

СОДЕРЖАНІЕ.

Часть I—официальная.

Рецензіи на сочиненія, представленныя въ Юридическій факультетъ для пріобрѣтенія высшей ученой степени . . . 1—44

Часть II—неофициальная.

- I. О понятіи реальности по Шубертъ-Зольдерну.—Студ. А. Э. Вайнштейна 1—14
- II. Ученіе Канта о вещи въ себѣ.—Сочин., удостоенное Историко-Филол. факультетомъ золотой медали.—Оконч. курсъ А. М. Щербины 61—108
- III. Элементы математическаго анализа.—Проф. М. Ѳ. Хандринова 1—108
- IV. Лимфатическіе сосуды печени человѣка (съ рисунками).—Проф. Ф. А. Стефаниса 91—162

Критика и библіографія.

Критико-библіографическій обзоръ новѣйшихъ трудовъ и изданій по славяновѣдѣнію.—Проф. Т. Д. Флоринскаго . . . 45—91

Прибавленіе.

Теорія потенціала и гидродинамика.—Проф. Г. К. Сулова. 65—96

**Рецензія на сочиненія, представленныя въ Юридическій факультетъ для
пріобрѣтенія высшей ученой степени.**

I.

*Кисилевъ, Психологическое основаніе уголовной отвѣтственности, X.
1903 годъ.*

Авторъ названнаго труда поставилъ себѣ задачей выяснить, каково общее отношеніе законодателя къ личности преступника, каково психологическое основаніе, принимаемое имъ для угол. отвѣтственности, и насколько вѣрно это основаніе (стр. 1-я). Постановку этой задачи онъ объясняетъ современными интересами науки угол. права, въ которой замѣчается горячій споръ между криминалистами-классиками и криминалистами-новаторами; изъ нихъ послѣдніе бросили тяжелый упрекъ первымъ въ томъ, что они, опираясь на данныя положительнаго права, довольствуются отжившимъ представленіемъ о свободѣ воли и считаются не съ живой личностью преступника, а съ отвлеченнымъ понятіемъ преступленія (стр. 2). Пытаясь разрѣшить названные вопросы, г. Кисилевъ счелъ необходимымъ прежде всего изложить ихъ разработку въ наукѣ угол. права, начиная съ ученія Фейербаха и Грольмана, изъ коихъ перваго онъ признаетъ представителемъ классической школы угол. права, а втораго предтечей новаторовъ—антропологовъ и социологовъ (стр. 2—3). Такъ какъ оба эти ученые въ своемъ спорѣ опирались на данныя положительнаго права, то авторъ, вслѣдъ за изложеніемъ ихъ воззрѣній, предлагаетъ изслѣдованіе угол. отвѣтственности и ея психологическаго основанія по даннымъ положительнаго права (стр. 5). Переходя затѣмъ къ оцѣнкѣ психологич. воззрѣнія законодателя, онъ предпосылаетъ ей изложеніе сначала основныхъ положеній антропологовъ, социологовъ или сторонни-

ковъ теоріи личнаго состоянія преступности и классиковъ или сторонниковъ теоріи преступнаго дѣйствія; потомъ—психологическихъ теоріи, лежащихъ въ основаніи каждой изъ трехъ указанныхъ доктринъ, сводя ихъ къ двумъ типамъ—теоріи ассоціационизма, принимаемыя новаторами, и теоріи волюнтаризма, принимаемыя классиками. Признавая болѣе правильною теорію волюнтаризма, г. Киселевъ въ послѣдней главѣ (IV) указываетъ ея преимущества; въ краткомъ же заключеніи онъ даетъ сжатые отвѣты на поставленные имъ три вопроса.

Такова система труда г. Киселева и ея обоснованіе. Свой трудъ авторъ, какъ было сказано, начинаетъ съ изложенія ученія Фейербаха и Грольмана, «сущность котораго м. б. сведена къ слѣдующему. Объектъ наказанія, по мнѣнію Фейербаха, — совершенное дѣяніе; послѣднее же—и его ближайшее основаніе; преступникъ несетъ наказаніе исключительно потому, что совершилъ преступленіе; поэтому слѣдуетъ карать, хотя бы преступникъ былъ неисправимъ или въ исправленіи не нуждался. Здѣсь лежитъ отличіе наказанія отъ мѣръ воспитанія и предупрежденія преступленій; первыя мѣры имѣютъ въ виду будущее закономѣрное поведеніе субъекта, вторыя—отнятіе у преступника возможности въ будущемъ снова совершить преступленіе, т. е. представляютъ чисто отрицательное значеніе по своему вліянію на личность въ противоположность положительному значенію воспитанія (стр. 8—10). Но фактъ преступленія есть только ближайшее основаніе наказанія; юридическое же его оправданіе—въ угрозѣ закона: невозможно наказаніемъ преступника предупредить преступленія другихъ, къ тому склонныхъ, и, такъ-какъ источникъ преступленій лежитъ въ чувственныхъ представленіяхъ людей, то и необходимо воздѣйствовать на нихъ угрозой закона, т. е. представленіемъ о страданіяхъ, превышающихъ тѣ, которыя можно ожидать отъ неудовлетворенія преступныхъ желаній. Такимъ образомъ, наказаніе, будучи по своей природѣ *malum passionis ob malum actionis*, имѣетъ единственный смыслъ психическаго принужденія угрозой закона, которая должна составить противовѣсъ чувственнымъ влеченіямъ къ преступленію. Въ этой угрозѣ—вся сила наказанія, почему его исполненіе теряетъ свое самостоятельное значеніе; въ ней же сливаются всѣ три цѣли наказанія—исправленіе, устрашеніе и предупрежденіе, которыя суть только простое ея слѣдствіе и условія ея дѣйствительности. Наказаніе является исправленіемъ, ибо угрозой его воля обращается къ закономѣрной дѣятельности; оно—устрашеніе, ибо угроза имъ внушаетъ страхъ возможному нарушителю права; оно, нако-

нецъ, предупрежденіе, ибо угроза имъ оказываетъ психическое воздѣйствіе на лицъ, склонныхъ къ преступленію. Вообще, угрозу и исполненіе наказанія нельзя смѣшивать: примѣненіе наказанія имѣетъ мѣсто въ силу принципа—*quia ressatum est*, а не принципа—*ne ressetur* (стр. 10—17).

Грольманъ, въ противоположность Фейербаху, всю силу наказанія переносилъ на его исполненіе, выводя его основаніе изъ задачъ права. Послѣднее же есть продуктъ общежитія, живущій въ сознаніи каждаго, почему его зачатки замѣтны и въ до-государственное время, а слѣд. оно мыслимо и независимо отъ положит. права. Общество неминуемо предполагаетъ порядокъ или законъ, регулирующий, во имя свободы всѣхъ и каждаго, взаимоотношенія гражданъ. Этотъ законъ, однако, долженъ относиться къ волѣ человѣка, а не къ его настроенію, ибо человѣкъ, стремясь къ свободному существованію въ обществѣ, долженъ принять законъ, какъ норму для своей дѣятельности. Правда, и мораль относится къ волѣ человѣка, но она оцѣниваетъ и внутреннія побужденія человѣка, тогда какъ право—его внѣшнія дѣйствія. Впрочемъ, право и мораль, хотя и различныя, но смежныя области, имѣющія много общаго, ибо право обращаетъ свое вниманіе не только на внѣшнее дѣйствіе, но и на волю, ибо нельзя относиться къ поведенію человѣка, минуя его волю, Устраненіе неправомѣрной воли, проявившейся во внѣшнемъ актѣ, для предотвращенія грозящей отъ виновнаго въ будущемъ опасности, образуетъ главную задачу наказанія, рядомъ съ коею достигается и дополнительная—предупрежденіе преступленія въ лицѣ другихъ, къ тому склонныхъ. Эта задача осуществляется преимущественно путемъ устрашенія, ибо удовольствіе и страданіе суть главные стимулы нашей дѣятельности, затѣмъ, при его безуспѣшности,—путемъ устраненія личности преступника изъ общества при помощи смертной казни, ссылки, пожизненнаго заключенія и, наконецъ, путемъ исправленія, какъ *mi nimum* омъ устрашенія (стр. 17—31). Усматривая ближайшее основаніе наказанія не въ фактѣ преступленія, а въ вѣроятности будущаго преступнаго дѣянія, Грольманъ, идя послѣдовательно, долженъ былъ признать, во 1-хъ, необходимость принимать мѣры принужденія или наказывать и лицъ, не совершившихъ преступленія, но проявившихъ состояніе опасности, въ которомъ нельзя рассчитывать на обезпеченность отъ преступленія, во 2-хъ, цѣлесобразность не абсолютно, а относительно опредѣленной санкціи—въ предѣлахъ *maximum*'а и *minimum*'а наказанія (стр. 31—87).

Изложивъ ученія Фейербаха и Грольмана, г. Кисилевъ такъ опредѣляетъ ихъ отношеніе къ положит. праву. Первый, выдвигая на первый планъ угрозу закона, какъ воздѣйствіе на лицъ, которыя могли бы совершить преступленіе, мало обращалъ вниманія на личность преступника, почему и не требовалъ индивидуализаціи наказанія, что видно уже изъ его возраженій противъ относительно-опредѣленной санкціи (стр. 48—50). Второй же, имѣя въ виду, главнымъ образомъ, исполненіе наказанія и преступника, напротивъ, требовалъ индивидуализированія наказанія, дабы измѣнить неправомѣрно-настроенную волю или устранить изъ общества ея носителя, но не столько качественного индивидуализированія, сколько количественнаго, при чемъ впадалъ въ другую крайность—не обращалъ должнаго вниманія на соціальную сторону преступленія и наказанія (стр. 51—52). Не смотря на такое разнорѣчіе въ воззрѣніяхъ, Фейербахъ и Грольманъ сходились на одинаковомъ опредѣленіи критерія уголов. отвѣтственности съ точки зрѣнія законодателя, которую и они сами защищали. По ихъ толкованію этой точки зрѣнія, внутренняя жизнь человѣка представляетъ пассивное теченіе представленій и чувствованій, соотношеніемъ которыхъ единственно и опредѣляется внѣшнее проявленіе нашего я: послѣднее уклоняется въ ту сторону, въ которую тянетъ его преобладающее содержаніе сознанія—болѣе яркое представленіе или болѣе сильное чувствованіе. Поэтому равно ошибочно, какъ признавать свободу воли, такъ и отыскивать въ сознаніи самостоятельную силу воли или способность субъекта не только подчиняться соотношенію представленій и чувствованій, но и подчинять ихъ своему выбору (стр. 53 и 66). При такомъ взглядѣ на нашу духовную жизнь, не указывается достаточное различіе между состояніемъ вмѣняемости и тѣмъ, которое мы находимъ у малолѣтнихъ, душевно-больныхъ, пребывающихъ во снѣ и т. п. Слѣдуя ему, надо заключить, что въ первомъ случаѣ сознаніе открываетъ только болѣе сложное, но по существу своему одинаково пассивное развитіе, и если при всемъ томъ мы ясно воспринимаемъ извѣстное усиліе и напряженіе, съ которымъ работаетъ наше внутреннее я, какъ бы господствующее надъ своимъ содержаніемъ, то это не больше, какъ самообманъ. Переживаемое нами напряженіе имѣетъ не самостоятельное, а производное значеніе, являясь результатомъ накопленія и борьбы представленій и чувствованій, исходъ которой опредѣляется закономъ достаточной причины, царящимъ во внѣшней природѣ (стр. 66—68).

Съ цѣлью провѣрить толкованіе положительнаго права названными двумя учеными по спорному вопросу, г. Кисилевъ самъ обра-

щается къ его изслѣдованію, при чемъ замѣчаетъ, что оно разсматриваетъ внутреннее состояніе личности преступника въ три періода: 1) въ моментъ совершенія преступленія, 2) въ періодъ, непосредственно его подготовившій и 3) въ эпоху всей прошлой жизни, отразившейся въ постоянныхъ особенностяхъ субъекта. Внутреннее состояніе человѣка въ первый моментъ кодексы сводятъ къ двумъ формамъ—къ умыслу и неосторожности. Въ первомъ случаѣ виновный *сознаетъ* свое дѣйствіе или бездѣйствіе, т. е. переживаетъ то состояніе духа, когда въ сознаніи плучаетъ перевѣсъ одно какое либо представленіе или чувствованіе, а именно представленіе преступнаго дѣйствія или бездѣйствія, которое немедленно и осуществляется. Во второмъ же случаѣ виновный *не сознаетъ* своего поступка или вполнѣ, подъ вліяніемъ сосредоточенія вниманія на одной какой либо мысли, или отчасти, подъ вліяніемъ, напр. ошибки въ предметѣ, въ средствахъ дѣятельности и т. п. Такимъ образомъ, тогда какъ при умыслѣ сознаніе виновнаго *помощно* представленіемъ о преступномъ дѣйствіи или бездѣйствіи, при неосторожности оно сосредоточено на всякомъ иномъ представленіи, кромѣ сего послѣдняго. Однако, сходство ихъ—въ томъ, что при обоихъ происходитъ уклоненіе сознанія въ одну какую либо сторону, выдѣляемую нашимъ вниманіемъ отъ прочихъ, сосредоточеніе его на одномъ изъ указанныхъ представленій, чѣмъ дѣйствующій уже и отличается отъ того, кто только близокъ къ дѣйствію, кто находится въ состояніи альтернативы. Это сосредоточеніе вниманія въ обоихъ случаяхъ должно относиться къ фактической сторонѣ дѣятельности—къ предмету, средствамъ, способу, къ причинной связи, понимаемой въ объективномъ смыслѣ, но не къ соціальной или юридической, требуемой авторомъ только для второго періода. Наконецъ, для понятія умысла и неосторожности необходимо не всякое представленіе или непредставленіе фактической стороны дѣятельности, а лишь опредѣленное, свойственное среднему человѣку того круга жизни, къ которому совершенное преступленіе имѣетъ ближайшее отношеніе (стр. 71—76, 117—118, 126—128). Согласно съ симъ подъ виновностью, какъ постановляетъ о ней полож. право, надо разумѣть лишь такое „сознаваніе и хотѣніе или возможность его“, которое свойственно среднему человѣку даннаго общества (стр. 119). Такимъ образомъ, понятіе умысла и неосторожности д. б. устанавливаемо на основаніи не субъективнаго критерія, опредѣляемаго индивидуальностью каждаго отдѣльнаго лица, а объективнаго, опредѣляемаго способностью сознаванія и возмож-

ностью предвидѣнія виновнаго, какъ средняго члена общества (стр. 106—107).

Внутреннее состояніе человѣка въ моментъ совершенія преступленія законодатель ставитъ въ тѣсную связь съ предыдущимъ состояніемъ, когда преступленіе только готовится. Въ этомъ состояніи авторъ различаетъ моментъ борьбы представленій и чувствованій и моментъ рѣшимости, когда представленіе преступнаго дѣйствія пріобрѣтаетъ господствующее значеніе въ сознаніи (стр. 129). Вниманіе законодателя къ данному состоянію видно уже изъ того, что онъ дѣлитъ умысль на предумышленіе, простой и аффектированный, имѣя въ виду не моментъ исполненія дѣянія, а процессъ его назрѣванія, а также изъ того, что предполагаетъ связь сознанія при умьслѣ съ представленіемъ о недолжности совершаемаго и съ другими представленіями, укрѣпляющими рѣшимость преступить, т. е. вообще съ представленіями, характеризующими состояніе готовящагося къ преступленію. Представленіе недолжнаго есть представленіе соціальнаго значенія дѣянія съ точки зрѣнія нравовъ даннаго общества, а не знаніе противоправности и наказуемости его; оно означаетъ только „возможность понимать“ преступность дѣянія. Необходимость его ясна изъ того, что сознаніе фактической стороны преступленія, свойственное среднему человѣку даннаго общества, объемлетъ и его соціальное значеніе, его оцѣнку съ точки зрѣнія нравовъ этого общества, ибо послѣднее, языкомъ котораго говоритъ законодатель, представляетъ себѣ явленіе не съ одной какой либо стороны, какъ это дѣлаетъ ученый, а съ разныхъ, охватывая не только физическую или фізіологическую его сторону, но и соціальное его значеніе (стр. 130—131). Свое толкованіе представленія недолжнаго г. Кисилевъ подтверждаетъ ссылкой на кодексы, которые не требуютъ для умысла знанія противоправности и наказуемости совершаемаго; они ограничиваются требованіемъ сознанія его фактической стороны (стр. 132). Далѣе, они для вмѣняемости предполагаютъ „способность понимать фактическое и юридическое значеніе совершаемаго“, т. е. такой запасъ этическихъ представленій, который приводилъ бы только къ догадкѣ о противоправности и наказуемости предпринимаемаго дѣянія (стр. 133). Конечно, такая способность является у человѣка съ достиженіемъ имъ нравственной зрѣлости, т. е. извѣстнаго уровня нравственнаго развитія; но она одинаково требуется какъ для несовершеннолѣтняго, такъ и для взрослога съ тою только разницей, что у послѣдняго она предполагается, а у перваго испытывается (стр. 138—139).

Кромѣ представленій недолжнаго, сознаніе факта совершаемаго при умыслѣ д. б. связано съ другими представленіями и чувствованіями, укрѣпляющими рѣшимость преступить, или съ такъ наз. мотивами преступленій. Правда, кодексы не содержатъ общаго положенія о мотивахъ, однако, они, предоставляя судьбѣ сораазмѣрять съ ними наказаніе, тѣмъ самымъ признають ихъ значеніе и для видовъ виновности, при чемъ подъ мотивами надо разумѣть тѣ, по коимъ данный видъ преступленія обыкновенно совершается среднимъ человѣкомъ даннаго общества (стр. 144—145). Поэтому если судья, изслѣдуя преступленіе, вовсе не отыщетъ какихъ либо мотивовъ или такихъ, которые свойственны названному среднему человѣку, то онъ долженъ отвергнуть наличность умысла, ибо сознаніе такого человѣка представляетъ рѣзкое уклоненіе отъ средней нормы; мало того, онъ долженъ отвергнуть и неосторожность, если не найдетъ представленій, способныхъ поднять въ сознаніи виновнаго мысль о дѣйствительномъ значеніи совершаемаго, какъ фактическомъ, такъ и социальномъ, а также тѣхъ, которыя вытѣсняють сіи послѣднія представленія, наталкивая субъекта на безсознательное или ошибочное въ виду извѣстныхъ мотивовъ представленіе о совершаемомъ. Отрицаніе осторожности въ данномъ случаѣ объясняется тѣмъ, что ея природа именно и опредѣляется названными представленіями.

Внутреннее состояніе человѣка въ два названные періода образуетъ отдѣльное проявленіе личности человѣка, за которымъ стоитъ вся личность въ опытахъ ея прошлой жизни. Для бытія умысла и неосторожности, какъ было сказано, необходимъ извѣстный запасъ представленій и чувствованій, который образуетъ опредѣленное содержаніе сознанія, накопленное опытами прошлой жизни лица. Въ этихъ же опытахъ скрываются наклонности и привычки, которыя, обнаружившись въ мотивахъ дѣйствій человѣка, ведутъ его къ акту преступленія; такимъ образомъ, мотивъ находится въ самой тѣсной связи съ нашими наклонностями и привычками, образующими то, что наз. характеромъ человѣка. Поэтому при отсутствіи этой связи, т. е. если нельзя объяснить мотивъ прошлой жизнью человѣка, предъ нами безсвязное развитіе сознанія или душевная болѣзнь (стр. 151—155). Однако, связь акта преступленія съ прошлой жизнью ея виновника не означаетъ ихъ смѣшенія законодателемъ: преступленіе есть исполненное или исполняемое зло, но не особенности характера человѣка; оно имѣетъ самостоятельное значеніе (стр. 155). Самостоятельность же акта преступленія доказываетъ и самостоятельность воли, какъ особаго элемента сознанія,

который, хотя и связанъ съ мотивомъ и опытами прошлой жизни, но не разлагается на нихъ полностью (156—157, 171). Съ этой точки зрѣнія бытіе воли несомнѣнно не только въ умыслѣ непрямомъ, но и въ неосторожности: въ первомъ случаѣ виновный мысль о преступленіи пріобщаетъ къ центру своего сознанія, т. е. къ кругу господствующихъ представленій и чувствованій; онъ оцѣниваетъ послѣдствія своего дѣянія и рѣшается на него только тогда, когда примирится съ нимъ: эта мысль у него дѣлается какъ бы своей, по крайней мѣрѣ—терпимой; мы имѣемъ здѣсь хотѣніе или сонаволеніе совершаемаго, которое только тѣмъ отличается отъ другихъ случаевъ сонзволенія при умыслѣ, что его цѣль не совпадаетъ съ всей сферой причиненныхъ послѣдствій (стр. 167—168). Во второмъ же случаѣ мы имѣемъ дѣло съ состояніемъ недостаточнаго воленія или недостаточно напряженной работы сознанія, объясняющимъ намъ фактъ игнорирования виновнымъ дѣйствительнаго значенія совершаемаго имъ поступка. Онъ не желаетъ здѣсь совершенія преступления, но онъ желаетъ чего-то другого; правда, послѣднее желаніе возникло не изъ борьбы мотивовъ, какъ при умыслѣ, ибо въ сознаніи не было сдерживающаго мотива—представленія о значеніи совершаемаго, однако, если воля самостоятельна, т. е. не есть простое слѣдствіе теченія представленій и чувствованій или ихъ борьбы, то она на-лицо и тогда, когда нѣтъ этой борьбы, когда одно представленіе навязывается нашему сознанію, что и замѣчается при неосторожности (стр. 169).

Переходя къ оцѣнкѣ изложеннаго психологическаго воззрѣнія законодателя, Кисилевъ, какъ было сказано, предпосылаетъ ей изложеніе сюда относящихся ученій антропологовъ, соціологовъ и классиковъ, при чемъ отмѣчаетъ сходство первыхъ двухъ школъ въ томъ, что они, признавая, какъ Фейербахъ и Грольманъ, чисто пассивное теченіе сознанія, отвергаютъ всякую самостоятельность воли: по ихъ ученію, преступное дѣяніе есть исключительно результатъ личныхъ особенностей субъекта. Различіе же ихъ онъ усматриваетъ, главнымъ образомъ, въ томъ, что школа антропологовъ мысль о пассивномъ развитіи сознанія подкрѣпляетъ метафизическими соображеніями, а школа соціологовъ—данными эмпирической психологій, почерпнутыми изъ теорій представленій или ассоціационизма (стр. 236—237). Ближе къ истинѣ ученіе классической школы, признающей, вслѣдъ за Фейербахомъ, необходимость ближайшаго изученія полож. права; недостатокъ ея, однако, въ томъ, что она только приближается къ рѣшенію вопроса объ угол. отвѣтственности съ

точки зрѣнія полож. знанія, едва намѣчая вопросъ о самостоятельности воли, но не оговаривая ея силы (стр. 238—240, 256, 260). Правильное рѣшеніе вопроса объ угол. отвѣтственности авторъ видитъ въ теоріи волюнтаризма, которая, во 1-хъ, отказывается перевести психологическіе процессы на физиологическіе, ограничивая изслѣдованіе данными сознанія, во 2-хъ, признаетъ самостоятельность и активность природы сознанія (стр. 280). По его мнѣнію, задача эмпирической философіи заключается не въ отысканіи первопричины сознанія, а въ изученіи данныхъ внутренняго опыта, т. е. въ познаніи сознанія самимъ же сознаніемъ путемъ наблюденія себя въ прошлыхъ состояніяхъ или изслѣдованія условій проявленія внутренняго „я“ (стр. 264—265). Это изслѣдованіе показываетъ, что жизнь духа не есть проявленіе механической причинности внутренней жизни, а нарастаніе энергій, гдѣ каждое послѣдующее не м. б. безъ остатка разложено на предыдущія, а слѣд. представляетъ извѣстную самостоятельность (стр. 288). Въ каждомъ психическомъ образованіи открываются три момента: представленія—низшая степень активности сознанія, чувствованія—средняя ея степень и воля—высшая степень; однако, эти моменты м. б. только мысленно выдѣлены, въ дѣйствительности же они даны всѣ вмѣстѣ; всѣмъ имъ присущъ элементъ вниманія, эта элементарная форма волевого процесса. Теорія волюнтаризма оправдываетъ психологич. воззрѣніе законодателя, понимающаго волю въ смыслѣ избирающей дѣятельности сознанія, сопровождающейся внѣшнимъ дѣйствіемъ, ибо и съ ея точки зрѣнія волевой актъ надо отличать отъ воли въ смыслѣ основного процесса развитія сознанія (стр. 302—310). Въ нормальномъ состояніи здороваго человѣка сильнѣйшее впечатлѣніе не вытѣсняетъ сейчасъ же слабаго; напротивъ, послѣднее, укрѣпленное внутреннимъ напряженіемъ, внутренней переработкой въ духѣ господствующаго содержанія сознанія, можетъ одержать верхъ; въ этомъ случаѣ человѣкъ открываетъ въ себѣ присутствіе внутренней силы, почему и называетъ такое состояніе свободой. Свобода и несвобода нашей духовной жизни не есть ни произволь, ни фатальность; это—лишь большая или меньшая степень напряженія процесса сознанія, т. е. большая или меньшая самостоятельность воли (стр. 180—182).

Изложенная система и общее содержаніе работы г. Кисилева показываютъ, что онъ вдумчиво отнесся къ своей задачѣ, почему первая представляетъ извѣстную стройность, а второе—послѣдовательность основныхъ мыслей. Пытаясь установить основаніе угол.

отвѣтственности, авторъ совершенно правильно обращается къ изслѣдованію этого основанія по даннымъ полож. права, дабы, во 1-хъ, выяснить его, а во 2-хъ, опредѣлить его достоинство: если оно правильно, то не зачѣмъ искать другое. Этотъ приѣмъ цѣлесообразнѣ всякихъ абстрактныхъ построеній, отрѣшенныхъ отъ ближайшаго знакомства съ указаніями богатаго опыта жизни и работы мысли, вложенныхъ въ полож. право: вѣковая человѣческая мысль и наблюденіе полны не однихъ ошибокъ, но и вѣрныхъ умозаключеній. И дѣйствительно, выводы экспериментальной психологіи въ томъ ея направленіи, которое наз. волюнтаризмомъ, какъ видно изъ труда г. Кисилева, подтверждаютъ правильность сказаннаго. Однако, признавая правильность психологич. критерія угол. отвѣтственности законодателя, г. Кисилевъ не распространяетъ того же заключенія ни на одну изъ господствующихъ въ уголов. правѣ доктринъ, не исключая и классической, ученія коей, по его мнѣнію, или настаиваютъ на свободѣ волѣ, или только приближаются къ рѣшенію даннаго вопроса, ибо не оговариваютъ силы воли, трактуя вообще о такомъ развитіи сознанія, которое недостаточно оправдываетъ мысль законодателя, признающаго самостоятельность воли (стр. 240, 256). Едва ли такая характеристика классической школы, по крайней мѣрѣ, въ лицѣ большинства ея новѣйшихъ представителей, правильна; приводимыя авторомъ цитаты изъ трудовъ Таганцева, Фойницкаго, Гейера, Миттельштета и Тарда доказываютъ противное, ибо въ нихъ говорится, во 1-хъ, о подчиненности дѣйствій человѣка законамъ психики, отличнымъ отъ законовъ внѣшней природы, во 2-хъ, о способности человѣка дѣлать выборъ между желаніями, выработать характеръ въ извѣстномъ направленіи, обуздывать свою волю, о самостоятельности нашего „я“, о самостоятельной природѣ законовъ человѣческой дѣятельности и т. п. (стр. 248—260). Несомнѣнно, что названные ученые признаютъ въ человѣкѣ наличность особой самостоятельной способности или силы, дающей ему возможность руководить своими поступками, и ихъ взгляды только тѣмъ и отличаются отъ ученія автора, что они избѣгаютъ называть эту способность „волей“, да кромѣ того не представляютъ яснаго послѣдовательнаго развитія. Впрочемъ, въ другомъ мѣстѣ г. Кисилевъ не отрицаетъ перехода классической школы отъ теории свободы воли къ теоріи ея самостоятельности, активности природы сознанія, впадая, такимъ образомъ, въ нѣкоторое самопротиворѣчіе (стр. 260—261). Нельзя также согласиться съ авторомъ, будто наиболѣе глубокое рѣшеніе дан-

ного вопроса предложилъ Тардъ, создавшій весьма туманную теорію тождества личности, склоняющійся, по словамъ самого же г. Киселева, къ метафизикѣ и также не говорящій прямо о волѣ (стр. 259--260).

Отмѣтимъ еще рядъ другихъ неточностей въ трудѣ г. Киселева. По его словамъ, Фейербахъ полагалъ, что приложеніе наказанія не предполагаетъ въ личности даже способности догадываться о существованіи закона, и въ тоже время требовалъ, чтобы преступникъ зналъ и даже болѣе или менѣе близко законъ (стр. 64); очевидно, что послѣднее положеніе исключаетъ первое. Въ другомъ мѣстѣ (стр. 89) сказано, что вмѣняемость опредѣляется виновностью; авторъ опустилъ изъ виду, что первая шире второй и ею предполагается; поэтому надо было бы сказать обратное; въ другихъ мѣстахъ эта мысль ясно выступаетъ въ разбираемомъ трудѣ (стр. 107, 108, прим., стр. 128, прим.). На стр. 101—103 авторъ заявляетъ, что Бернеръ, принимая объективную оцѣнку неосторожности, значительно суживаетъ ея субъективную оцѣнку, какъ это видно изъ того, что неосторожность у него исключается только невмѣняемостью. Приводимая имъ тамъ же цитата изъ учебника Бернера въ подкрѣпленіе указанной мысли ея вовсе не доказываетъ, ибо Бернеръ, требуя въ ней вмѣняемости для отвѣтственности, въ то же время под-сказываетъ необходимость принимать въ расчетъ при измѣреніи наказанія за неосторожность субъективныя условія, ставя ихъ рядомъ съ объективнымъ масштабомъ ея оцѣнки. Поэтому квалификация г. Кисилевымъ случаевъ совершенія преступленій по невѣдѣнію, обусловленному состояніемъ дикости, некультурности, съ точки зрѣнія Бернера,—какъ наказуемая неосторожность (стр. 104), не подкрѣпленная другими цитатами изъ трудовъ этого ученаго, представляется неожиданной. Критеріи неосторожной вины съ точки зрѣнія редакторовъ проекта нов. улож., по толкованію г. Кисилева, носятъ двоякій характеръ: объективный для лицъ профессиональнаго долга и субъективный—для остальныхъ; лица первой категоріи, говоритъ онъ, подлежатъ наказанію за неосторожный вредъ всегда, хотя бы они и не могли его предусмотрѣть (стр. 94). Едва ли такое толкованіе правильно; редакторы проекта, указывая на долгъ лицъ, вытекающій изъ ихъ профессіи, просто хотѣли подчеркнуть усиленную, лежащую на ихъ обязанности, осторожность, но вовсе не думали наказывать ихъ и тогда, когда они не могли предусмотрѣть послѣдствій, не смотря на все вниманіе и мѣры предосторожности, под-сказываемыя долгомъ. Оспариваемое заключеніе автора опровергается

основнымъ положеніемъ 35 ст. проекта, гдѣ сказано: „не вмѣняется въ вину преступное дѣяніе, коего учинившій не могъ предвидѣть или предотвратить“, положеніемъ, одинаково относящимся къ умыслу и неосторожности (см. также 344 стр. объясн. записки къ проекту общей части). Невѣрно также и то, будто бы они для оцѣнки неосторожной вины непрофессиональнаго дѣятеля не допускаютъ никакого объективнаго критерія (стр. 95); ссылка автора на слова редакторовъ проекта, что „самая возможность предвидѣнія, конечно, не имѣетъ какого-либо объективнаго критерія“ стр. 95), еще ничего не доказываетъ. Дѣло въ томъ, что объективный критерій неосторожности, съ точки зрѣнія г. Кисилева, какъ мы видѣли, сводится къ способности предвидѣнія средняго человѣка, а такая способность, какъ признаетъ и самъ авторъ (стр. 127, прим. 1-е), лишена опредѣленнаго содержанія, не представляетъ неизмѣнной величины; она—въ самой тѣсной связи съ сознаниемъ индивида, вмѣстѣ съ нимъ растетъ и измѣняется. А если такъ, то названный г. Кисилевымъ критерій—также не объективный; онъ—смѣшаннаго характера, въ которомъ субъективные моменты преобладаютъ; съ этой точки зрѣнія приведенныя слова редакторовъ проекта вовсе не давали права автору, на указанный выводъ, а также на то, будто способность предвидѣнія ими понимается въ смыслѣ предвидѣнія не соціальной личности, а исключительно индивида (стр. 94). Редакторы проекта предоставляютъ опредѣленіе возможности предвидѣнія суду въ каждомъ конкретномъ случаѣ, по соображенію его особенностей какъ субъективныхъ, такъ и объективныхъ (см. объясн. записку, стр. 345); такимъ образомъ, они вовсе не говорятъ, чтобы судъ исходилъ изъ соображенія исключительно индивидуальныхъ особенностей дѣятеля, подвергая ихъ тщательному изслѣдованію; они лишь отказываются дать объективный критерій этой возможности, т. е. ея опредѣленное основаніе; но дать такое основаніе, какъ мы видѣли, невозможно. Въ виду всего этого мы не видимъ основанія толковать понятіе неосторожности въ проектѣ нов. улож. въ смыслѣ, противоположномъ принципиально защищаемому г. Кисилевымъ; въль кодексы Франціи, Бельгіи, Италіи и наше улож. о нак. не говорятъ прямо о неосторожности средняго нормальнаго человѣка, а между тѣмъ авторъ приписываетъ имъ понятіе неосторожности именно въ этомъ смыслѣ.

Для доказательства положенія, что сознание при умьслѣ надо понимать въ смыслѣ сознанія средняго человѣка данной узкой среды, къ коей онъ принадлежитъ, г. Кисилевъ ссылается на по-

становленіе § 51 общегерманскаго улож. въ связи съ толкованіемъ германскаго имперскаго суда, которое для вмѣняемости требуетъ свободу воли не вообще, а въ отношеніи даннаго преступнаго дѣянія (стр. 122—125). Эта ссылка неудачна, ибо виновность, а слѣд. и умыселъ, какъ одна изъ ея формъ, дѣйствительно, предполагаетъ наличность условій вмѣняемости не только вообще, но и въ данномъ случаѣ—по отношенію къ данному преступленію; но изъ этого еще не слѣдуетъ, чтобы § 51 общегерм. улож. и толкованіе германскаго имперскаго суда имѣли въ виду сознаніе средняго чловѣка той узкой среды, къ коей онъ принадлежитъ. Требованіе для виновности наличности условій вмѣняемости въ данномъ случаѣ опирается на свои особыя соображенія, отличныя отъ тѣхъ, на коихъ покоится положеніе автора, а потому и не слѣдовало бы ихъ смѣшивать. Такимъ образомъ, ссылка автора не подкрѣпляетъ его положенія.

На стр. 170 авторъ заявляетъ, что по взгляду законодателя воля заключена во всѣхъ актахъ сознанія; эта мысль расходится съ ученіемъ его о волѣ, какъ о самостоятельномъ активномъ, отличномъ отъ представленій, моментѣ сознанія, изобличающемъ извѣстную степень его напряженности (стр. 180—182); она и пассивное состояніе сознанія признаетъ волевымъ. Правда, г. Кисилевъ и въ представленіи усматриваетъ элементъ волевого процесса—вниманіе, считая представленіе низшей степенью активности сознанія; однако, онъ противопоставляетъ волю и представленіе, какъ самостоятельные моменты сознанія, изъ коихъ, строго говоря, только за первымъ признается особая внутренняя сила, активность, каковая черта и кладется въ основаніе принимаемой имъ теоріи волюнтаризма въ отличіе отъ теоріи представленій. Оспариваемая мысль противорѣчитъ и тому выводу автора, что законодатель понимаетъ волю лишь въ тѣсномъ смыслѣ, въ смыслѣ избирающей дѣятельности сознанія, сопровождающейся внѣшнимъ дѣйствіемъ, т. е. сливаетъ волевой процессъ съ актами воли, съ дѣйствіями чловѣка, приписывая лишь этой волѣ значеніе самостоятельной силы (стр. 309).

Опредѣляя понятіе преступленія съ точки зрѣнія антропологовъ-криминалистовъ, г. Кисилевъ утверждаетъ, что оно и у нихъ соціальное (стр. 186). Это утвержденіе неправильно, ибо не только Ломброзо, но и Гарофалло на смѣну юридическаго или соціальнаго понятія преступленія выдвигаютъ біологическое, при чемъ первый его выводитъ изъ біологическаго закона борьбы за существо-

ваніе, создающаго преступленія даже въ жизни животныхъ и растеній, а второй—изъ предположенія прирожденнаго недостатка въ преступникахъ коренныхъ нравственныхъ чувствъ—состраданія и честности. Такимъ образомъ, невѣрно и другое утвержденіе автора, будто антропологи вовсе не сближаютъ дикаря и животнаго съ преступникомъ (стр. 186); это сближеніе выступаетъ красною нитью въ ученіи Ломброзо. Вообще, нужно замѣтить, что наложеніе г. Кисилевымъ ученій уголовно-антропологической и социологической школъ не лишено недостатковъ; кромѣ неточностей, оно страдаетъ нѣкоторою отрывочностью, бессистемностью основныхъ положеній этихъ школъ, почему и не даетъ яснаго, цѣльнаго представленія. Къ неточностямъ относится и характеристика г. Кисилевымъ классификаціи преступности Листа, какъ такой, которая выдвигаетъ ея количественную сторону—напряженность (случайная, привычная), въ противоположность классификаціи Фойницакаго, выдвигающей качественную ея сторону—содержаніе преступности или ея мотивы (прим. 2-е къ стр. 224). Дѣленіе преступниковъ на случайные и привычные основывается Листомъ не на количествѣ преступленій, а на соображеніи личнаго состоянія преступности у ихъ виновниковъ, изъ коихъ у первыхъ преступность есть нѣчто чуждое ихъ личности, а у вторыхъ—одна изъ существенныхъ ихъ чертъ, принадлежность ихъ индивидуальности, почему первые и доступны мотиваціи посредствомъ наказанія, а вторые нѣтъ. Думаемъ, что такое основаніе классификаціи преступности не количественное, а качественное, ибо оно касается самаго характера или содержанія личности преступника.

Указавъ достоинства и недостатки труда г. Кисилева, мы въ концѣ концовъ приходимъ къ тому заключенію, что авторъ не безъ успѣха выполнилъ свою задачу, показавъ, что законодатель даетъ основаніе къ широкому изученію личности преступника, къ изученію не только ея настоящаго—преступнаго дѣянія, но и прошлаго, вообще всѣхъ внутреннихъ особенностей человѣка, связанныхъ съ актомъ преступленія, при чемъ законодатель, однако, рассматриваетъ преступное дѣйствіе въ качествѣ самостоятельнаго состоянія личности, находя основаніе къ тому въ самостоятельномъ значеніи воли, оправдываемомъ и выводами положительнаго знанія—выводами психологической доктрины волюнтаризма (стр. 311). Правда, мы не находимъ въ данномъ трудѣ обстоятельнаго ученія объ основаніи угод. отвѣтственности; но авторъ и не ставилъ себѣ такой широкой задачи, ограпившись болѣе скромной (стр. 1-я). Выполняя сію послѣднюю, онъ, рядомъ съ психологическимъ матеріаломъ,

внесъ въ свою работу достаточно и юридическаго, необходимаго для изслѣдованій этого характера. Самая же разработка матеріала изобличаетъ въ авторѣ способность разбираться въ немъ, останавливаясь на такихъ рѣшеніяхъ, которыя подкупаютъ не своей новизной, оригинальностью, а внутренней устойчивостью, какъ бы они ни казались съ перваго взгляда старыми; это достоинство разбираемаго изслѣдованія съ избыткомъ покрываетъ тѣ его недостатки, какіе были отмѣчены.

Л. С. Вѣлгриць-Котларевскій.

II.

Г. Фельдштейнъ, Психологическія основы и юридическая конструкція формъ виновности въ уголовномъ правѣ, М. 1903 г.

Авторъ названнаго объемистаго труда, какъ видно изъ его предисловія, вначалѣ предполагалъ дать законченное изслѣдованіе вопроса о формахъ виновности въ уголов. правѣ, но потомъ, вслѣдствіе обилія матеріаловъ, измѣнилъ свое намѣреніе и теперь предлагаетъ работу, состоящую изъ введенія и двухъ частей. Во введеніи, вслѣдъ за указаніями общаго характера и плана изслѣдованія, онъ излагаетъ историческій очеркъ возникновенія и хода развитія понятія виновности, а также и выводы по главнымъ вопросамъ ученія о формахъ виновности. Эта вторая часть введенія, по словамъ г. Фельдштейна, покоится на изученіи всего матеріала, необходимаго для всесторонняго разрѣшенія проблемы виновности въ уголов. правѣ. Въ первой части своего труда авторъ предлагаетъ весьма пространное изложеніе психологическихъ основаній формъ виновности вмѣстѣ съ обзоромъ всевозможныхъ, какъ онъ выражается, взглядовъ по вопросамъ о безсознательной психической дѣятельности и о волѣ; вторая же часть даннаго труда посвящена опредѣленію конструкціи виновности въ мойсеевомъ и римскомъ правѣ.

Такая система труда не м. б. одобрена: въ ней выводы изслѣдованія ему предшествуютъ, а не слѣдуютъ за нимъ, какъ это само собою предполагается, да къ тому же изложеніе изъ законодательствъ только еврейскаго и римскаго права съ пропускомъ важнѣйшихъ современныхъ является какимъ то обрывкомъ, плохо связаннымъ съ теоретической частью труда. Правда, въ историческомъ очеркѣ возникновенія и хода развитія понятія виновности дѣлаются ссылки (стр. 59—62) на разработку конструкціи формъ винов-

ности по еврейскому и римскому праву, приложенную въ концѣ труда, а также въ предисловіи къ этой разработкѣ подчеркивается могущественное вліяніе еврейскаго права на средневѣковое ло изучаемому вопросу (стр. 441—444), однако, всего этого недостаточно для ограниченія изслѣдованія положительнаго права только еврейскимъ и римскимъ съ нарушеніемъ логической послѣдовательности въ планѣ труда—тѣмъ болѣе, что въ названномъ историческомъ очеркѣ указанныя ссылки съ успѣхомъ могли бы быть замѣнены подстрочными цитатами изъ источниковъ съ краткимъ ихъ комментариемъ, какъ это обыкновенно дѣлается. Могущественное вліяніе на развитіе виновности и ея формъ, по признанію самаго г. Фельдштейна (стр. 60—61), имѣло и каноническое право, тѣмъ не менѣе мы не находимъ у него спеціальнаго изслѣдованія послѣдняго; вмѣсто того авторъ предлагаетъ цитаты изъ его источниковъ съ краткимъ комментариемъ (стр. 58, прим. 72).

Основныя воззрѣнія автора, разбросанныя въ разныхъ частяхъ труда, сводятся къ слѣдующему. Угол. право есть институтъ, оперирующій при помощи угрозы наказаніемъ и его примѣненія въ интересахъ подавленія опасныхъ дѣяній. Считаюсь въ этой борьбѣ съ особенностями объекта воздѣйствія, съ психическими свойствами лица, угол. право не можетъ не обращать вниманія на субъективные моменты, обусловившіе его преступное дѣяніе, и это—тѣмъ болѣе, что руководящей цѣлью наказанія является предупрежденіе частное, т. е. исправленіе преступника въ смыслѣ устраненія опасности повторенія имъ новыхъ преступныхъ дѣяній. Субъективный же моментъ преступления, характеризующій настроеніе дѣятеля, сводится въ конечномъ результатѣ къ тому представленію, которое вызвало въ свою очередь рядъ представленій, приведшихъ въ процессъ своей реализаціи къ послѣдствію, называемому преступленіемъ (стр. 429). Однако, можно и должно бороться не съ представленіями, а съ самимъ дѣятелемъ, ибо исправленію подлежатъ не первыя, а послѣдніи (стр. 429); къ тому же причина нашихъ дѣйствій, въ томъ числѣ и преступленій, коренится во всей природѣ нашей личности, во всей совокупности активныхъ и пассивныхъ условій результата (стр. 163). Отсюда необходимо считаться не только съ міромъ актуальныхъ представленій, но и съ той почвой, на которой представленіе выросло, съ тѣми скрытыми элементами, которыми вызываются представленія, съ такъ наз. латентнымъ матеріаломъ нашего сознанія (стр. 480). Надо сказать, что далеко не всѣ представленія, образующія наше духовное богатство, сознаются нами вопль въ каждую данную минуту; будучи накоплены путемъ со-

знательныхъ опытовъ, извѣстныхъ представленія, закрѣпляясь въ насъ, способны, независимо отъ нашего сознанія, поддаваться нѣ-которому ассимиляціонному взаимодействію. Вотъ эта-то бессозна-тельная работа, во 1-хъ, сама по себѣ часто даетъ сознательные ре-зультаты, а во 2-хъ, въ сознательную работу входитъ, какъ проме-жуточный членъ. Необходимость допущенія бессознательнаго эле-мента въ сферѣ нашей духовной жизни вызывается, между про-чимъ, тѣмъ, что нами воспринимаются многія впечатлѣнія, незамѣ-чаемая при самомъ процессѣ воспріятія, которыя сказываются только впоследствии, вызывая вначалѣ лишь весьма неопредѣлен-ныя чувствованія; какъ и другія впечатлѣнія, они становятся однимъ изъ элементовъ нашей личности. Огромной ролью этихъ бессозна-тельныхъ приспособленій объясняются наши привычки, нашъ ха-рактеръ, вообще извѣстная устойчивость нашего поведенія — тѣ черты, которыя позволяютъ предугадывать, какъ поступить то или другое лицо при данныхъ обстоятельствахъ (231—232).

Этотъ скрытый матеріалъ нашего сознанія не рождается, ра-зумѣется, съ человѣкомъ, а пріобрѣтается въ связи съ переживаемыми опытами психической жизни, а сіи послѣдніе вмѣстѣ съ ихъ результатами играютъ огромную роль въ дѣлѣ угло. вмѣненія (стр. 431). Ихъ значеніе, прежде всего, выступаетъ въ области вины неосторожной, возникающей тогда, когда лицо не предвидѣло воз-можности правонарушенія, но могло и должно было его предви-дѣть (стр. 75, 433). Предположеніе этой возможности опирается на то, что у дѣйствующаго имѣется запасъ опытовъ прошлой жизни, который онъ могъ утилизировать, но который остался безъ употребле-нія (стр. 433). Наказаніе и д. б. направлено на то, чтобы сдѣлать скрытый, пассивный матеріалъ сознанія болѣе активнымъ, способ-нымъ къ реализаціи или, что—то же, сдѣлать познаваемое *in ab-stracto* способнымъ къ проявленію *in concreto* (стр. 83); признакомъ же наличности этого скрытаго матеріала является сознаніе *in ab-stracto* извѣстныхъ послѣдствій при извѣстныхъ условіяхъ, которое м. б. установлено только путемъ внимательнаго изслѣдованія лич-ности виновника дѣянія (стр. 84). Возможностью предвидѣнія по-слѣдствій дѣянія неосторожная вина отличается отъ случая, гдѣ замѣчается полное ея отсутствіе, т. е. недостатокъ ея представле-нія не только въ активномъ, но и въ пассивномъ матеріалѣ созна-нія, или, говоря иначе, отсутствіе предвидѣнія не только *in concreto*, но и *in abstracto* (стр. 432). Изложенная конструкція вины неосто-рожной, по мнѣнію г. Фельдштейна, несравненно правильнѣе, чѣмъ конструкція классической доктрины, построенной на идеѣ отрица-

тельной воли въ смыслѣ стремленія къ причиненію правонарушенія. О волѣ въ этомъ смыслѣ здѣсь не м. б. рѣчи; но о ней можно говорить въ другомъ смыслѣ—въ смыслѣ наличности у субъекта ряда представленій, находящихся между собою во взаимодействіи, въ томъ числѣ и представленія объ извѣстныхъ послѣдствіяхъ *in abstracto* предпринимаемаго дѣянія,—приводящихъ къ преступленію только потому, что одно изъ нихъ неспособно обусловить актуализацію задерживающаго представленія; такъ какъ приданныхъ условіяхъ причинная связь между представленіемъ объ опасности дѣянія и его результатомъ не м. б. отрицаема, то нельзя отвергать наличности и волевого элемента (стр. 80, 88, 90, 93—94). Воля же, по мнѣнію г. Фельдштейна, вопреки господствующей доктринѣ, не есть особое психическое состояніе съ самостоятельнымъ содержаніемъ, не разлагающееся полностью на составныя части (стр. 397—398); она есть только представленіе, дающее толчокъ проявленію движенія во внѣ или его задержкѣ, при чемъ всякому представленію приписывается элементъ движенія; всѣ они носятъ динамическій характеръ, который не чуждъ и скрытому или латентному матеріалу (стр. 401, 404, 408, 413). Всѣ волевые дѣйствія, такимъ образомъ, м. б. сведены къ представленіямъ, изолирующимся подъ вліяніемъ извѣстныхъ условій и проявляющимся въ формѣ движенія или его задержки; типическая форма волевого акта—реализирующееся представленіе (стр. 413, 435). Однако, волевыми признаются и представленія, посредственно вліяющія на другія, проявившіяся въ названной формѣ, ибо они содѣйствуютъ приведенію въ движеніе сихъ послѣднихъ или, по крайней мѣрѣ, ихъ не задерживаютъ. Конструируя волю, какъ автоматическое послѣдствіе дѣятельности представленія, г. Фельдштейнъ отвергаетъ теорію воли, какъ самостоятельной силы, способной направить наши представленія въ извѣстную сторону, между прочимъ, потому, что она будто бы неизбежно приводитъ къ ученію о свободѣ воли (стр. 423—424). Названный скрытый матеріалъ сознанія, по словамъ автора, приобретаетъ наибольшее значеніе въ идеѣ наказанія, какъ частнаго предупрежденія, какъ мѣры, направленной на соціальное исправленіе преступника; съ утвержденіемъ этой идеи онъ долженъ входить въ каждое наказаніе и его индивидуализировать сообразно конкретнымъ условіямъ даннаго случая (стр. 432).

Возможность предвидѣнія наступленія правонарушения *in abstracto*—это только зачаточная форма виновности; истинная же виновность возникаетъ съ момента, когда имѣетъ мѣсто дѣйствительное, конкретное предвидѣніе этой возможности; но, начиная съ этого

момента и кончая предвидѣніемъ полной неизбѣжности результата, мы имѣемъ дѣло съ такими отгѣнками вины, въ которыхъ можно усмотрѣть лишь количественную, а не качественную разницу; поэтому трехчленное дѣленіе формъ предвидѣнія не м. б. принято. Эта форма виновности отъ зачаточной отличается самымъ матеріаломъ сознанія: въ ней мы имѣемъ дѣло съ актуализированнымъ его матеріаломъ, отражающимъ то, что лицо непосредственно воспринимаетъ изъ окружающей дѣйствительности; въ зачаточной же формѣ первенствующую роль играетъ матеріаль латентный (стр. 433—434). Она получаетъ названіе умысла, когда къ предвидѣнію послѣдствій дѣянія *in concreto* присоединяется воля лица или активное проявленіе сознанія въ формѣ физическаго, тѣлеснаго движенія, ведущаго къ реализаціи преступленія, или въ формѣ задержки такого движенія. Умыселъ въ этомъ смыслѣ имѣетъ мѣсто какъ тогда, когда предвидѣніе является обстоятельствомъ, непосредственно вызывающимъ дѣйствіе виновнаго, такъ и тогда, когда оно не является такимъ обстоятельствомъ, а именно въ случаяхъ *dolus eventualis* (стр. 68), а также сознаваемой неосторожности—*luxuria*, когда лицо сознаетъ возможность наступленія результата, но надѣется, правда, легкомысленно его избѣжать. Сознаваемая неосторожность д. б. отпесена къ умыслу потому, что въ предѣлахъ вины сознаваемой нѣтъ прочныхъ точекъ опоры для различенія ея видовъ, если не считать таковыми не выдерживающія критики понятія—хотѣнія, допущенія; между высшей и низшей степенью сознаваемой вины не м. б. скачковъ (стр. 69—70).

