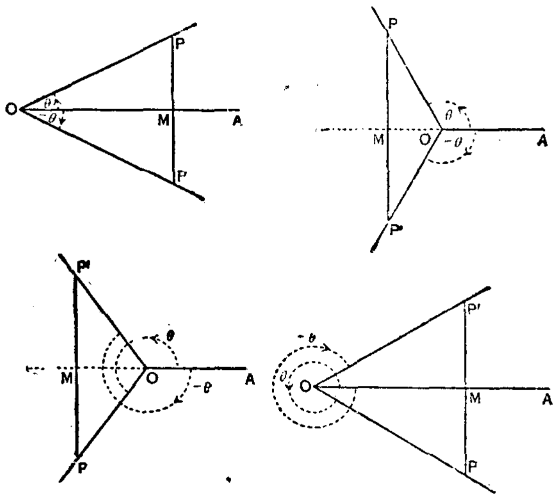
12. 求證方程式 $\sec^2\theta=\dfrac{4xy}{(x+y)^2}$ 祇有 $x=y$ 時方能成立.

第 五 章

任意角之三角函數

[凡初習三角各生,對於第68,69,70,及72諸節圖形之第一圖尤須注意.]

68. 求任意負角$(-\theta)$之三角函數,試以角θ之函數表之.



設一線由OA旋轉至OP而得任意角θ.

作PM垂直於OA(或OA之延長線)且引長至P',令MP'與PM等長.

兩三角形 MOP 與 MOP' 中，OM 與 MP 各等於 OM 與 MP'，且所夾之角皆爲直角.

由是角 MOP 等於角 MOP'，又 OP 等於 OP'.

於上列諸圖，角 AOP（依逆時針方向量取）與角 AOP'（依順時針方向量取）之值皆相等.

故角 AOP'（依順時針方向量取）爲 $-\theta$.

又 MP 與 MP' 等值而異號（第 49 節）. 於是

$$\sin(-\theta)=\frac{MP'}{OP'}=\frac{-MP}{OP}=-\sin\theta,$$

$$\cos(-\theta)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos\theta,$$

$$\tan(-\theta)=\frac{MP'}{OM}=\frac{-MP}{OM}=-\tan\theta,$$

$$\cot(-\theta)=\frac{OM}{MP'}=\frac{OM}{-MP}=-\cot\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta)=\frac{OP'}{MP'}=\frac{OP}{-MP}=-\operatorname{cosec}\theta,$$

$$\sec(-\theta)=\frac{OP'}{OM}=\frac{OP}{OM}=\sec\theta.$$

〔在此節與以下數節，末四種函數之值可由首二種函數導出之，無須藉乎圖形也.

如
$$\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta,$$

$$\cot(-\theta)=\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta)=\frac{1}{\sin(-\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\operatorname{cosec}\theta,$$

$$\sec(-\theta)=\frac{1}{\cos(-\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta.]$$

例.

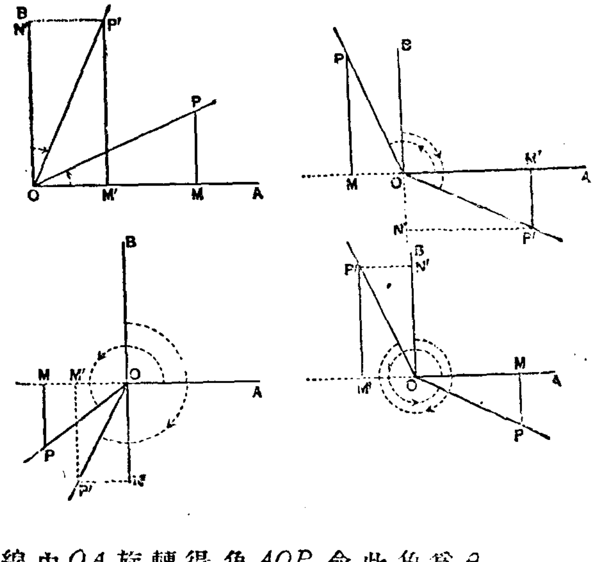
$$\sin(-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\tfrac{1}{2},$$

$$\tan(-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3},$$

$$\cos(-45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

69. 當 θ 爲任何值時,求以角 θ 之函數表角 $(90^\circ-\theta)$ 之各函數.

當 θ 爲銳角時,其關係已詳於第39節中.



設一線由 OA 旋轉得角 AOP, 命此角爲 θ.

作 $90^\circ-\theta$ 時,先將此線轉至 B, 復由 B 以相反方向轉動得角 θ 而至 OP'.

則角 AOP' 爲 $90°-\theta$.

截取 OP' 等於 OP, 作 $P'M'$ 與 PM 垂直於 OA 或其延長線. 復作 $P'N'$ 垂直於 OB 或其延長線.

於上列諸圖中,角 AOP 與角 BOP' 之值皆相等.

次因 ON' 平行於 $M'P'$, 故

$$\angle MOP=\angle N'OP'=\angle OP'M',$$

則三角形 MOP 與 $M'P'O$ 爲全同三角形, 故 OM 與 $M'P'$, 又 OM' 與 MP 爲等值,由圖顯見其復爲同號,故

$$OM=+M'P', \text{ 又 } OM'=+MP.$$

於是

$$\sin(90°-\theta)=\sin AOP'=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos\theta,$$

$$\cos(90°-\theta)=\cos AOP'=\frac{OM'}{OP'}=\frac{MP}{OP}=\sin\theta,$$

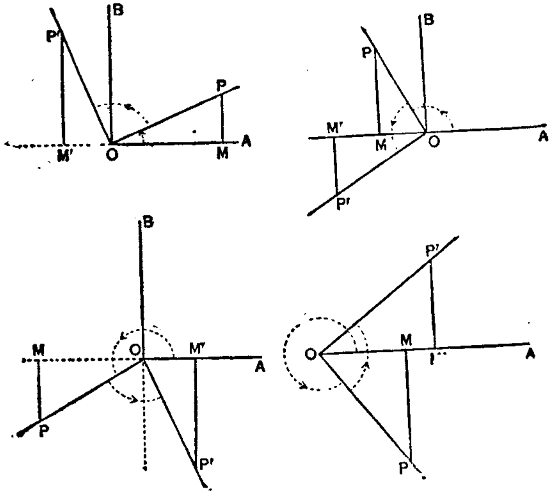
$$\tan(90°-\theta)=\tan AOP'=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{OM}{MP}=\cot\theta,$$

$$\cot(90°-\theta)=\cot AOP'=\frac{OM'}{M'P'}=\frac{MP}{OM}=\tan\theta,$$

$$\sec(90°-\theta)=\sec AOP'=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{MP}=\operatorname{cosec}\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(90°-\theta)=\operatorname{cosec} AOP'=\frac{OP'}{M'P'}=\frac{OP}{OM}=\sec\theta.$$

70. 當 θ 爲任何值時,求以角 θ 之函數表角 $(90°+\theta)$ 之各函數.



設一線由 OA 旋轉至 OP 而得角 θ, 則角 AOP 爲 θ.

設此線復由 OP 轉過一直角而至 OP', 則角 AOP' 爲 $(90^\circ+\theta)$.

截取 OP' 等於 OP, 復作 PM 與 $P'M'$ 垂直於 AO 或其延長線. 於以上諸圖中, 因 POP' 等於一直角, 故角 MOP 與角 $P'OM'$ 之和亦爲一直角.

故 $$\angle MOP = 90^\circ - \angle P'OM' = \angle OP'M'.$$

由是兩三角形 MOP 與 $M'P'O$ 爲全同三角形, 故 OM 與 $M'P'$, 又 MP 與 OM' 皆爲等值. 由圖, 知 OM 與 $M'P'$ 同號, 而 MP 與 OM' 異號, 故

$$M'P' = +OM, \text{ 又 } OM' = -MP.$$

於是得

$$\sin(90^\circ+\theta)=\sin AOP'=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos\theta,$$

$$\cos(90^\circ+\theta)=\cos AOP'=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-MP}{OP}=-\sin\theta,$$

$$\tan(90^\circ+\theta)=\tan AOP'=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{OM}{-MP}=-\cot\theta,$$

$$\cot(90^\circ+\theta)=\cot AOP'=\frac{OM'}{M'P'}=\frac{-MP}{OM}=-\tan\theta,$$

$$\sec(90^\circ+\theta)=\sec AOP'=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{-MP}=-\operatorname{cosec}\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ+\theta)=\operatorname{cosec} AOP'=\frac{OP'}{M'P'}=\frac{OP}{OM}=\sec\theta.$$

例.

$$\sin 150^\circ=\sin(90^\circ+60^\circ)=\cos 60^\circ=\tfrac{1}{2},$$

$$\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}.$$

71. 補角

兩角之和爲二直角,則稱此兩角互爲補角,如角 θ 之補角爲 $180^\circ-\theta$.

例.

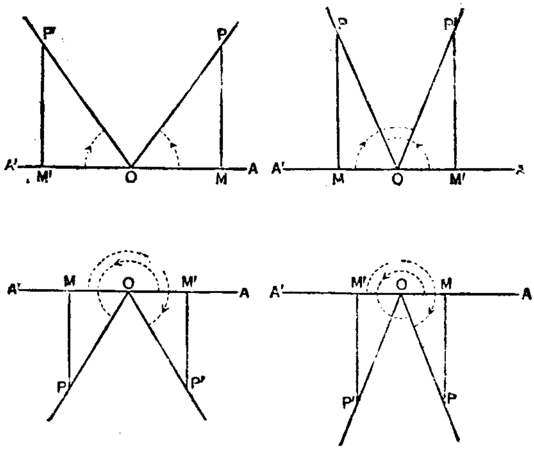
30° 之補角 $=180^\circ-30^\circ=150^\circ$,

120° 之補角 $=180^\circ-120^\circ=60^\circ$,

275° 之補角 $=180^\circ-275^\circ=-95^\circ$,

-126° 之補角 $=180^\circ-(-126^\circ)=306^\circ$.

72. 當 θ 爲任何值時,求以角 θ 之函數表角 $(180^\circ-\theta)$ 之各函數.



設一線由 OA 旋轉而得任意角 $AOP(=\theta)$.

今欲得角 $180°-\theta$, 先由 OA 開始轉過兩直角後(卽轉至 OA')再以相反方向轉過角 θ 而至 OP', 於是角 $A'OP'$ 與角 AOP 等值而異號.

角 AOP' 乃爲 $180°-\theta$.

截取 OP' 等於 OP, 復作 $P'M'$ 與 PM 垂直於 AOA'.

因角 MOP 等於角 $M'OP'$, 故三角形 MOP 與 $M'OP'$ 爲全同三角形. 故 OM 與 OM' 爲等值, 又 MP 與 $M'P'$ 亦爲等值. 由圖, 知 OM 與 OM' 異向, 而 MP 與 $M'P'$ 同向, 故

$$OM'=-OM, \text{ 又 } M'P'=+MP.$$

於是

$$\sin(180°-\theta)=\sin AOP'=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{MP}{OP}=\sin\theta,$$

$$\cos(180°-\theta)=\cos AOP'=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-OM}{OP}=-\cos\theta.$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan AOP'=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{MP}{-OM}=-\tan\theta,$$

$$\cot(180^\circ-\theta)=\cot AOP'=\frac{OM'}{M'P'}=\frac{-OM}{MP}=-\cot\theta,$$

$$\sec(180^\circ-\theta)=\sec AOP'=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{-OM}=-\sec\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ-\theta)=\operatorname{cosec} AOP'=\frac{OP'}{M'P'}=\frac{OP}{MP}=\operatorname{cosec}\theta.$$

例.

$$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 150^\circ=\tan(180^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

73. 當θ為任何值時,求以角θ之函數表角$(180^\circ+\theta)$之函數.

此一組之關係式得用類似前數節之幾何圖形求之,作為學者之習題可也.

其關係亦可用第70節業已證明之結果求之,令$90^\circ+\theta=B$,則

$$\sin(180^\circ+\theta)=\sin(90^\circ+B)=\cos B \qquad (第70節)$$

$$=\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta, \qquad (第70節)$$

又 $$\cos(180^\circ+\theta)=\cos(90^\circ+B)=-\sin B \qquad (第70節)$$

$$=-\sin(90^\circ+\theta)=-\cos\theta, \qquad (第70節)$$

又 $$\tan(180^\circ+\theta)=\tan(90^\circ+B)=-\cot B$$

$$=-\cot(90^\circ+\theta)=\tan\theta,$$

同理 $$\cot(180^\circ+\theta)=\cot\theta,$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=-\sec\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta.$$

74. 當 θ 爲任何値時,求以角 θ 之函數表角 $(360^\circ+\theta)$ 之函數.

若一線旋轉而得角 θ,不論此線之地位何在,與此線取正向多轉一周所得之結果無別,而所得之角爲 $360^\circ+\theta$.

故角 $390^\circ+\theta$ 之三角函數與角 θ 之函數同.

從知一角加或減 360°,或 360° 之任何倍數,不致變更原角之三角函數.

75. 應用本章各節之定理,任何角之三角函數得化爲小於 45° 之正角之函數.

例如:

$$\sin 1765^\circ=\sin(4\times360^\circ+325^\circ)=\sin 325^\circ \qquad (\text{第 74 節})$$

$$=\sin(180^\circ+145^\circ)=-\sin 145^\circ \qquad (\text{第 73 節})$$

$$=-\sin(180^\circ-35^\circ)=-\sin 35^\circ. \qquad (\text{第 72 節})$$

$$\tan 1190^\circ=\tan(3\times360^\circ+110^\circ)=\tan 110^\circ \qquad (\text{第 74 節})$$

$$=\tan(90^\circ+20^\circ)=-\cot 20^\circ. \qquad (\text{第 70 節})$$

$$\operatorname{cosec}(-1465^\circ)=-\operatorname{cosec} 1465^\circ \qquad (\text{第 68 節})$$

$$=-\operatorname{cosec}(4\times360^\circ+25^\circ)=-\operatorname{cosec} 25. \quad (\text{第 74 節})$$

同理任何大角得用類似之方法處理之.先減去 360° 之倍數令所得之角在 0° 與 360° 之間;若所得之角大於 180°,則設法化爲小於 180° 之角;其結果尙大於 90° 者,則須應用第70節,有時,或再須應用第 69 節.

76. 玆將第40節之表再爲擴充俾大於直角之重要角得以加入.

角	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
正弦	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
餘弦	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
正切	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
餘切	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
餘割	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
正割	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1

習題十

證明:

1. $\sin 420°\cos 390° + \cos(-300°)\sin(-330°) = 1.$
2. $\cos 570°\sin 510° - \sin 330°\cos 390° = 0.$
3. $\tan 225°\cot 405° + \tan 765°\cot 675° = 0.$

當角 A 爲下列各值時,求 $\cos A - \sin A$ 與 $\tan A + \cot A$ 之值.

4. $\frac{\pi}{3}$.　　5. $\frac{2\pi}{3}$.　　6. $\frac{5\pi}{4}$.　　7. $\frac{7\pi}{4}$.　　8. $\frac{11\pi}{3}$.

問小於 360° 之諸正角 A 合於下式者爲何?

9. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$.　　10. $\cos A = -\frac{1}{2}$.　　11. $\tan A = -1$.

12. $\cot A = -\sqrt{3}$.　　13. $\sec A = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.　　14. $\operatorname{cosec} A = -2$?

下列各題試以小於 45° 正角之函數表之.

15. $\sin(-65°)$.　　16. $\cos(-84°)$.　　17. $\tan 137°$.
18. $\sin 168°$.　　19. $\cos 287°$.　　20. $\tan(-246°)$.
21. $\sin 843°$.　　22. $\cos(-928°)$.　　23. $\tan 1145°$.
24. $\cos 1410°$.　　25. $\cot(-1054°)$.　　26. $\sec 1327°$.
27. $\operatorname{cosec}(-756°)$.

設 A 取下列諸值時，$\sin A+\cos A$ 之正負如何？

28. 140°. 29. 278°. 30. -356°. 31. -1125°.

設 A 取下列諸值時，$\sin A-\cos A$ 之正負如何？

32. 215°. 33. 825°. 34. -634°. 35. -457°.

36. 求小於 360° 諸正角之正弦及餘弦，已知其正切等於 $\cos 135^\circ$.

證明：

37. $\sin(270^\circ+A)=-\cos A$，與 $\tan(270^\circ+A)=-\cot A$.

38. $\cos(270^\circ-A)=-\sin A$，與 $\cot(270^\circ-A)=\tan A$.

39. $\cos A+\sin(270^\circ+A)-\sin(270^\circ-A)+\cos(180^\circ+A)=0$.

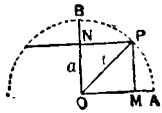
40. $\sec(270^\circ-A)\sec(90^\circ-A)-\tan(270^\circ-A)\tan(90^\circ+A)+1=0$.

41. $\cot A+\tan(180^\circ+A)+\tan(90^\circ+A)+\tan(360^\circ-A)=0$.

第 六 章

同函數諸角之普徧式

77. 求作一最小之正角,其正弦等於一眞分數 a.



設 OA 爲初線, OB 爲垂直於 OA 而取正向之線.

於線 OB 上截取 ON,其長爲 a. [若 a 爲負,則 N 將在 BO 之延長線上.]

過點 N 作 NP 平行於 OA. 以 O 爲圓心,單位長爲半徑,作圓交 NP 於 P.

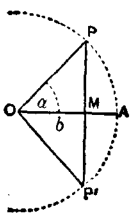
則 AOP 爲所求之角.

作 PM 垂直於 OA, 則

$$\sin AOP = \frac{MP}{OP} = \frac{ON}{OP} = \frac{a}{1} = a.$$

即 $\sin AOP$ 等於已知量 a, 故 AOP 爲所求之角.

78. 求作一最小之正角,其餘弦等於一眞分數 b.



於初線上取 OM 其長爲 b,復作 MP 垂直於 OA. [若 b 爲負,則點 M 在 O 之他方而位於 OA 之延長線上.]

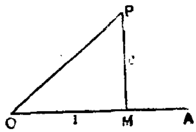
以 O 爲圓心,單位長爲半徑,作圓交 MP 於 P.

則 AOP 爲所求之角.因

$$\cos AOP=\frac{OM}{OP}=\frac{b}{1}=b.$$

79. 求作一最小之正角,其正切等於 c.

於初線上取 OM 等於單位長,次作一垂線 MP 其長爲 c.



則 $$\tan AOP=\frac{MP}{OM}=c,$$

故 AOP 爲所求之角.

80. 由第50節之定義,知定角之正弦恆爲定值.其逆理未必眞確;因合於已知正弦之角不止一個;例如角30°,150°,390°,−210°……之正弦皆爲 $\frac{1}{2}$.

由是已知某角之正弦,不能確定此角爲何;所知者祇知此角必爲諸角中之一耳.

對於已知某角之餘弦,正切或其他函數者,其理亦同.

由是祇知某角之一種函數,不能確定此角而無疑.

81. 設動徑 OP 與初線 OA 相合.則動徑當已轉過0周,或1周,2周,3周,……方向則或正或負.

若已轉過1周,則所經之角爲 2π 弳(第17節).

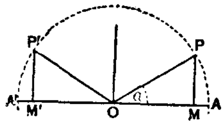
由是,OP 與 OA 相合時,則角已轉過 2π 弳之0,或1,或2,或3,……倍,方向則或正或負,卽此角爲0,或 $\pm 2\pi$,或 $\pm 4\pi$,或 $\pm 6\pi$,……弳.

簡言之,卽動徑與初線相合時,其所經之角爲 $2n\pi$,而 n 爲任何正或負之整數.

82. 定理 求同正弦諸角之普徧式[參閱第102節].

設合於已知正弦之一角爲 AOP, 命此角爲 α.

作 PM 垂直於 OA, 延長 MO 至 M', 使 OM' 等於 MO, 次作 $M'P'$ 與 MP 平行而相等.



依第72節所示,角 AOP' 等於 $\pi-\alpha$.

則當動徑轉至 OP 或 OP' 而不在其他地位時,所得諸角之正弦乃合於已知正弦之值.

當動徑轉至 OP 時,此線或已轉過幾周又角 α, 依上節所示,所得之角爲

$$2r\pi+\alpha \quad \cdots\cdots(1)$$

式中之 r 得爲零或諸正負整數.

當動徑轉至 OP' 時,其所得之角爲 $2r\pi+AOP'$, 卽角 $2r\pi+\pi-\alpha$.

或 $$(2r+1)\pi-\alpha \quad \cdots\cdots(2)$$

式中之 r 得爲零或諸正負整數.

以上兩式合併之卽得

$$n\pi+(-1)^n\alpha \quad \cdots\cdots(3)$$

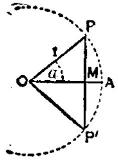
式中之 n 得爲零或任意之正或負整數.

若 n 爲偶數而等於 $2r$ 時,因 $(-1)^{2r}=1$, 則式(3)化爲 $2r\pi+\alpha$, 同於式(1).

若 n 爲奇數而等於 $2r+1$ 時,因 $(-1)^{2r+1}=-1$, 則式(3)化爲 $(2r+1)\pi-\alpha$, 同於式(2).

系 凡角之有同一正弦者必有同一之餘割,故式(3)亦爲與 α 同餘割諸角之普徧式.

83. 定理 求同餘弦諸角之普偏式[參閱第103節].



設合於已知餘弦之一角爲 AOP, 命此角爲 α.

作 PM 垂直於 OA, 復延長之至 P' 使 MP' 等於 PM.

當動徑轉至 OP 或 OP' 而不在其他地位時,依第78節所示,所得諸角之餘弦乃合於已知餘弦之值.

當動徑轉至 OP 時,此線或已轉過幾周又角 α, 卽 $2n\pi+\alpha$, n 得爲零或諸正負整數.

當動徑轉至 OP' 時,此線或已轉過幾周又角 $-\alpha$, 卽 $2n\pi-\alpha$.

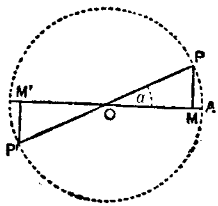
以上兩式合併之卽得

$$2n\pi\pm\alpha \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

式中之 n 得爲零或任意之正或負整數.

系 式(1)亦爲與 α 同正割諸角之普偏式.

84. 定理 求同正切諸角之普偏式[參閱第104節].



設合於已知正切之一角爲 AOP, 命此角爲 α.

延長 PO 至 P', 使 OP' 等於 OP, 復作 $P'M'$ 垂直於 OM'.

依第73節所示,角 AOP 與角 AOP' 有同一之正切,而角 $AOP'=\pi+\alpha$.

當動徑轉至 OP 時,此線或已轉過幾周又角 α, 卽所得之角爲

$$2r\pi+\alpha \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

式中之 r 得爲零或諸正負整數.

當動徑轉至 OP' 時,所得之角爲 $2r\pi+(\pi+\alpha)$,卽

$$(2r+1)\pi+\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以上兩式併合之卽得

$$n\pi+\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

式中之 n 得爲零或任意之正或負整數.

若 n 爲偶數而等於 $2r$ 時,式(3)乃同於式(1).

又,若 n 爲奇數而等於 $2r+1$ 時,式(3)乃同於式(2).

系 式(3)亦爲與 α 同餘切諸角之普偏式.

85. 在第82,83,84各節中,α 得爲合於條件之任意角.但於實際計算時則 α 常取適合之諸角中最小之正角.

例 1. 求諸角之普偏式:

(1) 其正弦爲 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

(2) 其餘弦爲 $-\frac{1}{2}$,

(3) 其正切爲 $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(1) 已知正弦爲 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 之最小角爲 $60°$,卽 $\frac{\pi}{3}$.

故依照第82節,同正弦諸角之普偏式爲

$$n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}.$$

(2) 已知最小之正角其餘弦爲 $-\frac{1}{2}$ 者爲 $120°$,卽 $\frac{2\pi}{3}$.

依照第83節,得同餘弦諸角之普偏式爲

$$2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$$

(3) 已知最小之正角其正切爲 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 者爲 $30°$,卽 $\frac{\pi}{6}$.

故依照第84節,得同正切諸角之普偏式爲

$$n\pi+\frac{\pi}{6}.$$

例 2. 問合於方程式 $\sin^2\theta=\frac{1}{4}$ 中 θ 之普徧式爲何?

今 $\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$.

取上號, $$\sin\theta=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore\quad \theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

取下號, $$\sin\theta=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\therefore\quad \theta=n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

合併兩式,得

$$\theta=n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{6},$$

即 $$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

例 3. 問合於兩方程式 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ 與 $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 中 θ 之普徧式爲何?

以小於360°之正角而言,合於 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ 之 θ 爲 210° 與 330°. 又合於 $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 之 θ 爲 30° 與 210°.

故小於 360° 之正角之合於兩方程式者爲 210° 即 $\frac{7\pi}{6}$.

於此角加四直角之倍數乃得普徧式,故所求之式爲 $2n\pi+\frac{7\pi}{6}$, n 爲任何正負整數.

習題十一

下列各方程式中 θ 之普徧式爲何

1. $\sin\theta=\frac{1}{2}$.
2. $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. $\cos\theta=-\frac{1}{2}$.
5. $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
6. $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
7. $\tan\theta=\sqrt{3}$.
8. $\tan\theta=-1$.
9. $\cot\theta=1$.
10. $\sec\theta=2$.
11. $\operatorname{cosec}\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}$.
12. $\sin^2\theta=1$.
13. $\cos^2\theta=\frac{1}{4}$.
14. $\tan^2\theta=\frac{1}{3}$.
15. $4\sin^2\theta=3$.
16. $2\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$.
17. $\sec^2\theta=\frac{4}{3}$?

18. 問合於次之方程式中 θ 之普徧式爲何

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \tan\theta=1?$$

19. 問合於次之方程式中 θ 之普徧式爲何

$$\cot\theta=-\sqrt{3},\qquad \operatorname{cosec}\theta=-2?$$

20. 若 $\cos(A-B)=\frac{1}{2}$, 又 $\sin(A+B)=\frac{1}{2}$, 求 A 與 B 之最小正角及其普徧式.

21. 若 $\tan(A-B)=1$, 又 $\sec(A+B)=\frac{2}{\sqrt{3}}$, 求 A 與 B 之最小正角及其普徧式.

22. 求小於 360° 之諸正角: 1) 其正弦爲 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (2) 其餘弦爲 $-\frac{1}{2}$, (3) 其正切爲 $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

23. 在 0° 與 180° 之間, x 之值有幾, 若 (1) $\sin x=\frac{5}{7}$, (2) $\cos x=\frac{1}{5}$, (3) $\cos x=-\frac{4}{5}$, (4) $\tan x=\frac{2}{3}$, $\cot x=-7$?

24. 已知角 x, 求作角 y, 若 (1) $\sin y=2\sin x$, (2) $\tan y=3\tan x$, (3) $\cos y=\frac{1}{2}\cos x$, (4) $\sec y=\operatorname{cosec}x$.

25. 求證次之兩式乃表示同一角度:

(1) $(2n-1)\frac{\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{3}$, (2) $2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$, n 爲任何整數.

26. 求證次之兩式:

$$(1)\ \left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\alpha \text{ 與 } (2)\ n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

表示同一角度, n 爲任何整數, 并作圖以明之.

27. 若 $\theta-\alpha=n\pi+(-1)^n\beta$, 求證 $\theta=2m\pi+\alpha+\beta$ 或 $\theta=(2m+1)\pi+\alpha-\beta$, m 與 n 爲任何之整數.

28. 若 $\cos p\theta+\cos q\theta=0$, 求證合於此方程式中 θ 之各值成兩等差級數, 其公差各爲 $\frac{2\pi}{p+q}$ 與 $\frac{2\pi}{p\sim q}$.

29. 求作一角其正弦爲 $\frac{3}{2+\sqrt{5}}$.

86. 方程式之含有三角函數者稱爲三角方程式.解三角方程式必須將合於此式之諸角悉數求得.茲舉關於三角方程式之簡單例題數則於下:

87. **例 1.** 解方程式 $2\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+1=0$.

此方程式得化爲

$$2-2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x+1=0,$$

卽

$$2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x-3=0,$$

卽

$$(\cos x-\sqrt{3})(2\cos x+\sqrt{3})=0.$$

故此方程式合於 $\cos x=\sqrt{3}$, 或 $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因角之餘弦不能大於1, 故第一因子無解.

餘弦等於 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 之最小正角爲 150°, 卽 $\frac{5\pi}{6}$.

故此角之普徧式爲 $2n\pi\pm\frac{5\pi}{6}$. (第83節.)

卽此題之普徧解答.

例 2. 解方程式 $\tan 5\theta=\cot 2\theta$.

此方程式得寫作

$$\tan 5\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right).$$

而角之與 $\frac{\pi}{2}-2\theta$ 有同一之正切者,依照第84節,其普徧式爲

$$n\pi+\frac{\pi}{2}-2\theta,$$

式中之 n 得爲任何正負整數.

故此方程式之普徧解答爲

$$5\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}-2\theta,$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{1}{7}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right),$$

式中之 n 爲任何整數.

習題十二

解方程式:

1. $\cos^2\theta-\sin\theta-\frac{1}{4}=0$.
2. $2\sin^2\theta+3\cos\theta=0$.
3. $2\sqrt{3}\cos^2\theta=\sin\theta$.
4. $\cos\theta+\cos^2\theta=1$.
5. $4\cos\theta-3\sec\theta=2\tan\theta$.
6. $\sin^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$.
7. $\tan^2\theta-(1+\sqrt{3})\tan\theta+\sqrt{3}=0$.
8. $\cot^2\theta+\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cot\theta+1=0$.

9. $\cot\theta - ab\tan\theta = a - b$.

10. $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$.

11. $\sec\theta - 1 = (\sqrt{2} - 1)\tan\theta$.

12. $3(\sec^2\theta + \tan^2\theta) = 5$.

13. $\cot\theta + \tan\theta = 2\operatorname{cosec}\theta$.

14. $4\cos^2\theta + \sqrt{3} = 2(\sqrt{3} + 1)\cos\theta$.

15. $3\sin^2\theta - 2\sin\theta = 1$.

16. $\sin 5\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

17. $\sin 9\theta = \sin\theta$.

18. $\sin 3\theta = \sin 2\theta$.

19. $\cos m\theta = \cos n\theta$.

20. $\sin 2\theta = \cos 3\theta$.

21. $\cos 5\theta = \cos 4\theta$.

22. $\cos m\theta = \sin n\theta$.

23. $\cot\theta = \cot 8\theta$.

24. $\cot\theta = \tan n\theta$.

25. $\tan 2\theta = \tan\frac{2}{\theta}$.

26. $\tan 2\theta \tan\theta = 1$.

27. $\tan^2 3\theta = \cot^2\alpha$.

28. $\tan 3\theta = \cot\theta$.

29. $\tan^2 3\theta = \tan^2\alpha$.

30. $3\tan^2\theta = 1$.

31. $\tan mx + \cot nx = 0$.

32. $\tan(\pi\cot\theta) = \cot(\pi\tan\theta)$

33. $\sin(\theta - \phi) = \frac{1}{2}$, 與 $\cos(\theta + \phi) = \frac{1}{2}$.

34. $\cos(2x + 3y) = \frac{1}{2}$, 與 $\cos(3x + 2y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

35. 求在 0° 與 90° 間合於次之方程式之諸角

$$\sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta + 2\operatorname{cosec}^2\theta = 8.$$

36. 若 $\tan^2\theta = \frac{5}{4}$, 求 vers θ 并說明所以有二解答之理。

37. 一角之餘矢為 $\frac{1}{3}$, 求此角之餘弦及餘切。

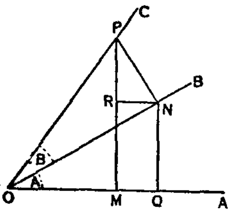
第七章

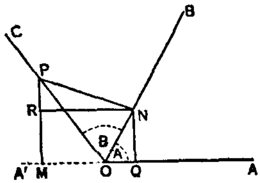
和差角之函數

88. 定理 求證

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$

及 $$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$





設一線由 OA 旋轉而得角 $AOB(=A)$, 復旋轉而得角 $BOC(=B)$.

於終線上之任何點 P, 作 PM 與 PN 各垂直於 OA 與 OB; 過點 N 作 NR 平行於 AO 與 MP 交於 R, 復作 NQ 垂直於 OA.

則 $$\angle RPN=90-\angle PNR=\angle RNO=\angle NOQ=A.$$

於是 $$\sin(A+B)=\sin AOP=\frac{MP}{OP}=\frac{MR+RP}{OP}$$

$$=\frac{QN}{OP}+\frac{RP}{OP}=\frac{QN}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{RP}{NP}\cdot\frac{NP}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\cos RPN\sin B.$$

$$\therefore\ \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

又 $$\cos(A+B)=\cos AOP=\frac{OM}{OP}=\frac{OQ-MQ}{OP}$$

$$=\frac{OQ}{OP}-\frac{RN}{OP}=\frac{OQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{RN}{NP}\cdot\frac{NP}{OP}$$

$$=\cos A\cos B-\sin RPN\sin B.$$

$$\therefore\ \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

89. 上節之圖形,A 與 B 僅限於銳角.實則任何大小之角皆可證明,惟對於量之正負須加注意耳.

上之結果,不須用作圖方法,可證其對於任何角皆能適合,其法如下.

依第 88 節所示,已知此定理對於 A 與 B 爲銳角時爲眞確.

設 $A_1=90°+A$,則依第 70 節之定理,知

$$\sin A_1=\cos A,\quad 又\quad \cos A_1=-\sin A.$$

則 $$\sin(A_1+B)=\sin[90°+(A+B)]=\cos(A+B)\qquad(第 70 節)$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\sin A_1\cos B+\cos A_1\sin B.$$

又 $$\cos(A_1+B)=\cos[90°+(A+B)]=-\sin(A+B)$$

$$=-\sin A\cos B-\cos A\sin B=\cos A_1\cos B-\sin A_1\sin B.$$

當角 B 增 90° 時,證法同上.

故第 88 節之公式當 A 或 B 增大 90° 時亦復眞確;即此公式可適應於 0° 與 180° 間之角.

同理,令 $A_2=90°+A_1$,則任何一角或兩角俱在 0° 與 270° 之間者,亦可證其適合於上之定理.

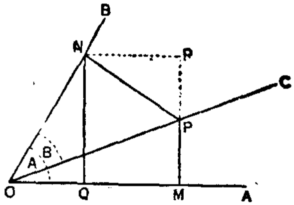
依此類推,知上之定理對於任何角皆能適合.

90. 定理 求證

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B,$$

及 $$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

設一線由 OA 旋轉而得角 $AOB(=A)$,次依相反方向旋轉



而得角 $BOC(=B)$. 則角 AOC 爲 $A-B$.

於終線上之任何點 P 作 PM 與 PN 各垂直於 OA 與 OB; 由 N 作 NQ 與 NR 各垂直於 OA 與 MP.

則 $$\angle RPN=90°-\angle PNR$$
$$=\angle RNB=\angle QON=A.$$

於是 $$\sin(A-B)=\sin AOC=\frac{MP}{OP}=\frac{MR-PR}{OP}=\frac{QN}{OP}-\frac{PR}{OP}$$
$$=\frac{QN}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$
$$=\sin A\cos B-\cos RPN\sin B,$$
$$\therefore\ \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

又 $$\cos(A-B)=\frac{OM}{OP}=\frac{OQ+QM}{OP}=\frac{OQ}{OP}+\frac{NR}{OP}$$
$$=\frac{OQ}{ON}\ \frac{ON}{OP}+\frac{NR}{NP}\ \frac{NP}{OP}$$
$$=\cos A\cos B+\sin NPR\sin B,$$
$$\therefore\ \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

91. 上節之證法可應用於任何角,惟須注意量之正負. 若上之公式對於銳角爲眞確,則可證其對於任何角爲眞確. 因,命 $A_1=90°+A$, 則 $\sin A_1=\cos A$. 又 $\cos A_1=-\sin A$.

故 $$\sin(A_1-B)=\sin[90°+(A-B)]=\cos(A-B)\qquad(\text{第 70 節})$$
$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$
$$=\sin A_1\cos B-\cos A_1\sin B.$$

又 $$\cos(A_1-B)=\cos[90°+(A-B)]=-\sin(A-B)\qquad(\text{第 70 節})$$
$$=-\sin A\cos B+\cos A\sin B$$
$$=\cos A_1\cos B+\sin A_1\sin B.$$

若 B 增 $90°$ 時,證法同上.

故上之定理,對於不大於兩直角之角,亦爲眞確.

次令 $A_2=90^\circ+A_1$, 吾人亦不難證明此定理對於小於三直角之角亦爲眞確,依此可以類推.

由是,用同法依次推演,可以證明此定理對於任何角皆爲眞確.

92. 第88節及第90節之定理,指出如何以兩角之函數表出其和角與差角之函數,此等定理稱爲**和差角定理**.

93. 例 1. 求 $\sin 75^\circ$ 與 $\cos 75^\circ$ 之值.

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

又
$$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

例 2. 求證 $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B,$

又 $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B.$

由第88節及第90節,得

$$\sin(A+B)\sin(A-B)=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$
$$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A-\sin^2 B.$$

復由同節,得

$$\cos(A+B)\cos(A-B)=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$$
$$=\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B=\cos^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\cos^2 A)\sin^2 B$$
$$=\cos^2 A-\sin^2 B.$$

例 3. 應用公式 $\sin(x+y)$ 及 $\cos(x+y)$, 導出公式 $\sin(x-y)$ 及 $\cos(x-y)$.

已知 $\sin x=\sin\{(x-y)+y\}=\sin(x-y)\cos y+\cos(x-y)\sin y$ ··················(1)

又 $\cos x=\cos\{(x-y)+y\}=\cos(x-y)\cos y-\sin(x-y)\sin y$ ··················(2)

以 $\cos y$ 乘 (1) 復以 $\sin y$ 乘 (2) 然後相減,得

$$\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)\{\cos^2 y+\sin^2 y\}=\sin(x-y).$$

以 $\sin y$ 乘 (1) 復以 $\cos y$ 乘 (2) 然後相加,得

$$\sin x\sin y+\cos x\cos y=\cos(x-y)\{\cos^2 y+\sin^2 y\}=\cos(x-y).$$

故所求之兩公式業已證明.

此兩公式對於任何角皆爲眞確,因用以證明此兩式之公式對於任何角皆爲眞確也.

習題十三

1. 若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{9}{41}$, 求 $\sin(\alpha-\beta)$ 與 $\cos(\alpha+\beta)$ 之值.試作一精確圖形以證之.

2. 若 $\sin\alpha=\frac{45}{53}$, $\sin\beta=\frac{33}{65}$, 求 $\sin(\alpha-\beta)$ 與 $\sin(\alpha+\beta)$ 之值.

3. 若 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$, $\cos\beta=\frac{12}{13}$, 求 $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ 與 $\tan(\alpha+\beta)$ 之值.并作圖以證之.

證次之恆等式.

4. $\cos(45^\circ-A)\cos(45^\circ-B)-\sin(45^\circ-A)\sin(45^\circ-B)=\sin(A+B)$.

5. $\sin(45^\circ+A)\cos(45^\circ-B)+\cos(45^\circ+A)\sin(45^\circ-B)=\cos(A-B)$.

6. $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$.

7. $\sin 105^\circ+\cos 105^\circ=\cos 45^\circ$.

8. $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=\cos 105^\circ+\cos 15^\circ$.

9. $\cos\alpha\cos(\gamma-\alpha)-\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)=\cos\gamma$.

10. $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos(\beta+\gamma)\cos\alpha=\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)$.

11. $\sin(n+1)A\sin(n-1)A+\cos(n+1)A\cos(n-1)A=\cos 2A$.

12. $\sin(n+1)A\sin(n+2)A+\cos(n+1)A\cos(n+2)A=\cos A$.

94. 由第88及第90兩節,知不論 A 與 B 之值爲何,恆得

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$

又
$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

加減以上兩式,得

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B\cdots\cdots\cdots(1)$$

與
$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B\cdots\cdots\cdots(2)$$

復由同節,知不論 A 與 B 之值爲何,得

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B,$$

又
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

加減以上兩式,得

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B \quad \cdots\cdots(3)$$

及
$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B \quad \cdots\cdots(4)$$

令 $A+B=C$, 又 $A-B=D$, 則

$$A=\frac{C+D}{2}, \qquad B=\frac{C-D}{2}.$$

將此代入上之(1)至(4)諸式,不論 C 與 D 之值爲何,恆得

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad \cdots\cdots \mathrm{I}$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \quad \cdots\cdots \mathrm{II}$$

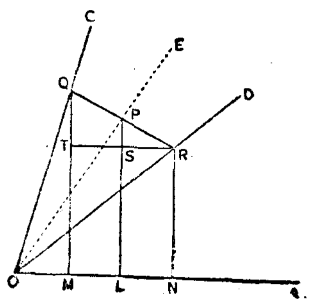
$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad \cdots\cdots \mathrm{III}$$

及
$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2} \quad \cdots\cdots \mathrm{IV}$$

[學者應特別注意於 IV 式右節之第二因子爲 $\frac{D-C}{2}$ 而非 $\frac{C-D}{2}$]

95. 以上 I 至 IV 四式非常重要,必須熟記.

因上式之重要,茲復用幾何方法證之,惟 C 與 D 則限於銳角.



設 AOC 爲角 C 而 AOD 爲角 D. 作 OE 平分角 COD. 於線 OE 上之任一點 P 作 QPR 垂直於 OP 各交 OC 與 OD 於 Q 與 R 兩點.

作 PL, QM, RN 皆垂直於 OA, 過 R 作 RST 垂直於 PL 或 QM 交此兩線於 S 與 T 兩點.

因角 DOC 爲 $C-D$, 則角 DOE 與 EOC 皆爲 $\frac{C-D}{2}$, 又 $\angle AOE=\angle AOD+\angle DOE=D+\frac{C-D}{2}=\frac{C+D}{2}$.

今三角形 POR 與 POQ 爲全同三角形, 則 $OQ=OR$, 又 $PR=PQ$, 故

$$RQ=2RP.$$

從而 $QT=2PS$, 又 $RT=2RS$, 即 $MN=2ML$.

故 $$MQ+NR=TQ+2LS=2SP+2LS=2LP.$$

又 $$OM+ON=2OM+MN=2OM+2ML=2OL.$$

於是 $$\sin C+\sin D=\frac{MQ}{OQ}+\frac{NR}{OR}=\frac{MQ+NR}{OR}$$

$$=\frac{2LP}{OR}=2\frac{LP}{OP}\cdot\frac{OP}{OR}=2\sin LOP\cos POR$$

$$=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$$

次 $$\sin C-\sin D=\frac{MQ}{OQ}-\frac{NR}{OR}=\frac{MQ-NR}{OR}=\frac{TQ}{OR}$$

$$=2\frac{SP}{OR}=2\frac{SP}{RP}\cdot\frac{RP}{OR}=2\cos SPR\sin ROP$$

$$=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$$

$\left[\text{因 } \angle SPR = 90^\circ - \angle SPO = \angle LOP = \dfrac{C+D}{2}.\right]$

又 $$\cos C + \cos D = \frac{OM}{OQ} + \frac{ON}{OR} = \frac{OM+ON}{OR}$$

$$= 2\frac{OL}{OR} = 2\frac{OL}{OP} \cdot \frac{OP}{OR}$$

$$= 2\cos LOP \cos POR$$

$$= 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$$

終得 $$\cos D - \cos C = \frac{ON}{OR} - \frac{OM}{OQ} = \frac{ON-OM}{OR}$$

$$= \frac{MN}{OR} = 2\frac{SR}{OR} = \frac{2SR}{PR} \cdot \frac{PR}{OR}$$

$$= 2\sin SPR \sin POR$$

$$= 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$$

96. 對於上節諸公式及其應用方法,學者必須熟習;苟能熟習則將來自易進步.

此諸公式之大用,在於變和與差為積,學者或已習代數,即知化積後可應用對數,計算時便利多矣.

茲附數例以示其應用.

例 1. $\sin 6\theta + \sin 4\theta = 2\sin\dfrac{6\theta+4\theta}{2}\cos\dfrac{6\theta-4\theta}{2} = 2\sin 5\theta\cos\theta.$

例 2. $\cos 3\theta - \cos 7\theta = 2\sin\dfrac{3\theta+7\theta}{2}\sin\dfrac{7\theta-3\theta}{2} = 2\sin 5\theta\sin 2\theta$

例 3. $$\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \frac{2\cos\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\dfrac{75^\circ-15^\circ}{2}}{2\cos\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{75^\circ-15^\circ}{2}} = \frac{2\cos 45^\circ\sin 30^\circ}{2\cos 45^\circ\cos 30^\circ}$$

$$= \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.57735\cdots\cdots$$

[觀於此例,即知應用公式之妙否則必須於表中查得 sin 75°, sin 15°, cos 75° 及 cos 15°, 然後作一甚繁之小數除法.]

例 4. 簡化 $\frac{(\cos\theta-\cos 3\theta)(\sin 8\theta+\sin 2\theta)}{(\sin 5\theta-\sin\theta)(\cos 4\theta-\cos 6\theta)}$.

應用第 94 節之公式,則原式

$$=\frac{2\sin\frac{\theta+3\theta}{2}\sin\frac{3\theta-\theta}{2}\times 2\sin\frac{8\theta+2\theta}{2}\cos\frac{8\theta-2\theta}{2}}{2\cos\frac{5\theta+\theta}{2}\sin\frac{5\theta-\theta}{2}\times 2\sin\frac{4\theta+6\theta}{2}\sin\frac{6\theta-4\theta}{2}}$$

$$=\frac{4\cdot\sin 2\theta\sin\theta\cdot\sin 5\theta\cos 3\theta}{4\cdot\cos 3\theta\sin 2\theta\cdot\sin 5\theta\sin\theta}=1.$$

習題十四

求證

1. $\frac{\sin 7\theta-\sin 5\theta}{\cos 7\theta+\cos 5\theta}=\tan\theta.$

2. $\frac{\cos 6\theta-\cos 4\theta}{\sin 6\theta+\sin 4\theta}=-\tan\theta.$

3. $\frac{\sin A+\sin 3A}{\cos A+\cos 3A}=\tan 2A.$

4. $\frac{\sin 7A-\sin A}{\sin 8A-\sin 2A}=\cos 4A\sec 5A.$

5. $\frac{\cos 2B+\cos 2A}{\cos 2B-\cos 2A}=\cot(A+B)\cot(A-B).$

6. $\frac{\sin 2A+\sin 2B}{\sin 2A-\sin 2B}=\frac{\tan(A+B)}{\tan(A-B)}.$

7. $\frac{\sin A+\sin 2A}{\cos A-\cos 2A}=\cot\frac{A}{2}.$

8. $\frac{\sin 5A-\sin 3A}{\cos 3A+\cos 5A}=\tan A.$

9. $\frac{\cos 2B-\cos 2A}{\sin 2B+\sin 2A}=\tan(A-B).$

10. $\cos(A+B)+\sin(A-B)=2\sin(45°+A)\cos(45°+B).$

11. $\frac{\cos 3A-\cos A}{\sin 3A-\sin A}+\frac{\cos 2A-\cos 4A}{\sin 4A-\sin 2A}=\frac{\sin A}{\cos 2A\cos 3A}.$

12. $\frac{\sin(4A-2B)+\sin(4B-2A)}{\cos(4A-2B)+\cos(4B-2A)}=\tan(A+B).$

13. $\frac{\tan 5\theta+\tan 3\theta}{\tan 5\theta-\tan 3\theta}=4\cos 2\theta\cos 4\theta.$

14. $\frac{\cos 3\theta+2\cos 5\theta+\cos 7\theta}{\cos\theta+2\cos 3\theta+\cos 5\theta}=\cos 2\theta-\sin 2\theta\tan 3\theta.$

15. $\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A+\sin 7A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A}=\tan 4A.$

16. $\dfrac{\sin(\theta+\phi)-2\sin\theta+\sin(\theta-\phi)}{\cos(\theta+\phi)-2\cos\theta+\cos(\theta-\phi)}=\tan\theta.$

17. $\dfrac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}=\dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}.$

18. $\dfrac{\sin(A-C)+2\sin A+\sin(A+C)}{\sin(B-C)+2\sin B+\sin(B+C)}=\dfrac{\sin A}{\sin B}.$

19. $\dfrac{\sin A-\sin 5A+\sin 9A-\sin 13A}{\cos A-\cos 5A-\cos 9A+\cos 13A}=\cot 4A.$

20. $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\tan\dfrac{A+B}{2}\cot\dfrac{A-B}{2}.$

21. $\dfrac{\cos A+\cos B}{\cos B-\cos A}=\cot\dfrac{A+B}{2}\cot\dfrac{A-B}{2}.$

22. $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\tan\dfrac{A+B}{2}.$

23. $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}=\cot\dfrac{A+B}{2}.$

24. $\dfrac{\cos(A+B+C)+\cos(-A+B+C)+\cos(A-B+C)+\cos(A+B-C)}{\sin(A+B+C)+\sin(-A+B+C)-\sin(A-B+C)+\sin(A+B-C)}=\cot B.$

25. $\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A+\cos 15A=4\cos 4A\cos 5A\cos 6A.$

26. $\cos(-A+B+C)+\cos(A-B+C)+\cos(A+B-C)+\cos(A+B+C)$
$=4\cos A\cos B\cos C.$

27. $\sin 50^\circ-\sin 70^\circ+\sin 10^\circ=0.$

28. $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=\sin 70^\circ+\sin 80^\circ.$

29. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha}{2}\sin 3\alpha.$

簡化

30. $\cos\{\theta+(n-\frac{3}{2})\phi\}-\cos\{\theta+(n+\frac{3}{2})\phi\}.$

31. $\sin\{\theta+(n-\frac{1}{2})\phi\}+\sin\{\theta+(n+\frac{1}{2})\phi\}.$

97　第 94 節之公式 (1), (2), (3), (4) 亦甚重要，應熟記之，其式爲

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)\ \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以上可視爲由第94節I—IV之諸公式轉變而成.

例 1. $2\sin 3\theta\cos\theta=\sin 4\theta+\sin 2\theta$.

例 2 $2\sin 5\theta\sin 3\theta=\cos 2\theta-\cos 8\theta$.

例 3. $2\cos 11\theta\cos 2\theta=\cos 13\theta+\cos 9\theta$.

例 4. 簡化 $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}$.

應用上之公式,原式

$$=\frac{\frac{1}{2}[\sin 9\theta+\sin 7\theta]-\frac{1}{2}[\sin 9\theta+\sin 3\theta]}{\frac{1}{2}[\cos 3\theta+\cos\theta]-\frac{1}{2}[\cos\theta-\cos 7\theta]}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}$$

$$=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos 2\theta}\qquad\text{[第 94 節]}$$

$$=\tan 2\theta.$$

[學者應注意此題之解法在先應用本節公式,然後再用與第94節相反之公式使之簡化.此種技巧,解題時甚爲有用.]

習題十五

以和或差表示下式:

1. $2\sin 5\theta\sin 7\theta$.
2. $2\cos 7\theta\sin 5\theta$.
3. $2\cos 11\theta\cos 3\theta$.
4. $2\sin 54^\circ\sin 66^\circ$.

求證

5. $\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{7\theta}{2}+\sin\dfrac{3\theta}{2}\sin\dfrac{11\theta}{2}=\sin 2\theta\sin 5\theta$.

6. $\cos 2\theta\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos 3\theta\cos\dfrac{9\theta}{2}=\sin 5\theta\sin\dfrac{5\theta}{2}$.

7. $\sin A\sin(A+2B)-\sin B\sin(B+2A)=\sin(A-B)\sin(A+B)$.

8. $(\sin 3A+\sin A)\sin A+(\cos 3A-\cos A)\cos A=0$.

9. $\dfrac{2\sin(A-C)\cos C-\sin(A-2C)}{2\sin(B-C)\cos C-\sin(B-2C)}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$.

10. $\dfrac{\sin A\sin 2A+\sin 3A\sin 6A+\sin 4A\sin 13A}{\sin A\cos 2A+\sin 3A\cos 6A+\sin 4A\cos 13A}=\tan 9A$.

11. $\dfrac{\cos 2A\cos 3A-\cos 2A\cos 7A+\cos A\cos 10A}{\sin 4A\sin 3A-\sin 2A\sin 5A+\sin 4A\sin 7A}=\cot 6A\cot 5A.$

12. $\cos(36^\circ-A)\cos(36^\circ+A)+\cos(54^\circ+A)\cos(54^\circ-A)=\cos 2A.$

13. $\cos A\sin(B-C)+\cos B\sin(C-A)+\cos C\sin(A-B)=0.$

14. $\sin(45^\circ+A)\sin(45^\circ-A)=\frac{1}{2}\cos 2A.$

15. $\operatorname{vers}(A+B)\operatorname{vers}(A-B)=(\cos A-\cos B)^2.$

16. $\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\delta)+\sin(\gamma-\alpha)\cos(\beta-\delta)+\sin(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\delta)=0.$

17. $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0.$

98　求證　$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B},$

與　$\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$

由第88節,知不論 A, B 之值爲何,得

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}}{1-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}\text{[分子分母各以} \cos A\cos B \text{除之]}$$

$$\therefore\ \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

次由第90節,

$$\tan(A-B)=\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}-\dfrac{\sin B}{\cos B}}{1+\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}\qquad\text{[除法同上]}$$

$$\therefore\ \tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

99. 上節之公式亦可用第88節與第90節之圖形求得.

(1) 由第88節之圖,得

$$\tan(A+B)=\frac{MP}{OM}=\frac{QN+RP}{OQ-RN}=\frac{\frac{QN}{OQ}+\frac{RP}{OQ}}{1-\frac{RN}{OQ}}=\frac{\tan A+\frac{RP}{OQ}}{1-\frac{RN}{RP}\cdot\frac{RP}{OQ}}.$$

但,因角 RPN 與角 QON 相等,則三角形 RPN 與 QON 相似,故

$$\frac{RP}{PN}=\frac{OQ}{ON},$$

於是

$$\frac{RP}{OQ}=\frac{PN}{ON}=\tan B.$$

故

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan RPN\ \tan B}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\ \tan B}$$

(2) 由第90節之圖,得

$$\tan(A-B)=\frac{MP}{OM}=\frac{QN-PR}{OQ+NR}=\frac{\frac{QN}{OQ}-\frac{PR}{OQ}}{1+\frac{NR}{OQ}}=\frac{\tan A-\frac{PR}{OQ}}{1+\frac{NR}{PR}\cdot\frac{PR}{OQ}}.$$

但,因角 RPN 與角 NOQ 相等,故 $\frac{RP}{PN}=\frac{OQ}{ON}$,

於是

$$\frac{PR}{OQ}=\frac{PN}{ON}=\tan B.$$

故

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan RPN\ \tan B}=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\ \tan B}.$$

100. 於上之公式中,命 B 等於 $45°$,則得次之特別式,

$$\tan(A+45°)=\frac{\tan A+1}{1-\tan A}=\frac{1+\tan A}{1-\tan A},$$

又

$$\tan(A-45°)=\frac{\tan A-1}{1+\tan A}.$$

同樣,如第98節證法,得證

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B},$$

及

$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

101. 例 1. $\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$$=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}.$$

$$=2+1.73205\cdots\cdots=3.73205\cdots\cdots.$$

例 2. $\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$$

$$=2-1.73205\cdots\cdots=0.26795\cdots\cdots$$

習題十六

1. 若 $\tan A=\frac{1}{2}$ 又 $\tan B=\frac{1}{3}$，求 $\tan(2A+B)$ 與 $\tan(2A-B)$ 之值.并作一精確圖形以證之.

2. 若 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ 又 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$，求證

$$\tan(A-B)=0.375.$$

3. 若 $\tan A=\dfrac{n}{n+1}$ 又 $\tan B=\dfrac{1}{2n+1}$，求 $\tan(A+B)$.

4. 若 $\tan\alpha=\dfrac{5}{6}$ 又 $\tan\beta=\dfrac{1}{11}$，求證 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，并作一精確圖形以證之.

求證

5. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)\times\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}+\theta\right)=-1.$

6. $\cot\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)\times\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=1.$

7. $1+\tan A\tan\dfrac{A}{2}=\tan A\cot\dfrac{A}{2}-1=\sec A.$

8. 試作兩銳角其正切各為 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{1}{2}$，且用量法以證此兩角之和為 45°.

9. 兩銳角之正切各為 3 與 2；試以圖形證此兩角差之正切為 $\frac{1}{7}$.

10. 一銳角之正弦為 0.6 而他角之餘弦為 0.5. 試以圖形及計算兩種方法，證兩角差之正弦約為 0.39.

11. 試作一正角其餘弦為 0.4，然後用度量及計算兩種方法證明較此

角大45°之角其正弦及餘弦之近似値各爲0 93與 −0.365.

12. 試作一銳角其正切爲7,另一銳角其正弦爲0.7;然後用度量及計算兩種方法證明此兩角差之正弦約爲0.61.

102. 作爲例題,吾人可用本章諸公式求得同正弦,餘弦,或正切諸角之普徧式.而此諸普徧式則於第82至第84各節早已證明者.

求同正弦諸角之普徧式.

設α爲一角其正弦爲已知,θ則爲具有同一正弦之他角.吾人欲求θ之普徧值,而θ乃合於下之方程式者

$$\sin\theta=\sin\alpha,\text{ 卽 }\sin\theta-\sin\alpha=0.$$

可寫爲
$$2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0,$$

亦卽適合於
$$\cos\frac{\theta+\alpha}{2}=0,\text{ 及 }\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0.$$

卽
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\theta+\alpha}{2}=\dfrac{\pi}{2}\text{之任意奇數倍}\\ \dfrac{\theta-\alpha}{2}=\pi\text{之任意倍}\end{array}\right\},$$
又

亦卽 $\theta=-\alpha+\pi$之任意之奇數倍……(1)

又 $\theta=\alpha+\pi$之任意之偶數倍……(2)

因此$\theta=(-1)^n\alpha+n\pi$,此n得爲零或任何正負整數.

因,當n爲奇數,則此式同於(1),爲偶數,則同於(2).

103. 求同餘弦諸角之普徧式.

現在所求解之方程式爲

$$\cos\theta=\cos\alpha,$$

卽
$$\cos\alpha-\cos\theta=0,$$

即 $$2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0,$$

亦即適合於

$$\sin\frac{\theta+\alpha}{2}=0,\ 與\ \sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0,$$

即 $$\frac{\theta+\alpha}{2}=\pi\text{ 之任意倍},$$

及 $$\frac{\theta-\alpha}{2}=\pi\text{ 之任意倍},$$

亦即 $$\theta=-\alpha+2\pi\text{ 之任意倍},$$

及 $$\theta=\alpha+2\pi\text{ 之任意倍}.$$

以上兩式俱概括於 $\theta=2n\pi\pm\alpha$ 一式內，此 n 得爲零或任何正負整數.

104. 求同正切諸角之普偏式.

現在所求解之方程式爲

$$\tan\theta-\tan\alpha=0,$$

即 $$\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha=0,$$

即 $$\sin(\theta-\alpha)=0,$$

$$\therefore\ \theta-\alpha=\pi\text{ 之任意倍}$$

$$=n\pi,\text{ 此 } n \text{ 得爲零或任何之正負整數}.$$

於是普偏式爲 $$\theta=n\pi+\alpha.$$

第八章

倍角與部分角之函數

105. 求一角 $2A$ 之函數以角 A 之函數表之.

於第88節之公式中,令 $B=A$, 則得

$$\sin 2A=\sin A\cos A+\cos A\sin A=2\sin A\cos A,$$

$$\cos 2A=\cos A\cos A-\sin A\sin A=\cos^2 A-\sin^2 A$$

$$=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A=1-2\sin^2 A,$$

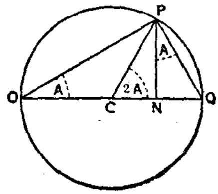
又

$$=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)=2\cos^2 A-1;$$

$$\tan 2A=\frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\tan A}=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.$$

吾人已知第88節之公式不論 A 與 B 之值如何恆爲眞確,則由彼所導出之以上諸公式,不論 A 之值爲何均屬眞確,顯然可見.

106. 上之公式在角 A 小於直角時,更可用幾何方法獨立證明.



設 QCP 等於角 $2A$.

以 C 爲圓心 CP 爲半徑作圓,交 QC 之延長線於 O.

聯接 OP 及 PQ, 作 PN 垂直於 OQ.

依幾何學定理知

$$\angle QOP=\tfrac{1}{2}\angle QCP=A,$$

又　$$\angle NPQ=\angle QOP=A.$$

於是

$$\sin 2A=\frac{NP}{CP}=\frac{2NP}{2CQ}=2\frac{NP}{OQ}=2\frac{NP}{OP}\cdot\frac{OP}{CQ}$$

$=2\sin NOP\cos PCQ$, 因 OPQ 爲一直角,

$=2\sin A\cos A$;

又　$$\cos 2A=\frac{CN}{CP}=\frac{2CN}{OQ}=\frac{(OC+CN)-(OC-CN)}{CQ}$$

$$=\frac{ON-NQ}{OQ}=\frac{ON}{OP}\cdot\frac{OP}{OQ}-\frac{NQ}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OQ}$$

$=\cos^2 A-\sin^2 A.$

又　$$\tan 2A=\frac{NP}{CN}=\frac{2NP}{ON-NQ}=\frac{2\frac{NP}{ON}}{1-\frac{NQ}{PN}\cdot\frac{PN}{ON}}=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.$$

例. 求 $\sin 15^\circ$ 與 $\cos 15^\circ$ 之值.

設角 $2A$ 爲 30°, 則角 A 爲 15°.

復設半徑 CP 爲 $2a$, 則得

$$CN=2a\cos 30^\circ=a\sqrt{3},$$

又　$$NP=2a\sin 30^\circ=a.$$

於是　$$ON=OC+CN=a(2+\sqrt{3}),$$

又　$$NQ=CQ-CN=a(2-\sqrt{3}),$$

$$\therefore\quad OP^2=ON\cdot OQ=a(2+\sqrt{3})\times 4a,$$

故　$$OP=a\sqrt{2}(\sqrt{3}+1),$$

又　$$PQ^2=QN\cdot QO=a(2-\sqrt{3})\times 4a,$$

故　$$PQ=a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1).$$

因得 $$\sin 15^\circ=\frac{PQ}{OQ}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

又 $$\cos 15^\circ=\frac{OP}{OQ}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

107. 求以角 A 之函數表角 $3A$ 之函數.

由第 88 節,命 $B=2A$, 則得

$$\sin 3A=\sin(A+2A)=\sin A\cos 2A+\cos A\sin 2A$$
$$=\sin A(1-2\sin^2 A)+\cos A\cdot 2\sin A\cos A \quad (\text{第 105 節})$$
$$=\sin A(1-2\sin^2 A)+2\sin A(1-\sin^2 A).$$

故得 $$\mathbf{\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A} \cdots\cdots\cdots(1)$$

次 $$\cos 3A=\cos(A+2A)=\cos A\cos 2A-\sin A\sin 2A$$
$$=\cos A(2\cos^2 A-1)-\sin A\cdot 2\sin A\cos A$$
$$=\cos A(2\cos^2 A-1)-2\cos A(1-\cos^2 A).$$

故得 $$\mathbf{\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A} \cdots\cdots\cdots(2)$$

復次 $$\tan 3A=\tan(A+2A)=\frac{\tan A+\tan 2A}{1-\tan A\tan 2A}$$

$$=\frac{\tan A+\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}{1-\tan A\cdot\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}=\frac{\tan A(1-\tan^2 A)+2\tan A}{(1-\tan^2 A)-2\tan^2 A}.$$

故得 $$\mathbf{\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}}.$$

[(1), (2) 兩式除記號不同外,頗爲類似,學者每覺易於混淆,難於記憶.如或發生疑問,可將特別角之值代入以驗之,如以 $A=30^\circ$ 代入式 (1), 而以 $A=0^\circ$ 代入式 (2) 是也.]

108. 用與上節類似之方法,θ 之多倍角之函數亦得以角 θ 之函數表之,但不免於煩冗.下一章將有較佳之方法可以使用.

例. 求以 $\cos\theta$ 表 $\cos 5\theta$.

$$\cos 5\theta=\cos(3\theta+2\theta)$$
$$=\cos 3\theta\cos 2\theta-\sin 3\theta\sin 2\theta$$
$$=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)(2\cos^2\theta-1)$$
$$-(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$
$$=(8\cos^5\theta-10\cos^3\theta+3\cos\theta)-2\cos\theta\sin^2\theta\,3-4\sin^2\theta)$$
$$=8\cos^5\theta-10\cos^3\theta+3\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)(4\cos^2\theta-1)$$
$$=8\cos^5\theta-10\cos^3\theta+3\cos\theta-2\cos\theta(5\cos^2\theta-4\cos^4\theta-1)$$
$$=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta.$$

習 題 十 七

1. 求 $\sin 2\alpha$ 之值,已知

(1) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,　(2) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$,　(3) $\tan\alpha=\frac{16}{63}$.

2. 求 $\cos 2\alpha$ 之值,已知

(1) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$,　(2) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,　(3) $\tan\alpha=\frac{5}{12}$.

并作圖以證之.

3. 若 $\tan\theta=\frac{b}{a}$, 求 $a\cos 2\theta+b\sin 2\theta$ 之值.

證明

4. $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$.

5. $\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\cot A$.

6. $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$.

7. $\tan A+\cot A=2\operatorname{cosec} 2A$.

8. $\tan A-\cot A=-2\cot 2A$.

9. $\operatorname{cosec} 2A+\cot 2A=\cot A$.

10. $\frac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}$.

11. $\frac{\cos A}{1\mp\sin A}=\tan\left(45^\circ\pm\frac{A}{2}\right)$.

12. $\frac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\frac{\tan 8A}{\tan 2A}$.

13. $\frac{1+\tan^2(45^\circ-A)}{1-\tan^2(45^\circ-A)}=\operatorname{cosec} 2A$.

14. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

15. $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B)$.

16. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=2\tan 2\theta$.

17. $\dfrac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}-\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}=2\tan 2A$.

18. $\cot(A+15^\circ)-\tan(A-15^\circ)=\dfrac{4\cos 2A}{1+2\sin 2A}$.

19. $\dfrac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta$.

20. $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\tan\dfrac{\theta}{2}$.

21. $\dfrac{\sin(n+1)A-\sin(n-1)A}{\cos(n+1)A+2\cos nA+\cos(n-1)A}=\tan\dfrac{A}{2}$.

22. $\dfrac{\sin(n+1)A+2\sin nA+\sin(n-1)A}{\cos(n-1)A-\cos(n+1)A}=\cot\dfrac{A}{2}$.

23. $\sin(2n+1)A\sin A=\sin^2(n+1)A-\sin^2 nA$.

24. $\dfrac{\sin(A+3B)+\sin(3A+B)}{\sin 2A+\sin 2B}=2\cos(A+B)$.

25. $\sin 3A+\sin 2A-\sin A=4\sin A\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{3A}{2}$.

26. $\tan 2A=(\sec 2A+1)\sqrt{\sec^2 A-1}$.

27. $\cos^3 2\theta+3\cos 2\theta=4(\cos^6\theta-\sin^6\theta)$.

28. $1+\cos^2 2\theta=2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$.

29. $\sec^2 A(1+\sec 2A)=2\sec 2A$.

30. $\operatorname{cosec} A-2\cot 2A\cos A=2\sin A$.

31. $\cot A=\dfrac{1}{2}\left(\cot\dfrac{A}{2}-\tan\dfrac{A}{2}\right)$.

32. $\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$

33. $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha$

34. $\cot\alpha+\cot(60^\circ+\alpha)-\cot(60^\circ-\alpha)=3\cot 3\alpha$.

35. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ=\dfrac{1}{16}$.

36. $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\dfrac{3}{16}$.

37. $\cos 4\alpha=1-8\cos^2\alpha+8\cos^4\alpha$.

38. $\sin 4A=4\sin A\cos^3 A-4\cos A\sin^3 A$.

39. $\cos 6\alpha=32\cos^6\alpha-48\cos^4\alpha+18\cos^2\alpha-1$.

40. $\tan 3A\tan 2A\tan A=\tan 3A-\tan 2A-\tan A$.

41. $\dfrac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}=(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)(2\cos 2^2\theta-1)\cdots\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1)$.

部　分　角

109. 第 105 節之公式不論 A 之值如何恆爲眞確,若以 $\frac{A}{2}$ 代 A 當然亦爲眞確,式中之 $2A$ 則以 $2\cdot\frac{A}{2}$ 即 A 代之;則得次之關係式

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=2\cos^2\frac{A}{2}-1=1-2\sin^2\frac{A}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由 (1), 又得

$$\sin A=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}},$$

分子分母同以 $\cos^2\frac{A}{2}$ 除之.

又
$$\cos A=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}.$$

110. 求以 $\cos A$ 表角 $\frac{A}{2}$ 之函數.

由上節之式 (2), 得

$$\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2},$$

則
$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A,$$

故
$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \quad\cdots\cdots(1)$$

又
$$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1,$$

則
$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A,$$

故
$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \quad\cdots\cdots(2)$$

由是
$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \quad\cdots\cdots(3)$$

111. 上述諸式其前皆有一歧號.在特種情況下,亦不難決定其正確之符號,茲舉例以明之.

例 1. 已知 $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 求 $\sin 22\frac{1}{2}°$ 及 $\cos 22\frac{1}{2}°$.

於上節之式(1),命 A 等於 45.

$$\sin 22\tfrac{1}{2}° = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

今 $\sin 22\frac{1}{2}°$ 必爲正,因取正號.

故
$$\sin 22\tfrac{1}{2}° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

又
$$\cos 22\tfrac{1}{2}° = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

今 $\cos 22\frac{1}{2}°$ 亦爲正;

$$\therefore\quad \cos 22\tfrac{1}{2}° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

例 2. 已知 $\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\sin 165°$ 及 $\cos 165°$.

由式(1)得

$$\sin 165^\circ=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 330^\circ}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}=\pm\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

又 $$\cos 165^\circ=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 330^\circ}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}}=\pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

今 165° 在 90° 與 180° 之間,故由第52節,知其正弦爲正而餘弦爲負.

故 $$\sin 165^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos 165^\circ=-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

由上之兩例,可見角 A 及其餘弦爲已知,則半角函數之符號即可決定,無須再有歧號.

惟祇知 $\cos A$ 而欲求 $\sin\frac{A}{2}$ 及 $\cos\frac{A}{2}$,則不免有所分歧,至所以分歧之故,當於下節討論之.

112. 解釋 $\sin\frac{A}{2}$ 與 $\cos\frac{A}{2}$ 之由 $\cos A$ 求得者所以有歧號之故.

若 n 爲任何整數,則得

$$\cos A=\cos(2n\pi\pm A). \qquad \text{(第83節)}$$

今設此值爲 k,則 k 所以表 $\cos\frac{A}{2}$ 者,亦所以表 $\cos\frac{2n\pi\pm A}{2}$,

而 $$\cos\frac{2n\pi\pm A}{2}=\cos\left(n\pi\pm\frac{A}{2}\right)$$

$$=\cos n\pi\cos\frac{A}{2}\mp\sin n\pi\sin\frac{A}{2}=\cos n\pi\cos\frac{A}{2}$$

$$=\pm\cos\frac{A}{2}$$ 視 n 爲偶數或奇數而定.

同理,凡 k 所以表 $\sin\frac{A}{2}$ 者,亦所以表 $\sin\frac{2n\pi\pm A}{2}$.

則 $\sin\dfrac{2n\pi\pm A}{2}=\sin\left(n\pi\pm\dfrac{A}{2}\right)$

$$=\sin n\pi\cos\frac{A}{2}\pm\cos n\pi\sin\frac{A}{2}=\pm\cos n\pi\sin\frac{A}{2}=\pm\sin\frac{A}{2}.$$

由是,上式中之 $\sin\dfrac{A}{2}$ 與 $\cos\dfrac{A}{2}$ 皆有兩值,此第110節所以有兩解之理也.

[學者可更用幾何作圖方法以明之;試作角 $\dfrac{2n\pi\pm A}{2}$ 卽 $n\pi\pm\dfrac{A}{2}$, 則角之界線有四,卽由右向之初線量取 $\dfrac{A}{2}$ 與 $-\dfrac{A}{2}$ 兩角,再由左向之初線量取 $\dfrac{A}{2}$ 與 $-\dfrac{A}{2}$ 兩角.由圖顯見 $\cos\dfrac{A}{2}$ 與 $\sin\dfrac{A}{2}$ 各有正負兩值].

113. 求以 $\sin A$ 表角 $\dfrac{A}{2}$ 之函數.

由第109節之式(1),知

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin A \quad\cdots\cdots(1)$$

又已知 $$\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=1\quad\cdots\cdots(2)$$

加減(1),(2)兩式,得

$$\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=1+\sin A,$$

及 $$\sin^2\frac{A}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=1-\sin A;$$

卽 $$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A,$$

及 $$\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2=1-\sin A;$$

於是 $$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\quad\cdots\cdots(3)$$

又 $$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}\quad\cdots\cdots(4)$$

加減以上兩式，得

$$2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

又

$$2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

其他$\frac{A}{2}$之函數自易求得.

114. 以上(5),(6)兩式，各有二個歧號．次之二例即示在特種情況下如何決定歧號之方法.

例 **1.** 已知 $\sin 30°$ 爲 $\frac{1}{2}$，求 $\sin 15°$ 及 $\cos 15°$ 之值.

以 $A=30°$ 代入(3),(4)兩式，

$$\sin 15°+\cos 15°=\pm\sqrt{1+\sin 30°}=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 15°-\cos 15°=\pm\sqrt{1-\sin 15°}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

今 $\sin 15°$ 與 $\cos 15$ 皆爲正，而 $\cos 15°$ 大於 $\sin 15°$. 故 $\sin 15°+\cos 15°$ 爲正而 $\sin 15°-\cos 15°$ 爲負.

於是上之兩式應寫作

$$\sin 15°+\cos 15°=+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 15°-\cos 15°=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因得

$$\sin 15°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\quad \cos 15°=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

例 **2.** 已知 $\sin 570°$ 爲 $-\frac{1}{2}$，求 $\sin 285°$ 與 $\cos 285°$ 之值.

命 $A=570°$，則得

$$\sin 285°+\cos 285°=\pm\sqrt{1+\sin 570°}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 285°-\cos 285°=\pm\sqrt{1-\sin 570°}=\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

今 $\sin 285°$ 爲負，而 $\cos 285°$ 爲正，且前者之絕對值大於後者則可由圖中見之，故 $\sin 285°+\cos 285°$ 爲負，又 $\sin 285°-\cos 285°$ 亦爲負.

$$\therefore\quad \sin 285°+\cos 285°=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 285°-\cos 285°=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

因得 $\sin 285^\circ = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad \cos 285^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$

**115. 解釋 $\sin\frac{A}{2}$ 與 $\cos\frac{A}{2}$ 之由 $\sin A$ 求得者所以有歧號之故.

若 n 為任何整數,則得

$$\sin\{n\pi+(-1)^n A\}=\sin A. \qquad \text{(第 82 節)}$$

今設此值為 k,則 k 之所以表 $\sin\frac{A}{2}$ 者,亦所以表 $\frac{n\pi+(-1)^n A}{2}$

第一,設 n 為偶數而等於 $2m$. 則

$$\sin\frac{n\pi+(-1)^n A}{2}=\sin\left(m\pi+\frac{A}{2}\right)$$

$$=\sin m\pi\cos\frac{A}{2}+\cos m\pi\sin\frac{A}{2}=\cos m\pi\sin\frac{A}{2}=\pm\sin\frac{A}{2},$$

號之正負視 m 為偶數或奇數而定.

第二,設 n 為奇數而等於 $2p+1$, 則

$$\sin\frac{n\pi+(-1)^n A}{2}=\sin\frac{2p\pi+\pi-A}{2}$$

$$=\sin\left[p\pi+\frac{\pi-A}{2}\right]=\sin p\pi\cos\frac{\pi-A}{2}+\cos p\pi\sin\frac{\pi-A}{2}$$

$$=\cos p\pi\cos\frac{A}{2}=\pm\cos\frac{A}{2},$$

號之正負視 p 為偶數或奇數而定.

於是公式之以 $\sin A$ 表 $\sin\frac{A}{2}$ 者,同時亦表次之諸值

$$-\sin\frac{A}{2},\ \cos\frac{A}{2},\ 與\ -\cos\frac{A}{2}.$$

即所表之值凡四.此即第 113 節式 (5) 中歧號配合所得之數也.

同理,由 $\sin A$ 求 $\cos\frac{A}{2}$,所得之值亦應有四.

[當 $\frac{A}{2}$ 爲銳角時,則所作之角 $\frac{n\pi+(-1)^n A}{2}$, 即 $n\frac{\pi}{2}+(-1)^n\frac{A}{2}$ 之界線有四,其二在第一象限內與初線成 $\frac{A}{2}$ 及 $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$ 兩角,其他二線則在第三象限內與負向之初線成 $\frac{A}{2}$ 及 $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$ 兩角,由圖顯見 $\sin\frac{A}{2}$ 與 $\cos\frac{A}{2}$ 將各有不同之四值.其他 $\frac{A}{2}$ 之函數亦復如是.]

116. 茲述一普徧方法可以決定第113節中(3),(4)兩式之正負號者.

已知

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left[\sin\frac{A}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$$

此式之右邊爲正,若

$$\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\text{ 在 }2n\pi\text{ 與 }2n\pi+\pi\text{ 之間,}$$

即

$$\frac{A}{2}\text{ 在 }2n\pi-\frac{\pi}{4}\text{ 與 }2n\pi+\frac{3\pi}{4}\text{ 之間.}$$

由是 $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$ 爲正,若

$$\frac{A}{2}\text{ 在 }2n\pi-\frac{\pi}{4}\text{ 與 }2n\pi+\frac{3\pi}{4}\text{ 之間;}$$

否則爲負.

同理,吾人可以證明

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

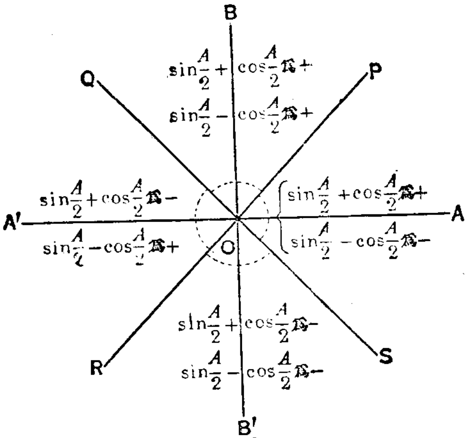
故 $\sin\dfrac{A}{2}-\cos\dfrac{A}{2}$ 爲正,若

$$\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\text{在 } 2n\pi \text{ 與 } 2n\pi+\pi \text{ 之間,}$$

即 $$\frac{A}{2}\text{ 在 } 2n\pi+\frac{\pi}{4} \text{ 與 } 2n\pi+\frac{5\pi}{4} \text{ 之間;}$$

否則爲負.

茲圖示上之結果於下.



OA 爲初線,而 OP, OQ, OR, OS 則爲平分四象限角之線.

例題. 求 $\frac{A}{2}$ 之範圍,若

$$2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}?$$

第113節之(3),(4)兩式必須爲

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A} \quad\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1-\sin A} \quad\cdots\cdots\cdots (2)$$

俾相加時可得所求之式.

合於式(1)之角 $\frac{A}{2}$,其界線應在 OQ 與 OR 兩線之間或 OR 與 OS 之間.

合於式(2)之角,其界線應在 OR 與 OS 之間或 OS 與 OP 之間.

同時合於(1),(2)兩式者,其界線應在 OR 與 OS 之間,故知角 $\frac{A}{2}$ 之範圍應在

$$2n\pi-\frac{3\pi}{4}\text{ 與 }2n\pi-\frac{\pi}{4}\text{ 之間.}$$

117. 求以 $\tan A$ 表 $\frac{A}{2}$ 之函數.

由第109節之式(3),知

$$\tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}.$$

$$\therefore\quad 1-\tan^2\frac{A}{2}=\frac{2}{\tan A}\cdot\tan\frac{A}{2}.$$

由此得 $$\tan^2\frac{A}{2}+\frac{2}{\tan A}\cdot\tan\frac{A}{2}+\frac{1}{\tan^2 A}=1+\frac{1}{\tan^2 A}=\frac{1+\tan^2 A}{\tan^2 A}.$$

$$\therefore\quad \tan\frac{A}{2}+\frac{1}{\tan A}=\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}.$$

$$\therefore\quad \tan\frac{A}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}-1}{\tan A}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

118. 上節式(1)之歧號當 A 爲定值時方能決定.

例. 已知 $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$, 求 $\tan 7\frac{1}{2}^\circ$.

於上節之式(1)中,令 $A=15^\circ$, 得

$$\tan 7\tfrac{1}{2}^\circ=\frac{\pm\sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2}-1}{2-\sqrt{3}}=\frac{\pm\sqrt{8-4\sqrt{3}}-1}{2-\sqrt{3}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今 $\tan 7\frac{1}{2}^\circ$ 爲正,故取正號.

故 $$\tan 7\tfrac{1}{2}^\circ=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})-1}{2-\sqrt{3}}=(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{3})$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1).$$

因 $\tan 15° = \tan 195°$，故以 $\tan 15°$ 代入方程式而求 $\tan\frac{15°}{2}$，與以 $\tan 195°$ 代入方程式而求 $\tan\frac{195°}{2}$ 無甚區別. 實則式(1)根號前取負號所得之值卽爲 $\tan\frac{195°}{2}$.

故
$$\tan\frac{195°}{2} = \frac{-\sqrt{8-4\sqrt{3}}-1}{2-\sqrt{3}} = \frac{-(\sqrt{6}-\sqrt{2})-1}{2-\sqrt{3}}$$
$$=(-\sqrt{6}+\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{3}) = -(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1).$$
$$\therefore\quad -\cot 7\tfrac{1}{2}° = \tan 97\tfrac{1}{2}° = -(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1).$$

119. 解釋 $\tan\frac{A}{2}$ 之由 $\tan A$ 求得者所以有歧號之故.

由第 84 節,知不論 n 爲任何整數,恆得
$$\tan(n\pi + A) = \tan A.$$

今設此值爲 k，則 k 所以表 $\tan\frac{A}{2}$ 者亦所以表 $\tan\frac{n\pi+A}{2}$.

第一,設 n 爲偶數而等於 $2m$，則
$$\tan\frac{n\pi+A}{2} = \tan\frac{2m\pi+A}{2} = \tan\left(m\pi+\frac{A}{2}\right) = \tan\frac{A}{2}. \quad \text{(第 84 節)}$$

第二,設 n 爲奇數而等於 $2p+1$，則
$$\tan\frac{n\pi+A}{2} = \tan\frac{(2p+1)\pi+A}{2} = \tan\left(p\pi+\frac{\pi+A}{2}\right)$$
$$=\tan\frac{\pi+A}{2} \quad \text{(第 84 節)}$$
$$=-\cot\frac{A}{2}. \quad \text{(第 70 節)}$$

由是,用方程式以求 $\tan\frac{A}{2}$ 者同時亦可以求得 $-\cot\frac{A}{2}$. 觀於上節之例題,顯然可見.

習題十八

1. 若 $\sin\theta = \frac{1}{2}$，$\sin\phi = \frac{1}{3}$，求以下二式之值
$$\sin(\theta+\phi) \text{ 與 } \sin(2\theta+2\phi).$$

2. 已知某角之正切爲 2.4. 求此角之餘割,半角之餘割,又其二倍角補角之餘割.

3. 若 $\cos\alpha=\frac{11}{61}$, $\sin\beta=\frac{4}{5}$, 求 $\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ 與 $\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$ 之值, 設 α, β 兩角皆爲正量之銳角.

4. 若 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, 求 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 之值,設 α, β 皆爲正量之銳角.

5. 已知 $\sec\theta=1\frac{1}{4}$, 求 $\tan\frac{\theta}{2}$ 與 $\tan\theta$. 並作圖以證之.

6. 若 $\cos A=0.28$ 求 $\tan\frac{A}{2}$ 之值,並說明所以有正負兩答之理.

7. 求 (1) $\sin 7\frac{1}{2}^\circ$, (2) $\cos 7\frac{1}{2}^\circ$, (3) $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ (4) $\tan 11\frac{1}{4}^\circ$ 之值.

8. 若 $\sin\theta+\sin\phi=a$, 又 $\cos\theta+\cos\phi=b$, 求 $\tan\frac{\theta-\phi}{2}$ 之值.

證明

9. $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$.

10. $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

11. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

12. $\sin A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$.

13. $\cos A=\dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$.

14. $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2\sec 2\theta$.

15. $\tan\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}=\sec A+\tan A$.

16. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A$.

17. $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+120^\circ)+\cos^2(\alpha-120^\circ)=\frac{3}{2}$.

18. $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.

19. $\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.

20. $\cos 2\theta\cos 2\phi+\sin^2(\theta-\phi)-\sin^2(\theta+\phi)=\cos(2\theta+2\phi)$.

21. $(\tan 4A+\tan 2A)(1-\tan^2 3A\tan^2 A)=2\tan 3A\sec^2 A$.

22. $\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}-\sec\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}+\sec\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\alpha\sec^2\frac{\alpha}{2}$.

次之三式,試擇根號前之適當符號.

23. $2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}\pm\sqrt{1+\sin A}$, 已知 $\frac{A}{2}=278°$.

24. $2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}\pm\sqrt{1+\sin A}$, 已知 $\frac{A}{2}=\frac{19\pi}{11}$.

25. $2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}\pm\sqrt{1+\sin A}$, 已知 $\frac{A}{2}=-140°$.

26. 若 $A=340°$, 求證:

$$2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}.$$

$$2\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}.$$

27. 若 $A=460°$, 求證:

$$2\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}.$$

28. 若 $A=580°$, 求證:

$$2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$$

29. 問 $\frac{A}{2}$ 之界限如何,當

(1) $2\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$,

(2) $2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$,

(3) $2\sin\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$.

(4) $2\cos\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$?

30. 於公式

$$2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$$

中,求 $\frac{A}{2}$ 之界限,若

(1) 取兩正號.

(2) 取兩負號.

(3) 第一號爲負,而第二號爲正.

31. 試證在 $2n\pi-\frac{3\pi}{4}$ 與 $2n\pi+\frac{\pi}{4}$ 間之任何角，其正弦之絕對值小於餘弦之絕對值;式中之 n 爲任何整數.

32. 試證由方程式

$$\sin A=3\sin\frac{A}{3}-4\sin^3\frac{A}{3}$$

以求 $\sin\frac{A}{3}$，同時亦得 $\sin\frac{\pi-A}{3}$ 與 $-\sin\frac{\pi+A}{3}$ 之值.并作一幾何圖形證之.

33. 試證由方程式

$$\cos A=4\cos^3\frac{A}{3}-3\cos\frac{A}{3}$$

以求 $\cos\frac{A}{3}$，同時亦得 $\cos\frac{2\pi-A}{3}$ 與 $\cos\frac{2\pi+A}{3}$ 之值.并作一幾何圖形證之.

120. 應用本章之公式,吾人可以求得幾個特別角之函數.

求角 18° 之函數.

設 θ 爲 18°，則 2θ 爲 36°，3θ 爲 54°.

因得 $$2\theta=90°-3\theta,$$

故 $$\sin 2\theta=\sin(90°-3\theta)=\cos 3\theta.$$

$\therefore\quad 2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$　　(第 105 節及第 107 節)

解之,得 $\cos\theta=0$，因而 $\theta=90°$，或

$$2\sin\theta=4\cos^2\theta-3=1-4\sin^2\theta.$$

$$\therefore\quad 4\sin^2\theta+2\sin\theta=1.$$

解此二次方程式,得

$$\sin\theta=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}.$$

今此 $\sin\theta$ 之值必爲正故取正號,

故 $$\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

於是 $$\cos 18°=\sqrt{1-\sin^2 18°}=\sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

由是 18° 之他種函數易於求得.

次因 72° 爲 18° 之餘角,應用第 69 節之理可以求 72° 之各種函數.

121. 求角 36° 之函數.

因 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$, (第 105 節)

$$\therefore \quad \cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right) = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

故得 $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

於是 $\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \dfrac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

由是 36° 之他種函數易於求得.

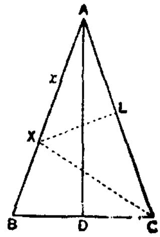
次因 54° 爲 36° 之餘角,故應用第 69 節之定理可以求 54° 之各種函數.

122. $\sin 18^\circ$ 與 $\cos 36^\circ$ 之函數可用幾何方法求之如下.

設 ABC 爲一三角形,其底角 B, C 各爲頂角 A 之二倍.於是

$$180^\circ = A + B + C = A + 2A + 2A,$$

$$\therefore \quad A = 36^\circ.$$



作 AD 垂直於 BC, 則

$$BAD = 18^\circ.$$

由幾何作圖知 BC 之長等於 AB 線上截取線段 AX 之長,而 $AB \cdot BX = AX^2$.

今設 $AB = a, \quad AX = x.$

則上之關係式寫爲

$$a(a-x) = x^2$$

即 $$x^2+ax=a^2,$$

解之,得 $$x=a\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

於是 $$\sin 18^\circ=\sin BAD=\frac{BD}{BA}=\frac{1}{2}\cdot\frac{BC}{BA},$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

次,由幾何學定理,知 AX 等於 XC, 故若作 XL 垂直於 AC, 則 L 平分 AC.

故得 $$\cos 36^\circ=\frac{AL}{AX}=\frac{a}{2}\div x=\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

123. 求角 9° 之三角函數.

因 $\sin 9^\circ$ 與 $\cos 9^\circ$ 皆為正,由第 113 節之式 (3),得

$$\sin 9^\circ+\cos 9^\circ=\sqrt{1+\sin 18^\circ}=\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}\quad\cdots\cdots(1)$$

復因 $\cos 9^\circ$ 大於 $\sin 9^\circ$ (第 53 節), 故 $\sin 9^\circ-\cos 9^\circ$ 之值為負. 由第 113 節之式 (4), 得

$$\sin 9^\circ-\cos 9^\circ=-\sqrt{1-\sin 18^\circ}=-\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}=-\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}\cdots(2)$$

將 (1), (2) 兩式相加, 得

$$\sin 9^\circ=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}.$$

次由式 (1) 減去式 (2), 得

$$\cos 9^\circ=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}.$$

由是 9° 之其他函數易於求得.

復因 81° 爲 9° 之餘角,故 81° 之各種函數可應用第69節之定理求之.

習 題 十 九

求證

1. $\sin^2 72^\circ - \sin^2 60^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{8}$.

2. $\cos^2 48^\circ - \sin^2 12^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{8}$.

3. $\cos 12^\circ + \cos 60^\circ + \cos 84^\circ = \cos 24^\circ + \cos 48^\circ$. 并作圖以證之.

4. $\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{5}{16}$.

5. $\sin\dfrac{\pi}{10} + \sin\dfrac{13\pi}{10} = -\dfrac{1}{2}$.　　6. $\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{13\pi}{10} = -\dfrac{1}{4}$.

7. $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ = 1$.

8. $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{3\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{5\pi}{15}\cos\dfrac{6\pi}{15}\cos\dfrac{7\pi}{15} = \dfrac{1}{2^7}$.

9. $16\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}\cos\dfrac{14\pi}{15} = 1$.

10. 圓內作平行之二弦,在圓心之同一邊,此二弦所對之圓心角各爲 72° 與 144°. 求證此二弦間之垂直距離等於半徑之二分之一.

11. 求證在任一圓內,圓心角 108° 所張之弦其長等於 36° 與 60° 所張兩弦之長之和.

12. 求作一角其餘弦等於其正切.

13. 解方程式

$$\sin 5\theta \cos 3\theta = \sin 9\theta \cos 7\theta.$$

第九章

三角恆等式及三角方程式

124. 第88及第90兩節之公式對於兩角以上諸角之和亦可應用.

例如:

$$\sin(A+B+C)=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$$
$$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C$$
$$+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C$$
$$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C$$
$$-\sin A\sin B\sin C.$$

又 $$\cos(A+B+C)=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$$
$$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\cos C$$
$$-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C$$
$$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\cos B\sin C$$
$$-\sin A\sin B\cos C.$$

又 $$\tan(A+B+C)=\frac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}$$
$$=\frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\tan C}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan C\tan A-\tan B\tan C}.$$

125. 以諸角之正切表諸角和之正切可得一普徧定理,上節之末一式乃此定理中之一特例,茲述此定理如下.

$$\tan(A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots+A_n)=\frac{s_1-s_3+s_5-s_7+\cdots}{1-s_2+s_4-s_6+\cdots}\cdots\cdots\cdots(1)$$

式中之

$s_1=\tan A_1+\tan A_2+\tan A_3+\cdots\cdots+\tan A_n$

=諸角正切之和,

$s_2=\tan A_1\tan A_2+\tan A_1\tan A_3+\cdots\cdots$

=諸角正切兩兩相乘積之和,

$s_3=\tan A_1\tan A_2\tan A_3+\tan A_2\tan A_3\tan A_4+\cdots\cdots$

=諸角正切每三個相乘積之和,

其餘依此類推.

今設式(1)當角數爲n時爲適合,於此加另一角A_{n+1},則

$$\begin{aligned}
&\tan(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_{n+1})\\
&=\tan[(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)+A_{n+1}]\\
&=\frac{\tan(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)+\tan A_{n+1}}{1-\tan(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)\tan A_{n+1}}\\
&=\frac{\dfrac{s_1-s_3+s_5-s_7+\cdots}{1-s_2+s_4-s_6+\cdots}+\tan A_{n+1}}{1-\dfrac{s_1-s_3+s_5-s_7+\cdots}{1-s_2+s_4-s_6+\cdots}\tan A_{n+1}}.
\end{aligned}$$

命$\tan A_1$, $\tan A_2$, $\tan A_3\cdots\cdots\tan A_{n+1}$爲$t_1, t_2,\cdots\cdots t_{n+1}$,則

$$\begin{aligned}
&\tan(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_{n+1})\\
&=\frac{(s_1-s_3+s_5-\cdots\cdots)+t_{n+1}(1-s_2+s_4-\cdots\cdots)}{(1-s_2+s_4-\cdots\cdots)-(s_1-s_3+s_5-\cdots\cdots)t_{n+1}}
\end{aligned}$$

$$=\frac{(s_1+t_{n+1})-(s_3+s_2t_{n+1})+(s_5+s_4t_{n+1})-\cdots\cdots}{1-(s_2+s_1t_{n+1})+(s_4+s_3t_{n+1})-(s_6+s_5t_{n+1})+\cdots\cdots}$$

但 $s_1+t_{n+1}=(t_1+t_2+\cdots\cdots+t_n)+t_{n+1}$

$=n+1$ 個正切之和,

$s_2+s_1t_{n+1}=(t_1t_2+t_2t_3+\cdots\cdots)+(t_1+t_2+\cdots\cdots+t_n)t_{n+1}$

$=n+1$ 個正切中兩兩相乘積之和,

$s_3+s_2t_{n+1}=(t_1t_2t_3+t_2t_3t_4+\cdots\cdots)+(t_1t_2+t_2t_3+\cdots\cdots)t_{n+1}$

$=n+1$ 個正切中每三個相乘積之和.

其餘類推.

故知此定理之合於 n 個角者,亦合於 $n+1$ 個角.

當式(1)中之 n 爲 2 或 3 時,顯與第 98 節及第 124 節相合.由是角數爲四時亦能適合,推之角數亦得爲五,乃至任何數.

系. 若諸角各等於 θ,而其數爲 n,則

$$s_1=n\tan\theta,\ s_2={}^nC_2\tan^2\theta,\ s_3={}^nC_3\tan^3\theta,\cdots\cdots$$

例 試以 $\tan\theta$ 表 $\tan 4\theta$.

$$\tan 4\theta=\frac{s_1-s_3}{1-s_2+s_4}=\frac{4\tan\theta-{}^4C_3\tan^3\theta}{1-{}^4C_2\tan^2\theta+{}^4C_4\tan^4\theta}$$

$$=\frac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}.$$

習題. 求證 $\tan 5\theta=\dfrac{5\tan\theta-10\tan^3\theta+\tan^5\theta}{1-10\tan^2\theta+5\tan^4\theta}$.

126. 用與上節類似之方法得證次之兩式

$$\sin(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)=\cos A_1\cos A_2\cdots\cdots\cos A_n(s_1-s_3+s_5-\cdots\cdots),$$

又 $\cos(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\cos A_1\cos A_2\cdots\cdots\cos A_n(1-s_2+s_4-\cdots\cdots)$,

式中之 $s_1, s_2, s_3,\cdots\cdots$ 所表之值與上節同.

127. 三角形諸內角函數之恆等式

設三角A,B,C之和爲$180°$,則此諸角之函數有種種關係式可以成立.至其證法爲舉數例如下.

例 1. 若 $A+B+C=180°$,

求證 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C.$$

今 $$A+B+C=180°,$$

則 $$A+B=180°-C,$$

故 $$\sin(A+B)=\sin C,$$

又 $$\cos(A+B)=-\cos C.$$ (第 72 節)

由是原式

$$\begin{aligned}&=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C\\&=2\sin C[\cos(A-B)+\cos C]\\&=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\\&=2\sin C\cdot 2\sin A\sin B\\&=4\sin A\sin B\sin C.\end{aligned}$$

例 2. 若 $A+B+C=180°$.

求證 $\cos A+\cos B-\cos C=-1+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

原式 $=\cos A+(\cos B-\cos C)$

$$=2\cos^2\frac{A}{2}-1+2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2}.$$

今 $$B+C=180°-A.$$

則 $$\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2},$$

故 $$\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2},$$

又 $$\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}.$$

由是原式

$$\begin{aligned}&=2\cos^2\frac{A}{2}-1+2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2}\\&=2\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C-B}{2}\right]-1\\&=2\cos\frac{A}{2}\left[\sin\frac{B+C}{2}+\sin\frac{C-B}{2}\right]-1\end{aligned}$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}-1$$

$$=-1+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

例 3. 若 $A+B+C=180^\circ$,

求證 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$.

設 $$S=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C,$$

則 $$2S=2\sin^2 A+1-\cos 2B+1-\cos 2C$$

$$=2\sin^2 A+2-2\cos(B+C)\cos(B-C)$$

$$=2-2\cos^2 A+2-2\cos(B+C)\cos(B-C),$$

$$\therefore\quad S=2+\cos A[\cos(B-C)+\cos(B+C)],$$

因 $$\cos A=\cos[180^\circ-(B+C)]=-\cos(B+C).$$

$$\therefore\quad S=2+\cos A\cdot 2\cos B\cos C$$

$$=2+2\cos A\cos B\cos C.$$

例 4. 若 $A+B+C=180^\circ$,

求證 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

由第124節之第三式,得

$$\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-(\tan B\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B)}.$$

但 $\tan(A+B+C)=\tan 180\ =0.$

於是 $$0=\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C,$$

即 $$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

本題之另一證法如下

因 $$\tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)=-\tan C,$$

$$\therefore\quad \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C,$$

$$\therefore\quad \tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C,$$

即 $$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

例 5. 若 $x+y+z=xyz$,

求證 $$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$

令 $x=\tan A$, $y=\tan B$, $z=\tan C$, 則得

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

$$\therefore\quad \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C,$$

故 $$\tan(A+B)=\tan(\pi-C).$$ (第72節)

於是 $A+B+C=n\pi+\pi$,

$$\therefore\quad \frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}+\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$$

$$=\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C$$

$$=\tan 2A\tan 2B\tan 2C$$ (用與前例類似之證法)

$$=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$ ●

習 題 二 十

若 $A+B+C=180°$, 求證

1. $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\cos A\cos B\sin C$.
2. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$.
3. $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-4\sin A\sin B\cos C$.
4. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.
5. $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.
6. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.
7. $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C$.
8. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$.
9. $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1-2\sin A\sin B\cos C$.
10. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.
11. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=1-2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.
12. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$.
13. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.
14. $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$.
15. $\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$.
16. $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-1=4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$.

17. $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi+A}{4}\cos\frac{\pi+B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$.

18. $\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

19. $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)=4\sin A\sin B\sin C$.

若 $A+B+C=2S$, 求證

20. $\sin(S-A)\sin(S-B)+\sin S\sin(S-C)=\sin A\sin B$.

21. $4\sin S\sin(S-A)\sin(S-B)\sin(S-C)$

$$=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C.$$

22. $\sin(S-A)+\sin(S-B)+\sin(S-C)-\sin S=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

23. $\cos^2 S+\cos^2(S-A)+\cos^2(S-B)+\cos^2(S-C)=2+2\cos A\cos B\cos C$.

24. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos\quad\cos B\cos C$

$$=1+4\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C).$$

25. 若 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$, 求證

(1) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta+4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}=0$,

(2) $\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma-\sin\delta+4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}=0$,

(3) $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta$

$$=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\tan\delta(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma+\cot\delta).$$

26. 若四角之和爲180°, 求證其各角之餘弦兩兩相乘積之和等於其各角之正弦兩兩相乘積之和.

27. 若 $\alpha+\beta+\gamma=0$, 求證

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma).$$

28. 求證

$$\sin^3 a\sin(b-c)+\sin^3 b\sin(c-a)+\sin^3 c\sin(a-b)$$
$$+\sin(a+b+c)\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)=0.$$

若 A, B, C, D 爲任意角,證次之恒等式

29. $\sin A\sin B\sin(A-B)+\sin B\sin C\sin(B-C)$

$$+\sin C\sin A\sin(C-A)+\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)=0.$$

30. $\sin(A-B)\cos(A+B)+\sin(B-C)\cos(B+C)$

$$+\sin(C-D)\cos(C+D)+\sin(D-A)\cos(D+A)=0.$$

31. $\sin(A+B-2C)\cos B-\sin(A+C-2B)\cos C$

$$=\sin(B-C)\{\cos(B+C-A)+\cos(C+A-B)+\cos(A+B-C)\}.$$

32. $\sin(A+B+C+D)+\sin(A+B-C-D)+\sin(A+B-C+D)$

$$+\sin(A+B+C-D)=4\sin(A+B)\cos C\cos D.$$

33. 若一定理當 A, B, C 之值合於

$$A+B+C=180^\circ$$

時爲眞確,求證以下列諸值代 A, B, C 時此定理亦爲眞確:

(1)　$90^\circ-\dfrac{A}{2},\ 90^\circ-\dfrac{B}{2},\ 90^\circ-\dfrac{C}{2},$

(2)　$180^\circ-2A,\ 180^\circ-2B,\ 180^\circ-2C.$

應用以上關係,試由題6演出題16, 及由題5演出題17.

若 $x+y+z=xyz$, 求證

34. $\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}+\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}+\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}.$

35. $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$

128. 解三角方程式有時亦須應用和差角定理.

例. 解方程式　$\sin x+\sin 5x=\sin 3x.$

應用第94節之公式,變上式爲

$$2\sin 3x\cos 2x=\sin 3x.$$

$$\therefore\quad \sin 3x=0\ \text{或}\ 2\cos 2x=1.$$

若　　$\sin 3x=0$, 則 $3x=n\pi.$

若　　$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$, 則 $2x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}.$

故得　　$x=\dfrac{n\pi}{3}$ 或 $n\pi\pm\dfrac{\pi}{6}.$

129. 求解三角方程式之型如下式者

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c.$$

以 $\sqrt{a^2+b^2}$ 除方程式之兩邊,則上式變爲

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

於正切表上查角之正切爲 $\dfrac{b}{a}$ 者,命此角爲 α.

則 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$, 於是

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

代入原式,得

$$\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

即
$$\cos(\theta-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

復由表或其他方法,得另一角 β 其餘弦為

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

則
$$\cos\beta=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

[注意. c 之值必須小於 $\sqrt{a^2+b^2}$, 上式方能成立.]

故原式變為　$\cos(\theta-\alpha)=\cos\beta.$

解之,得　$\theta-\alpha=2n\pi\pm\beta,$

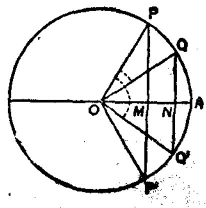
即　$\theta=2n\pi+\alpha\pm\beta.$

式中之 n 得為任何整數.

如 α,β 等角,插入式內,俾便於計算者,稱為輔助角.

130. 上之解法得用幾何圖形表之如下:

於初線上取 OM 其長為 a,復作垂線 MP 其長為 b. 則角 MOP 之正切為 $\frac{b}{a}$,故此角為 α.



以 O 為圓心, $OP[=\sqrt{a^2+b^2}]$ 為半徑作圓,復於初線上取 ON 其長為 C.

作 QNQ' 垂直於 ON 交此圓於 Q 與 Q', 則角 NOQ 與 $Q'ON$ 皆等於 β.

故角 QOP 為 $\alpha-\beta$, 而 $Q'OP$ 為 $\alpha+\beta$.

於是得此方程式之解爲

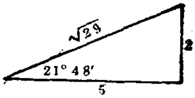
$$2n\pi+QOP \text{ 與 } 2n\pi+Q'OP.$$

若 $c>\sqrt{a^2+b^2}$，則點 N 將在圓外，於是作圖爲不可能。

131. 茲舉一含數字之例題如下：

解方程式 $5\cos\theta-2\sin\theta=2$，已知 $\tan 21°48'=\frac{2}{5}$.

以 $\sqrt{5^2+2^2}$ 即 $\sqrt{29}$ 除方程式之兩邊，得



$$\frac{5}{\sqrt{29}}\cos\theta-\frac{2}{\sqrt{29}}\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{29}}.$$

即 $\cos\theta\cos 21°48'-\sin\theta\sin 21°48'=\sin 21°48'=\sin(90°-68°12')=\cos 68°12'$.

$$\therefore\quad \cos(\theta+21°48')=\cos 68°12'.$$

故得 $$\theta+21°48'=2n\times180°\pm68°12',\qquad\text{[第 83 節]}$$

$$\theta=2n\times180°-21°48'\pm68°12'$$

$$=2n\times180°-90° \text{ 或 } 2n\times180°+46°24';$$

式中之 n 得爲任何整數.

另一解法. 第 129 節之方程式得用他法解之.

命 $t=\tan\frac{\theta}{2}$,

則 $$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.\qquad\text{[第 109 節]}$$

故原方程式變爲

$$a\frac{1-t^2}{1+t^2}+b\frac{2t}{1+t^2}=c,$$

即 $$t^2(c+a)-2bt+c-a=0.$$

解此含 t 之二次方程式則得 $\tan\frac{\theta}{2}$ 之兩值.

如本節之例，則化爲

$$7t^2+4t-3=0.$$

解之得 $t=-1$ 或 $\frac{3}{7}$ 即 $t=\tan(-45°)$，或 $\tan 23°12'$ (由表中求得).

於是 $$\frac{\theta}{2}=n\cdot180°-45° \text{ 或 } n\cdot180°+23°12',$$

$$\therefore\quad \theta=n\cdot360°-90° \text{ 或 } n\cdot360°+46°24'.$$

習題二十一

解方程式

1. $\sin\theta+\sin 7\theta=\sin 4\theta$.
2. $\cos\theta+\cos 7\theta=\cos 4\theta$.
3. $\cos\theta+\cos 3\theta=2\cos 2\theta$.
4. $\sin 4\theta-\sin 2\theta=\cos 3\theta$.
5. $\cos\theta-\sin 3\theta=\cos 2\theta$.
6. $\sin 7\theta=\sin\theta+\sin 3\theta$.
7. $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$.
8. $\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta=0$.
9. $\sin 2\theta-\cos 2\theta-\sin\theta+\cos\theta=0$.
10. $\sin(3\theta+a)+\sin(3\theta-a)+\sin(a-\theta)-\sin(a+\theta)=\cos a$.
11. $\cos(3\theta+a)\cos(3\theta-a)+\cos(5\theta+a)\cos(5\theta-a)=\cos 2a$.
12. $\cos n\theta=\cos(n-2)\theta+\sin\theta$.
13. $\sin\frac{n+1}{2}\theta=\sin\frac{n-1}{2}\theta+\sin\theta$.
14. $\sin m\theta+\sin n\theta=0$.
15. $\cos m\theta+\cos n\theta=0$.
16. $\sin^2 n\theta-\sin^2(n-1)\theta=\sin^2\theta$.
17. $\sin 3\theta+\cos 2\theta=0$.
18. $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}$.
19. $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$..
20. $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$.
21. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos A$.
22. $5\sin\theta+2\cos\theta=5$ (已知 $\tan 21°48'=.4$).
23. $6\cos x+8\sin x=9$ (已知 $\tan 53°8'=1\frac{1}{3}$ 又 $\cos 25°50'=.9$).
24. $1+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$ (已知 $\tan 71°34'=3$).
25. $\operatorname{cosec}\theta=\cot\theta+\sqrt{3}$.
26. $\operatorname{cosec} x=1+\cot x$.
27. $(2+\sqrt{3})\cos\theta=1-\sin\theta$.
28. $\tan\theta+\sec\theta=\sqrt{3}$.
29. $\cos 2\theta=\cos^2\theta$.
30. $4\cos\theta-3\sec\theta=\tan\theta$.
31. $\cos 2\theta+3\cos\theta=0$.
32. $\cos 3\theta+2\cos\theta=0$.
33. $\cos 2\theta=(\sqrt{2}+1)\left(\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
34. $\cot\theta-\tan\theta=2$.
35. $4\cot 2\theta=\cot^2\theta-\tan^2\theta$.
36. $3\tan(\theta-15°)=\tan(\theta+15°)$.
37. $\tan\theta+\tan 2\theta+\tan 3\theta=0$.
38. $\tan\theta+\tan 2\theta+\sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta=\sqrt{3}$.
39. $\sin 3a=4\sin a\sin(x+a)\sin(x-a)$.
40. 求證方程式 $x^3-2x+1=0$ 中之 x 合於下之任何一值

$$\sqrt{2}\sin 45°,\ 2\sin 18°,\ 2\sin 234°.$$

41. 若 $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$，求證 $\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

42. 若 $\sin(\pi\cot\theta)=\cos(\pi\tan\theta)$，求證 $\operatorname{cosec} 2\theta$ 或 $\cot 2\theta$ 等於 $n+\frac{1}{4}$，此 n 為正或負之整數。

132. 例題. 當 x 由 0 增大至 2π 時，試探求 $\sin x+\cos x$ 之變化.

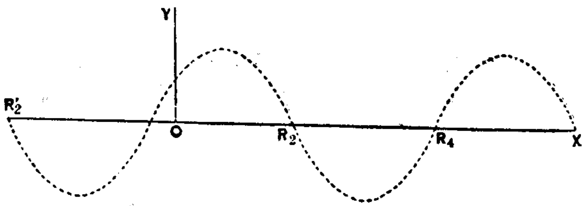
$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

以不同之 x 值代入上式，將其結果列表於下:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$
$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	1

依照第62節之方法，得次之圖形.



133. 例題. 試探求 $a\cos\theta+b\sin\theta$ 符號與數值之變化，幷求此式之最大值.

令 $a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right]$

設 α 爲最小之角合於次之二式者

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

則原式

$$=\sqrt{a^2+b^2}[\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha]=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha).$$

當 θ 由 α 增至 $2\pi+\alpha$ 時，角 $\theta-\alpha$ 由 0 增至 2π, 則原式之符號與數値之變化易於求得.

因 $\cos(\theta-\alpha)$ 之最大值爲 1, 故當 θ 等於 α 時，即角 θ 之餘弦等於 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 時，原式之値爲最大，而此最大之値乃爲 $\sqrt{a^2+b^2}$ 也.

同理下式

$$\begin{aligned} &a\sin(\theta+\alpha)+b\sin(\theta+\beta)\\ &\quad=\sin\theta(a\cos\alpha+b\cos\beta)+\cos\theta(a\sin\alpha+b\sin\beta)\\ &\quad=R\sin(\theta+\gamma)\quad\cdots\cdots(1)\end{aligned}$$

而

$$R\cos\gamma=a\cos\alpha+b\cos\beta,$$

$$R\sin\gamma=a\sin\alpha+b\sin\beta,$$

將此兩式平方後相加，得

$$R=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\alpha-\beta)},$$

復將兩式相除，得

$$\tan\gamma=\frac{a\sin\alpha+b\sin\beta}{a\cos\alpha+b\cos\beta}.$$

上式 (1) 當 θ 等於 $\frac{\pi}{2}-\gamma$ 時爲最大，而最大之値乃爲 R

習題二十二

當角 θ 由 0 增至 2π 時，求以下各式符號及數値之變化，及其週期，并各作一圖形.

1. $\sin\theta-\cos\theta$.　　2. $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$.

[提示. $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left[\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right]=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$.]

3. $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$.　　4. $\cos^2\theta-\sin\theta$.　　5. $\sin\theta\cos\theta$.

6. $\sin 3\theta$.　　7. $\tan 3\theta$.　　8. $\sec 4\theta$.

9. $\dfrac{\sin\theta+\sin 2\theta}{\cos\theta+\cos 2\theta}$.　　10. $\sin(\pi\sin\theta)$.　　11. $\cos(\pi\sin\theta)$.

12. 當角θ由0°增至90°時,求式$\dfrac{\sin 3\theta}{\cos 2\theta}$之符號及數值之變化.

第十章

對數

134. 設吾人已知

$$10^{2.4031205}=253, \qquad 10^{2.6095944}=407,$$

又

$$10^{5.0127149}=102971,$$

則不用乘法可以證明 $253\times407=102971$. 因

$$253\times407=10^{2.4031205}\times10^{2.6095944}$$

$$=10^{2.4031205+2.6095944}$$

$$=10^{5.0127119}=102971.$$

由是知乘法可用簡單之加法代之.

復次,設吾人已知

$$10^{4.9004055}=79507,$$

又

$$10^{1.6334685}=43,$$

則不難證明 79507 之立方根為 43.

因 $\sqrt[3]{79507}=[79507]^{\frac{1}{3}}=[10^{4.9004055}]^{\frac{1}{3}}$

$$=10^{\frac{1}{3}\times4.9004055}=10^{1.6334685}=43.$$

由是知開立方所用甚繁之手續可用一簡單之除法代之.

135. 對數 定義 設 a 爲一數,而 x 與 N 爲他二數,俾 $a^x=N$,則 x 稱爲 N 之對數,而 a 爲其底,恆寫作 $\log_a N$.

故某數之對數爲稱爲底之他一數乘方時所用之指數,而乘方之結果卽爲某數.

例 因 $10^2=100$, 故 $2=\log_{10}100$.

因 $10^5=100000$, 故 $5=\log_{10}100000$.

因 $2^4=16$, 故 $4=\log_2 16$.

因 $8^{\frac{2}{3}}=(8^{\frac{1}{3}})^2=2^2=4$, 故 $\frac{2}{3}=\log_8 4$.

因 $9^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{9^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$, 故 $-\frac{2}{3}=\log_9\left(\frac{1}{27}\right)$.

注意 因 $a^0=1$, 故不論何數爲底, 1 之對數恆爲 0

136. 由代數學,知不論 m, n 爲任何值,次之指數定律恆爲眞確.

(i) $a^m\times a^n=a^{m+n}$,

(ii) $a^m\div a^n=a^{m-n}$,

(iii) $(a^m)^n=a^{mn}$.

與此指數定律相當之對數三定律如下:

(i) $\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n$,

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n$,

(iii) $\log_a m^n=n\log_a m$.

137. 兩數之積之對數等於此兩數同底對數之和,卽

$$\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n.$$

設 $x=\log_a m$, 則 $a^x=m$, (第 135 節之定義)

又設 $y=\log_a n$, 則 $a^y=n$.

於是 $mn=a^x\times a^y=a^{x+y}$.

$$\therefore \log_a(mn)=x+y, \qquad \text{(第 135 節之定義)}$$
$$=\log_a m+\log_a n.$$

138. 兩數之商之對數等於此兩數對數之差,即

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n.$$

設 $x=\log_a m$, 則 $a^x=m$,

又設 $y=\log_a n$, 則 $a^y=n$.

於是 $\frac{m}{n}=a^x\div a^y=a^{x-y}$.

$$\therefore \log_a\left(\frac{m}{n}\right)=x-y \qquad \text{(第 135 節之定義)}$$
$$=\log_a m-\log_a n.$$

139. 一數冪之對數等於此數之對數乘以冪指數之值,即

$$\log_a m^n)=n\log_a m.$$

設 $x=\log_a m$, 則 $a^x=m$.

於是 $m^n=(a^x)^n=a^{nx}$.

$$\therefore \log_a(m^n)=nx \qquad \text{(第 135 節之定義)}$$
$$=n\log_a m.$$

例. $\log 48=\log(2^4\times 3)=\log 2^4+\log 3=4\log 2+\log 3$;

$\log\frac{63}{484}=\log\frac{7\times 3^2}{2^2\times 11^2}=\log 7+\log 3^2-\log 2^2-\log 11^2$

$=\log 7+2\log 3-2\log 2-2\log 11$;

$\log\sqrt[5]{13}=\log 13^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\log 13$.

140. 常用對數 普通實用之對數其底恆為10,故凡不指明對數之底者,其底10恆略而不書.以10為底所以便利之處見以下三節.

141. 首數及尾數 定義 設一數之對數為整數與小數兩部分所成,則稱整數部分為首數,小數部分為尾數.

例如,設 $\log 795 = 2.9003671$, 則 2 爲首數而 0.9003671 爲尾數.

負首數　設吾人已知

$$\log 2 = 0.30103.$$

於是,依照第 138 節之定理

$$\log \tfrac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = 0 - \log 2 = -0.30103,$$

故 $\log \frac{1}{2}$ 爲負數.

茲爲計算便利起見,將如第 143 節所示,對數之尾數須爲正數.故不用 -0.30103,而用 $-(1-0.69897)$,於是

$$\log \tfrac{1}{2} = -(1-0.69897) = -1+0.69897.$$

爲簡便計上式每寫作 $\bar{1}.69897$.

此 1 上之一橫表示整數部分爲負而小數部分爲正.

例如 $\bar{3}.4771213$ 其意卽謂

$$-3+0.4771213.$$

142. 對數之首數可由觀察而得.

(i) 設此數大於 1.

因 $10^0 = 1$,　　故 $\log 1 = 0$;

因 $10^1 = 10$,　　故 $\log 10 = 1$;

因 $10^2 = 100$,　　故 $\log 100 = 2$;

餘類推.