Разрѣшая вопросъ о вліяніи различія умысла и неосторожности на наказаніе, авторъ ему предпосылаетъ свой взглядъ на цѣли наказанія. Главная общая его цѣль—уничтоженіе преступности въ корнѣ; ближайшія же его цѣли: обезпеченіе безопасности для общества въ лицѣ самаго виновнаго—спеціальная превенція и обезпеченіе той же безопасности въ лицѣ другихъ, еще не впавшихъ въ преступленіе,—генеральная превенція. Изъ этихъ ближайшихъ цѣлей наказанія основная—первая, ибо съ ея достиженіемъ осуществляются и другія цѣли—общее предупрежденіе и погашеніе чувства мести пострадавшаго. Цѣль специальной превенціи лучше всего достигается соціальнымъ приспособленіемъ преступника, а при невозможности того—его изоляціей; названное же приспособленіе часто невозможно безъ коренной ломки характера преступника, а слѣд. и является лишеніемъ, зломъ для преступника, которое д. б. достаточно для того, чтобы служить въ одно и то же время цѣлямъ—общаго предупрежденія и погашенія чувства мести

пострадавшего (стр. 112—114). Исходя из такого взгляда на задачу наказания, надо признать необходимость большей наказуемости в виде общего правила умысла сравнительно с неосторожностью, ибо наличие представления виновным себя последствий своего деяния и направление его согласно с таковым представлением свидетельствует, вообще говоря, о большей опасности и трудности перевоспитания деятеля сравнительно с теми случаями, когда подобного представления не было. В последних случаях большею частью, как показывает наблюдение, оправдывается предположение, что, при наличии представления себя виновным последствия, он воздержался бы от действия в виду невыгодности такого поведения. Напротив, в первых случаях пред нами такой деятель, которого не останавливает даже угроза причинения ему зла в виде наказания, что свидетельствует о более глубокой его испорченности, о большей трудности его социального перевоспитания, а след. и о необходимости более тяжкого наказания. Большая наказуемость умысла сравнительно с неосторожностью есть одно из условий нравственного существования самого общества, ибо она отвечает требованиям чувства справедливости, являющегося одним из устоев нравственного порядка. Отрицание ее равносильно устранению самого угол. права, как института, оперирующего в видах подавления преступности при помощи наказания, угроза конем и реализация ее представляют пригодное средство воздействия на личность преступника путем привития ему известных идей в качестве мотивов его деятельности, путем приучения его к руководству известными представлениями (стр. 116—122).

Переходя к разбору воззрений автора, нельзя не замечать, что его определение природы умысла, воспроизводящее формулу Листа (стр. 68, ср. учебник Листа, 10 изд., стр. 149), в сущности приводит к сужению этого понятия с неосторожностью. И в самом деле, по этому определению умисел на-лицо, когда кто либо, представляя себя, что его действие способно причинить смерть, его выполнить, при чем безразлично, играло ли такое представление роль обстоятельства, вызвавшего действие, или не играло. Но такое представление последствий своего деяния возможно и при неосторожности; однако, оно не создает природы умысла, пока нельзя установить личности, по крайней мере, безразличного отношения к последствию, т. е. известного направления воли. А, решившийся убить дикую утку в парк, где известно для него гуляет семья его хороших знакомых, вместе с уткой поражающей кого либо из членов этой семьи, виновен в неосторожном, а не

въ умышленномъ убійствѣ, хотя возможность такого послѣдствія онъ себѣ представлялъ *in concreto*, а не *in abstracto*. Точно также тотъ, кто, будучи искуснымъ стрѣлкомъ, побьется на пари, что выбьетъ трубку изъ зубовъ чловѣка, не задѣвъ его, въ случаѣ промаха совершаетъ неосторожное, неволимое убійство, ибо онъ потому и рѣшился на подобный актъ, что не допускалъ промаха. Напрасно г. Фельдштейнъ полагаетъ, что въ случаяхъ непрямого умысла защитникамъ волевой теоріи правильнѣе говорить о нежеланіи преступнаго послѣдствія и для подобныхъ дѣйствій создать особую форму вины неосторожной, близкой по наказуемости къ умыслу (стр. 68, прим. 84). Если съ предвидѣніемъ послѣдствія имплицитно тѣсно связана воля его причинить, напр., когда виновный, предпринимая извѣстное дѣяніе, знаетъ, что оно неизбѣжно поведетъ къ опредѣленному послѣдствію, или же въ душѣ противъ него ничего не имѣетъ, какъ бы включая его въ свои желанія, то въ этомъ случаѣ знаніе неизбѣжности опредѣленныхъ послѣдствій или же полное равнодушіе къ нимъ ничѣмъ качественно не отличается отъ прямой воли, хотѣнія, а потому и нѣтъ основанія дѣлать отсюда исключенія. Такимъ образомъ, для разрѣшенія подобныхъ случаевъ, вопреки мнѣнію автора (тамъ же), нѣтъ необходимости прибѣгать къ замѣнѣ теоріи воли теоріей представленій съ придаткомъ все же элемента воли, какъ активнаго проявленія сознанія въ формѣ физическаго (?), тѣлеснаго движенія, ведущаго къ реализаціи дѣянія, или въ формѣ задержки такого движенія. Не трудно видѣть, что такое опредѣленіе воли равносильно ея отрицанію, ибо оно сводитъ ее къ чистому рефлекторному акту, къ автоматическому послѣдствію ассоціаціи представленій. А если такъ, то незачѣмъ и говорить о волѣ, какъ особомъ моментѣ умысла; правильнѣе различать реализирующуюся вовнѣ ассоціацію представленій и нереализирующуюся съ отнесеніемъ къ чертамъ умысла только первой. Авторъ же, вслѣдъ за сторонниками теоріи представленій, пытается сохранить понятіе воли, при чемъ, съ одной стороны, лишаетъ его самостоятельнаго содержанія, а съ другой—распространяетъ его и на представленія, вліяющія на реализирующіяся лишь посредственно.

Такимъ образомъ, названные сторонники впадаютъ въ непослѣдовательность: припимая теорію представленій, они въ то же время не желаютъ выбросить за бортъ понятіе воли, въ которое, однако, вкладываютъ пустое содержаніе; далѣе, распространяя его и на представленія нереализирующіяся, они, строго говоря, должны были бы признать бытіе умысла и въ психическихъ феноменахъ, не проявившихся во внѣ, чего, однако, они не дѣлаютъ. Наконецъ,

построение ихъ, особенно Фельдштейна, грѣшить и тѣмъ, что на мѣсто болѣе или менѣе точныхъ юридическихъ понятій умысла и неосторожности выдвигаетъ ихъ формулы—неопредѣленные, расплывающіяся. Неудовлетворительность формулы умысла была уже отмѣчена; къ сказанному выше надо еще добавить, что различіе прямого и непрямого умысла, смотря по тому, является ли предвидѣніе обстоятельствомъ, непосредственно вызывающимъ дѣйствіе, или нѣтъ.—принимавшее г. Фельдштейномъ вслѣдъ за другими учеными, намъ кажется неудачнымъ. Оно, во 1-хъ, не даетъ никакихъ положительныхъ чертъ для понятія непрямого умысла; оно, во 2-хъ, неточно опредѣляетъ понятіе и умысла прямого, ибо приписываетъ предвидѣнію дѣянія роль, часто вовсе ему не свойственную. И въ самомъ дѣлѣ, нерѣдко представленіемъ, непосредственно вызывающимъ преступленіе, является самый мотивъ, напр., чувство мести, ревности при убійствѣ, жадности при кражѣ и т. п.; да къ тому же, вообще странно источникъ дѣянія, его непосредственно возбуждающій моментъ усматривать въ обстоятельствѣ его предвидѣнія; разсуждать такъ—не значить ли смѣшивать ближайшую причину дѣянія съ тѣмъ психическимъ состояніемъ, въ коемъ оно совершается, съ его, такъ сказать, психической обстановкой; здѣсь, на нашъ взглядъ, несомнѣнный логическій промахъ. Что же касается опредѣленія неосторожности, то, хотя авторъ и повторяетъ формулу господствующей доктрины, однако, влагаетъ въ нее нѣсколько иное содержаніе, включая въ это понятіе и случаи *luxuria* на томъ основаніи, что въ области сознаваемой вины не м. б. скачковъ. Г. Фельдштейнъ опустилъ изъ виду, что различіе формъ вины опредѣляется не только наличностью сознанія или представленіемъ дѣянія, но и направленіемъ воли, т. е. желаніемъ или, по крайней мѣрѣ, допущеніемъ послѣдствій, соизволеніемъ ихъ. Въ случаяхъ же *luxuria* именно отсутствуетъ этотъ постыднѣйшій моментъ, каковое обстоятельство побуждаетъ даже авторитетъ автора—г. Листа не признавать здѣсь умысла (учеб., стр. 151). Г. Фельдштейну поэтому можно сдѣлать упрекъ, сходный съ тѣмъ, какой онъ дѣлаетъ сторонникамъ волевой теоріи: онъ не въ мѣру расширилъ предѣлы сознанія на счетъ явленій воли (стр. 67). Не буду уже говорить здѣсь о томъ, что онъ не останавливается на различіи формулъ неосторожности: „могъ предвидѣть“, „могъ и долженъ быть предвидѣть“, употребляя ихъ безразлично (ср. стр. 75 и 81 и др.); увлекшись отрицательнымъ отношеніемъ къ господствующей доктринѣ умысла и воли, авторъ оставилъ безъ вниманія это различіе, весьма важное для юриста.

Господствующую конструкцію формъ виновности г. Фельдштейнъ считаетъ неудовлетворительной, главнымъ образомъ, потому, что она, во-1-хъ, не даетъ цѣльнаго опредѣленія понятія воли, годнаго одинаково для умысла и вины неосторожной, а во-2-хъ, вкладывая въ ученіе о неосторожности понятіе объ отрицательной волѣ—negative Willenschuld, требуетъ въ сущности наказанія за отсутствіе воли (стр. 80, 435). Этотъ упрекъ едва ли правиленъ. Господствующая доктрина подъ волей въ случаяхъ обѣихъ формъ вины въ сущности разумѣетъ одно и то же: желаніе опредѣленнаго послѣдствія или, по крайней мѣрѣ, его допущеніе, безразличное къ нему отношеніе. При этомъ въ умыслѣ видитъ наличность таковой воли, а въ неосторожности ея отсутствіе. Однако, послѣднее не означаетъ какого либо психическаго состоянія чловѣка, отъ него независащаго; напротивъ, указанная выше роль скрытаго, безсознательнаго матеріала въ нашей дѣятельности раскрываетъ эту зависимость, показывая, что въ состояніи осторожности, избобличающемъ невнимательность, небрежность чловѣка, онъ оставляетъ безъ приложенія, не утилизируетъ потенциальный матеріалъ сознанія, лежащій въ прежнихъ опытахъ жизни, т. е. свои психическія силы, вліяющія на опредѣленіе его дѣятельности. А если такъ, то падаетъ упрекъ автора въ противорѣчій по адресу господствующей доктрины, которая говоритъ о волѣ при отсутствіи стремленія (стр. 435). Она дѣйствительно при неосторожности имѣетъ въ виду отрицательную волю, т. е. недостатокъ правомѣрнаго, проникнутаго общественными интересами хотѣнія или, говоря иначе, противообщественное поведеніе субъекта. Упрекъ въ противорѣчій, думается намъ, скорѣе м. б. отпесенъ на счетъ самаго г. Фельдштейна, который признаетъ волевыми актами и указанная выше посредствующія представленія, чуждыя непосредственнаго стремленія къ послѣдствію. Приписывая искусственно классикамъ противорѣчивое понятіе воли, г. Фельдштейнъ заявляетъ, что, съ ихъ точки зрѣнія, нельзя признать непрямою умyselъ въ случаѣ потопленія экипажа корабля, вызванномъ установкой на немъ адской машины съ цѣлью причинить лишь убытокъ судовладѣльцу (стр. 92); напротивъ, такой умyselъ несомнѣнно на-лицо, если виновный предвидѣлъ гибель экипажа корабля и относился къ ней равнодушно. Неточно указаніе автора, будто защитники волевой теоріи умысла требуютъ хотѣнія не только дѣйствія, но и вытекающаго изъ него послѣдствія (стр. 63, 65 и др.); насколько намъ извѣстно, господствующее ученіе въ лицѣ большинства криминалистовъ требуетъ желаніе дѣйствія и затѣмъ допущеніе его послѣдствія, но не хо-

твiне такогоо непремѣнно. Говоря объ обстоятельствахъ, вызвавшихъ у новыхъ народовъ влiяние субъективныхъ началъ на вмѣненiе, г. Фельдштейнъ усматриваетъ ихъ въ реценциi, во виѣшемъ факторѣ, при чемъ первоначальную роль признаетъ за еврейскимъ правомъ, дѣйствовавшимъ чрезъ каноническое (стр. 58—60 и др.). Думаемъ, что эту довольно распространенную точку зрѣнiя, стремящуюся происхождение многихъ правовыхъ явленiй свести къ реценциi, пора оставить; сравнительное изслѣдование права показываетъ, что смѣна одного начала другимъ, въ томъ числѣ объективнаго вмѣненiя субъективнымъ, у новыхъ народовъ, а слѣд. и у русскихъ, есть прежде всего плодъ естественной эволюциi права, перехода отъ одного уклада къ другому, а затѣмъ уже—реценциi. Этой же внутренней эволюцией права надо объяснять и возникновение на Западѣ Европы понятiя вины неосторожной вопреки мнѣнiю автора. будто названное понятiе тамъ возникло подъ влiяниемъ объективнаго вмѣненiя новыхъ народовъ германской расы изъ понятiя умысла вообще римскаго права и непрямого умысла права еврейскаго и сложилось въ самостоятельную форму, благодаря средне-вѣковымъ итальянскимъ криминалистамъ (стр. 71—72, 60—62). Разъ на смѣну объективнаго вмѣненiя выступило субъективное, рядомъ съ умысленной формой вины д. была сама собою выработаться и неосторожная съ устраненiемъ случайныхъ дѣянiй, какъ исключяющихъ вину, при чемъ на эту выработку чужое право могло влiять посредственно, ускоряя ее ¹⁾.

Слишкомъ смѣло утверждение автора, что вмѣстѣ съ социальнымъ исправленiемъ сами собою достигаются другiя цѣли наказанiя—общее предупреждение и удовлетворение чувства мести пострадавшаго (стр. 85, 115); такъ бываетъ иногда, но далеко не всегда. Отрицая цѣлесообразность дѣленiя умысла на виды, г. Фельдштейнъ основанiе его раздѣленiя съ различiемъ въ наказанiи на предумышление и внезапный, сводящееся къ признанiю въ первомъ случаѣ безусловно (?) бoльшей преступной энергiи, объявляетъ ошибочнымъ (стр. 96—98). Такое воззрѣнiе не совсѣмъ вяжется съ положенiемъ автора о необходимости бoльшаго наказанiя умысла сравнительно съ неосторожностью потому, что въ большинствѣ случаевъ наличность представления результата, при прочихъ одинаковыхъ условiяхъ, должна влiять на возвышенiе наказанiя; въ отдѣльныхъ же случаяхъ, при неравныхъ условiяхъ, возможна меньшая наказуемость умысла сравнительно съ неосторожностью (стр. 117—123). Онъ

¹⁾ См. мою работу: „Общiя черты исторiи угол. права. 1893 г.“

опустилъ изъ виду, что приводимыя имъ соображенія въ защиту названнаго положенія примѣнимы въ значительной мѣрѣ и къ предумышленію, бѣльшая наказуемость коего сравнительно съ внезапнымъ умысломъ при прочихъ равныхъ условіяхъ въ большинствѣ случаевъ достаточно оправдывается, на нашъ взглядъ, соображеніемъ о бѣльшей энергій преступной воли, а слѣд. и о бѣльшей опасности дѣянія, доказываемыхъ обдуманностью, всестороннимъ обсужденіемъ его плана; въ отдѣльныхъ же случаяхъ, при неравныхъ условіяхъ, возможно и обратное отношеніе. Въ обѣихъ сопоставляемыхъ комбинаціяхъ мѣриломъ наказанія является субъективный факторъ и при томъ нѣсколько сходный, ибо и во второй можно различать наличность представленія подробностей дѣянія—предумышленіе и отсутствіе такового—внезапный умыселъ. Отвергая понятіе о волѣ, какъ о самостоятельномъ явленіи нашей психической жизни, при помощи, между прочимъ, доводовъ, довольно сбивчивыхъ (стр. 402), авторъ находитъ, что единственно реальнымъ моментомъ этой жизни надо признать представленіе (тамъ-же). Думаемъ, что ему вовсе не удалось доказать реальность представленій, ибо это явленіе не реальнаго, а абстрактнаго міра, о которомъ мы судимъ лишь путемъ умозаключеній. По мнѣнію г. Фельдштейна, субъективный моментъ преступления, въ смыслѣ характеристики настроенія дѣятеля, сводится къ тому представленію, которое вызвало рядъ представленій, приведшихъ къ послѣдствію, наз. преступленіемъ (стр. 429). Но такое опредѣленіе субъективнаго момента преступления сближаетъ его съ понятіемъ мотива, какъ возбуждающаго момента нашей дѣятельности, а между тѣмъ для характеристики настроенія дѣятеля, по словамъ самаго же автора, для характеристики воли недостаточно установленія мотива; необходимо изслѣдованіе всей духовной природы личности, которая вовсе не концентрируется въ мотивѣ (стр. 35, 163).

Излагая еврейское право, г. Фельдштейнъ проявляетъ отмѣченное уже выше увлеченіе въ указаніи его достоинствъ и вліянія на развитіе западно-европейскаго. Къ ошибкамъ автора здѣсь надо отнести и его мнѣніе, что въ правѣ Мойсея вмѣнялся только умыселъ, какъ опредѣлившаяся форма вины; неосторожность же каралась лишь какъ *delictum sui generis* (стр. 449). Ближе къ истинѣ толкованіе Тонисена, который говоритъ, что „мысль не оставлять безнаказаннымъ убійство всякаго рода была общей въ древнемъ правѣ; каралось и ненамѣренное убійство, дабы лишити убійць всякихъ отговорокъ и обязать всѣхъ людей постоянно наблюдать надъ своими дѣйствіями, дабы предупредить такое зло; согласно съ симъ Мойсей, говоря о ненамѣренномъ убійствѣ, указываетъ многіе при-

мѣры, дабы дать судьямъ руководство къ оцѣнкѣ частныхъ случаевъ, и вообще проявляетъ крайнюю заботу, когда дѣло идетъ о человѣческой жизни“¹⁾). Мнѣніе автора расходится съ его же заявленіемъ въ другомъ мѣстѣ, что Моисеево право различало убійство умышенное и неумышенное, при чемъ къ послѣднему относилъ неосторожныя и случайныя дѣянія, не сознавая, однако, этого различія и не считая его существеннымъ (стр. 59—60). Насколько эта оговорка убѣдительна, видно изъ того, что умышенное убійство обыкновенно влекло смертную казнь, а неумышенное—бѣгство виновнаго въ города убѣжища съ правомъ родственниковъ потерпѣвшаго его убить, если онъ переступалъ до извѣстнаго времени ихъ предѣлы; смертная же казнь за него назначалась только въ тяжкихъ случаяхъ, близкихъ къ умыслу, да и то альтернативно съ выкупомъ (Исходъ, гл. 21, ст. 13. 28—32). Не менѣе спорно то же мнѣніе автора въ примѣненіи къ римскому праву, которое, по его словамъ, на всѣхъ стадіяхъ своего развитія карало только умышенныя дѣянія, не зная другой формы вины (стр. 457 и 60). Выказывая такой взглядъ, г. Фельдштейнъ въ сущности слѣдуетъ за Лейфлеромъ и Листомъ, возрѣнія которыхъ онъ нерѣдко принимаетъ безъ достаточной провѣрки и проводитъ довольно прямолинейно. Надо замѣтить, что о наказуемости неосторожности по римскому праву относительно времени до Адриана еще идетъ споръ между криминалистами и романистами; относительно же послѣдующаго времени, какъ признается самъ авторъ, господствуетъ единомысліе (стр. 482 и др.). Листъ же въ своемъ учебникѣ (10 изд., стр. 139) заявляетъ, что неосторожное преступленіе, какъ таковое, въ римскомъ угол. правѣ на всѣхъ ступеняхъ его развитія было неизвѣстно. Вотъ это-то положеніе и старается доказать г. Фельдштейнъ, своеобразно толкуя источники, изъ коихъ видно, что господствующей формой вины былъ умыселъ, но при нѣкоторыхъ болѣе важныхъ преступленіяхъ—убійствѣ, поджогѣ и др. каралась и неосторожность. Встрѣчающіеся случаи наказуемости послѣдней, по толкованію автора, суть лишь особыя преступленія, заключавшія въ себѣ нарушеніе обязанности, подрывъ добрыхъ правовъ, религіи, правъ монарха и т. п., при чемъ меньшая ихъ наказуемость сравнительно съ умышеннымъ совершеніемъ тѣхъ же дѣяній неизвѣстна римскому праву (стр. 495, 497—498, 504, 506, 509, 565—568).

¹⁾ Thonissen, *Études sur l'histoire du droit criminel des peuples anciens*, 1869 г., т. II, стр. 197.

Въ этомъ мнѣніи вѣрно только то, что неосторожность въ данномъ правѣ не получила развитія, равнаго умыслу; но ошибочно полагаетъ авторъ, что отсутствіе въ немъ общаго термина для обозначенія уголовно-правовой неосторожности, а также общаго цѣльнаго ея понятія ведетъ къ отрицанію ея, какъ самостоятельной формы вины (стр. 564). Обобщеніе уголовно-правовыхъ понятій есть большею частью плодъ позднѣйшей науки; старое же угол. право, не исключая и римскаго, развивалось казуистически—путемъ опредѣленія отдѣльныхъ случаевъ. Не мудрено поэтому, что понятіе вины неосторожной, не уложившееся вполнѣ и въ наше время, въ римскомъ правѣ не получило опредѣленнаго содержанія; думаемъ, что и умыселъ въ немъ, вопреки заключенію г. Фельдштейна, лишенъ былъ *опредѣленнаго и точнаго содержанія* (стр. 526). Эти понятія слишкомъ тонки и сбивчивы, чтобы могли получить въ то время такое содержаніе. Изъ книги автора видно, что римское право иногда и даже перѣдко смѣшивало умыселъ съ неосторожностью и даже съ случаемъ (стр. 468, 531 и др.); гдѣ же тутъ опредѣленность и точность названнаго понятія? Ясно, насколько тщетно требованіе автора для признанія наказуемой неосторожности въ римскомъ правѣ, чтобы она каралась во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, въ коихъ ея понятіе то допускаетъ (стр. 569). Это требованіе едва ли выполнимо по отношенію и къ умыслу; по крайней мѣрѣ, авторъ того не доказалъ. Возникновеніе же наказуемой неосторожности, какъ особой формы вины, видно уже изъ характеристики самимъ авторомъ отдѣльныхъ случаевъ ея наказуемости, объемлющихъ нарушеніе устоевъ римскаго общества и государства, имѣвшихъ болѣе или менѣе важное значеніе (стр. 565); такимъ образомъ, въ римскомъ правѣ, какъ и теперь, неосторожность каралась при болѣе важныхъ преступныхъ дѣяніяхъ, при посягательствахъ на болѣе важные жизненные интересы. Попытка г. Фельдштейна доказать ненаказуемость неосторожнаго убійства опровергается наказуемостью такихъ случаевъ, какъ причиненіе смерти прохожему обрѣзчикомъ деревьевъ, сбрасывающимъ вѣтви безъ окрика; правда, онъ старается свести этотъ случай къ умыслу, но искусственность подобнаго толкованія очевидна; въ его книгѣ приведены и другіе примѣры наказуемости неосторожнаго убійства, которые онъ рассматриваетъ, какъ спеціальныя нарушенія обязанности (стр. 505—506, 566). Лучшимъ опроверженіемъ заявленія г. Фельдштейна о неизвѣстности римскому праву меньшей наказуемости неосторожности сравнительно съ умысломъ служатъ его собственныя слова, что въ императорскую эпоху на неосторожный поджегъ далеко не смотрѣли, какъ на то же преступ-

леніе, которое каралось столь строго на случаи учиненія его съ умысломъ; онъ карался въ качествѣ полицейскаго проступка (стр. 508). Правда, и здѣтъ онъ усматриваетъ наказаніе неосторожнаго поджега, какъ особаго преступленія, но такое толкованіе д. б. отвергнуто уже потому, что неосторожность, какъ мы видѣли, каралась при многихъ разнообразныхъ посягательствахъ на важнѣйшіе жизненные интересы; наказуемость ея далеко не была единичнымъ явленіемъ, исключеніемъ. Какъ общее положеніе, г. Фельдштейнъ высказываетъ ту мысль, что въ эпоху императоровъ основной формой вины былъ умыселъ; неосторожность же обсуждалась наравнѣ съ случайными послѣдствіями; въ тѣхъ же рѣдкихъ случаяхъ, когда она каралась, такое вмѣненіе приближается къ вмѣненію объективному (стр. 508—509). Выходитъ, такимъ образомъ, что неосторожность въ это время обыкновенно сливалась съ ненаказуемымъ случаемъ и если каралась иногда, то по началамъ объективнаго вмѣненія. Такой выводъ автора идетъ далѣе вышеприведенныхъ его возрѣній; тамъ онъ не отрицаетъ наказуемой неосторожности въ видѣ особыхъ деликтовъ, въ составъ коихъ она входитъ, какъ необходимый элементъ; здѣсь же этотъ субъективный моментъ теряетъ свое существенное значеніе, ибо все сводится къ началамъ объективнаго вмѣненія. Непослѣдовательность взглядовъ и неточность ихъ формулировки достаточно ясна.

Вообще, послѣдовательность изложенія и точность формулировки положеній далеко не составляютъ принадлежности труда г. Фельдштейна, изобличая тѣмъ его неспѣшность и малопродуманность; къ недостаткамъ его надо присоединить еще весьма тяжелый и мѣстами неправильный языкъ, затрудняющій изученіе книги. Особеннаго упрека онъ заслуживаетъ въ томъ, что представляетъ рѣзкое нарушеніе требованія концентричности изложенія: вмѣсто сжатыхъ по возможности выводовъ психологич., относящихся къ данному вопросу, съ приведеніемъ лишь типическихъ основныхъ возрѣній, авторъ предлагаетъ пространное изложеніе разнообразныхъ ученій отдѣльныхъ писателей, отличающихся другъ отъ друга иногда лишь мелкими чертами; въ слѣдствіе этого психологическая часть работы у него непомѣрно разрослась и подавляетъ юридическую, преобладающее значеніе которой въ юридическомъ изслѣдованіи авторъ почему-то опустилъ изъ виду. Если бы онъ на это обстоятельство обратилъ должное вниманіе, то онъ отвелъ бы несравненно болѣе мѣста юридическому анализу формъ виновности, который у него, къ сожалѣнію, весьма слабъ и даже поверхностенъ, сводясь часто къ голому отрицанію положеній господствующей док-

трины; мало этого, обойденъ полнымъ молчаніемъ рядъ вопросовъ, напр., о степеніи формъ виновности—о такъ наз. случаяхъ: *abegatio ictus* и *ergo in objecto*, о предѣлахъ преступныхъ дѣяній, допускающихъ умыселъ и неосторожность, о предѣлахъ наказуемости вины неосторожной и т. д.

Однако, работа г. Фельдштейна не лишена и достоинствъ; она прежде всего доказываетъ его несомнѣнную эрудицію и при томъ даже въ вспомогательной угол. праву дисциплинѣ—въ области психологій; далѣе, изъ нея видно, что авторъ, при всемъ своемъ увлеченіи отрицаніемъ господствующихъ доктринъ угол. права, остановился предъ вопросомъ о различіи формъ виновности и признаетъ необходимость этого различія съ большей наказуемостью умысла сравнительно съ неосторожностью, при чемъ указываетъ правильное, на нашъ взглядъ, психологическое тому обоснованіе, удачно отличая роль безсознательнаго матеріала въ нашей дѣятельности. Опредѣленіе этой роли, по нашему мнѣнію, образуетъ лучшую часть труда г. Фельдштейна. Наконецъ, авторъ вѣрно освѣщаетъ цѣли наказанія, признавая основной изъ нихъ частное предупрежденіе, какъ мѣру соціального приспособленія преступника, часто невозможную безъ коренной ломки характера преступника, а потому и являющуюся для него лишеніемъ. Такимъ образомъ, нѣкоторые болѣе важные вопросы избранной г. Фельдштейномъ темы поставлены и разрѣшены удовлетворительно, почему его работа, казалось бы, и м. б. допущена къ защитѣ на искомую степень.

Л. С. Вѣлогрицъ-Котляревскій.

III.

Диссертация Г. С. Фельдштейна, представленная на соискание ученой степени магистра уголовного права в Юридический Факультет Университета Св. Владимира, представляет собой объемистый труд, около 600 страниц, тем не менее далеко не окончанный. Обилие материала, пишет автор, сделало неосуществимым его первоначальное предположение закончить труд, почему он и ограничился выпущенным ныне в свет, полагая, что и оно имеет самостоятельное значение (V стр.). Вследствие этого, вместо полного изложения вопроса, мы имеем только введение; помимо краткого очерка исторического развития форм виновности и общей их характеристики в доктринах, что собственно и составляет основной вопрос, подлежащий исследованию в дальнейшем, автор дает почти на 300 страницах вводное исследование о соотношении психического или физического и подробную историю вопроса о воле в психологической литературе, после чего и переходит к юридической части, но здесь ограничивается исследованием форм виновности в монсеевом и римском уголовных законодательствах. Из этого уже видно, что труд автора созрел несколько преждевременно, и основные мысли его юридически являются мало обоснованными, за отсутствием анализа не только современного законодательства, но и важнейших прошлых. Для каждого ясно, что выводы, почерпнутые из области монсеева и римского прав, более чем недостаточны. В такой неполноте разработки главной темы коренится существенный недостаток разбираемого труда. Автор подчас кропотливо занимается вопросами, далеко выходящими за пределы темы, посвящает этому много времени и труда, вследствие чего естественно до существенного и не доходит. Наконец, возникает большое

сомнѣніе въ необходимости детальнаго изслѣдованія такихъ вопросовъ, о которыхъ самъ авторъ говоритъ, что они криминалистами не должны рѣшаться, а послѣдніе должны брать выводы по этимъ вопросамъ изъ другихъ дисциплинъ въ готовомъ видѣ (стр. 27). Этому мудрому правилу авторъ не послѣдовалъ и далъ очеркъ ученій о душѣ и тѣлѣ, во многихъ мѣстахъ написанный изъ вторыхъ рукъ, такъ какъ авторъ не дѣлаетъ ссылокъ на труды упоминаемыхъ имъ Галлена, Галя, Флуранса и Брока. Такое отношеніе автора въ значительной мѣрѣ подрываетъ цѣнность главы, къ тому же мало относящейся къ главному вопросу. Далѣе идетъ очень детальныи разборъ психологическихъ теорій о волѣ, съ указаніемъ на ученія и такихъ писателей, о которыхъ самъ же авторъ замѣчаетъ, что они „забыты“—и достойно, а между тѣмъ одному изъ такихъ ученій—ученію Фортлаге (стр. 260) онъ посвящаетъ 6 страницъ, а о многихъ другихъ ограничивается хотя краткими замѣчаніями, но уже окончательными ненужными. Впечатлѣніе остается, какъ будто авторъ весь сырой матеріалъ, надъ которымъ онъ останавливался по ходу возбуждавшихся у него вопросовъ, предалъ тиспенію. Это только загромоздило трудъ. Лабораторная работа—работа черновая, и она должна была въ данномъ случаѣ остаться въ бумагахъ автора. Сомнителенъ даже „критическій“ методъ (л. д. 30) въ изложеніи психологическихъ доктринъ. Почти всегда онъ сводится къ нѣсколькимъ замѣчаніямъ, а часто къ передачѣ мнѣній другихъ, напримѣръ, при критикѣ ученія Бенеке (стр. 251).

То обстоятельство, что авторъ, вслѣдъ за Иерингомъ, признаетъ, что исторія уголовного права: ein Stück der Psychologie der Menschheit, однако, не давалъ ему права юридическій трактатъ превращать въ психологическій, такъ какъ и авторъ сознаетъ, что, по его мнѣнію, психологія и криминалистика являются совершенно отличными другъ отъ друга дисциплинами, различными и по предмету, и по методу, и по своей цѣли (стр. 27). Неудачными мы считаемъ соображенія автора о „чистой“ и „прикладной“ наукахъ, навѣяныя доктриной проф. Колоколова, гдѣ „чистой“ наукой является „изслѣдованіе позитивнаго права“. Правда, авторъ дѣлаетъ поправку къ этому, полагая, что невѣрно ограничивать такую чистую науку положительнымъ правомъ (стр. 8), но и такая поправка ничего не исправляетъ, такъ какъ считать „чистой наукой“ такой предметъ, какъ изслѣдованіе положительнаго права совершенно неправильно. Да и самъ авторъ, утверждая, что юриспруденція—часть социологій, повидимому, и не долженъ былъ бы и считать догму—наукой. Но тутъ авторъ мало послѣдователенъ. Вообще методологическія

соображенія автора, мнѣ думается, довольно спутаны, благодаря желанію его свести соціологію и юриспруденцію въ господствующемъ ея пониманіи къ одному. Труды Листа, Принса, а у насъ Есипова и отчасти Чубинскаго въ области уголовного права, обогатившіе на мысли о возможности компромисса, доказали невозможность его. Здѣсь нужно было быть болѣе послѣдовательнымъ. Что касается общихъ соображеній о наукѣ (стр. 15 и сл.), о классификаціи наукъ, въ связи съ замѣчаніями по поводу пропуска Контомъ въ ней психологій, то едва ли это нужно было и вносить: настолько тенерь ошибка Конта общепризнана.

Обратимся къ его положеніямъ по существу. Авторъ и здѣсь начинаетъ довольно издалека,—съ понятій о „наукѣ о правѣ“ и „о самомъ правѣ“,—и въ этомъ отношеніи его, пожалуй, можно упрекнуть въ слишкомъ большой краткости. Казалось бы, что нужно было разрѣшить эти вопросы съ болѣею основательностью, или ихъ совсѣмъ не касаться. Какъ выше замѣчено, по мнѣнію автора, наука права (чистая) должна изслѣдовать законы явленій, такъ какъ она вѣтвь соціологій (стр. 8), и поэтому неправильно ограничивать изслѣдованіе только областью положительнаго права. Но всякому ясно, что авторъ въ своемъ изслѣдованіи ничѣмъ не доказалъ возможности такого изслѣдованія положительнаго законодательства: изслѣдованіе ведется по рецепту догматической разработки, а объ изслѣдованіи причинной зависимости явленій нѣтъ рѣчи: стоитъ лишь обратиться къ тому, какъ онъ изслѣдуетъ формы *виновности* въ уголовномъ правѣ римлянъ и евреевъ.

На ряду съ этой „чистой“ наукой права существуетъ, по мнѣнію автора, прикладная. Понятіе о ней у автора, мнѣ кажется, сбивчивое. Прикладная наука—это не то *Juristenrecht* (стр. 9), не то теорія естественнаго права (стр. 10). Наконецъ, самая новѣйшая теорія естественнаго права (политика права) понимается имъ совершенно невѣрно. Авторъ пишетъ, будто она отрицаетъ „обязательность“ права (10). Простая справка, хотя съ трудомъ, напр., проф. Петражицкаго „Очерки философіи права“, показала-бы автору, что дѣло идетъ не объ отрицаніи этого признака „обязательности“, а въѣшней (государственной) принудительности права... Проф. Петражицкій неоднократно говоритъ о чувствѣ связанности, сопровождающемъ атрибутивные нормы. Авторъ смѣшалъ „обязательность“ и въѣшнюю „принудительность“. Впрочемъ, самъ авторъ, указывая на современное движеніе въ правѣ, категорически не высказывается о его значеніи. Невольно напрашивается аналогія этой теоріи, по мнѣнію автора, съ *Juristenrecht*, но едва ли такое пониманіе

правильно. Современная доктрина исходитъ изъ такихъ принциповъ, которые, по ея мнѣнію, мало общаго имѣютъ съ субъективными построениями. Надо сказать, что эта часть изслѣдованія о прикладной наукѣ мало продумана. Неясно, откуда эта прикладная наука будетъ брать свой матеріалъ. Авторъ, правда, указываетъ, что „идеальныя построенія“ должны считаться съ положительнымъ правомъ, что доктрина въ качествѣ идеальныхъ можетъ предлагать испытанныя другими націями формы для отсталыхъ государствъ... (стр. 13). Но тогда спрашивается:

Во 1-ыхъ, зачѣмъ это раздѣлять науку на „чистую“ и прикладную, когда чистая не довольствуется положительнымъ правомъ, а прикладная, — идеальными построениями. Не проще ли создать одну „науку“ или же поступить, какъ проф. Колоколовъ, который, быть можетъ, неправильно, но опредѣляетъ для каждой особую сферу?

Во 2-хъ, не заключается ли въ этой мысли смѣшеніе области законодательной политики съ „наукой“. Неясность соображеній сказывается у автора и въ его мысляхъ относительно значенія психологіи для прикладной науки. Авторъ увѣряетъ (стр. 23), что нельзя не соображаться съ особенностями объекта, для котораго создается право, съ психологіей человѣка, что концепціи прикладной науки уголовного права будутъ имѣть жизненное значеніе тѣ, которыя не станутъ игнорировать законы дѣятельности *человѣческаго духа*. Странность этихъ мыслей ясна... Развѣ люди науки, вѣдь, рѣчь идетъ о *Juristenrecht*, могли бы игнорировать „законы духа“ и писать свои „идеальныя построенія“ для не людей? Наконецъ, развѣ при идеальныхъ построенияхъ только и принимаются во вниманіе психологическія законы. Психологическія данныя только указываютъ предѣлы всякихъ построеній, а построенія эти даются этикой, религіей, социологіей—чѣмъ хотите изъ общественныхъ наукъ, но не психологіей.

Общее заключеніе—авторъ въ теоріи права неясенъ. Напр., на стр. 37, говоря о классификаціи преступниковъ, онъ пишетъ: „жизнь обгоняетъ теорію“ и „надежная теорія можетъ быть создана единственно практическимъ путемъ“.. О какихъ же *идеальныхъ* построенияхъ можетъ быть рѣчь въ наукѣ, если оказывается, что жизнь обгоняетъ *теорію*. Мысль можно бы понять иначе,—но во всякомъ случаѣ выражена она такъ, что даетъ право сдѣлать выводъ о неточности и неясности его понятій въ области „прикладной науки“. Перехожу къ его „криминалистическому очерку“. Главный предметъ уголовного права—*феномены* преступленія и наказанія,—утверждаетъ авторъ, а потому и переходитъ къ опредѣленію

этихъ понятій, но на самомъ дѣлѣ ихъ не даетъ, хотя онъ и говоритъ, что понятіе преступленія, довольно опредѣленно (24). Мы думаемъ, что далеко не такъ опредѣленно, а въ особенности сомнителенъ тотъ общій признакъ, о которомъ онъ говоритъ, т. е. обнаруженіе воли. *Волевой* признакъ въ понятіи преступленія споренъ, да, пожалуй, съ точки зрѣнія теоріи *воли* автора, и не нуженъ.

Сущность ученія о волѣ автора сводится къ слѣдующему. Воля не особое психическое состояніе (стр. 398),—это только особое усиленіе, сопровождающее представленіе и его реализацію (399). Двигательный элементъ имманентенъ представленію.

Дѣятельность организма является не чѣмъ инымъ, какъ осуществленіемъ моторныхъ инервацій, обусловленныхъ содержаніемъ представленій (412). То, что называютъ волевыми дѣйствіями есть не что иное, какъ одно изъ тѣхъ центробѣжныхъ движеній, которыя исходятъ изъ главнаго центра нервной системы—изъ пашихъ мозговыхъ полушарій (415—416). Борьба мотивовъ только борьба представленій (416). Изъ этого ученія ясно, что о свободѣ воли и рѣчи быть не можетъ, и воли, какъ самостоятельнаго элемента въ психической жизни, не существуетъ. А если такъ, то какое же значеніе можетъ имѣть внесеніе такого понятія въ опредѣленіе преступленія. Значитъ, преступленіе невозможно безъ наличности реализованныхъ представленій, но *вовсе* не воли. Оставляя въ сторонѣ критику ученія о волѣ, я не могу, однако, не сказать, что, независимо правильности воззрѣній автора на волю, несомнѣнно неправильно вносить въ другія опредѣленія такое понятіе, котораго фактически не существуетъ. А если авторъ хочетъ называть „волей“ такіе психическіе элементы, которые, съ его точки зрѣнія, представляются только двигательными движеніями, то, пожалуй, можно упрекнуть автора въ такомъ извращеніи термина, которое для общезначительскаго смысла представляется не съ чѣмъ несообразнымъ. Если авторъ въ одномъ мѣстѣ книги, критикуя ученіе о „бессознательныхъ представленіяхъ“ говоритъ, что онѣ мало понятны, то столь мало понятнымъ является ученіе о волѣ, не имѣющей ея признаковъ.

Независимо отъ изложеннаго, внесеніе въ опредѣленіе преступленія признака „воли“ и потому неправильно, что оно не объемлетъ всѣхъ періодовъ развитія уголовного права. При объективномъ вмѣненіи, понятно, не можетъ быть и рѣчи о „волѣ“, а слѣдовательно, давая научное опредѣленіе (надо помнитъ, что, по автору, и уголовное право вѣтвь социологій), нельзя вносить признакъ, не охватывающій всѣхъ періодовъ.—и правильнымъ только съ

точки зрѣнія періода высшаго развитія права.

Отдѣльвторой посвященъ *выводамъ* поглавнымъ вопросамъ ученія о формахъ виновности въ связи съ очеркомъ возникновенія и хода развитія понятія виновности. Это собственно „недоразвившееся“ цѣлое. Авторъ, прежде всего, указываетъ на важность разграниченія формъ умысла, объявляя, что дѣленіе это всегда будетъ выступать какъ факторъ, оказывающій могучее вліяніе на *объемъ вмѣненія*. Это совершенно невѣрно. „Объемъ“ вмѣненія непонятенъ съ точки зрѣнія господствующей доктрины. Можно говорить о „мѣрѣ отвѣтственности“ и въ качествѣ критерія его, главнымъ образомъ, указывать на формы умысла. Такъ видимо и понимаетъ выраженіе „объемъ вмѣненія“ и самъ авторъ, когда толкуетъ объ опредѣленіи соответствующаго наказанія той или иной формѣ (стр. 36) или о *наказаніи* иногда неосторожности строже умысла (стр. 117). Но тогда и слѣдовало бы говорить о вліяніи разграниченія не на объемъ вмѣненія, а на мѣру наказанія. Несомнѣнно, это *lapsus linguae*. Далѣе авторъ, сопоставляя свою теорію съ „облюбованнымъ новѣйшей доктриной уголовного права въ качествѣ критерія при опредѣленіи *мѣры отвѣтственности* различіемъ преступниковъ привычныхъ и случайныхъ“,—уже прямо и говоритъ о мѣрѣ отвѣтственности, т. е. о наказаніи (34).

Авторъ указанному дѣленію преступниковъ, какъ критерію, не придаетъ значенія, и мы лично думаемъ, что напрасно: во 1-хъ потому, что оно не противорѣчитъ признанію формъ умысла; во 2-хъ, потому, что и теорія уголовного права, и практика жизни признали вѣрнымъ это дѣленіе, и новѣйшіе кодексы (русскій, норвежскій, проектъ швейцарскаго) отвели ему подобающее мѣсто. Вѣдь, не будетъ же авторъ, придающій громадное значеніе психикѣ, отрицать, что это дѣленіе не имѣетъ громадной будущности. Дѣло другое — точное выясненіе его,—и здѣсь автору можно замѣтить, что напрасно онъ отождествилъ понятіе рецидивиста и преступника привычнаго. Этотъ упрекъ не по адресу новой школы, и она вовсе не предлагаетъ карать безусловно какъ опаснаго члена всякаго рецидивиста, будь это въ 30-ый разъ нарушающій тишину или оскорбляющій полицейскаго. Отрицательно относится авторъ и къ значенію въ уголовномъ правѣ мотива. Это отрицательное отношеніе для насъ мало понятно тѣмъ болѣе со стороны автора, объявляющаго уголовное право вѣтвью социологіи и признающаго, что уголовное право—почти синонимъ психологіи,—мы видимъ здѣсь прямую непослѣдовательность между методологическими послылками и изложеніемъ предмета. Авторъ, наконецъ, забываетъ, что и зако-

подательства всегда придавали значение мотиву. Нельзя-же серьезнымъ возраженіемъ считать, что психологія мало дала для различенія отдѣльныхъ характеровъ, недостаточны для этой цѣли и наблюденія практиковъ... Но, прежде всего, лучше *ничто*, чѣмъ ничего,—а затѣмъ жизнь указываетъ, что никогда и нигдѣ судебная практика, такъ или иначе, не игнорировала мотива. Правда, авторъ, вслѣдъ за изложеніемъ вопроса о мотивѣ, и отмѣчаетъ, что нельзя признавать за судьей „усмотрѣнія“, такъ какъ онъ мало знаетъ преступника,—мало его знаетъ и тюремное начальство. А еще меньше, скажемъ мы, узнаетъ преступника „законъ“—и вышшимъ произволомъ будетъ произволъ законодателя, *все* желающаго опредѣлить.

Такія воззрѣнія автора слѣдствіемъ имѣли, что основнаго вопроса объ индивидуализаціи наказанія онъ почти не коснулся.

По поводу историческаго очерка развитія формъ виновности мы ограничимся двумя, тремя замѣчаніями, такъ какъ эта глава—обыкновенный общепринятый въ учебникахъ пересказъ извѣстнаго. Неудачно выраженіе, что „актъ мести лишенъ былъ значенія „факта *юстиции*“, въ нашемъ смыслѣ. Это невѣрно: мечь имѣла обязательный характеръ, а слѣдовательно, несомнѣнно, была фактомъ юстиціи въ нашемъ смыслѣ. Напрасно авторъ мало обратилъ вниманія на объясненіе перехода отъ объективнаго вмѣненія и групповаго къ индивидуальному и субъективному. Послѣ трудовъ Тарда и Штейнметца можно было правильнѣе объяснить переходъ вліяніемъ *домашней юстиции*, въ предѣлахъ рода, несомнѣнно, всегда бывшей и индивидуальной и субъективной, на родовую мечь, перешедшую изъ области международнаго права въ уголовный институтъ и воспріявшую черты домашней юстиціи. Этому вопросу авторъ не коснулся, а между тѣмъ, повторяемъ, по его взгляду, на право какъ на вѣтвь социологіи—главное—объясненіе „феномена преступления и наказанія“. У автора же факты только *констатируются*, но не объясняются. Не совсѣмъ вѣрно указаніе автора на „объективизмъ“ каноническаго права. Наказуемость, по каноническому праву случайнаго убійства, вовсе не остатокъ объективнаго вмѣненія, а совершенно сознательное постановленіе въ цѣляхъ „успокоенія души“. Да и нельзя здѣсь говорить *о наказаніи*. Что касается теоріи умысла, то авторъ становится, понятно, на сторону теоріи представленія, поэтому послѣдовательно развивая свой взглядъ, онъ *luxuria* относитъ къ области умысла. Совершенно вѣрно замѣчаетъ авторъ, что нѣтъ основанія *особенно* дробить виды умысла, чѣмъ страдала особенно германская литература,—но нельзя согласиться съ авто-

ромъ, что *luxuria* надо наказывать какъ *dolus*. *Luxuria*—не умыселъ. Правда, авторъ послѣдователенъ,—но если уже отнести теоретически *luxuria* къ *dolus*'у, то всетаки надо было установить для нея болѣе мягкую отвѣтственность: надо же помнить, что авторъ и не приверженецъ судейскаго усмотрѣнія, которое могло бы корректировать кодексъ, построенный на ученіи автора. Мы высказываемся за наше уголовное уложеніе 1903, которое отнесло *luxuria* къ неосторожности. Въ постановкѣ автора, вопреки его главной мысли, оказалось бы, что придается большое значеніе результату. Если же и не отнести *luxuria* къ неосторожности, то можно бы, по примѣру Löffler'a, создать посредствующую форму между неосторожностью и умысломъ въ видѣ *Wissentlichkeit*.

Вызываетъ возраженія и теорія неосторожности, хотя въ значительной степени упорядоченная въ редакціи сочиненія, представленной въ факультетъ, сравнительно съ ранѣе выпущеннымъ въ продажу. Неосторожность (исправленная теорія) должна быть ограничена случаями, когда дѣйствующій не сознаетъ возможности правонарушенія, не можетъ его предвидѣть. Незаказуемость ея объясняется наличностью латентнаго элемента въ жизни, т. е. сохраненія прежняго опыта. Съ этимъ спорить нельзя,—но не выдвигается ли этимъ признакъ „опасности“ субъекта въ социальномъ отношеніи, къ чему авторъ относится отрицательно.

Нельзя, однако, согласиться съ авторомъ и съ его теоріей *средняго нормальнаго* человѣка, критерія неосторожности. Съ точки зрѣнія автора было бы правильнѣе говорить о субъективномъ критеріи.

Для психологическаго объясненія своей теоріи неосторожности авторъ опять и здѣсь ссылается на свою теорію воли, какъ представленія (стр. 88 и 93). Дополненіемъ къ изложеннымъ въ началѣ книги у автора служатъ соображенія на стр. 440 и сл. Здѣсь анализированы элементы умысла. Собственно въ 1-й редакціи авторъ, исходя изъ своей теоріи, совершенно правильно замѣчалъ, что нѣтъ основанія различать представленія, руководящія преступникомъ,—но въ исправленной редакціи дѣлаетъ уступку „господствующему взгляду“, указывая, что и съ его точки зрѣнія это сдѣлать можно. Это не вѣрно; отсюда не вѣрное освѣщеніе вопроса о цѣли, мотивѣ, планѣ и намѣреніи—невѣрное, конечно, съ принятой имъ точки зрѣнія. Намѣреніе—по мнѣнію автора, *представленіе, ведущее* преступника на опасный для общества путь... А мотивъ—это представленіе, вызывающее къ дѣятельности... Кажется, тутъ *никакой* разницы нѣтъ, а это потому, что съ точки зрѣнія волевой теоріи—

намерение акт воли, а мотив—акт представления, и разница есть, а с точки зрения автора такое различие свелось только к нескольким иной формулировке определения. Да и с точки зрения автора *намерение* нельзя было определить как представление, а как его реализацию, в смысле движения.

Наконец, вся характеристика умысла не выдерживает критики. Элементы—мотив, намерение, особенно *план* (вместо просто способа совершения)—скорее имеют в виду только предумышление. Так и чудится бандит с определенным планом действий... Жизнь этого не дает. План вырабатывает не всякий преступник, а умысел открывается в аффектированном преступлении, где „плана“ нет, а следовательно, этот элемент в умисл не обязательный. Можно говорить только о способе действия. Во всяком случае, это разложение умысла с теорией представления у автора не стоит ни в какой связи.

Отрицая всякие деления *dolus'a*, автор, конечно, склоняется к теории Гольцендорфа.

Нам кажется, что суровая критика этим ученым предумышленного преступления обязана в значительной степени только тому, что ему придавали серьезное значение при убийстве, наказывая предумышленность смертною казнью. В нашем законодательстве вопрос о делении умысла теряет свою жгучесть,—а в особенности при широте судейского усмотрения,—и можно поэтому приветствовать всякое устранение излишних рубрик из законодательства, раз они теряют смысл. Но нельзя сказать, будто это деление не имеет теоретического значения. Во первых, разграничение аффектированных преступлений от умысленных или предумышленных имеет глубокий психологический интерес. Во вторых, нельзя упускать из виду, что в литературе (Proal и др.) были попытки отнести более сурово к аффектированному умыслу—преступлению по страсти.

Этого вопроса автор даже не затронул. Далее нельзя не сказать, что предумышленность очень характерный психологический признак, дающий часто указания на особую испорченность преступника. Нельзя поэтому не согласиться с Legrand (*De la préméditation*), что соображения Гольцендорфа теоретически далеко не убедительны. Поэтому признающий значение „психики“, кажется, не может отрицать, по крайней мере, научного значения этого деления—для анализа преступной деятельности, хотя бы законодательство это игнорировало по соображениям практическим. В заключение несколько слов по поводу характеристики новейших док-

тринъ. Авторъ замѣчаетъ, прежде всего, будто „разобраться въ положеніяхъ „позитивной школы трудно“ и будто все у нихъ вызываетъ междоусобицы“ (99). Это прямо невѣрно. Напротивъ, есть цѣлый рядъ общепризнанныхъ положеній. Авторъ, говоря такъ, смѣшиваетъ основныя положенія съ второстепенными выводами изъ фактовъ. Надо помнить, что еще Ломброзо сказалъ: быть можетъ изъ этихъ мелкихъ заключеній не останется камня на камнѣ, но дѣло не въ нихъ, а въ методологическихъ основахъ и принципахъ. Не споримъ, многое еще не установлено, но не меньшій-ли расколъ между классиками... Доказательство—трудъ автора, еще разъ на видъ выступающій далеко не общее согласіе въ такихъ основныхъ положеніяхъ, какъ понятіе умысла и неосторожности, а вѣдь объ этомъ классики толкуютъ не одну сотню лѣтъ. Вообще изложеніе взглядовъ новѣйшихъ доктринъ, особенно Ферри, односторонне. Упрекъ въ признаніи со стороны новой школы объективнаго вмѣненія мало понятенъ. Надо же помнить, что Ферри не предлагаетъ наказанія для душевно-больныхъ преступниковъ, а мѣру охраны въ видѣ заключенія въ особые дома сумасшедшихъ. При чемъ тутъ „объективное вмѣненіе“?. Авторъ, между прочимъ, дѣлаетъ упрекъ Ферри, что онъ сторонникъ полной несвободы воли... А какъ же характеризовать ученіе автора, сводящаго все къ неминуемымъ движеніямъ вслѣдствіе представленія. Развѣ это ученіе о *неполной* свободѣ? Если нѣкоторые писатели и говорятъ объ относительной свободѣ, то во всякомъ случаѣ къ ихъ числу авторъ принадлежать не можетъ, какъ это видно изъ вышензложенной теоріи воли. По крайней мѣрѣ, Ферри послѣдователенъ, а у автора вдругъ является (на стр. 102) признаніе, будто возможно, что одно и то же лицо станетъ дѣйствовать при однихъ обстоятельствахъ совершенно различно. Этого при теоріи представленій автора признать немислимо.