故知某數之在 1 與 10 之間者,其對數在 0 與 1 之間,而爲一小數,卽對數之首數爲 0.

某數之在 10 與 100 之間者,其對數在 1 與 2 之間,其首數爲 1.

同理,某數之在 100 與 1000 之間者,其對數在 2 與 3 之間,其首數爲 2.

又某數之在 1000 與 10000 之間者,其對數之首數爲 3.

普偏言之,某數對數之首數較此數整數部分之位數少1.

例. 一數 296.3457 之整數部分有三位,故其對數之首數爲2.

又 29634,57 之對數,其首數爲 5-1, 卽 4.

(ii) 設此數小於1.

因 $10^0=1$, 故 $\log 1=0$;

因 $10^{-1}=\frac{1}{10}=0.1$, 故 $\log 0.1=-1$;

因 $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=0.01$, 故 $\log 0.01=-2$;

因 $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=0.001$, 故 $\log 0.001=-3$;

餘類推.

故知某數之在1與0.1之間者,其對數在0與-1之間,等於-1+小數,卽對數之首數爲$\overline{1}$.

某數之在0.1與0.01之間者,其對數在-1與-2之間,等於-2+小數,卽對數之首數爲$\overline{2}$.

同理,某數之在0.01與0.001之間者,其對數在-2與-3之間,卽其首數爲$\overline{3}$.

普偏言之,凡小數之對數,其首數爲負,而其絕對値較在小數點後及第一位有效數字前所有0之個數大1.

小數之在1與0.1之間者(如0.5)小數點後無0,故首數爲$\overline{1}$.

小數之在0.1與0.01之間者(如0.07)小數點後有一個0,故首數爲$\overline{2}$.

小數之在0.01與0.001之間者(如0.003)小數點後有二個0,故首數爲$\overline{3}$.

餘類推.

例 一數 0.00835 之對數之首數爲 $\bar{3}$.

一數 0.0000053 之對數之首數爲 $\bar{6}$.

一數 0.34567 之對數之首數爲 $\bar{1}$.

143. 同數字同順序所成諸數之對數,其尾數相同.

茲舉例以明之.

設吾人已知

$$\log 66818 = 4.8248935.$$

則 $\log 668.18 = \log \dfrac{66818}{100} = \log 66818 - \log 100$ (第 138 節)

$$= 4.8248935 - 2 = 2.8248935;$$

$\log 0.66818 = \log \dfrac{66818}{100000} = \log 66818 - \log 100000$ (第 138 節)

$$= 4.8248935 - 5 = \bar{1}.8248935;$$

又 $\log 0.00066818 = \log \dfrac{66818}{10^8} = \log 66818 - \log 10^8$

$$= 4.8248935 - 8 = \bar{4}.8248935.$$

今 66818, 668.18, 0.66818, 0.00066818 爲同數字同順序之諸數,所不同者僅小數點之位置.此諸數對數之小數部分相同,即尾數相同,所不同者僅首數耳.定首數之方法已詳見上節.至於尾數則其值恆爲正.

144. 對數表 對數表之載有由 1 至 108000 諸數之對數者則有張氏對數表 (Chamber's Tables of Logarithms). 此表準確至小數點以下七位

學者應各備有此表或其他適用之對數表一册,俾便以下數章演題時之用.

以下爲由張氏對數表中所謄錄之一頁;備載由 52500 至 53000 諸對數之尾數.

No.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表差
5250	720	1593	1676	1758	1841	1924	2007	2089	2172	2255	2337	
51		2420	2503	2586	2668	2751	2834	2916	2999	3082	3164	
52		3247	3330	3413	3495	3578	3661	3743	3826	3909	3991	
53		4074	4157	4239	4322	4405	4487	4570	4653	4735	4818	
54		4901	4983	5066	5149	5231	5314	5397	5479	5562	5645	
55		5727	5810	5892	5975	6058	6140	6223	6306	6388	6471	
56		6554	6636	6719	6801	6884	6967	7049	7132	7215	7297	
57		7380	7462	7545	7628	7710	7793	7875	7958	8041	8123	
58		8206	8288	8371	8454	8536	8619	8701	8784	8867	8949	
59		9032	9114	9197	9279	9362	9445	9527	9610	9692	9775	
60		9857	9940	$\overline{0023}$	$\overline{0105}$	$\overline{0188}$	$\overline{0270}$	$\overline{0353}$	$\overline{0435}$	$\overline{0518}$	$\overline{0600}$	
5261	721	0683	0766	0848	0931	1013	1096	1178	1261	1343	1426	
62		1508	1591	1674	1756	1839	1921	2004	2086	2169	2251	
63		2334	2416	2499	2581	2664	2746	2829	2911	2994	3076	
64		3159	3241	3324	3406	3489	3571	3654	3736	3819	3901	
65		3984	4066	4149	4231	4314	4396	4479	4561	4644	4726	
66		4809	4891	4973	5056	5138	5221	5303	5386	5468	5551	
67		5633	5716	5798	5881	5963	6045	6128	6210	6293	6375	
68		6458	6540	6623	6705	6787	6870	6952	7035	7117	7200	
69		7282	7364	7447	7529	7612	7694	7777	7859	7941	8024	
70		8106	8189	8271	8353	8436	8518	8601	8683	8765	8848	
5271		8930	9013	9095	9177	9260	9342	9424	9507	9589	9672	82
72		9754	9836	9919	$\overline{0001}$	$\overline{0084}$	$\overline{0166}$	$\overline{0248}$	$\overline{0331}$	$\overline{0413}$	$\overline{0495}$	1 8
73	722	0578	0660	0742	0825	0907	0990	1072	1154	1237	1319	2 16
74		1401	1484	1566	1648	1731	1813	1895	1978	2060	2142	3 25
75		2225	2307	2389	2472	2554	2636	2719	2801	2883	2966	4 33
76		3048	3130	3212	3295	3377	3459	3542	3624	3706	3789	5 41
77		3871	3953	4036	4118	4200	4282	4365	4447	4529	4612	6 49
78		4694	4776	4858	4941	5023	5105	5188	5270	5352	5434	7 57
79		5517	5599	5681	5763	5846	5928	6010	6092	6175	6257	8 66
80		6339	6421	6504	6586	6668	6750	6833	6915	6997	7079	9 74
5281		7162	7244	7326	7408	7491	7573	7655	7737	7820	7902	
82		7984	8066	8148	8231	8313	8395	8477	8559	8642	$\overline{8724}$	
83		8806	8888	8971	9053	9135	9217	9299	9382	9464	9546	
84		9628	9710	9792	9875	9957	$\overline{0039}$	$\overline{0121}$	$\overline{0203}$	$\overline{0286}$	$\overline{0368}$	
85	723	0450	0532	0614	0696	0779	0861	0943	1025	1107	1189	
86		1272	1354	1436	1518	1600	1682	1765	1847	1929	2011	
87		2093	2175	2257	2340	2422	2504	2586	2668	2750	2832	
88		2914	2997	3079	3161	3243	3325	3407	3489	3571	3654	
89		3736	3818	3900	3982	4064	4146	4228	4310	4393	4475	
90		4557	4639	4721	4803	4885	4967	5049	5131	5213	5296	
5291		5378	5460	5542	5624	5706	5788	5870	5952	6034	6116	
92		6198	6280	6362	6445	6527	6609	6691	6773	6855	6937	
93		7019	7101	7183	7265	7347	7429	7511	7593	7675	7757	
94		7839	7921	8003	8085	8167	8250	8332	8414	8496	8578	
95		8660	8742	8824	8906	8988	9070	9152	9234	9316	9398	
96		9480	9562	9644	9726	9808	9890	9972	$\overline{0054}$	$\overline{0136}$	$\overline{0218}$	
97	724	0300	0382	0464	0546	0628	0710	0792	0874	0956	1038	
98		1120	1202	1283	1365	1447	1529	1611	1693	1775	1857	
99		1939	2021	2103	2185	2267	2349	2431	2513	2595	2677	
5300		2759	2841	2923	3005	3086	3168	3250	3332	3414	3496	

本書之末,附有五位對數表,已足敷普通之應用.

145. 設欲求一數,如 52687 之對數,其法如下.

先由表之第一列查得 5268 一數,次沿此數之橫行查頂上爲 7 之一行其數爲 7035. 故與 52687 相當之數應爲 7217035. 但此數爲尾數應寫作 0.7217035. 復因 52687 之對數之首數爲 4.

故 $$\log 52687 = 4.7217035.$$

同理 $$\log 0.52687 = \bar{1}.7217035.$$

又 $$\log 0.00052687 = \bar{4}.7217035.$$

復次,如欲求 52725 之對數,則在第一列查得 5272 一數,沿此數之橫行查頂上爲 5 之一行其下爲 $\overline{0166}$. 此橫線表示以前諸位數應爲 722 而非 721. 故 52725 之對數之尾數爲 0.7220166. 又對數之首數爲 4.

故 $$\log 52725 = 4.7220166.$$

同理 $$\log 0.052725 = \bar{2}.7220166.$$

如所用之表爲本書所附之五位對數表,則查表之方法如下:

於附錄第 ii 頁之第一列查得 52 一數,沿此數之橫行於頂上爲 6 之一行得數爲 72099.

故得

眞數	對數
526	2.72099

今所查之數次位爲 8. 則於表之右方平均差數中,查 8 之一列而與 52 同一橫行者,其數爲 66. 又所查之數末一位爲 7, 其平均差數爲 58. 於是

眞數	對數
526	2.72099
0.8 之差數	66
0.07 之差數	5 8
526.87	2.72170 8

則得 $\log 52687 = 4.72171$ 眞確至五位.

用五位對數表及平均差數表所能求得之結果其精確度祇能如此. 其

小數點下之第五位數與上例由七位對數表查得者未能適合.

茲舉數例以示應用對數解題之效能.

146. 例 1. 求 $\sqrt[5]{23.4}$ 之值.

設 $$x=\sqrt[5]{23.4}=23.4^{\frac{1}{5}},$$

則 $$\log x=\tfrac{1}{5}\log(23.4)$$ (第 139 節)

於七位對數表上,對 234 之對數爲 3692159

卽 $$\log 23.4=1.3692159.$$

故 $$\log x=\tfrac{1}{5}(1.3692159)=0.2738432.$$

次由表中查得與對數 2738432 相當之眞數爲 187864.

故 $$\log 1.87864=0.2738432.$$

$$\therefore\ x=1.87864.$$

例 2 用本書之對數表,求下式之值.

$$\frac{(6.45)^3\times\sqrt[3]{0.00034}}{(9.37)^2\times\sqrt[4]{8.93}}.$$

設 x 爲所求之數,則由第 138 節及第 139 節,

$$\log x=\log(6.45)^3+\log(0.00034)^{\frac{1}{3}}-\log(9.37)^2-\log(8.93)^{\frac{1}{4}}$$
$$=3\log(6.45)+\tfrac{1}{3}\log(0.00034)-2\log(9.37)-\tfrac{1}{4}\log(8.93).$$

今由附錄 ii 至 iii 兩頁之對數表查得

與數 645 相當之對數爲 80956,

與數 34 相當之對數爲 53148,

與數 937 相當之對數爲 97174,

與數 893 相當之對數爲 95085.

於是 $$\log x=3\times0.80956+\tfrac{1}{3}(\bar{4}.53148)-2\times0.97174-\tfrac{1}{4}\times0.95085.$$

但 $$\tfrac{1}{3}(\bar{4}.53148)=\tfrac{1}{3}(\bar{6}+2.53148)$$
$$=\bar{2}+0.843827$$

$$\therefore\ \log x=2.42868+(\bar{2}+0.843827)-1.94348-0.237713$$
$$=3.272507-4.181193$$
$$=\bar{1}+4.272507-4.181193$$
$$=\bar{1}.09131,$$ 眞確至小數下五位.

由附錄第 ii 頁之對數表,得與數 123 相當之對數爲 0.08991, 於是得

$$\begin{array}{rl} \log 123 & = 2.08991 \\ \text{比例差} \quad 0.4 = & \quad 140 \\ \hline \log 123.4 & = 2.09131 \end{array}$$

故 $$\log x = \log 0.12340.$$

卽 $$x = 0.12340.$$

若一數之對數與表中之對數不能完全相合，而在連續兩對數之間，則查對數之方法將於下章討論之.

例 3. 已知 $\log 2 = 0.30103$，求 2^{67} 所有整數之位數，又 2^{-37} 之第一位有效數字之位置.

$$\log 2^{67} = 67 \times \log 2 = 67 \times 0.30103$$
$$= 20.16901.$$

今 2^{67} 之對數之首數爲 20，故由第 142 節之定理知 2^{67} 爲 21 位數.

又 $$\log 2^{-37} = -37 \log 2 = -37 \times 0.30103$$
$$= -11.13811 = \overline{12}.86189.$$

故由第 142 節之定理，知小數點與第一位有效數字間應有 11 個零，卽第一位有效數字之位置應在小數點後第十二位.

例 4. 已知 $\log 3 = 0.4771213$，$\log 7 = 0.8450980$ $\log 11 = 1.0413927$，解次之方程式

$$3^x \times 7^{2x+1} = 11^{x+5}.$$

此式之兩邊各取對數，則

$$\log 3^x + \log 7^{2x+1} = \log 11^{x+5}.$$

$$\therefore \quad x \log 3 + (2x+1) \log 7 = (x+5) \log 11.$$

$$x[\log 3 + 2 \log 7 - \log 11] = 5 \log 11 - \log 7.$$

$$\therefore \quad x = \frac{5 \log 11 - \log 7}{\log 3 + 2 \log 7 - \log 11}$$

$$= \frac{5.2069635 - 0.8450980}{0.4771213 + 1.6901960 - 1.0413927}$$

$$= \frac{4.3618655}{1.1259246} = 3.87\cdots\cdots.$$

147. 求證

$$\log_a m = \log_b m \times \log_a b.$$

設 $\log_a m = x$，則 $\qquad a^x = m,$

次設 $\log_b m = y$，則 $\qquad b^y = m.$

$$\therefore \quad a^x = b^y$$

於是 $$\log_a (a^x) = \log_a (b^y).$$

$$\therefore \quad x = y \log_a b \qquad \text{(第 139 節)}$$

故 $$\log_a m = \log_b m \times \log_a b.$$

應用上之定理,一數之對數得由 b 底轉化爲 a 底.如第二編 12 節所示欲求一數以 10 爲底之對數,必先求此數以另一數爲底之對數,然後轉化得之.

習題二十三

1. 已知 $\log 4 = 0.60206$, $\log 3 = 0.4771213$, 試求 0.8, 0.003, 0.0108, 與 $(0.00018)^{\frac{1}{7}}$ 之對數.

2. 已知 $\log 11 = 1.0413927$, $\log 13 = 1.1139434$, 求以下各數之值 (1) $\log 1.43$, (2) $\log 133.1$, (3) $\log \sqrt[4]{143}$ (4) $\log \sqrt[3]{0.00169}$.

3. 以下諸數 243.7, 0.0153, 2.8713, 0.00057, 0.023, $\sqrt[5]{24615}$, $(24589)^{\frac{3}{4}}$ 對數之首數爲何?

4. 求 0.003 之五次方根,已知

$$\log 3 = 0.4771213, \qquad \log 312936 = 5.4954243.$$

5. 求以下諸數之值 (1) $7^{\frac{1}{7}}$, (2) $(84)^{\frac{2}{5}}$, (3) $0.021^{\frac{1}{5}}$, 已知

$$\log 2 = 0.30103, \qquad \log 3 = 0.4771213,$$
$$\log 7 = 0.8450980, \qquad \log 132057 = 5.1207283,$$
$$\log 588453 = 5.7697117, \qquad \log 461791 = 5.6644438.$$

6. 已知 $\log 3 = 0.4771213$,

求以下各數之位數,

(1) 3^{13}, (2) 3^{27}, (3) 3^{62}.

又以下各數第一位有效數字之位置,

(4) 3^{-13}, (5) 3^{-43}, (6) 3^{-65}.

7. 已知 $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.4771213$, $\log 7 = 0.8450980$, 解次之方程式

$$(1) \quad 2^x \cdot 3^{x+4} = 7^x,$$
$$(2) \quad 2^{2x+1} \cdot 3^{3x+2} = 7^{4x}.$$

(3) $7^{2x} \div 2^{x-4} = 3^{3x-7}$,

(4) $\left.\begin{array}{l} 7^{x+y} \times 3^{2x+y} = 9 \\ 3^{x-y} \div 2^{x-2y} = 3^{x} \end{array}\right\}$.

8. 用對數表求0.000026751之第七次方根.

應用對數表,求以下各式之近似值.

9. $\sqrt[3]{645.3}$.

10. $\sqrt[5]{82357}$.

11. $\dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt[3]{7}}{\sqrt[4]{8} \times \sqrt[5]{9}}$.

12. $\sqrt[3]{\dfrac{7.2 \times 8.3}{9.4 \div 16.5}}$.

13. $\sqrt{\dfrac{.8^{\frac{1}{5}} \times 11^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{74} \times \sqrt[5]{62}}}$.

繪次之圖形.

14. $\log x$.

15. $\log \sin x$.

16. $\log \cos x$.

17. $\log \tan x$.

18. $\log \operatorname{cosec} x$.

19. $\log \cot x$.

第十一章

對數表及三角函數表,比例分之原理

148. 前章曾指出自 1 至 108000 諸數之對數得由張氏對數表查出,例如 74583 及 74584 之對數即可直接查出.

但如 74583.3, 在以上兩數之間,則查此數之對數,需用比例分之原理,即一數對數之增加與該數之增加成比例也.

今由表查得

$$\log 74583 = 4.8726398 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\log 74584 = 4.8726457 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

則 $\log 74583.3$ 之值顯然在 $\log 74583$ 與 $\log 74584$ 之間.

今設 $$\log 74583.3 = \log 74583 + x$$

$$= 4.8726398 + x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由 (1), (2) 兩式知當眞數增 1 時對數增 0.0000059.

依據比例分之原理,如眞數增 0.3 則對數應增

$$0.3 \times 0.0000059, \text{ 即 } 0.00000177.$$

於是 $$\log 74583.3 = 4.8726398 + 0.00000177$$

$$= 4.87264157.$$

149. 茲更舉一例,今試求 log 0.0382757, 而以較簡捷之方式得之.

由表得

$$\log 0.038275 = \bar{2}.5829152$$
$$\log 0.038276 = \bar{2}.5829265$$

則差數爲 $\qquad 0.000001 = 0.0000113$

故差數爲 $\qquad .0000007 = 0.7 \times 0.0000113$
$$= 0.00000791$$

$$\therefore \quad \log 0.0382757 = \bar{2}.5829152 + 0.00000791 = \bar{2}.58292311$$

因所用之表爲七位對數表,僅準確至小數點下七位,故將末位捨去而得 $\bar{2}.5829231$.

150. 與上節相反之問題時或遇到,卽已知對數而求眞數是也.若對數適與表中某數相合,則眞數卽可一望而知.如或不能適合時,則其解法示例如下.

例. 某數之對數爲 2.6283924, 求某數.

對數表中不能查得 6283924 一數, 惟其近似之數爲 6283889 及 6283991, 一較原數略大一較原數略小.

故得 $\qquad \log 425.00 = 2.6283889 \qquad \cdots\cdots(1)$

又 $\qquad \log 425.01 = 2.6283991 \qquad \cdots\cdots(2)$

今設 $\qquad \log (425.00 + x) = 2.6283924 \qquad \cdots\cdots(3)$

由 (1) 與 (2), 知眞數差爲 0.01 時,對數差爲 0.0000102.

由 (1) 與 (3), 知眞數差爲 x 時,對數差爲 0.0000035.

於是得 $\qquad x : 0.01 :: 0.0000035 : 0.0000102$

$$\therefore \quad x = \frac{35}{102} \times 0.01 = \frac{0.35}{102} = 0.00343.$$

故所求之數 $= 425.00 + 0.00343 = 425.00343$.

151. 求表中相鄰兩對數之差,減法之手續可以省去.茲以第 129 頁之表爲例,表之右方差數行內之 82 卽示相鄰兩對數之差也.

表中之 82 實卽 0.0000082.

而 82 以下各數乃 0.1, 0.2,…… 等之相當差數．例如 0.5 之差數爲 0.0000041．

例如，求 52746.74 之對數．

由第 129 頁，得

$$
\begin{aligned}
\log 52746 &= 4.7221895\\
0.7 \text{ 之差數} &= 0.0000057\\
0.04 \text{ 之差數} & \\
\left(=\frac{1}{10}\times 4 \text{ 之差數}\right) &= 0.0000003\\
\hline
\therefore\ \log 52746.74 &= 4.7221955
\end{aligned}
$$

茲更舉兩例，由表中查對數，而加以適當之處理．

例 1．求 0.034574 之七次根．

設 x 爲所求之數，則

$$
\begin{aligned}
\log x &= \tfrac{1}{7}\log(0.034574) = \tfrac{1}{7}(\bar{2}.5387496)\\
&= \tfrac{1}{7}(\bar{7}+5.5387496).\\
\therefore\ \log x &= \bar{1}.7912499.
\end{aligned}
$$

但
$$
\begin{aligned}
\log 0.61837 &= \bar{1}.7912484\\
\hline
\text{差數} &= 0.0000015
\end{aligned}
$$

而
$$
\begin{aligned}
0.00001 \text{ 之差數} &= 0.0000071,\\
\therefore\ \text{增大之值} &= 0.00000211,\\
\therefore\ x &= 0.61837211.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r}
71)\,150\,(211\\
\underline{142}\\
80\\
\underline{71}\\
90\\
\underline{71}\\
19
\end{array}
$$

例 2．設 $a=345.75$, $b=283.912$，求 a^2-b^2 之平方根．用本書所附之五位對數表求之．

設 x 爲所求之數，則

$$
\begin{aligned}
2\log x &= \log(a^2-b^2) = \log(a-b)+\log(a+b)\\
&= \log 61.838 + \log 629.662
\end{aligned}
$$

今，由附錄第 iii 頁，

$$
\begin{array}{rr|l}
\log 61.8 = & 1.79099 & \\
0.03 \text{ 之差數} = & 21 & \\
0.008 \text{ 之差數} = & 5 & 6\\
\log 629 = & 2.79865 & \\
0.6 \text{ 之差數} = & 42 & \\
0.06 \text{ 之差數} = & 4 & 2\\
0.002 \text{ 之差數} = & & 14\\
\hline
\end{array}
$$

相加，得　　$2\log x = 4.59037$，準確至小數五位．

$$\therefore \quad \log x = 2.29518 \mid 5$$

由附錄第ii頁,

$\log 197 =$	2.29447	
0.3之差數$=$	67	
0.02之差數$=$	4	5
$\therefore \log 197.32 =$	2.29518	5

$$\therefore \quad x = 197.32.$$

倘所用之表爲七位對數表,則結果較爲準確,即197.3247.

152. 此例分之原理,其證法不在本書範圍以內.且必須加以相當限制方爲眞確也.

如用七位對數表,則應用此原理時不得少於五位有效數字,否則所求之七位數字將不可靠.

例如,欲求 $\log 2.5$, 決不能用 $\log 2$ 與 $\log 3$ 兩値計算得之.因此兩對數爲0.30103與0.4771213,由此所求 $\log 2.5$ 將爲0.389075,而表上所查得之 $\log 2.5$ 實爲0.3979400也.由是,此計算所得之値顯然頗不準確.

同理,欲求對數至五位小數,則所知之數不得少於四位.欲求對數至四位小數,則所知之數不得少於三位.

三角函數表

153. 張氏七位表(Chambers' Tables)中之三角函數,自0°至45°,每差1',皆可直接查得.

自45°至90°諸角之函數,不必另行載明,因可由0°至45°表內計算得之(第45節).

[例如,$\sin 76°11' = \sin(90° - 13°49') = \cos 13°49'$ 則表中所載者也.]

此表稱爲正弦眞數表,餘弦眞數表,等等,俾與正弦對數表,餘弦對數表等區别.

由是,凡某角爲幾度幾分之整數者,其正弦可由表中直接查得.至於某角之含有秒數者,則須應用比例分之原理求之.

例 1. 已知 $\sin 29°14' = 0.4883674,$

又 $\sin 29°15' = 0.4886212,$

求 $\sin 29°14'32''$.

用減法得

相差1'之角其正弦之差數 $= 0.0002538$

$\therefore$ 角之差數爲32''時其正弦之差數 $= \dfrac{32}{60} \times 0.0002538$

$= 0.00013536,$

$$\therefore \quad \sin 29°14'32'' = \begin{array}{r} 0.4883674 \\ +0.00013536 \\ \hline =0.48850276. \end{array}$$

因所求答數僅須至小數下七位,故末位6字可省去.復因76於80較70爲近;故

$$\sin 29°14'32'' = 0.4885028.$$

此卽所謂四捨五入方法也.

例 2. 已知 $\cos 16°27' = 0.9590672,$

又 $\cos 16°28' = 0.9589848,$

求 $\cos 16°27'47''$.

注意,如第55節所示,當某角增大時,其餘弦之値應減小.

於是,當此角增大1'卽60''時,其餘弦減小0.0000824.故此角增大47''時其餘弦應減小 $\dfrac{47}{60} \times 0.0000824$.

$$\therefore \quad \cos 16°27'47'' = 0.9590672 - \frac{47}{60} \times 0.0000824$$

$$= 0.9590672 - 0.0000645$$

$$= \begin{array}{r} 0.9590672 \\ -0.0000645 \\ \hline =0.9590027 \end{array}$$

以上諸式得簡寫如次:

$$\cos 16°28' = 0.9589848$$
$$\cos 16°27' = 0.9590672$$

$1'$之差數$= -0.0000824.$

$\therefore\ 47''$之差數$= -\frac{47}{60}\times 0.0000824$

$= -0.0000645$

$\therefore$ 答數$= 0.9590672$

$\quad -0.0000645$

$= 0.9590027$

$$\begin{array}{r} 824 \\ 47 \\ \hline 5768 \\ 3296\ \\ \hline 60\,)\,38728 \\ \hline 645 \end{array}$$

154. 已知某角之函數而欲求某角,此問題與上例相反,茲舉例如下.

例. 某角之餘切爲1.4109325,已知 $\cot 35°19' = 1.4114799$, 又 $\cot 35°20' = 1.4106098$, 求某角.

設此所求之角爲 $35°19' + x''$,

則 $\cot(35°19' + x'') = 1.4109325.$

由以上三式得

此角增大 $60''$ 時,其餘切減小 0.0008701,

此角增大 x'' 時,其餘切減小 0.0005474.

$\therefore\ x : 60 :: 5474 : 8701$, 解之得 $x = 37.7.$

故所求之角$= 35°19'37.7''.$

155. 關於比例分原理之應用,學者應注意當某角增大時,其函數之値爲增大抑爲減小.爲便利記憶計,學者應知在第一象限中,三種函數之有餘字者卽餘弦,餘切,餘割,皆因角之增大而減小也.

三角函數對數表

156. 三角計算題中,如三角形之解法等,必須用三角函數之對數.卽以正弦而論,若先查某角之正弦,次求此正弦之對數,則手續至爲不便,爲免除手續麻煩計,另有三角函數對數表備查,自 $0°$ 至 $45°$, 與上表同.

因角之正弦其值常小於1，故正弦之對數常爲負(第142節)。次因0°與45°間諸角之正切小於1，其對數爲負，而角之在45°與90°之間者，其正切大於1，則正切之對數必爲正。

157. 三角函數之對數，其符號有時爲正，有時爲負，於表之排印，甚爲不便，爲免除此種困難計，表中所列之對數，並非實在之對數，而較實在之對數大10.

例如，
$$\sin 30°=\tfrac{1}{2}.$$
則
$$\log\sin 30°=\log\tfrac{1}{2}=-\log 2$$
$$=-0.30103=\bar{1}.69897.$$
於是表中之對數爲
$$10+\log\sin 30° \text{ 卽 } 9.69897.$$
又
$$\tan 60°=\sqrt{3}.$$
則
$$\log\tan 60°=\tfrac{1}{2}\log 3=\tfrac{1}{2}(0.4771213)$$
$$=0.2385606.$$
於是表中之對數爲
$$10+0.2385606 \text{ 卽 } 10.2385606.$$

表中之對數卽"表對數"之記號爲L，凡英國文字算書之對數表常用之。

如
$$L\sin 15°25'=10+\log\sin 15°25',$$
又
$$L\sec 48°23'=10+\log\sec 48°23'.$$

158. 某角爲幾度幾分者，其函數之對數可由表中直接查得。角之含有秒數者，須用比例分之原理。其法與第153節之方法相似。茲舉一例并相反之一例以明之。

例 1. 已知 $L\operatorname{cosec} 32°21' = 10.2715733,$

又 $L\operatorname{cosec} 32°22' = 10.2713740.$

求 $L\operatorname{cosec} 32°21'51''$.

此角增大 60″ 時,對數減小 0.0001993.

此角增大 51″ 時對數應減小 $\frac{51}{60} \times 0.0001993$, 即 0.0001694.

於是
$$\begin{aligned} L\operatorname{cosec} 32°21'51'' &= 10.2715733 \\ &\quad - 0.0001694 \\ &= 10.2714039 \end{aligned}$$

例 2. 某角正切之表對數爲 9.4417250 求某角.

設 x 爲所求之角.

由表得

$$\begin{aligned} L\tan x &= 9.4417250 \\ L\tan 15°27' &= 9.4415145 \\ \hline \text{差數} &= \quad 2105. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L\tan 15°28' &= 9.4420062 \\ L\tan 15°27' &= 9.4415145 \\ \hline 1'\text{ 之差數} &= \quad 4917. \end{aligned}$$

$$\text{相當角之差數} = \frac{2105}{4917} \times 60''$$
$$= 25.7''.$$
$$\therefore \quad x = 15°27'26''.$$

$$\begin{array}{r} 2105 \\ 60 \\ 4917)\overline{126300}(25.7 \\ 9834 \\ \hline 27960 \\ 24585 \\ \hline 33750 \end{array}$$

例 3. 已知 $L\sin 14°6' = 9.3867040,$

求 $L\operatorname{cosec} 14°6'$.

已知 $\log\sin 14°6' = L\sin 14°6' - 10$
$$= -1 + 0.3867040.$$

今 $$\log\operatorname{cosec} 14°6' = \log\frac{1}{\sin 14°6'}$$
$$= -\log\sin 14°6' = 10 - L\sin 14°6'$$
$$= 10 - 9.3867040 = 0.6132960.$$

故得 $L\operatorname{cosec} 14°6' = 10.6132960.$

一般方法, 已知 $\sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1.$

$$\therefore \quad \log\sin\theta + \log\operatorname{cosec}\theta = 0.$$
$$\therefore \quad L\sin\theta + L\operatorname{cosec}\theta = 20.$$

於此每易發生錯誤, 因學者以爲

$$\log\operatorname{cosec} 14°6' = -\log\sin 14°6'.$$

遂亦以爲

$$L\operatorname{cosec}14°6' = -L\sin 14°6'.$$

此則顯然不合理者也.

習題二十四

1. 已知 $\log 35705 = 4.5527290$

及 $\log 35706 = 4.5527412$,

求 $\log 35705.7$ 與 $\log 35.70585$ 之值.

2. 已知 $\log 5.8742 = 0.7689487$

及 $\log 587.43 = 2.7689561$,

求 $\log 58742.57$ 與 $\log 0.00587422$ 之值.

3. 已知 $\log 47847 = 4.6798547$

及 $\log 47848 = 4.6798638$,

求兩眞數已知其對數各爲 2.6798593 及 $\bar{3}.6798617$.

4. 已知 $\log 258.36 = 2.4122253$

及 $\log 2.5837 = 0.4122421$,

求兩眞數已知其對數各爲 0.4122378 及 $\bar{2}.4122287$.

5. 由第129頁之表試求下列諸數之對數:

(1) 52538.97,　(2) 527.286,　(3) 0.000529673,

並求下列諸對數之眞數:

(4) 3.7221098,　(5) $\bar{2}.7240075$, 及 (6) 0.7210386.

6. 已知 $\sin 43°23' = 0.6868761$

及 $\sin 43°24' = 0.6870875$,

試求 $\sin 43°23'47''$ 之值.

7. 並就上題求某角,已知其正弦爲 0.6870349.

8. 已知 $\cos 32°16' = 0.8455726$

及 $\cos 32°17' = 0.8454172$,

試求 $\cos 32°16'24''$ 與 $\cos 32°16'47''$ 之值

9. 並就上題求二角,已知其餘弦爲 0.8454832 及 0.8455176.

10. 已知 $\tan 76°21' = 4.1177784$

及 $\tan 76°22' = 4.1230079$,

試求 $\tan 76°21'29''$ 與 $\tan 76°21'47''$ 之值.

11. 已知 $\operatorname{cosec} 13°8' = 4.4010616$

及 $\operatorname{cosec} 13°9' = 4.3955817$,

試求 $\operatorname{cosec} 13°8'19''$ 與 $\operatorname{cosec} 13°8'37''$ 之值.

12. 就上題求某角,已知其餘割爲 4.396789.

13. 已知 $L \cos 34°44' = 9.9147729$

及 $L \cos 34°45' = 9.9146852$,

試求 $L \cos 34°44'27''$ 之值.

14. 就上題求角 θ, 已知

$$L \cos \theta = 9.9147328.$$

15. 已知 $L \cot 71°27' = 9.5257779$

及 $L \cot 71°28' = 9.5253589$,

試求 $L \cot 71°27'47''$ 之值,

並解次之方程式 $L \cot \theta = 9.5254782.$

16. 已知 $L \sec 18°27' = 10.0229168$

及 $L \sec 18°28' = 10.0229590$,

試求 $L \sec 18°27'35''$ 之值.

17. 就上題求某角,已知其正割之表對數 ($L \sec$) 爲 10.0229285.

18. 求某角之度數,分數,及秒數,已知其正弦爲 0.6, 並知

$$\log 6 = 0.7781513, \qquad L \sin 36°52' = 9.7781186,$$

及 $L \sin 36°53' = 9.7782870.$

159. 次頁爲張氏表中之一頁,凡 32° 至 33° 以及 57° 至 58° 諸角函數之對數,備列其內.

表中之第一列爲自 32° 至 33° 間,每分之正弦表對數.

第二列爲差數,如 2021, 其意卽 0.0002021 爲 $L \sin 32°0'$ 與 $L \sin 32°1'$ 之差,可由 9.7242097 與 9.7244118 相減得之.故 2021 位於此兩數之間,以示其爲何數之差.

此差數同時亦爲其右方 cosec 列內兩數之差.

同理,表中第五列亦爲差數,乃其左右相鄰兩列之差數也.

三角函數對數表

32 Deg.

′	Sine	Diff.	Cosec.	Tang.	Diff.	Cotang.	Secant	Diff.	Cosine	′
0	9·7242097	2021	10·2757903	9·7957892	2811	10·2042108	10·0715795	790	9·9284205	60
1	9·7244118	2020	10·2755882	9·7960703	2810	10·2039297	10·0716585	790	9·9283415	59
2	9·7246138	2018	10·2753862	9·7963513	2809	10·2036487	10·0717375	791	9·9282625	58
3	9·7248156	2018	10·2751844	9·7966322	2808	10·2033678	10·0718166	791	9·9281834	57
4	9·7250174	2015	10·2749826	9·7969130	2808	10·2030870	10·0718957	792	9·9281043	56
5	9·7252189	2015	10·2747811	9·7971938	2807	10·2028062	10·0719749	792	9·9280251	55
6	9·7254204	2013	10·2745796	9·7974745	2806	10·2025255	10·0720541	793	9·9279459	54
7	9·7256217	2012	10·2743783	9·7977551	2805	10·2022449	10·0721334	793	9·9278666	53
8	9·7258229	2011	10·2741771	9·7980356	2804	10·2019644	10·0722127	794	9·9277873	52
9	9·7260240	2009	10·2739760	9·7983160	2804	10·2016840	10·0722921	794	9·9277079	51
10	9·7262249	2008	10·2737751	9·7985964	2803	10·2014036	10·0723715	795	9·9276865	50
11	9·7264257	2007	10·2735743	9·7988767	2802	10·2011233	10·0724510	795	9·9275490	49
12	9·7266264	2005	10·2733736	9·7991569	2801	10·2008431	10·0725305	796	9·9274695	48
13	9·7268269	2004	10·2731731	9·7994370	2800	10·2005630	10·0726101	796	9·9273899	47
14	9·7270273	2003	10·2729727	9·7997170	2800	10·2002830	10·0726897	797	9·9273103	46
15	9·7272276	2002	10·2727724	9·7999970	2799	10·2000030	10·0727694	797	9·9272306	45
16	9·7274278	2000	10·2725723	9·8002769	2798	10·1997231	10·0728491	798	9·9271509	44
17	9·7276278	1999	10·2723722	9·8005567	2798	10·1994433	10·0729289	798	9·9270711	43
18	9·7278277	1998	10·2721723	9·8008365	2796	10·1991635	10·0730087	799	9·9269913	42
19	9·7280275	1996	10·2719725	9·8011161	2796	10·1988839	10·0730886	800	9·9269114	41
20	9·7282271	1996	10·2717729	9·8013957	2795	10·1986043	10·0731686	800	9·9268314	40
21	9·7284267	1993	10·2715733	9·8016752	2794	10·1983248	10·0732486	800	9·9267514	39
22	9·7286260	1993	10·2713740	9·8019546	2794	10·1980454	10·0733286	801	9·9266714	38
23	9·7288253	1991	10·2711747	9·8022340	2793	10·1977660	10·0734087	801	9·9265913	37
24	9·7290244	1990	10·2709756	9·8025133	2792	10·1974867	10·0734888	802	9·9265112	36
25	9·7292234	1989	10·2707766	9·8027925	2791	10·1972075	10·0735690	803	9·9264310	35
26	9·7294223	1988	10·2705777	9·8030716	2790	10·1969284	10·0736493	803	9·9263507	34
27	9·7296211	1986	10·2703789	9·8033506	2790	10·1966494	10·0737296	803	9·9262704	33
28	9·7298197	1985	10·2701803	9·8036296	2789	10·1963704	10·0738099	805	9·9261901	32
29	9·7300182	1983	10·2699818	9·8039085	2788	10·1960915	10·0738904	804	9·9261096	31
30	9·7302165	1983	10·2697835	9·8041873	2788	10·1958127	10·0739708	805	9·9260292	30
31	9·7304148	1981	10·2695852	9·8044661	2786	10·1955339	10·0740513	806	9·9259487	29
32	9·7306129	1980	10·2693871	9·8047447	2786	10·1952553	10·0741319	806	9·9258681	28
33	9·7308109	1978	10·2691891	9·8050233	2786	10·1949767	10·0742125	806	9·9257075	27
34	9·7310087	1977	10·2689913	9·8053019	2784	10·1946981	10·0742931	808	9·9257069	26
35	9·7313064	1976	10·2687936	9·8055803	2784	10·1944197	10·0743739	807	9·9256261	25
36	9·7314040	1975	10·2685960	9·8058587	2783	10·1941413	10·0744546	808	9·9255454	24
37	9·7316015	1974	10·2683985	9·8061370	2782	10·1938630	10·0745354	809	9·9254646	23
38	9·7317989	1972	10·2682011	9·8064152	2781	10·1935848	10·0746166	809	9·9253837	22
39	9·7319961	1971	10·2680039	9·8066933	2781	10·1933067	10·0746972	810	9·9253028	21
40	9·7321932	1970	10·2678068	9·8069714	2780	10·1930286	10·0747782	810	9·9252218	20
41	9·7323902	1968	10·2676098	9·8072494	2779	10·1927506	10·0748592	811	9·9251408	19
42	9·7325870	1967	10·2674130	9·8075273	2779	10·1924727	10·0749403	811	9·9250597	18
43	9·7327837	1966	10·2672163	9·8078052	2777	10·1921948	10·0750214	812	9·9249786	17
44	9·7329803	1965	10·2670197	9·8080829	2777	10·1919171	10·0751026	813	9·9248974	16
45	9·7331768	1963	10·2668232	9·8083606	2777	10·1916394	10·0751839	812	9·9248161	15
46	9·7333731	1962	10·2666269	9·8086383	2775	10·1913617	10·0752651	814	9·9247349	14
47	9·7335693	1961	10·2664307	9·8089158	2775	10·1910842	10·0753465	814	9·9246535	13
48	9·7337654	1960	10·2662346	9·8091933	2774	10·1908067	10·0754279	814	9·9245721	12
49	9·7339614	1958	10·2660386	9·8094707	2773	10·1905293	10·0755093	815	9·9244907	11
50	9·7341572	1957	10·2658428	9·8097480	2773	10·1902520	10·0755908	815	9·9244092	10
51	9·7343529	1956	10·2656471	9·8100253	2772	10·1899747	10·0756723	816	9·9243277	9
52	9·7345485	1955	10·2654515	9·8103025	2771	10·1896975	10·0757539	817	9·9242461	8
53	9·7347440	1953	10·2652560	9·8105796	2770	10·1894204	10·0758356	817	9·9241644	7
54	9·7349393	1952	10·2650607	9·8108566	2770	10·1891434	10·0759173	817	9·9240827	6
55	9·7351345	1951	10·2648655	9·8111336	2769	10·1888664	10·0759990	819	9·9240010	5
56	9·7353296	1950	10·2646704	9·8114105	2768	10·1885895	10·0760809	818	9·9239191	4
57	9·7355246	1949	10·2644754	9·8116873	2768	10·1883127	10·0761627	819	9·9238373	3
58	9·7357195	1947	10·2642805	9·8119641	2767	10·1880359	10·0762446	820	9·9237554	2
59	9·7359142	1946	10·2640858	9·8122408	2766	10·1877592	10·0763266	820	9·9236734	1
60	9·7361088		10·2638912	9·8125174		10·1874826	10·0764086		9·9235914	0
′	Cosine	Diff.	Secant	Cotang.	Diff.	Tang.	Cosec.	Diff.	Sine	′

57 Deg.

160. 關於差數尙有一點應注意者.吾人已知2021(第二列之第一數)意謂 0.0002021. 而 790 (第八列之第一數)乃爲0.0000790 而非 0.000790. 須知此爲七位表,則差數之右端一位爲小數點以下之第七位數,故差數之前應加以相當之圈使成七位.如

差數=　9 其意即謂差數爲 0.0000009,

差數=　74 其意即謂差數爲 0.0000074,

差數=　735 其意即謂差數爲 0.0000735,

差數= 2021 其意即謂差數爲 0.0002021,

差數=12348 其意即謂差數爲 0.0012348.

161. 第145頁之表幷示以57°與58°間諸函數之表對數.設吾人欲求 $L\tan 57°20'$, 則在表之末行 tang. 列內向上尋求,直至與表之右端一列內 20 同行之數.此數爲 10.1930286, 即吾人所求之數 $L\tan 57°20'$ 也.

習題二十五

1. 求 θ 角,已知 $\cos\theta=0.9725382$,

$\cos 13°27'=0.9725733$, $1'$ 之差數=677.

2. 求某角,其正弦爲 $\frac{3}{8}$ 者,已知

$\sin 22°1'=0.3748763$, $1'$ 之差數=2696.

3. 已知 $\operatorname{cosec} 65°24'=1.0998243$,

$1'$ 之差數=1464,

求 $\operatorname{cosec} 65°24'37''$ 之值,

並求某角,其餘割爲 1.0997938.

4. 已知 $L\tan 22°37'=9.6197205$,

$1'$ 之差數=3557,

求 $L\tan 22°37'22''$ 之值.

並求某角,已知其正切之表對數 ($L\tan$) 爲 9.6195283

5. 求某角已知其餘弦之表對數 ($L\cos$) 爲 9 993, 並知

$$L\cos 10°15' = 9.9930131,\qquad 1' \text{之差數} = 229.$$

6. 求某角,其正割之表對數 ($L\sec$) 爲 10.15, 已知

$$L\sec 44°55' = 10.1498843,\qquad 1' \text{之差數} = 1260.$$

7. 由第145頁之表求下列諸式之值:

(1) $L\sin 32°18'23''$, (2) $L\cos 32°16'49''$,

(3) $L\cot 32°29'43''$, (4) $L\sec 32°52'27''$,

(5) $L\tan 57°45'28''$, (6) $L\operatorname{cosec} 57°48'21''$,

及 (7) $L\cos 57°58'29''$.

8. 試藉該頁之助,解下列各方程式.

(1) $L\tan\theta = 10.1959261$, (2) $L\operatorname{cosec}\theta = 10.0738125$,

(3) $L\cos\theta = 9\ 9259283$, 及 (4) $L\sin\theta = 9.9241352$.

9. 由表查出 $L\tan 16°6'23''$, 并計算此正切之平方根.

10. 變換下式,俾合於對數之計算.(卽化和或差爲積.)

(1) $1+\tan x\tan y$, (2) $1-\tan x\tan y$,

(3) $\cot x+\tan y$, (4) $\cot x-\tan y$,

(5) $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$, 及 (6) $\dfrac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}$.

第十二章

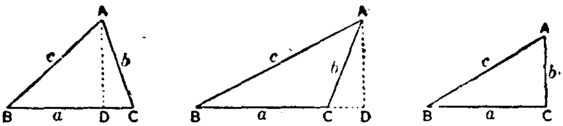
任意三角形邊角函數之關係

162. 在任意三角形 ABC 中，對角 A 之邊 BC，以 a 表之；對角 B 與 C 之兩邊 CA 與 AB，則以 b 與 c 表之.

163. 定理 在任意三角形 ABC 中，

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c},$$

即角之正弦與其相對之邊成比例.



作 AD 垂直於其對邊，與對邊或其延長線相交於 D.

在三角形 ABD 中，

$$\frac{AD}{AB}=\sin B, \qquad \text{即} \quad AD=c\sin B.$$

在三角形 ACD 中，

$$\frac{AD}{AC}=\sin C, \qquad \text{即} \quad AD=b\sin C,$$

[如第二圖中之角 C 為鈍角，則

$$\frac{AD}{b}=\sin ACD=\sin(180°-C)=\sin C \qquad \text{(第 72 節)}$$

故 $AD=b\sin C$.]

分等於 AD 之量相等，則

$$c\sin B=b\sin C,$$

即
$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$

同理，過點 B 作垂線垂直於 CA，則得

$$\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin A}{a}.$$

如第三圖，設三角形中之一角 C 爲直角，則

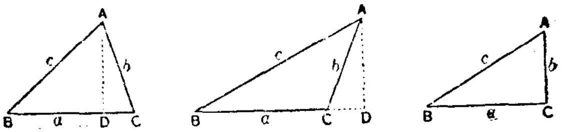
$$\sin C=1,\ \sin A=\frac{a}{c},\ 又\ \sin B=\frac{b}{c}.$$

於是
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{1}{c}=\frac{\sin C}{c}.$$

由是，在任何情形內，恆得

$$\frac{\sin \mathbf{A}}{a}=\frac{\sin \mathbf{B}}{\mathbf{b}}=\frac{\sin \mathbf{C}}{\mathbf{c}}.$$

164. 在任意三角形內，求以邊長表一角之餘弦.



於三角形 ABC 內，由 A 作垂線垂直於 BC，交 BC 或其延長線於 D.

第一，設 C 爲銳角；如圖一，則依照幾何定理，得

$$AB^2=BC^2+CA^2-2BC\cdot CD\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

但 $\dfrac{CD}{CA}=\cos C$，　故　$CD=b\cos C$.

由是 (i) 式變爲

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

即 $$2ab\cos C=a^2+b^2-c^2,$$

即 $$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

第二,設 C 爲鈍角,如圖二,則依照幾何定理,得

$$AB^2=BC^2+CA^2+2BC\cdot CD\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

但 $\dfrac{CD}{CA}=\cos ACD=\cos(180^\circ-C)=-\cos C,$ (第 72 節)

故 $$CD=-b\cos C.$$

由是 (ii) 式變爲

$$c^2=a^2+b^2+2a(-b\cos C)=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

即 $$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

同理,得證次之二式

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

及 $$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$

若 C 爲直角,則 $c^2=a^2+b^2$, 於是 $\cos C=0$, 此式當然眞實,因 C 爲直角也.

於是上之公式不論 C 之值爲何,恆爲眞實.

例. 若 $a=15$, $b=36$, 及 $c=39$,

則 $$\cos A=\frac{36^2+39^2-15^2}{2\times36\times39}=\frac{3^2(12^2+13^2-5^2)}{2\times3^2\times12\times13}=\frac{288}{24\times13}=\frac{12}{13}.$$

165. 求以邊長表半角之正弦.

在任何三角形內,由上節之定理,知

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

由第 109 節，得

$$\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}.$$

故　$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{[a+(b-c)][a-(b-c)]}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

命 $a+b+c$ 爲 $2s$，則 s 等於三角形三邊之和之半. 卽周界之半.

於是

$$a+b-c = a+b+c-2c = 2s-2c = 2(s-c),$$

$$a-b+c = a+b+c-2b = 2s-2b = 2(s-b).$$

則式 (1) 變爲

$$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(s-c)\times 2(s-b)}{2bc} = 2\frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

同理，得

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}, \text{ 又 } \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

166. 求以邊長表半角之餘弦.

由第 109 節，得

$$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1.$$

於是　$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{[(b+c)+a][(b+c)-a]}{2bc}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今 $b+c-a=a+b+c-2a=2s-2a=2(s-a)$,

故式(1)變爲

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2s\times 2(s-a)}{2bc}=2\frac{s(s-a)}{bc}.$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

同理,得

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},\qquad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

167. 求以邊長表半角之正切.

因
$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

由第165節及第166節之式(2),得

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\div\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

同理,得

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},\ \text{又}\ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

因角 A 爲三角形之一內角,常 $<180°$,故 $\frac{A}{2}$ 常 $<90°$.

故 $\frac{A}{2}$ 之正弦,餘弦,正切常爲正(第52節).

故本節及以上兩節之公式前應加以正號.

168. **例.** 若 $a=13$, $b=14$, 及 $c=15$,

則 $$s=\frac{13+14+15}{2}=21,\quad s-a=8,\quad s-b=7,\quad 及\quad s-c=6.$$

於是 $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{7\times 6}{14\times 15}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{5},$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{6\times 8}{15\times 13}}=\frac{4}{\sqrt{65}}=\frac{4}{65}\sqrt{65},$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{21\times 6}{13\times 14}}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3}{13}\sqrt{13},$$

又 $$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{6\times 8}{21\times 7}}=\frac{4}{7}.$$

169. 求以邊長表三角形內任何角之正弦.

由第 109 節, 知

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

但, 由上節,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ 又\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

故得

$$\sin A=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

習題二十六

在三角形內

1. 已知 $a=25$, $b=52$, 及 $c=63$,

求 $\tan\frac{A}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$, 及 $\tan\frac{C}{2}$.

2. 已知 $a=125$, $b=123$, 及 $c=62$,

求諸角半角之正弦及諸角之正弦

3. 已知 $a=18,\ b=24,\ 及\ c=30,$

求 $\sin A,\ \sin B,\ 及\ \sin C.$

4. 已知 $a=35,\ b=84,\ 及\ c=91,$

求 $\tan A,\ \tan B,\ 及\ \tan C.$

5. 已知 $a=13,\ b=14,\ 及\ c=15,$

求諸角之正弦.并作圖以證之.

6. 已知 $a=287,\ b=816,\ 及\ c=865,$

求 $\tan\frac{A}{2}$ 與 $\tan A$ 之值.

7. 已知 $a=\sqrt{3},\ b=\sqrt{2},\ 及\ c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},$

求諸角.

170. 在任何三角形內,求證

$$a=b\cos C+c\cos B.$$

用第164節之圖.

由第一圖,得

$$\frac{BD}{BA}=\cos B,\quad 故\quad BD=c\cos B,$$

又
$$\frac{CD}{CA}=\cos C,\quad 故\quad CD=b\cos C.$$

於是 $a=BC=BD+DC=c\cos B+b\cos C.$

由第二圖,得

$$\frac{BD}{BA}=\cos B,\quad 故\quad BD=c\cos B,$$

又
$$\frac{CD}{CA}=\cos ACD=\cos(180^\circ-C)$$

$$=-\cos C\ (第72節),$$

故
$$CD=-b\cos C.$$

於是 $a=BC=BD-CD=c\cos B-(-b\cos C),$

由是,在任何情形內

$$a=b\cos C+c\cos B.$$

同理，得 $$b=c\cos A+a\cos C,$$

及 $$c=a\cos B+b\cos A.$$

171. 在任何三角形內，求證

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

在任何三角形內，知

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}.$$

$$\therefore\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}$$ (第 69 節)

於是 $$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

172. 例. 由第 164 節之公式導出第 170 節之公式，并逆證之.

由第 164 節之第一與第三兩式，得

$$b\cos C+c\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}=\frac{2a^2}{2a}=a.$$

故 $$a=b\cos C+c\cos B.$$

同理，求得第 170 節之其餘二式.

復次，由第 170 節之三式，

$$a=b\cos C+c\cos B,$$

$$b=c\cos A+a\cos C,$$

及

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

以上三式依次以 a, b 及 $-c$ 乘之,然後相加,則

$$a^2+b^2-c^2=a(b\cos C+c\cos B)+b(c\cos A+a\cos C)-c(a\cos B+b\cos A)$$

$$=2ab\cos C,$$

$$\therefore\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

同理,求得第 162 節之其餘二式.

173. 有時須證明一恆等式,含有三角形之邊與角.其一般之證法,則以邊之關係代入角或以角之關係代入邊.

例 1. 求證 $$a\cos\frac{B-C}{2}=(b+c)\sin\frac{A}{2}.$$

由第 163 節之關係,得

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

$$\therefore\quad (b+c)\sin\frac{A}{2}=a\cos\frac{B-C}{2}.$$

例 2. 在任何三角形內,求證

$$(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0.$$

由第 163 節之關係,得

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=k\ (\text{假設}).$$

則 原式 $=(b^2-c^2)\dfrac{\cos A}{ak}+(c^2-a^2)\dfrac{\cos B}{bk}+(a^2-b^2)\dfrac{\cos C}{ck}$

$$=\frac{1}{k}\left[(b^2-c^2)\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+(c^2-a^2)\frac{c^2+a^2-b^2}{2abc}+(a^2-b^2)\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}\right]$$

$$=\frac{1}{2abck}[b^4-c^4-a^2(b^2-c^2)+c^4-a^4-b^2(c^2-a^2)+a^4-b^4-c^2(a^2-b^2)]=0.$$

例 3. 在任何三角形內,求證

$$(a+b+c)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=2c\cot\frac{C}{2}.$$

左邊

$$=2s\left[\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}+\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\right] \qquad \text{(第 167 節)}$$

$$=2s\sqrt{\frac{s-c}{s}}\left[\sqrt{\frac{s-b}{s-a}}+\sqrt{\frac{s-a}{s-b}}\right]=2\sqrt{s(s-c)}\left[\frac{s-b+s-a}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}\right]$$

$$=\frac{2\sqrt{s(s-c)}\cdot c}{\sqrt{(s-a)(s-b)}},\ \text{因 } 2s=a+b+c,$$

$$=2c\cot\frac{C}{2}.$$

此恆等式亦可以角之函數代邊而證之.

由第 163 節之關係,得

$$\frac{a+b+c}{c}=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin C}$$

$$=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}},\ \text{(由第 127 節)},=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

又

$$\frac{2\cot\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}=\frac{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]}$$

$$=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \qquad \text{(第 69 節)}$$

於是

$$\frac{a+b+c}{c}=\frac{2\cot\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}.$$

即

$$(a+b+c)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=2c\cot\frac{C}{2}.$$

例 4. 設三角形之三邊成等差級數,求證其半角之餘切亦成等差級數.

已知 $$a+c=2b \quad \cdots\cdots(1)$$

求證 $$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}=2\cot\frac{B}{2} \quad \cdots\cdots(2)$$

今式(2)能成立,若

$$\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}+\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}=2\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}}$$

兩邊俱以下式乘之:

$$\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

若 $$(s-a)+(s-c)=2(s-b),$$

卽,若 $$2s-(a+c)=2s-2b,$$

卽,若 $a+c=2b$, 此卽上之式(1).

由是若式(1)能成立,則式(2)亦能成立.

習題二十七

在任何三角形 ABC 內,求證

1. $\sin\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$.

2. $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A$.

3. $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$.

4. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$.

5. $a(\cos B+\cos C)=2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}$.

6. $a(\cos C-\cos B)=2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}$.

7. $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}=\frac{b^2-c^2}{a^2}$.

8. $\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cot\frac{A-B}{2}$

9. $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=(b+c)\sin\frac{A}{2}$.

10. $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$.

11. $(b+c-a)\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=2a\cot\frac{A}{2}$.

12. $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$.

13. $(a^2-b^2+c^2)\tan B=(a^2+b^2-c^2)\tan C$.

14. $c^2=(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$.

15. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$.

16. $\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$.

17. $a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}+b\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}+c\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=0$.

18. $a^2(\cos^2 B-\cos^2 C)+b^2(\cos^2 C-\cos^2 A)+c^2(\cos^2 A-\cos^2 B)=0$.

19. $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$.

20. $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}{\cot A+\cot B+\cot C}$.

21. $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc$.

22. 三角形之三邊各爲 3, 4 與 $\sqrt{38}$, 求證最大之角大於 120°.

23. 直角三角形之兩邊爲 21 呎與 28 呎;求由直角至斜邊之垂線之長.

24. 在三角形內,三角之比爲 $1:2:3$, 求證相當邊之比爲 $1:\sqrt{3}:2$.

25. 在任何三角形內, 若

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{5}{6},\text{ 又 }\tan\frac{B}{2}=\frac{20}{37},$$

求 $\tan\frac{C}{2}$, 并證 $a+c=2b$.

26. 由等腰直角三角形一腰之中點,至對角作一直線,試證此線分對角爲兩分,其餘切爲 2 與 3.

27. 由三角形 ABC 之頂點 A 作底邊之垂線 AD, 而分 BD, CD 與 AD 爲 2, 3 與 6 之比;求證此三角形之頂角爲 45°.

28. 直徑 10 吋之環,由環心高 1 呎處以 6 絲繫此環於等距之 6 點,求兩絲所成角之餘弦.

29. 若 a^2, b^2 與 c^2 成 A.P., 求證 $\cot A$, $\cot B$ 與 $\cot C$ 亦成 A.P.

30. 若 a, b 與 c 成 A.P., 求證 $\cos A\cot\frac{A}{2}$, $\cos B\cot\frac{B}{2}$ 與 $\cos C\cot\frac{C}{2}$ 亦成 A.P.

31. 若 a, b 與 c 成 H.P., 求證 $\sin^2\frac{A}{2}$, $\sin^2\frac{B}{2}$, 與 $\sin^2\frac{C}{2}$ 亦成 H.P.

32. 三角形之三邊成 A.P., 又最大角與最小角各爲 θ 與 ϕ; 求證

$$4(1-\cos\theta)(1-\cos\phi)=\cos\theta+\cos\phi.$$

33. 三角形之三邊成 A.P., 而最大角與最小角之差爲 90°; 求證三邊之比爲 $\sqrt{7}+1$, $\sqrt{7}$ 與 $\sqrt{7}-1$.