Отмѣтимъ, между прочимъ, аргументицію автора въ пользу значенія формъ умысла ссылкой на учебникъ Листа (108 стр.). Это неудачно потому, что его учебникъ нельзя считать воплощеніемъ его взглядовъ, такъ какъ это—обыкновенный *Lehrbuch* съ догматической разработкой. Изложеніемъ ученій социологической школы авторъ заканчиваетъ свои соображенія о развитіи формъ виновности и затѣмъ переходитъ къ выясненію влияния на уголовное вмѣненіе формъ виновности, давъ впереди очеркъ своихъ воззрѣній на наказаніе, какъ на специальное предупрежденіе (превенція), дополненіемъ которой является генеральная превенція, послѣдняя и „постулируетъ“, чтобы наказаніе было зломъ, а первая—преслѣдуетъ

цѣли исправленія. Хотя такіа задачи и трудно примирить, если въ отношеніи каждаго преступника преслѣдовать и ту, и другую цѣль,—но мы не будемъ касаться этого вопроса тѣмъ болѣе, что связь его съ формами виновности авторомъ мало установлена. Но точка зрѣнія „опасности“ настолько въ вопросѣ о наказаніи доминируетъ надъ авторомъ, что здѣсь онъ допускаетъ, по соображеніямъ *шлессобразности*, случаи, когда лицо, дѣйствующее съ неосторожностью, придется наказывать тяжелѣе, чѣмъ лицо, дѣйствующее съ умысломъ (117). Невольно тогда напрашивается сомнѣніе въ правильности увѣренія автора, будто отрицаніе формъ виновности въ современномъ смыслѣ является равносильнымъ устраненію вообще уголовного права“ (119). Авторъ и тутъ непослѣдователенъ. Въ 1-ой редакціи авторъ такъ далеко шель—пожалуй, далѣе критикуемой имъ „съ объективнымъ вмѣненіемъ“ новой школы—въ признаніи соціальной опасности, какъ признака наказуемости—что предполагалъ наказывать какъ за умыселъ дѣйствовавшего неосторожно, если доказано, что онъ бы поступилъ также, если-бы предвидѣлъ результатъ (стр. 123). Авторъ, правда, въ представленномъ въ факультетъ экземплярѣ исключилъ это, но такъ какъ 1-ая редакція книги была въ продажѣ, то мы вправѣ изложить прежній взглядъ автора. Илагая такое воззрѣніе, авторъ былъ послѣдовательно вызванъ на это своей теоріей воли—представленія. Разъ представленіе — существенный моментъ, то, понятно, такого испорченнаго субъекта, который „представляетъ“ себѣ результатъ (хотя и послѣ его наступленія) и таковой одобряетъ — карать какъ „умышленнаго преступника“ можно, ибо умыселъ требуетъ наличности представленія результата. Намъ казалось, что это былъ пробный камень его теоріи; поэтому, устраняя теорію неосторожности „умышленной“, онъ долженъ былъ внести исправленія и въ свою теорію воли. Этимъ закончимъ свои замѣчанія по поводу „основной главы“ и перейдемъ къ исторической части. Авторъ началъ съ „моисеева права“, но если вообще авторъ въ экскурсіяхъ въ область психологіи начиналъ издалика, то здѣсь ему даже это нужно было сдѣлать. Авторъ себя выставилъ позитивистомъ-соціологомъ (положимъ, какъ мы видѣли, неосновательно), а если такъ, то, пожалуй, ему было надо начать съ тѣхъ первоначальныхъ формъ уголовного права, гдѣ зарождалась идея виновности. Труды Поста, Колера, а особенно Штейнметца дали бы ему возможность болѣе основательнѣе изложить вопросъ о „феноменахъ преступления и формахъ виновности. Löffler не прошелъ молчаньемъ первобытныхъ формъ, и кажется, общая картина зако-

новъ развитія формъ виновности отъ этого только выиграла. Взять исходной точкой моисеево право, авторъ и не могъ объяснять *причины* перехода объективнаго вмѣненія въ субъективное. Вообще у автора, какъ мы уже замѣтили, слишкомъ мало *объясненія* въ смыслѣ положительнаго метода. Переходя къ критической оцѣнкѣ изложенія авторомъ моисеева права, нельзя не обратить вниманія на то, что авторъ преувеличилъ его значеніе. Ссылка въ доказательство на заповѣди далеко не убѣдительна: ничего чисто „моисеева“ онѣ не заключаютъ, а представляются правилами житейской мудрости всѣхъ народовъ. Идея возмездія тоже не специфическая для этого права. Знакомому съ трудомъ Гюнтера: *Die Idee der Wiedervergeltung* это несомнѣнно. Авторъ особенно рѣшительно на стр. 60 утверждаетъ, что будто ученіе о *dolus indirectus* создавалось „почти всецѣло“ на почвѣ моисеева права; но на слѣдующей же страницѣ онъ отмѣчаетъ только „косвенное его вліяніе“. Löffler (стр. 49) по этому поводу скромно замѣчаетъ о *соответствіи* одной изъ формъ убійства въ моисеевомъ правѣ съ *dolus indirectus*—и только. Нельзя также согласиться съ тѣмъ, что моисеево законодательство *первое* придало особое значеніе субъективному моменту. Законы Ману и Гэндъ, Авесты въ достаточной степени проникнуты тѣмъ же элементомъ. Нельзя признать праильнымъ и заявленіе автора, что въ эпоху Моисея объективное вмѣненіе было отжившимъ институтомъ. Противъ этого говоритъ существованіе городовъ—убѣжищъ, наказаніе животныхъ, групповая отвѣтственность и отсутствіе понятія покушенія и соучастія. Да и, наконецъ, самъ авторъ указываетъ на существенное значеніе объективнаго момента (см. прим. на стр. 452). По поводу наказуемости животныхъ авторъ замѣчаетъ, что это было установлено въ цѣляхъ гигиеническихъ (стр. 453). Это объясненіе совершенно невѣрно. Поэтому едва ли можно согласиться съ авторомъ, что на первый планъ ставилась субъективная сторона (455). Нѣтъ, только она стала выдѣляться, сначала въ области тяжкихъ преступленій,—убійства, а затѣмъ и въ области сакральнаго права которое очень долго было объективнаго характера, какъ и всѣ сакральныя права. Что касается римскаго права, то едва ли правилень основной взглядъ автора, что римское право знало только умыселъ. Противъ этого взгляда авторитетъ Цумпта и Моммсена, но и помимо этого надо имѣть въ виду, что римское право было довольно развитое. Надо признать, что намеки на раздѣленіе были, но понятно точнаго разграниченія не было. Въ гражданскомъ правѣ разграниченіе было, и это признаетъ и авторъ, но если такъ, то едва ли можно отрицать, что его знало и уголовное право: грани были

слишком неопредѣленны. Да и самъ авторъ въ другомъ мѣстѣ (47) ссылается въ доказательство на гражданское право. Поэтому нельзя согласиться съ авторомъ, который слѣдуетъ въ этомъ отношеніи Löffler'у. Mommsen (*Römisches Strafrecht*, стр. 90) правъ, утверждая, что если источники понятіе *dolus a* противопоставляли *casus*'у, то это еще не значить, что *culpa* не была: *casus* не исключаль ответственности безусловно, а потому можно думать, что неосторожность наказывалась. Такъ, собственно думаетъ и авторъ (на стр. 563). Затѣмъ доказательство автора, что *culpa lata* и *dolus* тождественны не вѣрно, потому что сами источники говорятъ, что они только близки, да и примѣры, приведенные имъ, не убѣдительны. Этимъ мы закончимъ наши замѣчанія по поводу исторической части. Въ заключеніе нѣсколько словъ о психологической части сочиненія. Здѣсь не лишне отмѣтить, что на ст. 130 и 134 авторъ признаетъ такую связь физическихъ и психическихъ явленій (чисто материалистическую), которую ставитъ въ упрекъ Ферри. Мы уже выше отмѣтили характеръ главы о душѣ и тѣлѣ, добавимъ, что по собственному признанію автора, стр. 234—есть-ли „личность“, аггломератъ чисто физическій или психическій—все это не измѣняетъ сущности дѣла“. Но мы вправѣ тогда спросить автора, зачѣмъ же онъ этимъ занимается. На стр. 427 онъ утверждаетъ, что изученіе соотношенія физическаго и психическаго даетъ ему возможность признать дѣйствительность угрозы, и этимъ оправдать наказаніе. Кажется, что эти вопросы въ связи не стоятъ или, лучше сказать, что никто не сомнѣвался въ томъ, что мы не имѣемъ другихъ средствъ воздѣйствія на психику кромѣ тѣла.

Что касается ученія о волѣ, то мы рѣшительно должны сказать, что философскія ученія о волѣ излагать здѣсь было совершенно не нужно. Для цѣли автора достаточно было бы признанія латентнаго матеріала въ человѣкѣ и выясненія его значенія для уголовного права. Отмѣтимъ, что въ одномъ мѣстѣ авторъ даже призналъ существованіе „безсознательныхъ принциповъ“, указывая что ими объясняется наше воспитаніе.

Таковы недостатки труда. Однако, несмотря на нихъ, въ работѣ есть несомнѣнныя достоинства. Смягчающимъ вину обстоятельствомъ въ недостаткѣ полной обработки сюжета со стороны автора служить научное увлеченіе автора вопросами сопредѣльными. Оно увлекло его въ сторону,—но можно надѣяться, что авторъ всетаки выполнитъ свою работу и разовьетъ свои положенія въ будущемъ.

Трудъ автора заслуживаетъ вниманіе по значительной эрудиціи въ сопредѣльныхъ вопросахъ и по детальной разработкѣ психологическихъ ученій. Нельзя не отдать должнаго кропотливой работѣ сравненія источниковъ моисеева, а въ особенности римскаго права,— и подчасъ тонкому юридическому ихъ анализу. Во всякомъ случаѣ историческій очеркъ автора остается цѣннымъ вкладомъ, благодаря его полнотѣ.

Эти достоинства работы позволяютъ признать, несмотря на указаные выше дефекты, что изслѣдованіе Г. С. Фельдштейна можетъ быть допущено къ публичной защитѣ въ качествѣ диссертациі на степень магистра уголовного права.

Приватъ-доцентъ **К. Шавровъ.**

20 января 1904 г.

О понятіи реальности по Шубертъ-Зольдерну.

А. Э. Вайнштейна.

1. Имманентное міропониманіе является заключительнымъ звеномъ длиннаго философскаго пути, въ началѣ котораго стоитъ Локкъ. Локкъ указалъ на субъективность нѣкоторыхъ свойствъ матеріальной субстанціи. За нимъ Беркли совершенно уничтожилъ это понятіе, разложивъ его безъ остатка на субъективные элементы. Но по странной непослѣдовательности Беркли не могъ отрѣшиться отъ признанія духовной субстанціи. Юмъ разрушилъ и это понятіе, признавъ объектъ связкой воспріятій, а субъектъ связкой представленій. Кантъ въ сущности продолжалъ дѣло Юма, но онъ отчасти затемнилъ новое міропониманіе своимъ неправильнымъ пониманіемъ „вещи въ себѣ“. Имманентная школа совершенно выбрасываетъ изъ своего философскаго обихода „вещь въ себѣ“ и утверждаетъ, что познаніе всегда остается въ предѣлахъ сознаваемаго, при чемъ субъектъ и объектъ существуютъ исключительно въ качествѣ той или другой комбинаціи содержаній сознанія.

Такое міропониманіе можетъ быть названо *объективнымъ* идеализмомъ. Оно встрѣчается также у Платона и Гегеля, но у нихъ преобладаетъ метафизическій элементъ надъ гносеологическимъ. Чисто гносеологическое выраженіе оно впервые получаетъ у представителей имманентной школы¹⁾. Мы рассмотримъ ученіе одного изъ нихъ—Шубертъ-Зольдерна²⁾.

¹⁾ Ср. Кюльпе. Введеніе въ философію. Сиб. 1901. § 26.

²⁾ См. его: Ueber Transcendenz des Objects und Subjects. 1882. (При цитированіи этого сочиненія мы обозначаемъ его Tr.); Grundlagen einer Erkenntnistheorie. 1884 (Gr.); Das menschliche Glück und die sociale Frage. 1896 (Gl.).

2. По мнѣнію Шуберть-Зольдерна существуютъ только данныя сознанія, только то, что выступаетъ въ формѣ воспріятія, представленія или понятія. Воспріятія, представленія, понятія являются единственнымъ матеріаломъ, изъ котораго создается все разнообразіе дѣйствительности. Часть этихъ данныхъ—именно, представленія и связанныя съ ними чувства и хотѣнія—образуетъ наше „я“, или субъектъ; другая часть—воспріятія—образуютъ „не я“, объектъ; на границѣ „я“ и „не я“—міра репродукціи и міра воспріятій—находится совокупность данныхъ, образующихъ наше тѣло.

3. Благодаря отчетливому выдѣленію этихъ трехъ моментовъ существующаго, мы можемъ придти къ рѣшенію вопроса, что собственно нужно разумѣть подъ понятіемъ *сознаніе*. Конечно, здѣсь не можетъ быть и рѣчи о подведеніи сознанія подъ какое-нибудь высшее понятіе, т. к. сознаніе, какъ нѣчто первоначальное, не можетъ быть выведено изъ чего-либо такого, что само не было бы сознаніемъ. Путемъ анализа мы можемъ только установить существенные признаки сознанія и такимъ образомъ освободить это понятіе отъ различныхъ метафизическихъ ингредиентовъ и вообще всего того, что неправильно къ нему примысливается,—не больше.

Для этой цѣли проанализируемъ какой-нибудь конкретный фактъ со стороны его сознанности¹⁾.

Что я имѣю въ виду, когда утверждаю, что сознаю дерево, стоящее передо мной? Я имѣю въ виду, во-первыхъ, то, что это дерево, какъ нѣкоторая совокупность содержаній, *отличается* отъ всѣхъ остальныхъ содержаній, данныхъ вмѣстѣ съ нимъ; во-вторыхъ, то, что оно находится въ извѣстныхъ *пространственныхъ* отношеніяхъ къ моему тѣлу; въ третьихъ, что оно неразрывно связано съ моимъ „я“ и переживается въ *настоящій моментъ*.

Дѣло обстоитъ такъ же, когда я утверждаю сознанность какого-нибудь представленія. Разница только та, что предметъ воспріятія относится къ моему тѣлу прямо, а предметъ представленія—косвенно,—благодаря своему отношенію къ „я“, которое, въ свою очередь, неразрывно связано съ тѣломъ.

Не измѣняетъ нашего утвержденія и то положеніе, что представленіе можетъ быть отнесено не только къ настоящему, но и къ прошлому и будущему. Убѣжденіе въ самостоятельномъ, раздѣльномъ существованіи этихъ трехъ моментовъ—одна иллюзія. Я могу утверждать какое-нибудь данное постольку, поскольку его мыслю.

¹⁾ Стр. 6—10.

Утверждая какое-нибудь данное, я, въ сущности, утверждаю свое мышленіе. Но мое мышленіе есть процессъ въ настоящемъ; слѣдовательно, всякое данное пребываетъ, переживается въ настоящемъ. Переживаніе въ настоящемъ—вотъ единственно реальный фактъ; прошедшее и будущее суть только извѣстныя отношенія внутри настоящаго и возможны лишь, какъ абстракціи. Чтобы утверждать, что извѣстное данное есть фактъ прошлаго или будущаго, я долженъ абстрагировать отъ того, что утверждаю это данное въ моментъ переживанія его въ настоящемъ¹⁾.

Такимъ образомъ, *сознаніе есть субъективная связь, определяемая различимостью, пространствомъ и временемъ*²⁾.

Эта связь не есть нѣчто независимо существующее внѣ данныхъ, но присуща имъ самимъ. Данные не вступаютъ въ уже готовую связь, но существуютъ въ ней первоначально; внѣ этой связи данные вовсе не существуютъ.

Съ этой точки зрѣнія мышленіе и міръ другъ отъ друга неотдѣлимы. Мышленіе есть только мышленіе міра, и міръ данъ только въ отношеніяхъ мышленія; безъ нихъ—онъ чистая абстракція. Но неправильно называть міръ только представленіемъ „я“, души, духа и т. д., такъ какъ эти слова обозначаютъ лишь опредѣленное отношеніе внутри мірового содержанія, и поэтому можно съ тѣмъ же правомъ утверждать, что я, душа, духъ только отношенія внутри міра; они въ такой же степени находятся въ мірѣ, какъ міръ въ нихъ, такъ какъ ничто изъ нихъ не предшествуетъ другъ другу.

4. Сознаніе, понимаемое въ такомъ смыслѣ, охватываетъ собою все бытіе и неразрывно связано съ нимъ. Нѣтъ бытія, которое не было бы сознано; нѣтъ ничего сознанаго, которое не существовало бы³⁾. Сознаніе и бытіе—два понятія, необходимо предполагающія другъ друга. Мы, конечно, можемъ говорить отдѣльно то о бытіи, то о сознанности предмета, но это возможно только благодаря абстракціи. Подобно тому, какъ во время ѣзды намъ кажется, что порой деревья мчатся намъ навстрѣчу, порой мы мчимся мимо нихъ—такъ въ сознаніи мы можемъ фиксировать то отношенія содержанія, абстрагируя отъ связи съ нашимъ „я“ и его тѣломъ, то отношенія сознанія—именно эту связь. Сообразно съ тѣмъ или инымъ направленіемъ нашего вниманія мы говоримъ или просто о *бытіи* предмета или о *сознаніи* предмета⁴⁾.

¹⁾ См. Gr. стр. 72, 3.

²⁾ Gl. Vorwort, VII.

³⁾ Gr. 7.

⁴⁾ Tr. 82.

5. Въ этихъ немногихъ положеніяхъ заключается общій очеркъ гносеологій Шубертъ-Зольдерна. Какъ можно было замѣтить, она опирается на слѣдующія три положенія: 1) мы не имѣемъ права утверждать трансцендентное, 2) субъектъ и объектъ суть только отношенія внутри мірового содержанія, 3) сознание и бытіе—коррелятивныя понятія одинаковой высоты абстракціи. Все наше дальнѣйшее изложеніе есть только разъясненіе, развитіе и защита указанныхъ положеній.

6. Что такое *трансцендентное*? Трансцендентнымъ вообще мы называемъ все то, что выходитъ за предѣлы сознанія, за предѣлы познавательнаго процесса. Но изъ этого опредѣленія ясно, что понятіе трансцендентнаго заключаетъ въ себѣ противорѣчіе. Утверждать трансцендентное значить говорить о познаніи несознаваемаго или непознаннаго. Одно изъ двухъ: или мы что-нибудь знаемъ о трансцендентномъ — въ такомъ случаѣ оно перестаетъ быть таковымъ; или мы ничего о немъ не знаемъ—въ такомъ случаѣ оно есть чистое ничто. Въ частности трансцендентное выступаетъ въ двойной формѣ: въ формѣ вещи въ себѣ и въ формѣ независимо отъ насъ существующаго чувственнаго предмета ¹⁾).

7. Мы утверждаемъ трансцендентное, когда признаемъ, что существуетъ вещь въ себѣ, являющаяся причиной постоянно даннаго, опредѣленнаго міра и обладающая какимъ то особымъ немпирическимъ бытіемъ ²⁾). Но такое утвержденіе совершенно голословно. Если мы желаемъ вложить какой-нибудь опредѣленный смыслъ въ понятіе *бытія*, то должны его мыслить въ тѣхъ формахъ, въ какихъ оно выступаетъ въ нашемъ непосредственномъ опытѣ, т. е. въ формѣ воспріятія, представленія или понятія; всякое другое бытіе есть нѣчто неуловимое, непонятное и должно быть совершенно отвергнуто, какъ безсмыслица ³⁾).

Но если мы все-таки оперируемъ съ понятіемъ вещи въ себѣ, то это возможно только благодаря иллюзіи, порождаемой словами. Та или другая комбинація словъ можетъ быть совершенно бессмысленна, но въ то же время обладать видимостью какого-нибудь значенія. Очень часто подобныя чисто словесныя комбинаціи входятъ въ обиходъ философствованія и, не смотря на полную свою немыслимость, приобрѣтаютъ большое значеніе ⁴⁾). Сюда относятся: „вещь

¹⁾ Tr. 37—8.

²⁾ Tr. 39.

³⁾ Gr. 10.

⁴⁾ Gr. 10, 12, 13.

въ себѣ“, независимый „отъ меня мiръ“ и др. Это такія же бессмысленныя выраженія, какъ „деревянное желѣзо“, но ихъ бессмысленность, какъ-то болѣе замаскирована. Не менѣе нелѣпо выдавать вещь въ себѣ за причину всего мiра сознанія. О причинѣ всего мiра сознанія можно было бы говорить только тогда, когда мы могли бы стать внѣ его, такъ чтобы онъ противостоялъ намъ, какъ нѣчто цѣльное.

Но фактически дѣло обстоитъ совершенно иначе. Намъ дается мiръ лишь въ частяхъ его постепеннаго развитія, и ни въ прошломъ, ни въ будущемъ мы не можемъ мыслить конца этого развитія. Но если бы мы даже могли мыслить абсолютную границу мiра сознанія, и предположеніе причины для него казалось бы возможнымъ, то все-таки, этотъ ограниченный мiръ сознанія вмѣстѣ съ своей причиной, поскольку онъ мыслился бы, былъ бы предметомъ сознанія ¹⁾).

8. Мы утверждаемъ также трансцендентное, когда признаемъ, что предметы существуютъ независимо отъ нашего „я“ въ томъ видѣ, какъ они нами наблюдаются. Такую ошибку допускаетъ наивный реалистъ съ своей вѣрой въ объективное бытіе чувственныхъ предметовъ ²⁾).

Разсмотримъ этотъ вопросъ поближе, при чемъ сначала центральнымъ пунктомъ мiра будемъ считать наше тѣло, затѣмъ наше „я“.

Въ какомъ отношеніи къ нашему *тѣлу* находятся предметы? Проанализируемъ это на примѣрѣ. — Я нахожусь въ комнатѣ и разсматриваю бездѣлушку изъ розоваго дерева. При помощи моихъ внѣшнихъ чувствъ я констатирую ея опредѣленное существованіе. Я удаляюсь въ другую комнату всѣ зрительныя, осязательныя и обонятельныя ощущенія, которыя только что были на лицо, исчезаютъ. Что же стало съ бездѣлушкой? Перестала ли она также существовать съ моимъ удаленіемъ? Представляетъ ли она только возможный комплексъ ощущеній, зависящий отъ присутствія моего тѣла, т. е. простую возможность? Наоборотъ, существованіе бездѣлушки есть необходимость, при чемъ необходимость, конечно, лишь при предположеніи извѣстныхъ условій; до выполненія ихъ она дѣйствительно есть только возможность. Условія, благодаря которымъ она изъ возможной превращается въ необходимую, суть знакомыя опредѣленныя движенія моего тѣла. Между движеніями моего тѣла и измѣненіемъ моего поля зрѣнія существуетъ необходимое отно-

¹⁾ Тт. 40.

²⁾ Тт. 41.

шеніе. И это необходимое отношеніе между всѣми данными сознанія есть то, что мы выражаемъ словомъ „существовать“.

Такимъ образомъ, для того, чтобы предметъ признанъ былъ существующимъ, не необходима его непосредственная данность въ качествѣ воспріятія; достаточно одного констатированія его связи съ находящимися въ наличности данными сознанія. Напр., я убѣжденъ, что бездѣлушка существуетъ въ настоящій моментъ и на прежнемъ мѣстѣ, хотя я ея не вижу, не осязаю, не обоняю. Утверждая это, я имѣю въ виду, что она стоитъ въ необходимой связи съ данными теперь воспріятіями, что мой міръ воспріятій, мыслимый какъ существующій въ необходимой связи, былъ бы не мыслимъ, имѣлъ бы невосполнимую брешь безъ этой бездѣлушки. Она есть непремѣнный элементъ моего міра воспріятій и поэтому держится и падаетъ вмѣстѣ съ нимъ. Итакъ, восприимчивость бездѣлушки при извѣстныхъ условіяхъ необходима. Но изъ этого, конечно, не слѣдуетъ, что я могу ее воспріять въ любой моментъ. Необходимыхъ для этого условій можетъ и не быть на лицо. До осуществленія извѣстныхъ условій воспріятіе бездѣлушки только возможно ¹⁾.

Вышеизложенныя замѣчанія можно резюмировать въ слѣдующихъ четырехъ положеніяхъ: 1) предметъ есть комплексъ воспріятій, связанныхъ съ дѣятельностью моего тѣла, 2) утверждая его существованіе, я утверждаю его связь съ наличными воспріятіями, 3) существованіе его есть необходимость при осуществленіи извѣстныхъ условій, 4) оно есть простая возможность, поскольку эти условія еще не осуществлены.

9. Но существованіе предмета зависитъ не только отъ тѣла, но и отъ „я“—отъ міра репродукціи. Міръ воспріятія и міръ репродукціи представляютъ неразрывное единство. Стоитъ только изъ того комплекса данныхъ, которыя составляютъ предметъ, отнять тотъ или другой моментъ существующаго,—и предметъ будетъ разрушенъ. Если же мы, несмотря на это, считаемъ міръ воспріятія и міръ репродукціи двумя отдѣльными мірами, то это лишь результатъ абстракціи. Сущность ея такова.

Наблюдая данный намъ міръ сознанія, мы замѣчаемъ, что между его элементами, такъ или иначе различающимися между собой, существуютъ два вида данныхъ, представляющихъ два очень различныхъ типа существованія; это—міръ репродукціи и міръ воспріятія, которые образуютъ наше тѣло, причемъ вмѣстѣ съ движе-

¹⁾ Тт. 46, 47, 48.

віями моего тѣла возникаютъ все новыя и новыя комбинаціи воспріятій. Какъ видно, міръ репродукціи воздѣйствуетъ на міръ воспріятій при помощи той части послѣдняго, которая составляетъ наше тѣло, и, такимъ образомъ, все данное какъ-то естественно дѣлится на міръ по ту сторону тѣла (объектъ) и по сю сторону тѣла (субъектъ) ¹⁾.

Обыкновенно мы не выходимъ за предѣлы этой абстракціи. Но бывають моменты, когда первоначальное единство сушаго возстановляется. Укажемъ, напр., на наше переживаніе во время очень углубленнаго разсматриванія какой-нибудь картины, во время увлеченія какой-нибудь идеей. Въ эти моменты человѣкъ, такъ сказать, не помнитъ себя; разаница между субъектомъ и объектомъ совершенно исчезаетъ; выражаясь фигурально, они какъ будто-бы находятся на одной плоскости ²⁾.

Результатъ описанной абстракціи, раскальвающей міръ на субъективную и объективную часть, принимается за реальный фактъ, благодаря иллюзіи, порождаемой словами. Предполагають, что могутъ представить или мыслить міръ, независимый отъ „я“, потому что имѣють для этого слово. Я могу предметы, которые абстрагирую отъ „я“, называть независимыми отъ меня и, такимъ образомъ, думаю, что мыслю ихъ таковыми, хотя въ дѣйствительности подобное независимое существованіе вовсе не мыслимо.

Итакъ, все дано въ отношеніи къ моему „я“. Но допустимъ, что мое „я“ разрушено, перестало функціонировать? Продолжаетъ ли тогда существовать наша бездѣлушка? Кто долженъ объ этомъ судить? Я? Но, по предположенію, меня больше нѣтъ. Можетъ быть, мой товарищъ? Но въ такомъ случаѣ я долженъ предварительно знать, что онъ существуетъ безъ моего „я“, иначе не можетъ быть и рѣчи о его сообщеніи. Впрочемъ, и тогда бы оно не имѣло бы для меня никакого значенія, такъ какъ я больше не существую. Если я вполне сведень на нѣтъ, тогда и нечего спрашивать, существуютъ ли еще предметы внѣ меня. Я—ничто, и такимъ образомъ вы спрашиваете, существуютъ ли предметы внѣ „ничто“, будто по отношенію къ „ничто“ можно говорить о внѣшнемъ и внутреннемъ. ³⁾ Но вотъ я опять вхожу въ комнату—вижу, предметъ еще существуетъ. Для кого? Для „ничто“? Нѣтъ для незамѣтно вновь вступившаго „я“ ⁴⁾. Вопросы, подобно вышеуказанному, можетъ

¹⁾ Gr. 12.

²⁾ Gr. 84.

³⁾ Tr. 51.

⁴⁾ ib. 52.

предлагать только тотъ, кто не знаетъ, что въ сущности его требованіе состоитъ въ томъ, чтобы исполнѣ сведенное на нѣтъ „я“ судило о своемъ отношеніи къ предметамъ. Вообще, доказывать, что что-нибудь существуетъ въ наше отсутствіе, мы могли бы только въ томъ случаѣ, если бы возможно было присутствовать въ отсутствіи. Я, конечно, убѣжденъ, въ силу заключенія по аналогіи, что при извѣстныхъ условіяхъ вновь увижу предметъ, но изъ этого не слѣдуетъ, что онъ существуетъ независимо отъ меня. Я могу констатировать принудительную силу моихъ заключеній по аналогіи— больше ничего.

10. Что же представляетъ собой это „я“? Являются ли по отношенію къ нему всѣ предположенія трансцендентнаго такимъ же бессмысленнымъ придаткомъ, какъ по отношенію къ „не я“? Основанія, благодаря которымъ утверждается трансцендентность „я“ (души, духа и пр.), бываютъ трехъ родовъ: сюда относятся: 1) единство и идентичность душевной жизни, 4) явленія памяти, 3) повидимому возможное отдѣленіе содержанія отъ сознанія.

Единство и идентичность нисколько не предполагаютъ трансцендентнаго, такъ какъ онѣ свойственны самому сознанію. Какую пользу намъ можетъ оказать трансцендентность для объясненія указанныхъ свойствъ сознанія? Поскольку она можетъ что-нибудь объяснить—она сводится къ сознанію, въ частности къ тѣмъ же единству и идентичности; поскольку она не мыслится въ терминахъ сознанія—она рѣшительно ничего не можетъ объяснить, т. к. абсолютно неизвѣстна ¹⁾.

Явленія воспоминанія предполагаютъ душу, какъ хранилище безсознательныхъ представленій. Но безсознательныя представленія не суть реальности, которыя существуютъ до сознанія. Поскольку мы ихъ сознаемъ, они суть тѣ же сознательныя представленія, рассматриваемыя какъ прошедшія и долженствующія появиться при извѣстныхъ условіяхъ. Если это такъ, то нѣтъ надобности предполагать трансцендентную душу на основаніи явленій воспоминанія ²⁾.

Предположеніе самостоятельнаго существованія сознанія и содержанія есть результатъ абстракціи. Нѣтъ содержанія внѣ сознанія, нѣтъ сознанія внѣ содержанія. Но фиксируя, такъ сказать, одинъ элементъ даннаго, мы забываемъ о другомъ. Такимъ образомъ, мы имѣемъ въ виду то отношенія содержанія, то отношенія сознанія. Гипоста-

¹⁾ Tr. 80.

²⁾ ib. 81.

зируя эти отношенія сознанія, мы помѣщаемъ ихъ въ трансцендентное въ качествѣ простой и неизмѣнной субстанции ¹⁾.

11. Опровергнувъ трансцендентность объекта и субъекта, мы постараемся изобразить, какимъ образомъ наша мысль приходитъ къ утвержденію трансцендентнаго, и какія модификація принимаетъ при этомъ послѣднее.

Природа нашего опыта такова, что мы приобретаемъ непоколебимую увѣренность въ постоянномъ, непрерывномъ и независимомъ бытіи внѣшнихъ вещей. Разсматривая вопросъ о возникновеніи этой вѣры, мы сначала дадимъ опредѣленіе вещи, а затѣмъ изложимъ природу идентичности и ея предпосылки.

Что такое *вещь*? Внимательный анализъ прежде всего обнаруживаетъ, что она есть рельефно выдѣляющаяся, отличимая совокупность простыхъ данныхъ, относящихся къ какому-нибудь моменту времени и мѣста. Этихъ признаковъ достаточно для опредѣленія вещи на той или другой стадіи ея существованія. Для того, чтобы считать розу вещью, нужно только выдѣлнить изъ окружающаго совокупность признаковъ, ее составляющихъ, и мыслить эту совокупность въ единствѣ времени и пространства. Но данная роза претерпѣваетъ массу измѣненій въ зависимости отъ вліянія внѣшней среды и условій естественнаго развитія. Кажется, что общаго между едва обозначившимся бутонемъ и вполне разцвѣтшей розой — однако, мы считаемъ и то и другое однимъ и тѣмъ же предметомъ. Почему? Очевидно, есть еще одинъ признакъ, характеризующій предметъ; это — *закономерная связь его измѣненія*. Поскольку я считаю двѣ какихъ-нибудь совокупности данныхъ звеньями одного и того же непрерывнаго процесса, постольку я вижу въ нихъ одинъ и тотъ же предметъ. Но здѣсь мы должны сдѣлать оговорку: установить непрерывность процесса еще мало для этой цѣли. Сожженная роза обращается въ пепель; здѣсь мы также наблюдаемъ непрерывный процессъ; однако, пепель ужъ не роза. Значитъ, для характеристики вещи необходимо извѣстный специфически опредѣленный процессъ измѣненія. Итакъ, *вещь есть совокупность простыхъ данныхъ, опредѣленная во времени и пространстве и характеризующаяся специфическимъ законосообразнымъ измѣненіемъ* ²⁾.

Утвержденіе идентичности вещи въ разные моменты восприниманія покоится на двухъ условіяхъ. — Во первыхъ, на необходи-

¹⁾ ib. 82.

²⁾ Gr. 126.

мости заключать по аналогіи отъ наблюденныхъ измѣненій къ наблюдаемымъ въ данный моментъ; во-вторыхъ, на признаніи, что извѣстный мнѣ причинный процессъ непрерывенъ.—Пояснимъ это на примѣрѣ. Я сижу въ комнатѣ и вижу на столѣ передо мной стаканъ и песочные часы. Я непосредственно знаю тѣ причинныя отношенія, которыми характеризуются эти предметы. Закрывъ глаза, я не вижу больше предметовъ, но все-таки остаюсь при убѣжденіи, что они продолжаютъ существовать. Открываю глаза—предметы на прежнихъ мѣстахъ, при чемъ стаканъ не измѣнился, а песокъ въ часахъ немного отсыпался. Я увѣренъ, что это тѣ же вещи, что и прежнія. Почему? Потому что стаканъ не претерпѣлъ измѣненій, а песочные часы претерпѣли измѣненія въ той мѣрѣ и формѣ, въ какой ихъ нужно было ожидать аналогично прежнимъ непосредственнымъ наблюденіямъ. Но, можетъ быть, это вещи подмѣненные? Возможно, что такъ, но я этого не думаю, такъ какъ вещи сами не могутъ подмѣнять другъ друга, а причинъ, могущихъ вызвать перемѣну, я не замѣтилъ и не предполагаю. Такимъ образомъ, идентичность воспринимается повсюду, гдѣ оба предмета и предметы къ нимъ ведущіе, претерпѣли или не претерпѣли только такія измѣненія, которыя соотвѣтствуютъ ихъ причинному характеру и протекшему промежутку времени ¹⁾).

На основаніи явленія идентичности вещи въ разные моменты ея восприниманія возникаетъ вѣра въ постоянное, непрерывное бытіе. Рядомъ съ постоянствомъ и непрерывностью бытія вещи, необходимо обращаетъ на себя вниманіе прерывистость ея восприниманія. Результатомъ сопоставленія этихъ наблюденій является убѣжденіе, что предметы существуютъ независимо отъ нашего „я“. Мы абстрагируемъ ихъ отъ нашего „я“ и, благодаря этому, получается видимость ихъ независимаго существованія. Указанная независимость подтверждается принудительнымъ характеромъ, которымъ отличается міръ воспріятій въ своемъ отношеніи къ міру репродукціи. Онъ кажется какъ бы господствующимъ надъ нимъ.

12. Такъ возникаетъ вѣра въ объективный внѣшній міръ. Она настолько велика, что мы не можемъ отрѣшиться отъ нея, несмотря на то, что на каждомъ шагѣ убѣждаемся въ зависимости вещей отъ нашего „я“. Выходомъ изъ тѣхъ затрудненій, въ которыя впадаетъ мысль въ этомъ отношеніи, является предположеніе, что существуетъ два одинаковыхъ міра: одинъ непосредственно данный и зависимый, другой умозаключенный и независимый отъ нашего

¹⁾ Gr. 129.

„я“. Но такое предположеніе не можетъ долго держаться: со временемъ мы убѣждаемся въ томъ, что однѣ и тѣ же вещи при различныхъ условіяхъ кажутся намъ различными. Здѣсь, опять возникаетъ диллема: гдѣ заключается причина наблюдаемой измѣнчивости—въ насъ или въ самихъ вещахъ? Въ вещахъ она заключаться не можетъ, такъ какъ мы предположили ихъ независимое существованіе для того, чтобы представить нѣчто постоянное въ непостоянномъ: значить она заключается въ насъ, и, такимъ образомъ, міръ непосредственно данный (какъ измѣнчивый) и міръ умозаключенный (какъ неизмѣнный) различаются между собой. Различіе это, конечно, не можетъ быть абсолютно: должно же дѣйствіе хоть въ чемъ-нибудь походить на причину. По исключеніи всѣхъ элементовъ, субъективность которыхъ бросается въ глаза, остаются свойства, которыя присущи не только субъективному, но и объективному міру, именно: пространство, фигура, движеніе, непроницаемость. Но при болѣе внимательномъ отношеніи и эти свойства оказываются сплошь субъективными. Что же въ такомъ случаѣ остается отъ пресловутаго независимаго міра? Абстрактная законосообразность? Но она также субъективна, такъ какъ представляетъ собой субъективное необходимое ожиданіе.—Такимъ образомъ, обнаруживается *субъективная* природа всѣхъ, повидимому, объективных данныхъ, и наша старая вѣра въ объективный міръ, терпя крушеніе во всѣхъ своихъ попыткахъ оправдать себя въ болѣе или менѣе конкретныхъ построеніяхъ, хватается, какъ утопающій за соломенку, за вещь въ себѣ—одно изъ безмысленныхъ порожденій человѣческаго ума, обманутаго словами ¹⁾).

Мы разсмотрѣли происхожденіе вѣры въ независимый міръ, исходя изъ опытовъ индивидуальнаго „я“. Но въ этомъ вопросѣ громадную роль играютъ тѣ данныя и заключенія, которыя мы почерпаемъ изъ наблюденій надъ чужими людьми. Поэтому дальнѣйшій анализъ разбираемаго вопроса мы произведемъ въ связи съ проблемой *чужого* „я“ ²⁾).

13. Центральнымъ членомъ даннаго намъ міроваго цѣлаго, кромѣ „я“, является наше тѣло—совокупность извѣстныхъ данныхъ, взаимодействующихъ съ остальными, но отличающихся болѣе шимъ постоянствомъ и всегда находящихся въ наличности. Среди данныхъ, которыя къ нему относятся, выдѣляются группы, которыя во-первыхъ, похожи на наше тѣло, во-вторыхъ, находятся въ тѣхъ

¹⁾ Gr. 25.

²⁾ Gr. 26.

же отношеніяхъ къ другимъ даннымъ, въ-третьихъ, аналогично ему развиваются и измѣняются. Эти группы данныхъ составляютъ тѣла, которыя мы, въ противоположность своему, называемъ чужими. Утвержденіе чужихъ тѣлъ необходимо. Они непремѣнные члены всего нашего міра сознанія, и, устраняя ихъ, мы нарушаемъ цѣлость сознанія. Наблюдая въ чужихъ тѣлахъ измѣненія, движенія, слова, аналогичныя нашимъ, и, зная, что у насъ имъ соотвѣтствуютъ тѣ или другіе элементы репродукціи, мы предполагаемъ ихъ и въ чужихъ тѣлахъ. Такимъ образомъ, мы логически необходимымъ путемъ приходимъ къ утвержденію другихъ людей ¹⁾.

Рядомъ съ предположеніемъ другихъ людей возникаетъ вопросъ объ отношеніяхъ, въ которыхъ они стоятъ къ міру воспріятій. Можно предположить, что міръ воспріятій является общимъ достояніемъ людей, въ силу того подобія и той законосообразности, которыя наблюдаются между непосредственно данными намъ воспріятіями и умозаключеніями у другихъ. Но мы не можемъ утвердиться въ этомъ предположеніи, т. к. прекрасно знаемъ, что разные люди въ одно и то же время имѣютъ различныя воспріятія. Я могу видѣть известную вещь, въ то время какъ другой ея не видитъ. Выходомъ изъ получающагося такимъ образомъ затрудненія является признаніе одного общаго міра и рядомъ съ нимъ многихъ, аналогичныхъ ему. Но и это предположеніе несостоятельно. Въ виду различія въ воспріятіи одного и того же даннаго разными лицами и въ виду невозможности считать причинойъ этихъ различій предположеній общій міръ, мы должны придти къ заключенію, что онъ *toto genere* отличается отъ индивидуальныхъ міровъ. Но въ такомъ случаѣ всякая попытка болѣе или менѣе конкретно представить этотъ общій объективный міръ приводитъ къ тому, что онъ обращается въ міръ *индивидуальный, субъективный*. Последнее заключеніе есть единственное, что мы можемъ утверждать, оставаясь на имманентной точкѣ зрѣнія. Существуютъ только индивидуальные міры; общій міръ есть только абстрактъ изъ нихъ ²⁾.

Такимъ образомъ, кромѣ насъ существуютъ другіе центры, обладающіе отдѣльными мірами воспріятій и репродукцій. Этотъ фактъ подтверждается наблюденіемъ надъ нашимъ духовнымъ содержаніемъ и его ростомъ. Несомнѣнно, наши поступки, мысли, языкъ и пр. развивались путемъ общенія съ другими людьми. Въ дѣтствѣ многое было для насъ непонятно—выступало въ качествѣ

¹⁾ Gr. 26, 27, 77, 78.

²⁾ Gr. 28; Gl. XIV.

простыхъ звуковъ и пантомимъ. Значить, были люди раньше насъ, уже овладѣвшіе тѣмъ жизненнымъ содержаніемъ, которымъ мы теперь владѣемъ. Это утвержденіе несомнѣнно, но для правильнаго пониманія его мы должны сдѣлать слѣдующее поясненіе.

14. Міръ и люди лишь постольку мыслимы, поскольку они стоятъ въ связи съ нашимъ „я“. Наше „я“ непосредственно и абсолютно, остальные зависятъ отъ него и носятъ характеръ умозаключеній. О нихъ я могу только сказать, что они такъ же необходимо даны, какъ мое собственное; всякое другое утвержденіе будетъ носить трансцендентный характеръ. При свѣтѣ этого положенія отношеніе между мной и чужимъ „я“ выступаетъ въ такой формѣ: 1) только непосредственно данное „я“ можетъ выступать въ качествѣ воспріятія, между тѣмъ какъ чужое „я“ превращается въ представленіе, потому что оно познается только посредственно, 2) чужое „я“ выступаетъ въ качествѣ представленія въ зависимости отъ моего „я“¹⁾.

Такимъ образомъ, существованіе чужихъ „я“ не противорѣчитъ основному положенію Шубертъ-Зольдерна — индивидуальное „я“ есть непремѣнный центральный членъ всего сущаго.

15. Признавая это положеніе, мы, повидимому, впадаемъ въ *солипсизмъ*. Но это утвержденіе нуждается въ нѣкоторой оговоркѣ. Подъ солипсизмомъ мы обыкновенно разумѣемъ такое ученіе, которое утверждаетъ, что истинная реальность принадлежитъ только человѣку-одиночкѣ, и что весь громадный необозримый міръ есть одно лишь представленіе какого-то трансцендентнаго атома, составляющаго душу этого человѣка. Само собой понятно, солипсистомъ въ такомъ смыслѣ Шубертъ-Зольдернъ не можетъ быть названъ. Съ его точки зрѣнія нельзя говорить ни о томъ, что субъектъ воспринимаетъ или представляетъ, ни о томъ, что объектъ воспринимается. Эти термины въ устахъ имманентнаго философа служатъ лишь символами для выраженія различныхъ отношеній между „я“ и „не я“. Субъектъ и объектъ, являясь извѣстными комбинаціями данныхъ сознанія, должны быть разсматриваемы лишь какъ два момента, на которые раскалывается міровое цѣлое, благодаря знакому намъ процессу абстракціи. Оба эти момента логически равноправны, и всякое подчиненіе одного изъ нихъ другому, по мнѣнію Шубертъ-Зольдерна, совершенно неправильно. Если, тѣмъ не менѣе, Шубертъ-Зольдернъ можетъ по справедливости быть названъ солипсистомъ, то только въ томъ смыслѣ, что онъ конструируетъ міровое цѣлое, какъ связь, въ центрѣ которой стоитъ наше

¹⁾ G. XVII.

индивидуальное „я“ ¹⁾). Само собою разумѣется, что между этимъ утверждениемъ и признаніемъ за индивидуальнымъ „я“ единственной все исчерпывающей реальности существуетъ громадная разница. Солипсизмъ второго рода есть, по выраженію Шуберть-Зольдерна, безуміе, а не наука.

16. На основаніи всего вышеизложеннаго мы приходимъ къ заключенію, что сущность имманентной точки зрѣнія состоитъ въ сведеніи всего даннаго къ міру сознанія, которое понимается не какъ процессъ внутри субъекта, а какъ извѣстное объективное существованіе. Этимъ, конечно, міръ не превращается въ иллюзію. Абсолютный иллюзіонизмъ есть понятіе, заключающее въ себѣ противорѣчіе. Объ иллюзорности мы можемъ говорить только тогда, когда рядомъ съ тѣмъ, что является, предполагаемъ явленіе. Но разъ мы исключаемъ такой, такъ сказать, дуализмъ, то падаетъ самое понятіе иллюзіи ²⁾).

¹⁾ П. X.

²⁾ Тр. 31.

Учоніе Канта о вещи въ себѣ.

Обращаясь теперь къ Канту, мы припомнимъ, что послѣ того какъ философъ замѣтилъ, что скептицизмъ не можетъ привести къ удовлетворительному примиренію его основныхъ стремленій, въ диссертации 1770-го года онъ возлагаетъ большія надежды на различіе чувственнаго и умопостигаемаго міра; при чемъ съ особой настойчивостью учитъ объ апіорности пространства и времени, которая, по его мнѣнію, не объяснима безъ признанія ихъ феноменальности ¹⁾. Эти взгляды лишь съ весьма незначительными измѣненіями переходятъ затѣмъ и въ Критику чистаго разума.

Какъ мы уже упоминали ²⁾, Кантъ мало интересуется вторичными качествами тѣлъ и, касаясь ихъ мимоходомъ, очевидно, вполне примыкаетъ по данному вопросу къ воззрѣніямъ Декарта и Локка. «Пріятный вкусъ вина», читаемъ мы въ Эстетикѣ ³⁾, есть «особое свойство чувственности того субъекта, который имъ наслаждается». То же самое слѣдуетъ сказать о цвѣтахъ, запахахъ и т. п.

Кантъ по-прежнему съ громаднымъ интересомъ относится къ вопросу о сущности пространства и времени, рѣшеніемъ котораго онъ

¹⁾ Ср. выше, стр. 39.

²⁾ Стр. 54

³⁾ Кр. А. 28; Вл. 33.

такъ много занимался въ предыдущіе годы ¹⁾. Почти въ началѣ Трансцендентальной эстетики ²⁾ выдвигается этотъ важный метафизическій вопросъ: «Что же такое пространство и время? принадлежатъ ли они къ разряду дѣйствительныхъ сущностей? или они выражаютъ опредѣленіе и отношеніе вещей, по такія, которыя присущи вещамъ самимъ въ себѣ даже и въ томъ случаѣ, если послѣднія не являются предметомъ интуиціи? или же они таковы, что исключительно зависятъ лишь отъ формы интуиціи и, слѣдовательно, отъ субъективнаго свойства нашей души, безъ которыхъ эти предикаты не могутъ быть приписаны никакой вещи?» Указавъ на то, какое значеніе имѣетъ пространство для познанія эмпирической дѣйствительности ³⁾, философъ продолжаетъ ⁴⁾: «Пространство вовсе не представляетъ намъ свойства вещей самихъ въ себѣ или отношенія ихъ между собою, т. е. ничего такого, что находилось бы въ самихъ предметахъ и что оставалось бы, если отвлечь всѣ субъективныя условія интуиціи. Ни абсолютныя, ни относителныя опредѣленія не могутъ предварять самое бытіе вещей, которымъ они приписываются, слѣдовательно, не могутъ быть въ интуиціи представляемы a priori». И въ другомъ мѣстѣ: «Мы говоримъ, что пространство не существуетъ, если мы устранимъ условія возможности всякаго опыта и разберемъ, въ какомъ отношеніи оно находится къ вещамъ самимъ въ себѣ».

Совершенно аналогичныя утвержденія высказываются и относительно времени. «Время», читаемъ мы ⁵⁾, «не есть ничто существующее само по себѣ или находящееся въ вещахъ, какъ ихъ объективное опредѣленіе,—что, слѣдовательно, могло бы оставаться, если устранимъ всѣ субъективныя условія интуиціи. Въ первомъ случаѣ, время было бы чѣмъ-то *дѣйствительнымъ*, не будучи *дѣйствительнымъ предметомъ*, во второмъ, какъ опредѣленіе или порядокъ, находящійся въ самихъ вещахъ, время не могло бы предварять предметовъ, какъ ихъ условіе, и быть познаваемо a priori посредствомъ синтетическихъ положеній».

¹⁾ Ср. выше. стр. 30 и слѣд., также 39.

²⁾ Кг. 38; Вл. 27.

³⁾ О чемъ намъ придется говорить въ 4-мъ парагр. настоящей главы.

⁴⁾ Кг. 42; Вл. 30.

⁵⁾ Кг. 49; Вл. 36.

Кантъ же признаеть не подлежащимъ сомнѣнію, что «такое познаніе возможно только тогда, если время будетъ признано за субъективное условіе, отъ котораго зависятъ всѣ наши представленія». «Мы», говорится далѣе ¹⁾, «оспариваемъ у времени всѣ права на абсолютную реальность, именно, что оно, не будучи формой нашей чувственной интуиціи, существуетъ въ вещахъ, какъ условіе или свойство. Чувства никогда не могутъ свидѣтельствовать намъ о свойствахъ, принадлежащихъ вещамъ самимъ въ себѣ. Въ этомъ и состоитъ *трансцендентальная* ²⁾ *идеальность* времени, по которой оно, если отвлечь субъективные условія чувственной интуиціи, есть *ничто*, и не можетъ быть приписываемо предметамъ самимъ въ себѣ (безъ отношенія къ нашему представленію) въ качествѣ субстанціи, или какъ свойство». Указавъ на то, что *эмпирическая реальность* времени не подлежитъ сомнѣнію ³⁾, философъ продолжаетъ ⁴⁾: «Нельзя только сказать, что время реально въ абсолютномъ смыслѣ: оно есть не болѣе, какъ форма нашей внутренней интуиціи; и если отвлечь отъ послѣдней условія нашей чувственности, то вмѣстѣ съ ней уничтожится и понятіе времени. Оно присуще не самимъ предметамъ, а только лицу, которое ихъ представляетъ». Важныя соображенія, побудившія Канта выработать своеобразный взглядъ на сущность пространства и времени, изложены имъ въ концѣ Трансцендентальной эстетики. Здѣсь ⁵⁾ снова указывается на двѣ существовавшія въ то время теоріи, надъ примиреніемъ которыхъ философъ много потрудился и съ которыми мы уже познакомились, при изложеніи небольшой статьи 1768-го года «О различіи мѣръ въ пространствѣ» ⁶⁾. Въ названномъ сочиненіи, какъ мы видѣли, философъ окончательно склонялся на сторону математиковъ; теперь же, какъ и во время написанія диссертациі на должность ординарнаго профессора, обѣ теоріи представляются ему одинаково несостоятельными. Признающіе абсолютную реальность пространства, (большею частью математики и естествоиспытатели) «должны допустить двѣ вѣчныя, необъятныя, самостоятельныя вещи (пространство и время), которыя существуютъ съ тою цѣлью, чтобы обнимать собою все дан-

¹⁾ Кт. 52; Вл. 38.