34. 若 $C=60°$，求證

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$

35. 在任意三角形 ABC 內，設 D 爲底 BC 上之一點，而 $BD:DC::m:n$；又設 $\angle BAD=\alpha$，$\angle DAC=\beta$，$\angle CDA=\theta$，又 $AD=x$，求證

$$(m+n)\cot\theta=m\cot\alpha-n\cot\beta=n\cot B-m\cot C,$$

又
$$(m+n)^2\cdot x^2=(m+n)(mb^2+nc^2)-mna^2.$$

36. 若三角形中 c 邊之平分線垂直於 b 邊，求證

$$2\tan A+\tan C=0.$$

37. 若 θ 爲任意三角形之一角，求證

$$b\cos\theta=c\cos(A-\theta)+a\cos(C+\theta).$$

38. 過三角形 ABC 之頂點 C，作任一直線；由 A, B 作此直線之垂線，其長爲 p 與 q，求證

$$a^2p^2+b^2q^2-2abpq\cos C=a^2b^2\sin^2 C.$$

39. 過三角形 ABC 之頂點，作 OA, OB, 與 OC，令角 OAB, OBC, 與 OCA 各等於 ω；求證

$$\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C,$$

又
$$\operatorname{cosec}^2\omega=\operatorname{cosec}^2 A+\operatorname{cosec}^2 B+\operatorname{cosec}^2 C.$$

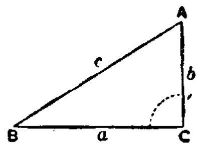
第十三章

三角形之解法

174. 三角形之三邊與三角稱爲三角形之原素.倘知其中之任何三原素而非全爲角者,則此三角形卽能決定,卽未知之邊與角可以求得也.惟所知者皆爲角,則祇能求邊長之關係,所得者爲三角形之形狀而非大小.由已知之三原素尋求未知之三原素,稱爲**三角形之解法**.

茲先討論直角三角形之解法,卽三角形之一角爲直角者.以下四節所論,卽爲此種三角形,其直角以C表之.

175. 第一類. 已知斜邊及另一邊,求解此三角形.



設一邊b及斜邊c爲已知.

則由次之關係得角B

$$\sin B=\frac{b}{c}.$$

$$\therefore\quad L\sin B=10+\log b-\log c.$$

因b與c爲已知,故得$L\sin B$,因而得B.

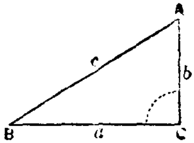
角$A(=90^\circ-B)$於是亦可求得.

他一邊a則可由次之關係求得之

$$\cos B=\frac{a}{c},\ \tan B=\frac{b}{a},\ 或\ a=\sqrt{(c-b)(c+b)}.$$

176. 第二類. 已知兩邊 a 與 b, 求解此三角形.

由下式求 B



$$\tan B=\frac{b}{a},$$

即　　$$L\tan B=10+\log b-\log a.$$

故, $L\tan B$, 因而角 B, 爲已知.

角 $A(=90°-B)$ 於是亦可求得.

求斜邊則應用 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 之關係.

但此式不適於對數之計算, 故不如下式爲便.

$$\sin B=\frac{b}{c},\quad 即\quad c=\frac{b}{\sin B}.$$

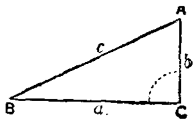
$$\therefore\quad \log c=\log b-\log\sin B=10+\log b-L\sin B.$$

於是得 c.

177. 第三類. 已知角 B 及一邊 a, 求解此三角形.

今 $A(=90°-B)$ 爲已知.

他一邊 b 則用次式求之



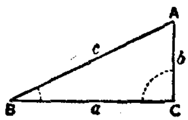
$$\frac{b}{a}=\tan B,$$

而 c 則用次之關係式

$$\frac{a}{c}=\cos B.$$

178. 第四類. 已知角 B 及斜邊 c, 求解此三角形.

今 A 爲已知, 而 a 與 b 則用次之關係式求之



$$\frac{a}{c}=\cos B.\ 又\ \frac{b}{c}=\sin B.$$

習題二十八

1. 於直角三角形 ABC 內，C 爲直角，若 $a=50$ 而 $B=75^\circ$ 求其餘各邊．($\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}$)

2. 三角形之兩邊爲10呎與20呎，其所夾之角爲90°，求解此三角形；知 $\log 20=1.30103$，又 $L\tan 26^\circ 33'=9.6986847$，1′之差數=3160.

3. 由三角形之一角作對於底邊之垂線，其長爲3吋，又夾此角之兩邊之長爲4吋與5吋．求諸角．已知

$$\log 2=.30103,\quad \log 3=.4771213,$$

$$L\sin 36^\circ 52'=9.7781186,\ 1'\text{之差數}=1684,$$

$$L\sin 48^\circ 35'=9.8750142,\ 1'\text{之差數}=1115.$$

4. 求直角三角形之諸銳角，已知斜邊之長爲由直角至斜邊所作垂線長之四倍．

179. 茲更討論三角形之諸角無一爲直角者．

其各種情形分論如下：

第一類．　已知三邊；

第二類．　已知兩邊及其夾角；

第三類．　已知兩邊及對一邊之角；

第四類．　已知兩角及一邊；

第五類．　已知三角．

180. 第一類．　已知三邊 a, b, 與 c.

因三邊爲已知，則半周界 s 亦爲已知，於是得 $s-a$, $s-b$, 與 $s-c$ 之值．

半角 $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ 與 $\frac{C}{2}$ 則應用次之公式求之

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\quad \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

又

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

因三角形三內角之和爲180°,故求得兩角後第三角不難覓取也.

除以上三式外,半角之正弦及餘弦公式亦可應用.

(第165及166節)

凡此皆便於對數之計算.

求角A亦可應用下式

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.\qquad\text{(第164節)}$$

此式不能應用對數,惟當a, b, c爲極簡單之整數時,則甚便利.

例. 三角形之三邊爲32, 40及66呎;求對最大邊之角,且用本書末所附之五位表.

今 $$a=32,\quad b=40,\quad c=66,$$

故 $$s=\frac{32+40+66}{2}=69,\quad s-a=37,\quad s-b=29,\quad s-c=3.$$

於是 $$\cot\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}=\sqrt{\frac{69\times 3}{37\times 29}}.$$

$$\therefore\quad L\cot\frac{C}{2}=10+\frac{1}{2}[\log 3+\log 69-\log 37-\log 29]$$

$$=10+\tfrac{1}{2}[.47712+1.83885-1.56820-1.46240]$$

$$=10+1.157985-1.51530$$

$$=9.642685\cdots\cdots(1)$$

由附表之第10頁,得

$$L\cot 66°10'=9.64517\cdots\cdots(2)$$

又 $$L\cot 66°20'=9.64175\cdots\cdots(3)$$

故知$\frac{C}{2}$在66°10′與66°20′之間.

茲設 $$\frac{C}{2}=66°10'+x'.$$

當此角增大x'時;由(1),(2)兩式,知減少之對數=.002485

當此角增大10′時,由(2),(3)兩式,知減少之對數=.00342.

於是
$$\frac{x}{10}=\frac{.002485}{.00342}=\frac{2485}{3420}.$$

$$\therefore\quad x'=7\frac{91'}{342}=7'16''\text{ (約)}.$$

$$\therefore\quad \frac{C}{2}=66°17'16'',\text{ 故 } C=132°34'32''.$$

習題二十九

[學者對於以下 1, 7, 8, 10, 11, 12 各題之結果,須作圖以證之.]

1. 設三角形之三邊爲 56, 65, 33 呎,求最大之角.

2. 三角形之三邊爲 $7, 4\sqrt{3}, \sqrt{13}$ 碼.問最小之角應爲幾度?

3. 三角形之三邊爲 $x^2+x+1, 2x+1, x^2-1$;求證最大之角爲 120°.

4. 三角形之三邊爲 $a, b, \sqrt{a^2+ab+b^2}$ 呎;求最大之角.

5. 若 $a=2,\ b=\sqrt{6},\ c=\sqrt{3}-1$,試解此三角形.

6. 若 $a=2,\ b=\sqrt{6},\ c=\sqrt{3}+1$,試解此三角形.

7. 若 $a=9,\ b=10,\ c=11$,求 B,已知

$$\log 2=.30103,\quad L\tan 29°29'=9.7523472,$$

又
$$L\tan 29°30'=9.7526420.$$

8. 三角形之三邊爲 130, 123, 77 呎.求最大之角,已知

$$\log 2=.30103,\quad L\tan 38°39'=9.9029376,$$

又
$$L\tan 38°40'=9.9031966.$$

9. 求三角形最大之角,其邊長爲 242, 188, 270 呎,已知

$$\log 2=.30103,\quad \log 3=.4771213,\quad \log 7=.8450980.$$

$$L\tan 38°20'=9.8980104,\text{ 又 } L\tan 38°19'=9.8977507.$$

10. 三角形之三邊爲 2, 3, 4;求其最大之角.已知

$$\log 2=.30103,\quad \log 3=.4771213,$$

$$L\tan 52°14'=10.1108395,$$

又
$$L\tan 52°15'=10.1111004.$$

應用對數表,求諸角之值.

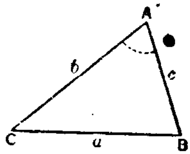
11. $a=25,\ b=26,\ c=27.$

12. $a=17,\ b=20,\ c=27.$

13. $a=2000,\ b=1050,\ c=1150.$

181. 第二類. 已知兩邊 b 與 c 及其所夾之角 A.

設 b 爲較大之邊,則由



$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}\text{(第 171 節)} \cdots\cdots(1)$$

及
$$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

得次之二式

$$\frac{B-C}{2}\text{ 與 }\frac{B+C}{2},$$

此二式之和與差,卽 B 與 C 也.

至於第三邊 a. 則由次之關係

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

化爲
$$a=b\frac{\sin A}{\sin B},$$

因而得 a.

邊 a 亦可由下式直接求之

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

此式不適於對數之計算,惟當 b 與 c 爲簡單之整數時,則應用亦便.

182. 例 1. 若 $b=\sqrt{3}$, $c=1$, $A=30^\circ$, 求解此三角形.

已知
$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cot 15^\circ.$$

今
$$\tan 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\text{(第 101 節)},$$

故
$$\cot 15^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

於是
$$\tan\frac{B-C}{2}=1.$$

$$\therefore \quad \frac{B-C}{2}=45° \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又
$$\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}=90°-15°=75° \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

相加,得 $B=120°$.

相減,得 $C=30°$.

因 $A=C$, 故 $a=c=1$.

別解. 已知

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3+1-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1,$$

故
$$a=1=c.$$

$$\therefore \quad C=A=30°,$$

又
$$B=180°-A-C=120°.$$

例 2. 若 $b=215$, $c=105$, 又 $A=74°27'$, 求其他兩角及第三邊 a. 已知

$$\log 2=.3010300, \ \log 11=1.0413927,$$

$$\log 105=2.0211893, \ \log 212.476=2.3273103,$$

$$L\cot 37°13'=10.1194723, \ 1' \text{之差數}=2622,$$

$$L\tan 24°20'=\ 9.6553477, \ 1' \text{之差數}=2364,$$

$$L\sin 74°27'=\ 9.9838052,$$

又
$$L\operatorname{cosec} 28°25'=10.3225025, \ 1' \text{之差數}=2334.$$

已知
$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{11}{32}\cot 37°13'30''.$$

今

$$
\begin{array}{rr}
& L\cot 37°13'=10.1194723 \\
& 30''\text{之差數}=-.0001311 \\
\hline
\therefore & L\cot 37°13'30''=10.1193412 \\
& \log 11=\ 1.0413927 \\
\hline
& 11.1607339 \\
& \log 32=\ 1.50515 \\
\hline
\therefore & L\tan\frac{1}{2}(B-C)=\ 9.6555839 \\
\text{但} & L\tan 24°20'=\ 9.6553477 \\
\hline
& \text{差數}=\qquad 2362
\end{array}
$$

$$=60''\text{之}\frac{2362}{3364}\text{之差數}$$

$$=42.1''\text{之差數}.$$

$$\therefore \quad \frac{B-C}{2}=24°20'42''.$$

$$
\begin{array}{r}
.30103 \\
5 \\
\hline
1.50515.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
2362 \\
60 \\
3364)\overline{141720}(42.1 \\
13456 \\
\hline
7160 \\
6728 \\
\hline
4320
\end{array}
$$

但	$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}=52^\circ46'30''.$	
	∴　相加，$B=77^\circ7'12''$，	
又	相減，$C=28^\circ25'48''$	
次因	$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=c\operatorname{cosec} C$，	
	∴　$a=105\sin 74^\circ27'\operatorname{cosec} 28^\circ25'48''.$	
但	$L\operatorname{cosec} 28^\circ25'=10.3225025$	
	$48''$ 之差數 $=-.0001867$	$\frac{48}{60}\times 2334$
	$L\operatorname{cosec} 28^\circ25'48''=10.3223158$	$=\frac{4}{5}\times 2334$
	$L\sin 74^\circ27'=9.9838052$	$=1867.$
	$\log 105=2.0211893$	
	22.3273103	
	20	
	∴　$\log a=2.3273103.$	
	∴　$a=212.476.$	

***183.** 欲求第三邊 a，如不用前法之先求 B 與 C 兩角，尙有其他方法茲舉二種方法如下：

(1)　因
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=b^2+c^2-2bc\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)$$
$$=(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{A}{2}.$$
$$\therefore\quad a^2=(b+c)^2\left[1-\frac{4bc}{(b+c)^2}\cos^2\frac{A}{2}\right].$$

於是，命
$$\sin^2\theta=\frac{4bc}{(b+c)^2}\cos^2\frac{A}{2}.$$

則得
$$a^2=(b+c)^2(1-\sin^2\theta)=(b+c)^2\cos^2\theta,$$

故
$$a=(b+c)\cos\theta.$$

由是，若應用次之關係求得 $\sin\theta$，
$$\sin\theta=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{A}{2},$$

則
$$a=(b+c)\cos\theta.$$

(2) 已知

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=(b-c)^2\left[1+\frac{4bc}{(b-c)^2}\sin^2\frac{A}{2}\right].$$

命
$$\frac{4bc}{(b-c)^2}\sin^2\frac{A}{2}=\tan^2\phi,$$

則
$$\tan\phi=\frac{2\sqrt{bc}}{b-c}\sin\frac{A}{2},$$

由是可以得 ϕ.

於是
$$a^2=(b-c)^2[1+\tan^2\phi]=\frac{(b-c)^2}{\cos^2\phi},$$

故
$$a=(b-c)\sec\phi,$$

其值即易於求得.

一角，如上之 θ 或 ϕ，爲便於計算而插入者，稱爲輔助角(第129節).

習題三十

[學者對於下列(如 4, 5, 6, 11)各題之結果，須作圖以證之.]

1. 若 $b=90$, $c=70$, 又 $A=72°48'30''$, 求 B 與 C, 已知

$$\log 2=.30103,\quad L\cot 36°24'15''=10.1323111,$$

$$L\tan 9°37'=9.2290071,$$

又
$$L\tan 9°38'=9.2297735.$$

2. 若 $a=21$, $b=11$, 又 $C=34°42'30''$, 求 A 與 B, 已知

$$\log 2=.30103,$$

又
$$L\tan 72°38'45''=10.50515.$$

3. 三角形之三角成 A.P. 又最大與最小兩邊各爲 24 與 16 呎，求第三邊及諸角，已知

$$\log 2=.30103,\quad \log 3=.4771213,$$

又
$$L\tan 19°6'=9.5394287,\ 1'\text{ 之差數}=4084.$$

4. 若 $a=13$, $b=7$, 又 $C=60°$, 求 A 與 B, 已知

$$\log 3=.4771213,$$

又
$$L\tan 27°27'=9.7155508,\ 1'\text{ 之差數}=3087.$$

5. 若 $a=2b$，又 $C=120°$，求 A, B 之值，又 c 與 a 之比值，已知

$$\log 3=.4771213,$$

又 $$L\tan 10°53'=9.2839070,\ 1' \text{ 之差數}=6808.$$

6. 若 $b=14$，$c=11$，又 $A=60°$，求 B 與 C，已知

$$\log 2=.30103,\quad \log 3=.4771213,$$

$$L\tan 11°44'=9.3174299,$$

又 $$L\tan 11°45'=9.3180640.$$

7. 三角形之三邊各爲 540 與 420 碼. 其所夾之角爲 52°6'. 求其他二角，已知

$$\log 2=.30103,\quad L\tan 26°3'=9.6891430,$$

$$L\tan 14°20'=9.4074189,$$

又 $$L\tan 14°21'=9.4079453.$$

8. 若 $b=2\frac{1}{2}$ 呎，$c=2$ 呎，又 $A=22°20'$，求其他各角，且證第三邊之長近於一呎，已知

$$\log 2=.30103,\quad \log 3=.47712,$$

$$L\cot 11°10'=10.70465,\ L\sin 22°20'=9.57977,$$

$$L\tan 29°22'20''=9.75038,\ L\tan 29°22'30''=9.75043,$$

又 $$L\sin 49°27'34''=9.88079.$$

9. 若 $a=2$，$b=1+\sqrt{3}$，又 $C=60°$，解此三角形.

10. 三角形之兩邊爲 $\sqrt{3}+1$ 與 $\sqrt{3}-1$，又其所夾之角爲 60°，求第三邊及諸角.

11. 若 $b=1$，$c=\sqrt{3}-1$，又 $A=60°$，求邊 a 之長.

12. 若 $b=91$，$c=125$. 又 $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{17}{6}$，求證 $a=204$.

13. 若 $a=5$，$b=4$，又 $\cos(A-B)=\dfrac{31}{32}$，求證第三邊 c 爲 6.

14. 三角形之一角爲 30°，又其相鄰兩邊之長爲 40 與 $40\sqrt{3}$ 碼. 求第三邊之長及其餘諸角.

15. 三角形之兩邊爲 9 與 3，又兩對角之差爲 90°，求底邊與其他兩角，已知

$$\log 2=.30103,\quad \log 3=.4771213,$$

$$\log 75894=4.8802074,\quad \log 75895=4.8802132.$$

$$L\tan 26°33'=9.6986847,$$

又 $$L\tan 26°34'=9.6990006.$$

16. 若
$$\tan\phi=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},$$
求證
$$c=(a+b)\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\phi}.$$

若 $a=3$, $b=1$, 又 $C=53°7'48''$, 求 c, 但不必先求 A 與 B, 已知
$$\log 2=.30103,\quad \log 25298=4.4030862,$$
$$\log 25299=4.4031034,\quad L\cos 26°33'54''=9.9515452,$$
又
$$L\tan 26°33'54''=9.6989700.$$

17. 三角形之兩邊爲 237 與 158 呎, 又其所夾之角爲 66°40′; 求底邊及其他諸角, 已知
$$\log 2=.30103,\quad \log 79=1.89763,$$
$$\log 22687=4.35578,\quad L\cot 33°20'=10.18197,$$
$$L\sin 33°20'=9.73998,\quad L\tan 16°54'=9.48262,$$
$$L\tan 16°55'=9.48308,\quad L\sec 16°54'=10.01917,$$
又
$$L\sec 16°55'=10.01921.$$
$$\left[應用公式\ \cos\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}\right].$$

以下四題, 其對數須由表中查得之.

18. 若 $a=242.5$, $b=164.3$, 又 $C=54°36'$, 求解此三角形.

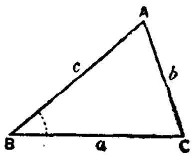
19. 若 $b=130$, $c=63$, 又 $A=42°15'30''$, 求解此三角形.

20. 三角形之兩邊爲 2265.4 與 1779 呎, 又其所夾之角爲 58°17′, 求其他諸角.

21. 三角形之兩邊爲 237.09 與 130.96 呎, 又其所夾之角爲 57°59′, 求其他諸角.

184. 第三類. 已知兩邊 b 與 c, 及一邊之對角 B.

角 C 由次之關係求之



$$\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b},$$
即
$$\sin C=\frac{c}{b}\sin B \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

應用對數以求 C, 於是 $A(=180°-B-C)$ 亦易求得.

至於第三邊 a 則由下式求之

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

即
$$a=b\frac{\sin A}{\sin B}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

185. 用上節之式(1)以求 C,所得者或一值或二值,或無有.

第一,設 B 爲銳角.

(α) 若 $b<c\sin B$,則式(1)之右邊大於一,而 C 之值不能求得.

(β) 若 $b=c\sin B$,則式(1)之右邊等於一,而 C 之對應值爲 $90°$.

(γ) 若 $b>c\sin B$,則 C 之正弦爲 $\dfrac{c\sin B}{b}$ 者有二,其一在 $0°$ 與 $90°$ 之間,另一在 $90°$ 與 $180°$ 之間.

但此二值未必常能適合.

因設 $b>c$,則 $B>C$.而 C 爲鈍角將不可能;蓋 C 爲鈍角則必 B 亦爲鈍角而後可,但三角形內顯然不能有兩鈍角也.

惟當 $b<c$ 而 B 爲銳角時,則 C 之兩值皆合.於是 A 亦有兩值,由是式(2),a 亦得兩值.合於此條件之三角形將有兩個.

第二,設 B 爲鈍角.

若 $b<$ 或 $=c$,則 B 將小於或等於 C,而 C 將爲鈍角.此三角形爲不可能.

若 $b>c$,則由式(1)所得之 C,祇能爲銳角而不能爲鈍角.故僅有一解.

因由 b, c 與 B 之值而解三角形時,往往發生分歧情況,故此類又稱爲歧例.

186. 歧例更可由幾何方法解釋之.

設三角形之三原素 b, c 與 B 爲已知而欲作此三角形.

首作角 ABD 等於已知角 B.

次於 BA 線上截取 BA 之長等於 c, 於是得角點 A.

復次, 於 BD 線上尋求第三點 C, 俾與點 A 間之距離爲 b.

其法, 以 A 爲圓心, b 爲半徑作圓.

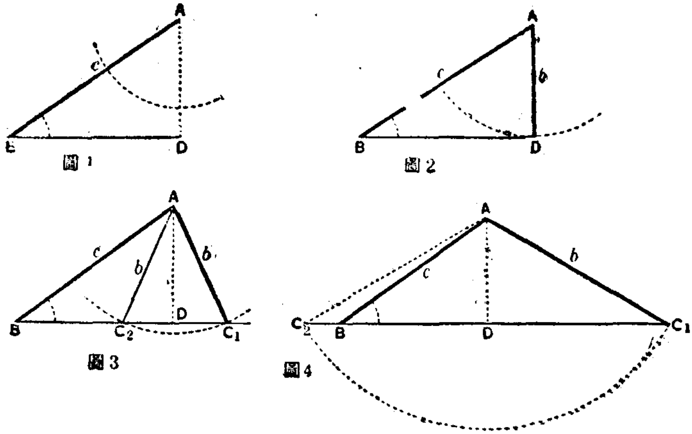
此圓與 BD 苟能相交於一點或二點, 即得決定 C 之地位.

今作 AD 垂直於 BD, 則

$$AD = AB \sin B = c \sin B.$$

下列之結果必有其一.

此圓或不能與 BD 相交, (圖 1), 或與 BD 相切, (圖 2), 或與 BD 相交於兩點 C_1 與 C_2 (圖 3, 圖 4).



如圖 1, 顯見無合於條件之三角形.

今　　$b < AD$, 即 $< c \sin B$.

如圖 2, 則有一三角形 ABD 適合而 D 爲直角.

今 $$b=AD=c\sin B.$$

如圖 3, 適合之三角形有二, 為 ABC_1 與 ABC_2. 今 b 之值在 AD 與 c 之間, 卽 $b>c\sin B$, 而 $<c$.

如圖 4, 祇有三角形 ABC_1 適合於已知條件[三角形 ABC_2 不合, 因在 B 點之角為 $180°-B$ 而非 B]. 今 b 之值皆較 $c\sin B$ 與 c 為大.

當 B 為鈍角時,而作一眞確之圖形, 顯見當 $b<c$ 時, 三角形不能成立(因所作之三角形 ABC_1 與 ABC_2, 其在 B 點之角為 $180°-B$ 而非 B). 若 $b>c$, 則有一個三角形適合,且祇有一個

結論:

已知 b, c, 與 B, 求解三角形,

(α) 若 $b<c\sin B$, 無解.

(β) 若 $b=c\sin B$, 而 B 為銳角, 有一解, 為直角三角形.

(γ) 若 $b>c\sin B$ 但 $<c$, 而 B 為銳角, 有二解.

(δ) 若 $b>c$, 有一解.

當 $b=c$ 時, 則圖 3 之 B 與 C_2 相合, 故僅有一解.

(ε) 若 b 為鈍角, 當 $b>c$ 時有一解, 否則無解.

187. 歧例更可用代數方法解釋之.

由第 184 節之圖, 得

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$$

$$\therefore\quad a^2-2ac\cos B+c^2\cos^2 B=b^2-c^2+c^2\cos^2 B$$

$$=b^2-c^2\sin^2 B.$$

$$\therefore\quad a-c\cos B=\pm\sqrt{b^2-c^2\sin^2 B},$$

卽 $$a=c\cos B\pm\sqrt{b^2-c^2\sin^2 B}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

式(1)可以求 a，當 b, c 與 B 爲已知時用之.

(α) 若 $b<c\sin B$，則 $\sqrt{b^2-c^2\sin^2 B}$ 爲虛數，於是式(1)中之 a 不能爲實數值.

(β) 若 $b=c\sin B$，則 a 惟有等於 $c\cos B$ 之一值；即所求之三角形祇能爲一直角三角形.

(γ) 若 $b>c\sin B$，則 a 之值有二.今 a 之值必爲正，則根號前之負號非合於以下之條件時將不可能，即

$$c\cos B-\sqrt{b^2-c^2\sin^2 B}\ \text{爲正},$$

即 $$\sqrt{b^2-c^2\sin^2 B}<c\cos B,$$

即 $$b^2-c^2\sin^2 B<c^2\cos^2 B,$$

即 $$b^2<c^2.$$

於是，兩個三角形俱能成立必須 $b>c\sin B$ 且 $<c$.

(δ) 若 B 爲鈍角，則 $c\cos B$ 爲負，於是 a 之值必有一爲負，因而三角形不能成立.

a 之值爲正必須

$$c\cos B+\sqrt{b^2-c^2\sin^2 B}\ \text{爲正},$$

即，必須 $$\sqrt{b^2-c^2\sin^2 B}>-c\cos B,$$

亦即 $$b^2>c^2\sin^2 B+c^2\cos^2 B,$$

亦即 $$b>c.$$

於是，當 B 爲鈍角時，如 $b<c$ 則無解，而 $b>c$ 時則有一解.

188. **例.** 已知 $b=16$, $c=25$, 又 $B=33°15'$，求證此三角形有分歧情況，應用書末所附之五位表，求其他諸角.

已知

$$\sin C=\frac{c}{b}\sin B=\frac{25}{16}\sin B=\frac{100}{64}\sin B=\frac{10^2}{2^6}\sin 33°15'.$$

於是 $$L\sin C = 2 + L\sin 33^\circ 15' - 6\log 2$$
$$= 2 + 9.73901 - 1.80618$$
$$= 9.93283.$$

由附表之第9頁,知此數在 $L\sin 58^\circ 50'$ 與 $L\sin 59^\circ$ 之間.故得

$$\begin{array}{rr} L\sin C = 9.93283 & L\sin 59^\circ = 9.93307 \\ L\sin 58^\circ 50' = 9.93230 & L\sin 58^\circ 50' = 9.93230 \\ \hline \text{差數} = 0.00053 & 10'\ \text{之差數} = 0.00077 \end{array}$$

$$\therefore\ \text{角之差數} = \frac{53}{77} \times 10'$$
$$= 6'53''\ \text{(約)}$$

$$\therefore\ C = 58^\circ 56' 53'',\ \text{或}\ 180^\circ - 58^\circ 56' 53''.$$

於是由(第186節,圖3)得

$$C_1 = 58^\circ 56' 53'',\ \text{又}\ C_2 = 121^\circ 3' 7''.$$

$$\therefore\ \angle BAC_1 = 180^\circ - 33^\circ 15' - 58^\circ 56' 53'' = 87^\circ 48' 7'',$$

又 $$\angle BAC_2 = 180^\circ - 33^\circ 15' - 121^\circ 3' 7'' = 25^\circ 41' 53''.$$

倘用七位表,則所得之結果較為精確,即 $C_1 = 58^\circ 56' 56''$, 又 $C_2 = 121^\circ 3' 4''$.

習題三十一

[學者對於下列(如3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13)各題之結果,須作圖以證之.]

1. 若 $a=5$, $b=7$, 又 $\sin A = \frac{3}{4}$, 此三角形是否有歧例?

2. 若 $a=2$, $c=\sqrt{3}+1$, 又 $A=45^\circ$, 求解此三角形.

3. 若 $a=100$, $c=100\sqrt{2}$, 又 $A=30^\circ$, 求解此三角形.

4. 若 $2b=3a$, 又 $\tan^2 A = \frac{3}{5}$, 求證第三邊有二值,其中一值為他值之兩倍.

5. 若 $A=30^\circ$, $b=8$, 又 $a=6$, 求 c.

6. 已知 $B=30^\circ$, $c=150$. 又 $b=50\sqrt{3}$, 求證合於此條件之三角形有二,一為等腰三角形,一為直角三角形,求較大之第三邊.

若 $B=30^\circ$, $c=150$, 又 $b=75$, 則此三角形將有二解否?

7. 在歧例之已知 a, b 與 A 者,求證 c 之二值其差數為 $2\sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}$.

8. 若 $a=5$, $b=4$, 又 $A=45^\circ$, 求其他諸角,已知

$$\log 2 = .30103,\quad L\sin 34^\circ 26' = 9.7523919,$$

又 $$L\sin 34^\circ 27' = 9.7525761.$$

9. 若 $a=9$, $b=12$, 又 $A=30^\circ$, 求 c, 已知

$$\log 2 = .30103,\quad \log 3 = .47712,$$

$$\log 171 = 2.23301, \quad \log 368 = 2.56635.$$

$$L \sin 11°48'39'' = 9.31108, \quad L \sin 41°48'39'' = 9.82391,$$

又 $$L \sin 108°11'21'' = 9.97774.$$

10. 以下之三角形中,如有分歧情況,試指出之.

試求以下二題中其他諸角及歧例中第三邊之值較小者.

(1) $A=30°$, $c=250$ 呎, 又 $a=125$ 呎.

(2) $A=30°$, $c=250$ 呎, 又 $a=200$ 呎.

已知 $$\log 2 = .30103, \quad \log 6.03893 = .7809601,$$

$$L \sin 38°41' = 9.7958800,$$

又 $$L \sin 8°41' = 9.1789001.$$

11. 已知 $a=250$, $b=240$, 又 $A=72°4'48''$, 求 B, C 兩角,且說明其值是否不止一個,已知

$$\log 2.5 = .3979400, \qquad \log 2.4 = .3802112,$$

$$L \sin 72°4' = 9.9783702, \quad L \sin 72°5' = 9.9784111,$$

又 $$L \sin 65°59' = 9.9606739.$$

12. 兩直道相交成 30° 之角;兩遊歷者 A 與 B 由交點同時出發.A 沿一道以每小時 5 哩之速度步行,B 則沿他道而行,三小時後兩人相距 9 哩.試證 B 之速度合於此條件者有二,且求此二不同之速度.

以下三題所用之對數須於表中求之.

13 三角形之兩邊爲 1015 呎及 732 呎,對第二邊之角爲 40°;求對第一邊之角,且證其值不止一個.

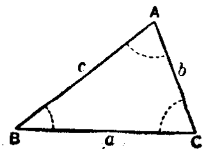
14. 三角形之兩邊爲 5374.5 呎及 1586.6 呎,且知對第二邊爲之角 15°11′,求合於此條件之三角形之諸角.

15. 若 $A=10°$, $a=2308.7$, 又 $b=7903.2$, 求 c 邊之較小者.

189. 第四類. 已知一邊及兩角.即 a, B 與 C.

因三角形三內角之和等於兩直角故第三角亦爲已知.

兩邊 b 與 c 則由次之關係求之.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

因此 $$b = a\frac{\sin B}{\sin A}, \text{ 又 } c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

190. 第五類. 已知三角 A, B 與 C.

三邊之關係可由次式求之

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

至於其絕對值則無法求得也.

習題三十二

1. 若 $\cos A=\frac{17}{22}$, 又 $\cos C=\frac{1}{14}$, 求 $a:b:c$ 之比.

2. 三角形之三內角成 $1:2:7$ 之比; 試證最大邊與最小邊之比爲 $\sqrt{5}+1:\sqrt{5}-1$.

3. 若 $A=45°$, $B=75°$, 又 $C=60°$, 求證 $a+c\sqrt{2}=2b$.

4. 三角形之兩角爲 $41°13'22''$ 與 $71°19'5''$, 又對第一角之邊爲 55; 求對第二角之邊,已知

$$\log 55=1.7403627,\quad \log 79063=4.8979775,$$
$$L\sin 41°13'22''=9.8188779,$$

又
$$L\sin 71°19'\ 5''=9.9764927.$$

5. 兩船相距一哩,由各船測岸上一燈塔與他船所張之角各爲 $52°25'15''$ 與 $75°9'30''$. 已知

$$L\sin 75°9'30''=9.9852635,$$
$$L\sin 52°25'15''=9.8990055,\quad \log 1.2197=.0862530,$$

又
$$\log 1.2198=.0862886.$$

求燈塔與各船之距離.

6. 三角形之兩底角一爲 $22\frac{1}{2}°$, 一爲 $112\frac{1}{2}°$; 求證底長爲高之二倍

以下各題所用之對數須於表中求之.

7. 三角形之底邊爲 7 呎,又其兩底角爲 $129°23'$ 與 $38°36'$, 求較短之一邊.

8. 三角形三內角之比爲 $5:10:21$, 又對小角之邊爲 3 呎,求其他兩邊.

9. 三角形之三角爲 $150°$, $18°20'$, 與 $11°40'$, 又最大之邊爲 1000 呎, 求最小之邊.

10. 今欲求 A 與 B 之距離,作一線 BC 及兩角 ABC 與 BCA, 其值各爲 287 碼, $55°32'10''$ 與 $51°8'20''$. 求 AB 之長.

11. 欲求 A 至 P 之距離,另於適當方向作 AB,其長爲 1000 碼.於 A 測得角 PAB 爲 $41°18'$, 又於 B 測得角 PBA 爲 $114°38'$. 問所求之距離當爲幾碼?

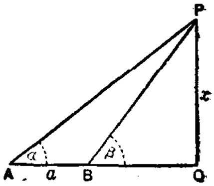
第十四章

高與距離

191. 本章所論皆平面測量中所習見之問題.其比較簡易者,已詳於第三章.

192. 求一不易接近之塔高,由兩處之觀察得之.

設 PQ 爲塔而塔基 Q 所在地爲平地.由地上之一點 A 測塔頂之仰角爲 a.



由 A 向塔基進行至 B,測得 $AB(=a)$,復由 B 測塔頂之仰角爲 β.

欲求塔高之未知值 x,必須令其與已知距離 a 發生關係.其法如下:

由三角形 PBQ,得

$$\frac{x}{BP}=\sin\beta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

復由三角形 PAB,得

$$\frac{PB}{a}=\frac{\sin PAB}{\sin BPA}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因 $\angle BPA=\angle QBP-\angle QAP=\beta-\alpha$.

令 (1) 與 (2) 相乘,得

$$\frac{x}{a}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)},$$

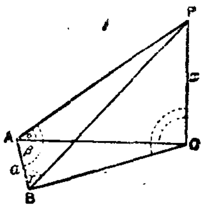
即 $$x=a\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

由是得 x 之值且適於對數之計算.

例. 若 $a=100$ 呎, $\alpha=30°$ 又 $\beta=60°$, 則

$$x=100\frac{\sin 30\ \sin 60°}{\sin 30°}=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}=86.6\text{ 呎}.$$

193. 有時 AB 不能直對 Q 量取,則於平地上任取適宜方向,於 A 測 P 之仰角 α 及角 $PAB(=\beta)$.



於 B 測角 $PBA(=\gamma)$.

於三角形 PAB 中,得

$$\angle APB=180°-\angle PAB-\angle PBA$$
$$=180°-(\beta+\gamma).$$

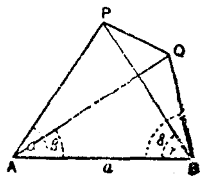
於是 $$\frac{AP}{a}=\frac{\sin PBA}{\sin BPA}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

於三角形 PAQ 中,得

$$x=AP\sin\alpha=a\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

由是得 x 之值適於對數之計算.

194. 求不能到達之兩點間之距離.其法由同一平面上之其他兩點測之.而此兩點間之距離爲已知.



設 P 與 Q 爲兩點而欲求此兩點間之距離.

設 A 與 B 爲已知之兩點,此兩點間之距離 AB 等於 a.

由 A 測得兩角 PAB 與 QAB, 命此兩角各爲 α 與 β.

由 B 測得角 PBA 與 QBA, 命此兩角爲 γ 與 δ.

則於三角形 PAB 中已知一邊 a 及其鄰角 α 與 γ, 由第163節,得 AP 如下

$$\frac{AP}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin APB}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}\cdots\cdots(1)$$

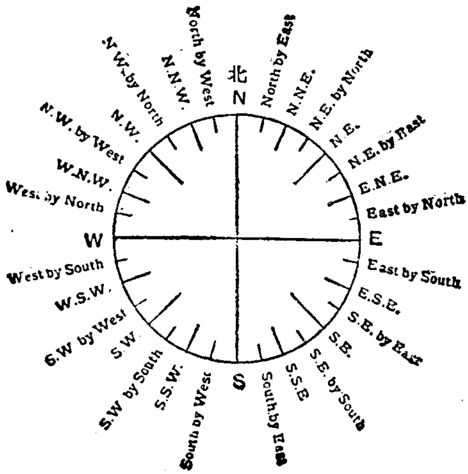
同理,於三角形 QAB 中,得

$$\frac{AQ}{a}=\frac{\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}\cdots\cdots(2)$$

於三角形 APQ 中既得兩邊 AP 與 AQ; 復知其所夾之角 $PAQ(=\alpha-\beta)$ 則邊 PQ 可應用第181節之法求之.

如四點 A, B, P, 與 Q 不在同一平面上,則必須多量一角 PAQ; 因 PAQ 不復等於 $\alpha-\beta$ 矣.至於其他步驟則與上同.

195. 羅盤之向及點　由一定點 O 視他一點 B 其方向稱



爲點 B 之向.例如 OB 之方向平分東與北兩向,則稱點 B 之向爲北東.

若一線之向爲北偏西 $20°$,其意卽此向與北向成 $20°$ 之角,而此角乃由北向西量得者.

爲稱謂便利計,將羅盤之周分爲 32 等距之點,每分點之記號備載上圖.茲就東與北間之象限論之.弧之中點爲北東 $(N.E.)$.而北東與北及東之弧復中分之.其中點各爲北北東及東北東 $(N.N.E.$ 及 $E.N.E.)$.若復將各點間中分,則諸點由北向東數之爲北偏東,北東偏北,北東偏東及東偏北.其他三象限之分法亦復如是.

由上之分法,每兩分點間之弧所對之角爲 $\frac{360°}{32}$ 卽 $11\frac{1°}{4}$.

習題三十三

1. 方塔之頂,其正中植一竿.一人於平地上對塔一面之中央,離塔 100 呎,恰見竿頂;此人後退 100 呎,測得塔頂及竿頂仰角之正切各爲 $\frac{1}{2}$ 及 $\frac{5}{9}$.求竿長及塔之高與廣.

2. 一人於平地上向塔進行,於某處測得塔頂之仰角爲 $10°$,復向前進行 50 碼,其仰角乃爲 $15°$.已知

$$L\sin 15° = 9.4129962, \qquad L\cos 5° = 9.9983442,$$

$$\log 25.783 = 1.4113334, \text{ 又 } \log 25.784 = 1.4113503,$$

求塔高之碼數至小數下四位.

3. DE 爲平地上之一塔,而 $ABCD$ 爲地上之一直線.塔高之仰角由 A 測之爲 θ,由 B 測之爲 2θ,由 C 則爲 3θ.若 AB 與 BC 各爲 50 呎與 20 呎,求塔高及 CD 之長.

4. 墩之頂建一塔,其高爲 50 呎;由平地上之一點測得塔頂及塔底之仰角各爲 $75°$ 與 $45°$;求墩高.

5. 有一高於 100 呎之旗竿分爲兩部,下截之長爲全長三分之一.於地面離竿足 40 呎處,測得上截所張角之正切爲 $\frac{1}{2}$.求竿長.

6. 於平地上之一點測得一塔所張之角爲α,由此點上升h呎後,測得塔基之俯角爲β.求塔高.

7 氣球由海濱上升,一人於球內測得船塢中一船之俯角爲30°;此球直降600呎後,測得其俯角爲15°;求此船與氣球所從升處平地上之距離.

8. PQ爲平地上之一塔,Q爲其基;A與B爲平地上之兩點,而$\angle QAB$爲90°,又AB之長爲40呎.已知

$$\cot PAQ=\frac{3}{10},\ 又\ \cot PBQ=\frac{1}{2}.$$

求塔高.

9. 一人觀測一柱,其向爲$E.S.E.$;其仰角爲45°.正午時柱影之端在測者之東北,又影長爲80呎.求柱高.

10. 由A與B兩處測一塔,B在A之正東100呎處.塔在A之正北而在B之北西.由A測塔頂所得之仰角與由B所得之仰角互爲餘角.求塔高.

* 11. 由教堂正南之某處測教堂尖頂之仰角爲45°,復於初測處正西之某處測之其仰角爲15°.若此兩處之距離爲a,求證尖頂之高爲

$$\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt[4]{3}}.$$

12. 教堂方塔底部之對角線引長至離角$2a$處,測得塔頂他二角之仰角各爲30°,而較近一角之仰角則爲45°.求證塔之廣爲$a(\sqrt{10}-\sqrt{2})$.

13. 平地上有一塔,一人在塔南之一點A測得塔頂之仰角爲60°.其人由A西行至B測得仰角爲45°,復西行至C處測之則仰角爲30°.求證B爲A與C之中點.

14. 平地上一線之長爲$2a$,由其兩端測一屋頂之仰角爲θ,由線之中點測得仰角爲ϕ.求證屋頂之高爲

$$\frac{a\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{\sin(\phi+\theta)\sin(\phi-\theta)}}.$$

15. A與B兩站間之距離爲1000呎;P與Q爲他兩站在AB線之一邊;今測得角PAB, PBA, QAB及QBA各爲75°, 30°, 45°及90°;求P與Q間之距離,又此兩點各與A及B間之距離.

以下七題所用之對數須於表中求之.

16. 由平地上之一點測得山巔之仰角爲22°15′,於後退一哩處再測之其仰角爲10°12′,求山高.

17. 由山頂測在同一垂面上之連續兩哩石,其俯角各爲5°與10°,求山高及與較近哩石之距離.

18. 平地上建一堡壘及一紀念碑,堡壘之高爲140呎.由其頂測得紀念碑之冠與底之俯角各爲40°與80°.求紀念碑之高.

19. 平地上植一竿PN.一基線AB與AN成直角,而諸點A,B與N俱在同一平面上,又諸角PAN及PBN各爲α及β.求證竿之高爲

$$AB\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}}.$$

若$AB=100$呎 $\alpha=70°$,又$\beta=50°$,求其高.

20. 一人在塔之正南,測得塔頂之仰角爲54°16′;其人向正東行100碼復測之,則塔頂之仰角乃爲50°8′,求塔高.

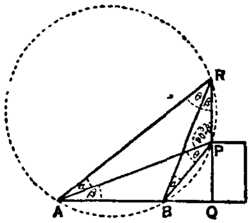
21. 一人在氣球上觀測北向平地上之一物,其俯角爲33°;此氣球向西飄行3哩後復測此物其俯角爲21°.求氣球之高.

22. 平地上一基線AB其長爲1000呎,由其兩端測一塔之足C.而得$\angle CAB=56°23'$,$\angle CBA=47°15'$,又由A測得塔頂之仰角爲9°25′;求塔高.

196. 例1. 平地上有一塔其頂植一竿,一人於地上之某處測得竿與塔所張之角爲α與β;其人向塔前行,所行之路長爲a,復測此竿所張之角與前同;求證塔高與竿長各爲

$$\frac{a\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}\text{ 與 }\frac{a\sin\alpha}{\cos(\alpha+2\beta)}.$$

設P與Q各爲塔之頂與基又設PR爲塔頂之竿.設A與B爲所從觀測之兩點則$\angle PAQ=\beta$又$\angle PAR=\angle PBR=\alpha$.因此兩角相等,故四點$A$,$B$,$P$與$R$同在一圓周上.



茲欲求竿長必須令與已知之長AB發生聯繫,此可令其各與AR之關係求之.

其法當先求三角形ARP與ARB之諸角.

今A,B,P,與R同在一圓周上,故

$$\angle BRP=\angle BAP=\beta,$$

又 $$\angle APB=\angle ARB=\theta\ (\text{設}),$$

又 $$\angle APR=90°+\angle PAQ=90°+\beta.$$

復因三角形APR諸內角之和等於兩直角,故

$$180°=\alpha+(90°+\beta)+(\theta+\beta),$$

由是 $$\theta=90°-(\alpha+2\beta)\quad\cdots\cdots(1)$$

由三角形APR與ABR,得

$$\frac{PR}{\sin\alpha}=\frac{AR}{\sin RPA}=\frac{AR}{\sin RBA}=\frac{a}{\sin\theta}\quad(\text{第163節}).$$

[以上各比俱等於圓之直徑其理由見第十五章.]

於是竿長 $=PR=\dfrac{a\sin\alpha}{\sin\theta}=\dfrac{a\sin\alpha}{\cos(\alpha+2\beta)}$, 由式(1).

其次
$$\frac{PQ}{PB}=\cos BPQ=\cos(\alpha+\beta)\quad\cdots\cdots(2)$$

又
$$\frac{PB}{a}=\frac{\sin PAB}{\sin APB}=\frac{\sin\beta}{\sin\theta}\quad\cdots\cdots(3)$$

於是(2)與(3)相乘,
$$\frac{PQ}{a}=\frac{\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin\theta}=\frac{\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)},\text{ 由式(1).}$$

復次
$$BQ=PQ\tan BPQ=PQ\tan(\alpha+\beta)$$
$$=a\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)},$$

又
$$AQ=a+BQ=a\frac{\cos(\alpha+2\beta)+\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}$$
$$=a\frac{\cos\beta\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}.$$

若以上之 a, α, 與 β 與以相當數值,則其結果不難用對數求之.

例 2. 有一塔 AB, 其高爲 b, 在離塔基 a 處測得塔高與塔頂之竿 BC 張相等之角,求竿長.

設觀測點爲 O, 又角 AOB 與 BOC 爲 θ; 復設竿長爲 y,

則得
$$\tan\theta=\frac{b}{a},\ \text{又}\ \tan 2\theta=\frac{b+y}{a}.$$

故
$$\frac{b+y}{a}=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\dfrac{b}{a}}{1-\dfrac{b^2}{a^2}},$$

故
$$\frac{b+y}{a}=\frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

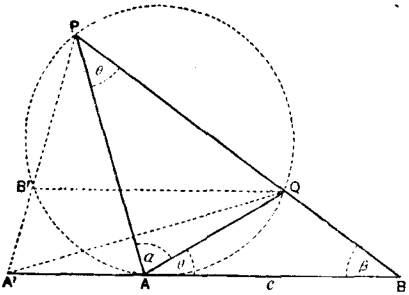
簡化之得
$$y=\frac{2a^2b}{a^2-b^2}-b=b\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

若與 a 及 b 以相當之數值,則 y 之值不難求得.

197. 例　一人在一直線之路上行走,在某處測得路旁兩點張一最大之角 α. 由此點行過一距離 c, 則兩點與其人現在位置成一直線,而此線與路所成之角爲 β; 求證路旁兩點間之距離爲

$$c \sin\alpha \sin\beta \sec\frac{\alpha+\beta}{2} \sec\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

設兩點為 P 與 Q, 又 PQ 與路相交於 B.



設其人在 A 時測得最大之角, 則 A 必為過 P 與 Q 之圓與路之切點.

[因,設於 AB 線上取任一點 A', 聯結 A' 與 P 之線交圓於 B', 次作 $A'Q$ 及 $B'Q$.

則 $$\angle PA'Q < \angle PB'Q$$

即 $$< \angle PAQ.]$$

命角 QAB 為 θ, 則角 APQ 亦為 θ.

於是 $180° =$ 三角形 PAB 諸內角之和

$$= \theta + (\alpha+\theta) + \beta,$$

故 $$\theta = 90° - \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

由三角形 PAQ 與 QAB 得

$$\frac{PQ}{AQ} = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}, \text{ 又 } \frac{AQ}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin AQB} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta+\alpha)}.$$

以上兩式相乘之結果,得

$$\frac{PQ}{c}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\theta\sin(\theta+\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

$$\therefore PQ=c\sin\alpha\sin\beta\sec\frac{\alpha+\beta}{2}\sec\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

習題三十四

1. 一橋有五孔,每兩橋柱中點間相距100呎,一船正向中間兩橋柱之一進行.於船上測得橋之全長所張之角爲直角.求證此船與橋之距離爲$100\sqrt{6}$呎.

2. 一梯與地面成$75°$之角,倚於街旁一窗之下檻,此檻離地27呎.將梯轉動而不移其足,倚於街另一旁之牆上,則與地面所成之角爲$15°$.求證街之闊與梯之長各爲$27(3-\sqrt{3})$與$27(\sqrt{6}-\sqrt{2})$呎.

3 由街旁之屋測對街他屋之高.在地面測之則對街屋高所張角之正切爲3;測點之上有高低不同之兩窗,由此兩窗復測之則所張角之正切爲-3;今對街之屋高60呎,求兩窗離地面各爲幾呎.

4. 一定長之竿一端着地,他端向日轉動,則最長之影爲何?若影長爲竿長之$3\frac{1}{3}$倍,則日高將如何?

5. 一人在一船A上測得方離塢之他船B其方向爲北西.A向北東行10分鐘,紀程爲一哩,則B之向爲正西而船塢乃爲北偏西$60°$.復前行10分鐘,B之向則爲南西.求A與B之初距.又B航行之方向爲何?

6. 一人在向北航行之船上,見其西有兩燈塔相距6哩;及此船航行一小時後,此燈塔之向一爲南西,一爲南南西.求此船航行之速率.

7. 一人在船上見北西方有一燈塔.此船取西偏南$15°$之向行駛12哩,則燈塔在其北.求燈塔與此船前後兩位置之距離.

8 一人沿直路向西行,當其在一風車之正南時,此人與遠方之塔所聯之線與路成$30°$之角.復前行一哩,則風車與塔之向一爲北東,一爲北西.求塔與風車間之距離,又塔與路間之最短距離.

9. 一人在海角之端遙見一船在其北.一刻鐘後,此船在其東.復經半小時,則此船在其南東;求船之航線與經線所成之角;又其人初見此船至

最近此船所需之時間.設此船爲取直線進行者.

10. 一人沿直路行走,路之向爲北偏東$30°$,而其人適在一房屋之南;此人前行一哩,則見房屋在其西,而路之他側見一風車適在北東向;其人復前行三哩,則已在風車之北;求證風車與房屋所聯之線與路所成之角之正切爲
$$\frac{48-25\sqrt{3}}{11}.$$

11. 直路上有三連續之哩石A, B, C. 由此乃能見遠處之塔尖此塔在A之北東,在B之東,在C之南偏東$60°$. 求證塔至路最近之距離爲$\frac{7+5\sqrt{3}}{13}$哩.

12. 一斜塔向北傾側,其南有兩點,離塔基之距離爲a與b;若由此兩點測塔頂之仰角各爲α與β;求證此塔之斜度爲
$$\cot^{-1}\frac{b\cot\alpha-a\cot\beta}{b-a}.$$

13. 由平地上之一點A,測得其南方一氣球之仰角爲α; A之南另有一點B,由B測得氣球在其北,而仰角爲β;求氣球之高度及其與A點之距離.

14. 碑柱之頂有一像離碑底9碼與11碼處測得此像張相等之角α;若$\tan\alpha=\frac{1}{10}$,求柱與像之高.

15. 由平地上之兩點測得塔頂上之旗竿張相等之角α,此兩點間之距離爲$2a$,且與塔底之中心同在一直線上.由兩點間之中點復測旗竿之張角爲β.求證竿長爲
$$a\sin\alpha\sqrt{\frac{2\sin\beta}{\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)}}.$$

16. 土墩之頂有一碑.一人與此碑平地之距離爲a呎.於其所在處測得此碑所張角之正切爲$\frac{1}{2}$.若此人向碑前進$\frac{3}{2}a$呎復測之,其所張之角不變.求土墩及此碑之高.

17. 教堂之塔位於闊150呎之河畔,塔尖高30呎.對岸一人測得塔尖與塔基所植六呎之竿張相等之角.求證塔之高約爲285呎.

18. 一人欲測一塔之高,於塔基所在之平面上測得塔頂之仰角爲$30°$.其人向某方行過一距離a後,復測塔頂之仰角不變,此人復依與此成直角之方向行過$\frac{5}{3}a$,則塔頂之仰角乃爲$60°$.求證塔之高爲$\sqrt{\frac{5}{6}}a$或$\sqrt{\frac{85}{48}}a$.

19. 平地上有兩點與一塔之塔基成直線,且與塔基之距離各爲 a 呎與 b 呎,由此兩點測得塔頂之仰角互爲餘角.求證塔高爲 $\sqrt{ab}$ 呎.若此兩點所聯之線對於塔頂所張之角爲 θ,則 $\sin\theta=\frac{a\sim b}{a+b}$.

20. 一高 150 呎之塔.建於高 80 呎之峭壁上.問一高 5 呎之觀測者應立於離壁若干呎處塔與壁始張等量之角?

21. 柱之頂上有像,一人於離柱 c 呎處測得像所張之角 a 爲最大;求證像之高爲 $2c\tan a$ 呎,復求柱之高.

22. 一斜坡與地平成 $9°$ 之角,坡之足建一塔,由此向上行 100 呎後測得此塔所張之角爲 $54°$.求塔高,已知

$$\log 2=0.30103,\qquad \log 114.4123=2.0584726,$$

又

$$L\sin 54°=9.9079576.$$

23. 一塔建於與地平成 $15°$ 之斜坡上.一人自塔基上行 80 呎,測得此塔所張之角爲 $30°$.求證塔高爲 $40(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ 呎.

24. 一人測得巖石之仰角爲 $47°$,其人沿 $30°$ 之斜坡向此石上行 1000 呎,復測之得仰角爲 $77°$.求此石距第一次測處之垂直高度,已知 $\sin 47°=0.73135$.

25. 一人沿山坡上行 c 呎,測得坡下平地上某點之俯角爲 a,其人復上行 c 呎,則俯角爲 β.求證山坡斜度之餘切爲 $(2\cot\beta-\cot a)$.

26. 一錐體之底爲每邊 200 呎之正方形,稜長 150 呎.求側面對於底之斜度.

27. 一錐體之底爲正方形,其每邊之長爲 a;錐之頂在底中心之垂線上,其間之距離爲 h;求證兩側面之二面角 a 合於次之方程式

$$\sin a=\frac{2h\sqrt{2a^2+4h^2}}{a^2+4h^2}.$$

28. 於等邊三角形之中心植一高 100 呎之旗竿.每邊之長對於竿頂所張之角皆爲 $60°$;求證邊長爲 $50\sqrt{6}$ 呎.

29. 一正方錐體之頂植一高 6 呎之竿.竿影之末端適在錐底之一邊上而與此邊之兩端相距 56 呎與 8 呎.若此錐體高 34 呎,求太陽之高度.

30. 一正方錐體之頂植一高 6 呎之竿.竿影之末端適在錐底之一邊上而與此邊之兩端相距 x 呎與 y 呎.求證錐體之高爲

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\tan a-6,$$

a 爲太陽之仰角.

31. 在湖面上高 h 呎處測得雲之仰角爲 α，而湖中雲影之俯角爲 β；求證雲之高度爲 $h\dfrac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$.

32. 塔影之長爲塔高之半，但隔相當時間後，則與塔高相等，問日高應下降幾何，已知

$$\log 2=0.30103, \qquad L\tan 63°26'=10.3009994,$$

$$1' \text{之差數}=3159?$$

33. 一木製之等腰三角形頂端向上面日而立．若 $2a$ 爲其底，h 爲其高，又日高 $30°$．求證其頂端之影所成角之正切爲 $\dfrac{2ah\sqrt{3}}{3h^2-a^2}$.

34. 一矩形之靶面南而直立於平地上．若日之方向與正南成角 $\beta°$ 而其高爲 $a°$．試求靶之面積與影之面積之比．

35 一圓球之直徑爲 δ，當此球心之仰角爲 β 時，則球之直徑對於某觀察者所張之角爲 α；求證球心之高爲 $\dfrac{1}{2}\delta\sin\beta\operatorname{cosec}\dfrac{\alpha}{2}$.

36 一人見等高且等距之柱一列，其第 10 柱與第 17 柱對於此人所張之角與第一柱之 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{4}$ 之高所張之角相等．此若人之高不計，則此人與第一柱所聯之線與諸柱聯線所成之角其正割約爲 2.6，試證之．

以下九題所需之對數，須於表上求之

37. A 與 B 爲河兩岸上相對之兩點，其間有一船，PN 爲其檣河闊爲 1000 呎，檣之頂 P 由 A 視之仰角爲 $14°20'$，由 B 視之爲 $8°10'$．問 P 比 AB 高幾何？

38. AB 線長 1000 碼，B 在 A 之北，由 B 測遠處之一點 P 其向爲北偏東 $70°$；由 A 測之則爲北偏東 $41°22'$；求 AP 之長．

39. A 在 B 之西 10 哩．一石由 A 視之其向爲北偏東 $74°19'$．由 B 視之則爲北偏西 $26°51'$．問此石在 AB 線之北幾哩？

40. 一正方形地邊長 a 呎，其正中建一塔，塔尖離地 h 呎．當日高爲 θ 時，塔尖之影適落於一隅，求證 $h\sqrt{2}=a\tan\theta$.

若 $a=1000$ 呎，$\theta=25°15'$，求 h.

41. 一平直之路，其向爲北西，吾人沿路行至某處見二塔 P 與 Q，在同一視線上，其向爲北 $20°$ 東，而 P 塔較近．復前行 4 哩，則 P 之向爲東 $22°$ 南，而 Q 爲東 $26°$ 北．求二塔間之距離．

42 AB 爲上山之路其向爲正東，斜度爲 $10°$，B 高於 A 而與 A 相距 500 碼由 A 測得他一點 C 其向爲東 $50°$ 北，斜率爲 $43°$，但由 B 測之則爲西 $65°$ 北．

試計算C與A之水平距離及垂直距離.

43　在南北線上有相距五哩之A與B兩測點,同時獲得一飛機之無線電信號;由A測飛機之向爲北偏西$66°$由B測之則爲南偏西$20°$.同時由A測得飛機之仰角爲$40°$.求飛機與A點高度之差.

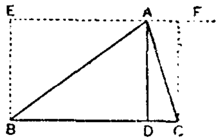
44.　一人見一向東方上升之飛機,初測時見機在其北,仰角爲$8°$.兩分鐘後仰角不變而方向則爲北東.已知此機之水平分速爲每時80哩.求證其上升之速率約爲每分鐘410呎.

45.　一小氣球由平地上以每分鐘100米之平均速度上升.十分鐘後在P點,又十分鐘後則在Q點.由地上之一測點O測得P之向爲正東而其仰角爲$63°$;Q之向爲北東而其仰角爲$70°$.假定風之水平分速不變,求風速,且證其方向約爲西偏北$50°37'$.

第十五章

三角形之性質

198. 三角形之面積 設 ABC 爲任意三角形，AD 爲由 A 至對邊之垂線. 過 A 作 EAF 平行於 BC，且作 BE 與 CF 兩垂線. 依幾何定理，知三角形 ABC 之面積



$$=\tfrac{1}{2}\text{矩形 } BF=\tfrac{1}{2}BC\cdot CF=\tfrac{1}{2}a\cdot AD.$$

但 $$AD=AB\sin B=c\sin B.$$

由是三角形 ABC 之面積 $=\frac{1}{2}ca\sin B$. 此面積以 Δ 記之.

於是 $$\Delta=\tfrac{1}{2}ca\sin B=\tfrac{1}{2}ab\sin C=\tfrac{1}{2}bc\sin A\cdots\cdots\cdots(1)$$

由第 169 節，知 $\sin A=\dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

因得 $$\Delta=\tfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdots\cdots\cdots(2)$$

其值常以 S 表之.

習題三十五

求三角形 ABC 之面積，已知

1. $a=13$, $b=14$, 又 $c=15$.
2. $a=18$, $b=24$, 又 $c=30$.
3. $a=25$, $b=52$, 又 $c=63$.
4. $a=125$, $b=123$, 又 $c=62$.
5. $a=15$, $b=36$, 又 $c=39$.
6. $a=287$, $b=816$, 又 $c=865$.

7. $a=35$, $b=84$, 又 $c=91$.　　8. $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, 又 $c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

9. 若 $B=45°$, $C=60°$, 又 $a=2(\sqrt{3}+1)$ 吋,求證此三角形之面積爲 $6+2\sqrt{3}$ 平方吋.

10. 三角形三邊爲 119, 111, 與 92 碼;求證其面積比一英畝小 10 平方碼.

11. 一三角形之田,其各邊爲 242, 1212, 與 1450 碼;求證其面積爲 6 英畝.

12. 或囑工匠作一三角形之籬,其三邊各爲 50 41, 與 21 碼,而匠人誤將第一邊多築一碼.問其他兩邊應如何作法俾使籬之周長不變且所圍之面積不變?

13. 三角形之三邊各爲 13 6, 15, 與 15.4 吋,其面積與一底邊 14 吋之等腰三角形相等,求其等腰之長,須準確至 .0001 吋.

14. 三角形之一角爲 $60°$, 面積爲 $10\sqrt{3}$ 平方呎,又其周爲 20 呎,求邊長.

15. 三角形之三邊成等差級數,其面積爲一等周之等邊三角形之 $\frac{3}{5}$ 倍;求證三邊之比爲 $3:5:7$, 且求其最大之角.

16. 三角形最小之角爲 $45°$, 且諸角之正切成等差級數.若此三角形之面積爲 3 平方碼,求證各邊之長爲 $3\sqrt{5}$, $6\sqrt{2}$, 與 9 呎, 又其他兩角之正切爲 2 與 3.

17. 已知三角形之兩邊各爲 1 呎與 $\sqrt{2}$ 呎,又對短邊之角爲 $30°$; 求證合於此條件之三角形有二,求其他諸角,且證其面積之比爲 $\sqrt{3}+1:\sqrt{3}-1$.

18. 合於次之條件之三角形有二,用表求其大者之面積.

$$A=31°15', \ a=5 \text{ 吋}, \text{ 又 } b=7 \text{ 吋}.$$

199. 三角形與圓之關係　圓之過 ABC 三頂點者稱爲**外接圓**.圓心之求法見下節,其半徑常以 R 表之.

圓在三角形之內且切於其各邊者稱爲**內切圓**.圓心之求法見第 202 節,其半徑以 r 表之.

圓之切於邊 BC 又 AB 與 AC 之延長線者稱爲對角 A 之**旁切圓**,其半徑以 r_1 表之.

同理, r_2 表切於邊 CA 又 BC 與 BA 延長線之圓之半徑;而圓之切於 AB 又 CA 與 CB 之延長線者則其半徑以 r_3 表之.

200. 求三角形 ABC 之外接圓半徑 R 之值.

由兩邊 BC 與 CA 之中點 D 與 E 作垂線 DO 與 EO 相交於 O. 按幾何定理, O 爲外接圓之圓心. 作 OB 與 OC.

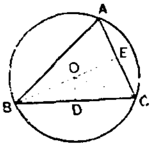


圖 1

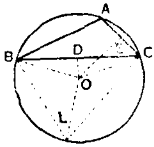


圖 2

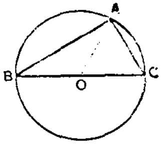


圖 3

圓心 O 得在三角形之內如圖 1, 或在三角形之外如圖 2, 或在三角形之一邊上如圖 3.

如圖 1, 則兩三角形 BOD 與 COD 爲全同三角形, 故

$$\angle BOD=\angle COD,$$

$$\therefore\quad \angle BOD=\tfrac{1}{2}\angle BOC=\angle BAC=A.$$

又 $$BD=BO\sin BOD.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{2}=R\sin A.$$

設 A 爲鈍角, 如圖 2, 則

$$\angle BOD=\tfrac{1}{2}\angle BOC=\angle BLC=180^\circ-A,$$

故由同理, 得 $\sin BOD=\sin A$,

又 $$R=\frac{a}{2\sin A}.$$

若 A 爲直角, 如圖 3, 則

$$R=OA=OC=\frac{a}{2}$$

$$=\frac{a}{2\sin A},\qquad \text{因現在 } \sin A=1.$$

於是在任何三角形內, 得

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}.\qquad\text{(第 163 節)}$$

201 由第169節,已知

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{2S}{bc},$$

此處 S 代表三角形之面積.

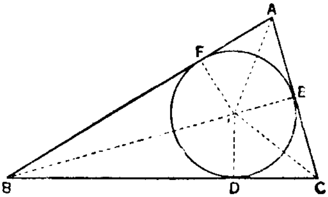
以 $\sin A$ 之值代入上式,得

$$R=\frac{abc}{4S},$$

故外接圓之半徑得以邊長表之.

202. 求三角形 ABC 之內切圓半徑 r.

三角形之兩角 B 與 C 之平分線 BI 與 CI 相交於 I



按幾何定理, I 爲內切圓之圓心. 作 IA 及三邊之垂線 $ID, IE,$ 與 IF.

則 $$ID=IE=IF=r.$$

於是
$$\triangle IBC\text{ 之面積}=\tfrac{1}{2}ID\cdot BC=\tfrac{1}{2}r\cdot a,$$
$$\triangle ICA\text{ 之面積}=\tfrac{1}{2}IE\cdot CA=\tfrac{1}{2}r\cdot b,$$
$$\triangle IAB\text{ 之面積}=\tfrac{1}{2}IF\cdot AB=\tfrac{1}{2}r\cdot c.$$

相加,得

$$\tfrac{1}{2}r\cdot a+\tfrac{1}{2}r\cdot b+\tfrac{1}{2}r\cdot c=\text{三角形 }IBC, ICA\text{ 與 }IAB\text{ 面積之和}.$$
$$=\triangle ABC\text{ 之面積}.$$

即 $$r\,\frac{a+b+c}{2}=S$$

即 $$r\cdot s=S$$

$$\therefore\quad r=\frac{S}{s}.$$

203. 因角 IBD 與 IDB 等於角 IBF 與 IFB，故兩三角形 IDB 與 IFB 為全同三角形.

於是 $BD=BF$，　即 $2BD=BD+BF$.

同理 $AE=AF$，　即 $2AE=AE+AF$，

又 $CE=CD$，　即 $2CE=CE+CD$.

相加，得

$$2BD+2AE+2CE=(BD+CD)+(CE+AE)+(AF+BF),$$

即 $$2BD+2AC=BC+CA+AB.$$

$$\therefore\quad 2BD+2b=a+b+c=2s.$$

於是 $$BD=s-b=BF;$$

同理 $$CE=s-c=CD,$$

又 $$AF=s-a=AE.$$

今 $$\frac{ID}{BD}=\tan IBD=\tan\frac{B}{2}.$$

$$\therefore\quad r=ID=BD\tan\frac{B}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}.$$

同理 $$r=IE=CE\tan ICE=(s-c)\tan\frac{C}{2},$$

又 $$r=IF=AF\tan IAF=(s-a)\tan\frac{A}{2}.$$

於是 $$\boldsymbol{r=(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}}.$$

204. 求 r 之第三值其法如下：已知

$$a=BD+CD=ID\cot IBD+ID\cot ICD$$

$$=r\cot\frac{B}{2}+r\cot\frac{C}{2}$$

$$=r\left[\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right].$$

$$\therefore\quad a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=r\left[\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$$

$$=r\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=r\sin\left[90^\circ-\frac{A}{2}\right]=r\cos\frac{A}{2}.$$

$$\therefore\quad r=a\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

系　因　$a=2R\sin A=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$,

於是　$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

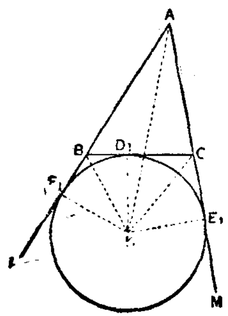
205. 求三角形 ABC 內對角 A 之旁切圓之半徑 r_1 之值.

如圖,延長 AB 與 AC 至 L 與 M.

作角 CBL 與 BCM 之平分線 BI_1 與 CI_1 相交於 I_1.

次作 I_1D_1, I_1E_1 與 I_1F_1 各垂直於三邊.

則兩三角形 I_1D_1B 與 I_1F_1B 爲全同三角形.



於是　$I_1F_1=I_1D_1$.

同理　$I_1E_1=I_1D_1$.

此三垂線 I_1D_1, I_1E_1, 與 I_1F_1 既相等, 則 I_1 將為所求圓之圓心.

今四邊形 ABI_1C 之面積等於兩三角形 ABC 與 I_1BC 面積之和; 又等於三角形 I_1BA 與 I_1CA 面積之和.

於是 $$\Delta ABC+\Delta I_1BC=\Delta I_1CA+\Delta I_1AB.$$

$$\therefore\quad S+\tfrac{1}{2}I_1D_1\cdot BC=\tfrac{1}{2}I_1E_1\cdot CA+\tfrac{1}{2}I_1F_1\cdot AB,$$

即 $$S+\tfrac{1}{2}r_1\cdot a=\tfrac{1}{2}r_1\cdot b+\tfrac{1}{2}r_1\cdot c.$$

$$\therefore\quad S=r_1\left[\frac{b+c-a}{2}\right]=r_1\left[\frac{b+c+a}{2}-a\right]=r_1(s-a).$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r_1=\frac{S}{s-a}}.$$

同理可以證明

$$\boldsymbol{r_2=\frac{S}{s-b}},\ 又\ \boldsymbol{r_3=\frac{S}{s-c}}.$$

206. 因 AE_1 與 AF_1 為同圓之切線, 故 $AE_1=AF_1$.

同理, $BF_1=BD_1$, 又 $CE_1=CD_1$.

$$\therefore\quad 2AE_1=AE_1+AF_1=AB+BF_1+AC+CE_1$$
$$=AB+BD_1+AC+CD_1=AB+BC+CA=2s.$$

$$\therefore\quad AE_1=s=AF_1.$$

又, $$BD_1=BF_1=AF_1-AB=s-c,$$

又 $$CD_1=CE_1=AE_1-AC=s-b.$$

$$\therefore\quad I_1E_1=AE_1\tan I_1AE_1,$$

即 $$\boldsymbol{r_1=s\tan\frac{A}{2}}.$$

207. 求 r_1 之第三值, 以 a 與角 B 及角 C 表之.

因 I_1C 平分角 BCE_1, 故

$$\angle I_1CD_1=\tfrac{1}{2}(180^\circ-C)=90^\circ-\frac{C}{2}.$$

同理
$$\angle I_1BD_1=90^\circ-\frac{B}{2}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a=BC&=BD_1+D_1C\\&=I_1D_1\cot I_1BD_1+I_1D_1\cot I_1CD_1\\&=r_1\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\\&=r_1\left(\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}&=r_1\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\\&=r_1\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=r_1\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=r_1\cos\frac{A}{2}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad r_1=a\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

系　因
$$a=2R\sin A=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

故
$$r_1=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

習題三十六

1. 三角形之三邊各爲 18, 24, 30 吋, 求證其外接圓, 內切圓, 與三旁切圓之半徑各爲 15, 6, 12, 18, 與 36 吋.

2. 三角形之三邊各爲 13, 14, 15 呎; 求證

(1) $R=8\frac{1}{8}$ 呎, (2) $r=4$ 呎, (3) $r_1=10\frac{1}{2}$ 呎, (4) $r_2=12$ 呎,
又 (5) $r_3=14$ 呎.

3. 於三角形 ABC 中,若 $a=13$, $b=4$, 又 $\cos C=-\frac{5}{13}$, 求
R, r, r_1, r_2, 與 r_3.

4 有兩解之三角形中求證兩三角形之外接圓相等.

求證

5. $r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)=rs=S$.

6. $\frac{rr_1}{r_2r_3}=\tan^2\frac{A}{2}$.

7. $rr_1r_2r_3=S^2$.

8. $r_1r_2r_3=r^3\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}$.

9. $rr_1\cot\frac{A}{2}=S$.

10. $r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2=s^2$.

11 $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}=0$.

12. $a(rr_1+r_2r_3)=b(rr_2+r_3r_1)=c(rr_3+r_1r_2)$.

13. $(r_1+r_2)\tan\frac{C}{2}=(r_3-r)\cot\frac{C}{2}=c$.

14. $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$

15. $4R\sin A\sin B\sin C=a\cos A+b\cos B+c\cos C$.

16. $S=4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

17. $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{S^2}$.

18. $r_1+r_2+r_3-r=4R$.

19. $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4Rr^2$.

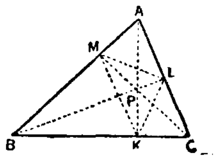
20. $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{2Rr}$.

21. $\frac{r_1}{bc}+\frac{r_2}{ca}+\frac{r_3}{ab}=\frac{1}{r}-\frac{1}{2R}$.

22. $r^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2=16R^2-a^2-b^2-c^2$.

208 三角形之垂心與垂足三角形.

設 ABC 爲任意三角形, AK, BL, 與 CM 爲由三頂點 A, B, C 至對邊所作之垂線.一般幾何書上,均已證明此三垂線相交於一點 P. 此點 P 稱爲三角形之垂心.聯此三垂足所成之三角形 KLM, 則稱爲三角形 ABC 之垂足三角形.



209. 三角形垂心至頂點之距離.

由圖,知 $PK = KB\tan PBK = KB\tan(90^\circ - C)$

$$= AB\cos B\cot C = \frac{c}{\sin C}\cos B\cos C$$

$$= 2R\cos B\cos C. \qquad \text{(第 200 節)}$$

又 $$AP = AL\sec KAC$$

$$= c\cos A\operatorname{cosec} C$$

$$= \frac{c}{\sin C}\cos A$$

$$= 2R\cos A. \qquad \text{(第 200 節)}$$

同理 $BP = 2R\cos B$, 又 $CP = 2R\cos C$.

故知垂心至頂點之距離爲 $2R\cos A$, $2R\cos B$, $2R\cos C$; 而垂心至各邊之距離則爲 $2R\cos B\cos C$, $2R\cos C\cos A$, 與 $2R\cos A\cos B$.

210. 求垂足三角形之邊與角.

因角 PKC 與 PLC 俱爲直角,故四點 P, L, C, 與 K 在同圓周上.

$$\therefore \quad \angle PKL = \angle PCL$$

$$= 90^\circ - A.$$

同理, P, K, B, 與 M 在同圓周上,故

$$\angle PKM = \angle PBM$$

$$= 90^\circ - A.$$

於是 $$\angle MKL = 180^\circ - 2A$$

$$= 2A \text{ 之補角}.$$

同理 $$\angle KLM = 180^\circ - 2B,$$

又 $$\angle LMK = 180^\circ - 2C.$$

復次，由三角形 ALM，得

$$\frac{LM}{\sin A}=\frac{AL}{\sin AML}=\frac{AB\cos A}{\cos PML}$$

$$=\frac{c\cos A}{\cos PAL}=\frac{c\cos A}{\sin C}.$$

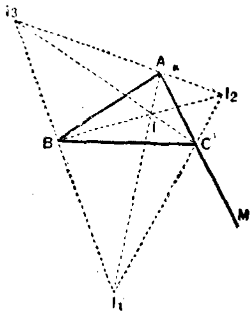
$$\therefore\quad LM=\frac{c}{\sin C}\sin A\cos A$$

$$=a\cos A.$$ (第 163 節)

同理 $MK=b\cos B$，又 $KL=c\cos C$.

故知垂足三角形之邊長各爲 $a\cos A$，$b\cos B$，與 $c\cos C$；而其諸角則爲三角形各角兩倍之補角.

211. 設 I 爲內切圓之圓心，而 I_1，I_2，與 I_3 則各爲對 A，B，與 C 諸旁切圓之圓心. 按第 202 與 205 兩節，IC 平分角 ACB，又 I_1C 平分角 BCM.



$$\therefore\quad \angle ICI_1=\angle ICB+\angle I_1CB$$

$$=\tfrac{1}{2}\angle ACB+\tfrac{1}{2}\angle MCB$$

$$=\tfrac{1}{2}[\angle ACB+\angle MCB]$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot 180^\circ=\text{一直角}.$$

同理，$\angle ICI_2$ 亦爲一直角.

故知 I_1CI_2 爲一直線而 IC 爲其垂線.

同理，I_2AI_3 爲一直線而 IA 爲其垂線，又 I_3BI_1 爲一直線而 IB 爲其垂線.

次，因 IA 與 I_1A 俱爲 $\angle BAC$ 之平分線，則三點 A，I，與 I_1 在同一直線上. 同理 BII_2 與 CII_3 俱爲直線. 由是 $I_1I_2I_3$ 爲一三角形，而 A，B，與 C 則爲由諸頂點至對邊所作垂線之垂足，又 I

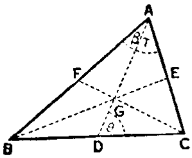
爲諸垂足之交點,

因此, ABC 爲垂足三角形而 I 則爲其垂心.

此三角形 $I_1I_2I_3$ 有時稱爲外心三角形.

212. 三角形之重心與中線.

設 ABC 爲任意三角形,而 $D, E,$ 與 F 爲各邊之中點,則 AD, BE, 與 CF 稱爲三角形之中線.



一般幾何書中,已證明諸中線相交於一點 G, 而

$$AG=\tfrac{2}{3}AD, \quad BG=\tfrac{2}{3}BE,$$

又 $$CG=\tfrac{2}{3}CF.$$

此點 G 稱爲三角形之重心.

213. 中線之長 由第 164 節,已知

$$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos C$$

$$=b^2+\frac{a^2}{4}-ab\cos C,$$

又 $$c^2=b^2+a^2-2ab\cos C.$$

故 $$2AD^2-c^2=b^2-\frac{a^2}{2},$$

於是 $$AD=\tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

亦即 $$AD=\tfrac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}.$$ (第 164 節)

同理 $BE=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$, 又 $CF=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$.

214. 中線 AD 與各邊所成之角.

若 $\angle BAD=\beta$, 又 $\angle CAD=\gamma$, 則

$$\frac{\sin\gamma}{\sin C}=\frac{DC}{AD}=\frac{a}{2x}.$$

$$\therefore \quad \sin\gamma=\frac{a\sin C}{2x}=\frac{a\sin C}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}.$$

同理，$$\sin\beta=\frac{a\sin B}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}.$$

次，設 $\angle ADC$ 爲 θ，則

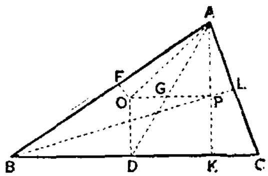
$$\frac{\sin\theta}{\sin C}=\frac{AC}{AD}=\frac{b}{x}.$$

$$\therefore \quad \sin\theta=\frac{b\sin C}{x}=\frac{2b\sin C}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}.$$

於是 AD 與各邊所成之角可以求得.

215. 重心在外心與垂心所成之直線上.

設 O 爲三角形 ABC 之外心，P 爲其垂心. 作 OD 與 PK 垂直於 BC.



又設 AD 與 OP 相交於 G.

則三角形 OGD 與 PGA 爲相似三角形.

次，由第 200 節，

$$OD=R\cos A,$$

復由第 209 節，

$$AP=2R\cos A.$$

於是，因兩三角形相似，故

$$\frac{AG}{GD}=\frac{AP}{OD}=2.$$

故點 G 爲三角形之重心.

又因相似三角形之相應邊成比例，故

$$\frac{OG}{GP}=\frac{OD}{AP}=\frac{1}{2}.$$

故重心在外心與垂心所連結之線上,而分此線段成 1∶2 之比.

幾何學中已證明九點圓(即經過三角形三垂足,三邊之中點,及由垂心至各頂點之中點之圓)之圓心亦在 OP 線上,且平分此線段.

由是,外心,重心,九點圓圓心,及垂心均在一直線上.

216. 外心與垂心之距離.

設 OF 垂直於 AB, 則

$$\angle OAF=90^\circ-\angle AOF=90^\circ-C.$$

又 $$\angle PAL=90^\circ-C.$$

$$\therefore\quad \angle OAP=A-\angle OAF-\angle PAL$$

$$=A-2(90^\circ-C)=A+2C-180^\circ$$

$$=A+2C-(A+B+C)=C-B$$

今 $OA=R$, 復由第 209 節,

$$PA=2R\cos A.$$

$$\therefore\quad OP^2=OA^2+PA^2-2OA\cdot PA\cos OAP$$

$$=R^2+4R^2\cos^2 A-4R^2\cos A\cos(C-B)$$

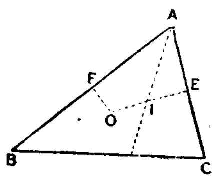
$$=R^2+4R^2\cos A[\cos A-\cos(C-B)]$$

$$=R^2-4R^2\cos A[\cos(B+C)+\cos(C-B)]\quad (\text{第 72 節})$$

$$=R^2-8R^2\cos A\cos B\cos C.$$

$$\therefore\quad OP=R\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}.$$

***217.** 求外心與內心之距離.



設 O 爲外心,而 OF 垂直於 AB.

設 I 爲內心,而 IE 垂直於 AC.

則由上節,

$$\angle OAF = 90^\circ - C.$$

$$\therefore \quad \angle OAI = \angle IAF - \angle OAF$$

$$= \frac{A}{2} - (90^\circ - C) = \frac{A}{2} + C - \frac{A+B+C}{2} = \frac{C-B}{2}.$$

又 $$AI = \frac{IE}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$ (第 204 節,系)

$$\therefore \quad OI^2 = OA^2 + AI^2 - 2OA\cdot AI\cos OAI$$

$$= R^2 + 16R^2\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - 8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C-B}{2}.$$

$$\therefore \quad \frac{OI^2}{R^2} = 1 + 16\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$-8\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 - 8\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 - 8\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$= 1 - 8\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}.$$ (第 69 節)……………(1)

$$\therefore \quad OI = R\sqrt{1 - 8\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}.$$

式 (1) 又可寫作

$$OI^2 = R^2 - 2R \times 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= R^2 - 2Rr.$$ (第 204 節,系)

設 I_1 爲對角 A 旁切圓之圓心,則用相似方法,得證

$$OI_1 = R\sqrt{1+8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

又　$$OI^2 = R^2 + 2Rr_1.$$　(第207節,系)

別法　延長 OI 俾與外接圓相交於 S 與 T, 又設 AII_1 與之相交於 H. 依幾何定理,得

$$SI \cdot IT = AI \cdot IH \cdots\cdots(2)$$

但 $SI \cdot IT = (R+OI)(R-OI) = R^2 - OI^2$.

又
$$\begin{aligned}\angle HIC &= \angle ICA + \angle IAC = \angle ICB + \angle HAB\\ &= \angle ICB + \angle HCB\\ &= \angle HCI.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad HI = HC = 2R\sin\frac{A}{2}.$$　(第200節)

次
$$AI = \frac{IE}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}.$$

代入(2)式,得

$$R^2 - OI^2 = 2Rr,$$

即
$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

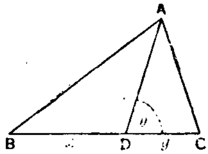
同理,可證 $I_1H = I_1C$, 於是

$$I_1O^2 - R^2 = I_1H \cdot I_1A = 2Rr_1,$$

即
$$I_1O^2 = R^2 + 2Rr_1.$$

218. 角之平分線.

設 AD 平分角 A 而分底邊為 x 與 y, 依幾何定理,得



$$\frac{x}{y} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

$$\therefore\quad \frac{x}{c} = \frac{y}{b} = \frac{x+y}{b+c} = \frac{a}{b+c} \cdots\cdots(1)$$

於是得 x 與 y.

又,設 δ 為 AD 之長而 θ 為此線與 BC 所成之角,則

$$\Delta ABD+\Delta ACD=\Delta ABC.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}c\delta\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}b\delta\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

即 $$\delta=\frac{bc}{b+c}\,\frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 $$\theta=\angle DAB+B=\frac{A}{2}+B\cdots\cdots\cdots(3)$$

於是得平分線之長又此線與 BC 所成之角.

習題三十七

設 I, I_1, I_2, 與 I_3 各爲三角形 ABC 之內切圓與三旁切圓之圓心,求證

1. $AI=r\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$.

2. $IA\cdot IB\cdot IC=abc\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.

3. $AI_1=r_1\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$.

4. $II_1=a\sec\frac{A}{2}$.

5. $I_2I_3=a\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$.

6. $II_1\cdot II_2\cdot II_3=16R^2r$.

7. $I_2I_3{}^2=4R(r_2+r_3)$.

8. $\angle I_3I_1I_2=\frac{B+C}{2}$.

9. $II_1{}^2+I_2I_3{}^2=II_2{}^2+I_3I_1{}^2=II_3{}^2+I_1I_2{}^2$.

10. $\Delta I_1I_2I_3$ 之面積 $=8R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{abc}{2r}$.

11. $\frac{II_1\cdot I_2I_3}{\sin A}=\frac{II_2\cdot I_3I_1}{\sin B}=\frac{II_3\cdot I_1I_2}{\sin C}$.

設 I, O, 與 P 各爲三角形 ABC 之內切圓圓心,外接圓圓心,及垂心,而 G 爲重心,求證

12. $IO^2=R^2(3-2\cos A-2\cos B-2\cos C)$.

13. $IP^2=2r^2-4R^2\cos A\cos B\cos C$.

14. $OG^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$.

15. ΔIOP 之面積$=2R^2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$.

16. ΔIPG 之面積$=\frac{4}{3}R^2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$.

17. 求證由九點圓之圓心至角 A 之距離為 $\frac{R}{2}\sqrt{1+8\cos A\sin B\sin C}$.

18. DEF 為三角形 ABC 之垂足三角形；求證

(1) 其面積為 $2S\cos A\cos B\cos C$.

(2) 其外接圓之半徑為 $\frac{R}{2}$.

(3) 其內切圓之半徑為 $2R\cos A\cos B\cos C$.

19. 三角形 ABC 諸旁切圓圓心所成之三角形為 $O_1O_2O_3$；求證

(1) 其各邊為 $4R\cos\frac{A}{2}$, $4R\cos\frac{B}{2}$, $4R\cos\frac{C}{2}$,

(2) 諸角為 $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$,

(3) 面積為 $2Rs$.

20. 三角形 ABC 之內切圓諸切點所作之三角形為 DEF, 求證

(1) 其各邊為 $2r\cos\frac{A}{2}$, $2r\cos\frac{B}{2}$, $2r\cos\frac{C}{2}$,

(2) 諸角為 $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$,

又　(3) 其面積為 $\frac{2S^3}{abcs}$, 即 $\frac{1}{2}\frac{r}{R}S$.

21. 三角形 ABC 各邊之中點各為 $D, E\ F$. 求證三角形 DEF 與三角形 ABC 有同一之重心,又三角形 DEF 之垂心即三角形 ABC 之外心.

在任意三角形 ABC 內,求證

22. 由 A 所作之垂線分 BC 為兩分各與其鄰角之餘切成比例,又分角 A 為兩分其餘弦各與其鄰邊成反比例.

23. 由 A 所作之中線分此角為兩分其餘切各為 $2\cot A+\cot C$ 與 $2\cot A+\cot B$, 又與底邊所成角之餘切為 $\frac{1}{2}(\cot C\sim\cot B)$.

24. 由 BC 之中點至 A 之垂足之距離為 $\frac{b^2\sim c^2}{2a}$.

25. O 為三角形 ABC 之垂心;求證諸三角形 BOC, COA, AOB, 與 ABC 之各外接圓皆相等.

26. AD, BE, 與 CF 為由三角形 ABC 諸頂點至對邊之垂線；求證三角

形 AEF, BDF, 與 CDE 諸外接圓之直徑各為 $a\cot A$, $b\cot B$, 與 $c\cot C$, 又三角形 DEF 與 ABC 周界之比為 $r:R$.

27. 求證三角形之內心至各頂點距離之相乘積為 $4Rr^2$.

28. 三角形 ABC 三旁切圓之外切三角形為 DEF, 求證

$$\frac{EF}{a\cos A}=\frac{FD}{b\cos B}=\frac{DE}{c\cos C}.$$

29. 若一圓與一三角形之內切圓,外接圓,及邊 BC 相切,則此圓之半徑為

$$\frac{\Delta}{a}\tan^2\frac{A}{2}.$$

30. 若三個互相外切之圓其半徑各為 a, b, 與 c, 又設 r_1 與 r_2 為切於此三圓之其他二圓之半徑, 求證

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}.$$

31. 設三角形之面積為 Δ, 其內切圓諸切點所成三角形之面積為 Δ_0, 又諸旁切圓同樣所作各三角形之面積則為 Δ_1, Δ_2, 與 Δ_3, 求證

$$\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-\Delta_0=2\Delta.$$

32. 設三角形 ABC 諸角之平分線與對邊之交點各為 A', B', 與 C', 求證三角形 $A'B'C'$ 與 ABC 面積之比為

$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}:\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}.$$

33. 由三角形諸頂點作線與對邊作等量之角 α; 求證如是所成之三角形其面積與原三角形面積之比為 $4\cos^2\alpha:1$.

34. 半徑各為 a 與 b 之二圓相交,其角為 θ. 求證公弦之長為

$$\frac{2ab\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}}.$$

35. 三個等大之圓互切, 求切於此諸圓之圓之半徑.

36. 三圓,其半徑各為 a, b, 與 c, 互相外切則經諸切點所作之切線相交於一點; 求證此點與諸切點間之距離皆為

$$\left(\frac{abc}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

37. 於 BC, CA, AB 邊上取三點 A', B', C' 俾使

$$BA':A'C=CB':B'A=AC':C'B=m:n;$$

求證 AA', BB', CC' 三線之交點所成之三角形與原三角形 ABC 面積之比為

$$(m-n)^2:m^2+mn+n^2.$$

38. 三角形 ABC 之內切圓與三邊 BC, CA, AB 之切點各為 A_1, B_1, C_1; 次

作三角形 $A_1B_1C_1$ 之內切圓而得切點 A_2, B_2, C_2; 依次而得第 n 次之三角形為 $A_nB_nC_n$, 求證此三角形之諸角為

$$\frac{\pi}{3}+(-2)^{-n}\left(A-\frac{\pi}{3}\right),\ \frac{\pi}{3}+(-2)^{-n}\left(B-\frac{\pi}{3}\right),$$

及
$$\frac{\pi}{3}+(-2)^{-n}\left(C-\frac{\pi}{3}\right).$$

且證最後所得之三角形為等邊三角形.

39. 三角形 $A_1B_1C_1$ 為 ABC 之垂足三角形, 而 $A_2B_2C_2$ 又為 $A_1B_1C_1$ 之垂足三角形,如是依次進行.試求第 n 次所作之三角形 $A_nB_nC_n$ 諸角之值.

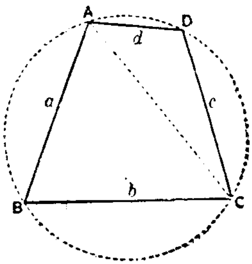
40. 有三脚架每肢長 10 呎,其三足着地處所成之平面三角形各邊之長為 7 呎, 8 呎及 9 呎.求各肢與地面所成之斜度,及其頂點之高.

第十六章

四邊形與正多邊形

219. 求內接於圓之四邊形之面積.

設 $ABCD$ 爲一四邊形,其各邊爲 a, b, c, d 如圖.



則四邊形之面積

$=\triangle ABC$ 之面積$+\triangle ADC$ 之面積

$=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D$　　(第 198 節)

$=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B,$

因,依幾何定理

$$\angle B=180^\circ-\angle D,$$

故
$$\sin B=\sin D.$$

茲求以各邊之值表 $\sin B$.

已知

$$a^2+b^2-2ab\cos B=AC^2=c^2+d^2-2cd\cos D.$$

但
$$\cos D=\cos(180^\circ-B)=-\cos B$$

於是
$$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B,$$

得
$$\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

於是　$\sin^2 B=1-\cos^2 B=1-\dfrac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{\{2(ab+cd)\}^2}$

$$=\frac{\{2(ab+cd)\}^2-\{a^2+b^2-c^2-d^2\}^2}{4(ab+cd)^2}$$

$$=\frac{\{2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\}\{2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\}}{4(ab+cd)^2}$$

$$=\frac{\{(a^2+2ab+b^2)-(c^2-2cd+d^2)\}\{(c^2+2cd+d^2)-(a^2+b^2-2ab)\}}{4(ab+cd)^2}$$

$$=\frac{\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}}{4(ab+cd)^2}$$

$$=\frac{\{(a+b+c-d)(a+b-c+d)\}\{(c+d+a-b)(c+d-a+b)\}}{4(ab+cd)^2}$$

設　$$a+b+c+d=2s,$$

故　$$a+b+c-d=(a+b+c+d)-2d=2(s-d),$$

$$a+b-c+d=2(s-c),$$

$$a-b+c+d=2(s-b),$$

又　$$-a+b+c+d=2(s-a).$$

故得　$\sin^2 B=\dfrac{2(s-d)\times 2(s-c)\times 2(s-b)\times 2(s-a)}{4(ab+cd)^2}$,

即　$(ab+cd)\sin B=2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$

於是四邊形之面積

$$=\tfrac{1}{2}(ab+cd)\sin B=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

220. 因　$\cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$,

故　$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B$$

$$=a^2+b^2-ab\,\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{ab+cd}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)cd+ab(c^2+d^2)}{ab+cd}$$

$$=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

同理可證

$$BD^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}.$$

由上兩式可求四邊形對角線之長.

以此相乘,則

$$AC^2\cdot BD^2=(ac+bd)^2,$$

即 $$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD.$$

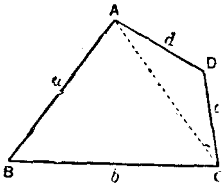
此乃幾何學上一已知之定理.

復次,此四邊形外接圓之半徑 $=\frac{1}{2}\frac{AC}{\sin B}$

$$=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}\div 4\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ab+cd)^2}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

221. 設有任意四邊形,不一定內接於圓者,其面積得由其各邊及兩對角之和求之.



設二對角 B 與 D 之和為 2α, 又四邊形之面積為 Δ. 則

$$\Delta=ABC\text{ 之面積}+ACD\text{ 之面積}$$

$$=\tfrac{1}{2}ab\sin B+\tfrac{1}{2}cd\sin D,$$

即 $$4\Delta=2ab\sin B+2cd\sin D \quad\cdots\cdots(1)$$

又 $$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D,$$

即 $$a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos B-2cd\cos D \quad\cdots\cdots(2)$$

將 (1) 與 (2) 平方後相加,則得

$$16\Delta^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$
$$=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd(\cos B\cos D-\sin B\sin D)$$
$$=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos(B+D)$$
$$=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos 2\alpha$$
$$=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd(2\cos^2\alpha-1)$$
$$=4(ab+cd)^2-16abcd\cos^2\alpha,$$

於是

$$16\Delta^2=4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-16abcd\cos^2\alpha \cdots\cdots\cdots(3)$$

但由第219節,已知

$$4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$
$$=2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-d)$$
$$=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

故(3)變爲

$$\Delta^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\alpha,$$

因得所求之面積.

系1. 若d等於零,則四邊形變爲三角形,於是上之公式化爲第198節之公式.

系2. 若四邊形之各邊,如a, b, c, d爲已知,則s爲已知.由是Δ之值爲最大時,$abcd\cos^2\alpha$應爲最小,卽當$\cos^2\alpha$爲零或$\alpha=90°$.如是則四邊形兩對角之和爲$180°$,卽四邊形能內接於圓.

故已知各邊之四邊形,其面積當此四邊形內接於圓時爲最大.

222. **例題** 求四邊形之面積,其內可容一內切圓者.

設四邊形 $ABCD$ 之內切圓切四邊 AB, BC, CD, 與 DA 於 P, Q, R, S 四點,則

$$AP=AS,\ BP=BQ,\ CQ=CR,\ \text{又}\ DR=DS.$$

$$\therefore\quad AP+BP+CR+DR=AS+BQ+CQ+DS,$$

卽
$$AB+CD=BC+DA,$$

卽
$$a+c=b+d.$$

於是
$$s=\frac{a+b+c+d}{2}=a+c=b+d.$$

$$\therefore\quad s-a=c,\ s-b=d,\ s-c=a,\ \text{又}\ s-d=b.$$

由是上節之公式變爲

$$\Delta^2=abcd-abcd\cos^2\alpha=abcd\sin^2\alpha,$$

故
$$\text{所求之面積}=\sqrt{abcd}\sin\alpha$$

若此四邊形又可內接於他圓,則

$$2\alpha=180^\circ,\ \text{則}\ \sin\alpha=\sin 90^\circ=1.$$

於是四邊形之內接於一圓而又外切於他圓者其面積應爲 $\sqrt{abcd}$.

習題三十八

1. 求內接於圓之四邊形之面積,其各邊爲

(1) 3, 5, 7 與 9 呎; (2) 7, 10, 5, 與 2 呎.

2. 四邊形之各邊爲 3, 4, 5, 與 6 呎,又知其兩對對角中其一對之和爲 120°; 求證此四邊形之面積爲 $3\sqrt{30}$ 平方呎.

3. 內接於圓之四邊形各邊之長各爲 3, 3, 4, 4 呎;試求其內切圓與外接圓之半徑.

4. 求證四邊形之面積等於兩對角線與其夾角之正弦之積之半.

5. 設一四邊形內接於一圓而又外切於他圓,求證其面積爲 $\sqrt{abcd}$, 又第二圓之半徑爲

$$\frac{2\sqrt{abcd}}{a+b+c+d}.$$

6. 四邊形 $ABCD$ 外切於一圓;求證

$$AB\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=CD\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}.$$

7. 四邊形之各邊依次爲 a, b, c 與 d, 而對角線所夾之角對 b 或 d 者

為 α；求證此四邊形之面積為

$$\tfrac{1}{4}(a^2-b^2+c^2-d^2)\tan\alpha$$

8. 設 $a, b, c,$ 與 d 為四邊形之諸邊，又 x 與 y 為其對角線，求證其面積為

$$\tfrac{1}{4}[4x^2y^2-(b^2+d^2-a^2-c^2)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

9. 若四邊形內接於一圓，求證其對角線所夾之角為

$$\sin^{-1}[2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\div(ac+bd)].$$

若此四邊形復外切於一圓，求證此角將為

$$\cos^{-1}\frac{ac-bd}{ac+bd}.$$

10. 四邊形之各邊各分為兩段成 $m:n$ 之比，則聯此諸分點之新四邊形之面積與原四邊形面積之比將為 $m^2+n^2:(m+n)^2$；試證之.

11. 設 $ABCD$ 為內接於圓之四邊形，求證

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}},$$

又一對角線為他一對角線所分成兩線段之積為

$$\frac{abcd(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}.$$

12. 四邊形之諸邊依次為 $a, b, c,$ 與 d，求證

$$d^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos\alpha-2bc\cos\beta-2ca\cos\gamma,$$

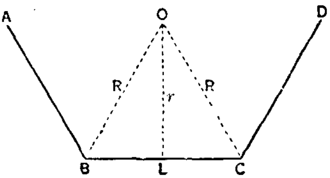
而 $\alpha, \beta,$ 與 γ 則為 a 與 b，b 與 c，又 c 與 a 各邊所夾之角.

223. 正多邊形　多邊形之具有等邊及等角者稱為正多邊形.

在具有 n 角之正多邊形.依照幾何定理，一角之 n 倍＋4 直角＝與邊數相等之直角數之二倍＝$2n$ 直角.

於是正多邊形之一內角

$$=\frac{2n-4}{n}\text{ 直角}=\frac{2n-4}{n}\times\frac{\pi}{2}\text{ 弳}.$$



224. 正多邊形內切圓與外接圓之半徑.

設正多邊形之邊數為 n，而 $AB, BC,$ 與 CD 為其連續之三邊.

角 ABC 與 BCD 之平分線 BO 與 CO 相交於 O, 次作 OL 垂直於 BC.

顯見 O 爲多邊形內切圓與外接圓之圓心, 又 BL 與 LC 相等.

於是 $OB=OC=R$, (外接圓之圓心), 又 $OL=r$, (內切圓之圓心).

角 BOC 爲各邊對於 O 所張諸角之和之 $\frac{1}{n}$ 倍, 即

$$\angle BOC=\frac{4\text{直角}}{n}=\frac{2\pi}{n}\text{ 徑}.$$

於是
$$\angle BOL=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{\pi}{n}.$$

設 a 爲多邊形之一邊, 則

$$a=BC=2BL=2R\sin BOL=2R\sin\frac{\pi}{n}.$$

$$\therefore\quad R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{a}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n}\quad\cdots\cdots(1)$$

又,
$$a=2BL=2OL\tan BOL=2r\tan\frac{\pi}{n}.$$

$$\therefore\quad r=\frac{a}{2\tan\frac{\pi}{n}}=\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}\quad\cdots\cdots(2)$$

225. 正多邊形之面積

多邊形之面積爲三角形 BOC 面積之 n 倍.

於是多邊形之面積

$$=n\times\tfrac{1}{2}OL\cdot BC=n\cdot CL\cdot BL=n\cdot BL\cot LOB\cdot BL$$

$$=n\cdot\frac{a^2}{4}\cot\frac{\pi}{n}\quad\cdots\cdots(1)$$

此式示多邊形之面積以邊長表之.

又多邊形之面積

$$=n\cdot OL\cdot BL=n\cdot OL\cdot OL\tan BOL=nr^2\tan\frac{\pi}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

復次,面積

$$=n\cdot OL\cdot BL=n\cdot OB\cos LOB\cdot OB\sin LOB$$

$$=nR^2\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以上(2),(3)兩式示多邊形之面積以內切圓及外接圓之半徑表之.

226. 例題　正十二邊形每邊之長爲20呎;求(1)內切圓之半徑,(2)外接圓之半徑,(3)面積

此多邊形對一邊之中心角$=\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$.

於是　$10=r\tan 15^\circ=R\sin 15^\circ$.

$$\therefore\quad r=10\cot 15^\circ$$

$$=\frac{10}{2-\sqrt{3}}\ (\text{第 101 節})$$

$$=10(2+\sqrt{3})=37.32\cdots\cdots\text{呎}.$$

又　$$R=\frac{10}{\sin 15^\circ}=10\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\ (\text{第 106 節})$$

$$=10\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$=10(2.4495\cdots\cdots+1.4142\cdots\cdots)=38.637\cdots\cdots\text{呎}.$$

復次,　面積 $=12\times r\times 10$ 平方呎

$$=1200(2+\sqrt{3})=4478.46\cdots\cdots\text{平方呎}$$

習題三十九

1. 一正十邊形外切於半徑一呎之圓,求其周,惟須準確至0.01吋. [$\tan 18^\circ=0.32492$.]

2. 一圓之半徑爲1,求其外切正十二邊形之周至小數點下三位.

3. 求每邊1呎下列各正多邊形之面積(1)五邊形(2)六邊形(3)八邊形(4)十邊形(5)十二邊形. [$\cot 18^\circ=3.07768\cdots\cdots$; $\cot 36^\circ=1.37638\cdots\cdots$]

4. 一正八邊形與一正六邊形其周各爲24呎,求其面積之差.

5. 一每邊2呎之正方形,截去四角使成正八邊形;求其面積.

6. 內接與外切於同一圓之正八邊形,求其面積之比與周之比,并證內接正六邊形與正八邊形面積之比爲$\sqrt{27}$比$\sqrt{32}$

7. 求證外接於正五邊形之圓,其半徑約爲正五邊形每邊長之$\frac{17}{20}$.

8. 求證等邊三角形與等周之正六邊形面積之比爲$2:3$

9. 求證正五邊形與等周之正十邊形面積之比爲$2:\sqrt{5}$.

10. 設有n邊之正多邊形,求證其內切圓與外接圓半徑之和爲

$$\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{2n},$$

而a爲多邊形之一邊.

11. 兩正多邊形之邊數各爲n,其一外切其一內接於同一之圓.求證外切多邊形,圓,與內接多邊形周界之比爲

$$\sec\frac{\pi}{n}:\frac{\pi}{n}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n}:1,$$

又兩正多邊形面積之比爲$\cos^2\frac{\pi}{n}:1$.

12. 已知外切於同圓之兩正多邊形之邊數爲n與$2n$,其面積之比爲$3:2$,求n.

13. 求證一圓之內接$2n$邊之正多邊形之面積爲內接n邊及外切n邊正多邊形面積之等比中項.

14. 一圓之內接n邊正多邊形與其外切n邊正多邊形面積之比爲$3:4$求n之值.

15. 多邊形之內角成$A.P.$;其最小之角爲120°又公差爲5°;求邊數.

16. 有兩正多邊形,其一之邊數爲他一之二倍,又一正多邊形之一內角與他一正多邊形之一內角之比爲9比8;求各多邊形之邊數.

17. 一多邊形一內角之度數與另一多邊形之一內角之度數相比如$10:9$,試證合於此之正多邊形凡十一對.并求每一多邊形之邊數.

18. 正方錐體之底每邊爲a呎,又頂高於底之中心h呎;若θ爲側面與底所成之角而ϕ爲兩面所成之角,求證

$$\tan\theta=\frac{2h}{a}\text{ 又 }\tan\frac{\phi}{2}=\sqrt{1+\frac{a^2}{2h^2}}.$$

19. 一錐體之底爲正六邊形.由頂點所作之垂線通過底之中心,其長與底之一邊相等.求一側面與底所成角之正切,又兩側面間半角之正切.

20. 一正錐體之底爲n邊之多邊形,每一側面爲等腰三角形,其頂角爲$2a$.若側面與底之斜度爲角β,而兩側面間之角爲2γ.求證

$$\cos\beta=\tan a\cot\frac{\pi}{n},$$

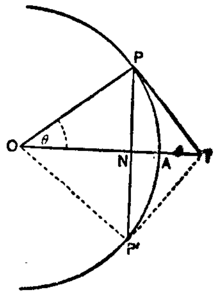
又

$$\sin\gamma=\sec a\cos\frac{\pi}{n}.$$

第十七章

極小角之三角函數,圓之面積,地平俯角

227. 若 θ 表小於直角之某角之弳數,則 $\sin\theta$, θ, $\tan\theta$ 之值依次增大.



設 TOP 爲小於直角之任一角.

以 O 爲圓心,任何值 OP 爲半徑,作弧 PAP' 交 OT 於 A.

作 PN 垂直於 OA, 復引長之與弧交於 P'.

由 P 作切線 PT 交 OA 於 T, 聯接 TP'.

三角形 PON 與 $P'ON$ 爲全同三角形,於是 $PN=NP'$, 又

$$\text{弧 } PA = \text{弧 } AP'.$$

次因三角形 TOP 與 TOP' 爲全同三角形,故

$$TP = TP'.$$

直線 PP' 小於弧 PAP', 則 $NP <$ 弧 PA.

次假定弧 PAP' 小於 PT 與 TP' 之和,則 $PA < PT$.

由是 NP, 弧 AP, 與 PT 之值依次增大.

故 $\dfrac{NP}{OP}$, $\dfrac{\text{弧 } AP}{OP}$, 與 $\dfrac{PT}{OP}$ 之值亦依次增大.

但 $$\frac{NP}{OP}=\sin AOP=\sin\theta,$$

$$\frac{弧\,AP}{OP}=\angle AOP\text{ 之弳數}=\theta\ (\text{第 21 節}),$$

又 $$\frac{PT}{OP}=\tan POT=\tan AOP=\tan\theta.$$

於是 $\sin\theta, \theta, \tan\theta$ 之值依次增大,惟須

$$\theta<\frac{\pi}{2}.$$

上節之假定得證之如下:

分弧 PP' 爲甚多之等分 n,設諸分點爲 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots A_{n-1}$.

設 PA_1 交 TP' 於 B_1, A_1A_2 交 TP' 於 B_2, A_2A_3 交於 B_3,…直至終了 $A_{n-2}A_{n-1}$ 交於 B_{n-1}.

因三角形二邊之和大於第三邊,故

$$PT+TB_1>PB_1,\ \text{即}\ >PA_1+A_1B_1,$$
$$A_1B_1+B_1B_2>A_1B_2,\ \text{即}\ >A_1A_2+A_2B_2,$$
$$A_2B_2+B_2B_3\quad >A_2A_3+A_3B_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{n-2}B_{n-2}+B_{n-2}B_{n-1}\quad >A_{n-2}A_{n-1}+A_{n-1}B_{n-1},$$

又 $$A_{n-1}B_{n-1}+B_{n-1}P'\quad >A_{n-1}P'.$$

於是相加并消去不等式兩方之等量,則

$$PT+TB_1+B_1B_2+B_2B_3+\cdots\cdots+B_{n-1}P'$$
$$>PA_1+A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{n-1}P',$$

即 $$PT+TP'>PA_1+A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{n-1}P' \quad\cdots\cdots(1)$$

今設 n 等分無限增大;則式 (1) 之右方將與弧長 PP' 相等,由是得

$$PT+TP'>弧\ PP'.$$

228. 因 $\sin\theta<\theta<\tan\theta$,各以正量 $\sin\theta$ 除之,則

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}.$$

於是 $\dfrac{\theta}{\sin\theta}$ 之值常在 1 與 $\dfrac{1}{\cos\theta}$ 之間.

不論θ之值小至如何,此關係恆能成立.

今當θ爲甚小之值時,$\cos\theta$將近於1,θ愈小,則$\cos\theta$愈近於1,亦即$\dfrac{1}{\cos\theta}$愈近於1.

由是,當θ爲甚小之值時,$\dfrac{\theta}{\sin\theta}$之值在兩值之間,其一爲1,其一則與1相差之值甚微.

質言之,即當θ爲甚小之值時,$\dfrac{\theta}{\sin\theta}$亦即$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$幾等於1,即一角愈小則其正弦愈近於此角所含之弳數.

上之結果得簡述如下:

當θ爲甚小時,$\sin\theta=\theta$.

又　當θ爲甚小時,$\tan\theta=\theta$.

系. 命$\theta=\dfrac{\alpha}{n}$,則當θ無限減小時,n將無限增大.

於是當n爲無限大時,$\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{n}}{\dfrac{\alpha}{n}}=1$.

即當n爲無限大時,$n\sin\dfrac{\alpha}{n}=\alpha$.

同理,當n爲無限大時,$n\tan\dfrac{\alpha}{n}=\alpha$.

229. 上節所論之θ乃以弳數爲單位,此應特別注意者.

由上節之定理,當α爲甚小之角時,則$\sin\alpha$之值易於求得.

因$\pi^c=180^\circ$,故

$$\alpha^\circ=\left(\pi\frac{\alpha}{180}\right)^c.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha^\circ=\sin\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right)^c=\frac{\pi\alpha}{180}.$$

230. 查閱三角函數表知某角不大於 $18'$ 時，則此角之弳數與其正弦相合至小數七位．倘某角小於 2° 則尚可合至五位也．

231. 若 θ 表小於直角之一角之弳數，則 $\sin\theta>\theta-\frac{\theta^3}{4}$ 及 $\cos\theta>1-\frac{\theta^2}{2}$．

由第 227 節，知

$$\tan\frac{\theta}{2}>\frac{\theta}{2}.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\theta}{2}>\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

但

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},$$

故

$$\sin\theta>\theta\cos^2\frac{\theta}{2},\ \text{即}\ >\theta\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

但由第 227 節，

$$\sin\frac{\theta}{2}<\frac{\theta}{2},$$

故

$$1-\sin^2\frac{\theta}{2}>1-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2,\ \text{即}\ >1-\frac{\theta^2}{4}.$$

$$\therefore\quad \sin\theta>\theta\left(1-\frac{\theta^2}{4}\right),\ \text{即}\ >\theta-\frac{\theta^3}{4}.$$

次因

$$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2};$$

而

$$\sin^2\frac{\theta}{2}<\left(\frac{\theta}{2}\right)^2,$$

故

$$1-2\sin^2\frac{\theta}{2}>1-2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2,\ \text{即}\ \cos\theta>1-\frac{\theta^2}{2}.$$

參看本書第二編，第 32 及 33 兩節，用他種證法，得

$$\sin\theta>\theta-\frac{\theta^3}{6},\ \text{又}\ \cos\theta<1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{24}.$$

232. **例 1.** 求 $\sin 10'$ 與 $\cos 10'$ 之值．

因

$$10'=\frac{1^\circ}{6}=\frac{\pi^\circ}{180\times 6},$$

故

$$\sin 10'=\sin\left(\frac{\pi}{180\times 6}\right)^c=\frac{\pi}{180\times 6}$$

$$=\frac{3.14159265\cdots}{180\times 6}=.0029089\ \text{約}.$$

又
$$\cos 10' = \sqrt{1-\sin^2 10'}$$
$$=[1-.000008468\cdots]^{\frac{1}{2}}$$
$$=1-\tfrac{1}{2}[.000008468],$$

依二項式定理求其近似值,
$$=1-.000004234$$
$$=.9999958\cdots.$$

例 2. 求次之方程式中 θ 之近似值
$$\sin\theta = .52.$$

因 $\sin\theta$ 近於 $\frac{1}{2}$,則 θ 約爲 $\frac{\pi}{6}$.

設 $\theta=\frac{\pi}{6}+x$, 此 x 爲甚小之值.

$$\therefore\quad .52=\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x$$
$$=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x.$$

因 x 爲甚小之值,故
$$\cos x=1,\ 而\ \sin x=x\ 約.$$
$$\therefore\quad .52=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$
$$\therefore\quad x=.02\times\frac{2}{\sqrt{3}}\ 弳=\frac{\sqrt{3}^c}{75}=1.32'\ 約.$$

於是
$$\theta=31°19'\ 約.$$

習題四十

$$\left[\pi=3.14159265;\ \frac{1}{\pi}=.31831\cdots.\right]$$

求諸值至小數五位

1. $\sin 7'$.
2. $\sin 15''$.
3. $\sin 1'$.
4. $\cos 15'$.
5. $\operatorname{cosec} 8''$.
6. $\sec 5'$.

解方程式而求其近似值.

7. $\sin\theta=.01$.
8. $\sin\theta=.48$.
9. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=.49$.
10. $\cos\theta=.999$.

11. 銅元之直徑爲一吋,置於一觀測者之眼前俾可全蔽月球而不得見,月球之直徑對於觀測者所張之角爲30′,求銅元與眼之約略距離.

12. 一人於直路上行走,於A點見遠處一物之仰角爲α,繼至B與C,則該物之仰角乃爲2α與3α;求證

$$AB=3BC\ 約.$$

13. 設θ爲小於直角之一角之弳數,求證

$$\cos\theta<1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{16}.$$

14. 求證尤列氏定理,即

$$\sin\theta=\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cdots 無窮積.$$

[已知 $$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2^2\sin\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2^3\sin\frac{\theta}{2^3}\cos\frac{\theta}{2^3}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2}=\cdots\cdots$$

$$=2^n\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}.$$

茲將n無限增大,則依第228節,系

$$2^n\sin\frac{\theta}{2^n}-\theta.$$

於是 $$\sin\theta=\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cdots 無窮積.]$$

15. 求證

$$\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2^2}\right)\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2^3}\right)\cdots\cdots 無窮積$$

$$=\theta\cdot\cot\theta.$$

233. 圓之面積.

由第225節,半徑爲R之圓,其內接n邊正多邊形之面積爲

$$\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}.$$

今設此正多邊形之邊數無限增大,則其周界愈近於其外接圓.

由是,當正多邊形之邊數爲無窮大時,其面積將等於圓之面積

令 $$\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{n}{2}R^2\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}=\pi R^2\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

$$=\pi R^2\cdot\frac{\sin\theta}{\theta},\ \text{但}\ \theta=\frac{2\pi}{n}.$$

當 n 無限增大時,θ 之值將無限減小,於是,按第228節之理,$\frac{\sin\theta}{\theta}$ 之值為 1.

於是圓之面積 $=\pi R^2=\pi$ 乘半徑之平方.

234. 扇形之面積.

設 O 為一圓之圓心,AB 為扇形之弧,又設 $\angle AOB=\alpha$ 弳.

依幾何定理,扇形面積之比如其弧長之比,於是

$$\frac{\text{扇形}\ AOB\ \text{之面積}}{\text{圓之面積}}=\frac{\text{弧}\ AB}{\text{圓周}}$$

$$=\frac{R\alpha}{2\pi R}=\frac{\alpha}{2\pi}.$$

$$\therefore\quad \text{扇形}\ AOB\ \text{之面積}=\frac{\alpha}{2\pi}\times\text{圓之面積}$$

$$=\frac{\alpha}{2\pi}\times\pi R^2=\frac{1}{2}R^2\cdot\alpha.$$

習題四十一

[設 $\pi=3.14159\cdots$, $\frac{1}{\pi}=.31831$, 又 $\log\pi=.49715$]

1. 已知周長為74呎,求圓面積.
2. 圓之直徑為10呎;求一$22\frac{1}{2}^\circ$弧之扇形之面積.
3. 扇形之面積為10方呎;設圓之半徑為3呎,求扇形之角.
4. 扇形之周界為10呎,設圓之半徑為3呎,求扇形之面積.
5. 一長2哩之紙條,其厚為.003吋,捲成一實心圓柱,求此圓柱之半徑.

6　一長1哩之紙條捲成一圓柱，其直徑爲6吋；求紙厚.

7.　兩同心圓之半徑爲 r 與 $2r$，今作兩平行線切於內圓并自外圓截成一弧；求弧長.

8.　分半圓之周爲兩弧，一弧之弦爲他弧之弦之兩倍.求證所成兩弓形面積之和與半圓面積之比爲27比55.

$$\left[\pi=\frac{22}{7}\right].$$

9.　互切之三圓，其半徑各爲 a，求證三圓中間空隙之面積約爲 $\frac{4}{25}a^2$.