²⁾ *Трансцендентальная* здѣсь равносильно *метафизическая*. Ср. примѣчаніе на стр. 32 и слѣд.

³⁾ О чемъ мы будемъ говорить въ 4-мъ парагр. настоящей главы.

⁴⁾ Кт. 54; Вл. 40.

⁵⁾ Кт. 56; Вл. 41.

⁶⁾ Ср. выше, стр. 36.

ное (сами же не суть нічто реальное). Признающіе второе мнѣніе (нѣкоторые метафизики-естествоиспытатели), именно, что пространство и время имѣють значеніе выведенныхъ изъ опыта и смутно представляемыхъ отношеній (подлѣ и другъ за другомъ), должны опасивать значеніе, по меньшей мѣрѣ аподиктическую достовѣрность, математическаго, апіорнаго ученія въ приложеніи его къ дѣйствительнымъ вещамъ (напр. въ пространствѣ); ибо а posteriori эта дѣйствительность не возможна, и самыя апіорныя понятія о пространствѣ и времени, по этому мнѣнію, суть созданія воображенія; они происходятъ изъ опыта, изъ отношеній котораго воображеніе выводитъ нічто всеобщее, но съ тѣми ограниченіями, какія встрѣчаются въ самой природѣ». «Въ нашей теоріи», заключаетъ Кантъ, «устранены оба затрудненія. Трансцендентальная идеальность (т. е. феноменальность) пространства, а равно и времени, кажется Канту вполне обоснованной. Въ ученіи О паралогизмахъ философъ говоритъ: «Въ Трансцендентальной эстетикѣ мы неопровержимо доказали, что тѣла суть только явленія нашего виѣшняго чувства, а не вещи сами въ себѣ»; ибо «самое пространство, въ которомъ они представляются, есть только представленіе, которому внѣ души нітъ ничего точно соответствующаго»¹⁾. Подтверженіе своего взгляда на метафизическую сущность пространства и времени Кантъ находитъ также въ антиноміяхъ, т. е. въ противорѣчіяхъ разума съ самимъ собой. «Изъ антиноміи», говоритъ онъ²⁾. «можно извлечь весьма важную критическую пользу: именно, съ помощью ея доказать трансцендентальную идеальность явленій, если кто еще недостаточно убѣдился нашимъ прямымъ доказательствомъ въ Трансцендентальной эстетикѣ. Доказательство можетъ состоять изъ слѣдующей дилеммы: если міръ есть само въ себѣ существующее цѣлое, то онъ или конеченъ, или безконеченъ. Но оба предположенія ложны. Слѣдовательно, ложно и то, что міръ (какъ сумма всѣхъ явленій) есть цѣлое, само по себѣ существующее». Противорѣчіе въ данномъ случаѣ очевидно, происходитъ въ силу того, что мы стремимся приписать абсолютную реальность чистымъ формамъ интуиціи, пространству и времени, являющимся только порожденіемъ нашей чувственности³⁾.

¹⁾ Кр. А. 357, А. 385; Вл. 306, 326.

²⁾ Кр. 534; Вл. 407.

³⁾ Въ особенности важнымъ мотивомъ къ признанію двухъ міровъ и вмѣстѣ съ тѣмъ феноменистической точки зрѣнія были для Канта нравственныя побужденія; но объ этомъ мы поговоримъ въ 6-мъ параграфѣ настоящей главы.

Проблемой о сущности пространства и времени Кантъ занимался очень много и пришелъ въ концѣ концовъ къ вполне опредѣленнымъ взглядамъ, которые и получили выраженіе въ Критикѣ чистаго разума. Вообще же слѣдуетъ замѣтить, что великій философъ не сознавалъ сколько-нибудь отчетливо громадной принципиальной разницы между полнымъ скептицизмомъ и феноменализмомъ, доведеннымъ до крайности; и это въ особенности неблагоприятно отразилось въ ученіи о чистыхъ понятіяхъ разсудка, или категоріяхъ. Здѣсь, въ большинствѣ случаевъ, нельзя установить съ полной опредѣленностью, къ чему собственно сводится утвержденіе Канта: хочетъ ли онъ сказать, что мы не имѣемъ возможности рѣшить вопросъ, примѣнимы ли категоріи къ вещамъ въ себѣ (скептицизмъ), или же, — что абсолютная дѣйствительность кореннымъ образомъ отличается отъ всего, доступнаго нашимъ мыслямъ (крайній феноменализмъ). Лишь по аналогіи съ ученіемъ о чистыхъ формахъ интуиціи, мы имѣемъ нѣкоторое основаніе заключить, что философъ обнаруживаетъ склонность къ феноменалистической точкѣ зрѣнія. Приведемъ для подтвержденія своихъ словъ нѣкоторые наиболее характерные отрывки. Въ отдѣлѣ О схематизмѣ ¹⁾ философъ говоритъ: «Мы уже видѣли, что понятія возможны и имѣютъ смыслъ только въ томъ случаѣ, если для нихъ, или для элементовъ, изъ которыхъ они состоятъ, данъ извнѣ какой-либо предметъ; слѣдовательно, ни въ коемъ случаѣ они не могутъ простираться на вещи сами въ себѣ (независимо отъ того, даны ли намъ эти послѣдніи и какимъ именно образомъ)». Если примѣнять категоріи за предѣлами эмпирической дѣйствительности, «то пришлось бы логическія дѣйствія признать условіями возможности самихъ вещей. Между тѣмъ я не могъ бы при этомъ указать, какое могутъ имѣть онѣ приложение, каковъ предметъ ихъ и какое, вообще, могутъ имѣть онѣ значеніе въ чистомъ разсудкѣ» ²⁾. Такимъ образомъ категоріи имѣютъ смыслъ и значеніе исключительно въ предѣлахъ чувственнаго міра. Это можно подтвердить также слѣдующимъ соображеніемъ: «Для всякаго понятія требуется, во-первыхъ, логическая форма (мышленія) вообще, и во-вторыхъ, предметъ, къ которому оно могло бы относиться. Безъ предмета оно не имѣетъ смысла и совершенно безсодержательно, хотя и можетъ имѣть логическую форму, которая въ соединеніи съ нѣкоторыми *datis* спо-

¹⁾ Кр. 178; Вл. 137.

²⁾ Кр. А. 240; Вл. 223 примѣч.

собна образовати понятіе»¹⁾. Для Канта же несомнѣнно, что такого рода *data* заимствуются исключительно изъ чувствешнаго міра, который не имѣетъ рѣшительно ничего общаго съ абсолютной дѣйствительностью.

По вопросу объ отношеніи идей къ абсолютной дѣйствительности Кантъ чаще высказывается въ духѣ скептицизма. Лишь въ ученіи о паралогизмахъ философъ мимоходомъ замѣчаетъ, что идеямъ «при объективномъ употребленіи недостаетъ реальности»²⁾. Но ясно, что все, сказанное нами въ настоящемъ параграфѣ относительно категорій, можетъ быть распространено почти безъ всякихъ ограниченій и на идеи разума, которыя такъ же, какъ и понятія разсудка, коренятся въ нѣдрахъ нашей познавательной способности и такъ же не могутъ имѣть никакого примѣненія безъ *data* чувственности.

Если наши ощущенія, чистыя формы интуиціи, понятія разсудка и идеи разума рѣшительно не имѣютъ ничего общаго съ потусторонней дѣйствительностью, то «само собой разумѣется, что вещь сама въ себя—другой природы, чѣмъ опредѣленія, выражающія одни состоянія души»³⁾. Уже въ Трансцендентальной эстетикѣ⁴⁾ Кантъ весьма опредѣленно заявляетъ, что «вещи, созерцаемыя нами въ интуиціи, не существуютъ сами въ себя въ томъ видѣ, въ какомъ мы ихъ созерцаемъ, и что ихъ отношенія вовсе не таковы, какъ они воспринимаются нами въ качествѣ явленій; и что, если уничтожить нашъ субъектъ или даже только субъективное свойство чувственности вообще, то всѣ признаки, всѣ отношенія объектовъ въ пространствѣ и времени, самое пространство и время тоже уничтожились бы: тогда стало бы яснымъ, что, какъ явленія, они не могутъ существовать сами въ себя, но только въ насъ». Заслуживаетъ вниманія тотъ фактъ, что тутъ же высказываются мысли, проникнутыя полнымъ скептицизмомъ: «Намъ», говорится далѣе, «остається совершенно неизвѣстнымъ, что дѣлается съ предметами самими въ себя, независимо отъ нашей чувственности». Философъ какъ бы нарочно ускользаетъ изъ виду, что о предметахъ, которые намъ *совершенно неизвѣстны*, никоимъ образомъ нельзя утверждать, однородны ли они съ нашими интуиціями, или же представляютъ изъ-

¹⁾ Кр. 298; Вл. 221.

²⁾ Кр. А 357; Вл. 306.

³⁾ Кр. А 360; Вл. 307.

⁴⁾ Кр. 59; 43.

себя нѣчто вполне своеобразное. Еще съ большей настойчивостью проводится феноменализмъ въ Трансцендентальной аналитикѣ. вещь въ себѣ, говорится здѣсь, «не можетъ быть мыслима ни какъ величина, ни какъ реальность, ни какъ субстанція и т. д. (потому что всѣ эти понятія всегда требуютъ чувственныхъ формъ, при посредствѣ которыхъ они могутъ опредѣлять предметъ)» ¹⁾. Вообще, трансцендентальный объектъ «есть нѣчто такое, чего мы не были бы въ состояніи понять даже и тогда, если бы и нашелся кто-нибудь, кто могъ бы сказать, въ чемъ оно состоитъ: вѣдь, слова понятны намъ только въ томъ случаѣ, если они обозначаютъ что-нибудь соответствующее имъ въ интуиціи» ²⁾. Очевидно, феноменализмъ, доведенный до крайности, заключаетъ въ себѣ внутреннее противорѣчіе: въ самомъ дѣлѣ, мы не можемъ ни мыслить, ни, тѣмъ болѣе, говорить о томъ, что кореннымъ образомъ отличается отъ всего, доступна нашему сознанию.

3. Кантъ съ особымъ интересомъ относился къ проблемѣ апіорнаго познанія, въ наличности котораго онъ, какъ послѣдователь Лейбница, въ сущности, никогда не сомнѣвался. Въ диссертациі на должность ординарнаго профессора онъ показываетъ возможность апіорныхъ положеній въ математикѣ. Но оставались еще нѣкоторые сужденія, очевидно, не заимствованныя изъ опыта и вмѣстѣ съ тѣмъ имѣющія безусловное значеніе для предметовъ, существующихъ, повидимому, независимо отъ познающаго субъекта. Въ 70-хъ годахъ великій мыслитель поглощенъ рѣшеніемъ этого труднаго вопроса ³⁾. Наконецъ, онъ приходитъ къ точкѣ зрѣнія, извѣстной подъ названіемъ формальнаго рационализма ⁴⁾ и получившей выраженіе въ Критикѣ чистаго разума, именно, въ Трансцендентальной дедукціи чистыхъ понятій разсудка. Слѣдуетъ имѣть въ виду, что на новомъ, своеобразномъ рѣшеніи вопроса Кантъ сравнительно поздно сосредоточилъ свое вниманіе: въ диссертациі 1770-го года можно отмѣтить лишь зародыши подобнаго рода воззрѣній ⁵⁾; и если къ этому присовокупить необыкновенную оригинальность взгляда, который идетъ въ разрѣзъ со всѣми

¹⁾ Кг. 344; Вл. 257.

²⁾ Кг. 333; Вл. 249.

³⁾ См. выше, стр. 43.

⁴⁾ См. выше, стр. 44.

⁵⁾ См. выше, стр. 39 и 41.

твердо установившимися миѣніями¹⁾, то станетъ вполне понятнымъ, почему философъ не успѣлъ выразить новыя мысли съ желательной опредѣленностью. Даже въ Аналитикѣ эти мысли не приведены въ согласованіе съ прежними точками зрѣнія; въ другихъ же частяхъ Критики онѣ только намѣчены. Все это немало препятствуетъ ясности относящихся сюда воззрѣній; недаромъ самъ гениальный авторъ считаетъ Трансцендентальную дедукцію самой трудной частью своего сочиненія. Главная ея цѣль состоитъ въ объясненіи возможности познанія вообще и въ особенности въ объясненіи априорныхъ его элементовъ. Мы, разумѣется, коснемся этого ученія лишь въ той мѣрѣ, въ какой оно затрогиваетъ вопросъ о вещи въ себѣ и ея познаваемости.

«Только въ двухъ случаяхъ», читаемъ мы въ Трансцендентальной аналитикѣ²⁾, «синтетическія представленія и соотвѣтствующіе имъ предметы могутъ соприкасаться, необходимымъ образомъ взаимно соотноситься и какъ бы встрѣчаться другъ съ другомъ: или когда предметъ дѣлается возможнымъ представленіе, или когда представленіе обуславливаетъ самый предметъ». Конечно, «можетъ казаться бессмысленнымъ и страннымъ миѣніе, что природа должна согласоваться съ нашими субъективными основами апперцепціи и зависѣть отъ нея со стороны своихъ законовъ. Но размыслимъ», говоритъ философъ³⁾, «что природа сама по себѣ есть только сумма явленій, слѣдовательно, не вещь сама въ себѣ, а только одна совокупность представленій души. Тогда мы не станемъ удивляться, что она есть произведеніе основной силы нашего познанія, именно, трансцендентальной апперцепціи; его единство есть причина того, что она можетъ быть для насъ предметомъ возможнаго опыта, т. е. природой». Разсудокъ, говорится въ другомъ мѣстѣ⁴⁾, «есть законодатель природы, т. е. безъ него не могло бы существовать

¹⁾ Зародыши формальнаго рационализма встрѣчаются, конечно, и у предшественниковъ Канта, такъ, напр., въ ученіи Локка объ идеяхъ нравственныхъ и математическихъ и въ особенности въ системѣ Лейбница. Но между зародышами известной системы и созданиемъ этой послѣдней существуетъ цѣлая пропасть. Нуженъ былъ творческій духъ великаго гениа, чтобы сообщить высказываемымъ прежде разрозненнымъ мыслямъ хотя нѣкоторое единство.

²⁾ Кг. 124; Вл. 86.

³⁾ Кг. А 114; Вл. 113.

⁴⁾ Кг. А 126; Вл. 128.

ея, какъ синтетическаго единства разнообразія въ явленіяхъ, подчиненнаго общимъ правиламъ, ибо явленія, какъ таковыя, находятся не внѣ насъ, но въ нашей чувственности». Разумѣется, здѣсь рѣчь идетъ лишь о созданіи *природы*, т. е. совокупности явленій, объединенныхъ при помощи основныхъ законовъ нашего духа. Мало того, Кантъ безъ всякихъ колебаній признаетъ самостоятельное значеніе данныхъ опыта. «Въ явленіи», пишетъ онъ, говоря объ антиципации воспріятій¹⁾, «есть сторона, которая никогда не можетъ быть познана а priori и которая указываетъ на своеобразное отличіе эмпирическаго познанія отъ априорнаго, именно, на ощущение (какъ матерію воспріятія)». Даже больше, Кантъ высказывается въ томъ смыслѣ, что самый разумокъ существуетъ у насъ лишь благодаря извѣстному единообразію, встрѣчаемому нами въ природѣ. Такъ, въ концѣ Ученія объ элементахъ²⁾ онъ пишетъ: «Если бы въ наблюдаемыхъ нами явленіяхъ существовало такое разнообразіе не по формѣ только (по формѣ они могутъ быть одинаковы), но и по содержанію, что самый провицательный человѣческій разумокъ не могъ бы открыть ни малѣйшаго сходства между разнообразными существами, сравнивая ихъ между собою (случай вполне мыслимый), тогда не существовало бы логическаго закона относительно родовъ, никакихъ понятій о родѣ, или общихъ понятій, не было бы и самого разсудка: ибо онъ имѣетъ дѣло только съ понятіями». Вообще, на ряду съ признаемъ законодательства разсудка, въ Критикѣ сохраняется и другой взглядъ, именно, что законы присущи самой природѣ³⁾. Послѣдній взглядъ стоитъ, очевидно, весьма близко къ общераспространеннымъ мнѣніямъ; но не слѣдуетъ упускать изъ виду, что формальный раціонализмъ, будучи доведенъ до крайности, не оставляетъ мѣста не только для независимыхъ объектовъ опыта, но и вообще для какой бы то ни было трансубъективной дѣйствительности. Въ Критикѣ, несомнѣнно, есть всѣ данныя для подобнаго вывода; они лишь не сопоставлены между собою.

Въ нашемъ сознаніи Кантъ обыкновенно различаетъ: ощущенія вторичныхъ качествъ предметовъ, чистыя формы интуиціи, понятія разсудка и, наконецъ, идеи разума. Первые коренятся *исключительно* въ чувственности познающаго субъекта⁴⁾; чистыя формы интуиціи и категоріи пря-

¹⁾ Кг. 208; Вл. 157—8.

²⁾ Кг. 681; Вл. 501.

³⁾ Ср. въ особенности Кг. 678 и 508; Вл. 499 и 391.

⁴⁾ Ср. Кг. А 28; Вл. 33; также выше, стр. 59.

вносятся нами для объединенія существующихъ у насъ представлений; что же касается идей, то и онѣ «образуются въ разумѣ необходимо по его первоначальнымъ законамъ»¹⁾. Философъ стремится объединить названные выше элементы. Указавъ на то, что «существуетъ два ствола человѣческаго познанія», — именно, чувственность, при помощи которой «даются предметы», и разумъ, которымъ «они мыслятся», — онъ при- совокупляетъ, что эти стволы «быть можетъ, вырастаютъ изъ одного общаго, но намъ неизвѣстнаго корня»²⁾. Есть основаніе думать, что и вещь въ себѣ, которая для насъ, въ концѣ концовъ, не можетъ быть не чѣмъ инымъ, какъ только извѣстнаго рода мыслью, происходитъ изъ того же самаго общаго источника. Кантъ весьма близко подходитъ къ подобнаго рода утвержденію. Въ Трансцендентальной дедукціи онъ настойчиво отмѣчаетъ тотъ фактъ, что «мы имѣемъ дѣло только съ разнообразіемъ нашихъ представлений» и въ области нашего познанія нѣтъ ничего такого, что могло бы быть сопоставлено нами съ этимъ познаніемъ; неизвѣстный же X, «какъ что-то отличное отъ нашихъ представлений, въ сущности, есть для насъ *ничто*»; что же касается единства, «которое необходимымъ образомъ создается предметомъ», то оно «не можетъ быть не чѣмъ инымъ, какъ формальнымъ единствомъ сознанія при синтезѣ разнообразныхъ представлений»³⁾. Конечно, мы склонны приписывать нашимъ субъективнымъ состояніямъ объективный характеръ. Говоря о теологической идеѣ⁴⁾, Кантъ, между прочимъ, замѣчаетъ: нельзя избѣжать того, чтобы «не представлять себѣ, въ силу трансцендентальной⁵⁾ ошибки, этотъ формальный принципъ въ качествѣ конститутивнаго и не мыслить этого единства гипостазированнымъ»⁶⁾. Неясно сознательное стремленіе Канта считать вещь въ себѣ лишь порожденіемъ нашего духа, быть можетъ, обнаружилось въ его склонности называть ее *трансцендентальнымъ*⁷⁾ объектомъ,

¹⁾ Кг. 396; Вл. 293.

²⁾ Кг. 29; Вл. 22.

³⁾ См. Кг. А 104—105; Вл. 102.

⁴⁾ Кг. 647; Вл. 479.

⁵⁾ *Трансцендентальный* здѣсь ближе всего подходитъ къ термину *гносеологическій*. Ср. выше прим. къ стр. 32. Трансцендентальная ошибка состоитъ въ томъ, что мы приписываемъ непремѣннымъ условіямъ нашего *человѣческаго* познанія абсолютную *метафизическую* реальность.

⁶⁾ Ср. также выше, стр. 55.

⁷⁾ Ср. прим. на стр. 32 и слѣд.

т. е. какъ бы предметомъ. создаваемымъ при посредствѣ нашего сознанія. по присущимъ этому послѣднему основнымъ законамъ. Неопредѣленность термина *трансцендентальный* какъ нельзя болѣе подходила для выраженія мысли, не получившей еще ясныхъ очертаній.

Уже Платнеръ въ первой половинѣ 80-хъ годовъ прошлаго столѣтія, т. е. до выхода въ свѣтъ второго изданія Критики, вполне опредѣленно указалъ на то, что вещь въ себѣ создается изъ элементовъ нашего сознанія въ силу примѣненія категоріи субстанціальности ¹⁾. Послѣдующіе мыслители, въ особенности признававшіе себя сторонниками Канта, продолжали развитіе формальнаго раціонализма. Но намъ придется возвратиться къ этому вопросу впослѣдствіи ²⁾.

4. Въ сочиненіяхъ 50-хъ и 60-хъ годовъ Кантъ постоянно проявлялъ глубокой интересъ по отношенію къ такъ называемой положительной наукѣ: въ Критикѣ чистаго разума этотъ интересъ также получилъ весьма отчетливое выраженіе. Читая въ ней отдѣльныя мѣста, можно подумать, что они написаны убѣжденнымъ и даже крайнимъ приверженцемъ эмпиризма. Критика разума, настаиваетъ философъ ³⁾. «можетъ ограничить всѣ наши теоретическія притязанія областью возможнаго опыта не посредствомъ насмѣшки надъ неудавшимися попытками или благочестивыхъ воздыханій объ ограниченности человеческого разума, но посредствомъ обозначенія предѣловъ, на основаніи твердо установленныхъ началъ: она должна указать намъ nihil alterius Геркулесовыхъ столбовъ, установленныхъ самою природою, дабы не пускаться съ нашимъ разсудкомъ за предѣлы опыта; она должна указать намъ, что мы не можемъ переступить ихъ, не пускаясь въ безбрежный океанъ; при чемъ послѣ тщетныхъ надеждъ мы все-таки будемъ принуждены оставить безнадежныя и трудныя успія». «Намъ ничего не извѣстно», говорится въ другомъ мѣстѣ ⁴⁾, «кромѣ природы, такъ какъ она одна только предлагаетъ намъ предметы и способна научить насъ своимъ законамъ». Въ одномъ примѣчаніи ⁵⁾ Кантъ съ большимъ сочувствіемъ повторяетъ мысли, приписываемыя Эпикуру. «Что при объясненіи явленія пужно приступать

¹⁾ Ср. Erdmann, p. 103—4.

²⁾ См. четвертую главу, §§ 3—7.

³⁾ Кр. А 395; Вл. 334.

⁴⁾ Кр. 498; Вл. 385.

⁵⁾ Кр. 500; Вл. 386.

къ дѣлу такъ, какъ будто бы въ области изслѣдованія не предполагается ни предѣла, ни пачала, припимая міровое вещество въ томъ видѣ, въ какомъ оно должно представляться намъ, если мы пожелаемъ изучать его при помощи опыта; что всѣ событія исключительно опредѣляются по неизмѣннымъ законамъ природы, и что нѣтъ нужды ни въ какой отличной отъ міра причинѣ,—всѣ эти основоположенія въ высшей степени правильны и до сихъ поръ, хотя на нихъ мало обращаютъ вниманія. Они должны служить для расширенія нашей спекулятивной философіи и для указанія началъ нравственности, независимыхъ отъ чуждыхъ источниковъ». Возможность объективной науки Кантъ подразумеваетъ, какъ нѣчто несомнѣнно данное (хотя слѣдуетъ имѣть въ виду, что самъ философъ не всегда сознаетъ съ достаточной отчетливостью эту весьма важную при его разсужденіяхъ предпосылку) и затѣмъ стремится выяснить условія этой возможности. Въ особенности его интересуютъ апіорные элементы познанія, которыхъ въ дѣйствительности «не лишень и обыкновенный разсудокъ»¹⁾. Въ средніе вѣка философія признавалась служанкой богословія; порядокъ этотъ отчасти сохранился и въ 18-мъ столѣтіи. Но Кантъ, придерживаясь только что указанной точки зрѣнія, хочетъ сдѣлать ее служанкой физики, въ самомъ широкомъ значеніи этого слова: философія должна помочь ориентироваться въ математическомъ естествознаніи Ньютона. Ниже мы постараемся хотя нѣсколько выяснить эту точку зрѣнія, а главное, тѣ мысли по интересующему насъ вопросу, которыя тѣсно съ ней связаны.

Человѣкъ—существо чувственное: онъ не можетъ обойтись одними только понятіями и всегда нуждается въ интуиціи (*Anschauung*). Поэтому наука возможна лишь въ томъ случаѣ, если данныя ея могутъ быть представляемы въ интуиціи. Далѣе, признавая науку объективной, т. е. имѣющей значеніе для всѣхъ людей безъ исключенія, мы уже тѣмъ самымъ признаемъ объективный характеръ хотя за нѣкоторыми интуиціями, въ которыхъ выражаются научныя положенія. Такими объективными интуиціями Кантъ считаетъ пространство и время. Они не заимствуются изъ отдѣльныхъ, единичныхъ наблюденій, но составляютъ необходимое условіе всякаго опыта, такъ какъ нельзя научиться помѣщать предметы внѣ себя и рядомъ одинъ подлѣ другого тому,

¹⁾ Кр. 3; Вл. 3.

²⁾ Ср. Кр. 174; Вл. 135; также Паульсенъ 102.

кто не имѣлъ бы никакого представленія о пространствѣ; то же самое слѣдуетъ сказать и относительно времени: тщетны были бы всѣ наши усилія узнать хотя что-либо о немъ, если бы мы не обладали представленіями о послѣдовательной смѣнѣ событий. Здѣсь Кантъ, очевидно, возражаетъ тѣмъ мыслителямъ, которые, подобно Декарту и Локку, пытались доказать реальность пространства при помощи умозаключеній. Какъ интуиціи, съ которыми имѣетъ дѣло научное познаніе, пространство и время должны быть отнесены къ существеннымъ признакамъ предметовъ; и, дѣйствительно, такія свойства, какъ цвѣта, запахи, вкусъ и проч., свободно могутъ быть отвлечены отъ предмета (конечно, въ абстракціи); но безъ пространственныхъ признаковъ предметъ перестаетъ быть внѣшнимъ, а безъ признаковъ времени эмпирическіе объекты вовсе не мыслимы. Нафонецъ, не можетъ быть нѣсколькихъ самостоятельныхъ пространствъ и временъ: такъ какъ для всѣхъ людей существуетъ единый опытъ, то необходимо признать и единое пространство и время, въ которыхъ располагаются нами всѣ предметы опыта. Мы говорили уже подробно о томъ ¹⁾, что, по мнѣнію Канта, пространство и время вовсе не обладаютъ абсолютнымъ существованіемъ; но философъ энергично отстаиваетъ ихъ *эмпирическую реальность*. Даже въ ученіи О паралогизмахъ, въ которомъ скептицизмъ Канта выступаетъ на видъ особенно рельефно, воззрѣнія его на *эмпирическую* сущность пространства остаются, очевидно, безъ измѣненія. «Всякое внѣшнее воспріятіе», говорится здѣсь ²⁾, «непосредственно указываетъ на нѣчто дѣйствительное, и въ этомъ отношеніи *эмпирическій реализмъ* не подлежитъ сомнѣнію, т. е. нашимъ внѣшнимъ интуиціямъ, дѣйствительно, соответствуетъ нѣчто, находящееся въ пространствѣ». «Чтобы опровергнуть *эмпирическій идеализмъ*», читаемъ мы немного далѣе ³⁾, «какъ ложное сомнѣніе въ объективной реальности нашихъ внѣшнихъ воспріятій, достаточно и того, что внѣшнее воспріятіе непосредственно доказываетъ дѣйствительность въ пространствѣ, пространство же, хотя само по себѣ есть лишь форма представленій, имѣетъ однако же, объективное значеніе по отношенію ко всѣмъ внѣшнимъ явленіямъ». Въ томъ же духѣ выражается Кантъ и относительно времени. Я приведу лишь наиболѣе характерные отрывки. «Мы

¹⁾ См. выше, стр. 60.

²⁾ Кг. А 375; Вл. 319.

³⁾ Кг. А 376; Вл. 320.

утверждаемъ поэтому», говорится въ Эстетикѣ 1), «эмпирическую реальность времени, т. е. объективное значеніе его для всѣхъ предметовъ, которые когда-либо могутъ быть даны нашимъ чувствамъ», и немного далѣе 2): «Такимъ образомъ, его эмпирическая реальность, какъ условіе всякаго опыта, остается неприкосновенной». Подобнаго рода мысли повторяются также въ Ученіи объ антиноміяхъ. «Нашъ трансцендентальный 3) идеализмъ», учить философъ, «дозволяетъ намъ признавать предметы внѣшней интуиціи дѣйствительными въ томъ видѣ, въ какомъ они созерцаются въ пространствѣ, а измѣненія дѣйствительными во времени, какъ они представляются внутреннимъ чувствамъ. Такъ какъ пространство есть форма той интуиціи, которую мы называемъ внѣшней, и не будь предметовъ въ немъ, мы не имѣли бы эмпирическихъ представленій, то мы можемъ и должны принимать въ немъ протяженныя сущности, какъ нѣчто дѣйствительное; то же самое и относительно времени» 4).

По мнѣнію Канта, чистыя формы интуиціи—пространство и время—создаются исключительно субъектомъ. Легко можетъ явиться мысль сопоставить ихъ съ ощущеніями такъ называемыхъ вторичныхъ качествъ. Философъ знаетъ о возможности такого рода толкованія и желаетъ предупредить его. «Наше замѣчаніе», говоритъ онъ 5), «имѣеть цѣлью предостеречь отъ объясненія идеальности пространства, на которой мы настаиваемъ, посредствомъ слишкомъ недостаточныхъ примѣровъ; именно, цвѣта, вкусы и проч., по справедливости, должны быть разсматриваемы не какъ свойства вещей, а какъ измѣненія субъекта, которыя у различныхъ людей могутъ быть различными»: тогда какъ чистыя формы интуиціи составляютъ *неизмѣнную* основу всякаго объективнаго познанія. Разумѣется, тѣмъ болѣе, «идеальность времени такъ же, какъ и идеальность пространства, нельзя смѣшивать съ обманамъ чувства, ибо при этомъ предполагается, что явленіе, имѣющее признаки пространства и времени, имѣеть объективную реальность 6).

1) Кг. 52; Вл. 38.

2) Кг. 54; Вл. 39.

3) *Трансцендентальный* здѣсь употреблено въ 3-мъ изъ указанныхъ мною значеній; ср. выше прим. на стр. 32.

4) Кг. 520; Вл. 398.

5) Кг. 45; Вл. 33.

6) Кг. 52; Вл. 38.

Кромѣ разнообразныхъ ощущеній и чистыхъ формъ интуиціи, въ нашихъ представленіяхъ объ объективномъ мірѣ существуютъ еще элементы, которые не могутъ быть заимствованы изъ опыта, но которые составляютъ необходимое условіе всякой мысли, претендующей на объективное значеніе (все-равно, будетъ ли то сужденіе, родовое ли понятіе, или даже представленіе единичнаго предмета). Прежде всего, такимъ непремѣннымъ условіемъ всякаго мышленія является тождество познающаго субъекта—трансцендентальной¹⁾ апперцепціи, по кантовской терминологіи,—который сознаетъ постоянно смѣняющіяся представленія, какъ свои собственные. Далѣе, разрозненныя ощущенія, доставляемая чувственностью, связываются при посредствѣ чистыхъ понятій разсудка, или категорій, которыя придаютъ ихъ взаимоотношенію характеръ общеобязательности въ противоположность связи, основанной на простой ассоціаціи и имѣющей вполнѣ случайный, субъективный характеръ. Философъ пытается представить полную таблицу категорій. Мы не будемъ останавливаться на изложеніи этой попытки и ограничимся лишь указаніемъ тѣхъ правилъ, или основоположеній, которыя, по мнѣнію Канта, вытекаютъ изъ чистыхъ разсудочныхъ понятій и съ которыми безусловно должно согласоваться все наше познаніе, такъ какъ мы сами созидаемъ природу—или, во всякомъ случаѣ, ту ея сторону, которая можетъ быть познаваема а priori,—по общимъ, присущимъ разуму, законамъ. 1) «Всѣ явленія по способу своей интуиціи суть протяженныя величины»²⁾; и потому все, доступное опыту, заранѣе подчинено законамъ математики, созидаемымъ нашимъ разсудкомъ. 2) «Во всѣхъ явленіяхъ ощущеніе и нѣчто реальное, соответствующее ему въ предметѣ (*realitas phaenomenon*), имѣетъ интенсивную величину, т. е. степень»³⁾. 3) Особенное же вниманіе Кантъ обращаетъ на такъ называемыя апалогіи опыта, т. е. основоположенія, опредѣляемыя категоріями отношенія. Всѣ явленія, какъ внутреннія, такъ и внѣшнія, протекаютъ во времени; но «время», настаиваетъ Кантъ⁴⁾, «не можетъ быть наблюдаемо само по себѣ; такимъ образомъ, нѣчто постоянное въ явленіи есть субстратъ всякаго времяопредѣленія, слѣдовательно, и усло-

¹⁾ Трансцендентальный здѣсь равносильно—*априорный*; ср. выше прим. на стр. 32.

²⁾ Кг. А 162; Вл. 153.

³⁾ Кг. А 166; Вл. 156.

⁴⁾ Кг. 226; Вл. 171.

віе возможности всякаго синтеза воспріятій, т. е. опыта. Въ самомъ дѣлѣ, всякое бытіе и всякое измѣненіе во времени можетъ быть наблюдаемо лишь при наличности этого постояннаго, только какъ *modus* существованія того, что пребываетъ всегда однимъ и тѣмъ же. Такое постоянное во всѣхъ явленіяхъ есть предметъ, т. е. субстанція (*phaenomenon*); все же измѣняющееся или могущее измѣниться составляетъ только способъ существованія субстанціи или субстанцій, слѣдовательно, имѣетъ значеніе признаковъ ихъ». Итакъ, категорія субстанціальности, которой прежніе философы склонны были приписывать *метафизическое* значеніе, должна быть признана лишь необходимымъ условіемъ *опыта* и потому имѣетъ законное примѣненіе лишь въ предѣлахъ этого послѣдняго. Очевидно, то же самое слѣдуетъ замѣтить и относительно категоріи причинности. «Все, что случается (возникаетъ)», говоритъ Кантъ ¹⁾, «предполагаетъ нѣчто такое, изъ чего оно вытекаетъ по какому-нибудь закону». Безъ соблюденія этого условія ни одно наше ощущеніе не можетъ имѣть объективнаго значенія, такъ какъ оно не будетъ поставлено въ связь съ другими ощущеніями. 4) Наконецъ, въ связи съ категоріями модальности Кантъ даетъ слѣдующія опредѣленія, на которыя стоитъ обратить вниманіе: «Что согласно съ формальными условіями опыта (интуиціей и понятіями), то *возможно*. Что находится въ связи съ матеріальными условіями опыта (ощущеніями), то *дѣйствительно*. Чего связь съ дѣйствительностью опредѣлена по всеобщимъ условіямъ опыта, то (существуетъ) *необходимо*» ²⁾. Всѣ категоріи, при помощи которыхъ только и можетъ мыслить разумокъ, а равно и вытекающія изъ нихъ основоположенія, «имѣютъ только *эмпирическое* приложеніе и не имѣютъ смысла, если онѣ не примѣняются къ объекту возможнаго опыта, т. е. чувственному міру» ³⁾.

При посредствѣ понятій разумка связываются между собою отдѣльныя ощущенія или отдѣльныя группы ощущеній. Но такого рода разрозненныя связи еще не образуютъ опыта: послѣдній, по крайней мѣрѣ въ идеалѣ, долженъ представлять единую систему. Это систематическое объединеніе совершается при помощи понятій разума, или идей, которыя служатъ для эмпирическаго познанія *регулятивными* принципами, т. е. онѣ указываютъ направленіе, въ которомъ долженъ

¹⁾ Кр. А 189; Вл. 175.

²⁾ Кр. 265; Вл. 198, 199.

³⁾ Кр. 724; Вл. 526.

развиваться опытъ; тогда какъ основоположенія, вытекающія изъ категорій, служатъ *конститутивными*, т. е. опредѣляющими опытъ принципами. Кантъ знаетъ три основныя понятія разума, именно: идею души (психологическую идею), идею міра, какъ законченнаго цѣлаго (космологическую) и идею Бога (теологическую), называемую также идеаломъ человѣческаго разума. Руководясь первой идеей, мы должны такимъ образомъ разсматривать всѣ состоянія души, какъ будто бы послѣдняя была простой, неизмѣнной мыслящей субстанціей¹⁾. И «эта психологическая идея²⁾ можетъ быть весьма полезной, если мы будемъ остерегаться придавать ей большее значеніе, чѣмъ только идеѣ, т. е. будемъ давать ей только относительное значеніе, для систематическаго употребленія разума при разсмотрѣніи явленій нашей души»³⁾. «Но принимать душу за простую субстанцію, (т. е. трансцендентное понятіе)», заявляетъ Кантъ⁴⁾, «значить, принимать мнѣніе, не только недоказанное. (какъ многія физическія гипотезы), но и совершенно произвольное: ибо нѣчто простое вовсе не встрѣчается въ опытѣ». Принципъ, основанный на космологической идеѣ, требуетъ, «чтобы опытъ продолжался и расширялся по возможности далѣе, чтобы никакой эмпирической предѣлъ не принимался за окончательную границу», но никоимъ образомъ не слѣдуетъ усвоить идеѣ, служащей только правиломъ, объективной реальности⁴⁾. Равнымъ образомъ «идеаль Высшаго Существа есть только регулятивный принципъ разума, требующій разсматривать всякую связь въ мірѣ, какъ будто бы она происходила изъ вполне достаточной и необходимой причины, дабы на ней обосновать правило систематическаго и необходимаго по всеобщимъ законамъ единства при объясненіи; но онъ не говоритъ намъ о какомъ-либо необходимомъ существованіи». Правда, «вмѣстѣ съ тѣмъ, нельзя избѣжать того, чтобы, въ силу трансцендентальной ошибки⁵⁾, не представлять себѣ этого формальнаго принципа въ качествѣ конститутивнаго и не мыслить это единство гипостазированнымъ⁶⁾». Но само собою разумѣется, что эмпирикъ долженъ помнить о необоснованности подобнаго рода допущеній. Нечего и

¹⁾ ср. Кр. 699, 700, 710—712; Вл. 511, 512, 518—519.

²⁾ Кр. 711; Вл. 519.

³⁾ Кр. 799—800; Вл. 574.

⁴⁾ Кр. 537; Вл. 409.

⁵⁾ См. примѣч. 5 на стр. 68.

⁶⁾ Кр. 647; Вл. 479.

говорить, что полнота синтеза, требуемая идеями, «не достижима ни для одного возможного эмпирического познания, и разумъ преслѣдуетъ въ нихъ систематическое единство, никогда, однако же, не достигая его» ¹⁾. «Предположимъ», говоритъ философъ ²⁾, «что природа совершенно раскрыта передъ вами, что ничто, доступное интуиціи, не укрылось отъ вашихъ чувствъ и сознанія; и тогда никакимъ опытомъ вы не могли бы познать предмета вашихъ идей *in concreto* (ибо, кромѣ упомянутой полной интуиціи, для сего требуется законченный синтезъ и сознаніе его абсолютной полноты, что не возможно ни при какомъ эмпирическомъ познаніи)». Но, придерживаясь точки зрѣнія эмпиризма, Кантъ рѣшительно заявляетъ ³⁾, что «только одинъ возможный опытъ въ состояніи сообщить нашимъ понятіямъ реальный характеръ: безъ него всякое понятіе есть только идея, лишенная истинности и отношенія къ предметамъ. Поэтому возможное эмпирическое понятіе служить мѣрой, по которой обсуждается идея, является ли она только идеей и созданіемъ мысли, или же ей соотвѣтствуетъ нечто въ мірѣ предметовъ». Между тѣмъ «значеніе идеи тотчасъ извращается, если ей дается смыслъ утвержденія или предположенія дѣйствительной вещи» ⁴⁾. Въ особенности вреднымъ слѣдуетъ признать стремленіе объяснять при помощи гипостазированныхъ идей явленія, наблюдаемая въ опытѣ. «Даже психологическая идея», говоритъ философъ ⁵⁾, «если она употребляется въ качествѣ конститутивнаго принципа для объясненія явленій нашей души и при томъ, въ видахъ расширенія нашего познанія объ этомъ субъектѣ за предѣлы опыта (о состояніи по смерти), губить *естественную* дѣятельность разума по руководству опыта, хотя и доставляетъ ему нѣкоторое удобство». «Еще сильнѣе бросаются въ глаза вредныя слѣдствія при догматическомъ отношеніи къ идеѣ Высшей Разумности... Здѣсь всякая цѣль, замѣчаемая въ природѣ, часто даже придуманная нами, служить къ личному удобству при изслѣдованіи причинъ, именно: вмѣсто объясненія природы по всеобщимъ законамъ механизма, прямо ссылаются на неизслѣдимый совѣтъ высшей мудрости» ⁶⁾. «Прин-

¹⁾ Кг. 595; Вл. 445.

²⁾ Кг. 510; Вл. 392.

³⁾ Кг. 517; Вл. 397.

⁴⁾ Кг. 709; Вл. 518.

⁵⁾ Кг. 718; Вл. 523.

⁶⁾ Кг. 718; Вл. 523.

цять лѣниваго разсудка (*ignava ratio*)», замѣчаєть Кантъ 1), «въ томъ и состоитъ, что причины, объективная реальность которыхъ могла бы быть доказана, по крайней мѣрѣ въ продолженіи опыта, совершенно оставляются безъ вниманія, и онъ успокаивается на причинѣ, удобной для него.

При помощи чистыхъ формъ интуицій, понятій разсудка и идей разума наука, въ концѣ концовъ, стремится познать дѣйствительность въ томъ видѣ, въ какомъ она представляется сознанію людей вообще, поскольку это сознаніе способно отрѣшиться отъ ограниченій, налагаемыхъ на человека его индивидуальностью, а также временными, измѣнчивыми состояніями его души. Объектъ познанія въ этомъ случаѣ можно назвать эмпирическимъ предметомъ: послѣдній необходимо отличать съ одной стороны, отъ тѣхъ или другихъ комплексовъ субъективныхъ ощущеній, которые не могутъ претендовать на объективное значеніе, съ другой стороны,—отъ вещей въ себѣ, существующихъ независимо отъ какихъ бы то ни было формъ познающаго субъекта. Конечно, наука изслѣдуетъ и такъ называемыя вторичныя качества тѣлъ; но при помощи ихъ она не можетъ выражать полученныхъ ею результатовъ, по крайней мѣрѣ въ томъ случаѣ, если разсчитываетъ на значительную степень точности и устойчивости своихъ выводовъ, такъ какъ относящіяся сюда ощущенія слишкомъ измѣнчивы даже у отдѣльнаго субъекта. Эмпирический предметъ Кантъ называетъ въ одномъ мѣстѣ Критики вещью (*Sache*) въ себѣ въ физическомъ смыслѣ. «Напр., раду-гу», говорится въ Эстетикѣ 2), «можно назвать простымъ явленіемъ при дождѣ, самый же дождь—*вещью самой въ себѣ*; это будетъ правильно, поскольку мы употребляемъ послѣднее понятіе въ *физическомъ смыслѣ*, обозначая то, что во всеобщемъ опытѣ, при всѣхъ разнообразныхъ отношеніяхъ къ нашей чувственности, все-таки опредѣляется такъ именно, а не иначе, при помощи интуиціи. Но мы возьмемъ этотъ эмпирический фактъ вообще и, не обращая вниманія на согласіе его съ человеческимъ ви́дшимъ чувствомъ, поставимъ вопросъ: выражаетъ ли онъ предметъ самъ въ себѣ? (рѣчь идетъ не о дождевыхъ капляхъ: какъ явленіе, онѣ суть эмпирическіе объекты.) Такой вопросъ объ отношеніи представленія къ предмету есть трансцендентальный; то-

1) Кг. 801; Вл. 574.

2) Кг. 63; Вл. 43.

гда не только самыя капли становятся явленіями, но и самая ихъ круглая фигура, даже пространство, въ которомъ онѣ падаютъ, не суть нѣчто само въ себѣ, но лишь видоизмѣненія или основныя черты нашей чувственной интуиціи; при чемъ трансцендентальный объектъ остается намъ неизвѣстнымъ». Вообще, Кантъ нерѣдко съ полной отчетливостью различаетъ эмпирическую и трансцендентальную реальность (последнюю, быть можетъ, лучше назвать реальностью метафизической); такъ, въ Эстетикѣ онъ много разъ говоритъ объ *эмпирической* реальности пространства и времени, но вмѣстѣ съ тѣмъ настаиваетъ на *трансцендентальной*¹⁾ ихъ идеальности. «Выраженіе *внѣ насъ*», читаемъ мы въ отдѣлѣ О паралогизмахъ²⁾, «по необходимости двусмысленно: то оно обозначаетъ нѣчто, существующее какъ вещь, обособленная отъ насъ, то нѣчто, относящееся только къ внѣшнему явленію». Чтобы избѣжать подобной двусмысленности, философъ намѣренъ «эмпирически внѣшніе предметы» называть просто вещами. встрѣчаемыми въ пространствѣ, дабы отличить ихъ отъ тѣхъ, которые могутъ быть названы внѣшними «въ трансцендентальномъ смыслѣ». «Конечно», говорится нѣсколько далѣе³⁾, «пространство со всѣми явленіями въ немъ, какъ представленіе, существуетъ только во мнѣ. За то реальное въ пространствѣ, или вещество предметовъ внѣшней интуиціи есть нѣчто дѣйствительное и данное независимо отъ всякой фантазіи; и даже невозможно, чтобы въ этомъ пространствѣ должно было быть даннымъ что нибудь *внѣ насъ* (въ трансцендентальномъ⁴⁾ смыслѣ), ибо пространство внѣ нашей чувственности есть ничто». Впрочемъ, слѣдуетъ имѣть въ виду, что далеко не всегда Кантъ выражаетъ съ полной опредѣленностью, въ какомъ именно смыслѣ онъ употребляетъ тѣ или другіе термины: въ эмпирическомъ или трансцендентальномъ. Но къ этому вопросу мы еще возвратимся въ настоящей главѣ⁵⁾.

Въ связи съ только что сказаннымъ Кантъ настойчиво проводитъ различіе, въ особенности при изложеніи второго паралогизма, между

¹⁾ Ср. прим. на стр. 32.

²⁾ Кг. А 373; Вл. 318.

³⁾ Кг. А 375; Вл. 319.

⁴⁾ *Трансцендентальный* здѣсь равно *метафизическій*; ср. выше примѣч. на стр. 32.

⁵⁾ См. ниже § 7.

эмпирическимъ реализмомъ, признающимъ дѣйствительность матеріальныхъ предметовъ въ пространствѣ, какъ чего-то непосредственно даннаго, и *трансцендентальнымъ*, приписывающимъ этимъ предметамъ метафизическую реальность. Въ соотвѣтствіи съ этимъ существуетъ *трансцендентальный* идеализмъ, котораго придерживается самъ Кантъ и который отрицаетъ метафизическую реальность матеріи, и *эмпирический*, проводящій воззрѣніе, что она не можетъ быть дана непосредственно. Этотъ послѣдній, въ свою очередь, имѣетъ еще два подраздѣленія: *догматическій* идеализмъ вовсе отвергаетъ реальность внѣшняго міра, *скептический* признаетъ ее сомнительной и требуетъ доказательствъ для ея обоснованія ¹⁾). На эти различія необходимо обратить серьезное вниманіе: дѣло въ томъ, что во второмъ изданіи Критики чистаго разума философъ помѣстилъ отдѣлъ, посвященный «опроверженію идеализма», породившій въ послѣдствіи многочисленныя недоразумѣнія, можно думать, въ значительной мѣрѣ въ силу того, что слишкомъ мало обращали вниманія на связь его съ мыслями, уже прежде выраженными въ первомъ изданіи Критики.

Съ трансцендентальной точки зрѣнія всѣ предметы и ихъ признаки, съ которыми имѣетъ дѣло опытное познаніе, въ концѣ концовъ, слѣдуетъ считать только представленіями, приведенными въ извѣстный порядокъ при помощи основныхъ законовъ, присущихъ нашей познавательной способности. Но для эмпирика, пока онъ не затрогиваетъ вопросовъ теоріи познанія, нѣкоторые изъ объектовъ, въ сущности независящихъ нами, въ качествѣ внѣшнихъ предметовъ обладаютъ полною независимостью отъ нашего эмпирическаго сознанія; они находятся въ связи съ другими представленіями, вызываютъ ихъ и такимъ образомъ возбуждаютъ нашу чувственность. Въ Критикѣ чистаго разума философъ не разъ указываетъ на этотъ фактъ; при чемъ иногда не подлежитъ никакому сомнѣнію, что рѣчь идетъ о воздѣйствіи именно эмпирическихъ предметовъ. Такъ, въ Эстетикѣ ²⁾ говорится, что цвѣтъ суть «видоизмѣненія чувства зрѣнія, возбуждаемаго извѣстнымъ образомъ дѣйствіемъ свѣта». Объ отношеніи дождевыхъ капель въ качествѣ вещей въ себѣ, въ физическомъ смыслѣ, къ нашей чувственности мы упоминали выше ³⁾. Далѣе, въ отдѣлѣ Объ антиципаціи воспріятій

¹⁾ Ср. выше, стр. 66.

²⁾ Кг. А 28; Вл. 33.

³⁾ См. стран. 77.

дается опредѣленіе, которое настойчиво здѣсь повторяется, именно: «Что въ эмпирической интуиціи соотвѣтствуетъ ощущенію, называется реальностью». Затѣмъ мы узнаемъ, что каждая реальность имѣетъ интенсивную величину, и «если эту реальность разсматривать, какъ причину (ощущенія ли, или другой реальности, напр. измѣненія), то ее, какъ причину реальности, называютъ моментомъ»¹⁾. Еще опредѣленіе говорится о вліяніи эмпирическихъ предметовъ въ отдѣлѣ Обь основоположеніи общенія. «Только существованіе непрерывныхъ вліяній во всѣхъ пунктахъ пространства», читаемъ мы здѣсь²⁾, «можетъ руководить наше чувство при переходѣ отъ однихъ предметовъ къ другимъ» и «свѣтъ, находящійся между нашимъ глазомъ и міровыми тѣлами, образуетъ посредственное общеніе между нами и ими». Наконецъ, въ Ученіи обь аптнотміяхъ³⁾ философъ прямо заявляетъ, что «не будь предметовъ въ пространствѣ, мы не имѣли бы эмпирическихъ представленій». Эти предметы въ пространствѣ, хотя всецѣло облечены въ формы нашего сознанія, если разсматривать вопросъ съ трансцендентальной⁴⁾ точки зрѣнія, все же неизбѣжно должны обладать извѣстнаго рода независимостью и присущими имъ постоянными свойствами, разъ только какое бы то ни было опытное познаніе возможно. «Если бы киноварь», читаемъ мы въ Аналитикѣ⁵⁾, «была то красной, то черной, то тяжелой, то легкой; если бы человѣкъ принималъ образъ то одного, то другого животнаго; если бы земля въ теченіе одного дня покрывалась то плодами, то льдомъ и снѣгомъ,—тогда наше эмпирическое воображеніе не имѣло бы ни малѣйшаго побужденія соединять съ представленіемъ краснаго цвѣта мысль о тяжелой киновари»; и, слѣдовательно, какой бы то ни было опытъ былъ бы совершенно не мыслимъ.

Даже изслѣдуя условія возможности опытнаго познанія, Кантъ обнаруживаетъ большую склонность къ феноменалистической точкѣ зрѣнія и находитъ убѣдительное ея подтвержденіе. Въ самомъ дѣлѣ, эмпирическая наука не можетъ обойтись безъ нѣкоторыхъ апріорныхъ, синтетическихъ сужденій; а между тѣмъ нельзя понять, почему неза-

¹⁾ Кг. 210; Вл. 159.

²⁾ Кг. 260; Вл. 195.

³⁾ Кг. 520; Вл. 399.

⁴⁾ Трансцендентальный здѣсь равно метафизическій; ср. выше прим. на стр. 32.

⁵⁾ Кг. А 100; Вл. 97.

висимыя отъ насъ вещи должны согласовать свои признаки съ нашими сужденіями, которыя мы составляетъ о нихъ а priori, т. е. ранѣе самого опыта. Вопросъ, думаетъ Кантъ, разрѣшается только въ томъ случаѣ, если признать, что мы имѣемъ дѣло лишь съ явленіями, т. е. нашими представленіями, которыя всецѣло подчинены основнымъ формамъ нашего сознанія. Вещи въ себѣ, конечно, обладаютъ абсолютной реальностью; философъ слишкомъ далекъ отъ мысли подвергнуть сомнѣнію ихъ существованіе. Но чѣмъ опредѣленнѣе выражаетъ онъ свою склонность къ эмпиризму, тѣмъ сильнѣе выступаетъ на видъ его стремленіе оградить опытъ отъ какого бы то ни было воздѣйствія со стороны абсолютной дѣйствительности. Вещь въ себѣ признается кореннымъ образомъ отличной отъ всего, доступна нашему сознанію. Уже потому она остается для насъ совершенно неизвѣстной, но для эмпирика это едва ли представляетъ какой-либо интересъ, такъ какъ «въ опытѣ никогда не возникаетъ о ней и вопроса»¹⁾. «Чѣмъ могутъ быть вещи въ себѣ», замѣчаетъ Кантъ, стоя на точкѣ зрѣнія эмпиризма²⁾, «я не знаю, но и не нуждаюсь въ подобномъ знаніи, потому что съ вещью я всегда имѣю дѣло только какъ съ явленіемъ»³⁾.

5. До сихъ поръ въ настоящей главѣ мы касались, по возможности въ чистомъ видѣ, лишь такихъ воззрѣній великаго философа, которыя не допускаютъ о потусторонней дѣйствительности никакихъ утвержденій, по крайней мѣрѣ могущихъ расширить положительнымъ образомъ наше познаніе о ней. Но, будучи глубоко убѣжденнымъ метафизикомъ, Кантъ, конечно, не могъ ограничиться подобнаго рода воззрѣніями. Изъ предшествующаго изложенія мы знаемъ, какой живой интересъ обнаруживалъ онъ всегда по отношенію къ высшимъ философскимъ вопросамъ. Онъ твердо вѣритъ въ великую будущность метафизики и потому не боится скептически и даже съ ироніей отзываться о ея неудачахъ въ настоящее время. Критика разума стремится положить конецъ этимъ неудачнымъ попыткамъ и подготовить твердый фундаментъ, на которомъ можно было бы возвести величествен-

¹⁾ Кр. 45; Вл. 33.

²⁾ Кр. 333; Вл. 249.

³⁾ Ср. по вопросу о методѣ, какимъ пользовался Кантъ при своихъ гносеологическихъ изысканіяхъ—Riehl стр. 315 и слѣд., въ особенности: 326, 337, 328, 348—51, 493, 375, 413; Wartenberg, стр. 39; о примѣненіи идей въ опытномъ познаніи—Cohen стр. 519; объ эмпирическомъ предметѣ и его влияніи статья Vaihinger'a стр. 150, также Комментар. II, 51, 503.

ное знаніе: она должна служить пропедевтикой для будущей метафизики. Но и въ ней Кантъ не упускаетъ случая изложить довольно обстоятельно свои метафизическіе взгляды, правда, почти всегда мимоходомъ, что освобождаетъ его отъ обязанности подыскивать для нихъ надлежащее обоснованіе.

Въ Критикѣ, какъ и въ диссертациі 1770-го года ¹⁾ Кантъ, вслѣдъ за Лейбницемъ, различаетъ двѣ основныя познавательныя способности: чувственность и разумокъ. «Если чувственностью», говорится въ началѣ Трансцендентальной логики ²⁾, «мы называемъ рецептивность (воспримчивость) нашей души, образующей представленія по мѣрѣ того, какъ она аффицируется извѣстнымъ образомъ, то способность самодѣятельно образовывать представленія, или вообще самодѣятельность слѣдуетъ назвать разумкомъ (въ познаніи)». Въ соотвѣтствіи съ этимъ существуетъ и два объекта познанія: чувственный міръ явленій и лежащій въ основѣ послѣднихъ умопостигаемый міръ духовныхъ сущностей, доступныхъ только чистому, т. е. свободному отъ чувственности разуму. Вещи въ себѣ, существующія независимо отъ нашихъ представленій, Кантъ охотно называетъ ноуменами въ противоположность явленіямъ (феноменамъ), какъ чему-то только кажущемуся; и въ этомъ обозначеніи нельзя видѣть лишь условнаго названія, заимствованнаго изъ школьной метафизики. Быть можетъ, всего нагляднѣе это можно подтвердить разсмотрѣніемъ того способа, какимъ обосновываетъ Кантъ непознаваемость вещей въ себѣ. Для скептика эта непознаваемость вполнѣ вытекаетъ изъ того, что мы никоимъ образомъ не можемъ выйти изъ круга переживаемыхъ нами представленій и охватить вещи въ себѣ въ томъ видѣ, въ какомъ онѣ существуютъ независимо отъ нашего сознанія. Кантъ иногда высказываетъ такого рода мысли ³⁾. Но гораздо охотнѣе онъ пользуется для той же цѣли другимъ доказательствомъ, которое прекрасно характеризуетъ его настоящія воззрѣнія. Говоря о раздѣленіи всѣхъ предметовъ на феномены и ноумены, философъ настаиваетъ на непознаваемости вещей въ себѣ, съ утомительными повтореніями указывая на тотъ фактъ, что мы обладаемъ лишь *чувственной* интуиціей, и безъ этой послѣдней разумочныя понятія, т. е. категоріи, превращаются въ чисто логическія формы безъ какого

¹⁾ Ср. выше, стр. 38.

²⁾ Кг. 75; Вл. 53.

³⁾ Ср. выше, стр. 53.

бы то ни было содержанія. Подобныя разсужденія понятны и имѣютъ смыслъ лишь при существованіи не высказаннаго предположенія, что, въ дѣйствительности, есть какая-то *нечувственная* интуиція,—для настоящаго скептика они совершенно излишни. Такимъ образомъ, даже высказывая скептическія мысли, Кантъ остается, самъ того не сознавая, глубоко убѣжденнымъ раціоналистомъ. Для него все, обладающее абсолютнымъ существованіемъ, и монады въ духѣ Лейбница связаны до такой степени неразрывной ассоціаціей, что онъ не въ состояніи говорить о первомъ, не подразумевая тутъ же и вторыхъ; такъ что вопросъ о существованіи вещей въ себѣ, въ концѣ концовъ, почти всегда подмѣняется вопросомъ о томъ, обладаетъ ли умопостигаемый міръ духовныхъ сущностей абсолютной реальностью. Для самого философа реальность эта не подлежитъ ни малѣйшему сомнѣнію; но является потребность обосновать свои утвержденія. Къ этому присоединяются другія стремленія и другія точки зрѣнія, которыя необходимо примирить между собой. Всего сильнѣе, но, очевидно, съ весьма малымъ успѣхомъ, эта попытка обнаруживается въ той части Критики, гдѣ рѣчь идетъ о раздѣленіи всѣхъ предметовъ на феномены и ноумены. «Если бы мы», говорится въ указанномъ отдѣлѣ ¹⁾, «подъ предметами нечувственной интуиціи разумѣли то, что по отношенію къ нимъ категоріи не имѣютъ никакого значенія, и что мы такимъ образомъ никогда не можемъ имѣть познанія о нихъ (ни интуиціи, ни понятія), тогда, конечно, можно допустить ноумены въ этомъ отрицательномъ значеніи: тогда ноумены будутъ напоминать намъ, что нашъ способъ интуиціи имѣетъ дѣло не со всѣми вещами, а только съ предметами нашихъ чувствъ, что ихъ объективное значеніе строго ограничено, и что, можетъ быть, есть другой способъ интуиціи и область объектовъ, доступныхъ такой интуиціи. Но все же понятіе ноумена является *проблематическимъ* понятіемъ, т. е. представленіемъ вещи, о которой мы не въ состояніи сказать ни того, что она возможна, ни того, что она не возможна, пока мы не знаемъ другой интуиціи, кромѣ нашей чувственной, другого рода понятій, кромѣ категорій; но ни чувственность, ни категоріи не могутъ служить для соизмѣренія предмета, находящагося внѣ чувственности. Мы никакъ не можемъ расширить области предметовъ мышленія за предѣлы условій нашей чувственности

¹⁾ Кг. 342; Вл. 256.

положительнымъ образомъ и *не можемъ допускать*, кромѣ явленій, еще области предметовъ чистаго мышленія, т. е. noumena, такъ какъ они не имѣютъ для насъ никакого очевиднаго положительнаго значенія». Такимъ образомъ, послѣ того какъ въ Эстетикѣ и въ Аналитикѣ философъ постоянно противопоставлялъ міръ явленій потустороннему міру вещей въ себѣ, теперь—уже въ концѣ Аналитики—назвавъ эти послѣднія noumenami, онъ, на первый взглядъ, какъ бы готовъ даже усомниться въ ихъ существованіи: noumeny признаны лишь проблематическимъ понятіемъ. Нѣсколько менѣе отрицательно высказывается Кантъ по тому же вопросу немного ниже. «Такъ какъ чувственная интуиція», говорится здѣсь ¹⁾, «прилагается не ко всѣмъ вещамъ безъ различія,—остается мѣсто и для многихъ другихъ предметовъ,—то, слѣдовательно, послѣдніе не могутъ быть просто отрицаемы за недостаткомъ опредѣленнаго понятія, но не могутъ также быть признаны и предметами для нашего разсудка (такъ какъ ни одна изъ категорій не примѣнима для этой цѣли)». «Чисто умопостигаемая сущность и чисто умопостигаемая свойства чувственнаго міра», правда, по праву могутъ быть допускаемы разумомъ лишь какъ мнѣнія, но за то ихъ нельзя и отрицать догматически на томъ основаніи, что мы не имѣемъ понятія ни о ихъ невозможности, ни о ихъ возможности ²⁾. Самый внѣшній міръ представляется нашему философу въ видѣ монадъ Лейбница. «Возможно и то», говорится между прочимъ въ отдѣлѣ О паралогизмахъ ³⁾, «что нѣчто, лежащее въ основѣ внѣшняго явленія и аффицирующее наше чувство, вслѣдствіе чего послѣднее получаетъ представленія о пространствѣ, веществѣ, фигурѣ и т. д.—это нѣчто, рассматриваемое какъ noumenъ (или, лучше, какъ трансцендентный предметъ), само можетъ имѣть мысли: хотя по способу возбужденія нашего чувства, мы не знаемъ о его представленіяхъ, волѣ и т. н., а только о пространствѣ и его опредѣленіяхъ». Гораздо опредѣленнѣе высказываетъ Кантъ свои метафизическіе взгляды при разрѣшеніи третьей антиноміи, когда онъ стремится доказать мыслимость свободы, не отвергая вмѣстѣ съ тѣмъ и закона причинности, которому подчинены безъ изъятія всѣ факты, доступные опытному наблюденію. «Субъекту въ чувственномъ мірѣ», говорится здѣсь ⁴⁾, «мы можемъ приписывать, во-первыхъ, эмпирической характеръ,

¹⁾ Кг. 344; Вл. 257.

²⁾ Кг. 800; Вл. 574.

³⁾ Кг. А 358; Вл. 206.

⁴⁾ Кг. 567; Вл. 427.

въ силу котораго дѣйствія его, какъ явленія, состоятъ въ непрерывной связи съ другими явленіями по постояннымъ законамъ природы, могутъ быть выводимы изъ нихъ, какъ изъ своихъ условій, и въ связи съ ними суть члены единственнаго ряда въ порядкѣ природы. Во-вторыхъ, этому субъекту должно приписать еще умопостигаемый характеръ, въ силу котораго онъ, будучи причиной дѣйствій, какъ явленій, самъ не зависитъ отъ условій чувственности и не есть явленіе. Первый можетъ быть названъ характеромъ вещи въ явленіи, другой— характеромъ вещи самой въ себѣ». «Конечно», читаемъ мы немного далѣе ¹⁾, «нельзя имѣть непосредственныхъ свѣдѣній объ этомъ умопостигаемомъ характерѣ, ибо мы наблюдаемъ одни только явленія: однако, должно его мыслить сообразно съ эмпирическимъ характеромъ, подобно тому, какъ мы вообще *должны* мысленно класть въ основу явленій трансцендентальный предметъ, хотя ничего не знаемъ о томъ, что онъ есть самъ въ себѣ». Какъ глубоко убѣжденный рационалистъ, Кантъ ставитъ разумъ и разумъ неизмѣримо выше всего, встрѣчаемаго нами въ чувственномъ мірѣ. Въ особенности разумъ, по его мнѣнію, «рѣзко отличается отъ всѣхъ эмпирически обусловленныхъ силъ, ибо онъ оцѣниваетъ предметы только по идеямъ и сообразно съ этимъ опредѣляетъ разумъ, который уже потому прилагаетъ къ опыту свои (чистыя) понятія». Мало того, разумъ «вполнѣ самодѣтельно создаетъ собственный порядокъ по идеямъ, къ которымъ приравниваетъ эмпирическія условія и въ силу которыхъ онъ считаетъ необходимыми даже такія дѣйствія, которыя еще не осуществились и, быть можетъ, никогда не осуществляются» ²⁾. «Такъ какъ самъ разумъ», говорится далѣе ³⁾, «не есть явленіе и не подчиненъ условіямъ чувственности, то въ его причинности нѣтъ временнаго преемства, а потому къ нему не можетъ быть прилажаемъ динамическій законъ природы, опредѣляющій по правиламъ временную смѣну явленій. Разумъ есть постоянное условіе всѣхъ произвольныхъ дѣйствій, въ которыхъ человѣкъ обнаруживается. Каждое изъ нихъ въ эмпирическомъ характерѣ человѣка опредѣлено еще раньше, чѣмъ оно совершается. По отношенію же къ умопостигаемому характеру, котораго первый является лишь чувственнымъ отображеніемъ, не имѣетъ значенія ни *раньше*, ни *позже*, и каждое

¹⁾ Кг. 568; Вл. 428

²⁾ Кг. 575, 576; Вл. 432, 433.

³⁾ Кг. 581; Вл. 436.

дѣйствіе, несмотря на отношенія времени, въ какихъ оно находится съ другими явленіями, есть непосредственное слѣдствіе умопостигаемаго характера чистаго разума; онъ дѣйствуетъ свободно, не завися въ цѣпи естественныхъ причинъ отъ ви́шнихъ или внутреннихъ, по времени предшествующихъ основаній». Въ мірѣ явленій повсюду господствуетъ законъ причинности: «но, конечно, этимъ не исключается», настаиваетъ Кантъ ¹⁾, «возможности того, что цѣлый рядъ можетъ опираться на какое-нибудь умопостигаемое существо (свободное отъ всякаго эмпирическаго условія и даже служащее основаніемъ возможности всѣхъ этихъ явленій)». Еще болѣе рѣзко метафизическія симпатіи великаго Кенигсбергскаго мыслителя обнаруживаются въ томъ мѣстѣ Критики чистаго разума, гдѣ онъ излагаетъ свою теорію о сущности души, уподобляя даже весь чувственный міръ просто сновидѣнію. Онъ находитъ возможнымъ допустить, что «всякая жизнь въ сущности имѣетъ умопостигаемый характеръ, не подвержена измѣненіямъ времени и какъ не была начата рожденіемъ, такъ не заканчивается и смертию,—но эта жизнь есть только явленіе, т. е. чувственное представленіе чисто духовной жизни; что цѣлый чувственный міръ есть простой образъ, предносящійся теперь нашему познанію и, какъ *сновидѣніе*, самъ по себѣ не имѣетъ *объективной реальности*, и что, если бы мы могли созерцать въ интуиціи вещи и свою собственную личность въ самихъ себѣ, то мы нашли бы себя членами міра духовныхъ существъ, единственно истинное общеніе съ которымъ какъ не начиналось рожденіемъ, такъ и не прекращается тѣлесной смертію (которыя суть только явленія)» ²⁾. Интересно сопоставить приведенныя только что мысли съ эмпирическими воззрѣніями Канта ³⁾. Правда, изложенная теорія высказывается лишь какъ гипотеза въ противовѣсъ другимъ не обоснованнымъ гипотезамъ; но не трудно замѣтить, куда направлены при этомъ симпатіи самого Канта.

Сравнительно легко высказывать тѣ или другіе взгляды на сущность потусторонней дѣйствительности, гораздо труднѣе найти убѣдительные доводы для ихъ обоснованія. Возникаетъ трудный вопросъ: какимъ образомъ можемъ мы выйти за предѣлы сознанія и получить свѣдѣнія о томъ, что, по убѣжденію Канта, такъ рѣзко отличается отъ

¹⁾ Кг. 590; Вл. 441.

²⁾ Кг. 807; Вл. 577.

³⁾ Ср. въ особенности стр. 69 и 74.

всего, доступнаго нашему непосредственному наблюденію? Чувственныя представленія вообще, и, въ частности, чистыя формы интуиціи совершенно не пригодны для подобной цѣли; въ этомъ Кантъ, по-видимому, ни разу не усомнился въ теченіе всей своей жизни, вполне примыкая въ данномъ случаѣ къ метафизическимъ воззрѣніямъ своего учителя—Лейбница. Иначе обстояло дѣло съ понятіями разсудка. Въ диссертации 1770-го года Кантъ допускалъ для нихъ *usum realem*¹⁾, но дѣлалъ это скорѣе въ силу традиціи, не указывая, почему можетъ быть допущено для разсудка такого рода предпочтеніе по сравненію съ чувственностью. Въ 70-хъ годахъ философъ много думалъ о притязаніяхъ разума выходить за предѣлы возможнаго опыта и пришелъ къ выводамъ, мало благопріятствующимъ стремленіямъ метафизики. По отношенію къ понятіямъ разсудка эти выводы можно всего удобнѣе выразить такимъ образомъ²⁾: «Чистыя категоріи, независимо отъ формальныхъ условій чувственности, имѣютъ одно трансцендентальное значеніе, но не трансцендентальное употребленіе³⁾; послѣднее само по себѣ не возможно, такъ какъ въ нихъ самихъ нѣтъ условій, при которыхъ возможно ихъ употребленіе (въ сужденіяхъ), именно формальныхъ условій подчиненія какому-нибудь даннаго предмета подъ эти понятія. И такъ какъ непосредственное эмпирическое употребленіе ихъ (какъ чистыхъ категорій) не должно быть допускаемо, а трансцендентальное не возможно, то, слѣдовательно, не возможно вообще никакое употребленіе, если ихъ отрѣшить отъ всякой чувственности; тогда для нихъ не существуетъ предмета (т. е. онѣ вовсе не могутъ быть приложены къ какому-нибудь данному предмету): больше того, онѣ остаются чистыми формами дѣятельности разсудка, прилагаемыми къ предметамъ вообще,—формами мышленія, не допускающими однако возможности исключительно при помощи ихъ мыслить или опредѣлить какой-либо предметъ». Что же касается идей разума, то было бы гораздо «лучше—и меньше опасности вызвать недоразумѣніе—если бы мы сказали, что не можемъ имѣть познанія объ объектѣ, соответствующемъ идеѣ, хотя можемъ

¹⁾ См. выше, стр. 40.

²⁾ Кг. 305; Вл. 227

³⁾ *Трансцендентальный* въ данномъ случаѣ равносильно *метафизическій*. Ср. прим. на стр. 32. Что собственно хочетъ выразить Кантъ, различая термины *значеніе* (*Bedeutung*) и *употребленіе* (*Gebrauch*), сказать трудно. Какъ кажется, онъ пытается здѣсь отдѣлаться отъ рѣшенія труднаго философскаго вопроса при помощи словесныхъ операцій.

имѣть о немъ проблематическое понятіе ¹⁾). Дѣло еще значительно усложняется тѣмъ, что Кантъ, вслѣдъ за прочими рационалистами, хочетъ, чтобы метафизика, подобно математикѣ, была аподиктической наукой, и въ весьма опредѣленныхъ выраженіяхъ заявляетъ, что мнѣнія лишь болѣе или менѣе вѣроятныя и, вообще, какія бы то ни было гипотезы не должны быть въ ней вовсе допускаемы ²⁾).

Послѣ всего выше изложеннаго, можно бы думать, оставалось лишь совершенно отказаться отъ всякаго рода разсужденій по поводу абсолютной дѣйствительности; на самомъ же дѣлѣ Кантъ весьма далекъ отъ подобной мысли. Прежде всего, онъ примѣняетъ къ ней—очевидно, самъ того не сознавая съ достаточной отчетливостью—категорія, которая, по его настойчивому заявленію, не могутъ имѣть *трансцендентальную употребленія*. Такъ, называя абсолютную дѣйствительность вещами въ себѣ, онъ, волей-неволей, подчиняетъ ее категоріи множества; не сомнѣваясь въ томъ, что вещи въ себѣ *существуютъ*, уже тѣмъ самымъ примѣняетъ къ нимъ категорію реальности: настойчиво утверждая, что онѣ лежатъ *въ основѣ* явленій, очевидно, не можетъ обойтись безъ категоріи субстанціальности; наконецъ, признавая вещи въ себѣ чѣмъ-то *дѣйствительнымъ* или, по крайней мѣрѣ, *возможнымъ* (проблематическимъ понятіемъ), философъ примѣняетъ къ нимъ одну изъ категорій модальности ³⁾. Но пользуясь для постиженія абсолютной дѣйствительности формами, коренящимися въ нашей духовной организаціи, Кантъ поступаетъ иногда и болѣе сознательно; при этомъ онъ употребляетъ приемы, которые въ высшей степени удачно отмѣчены Фолькельтомъ ⁴⁾. Я позволю себѣ заимствовать у него мысли, представляющія для нашей цѣли наибольшую важность. Названный только что авторъ различаетъ въ данномъ случаѣ троякаго рода приемы; мы остановимся на каждомъ изъ нихъ въ отдѣльности.

А) Лишь стремленіемъ Канта удовлетворить свои метафизическія потребности можно объяснить тотъ фактъ, что, говоря о примѣненіи идей, онъ любитъ сопровождать относящіяся сюда выраженія частями: «какъ будто бы». Всѣ явленія нашей души мы должны связывать такимъ образомъ, *какъ будто бы* она была простой, неизмѣнной,

¹⁾ Кг. 396; Вл. 293.

²⁾ Ср. Кг. 806; Вл. 576; также предисл. XI; Вл. VП.

³⁾ Ср. p. 100; Volkelt, Erdmann, pp. 46 и 61.

⁴⁾ Ср. Volkelt, p. 134 и слѣд.

мыслящей субстанціей¹⁾); космологическая идея, въ свою очередь, требуетъ, чтобы мы при объясненіи явленій поступали такъ, *какъ будто бы* рядъ состояній имѣлъ простое начало, т. е. какъ будто бы ихъ начало коренилось въ свободѣ, въ умопостигаемой первопричинѣ²⁾); наконецъ, руководясь третьей идеей «понятіемъ разума о Богѣ», мы должны разсматривать вещи такимъ образомъ, *какъ будто бы* онѣ произошли изъ Высшей Разумности, отъ нѣкотораго самостоятельнаго, первоначальнаго, творческаго разума,—отъ существа, дѣйствующаго по самымъ мудрымъ цѣлямъ, всеохватывающаго и вседовольнаго³⁾). Разумѣется, могутъ замѣтить—и самъ Кантъ, какъ мы видѣли⁴⁾), нерѣдко настаиваетъ на этомъ,— что здѣсь рѣчь идетъ исключительно объ эмпирическомъ употребленіи идей, имѣющемъ цѣлью сообщить опытному познанию возможно большее единство. Но Фолькельтъ справедливо замѣчаетъ по поводу подобнаго возраженія, что при такомъ объясненіи нельзя понять, почему же философъ не употребляетъ никогда указанныхъ выше частицъ, говоря о категоріяхъ; почему бы ему, напр., не выразиться приблизительно такимъ образомъ: категорія субстанціальности требуетъ, чтобы мы разсматривали природу такъ, *какъ будто бы* количество матеріи въ ней всегда оставалось однимъ и тѣмъ же? Нельзя, конечно, упрекать Канта въ *сознательномъ* самообманѣ: скорѣе, дѣло происходило такимъ образомъ, что философъ жилъ въ увѣренности, что онъ сохраняетъ свою скептическую и феноменалистическую точки зрѣнія на сущность абсолютной дѣйствительности, и вмѣстѣ съ тѣмъ, употребляя указанные выше выраженія, онъ втихомолку удовлетворялъ свои метафизическія потребности, познавая, хотя до нѣкоторой степени, эту дѣйствительность при содѣйствіи разума.

В) Далѣе, Кантъ уже открыто пытается мыслить при помощи идей разума, если не самыя вещи въ себѣ, то, по крайней мѣрѣ, ихъ отношеніе къ явленіямъ. Преимущественно слѣдуетъ обратить вниманіе на тѣ мѣста, находящіяся въ заключительной части Трансцендентальной діалектики, въ которыхъ рѣчь идетъ о различіи между тѣмъ, что принимается въ относительномъ и абсолютномъ смыслѣ. «Я могу

¹⁾ Ср. Кр. 699, 700, 710—712; Вл. 511, 512, 518—19.

²⁾ Ср. Кр. 700, 713; Вл. 512, 519—20.

³⁾ Ср. Кр. 699, 713, 716; Вл. 511, 520, 521—2.

⁴⁾ См. выше, стр. 74.

имѣть достаточное основаніе», говорить Кантъ ¹⁾, принимать что-либо *относительнымъ образомъ*, вовсе не имѣя права *просто* принимать то же самое» ²⁾. Это различіе имѣетъ значеніе, если разсматривать отношеніе идеи къ вещи въ себѣ. Нельзя, конечно, утверждать, что есть нѣкоторое существо, что оно само въ себѣ обладаетъ свойствами идеи: такъ какъ наши понятія внѣ опытнаго употребленія теряютъ всякій смыслъ. Но тѣмъ не менѣе, говоритъ философъ, я могу «принимать предметъ идеи по отношенію къ чувственному міру». Я имѣю право и даже выпужденъ идею Высочайшаго Существа «реализовать, т. е. предположить для нея дѣйствительный предметъ», но не какъ нѣчто, само въ себѣ обладающее свойствами этой идеи, а лишь въ качествѣ предмета, которому я, какъ основанію систематическаго единства чувственнаго міра, такимъ образомъ,—по отношенію къ этому единству,—приписываю соотвѣтственныя свойства ³⁾. Вопросъ о томъ, что представляютъ сами въ себѣ соотвѣтствующіе идеямъ предметы, выходитъ, конечно, за предѣлы нашихъ понятій, и все таки не исключается возможность признать «отношеніе этихъ предметовъ къ совокупности явленій» ⁴⁾.

С) Накопецъ, Кантъ не ограничивается признаніемъ того, что мы можемъ мыслить предметы идей и въ особенности Первосущество въ ихъ отношеніи къ чувственному міру, но стремится, хотя до нѣкоторой степени, опредѣлить сущность этого отношенія по аналогіи съ категоріями, т. е. съ такими понятіями, которыя имѣютъ законное примѣненіе лишь въ предѣлахъ чувственнаго міра. «По аналогіи реальностямъ въ мірѣ, субстанціямъ, причинности и необходимости», говоритъ философъ въ Рациональной теологіи, «я буду мыслить Существо, обладающее всѣми этими качествами въ высшей степени; и такъ какъ идея лежитъ въ моемъ разумѣ, то я могу мыслить себѣ это Существо, какъ самостоятельный разумъ, который посредствомъ своихъ идей, гармоніи и единства есть причина міроваго цѣлаго» ⁵⁾. По вопросу о томъ, что же собственно можетъ быть приписано по аналогіи Первосуществу, въ Критикѣ чистаго разума мы замѣчаемъ нѣкоторое колебаніе. Иногда высказывается мнѣніе, что мы должны мыслить Перво-

¹⁾ Кг. 704; Вл. 515.

²⁾ Кг. 704; Вл. 515.

³⁾ Ср. Кг. 705; Вл. 515.

⁴⁾ Ср. Кг. 702; Вл. 513.

⁵⁾ Кг. 706; Вл. 515.

существо имѣющимъ нѣкоторое отдаленное сходство съ нашимъ разумомъ¹⁾; тогда какъ въ другихъ мѣстахъ неопредѣленно говорится, что предметы идей слѣдуетъ мыслить, какъ «аналога дѣйствительныхъ вещей»²⁾ или «по аналогіи съ предметами опыта»³⁾. Кантъ склоняется даже къ тому, что мы имѣемъ право, представляя мысленно въ идеѣ мировую причину, усвоить ей, какъ нѣкоторому существу, человѣкообразные признаки, именно: разсудокъ, волю, удовольствіе, неудовольствіе и т. п.⁴⁾. Само собой понятно, что если бы Высшая Разумность была для Канта лишь идеей, имѣющей значеніе только «по отношенію къ систематическому употребленію разума», то было бы совершенно излишнимъ обозначать еще эту идею «по аналогіи съ предметами опыта». Въ самомъ дѣлѣ, если бы идея должна была лишь направлять употребленіе разума для достиженія высшаго систематическаго единства, то она вполнѣ выполняла бы свое назначеніе, оставаясь исключительно регулятивнымъ принципомъ: и для указанной цѣли вовсе нѣтъ надобности мыслить ее *по аналогіи* въ качествѣ отличной отъ міра, всереальнѣйшей, обладающей высшимъ могуществомъ субстанціи. Самъ философъ настойчиво заявляетъ, что можно бы воздержаться отъ склонности мыслить Высшее Существо, какъ особый предметъ, по аналогіи съ дѣйствительными субстанціями, и что для разума, быть можетъ, даже лучше удовлетвориться чистой идеей въ качествѣ регулятивнаго принципа⁵⁾. Почему же, является вопросъ, постоянно стремится онъ какъ-нибудь обозначить теологическую идею—по аналогіи съ категоріями или съ предметами опыта и т. п.,—если и безъ подобнаго обозначенія, она, въ качествѣ регулятивнаго принципа, можетъ совершеннымъ образомъ выполнять свою настоящую роль. Очевидно, только потому, что при такого рода обозначеніяхъ философу всегда съ большей или меньшей ясностью предносится абсолютная, метафизическая реальность обозначаемыхъ по аналогіи предметовъ.

Мы указали приемы, при помощи которыхъ Кантъ находитъ возможнымъ мыслить предметы потусторонней дѣйствительности и отчасти даже ихъ свойства, пользуясь для этой цѣли понятіями, имѣющими

¹⁾ Кт. 706; Вл. 516.

²⁾ Кт. 702; Вл. 513.

³⁾ Кт. 724; Вл. 527.

⁴⁾ Кт. 728; Вл. 529.

⁵⁾ Ср. Кт. 702; Вл. 513.

законное примѣненіе лишь въ предѣлахъ чувственнаго міра. Теперь естественно возникаетъ вопросъ: какія же основанія есть у насъ, чтобы признать несомнѣннымъ существованіе вещей въ себѣ въ качествѣ умопостигаемыхъ сущностей? Философъ нерѣдко утверждаетъ, что при рѣшеніи подобныхъ проблемъ и въ частности при обоснованіи бытія Бога усилія теоретическаго разума не имѣютъ *никакого* значенія. Двѣ великія цѣли—бытіе Бога и бессмертіе души, говоритъ философъ ¹⁾, которыя представляютъ для насъ наибольшій интересъ, остаются для теоретическаго разума такъ же далеко, какъ и въ началѣ труда. «Я утверждаю», настаиваетъ онъ въ Рациональной теологіи ²⁾, «что всѣ попытки одного теоретическаго разума въ области теологіи совершенно бесполезны и по своему внутреннему значенію ничтожны». Но было бы ошибочнымъ считать подобное мнѣніе строго проведеннымъ во всей Критикѣ. Вообще, Кантъ до такой степени убѣжденъ въ абсолютной реальности умопостигаемаго міра, что у него нѣтъ вовсе стремленія, по существу, подвергнуть этотъ вопросъ критическому разсмотрѣнію и, главное, выяснить, при помощи какихъ силъ и способностей духъ человѣчскій въ правѣ достигнуть признанія чего бы то ни было, выходящаго за предѣлы непосредственно переживаемыхъ нами представленій; и все-таки въ Критикѣ чистаго разума можно встрѣтить какъ бы попытку *теоретически* доказать реальность вещей въ себѣ. «Изъ понятія *явленіе*», говоритъ философъ ³⁾, «уже естественнымъ образомъ слѣдуетъ, что ему должно соответствовать нѣчто, само въ себѣ существующее, не какъ явленіе». А мы уже выше упоминали ⁴⁾, что всякая абсолютная дѣйствительность почти неизбѣжно отождествляется Кантомъ съ духовными сущностями на подобіе монадъ Лейбница. Далѣе, въ концѣ Рациональной теологіи философъ высказываетъ мнѣніе, что разумъ имѣетъ своей цѣлью «*доказать* изъ природы бытіе такой разумной высшей причины» ⁵⁾; правда, онъ исключительно соприкасается съ цѣпью естественныхъ причинъ, рассматриваетъ единственно эту цѣпь, принимая во вниманіе идею Перво-существа; при этомъ онъ стремится найти цѣлесообразность въ при-

¹⁾ Кр. 833; Вл. 595.

²⁾ Кр. 664; Вл. 490.

³⁾ Кр. А 251; Вл. 230 примѣч.

⁴⁾ См. стр. 83.

⁵⁾ Кр. 721; Вл. 524.

родѣ вещей и на основаніи такой цѣлесообразности *необходимо по-
матъ* бытіе самого виновника міра¹⁾). Изъ общей связи выясняется,
что подобное стремленіе разума признается правильнымъ, а не при-
зрачнымъ порожденіемъ фантазіи; въ противномъ случаѣ, допуская при
ислѣдованіи явленій цѣлесообразно устрояющую, премудрую, твор-
ческую разумность, слѣдовало бы видѣть въ подобномъ допущеніи
лишь регулятивную идею; здѣсь же, наоборотъ, субъективныя побужде-
нія разсматривать явленія телеологически становятся объективной
необходимостью, имѣющей реальныя основанія, и такимъ образомъ
вполнѣ признается возможность при помощи цѣлесообразности, наблю-
даемой въ явленіяхъ, доказать бытіе Высшей Разумности. Еще болѣе
интересное въ томъ же отношеніи мѣсто находимъ въ той части Транс-
цендентальнаго ученія о методѣ, гдѣ говорится о «мнѣніи, знаніи и
вѣрѣ». Хотя Кантъ не утверждаетъ здѣсь, что по отношенію къ
бытію Бога что-либо можетъ быть познано или доказано теоретически,
но за то онъ придумываетъ суррогатъ знанія, именно *доктринальную
вѣру*. Признаніе чего-либо истиннымъ, достигаемое при помощи при-
мѣненія теоретическаго разума, имѣетъ гораздо большее значеніе, чѣмъ
простое мнѣніе; и съ точки зрѣнія теоретическаго разума есть не-
маловажныя основанія для вѣры въ Бога. Положимъ, съ указанной точки
зрѣнія нельзя опровергнуть всѣ возможныя сомнѣнія относительно
бытія Божія, однако можно подтвердить это бытіе весьма вѣскими
соображеніями путемъ аналогій; тутъ и приходитъ на помощь доктри-
нальная вѣра, которая, возникая изъ чисто субъективныхъ источниковъ,
сообщаетъ указаніямъ разума, обладающимъ лишь нѣкоторой степенью
вѣроятности, полную убѣдительность. Легко видѣть, какой случайный
продуктъ, не имѣющій подъ собой твердой основы, представляетъ изъ
себя эта доктринальная вѣра. Наконецъ, едва ли не самымъ важнымъ
мотивомъ, побуждавшимъ Канта къ признанію потусторонняго міра
духовныхъ существъ, слѣдуетъ признать его нравственныя убѣжденія.
Но вопросъ этотъ имѣетъ самостоятельную важность, и потому мы
разсмотримъ его въ особомъ параграфѣ²⁾).

¹⁾ Кг. 722; Вд. 525.

²⁾ Ср. сочиненіе Volkelt'a (стр. 87 и слѣд.), въ которомъ прекрасно ана-
лизированы и живо представлены колебанія въ воззрѣніяхъ Канта на позна-
ваемость потусторонней дѣйствительности. По вопросу о метафизическихъ
взглядахъ великаго философа ср. также сочиненіе Паульсена, въ особенности
стр. 223 и слѣд.).

6. Изъ предшествующаго изложенія мы видѣли, что Кантъ различнымъ образомъ проявлялъ глубокий интересъ по отношенію къ нравственнымъ вопросамъ и еще въ сочиненіяхъ 60-хъ годовъ выражалъ стремленіе при помощи нравственныхъ убѣжденій проникнуть въ тайны потусторонней дѣйствительности. Съ теченіемъ времени такого рода стремленія замѣтно усилились и въ значительной степени получили свое выраженіе даже въ произведеніяхъ, посвященныхъ собственно теоретическимъ вопросамъ. Такъ, въ Критикѣ чистаго разума, именно въ Трансцендентальной діалектикѣ, Кантъ ставитъ себѣ цѣлью «уравнять и укрѣпить почву для величественнаго нравственнаго зданія». Слѣдуетъ еще замѣтить, что въ 60-хъ годахъ, находясь подъ вліяніемъ англійскаго эмпиризма, Кантъ и въ основу моральнаго поведенія полагалъ нравственное *чувство*; но затѣмъ, съ усиленіемъ рационалистическихъ склонностей, онъ и нравственность ставитъ въ исключительную связь съ дѣятельностью *разума*, именно. считаетъ ее результатомъ пракческаго примѣненія чистаго разума.

«Человѣческая душа (я вѣрю, что это бываетъ и со всѣми разумными существами)», настаиваетъ великій философ¹⁾, «естественно принимаетъ живой интересъ въ нравственности, хотя не всегда безраздѣльно и на дѣлѣ не всегда преимущественнымъ образомъ». Свое нравственное поведеніе и свои моральные приговоры человѣкъ опредѣляетъ, руководясь идеями и идеалами, создаваемыми разумомъ. «Такъ какъ въ практическомъ приложеніи разсудка», читаемъ мы²⁾, «дѣло идетъ о дѣятельности на основаніи правилъ, то идея пракческаго разума можетъ имѣть дѣйствительный характеръ, хотя и она только отчасти дается *in concreto*, или, лучше сказать, она есть неизбежное условіе всякаго пракческаго употребленія разума». «Какъ идея даетъ правило, такъ идеаль служитъ первообразомъ, по которому должны быть образуемы копіи; мы не имѣемъ никакой мѣры для своихъ поступковъ, кромѣ поведенія въ насъ этого божественнаго человѣка, съ которымъ мы себя сравниваемъ, обсуждая свои поступки, и благодаря этому становимся лучше, никогда не достигая вполнѣ означеннаго идеала; и хотя имѣть основанія усвоить этимъ идеаламъ объективную реальность (существованіе), однако нельзя ихъ потому считать одиными

¹⁾ Кг. 858; Вл. 611.

²⁾ Кг. 384; Вл. 285.

фантазіями: они даютъ необходимую мѣру для разума, который пуждается въ понятіи о томъ, что въ своемъ родѣ вполне совершенно, дабы по немъ оцѣнивать и измѣрять степень недостаточности всего несовершеннаго» ¹⁾. Конечно, идеи, опредѣляющія поведеніе человѣка, не могутъ быть заимствованы изъ опыта; «въ этомъ и состоитъ идея добродѣтели, по отношенію къ которой всѣ возможные предметы опыта суть примѣры (доказательство выполнимости въ извѣстной степени того, что требуетъ разумъ), но первообразами служить не могутъ» ²⁾.

Признавая идеи разума лишь правилами нашего поведенія, философъ еще не выходитъ за предѣлы чувственно даннаго; но онъ этимъ не ограничивается и заявляетъ, что онѣ, по крайней мѣрѣ, могутъ быть *причинами* нравственныхъ дѣйствій, — и при томъ причинами, не подчиненными никакимъ эмпирическимъ условіямъ. Конечно, онъ хорошо знаетъ, что въ мірѣ опыта все безъ изъятія подчинено закону необходимости. «Если бы», говоритъ философъ, имѣя въ виду доступнаго наблюденію человѣка ³⁾, «мы могли изслѣдовать всѣ явленія его воли до самыхъ основаній, то не было бы ни одного человѣческаго дѣйствія, котораго мы не могли бы предсказать съ достовѣрностью и объяснить его необходимости изъ предшествующихъ условій. По отношенію къ эмпирическому характеру нѣтъ свободы; и съ этой именно стороны мы разсматриваемъ человѣка, когда наблюдаемъ его, какъ напр. въ антропологіи, когда фізіологически ⁴⁾ хотимъ изслѣдовать побудительныя причины его дѣйствій». Но у насъ еще нѣтъ основанія утверждать, что законы чувственнаго міра обязательны и для самого разума». «Совсѣмъ иное окажется», продолжаетъ Кантъ, «если тѣ же самыя дѣйствія станемъ оцѣнивать по отношенію къ разуму, и при томъ не съ точки зрѣнія теоретическаго разума, чтобы выяснить ихъ первоисточникъ, но исключительно въ той мѣрѣ, поскольку разумъ есть причина ихъ производящая; однимъ словомъ, если мы сравнимъ эти дѣйствія съ тѣмъ, что составляетъ себѣ разумъ въ качествѣ практической цѣли, то мы найдемъ совсѣмъ иныя правила и иной порядокъ, нежели порядокъ природы. Тогда можетъ оказаться, что не все то должно было бы случиться, что произошло вслѣдствіе естественнаго порядка вещей и должно было неизбежно быть по эмпирическимъ осно-

¹⁾ Кг. 597; Вл. 446.

²⁾ Кг. 372; Вл. 277.

³⁾ Кг. 578; Вл. 334.

⁴⁾ *Фізіологически* у Канта равносильно понятію *фізически*.

ваніямъ. Иногда мы находимъ—или вѣримъ, по крайней мѣрѣ, что находимъ,—будто идеи разума, дѣйствительно, оказываются причинами человѣческихъ дѣйствій, какъ явленій, и что послѣднія случаются не вслѣдствіе эмпирическихъ причинъ, а въ силу основаній разума».

Итакъ, на ряду съ причинностью природы, съ которою имѣетъ дѣло опытное познаніе, Кантъ считаетъ необходимымъ допустить еще и причинность свободы. «Конечно», говоритъ онъ ¹⁾, «намъ нѣтъ нужды сейчасъ же объяснять, какимъ образомъ она возможна: все равно какъ и по отношенію къ причинности, сообразной съ законами природы, мы должны удовлетвориться априорнымъ знаніемъ, что она должна быть предположена, хотя возможность того, какимъ образомъ существованіе одного состоянія влечетъ за собою существованіе другого, намъ нисколько не понятна, и мы въ этомъ случаѣ только слѣдуемъ указаніямъ опыта». «Нужно замѣтить», говоритъ философъ въ другомъ мѣстѣ ²⁾, «что мы не имѣли въ виду доказывать дѣйствительность свободы, какъ одной изъ способностей, которая содержитъ причину явленій нашего чувственного міра. Кромѣ того, что мы должны были бы тогда оставить трансцендентальный ³⁾ способъ изслѣдованія, имѣющій дѣло съ понятіями, наше предпріятіе и не могло бы удался, ибо изъ опыта мы никакъ не можемъ заключить къ тому, что вовсе не можетъ быть мыслимо по законамъ опыта».

Само собой разумѣется, Кантъ далекъ отъ мысли утверждать, что все необъяснимое уже въ силу этого не можетъ обладать самостоятельной реальностью; наоборотъ, онъ считаетъ возможнымъ показать ⁴⁾, «что въ практическомъ отношеніи разумъ имѣетъ право принимать нѣчто такое, на что въ теоретической области онъ не могъ бы рѣшиться безъ достаточныхъ основаній: ибо всѣ подобныя предположенія наносили бы ущербъ теоріи, тогда какъ практическій интересъ ни мало о ней не заботится. Слѣдовательно, только въ практической области онъ обладаетъ извѣстнымъ достояніемъ, правъ па которое ему нѣтъ нужды доказывать и которыхъ, дѣйствительно, доказать онъ не въ состояніи».

¹⁾ Кр. 487; Вл. 370.

²⁾ Кр. 585; Вл. 439.

³⁾ *Трансцендентальный* здѣсь употреблено въ 1-мъ изъ указанныхъ мною выше значеній. Ср. прим. на стр. 32.

⁴⁾ Кр. 804; Вл. 576.

Разумъ «предугадываетъ предметы, имѣющіе для него великій интересъ. Онъ вступаетъ на путь чистой теоріи, желая приблизиться къ нимъ; но послѣдніе удаляются при его приближеніи. Въротно на другомъ пути, который для него единственно остается, именно на пути практическаго употребленія, онъ можетъ надѣяться на лучшій успѣхъ»¹⁾. «Такимъ образомъ, въ концѣ концовъ, все же за чистымъ разумомъ, и при томъ за практическимъ его употребленіемъ, остается та заслуга, что познаніе, о которомъ чистая теорія лишь мечтаетъ, не будучи въ состояніи сообщить ему достаточной убѣдительности, связывается съ нашимъ интересомъ и благодаря этому превращается, если не въ доказанный догматъ, то, по крайней мѣрѣ, въ безусловно необходимое предположеніе, требуемое нашими существенными цѣлями»²⁾.

Имѣя въ виду, главнымъ образомъ, нравственные интересы, философъ рѣшительно заявляетъ³⁾: «Я докажу, что разумъ такъ же мало достигаетъ однимъ путемъ (опытнымъ) чего-либо, какъ и другимъ (трансцендентальнымъ) и что онъ тщетно усиливается переступить предѣлы чувственнаго міра съ помощью одной только теоріи». Въ частности, относительно раціональной теологіи Кантъ высказывается, если можно, еще опредѣленнѣе. «Я утверждаю», говоритъ онъ⁴⁾, что всѣ попытки одного теоретическаго разума въ области теологіи совершенно бесполезны и по своему внутреннему значенію ничтожны, и что, вообще, принципы его естественной дѣятельности не могутъ имѣть приложенія въ теологіи; и, слѣдовательно, если мы не положимъ нравственныхъ законовъ въ основу или не станемъ употреблять ихъ въ качествѣ руководящей нити, то теологія будетъ для насъ не возможна». Заслуга философіи почти исключительно отрицательная: она должна показать, что помощью теоріи духъ человѣческій не въ состояніи выйти за предѣлы чувственнаго міра; Критика обнаружитъ всю призрачность подобнаго рода попытокъ и «заставитъ разумъ оставить свои высокія притязанія въ теоретическомъ употребленіи и ограничиться *своею настоящею* областью практическихъ основоположеній»⁵⁾. Эмпиризмъ побуждаетъ разумъ сосредоточить вниманіе на данныхъ опыта

¹⁾ Кг. 824; Вл. 589.

²⁾ Кг. 846; Вл. 603.

³⁾ Кг. 619; Вл. 661.

⁴⁾ Кг. 664; Вл. 490.

⁵⁾ Кг. 822; Вл. 588.

и тѣмъ самымъ также удерживаетъ его отъ безплодныхъ стремленій, и въ этомъ заключается, по мнѣнію Канта, важная заслуга указаннаго философскаго направленія. «Но какъ скоро эмпиризмъ», продолжаетъ философъ, «становится догматичнымъ (какъ большею частью случается) по отношенію къ идеямъ и начинаетъ круто отрицать все, что выше области его интуитивнаго познанія, онъ самъ впадаетъ въ ошибку, обнаруживающую его неумѣренную притязательность и тѣмъ болѣе заслуживающую порицанія, что этимъ причиняется невознаградимый вредъ для практическаго интереса разума».

Переходя къ разсмотрѣнію самыхъ важныхъ выводовъ, которые дѣлаетъ Кантъ на основаніи своихъ нравственныхъ убѣжденій, прежде всего должно принять во вниманіе слѣдующее: «Такъ какъ существуютъ практическіе законы, при томъ безусловно необходимые (моральные), то мы постулируемъ бытіе того, что необходимо предполагается нами, какъ условіе ихъ обязательной силы; ибо въ этомъ случаѣ отъ обусловленнаго, признаваемаго нами необходимымъ а priori, мы заключаемъ къ опредѣленному условію» ¹⁾. Для чисто теоретическаго употребленія разума Высшее Существо остается только идеаломъ, но безукоризненнымъ, — понятіемъ, завершающимъ и увѣнчивающимъ всякое человѣческое познаніе; его объективная реальность *на этомъ пути* остается не доказанной, но не можетъ быть и опровергнута» ²⁾. Со-всѣмъ иное дѣло, если мы обратимся къ практическому употребленію разума. Въ вопросахъ нравственности, говоритъ Кантъ ³⁾, конечная цѣль «не подвержена ни малѣйшимъ колебаніямъ; и, по моему убѣжденію, единственное условіе, при которомъ эта цѣль (нравственная) можетъ согласоваться со всѣми другими и имѣть практическое значеніе, есть бытіе Бога и будущаго міра. Я знаю также за достовѣрное, что никому не извѣстны другія условія, при которыхъ возможно единство цѣлей подъ вліяніемъ нравственнаго закона. И такъ какъ нравственное предписаніе есть вмѣстѣ и моя максима (разумъ повелѣваетъ, что это должно быть такъ), то я твердо буду вѣрить въ бытіе Бога и будущую жизнь и убѣжденъ, что ничто не можетъ поколебать этой вѣры: ибо тогда были бы ниспровергнуты мои нравственные основные законы, отъ которыхъ отказаться нельзя, не дѣлая себя презрѣннымъ

¹⁾ Кт. 662; Вл. 489.

²⁾ Кт. 669; Вл. 693.

³⁾ Кт. 856; Вл. 510.

въ собственныхъ же глазахъ. Такимъ образомъ, по устраненіи всѣхъ честолюбивыхъ стремленій разума къ расширенію себя за предѣлы опыта, еще довольно остается такого, чѣмъ можно удовлетвориться въ практическомъ отношеніи. Конечно, никто не станетъ хвалиться, что онъ навѣрное знаетъ, что есть Богъ и будущая жизнь: ибо, если кто знаетъ это, то онъ именно тотъ человѣкъ, котораго я давно искалъ. Всякое знаніе (касающееся предмета одного разума) можетъ быть общено: слѣдовательно, также и я могъ бы надѣяться чрезъ его поученіе расширить свое познаніе такимъ удивительнымъ образомъ. Но дѣло въ томъ, что убѣжденіе не есть логическая увѣренность, а нравственная: и такъ какъ она покоится на субъективныхъ основаніяхъ (моральномъ настроеніи), то я не могу утверждать: *нравственно достоверно, что Богъ существуетъ* и т. д.; но—я *убѣжденъ нравственно* и т. д. Это значитъ, вѣра въ Бога и иной міръ такъ тѣсно связана съ моимъ нравственнымъ настроеніемъ, что, какъ невозможно для меня отказаться отъ послѣдняго, такъ невозможно отрѣшиться и отъ первыхъ истинъ».

Итакъ, поуменальный міръ долженъ быть признанъ, какъ нѣчто обладающее высшей степенью достоверности уже потому, что лишь въ немъ могутъ быть помѣщены свобода, Богъ и бессмертная душа, для которыхъ слишкомъ тѣсными оказываются предѣлы чувственнаго міра и которыхъ человѣкъ все же отвергнуть не можетъ, такъ какъ признаніе ихъ неразрывно связано съ его нравственными убѣжденіями; а отказаться отъ послѣднихъ нельзя, «не дѣлая себя презрѣннымъ въ собственныхъ же глазахъ».

7. Подъ *наивнымъ реализмомъ* разумѣютъ обыкновенно воззрѣніе на сущность окружающей дѣйствительности у людей, не подвергшихся еще прямому или косвенному вліянію философской мысли. Поскольку можно формулировать эти неясныя воззрѣнія, они, въ главныхъ чертахъ, сводятся къ слѣдующему. Вещи существуютъ приблизительно въ томъ видѣ, въ какомъ мы ихъ воспринимаемъ; такимъ образомъ, наши представленія являются болѣе или менѣе точными копіями наблюдаемыхъ вещей. Вопросъ о томъ, какимъ образомъ свойства независимо существующихъ предметовъ становятся объектомъ нашей мысли, причинившій философамъ столько затрудненій, у большинства людей вовсе не возникаетъ даже и въ спутанномъ видѣ. Слѣдуетъ имѣть въ виду, что существенная особенность наивнаго реализма состоитъ не въ томъ,

что онъ принимаетъ, но въ томъ, какъ выражены и на чемъ основаны его воззрѣнія. Серіозный философъ можетъ приписывать абсолютной дѣйствительности почти тѣ же свойства, какими надѣляетъ ее наивное сознаніе, и все-таки его взгляды не могутъ быть названы наивнымъ реализмомъ, если только они ясно выражены и если приведены соображенія для ихъ обоснованія¹⁾. Обыкновенный человѣкъ, не привыкшій анализировать свои понятія, даже не способенъ имѣть отчетливыхъ мыслей по принципиальнымъ вопросамъ, и потому тщетны были бы всѣ попытки сколько-нибудь опредѣленно ихъ формулировать; а главное, его воззрѣнія покоятся почти исключительно на привычкѣ или на инстинктивныхъ предрасположеніяхъ. Философъ, наоборотъ, стремится стать выше установившихся взглядовъ и даже собственныхъ предрасположеній: анализируя тѣ и другія, онъ хочетъ относиться къ нимъ критически. Но философъ—человѣкъ; а потому и для него, на ряду съ мыслями, подвергнутыми критическому разсмотрѣнію, зачастую сохраняютъ свою силу также и обычныя воззрѣнія, допущенныя въ систему скорѣе безсознательно и убѣдительность которыхъ почти исключительно покоится на ихъ привычности. Величайшіе гении не свободны отъ подобнаго рода непослѣдовательности. Критика чистаго разума представляетъ, между прочимъ, весьма поучительный примѣръ и въ томъ отношеніи, что критическая мощь мысли, проникающей въ глубочайшіе тайники человѣческаго сознанія, переплетается въ ней самымъ причудливымъ образомъ съ безсознательнымъ преклоненіемъ передъ силой привычныхъ воззрѣній, перѣдко поражающихъ насъ своей наивностью.