10.　六個相等之圓，其半徑各爲 a，每一圓與他二圓相切，圓心均在另一圓之圓周上；求證諸圓中間空隙之面積爲

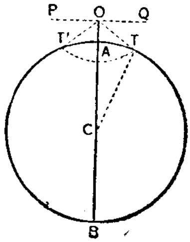
$$2a^2(3\sqrt{3}-\pi).$$

11.　由三角形 ABC 之頂點 A 作直線 AD 交底邊於 D 且與底邊所成之角爲 θ. 求證三角形 ABD 與 ACD 之兩外接圓公有部分之面積爲

$$\tfrac{1}{4}(b^2\gamma+c^2\beta-bc\sin A)\operatorname{cosec}^2\theta,$$

此處 β 與 γ 爲 B 與 C 兩角之弳數.

235. 地平俯角.



設 O 爲高於地面之一點，與地面之距離爲 h. 由 O 作切於地面之切線 CT 與 CT. 則諸切線之端顯見在同一圓周上.此圓稱爲視圓或**地平線**.而任何切線與水平面 POQ 所成之角稱爲**地平之俯角**.

設 r 爲地球之半徑，而由 A 所作直徑之他端爲 B.

則　$$OT^2=OC^2-CT^2=(r+h)^2-r^2=h(2r+h),$$

故　$$OT=\sqrt{h(2r+h)}.$$

應用此式以求 OT 之精確數值.

但按諸實際情形，h 比之 r 其值甚微.

[r 約 $=4000$ 哩，而 h 則決不大於 5 哩.]

故 h^2 比之 hr，其值甚微，可略去不計.

則 $$OT=\sqrt{2hr}.$$

與實際情形固無甚出入也.

地平俯角$=\angle TOQ=90^\circ-\angle COT=\angle OCT.$

而 $$\tan OCT=\frac{OT}{CT}=\frac{\sqrt{2hr}}{r}=\sqrt{\frac{2h}{r}},$$

約略言之,則

$$\angle OCT=\sqrt{\frac{2h}{r}}\text{ 弳}$$

$$=\left(\sqrt{\frac{2h}{r}}\;\frac{180}{\pi}\right)^\circ=\left[\frac{180\times60\times60}{\pi}\sqrt{\frac{2h}{r}}\right]'':$$

236. 例. 取地球之半徑為4000哩,求高出海面264呎之燈塔之俯角,及其與地平線之距離.

今 $r=4000$ 哩, 又 $h=264$ 呎$=\frac{1}{20}$ 哩.

故 $OT=\sqrt{\frac{1}{10}\times4000}=\sqrt{400}=20$ 哩.

又俯角$=\sqrt{\frac{2h}{r}}$ 弳$=\frac{1}{200}$ 弳

$$=\left(\frac{1}{200}\times\frac{180\times60}{\pi}\right)'=\left(\frac{54}{\pi}\right)'=17'11''\text{ 約.}$$

習題四十二

[除非特別指明,地球之半徑概作4000哩計之.]

1. 由高4200呎之山巔測地平俯角而求其度,分,秒數.設地球之半徑為 21×10^5 呎.

2. 燈塔之燈高196呎,其光將及何處?

3. 設地球之半徑為4000哩,於一氣球上測得俯角為1°,求其高.又設球高為2哩,而求其俯角.

4. 由一高出海面66呎之桅頂,適見一遠處燈塔之光,已知塔高132呎,求證船與塔之距離約為24哩.

5. 一船之桅其頂高出海面66呎,由此可見20哩外他船之桅頂,求證兩桅之高相等.

6. 一船向燈塔進行,於其高出海面44呎之桅頂僅見燈光;前行15分鐘則可於甲板之面見之,已知甲板高出海面11呎;求證此船航行之速率爲每時16.33哩.

7. 求證,於離地n呎高之處.所能見之距離,約爲$\sqrt{\frac{3n}{2}}$哩.

8. 地球由赤道至北極之距離爲一千萬米.求自愛斐爾塔頂所能見之距離,已知塔高爲300米.

9. 於直河之中植三竿,其頂高出水面者皆相等,又中間一竿與他兩竿相去各一哩,聯結外端兩竿頂之視線低於中間之竿頂8吋,求地球半徑之哩數.

第十八章

反三角函數

237. 設 $\sin\theta=a$, 而 a 爲已知,則由第 82 節, θ 之值猶爲未定,祇知其爲合於此式諸角之一而已.

如作一記號"$\sin^{-1}a$"此卽表示一最小之正角或負角,其正弦爲 a.

而"$\sin^{-1}a$"讀作"正弦負一 a", 其義與 $\frac{1}{\sin a}$ 不同,後者乃表 $(\sin a)^{-1}$ 之意.

由是應十分注意"$\sin^{-1}a$"爲一角,且爲一最小度量之角其正弦則爲 a.

同理"$\cos^{-1}a$"表示一最小之角其餘弦爲 a. 他如"$\tan^{-1}a$", "$\cot^{-1}a$", "$\operatorname{cosec}^{-1}a$", "$\sec^{-1}a$", "$\operatorname{vers}^{-1}a$", 與"$\operatorname{covers}^{-1}a$", 之義亦同.

故知 $\sin^{-1}a$ 與 $\tan^{-1}a$ (同理 $\operatorname{cosec}^{-1}a$ 與 $\cot^{-1}a$) 恆在 $-90°$ 與 $90°$ 之間.

而 $\cos^{-1}a$ (同理 $\sec^{-1}a$) 恆在 $0°$ 與 $180°$ 之間.

238. $\sin^{-1}a$, $\cos^{-1}a$ $\tan^{-1}a$,……等稱爲**反三角函數**.

有時 $\sin^{-1}a$ 寫作"arc sin a", $\cos^{-1}a$ 寫作"arc cos a",其他反三角函數之寫法亦同.

239 當 a 之值為正時,則 $\sin^{-1}a$ 在 $0°$ 與 $90°$ 之間; a 為負,則在 $0°$ 與 $-90°$ 之間.

例 $\sin^{-1}\frac{1}{2}=30°$; $\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=-60°$.

當 a 為正,則餘弦為 a 之角有二,其一在 $0°$ 與 $90°$ 之間,一在 $-90°$ 與 $0°$ 之間.$\left[\text{例如 } 30° \text{ 與 } -30° \text{ 之餘弦皆為 } \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$於此則取最小之正角.故 $\cos^{-1}a$,當 a 為正時,則在 $0°$ 與 $90°$ 之間.

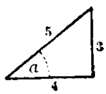
而 $\cos^{-1}a$,當 a 為負時,則在 $90°$ 與 $180°$ 之間.

例. $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=45°$; $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=120°$.

當 a 為正,則角 $\tan^{-1}a$ 在 $0°$ 與 $90°$ 之間; a 為負,則在 $-90°$ 與 $0°$ 之間.

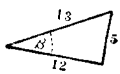
例. $\tan^{-1}\sqrt{3}=60°$; $\tan^{-1}(-1)=-45°$.

240. 例 1　求證 $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{16}{65}$.



設 $$\sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha,\ \text{則}\ \sin\alpha=\frac{3}{5},$$

於是 $$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}.$$



設 $$\cos^{-1}\frac{12}{13}=\beta,\ \text{則}\ \cos\beta=\frac{12}{13},$$

於是 $$\sin\beta=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\frac{5}{13}.$$

設 $$\sin^{-1}\frac{16}{65}=\gamma,\ \text{則}\ \sin\gamma=\frac{16}{65}.$$

由是所證者乃為

$$\alpha-\beta=\gamma,$$

即 $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\gamma.$$

今 $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{36-20}{65}=\frac{16}{65}=\sin\gamma.$$

原式因此證明。

例 2 求證 $$2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}.$$

設 $$\tan^{-1}\frac{1}{3}=\alpha,\ \text{則}\ \tan\alpha=\frac{1}{3},$$

又設 $$\tan^{-1}\frac{1}{7}=\beta\ \text{則}\ \tan\beta=\frac{1}{7}.$$

茲求證 $$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}.$$

今 $$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

又 $$\tan(2\alpha+\beta)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\beta}{1-\tan 2\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}=\frac{21+4}{28-3}=\frac{25}{25}=1=\tan\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore\quad 2\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}.$$

例 3. 求證 $$4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}.$$

設 $$\tan^{-1}\frac{1}{5}=\alpha,\ \text{則}\ \tan\alpha=\frac{1}{5}.$$

於是 $$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12},$$

又 $$\tan 4\alpha=\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119},$$

故 $\tan 4\alpha$ 近於 1，則 4α 近於 $\frac{\pi}{4}$.

今設
$$4\alpha=\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x.$$

$$\therefore\quad \frac{120}{119}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x\right)=\frac{1+x}{1-x}\quad (第\ 100\ 節).$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{392}.$$

於是
$$4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}.$$

例 4. 求證
$$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}.$$

設
$$\tan^{-1}a=\alpha,\quad 則\quad \tan\alpha=a,$$

及
$$\tan^{-1}b=\beta,\quad 則\quad \tan\beta=b.$$

又，設
$$\tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)=\gamma,\quad 則\quad \tan\gamma=\frac{a+b}{1-ab}.$$

今
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{a+b}{1-ab}=\tan\gamma,$$

故
$$\alpha+\beta=\gamma.$$

原式因此證明.

上之關係實卽公式

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

之逆式耳.

因設
$$\tan x=a,\quad 則\quad x=\tan^{-1}a,$$

又
$$\tan y=b,\quad 則\quad y=\tan^{-1}b.$$

於是
$$\tan(x+y)=\frac{a+b}{1-ab}.$$

$$\therefore\quad x+y=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab},$$

卽
$$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}.$$

於上式中須有 $ab<1$ 之假定，則 $\frac{a+b}{1-ab}$ 為正，因而 $\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$ 在 0° 與 90° 之間.

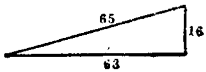
至若$ab>1$，則$\frac{a+b}{1-ab}$爲負，於是按諸定義$\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$將爲負角．即$\gamma$爲負角，又因$\tan(\pi+\gamma)=\tan\gamma$，則上式應寫作

$$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\pi+\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}.$$

例 5. 求證 $$\cos^{-1}\frac{63}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\sin^{-1}\frac{3}{5}.$$

因$65^2-63^2=16^2$，故

$$\cos^{-1}\frac{63}{65}=\tan^{-1}\frac{16}{63}.$$



次，由例1，已知 $$\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{3}{4}.$$

故原式可變爲

$$\tan^{-1}\frac{16}{63}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{3}{4}.$$

今 $$\tan\left[2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right]=\frac{2\tan\left[\tan^{-1}\frac{1}{5}\right]}{1-\tan^2\left[\tan^{-1}\frac{1}{5}\right]}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12},$$

則 $$2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{5}{12}.$$

於是 $$\tan\left[\tan^{-1}\frac{16}{63}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right]=\tan\left[\tan^{-1}\frac{16}{63}+\tan^{-1}\frac{5}{12}\right]$$

$$=\frac{\frac{16}{63}+\frac{5}{12}}{1-\frac{16}{63}\cdot\frac{5}{12}}=\frac{192+315}{756-80}=\frac{507}{676}=\frac{3}{4}$$

即 $$\tan^{-1}\frac{16}{63}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{3}{4}.$$

例 6. 解方程式

$$\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1}+\tan^{-1}\frac{x-1}{x}=\tan^{-1}(-7).$$

於方程式之兩方各取其正切，則

$$\frac{\tan\left[\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1}\right]+\tan\left[\tan^{-1}\frac{x-1}{x}\right]}{1-\tan\left[\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1}\right]\tan\left[\tan^{-1}\frac{x-1}{x}\right]}=\tan\{\tan^{-1}(-7)\}=-7,$$

即
$$\frac{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x}}{1-\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{-1}{x}}=-7,$$

即
$$\frac{2x^2-x+1}{1-x}=-7,$$

解之，得
$$x=2.$$

以 x 之值代入原方程式之左邊則得正值，故不合於原方程式.

故知 $x=2$ 乃次之方程式之根

$$\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1}+\tan^{-1}\frac{x-1}{x}=\pi+\tan^{-1}(-7).$$

習題四十三

[學者對於以下各題(如 1－4, 8, 9, 12, 13)應作一準確之圖形以證之.]

求證

1. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$.

2. $\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{7}{25}=\cos^{-1}\left(\frac{253}{325}\right)$.

3. $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$.　　4. $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$.

5. $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}=2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

6. $2\cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{13}}+\cot^{-1}\frac{16}{63}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{7}{25}=\pi$.

7. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=45^\circ$.

8. $\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{13}=\tan^{-1}\frac{2}{9}$.　　9. $\tan^{-1}\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{12}{5}$.

10. $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$.

11. $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

12. $\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{3}{5}-\tan^{-1}\frac{8}{19}=\frac{\pi}{4}$.

求證

13. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

14. $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\frac{1}{1985}$.

15. $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}=\frac{\pi}{4}$.

16. $\tan^{-1}\frac{120}{119}=2\sin^{-1}\frac{5}{13}$.

17. $\tan^{-1}\frac{m}{n}-\tan^{-1}\frac{m-n}{m+n}=\frac{\pi}{4}$.

18. $\tan^{-1}t+\tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2}=\tan^{-1}\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$，(式中之 t 爲正值)，若 $t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 或 $>\sqrt{3}$；

又 $=\pi+\tan^{-1}\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$，若 $t>\frac{1}{\sqrt{3}}$ 又 $<\sqrt{3}$.

19. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ca}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}=\pi$.

20. $\cot^{-1}\frac{ab+1}{a-b}+\cot^{-1}\frac{bc+1}{b-c}+\cot^{-1}\frac{ca+1}{c-a}=0$.

21. $\tan^{-1}n+\cot^{-1}(n+1)=\tan^{-1}(n^2+n+1)$.

22. $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)=\sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$.

23. $2\tan^{-1}\left[\tan(45^\circ-\alpha)\tan\frac{\beta}{2}\right]=\cos^{-1}\left[\frac{\sin 2\alpha+\cos\beta}{1+\sin 2\alpha\cos\beta}\right]$.

24. $\tan^{-1}x=2\tan^{-1}[\operatorname{cosec}\tan^{-1}x-\tan\cot^{-1}x]$.

25. $2\tan^{-1}\left[\tan\frac{\alpha}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]=\tan^{-1}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}$.

26. 求證

$$\cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}=\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}=\cot^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{(a-x)(x-b)}}{a-b}.$$

27. 若 $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\alpha$，求證

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha.$$

解次之方程式

28. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=\beta$.

29. $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$.

30. $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$.

31. $\tan^{-1}(x+1)+\cot^{-1}(x-1)=\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{3}{5}$.

32. $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}\frac{8}{31}$.

33. $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$.

34. $\tan^{-1}x+2\cot^{-1}x=\frac{2}{3}\pi$.　　35. $\tan\cos^{-1}x=\sin\cot^{-1}\frac{1}{2}$.

36. $\cot^{-1}x-\cot^{-1}(x+2)=15^\circ$.

37. $\cos^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}+\tan^{-1}\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2\pi}{3}$.

38. $\cot^{-1}x+\cot^{-1}(n^2-x+1)=\cot^{-1}(n-1)$.

39. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x=\frac{\pi}{3}$.　　40. $\sin^{-1}\frac{5}{x}+\sin^{-1}\frac{12}{x}=\frac{\pi}{2}$.

41. $\tan^{-1}\frac{a}{x}+\tan^{-1}\frac{b}{x}+\tan^{-1}\frac{c}{x}+\tan^{-1}\frac{d}{x}=\frac{\pi}{2}$.

42. $\sec^{-1}\frac{x}{a}-\sec^{-1}\frac{x}{b}=\sec^{-1}b-\sec^{-1}a$.

43. $\operatorname{cosec}^{-1}x=\operatorname{cosec}^{-1}a+\operatorname{cosec}^{-1}b$.

44. $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}$.

作次之圖形

45. $\sin^{-1}x$ [注意　設 $y=\sin^{-1}x$, 則 $x=\sin y$ 此圖對於 OY 之關係猶第 62 節之圖對於 OX 之關係.]

46. $\cos^{-1}x$.　　47. $\tan^{-1}x$　　48. $\cot^{-1}x$.

49. $\operatorname{cosec}^{-1}x$.　　50. $\sec^{-1}x$.

51. 試作 $\tan x$ 與 $2x$ 兩圖形, 由其交點證合於方程式 $\tan^{-1}2x=x$ 最小之正角約爲 67° 之弳數.

52. 用作圖方法,指出下列各方程式之解

(1)　$\sin x=\frac{1}{100}x$,

(2)　$\sin x=\frac{1}{2}x$,

又　(3)　$\cos x=x^2$,

約爲 178°, 109°, 與 47° 之弳數.

53. 應用書末附表,指出上題之解其近似之値約爲 $178^\circ13'$, $108^\circ36'$, 與 $47^\circ13'$ 之弳數.

第十九章

簡單之三角級數

241. 求成等差級數諸角正弦之和.

命諸角為

$$\alpha,\ \alpha+\beta,\ \alpha+2\beta, \cdots\cdots \{\alpha+(n-1)\beta\}.$$

設 $S \equiv \sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots+\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}$.

由第 97 節得

$$2\sin\alpha\ \sin\frac{\beta}{2}=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right),$$

$$2\sin(\alpha+\beta)\ \sin\frac{\beta}{2}=\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right),$$

$$2\sin(\alpha+2\beta)\ \sin\frac{\beta}{2}=\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sin\{\alpha+(n-2)\beta\}\ \sin\frac{\beta}{2}=\cos\{\alpha+(n-\tfrac{5}{2})\beta\}-\cos\{\alpha+(n-\tfrac{3}{2})\beta\},$$

又 $$2\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}\ \sin\frac{\beta}{2}=\cos\{\alpha+(n-\tfrac{3}{2})\beta\}-\cos\{\alpha+(n-\tfrac{1}{2})\beta\}.$$

將以上 n 行相加,則得

$$2\sin\frac{\beta}{2}\cdot S=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left\{\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right\},$$

而等號右方其餘各項已互相消失.

於是,由第 94 節,得

$$2\sin\frac{\beta}{2}\cdot S=2\sin\left\{\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right\}\sin\frac{n\beta}{2},$$

即
$$S=\frac{\sin\left\{\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right\}\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

例　令 $\beta=2\alpha$, 則得

$$\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\cdots\cdots+\sin(2n-1)\alpha$$
$$=\frac{\sin\{\alpha+(n-1)\alpha\}\sin n\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}.$$

242. 求成等差級數諸角餘弦之和.

命諸角爲

$$\alpha,\ \alpha+\beta,\ \alpha+2\beta,\cdots\cdots\{\alpha+(n-1)\beta\}.$$

設 $S\equiv\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots+\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}$.

由第 97 節得

$$2\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right),$$

$$2\cos(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right),$$

$$2\cos(\alpha+2\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\cos\{\alpha+(n-2)\beta\}\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left\{\alpha+\left(n-\frac{3}{2}\right)\beta\right\}-\sin\left\{\alpha+\left(n-\frac{5}{2}\right)\beta\right\},$$

及 $2\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left\{\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right\}-\sin\left\{\alpha+\left(n-\frac{3}{2}\right)\beta\right\}$.

將以上 n 行相加,則得

$$2S\times\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left\{\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right\}-\sin\left\{\alpha-\frac{\beta}{2}\right\},$$

而等號右方其餘各項已互相消失.

於是,由第 94 節,得

$$2S\times\sin\frac{\beta}{2}=2\cos\left\{\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right\}\sin\frac{n\beta}{2},$$

即
$$S=\frac{\cos\left\{\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right\}\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

243. 以上第 241 及 242 兩節中之 S,當 $\sin\frac{n\beta}{2}$ 爲零時亦即當 $\frac{n\beta}{2}$ 爲 π 之任何倍數時,其值爲零.

即當
$$\frac{n\beta}{2}=p\pi,$$

p 爲任意之整數,

即當
$$\beta=p\cdot\frac{2\pi}{n}.$$

由是,成等差級數之諸角,當其公差爲 $\frac{2\pi}{n}$ 之任何倍數時,其正弦(或餘弦)之和爲零.

例.
$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}=0,$$

又
$$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{8\pi}{n}\right)+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}=0.$$

244. 例 1. 求次之級數之和

$$\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)-\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 項}.$$

由第73節，已知

$$\sin(\alpha+\beta+\pi)=-\sin(\alpha+\beta),$$
$$\sin(\alpha+2\beta+2\pi)=\sin(\alpha+2\beta),$$
$$\sin(\alpha+3\beta+3\pi)=-\sin(\alpha+3\beta),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於是上級數

$$=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta+\pi)+\sin\{\alpha+2(\beta+\pi)\}+\sin\{\alpha+3(\beta+\pi)\}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\sin\left\{\alpha+\frac{n-1}{2}(\beta+\pi)\right\}\sin\frac{n(\beta+\pi)}{2}}{\sin\frac{\beta+\pi}{2}}\ (\text{第 241 節}),$$

$$=\frac{\sin\left\{\alpha+\frac{n-1}{2}(\beta+\pi)\right\}\sin\frac{n(\beta+\pi)}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

例 2.　求次之級數之和

$$\cos^3\alpha+\cos^3 2\alpha+\cos^3 3\alpha+\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 項}.$$

由第107節，已知

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

故

$$4\cos^3\alpha=3\cos\alpha+\cos 3\alpha.$$

同理

$$4\cos^3 2\alpha=3\cos 2\alpha+\cos 6\alpha,$$
$$4\cos^3 3\alpha=3\cos 3\alpha+\cos 9\alpha,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

設 S 為所求級數之和，則

$$4S=(3\cos\alpha+\cos 3\alpha)+(3\cos 2\alpha+\cos 6\alpha)+(3\cos 3\alpha+\cos 9\alpha)+\cdots\cdots$$
$$=3(\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots\cdots)+(\cos 3\alpha+\cos 6\alpha+\cos 9\alpha+\cdots\cdots)$$
$$=3\frac{\cos\left\{\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot\alpha\right\}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\left\{3\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot 3\alpha\right\}\sin\frac{n\cdot 3\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$$
$$=3\frac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{3(n+1)}{2}\alpha\sin\frac{3n\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

同理可求成等差級數諸角之正弦立方之和.

次因 $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$, 又 $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$,

應用此種關係及上述方法可求諸平方之和.

復次,因
$$8\sin^4\alpha=2[1-\cos 2\alpha]^2$$
$$=2-4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha=3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha,$$

則可求正弦之四次方之和.同理可求餘弦之和.

例 3. 求次之級數之和
$$\cos\alpha\sin\beta+\cos 3\alpha\sin 2\beta+\cos 5\alpha\sin 3\beta+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}.$$

設 S 表此級數之和,

則
$$2S=\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}+\{\sin(3\alpha+2\beta)-\sin(3\alpha-2\beta)\}$$
$$+\{\sin(5\alpha+3\beta)-\sin(5\alpha-3\beta)\}+\cdots\cdots$$
$$=\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(3\alpha+2\beta)+\sin(5\alpha+3\beta)+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}\}$$
$$-\{\sin(\alpha-\beta)+\sin(3\alpha-2\beta)+\sin(5\alpha-3\beta)+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}\}$$
$$=\frac{\sin\left\{(\alpha+\beta)+\frac{n-1}{2}(2\alpha+\beta)\right\}\sin n\frac{2\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{2\alpha+\beta}{2}}$$
$$-\frac{\sin\left\{(\alpha-\beta)+\frac{n-1}{2}(2\alpha-\beta)\right\}\sin n\frac{2\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{2\alpha-\beta}{2}} \quad [\text{第 241 節}],$$
$$=\frac{\sin\left\{n\alpha+\frac{n+1}{2}\beta\right\}\sin\frac{n(2\alpha+\beta)}{2}}{\sin\frac{2\alpha+\beta}{2}}$$
$$-\frac{\sin\left\{n\alpha-\frac{n+1}{2}\beta\right\}\sin\frac{n(2\alpha-\beta)}{2}}{\sin\frac{2\alpha-\beta}{2}}.$$

例 4 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 爲 n 邊之正多邊形,內接於以 O 爲圓心之圓,又 P 爲弧 A_nA_1 上之一點而角 POA_1 爲 θ;求由 P 至多邊形各頂點所作諸線之和.

諸角如 A_1OA_2, A_2OA_3, $\cdots\cdots A_nOA_1$ 各爲 $\frac{2\pi}{n}$ 則諸角 POA_1, $POA_2\cdots\cdots$ 各爲
$$\theta,\ \theta+\frac{2\pi}{n},\quad \theta+\frac{4\pi}{n},\ \cdots\cdots.$$

於是,設圓之半徑爲 r, 則
$$PA_1=2r\sin\frac{POA_1}{2}=2r\sin\frac{\theta}{2},$$

$$PA_2=2r\sin\frac{POA_2}{2}=2r\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{n}\right),$$

$$PA_3=2r\sin\frac{POA_3}{2}=2r\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故所求之和

$$=2\left[\sin\frac{\theta}{2}+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}\right]$$

$$=2r\frac{\sin\left[\frac{\theta}{2}+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right]\sin\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

$$=2r\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n}\sin\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2n}\right]$$

$$=2r\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2n}\right).$$

習題四十四

求次之級數之和:

1. $\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cdots\cdots$至 n 項.
2. $\cos\frac{A}{2}+\cos 2A+\cos\frac{7A}{2}+\cdots\cdots$至 n 項.

求證

3. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots\cdots+\sin n\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots\cdots+\cos n\alpha}=\tan\dfrac{n+1}{2}\alpha.$
4. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\cdots\cdots+\sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cdots\cdots+\cos(2n-1)\alpha}=\tan n\alpha.$
5. $\dfrac{\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}}{\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}}=\tan\left\{\alpha+\dfrac{n-1}{2}(\pi+\beta)\right\}.$

求次之級數之和:

6. $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\cdots\cdots$至 n 項.
7. $\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)-\cdots\cdots$至 $2n$ 項.
8. $\sin\theta+\sin\frac{n-4}{n-2}\theta+\sin\frac{n-6}{n-2}\theta+\cdots\cdots$至 n 項.
9. $\cos x+\sin 3x+\cos 5x+\sin 7x+\cdots\cdots+\sin(4n-1)x.$
10. $\sin\alpha\sin 2\alpha+\sin 2\alpha\sin 3\alpha+\sin 3\alpha\sin 4\alpha+\cdots\cdots$至 n 項.
11. $\cos\alpha\sin 2\alpha+\sin 2\alpha\cos 3\alpha+\cos 3\alpha\sin 4\alpha+\sin 4\alpha\cos 5\alpha+\cdots\cdots$至 $2n$ 項.
12. $\sin\alpha\sin 3\alpha+\sin 2\alpha\sin 4\alpha+\sin 3\alpha\sin 5\alpha+\cdots\cdots$至 n 項.

求次之級數之和:

13. $\cos\alpha\cos\beta+\cos 3\alpha\cos 2\beta+\cos 5\alpha\cos 3\beta+\cdots\cdots$至 n 項.

14. $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha+\cdots\cdots$至 n 項.

15. $\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)+\sin^2(\theta+2\alpha)+\cdots\cdots$至 n 項.

16. $\sin^3\alpha+\sin^3 2\alpha+\sin^3 3\alpha+\cdots\cdots$至 n 項.

17. $\sin^4\alpha+\sin^4 2\alpha+\sin^4 3\alpha+\cdots\cdots$至 n 項.

18. $\cos^4\alpha+\cos^4 2\alpha+\cos^4 3\alpha+\cdots\cdots$至 n 項.

19. $\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta+\cos 2\theta\cos 3\theta\cos 4\theta+\cdots\cdots$至 n 項.

20. $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots$至 $2n$ 項.

21. 由次之級數之和

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項},$$

推出(令 α 爲甚小之値)級數之和

$$1+2+3+\cdots\cdots+n.$$

22. 由第 241 節之例試推出次之級數之和

$$1+3+5+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}.$$

23. 設

$$\alpha=\frac{2\pi}{17},$$

求證

$$2(\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha)$$

及

$$2(\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha)$$

爲方程式 $x^2+x-4=0$ 之根.

24. $ABCD\cdots\cdots$ 爲 n 邊之正多邊形,內接於以 O 爲圓心 r 爲半徑之圓,又 P 爲弧 AB 上之一點,而角 POA 等於 θ. 求證

$$PA\cdot PB+PA\cdot PC+PA\cdot PD+\cdots\cdots+PB\cdot BC+\cdots\cdots$$
$$=r^2\left[2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2n}-n\right].$$

25. 一已知之圓,作一外切正多邊形,及一內接正多邊形,邊數各爲 n. 由其一正多邊形之頂點至他一正多邊形諸頂點所作諸線平方之和與兩正多邊形面積之和之比爲

$$2:\sin\frac{2\pi}{n}.$$

26. $A_1, A_2, \cdots\cdots A_{2n+1}$ 爲內接於圓之正多邊形之諸頂點,又 O 爲圓周上在 A_1 與 A_{2n+1} 間之一點;求證

$$OA_1+OA_3+\cdots\cdots+OA_{2n+1}=OA_2+OA_4+\cdots\cdots+OA_{2n}.$$

27. 一 n 邊之正多邊形其內切圓之半徑爲 a, 由圓周上之任一點作各邊之垂線,求證

$$\frac{2}{n}\Sigma\left(\frac{p}{a}\right)^2=3,\ \text{又}\ \frac{2}{n}\Sigma\left(\frac{p}{a}\right)^3=5.$$

第二十章

消去法

245. 有時兩方程式僅有一元,則常數之間必有一定之關係俾此元能合於兩方程式,例如,設 x 合於次之二方程式

$$ax+b=0,\ 及\ cx^2+dx+e=0.$$

由第一式,得

$$x=-\frac{b}{a},$$

代入第二式,則

$$c\left(-\frac{b}{a}\right)^2+d\left(-\frac{b}{a}\right)+e=0,$$

即
$$b^2c-abd+a^2e=0.$$

此方程式爲由巳知兩方程式消去 x 所得之結果,稱爲諸方程式之消去式.

246. 次設角 θ 合於次之二方程式

$$\sin^3\theta=b,\ 又\ \cos^3\theta=c,$$

則
$$\sin\theta=b^{\frac{1}{3}},\ 又\ \cos\theta=c^{\frac{1}{3}}.$$

今不論 θ 之值爲何,次式恆能成立

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

由是
$$b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}=1.$$

此即消去 θ 所得之消去式．

247. 凡兩方程式而僅有一元者,依理此元必能消去.但外觀似甚簡單之題往往須運用相當之技巧方可消去.

同理,凡三方程式而有二元者,此二元亦得消去.

248. 玆附關於消去法之數例如下.

例 1. 由次之方程式消去 θ

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c,$$

及
$$d\cos\theta+e\sin\theta=f.$$

用十字法或其他方法,求 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$,

$$\frac{\cos\theta}{bf-ce}=\frac{\sin\theta}{cd-af}=\frac{1}{bd-ae}.$$

$$\therefore\quad 1=\cos^2\theta+\sin^2\theta=\frac{(bf-ce)^2+(cd-af)^2}{(bd-ae)^2},$$

即
$$(bf-ce)^2+(cd-af)^2=(bd-ae)^2$$

例 2. 消去下式中之 θ

$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2 \quad\cdots\cdots(1)$$

又
$$\frac{ax\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{by\cos\theta}{\sin^2\theta}=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

由 (2) 得
$$ax\sin^3\theta=-by\cos^3\theta.$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\theta}{-(by)^{\frac{1}{3}}}=\frac{\cos\theta}{(ax)^{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}{\sqrt{(by)^{\frac{2}{3}}+(ax)^{\frac{2}{3}}}}=\frac{1}{\sqrt{(by)^{\frac{2}{3}}+(ax)^{\frac{2}{3}}}}.$$

故
$$\frac{1}{\sin\theta}=-\frac{\sqrt{(by)^{\frac{2}{3}}+(ax)^{\frac{2}{3}}}}{(by)^{\frac{1}{3}}},$$

又
$$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{(by)^{\frac{2}{3}}+(ax)^{\frac{2}{3}}}}{(ax)^{\frac{1}{3}}},$$

代入式 (1), 得

$$a^2-b^2=\sqrt{(by)^{\frac{2}{3}}+(ax)^{\frac{2}{3}}}\left[ax\cdot\frac{1}{(ax)^{\frac{1}{3}}}-by\left\{-\frac{1}{(by)^{\frac{1}{3}}}\right\}\right]$$

$$=\sqrt{(by)^{\frac{2}{3}}+(ax)^{\frac{2}{3}}}\,\left\{(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}\right\}$$

$$=\left\{(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}},$$

即
$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

學者讀至解析幾何時將見上式為橢圓形法線之重要問題.

例 3. 消去下式中之 θ

$$\frac{x}{a}\cos\theta-\frac{y}{b}\sin\theta=\cos 2\theta \cdots\cdots(1)$$

又

$$\frac{x}{a}\sin\theta+\frac{y}{b}\cos\theta=2\sin 2\theta \cdots\cdots(2)$$

乘 (1) 以 $\cos\theta$, (2) 以 $\sin\theta$, 相加得

$$\frac{x}{a}=\cos\theta\cos 2\theta+2\sin\theta\sin 2\theta$$

$$=\cos\theta+\sin\theta\sin 2\theta=\cos\theta+2\sin^2\theta\cos\theta \cdots\cdots(3)$$

乘 (2) 以 $\cos\theta$, 乘 (1) 以 $\sin\theta$, 相減得

$$\frac{y}{b}=2\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta$$

$$=\sin 2\theta\cos\theta+\sin\theta=\sin\theta+2\sin\theta\cos^2\theta \cdots\cdots(4)$$

(3) 與 (4) 相加, 得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=(\sin\theta+\cos\theta)[1+2\sin\theta\cos\theta]$$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)[\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta]$$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)^3,$$

故

$$\sin\theta+\cos\theta=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \cdots\cdots(5)$$

由 (3) 減 (4), 得

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=(\cos\theta-\sin\theta)(1-2\sin\theta\cos\theta)$$

$$=(\cos\theta-\sin\theta)^3$$

故

$$\cos\theta-\sin\theta=\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \cdots\cdots(6)$$

將 (5), (6) 兩式各自乘方相加得

$$2=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

習題四十五

由下列各方程式消去 θ

1. $a\cos\theta+b\sin\theta=c$, 又 $b\cos\theta-a\sin\theta=d$.

2. $x=a\cos(\theta-\alpha)$, 又 $y=b\cos(\theta-\beta)$.

由下列各方程式消去 θ:

3. $a\cos 2\theta = b\sin\theta$, 又 $c\sin 2\theta = d\cos\theta$.

4. $a\sin\alpha - b\cos\alpha = 2b\sin\theta$, 又 $a\sin 2\alpha - b\cos 2\theta = a$.

5. $x\sin\theta - y\cos\theta = \sqrt{x^2+y^2}$, 又 $\dfrac{\sin^2\theta}{a^2} + \dfrac{\cos^2\theta}{b^2} = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

6. $\dfrac{x\cos\theta}{a} + \dfrac{y\sin\theta}{b} = 1$, 又 $x\sin\theta - y\cos\theta = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$.

7. $\sin\theta - \cos\theta = p$, 又 $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = q$.

8. $x = a\cos\theta + b\cos 2\theta$, 又 $y = a\sin\theta + b\sin 2\theta$.

9. 設 $m = \operatorname{cosec}\theta - \sin\theta$ 又 $n = \sec\theta - \cos\theta$,

求證
$$m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}} = (mn)^{-\frac{2}{3}}.$$

10. 求證以下二方程式消去 θ 後之結果

$$x\cos(\theta+\alpha) + y\sin(\theta+\alpha) = a\sin 2\theta,$$

又
$$y\cos(\theta+\alpha) - x\sin(\theta+\alpha) = 2a\cos 2\theta,$$

為
$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^{\frac{2}{3}} + (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

消去以下各方程式中之 θ 與 ϕ

11. $\sin\theta + \sin\phi = a$, $\cos\theta + \cos\phi = b$, 又 $\theta - \phi = \alpha$.

12. $\tan\theta + \tan\phi = x$, $\cot\theta + \cot\phi = y$, 又 $\theta + \phi = \alpha$.

13. $a\cos^2\theta + b\sin^2\theta = c$, $b\cos^2\phi + a\sin^2\phi = d$, 又 $a\tan\theta = b\tan\phi$.

14. $\cos\theta + \cos\phi = a$, $\cot\theta + \cot\phi = b$, 又 $\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec}\phi = c$.

15. $a\sin\theta = b\sin\phi$, $a\cos\theta + b\cos\phi = c$, 又 $x = y\tan(\theta+\phi)$.

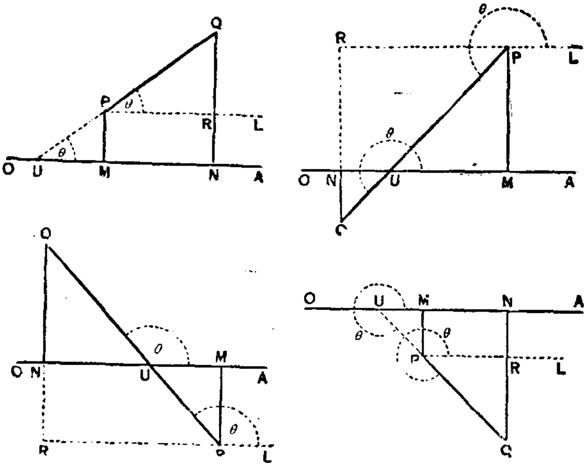
16. $\dfrac{x}{a}\cos\theta + \dfrac{y}{b}\sin\theta = 1$, $\dfrac{x}{a}\cos\phi + \dfrac{y}{b}\sin\phi = 1$,

又
$$a^2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} + b^2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} = c^2.$$

第二十一章

射　影

249. 由任意直線 FQ 之兩端 P 與 Q，作垂線垂直於已知線 OA. 則 MN 稱爲 PQ 在 OA 上之射影.



若 MN 與 OA 同向則爲正，異向則爲負.

250. 設任意直線 PQ 與已知直線 OA 之交角爲 θ. 則 FQ 在 OA 上之射影爲 $IQ\cos\theta$.

不論 PQ 之向爲何，過 P 作 PL 平行於 OA，又此線或其延長線與 QN 或其延長線相交於 R.

則由以上各圖,角 LPQ 或角 AUQ 等於 θ.

又 $MN=PR=PQ\cos LPQ=PQ\cos\theta$, 依第50節之定義.

同理, PQ 在 OA 之垂線上之射影 $=RQ$

$$=PQ\sin LPQ=PQ\sin\theta.$$

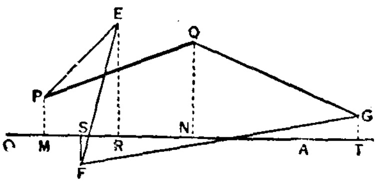
一線與線 PQ 所成之角爲 θ, 則 PQ 在此線及此線之垂線上之射影爲 $PQ\cos\theta$ 與 $PQ\sin\theta$.

251. 如第50節中所載餘弦與正弦之定義,可云餘弦之定義爲 OP 在初線之射影對於 OP 之比,而正弦則爲 OP 在初線之垂線上之射影對於 OP 之比.

此種說法常見適用.

252. 直線 PQ 在已知直線 OA 上之射影,等於由 P 起至 Q 止任何折線在 OA 上射影之總和.

設 $PEFGQ$ 爲任何折線由 P 至 Q 連接而成. 作 PM, QN, ER, FS, GT 諸線垂直於 OA. 則



PE 之射影 MR 爲正.

EF 之射影 RS 爲負.

FG 之射影 ST 爲正.

GQ 之射影 TN 爲負.

由是折線 $PEFGQ$ 射影之總和

$$=MR+RS+ST+TN$$

$$=MR-SL+ST-NT$$

$$=MS+SN$$

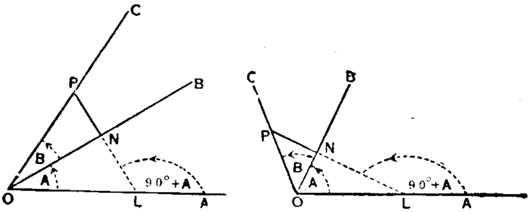
$$=MN.$$

不論 P 與 Q 之地位與線之屈折如何,證法均與上相似.

系. 連接 P 與 Q 兩點所作之折線其射影之和等於以相同端點所作他一折線射影之和,因二者俱等於直線 PQ 之射影也.

253. 射影方法,應用於和差角定理之一般證法.

設 AOB 爲角 A 而 BOC 爲角 B. 於角 $A+B$ 之界線 OC 上任取一點 P, 作 PN 垂直於 OB 復引長之與 OA 相交於 L.



則 $$\angle ALP=\angle LNO+\angle AOB=90^\circ+A.$$

(i) 求證 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$.

$$OP\cdot\cos(A+B)=OP\cdot\cos AOP$$

$=OP$ 在 OA 上之射影　(第 250 節)

$=ON$ 在 OA 上之射影 $+NP$ 在 OA 上之射影　(第 252 節)

$=ON\cos AON+NP\cos ALP$　(第 250 節)

$=OP\cos B\cdot\cos A+OP\sin B\cdot\cos(90^\circ+A)$

$=OP[\cos A\cos B-\sin A\sin B]$.　(第 70 節)

兩邊除以 OP, 則得 (i).

(ii) 求證 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.

$$OP\cdot\sin(A+B)=OP\cdot\sin AOP$$

$=OP$ 在 OA 垂線上之射影　　　(第 250 節)

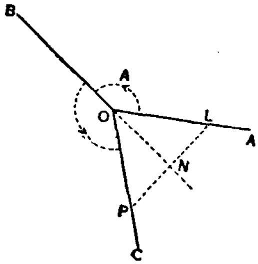
$=ON, NP$ 在 OA 垂線上射影之和　　　(第 252 節)

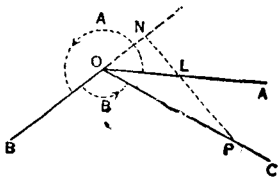
$=ON\sin A+NP\sin ALP$　　　(第 250 節)

$=OP\cos B\cdot\sin A+OP\sin B\cdot\sin(90°+A)$　　　(第 250 節)

$=OP[\sin A\cos B+\cos A\sin B]$.　　　(第 70 節)

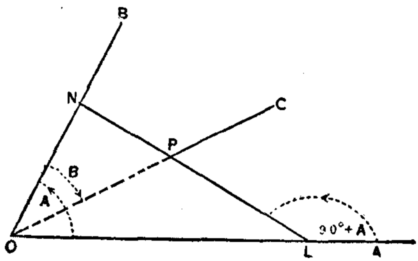
由是得 (ii).





如圖,不論界線 OB 與 OC 之位置何在,上之證法恆能成立.

254. 在求兩角差之式中,設 AOB 爲角 A, 又 BOC 爲角 B 而其向爲負,則 AOC 爲 $A-B$; 又 OC 對於 OB 所成之角爲 $-B$.



於 OC, 即差角之界線上取任一點 P; 作 PN 垂直於 OB, 復引長之與 OA 相交於 L.

(i) 求證 $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$.

$$OP\cdot\cos(A-B)=OP\cdot\cos AOC$$

$=OP$ 在 OA 上之射影 (第 250 節)

$=ON$ 在 OA 上之射影 $+NP$ 在 OA 上之射影 (第 252 節)

$=ON\cos A+NP\cos(90^\circ+A)$ (第 250 節)

$=OP\cos(-B)\cdot\cos A+OP\sin(-B)\cdot\cos(90^\circ+A)$ (第 250 節)

$=OP\cos B\cos A+OP(-\sin B)(-\sin A)$ (第 68, 70 節)

$=OP[\cos A\cos B+\sin A\sin B]$.

於是得 $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$.

(ii) 求證 $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$.

$$OP\cdot\sin(A-B)=OP\cdot\sin AOC$$

$=OP$ 在 OA 之垂線上之射影 (第 250 節)

$=ON, NP$ 在 OA 垂線上射影之和 (第 252 節)

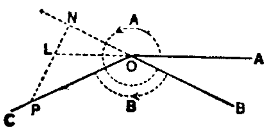
$=ON\sin A+NP\sin(90^\circ+A)$ (第 250 節)

$=OP\cos(-B)\cdot\sin A+OP\sin(-B)\cdot\sin(90^\circ+A)$ (第 250 節)

$=OP\cos B\sin A-OP\sin B\cos A$ (第 68, 70 節)

$$\therefore\quad \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

此等證法對於 OB 與 OC 之地位無關, 如下圖即其一例.



總複習題

1. 求證：若分角α爲兩分，而其正切之比爲λ，則其差x適合於下式

$$\sin x=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\sin\alpha$$

2. 設 $\tan(\pi\cos\theta)=\cot(\pi\sin\theta)$，求證

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

3 在任意三角形ABC內，求證

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}},\ \text{又}\ \frac{a+b}{c}=\frac{1+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}.$$

4. 一飛機以每時18哩之等速向東飛行．一人見此機在其北而仰角爲$9°30'$．一分鐘後其向變爲北偏東$62°$．若此機之高度爲一定，求其高，及第二次觀測時之仰角．

5. 一三角形之三邊爲51，35，26呎；另一等積等周之三角形底邊爲41呎，求其他二邊．

6. 求證
$$\sin\cot^{-1}\cos\tan^{-1}x=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}.$$

7. 消去下式中之θ

$$\sin(\theta+\alpha)=a,\qquad \cos^2(\theta+\beta)=b.$$

8. 求證，不論θ之值爲何，此式

$$a\sin^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$$

之值在以下二式之間

$$\frac{a+c}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(a-c)^2}\ \text{與}\ \frac{a+c}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(a-c)^2}.$$

9. 設 $\sin x=k\sin(A-x)$，

求證
$$\tan\left(x-\frac{A}{2}\right)=\frac{k-1}{k+1}\tan\frac{A}{2},$$
又，當 $k=3$, $A=50^\circ$ 時，用表解此方程式.

10 以 $\tan 3\theta$ 表下式
$$\tan\theta+\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right).$$
由是，以所得之結果，或其他方法，解方程式
$$\tan\theta+\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=3.$$

11. 在三角形 ABC 內若 $\tan\frac{A}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$, $\tan\frac{C}{2}$ 成等差級數，則 $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ 亦成等差級數.

12. 一人在岸上見海中兩浮筒在一直線上，此線與海岸線所成之角為 α. 其人沿岸前行一距離 a，則兩浮筒對於此人所張之角為 α，復前行一距離 b，見所張之角仍為 α. 設海岸為一直線，又其人之高不計，求證兩浮筒間之距離為
$$\left(a+\frac{b}{2}\right)\sec\alpha-\frac{2a(a+b)}{2a+b}\cos\alpha.$$

13. 三角形 ABC 諸角之平分線交外接圓於 D, E, F 三點. 求證三角形 DEF 與三角形 ABC 面積之比如 $R:2r$.

14 正五角形由一頂點至相間之一頂點依次相聯則成另一正五角形，求此兩正五角形面積之比.

15 設 $\phi=\tan^{-1}\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}$，又 $\theta=\tan^{-1}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}$，求證 $\phi-\theta$ 之一值為 30°.

16. 設
$$m^2+m'^2+2mm'\cos\theta=1,$$
$$n^2+n'^2+2nn'\cos\theta=1,$$
又
$$mn+m'n'+(mn'+m'n)\cos\theta=0,$$
求證
$$m^2+n^2=\operatorname{cosec}^2\theta.$$

17. 設 x 為實數，求證
$$\frac{x^2-2x\cos\alpha+1}{x^2-2x\cos\beta+1}\text{ 之值在 }\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}}\text{ 與 }\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}\text{ 之間.}$$

18. 求證圓之面積與等周之 n 邊正多邊形面積之比為
$$\tan\frac{\pi}{n}:\frac{\pi}{n}.$$

19. 設 $\dfrac{\sin(2\alpha-\theta)}{\sin\theta}=1+x$，而此 x 為一甚小之值，求證

$$\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}=1+\frac{1}{2}x\tan^2\alpha \quad (\text{約}).$$

20. 設
$$2\sigma=\alpha+\beta+\gamma+\delta,$$
求證
$$\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)\cos(\sigma-\delta)$$
$$+\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)\sin(\sigma-\delta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta$$

21. 解次之方程式

(i) $\tan\alpha\tan(\theta-\alpha)+\tan\beta\tan(\theta-\beta)=\tan\dfrac{\beta-\alpha}{2}(\tan\alpha-\tan\beta)$.

(ii) $\sin3\theta=4\sin\theta\sin2\theta\sin4\theta$.

22. OA 為 2 呎長之曲柄繞 O 而轉動；連此曲柄為一 5 呎長之軸 AB. B 則沿過 O 之直線上前後移動. 當 B 由其最遠處移至全程之 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ 處時，求 OA 與 OB 間所成之角.

23. 由一高 200 呎巖石之頂見海中有二船，其一船之俯角為 $9°10'$，其向為東偏北 $30°$；他一船之俯角為 $7°30'$，其向為東偏南 $25°$. 問二船間之距離，又一船對於他船之向各若何?

24. 過三角形內切圓之圓心與任何兩旁切圓之圓心所作之圓，其半徑與外接圓之直徑相等，試證之.

25. 設
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)=\tan^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right),$$
求證
$$\sin y=\sin x\frac{3+\sin^2 x}{1+3\sin^2 x}.$$

26. 求證 $\sin\beta\sin\gamma\cos^2\alpha\sin(\beta-\gamma)+$兩項類似式
$$=-\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta).$$

27. 圓規之兩脚各長 7 吋，接鉛筆脚之處離樞軸 4 吋. 於接處將鉛筆脚折而垂直於紙面，因作半徑 4 吋之圓. 求證此兩脚與垂線所成之角各為 $19°5'$ 與 $25°20'$.

28. 有每邊長 80 呎之正三角形地. 今於其中建一塔，由三角形之各頂點測得塔頂仰角之正切各為 $\sqrt{3}+1$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. 求塔高.

29. 半徑為 r_1 與 r_2 之兩圓其交角為 α；求證公有部分之面積為

$$(r_1^2-r_2^2)\tan^{-1}\frac{r_2\sin\alpha}{r_1+r_2\cos\alpha}+r_2^2\alpha-r_1r_2\sin\alpha.$$

30 求下式之最簡值

$$\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, \text{ 與 } \tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right).$$

31. 由以下三式消去 α 與 β

$$\sin\alpha+\sin\beta=l,$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=m,$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=n.$$

32. 用作圖法於方程式 $x^2\tan x=1$ 中求 0 與 2π 間所有實根之數.

33 求證 $\cos 2\alpha=2\sin^2\beta+4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta+\cos 2(\alpha+\beta)$.

34. 求證 $$\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\frac{1}{8}.$$

35. 解次之聯立方程式

$$\sqrt{2}\sin 2A=\sin 2B,$$

$$\sqrt{3}\sin^2 A+\sin^2 B=\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1).$$

36. 若三角形三角之正切成等差級數,求證各邊平方之比為

$$x^2(x^2+9):(3+x^2)^2:9(1+x^2),$$

x 乃表示最大或最小之正切者.

37. A, B, C 為平地上一直線中之三點, AB 長 100 碼而 BC 長 150 碼,一氣球由此三點分別測之其仰角各為 α, β, γ. 求證氣球之高 h, 其碼數得以下式表之

$$h^2(3\cot^2\alpha+2\cot^2\gamma-5\cot^2\beta)=75000.$$

38. 一直線與線外三角形之三邊相交於 D, E, F, 由三角形諸頂點至此線所作垂線之長各為 p, q, r, 求證

$$a^2(p-q)(p-r)+b^2(q-r)(q-p)+c^2(r-p)(r-q)=4\Delta^2,$$

Δ 為三角形之面積.

次求證 $$EF=\frac{2p\Delta}{(p-q)(p-r)}.$$

39. 一 n 邊正多邊形每邊之長為 $2l$, 其面積與內切及外接圓之面積各為 A, A_1, A_2; 求證

$$A_2-A_1=\pi l^2 \text{ 又 } n^2l^2A_1=\pi A^2.$$

40. 三角形之三邊為 31, 56, 64 求證其中之一角與直角之差小於 $1'$.

41. 求證 $$\frac{1+\sin A}{\cos A}+\frac{\cos B}{1-\sin B}=\frac{2\sin A-2\sin B}{\sin(A-B)+\cos A-\cos B}.$$

42. 求證

$$(1+\sec 2\theta)(1+\sec 4\theta)(1+\sec 8\theta)\cdots\cdots(1+\sec 2^n\theta)=\tan 2^n\theta\cdot\cot\theta$$

43 若三角形之各邊成等差級數，其最大角與最小角之差爲 α，求證各邊之比爲 $1-x:1:1+x$，而 $x=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{7-\cos\alpha}}$.

44 一圓形之湖 $ABCD$，於 D 處建一塔，其頂由 A, B, C 諸點測之得仰角各爲 α, β, γ. 若角 BAC, ACB 各爲 θ. 求證

$$2\cos\theta\cot\beta=\cot\alpha+\cot\gamma.$$

45. 三角形 ABC 諸內角之平分線交各對邊於 D, E, F. 求證三角形 DEF 之面積等於 $\frac{2\Delta abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

46. 若 $$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi.$$
求證 $$x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$$

47. 由下之二式消去 θ

$$\lambda\cos 2\theta=\cos(\theta+\alpha),$$

$$\lambda\sin 2\theta=2\sin(\theta+\alpha).$$

48. 一直徑6吋之圓；於此截一段之弧與其弦共長8吋，試求一方程式示此弧所對之中心角，且以作圖方法求此中心角.

49. 簡化 $\left\{\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}-\frac{\cos(\alpha+\gamma)}{\cos(\alpha-\gamma)}\right\}^2+\left\{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}-\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\cos(\alpha-\gamma)}\right\}^2$.

50. 求證

$$\sin^2 12^\circ+\sin^2 21^\circ+\sin^2 39^\circ+\sin^2 48^\circ=1+\sin^2 9^\circ+\sin^2 18^\circ.$$

51. 設 a, b, c 爲三角形之三邊，$\lambda a, \lambda b, \lambda c$ 爲內含之相似三角形而邊 a 與 λa 所成之角爲 θ，求證 $2\lambda\cos\theta=1$.

52. 由平地上之兩點 A, B 測一山頂；A 在山之南而 B 在 A 之北東. 若由 A, B 所測得之仰角各爲 $9°30'$ 與 $7°30'$，試求由山頂測 B 之方向.

53. 由 B, C 兩點所作三角形 ABC 之外接圓之切線相交於 A'，又 O 爲外接圓之圓心.若角 OAA' 爲 θ，求證

$$2\tan\theta=\cot B\sim\cot C.$$

54. 用幾何作圖方法求 $\cos(\frac{1}{3}\sin^{-1}a)$ 之諸值.試證此諸值之積爲

$$-\frac{1}{16}(1-a^2).$$

55. 求證式 $\frac{\tan(x+a)}{\tan(x-a)}$ 之值不能在次之二式之間

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) \text{ 與 } \tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

56. 求證 $\cos^4\theta+\cos^4\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos^4\left(\theta+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots\cdots$至 n 項$=\frac{3n}{8}$.

57. 設 $\{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+2\beta)\sin\beta\}^2=4\cos\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$, 求證

$$\tan\alpha=\tan\beta\left\{\frac{1}{(\sqrt{2}\cos\beta-1)^2}-1\right\},$$

α 與 β 爲小於直角之角.

58. 求 x 之諸值合於下之方程式者

$\tan(x+\beta)\tan(x+\gamma)+\tan(x+\gamma)\tan(x+\alpha)+\tan(x+\alpha)\tan(x+\beta)=1.$

59. ABC 爲一三角形而 D 爲由 A 至 BC 所作垂線之垂足.若 $BC=117$ 呎, $\angle B=43°14'$, $\angle C=61°27'$, 求 AD 之長.

60 由一基線上之三點 A, B, C 測得一山頂之仰角各爲 α, β, γ 求證此山之高爲

$$(-AB\cdot BC\cdot CA)^{\frac{1}{2}}(BC\cot^2\alpha+CA\cot^2\beta+AB\cot^2\gamma)^{-\frac{1}{2}},$$

惟須注意於諸線之向量.

61. 若三角形 ABC 中角 C 之平分線割 AB 於 D 又交外接圓於 E, 求證

$$CE : DE=(a+b)^2 : c^2.$$

62. 由次之二式消去 θ

$$a\tan\theta+b\cot 2\theta=c,$$

$$a\cot\theta-b\tan 2\theta=c.$$

63. 圖解方程式 $\cot x=\cos 2x$ 以求其近似值須準確至 $\frac{1}{2}°$.

64. 一人劃一網球場之界線,於其一隅,以 3 碼, 4 碼 4 碼 2 呎 10 吋長之線作直角.求此角之差誤.

65. 若 $n^2\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$, 求證

$$\tan\alpha=\frac{1\pm n}{1\mp n}\tan\beta.$$

66. 若不論 θ 爲何, 下式

$$\frac{A\cos(\theta+\alpha)+B\sin(\theta+\beta)}{A'\sin(\theta+\alpha)+B'\cos(\theta+\beta)}$$

之值恆爲一定, 求證

$$AA'-BB'=(A'B-AB')\sin(\alpha-\beta).$$

67. 求證次之方程式之根 θ

$$\sin 2\theta\cos^2(\alpha-\beta)-\sin 2\alpha\cos^2(\beta+\theta)-\sin 2\beta\sin^2(\alpha+\theta)=0$$

爲 $(2n+1)\frac{\pi}{2}-\beta$ 與 $n\pi+\alpha$，但 n 爲任何之正整數或負整數.

68. 三角形 ABC 之三中線相交，其交角爲 α, β, γ，求證

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma+\cot A+\cot B+\cot C=0.$$

69. 由沿河相距 $2a$ 之兩點測彼岸之塔項，其仰角皆爲 α，由此兩點之中點測之，則仰角爲 β. 試以 a, α, β 表塔高及河寬

設 $a=100$ 碼，$\alpha=22\frac{1}{2}°$，$\beta=30°$，則塔高爲 $150\sqrt{2}$ 呎，試證之.

70. 三角形之三邊 BC, CA, AB 與其內切圓之切點各爲 D, E, F；若 AD, BE, CF 之平方成等差級數，求證三角形之各邊成調和級數.

71. 求證圓之內接等邊三角形邊長之半與內接正七邊形一邊之長之差小於半徑之 $\frac{1}{500}$.

72. 求證
$$\cos\theta\{\sin\theta+\sqrt{\sin^2\theta+\sin^2\alpha}\}.$$
之值在 $\pm\sqrt{1+\sin^2\alpha}$ 兩值之間.

73. 試將 $8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta$ 以餘弦八項表示之.

74. 設
$$\sin^2\phi=\frac{\cos 2\alpha\cos 2\beta}{\cos^2(\alpha+\beta)},$$
求證
$$\tan^2\frac{\phi}{2}=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\pm\beta\right)}.$$

75. 已知三角形之底 a，其對角 A，又他二邊之積爲 k^2，試解此三角形，并證明當 $a<2k\sin\frac{A}{2}$ 時，則此三角形無解.

76. 由平地上之一點 O 測得山坡上之兩點 P 與 Q 之仰角各爲 $38°$ 與 $25°$；由 O 至山麓 A 之距離爲 500 碼，而 AQ 之長則爲 320 碼. 已知各點俱在同一垂直面內，求證 PQ 之長約爲 329 碼并求山坡之斜度.