Мы уже выше²⁾ касались того, что философъ постоянно примѣняетъ къ вещамъ въ себѣ категоріи, хотя это рѣшительно противорѣчитъ всѣмъ его сознательно выраженнымъ точкамъ зрѣнія. Въ особенности охотно пользуется онъ, повидимому незаконнымъ образомъ, категоріями причинности и субстанціальности; *предметы дѣйствуютъ на нашу чувственность и въ основѣ наблюдаемыхъ нами явленій лежитъ ничто, недоступное нашему познанію*—вотъ два положенія, которыя не мыслимы безъ примѣненія соотвѣтствующихъ катего-

¹⁾ Ср. сочиненіе Гартмана, въ особенности послѣднія главы, въ которыхъ философъ доказываетъ реальность не только категорій, но также пространства, времени и т. д.

²⁾ См. стр. 88.

рій и которыя настойчиве повторяются въ Критикѣ чистаго разума. Предметъ, по заявленію философа ¹⁾, вообще дается намъ «только въ томъ случаѣ, когда онъ дѣйствуетъ извѣстнымъ образомъ на нашу душу. Чувственностью называется способность (восприимчивость) образовывать представленія вслѣдствіе дѣйствія на насъ внѣшнихъ предметовъ. Посредствомъ чувственности даются намъ предметы, и только она доставляетъ для насъ интуиціи; разсудокъ же мыслить ихъ и даетъ начало понятіямъ». И нѣсколько ниже: «Ощущеніе есть дѣйствіе предмета на нашу способность представленія, по мѣрѣ того, какъ мы получаемъ отъ него впечатлѣніе». Если все это не подлежитъ сомнѣнію, то само собой разумѣется, что представленіе тѣла «говоритъ только о явленіи чего-то и способъ, какимъ оно дѣйствуетъ на насъ. Такая восприимчивость нашей познавательной способности», повторяетъ философъ снова свое опредѣленіе ²⁾, «называется чувственностью». Понятно также и то, что въ явленіи всегда слѣдуетъ различать «двѣ стороны: одну, въ которой объектъ разсматривается самъ въ себѣ, независимо отъ того, какимъ образомъ созерцается онъ въ интуиціи (въ силу чего именно его свойства всегда остаются еще проблематическими), и другую, въ которой разсматривается форма представленія предмета, которую слѣдуетъ искать не въ самомъ предметѣ, а въ субъектѣ, для котораго онъ становится явленіемъ, хотя и о ней можно сказать, что она, дѣйствительно, необходимымъ образомъ связапа съ явленіемъ этого предмета» ³⁾. Я не стану приводить другихъ отрывковъ, въ которыхъ выражаются приблизительно тѣ же воззрѣнія ⁴⁾. Вообще же слѣдуетъ имѣть въ виду, что безъ признанія воздѣйствія предметовъ на нашу чувственность, равно какъ и того, что въ основѣ явленій лежитъ что-то отличное отъ этихъ послѣднихъ, критика разума получила бы со-всѣмъ иное направленіе. Между прочимъ лишь на безусловномъ признаніи указаннаго воздѣйствія основывается различіе чувственности и разсудка, играющее въ системѣ Критики такую выдающуюся роль. Теперь является вопросъ, какіе же предметы имѣеть въ виду философъ, такъ явно примѣняя къ нимъ категоріи причинности и субстан-

¹⁾ Кр. 33; Вл. 24.

²⁾ Кр. 61; Вл. 44.

³⁾ Кр. 55; Вл. 40.

⁴⁾ Ср. также Кр. стр. 41, 42, 51, 74, А 100, А 371, гдѣ говорится о воздѣйствіи предметовъ.

ціальности. На вещи въ себѣ, по крайней мѣрѣ съ такой полной увѣренностью, понятія разсудка не должны быть распространяемы; на этомъ Кантъ уже слишкомъ часто настаиваетъ ¹⁾). Нѣкоторые считаютъ возможнымъ разумѣть въ данномъ случаѣ такъ называемые эмпирическіе предметы, указывая на то, что одни представленія вызываютъ у насъ другія, и такимъ образомъ происходитъ воздѣйствіе первыхъ. принимаемыхъ нами въ качествѣ предметовъ, па вторыя, которыя могутъ казаться намъ только представленіями ²⁾). Какъ мы уже упоминали ³⁾). Кантъ, дѣйствительно, знаетъ эмпирическіе предметы и ихъ воздѣйствіе. Но все-таки и подобное толкованіе далеко не въ состояніи устранить всѣ относящіяся сюда недоразумѣнія. Не буду останавливаться на вопросѣ о томъ, можно ли, признавая одно только эмпирическое воздѣйствіе, создать сколько-нибудь цѣльную систему, свободную отъ противорѣчій (до сихъ поръ подобнаго рода попытки не увѣнчались успѣхомъ). Скажу только, что, если бы Кантъ сознавалъ всю трудность проблемы, то, при желаніи достигнуть схоластической точности въ изложеніи, онъ, конечно, не преминулъ бы опредѣленнымъ образомъ указать, какіе именно предметы въ томъ или иномъ случаѣ слѣдуетъ имѣть въ виду. Но всѣ указанные недоразумѣнія разрѣшаются сравнительно легко, если допустить, что взгляды, почерпнутые изъ наивнаго реализма, казались великому философу до такой степени самоочевидными, что ему и въ голову не приходило подвергнуть ихъ критической проверкѣ, и онъ высказываетъ эти взгляды, даже и не подозревая, что они могутъ противорѣчить основнымъ предпосылкамъ его системы. Если согласиться съ этимъ, то будетъ понятно, почему философъ примѣняетъ такъ легко категоріи къ потусторонней дѣйствительности; почему онъ не всегда съ желательной отчетливостью различаетъ эмпирическую и трансцендентальную точки зрѣнія, употребляя безъ должныхъ объясненій въ двоякомъ смыслѣ многіе термины ⁴⁾); наконецъ, понятно и то, почему Кантъ наивно вѣрить, что, пользуясь однимъ понятіемъ *явленія*, можно доказать реаль-

¹⁾ Ср. выше, стр. 54, 63, 74 и 87.

²⁾ Подробнѣе этого вопроса мы коснемся въ пятой главѣ, см. §§ 4, 5 и 7.

³⁾ См. выше, стр. 77 и 79.

⁴⁾ Вещь, предметъ, объектъ, реальный, дѣйствительный и т. п. Ср. Гартманъ, стр. 8—16.

ность вещей въ себѣ ¹⁾. Подобный выводъ вполне согласуется съ обычными воззрѣніями; но для философа, который всѣ утвержденія считаетъ нужнымъ подвергнуть критическому разсмотрѣнію, долженъ неизбежно возникать вопросъ, соответствуетъ ли само *понятіе явленія* реально существующимъ отношеніямъ.

Остатки наивнаго реализма должны быть приняты во вниманіе при изслѣдованіи ученія Канта о вещи въ себѣ уже потому, что они, благодаря своей непосредственной очевидности, основанной на привычкѣ, въ сильной степени помѣшали философу продумать до конца свои взгляды на сущность абсолютной дѣйствительности и ея познаваемость (въ особенности феноменализмъ и формальный раціонализмъ); послѣ чего онъ принужденъ былъ бы отказаться отъ нѣкоторыхъ утвержденій или, по крайней мѣрѣ, дать имъ другое обоснованіе ²⁾.

8. Въ ученіи Канта о сущности души снова повторяются приблизительно тѣ же воззрѣнія, съ которыми мы уже познакомились выше, и потому, я коснусь этого вопроса лишь вкратцѣ. 1) «Очевидно», говоритъ философъ, выражая свои скептическія мысли ³⁾, «что предполагаемое нами условіе, необходимое для познанія объекта, не можетъ быть само познаваемо, какъ объектъ, и что опредѣляющее Я (мышленіе) такъ же отличается отъ опредѣляемаго (мыслящаго субъекта), какъ познаніе отъ познаваемаго предмета. Нѣтъ ничего естественнѣе и соблазнительнѣе, какъ видимость «состоящая въ томъ, что единство въ синтезѣ мыслей принимается за наблюдаемое единство въ субъектѣ этихъ мыслей. Ее можно назвать ошибкой гипостазированія сознанія (*aperceptionis substantiatae*). При этомъ, конечно, остаются въ силѣ и всѣ прежде указаннныя нами соображенія, настаивающія на невозможности познать что-либо, выходящее за предѣлы непосредственно переживаемаго нами ⁴⁾. 2) Проводя феноменалистическую точку зрѣнія ⁵⁾, философъ заявляетъ: «Даже внутренняя чувственная интуиція нашей души (какъ предмета сознанія)», «опредѣленіе которой представляется посредствомъ смѣны различныхъ состояній во времени, не означаетъ личности, какъ она существуетъ сама по себѣ, или трансцен-

¹⁾ Ср. выше, стр. 92.

²⁾ Ср. Виндельбандъ. О Кантѣ, стр. 98; Erdmann, 61, 67; Volkelt 19, 22.

³⁾ Кг. А 402; Вл. 338.

⁴⁾ Ср. въ особенности стр. 53.

⁵⁾ Кг. 520; Вл. 399.

дентального субъекта, ¹⁾ но только явленіа въ области чувственности этого неизвѣстнаго существа». 3) Духъ человѣческій созидаетъ природу и во всякомъ случаѣ ту ея сторону, которая познается а priori. 4) Какъ эмпирикъ, желающій точно опредѣлить границы опыта и выяснить его условія, Кантъ прежде всего указываетъ, что тождество самосознанія (трансцендентальная апперцепція) является необходимою предпосылкою всякаго познанія и потому должно быть признано а priori не подлежащимъ сомнѣнію ²⁾. Что же касается простоты душевной субстанціи и т. п., то это лишь регулятивный принципъ, которымъ слѣдуетъ пользоваться, какъ и прочими идеями, для возможно полнаго объединенія опытныхъ данныхъ; но «мы не должны предполагать, что она служитъ дѣйствительнымъ основаніемъ душевныхъ свойствъ» ³⁾. 5) Какъ метафизикъ, Кантъ на ряду съ эмпирическимъ характеромъ наблюдаемыхъ въ мірѣ явленій, знаетъ еще умопостигаемый характеръ, обладая которымъ, человѣкъ непосредственно принадлежитъ къ потустороннему міру духовныхъ сущностей ⁴⁾. Разсудокъ и въ особенности разумъ, которыми надѣленъ человѣкъ, рѣзко отличаются отъ всѣхъ эмпирически обусловленныхъ силъ. Кантъ готовъ допустить, что другія существа, быть можетъ, одарены другими формами чувственности, но онъ, очевидно, далекъ отъ мысли распространить подобное мнѣніе и на указанная только что высшія способности, которыя, по мнѣнію Канта, всего непосредственнѣе изображаютъ сущность потусторонней дѣйствительности ⁵⁾. 6) Кантъ думаетъ, что «понятіе субстанціи, простоты, равно какъ и понятіе личности, могутъ имѣть нѣкоторое значеніе, и для пракческаго употребленія они необходимы и достаточны: нельзя только употреблять ихъ для расширенія нашихъ знаній о себѣ посредствомъ разума» ⁶⁾. Мало того, онъ признаетъ несомнѣннымъ безсмертіе души, такъ какъ подобное признаніе тѣсно связано съ его нравственными убѣжденіями, отъ которыхъ отказаться «нельзя, не дѣлая себя презрѣннымъ въ собственныхъ же глазахъ» ⁷⁾. 7) Наконецъ, воз-

¹⁾ *Трансцендентальный* равносильно здѣсь *метафизическій*. Ср. примѣчаніе на стр. 32.

²⁾ Ср. Кг. А 113, А 126; Вл. 112, 129.

³⁾ Кг. 711; Вл. 518. Ср. также выше, стр. 78.

⁴⁾ Кг. 567; Вл. 427.

⁵⁾ Ср. выше, стр. 84—85.

⁶⁾ Кг. А 365; Вл. 311.

⁷⁾ Ср. Кг. 859; Вл. 610.

зрѣнія Канта на душу не свободны и отъ элементовъ наивнаго реализма. Сплошь и рядомъ, бѣзъ какихъ бы то ни было колебаній, онъ представляетъ себѣ душу въ видѣ особаго предмета, *трансцендентальнаго субъекта*, который какимъ то образомъ подвергается воздѣйствію другихъ вещей, *трансцендентальныхъ объектовъ*. Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что трансцендентальный субъектъ нужно считать видовымъ понятіемъ по отношенію къ трансцендентальному объекту, т. е. вещи въ себѣ вообще. Кантъ не указываетъ на это съ достаточной опредѣленностью; хотя для него родство двухъ только что поименованныхъ понятій возрастаетъ еще вслѣдствіе того, что онъ, какъ метафизикъ въ духѣ Лейбница, склоненъ даже въ основѣ матеріальнаго міра признавать въ концѣ концовъ нематеріальныя сущности, во многомъ сходныя съ нашей душой¹). Впрочемъ, въ Критикѣ чистаго разума не трудно встрѣтить также отрывки, въ которыхъ трансцендентальный объектъ противоплагается нашему сознанію, какъ нѣчто совершенно отличное. Можно думать, что въ этомъ случаѣ тоже сказалось влияніе наивнаго реализма, который имѣетъ всегда (несознаваемое, конечно) влеченіе къ метафизическому дуализму. Вообще, отсутствіе ясныхъ указаній на счетъ того, какъ относится трансцендентальный субъектъ къ вещамъ въ себѣ, вызвало впослѣдствіи значительныя недоразумѣнія. Такъ, Фихте, отвергая совершенно вещи въ себѣ, находитъ вмѣстѣ съ тѣмъ необходимымъ признать абсолютную реальность за трансцендентальнымъ Я, или, что въ сущности все равно, за трансцендентальнымъ субъектомъ. Но къ этому вопросу мы еще возвратимся²).

9. Въ настоящей главѣ мы познакомились съ различными точками зрѣнія, получившими выраженіе въ первомъ изданіи Критики и оказавшими влияніе на ученіе Канта о вещи въ себѣ и ея познаваемости. Самъ философъ, большею частью, не сознаетъ съ достаточной ясностью отиѣченныхъ нами различій; въ особенности смѣшиваетъ онъ скептическія воззрѣнія съ феноменализмомъ, формальный раціонализмъ съ точкой зрѣнія, принимающей возможность единой для всѣхъ науки за нѣчто несомнѣнно данное, и наконецъ, метафизическіе взгляды съ своими нравственными убѣжденіями³). Вообще, само собой разумѣется, что мысли живого человѣка

¹) Ср. выше, стр. 84.

²) См. гл. 5, парагр. 5.

³) Тотъ фактъ, что Кантъ не всегда съ полной отчетливостью сознавалъ сущность высказываемыхъ имъ мыслей, особенно настойчиво отмѣчаетъ Фолькельтъ. Ср. стр. 50, 94, 96, 103, 106, 108, 111, 148.

представляютъ изъ себя нѣчто цѣльное, объединенное либо логически, либо, по крайней мѣрѣ, внѣшнимъ образомъ, при помощи ассоціацій. Но при научномъ изслѣдованіи извѣстныхъ воззрѣній едва ли возможно обойтись безъ разложенія ихъ на составные элементы. Естествоиспытатель, изучая явленія природы, всячески старается обособить различныя причины, которыми они обусловлены, даже въ томъ случаѣ, если хорошо знаетъ, что, въ сущности, всѣ причины и дѣйствія неразрывно связаны между собою и составляютъ вмѣстѣ единую систему. Приблизительно ту же работу приходится выполнить и истолкователю извѣстной философской системы. Конечно, взявъ отдѣльное мѣсто изъ Критики чистаго разума не всегда возможно съ точностью установить, какая именно точка зрѣнія получила въ немъ преобладаніе. Но то же самое наблюдается и при разсмотрѣніи отдѣльно взятаго явленія природы: и здѣсь сплошь и рядомъ весьма трудно указать, какими собственно причинами оно вызвано. Лишь сопоставляя и сравнивая многія мѣста Критики, мы имѣли возможность прійти къ извѣстнаго рода выводамъ; и безъ подобнаго анализа, мнѣ бы казалось, весьма трудно избѣжать несовсѣмъ точныхъ сужденій относительно философскихъ взглядовъ великаго Кенигсбергскаго мыслителя въ родѣ тѣхъ, съ которыми намъ придется имѣть дѣло въ пятой главѣ настоящаго сочиненія, именно, что вещь въ себѣ должна быть отброшена, какъ противорѣчивое понятіе, лишь на томъ основаніи, что, придерживаясь воззрѣній крайняго феноменализма, Кантъ дѣйствительно высказываетъ мысли, заключающія въ себѣ внутреннее противорѣчіе по вопросу о вещи въ себѣ и ея познаваемости. Далѣе, установивъ основные элементы кантовской системы, мы можемъ болѣе опредѣленно отвѣтить на столь много обсуждавшійся вопросъ объ отношеніи Прологомень и втораго изданія Критики чистаго разума къ ея первому изданію,—вопросъ, котораго отчасти придется коснуться въ предстоящей главѣ.

Элементы математического анализа.

I.

Величины бесконечно малыя. Порядки бесконечно малыхъ величинъ. Функциональная зависимость величинъ. Различные виды функций, ихъ свойства.

1. Всѣ величины, свойства которыхъ изучаются въ математикѣ, мы дѣлимъ на двѣ категоріи: однѣ называемъ постоянными, другія переменными величинами, но здѣсь понятіе о постоянствѣ является понятіемъ условнымъ.

Когда въ математикѣ понятію о переменномъ мы противопоставляемъ понятіе о постоянномъ количествѣ, то въ этомъ случаѣ постоянную величину мы рассматриваемъ какъ существующую и сохраняющую свойство неизмѣняемости только при извѣстныхъ условіяхъ. Если мы говоримъ, напримѣръ, о радиусѣ круга, какъ о величинѣ постоянной сравнительно съ координатами различныхъ точекъ данной окружности, то рассматриваемъ радиусъ какъ величину постоянную для этого опредѣленнаго круга, при переходѣ же къ другому кругу радиусъ измѣнится, хотя всѣ свойства рассматриваемой кривой линіи сохранятся. Въ этомъ смыслѣ для круга радиусъ можетъ быть названъ переменнымъ параметромъ. Примѣровъ подобныхъ этому можно указать много какъ въ алгебрѣ, такъ и въ геометріи.

Что касается до измѣняемости величинъ, понимаемой въ тѣсномъ смыслѣ слова, то ее мы можемъ представить себѣ двояко. Однѣ величины, измѣняясь, стремятся къ конечному предѣлу, отличному отъ нуля, ихъ мы будемъ называть конечными переменными величинами.

Замѣтимъ при этомъ, что если переменное количество возрастаетъ не превосходя данной опредѣленной величины, то оно имѣетъ предѣломъ величину, равную этой данной или меньшую ея. Когда переменное ко-

личество убываетъ, не становясь менѣе данной величины, то оно имѣетъ предѣлъ равный этому данному количеству или большій его.

Другія переменныя величины, измѣняясь, или неограниченно возрастаютъ и способны дѣлаться больше всякаго данного количества, или неограниченно убываютъ; мы говоримъ, что первыя стремятся къ безконечности, вторыя имѣютъ предѣломъ нуль. Первыя мы называемъ величинами *безконечно большими*, вторыя *безконечно малыми*.

Всякое безконечно большое или безконечно малое количество есть переменное, ибо нѣтъ постоянныхъ количествъ безконечно малыхъ или безконечно большихъ. Нуль не есть количество безконечно малое, онъ разсматривается какъ постоянная величина.

Сообразно съ этимъ опредѣленіемъ, величина $k = 1 - \sqrt{x/a}$ есть безконечно малая, если только x способно неограниченно возрастать, при этомъ условіи k стремится къ нулю, но въ нуль обратиться не можетъ, ибо мы не можемъ представить себѣ совершенно опредѣленнаго значенія x , при которомъ $\sqrt{x/a} = a^{\frac{1}{2}} = a^0 = 1$.

Приведенныя опредѣленія безконечно малыхъ и безконечно большихъ количествъ относятся и къ мнимымъ или составнымъ количествамъ, вообще имѣющимъ видъ $a \pm b\sqrt{-1}$; мы называемъ мнимыя количества безконечно малыми, если ихъ модули, т. е. $M = \sqrt{a^2 + b^2}$, безконечно малы, — и безконечно большими, если ихъ модули безконечно велики.

Отдѣлъ анализа, занимающійся изученіемъ свойствъ безконечно малыхъ величинъ, носитъ названіе *Дифференціального исчисления*.

Главная задача дифференціального исчисления заключается въ слѣдующемъ:

Зная связь между двумя или многими переменными величинами, требуется найти то соотношеніе, которое существуетъ между безконечно малыми измѣненіями этихъ величинъ.

Безконечно малыя, какъ величины переменныя, могутъ быть независимыя и зависимыя, поэтому однѣ могутъ быть разсматриваемы какъ функции другихъ. Въ вопросахъ, рѣшаемыхъ дифференціальнымъ исчисленіемъ, почти всегда одно безконечно малое мы будемъ принимать за независимое переменное, а другія будемъ считать его функциями, при этомъ мы будемъ допускать, что находясь въ функциональной зависимости, безконечно малыя всегда сохраняютъ опредѣленные отношенія между собой.

Поясимъ это положеніе примѣрами. Разсмотримъ два прямоугольника съ основаніями $2x$ и x и высотами $\sqrt{1+x} - 1$ и x . Площади этихъ прямоугольниковъ будутъ

$$P_1 = 2x(\sqrt{1+x} - 1) \quad \text{и} \quad P_2 = x^2.$$

Если переменное x неограниченно уменьшается, тогда и высоты и основания этихъ прямоугольниковъ также неограниченно убываютъ, а потому и площади прямоугольниковъ могутъ быть сдѣланы менѣ всякой данной величины.

Возьмемъ отношеніе этихъ площадей, оно есть

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{2x(\sqrt{1+x} - 1)}{x^2} = \frac{2x(\sqrt{1+x} - 1)(1+x+1)}{x^2(\sqrt{1+x} + 1)}$$

или

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + 1}$$

Принимая, что x неограниченно уменьшается, найдемъ, что отношеніе разсматриваемыхъ площадей стремится къ единицѣ, какъ къ предѣлу. Такимъ образомъ площади разсматриваемыхъ прямоугольниковъ, хотя и становятся безконечно малыми (при непрерывно убывающемъ x), но въ этомъ случаѣ остаются въ постоянномъ отношеніи равномъ единицѣ.

Легко убѣдиться, что отношенія двухъ безконечно малыхъ величинъ не только можетъ быть конечною величиною, но само можетъ быть безконечно малымъ или безконечно большимъ числомъ; другими словами, одно безконечно малое можетъ быть безконечно больше, или безконечно меньше другого.

Предположимъ, что конечное количество a мы дѣлимъ на определенное число x , тогда $\frac{a}{x}$ будетъ опредѣленная часть этого числа a . Чѣмъ болѣе будетъ число x , тѣмъ менѣе будетъ разсматриваемая часть числа a . При безконечно большомъ x (способномъ возрастать неограниченно) часть $\frac{a}{x}$ будетъ безконечно мала.

Если величину $\frac{a}{x}$ снова раздѣлимъ на x (предполагая, что x есть безконечно большое число), то $\frac{a}{x^2}$ будетъ также безконечно малую величину. Если $\frac{a}{x^2}$ снова раздѣлимъ на x , то найдемъ еще безконечно малую величину $\frac{a}{x^3}$ и т. д. Продолжая такимъ образомъ, мы получимъ слѣдующій рядъ безконечно малыхъ величинъ

$$\frac{a}{x}, \frac{a}{x^2}, \frac{a}{x^3}, \dots, \frac{a}{x^n}$$

Эти бесконечно малыя величины между собою не одинаковы. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ отношеніе какихъ нибудь двухъ изъ нихъ, напр. первой къ третьей, тогда

$$\frac{a}{x} : \frac{a}{x^3} = x^2.$$

Это отношеніе при бесконечно возрастающемъ x есть количество бесконечно большое. Слѣдовательно бесконечно малая величина $\frac{a}{x}$ бесконечно больше величины $\frac{a}{x^3}$, также бесконечно малой.

То обстоятельство, что бесконечно малыя могутъ быть однѣ больше или меньше другихъ, приводитъ насъ къ мысли о раздѣленіи ихъ на порядки.

Когда мы разсматриваемъ одновременно нѣсколько бесконечно малыхъ, находящихся въ зависимости одна отъ другой, или, какъ говорятъ, разсматриваемъ бесконечно малыя составляющія систему, то можемъ всѣ бесконечно малыя этой системы выразить функциями одной изъ нихъ, которую примемъ за основаніе системы, или за *главную* бесконечно малую.

Если изъ двухъ бесконечно малыхъ α и β примемъ одну, напр. α за главную, то β относительно этой главной будетъ бесконечно малою перваго порядка въ томъ случаѣ, когда отношеніе $\frac{\beta}{\alpha}$, при стремленіи β и α къ нулю, само стремится къ конечной, отличной отъ нуля величинѣ. Бесконечно малую β будемъ называть бесконечно малой втораго порядка, если отношеніе $\frac{\beta}{\alpha^2}$ при томъ же условіи стремится къ конечной величинѣ отличной отъ нуля.

Вообще бесконечно малая β называется бесконечно малою n -го порядка относительно α , если отношеніе $\frac{\beta}{\alpha^n}$ при неограниченномъ уменьшеніи α и β стремится къ конечному предѣлу отличному отъ нуля. При этомъ замѣтимъ, что основное бесконечно малое считается всегда за бесконечно малое перваго порядка, ибо при опредѣленіи порядка величины α , ее нужно раздѣлить на такую степень основной бесконечно малой, при которой частное представилось бы конечной величиной. Для поясненія понятія о порядкахъ бесконечно малыхъ разсмотримъ слѣдующія величины:

$$x, \quad z = \sqrt{ax}; \quad y = \sqrt{x(a-x)},$$

которыя будутъ бесконечно малыми, если x способно неограниченно уменьшаться, стремясь къ нулю. Опредѣлимъ порядокъ бесконечно малыхъ x и

y , принимая за основное бесконечно малое z . Для этого прежде всего по данным соотношениям выразим x и y по z , и при этом найдемъ

$$x = \frac{z^2}{a}; \quad y = \frac{z}{a} \sqrt{a^2 - z^2}.$$

Возьмемъ отношеніе этихъ двухъ величинъ къ степенямъ третьей, т. е. z принимаемой за основную. Отношеніе

$$\frac{x}{z^2} = \frac{\left(\frac{z^2}{a}\right)}{z^2} = \frac{1}{a}$$

представляется конечной величиной, слѣдовательно x есть бесконечно малая второго порядка относительно z .

Предѣлъ отношенія

$$\frac{y}{z} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - z^2}$$

есть единица, ибо по мѣрѣ приближенія z къ нулю, вторая часть равенства стремится къ единицѣ. Изъ этого заключаемъ, что y относительно z есть бесконечно малая первого порядка.

Если мы за основаніе системы примемъ не бесконечно малую z , а x , то для опредѣленія порядка величинъ y и z относительно x , выразимъ y и z по x ; что уже имѣетъ въ формахъ

$$z = \sqrt{ax}, \quad y = \sqrt{x(a-x)},$$

такъ какъ отношеніе

$$\frac{z}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{x}} = \sqrt{a}$$

есть конечная величина, то z должно считаться бесконечно малою величиною половиннаго порядка относительно x .

Отношеніе

$$\frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x(a-x)}}{\sqrt{x}} = \sqrt{a-x}$$

при неограниченно убывающемъ x стремится къ конечному предѣлу \sqrt{a} , а потому заключаемъ, что y относительно x есть бесконечно малая величина также половиннаго порядка.

Принимая это во вниманіе, мы должны обобщить приведенное выше опредѣленіе порядка бесконечно малыхъ: подъ указателемъ порядка мы должны разумѣть не только цѣлыя но и дробныя числа.

Итакъ обобщая предыдущія соображенія, рассмотримъ безконечно малую величину α и составимъ рядъ ея степеней

$$\alpha^m, \alpha^n, \dots, \alpha^p, \alpha^q,$$

гдѣ $q > p > \dots > n > m > 0$. Въ этомъ ряду безконечно малыя расположены по восходящему порядку. Поэтому отношеніе

$$\frac{\alpha^q}{\alpha^p} = \alpha^{q-p}$$

будетъ стремиться къ нулю по мѣрѣ уменьшенія α до нуля.

Если возьмемъ другой рядъ безконечно малыхъ величинъ

$$\beta, \gamma, \delta, \dots, \epsilon, \omega,$$

то чтобы опредѣлить перядокъ какой-либо изъ этихъ безконечно малыхъ относительно основанія α , напр. порядокъ безконечно малой ϵ , стоитъ только въ извѣстномъ ряду

$$\alpha^m, \alpha^n, \dots, \alpha^p, \alpha^q$$

выбрать такую безконечно малую α^k , для которой отношеніе

$$\frac{\epsilon}{\alpha^k}$$

имѣло бы конечный предѣлъ, и тогда величины ϵ и α^k должны считаться за безконечно малыя одного порядка, а слѣдовательно ϵ относительно α будетъ безконечно малою порядка k .

Если означимъ черезъ ω_n безконечно малую величину n -го порядка относительно α и возьмемъ отношеніе

$$\frac{\omega_n}{\alpha^n},$$

то предѣлъ этого отношенія при неограниченномъ уменьшеніи ω_n и α^n будетъ представляться конечной величиной. Этотъ конечный предѣлъ отношенія мы означимъ чрезъ L . Если равенство между $\frac{\omega_n}{\alpha^n}$ и L существуетъ только въ предѣлѣ, т. е. если только

$$\lim \left(\frac{\omega_n}{\alpha^n} \right) = L,$$

то отношеніе $\frac{\omega_n}{\alpha^n}$, еще не достигшее предѣла, вообще будетъ отличаться

отъ L . Положимъ, что эта разность есть ϵ , тогда

$$\frac{\omega_n}{\alpha^n} = L + \epsilon,$$

гдѣ ϵ есть переменная величина, которая съ неограниченнымъ уменьше-
ніемъ ω_n и α^n сама дѣлается менѣ всякой данной величины и въ пре-
дѣлѣ обращается въ нуль.

Изъ предыдущаго равенства слѣдуетъ, что

$$\omega_n = \alpha^n (L + \epsilon). \quad (1)$$

Это выраженіе можно считать за общую форму бесконечно малой
 n -го порядка при основаніи α . При $n = 1$ и $n = \frac{p}{q}$ это равенство пред-
ставитъ выраженія для бесконечно малыхъ перваго и дробнаго порядка,
если только p не есть кратное отъ q .

Представимъ предыдущее выраженіе въ видѣ

$$\omega_n = L\alpha^n + \epsilon \cdot \alpha^n.$$

первый членъ этого выраженія называется главной величиной ω_n . Онъ
представляетъ ω_n съ погрѣшностію, которая будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ
меньше α .

Разсматривая выраженіе (1), мы видимъ, что порядокъ бесконечно
малой ω_n зависитъ только отъ той степени, въ которую слѣдуетъ возвысить
основаніе α , чтобы получить для предѣла отношенія $\frac{\omega_n}{\alpha^n}$ конечную вели-
чину; но этотъ порядокъ отнюдь не зависитъ отъ упомянутой конечной
величины, или предѣла L , къ которому стремится отношеніе $\frac{\omega_n}{\alpha^n}$. лишь бы
этотъ предѣлъ былъ конечной величиной. Изъ этого заключаемъ, что по-
рядокъ бесконечно малой не измѣнится, отъ умноженія ея на какое либо
конечное число.

Возьмемъ двѣ бесконечно малыя величины: одну порядка p , другую
порядка q , и притомъ пусть обѣ эти величины имѣютъ одно и то же осно-
ваніе α . Такія двѣ бесконечно малыя величины суть

$$\omega_p = \alpha^p (L_1 + \epsilon_1), \quad \omega_q = \alpha^q (L_2 + \epsilon_2).$$

Взявъ отношеніе этихъ величинъ, имѣемъ:

$$\frac{\omega_q}{\omega_p} = \left[\frac{\alpha^q (L_2 + \epsilon_2)}{\alpha^p (L_1 + \epsilon_1)} \right].$$

Мы знаемъ, что когда отношенія $\frac{\omega_q}{\alpha^q}$ и $\frac{\omega_p}{\alpha^p}$ стремятся къ предѣламъ, то перемѣнныя ϵ_1 и ϵ_2 стремятся къ нулю, слѣдовательно по извѣстной теоремѣ теоріи предѣловъ

$$\lim \frac{\omega_q}{\omega_p} = \left(\lim \frac{\alpha^q}{\alpha^p} \right) \left(\lim \frac{L_2}{L_1} \right).$$

Но такъ какъ L_2 и L_1 суть величины постоянныя, то

$$\lim \frac{L_2}{L_1} = \frac{L_2}{L_1},$$

слѣдовательно

$$\lim \frac{\omega_q}{\omega_p} = \frac{L_2}{L_1} \lim \left(\frac{\alpha^q}{\alpha^p} \right)$$

или

$$(2) \quad \lim \left(\frac{\omega_q}{\omega_p} \right) = \frac{L_2}{L_1} \lim \alpha^{q-p},$$

Предполагая, что $q - p > 0$ и помня, что α есть величина бесконечно малая, стремящаяся къ нулю, какъ къ предѣлу, имѣемъ:

$$\lim \frac{\omega_q}{\omega_p} = 0,$$

отсюда заключаемъ, что отношеніе бесконечно малой высшаго порядка къ бесконечно малой порядка низшаго въ предѣлѣ стремится къ нулю, а потому бесконечно малая величина высшаго порядка всегда бесконечно меньше бесконечно малой величины низшаго порядка.

Если въ выраженіи (2) примемъ $p = q$, т. е. если рассматриваемъ бесконечно малыя одинаковыхъ порядковъ, то изъ упомянутого выраженія (2) имѣемъ:

$$\lim \frac{\omega_q}{\omega_p} = \frac{L_2}{L_1}.$$

Слѣдовательно отношеніе величинъ бесконечно малыхъ одинаковаго порядка есть величина конечная.

Рассмотримъ три бесконечно малыя величины α , β , γ . Предположимъ при этомъ, что β есть величина порядка p относительно α , и γ пусть будетъ величина порядка q относительно β , тогда

$$\beta = \alpha^p (L_1 + \epsilon_1); \quad \gamma = \beta^q (L_2 + \epsilon_2);$$

подставляя во второе вмѣсто β ея величину изъ перваго, имѣемъ:

$$\gamma = \alpha^{pq} (L_1 + \epsilon_1)^q (L_2 + \epsilon_2),$$

раздѣливъ обѣ части равенства на a^{pq} и перейдя къ предѣлу, имѣемъ:

$$\lim \frac{Y}{a^{pq}} = \lim (L_1^q L_2),$$

а такъ какъ L_1 и L_2 суть величины постоянныя, то

$$\lim \frac{Y}{a^{pq}} = L_1^q L_2,$$

но если предѣлъ, къ которому стремится отношеніе $\frac{Y}{a^{pq}}$ есть постоянная конечная величина, то Y по отношенію къ a есть бесконечно малая порядка pq . Слѣдовательно, если даны три бесконечно малыя величины α , β и γ и извѣстенъ порядокъ β относительно α и порядокъ γ относительно β , то порядокъ γ относительно α будетъ равенъ произведенію данныхъ порядоковъ. Если бы порядокъ β по отношенію къ α былъ равенъ единицѣ, то порядокъ γ по отношенію къ α равнялся бы q , т. е. былъ бы тотъ же какъ и по отношенію къ β . Отсюда заключаемъ, что если въ системѣ бесконечно малыхъ основаніе замѣнимъ какимъ угодно бесконечно малымъ перваго порядка, то порядокъ всѣхъ остальныхъ бесконечно малыхъ величинъ этой системы не измѣнится.

Возьмемъ нѣсколько бесконечно малыхъ

$$\omega_m, \omega_n, \omega_p, \omega_q, \dots,$$

различныхъ порядоковъ, гдѣ $q > p > n > m \dots$, сложимъ ихъ и опредѣлимъ порядокъ суммы. Сумма этихъ бесконечно малыхъ представляется въ формѣ:

$$\omega_m + \omega_n + \omega_p + \dots = a^m (L + \epsilon) + a^n (L_1 + \epsilon_1) + a^p (L_2 + \epsilon_2) + \dots$$

это можно представить въ видѣ:

$$\frac{\omega_m + \omega_n + \omega_p + \dots}{a^m} = L + \epsilon + a^{n-m} (L_1 + \epsilon_1) + a^{p-m} (L_2 + \epsilon_2) + \dots$$

Найдемъ предѣлъ, къ которому стремится эта сумма. Для этого мы должны брать предѣлъ отдѣльно для каждаго слагаемаго, но a есть бесконечно малая величина и за предѣлъ ея считается нуль; слѣдовательно всѣ члены съ множителемъ a , имѣющіе этого множителя въ положительной степени въ предѣлѣ обратятся въ нуль, всѣ ϵ въ предѣлѣ также исчезнутъ и потому

$$\lim \left(\frac{\omega_m + \omega_n + \omega_p + \dots}{a^m} \right) = L.$$

Итакъ предѣлъ, къ которому стремится сумма бесконечно малыхъ различныхъ порядковъ, раздѣленная на a^m , есть конечная величина; слѣд. эта сумма по отношенію къ a есть бесконечно малая m -го порядка. Отсюда заключаемъ, что складывая нѣсколько бесконечно малыхъ разныхъ порядковъ, мы получаемъ бесконечно малую величину, порядокъ которой равенъ порядку низшей бесконечно малой изъ слагаемыхъ. Если такимъ образомъ всѣ другія слагаемыя, за исключеніемъ низшей по порядку, не вліяютъ на порядокъ суммы, то мы можемъ сказать, что въ суммѣ бесконечно малыхъ различныхъ порядковъ, бесконечно малыя высшихъ порядковъ исчезаютъ передъ бесконечно малою низшаго порядка.

Предположимъ, что нѣкоторая величина x равна предѣлу отношенія двухъ бесконечно малыхъ k и l одного и того же порядка. Главныя величины этихъ k и l пусть будутъ Ah^a и Bh^a . Легко видѣть, что

$$x = \frac{A}{B}.$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$k = Ah^a(1 + \epsilon); \quad l = Bh^a(1 + \eta);$$

ϵ и η суть количества также бесконечно малыя.

При этихъ означеніяхъ

$$x = \frac{k}{l} = \frac{A(1 + \epsilon)}{B(1 + \eta)} = \frac{A}{B} + \frac{A(\epsilon - \eta)}{B(1 + \eta)},$$

такъ какъ ϵ и η въ предѣлѣ обращаются въ нуль, то

$$x = \frac{A}{B} + \lim \cdot \frac{A(\epsilon - \eta)}{B(1 + \eta)} = \frac{A}{B}.$$

Предположимъ еще, что величина x состоитъ изъ суммы бесконечно малыхъ величинъ k_1, k_2, \dots и что всѣ слагаемыя положительны. Пусть m_1, m_2, \dots будутъ главныя величины этихъ элементовъ. Тогда

$$k_1 = m_1(1 + \epsilon_1),$$

$$k_2 = m_2(1 + \epsilon_2),$$

$$\dots \dots \dots$$

Слѣдовательно

$$x = k_1 + k_2 + \dots = m_1 + m_2 + \dots + \epsilon_1 m_1 + \epsilon_2 m_2 + \dots$$

гдѣ $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ сами суть величины бесконечно малыя. Пусть меньшая изъ

нихъ есть ϵ и большая η , тогда

$$x \geq (m_1 + m_2 + \dots)(1 + \epsilon),$$

$$x \leq (m_1 + m_2 + \dots)(1 + \eta).$$

Переходя къ предѣлу, имѣемъ:

$$x = \lim (m_1 + m_2 + \dots).$$

Изъ всего сказаннаго заключаемъ, что въ предѣлѣ отношенія или суммы бесконечно малыхъ можно замѣнить отношеніями или суммами главныхъ величинъ.

Въ изысканіи предѣла отношенія или предѣла суммы можно одно бесконечно малое замѣнить другимъ, лишь бы отношеніе этого другого къ первому равнялось единицѣ.

Доказать это положеніе легко. Пусть α и β будутъ двѣ бесконечно малыя величины и α' , β' двѣ другія, но такія, что

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1 \quad \text{и} \quad \lim \frac{\beta}{\beta'} = 1.$$

Замѣтимъ прежде, что тождественно будемъ имѣть:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta},$$

такъ какъ $\frac{\alpha}{\alpha'}$ и $\frac{\beta}{\beta'}$ имѣютъ предѣломъ единицу, то переходя къ предѣлу находимъ:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Разсмотримъ теперь сумму бесконечно малыхъ

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

число которыхъ (т. е. число n) неограниченно возрастаетъ, но мѣръ того какъ бесконечно малыя стремятся къ нулю. Такимъ образомъ сумма сходится къ конечному предѣлу.

Пусть

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

будетъ другой рядъ бесконечно малыхъ, того свойства, что

$$\lim \frac{a_1}{\beta_1} = 1; \quad \lim \frac{a_2}{\beta_2} = 1 \dots \lim \frac{a_n}{\beta_n} = 1.$$

Легко видѣть, что суммы

$$\alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_n$$

$$\beta_1 + \beta_2 \dots + \beta_n$$

будутъ имѣть одинъ и тотъ же предѣлъ.

Пусть въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1 + \varepsilon_2, \dots, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1 + \varepsilon_n,$$

гдѣ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$, по предположенію, бесконечно малы, изъ этого уравненія выводимъ:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n,$$

пусть по абсолютной величинѣ η есть наибольшая изъ количествъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ (но η есть бесконечно малая). Очевидно разность

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) < \eta (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n),$$

η , какъ бесконечно малая, стремится къ нулю, а сумма, состоящая множителемъ при η по условію стремится къ конечному предѣлу, слѣдовательно обѣ суммы имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ.

Для того, чтобы двѣ бесконечно малыя величины α и β могли быть поставлены одна вмѣсто другой, по предыдущему достаточно, чтобы предѣлъ отношенія $\frac{\beta}{\alpha}$ равнялся единицѣ, другими словами достаточно, чтобы

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon,$$

гдѣ ε есть бесконечно малая величина, или чтобы

$$\beta - \alpha = \alpha \varepsilon,$$

т. е. чтобы разность $\beta - \alpha$ была бесконечно малой величиной относительно α .

Всѣ эти соображенія приводятъ къ слѣдующей теоремѣ:

Двѣ бесконечно малыя α и β могутъ быть поставлены одна на мѣсто другой и, слѣдовательно, можно пренебрегать ихъ разностію, если эта разность будетъ бесконечно малой относительно одной изъ нихъ. Этимъ соображеніемъ мы должны пользоваться, какъ при изысканіи предѣла отношенія, такъ равно и предѣла суммы.

Такая теорема имѣетъ большое значеніе въ исчисленіи бесконечно малыя.

2. Мы уже сказали, что бесконечно малыя, какъ величины переменныя, могутъ быть независимыя и выражаться по другимъ величинамъ, принимаемымъ за независимыя. Вообще если двѣ величины зависятъ одна отъ другой, то мы говоримъ, что одна изъ этихъ величинъ есть функція другой и эту зависимость въ самомъ общемъ видѣ представляемъ такимъ знакомъ:

$$y = f(x).$$

принимая въ этомъ случаѣ x за независимое переменное и y за его функцію. Такъ если имѣемъ:

$$y = x^m,$$

гдѣ m есть опредѣленное и даже постоянное число, то для даннаго значенія x по этому уравненію можемъ вычислить соответствующее значеніе y . Такимъ образомъ здѣсь y является функціей x .

Величины, которыя должны быть даны для того, чтобы другія по нимъ могли вычисляться, называются независимыми переменными.

Пусть x будетъ независимая переменная величина, которой можно дать или всевозможныя значенія, или только извѣстную систему значеній заключающуюся между нѣкоторыми данными предѣлами x_0 и X .

Пусть u будетъ другое переменное, находящееся съ x въ такой связи, при которой всякому опредѣленному значенію x соответствуетъ единственное, опредѣленное и конечное значеніе u . При такихъ условіяхъ u называется функціей x (для рассматриваемой системы значеній x).

Мы говоримъ также что u есть функція двухъ независимыхъ переменныхъ x и y , если каждой парѣ значеній x и y соответствуетъ единственное, опредѣленное и конечное значеніе u .

Мы будемъ рассматривать и такія функціи, которыя имѣютъ нѣсколько значеній (или величинъ) для каждаго значенія переменнаго. Мы будемъ рассматривать даже и такія функціи, которыя становятся неопредѣленными или обращающимися въ бесконечность для извѣстныхъ значеній независимаго переменнаго x . Такія функціи, хотя съ извѣстнымъ дополнительнымъ условіемъ, подходятъ также подъ сдѣланное нами опредѣленіе.

Такъ, если функція y имѣетъ нѣсколько значеній для каждаго значенія переменнаго x , то мы можемъ принять каждое значеніе функціи за отдѣльную вѣтвь и на этой вѣтви давать различныя величины главному переменному для того, чтобы получить соответствующія величины функціи. Такимъ образомъ функція будетъ разложена на отдѣльныя вѣтви и каждая вѣтвь функціи, взятая отдѣльно, будетъ подходить подъ выше приведенное опредѣленіе функціи.

Чтобы понять возможность развѣтвленій разберемъ нѣкоторые частные случаи.

Разсмотримъ напр. функцію опредѣляемую изъ кубическаго уравненія

$$v^3 - v + z = 0.$$

Какъ извѣстно изъ алгебры, если положимъ

$$p = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-z + \sqrt{z^2 - \frac{4}{27}} \right)},$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-z - \sqrt{z^2 - \frac{4}{27}} \right)},$$

и кромѣ того

$$-1 + i\sqrt{3} = \alpha,$$

слѣдовательно

$$\alpha^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

то три корня предыдущаго уравненія, которые означимъ чрезъ v_1, v_2, v_3 , будутъ

$$v_1 = p + q,$$

$$v_2 = \alpha p + \alpha^2 q,$$

$$v_3 = \alpha^2 p + \alpha q.$$

Такимъ образомъ для каждаго значенія z функція v имѣетъ три величины v_1, v_2, v_3 . Если будемъ давать переменному z различныя значенія, получимъ по первому изъ этихъ уравненій одну вѣтвь функціи, для тѣхъ же значеній z (или все равно для другихъ) найдется по второму уравненію вторая вѣтвь и т. д.

Если $p = q$, то два вторыя корня, т. е. v_2 и v_3 , становятся одинаковыми или равными, и это имѣетъ мѣсто при

$$z = + \frac{2}{\sqrt{27}},$$

или при

$$z = - \frac{2}{\sqrt{27}}.$$

эти сравнивающиеся корни суть

$$v_2 = v_3 = + \sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \quad v_2 = v_3 = - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Если мы теперь примем, что z изменяется непрерывно, или что все равно, что точка представляемая этим переменным¹⁾ описывает известную линию, то три величины v_1, v_2, v_3 также каждая сама по себе будет изменяться непрерывно, т. е. три соответствующия точки будут описывать три отдѣльныя линіи. Но если переменное z проходитъ черезъ одну изъ точекъ.

$$z = + \frac{2}{\sqrt{27}}, \quad z = - \frac{2}{\sqrt{27}},$$

напр. черезъ первую изъ этихъ точекъ, то обѣ величины v_2 и v_3 обращаются въ $+ \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, т. е. обѣ линіи описываемыя функциями v_2 и v_3 встрѣчаются и въ точкѣ встрѣчи функціи имѣть значеніе $+ \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. При переходѣ черезъ эту точку можетъ v_2 переходить въ v_3 и v_3 —въ v_2 безъ нарушенія непрерывности; другими словами остается совершенно произвольнымъ, по которой изъ этихъ двухъ линій будутъ продолжаться двигаться величины v_2 и v_3 . Въ этомъ мѣстѣ находится развѣтвленіе линій описываемыхъ величинами v_2 и v_3 , такую точку z , въ которой величина функцій переходить съ одной кривой на другую, Риманъ назвалъ точкой развѣтвленія. Въ нашемъ примѣрѣ точки

$$z = + \frac{2}{\sqrt{27}} \quad \text{и} \quad z = - \frac{2}{\sqrt{27}}$$

суть точки развѣтвленія.

Вообще такія точки на плоскости, въ которыхъ различныя величины функціи сравниваются между собой, принято называть точками развѣтвленія функціи.

Подобныя развѣтвленія функціи могутъ происходить также въ тѣхъ точкахъ, гдѣ функція v обращается въ безконечность, т. е. претерпѣваетъ нарушеніе непрерывности.

Такой примѣръ представляетъ функціи

$$(z - c)(v - c)^3 = z - a,$$

¹⁾ Мы предполагаемъ, что z есть составное переменное. (См. ниже теорію функцій мнимаго переменнаго).

откуда выводимъ

$$v = c + \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}}$$

гдѣ a, b, c суть три составныя величины, характеризующія три постоянныя точки. Для этой функціи v точка $z = a$ есть точка развѣтвленія, въ ней три значенія функціи сравниваются и она принимаетъ видъ $v = c$. Кроме того для $z = b$ всѣ три величины функціи v обращаются въ безконечность, и слѣдовательно здѣсь происходитъ нарушеніе непрерывности.

Замѣтимъ еще, что когда v для известной величины z обращается въ безконечность, тогда $\frac{1}{v}$ въ той же точкѣ обращается въ нуль. Слѣдовательно въ этой точкѣ совпадаютъ между собою многія значенія функціи, эта точка есть точка развѣтвленія для функціи $\frac{1}{v}$.

Но надо при всемъ этомъ имѣть въ виду слѣдующее обстоятельство. Бываютъ случаи, въ которыхъ точка совпаденія многихъ значеній функціи не есть точка развѣтвленія. Такъ напр. въ функціяхъ

$$\sqrt{1-z^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

точки $z = +1$ и $z = -1$ суть точки развѣтвленія, тогда какъ въ функціяхъ:

$$(z-a)\sqrt{z} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(z-a)\sqrt{z}}$$

значеніе переменнаго $z = a$ не можетъ считаться точкой развѣтвленія, хотя величины обѣихъ функціи въ этой точкѣ обращаются или въ нуль, или въ безконечность. Въ самомъ дѣлѣ, когда $z = a$, то какъ $z - a$, такъ равно и \sqrt{z} измѣняются непрерывно. Разность $z - a$ однозначна и \sqrt{z} безъ скачка изъ значенія $+\sqrt{a}$ переходитъ въ значеніе $-\sqrt{a}$. Такъ что, собственно говоря, здѣсь нѣтъ развѣтвленія. Такимъ образомъ точки развѣтвленія могутъ имѣть мѣсто только тамъ, гдѣ происходитъ или нарушеніе непрерывности, или совпадаютъ многія значенія функціи.

Если мы говоримъ, что для нѣкотораго частнаго значенія переменнаго, напр. для $x = a$ функція y обращается въ безконечность, то это надо понимать такъ: когда мы даемъ переменному x рядъ значеній, неограниченно приближающихся къ a , тогда величина функціи неограниченно возрастаетъ, становится болѣе всякой данной величины, что же касается до a , какъ частнаго значенія x , то его мы должны исключить изъ ряда частныхъ значеній, приписываемыхъ переменному x .

Точно также и функции, принимающія для нѣкоторой величины переменнаго $x = a$ неопредѣленное значеніе, подходят подъ выше приведенное опредѣленіе функций, если только $x = a$ исключимъ изъ системы тѣхъ величинъ, которыя даемъ главному переменному x .

Въ анализѣ главнымъ образомъ мы рассматриваемъ слѣдующія виды функций.

1) Многочлены, или цѣлыя функции опредѣляемыя уравненіемъ вида

$$y = Ax^m + Bx^n + \dots$$

гдѣ m, n, \dots суть цѣлыя числа, а A, B, \dots постоянные коэффициенты. Главное свойство этихъ функций въ первый разъ показано Д'Аламбертомъ, оно состоитъ въ слѣдующемъ.

Всякая цѣлая функция степени m разлагается на произведеніе m множителей первой степени относительно переменнаго x .

2) Функции рациональныя, которыя представляютъ собою частное отъ дѣленія двухъ многочленовъ. Такая рациональная дробь называется простой, если числитель ея есть постоянное число, а знаменатель многочленъ первой степени относительно переменнаго x . Знаменателемъ простой дроби можетъ быть степень такого многочлена.

Мы увидимъ ниже, что всякая рациональная дробь въ общемъ случаѣ можетъ быть выражена суммой цѣлой функции и извѣстнаго числа простыхъ дробей.