77. 三角形 ABC 諸旁切圓之圓心各爲 I_1, I_2, I_3 而諸三角形 BI_1C, CI_2A, AI_3B 之內切圓半徑各爲 ρ_1, ρ_2, ρ_3. 求證

$$\rho_1:\rho_2:\rho_3::\sin\frac{A}{2}:\sin\frac{B}{2}:\sin\frac{C}{2}.$$

78. 在同一平面內之兩圓其半徑之和爲 a，又其圓心間之距離爲 $2a$，今以帶繞此兩圓而交叉於其間. 求證帶長爲 $\left(\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right)a$.

79 求證

$$2\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-x+b}{\sqrt{a^2-b^2}}+\tan^{-1}\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{x^2+a^2}+a^2}+\tan^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}=n\pi.$$

80. 已知 -2.45 爲合於方程式 $3\sin x=2x+3$ 中 x 之近似值，試求其更精密之值.

[命 2.45 弳 $=140^\circ 22' 30''$]

81. 求證

$$\sin A=\sin(36^\circ+A)-\sin(36^\circ-A)-\sin(72^\circ+A)+\sin(72^\circ-A).$$

82. 求以下聯立方程式之完全解答

$$\tan 3\theta+\tan 3\phi=2,$$

$$\tan\theta+\tan\phi=4.$$

83. 設 ABC 爲一三角形，又若

$$\sin^3\theta=\sin(A-\theta)\sin(B-\theta)\sin(C-\theta),$$

求證

$$\cot\theta=\cot A+\cot B+\cot C.$$

84. 一船以每時15哩之速度向船塢 A 行駛，於 A 之正西10哩處之一點 B 測得此船之向爲東偏北 42°. 若此船於三刻鐘內抵塢，求初測時與 B 之距離.

85. 求證過三角形 ABC 之旁切圓圓心所作三角形之內切圓其半徑爲

$$\frac{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}.$$

86 一 n 邊多邊形內接於圓，其各邊所對之圓心角各爲 $2\alpha, 4\alpha, 6\alpha, \ldots\ldots 2n\alpha$；求證此多邊形之面積與內接 n 邊正多邊形面積之比爲 $\sin n\alpha : n\sin\alpha$.

87. 化次之方程式

$$\cot^{-1}\left\{\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right\}=2\tan^{-1}\sqrt{\frac{3-4x^2}{4x^2}}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{3-4x^2}{x^2}}$$

爲含有 x, y 之有理整方程式.

88 設 x_1, x_2, x_3, x_4 爲以下方程式之諸根

$$x^4-x^3\sin 2\beta+x^2\cos 2\beta-x\cos\beta-\sin\beta=0,$$

求證

$$\tan^{-1}x_1+\tan^{-1}x_2+\tan^{-1}x_3+\tan^{-1}x_4=n\pi+\frac{\pi}{2}-\beta,$$

但 n 爲整數.

89. 若

$$\frac{\sin(\theta-\beta)\cos\alpha}{\sin(\phi-\alpha)\cos\beta}+\frac{\cos(\alpha+\theta)\sin\beta}{\cos(\phi-\beta)\sin\alpha}=0,$$

又
$$\frac{\tan\theta\tan\alpha}{\tan\phi\tan\beta}+\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=0,$$

求證
$$\tan\theta=\tfrac{1}{2}(\tan\beta+\cot\alpha)\text{ 又 }\tan\phi=\tfrac{1}{2}(\tan\alpha-\cot\beta).$$

90. 若 $\cos 3x=-\frac{3}{8}\sqrt{6}$, 求證 $\cos x$ 之三值為
$$\frac{1}{2}\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{10},\ \frac{1}{2}\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{6},\ -\frac{1}{2}\sqrt{6}\sin\frac{3\pi}{10}.$$

91. 已知一三角形之底邊為 a 而其他兩邊之比為 $r(<1)$. 求證此三角形之高 h 不能大於 $\frac{ar}{1-r^2}$, 又若 h 為此值則頂角必為 $\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}r$.

92. 一鐵道之彎曲處形如圓周之四分之一,沿此弧形鐵道之兩端及中部平均樹有 n 根電竿 一人於圓心至第一電竿之引長線上之一點見第 p 及第 q 兩竿在同一視線上求證此弧之半徑為 $\frac{a}{2}\cos(p+q)\phi\operatorname{cosec}p\phi\operatorname{cosec}q\phi$, 而 $\phi=\frac{\pi}{4(n-1)}$, 又 a 為此人與第一竿間之距離.

93. 求證三角形三旁切圓之半徑為次之方程式之諸根
$$x^3-x^2(4R+r)+xs^2-rs^2=0.$$

94. 消去以下方程式中之 x 與 y
$$\cos x+\cos y=a,$$
$$\cos 2x+\cos 2y=b,$$
$$\cos 3x+\cos 3y=c,$$
其結果須為有理式.

95. 求以下級數之和
$$\sin\theta\sin 2\theta\sin 3\theta+\sin 2\theta\sin 3\theta\sin 4\theta+\sin 3\theta\sin 4\theta\sin 5\theta+\cdots\cdots\text{至 }n\text{ 項.}$$

96. 半徑 5 吋之圓內有一弓形,其面積為 25 平方吋.用作圖法求此弓形之弧所對之圓心角.

97. 求證
$$4\sin 27^\circ=(5+\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}-(3-\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}.$$

98. 若
$$\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\alpha-\beta)+1=0,$$
求證 $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$, 或 $\alpha-\beta$ 為 π 之倍數.

99. 已知三角形諸角正弦之積為 p, 又餘弦之積為 q, 求證諸角之正切乃為次之方程式之根
$$qx^3-px^2+(1+q)x-p=0.$$
若 $p=\frac{1}{8}(3+\sqrt{3})$, 而 $q=\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)$, 求證此三角形之諸角為 45°, 60°, 75°.

100. 在某定點觀測一船之位置. 始見其向爲北偏西 α_1. 十分鐘後船在其正北又十分鐘後則其向爲北偏東 α_2. 今設此船之速率與航向不變, 求證其航向爲北偏東 θ 而

$$\tan\theta=\frac{2\sin\alpha_1\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

101 平地上一小山其形如球之一部. 於山足則山坡之傾角爲 a, 又於離足 a 處平地上之一點視線所及最高處之仰角爲 β. 求證此山之高爲

$$\frac{a\sin\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

102. 設三角形 ABC 之垂足爲 D, E, F 而 $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ 則爲諸三角形 DEF, AEF, BFD, CDE 內切圓之半徑, 求證 $r^3\rho=2R\rho\rho_2\rho_3$.

103. 一圓形地之圓心爲 O; 繫馬於其邊緣上之一點 A, 則此馬於圓場中食草之地乃爲全部之 $\frac{1}{n}$: 設 B 爲邊緣上所及最遠之點, 又 $\angle AOB=\theta$, 求證

$$\sin\theta+(\pi-\theta)\cos\theta=\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi.$$

104. 解方程式

$$\theta=\tan^{-1}(2\tan\theta)-\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}$$

105. 設
$$\cos^2\theta=\frac{m^2-1}{3} \text{ 又 } \tan^3\frac{\theta}{2}=\tan\alpha,$$

求證
$$\cos^{\frac{2}{3}}\alpha+\sin^{\frac{2}{3}}\alpha=\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

106. 一人於平地上行一距離 a, 折而他向復行一距離 a, 惟與前向所成之角爲 α. 如是者凡 n 次而折向之法如前, 求證其終點與出發點之距離爲

$$\frac{a\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

又此距離與初向所成之角爲 $(n-1)\frac{\alpha}{2}$.

107. 求證

$$\frac{\tan(\gamma-\delta)}{\tan(\alpha-\beta)}+\frac{\tan(\delta-\beta)}{\tan(\alpha-\gamma)}+\frac{\tan(\beta-\gamma)}{\tan(\alpha-\delta)}+\frac{\tan(\gamma-\delta)\tan(\delta-\beta)\tan(\beta-\gamma)}{\tan(\alpha-\beta)\tan(\alpha-\gamma)\tan(\alpha-\delta)}=0.$$

108. 平地上 A, B 兩點相距 1000 呎. 一流星斜墜過其頂, 當過 A 頂時由

B處測得之仰角為$50°$，過B頂時由A處測得之仰角為$40°$.求此星着地處離A之呎數.

109. 山坡為一平面，對於平地之斜度為θ. 兩人由山麓之兩點循直徑上行，而過此兩徑之垂面則互相垂直.今兩人各行距離a與b後復相會，求證相會處之高h合於下方程式之根之較小者

$$(2-\sin^2\theta)h^4-(a^2+b^2)h^2+a^2b^2\sin^2\theta=0.$$

110. 求證，設$\alpha, \beta, \gamma, \delta$為次之方程式之諸根

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=3\tan 3\theta,$$

而無兩正切相等者，則

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta=0.$$

111. 設$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$為次之方程式之諸根

$$\sin(\theta+\alpha)=k\sin 2\theta,$$

而無兩角之差為2π之倍數者，求證

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=(2n+1)\pi.$$

112. 用射影法，證明第243節之定理.

113. 證次之恆等式

(i) $$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2};$$

(ii) $$\cos^2\alpha\sin 2(\beta-\gamma)+\cos^2\beta\sin 2(\gamma-\alpha)+\cos^2\gamma\sin 2(\alpha-\beta)$$
$$+2\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)=0.$$

114. 求證方程式

$$\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=c$$

之根在0與2π之間者，若$c^2<8$則有二個，若$c^2>8$則有四個.

115. 若三角形ABC之外角平分線成三角形$A_1B_1C_1$，又三角形$A_1B_1C_1$之外角平分線成三角形$A_2B_2C_2$，如是演進至n次，求證角A_n為

$$\frac{\pi}{3}+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\left(A-\frac{\pi}{3}\right),$$

而其極終成為等邊三角形.

116. 由一定點A測其北向之山峯P得仰角為α. 一高於A h之小山，由其頂B測得P之仰角為β，而A之向在其南偏西δ，P之向在A之北γ. 求證P與A高度之差為

$$\frac{h\tan\alpha\sin\gamma}{\tan\alpha\sin\gamma-\tan\beta\sin\delta}.$$

117. 一人於山麓之某處見半哩外有一物與測處之高度相同.其人沿山坡上行200碼後測得此物之俯角爲$2°30'$,又此視線與其人所行之路成$75°$之角.求此路與平地所成之角,準確至分爲止.

118. 切於三角形a邊之旁切圓對於此三角形之內切圓圓心及其他兩旁切圓圓心所張之角各爲$2\phi_1$, $2\phi_2$, $2\phi_3$,求證

$$\sin\phi_1\sin\phi_2\sin\phi_3=\frac{r_1^2}{16R^2}.$$

119. 一n邊之正多邊形,其一邊切於一直線.以此邊之一端爲樞而轉動至第二邊復切於此直線,依次進行轉過一周;求證此多邊形每角之行程其長爲$\frac{4\pi R}{n}\cot\frac{\pi}{2n}$,但$R$爲多邊形外接圓之半徑.

次證各角行程所成之弓形其面積之總和爲$2\pi R^2$.

120. 由次之諸式消去θ與ϕ

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1,$$

$$\frac{x}{a}\cos\phi+\frac{y}{b}\sin\phi=1,$$

$$\frac{\cos\theta\cos\phi}{a^2}+\frac{\sin\theta\sin\phi}{b^2}=0.$$

121. 若 $S=\sin\theta+2\sin2\theta+3\sin3\theta+\cdots\cdots+n\sin n\theta,$

又 $C=\cos\theta+2\cos2\theta+3\cos3\theta+\cdots\cdots+n\cos n\theta,$

求證 $4\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot S=(n+1)\sin n\theta-n\sin(n+1)\theta,$

又 $4\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot C=-1+(n+1)\cos n\theta-n\cos(n+1)\theta.$

122. 求證

$$\frac{\sin(\theta-\gamma-\alpha)\sin(\theta-\alpha-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)}+\frac{\sin(\theta-\alpha-\beta)\sin(\theta-\beta-\gamma)}{\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\beta)}$$
$$+\frac{\sin(\theta-\beta-\gamma)\sin(\theta-\gamma-\alpha)}{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\gamma)}=1.$$

123. 若 $(\sin^2\phi-\sin^2\psi)\cot\theta+(\sin^2\psi-\sin^2\theta)\cot\phi+(\sin^2\theta-\sin^2\phi)\cot\psi=0,$ 則任何兩角之差或三角之總和爲π之倍數.

124. 平地上一小山,形如球之一部而底爲一圓.與底相距a與b之兩點測此山視線所及之最高處之仰角各爲θ與ϕ.求證此山之高爲

$$2\left\{\frac{\left(b\cot\frac{\phi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(a\cot\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\cot\frac{\phi}{2}-\cot\frac{\theta}{2}}\right\}^2$$

125. 塔上建一圓頂形如半球,復於其上設一十字架;於地上之某處測得十字架之仰角爲α,球之仰角爲β;向塔前行一距離a,測球之仰角爲γ,且恰見十字架之頂;求證圓頂之中心其高爲

$$\frac{a\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)}\cdot\frac{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\gamma}{\cos\beta-\cos\gamma}.$$

126. 若$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=1$,求證三角形$ABC$之外接圓與其九點圓相交成直角.

127. 半徑爲R之圓周上之一點O,以O爲圓心,$\frac{3R}{2}$爲半徑復作一圓.兩圓相交成新月形之一部於其中置一半徑$\frac{1}{8}R$之小圓.此小圓與半徑R之圓相切而移動,而移動之範圍則限於新月形內;求證小圓圓心移動時所成之弧其長爲$\frac{7}{12}\pi R$.

128. 消去以下方程式中之x與y

$$\sin x+\sin y=a,$$
$$\cos x+\cos y=b,$$
$$\tan x+\tan y=c,$$

129. 設以u_n表$2\cos n\theta$,求證

$$u_{n+1}=u_1u_2-u_{n-1}.$$

由是證明

$$2\cos 7\theta=u_1^7-7u_1^5+14u_1^3-7u_1.$$

130. 試以作圖法證明方程式$\cos x=x$ (x以弳表之)之近似解答爲0.74,且證此爲惟一之實數解答.

次,設y爲甚小之值,令$x=0.74+y$,求證x更近似之值爲0.7391,於是所得之角準確至一分者爲42°21′.

131. 求證

$$\frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}\sin 2(x-\alpha)+\text{兩相似項}=0.$$

132. 設ABC爲一三角形,求證

$$\sin^3A\cos(B-C)+\sin^3B\cos(C-A)+\sin^3C\cos(A-B)=3\sin A\sin B\sin C.$$

133. 一人見兩物於其適西之直線上.其人北向行一距離c則見此兩物所張之角爲α;復北行一距離c則角爲β.求證兩物間之距離爲

$$\frac{3c}{2\cot\beta-\cot\alpha}.$$

134. 山坡之平面與地平成傾斜角 α；過坡上一山徑之垂直面與過最大斜坡之垂直面所夾之角爲 β；試證此山徑對於地平之傾斜角爲 $\tan^{-1}(\tan\alpha\cos\beta)$.

設此山徑與斜度最大之山徑所夾之角爲 γ，試證山徑之傾斜角爲

$$\sin^{-1}(\sin\alpha\cos\gamma).$$

135. 試證連結三角形 ABC 內心與外心之線與一邊 BC 所夾之角爲

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos B+\cos C-1}{\sin B\sim\sin C}\right).$$

136. 消去下式中之 θ

$$x\sin\theta-y\cos\theta=-\sin 4\theta,$$

$$x\cos\theta+y\sin\theta=\tfrac{5}{2}-\tfrac{3}{2}\cos 4\theta.$$

137. 一正多邊形內接於一圓；求證由任何一點(不必在同一平面上)至多邊形諸角距離平方之算術均數等於此點與圓最近及最遠兩距離平方之算術均數.

138. 三點 A, B, C 在一直線上而 AB 與 BC 之比爲 m 比 n. 過 A, B, C 作諸平行線 AX, BY, CZ. 今有一點 P 在線 AX 而另一點 R 在 CZ 上移動則在 t 時內 AP 之距離爲 $a_1+a_2\sin(nt+\alpha)$. 又 CR 則爲 $c_1+c_2\sin(nt+\gamma)$, 若 PR 與 BY 相交於 Q, 試以同樣方式表 BQ 之長.

139. 求證

$$\sin(\beta-\gamma)\sin 3\alpha+\sin(\gamma-\alpha)\sin 3\beta+\sin(\alpha-\beta)\sin 3\gamma$$
$$=4\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

140. 求證 $$\sin(\beta-\gamma)\cos 3\alpha+\sin(\gamma-\alpha)\cos 3\beta+\sin(\alpha-\beta)\cos 3\gamma$$
$$=4\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

141. 若 $$\sin(x+3\alpha)\sin(\beta-\gamma)+\sin(x+3\beta)\sin(\gamma-\alpha)+\sin(x+3\gamma)\sin(\alpha-\beta)$$
$$=4\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta),$$

求證 $$x+\alpha+\beta+\gamma=(2n+\tfrac{1}{2})\pi.$$

142. 若 $A+B+C=2\pi$, 求證

$$\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C=3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}.$$

143. 平地上有一圓,圓心內斜植一竿. 一人繞圓而走. 此竿對於其人所張最大與最小之角爲 α 與 β；而於此兩地中點所張之角則爲 θ. 若此人之高度不計，求證

$$\tan\theta=\sqrt{\sin^2(\alpha-\beta)+4\sin^2\alpha\sin^2\beta}/\sin(\alpha+\beta).$$

144 斜面上之兩線所夾之角爲γ,此兩線對於水平面之傾斜各爲α與β;求證斜面對於水平面之傾斜爲

$$\sin^{-1}\{\operatorname{cosec}\gamma\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}\},$$

又斜面上傾斜度最大之線與兩線中之一線所夾之角爲

$$\tan^{-1}\left\{\frac{\sin\beta-\sin\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}\right\}.$$

145 求證三角形ABC之垂心與外心之連結線與BC所夾之角爲

$$\tan^{-1}\left(\frac{3-\tan B\tan C}{\tan B-\tan C}\right).$$

146 消去下方程式中之θ

$$\frac{\cos(\alpha-3\theta)}{\cos^3\theta}=\frac{\sin(\alpha-3\theta)}{\sin^3\theta}=m.$$

147. $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$爲一正多邊形外切於一圓心爲$O$半徑爲$a$之圓. P爲一點與O之距離爲c. 求證由P至多邊形各邊垂直距離平方之和爲

$$n\left(a^2+\frac{c^2}{2}\right).$$

148. AB爲某圓之弧其所對之圓心角爲2θ, 又由A與B所作之切線相交於T. 試用作圖法求θ之值準確至度爲止.

(i) 當TA, TB與弧AB間所包圍之面積等於圓之面積時.

(ii) 當TA, TB兩切線之和與弧AB及弦AB之和相等時.

149. 在任何三角形內求證次之關係

(i) $\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C$

$$=3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2};$$

(ii) $\sin^4 A+\sin^4 B+\sin^4 C$

$$=\tfrac{3}{2}+2\cos A\cos B\cos C+\tfrac{1}{2}\cos 2A\cos 2B\cos 2C.$$

150. 由一點O見一人循山徑上山, 當此人經過P, Q兩點時, 測得$OP/OQ=\lambda$, 又角$POQ=\gamma$. 若P與Q之仰角由O所測得者爲α與β, 求證此山徑對於平地之傾斜角ϕ乃以下式表之:

$$\sin^2\phi=(\lambda\sin\alpha-\sin\beta)^2/(\lambda^2-2\lambda\cos\gamma+1).$$

151. 由次之二方程式消去θ.

$$x+a=a(2\cos\theta-\cos 2\theta),$$
$$y=a(2\sin\theta-\sin 2\theta).$$

152. 於一正多邊形所在之平面上之一點作多邊形各邊之垂線, 求證諸垂線平方之和等於由諸垂足至中心距離平方之和.

153. 繫馬於矩形地中心之木栓上，矩形之長與闊爲 $2a$ 與 a；若此馬齧草所及當全地之半.求證馬繮之長約爲 $0.583a$.

154. 求證方程式：

$$\sin(\theta+\lambda)=a\sin 2\theta+b.$$

有四根.其和爲兩直角之奇數倍.

155. 若 θ 爲正量之銳角.求證當 θ 逐漸增大時，則 $\frac{\theta}{\sin\theta}$ 逐漸增大，而 $\frac{\theta}{\tan\theta}$ 逐漸減小.

156. 設 $\sin x=m\sin y$，而 m 之值大於 1，求證當 x 由 0 增大至於直角，則 $\frac{\tan x}{\tan y}$ 亦依次增大，而其值則當 x 爲 0 與直角時，乃爲 m 與 ∞.

157. 求證

$$\sin^3(\beta-\gamma)\sin^3(\alpha-\delta)+\sin^3(\gamma-\alpha)\sin^3(\beta-\delta)+\sin^3(\alpha-\beta)\sin^3(\gamma-\delta)$$
$$=3\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\delta)\sin(\gamma-\delta).$$

158. 求證

$$\Sigma\cos(3\alpha-\beta-\gamma-\delta)=4\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\cos(\alpha+\gamma-\beta-\delta)\cos(\alpha+\delta-\beta-\gamma).$$

159. 求證

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$+\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)=0.$$

160. 求證

$$\sin^2\alpha\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\delta)\sin(\delta-\beta)$$
$$-\sin^2\beta\sin(\gamma-\delta)\sin(\delta-\alpha)\sin(\alpha-\gamma)$$
$$+\sin^2\gamma\sin(\delta-\alpha)\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\delta)$$
$$-\sin\ \delta\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=0.$$

161. 簡化式 $PQ-RS$，已知

$$P=x\cos(\alpha+\beta)+y\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta),$$
$$Q=x\cos(\gamma+\delta)+y\sin(\gamma+\delta)-\cos(\gamma-\delta),$$
$$R=x\cos(\alpha+\gamma)+y\sin(\alpha+\gamma)-\cos(\alpha-\gamma),$$
$$S=x\cos(\beta+\delta)+y\sin(\beta+\delta)-\cos(\beta-\delta).$$

162. 設 $a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\gamma,$

$$b^2+c^2-2bc\cos\beta=a^2+d^2-2ad\cos\delta,$$

又 $ab\sin\alpha+cd\sin\gamma=bc\sin\beta+ad\sin\delta,$

求證 $\cos(\alpha+\gamma)=\cos(\beta+\delta).$

163. 試證方程式

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\theta, & 0, & 0 \\ \cos\theta, & 1, & \cos\alpha, & \cos\beta \\ 0, & \cos\alpha, & 1, & \cos\gamma \\ 0, & \cos\beta & \cos\gamma, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

之解爲

$$\theta = n\pi + (-1)^n \sin^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\gamma}\right\}.$$

164. 在任何三角形 ABC 內,試證

$$\cos mA + \cos mB + \cos mC - 1 = \pm 4\sin\frac{mA}{2}\sin\frac{mB}{2}\sin\frac{mC}{2}$$

號之正負則視 m 屬於下式之何種而定

$$4n+1 \text{ 或 } 4n+3.$$

165. 求證,在任何三角形 ABC 內,

(i) $a^3\cos B\cos C + b^3\cos C\cos A + c^3\cos A\cos B$

$$= abc(1 - 2\cos A\cos B\cos C).$$

(ii) $\sin 2mA + \sin 2mB + \sin 2mC$

$$= (-1)^{m+1}\cdot 4\sin mA\sin mB\sin mC.$$

166. 設 A, B, C 爲一三角形之諸角,求證

$$\tan^{-1}(\cot B\cot C) + \tan^{-1}(\cot C\cot A) + \tan^{-1}(\cot A\cot B)$$

$$= \tan^{-1}\left\{1 + \frac{8\cos A\cos B\cos C}{\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C}\right\}.$$

167. 過三角形 ABC 之諸頂點作直線與 AB, BC, CA 所成之角皆爲 α;求證如是所成之三角形之邊長與原三角形邊長之比如

$$\cos\alpha - \sin\alpha(\cot A + \cot B + \cot C) : 1.$$

168. 一圓柱形之塔冠以一圓錐體;由平地上之一點測得塔頂最近處及錐頂之仰角各爲 α 與 β,向塔前行一距離 a 則仰角乃爲 γ 與 δ. 求證塔頂與錐頂之高各爲

$$a\sin\alpha\sin\gamma\operatorname{cosec}(\gamma-\alpha) \text{ 與 } a\sin\beta\sin\delta\operatorname{cosec}(\delta-\beta),$$

又塔之直徑爲

$$2a\sin\beta\cos\delta\operatorname{cosec}(\delta-\beta) - 2a\sin\alpha\cos\gamma\operatorname{cosec}(\gamma-\alpha).$$

169. 欲求地下煤層之斜度,於平地上三角形 ABC 之三頂點 A, B, C 各鑿一孔至煤層爲止,其深各爲 $x, x+y, x+z$. 設煤層爲一平面,求證其對於地面之傾斜角 θ 合於次之方程式

$$\tan\theta\sin A=\sqrt{\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{2yz}{bc}\cos A}.$$

170. 由山之兩側鑿通一隧道,其起訖兩點爲A與B. 由此兩點測得遠處一點C之仰角爲α與β,而角ACB爲γ;又已知AC與BC之長爲a與 . 求證B高於A之垂直距離h爲$a\sin\alpha-b\sin\beta$,其水平距離k爲$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$,又$AB$與地平之傾斜角爲$\sin^{-1}\frac{h}{k}$而與線$AC$所成之角爲$\sin^{-1}\frac{b\sin\gamma}{k}$.

171. 一人由山麓走上一傾斜度爲ϕ之山坡,其向與上最大斜坡之向所夾之角爲γ;其人既行過一距離m後回看遠處在與山徑同一垂面內平地上之一點得俯角爲α;復前行一距離n,則得同一點之俯角爲β. 求證山坡之傾斜度ϕ合於次之方程式

$$\left\{\frac{m}{n}(\cot\beta-\cot\alpha)+\cot\beta\right\}^2+1=\operatorname{cosec}^2\phi\sec^2\lambda.$$

172 A, B, C爲山之三峯而A爲其最低者,又B與A高度之差爲h. 由A測B與C所得之仰角爲β與γ,又過AB, AC之兩垂面其所夾之角爲θ. 由B測得過B , BC兩垂面所夾之角爲ϕ. 求證C與A高度之差爲

$$h\cot B\tan\gamma\sin\phi\operatorname{cosec}(\theta+\phi)$$

173 平面之山坡上有兩山徑BC與CA,其長度爲a與b,又其向上之斜率皆爲m之1 (卽平地每距m呎升高1呎)而由B至A則斜率爲p之1. 求證山坡對於地平之傾斜角α合於次之方程式

$$4ab\cot^2\alpha=(a+b)^2p^2-(a\sim b)^2m^2.$$

174. 求證三角形之內切圓圓心至九點圓圓心之距離爲$\frac{R}{2}-r$.

由是導出 Feuerbach 定理,卽任何三角形之內切圓與九點圓相切.

175 已知四邊形$ABCD$各邊之長爲$AB=3$呎, $BC=4$呎, $CD=5$呎, $DA=6$呎,又其面積爲$3\sqrt{3}+9$平方呎. 求證合於此條件之四邊形有二,其一之角B爲60°其他則爲$\cos^{-1}\left[\frac{-1-42\sqrt{3}}{74}\right]$卽約爲$175^\circ15'$.

176 由以下諸方程式消去α, β, γ

$$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0,$$
$$a\sin\alpha+b\sin\beta+c\sin\gamma=0,$$
$$a\sec\alpha+b\sec\beta+c\sec\gamma=0.$$

177 消去下式中之θ

$$\tan(\theta-\alpha)+\tan(\theta-\beta)=x,$$
$$\cot(\theta-\alpha)+\cot(\theta-\beta)=y.$$

178. 消去下式中之 ϕ

$$x\cos 3\phi+y\sin 3\phi=b\cos\phi,$$
$$x\sin 3\phi+y\cos 3\phi=b\cos\left(\phi+\frac{\pi}{6}\right).$$

179. 兩正多邊形，其邊數爲 m 與 n，內切於半徑爲 a 之同一圓；求證由一多邊形之角至他一多邊形之角所作諸弦平方之和爲 $2mna^2$.

180. 石塊 n 塊以等距離排列於一圓周上；試求以諸石塊俱移置圓心與堆於一石之位置其所費勞力之比；且證明，如石塊之數無限增大，則此比將爲 $\pi:4$.

181. 用作圖，或其他方法，求方程式

$$x+2\tan x=\frac{\pi}{2}$$

在 0 與 2π 間所有之根之數目，且求其最大根之近似值.

試查表以證實所得之結果.

182. 試求合於以下方程式中最小之實根

$$\tan x-x=\tfrac{1}{2}.$$

183. 作函數 $\sin^2 x$ 之圖形且由此證明如 α 爲一小正角，則方程式

$$x-\alpha=\frac{\pi}{2}\sin^2 x$$

有三實根.

184. 求證方程式

$$ax+b=\tan\frac{\pi cx}{2}$$

之較大之實根其近似值得以下式表之

$$x=\frac{m}{c}-\frac{2}{\pi(am+bc)},$$

式中之 m 爲任何奇數整數之大者.

185. 用作圖法，求以下方程式最小之正根及負根之近似數值

$$x^2\sin\pi x=1.$$

試證以上方程式之根之大者則其近似值得以下式表之，式中之 n 則爲一大數.

$$x=n+\frac{(-1)^n}{n^2\pi}.$$

186. 求證方程式

$$\tan x=2x$$

之根在 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間者約爲 1.1654，已知 $\tan 1.1519=2.2460$ 又 $\tan 1.1694=2.3559$.

187. 若 θ 爲一銳角，求證 $\tan\theta$ 常大於下式

$$\theta+\frac{\theta^3}{3}+\frac{\theta^5}{15}+\cdots\cdots+\frac{\theta^{2n+1}}{4^n-1}+\cdots\cdots.$$

188. 求證，當 a, b, α, β 皆爲常數時，方程式

$$\cos(2\theta-\alpha)+a\cos(\theta-\beta)+b=0$$

之根有四；命此不同之四根爲 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$，試證

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\alpha$$

爲 π 之偶數倍.

189. 合於方程式

$$\cot(\theta+\alpha)+\cot(\theta+\beta)+\cot(\theta+\gamma)=\operatorname{cosec}(\theta+\alpha)+\operatorname{cosec}(\theta+\beta)+\operatorname{cosec}(\theta+\gamma)$$

中 θ 之値有三，爲 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$，其中無兩角之差爲四直角之倍數者.求證

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\alpha+\beta+\gamma$$

爲 2π 之倍數

190. 求證方程式

$$A\sin^3 x+B\cos^3 x+C=0$$

應有不同之六根，無兩根之差爲 2π 者，又此諸根和之半之正切爲 $-\frac{A}{B}$.

191. 求證方程式

$$\tan(\theta-\alpha)+\sec(\theta-\beta)=\cot\gamma$$

有四根(其中無相差爲 2π 之倍數者)合於次之關係式

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=2(n\pi+\alpha+\beta-\gamma).$$

192. 若 α, β, γ 爲以下方程式中 x 之三値

$$\sin 2\theta(a\sin x+b\cos x)=\sin 2x(a\sin\theta+b\cos\theta)$$

此三値無所區別，且與 θ 相差非 2π 之倍數，求證

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\theta}{2}+1=0.$$

193. 求證若 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 爲以下方程式中不相同之四根

$$a\cos 2\theta+b\sin 2\theta+c\cos\theta+d=0,$$

則
$$\Sigma\sin\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_1}{2}=0.$$

194. 求證次之關係式

$$\cos^{-1}x_0=\frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots\cdots\text{無窮積}}$$

已知其中任一因子 x_r 與其次一因子之關係爲

$$x_{r+1}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+x_r)}.$$

195 設 a, b 爲正量，又設

$$a_1=\frac{a+b}{2},\quad b_1=\sqrt{a_1 b},\quad a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\quad b_2=\sqrt{a_2 b_1},$$

其他依次類推，求證

$$a_\infty=b_\infty=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\cos^{-1}\frac{a}{b}}.$$

并證由是可求 π 之值。

196 若方程式

$$a_1+a_2\sin x+a_3\cos x+a_4\sin 2x+a_5\cos 2x=0$$

適合於 x 之任何值，而諸常數 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ 等均與 x 無關，則諸常數之值皆爲零.

197. 求證設 α, β, γ 間每兩角之差皆非 π 之倍數，又設

$$\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{\cos(\beta+\theta)}{\sin(\gamma+\alpha)},$$

則上之分數式又各等於 $\dfrac{\cos(\gamma+\theta)}{\sin(\alpha+\beta)}$，且等於 ± 1.

198 求證 $\dfrac{\cot 3x}{\cot x}$ 之值決不在 3 與 $\frac{1}{3}$ 之間.

199. 設 A, B, C 爲一銳角三角形之諸角，求證

$$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C>3\sqrt{3}.$$

200. 一木板之斷面爲矩形，其闊爲 b 而厚爲 t. 今將此板由一船甲板上之圓孔納入艙中，令 b 之一邊常保持水平之位置. 已知甲板之厚爲 h，而孔之直徑爲 d. 求證此板穿過甲板時對於水平所成之最小角爲 $\alpha+\beta$，而 α 與 β 則合於下之方程式者

$$\frac{\sin\alpha}{t}=\frac{\sin\beta}{h}=\frac{1}{\sqrt{d^2+h^2-b^2}}.$$

201. 於斜面上作兩直線，此兩直線對於水平之傾斜角爲 α 與 β；又過此兩直線所作垂直面之夾角爲 γ. 求證斜面對於水平之傾斜角 θ 以下式表之

$$\sin\gamma\tan\theta=\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta-2\tan\alpha\tan\beta\cos\gamma},$$

又過兩直線中第一線之垂直面與過最大斜坡之垂直面所夾之角爲

$$\tan^{-1}\left(\frac{\tan\alpha\cos\gamma-\tan\beta}{\tan\alpha\sin\gamma}\right).$$

202. 兩屋面對於水平之傾斜角爲 α 與 β；而兩脊之交角爲 γ. 兩屋面相接處爲一斜溝，此溝對於水平之斜傾角爲 θ_1，又過此溝所作之垂面與

過第一屋脊之垂面之交角為θ_2. 求證

$$\tan\theta_1=\frac{\sin\gamma}{\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\beta+2\cot\alpha\cot\beta\cos\gamma}},$$

又
$$\tan\theta_2=\frac{\cot\alpha\sin\gamma}{\cot\alpha\cos\gamma+\cot\beta}.$$

203 一面南之斜面其傾斜角為α，於其上直立一竿其高為h；當太陽在南偏西β而仰角為γ時，求證在斜面上竿影之長為

$$\frac{h\cos\gamma}{\sin(\theta+\gamma)},\text{ 而 }\tan\theta=\tan\alpha\cos\beta.$$

204 一面西之山坡其傾斜角為γ.一人見坡上之一塔在其東；其人取東偏北α之向上坡行l呎至與塔底同高處，測得塔頂之仰角為β 求證塔之高為

$$\frac{l\tan\beta\cos\gamma}{\sqrt{\cot^2\alpha+\cos^2\gamma}}.$$

205. 一面南之山坡其斜度為15°；求證坡上北東向之道路與平地之傾斜角為10°44′，又傾斜角為5°之路其方向應為東偏北19°3′.

206. 一人依斜率最大之向上山，既行1000碼則升高150呎.其人折而向右復行1000碼更升高100呎.設斜率最大之向為北向，求(i)第二行程之方向(ii)由終點視出發點之方向.

答　　案

習題一（第 4 頁）

1. $\frac{2}{3}$.
2. $\frac{301}{360}$.
3. $\frac{45560}{64800}$.
4. $1\frac{9}{20}$.
5. $2\frac{3661}{10800}$.
6. $4\frac{388}{3375}$.
7. $33^{g}33^{\backprime}33.\dot{3}^{\backprime\backprime}$.
8. 90^{g}.
9. $153^{g}88^{\backprime}88.\dot{8}^{\backprime\backprime}$.
10. $39^{g}76^{\backprime}38.\dot{8}^{\backprime\backprime}$.
11. $261^{g}34^{\backprime}44.\dot{4}^{\backprime\backprime}$.
12. $528^{g}3^{\backprime}33.\dot{3}^{\backprime\backprime}$.
13. $1\frac{1}{5}$ 直角；$108°$.
14. 0.453524 直角；$40°49'1.776''$.
15. 0.394536 直角；$35°30'29.664''$.
16. 2.550809 直角；$229°34'22.116''$.
17. 7.590005 直角；$683°6'1.62''$.
28. $5°33'20''$；$66°40'$.
29. $47\frac{7}{19}°$；$42\frac{12}{19}°$.
31. $33°20'$；$10°48'$.

習題二（第 7 頁）

1. 25132.74 哩（約）.
2. 19.28 哩/時（約）.
3. 12.85 哩（約）.
4. 3.14159 …吋.
5. 581,194,640 哩（約）.
6. 14.994 哩（約）.

習題三（第 10 頁）

1. $60°$.
2. $240°$.
3. $1800°$.
4. $57°17'44.8''$.
5. $458°21'58.4''$.
6. 160^{g}.
7. $233^{g}33^{\backprime}33.\dot{3}^{\backprime\backprime}$.
8. 2000^{g}.
9. $\frac{\pi}{3}$.
10. $\frac{221}{360}\pi$.
11. $\frac{703}{720}\pi$.
12. $\frac{3557}{13500}\pi$.

13. $\frac{79}{36}\pi$.
14. $\frac{3}{10}\pi$.
15. $\frac{1103}{2000}\pi$.
16. 1.726268π
17. $81°$; $9°$.
18. $24°$, $60°$ $96°$.
19. $132°15'12.6''$.
20. $30°$, $60°$, $90°$.
21. $\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 與 $\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}$ 弳.
22. (1) $\frac{3\pi}{5}$; $108°$. (2) $\frac{5\pi}{7}$; $128\frac{4}{7}°$. (3) $\frac{3\pi}{4}$; $135°$.
(4) $\frac{5\pi}{6}$; $150°$. (5) $\frac{15\pi}{17}$; $158\frac{14}{17}°$.
23. 8 與 4.
24. 10 與 8.
25. 6 與 8.
26. $\frac{\pi}{3}$.
27. (1) $\frac{5\pi^c}{12}=75°=83\frac{1}{3}^g$;
(2) $\frac{7\pi^c}{18}=70°=77\frac{7}{9}^g$; (3) $\frac{5\pi^c}{8}=112\frac{1}{2}°=125^g$.
28. (1) 在 4 時 $7\frac{7}{11}$ 分及 4 時 36 分; (2) 在 7 時 $28\frac{4}{11}$ 分及 7 時 48 分.

習 題 四 (第 13 頁)

[取 $\pi=3.14159\cdots\cdots$ 又 $\frac{1}{\pi}=0.31831\cdots\cdots$]

1. $20.454°$ (約).
2. $\frac{3}{5}$ 弳; $34°22'38.9''$.
3. 68.75 吋 (約).
4. 0.05236 吋 (約).
5. 24.555 吋 (約).
6. $1°25'57''$ (約).
7. 3959.8 哩 (約).
8. π 呎 $=3.14159$ 呎.
9. 5 : 4.
10. 3.1416.
11. $\frac{4\pi}{35}$, $\frac{9\pi}{35}$, $\frac{14\pi}{35}$, $\frac{19\pi}{35}$, $\frac{24\pi}{35}$ 弳.
12. $65°24'30.4''$.
13. 2062.65 呎 (約).
14. 1.5359 呎 (約).
15. 262.6 呎 (約).
16. 32142.9 呎 (約).
17. 38197.2 呎 (約).
18. $19.099'$.
19. 1105.8 哩.
20. 238,833 哩.
21. 21600; 6875.5 (約).
22. 4.78×10^{11} 哩.

習 題 六 (第 25 頁)

5. $\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{15}}$, 等等.
6. $\frac{12}{5}$; $\frac{8}{13}$.
7. $\frac{11}{60}$; $\frac{60}{61}$; $\frac{61}{60}$.

8. $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{3}$.　　9. $\frac{40}{9}$; $\frac{41}{40}$.　　10. $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{5}{3}$.

11. $\frac{3}{4}$.　　12. $\frac{15}{17}$; $\frac{17}{8}$.　　13. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

14. 1 或 $\frac{3}{5}$.　　15. $\frac{3}{5}$ 或 $\frac{5}{13}$.　　16. $\frac{5}{13}$.

17. $\frac{12}{13}$.　　18. $\frac{1}{\sqrt{8}}$ 或 1.　　19. $\frac{1}{2}$.

20. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.　　21. $1+\sqrt{2}$.　　22. $\frac{2x(x+1)}{2x^2+2x+1}$; $\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}$.

習題八(第 36 頁)

1. 34.64…呎; 20 呎.　　2. 160 呎.　　3 225 呎.
4. 136.6 呎.　　5. 146.4…呎.　　6. 367.9…碼; 454.3…碼.
7. 86.6…呎.　　8. 115.359…呎.　　9. 87.846…呎.
10. 43.3…呎; 離一柱 75 呎.　　11. 94.641…呎; 54.641…呎.
12. 1.366…哩.　　13. 30°.　　15. 13.8564 哩/時.
16 25.98 呎; 70.98…呎; 85.98…呎.　　17. $32\sqrt{5}$ =71.55…) 呎.
19. 10 哩/時.　　20. 86.6…碼.　　21. 692.8…碼.

習題九(第 50 頁)

1. $\frac{2250}{6289}\pi$, $\frac{2500}{6289}\pi$, $\frac{81}{331}\pi$ 徑.　　2. 68°45′17.8″.

4. $\frac{2xy}{x^2+y^2}$; $\frac{2xy}{x^2-y^2}$.　　8 $\frac{1}{\tan^4 A}-\tan^4 A$.

9. $\theta=60°$.　　10. $1\frac{1}{2}$ 分鐘.

習題十(第 61 頁)

4. −0.366…; 2.3094….　　5. −1.366…; −2.3094.
6. 0; 2.　　7. 1.4142…; −2.
8 1.366…; −2.3094….　　9. 45° 與 135°.
10. 120° 與 240°.　　11. 135° 與 315°.
12. 150° 與 330°.　　13. 150° 與 210°.
14. 210° 與 330°.　　15. −cos 25°.

16. $\sin 6°$. 17. $-\tan 43°$. 18. $\sin 12°$.
19. $\sin 17°$. 20. $-\cot 24°$. 21. $\cos 33°$.
22. $-\cos 28°$. 23. $\cot 25°$. 24. $\cos 30°$.
25. $\cot 26°$. 26. $-\operatorname{cosec} 23°$. 27. $-\operatorname{cosec} 36°$.
28. 負. 29. 負. 30. 正. 31. 零.
32. 正. 33. 正. 34. 正. 35. 負.
36. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 與 $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ 與 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

習題十一(第 68 頁)

1. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. 2. $n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{3}$ 3. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$.
4. $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$. 5. $2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$. 6. $2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$.
7. $n\pi+\frac{\pi}{3}$. 8. $n\pi+\frac{3\pi}{4}$. 9. $n\pi+\frac{\pi}{4}$.
10. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 11. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$. 12. $n\pi\pm\frac{\pi}{2}$.
13. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$. 14. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$. 15 $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.
16. $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. 17. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$. 18. $(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}$.
19. $2n\pi-\frac{\pi}{6}$. 20. $105°$ 與 $45°$; $\left(n+\frac{m}{2}\right)\pi\pm\frac{\pi}{2}+(-1)^m\frac{\pi}{12}$, 與 $\left(\frac{m}{2}-n\right)\pi\mp\frac{\pi}{6}+(-1)^m\frac{\pi}{12}$, 但 m 與 n 爲任何之整數.
21. $187\frac{1}{2}°$ 與 $142\frac{1}{2}°$; $\left(n+\frac{m}{2}\right)\pi+\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{12}$ 與 $\left(n-\frac{m}{2}\right)\pi-\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{12}$.
22. (1) $60°$ 與 $120°$; (2) $120°$ 與 $240°$; (3) $30°$ 與 $210°$.
23. (1) 2; (2) 1; (3) 1; (4) 1; (5) 1.

習題十二(第 70 頁)

1. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. 2. $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.
3. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$. 4. $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{10}$ 或 $n\pi-(-1)^n\frac{3\pi}{10}$ (第 120 節).

6. $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

7. $\theta=n\pi+\frac{\pi}{4}$ 或 $n\pi+\frac{\pi}{3}$.

8. $\theta=n\pi+\frac{2\pi}{3}$ 或 $n\pi+\frac{5\pi}{6}$.

9. $\tan\theta=\frac{1}{a}$ 或 $-\frac{1}{b}$.

10. $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

11. $\theta=2n\pi$ 或 $2n\pi+\frac{\pi}{4}$.

12. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

13. $n\pi$ 或 $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

14. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 或 $2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

15. $\sin\theta=1$ 或 $-\frac{1}{3}$.

16. $\frac{n\pi}{5}+(-1)^n\frac{\pi}{20}$.

17. $\frac{n\pi}{4}$ 或 $\frac{(2n+1)\pi}{10}$.

18. $2n\pi$ 或 $\frac{(2n+1)\pi}{5}$.

19. $\frac{2r\pi}{m-n}$ 或 $\frac{2r\pi}{m+n}$.

20. $\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{5}$ 或 $2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

21. $2n\pi$ 或 $\frac{2n\pi}{9}$.

22. $\left(2r+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{m+n}$ 或 $\left(2r-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{m-n}$.

23. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{9}$.

24. $\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+1}$.

25. $\frac{n\pi}{4}\pm\sqrt{1+\frac{n^2\pi^2}{16}}$.

26. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

27. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{3}\pm\frac{a}{3}$.

28. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}$.

29. $\frac{n\pi}{4}\pm\frac{a}{3}$.

30. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

31. $\left(r+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{m-n}$.

32. $\tan\theta=\frac{2n+1\pm\sqrt{4n^2+4n-15}}{4}$, 而 $n>1$ 或 <-2.

33. $\theta=\left(m+\frac{n}{2}\right)\pi\pm\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{12}$ $\phi=\left(m-\frac{n}{2}\right)\pi\pm\frac{\pi}{6}-(-1)^n\frac{\pi}{12}$.

34. $\frac{1}{5}\left[(6m-4n)\pi\pm\frac{\pi}{2}\mp\frac{2\pi}{3}\right]$; $\frac{1}{5}\left[(6n-4m)\pi\pm\pi\mp\frac{\pi}{3}\right]$.

35. 45° 與 60°.

36. $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$.

37. $\pm\frac{1}{3}\sqrt{5}$; $\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

習題十三 (第 76 頁)

1. $-\frac{133}{205}$; $-\frac{84}{205}$.

2. $\frac{1596}{3445}$, $\frac{3444}{3445}$.

3. $\frac{220}{221}$, $\frac{171}{221}$, $\frac{220}{21}$.

習題十四（第 80 頁）

30. $2\sin(\theta+n\phi)\sin\frac{3\phi}{2}$.

31. $2\sin(\theta+n\phi)\cos\frac{\phi}{2}$.

習題十五（第 82 頁）

1. $\cos 2\theta-\cos 12\theta$.

2. $\sin 12\theta-\sin 2\theta$

3 $\cos 14\theta+\cos 8\theta$.

4. $\cos 12^\circ-\cos 120^\circ$.

習題十六（第 85 頁）

1. 3; $\frac{9}{13}$.

3. 1.

習題十七（第 91 頁）

1. (1) $\pm\frac{24}{25}$; (2) $\pm\frac{120}{169}$; (3) $\frac{2016}{4225}$.

2. (1) $\frac{161}{289}$; (2) $-\frac{7}{25}$; (3) $\frac{119}{169}$

3. a.

習題十八（第 102 頁）

1. $\frac{\pm2\sqrt{2}\pm\sqrt{3}}{6}$; $\frac{\pm7\sqrt{3}\pm4\sqrt{2}}{18}$.

2. $\pm\frac{13}{12}$; $\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$ 或 $\pm\frac{\sqrt{13}}{3}$; $\frac{169}{120}$.

3. $\frac{16}{305}$; $\frac{49}{305}$.

4. $\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

5. $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{3}{4}$.

6. $\pm\frac{3}{4}$.

7. $\frac{\sqrt{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}$; $\sqrt{2}-1$; $-(\sqrt{2}+1)+\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

8. $\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$.

23. $+$ 與 $-$.

24. $-$ 與 $-$.

25. $-$ 與 $-$.

29. (1) $2n\pi+\frac{\pi}{4}$ 與 $2n\pi+\frac{3\pi}{4}$; (2) $2n\pi+\frac{3\pi}{4}$ 與 $2n\pi+\frac{5\pi}{4}$;

(3) $2n\pi-\frac{\pi}{4}$ 與 $2n\pi+\frac{\pi}{4}$; (4) $2n\pi+\frac{\pi}{4}$ 與 $2n\pi+\frac{3\pi}{4}$.

30. (1) $2n\pi-\frac{\pi}{4}$ 與 $2n\pi+\frac{\pi}{4}$;　(2) $2n\pi+\frac{3\pi}{4}$ 與 $2n\pi+\frac{5\pi}{4}$;

(3) $2n\pi+\frac{5\pi}{4}$ 與 $2n\pi+\frac{7\pi}{4}$.

習題十九（第 108 頁）

12. 此角之正弦等於 $2\sin 18°$.　13. $\frac{n\pi}{8}$ 或 $\left(2n\pm\frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{8}$.

習題二十一（第 119 頁）

1. $\frac{n\pi}{4}$ 或 $\frac{1}{3}\left(2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\right)$.　2. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}$ 或 $\left(2n\pm\frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{3}$.

3. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$ 或 $2n\pi$.　4. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{3}$ 或 $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

5. $\frac{2n\pi}{3}$ 或 $\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi$ 或 $\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi$.

6. $\frac{n\pi}{3}$ 或 $\left(2n\pm\frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{4}$.　7. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$ 或 $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.

8. $\frac{n\pi}{3}$ 或 $\left(n\pm\frac{1}{3}\right)\pi$.　9. $2n\pi$ 或 $\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\pi$.

10. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ 或 $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{10}$ 或 $n\pi-(-1)^n\frac{3\pi}{10}$.

11. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{8}$ 或 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$.　12. $m\pi$ 或 $\frac{1}{n-1}\left[m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{6}\right]$.

13. $2m\pi$ 或 $\frac{4m\pi}{n\pm1}$.　14. $\frac{2r\pi}{m+n}$ 或 $(2r+1)\frac{\pi}{m-n}$.

15. $(2r+1)\frac{\pi}{m\pm n}$.　16. $m\pi$ 或 $\frac{m\pi}{n-1}$ 或 $\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$.

17. $2n\pi-\frac{\pi}{2}$; $\frac{1}{5}\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)$.　18. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$.

19 $2n\pi+\frac{\pi}{4}$.　20. $n\pi+\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{4}$.

21. $2n\pi+\frac{\pi}{4}\pm A$.　22. $-21°48'+n\cdot 180°+(-1)^n[68°12']$.

23 $2n\cdot 180°+78°58'$; $2n\cdot 180°+27°18'$.

24 $n\cdot 180°+45°$; $n\cdot 180°+26°34'$.　25. $2n\pi+\frac{2\pi}{3}$.

26. $2n\pi$ 或 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$.

27. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 或 $2n\pi-\frac{\pi}{3}$.

28. $2n\pi+\frac{\pi}{6}$.

29. $n\pi$.

30. $\sin\theta=\frac{\pm\sqrt{17}-1}{8}$.

31. $\cos\theta=\frac{\sqrt{17}-3}{4}$.

32. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 或 $n\pi+\frac{\pi}{2}$.

33. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$; $2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

34. $\left(n+\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{2}$.

35. $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

36. $n\pi+\frac{\pi}{4}$.

37. $\theta=\frac{n\pi}{2}$ 或 $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$; 又 $\theta=n\pi\pm\frac{\alpha}{2}$, 而 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

38. $\left(n+\frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{3}$.

39. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

習題二十三(第 133 頁)

以下 8–13 各題,及其他習題中類似各題之解答,皆由七位表得之。如用書末所附之五位表,則答數未必盡能符合。

1. $\bar{1}.90309$; $\bar{3}.4771213$; $\bar{2}.0334239$; $\bar{1}.4650389$.

2. 0.1553361; $\bar{2}.1241781$; 0.5388340; $\bar{1}.0759623$.

3. 2; $\bar{2}$; 0; $\bar{4}$; $\bar{2}$; 0; 3.

4. 0.312936.

5. 1.32057; 5.88453; 0.461791.

6. (1) 21; (2) 13; (3) 30; (4) 小數點下第 7 位; (5) 小數點下第 21 位; (6) 小數點下第 32 位.

7. (1) $\frac{4b}{c-b-a}$; (2) $\frac{a+2b}{4c-3b-2a}$; (3) $\frac{4a+7b}{a+3b-2c}$;

(4) $\frac{2b(2a-b)}{5ab+3ac-2b^2-bc}$ 與 $\frac{2ab}{5ab+3ac-2b^2-bc}$;

式中之 $a=\log 2$, $b=\log 3$, $c=\log 7$.

8. 0.22221.

9. 8.6415.

10. 9.6192.

11. 1.6389.

12. 4.7162.

13. 0.41431.

習題二十四(第 143 頁)

1. 4.5527375; 1.5527394.

2. 4.7689529; $\bar{3}.7689502$.

3. 478.475; 0.004784777.

4. 2.583674; 0.0258362.

5. (1) 4.7204815; (2) 2.7220462; (3) $\bar{4}.7240079$;
(4) 5273.63; (5) 0.05296726; (6) 5.26064.

6. 0.6870417.　　7. 43°23′45″.

8. 0.8455104; 0.8454509.　　9. 32°16′35″; 32°16′21″.

10. 4.1203060; 4.1218748.　　11. 4.3993263; 4.3976823.

12. 13°8′47″.　　13. 9.9147334.　　14. 34°44′27″.

15. 9.5254497; 71°27′43″.　　16. 10.0229414.

17. 18°27′17″.　　18. 36°52′12″.

習題二十五(第 146 頁)

1. 13°27′31″.　　2. 22°1′28″.

3. 1.0997340; 65°24′12.5″　　4. 9.6198509; 22°36′28″.

5. 10°15′34″.　　6. 44°55′55″.

7. (1) 9.7279043; (2) 9.9270857; (3) 10.1958917; (4) 10.0757907;
(5) 10.2001337; (6) 10.0725027; (7) 9.7245162.

8. (1) 57°30′24″; (2) 57°31′58″; (3) 32°31′15″; (4) 57°6′39″.

9. 0.5373602.

10. (1) $\cos(x-y)\sec x\sec y$; (2) $\cos(x+y)\sec x\sec y$;
(3) $\cos(x-y)\operatorname{cosec} x\sec y$; (4) $\cos(x+y)\operatorname{cosec} x\sec y$;
(5) $\tan^2 x$; (6) $\tan x\tan y$.

習題二十六(第 153 頁)

1. $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{7}$.　　2. $\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{5\sqrt{41}}$; $\frac{40}{41}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{496}{1025}$.

3. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, 1.　　4. $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{5}$, ∞.　　5. $\frac{4}{5}$, $\frac{56}{65}$, $\frac{12}{13}$

6. $\frac{7}{41}$, $\frac{287}{816}$.　　7. 60°, 45°, 75°.

習題二十七(第 158 頁)

23. $16\frac{4}{5}$ 呎.　　25. $\frac{2}{5}$.　　28. $\frac{313}{338}$.

習題二十八(第 163 頁)

1. 186.60… 與 193.18.
2. $26°33'54''$; $63°26'6''$; $10\sqrt{5}$ 呎.
3. $48°35'25''$; $36°52'12''$; $94°32'23''$;
4. $75°$ 與 $15°$.

習題二十九(第 165 頁)

1. $90°$.
2. $30°$.
4. $120°$.
5. $45°$, $120°$, $15°$.
6. $45°$, $60°$, $75°$.
7. $58°59'33''$.
8. $77°19'11''$.
9. $76°39'5''$.
10. $104°28'39''$.
11. $56°15'4''$, $59°51'10''$, $63°53'46''$.
12. $38°56'33''$, $47°41'7''$, $93°22'20''$.
13. $130°42'20.5''$, $23°27'8.5''$, $25°50'31''$.

習題三十(第 169 頁)

1. $63°13'2''$; $43°58'28''$.
2. $117°38'45''$; $27°38'45''$.
3. $8\sqrt{7}$ 呎; $79°6'24''$; $60°$; $40°53'36''$.
4. $87°27'25.5''$; $32°32'34.5''$
5. $40°53'36''$; $19°6'24''$; $\sqrt{7}:2$.
6. $71°44'30''$; $48°15'30''$.
7. $78°17'40''$; $49°36'20''$.
8. $108°12'26''$; $49°27'34''$.
9. $A=45°$; $B=75°$; $c=\sqrt{6}$.
10. $\sqrt{6}$; $15°$; $105°$.
11. 0.8965.
14. 40 碼; $120°$; $30°$.
15. 7.589467; $108°26'6''$; $18°26'6''$; $53°7'48''$.
16. 2.529823.
17. 226.87; $73°34'50''$; $39°45'10''$.
18. $A=83°7'39''$; $B=42°16'21''$; $c=199.099$.
19. $B=110°48'15''$; $C=26°56'15''$; $a=93.5192$.
20. $73°1'51''$ 與 $48°41'9''$.
21. $88°30'1''$ 與 $33°30'59''$.

習題三十一(第 176 頁)

1. 無解.
2. $B_1=30°$, $C_1=105°$, $b_1=\sqrt{2}$; $B_2=60°$, $C_2=75°$, $b_2=\sqrt{6}$.
3. $B_1=15°$, $C_1=135°$, $b_1=50(\sqrt{6}-\sqrt{2})=51.76$;
   $B_2=105°$, $C_2=45°$, $b_2=50(\sqrt{6}+\sqrt{2})=193.185$.
5. $4\sqrt{3}\pm2\sqrt{5}$, 卽 11.4 與 2.46.
6. $100\sqrt{3}$; 爲直角三角形.
8. $34°27'$ 與 $100°33'$.
9. 17.1 或 3.68.

10. (1) 爲直角三角形又 $B=60°$.

(2) $b_1=60.3893$, $B_1=8°41'$, $C_1=141°19'$; $B_2=111°19'$, $C_2=38°41'$.

11. 65°59′ 與 41°56′12″.

12. 每時 5.988…哩與 2.67‥ 哩.

13. 63°2′12″ 或 116°57′48″.

14. 62°31′23″ 與 102°17′37″, 或 117°28′37″ 及 47°20′23″.

15. 5926.61.

習題三十二 (第 178 頁)

1. 7 : 9 : 11.

4. 79.063.

5. 1 哩; 1.2197…哩.

7. 20.976…呎.

8. 6.857 呎與 5.438 呎.

9. 404.435 呎.

10. 233.2883 碼.

11. 2229 碼.

習題三十三 (第 182 頁)

1. 100 呎高與 50 呎闊; 25 呎.

2. 25.78…碼.

3. 33.07…呎; $17\frac{1}{2}$ 呎.

4. 18.3…呎.

5. 120 呎.

6. $h \tan \alpha \cot \beta$.

7. 1939.2…呎.

8. 100 呎.

9. 61.22…呎.

10. $100\sqrt[3]{2}(=118.9)$ 呎.