3) Два предыдущіе класса функций суть частные виды такъ называемыхъ *алгебраическихъ функций* опредѣляемыхъ уравненіемъ вида

$$Ax^m y^n + Bx^p y^q + \dots = 0,$$

гдѣ коэффициенты A, B, \dots суть постоянныя величины, а показатели m, n, p, q, \dots суть цѣлыя числа. Предположимъ, что n есть степень рассматриваемаго уравненія относительно y . Въ этомъ случаѣ каждой величинѣ x соответствуетъ n различныхъ величинъ y .

Это свойство рѣзко отличаетъ алгебраическія функции отъ функций цѣлыхъ и рациональныхъ.

Далѣе слѣдуетъ отдѣлъ функций не алгебраическихъ или трансцендентныхъ. Простѣйшія изъ нихъ суть слѣдующія:

а) функция

$$y = x^m,$$

гдѣ m есть несоизмѣримая величина.

b) функція

$$y = a^x$$

называемая показательной.

c) функція

$$y = \lg x$$

называется логарифмической, она есть обратная предыдущей.

d) функції

$$\sin x, \cos x, \tan x \text{ и т. д.}$$

называются тригонометрическими.

f) обратныя имъ

$$\arcsin(x); \arccos(x); \arctan(x) \text{ и т. д.}$$

суть круговыя и, напр.,¹ первой изъ нихъ представляется дуга, синусъ которой равенъ величинѣ x .

Мы называемъ функцію непрерывной, если при весьма маломъ измѣненіи независимой переменнѣй сама функція измѣняется также на весьма малую величину. Если же при бесконечно маломъ измѣненіи независимой переменнѣй функція измѣняется на конечную величину, то такая функція называется прерывной.

Примѣромъ прерывной функціи можетъ служить уравненіе кривой вида

$$(3) \quad y = \frac{a2^{\frac{1}{x}} + b}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

если будемъ давать здѣсь переменному x отрицательныя значенія, т. е. положимъ $x = -m$, гдѣ m есть существенно положительная величина неограниченно стремящаяся къ нулю, то

$$2^{\frac{1}{x}} = 2^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{m}}}$$

въ предѣлѣ, т. е. при $m = 0$, обращается въ нуль и тогда $y = b$.

Помножимъ въ уравненіи (3) числителя и знаменателя второй части на $2^{-\frac{1}{x}}$, тогда это уравненіе приметъ видъ:

$$y = \frac{a + b2^{-\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

если здѣсь x , имѣя положительныя значенія, неограниченно стремится къ нулю, то въ предѣлѣ

$$\lim_{x=0} \left(2^{-\frac{1}{x}} \right) \lim = \left(\frac{-1}{\frac{1}{2^x}} \right) = 0$$

и тогда $y = a$.

Изъ всего этого заключаемъ, что двѣ вѣтви кривой, представляемой уравненіемъ (3), не служатъ одна другой продолженіемъ. При положительныхъ значеніяхъ x кривая встрѣчаетъ ось y (при $x=0$) на разстояніи a отъ начала координатъ. По другую сторону оси y , т. е. при отрицательныхъ значеніяхъ x кривая встрѣчаетъ ось y на разстояніи b отъ начала координатъ. Можно указать и другіе примѣры подобной прерывности. Разсматриваемая функція прерывна, ибо при измѣненіи перемѣннаго x на бесконечно малую величину, соответствующую переходу отъ бесконечно малаго положительнаго значенія x къ бесконечно малому отрицательному, функція измѣняется на величину $a - b$ конечную.

Говоря о нѣкоторыхъ свойствахъ функцій, замѣтимъ еще слѣдующее.

Часто случается, что тѣ величины, отъ которыхъ зависятъ другія, сами зависятъ отъ нѣкоторой третьей величины. Такъ, напр., въ уравненіи

$$y = \log(\sin x)$$

y есть функція синуса, а этотъ послѣдній самъ зависитъ отъ x . Такая сложная зависимость можетъ быть названа функціею функція. Если въ данномъ случаѣ зависимость отъ логарифма означимъ чрезъ f то можемъ писать $y = f(\sin x)$, пусть зависимость синуса отъ x представляется знакомъ φ , такъ что $\sin x = \varphi(x)$, тогда

$$y = f[\varphi(x)].$$

II.

Производныя и дифференціалы функцій.

3. Дадимъ въ функціи $y = f(x)$ независимому переменному x безконечно малое приращеніе Δx , т. е. измѣнимъ x на такую величину Δx , которая способна неограниченно уменьшаться до нуля. Если $f(x)$ непрерывна для всѣхъ значеній x , или по крайней мѣрѣ въ опредѣленности того значенія x , которому дали разсматриваемое приращеніе, то величина y , или, что все равно, функція $f(x)$ измѣнится также на безконечно малую величину Δy . Спрашивается, какъ опредѣлить это приращеніе функціи. Рѣшить этотъ вопросъ можемъ, опредѣляя во сколько разъ приращеніе Δy функціи болѣе или менѣе приращенія Δx главнаго переменнаго. Если это отношеніе будетъ найдено, то зная Δx , вычислимъ и Δy . Найти это отношеніе можемъ слѣдующимъ образомъ.

Допуская, что отъ измѣненія переменнаго на Δx функція измѣняется на Δy , имѣемъ

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

вычитая изъ этого уравненія начальное, получимъ

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Отношеніе этого приращенія къ приращенію независимаго переменнаго x есть

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

по мѣрѣ того какъ приращенія Δy и Δx будутъ стремиться къ нулю, вторая часть этого уравненія будетъ стремиться къ извѣстному конечному предѣлу, который называется производной функціей отъ данной функціи x .

Если эту производную означимъ чрезъ $f'(x)$, то по сдѣланному опредѣленію

$$f'(x) = \lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Въ предѣлѣ Δx и Δy исчезаютъ и казалось бы, что $f'(x) = \frac{0}{0}$, но въ дѣйствительности $f'(x)$ имѣемъ всегда опредѣленное значеніе для данной $f(x)$. Это опредѣленное значеніе производной мы получимъ, выполнивъ всѣ дѣйствія указаннаго формулою

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

и положивъ въ концѣ $\Delta x = 0$.

Пояснимъ это на простомъ примѣрѣ.

Опредѣлимъ производную функцію отъ $y = ax^2$. Поступая по указанному, дадимъ независимому переменному x приращеніе Δx и означимъ черезъ Δy соответствующее приращеніе y . Тогда

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2$$

или

$$y + \Delta y = ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2.$$

вычитая отсюда начальное уравненіе, имѣемъ:

$$\Delta y = 2ax\Delta x + a\Delta x^2,$$

раздѣливъ на Δx , находимъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x,$$

переходя къ предѣлу, положимъ $\Delta x = 0$, и тогда получимъ:

$$\lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = f'(x) = 2ax.$$

Итакъ, по мѣрѣ того, какъ Δx и Δy стремятся къ нулю, отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится къ конечному предѣлу $2ax$. Этотъ конечный предѣлъ есть производная функція отъ начальной ax^2 .

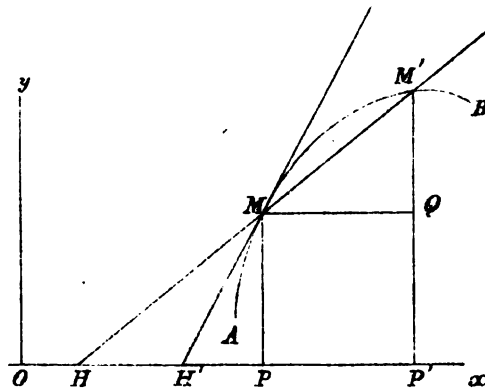
4. Легко показать геометрическое значеніе производной функціи. Уравненіе $y = f(x)$ мы можемъ разсматривать какъ уравненіе нѣкоторой кривой линіи. Пусть эта кривая будетъ AB (фиг. 1), координаты какой либо

точки M этой кривой будутъ $y = MP$ и $x = OP$. Дадимъ абсциссѣ x приращеніе $\Delta x = PP'$. Если изъ точки P' возставимъ перпендикуляръ до пересѣченія съ кривой въ точкѣ M' , то получимъ ту ординату $M'P'$, въ которую измѣнится ордината MP отъ приращенія абсциссы на величину Δx . Соответствующее приращеніе ординаты представится величиною $M'Q$. Итакъ $MQ = \Delta x$; $M'Q = \Delta y$. Если проведемъ чрезъ точки M и M' прямую MM' , то она пересѣчется съ осью x въ точкѣ H . Когда будемъ уменьшать Δx , будетъ уменьшаться и Δy , и точка M' , определяемая этими приращеніями, будетъ приближаться къ M , такимъ образомъ двѣ точки пересѣченія M и M' будутъ сближаться между собою.

Изъ прямоугольнаго треугольника $MM'Q$, видно, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tang}(MM'Q) = \text{tang}(M'HX),$$

Фиг. 1.



т. е. тангенсу того угла, который пересѣкающая составляетъ съ осью x . По мѣрѣ уменьшенія Δx и Δy будетъ измѣняться и этотъ уголъ, ибо пересѣкающая будетъ принимать все новыя и новыя положенія. Въ предѣлѣ Δx и Δy обращаются въ нули, двѣ точки пересѣченія совпадаютъ, и прямая имѣетъ тогда только одну общую точку съ кривой. Эта прямая изъ пересѣкающей обращается въ касательную, слѣд. предѣлъ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будетъ представлять тангенсъ угла, который касательная, проведенная къ кривой $y = f(x)$ въ точкѣ (x, y) составляетъ съ осью x .—Итакъ производная $f'(x)$ есть угловой коэффициентъ въ уравненіи касательной.

5. Когда Δx не достигло еще предѣла и не равно нулю, но бесконечно мало, тогда отношеніе $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ разнится отъ производной $f'(x)$ на нѣкоторую малую величину. Означимъ эту малую величину чрезъ α . Итакъ, если

еще не перешли къ предѣлу, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

отсюда, каково бы не было Δx , находимъ:

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Если α есть бесконечно малая величина, то Δx и Δy будутъ также бесконечно малыми, слѣдовательно $\alpha \Delta x$ будетъ бесконечно малою второго порядка, тогда какъ Δy и $f'(x) \Delta x$ суть бесконечно малыя перваго порядка, а потому не нарушая точности результата, на основаніи выше приведенныхъ соображеній, мы можемъ пренебречь бесконечно малою величиною второго порядка въ сравненіи съ бесконечно малою перваго порядка, и тогда получимъ:

$$\Delta y = f'(x) \Delta x.$$

Мы разумѣемъ здѣсь подъ Δy и Δx бесконечно малыя величины, означимъ ихъ чрезъ δy и δx , тогда предыдущее принимаетъ видъ:

$$\delta y = f'(x) \delta x.$$

произведеніе $f'(x) \delta x$, въ которомъ δx отлично отъ нуля, но есть величина бесконечно малая, называется дифференціаломъ функціи $f(x)$. Итакъ *дифференціаломъ функціи называется произведеніе производной той функціи на бесконечно малое приращеніе независимаго переменнаго.*

Повидимому, какъ примѣненіе производныхъ, такъ и дифференціаловъ въ анализѣ имѣетъ одинаковое значеніе, но есть случаи, въ которыхъ болѣе выгодно пользоваться дифференціалами. Изъ уравненія

$$y = f(x)$$

выводимъ

$$\delta y = f'(x) \delta x,$$

здѣсь δx произвольно, а потому также произвольно и δy . Что касается до отношенія $\frac{\delta y}{\delta x}$, то оно совершенно опредѣленно и равно производной $f'(x)$.

На основаніи этого можно сказать:

Если y есть функція x , то одинъ изъ дифференціаловъ δx или δy произволенъ и отношеніе $\frac{\delta y}{\delta x}$ равно отношенію бесконечно малыхъ приращеній, принимаемыхъ одновременно переменными x и y .

Если y есть функция x , то и наоборот x есть функция y , и ни что не заставляет нас предпочтительно принимать непременно одну изъ нихъ за главное переменное; но если мы беремъ производную, а не дифференціалъ, то должны условиться въ выборѣ главной переменной, по которой производная берется. Если, наоборотъ, рассмотримъ дифференціалъ

$$dy = f'(x) dx,$$

то хотя одинъ дифференціалъ и произволенъ, но ни что не заставляетъ непременно одинъ изъ нихъ, напр. dx , принимать за произвольный. Предыдущее соотношеніе мы можемъ написать въ формѣ:

$$dx = \frac{1}{f'(x)} dy$$

и въ этомъ видѣ дифференціалъ dx разсматривается какъ функция переменной y , соответствующая произвольной величинѣ dy .

Дифференціалъ функции остается одинъ и тотъ же, каково бы не было переменное, относительно которой эта функция выражается. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$y = F(u),$$

гдѣ u въ свою очередь есть функция x , такъ что

$$u = \varphi(x).$$

Дифференціалъ y , разсматриваемаго какъ функция x , есть производная отъ y помноженная на дифференціалъ dx , чтобы найти этотъ дифференціалъ, замѣтимъ прежде всего, что по опредѣленію дифференціала имѣемъ:

$$dy = F'(u) du,$$

но въ свою очередь по тому же опредѣленію

$$du = \varphi'(x) dx,$$

слѣдовательно

$$dy = F'(u) \varphi'(x) dx.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ x , y , u суть три переменныя, изъ которыхъ двѣ выражаются по третьей.

Соотношенія

$$du = \varphi'(x) dx, \quad dy = F'(u) du$$

представляютъ связь между дифференціалами dy , dx , du , но при этомъ одинъ изъ дифференціаловъ остается произвольнымъ. Эти уравненія ука-

зываютъ только на отношенія безконечно малыхъ приращеній, которыя могутъ одновременно принимать переменныя x , y , u , но выборъ одного изъ нихъ за главное переменное остается произвольнымъ.

6. Составивъ понятіе о дифференціалѣ, найдемъ дифференціалы всѣхъ известныхъ намъ функцій: суммы, разности, произведенія, частнаго, степени, показательной функціи, логарифма и т. д.

Прежде всего посмотримъ въ какомъ положеніи находятся при дифференцированіи постоянныя величины, или вообще тѣ, которыхъ дифференцированіе не касается.

Пусть дана функція y , состоящая изъ независимаго переменнаго сложеннаго съ постояннымъ количествомъ, такъ что $y = a + x$, гдѣ a есть постоянная. Дадимъ x приращеніе Δx и положимъ, что происходящее отъ этого приращеніе функціи будетъ $y + \Delta y = a + x + \Delta x$.

Вычитая изъ этого начальное состояніе функціи, имѣемъ $\Delta y = \Delta x$, откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1; \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Итакъ производная отъ $y = a + x$ есть единица. По принятому опредѣленію дифференціалъ dy функціи y получимъ, если производную данной функціи помножимъ на дифференціалъ главнаго переменнаго. Итакъ $dy = dx$. Сравнивая этотъ результатъ съ начальной функціей $y = a + x$, заключаемъ, что *дифференціалъ постоянной величины равенъ нулю*.

Подобнымъ же образомъ, если дана функція $y = a - x$, то послѣдовательно найдемъ

$$y + \Delta y = a - x - \Delta x; \quad \Delta y = -\Delta x; \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1; \quad dy = -dx.$$

Пусть дана функція $y = ax$. Отсюда находимъ $y + \Delta y = a(x + \Delta x)$. Вычитая изъ этого начальное состояніе функціи, имѣемъ $\Delta y = a\Delta x$, откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a; \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

ибо a есть постоянная величина. По сдѣланному опредѣленію дифференціала

$$dy = a dx.$$

Отсюда заключаемъ, что постоянныя производители остаются безъ переменны. Также нашли бы, что функція $y = \frac{x}{a}$ имѣетъ дифференціалъ

$$dy = \frac{dx}{a},$$

гдѣ за постоянный множитель принято $\frac{1}{a}$.

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній перейдемъ къ выводу дифференціала суммы, понимаемой въ алгебраическомъ смыслѣ слова.

Предположимъ, что нѣкоторая функція y есть сумма двухъ функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ независимаго переменнаго x . Такъ что $y = \varphi(x) + \psi(x)$. Опредѣляя производную этой функціи, дадимъ независимому переменному x приращеніе Δx , пусть соотвѣтствующее приращеніе функціи y будетъ Δy . Тогда

$$y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x) + \psi(x + \Delta x),$$

откуда, вычитая начальное состояніе функціи, имѣемъ:

$$\Delta y = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) + \psi(x + \Delta x) - \psi(x),$$

по раздѣленіи на Δx , находимъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}.$$

Переходя къ предѣлу, получимъ:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi'(x) + \psi'(x),$$

гдѣ подъ $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ разумѣемъ производныя функціи отъ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а слѣдовательно дифференціалъ данной функціи, который означимъ чрезъ dy , будетъ:

$$dy = \varphi'(x) dx + \psi'(x) dx.$$

такъ какъ $\varphi'(x) dx$ и $\psi'(x) dx$ суть дифференціалы функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то заключаемъ, что дифференціалъ суммы равенъ суммѣ дифференціаловъ отдѣльныхъ слагаемыхъ.

Прежде чѣмъ будемъ говорить о дифференцированіи произведенія и дроби, найдемъ дифференціалъ показательной и ея обратной логарифмической функціи.

Простейшая показательная функція имѣетъ видъ:

$$y = a^x,$$

гдѣ a есть постоянная величина, а x независимое переменное.

По общему приему составленія производныхъ, имѣемъ:

$$y + \Delta y = a^{x+\Delta x} = a^x \cdot a^{\Delta x},$$

слѣдовательно

$$\Delta y = a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x = a^x [a^{\Delta x} - 1],$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x [a^{\Delta x} - 1]}{\Delta x}.$$

Перехода къ предѣлу, мы должны принять $\Delta x = 0$ и тогда найдемъ:

$$\lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = a^x \cdot \frac{0}{0}.$$

Выраженіе повидимому неопредѣленно. Чтобы составить себѣ понятіе о его истинномъ значеніи, рассмотримъ вмѣсто безконечно малой Δx другую безконечно малую величину $a^{\Delta x} - 1 = a$, понятно, что a есть безконечно малая, если Δx есть безконечно малая, ибо по мѣрѣ того какъ Δx будетъ стремиться къ нулю, a также будетъ приближаться къ этому предѣлу. Если

$$a^{\Delta x} - 1 = a,$$

то

$$a^{\Delta x} = 1 + a$$

или

$$\Delta x = Lg(1 + a),$$

гдѣ логарифмъ берется по основанію a . Въ отличіе отъ натуральныхъ логарифмовъ, взятыхъ при основаніи e , которые (логарифмы) означимъ чрезъ lg , мы будемъ означать другія логарифмы, при другихъ основаніяхъ чрезъ Lg .

Итакъ при сдѣланномъ означеніи

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a}{Lg(1+a)}$$

или, что все равно, раздѣливъ числителя и знаменателя на a , имѣемъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x}{Lg \left[(1+a)^{\frac{1}{a}} \right]} \tag{1}$$

Но по биному Ньютона:

$$\begin{aligned} (1+a)^{\frac{1}{a}} &= 1 + \frac{1}{a} \cdot a + \frac{\frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} - 1 \right)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{\frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \left(\frac{1}{a} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \dots \\ &= 1 + 1 + \frac{1-a}{2} + \left(\frac{1-a}{2} \right) \left(\frac{1-2a}{3} \right) + \dots \end{aligned}$$

Переходя къ предѣлу, т. е. принимая здѣсь $a = 0$, имѣемъ:

$$\lim \left[(1+a)^{\frac{1}{a}} \right] = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Этотъ рядъ, какъ извѣстно, представляетъ собою величину e , т. е. основаніе Неперовыхъ логарифмовъ. Итакъ

$$(2) \quad \lim \left[(1+a)^{\frac{1}{a}} \right] = e.$$

Замѣтимъ, что этотъ рядъ, по мѣрѣ того какъ будемъ брать все большее и большее число членовъ, въ суммѣ будетъ стремиться къ конечной величинѣ, такіе ряды мы называемъ сходящимися. Въ сходимости этого ряда убѣдиться не трудно, легко показать, что величина e представляется числомъ, заключающимся между 2 и 3, т. е. $2 < e < 3$. Въ самомъ дѣлѣ этотъ рядъ безъ перваго члена

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

Послѣдняя же сумма есть безконечно убывающая прогрессія, знаменатель которой есть $\frac{1}{2}$. Сумма такой прогрессіи представляется въ видѣ:

$$S = \frac{b}{1-q},$$

у насъ $b = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$, а потому $S = 1$, слѣдовательно $2 < e < 3$.

Итакъ, принимая во вниманіе выраженіе (2), представляемъ выраженіе (1) въ видѣ:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x}{Lg e}.$$

но, какъ извѣстно,

$$Lg e = \frac{1}{Lg a},$$

поэтому

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot Lg a.$$

Такова производная показательной функціи, а слѣдовательно дифференціалъ показательной функціи есть

$$(3) \quad \partial y = a^x Lg a \cdot \partial x$$

если показательная функция имѣетъ видъ

$$y = e^x,$$

то помня, что $\lg e = 1$; имѣемъ:

$$\partial y = e^x \partial x.$$

Итакъ въ этомъ случаѣ производная показательной функции равна начальной.

Найдемъ дифференціалъ логарифмической функции, имѣющей видъ:

$$y = \text{Log } x,$$

для нея послѣдовательно находимъ:

$$y + \Delta y = \text{Log } (x + \Delta x); \quad \Delta y = \text{Log } (x + \Delta x) - \text{Log } x$$

или

$$\Delta y = \text{Log } \left[\frac{x + \Delta x}{x} \right].$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \text{Log } \left[\frac{x + \Delta x}{x} \right] = \frac{1}{\Delta x} \text{Log } \left[1 + \frac{\Delta x}{x} \right],$$

если бы мы теперь прямо перешли къ предѣлу, т. е. приняли бы $\Delta x = 0$, то нашли бы, что это отношеніе обращается въ $\frac{0}{0}$. Для того, чтобы найти истинное значеніе этого отношенія, примемъ за бесконечно малое $\Delta x = ax$; тогда предыдущее выраженіе представится въ видѣ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Log } (1 + a)}{ax} = \frac{1}{x} \text{Lg } \left[(1 + a)^{\frac{1}{a}} \right],$$

что, какъ мы знаемъ, въ предѣлѣ есть

$$\lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{\text{Log } e}{x}.$$

Такова производная логариема. Дифференціалъ логарифмической функции есть

$$\partial y = \frac{\partial x}{x} \text{Log } e.$$

Если логариемъ берется по неперову основанію, то множитель $\text{Log } e$ обра-

щается въ единицу и тогда

$$(4) \quad dy = \frac{dx}{x},$$

т. е. дифференціалъ натурального логарифма равенъ дифференціалу аргумента, раздѣленному на самый аргументъ.

Имѣя это, легко найти дифференціалъ произведенія и дроби. Предположимъ, что требуется найти дифференціалъ функции

$$y = u \cdot v \cdot w.$$

Взявъ логарифмъ, имѣемъ:

$$\lg y = \lg u + \lg v + \lg w,$$

по правилу дифференцированія логарифма, составляемъ:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w},$$

откуда искомый дифференціалъ

$$dy = \frac{y}{u} du + \frac{y}{v} dv + \frac{y}{w} dw,$$

внося сюда вмѣсто y его выраженіе изъ начальной функции, имѣемъ:

$$(5) \quad dy = vw \cdot du + uv \cdot dv + uw \cdot dw.$$

Итакъ, дифференціалъ произведенія равенъ суммѣ дифференціаловъ каждой функции, умноженныхъ на произведенія остальныхъ функций. Это, очевидно, справедливо для произведенія сколькихъ угодно функций.

Подобнымъ же образомъ составимъ дифференціалъ дроби. Пусть

$$y = \frac{u}{v},$$

тогда

$$\lg y = \lg u - \lg v,$$

откуда черезъ дифференцированіе получаемъ:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$$

или

$$dy = \frac{y}{u} du - \frac{y}{v} dv.$$

но по начальному уравненію составляемъ:

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{v}; \quad \frac{y}{v} = \frac{u}{v^2}.$$

слѣдовательно,

$$\partial y = \frac{\partial u}{v} - \frac{u}{v^2} \cdot \partial v$$

или

$$\partial y = \frac{v \cdot \partial u - u \cdot \partial v}{v^2}, \quad (6)$$

откуда заключаемъ, что дифференціалъ дроби равенъ знаменателю, помноженному на дифференціалъ числителя, безъ числителя умноженнаго на дифференціалъ знаменателя при этомъ вся разность дѣлится на квадратъ знаменателя.

Если дробная функція имѣетъ видъ:

$$y = \frac{a}{v},$$

гдѣ a есть постоянная величина, то дифференціалъ числителя, какъ дифференціалъ постоянной величины, равенъ нулю, изъ выраженія (6) въ этомъ случаѣ остается только второй членъ, и дифференціалъ разсматриваемой функціи приводится къ виду:

$$\partial y = \frac{-a \cdot \partial v}{v^2}.$$

Найдемъ правило дифференцірованія степени. Пусть данной функціей будетъ:

$$y = x^m,$$

гдѣ m есть постоянная величина. Взявъ логарифмъ, имѣемъ:

$$\lg y = m \cdot \lg x,$$

дифференцируя это по известному намъ правилу, находимъ:

$$\frac{\partial y}{y} = m \frac{\partial x}{x},$$

внося сюда вмѣсто y его значеніе изъ начальнаго уравненія, получаемъ:

$$\partial y = mx^{m-1} \partial x. \quad (7)$$

Отсюда заключаемъ, что для дифференцированія степени нужно показателя сдѣлать множителемъ, уменьшить показателя степени на единицу и все помножить на дифференціалъ переменнаго. Легко видѣть, что это правило дифференцированія степени справедливо не только для цѣлаго положительнаго, но и для дробнаго и для отрицательнаго показателя.

Въ самомъ дѣлѣ, если m есть нѣкоторая дробь, то ее можно представить въ видѣ $m = \frac{p}{q}$, гдѣ p и q суть цѣлыя числа, первоначальныя между собой. Итакъ, пусть

$$(8) \quad y = x^{\frac{p}{q}},$$

откуда имѣемъ

$$y^q = x^p,$$

такъ какъ p и q суть цѣлыя числа, то къ степенямъ y^q и x^p примѣнимо предыдущее правило; слѣдовательно, дифференцируя это выраженіе, получимъ:

$$qy^{q-1} dy = px^{p-1} dx,$$

откуда

$$dy = \frac{px^{p-1} dx}{qy^{q-1}},$$

но возводя данную функцію (8) въ степень $q - 1$, имѣемъ:

$$y^{q-1} = x^{\frac{p}{q}(q-1)},$$

внося это въ предыдущее выраженіе, выводимъ:

$$dy = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} dx.$$

Этимъ и подтверждается возможность примѣненія выше упомянутаго правила въ томъ случаѣ, когда показатель степени есть несократимая дробь.

Если въ функціи $y = x^m$ показатель m есть отрицательное число, то положимъ $m = -n$, гдѣ n есть существенно положительная величина, тогда рассматриваемая функція можетъ быть представлена въ видѣ:

$$yx^n = 1.$$

Дифференцируя это какъ произведеніе множителя y на цѣлую и положи-

тельную степень x , имѣемъ

$$x^n \cdot dy + y n \cdot x^{n-1} dx = 0.$$

откуда

$$dy = - \frac{nyx^{n-1} dx}{x^n}.$$

Внося сюда вмѣсто y его величину $y = x^{-n}$, находимъ

$$dy = -n \cdot x^{-n-1} dx,$$

отсюда заключаемъ, что найденное выше правило дифференцированія положительной степени примѣнимо также и къ дифференцированію степени отрицательной.

Мы дифференцировали показательную функцію и степень, у одной переменнаго въ показателѣ, у другой число возвышаемое въ постоянную степень принимается за переменную величину. Можетъ, однако, встрѣтиться случай, въ которомъ и число возвышаемое въ степень и показатель суть переменныя величины, тогда проще всего отъ данной функціи взять логарифмъ и его дифференцировать. Пусть напримѣръ дана функція

$$y = u^v,$$

гдѣ и u и v суть переменныя величины, тогда возьмемъ прежде дифференцированія логарифмъ и будемъ имѣть

$$\lg y = v \lg u$$

предположимъ, что всѣ три функціи y , u , v должны быть дифференцированы относительно переменнаго x . Имѣя это въ виду и дифференцируя вторую часть какъ произведеніе, найдемъ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \lg u + v \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{u},$$

откуда искомая производная представляется въ видѣ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y \left[\frac{\partial v}{\partial x} \lg u + \frac{v}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right].$$

Если въ частномъ случаѣ $v = x$ и $u = x$, то

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

и тогда

$$\frac{\partial x}{\partial y} = x^x (\lg x + 1)$$

ибо въ этомъ случаѣ $y = x^x$.

7. Укажемъ правила дифференцірованія тригонометрическихъ функцій. Будемъ дифференцировать функцію $y = \sin x$. Извѣстнымъ приемомъ отсюда находимъ

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

но такъ какъ въ предѣлѣ, т. е. при $\Delta x = 0$ множитель

$$\frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

обращается въ $\frac{0}{0}$, то опредѣлимъ значеніе этого множителя при $\Delta x = 0$ на основаніи слѣдующихъ соображеній. Мы знаемъ что

$$\operatorname{tang} a > a > \sin a,$$

но такъ какъ

$$\operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

то

$$\frac{\sin a}{\cos a} > a \quad \text{или} \quad \sin a > a \cdot \cos a.$$

Но изъ того, что $\sin a < a$, слѣдуетъ, что

$$\frac{\sin a}{a} < 1,$$

поэтому можемъ написать такое неравенство

$$1 > \frac{\sin a}{a} > \cos a.$$

но такъ какъ при $a = 0$, $\cos a = 1$, то заключаемъ, что по мѣрѣ того какъ a стремится къ нулю, отношеніе $\frac{\sin a}{a}$ приближается къ единицѣ.

Итакъ

$$\lim \frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\left(\frac{\Delta x}{2} \right)} = 1,$$

а потому въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x,$$

отсюда заключаемъ, что производная синуса нѣкоторой дуги есть косинусъ той же дуги; и по прямому опредѣленію дифференціала имѣемъ

$$dy = \cos x \cdot dx.$$

Если для дифференцированія дана функція $y = \cos x$, то послѣдовательно находимъ

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right),$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\left(\frac{\Delta x}{2} \right)} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right),$$

слѣдовательно

$$\lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = - \sin x$$

и посредствомъ этой производной составляемъ

$$dy = - \sin x \cdot dx,$$

отсюда заключаемъ, что дифференціалъ косинуса нѣкоторой дуги равенъ отрицательному синусу той же дуги, умноженному на дифференціалъ дуги.

Зная дифференціалы синуса и косинуса, легко выведемъ дифференціалы другихъ тригонометрическихъ функцій. Для этого стоитъ только руководствоваться известнымъ правиломъ дифференцированія дроби.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

то

$$dy = \frac{\cos x (\cos x \cdot dx) - \sin x (\sin x dx)}{\cos^2 x} = \frac{dx^2}{\cos^2 x},$$

точно такъ-же найдемъ

$$\partial (\operatorname{cotg} x) = \frac{-\sin x (\sin x \cdot dx) - \cos x (\cos x dx)}{\sin^2 x} = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$\partial (\operatorname{sec} x) = \partial \left(\frac{1}{\cos x} \right) = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tang} x}{\cos x} dx = \operatorname{tang} x \operatorname{sec} x dx,$$

$$\partial (\operatorname{cosec} x) = \partial \left(\frac{1}{\sin x} \right) = -\frac{\cos x \cdot dx}{\sin^2 x} = -\frac{\operatorname{cotg} x}{\sin x} dx = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x \cdot dx.$$

8. Найдемъ наконецъ дифференціалы обратныхъ тригонометрическихъ функций, или такъ называемыхъ круговыхъ функций.

Если дано выраженіе $y = \sin x$, то мы можемъ разсматривать y какъ функцію x ; можемъ по данному значенію x опредѣлить изъ таблицъ или другимъ какимъ либо способомъ величину синуса этой дуги, т. е. можемъ вычислить y ; обратно, если будетъ данъ y , т. е. если будетъ данъ синусъ дуги, то при извѣстныхъ условіяхъ можемъ опредѣлить дугу, соответствующую этому синусу. Слѣдовательно дуга можетъ быть разсматриваема какъ функція своего синуса. Принимая синусъ, или другую тригонометрическую линію за функцію дуги, мы будемъ называть эту функцію прямою тригонометрическою функціей; разсматривая же дугу какъ функцію соответствующаго ей синуса, мы будемъ считать эту функцію за обратную относительно предыдущей; такую функцію мы будемъ также называть круговою.

Если дано соотношеніе $y = \sin x$, то функцію обратную этой будемъ представлять въ видѣ

$$x = \operatorname{arc} (\sin = y),$$

читая это такимъ образомъ: x есть дуга (arcus), синусъ которой равенъ y . Не рѣдко вмѣсто этого означенія употребляется другое, болѣе простое, именно $x = \operatorname{arc} \sin y$; англійскіе ученые вмѣсто этого употребляютъ еще знакъ $x = \sin^{-1} y$.

Подобнымъ же образомъ, если будутъ даны функціи

$$y = \cos x; \quad z = \operatorname{tang} x,$$

то функціи обратныя имъ представляются знаками

$$x = \text{arc}(\cos = y), \quad x = \text{arc}(\text{tang} = z).$$

Найдемъ производныя и дифференціалы круговыхъ функцій.

Если дана функція $x = \text{arc}(\sin = y)$, то вмѣстѣ съ тѣмъ $y = \sin x$; изъ этихъ двухъ соотношеній требуется опредѣлить производную $\frac{dx}{dy}$ въ зависимости отъ одного y . Изъ выраженія $y = \sin x$; имѣемъ

$$\partial y = \cos x \cdot \partial x,$$

откуда

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\cos x}$$

но $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, а такъ какъ $y = \sin x$, то

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

слѣдовательно дифференціалъ данной функціи x будетъ

$$\partial x = \partial(\text{arc} \cdot \sin y) = \frac{\partial y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Найдемъ дифференціалъ функціи

$$x = \text{arc}(\cos = y),$$

вмѣстѣ съ этимъ имѣемъ $y = \cos x$, слѣдовательно

$$\partial y = -\sin x \cdot \partial x,$$

но если $y = \cos x$, то $\sin x = \sqrt{1 - y^2}$, поэтому

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

а слѣдовательно искомый дифференціалъ будетъ

$$\partial x = \partial(\text{arc} \cdot \cos y) = \frac{-\partial y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Опредѣлимъ наконецъ дифференціалъ функціи

$$x = \text{arc}(\text{tang} = y),$$

слѣдовательно $y = \text{tang } x$ и потому

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

а такъ какъ $\sec^2 x = 1 + \text{tang}^2 x$, то

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{1 + y^2}$$

или

$$\frac{\partial (\text{arc. tang } y)}{\partial y} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

такимъ образомъ мы видимъ, что производныя обратныхъ тригонометрическихъ функций суть функции алгебраическія.

Мы увидимъ ниже, что вообще трансцендентныя имѣющія алгебраическія производныя, по теоремѣ Абеля обладаютъ весьма примѣчательнымъ свойствомъ.

Функция $\sin x$ есть совершенно опредѣленная, т. е. для всякой величины x функция $\sin x$ имѣетъ опредѣленную величину, нельзя сказать того же про обратную функцию $\text{arc. sin } x$, ибо каждому синусу соответствуютъ безчисленное множество дугъ, если одна изъ этихъ дугъ есть α , то всѣ другія представляются формами $2k\pi + \alpha$ и $(2k + 1)\pi - \alpha$, гдѣ k есть произвольное цѣлое число; изъ этого понятно, что производныя этой функции въ самой общей формѣ должны имѣть два знака \pm . Выбрать одинъ изъ этихъ знаковъ въ данномъ частномъ случаѣ не трудно.

Въ самомъ дѣлѣ, если $x = \sin y$, то производная $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$, но два знака являются тогда, когда $\cos y$ замѣнимъ чрезъ $\pm \sqrt{1 - x^2}$, отсюда заключаемъ, что при радикалѣ и слѣд. въ производной должно удержатъ тотъ знакъ, который имѣетъ $\cos y$.

Точно также полагая

$$x = \cos y$$

имѣемъ

$$y = \text{arc. cos } x,$$

Производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin y}$$

взята отъ

$$x = \cos y,$$

и предыдущее равносильно

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

здѣсь знакъ долженъ быть выбранъ противоположный тому, который имѣеть $\sin y$.

Если

$$x = \operatorname{tang} y,$$

то

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos^2 y$$

или

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Здѣсь одинъ только знакъ, выбирать его надобности не имѣемъ, ибо всѣ дуги имѣющія одинъ и тотъ же тангенсъ представляются въ одной общей формѣ $k\pi + \alpha$ и всѣ эти дуги имѣють одну производную.

9. Посредствомъ производныхъ мы можемъ между прочимъ изслѣдовать характеръ измѣненія функціи.

Если знакъ безконечно малого измѣненія функціи одинаковъ со знакомъ безконечно малого измѣненія главнаго переменнаго, то мы говоримъ что функція возрастаетъ, въ противномъ случаѣ она убываетъ.

Если функція возрастаетъ, то ея производная положительна. Въ самомъ дѣлѣ выраженіе

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

которое въ предѣлѣ представляетъ производную, при сказанныхъ условіяхъ будетъ постоянно положительно.

Разсмотримъ функцію

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

производная ея есть

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}$$

Между предѣлами $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$ постоянно имѣемъ

$$x < \operatorname{tang} x \quad \text{или} \quad x \cos x - \sin x < 0,$$

а потому рассматриваемая производная отрицательна и функція $\frac{\sin x}{x}$ есть убывающая.

Пусть еще дана функція

$$y = \operatorname{lg}(1 + x) - x,$$

производная ея есть

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1+x} - 1$$

для положительных значений x эта функция отрицательна, следовательно сама функция y есть убывающая.

Наконец функция

$$y = \lg(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

имѣет производную

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$$

для всѣхъ положительныхъ значений x эта производная положительна и рассматриваемая функция должна считаться возрастающей отъ $x=0$.

10. Пояснимъ всю изложенную теорію дифференцированія простыхъ функций на частныхъ примѣрахъ.

Возьмемъ функцию

$$y = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{x} \dots$$

и найдемъ ея производную. Если эту начальную функцию возвысимъ въ n -ую степень, то будемъ имѣть

$$y^n = x \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{x} \dots$$

или

$$y^n = xy,$$

откуда по сокращеніи на y имѣемъ

$$y^{n-1} = x.$$

Слѣдовательно

$$y = x^{\frac{1}{n-1}};$$

дифференцируя это какъ степень, находимъ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{n-1} x^{\frac{2-n}{n-1}}.$$

Возьмемъ дифференціалъ такой функціи

$$y = \lg(x + \sqrt{a+x^2}),$$

гдѣ a есть постоянная величина. Дифференцируя это, имѣемъ

$$\partial y = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{a+x^2}}\right) \frac{\partial x}{x + \sqrt{a+x^2}} = \frac{\partial x}{\sqrt{a+x^2}}$$

Будемъ еще дифференцировать функцію

$$y = x^x,$$

примемъ въ показателѣ $x^x = u$, тогда данная функція представится въ видѣ

$$y = x^u,$$

откуда

$$\lg y = u \lg x,$$

дифференцируя это, имѣемъ

$$\frac{\partial y}{y} = \lg x \cdot \partial u + u \frac{\partial x}{x},$$

но такъ какъ

$$\partial u = x^x (\lg x + 1) \partial x,$$

то предыдущее обращается въ

$$\frac{\partial y}{y} = x^x (\lg x + 1) \lg x \cdot \partial x + x^x \frac{\partial x}{x}$$

или принимая во вниманіе начальную функцію, получаемъ искомый дифференціалъ въ видѣ

$$\partial y = x^x [x^x \lg(x+1) \lg x + x^{x-1}] \partial x.$$

Найдемъ еще дифференціалъ слѣдующей круговой функціи

$$y = \text{arc}(\text{tang} = \lg \sin x),$$

непосредственно имѣемъ

$$dy = \frac{\partial (\lg \sin x)}{1 + (\lg \sin x)^2} \cdot dx$$

откуда

$$dy = \frac{\cot g x \partial x}{1 + (\lg \sin x)^2}$$

III.

Дифференциалы и производныя высшихъ порядковъ.

11. Мы видѣли, что всякая функція имѣетъ производную и эта послѣдняя по большей части сама зависитъ отъ главнаго переменнаго, по которому производилось дифференцирование. Отъ производной функціи, въ которую еще входитъ главное переменное, снова можетъ быть взята производная функція, которая называется второю производною относительно своей начальной.

Если вообще дана функція $y = f(x)$, то, какъ извѣстно, первая ея производная есть

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] = f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

Если $f'(x)$ зависитъ отъ x , то къ составленію ея производной можетъ быть примѣненъ тотъ же приемъ, который употребляется для составленія $f'(x)$ по данной начальной функціи $f(x)$. Условимся означать вторую производную знакомъ $f''(x)$. Такъ какъ вторая производная стоитъ въ такомъ же отношеніи къ первой, въ какомъ первая производная находится къ начальной функціи, то

$$f''(x) = \lim \left[\frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \right]$$

или

$$f''(x) = \frac{\partial [f'(x)]}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial x},$$

это выраженіе представляется обыкновенно въ видѣ

$$f''(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

и подъ этимъ символомъ разумѣется дѣйствіе, при которомъ отъ известной функціи y берется два раза производная по главному переменному x .

Если вторая производная зависитъ отъ главнаго переменнаго x , то отъ нея по тѣмъ же правиламъ можно взять слѣдующую, т. е. третью производную, которая по принятому означенію будетъ

$$f'''(x) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

И такъ если принимаемъ

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x}; \quad f''(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad f'''(x) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \dots \dots f^{(n)}(x) = \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$$

то отсюда видимъ, что производная какого угодно порядка отъ $f(x)$ можетъ быть представлена въ видѣ частнаго отъ дѣленія дифференціала того же порядка данной функціи на степень дифференціала независимой переменной, соответствующую порядку производной. Если дана напр. функція $y = ax^n$, гдѣ a и n суть постоянныя величины и n цѣлое положительное число, то дифференцируя въ первый разъ эту функцію, получимъ

$$\partial y = an \cdot x^{n-1} \partial x$$

и первая производная въ разсматриваемомъ случаѣ есть

$$\frac{\partial y}{\partial x} = an \cdot x^{n-1}$$

мы видимъ, что эта производная сама зависитъ отъ x и потому снова можетъ быть дифференцирована относительно x . Выполняя это дифференцирование по правилу дифференцирования степени, получимъ

$$\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = an(n-1)x^{n-2} \partial x$$

слѣдовательно вторая производная будетъ

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = an(n-1)x^{n-2}$$

мы видимъ, что эта вторая производная сама зависить отъ x , а потому отъ нея снова можетъ быть взята производная. Эта производная будетъ уже третьей производной относительно своей начальной. Въ нашемъ случаѣ

$$\partial \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = an(n-1)(n-2)x^{n-3} \partial x$$

или

$$\partial \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = an(n-1)(n-2)x^{n-3}.$$

Такъ какъ въ этомъ случаѣ степень переменнаго при каждомъ дифференцированіи уменьшается на единицу, то n -ая производная не будетъ уже зависѣть отъ x , а потому дальнѣйшія производныя разсматриваемой функціи обращаются въ нули.

Примѣчательныя свойства относительно своихъ производныхъ имѣютъ нѣкоторыя показательныя и тригонометрическія функціи. Такъ напр. показательная функція $y = e^x$ не измѣняется во всѣхъ своихъ послѣдовательныхъ производныхъ. Въ самомъ дѣлѣ мы знаемъ, что для этой функціи

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^x,$$

такимъ образомъ первая производная тождественна съ своей начальной, а такъ какъ вторая производная стоитъ въ такомъ же отношеніи къ первой производной, въ какомъ первая производная находится относительно начальной функціи, то вторая производная будетъ тождественна съ первой, именно

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = e^x$$

и т. д. Вообще

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = e^x.$$

Если разсмотримъ функцію $y = \sin x$, то по извѣстному правилу найдемъ:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\sin x; \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -\cos x; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \sin x,$$

т. е. послѣдовательныя производныя синуса возвращаются періодически черезъ четыре дифференцированія.

Тоже самое свойство имѣетъ и функция $y = \cos x$. Въ самомъ дѣлѣ для этой функции

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\sin x; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\cos x; \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \sin x; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \cos x.$$

12. Мы видѣли, что

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x)$$

или

$$(1) \quad \partial^2 y = f''(x) \partial x^2.$$

Этого результата при известномъ условіи мы можемъ достигнуть, дифференцируя какъ произведеніе выраженіе

$$\partial y = f'(x) \partial x.$$

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя это выраженіе, мы имѣемъ:

$$\partial^2 y = \partial [f'(x)] \cdot \partial x + f'(x) \partial^2 x.$$

пусть $f'(x) = F'(x)$, тогда

$$\partial [f'(x)] = F''(x) \partial x,$$

но

$$F''(x) = f''(x),$$

слѣдовательно $\partial [f'(x)] = f''(x) \partial x$, поэтому

$$\partial^2 y = f''(x) \partial x^2 + f'(x) \partial^2 x.$$

Для того, чтобы это было тождественно съ выраженіемъ (1), необходимо, чтобы

$$f'(x) \partial^2 x = 0,$$

но такъ какъ $f'(x)$ вообще не равна нулю, то это условіе удовлетворится, когда $\partial^2 x = 0$, т. е. когда ∂x будетъ разсматриваться какъ величина постоянная, ибо мы знаемъ, что дифференціалы постоянныхъ величинъ равны нулю. Изъ этого мы выводимъ такимъ образомъ слѣдующее важное заключеніе:

При послѣдовательныхъ дифференцированіяхъ дифференціалъ главнаго переменнаго долженъ быть принимаемъ за величину постоянную.

Когда отъ данной функции беремъ первую производную, тогда выборъ одной изъ двухъ входящихъ переменныхъ за независимую остается

произвольнымъ и не вліяетъ на ожидаемый результатъ. Если въ этомъ случаѣ замѣнимъ потомъ независимое перемѣнное другимъ, связаннымъ съ первымъ известнымъ соотношеніемъ, то найденное уже дифференціальное выраженіе перваго порядка отъ этого не измѣнится. Въ примѣненіи же къ дифференціаламъ высшихъ порядковъ это заключеніе не можетъ считаться вообще справедливымъ.

Итакъ, если имѣемъ $y = f(x)$, то какое бы изъ двухъ перемѣнныхъ x или y мы не приняли за главное, во всякомъ случаѣ

$$dy = f'(x) dx. \quad (2)$$

Если x есть независимое или главное перемѣнное, то

$$d^2y = f''(x) dx^2, \quad (3)$$

если же x не есть независимое перемѣнное, а само есть функція другого независимаго перемѣннаго, то дифференцируя выраженіе (2) какъ произведеніе, будемъ имѣть

$$d^2y = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2x, \quad (4)$$

гдѣ

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x},$$

опредѣляя $f''(x)$ изъ выраженія (4), имѣемъ:

$$f''(x) = \frac{d^2y - f'(x) d^2x}{dx^2},$$

внося сюда вмѣсто $f'(x)$ ея величину, получимъ:

$$f''(x) = \frac{d^2y - \frac{\partial y}{\partial x} d^2x}{dx^2}$$

или

$$f''(x) = \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3}.$$

Что можемъ представить также въ видѣ:

$$f''(x) = \frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial x} \quad (5)$$

ибо изъ этого получимъ предыдущее, выполняя указанное здѣсь дифференцирование дроби $\frac{\partial y}{\partial x}$. Замѣтимъ, что выраженіе (3), полученное въ предположеніи, что x есть независимое переменное, непосредственно даетъ

$$(6) \quad f''(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Сравнивая это съ предыдущимъ, видимъ, что это выраженіе (6) есть простое символическое означеніе, представляющее собою то, что отъ нѣкоторой функціи y берется послѣдовательно два раза производная по независимому переменному x . Тогда какъ выраженіе (5) показываетъ, что $f'(x)$ есть производная дроби, взятая по извѣстному правилу.

Точно также, если x есть независимое переменное въ уравненіи $y = f(x)$, то

$$f'''(x) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Если же x есть функція нѣкотораго новаго переменнаго, то третья производная функція y по переменному x должна быть представлена въ видѣ:

$$f'''(x) = \frac{\partial \left[\frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial x} \right]}{\partial x}$$

ибо

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{или} \quad dy = f'(x) dx;$$

а такъ какъ предполагается, что x есть сама функція нѣкотораго новаго переменнаго, то

$$\partial^2 y = f''(x) \partial x^2 + f'(x) \partial^2 x,$$

откуда

$$\begin{aligned} \partial^3 y &= f'''(x) \partial x^3 + 2f''(x) \partial x \partial^2 x + f''(x) \partial^2 x \partial x + f'(x) \partial^3 x = \\ &= f'''(x) \partial x^3 + 3f''(x) \partial x \partial^2 x + f'(x) \partial^3 x. \end{aligned}$$

Изъ этого находимъ:

$$f'''(x) = \frac{\partial x [\partial x \partial^3 y - \partial y \partial^3 x] - 3 \partial^2 x [\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x]}{\partial x^5}$$

или

$$f'''(x) = \frac{1}{\partial x} \partial \left[\frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3} \right] = \frac{\partial \left[\frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial x} \right]}{\partial x}$$

и т. д.

Чтобы пояснить это на примѣрахъ, рассмотримъ сначала уравненіе:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{x}{1-x^2} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{y}{1-x^2} = 0.$$

Если x есть независимое переменное, то вторая производная y по x безъ всякихъ дальнѣйшихъ преобразованій можетъ быть отсюда опредѣлена.

Если x есть сама функція нѣкоторой независимой переменной t , то $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ въ этомъ уравненіи должна быть замѣнена черезъ

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial x}$$

и эта послѣдняя должна быть развита, какъ производная дроби. Итакъ въ послѣднемъ случаѣ предыдущее уравненіе должно быть представлено въ видѣ:

$$\frac{\partial^2 y \partial x - \partial^2 x \partial y}{\partial x^3} - \frac{x}{1-x^2} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{y}{1-x^2} = 0.$$

Если новое переменное есть t и x , какъ функція его, представляется напримѣръ въ видѣ $x = \cos t$, то

$$\partial x = -\sin t \cdot \partial t; \quad \partial^2 x = -\cos t \cdot \partial t^2,$$

ибо t по предположенію новое независимое переменное и потому $\partial^2 t = 0$. Внося вмѣсто x , ∂x и $\partial^2 x$ ихъ величины въ предыдущее уравненіе, находимъ:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y = 0$$

и отсюда уже опредѣляется вторая производная функціи y взятая два раза по независимому переменному t .

Рѣшимъ еще такой вопросъ. Требуется выраженіе:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

преобразовать такъ, чтобы независимымъ переменнымъ было принято y вмѣсто x .

Замѣтимъ, что

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial x}$$

не указывая независимаго переменнаго и дифференцируя дробь, представляемъ это въ видѣ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{1}{\partial x} \left[\frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{\partial x^2} \right],$$

если за независимое переменное принимаемъ y , то $\partial^2 y = 0$ и потому въ этомъ случаѣ надо считать

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x^3},$$

слѣдовательно данная сумма принимаетъ видъ

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x^3}$$

или

$$\frac{\partial y (\partial x \cdot \partial y - \partial^2 x)}{\partial x^3}$$

или раздѣливъ числителя и знаменателя на ∂y^3 , получимъ

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^3}$$

это и есть искомое преобразованное выраженіе.

Сдѣлаемъ еще одно преобразование, которое, какъ увидимъ потомъ, имѣетъ важное геометрическое значеніе.

Преобразуемъ производную $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ такъ, чтобы независимымъ переменнымъ было количество s , дифференціалъ котораго опредѣляется выраженіемъ

$$(7) \quad \partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2.$$

мы сейчасъ видѣли, что безъ указанія независимаго переменнаго

$$(8) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3}.$$

Если s есть независимое переменное, то $\partial^2 s = 0$ и по соотношенію (7) имѣемъ

$$0 = \partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y,$$

откуда

$$\partial^2 x = -\frac{\partial y}{\partial x} \partial^2 y,$$

внося это въ (8), имѣемъ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial x^2 \partial^2 y + \partial y^2 \partial^2 y}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 y \partial s^2}{\partial x^4}$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y \partial s^2}{(\partial s^2 - \partial y^2)^2},$$

раздѣливъ числителя и знаменателя на ∂s^4 , получимъ искомое преобразование въ видѣ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}}{\left(1 - \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\right)^2}.$$

Покажемъ еще одно подобное же преобразование. Предположимъ, что функцію

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

въ которой x принимается за главное переменное, требуется преобразовать такъ, чтобы переменныя x и y были замѣнены другими ρ и ω , которыя относительно первыхъ считаются полярными, и связь между тѣми и другими, какъ обыкновенно, представляется въ видѣ

$$x = \rho \cdot \cos \omega; \quad y = \rho \sin \omega,$$

при этомъ примемъ ω за независимое переменное.