15. $PQ=BP=BQ=1000$ 呎; $AP=500(\sqrt{6}-\sqrt{2})=517.6$ 呎;

$AQ=1000\sqrt{2}=1414.2$ 呎.

16. 0.3212 哩.

17. 0.17365 哩; 0.98481 哩.

18. 119.286 呎.

19. 132.266 呎.

20. 235.8 碼.

21. 1.4277 哩.

22. 125.32 呎.

習題三十四 (第 187 頁)

3. 20 呎; 40 呎.

4. $l \operatorname{cosec} \gamma$, γ 爲太陽之高度; $\sin \gamma=\frac{2}{7}$, 由是 $\gamma=16°36'$.

5. 3.732…哩; 每時 12.342…哩其向爲南偏東 69°54′ 則此角之正切爲 $\sqrt{3}+1$.

6. 每時 10.24… 哩.

7. 16.39 哩; 14.697… 哩.

8. 2.39 哩; 1.366 哩.

9. 正切爲 $\frac{2}{3}$ 之角,卽 33°41′; $\frac{9}{52}$ 時.

13. $c \sin \beta \operatorname{cosec}(\alpha+\beta)$; $c \sin \alpha \sin \beta \operatorname{cosec}(\alpha+\beta)$.

14. 9 碼; 2 碼.

16. $\frac{a}{3}$; $\frac{2a}{3}$.

20. 與帽壁相離 $\frac{375}{\sqrt{7}}$(=141.74) 呎.

21. $c(1-\sin\alpha)\sec\alpha$.

22. 114.4123 呎.

24. 1069.75 呎.

26. 正切為 $\frac{1}{2}$ 之角,卽 26°34′.

29. 45°.

32. 18°26′6″.

34. $\tan\alpha\sec\beta:1$.

37. 91.896 呎.

38. 1960.95 碼.

39. 2.45832 哩.

40. 333.49 呎.

41. 3.88 哩.

42. 492.4 與 459.17 碼.

43. 1.438 哩.

45. 每分 251.13 米.

習題三十五(第 192 頁)

1. 84.
2. 216.
3. 630.
4. 3720.
5. 270.
6. 117096.
7. 1470.
8. 1.183….
12. 35 碼; 26 碼.
13. 14.9… 吋.
14. 5, 7, 8 呎.
15. 120°.
17. 45° 與 105°; 135° 與 15°.
18. 17.1064…平方吋.

習題三十六(第 199 頁)

3. $8\frac{1}{8}$, $1\frac{1}{2}$, 8, 2, 與 24.

習題三十七(第 208 頁)

35. 為等圓半徑之 2.1547… 倍或 0.1547 倍.

39. $A_n=\frac{\pi}{3}+(-1)^n\cdot 2^n\cdot\left(A-\frac{\pi}{3}\right)$, …….

40. 61°59′36″; 8.83 呎.

習題三十八(第 216 頁)

1. (1) $3\sqrt{105}$(=30.74) 平方呎; (2) $10\sqrt{7}$(=26.46) 平方呎.

3. $1\frac{5}{9}$ 與 $2\frac{1}{2}$ 呎.

習題三十九(第 219 頁)

1. 77.98 吋.　　2. 0.5359.

3. (1) 1.720…平方呎; (2) 2.598…平方呎; (3) 4.8284…平方呎; (4) 7.694…平方呎; (5) 11.196…平方呎.

4. 1.8866…平方呎.　　5. 3.3136…平方呎.

6. $2+\sqrt{2}:4$; $\sqrt{2+\sqrt{2}}:2$.　　12. 3.

14. 6.　　15. 9.　　16. 20 與 10.

17. 邊數各爲 6 與 5, 12 與 8, 18 與 10, 22 與 11, 27 與 12, 42 與 14, 54 與 15, 72 與 16, 102 與 17, 162 與 18, 342 與 19 等等.

19. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$.

習題四十(第 226 頁)

1. 0.00204.	2. 0.00007.	3. 0.00029.
4. 0.99999.	5. 25783.10077.	6. 1.0000011.
7. 34′23″.	8. 28°40′37″.	9. 39′42″.
10. 2°33′44″.	11. 114.59… 吋.	

習題四十一(第 228 頁)

1. 435.77 平方呎.　　2. 4.9087…平方呎.

3. 127°19′26″.　　4. 6 平方呎.

5. 11 吋(約).　　6. 0.00045 吋(約).

7. $\frac{2}{3}\pi r$.

習題四十二(第 230 頁)

1. 1°8′45″.　　2. 17.23 哩.　　3. 0.61 哩; 1°48′(約).

8. 約爲 61800 米=約爲 $38\frac{1}{2}$ 哩.　　9. 3960 哩.

習題四十三(第 236 頁)

28. $\pm\sqrt{\sin 2\beta}$.　　29. $\frac{1}{6}$.　　30. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

31. $4\sqrt{\frac{3}{7}}$. 32. $\frac{1}{4}$. 33. $n\pi$ 或 $n\pi+\frac{\pi}{4}$.

34. $\sqrt{3}$. 35. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 36. $\sqrt{3}$ 或 $-(2+\sqrt{3})$.

37. $\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$. 38. n 或 n^2-n+1.

39. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$. 40. 13.

41. x 爲次之方程式之根

$$x^4-x^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+abcd=0.$$

42. $x=ab$.

43. $ab\div[\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-1}]$. 44. $\frac{a-b}{1+ab}$.

習題四十四(第 245 頁)

1. $\frac{1}{2}\sin 2n\theta \operatorname{cosec}\theta$

2. $\cos\frac{3n-1}{4}A\sin\frac{3n}{4}A\operatorname{cosec}\frac{3}{4}A$. 6. $\frac{1}{2}$.

7. $\sin[\alpha+(n-\frac{1}{2})\beta]\sin n\beta\sec\frac{\beta}{2}$. 8. $-\sin\frac{n\theta}{n-2}$.

9. $\sin 2nx(\cos 2nx+\sin 2nx)(\cos x+\sin x)\operatorname{cosec} 2x$.

10. $\frac{1}{4}[(n+1)\sin 2\alpha-\sin(2n+2)\alpha]\operatorname{cosec}\alpha$.

11. $\frac{1}{2}\sin(2n+2)\alpha\cdot\sin 2n\alpha\operatorname{cosec}\alpha$.

12. $\frac{n}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cos(n+3)\alpha\sin n\alpha\operatorname{cosec}\alpha$.

13. $\frac{\cos(2n\alpha-\alpha)\cos(n+1)\beta-\cos(2n\alpha+\alpha)\cos n\beta+\cos\alpha(1-\cos\beta)}{2(\cos\beta-\cos 2\alpha)}$.

14. $\frac{1}{4}[(2n+1)\sin\alpha-\sin(2n+1)\alpha]\operatorname{cosec}\alpha$.

15. $\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\cos[2\theta+(n-1)\alpha]\sin n\alpha\operatorname{cosec}\alpha$.

16. $\frac{3}{4}\sin\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\sin 3\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{3n\alpha}{2}\operatorname{cosec}\frac{3\alpha}{2}$.

17. $\frac{1}{8}[3n-4\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha\operatorname{cosec}\alpha+\cos(2n+2)\alpha\sin 2n\alpha\operatorname{cosec}2\alpha]$.

18. $\frac{1}{8}[3n+4\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha\operatorname{cosec}\alpha+\cos(2n+2)\alpha\sin 2n\alpha\operatorname{cosec}2\alpha]$.

19. $\frac{1}{4}\sin\frac{n\theta}{2}\left[\cos\frac{n-1}{2}\theta+\cos\frac{n+3}{2}\theta+\cos\frac{n+7}{2}\theta\right]\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}$

$$+\frac{1}{4}\sin\frac{3n\theta}{2}\cos\frac{3n+9}{2}\theta\operatorname{cosec}\frac{3\theta}{2}.$$

20. $-\frac{1}{2}\sin(2\alpha+2n\beta)\sin 2n\beta\sec\beta.$

習題四十五(第 249 頁)

1. $a^2+b^2=c^2+d^2.$

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta).$

3. $a(2c^2-d^2)=bcd.$　　4. $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{2b(a+b)}.$

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$　　6. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=a+b.$

7. $(p^2+1)^2+2q(p^2+1)(p+q)=4(p+q)^2.$

8. $(x^2+y^2-b^2)^2=a^2[(x+b)^2+y^2].$

11. $a^2+b^2=2+2\cos\alpha.$　　12. $xy=(y-x)\tan\alpha.$

13. $a^2(a-c)(a-d)=b^2(b-c)(b-d).$　　14 $8bc=a\{4b^2+(b^2-c^2)^2\}.$

15. $x(c^2-a^2-b^2)=y\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$

16. $b^2[x(b^2-a^2)+a(x^2+b^2)]^2=4a^4[b^2x^2+a^2y^2].$

總複習題(第 256 頁)

4 142 呎(約); 4°30′ (約)　　5, 41, 50, 21 呎.

6. $\sin(\beta-\alpha)=\pm\sqrt{1-b}\sqrt{1-a^2}\mp a\sqrt{b}.$

9. $n\pi+38°7'27''.$　　10. $\left(n+\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{3}.$　　14. $7-3\sqrt{5}:2.$

21. (i) $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\alpha+\beta}{2}$, 或 $\tan\theta=(1-\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta)\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$

(ii) $\theta=n\pi$ 或 $\left(n\pm\frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{3}.$

22. 51°19′; 78°28′; 108°13′.　　23. 1298 呎(約); 南偏東 13°31′,

28. 80 呎.　　30. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x$; $\frac{x+y}{1-xy}.$

31. $(l^2+m^2)(1-n)=2m(1+n).$　　32. 兩根.

35. $\left(m\pm\frac{1}{12}\right)\pi$; $\left(n\pm\frac{1}{6}\right)\pi.$　　47. $(\lambda^2-1)^3=27\lambda^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha.$

48. 1.39 弳$=79°30'$ (約).　　49. $\sin^2(\beta-\gamma)\sec^2(\alpha-\beta)\sec^2(\alpha-\gamma)$.

52. 東偏北 $11°12'$.　　54. 其值有六.

58. $\frac{1}{3}\left[n\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta-\gamma\right]$.　　59. 72.77 呎.

62. $c\sqrt{2a-b}=a\sqrt{2a}-(a-b)\sqrt{b}$.　　63. $118\frac{1}{2}°$.

64. $-1°19'$, $+28\frac{1}{2}'$, $+50\frac{1}{2}'$ (約).　　69. $\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)}}$.

73. $\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)+\cos(\alpha-\beta+\gamma-\delta)+\cos(\alpha-\beta-\gamma+\delta)$
$-\cos(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)-\cos(\alpha-\beta+\gamma+\delta)-\cos(\alpha+\beta-\gamma+\delta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma-\delta)$.

76. $66°19\frac{1}{2}'$ (約).　　80. $x=-2.4531$.

82. $\tan\theta=2\pm\sqrt{11}$ 或 $2\pm\sqrt{3}$; $\tan\phi=2\mp\sqrt{11}$ 或 $2\mp\sqrt{3}$.

84. 16.47 哩

87. $27y^2=x^2(9-8x^2)^2$.　　94. $2a^3+c=3a(1+b)$.

95. $\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+3)\theta}{2}[1+2\cos 2\theta]\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}-\sin\frac{3n+9}{2}\theta\sin\frac{3n\theta}{2}\operatorname{cosec}\frac{3\theta}{2}$.

96. 2.55 弳$=146°6'$ (約).　　104. $\tan\theta=0,\ 1,\ -1,\ -2$.

108. 2379 呎.　　117. $11°27'$.

120. $x^2+y^2=a^2+b^2$.　　128. $(a^2+b^2)^2-4a^2=\frac{8ab}{c}$.

136. $(x+y)^{\frac{2}{5}}+(x-y)^{\frac{2}{5}}=2$.

138. $\dfrac{mc_1+na_1+\sqrt{m^2c_2^2+n^2a_2^2+2mna_2c_2\cos(\alpha-\gamma)}\,\sin(nt+\beta)}{m+n}$,

但 $\tan\beta=(mc_2\sin\gamma+na_2\sin\alpha)\div(mc_2\cos\gamma+na_2\cos\alpha)$.

146. $m^2+m\cos\alpha=2$.　　148. $77\frac{1}{3}°$; $63\frac{1}{2}°$.

151. $(x^2+y^2+2ax)^2=4a^2(x^2+y^2)$.　　161. $(1-x^2-y^2)\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\gamma)$.

176. $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2=0$

177. $x^2y^2-4xy=(x+y)^2\tan^2(\beta-\alpha)$.

178. $b^2(\sqrt{3}x-y)^2\{6(x^2-y^2)-b^2\}=8(x^2-y^2)^3+4b^2(x^2-y^2)$.

181. 其根有3; $299°$ (約).

182. 0.98 弳$=56°9'$ (約).　　185. 2.07 與 -1.23.

206. 北偏東 $48°13'31''$; 南偏西 $24°7'18''$

附　錄

對　數　表
正弦眞數表
正切眞數表
正弦對數表
正切對數表
弧度量法表

表 I

對數表

	0	1	2	3		5	6	7	8	9	平均差數								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743	42	83	125	166	208	248	290	331	373
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555	38	76	114	152	190	227	265	302	340
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059	35	70	105	140	175	209	243	278	313
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301	32	65	97	129	162	193	225	258	290
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319	30	60	90	120	150	180	210	240	270
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789	26	53	79	105	132	158	184	210	237
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285	25	50	74	99	124	149	174	199	223
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646	23	47	70	94	117	141	164	188	211
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885	22	45	67	89	111	134	156	178	201
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	42	64	85	106	127	148	170	191
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	40	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	19	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	36	53	71	89	107	124	142	160
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	106	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	42	55	69	83	97	110	125
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	86	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	52	63	73	84	94
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65902	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	75	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	37	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	62	71	80
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	[illegible]	[illegible]	79
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	51	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

對數表

											平均差數								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	62	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	45	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	57	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	35	42	49	56	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	42	49	56	63
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	21	27	34	41	48	55	62
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	39	45	52	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	13	19	25	31	37	44	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	18	25	31	37	43	49	55
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	30	36	42	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	18	23	29	35	41	47	52
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	6	12	17	23	29	35	40	46	52
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	6	11	17	22	28	34	39	45	50
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	6	11	17	22	28	33	39	44	50
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	5	11	16	22	27	33	38	44	49
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	5	11	16	22	27	32	38	43	49
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	5	11	16	21	27	32	37	43	48
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	5	11	16	21	26	32	37	42	47
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376	5	10	16	21	26	31	36	42	47
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	5	10	15	21	26	31	36	41	46
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	5	10	15	20	25	30	36	41	46
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	5	10	15	20	25	30	35	40	45
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	5	10	15	20	25	30	35	40	45
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	5	10	15	20	25	29	34	39	44
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	5	10	15	19	24	29	34	39	44
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	5	10	14	19	24	29	34	38	43
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	5	9	14	19	24	29	33	38	43
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	5	9	14	19	24	28	33	38	42
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	5	9	14	19	23	28	33	37	42
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	5	9	14	18	23	28	32	37	41
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	5	9	14	18	23	27	32	36	41
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	5	9	14	18	23	27	32	36	41
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	4	9	13	18	22	27	31	36	40
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	4	9	13	18	22	26	31	35	40
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	4	9	13	17	22	26	30	35	39
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

表 II

正弦眞數表

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		平均差數 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01454	0·01745	89°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
1°	·01745	·02036	·02327	·02618	·02908	·03199	·03490	88°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
2°	·03490	·03781	·04071	·04362	·04653	·04943	·05234	87°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
3°	·05234	·05524	·05814	·06105	·06395	·06685	·06976	86°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
4°	·06976	·07266	·07556	·07846	·08136	·08426	·08716	85°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
5°	0·08716	0·09005	0·09295	0·09585	0·09874	0·10164	0·10453	84°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
6°	·10453	·10742	·11031	·11320	·11609	·11898	·12187	83°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
7°	·12187	·12476	·12764	·13053	·13341	·13629	·13917	82°	29	58	87	116	145	173	202	231	260
8°	·13917	·14205	·14493	·14781	·15069	·15356	·15643	81°	29	58	86	115	144	173	202	230	259
9°	·15643	·15931	·16218	·16505	·16792	·17078	·17365	80°	29	57	86	115	144	172	201	230	258
10°	0·17365	0·17651	0·17937	0·18224	0·18509	0·18795	0·19081	79°	29	57	86	115	144	172	201	229	258
11°	·19081	·19366	·19652	·19937	·20222	·20507	·20791	78°	29	57	86	114	143	171	200	228	257
12°	·20791	·21076	·21360	·21644	·21928	·22212	·22495	77°	28	57	85	114	142	170	199	227	256
13°	·22495	·22778	·23062	·23345	·23627	·23910	·24192	76°	28	57	85	113	141	170	198	226	255
14°	·24192	·24474	·24756	·25038	·25320	·25601	·25882	75°	28	56	85	113	141	169	197	226	254
15°	0·25882	0·26163	0·26443	0·26724	0·27004	0·27284	0·27564	74°	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16°	·27564	·27843	·28123	·28402	·28680	·28959	·29237	73°	28	56	84	112	140	167	195	223	251
17°	·29237	·29515	·29793	·30071	·30348	·30625	·30902	72°	28	56	83	111	139	166	194	222	250
18°	·30902	·31178	·31454	·31730	·32006	·32282	·32557	71°	28	55	83	110	138	166	193	221	248
19°	·32557	·32832	·33106	·33381	·33655	·33929	·34202	70°	27	55	82	110	137	164	192	219	247
20°	0·34202	0·34475	0·34748	0·35021	0·35293	0·35565	0·35837	69°	27	55	82	109	137	164	191	218	246
21°	·35837	·36108	·36379	·36650	·36921	·37191	·37461	68°	27	54	81	108	136	163	190	217	244
22°	·37461	·37730	·37999	·38268	·38537	·38805	·39073	67°	27	54	81	108	135	161	188	215	242
23°	·39073	·39341	·39608	·39875	·40142	·40408	·40674	66°	27	53	80	107	134	160	187	214	240
24°	·40674	·40939	·41204	·41469	·41734	·41998	·42262	65°	27	53	80	106	133	159	186	212	238
25°	0·42262	0·42525	0·42788	0·43051	0·43313	0·43575	0·43837	64°	26	52	79	105	131	157	184	210	236
26°	·43837	·44098	·44359	·44620	·44880	·45140	·45399	63°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
27°	·45399	·45658	·45917	·46175	·46433	·46690	·46947	62°	26	52	77	103	129	155	181	206	232
28°	·46947	·47204	·47460	·47716	·47971	·48226	·48481	61°	26	51	77	102	128	154	179	204	230
29°	·46481	·48735	·48989	·49242	·49495	·49748	·50000	60°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
30°	0·50000	0·50252	0·50503	0·50754	0·51004	0·51254	0·51504	59°	25	50	75	100	125	150	175	200	225
31°	·51504	·51753	·52002	·52250	·52498	·52745	·52992	58°	25	50	74	99	124	149	174	198	223
32°	·52992	·53238	·53484	·53730	·53975	·54220	·54464	57°	25	49	74	98	123	147	172	196	221
33°	·54464	·54708	·54951	·55194	·55436	·55678	·55919	56°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
34°	·55919	·56160	·56401	·56641	·56880	·57119	·57358	55°	24	48	72	96	120	144	168	192	216
35°	0·57358	0·57596	0·57833	0·58070	0·58307	0·58543	0·58779	54°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
36°	·58779	·59014	·59248	·59482	·59716	·59949	·60182	53°	23	47	70	94	117	140	164	187	211
37°	·60182	·60414	·60645	·60876	·61107	·61337	·61566	52°	23	46	70	92	116	139	162	185	208
38°	·61566	·61795	·62024	·62251	·62479	·62706	·62932	51°	23	46	68	91	114	137	159	182	205
39°	·62932	·63158	·63383	·63608	·63832	·64056	·64279	50°	22	45	67	90	112	135	157	179	202
40°	0·64279	0·64501	0·64723	0·64945	0·65166	0·65386	0·65606	49°	22	44	66	88	111	133	155	177	199
41°	·65606	·65825	·66044	·66262	·66480	·66697	·66913	48°	22	44	65	87	109	131	153	174	196
42°	·66913	·67129	·67344	·67559	·67773	·67987	·68200	47°	21	43	64	86	107	129	150	172	193
43°	·68200	·68412	·68624	·68835	·69046	·69256	·69466	46°	21	42	63	84	106	127	148	169	190
44°	·69466	·69675	·69883	·70091	·70298	·70505	·70711	45°	21	42	62	83	104	124	145	166	187
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

餘弦眞數表

正弦眞數表

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									平均差數								
45°	0·70711	0·70916	0·71121	0·71325	0·71529	0·71732	0·71934	44°	20	41	61	82	102	122	143	163	184
46°	·71934	·72136	72337	·72537	72737	·72937	·73135	43°	20	40	60	80	100	120	140	160	180
47°	·73135	·73333	·73531	·73728	·73924	·74120	·74314	42°	20	39	59	78	98	118	138	157	177
48°	·74314	·74509	·74703	·74896	·75088	·75280	·75471	41°	19	39	58	77	96	116	135	154	173
49°	·75471	·75661	·75851	·76041	·76229	·76417	76604	40°	19	38	57	76	75	113	132	151	170
50°	0·76604	0·76791	0·76977	0·77162	0·77347	0·77531	0·77715	39°	19	37	56	74	93	111	130	148	167
51°	·77715	·77897	·78079	·78261	·78442	·78622	·78801	38°	18	36	54	72	91	109	127	145	163
52°	·78801	·78980	·79158	·79335	·79512	·79688	·79864	37°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
53°	·79864	·80038	·80212	·80386	·80558	·80730	·80902	36°	17	35	52	69	87	104	121	138	156
54°	·80902	·81072	·81242	·81412	·81580	·81748	·81915	35°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
55°	0·81915	0·82082	0·82248	0·82413	0·82577	0·82741	0·82904	34°	16	33	49	66	82	99	115	132	148
56°	·82904	·83066	·83228	·83389	·83549	·83708	·83867	33°	16	32	48	64	80	96	112	128	144
57°	·83867	·84025	·84182	·84339	·84495	·84650	·84805	32°	16	31	47	63	78	94	110	125	141
58°	·84805	·84959	·85112	·85264	·85416	·85567	·85717	31°	15	30	46	61	76	91	106	122	137
59°	·85717	·85866	·86015	·86163	·86310	·86457	·86603	30°	15	30	44	59	74	89	103	118	133
60°	0·86603	0·86748	0·86892	0·87036	0·87178	0·87321	0·87462	29°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
61°	·87462	·87603	·87743	·87882	·88020	·88158	·88295	28°	14	28	42	55	69	83	97	111	125
62°	·88295	·88431	·88566	·88701	·88835	·88968	·89101	27°	13	27	40	54	67	81	94	108	121
63°	·89101	·89232	·89363	·89493	·89623	·89752	·89879	26°	13	26	39	52	65	78	91	104	117
64°	·89879	·90007	·90133	·90259	·90383	·90507	·90631	25°	13	25	38	50	63	75	88	100	113
65°	0·90631	0·90753	0·90875	0·90996	0·91116	0·91236	0·91355	24°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
66°	·91355	·91472	·91590	·91706	·91822	·91936	·92050	23°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
67°	·92050	·92164	·92276	·92388	·92499	·92609	·92718	22°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
68°	·92718	·92827	·92935	·93042	·93148	·93253	·93358	21°	11	21	32	43	53	64	75	85	96
69°	·93358	·93462	·93565	·93667	·93769	·93869	·93969	20°	10	20	31	41	51	61	71	81	92
70°	0·93969	0·94068	0·94167	0·94264	0·94361	0·94457	0·94552	19°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
71°	·94552	·94646	·94740	·94832	·94924	·95015	·95106	18°	9	18	28	37	46	55	64	74	83
72°	·95106	·95195	·95284	·95372	·95459	·95545	·95630	17°	9	18	26	35	44	52	61	70	79
73°	·95630	·95715	·95799	·95882	·95964	·96046	·96126	16°	8	17	25	33	41	50	58	66	74
74°	·96126	·96206	·96285	·96363	·96440	·96517	·96593	15°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
75°	0·96593	0·96667	0·96742	0·96815	0·96887	0·96959	0·97030	14°	7	15	22	29	36	44	51	58	65
76°	·97030	·97100	·97169	·97237	·97304	·97371	·97437	13°	7	14	20	27	34	41	47	54	61
77°	·97437	·97502	·97566	·97630	·97692	·97754	·97815	12°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
78°	·97815	·97875	·97934	·97992	·98050	·98107	·98163	11°	6	12	17	23	29	35	41	46	52
79°	·98163	·98218	·98272	·98325	·98378	·98430	·98481	10°	5	11	16	21	27	32	37	42	48
80°	0·98481	0·98531	0·98580	0·98629	0·98676	0·98723	0·98769	9°	5	10	14	19	24	29	34	38	43
81°	·98769	·98814	·98858	·98902	·98944	·98986	·99027	8°	4	9	13	17	22	26	30	34	39
82°	·99027	·99067	·99106	·99144	·99182	·99219	·99255	7°	4	8	11	15	19	23	27	30	34
83°	·99255	·99290	·99324	·99357	·99390	·99421	·99452	6°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
84°	·99452	·99482	·99511	·99540	·99567	·99594	·99619	5°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
85°	0·99619	0·99644	0·99668	0·99692	0·99714	0·99736	0·99756	4°	2	5	7	9	12	14	16	18	21
86°	·99756	·99776	·99795	·99813	·99831	·99847	·99863	3°	2	4	5	7	9	11	13	14	16
87°	·99863	·99878	·99892	·99905	·99917	·99929	·99939	2°	1	3	4	5	7	8	9	10	12
88°	·99939	·99949	·99958	·99966	·99973	·99979	·99985	1°									
89°	·99985	·99989	·99993	·99996	·99998	1·00000	1·00000	0°									
90°	1·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

餘弦眞數表

表 III

正切眞數表

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		平均差數 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01455	0·01746	89°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
1°	·01746	·02037	·02328	·02619	·02910	·03201	·03492	88°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
2°	·03492	·03783	·04075	·04366	·04658	·04949	·05241	87°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
3°	·05241	·05533	·05824	·06116	·06408	·06700	·06993	86°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
4°	·06993	·07285	·07578	·07870	·08163	·08456	·08749	85°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
5°	0·08749	0·09042	0·09335	0·09629	0·09923	0·10216	0·10510	84°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
6°	·10510	·10805	·11099	·11394	·11688	·11983	·12278	83°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
7°	·12278	·12574	·12869	·13165	·13461	·13758	·14054	82°	30	59	89	118	148	178	207	237	266
8°	·14054	·14351	·14648	·14945	·15243	·15540	·15838	81°	30	59	89	119	149	178	208	238	267
9°	·15838	·16137	·16435	·16734	·17033	·17333	·17633	80°	30	60	90	120	150	179	209	239	269
10°	0·17633	0·17933	0·18233	0·18534	0·18835	0·19136	0·19438	79°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
11°	·19438	·19740	·20042	·20345	·20648	·20952	·21256	78°	30	61	91	121	152	182	212	242	273
12°	·21256	·21560	·21864	·22169	·22475	·22781	·23087	77°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
13°	·23087	·23393	·23700	·24008	·24316	·24624	·24933	76°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
14°	·24933	·25242	·25552	·25862	·26172	·26483	·26795	75°	31	62	93	124	155	186	217	248	279
15°	0·26795	0·27107	0·27419	0·27732	0·28046	0·28360	0·28675	74°	31	63	94	125	157	188	219	250	282
16°	·28675	·28990	·29305	·29621	·29938	·30255	·30573	73°	32	63	95	126	158	190	221	253	285
17°	·30573	·30891	·31210	·31530	·31850	·32171	·32492	72°	32	64	96	128	160	192	224	256	288
18°	·32492	·32814	·33136	·33460	·33783	·34108	·34433	71°	32	65	97	129	162	194	226	259	291
19°	·34433	·34758	·35085	·35412	·35740	·36068	·36397	70°	33	65	98	131	164	196	229	262	294
20°	0·36397	0·36727	0·37057	0·37388	0·37720	0·38053	0·38386	69°	33	66	100	133	166	199	232	265	298
21°	·38386	·38721	·39055	·39391	·39727	·40065	·40403	68°	34	67	101	134	168	202	236	269	302
22°	·40403	·40741	·41081	·41421	·41763	·42105	·42447	67°	34	68	102	136	170	205	239	273	306
23°	·42447	·42791	·43136	·43481	·43828	·44175	·44523	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·44523	·44872	·45222	·45573	·45924	·46277	·46631	65°	35	70	105	140	176	211	246	281	316
25°	0·46631	0·46985	0·47341	0·47698	0·48055	0·48414	0·48773	64°	36	71	107	143	179	214	250	286	321
26°	·48773	·49134	·49495	·49858	·50222	·50587	·50953	63°	36	73	109	145	182	218	254	291	327
27°	·50953	·51320	·51688	·52057	·52427	·52798	·53171	62°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
28°	·53171	·53545	·53920	·54296	·54673	·55051	·55431	61°	38	75	113	151	189	226	264	302	339
29°	·55431	·55812	·56194	·56577	·56962	·57348	·57735	60°	38	77	115	154	192	230	269	307	346
30°	0·57735	0·58124	0·58513	0·58905	0·59297	0·59691	0·60086	59°	39	78	118	157	196	235	274	313	353
31°	·60086	·60483	·60881	·61280	·61681	·62083	·62487	58°	40	80	120	160	200	240	280	320	360
32°	·62487	·62892	·63299	·63707	·64117	·64528	·64941	57°	41	82	123	164	205	245	286	327	368
33°	·64941	·65355	·65771	·66189	·66608	·67028	·67451	56°	42	84	126	167	209	251	293	334	376
34°	·67451	·67875	·68301	·68728	·69157	·69588	·70021	55°	43	86	128	171	214	257	300	342	385
35°	0·70021	0·70455	0·70891	0·71329	0·71769	0·72211	0·72654	54°	44	88	132	176	220	263	307	351	395
36°	·72654	·73100	·73547	·73996	·74447	·74900	·75355	53°	45	90	135	180	225	270	315	360	405
37°	·75355	·75812	·76272	·76733	·77196	·77661	·78129	52°	46	92	139	185	231	277	324	370	416
38°	·78129	·78598	·79070	·79544	·80020	·80498	·80978	51°	48	95	143	190	238	285	333	380	428
39°	·80978	·81461	·81946	·82434	·82923	·83415	·83910	50°	49	98	147	196	245	293	342	391	440
40°	0·83910	0·84407	0·84906	0·85408	0·85912	0·86419	0·86929	49°	50	101	151	201	252	302	352	402	453
41°	·86929	·87441	·87955	·88473	·88992	·89515	·90040	48°	52	104	156	208	260	311	363	415	467
42°	·90040	·90569	·91099	·91633	·92170	·92709	·93252	47°	54	107	161	214	268	321	375	429	482
43°	·93252	·93797	·94345	·94896	·95451	·96008	·96569	46°	55	111	166	221	277	332	387	442	498
44°	·96569	·97133	·97700	·98270	·98843	·99420	1·00000	45°	57	114	172	229	286	343	400	457	515
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

餘切眞數表

正切真數表

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		平均差數 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1·00000	1·00583	1·01170	1·01761	1·02355	1·02952	1·03553	44°	59	118	178	237	296	355	414	474	533
46°	·03553	·04158	·04766	·05378	·05994	·06613	·07237	43°	61	123	184	246	307	368	430	491	553
47°	·07237	·07864	·08496	·09131	·09770	·10414	·11061	42°	64	127	191	255	319	382	446	510	573
48°	·11061	·11713	·12369	·13029	·13694	·14363	·15037	41°	66	132	199	265	332	397	463	530	596
49°	·15037	·15715	·16398	·17085	·17777	·18474	·19175	40°	69	138	207	276	345	413	482	552	620
50°	1·19175	1·19882	1·20593	1·21310	1·22031	1·22758	1·23490	39°	72	144	216	288	360	431	503	575	647
51°	·23490	·24227	·24969	·25717	·26471	·27230	·27994	38°	75	150	225	300	376	451	526	601	676
52°	·27994	·28764	·29541	·30323	·31110	·31904	·32704	37°	78	157	235	314	392	471	549	628	707
53°	·32704	·33511	·34323	·35142	·35968	·36800	·37638	36°	82	164	247	329	411	493	576	658	740
54°	·37638	·38484	·39336	·40195	·41061	·41934	·42815	35°	86	172	259	345	431	517	603	690	776
55°	1·42815	1·43703	1·44598	1·45501	1·46411	1·47330	1·48256	34°	91	181	272	363	453	544	634	725	816
56°	·48256	·49190	·50133	·51084	·52043	·53010	·53987	33°	96	191	287	382	478	573	669	764	860
57°	·53987	·54972	·55966	·56969	·57981	·59002	·60033	32°	101	201	302	403	504	604	705	806	907
58°	·60033	·61074	·62125	·63185	·64256	·65337	·66428	31°	107	213	320	426	533	639	746	852	959
59°	·66428	·67530	·68643	·69766	·70901	·72047	·73205	30°	113	226	339	451	565	677	790	903	1016
60°	1·7321	1·7437	1·7556	1·7675	1·7796	1·7917	1·8040	29°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
61°	1·8040	1·8165	1·8291	1·8418	1·8546	1·8676	1·8807	28°	13	25	38	51	64	77	89	102	115
62°	1·8807	1·8940	1·9074	1·9210	1·9347	1·9486	1·9626	27°	14	27	41	54	68	82	95	109	122
63°	1·9626	1·9768	1·9912	2·0057	2·0204	2·0353	2·0503	26°	15	29	44	58	73	88	102	117	131
64°	2·0503	2·0655	2·0809	2·0965	2·1123	2·1283	2·1445	25°	16	31	47	63	79	94	110	126	141
65°	2·1445	2·1609	2·1775	2·1943	2·2113	2·2286	2·2460	24°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
66°	2·2460	2·2637	2·2817	2·2998	2·3183	2·3369	2·3559	23°	18	37	55	73	92	110	128	146	165
67°	2·3559	2·3750	2·3945	2·4142	2·4342	2·4545	2·4751	22°	20	40	60	80	100	119	139	159	179
68°	2·4751	2·4960	2·5172	2·5386	2·5605	2·5826	2·6051	21°	22	43	65	87	109	130	152	174	195
69°	2·6051	2·6279	2·6511	2·6746	2·6985	2·7228	2·7475	20°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
70°	2·7475	2·7725	2·7980	2·8239	2·8502	2·8770	2·9042	19°	26	52	78	104	131	157	183	209	235
71°	2·9042	2·9319	2·9600	2·9887	3·0178	3·0475	3·0777	18°	29	58	87	116	145	174	202	231	260
72°	3·0777	3·1084	3·1397	3·1716	3·2041	3·2371	3·2709	17°	32	64	97	129	161	193	225	258	290
73°	3·2709	3·3052	3·3402	3·3759	3·4124	3·4495	3·4874	16°	36	72	108	144	181	216	253	289	325
74°	3·4874	3·5261	3·5656	3·6059	3·6470	3·6891	3·7321	15°	41	81	122	163	204	244	285	326	366
75°	3·7321	3·7760	3·8208	3·8667	3·9136	3·9617	4·0108	14°	46	93	139	185	232	278	325	371	418
76°	4·0108	4·0611	4·1126	4·1653	4·2193	4·2747	4·3315	13°	53	107	160	214	267	320	374	427	481
77°	4·3315	4·3897	4·4494	4·5107	4·5736	4·6382	4·7046	12°	62	124	186	248	311	373	435	497	559
78°	4·7046	4·7729	4·8430	4·9152	4·9894	5·0658	5·1446	11°	73	146	220	293	366	439	512	586	659
79°	5·1446	5·2257	5·3093	5·3955	5·4845	5·5764	5·6713	10°	88	175	263	350	438	526	613	701	788
80°	5·6713	5·7694	5·8708	5·9758	6·0844	6·1970	6·3138	9°									
81°	6·3138	6·4348	6·5606	6·6912	6·8269	6·9682	7·1154	8°									
82°	7·1154	7·2687	7·4287	7·5958	7·7704	7·9530	8·1443	7°									
83°	8·1443	8·3450	8·5555	8·7769	9·0098	9·2553	9·5144	6°									
84°	9·5144	9·7882	10·078	10·385	10·712	11·059	11·4301	5°									
85°	11·430	11·826	12·251	12·706	13·197	13·727	14·301	4°									
86°	14·301	14·924	15·605	16·350	17·169	18·075	19·081	3°									
87°	19·081	20·206	21·470	22·904	24·542	26·432	28·636	2°									
88°	28·636	31·242	34·368	38·188	42·964	49·104	57·290	1°									
89°	57·290	68·750	85·940	114·59	171·89	343·77	+∞	0°									
90°	+∞																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

·此處差數之變化極鉅不能列表

小角n′之餘切，或90°-n′之正切極近於以n除3437.7所得之數。

餘切真數表

表 IV

正弦對數表

此處差數之變化極鉅不能列表

小角n 分之 log sin n'

或 log cos (90°-n') = log n + $\bar{4}$. 46373.

	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
									平均差數								
0°	−∞	7·46373	7·76475	7·94084	8·06578	8·16268	8·24186	89°									
1°	8·24186	8·30879	8·36678	8·41792	8·46366	8·50504	8·54282	88°									
2°	8·54282	8·57757	8·60973	8·63968	8·66769	8·69400	8·71880	87°									
3°	8·71880	8·74226	8·76451	8·78568	8·80585	8·82513	8·84358	86°									
4°	8·84358	8·86128	8·87829	8·89464	8·91040	8·92561	8·94030	85°									
5°	8·94030	8·95450	8·96825	8·98157	8·99450	9·00704	9·01923	84°									
6°	9·01923	9·03109	9·04262	9·05386	9·06481	9·07548	9·08589	83°									
7°	9·08589	9·09606	9·10599	9·11570	9·12519	9·13447	9·14356	82°	96	192	288	384	480	576	672	768	864
8°	9·14356	9·15245	9·16116	9·16970	9·17807	9·18628	9·19433	81°	85	169	254	338	423	507	592	676	761
9°	9·19433	9·20223	9·20999	9·21761	9·22509	9·23244	9·23967	80°	76	151	227	302	378	453	529	604	680
10°	9·23967	9·24677	9·25376	9·26063	9·26739	9·27405	9·28060	79°	68	136	204	272	341	409	477	545	613
11°	·28060	·28705	·29340	·29966	·30582	·31189	·31788	78°	62	124	186	248	310	373	435	497	559
12°	·31788	·32378	·32960	·33534	·34100	·34658	·35209	77°	57	114	171	228	285	342	399	456	513
13°	·35209	·35752	·36289	·36819	·37341	·37858	·38368	76°	53	105	158	210	263	316	368	421	473
14°	·38368	·38871	·39369	·39860	·40346	·40825	·41300	75°	49	98	147	195	244	293	342	391	440
15°	9·41300	9·41768	9·42232	9·42690	9·43143	9·43591	9·44034	74°	46	91	137	182	228	273	319	364	410
16°	·44034	·44472	·44905	·45334	·45758	·46178	·46594	73°	43	85	128	171	213	256	299	341	384
17°	·46594	·47005	·47411	·47814	·48213	·48607	·48998	72°	40	80	120	160	201	241	281	321	361
18°	·48998	·49385	·49768	·50148	·50523	·50896	·51264	71°	38	76	113	151	189	227	264	302	340
19°	·51264	·51269	·51991	·52350	·52705	·53056	·53405	70°	36	71	107	143	179	214	250	285	321
20°	9·53405	9·53751	9·54093	9·54433	9·54769	9·55102	9·55433	69°	34	68	101	135	169	203	237	270	304
21°	·55433	·55761	·56085	·56408	·56727	·57044	·57358	68°	32	64	96	128	161	193	225	257	289
22°	·57358	·57669	·57978	·58284	·58588	·58889	·59188	67°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
23°	·59188	·59484	·59778	·60070	·60359	·60646	·60931	66°	29	58	87	116	146	174	204	233	262
24°	·60931	·61214	·61494	·61773	·62049	·62323	·62595	65°	28	56	83	111	139	166	195	222	250
25°	9·62595	9·62865	9·63133	9·63398	9·63662	9·63924	9·64184	64°	27	53	80	106	133	159	186	212	239
26°	·64184	·64442	·64698	·64953	·65205	·65456	·65705	63°	25	51	76	102	127	152	178	203	229
27°	·65705	·65952	·66197	·66441	·66682	·66922	·67161	62°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
28°	·67161	·67398	·67633	·67866	·68098	·68328	·68557	61°	23	47	70	93	117	140	163	186	210
29°	·68557	·68784	·69010	·69234	·69456	·69677	·69897	60°	22	45	67	89	112	134	156	179	201
30°	9·69897	9·70115	9·70332	9·70547	9·70761	9·70973	9·71184	59°	22	43	65	86	107	129	150	172	193
31°	·71184	·71393	·71602	·71809	·72014	·72218	·72421	58°	21	41	62	82	103	124	144	165	185
32°	·72421	·72622	·72823	·73022	·73219	·73416	·73611	57°	20	40	59	79	99	119	139	159	178
33°	·73611	·73805	·73997	·74189	·74379	·74568	·74756	56°	19	38	57	76	96	115	134	153	172
34°	·74756	·74943	·75128	·75313	·75496	·75678	·75859	55°	18	37	55	74	92	110	129	147	165
35°	9·75859	9·76039	9·76218	9·76395	9·76572	9·76747	9·76922	54°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
36°	·76922	·77095	·77268	·77439	·77609	·77778	·77946	53°	17	34	51	68	86	103	120	137	154
37°	·77946	·78113	·78280	·78445	·78609	·78772	·78934	52°	17	33	50	66	83	99	116	132	149
38°	·78934	·79095	·79256	·79415	·79573	·79731	·79887	51°	16	32	48	64	80	95	112	127	143
39°	·79887	·80043	·80197	·80351	·80504	·80656	·80807	50°	15	31	46	62	77	92	108	123	138
40°	9·80807	9·80957	9·81106	9·81254	9·81402	9·81549	9·81694	49°	15	30	44	59	74	89	104	118	133
41°	·81694	·81839	·81983	·82126	·82269	·82410	·82551	48°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
42°	·82551	·82691	·82830	·82968	·83106	·83242	·83378	47°	14	28	41	55	69	83	97	110	124
43°	·83378	·83513	·83648	·83781	·83914	·84046	·84177	46°	13	27	40	53	67	80	93	106	120
44°	·84177	·84308	·84437	·84566	·84694	·84822	·84949	45°	13	26	38	51	64	77	90	102	115
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'

餘弦對數表

正弦對數表

	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		平均差數								
									1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
45°	9·84949	9·85074	9·85200	9·85324	9·85448	9·85571	9·85693	44°	12	25	37	50	62	74	87	99	111
46°	·85693	·85815	·85936	·86056	·86176	·86295	·86413	43°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
47°	·86413	·86530	·86647	·86763	·86879	·86993	·87107	42°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
48°	·87107	·87221	·87334	·87446	·87557	·87668	·87778	41°	11	22	34	45	56	67	78	89	100
49°	·87778	·87887	·87996	·88105	·88212	·88319	·88425	40°	11	22	32	43	54	65	76	86	97
50°	9·88425	9·88531	9·88636	9·88741	9·88844	9·88948	9·89050	39°	10	21	31	42	52	62	73	83	94
51°	·89050	·89152	·89254	·89354	·89455	·89554	·89653	38°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
52°	·89653	·89752	·89849	·89947	·90043	·90139	·90235	37°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
53°	·90235	·90330	·90424	·90518	·90611	·90704	·90796	36°	9	19	28	37	47	56	65	75	84
54°	·90796	·90887	·90978	·91069	·91158	·91248	·91336	35°	9	18	27	36	45	54	63	72	81
55°	9·91336	9·91425	9·91512	9·91599	9·91686	9·91772	9·91857	34°	9	17	26	35	44	52	61	70	78
56°	·91857	·91942	·92027	·92111	·92194	·92277	·92359	33°	8	17	25	34	42	50	59	67	76
57°	·92359	·92441	·92522	·92603	·92683	·92763	·92842	32°	8	16	24	32	41	49	57	65	73
58°	·92842	·92921	·92999	·93077	·93154	·93230	·93307	31°	8	16	23	31	39	47	55	62	70
59°	·93307	·93382	·93457	·93532	·93606	·93680	·93753	30°	8	15	23	30	37	45	52	60	67
60°	9·93753	9·93826	9·93898	9·93970	9·94041	9·94112	9·94182	29°	7	14	22	29	36	43	50	57	64
61°	·94182	·94252	·94321	·94390	·94458	·94526	·94593	28°	7	14	21	27	34	41	48	55	62
62°	·94593	·94660	·94727	·94793	·94858	·94923	·94988	27°	7	13	20	26	33	40	46	53	59
63°	·94988	·95052	·95116	·95179	·95242	·95304	·95366	26°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
64°	·95366	·95427	·95488	·95549	·95609	·95668	·95728	25°	6	12	18	24	30	36	42	48	54
65°	9·95728	9·95786	9·95844	9·95902	9·95960	9·96017	9·96073	24°	6	12	17	23	29	35	40	46	52
66°	·96073	·96129	·96185	·96240	·96294	·96349	·96403	23°	6	11	17	22	28	33	38	44	50
67°	·96403	·96456	·96509	·96562	·96614	·96665	·96717	22°	5	10	16	21	26	31	36	42	47
68°	·96717	·96767	·96818	·96868	·96917	·96966	·97015	21°	5	10	15	20	25	29	34	40	44
69°	·97015	·97063	·97111	·97159	·97206	·97252	·97299	20°	5	9	14	19	24	28	33	38	42
70°	9·97299	9·97344	9·97390	9·97435	9·97479	9·97523	9·97567	19°	4	9	13	18	22	27	31	36	40
71°	·97567	·97610	·97653	·97696	·97738	·97779	·97821	18°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
72°	·97821	·97861	·97902	·97942	·97982	·98021	·98060	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	·98060	·98098	·98136	·98174	·98211	·98248	·98284	16°	4	8	11	15	19	22	26	30	34
74°	·98284	·98320	·98356	·98391	·98426	·98460	·98494	15°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
75°	9·98494	9·98528	9·98561	9·98594	9·98627	9·98659	9·98690	14°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
76°	·98690	·98722	·98753	·98783	·98813	·98843	·98872	13°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
77°	·98872	·98901	·98930	·98958	·98986	·99013	·99040	12°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
78°	·99040	·99067	·99093	·99119	·99145	·99170	·99195	11°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
79°	·99195	·99219	·99243	·99267	·99290	·99313	·99335	10°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
80°	9·99335	9·99357	9·99379	9·99400	9·99421	9·99442	9·99462	9°	2	4	6	8	11	13	15	17	19
81°	·99462	·99482	·99501	·99520	·99539	·99557	·99575	8°	2	4	6	8	10	11	13	15	17
82°	·99575	·99593	·99610	·99627	·99643	·99659	·99675	7°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
83°	·99675	·99690	·99705	·99720	·99734	·99748	·99761	6°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
84°	·99761	·99775	·99787	·99800	·99812	·99823	·99834	5°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
85°	9·99834	9·99845	9·99856	9·99866	9·99876	9·99885	9·99894	4°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86°	·99894	·99903	·99911	·99919	·99926	·99934	·99940	3°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
87°	·99940	·99947	·99953	·99959	·99964	·99969	·99974	2°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88°	·99974	·99978	·99982	·99985	·99988	·99991	·99993	1°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
89°	·99993	·99995	·99997	·99998	·99999	10·00000	10·00000	0°									
90°	10·00000																
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'

餘弦對數表

X

表V

正切對數表

	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60		平均差數 1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	-∞	7·46373	7·76476	7·94086	8·06581	8·16273	8·24192	89°									
1°	8·24192	8·30888	8·36689	8·41807	8·46385	8·50527	8·54308	88°	此處差數之變化極驟不能列表。								
2°	8·54308	8·57788	8·61009	8·64009	8·66816	8·69453	8·71940	87°									
3°	8·71940	8·74292	8·76525	8·78649	8·80674	8·82610	8·84464	86°	小角 n 分之 log tan n'								
4°	8·84464	8·86243	8·87953	8·89598	8·91185	8·92716	8·94195	85°	或 log cot (90°-n') = log n + $\bar{4}$. 46373.								
5°	8·94195	8·95627	8·97013	8·98358	8·90662	9·00930	9·02162	84°									
6°	9·02162	9·03361	9·04528	9·05666	9·06775	9·07858	9·08914	83°									
7°	9·08914	9·09947	9·10956	9·11943	9·12909	9·13854	9·14780	82°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
8°	9·14780	9·15688	9·16577	9·17450	9·18306	9·19146	9·19971	81°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
9°	9·19971	9·20782	9·21578	9·22361	9·23130	9·23887	9·24632	80°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
10°	9·24632	9·25365	9·26086	9·26797	9·27496	9·28186	9·28865	79°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
11°	·28865	·29535	·30195	·30846	·31489	·32122	·32747	78°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
12°	·32747	·33365	·33974	·34576	·35170	·35757	·36336	77°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
13°	·36336	·36909	·37476	·38035	·38589	39136	·39677	76°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
14°	·39677	·40212	·40742	·41266	·41784	·42297	·42805	75°	52	104	156	20	261	313	365	417	469
15°	9·42805	9·43308	9·43806	9·44299	9·44787	9·45271	0·45750	74°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
16°	·45750	·46224	·46694	·47100	·47622	·48080	·48534	73°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
17°	·48534	·48984	·49430	·49872	·50311	·50746	·51178	72°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
18°	·51178	·51606	·52031	·52452	·52870	·53285	·53697	71°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
19°	·53697	·54106	·54512	·54915	·55315	·55712	·56107	70°	40	80	121	160	201	241	281	321	362
20°	9·56107	9·56498	9·56887	9·57274	9·57658	9·58039	9·58418	69°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
21°	·58418	·58794	·59168	·59540	·59909	·60276	·60641	68°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
22°	·60641	·61004	·61364	·61722	·62079	·62433	·62785	67°	36	72	107	143	179	214	250	286	322
23°	·62785	·63135	·63484	·63830	·64175	·64517	·64858	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·64858	·65197	·65535	·65870	·66204	·66537	·66867	65°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
25°	9·66867	9·67196	9·67524	9·67850	9·68174	9·68497	9·68818	64°	33	65	98	130	163	195	228	260	293
26°	·68818	·69138	·69457	·69774	·70089	·70404	·70717	63°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
27°	·70717	·71028	·71339	·71648	·71955	·72262	·72567	62°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
28°	·72567	·72872	·73175	·73476	·73777	·74077	·74375	61°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
29°	·74375	·74673	·74969	·75264	·75558	·75852	·76144	60°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
30°	9·76144	9·76435	9·76725	9·77015	9·77303	9·77591	9·77877	59°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
31°	·77877	·78163	·78448	·78732	·79015	·79297	·79579	58°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
32°	·79579	·79860	·80140	·80419	·80697	·80975	·81252	57°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
33°	·81252	·81528	·81803	·82078	·82352	·82626	·82899	56°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
34°	·82899	·83171	·83442	·83713	·83984	·84254	·84523	55°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
35°	9·84523	9·84791	9·85059	9·85327	9·85594	9·85860	9·86126	54°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
36°	·86126	·86392	·86656	·86921	·87185	·87448	·87711	53°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
37°	·87711	·87974	·88236	·88498	·88759	·89020	·89281	52°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
38°	·89281	·89541	·89801	·90061	·90320	·90578	·90837	51°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
39°	·90837	·91095	·91353	·91610	·91868	·92125	·92381	50°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
40°	9·92381	9·92638	9·92894	9·93150	9·93406	9·93661	9·93916	49°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
41°	·93916	·94171	·94426	·94681	·94935	·95190	·95444	48°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
42°	·95444	·95698	·95952	·96205	·96459	·96712	·96966	47°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
43°	·96966	·97219	·97472	·97725	·97978	·98231	·98484	46°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
44°	·98484	·98737	·98989	·99242	·99495	·99747	10·00000	45°	25	51	76	101	12[illegible]	[illegible]	177	202	228
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'

餘切對數表

正切對數表

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									平均差數								
45°	10·00000	10·00253	10·00505	10·00758	10·01011	10·01263	10·01516	44°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
46°	·01516	·01769	·02022	·02275	·02528	·02781	·03034	43°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
47°	·03034	·03288	·03541	·03795	·04048	·04302	·04556	42°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
48°	·04556	·04810	·05065	·05319	·05574	·05829	·06084	41°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
49°	·06084	·06339	·06594	·06850	·07106	·07362	·07619	40°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
50°	10·07619	10·07875	10·08132	10·08390	10·08647	10·08905	10·09163	39°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
51°	·09163	·09422	·09680	·09939	·10199	·10459	·10719	38°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
52°	·10719	·10980	·11241	·11502	·11764	·12026	·12289	37°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
53°	·12289	·12552	·12815	·13079	·13344	·13608	·13874	36°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
54°	·13874	·14140	·14406	·14673	·14941	·15209	·15477	35°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
55°	10·15477	10·15746	10·16016	10·16287	10·16558	10·16829	10·17101	34°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
56°	·17101	·17374	·17648	·17922	·18197	·18472	·18748	33°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
57°	·18748	·19025	·19303	·19581	·19860	·20140	·20421	32°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
58°	·20421	·20703	·20985	·21268	·21552	·21837	·22123	31°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
59°	·22123	·22409	·22697	·22985	·23275	·23565	·23856	30°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
60°	10·23856	10·24148	10·24442	10·24736	10·25031	10·25327	10·25625	29°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
61°	·25625	·25923	·26223	·26524	·26825	·27128	·27433	28°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
62°	·27433	·27738	·28045	·28352	·28661	·28972	·29283	27°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
63°	·29283	·29596	·29911	·30226	·30543	·30862	·31182	26°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
64°	·31182	·31503	·31826	·32150	·32476	·32804	·33133	25°	33	65	98	130	163	195	228	260	293
65°	10·33133	10·33463	10·33796	10·34130	10·34465	10·34803	10·35142	24°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
66°	·35142	·35483	·35825	·36170	·36516	·36865	·37215	23°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
67°	·37215	·37567	·37921	·38278	·38636	·38996	·39359	22°	36	72	107	143	179	214	251	286	322
68°	·39359	·39724	·40091	·40460	·40832	·41206	·41582	21°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
69°	·41582	·41961	·42342	·42726	·43113	·43502	·43893	20°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
70°	10·43893	10·44288	10·44685	10·45085	10·45488	10·45894	10·46303	19°	40	80	121	160	201	241	281	321	362
71°	·46303	·46715	·47130	·47548	·47969	·48394	·48822	18°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
72°	·48822	·49254	·49689	·50128	·50570	·51016	·51466	17°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
73°	·51466	·51920	·52378	·52840	·53306	·53776	·54250	16°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
74°	·54250	·54729	·55213	·55701	·56194	·56692	·57195	15°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
75°	10·57195	10·57703	10·58216	10·58734	10·59258	10·59788	10·60323	14°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
76°	·60323	·60864	·61411	·61965	·62524	·63091	·63664	13°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
77°	·63664	·64243	·64830	·65424	·66026	·66635	·67253	12°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
78°	·67253	·67878	·68511	·69154	·69805	·70465	·71135	11°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
79°	·71135	·71814	·72504	·73203	·73914	·74635	·75368	10°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
80°	10·75368	10·76113	10·76870	10·77639	10·78422	10·79218	10·80029	9°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
81°	·80029	·80854	·81694	·82550	·83423	·84312	·85220	8°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
82°	·85220	·86146	·87091	·88057	·89044	·90053	·91086	7°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
83°	·91086	·92142	·93225	·94334	·95472	·96639	·97838	6°									
84°	·97838	·99070	11·00338	11·01642	11·02987	11·04373	11·05805	5°									
85°	11·05805	11·07284	11·08815	11·10402	11·12047	11·13757	11·15536	4°									
86°	11·15536	11·17390	11·19320	11·21351	11·23475	11·25703	11·28060	3°									
87°	11·28060	11·30547	11·33184	11·35991	11·38991	11·42212	11·45692	2°	此處差數之變化極驟不能列表								
88°	11·45692	11·49473	11·53615	11·58193	11·63311	11·69112	11·75808	1°									
89°	11·75808	11·83727	11·93419	12·05914	12·23524	12·53627	+∞	0°									
90°	+∞																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

餘切對數表

表 VI
弧度或弳量法

度	弳	度	弳	分	弳	分	弳
1°	·01745	46°	·80285	1′	·00029	46′	·01338
2°	·03491	47°	·82030	2′	·00058	47′	·01367
3°	·05236	48°	·83776	3′	·00087	48′	·01396
4°	·06981	49°	·85521	4′	·00116	49′	·01425
5°	·08727	50°	·87266	5′	·00145	50′	·01454
6°	·10472	51°	·89012	6′	·00175	51′	·01484
7°	·12217	52°	·90757	7′	·00204	52′	·01513
8°	·13963	53°	·92502	8′	·00233	53′	·01542
9°	·15708	54°	·94248	9′	·00262	54′	·01571
10°	·17453	55°	·95993	10′	·00291	55′	·01600
11°	·19199	56°	·97738	11′	·00320	56′	·01629
12°	·20944	57°	·99484	12′	·00349	57′	·01658
13°	·22689	58°	1·01229	13′	·00378	58′	·01687
14°	·24435	59°	1·02974	14′	·00407	59′	·01716
15°	·26180	60°	1·04720	15′	·00436	60′	·01745
16°	·27925	61°	1·06465	16′	·00465		
17°	·29671	62°	1·08210	17′	·00495		
18°	·31416	63°	1·09956	18′	·00524		
19°	·33161	64°	1·11701	19′	·00553		
20°	·34907	65°	1·13446	20′	·00582		
21°	·36652	66°	1·15192	21′	·00611		
22°	·38397	67°	1·16937	22′	·00640		
23°	·40143	68°	1·18682	23′	·00669	秒	弳
24°	·41888	69°	1·20428	24′	·00698	5″	·00002
25°	·43633	70°	1·22173	25′	·00727	10″	·00005
26°	·45379	71°	1·23918	26′	·00756	15″	·00007
27°	·47124	72°	1·25664	27′	·00785	20″	·00010
28°	·48869	73°	1·27409	28′	·00814	25″	·00012
29°	·50615	74°	1·29154	29′	·00844	30″	·00015
30°	·52360	75°	1·30900	30′	·00873	35″	·00017
31°	·54105	76°	1·32645	31′	·00902	40″	·00019
32°	·55851	77°	1·34390	32′	·00931	45″	·00022
33°	·57596	78°	1·36136	33′	·00960	50″	·00024
34°	·59341	79°	1·37881	34′	·00989	55″	·00027
35°	·61087	80°	1·39626	35′	·01018	60″	·00029
36°	·62832	81°	1·41372	36′	·01047		
37°	·64577	82°	1·43117	37′	·01076		
38°	·66323	83°	1·44862	38′	·01105		
39°	·68068	84°	1·46608	39′	·01134		
40°	·69813	85°	1·48353	40′	·01164		
41°	71558	86°	1·50098	41′	·01193		
42°	·73304	87°	1·51844	42′	·01222		
43°	·75049	88°	1·53589	43′	·01251		
44°	·76794	89°	1·55334	44′	·01280		
45°	·78540	90°	1·5708	45′	·01309		