Прежде всего данную функцію R представимъ въ видѣ

$$R = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{3/2}}{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}.$$

По зависимости между первоначальными и новыми переменными имѣемъ

$$\partial x = \cos \omega \cdot \partial \rho - \rho \cdot \sin \omega \cdot \partial \omega$$

$$\partial y = \sin \omega \cdot \partial \rho + \rho \cdot \cos \omega \cdot \partial \omega$$

такъ какъ ω есть независимое переменное, то $\partial \omega = \text{постоянной}$ $\partial^2 \omega = 0$, поэтому слѣдующее дифференцирование даетъ

$$\partial^2 x = \cos \omega \partial^2 \rho - 2 \sin \omega \partial \rho \partial \omega - \rho \cos \omega \partial \omega^2,$$

$$\partial^2 y = \sin \omega \partial^2 \rho + 2 \cos \omega \partial \rho \partial \omega - \rho \sin \omega \partial \omega^2,$$

посредствомъ этихъ выраженій и двухъ предыдущихъ легко составляемъ

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 \\ dx \partial^2 y - dy \partial^2 x &= -\rho d\omega \partial^2 \rho + 2 d\omega \partial \rho^2 + \rho^2 d\omega^3. \end{aligned}$$

поэтому данная функція принимаетъ видъ

$$R = \frac{[d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2]^{3/2}}{-\rho d\omega \partial^2 \rho + 2 d\omega \partial \rho^2 + \rho^2 d\omega^3}$$

или, наконецъ, по раздѣленіи числителя и знаменателя на $d\omega^3$, имѣемъ

$$R = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega}\right)^2\right]^{3/2}}{\rho^2 + 2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega}\right)^2 - \rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial \omega^2}}$$

11. Къ вопросу о замѣнѣ однихъ переменныхъ другими мы еще возвратимся, а теперь, не останавливаясь на этомъ, покажемъ какимъ образомъ могутъ быть составляемы послѣдовательныя производныя произведенія двухъ или многихъ функцій.

Предположимъ, что дана функція $y = uv$, гдѣ u и v сами суть функціи независимаго переменнаго x . По правилу дифференцированія произведенія находимъ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} &= u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Мы видимъ, что въ среднихъ членахъ коэффициенты не зависятъ отъ самихъ функцій, а отъ числа выполняемыхъ дифференцированій, или отъ порядка составляемой производной. Чтобы открыть законъ составленія этихъ коэффициентовъ, допустимъ, что n -ая производная данной функціи $y = uv$ имѣетъ видъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n y}{\partial x^n} &= A_0 u \frac{\partial^n v}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}} + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^{n-2} v}{\partial x^{n-2}} + \dots \\ (9) \quad &\dots + A_{n-1} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial v}{\partial x} + A_n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} v. \end{aligned}$$

Такъ какъ коэффициенты $A_0, A_1 \dots A_n$ не зависятъ отъ вида разсматриваемыхъ функций, то этимъ функциямъ мы можемъ дать произвольную форму. Рѣшеніе будетъ простѣйшее, если данныя функции будутъ показательныя, ибо послѣдовательныя производныя такихъ функций имѣютъ одинъ и тотъ же видъ. Итакъ примемъ

$$u = e^{ax}; \quad v = e^x.$$

гдѣ a есть постоянный коэффициентъ. Тогда

$$y = uv = e^{(1+a)x},$$

понятно что

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = a^n e^{ax}; \quad \frac{\partial^n v}{\partial x^n} = e^x; \quad \frac{\partial^n (uv)}{\partial x^n} = (1+a)^n e^{(1+a)x},$$

посредствомъ этихъ выраженій послѣ сокращенія общаго множителя

$$e^x e^{ax} = e^{(1+a)x}$$

въ обѣихъ частяхъ выраженіе (9), это послѣднее принимаетъ видъ

$$(1+a)^n = A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + A_{n-1} a^{n-1} + A_n a^n;$$

отсюда заключаемъ, что искомыя коэффициенты $A_0, A_1 \dots A_n$ суть биномиальные, слѣдовательно

$$A_0 = 1, \quad A_1 = n, \quad A_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \dots$$

итакъ n -ая производная произведенія двухъ функций имѣетъ видъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n (uv)}{\partial x^n} &= u \frac{\partial^n v}{\partial x^n} + n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^{n-2} v}{\partial x^{n-2}} + \dots \\ &+ n \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + v \frac{\partial^n u}{\partial x^n}. \end{aligned} \tag{10}$$

Эта формула показана первоначально Лейбницемъ.

Пояснимъ теорію послѣдовательнаго дифференцированія нѣкоторыми примѣрами.

Найдемъ n -ую производную функций

$$y = \text{arc} \left[\text{tang} = \frac{x \sin a}{1 - x \cdot \cos a} \right],$$

взявъ первую производную, имѣемъ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \left[\frac{x \sin a}{1-x \cos a} \right]}{\partial x}}{1 + \frac{x^2 \sin^2 a}{(1-x \cos a)^2}}$$

или

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin a}{1 - 2x \cos a + x^2},$$

если рѣшимъ относительно x уравненіе

$$x^2 - 2x \cos a + 1 = 0,$$

то найдемъ, что корни этого уравненія суть

$$(11) \quad p = \cos a + i \sin a; \quad q = \cos a - i \sin a,$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$. Поэтому трехчленъ знаменателя можно представить въ видѣ $(x-p)(x-q)$ и кромѣ того изъ выраженій (11) выводимъ

$$\sin a = \frac{p-q}{2i},$$

слѣдовательно

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2i} \frac{p-q}{(x-p)(x-q)}$$

или

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{x-p} - \frac{1}{x-q} \right],$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(x-p)^2} - \frac{1}{(x-q)^2} \right].$$

Дифференцируя еще разъ, составимъ

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{2}{2i} \left[\frac{1}{(x-p)^3} - \frac{1}{(x-q)^3} \right].$$

продолжая такимъ образомъ, легко заключимъ, что

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{2i} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(x-p)^n} - \frac{1}{(x-q)^n} \right].$$

Найдемъ еще n -ую производную отъ функціи

$$y = a \cos (lg x) + b \sin (lg x), \quad (12)$$

отсюда легко получаемъ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -a \frac{\sin (lg x)}{x} + b \frac{\cos (lg x)}{x}, \quad (13)$$

дифференцируя это еще разъ, находимъ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{a \cos (lg x)}{x^2} - \frac{b \sin (lg x)}{x^2} + \frac{a \sin (lg x)}{x^2} - \frac{b \cos (lg x)}{x^2},$$

откуда получаемъ

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + [a \cdot \cos (lg x) + b \cdot \sin (lg x)] + [b \cdot \cos (lg x) - a \cdot \sin (lg x)] = 0$$

или принимая во вниманіе выраженія (12) и (13), представляемъ это въ видѣ

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + y = 0.$$

Наша задача заключается въ опредѣленіи производной $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, а потому будетъ дифференцировать послѣднее выраженіе еще $n - 2$ разъ. Такимъ образомъ составимъ

$$\frac{\partial^{n-2} \left(x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)}{\partial x^{n-2}} + \frac{\partial^{n-2} \left(x \frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial x^{n-2}} + \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} = 0. \quad (14)$$

Для выполненія только еще означеннаго дифференцированія въ первыхъ двухъ членахъ примѣнимъ формулу Лейбница (10). Для перваго члена примемъ

$$u = x^2; \quad v = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

такъ какъ начиная съ третьей производной, всѣ дальнѣйшія производныя отъ функціи u обращаются въ нули, то изъ всего ряда (10) слѣдуетъ удержать только три первые члена. Помня, что въ нашемъ случаѣ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,$$

по выражению (10) для перваго члена уравненія (14) имѣемъ

$$\frac{\partial^{n-2} \left(x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)}{\partial x^{n-2}} = x^2 \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + 2(n-2)x \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \frac{2(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}$$

При дифференцированіи втораго члена уравненія (14) примемъ

$$u = x; \quad v = \frac{\partial y}{\partial x},$$

такъ какъ вторая и дальнѣйшія производныя отъ функціи u обращаются въ нули, то изъ ряда (10) придется удержать только два первые члена. поэтому замѣтивъ, что $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, по выраженію (10), составляемъ

$$\frac{\partial^{n-2} \left(x \frac{\partial x}{\partial y} \right)}{\partial x^{n-2}} = x \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + (n-2) \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}$$

Такимъ образомъ выраженіе (14) принимаетъ видъ

$$x^2 \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + (2n-3)x \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + [(n-2)^2 + 1] \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} = 0.$$

откуда и опредѣлится искомая производная $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ по начальной функціи и ея первой производной.

Найдемъ наконецъ n -ую производную отъ функціи

$$y = e^{ax} \cos bx.$$

примѣняя къ этому дифференцированію формулу Лейбница, примемъ

$$u = e^{ax}; \quad v = \cos bx$$

и по выраженію (10) составляемъ

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = e^{ax} \frac{\partial^n (\cos bx)}{\partial x^n} + n \frac{\partial (e^{ax})}{\partial x} \frac{\partial^{n-1} (\cos bx)}{\partial x^{n-1}} + \dots + \frac{\partial^n (e^{ax})}{\partial x^n} \cos (bx).$$

но

$$\frac{\partial (e^{ax})}{\partial x} = a e^{ax}; \quad \frac{\partial^2 (e^{ax})}{\partial x^2} = a^2 e^{ax} \dots \frac{\partial^n (e^{ax})}{\partial x^n} = a^n e^{ax}.$$

$$\frac{\partial (\cos bx)}{\partial x} = -b \sin (bx) = b \cos \left(bx + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 (\cos bx)}{\partial x^2} = -b^2 \cos (bx) = b^2 \cos \left(bx + 2 \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\frac{\partial^3 (\cos bx)}{\partial x^3} = b^3 \sin (bx) = b^3 \cos \left(bx + 3 \frac{\pi}{2} \right),$$

.....

$$\frac{\partial^n \cos (bx)}{\partial x^n} = b^n \cos \left(bx + n \frac{\pi}{2} \right).$$

ПОЭТОМУ

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = e^{ax} \left[b^n \cos \left(bx + n \frac{\pi}{2} \right) + n a b^{n-1} \cos \left(bx + (n-1) \frac{\pi}{2} \right) + \dots + a^n \cos bx \right].$$



IV.

Дифференцирование функций со многими переменными.

12. Прежде чѣмъ будемъ рѣшать этотъ вопросъ, сдѣлаемъ одно замѣчаніе касательно дифференцированія такой сложной функціи z , которая содержитъ главное переменное x не иначе какъ въ зависимости отъ нѣкоторой другой функціи y того же главнаго переменнаго x .

Пусть $z = F(y)$, а переменное y пусть извѣстнымъ образомъ зависитъ отъ x , такъ что $y = f(x)$. Требуется на основаніи этихъ соотношеній вычислить производную $\frac{\partial z}{\partial x}$. Дифференцируя первое соотношение представляющее зависимость z отъ y , имѣемъ

$$\partial z = F'(y) \partial y,$$

второе соотношение подобно этому даетъ

$$\partial y = f'(x) \partial x.$$

внося это въ предыдущее, находимъ

$$\partial z = F'(y) f'(x) \partial x,$$

но

$$F'(y) = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x},$$

слѣдовательно

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Итакъ чтобы найти производную отъ сложной функціи z относительно главнаго переменнаго x , должно производную отъ z , взятую по посредствующему переменному y помножить на производную этого послѣдняго по главному переменному.

Если два переменныхъ x и y представлены въ функціи третьяго t , такъ что

$$x = f(t); \quad y = F(t)$$

и требуется найти производную $\frac{\partial y}{\partial x}$, то проще всего казалось бы изъ этихъ данныхъ соотношеній исключить t и получить зависимость y отъ x , тогда вопросъ рѣшится на основаніи уже развитыхъ соображеній; но иногда такое исключеніе затруднительно, или прямо невозможно. Въ этомъ случаѣ мы поступимъ слѣдующимъ образомъ. По даннымъ соотношеніямъ находимъ

$$\partial x = f'(t) \partial t; \quad \partial y = F'(t) \partial t$$

и раздѣливъ второе уравненіе на первое, получимъ искомую производную въ видѣ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{F'(t)}{f'(t)}.$$

Послѣ этихъ замѣчаній найдемъ правило дифференцированія функцій многихъ переменныхъ.

Предположимъ, что дана для дифференцированія функція u содержащая двѣ независимыя между собою переменныя y и x , именно

$$u = f(x, y).$$

Предположимъ, что обѣ переменныя одновременно получили приращенія Δx и Δy ; происходящее отъ этого измѣненіе функціи u пусть будетъ Δu , тогда

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

придадимъ и вычтемъ во второй части по $f(x + \Delta x, y)$, т. е. придадимъ и вычтемъ такое состояніе функціи, въ которое приходитъ данная функція, если измѣняется только одно переменное x ; послѣ сказаннаго преобразованія приращеніе u получить видъ

$$\Delta u = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] + [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

мы видимъ изъ этого, что полное приращеніе функціи состоитъ изъ двухъ частей; одна часть, представляемая вторымъ слагаемымъ, есть приращеніе функціи происшедшее отъ измѣненія переменнаго x на величину Δx . Первымъ слагаемымъ представляется то измѣненіе функціи, которое она получаетъ, если при нѣкоторомъ состояніи $x + \Delta x$ переменнаго x измѣнимъ y на величину Δy .

Предыдущее выраженіе, не измѣняя его, можно представить въ видѣ

$$\Delta u = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \Delta y + \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x,$$

очевидно, что

$$\lim \left[\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \right] = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

точно также

$$\lim \left[\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Но если еще не переходимъ къ предѣлу, не принимаемъ Δx и Δy за нули, то разсматриваемыя теперь дроби будутъ отличны отъ производныхъ на нѣкоторыя величины ω и ω_1 , которыя будутъ обращаться въ нули вмѣстѣ съ Δx и Δy и сдѣлаются безконечно малыми перваго порядка, когда Δx и Δy будутъ замѣнены дифференціалами. Итакъ ничего не измѣняя и не переходя еще къ предѣлу, можемъ представить приращеніе Δu въ видѣ

$$\Delta u = \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \omega \right] \Delta y + \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \omega_1 \right] \Delta x.$$

Если сдѣлаемъ величины Δx и Δy безконечно малыми, то Δu также сдѣлается безконечно малою величиной du . Итакъ

$$du = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy + \omega dy + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \omega_1 dx.$$

Но такъ какъ ω и ω_1 въ этомъ случаѣ сами суть безконечно малыя величины перваго порядка, то произведенія ωdy и $\omega_1 dx$ будутъ безконечно малыя втораго порядка, которыя исчезнутъ въ сравненіи съ безконечно малыми

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx$$

перваго порядка. Итакъ мы должны принять

$$du = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx,$$

или такъ какъ

$$u = f(x, y),$$

то

$$du = \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Здѣсь $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ называются частными производными отъ данной функціи u взятыми относительно x и y , т. е. это суть такія производныя, при составленіи которыхъ въ одной измѣняется по извѣстному правилу одно переменное x , а въ другой только одно переменное y . Величины

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

называются подобно этому частными дифференціалами данной функціи. Изъ всего этого заключаемъ, что *полный дифференціалъ данной функціи равенъ суммѣ ея частныхъ дифференціаловъ.*

Если бы для дифференцированія была дана функція u трехъ независимыхъ переменныхъ x, y, z , т. е. $u = f(x, y, z)$, то по этому правилу составили бы

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Предположимъ теперь, что дана для дифференцированія функція $u = f(y, z)$, гдѣ каждая изъ переменныхъ y и z въ свою очередь зависитъ отъ главнаго переменнаго x , такъ что

$$y = \varphi(x); \quad z = \psi(x),$$

тогда для данной функціи по предыдущему правилу имѣемъ

$$du = \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

но кромѣ того

$$dy = \varphi'(x) dx; \quad dz = \psi'(x) dx,$$

слѣдовательно

$$du = \frac{\partial u}{\partial y} \varphi'(x) dx + \frac{\partial u}{\partial z} \psi'(x) dx,$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \varphi'(x) + \frac{\partial u}{\partial z} \psi'(x).$$

но

$$\varphi'(x) = \frac{\partial y}{\partial x}; \quad \psi'(x) = \frac{\partial z}{\partial x},$$

слѣдовательно

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x},$$

этимъ и опредѣляется составъ полной производной, взятой отъ данной функціи по независимому переменному (если только это независимое переменное не входитъ явно въ разсматриваемую функцію).

Рѣшимъ теперь подобный вопросъ для случая, когда главное переменное входитъ въ нѣкоторую функцію двояко: явно и въ зависимости отъ другихъ переменныхъ.

Предположимъ, что функція z зависитъ отъ переменныхъ x и y , гдѣ только x есть независимое переменное, а y есть нѣкоторая функція отъ x . Такимъ образомъ въ выраженіе

$$z = f(x, y)$$

x входитъ явно и въ зависимости отъ y . Непосредственно по выше приведенному правилу имѣемъ

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \partial y.$$

но по предположенію $y = \varphi(x)$ слѣдовательно

$$\partial y = \varphi'(x) \partial x,$$

а потому

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \varphi'(x) \partial x,$$

но

$$\varphi'(x) = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Слѣдовательно

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \partial x.$$

Слѣдовательно производная

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

здѣсь подъ знакомъ $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ мы разумѣемъ производную данной функціи взятую относительно x входящаго въ данную функцію явно. Такимъ образомъ $\frac{\partial z}{\partial x}$ есть полная производная взятая по переменному x отъ рассматриваемой функціи, тогда какъ $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ есть частная производная взятая только по переменному x входящему явно.

Точно также если функція u зависитъ отъ переменныхъ x, y, z , и независимое переменное есть x , а y и z его функціи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Если въ выраженіи $u = f(x, y, z)$ переменныя x и y независимы, а z ихъ функція представляемая выраженіемъ

$$z = \varphi(x, y),$$

то полный дифференціалъ по независимымъ переменнымъ найдемъ слѣдующимъ образомъ. Прежде всего имѣемъ

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y + \frac{\partial u}{\partial z} \partial z.$$

но

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \partial y.$$

слѣдовательно

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \partial y\right) \frac{\partial u}{\partial z}$$

или

$$\partial u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) \partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) \partial y.$$

Пояснимъ эти общія соображенія на частныхъ примѣрахъ.

Возьмемъ полный дифференціалъ функціи

$$z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

гдѣ φ есть функция произвольнаго вида, x и y независимы между собой переменныя. Вообще

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \partial y.$$

Въ нашемъ случаѣ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + x \frac{\partial \left[\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \right]}{\partial x} \frac{\partial \left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial \left[\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \right]}{\partial y} \frac{\partial \left(\frac{x}{y}\right)}{\partial y}$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \frac{\partial \left[\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \right]}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \frac{\partial \left[\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \right]}{\partial y},$$

поэтому полный дифференціалъ будетъ

$$\partial z = \left[\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \frac{\partial \left[\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \right]}{\partial x} \right] \partial x - \frac{x^2}{y^2} \frac{\partial \left[\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \right]}{\partial y} \partial y.$$

Возьмемъ еще полный дифференціалъ отъ функции

$$z = \lg \left(\text{tang} \frac{x}{y} \right),$$

предполагая что x и y между собою независимы.

По данному соотношенію имѣемъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \left(\text{tang} \frac{x}{y} \right)}{\partial x}}{\text{tang} \frac{x}{y}} = \frac{1}{y \cos^2 \left(\frac{x}{y} \right) \text{tang} \frac{x}{y}} = \frac{2}{y \sin \left(2 \frac{x}{y} \right)},$$

подобно этому

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \left(\text{tang } \frac{x}{y} \right)}{\partial y}}{\text{tang } \frac{x}{y}} = \frac{\frac{\partial \left(\frac{x}{y} \right)}{\partial y}}{\cos^2 \left(\frac{x}{y} \right) \text{tang } \frac{x}{y}} = \frac{-2x}{y^2 \sin \left(2 \frac{x}{y} \right)}$$

следовательно искомый дифференціалъ есть

$$\partial z = \frac{2}{y^2 \sin \left(2 \frac{x}{y} \right)} [y \partial x - x \partial y].$$

13. Изъ функцій многихъ переменныхъ особенно примѣчательны функціи однородныя, имѣющія то свойство, что если всѣ переменныя, входящія въ функцію, помножимъ на извѣстнаго множителя, то въ результатѣ получимъ начальную функцію, умноженную на степень этого множителя равную измѣренію функціи. Такъ, если многочленъ второй степени

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = \varphi(x, y, z),$$

или однородную функцію второго измѣренія измѣнимъ въ томъ смыслѣ, что вмѣсто каждаго переменнаго введемъ это переменное, умноженное на нѣкоторую величину t , то получимъ въ результатѣ

$$t^2 \varphi(x, y, z).$$

Такъ напр. функція

$$u = x^3 \sin \frac{x}{y} + y^2 z \text{tang } \frac{y}{x}$$

есть однородная функція третьяго измѣренія. Въ самомъ дѣлѣ, помножимъ всѣ переменныя на t , тогда эта функція обратится въ

$$(tx)^3 \sin \frac{tx}{ty} + (ty)^2 (tz) \text{tang } \left(\frac{ty}{tx} \right)$$

или въ

$$t^3 x^3 \sin \frac{x}{y} + t^3 y^2 z \text{tang } \frac{y}{x}$$

или

$$t^3 \left[x^3 \sin \frac{x}{y} + y^2 z \text{tang } \frac{y}{x} \right],$$

по сравненію съ данною функціей это есть $t^3 \cdot u$.

Предположимъ, что мы имѣемъ однородную функцію m -го измѣренія, именно

$$u = f(x, y, z),$$

пмножимъ всѣ переменныя на t , тогда по свойству однородныхъ функцій

$$t^m u = f(xt, yt, zt),$$

положимъ здѣсь

$$xt = x'; \quad yt = y'; \quad zt = z'.$$

тогда

$$(1) \quad t^m \cdot u = f(x', y', z').$$

Примемъ

$$f(x', y', z') = v$$

и замѣтимъ, что v есть такая же функція отъ x', y', z' , какъ u —функція отъ x, y, z . При такомъ положеніи выраженіе (1) имѣеть видъ

$$t^m u = v,$$

взявъ отъ этого выраженія производную по t , найдемъ

$$m t^{m-1} u = \frac{\partial v}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial t},$$

но такъ какъ

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = x; \quad \frac{\partial y'}{\partial t} = y; \quad \frac{\partial z'}{\partial t} = z,$$

то предыдущее принимаетъ видъ

$$m t^{m-1} u = \frac{\partial v}{\partial x'} \cdot x + \frac{\partial v}{\partial y'} \cdot y + \frac{\partial v}{\partial z'} \cdot z,$$

если примемъ здѣсь $t=1$, то v обратится въ u и переменныя $x' y' z'$ обратятся въ x, y, z . Такимъ образомъ при $t=1$ имѣемъ

$$(2) \quad m \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot z,$$

т. е. *сумма частныхъ производныхъ однородной функціи, умноженныхъ на соответствующія переменныя равна самой функціи умноженной на ея степень или измѣреніе.*

Эта теорема извѣстна въ анализѣ подъ именемъ теоремы *Фонтеня*: нѣкоторые неправильно называютъ ее теоремой *Эйлера*.

14. Если функция многих переменных дифференцирована, то ее частные производные являются в общем случае сами функциями тех же переменных, от которых зависела начальная функция, а потому от этой первой производной может быть взята вторая и дальнейшая производная, но при этом как и прежде дифференциалы независимых переменных должны считаться за величины постоянные и вторые дифференциалы этих независимых переменных должны быть принимаемы равными нулю.

Пусть дана функция $u = f(x, y, z)$, если от этой функции была взята частная производная по x , т. е. $\frac{\partial u}{\partial x}$, то эта последняя может содержать все три переменные x, y, z , потому от нея может быть взята новая производная по тому или другому переменному, напр. по y , т. е. может быть найдена

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial y}$$

что обыкновенно представляем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Легко показать, что порядок дифференцирования не влияет на результат, т. е. что можем от данной функции сначала взять производную по x , а потом от этой последней—производную по y , или же выполнить это дифференцирование в обратном порядке, и полученный результат будет один и тот же. Легко показать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, тогда изъ понятия о производной функции слѣдует, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim \left[\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right]$$

Если еще не перешли къ предѣлу, т. е. если Δx не считается обратившимся въ нуль, но бесконечно малымъ, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} + \epsilon,$$

гдѣ ϵ есть бесконечно малая величина, такая же какъ Δx .

Если въ этомъ равенствѣ дадимъ переменному y приращеніе Δy и потомъ зависящее отъ этого приращеніе производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ раздѣлимъ на Δy , то получимъ

$$(3) \quad \frac{\Delta \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\Delta y} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)}{\Delta x \Delta y} + \frac{\Delta \epsilon}{\Delta y}$$

Произведемъ то же самое съ данной функціей, но начнемъ операціи съ переменнаго y , тогда сначала получимъ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} + \epsilon_1,$$

гдѣ ϵ_1 обращается въ нуль вмѣстѣ съ Δy . Измѣняя въ этомъ выраженіи x на Δx , имѣемъ

$$(4) \quad \frac{\Delta \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y)}{\Delta y \Delta x} + \frac{\Delta \epsilon_1}{\Delta x}$$

Если въ выраженіяхъ (3) и (4) перейдемъ къ предѣлу, т. е. примемъ Δx и Δy равными нулю, то вмѣстѣ съ тѣмъ обратятся въ нули $\frac{\Delta \epsilon}{\Delta y}$ и $\frac{\Delta \epsilon_1}{\Delta x}$; ибо ϵ , каково бы не было y , есть вмѣстѣ съ Δy бесконечно малая величина, то же самое имѣетъ мѣсто относительно производной взятой отъ ϵ , но $\frac{\Delta \epsilon}{\Delta y}$ разнится отъ этой производной бесконечно мало; тоже самое слѣдуетъ сказать и относительно $\frac{\Delta \epsilon_1}{\Delta x}$. Но если въ предѣлѣ $\frac{\Delta \epsilon}{\Delta y}$ и $\frac{\Delta \epsilon_1}{\Delta x}$ обращаются въ нули, то въ остальныхъ частяхъ выраженія (3) и (4) сравниваются между собою. Итакъ въ предѣлѣ, т. е.

$$\lim \frac{\Delta \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\Delta y} = \lim \frac{\Delta \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\Delta x}$$

или

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x}$$

или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

этимъ подтверждается то, что результатъ дифференцированія не зависитъ отъ порядка дифференцированія.

Принимая это во вниманіе, легко составить дифференціалъ какого угодно порядка функции со многими переменными. Пусть для дифференцированія будетъ дана функция $z = f(x, y)$. Предполагая что x и y переменныя независимы, составляемъ полный дифференціалъ въ видѣ

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

при дифференцированіи во второй разъ составляемъ

$$\partial^2 z = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx \right)}{\partial x} dx + \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx \right)}{\partial y} dy + \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} dy \right)}{\partial x} dx + \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} dy \right)}{\partial y} dy.$$

ибо принимая x и y за независимыя переменныя, должны считать $\partial^2 x$, $\partial^2 y$ равными нулю. Выполняя указанныя здѣсь дифференцированія, легко получимъ

$$\partial^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

такъ какъ отъ порядка дифференцированія производная же зависитъ, то

$$\partial^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \quad (5)$$

Дифференцируя это еще разъ найдемъ

$$\begin{aligned} \partial^3 z = & \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 \right)}{\partial x} dx + \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 \right)}{\partial y} dy + 2 \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy \right)}{\partial x} dx \\ & + 2 \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy \right)}{\partial y} dy + \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \right)}{\partial x} dx + \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \right)}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

выполнивъ указанныя здѣсь дифференцированія, получимъ

$$\begin{aligned} \partial^3 z = & \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 \\ & + \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} dy^2 dx + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3, \end{aligned}$$

по той же причинѣ какъ прежде это приводится къ виду

$$\partial^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \partial x^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \partial x^2 \partial y + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \partial x \partial y^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \partial y^3.$$

очевидно, что въ послѣдовательныхъ дифференцированіяхъ будутъ входить биноміальные коэффициенты, а потому вообще

$$\partial^n z =$$

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} \partial x^n + n \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} \partial x^{n-1} \partial y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} \partial x^{n-2} \partial y^2 + \dots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n} \partial y^n,$$

что символически можно представить въ видѣ

$$\partial^n z = \left(\frac{1}{\partial x} \partial x + \frac{1}{\partial y} \partial y \right)^n \partial^n z,$$

также для функции $u = f(x, y, z)$ можно написать полный n -ый дифференціалъ въ видѣ

$$\partial^n u = \left(\frac{1}{\partial x} \partial x + \frac{1}{\partial y} \partial y + \frac{1}{\partial z} \partial z \right)^n \partial^n u.$$

Для поясненія этой теоріи на частномъ примѣрѣ составимъ второй полный дифференціалъ функции

$$z = x^{lg y} + y^{lg x}.$$

форма этого дифференціала опредѣляется выраженіемъ (5).

Прежде всего по данному выраженію составимъ частныя производныя

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Составляя частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$, мы должны будемъ дифференцировать первый членъ какъ степень, а второй какъ показательную функцию, ибо при этомъ частномъ дифференцированіи y принимаемъ за постоянную величину (мы считаемъ x и y переменными независимыми). Итакъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = lg y \cdot x^{lg y - 1} + \frac{y^{lg x}}{x} lg y.$$

Составляя частную производную по y , мы должны первый членъ дифференцировать какъ показательную функцию, а второй какъ степень, ибо

при этомъ дифференцированіи x принимается за постоянную величину.
Итакъ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^{lg y}}{y} \lg x + \lg x \cdot y^{lg x - 1}.$$

по этимъ производнымъ составимъ вторыя производныя

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \lg y (\lg y - 1) x^{lg y - 2} - \frac{1}{x^2} (y^{lg x} (\lg y)^2 - y^{lg x} \lg y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2} [x^{lg y} (\lg x)^2 - x^{lg y} \lg x] + \lg x [\lg x - 1] y^{lg x - 2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^{lg y - 1}}{y} + \lg x \lg y \frac{x^{lg y - 1}}{y} + \lg x \lg y \frac{y^{lg x - 1}}{x} + \frac{y^{lg x}}{xy}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{1}{x^2} [\lg y (\lg y - 1) x^{lg y} + y^{lg x} (\lg y)^2 - y^{lg x} \lg y] \\ &= \frac{1}{x^2} [\lg y (\lg y - 1) x^{lg y} + \lg y (\lg y - 1) y^{lg x}] = \frac{z}{x^2} \lg y (\lg y - 1). \end{aligned}$$

точно также найдемъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{z}{y^2} \lg x (\lg x - 1).$$

наконецъ производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{x^{lg y}}{xy} + \frac{\lg x \lg y}{xy} y^{lg x} + \frac{\lg x \lg y}{xy} x^{lg y} + \frac{y^{lg x}}{yx} \\ &= \frac{x^{lg y}}{xy} (1 + \lg x \lg y) + \frac{y^{lg x}}{xy} (1 + \lg x \lg y) \\ &= \frac{z}{xy} (1 + \lg x \lg y), \end{aligned}$$

а потому общее выраженіе (5) для разсматриваемаго случая имѣеть видъ

$$\partial^2 z = z \left[\lg y (\lg y - 1) \frac{\partial x^2}{x^2} + 2 (1 + \lg x \lg y) \frac{\partial x \partial y}{xy} + \lg x (\lg x - 1) \frac{\partial y^2}{y^2} \right].$$

Здѣсь считаемъ умѣстнымъ сказать нѣсколько словъ о производныхъ высшихъ порядковъ, взятыхъ отъ неявныхъ функцій.

На основаніи изложенныхъ соображеній мы можемъ находить высшія производныя неявныхъ функцій отъ многихъ переменныхъ, и про-

стѣйшій способъ состоитъ въ томъ, что мы составляемъ полный дифференціалъ той функции, частныя производныя которой хотимъ имѣть, и искомыя производныя являются тогда коэффициентами при различныхъ степеняхъ дифференціаловъ независимыхъ переменныхъ, и эти коэффициенты должны быть раздѣлены на известныя числовыя множители.

Пояснимъ эти соображенія на слѣдующемъ примѣрѣ.

Предположимъ, что даны слѣдующія зависимости между функцией z и переменными x, y и a

$$z = \varphi(x, a), \quad y = \psi(x, a)$$

и требуется опредѣлить частныя производныя $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Чтобы найти это, вычислимъ $\partial^2 z$ принимая ∂x и ∂y за постоянныя величины. Если составимъ этотъ дифференціалъ въ видѣ

$$(6) \quad \partial^2 z = A \partial x^2 + 2B \partial x \partial y + C \partial y^2,$$

то будемъ имѣть искомыя

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C.$$

Будемъ дифференцировать данныя уравненія и при этомъ примемъ x и y за главныя переменныя, а z и a за ихъ функции, тогда $\partial^2 x$ и $\partial^2 y$ мы должны принимать равными нулю, а $\partial^2 a$ за величину отъ нуля отличную.

По даннымъ уравненіямъ непосредственно составляемъ

$$(7) \quad \begin{aligned} \partial z &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \partial x + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \partial a, \\ \partial y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \partial x + \frac{\partial \psi}{\partial a} \partial a. \end{aligned}$$

первое изъ этихъ уравненій при второмъ дифференцированіи даетъ

$$(8) \quad \partial^2 z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial a} \partial x \partial a + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} \cdot \partial a^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \partial^2 a,$$

дифференцируя еще разъ второе изъ уравненій (7) и помня, что $\partial^2 y = 0$, получимъ

$$(9) \quad 0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \cdot \partial a} \partial x \partial a + \frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} \partial a^2 + \frac{\partial \psi}{\partial a} \partial^2 a.$$

исключимъ между уравненіями (7), (8) и (9) ∂a и $\partial^2 a$, тогда найдемъ $\partial^2 z$ представленный въ формѣ (6). Такимъ образомъ вопросъ будетъ рѣшенъ, и изъ составленнаго выраженія для $\partial^2 z$ найдутся вторыя производныя

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Этотъ же вопросъ можно рѣшить на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Возьмемъ отъ данныхъ уравненій производныя по x и при этомъ будемъ считать y какъ постоянную величину, тогда найдемъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x}.$$

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x}.$$

исключая изъ этихъ уравненій $\frac{\partial a}{\partial x}$, получимъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial a}}{\frac{\partial \psi}{\partial a}}, \tag{10}$$

примемъ это за нѣкоторую функцію $\varphi_1(x, a)$, такъ что

$$p = \varphi_1(x, a).$$

Дифференцируя тѣ же начальныя уравненія по y и принимая x за постоянную величину, будемъ умѣть

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y}.$$

$$1 = \frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y},$$

откуда выводимъ, исключая $\frac{\partial a}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial a}}{\frac{\partial \psi}{\partial a}} \tag{11}$$

и примемъ это за нѣкоторую функцію $\varphi_2(x, a)$, такъ что

$$q = \varphi_2(x, a),$$

производныя p и q суть функціи x и a ; для того чтобы получить искомыя производныя $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$, т. е. чтобы составить вторыя производныя отъ z , примемъ во вниманіе слѣдующее простое соображеніе; первоначально z была функціей x и a представленной въ видѣ

$$z = \varphi(x, a),$$

теперь принимаемъ p и q функціями тѣхъ же переменныхъ, т. е. считаемъ

$$p = \varphi_1(x, a); \quad q = \varphi_2(x, a).$$

слѣдовательно чтобы составить $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ достаточно въ выраженіяхъ (10) и (11) замѣнить φ чрезъ φ_1 , и тогда будемъ имѣть

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}}.$$

точно также чтобы составить $\frac{\partial q}{\partial x}$ и $\frac{\partial q}{\partial y}$ достаточно въ тѣхъ же выраженіяхъ (10) и (11) поставить φ_2 на мѣсто φ , и тогда найдемъ

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}},$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}},$$

такъ какъ

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

то возникающее отъ этого соотношеніе

$$\frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial a}}{\frac{\partial \psi}{\partial a}} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial a}}{\frac{\partial \psi}{\partial a}}.$$

представляет необходимое соотношение между производными φ_1 и φ_2 .

Чтобы привести въ окончательную форму производныя $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$ необходимо и достаточно выполнить дифференцированія функций φ_1 и φ_2 относительно x и a . Не останавливаясь много на этомъ, разовьемъ наиболѣе простую изъ этихъ производныхъ, именно $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ или $\frac{\partial q}{\partial y}$. Мы видѣли, что

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial a}}{\frac{\partial \psi}{\partial a}},$$

и что

$$\varphi_2(x, a) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial a}}{\frac{\partial \psi}{\partial a}}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial a} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}}{\frac{\partial \psi}{\partial a}} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial a}}{\frac{\partial \psi}{\partial a}} \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2}}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)^2},$$

а потому

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)^2} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial a}}{\frac{\partial \psi}{\partial a}} \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2}}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)^3}.$$

15. Говоря о дифференцированіи функций со многими переменными, мы должны здѣсь снова коснуться вопроса о замѣнѣ однихъ переменныхъ другими.

Пусть какъ прежде

$$y = F(x),$$

предположимъ, что каждое изъ переменныхъ x и y сами суть функции некоторыхъ переменныхъ u и t , такъ что

$$x = f(u, t), \quad y = \varphi(u, t), \tag{12}$$

такимъ образомъ мы имѣемъ три уравненія между четырьмя переменными x, y, u, t и можемъ три изъ нихъ по этимъ соотношеніямъ представить функциями четвертаго, ибо изъ этихъ трехъ уравненій можемъ напр. опредѣлить x, y, u въ функции четвертаго t . Требуется при этихъ условіяхъ выразить производныя $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ и т. д. въ функции $t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Возьмемъ отъ x и y представленныя въ видѣ (12) производныя по t . Замѣтимъ при этомъ, что въ x и y переменное t входитъ двояко, явно и въ зависимости отъ u , поэтому

$$(13) \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Взявъ вторыя производныя, имѣемъ

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

или

$$(14) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

точно также находимъ

$$(15) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Если мы принимаемъ

$$y = F(x).$$

т. е. считаемъ y функциею x , то

$$(16) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t},$$

откуда

$$(17) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}},$$

Взявъ отъ выраженія (16) еще разъ производную по t , имѣемъ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

исключая отсюда $\frac{\partial y}{\partial x}$ посредствомъ предыдущаго, имѣемъ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\frac{\partial x}{\partial t}} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2,$$

слѣдовательно

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^3}, \quad (18)$$

и теперь чтобы рѣшить нашъ вопросъ, стоитъ только въ выраженія (17) и (18) вмѣсто

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

вести ихъ выраженія (13), (14), (15).

Пояснимъ эти соображенія на частномъ примѣрѣ. Предположимъ, что дано

$$x = u + t; \quad y = u - t$$

и требуется вычислить $\frac{\partial y}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ въ функціи $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Изъ данныхъ соотношеній имѣемъ

$$\partial x = \partial u + \partial t; \quad \partial y = \partial u - \partial t,$$

$$\partial^2 x = \partial^2 u + \partial^2 t; \quad \partial^2 y = \partial^2 u - \partial^2 t,$$

отсюда по первымъ двумъ прямо находимъ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u - \partial t}{\partial u + \partial t}, \quad (19)$$

а такъ какъ на основаніи предыдущихъ уравненій

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u + \partial t}{\partial t}; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial u - \partial t}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u + \partial^2 t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u - \partial^2 t}{\partial t^2}.$$

то по формулѣ (18) составляемъ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{(\partial u + \partial t)(\partial^2 u - \partial^2 t) - (\partial u - \partial t)(\partial^2 u + \partial^2 t)}{(\partial u + \partial t)^2},$$

или

$$(20) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u \partial t - \partial^2 t \cdot \partial u}{(\partial u + \partial t)^2}.$$

Въ этой формулѣ не указано независимое переменное; если хотимъ, чтобы независимымъ переменнымъ было t , то должны считать $\partial^2 t = 0$ (ибо для независимаго переменнаго первый дифференціалъ есть постоянная величина, а второй—нуль).

Выраженіе (19) даетъ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial t} - 1}{\frac{\partial u}{\partial t} + 1}.$$

Выраженіе (20) при условіи $\partial^2 t = 0$ даетъ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u \cdot \partial t}{(\partial u + \partial t)^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + 1\right)^2}.$$

Если z есть нѣкоторая функція x и y , а эти послѣднія сами суть функціи двухъ другихъ переменныхъ u и t , такъ что

$$x = f(u, t), \quad y = \varphi(u, t),$$

то мы всегда можемъ производныя $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и т. д. выразить въ функціи u , t , $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ и т. д.

По сказанной зависимости для этого прежде всего имѣемъ

$$(21) \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

замѣтимъ при этомъ, что такъ какъ $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ вообще сами суть функціи x и y то они должны по этой зависимости считаться функціями u и t . Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \\ &+ \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

также составимъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t \cdot \partial u} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial t}\right) \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial t \cdot \partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial t \cdot \partial u}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 \\ &+ \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \end{aligned}$$

и т. д.

Послѣ этого уравненія (21), линейныя относительно $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ даютъ возможность выразить эти производныя функціями $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ и частныхъ производныхъ отъ x и y , которыя суть явныя функціи отъ t и u .

При подобныхъ преобразованіяхъ не надо забывать, что частная производная, напр. $\frac{\partial z}{\partial x}$, какъ производная функціи двухъ переменныхъ x и y , по основному опредѣленію есть производная, получаемая въ томъ предположеніи, что при этомъ дифференцированіи z рассматривается какъ функція одного x , а y считается при этомъ постоянной величиной. Если мы замѣнимъ y функціей $\varphi(u, x)$, принимая за новыя независимыя переменныя x и u , то новая частная производная, взятая отъ z относительно

x , будетъ производной z по x и при этомъ дифференцированіи u считается постоянной.

Пусть напр. $z = F(x, y)$; тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}$; но послѣ замѣны переменнѣй y имѣемъ

$$z = F[x, \varphi(x, u)].$$

поэтому послѣ преобразованія частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ будетъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Замѣну переменнѣхъ можно еще дѣлать на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Данный дифференціалъ и преобразованный по новымъ переменнѣмъ тождественно равны между собой, и такое сравненіе даетъ намъ возможность рѣшить извѣстный вопросъ преобразованія.

Чтобы пояснить это рѣшимъ слѣдующій вопросъ, предположимъ, что между переменнѣми x, y, z (напр. тремя координатами точки поверхности) и переменнѣми ξ, η, ζ , представляющими координаты, отнесенныя къ новой системѣ осей существуетъ зависимость, представляемая тремя уравненіями. Требуется вычислить производныя $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ въ функціи производныхъ $\frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}$.

Для первоначальной системы переменнѣхъ, рассматривая z какъ функцію x и y , имѣемъ

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \partial y,$$

предполагая теперь, что z выражено въ функціи переменнѣхъ ξ, η, ζ , находимъ

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \partial \xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \partial \eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \cdot \partial \zeta.$$

Съ другой стороны представимъ себѣ, что зависимость между z и новыми переменнѣми представляется въ видѣ

$$z = f(\xi, \eta, \zeta).$$

гдѣ

$$\zeta = \varphi(\xi, \eta),$$

ТОГДА

$$\begin{aligned} \partial z &= \frac{\partial z}{\partial \xi} \partial \xi + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \partial \xi \\ &+ \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \partial \eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \cdot \partial \eta. \end{aligned} \tag{22}$$

Предполагается, что переменныя x и y представлены функциями ξ, η, ζ въ видѣ

$$\begin{aligned} x &= f(\xi, \eta, \zeta), \\ y &= f_1(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned}$$

гдѣ какъ прежде

$$\zeta = \varphi(\xi, \eta).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \partial x &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \partial \xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \partial \eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \partial \zeta, \\ \partial y &= \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \partial \xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \partial \eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \cdot \partial \zeta. \end{aligned}$$

Внося это въ выраженіе

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \partial y,$$

имѣемъ

$$\begin{aligned} \partial z &= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \partial \xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \partial \eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \partial \zeta \right), \\ &+ \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \partial \xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \partial \eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \cdot \partial \zeta \right), \end{aligned} \tag{23}$$

но такъ какъ

$$\zeta = \varphi(\xi, \eta),$$

то

$$\partial \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \cdot \partial \xi + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \cdot \partial \eta.$$

Внося это выраженіе $\partial \zeta$ въ (23), находимъ

$$\begin{aligned} \partial z &= \frac{\partial z}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) \partial \xi + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \partial \eta \right\} \\ &+ \frac{\partial z}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) \partial \xi + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \partial \eta \right\}. \end{aligned}$$

Это выраженіе тождественно съ выраженіемъ (22), а потому сравненіе коэффициентовъ при одинакихъ дифференціалахъ въ томъ и другомъ дастъ

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right\} + \frac{\partial z}{\partial y} \left\{ \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right\},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \left\{ \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right\} + \frac{\partial z}{\partial y} \left\{ \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right\},$$

посредствомъ этихъ уравненій производныя $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ могутъ быть выражены въ функціяхъ производныхъ $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$, или наоборотъ.

Пояснимъ эти соображенія на частныхъ примѣрахъ. Предположимъ, что дана такая функція u переменныхъ x, y, z

$$u = px + qy - z.$$

требуется опредѣлить производныя u по p и q . Здѣсь мы принимаемъ

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y};$$

и кромѣ того положимъ

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Полный дифференціалъ разсматриваемой функціи есть

$$du = p \cdot dx + q \cdot dy + x \cdot dp + y \cdot dq - dz.$$

Мы принимаемъ, что

$$z = f(x, y),$$

поэтому

$$du = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = p \cdot dx + q \cdot dy$$

и слѣдовательно предыдущій полный дифференціалъ приводится къ

$$du = x \cdot dp + y \cdot dq,$$

поэтому

$$(24) \quad \frac{\partial u}{\partial p} = x; \quad \frac{\partial u}{\partial q} = y,$$

такъ рѣшается задача о первыхъ производныхъ.

Чтобы получить вторыя производныя отъ u по p и q , помня значеніе этихъ величинъ, составляемъ

$$\partial p = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \partial y = r \cdot \partial x + s \partial y,$$

$$\partial q = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} \cdot \partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \partial y = s \cdot \partial x + t \partial y.$$

изъ этихъ двухъ уравненій выводимъ

$$\partial x = \frac{t \cdot \partial p - s \cdot \partial q}{rt - s^2}; \quad \partial y = \frac{r \cdot \partial q - s \cdot \partial p}{rt - s^2}. \quad (25)$$

Изъ выраженій (24) непосредственно находимъ

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}; \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\partial^2 u}{\partial p \cdot \partial q}; \quad \frac{\partial y}{\partial q} = \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}$$

и кромѣ того изъ выраженій (25) непосредственно имѣемъ

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{t}{rt - s^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{-s}{rt - s^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial q} = \frac{r}{rt - s^2}$$

сѣдовательно, сравнивая это съ предыдущими выраженіями, получаемъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{t}{rt - s^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p \cdot \partial q} = \frac{-s}{rt - s^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{r}{rt - s^2}$$

Относительно замѣны переменныхъ интересный случай представляютъ такъ называемые дифференціальныя параметры перваго и втораго порядка.

16. Если V есть функція трехъ переменныхъ x, y, z , то выраженія вида

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

называются въ прикладной математикѣ дифференціальными параметрами первого и второго порядка.

Предположимъ, что переменныя x, y, z замѣняются новыми переменными t, u, v , находящимися въ такой зависимости отъ первоначальныхъ

$$(26) \quad \begin{aligned} x &= a t + b u + c v, \\ y &= a' t + b' u + c' v, \\ z &= a'' t + b'' u + c'' v. \end{aligned}$$

Если постоянные коэффициенты $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$ удовлетворяютъ условіямъ

$$(27) \quad \begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1; & ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1; & bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1; & ac + a'c' + a''c'' &= 0, \end{aligned}$$

то понятно, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + u^2 + v^2$$

и тогда такое преобразование называется ортогональнымъ.

Чтобы выполнить преобразование вычислимъ по этимъ соотношеніямъ производныя $\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial u}, \frac{\partial V}{\partial v}, \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ и т. д.

Если $V = f(x, y, z)$, и въ свою очередь

$$x = \varphi(u, t, v), \quad y = \varphi_1(t, u, v), \quad z = \varphi_2(t, u, v),$$

то

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t},$$

но по выраженіямъ (26) заключаемъ, что

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = a'; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = a''.$$

слѣдовательно

$$(28) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = a \frac{\partial V}{\partial x} + a' \frac{\partial V}{\partial y} + a'' \frac{\partial V}{\partial z}$$

и точно также

$$(29) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u} &= b \frac{\partial V}{\partial x} + b' \frac{\partial V}{\partial y} + b'' \frac{\partial V}{\partial z}, \\ \frac{\partial V}{\partial v} &= c \frac{\partial V}{\partial x} + c' \frac{\partial V}{\partial y} + c'' \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}$$

Возьмемъ отъ выражения (28) вторую производную по t , тогда получимъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= a \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \right) \\ &+ a' \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \right) \\ &+ a'' \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \cdot \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

но мы знаемъ, что

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = a'; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = a'',$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= a \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} a + \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} a' + \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial z} a'' \right) \\ &+ a' \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} a + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} a' + \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial z} a'' \right) \\ &+ a'' \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial z} a + \frac{\partial^2 V}{\partial z \cdot \partial y} a' + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} a'' \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a'^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a''^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{30} \\ &+ 2 a a' \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} + 2 a' a'' \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial z} + 2 a a'' \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial z}, \end{aligned}$$

точно также найдемъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} &= b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b'^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + b''^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ &+ 2 b b' \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} + 2 b' b'' \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial z} + 2 b b'' \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial z}, \tag{81} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} &= c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + c'^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + c''^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ &+ 2 c c' \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} + 2 c' c'' \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial z} + 2 c c'' \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial z}. \end{aligned}$$

Такъ какъ предполагаемъ, что и система координатъ x, y, z и система t, u, v отнесены къ прямоугольнымъ осямъ, то кромѣ выраженій (27) имѣемъ еще

$$(32) \quad \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1; & aa' + bb' + cc' &= 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1; & a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1; & a''a + b''b + c''c &= 0, \end{aligned}$$

помня это, возвысимъ въ квадратъ выраженія (28) и (29) и сложимъ ихъ, тогда найдемъ

$$(33) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2;$$

подобнымъ же образомъ сумма выраженій (30) и (31) при уравненіяхъ (32) даетъ

$$(34) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

по этимъ выраженіямъ (33) и (34) заключаемъ, что форма дифференціаль-ныхъ параметровъ при ортогональной подстановкѣ въ замѣнѣ однихъ перемѣнныхъ другими не измѣняется.

Прослѣдимъ еще одно довольно сложное преобразование дифференціаль-ныхъ параметровъ. Замѣнимъ въ нихъ переменныя x, y, z , принимае-мыя за прямолинейныя координаты, координатами полярными. Зависимость между тѣми и другими координатами представляется въ видѣ

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi, \\ y &= \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi, \\ z &= \rho \cdot \cos \theta, \end{aligned}$$

эту замѣну переменныхъ проще всего сдѣлать въ два приема, сначала преобразовать координаты x и y , замѣняя ихъ чрезъ r и ϕ , т. е. считая

$$x = r \cdot \cos \phi; \quad y = r \cdot \sin \phi;$$

и z оставить безъ переменны, а потомъ сдѣлать второе преобразование, принимая $r = \rho \cdot \sin \theta$; $z = \rho \cdot \cos \theta$ и оставивъ безъ измѣненія въ прежде полученномъ выраженіи координату ψ .

Для перваго преобразования имѣемъ

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r},$$

т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \cos \psi + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \sin \psi, \quad (35)$$

также

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi},$$

но

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = -r \cdot \sin \psi; \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = r \cdot \cos \psi,$$

следовательно

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = -\frac{\partial V}{\partial x} r \cdot \sin \psi + \frac{\partial V}{\partial y} r \cdot \cos \psi. \quad (36)$$

Далѣ, изъ уравненія (35) находимъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial r} \cos \psi + \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \cos \psi + \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} \frac{\partial x}{\partial r} \sin \psi + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial r} \sin \psi \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cos^2 \psi + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} \sin \psi \cdot \cos \psi + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \sin^2 \psi, \quad (37)$$

точно также изъ (36) получаемъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} &= -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \psi} r \sin \psi - \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} \frac{\partial y}{\partial \psi} \sin \psi - \frac{\partial V}{\partial x} r \cdot \cos \psi \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} \frac{\partial x}{\partial \psi} r \cdot \cos \psi + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \psi} r \cdot \cos \psi - \frac{\partial V}{\partial y} r \cdot \sin \psi \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} r^2 \cdot \sin^2 \psi - 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} r^2 \cdot \cos \psi \sin \psi \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} r^2 \cdot \cos^2 \psi - \frac{\partial V}{\partial x} r \cdot \cos \psi - \frac{\partial V}{\partial y} r \cdot \sin \psi. \quad (38) \end{aligned}$$

Помножая уравненіе (35) на $r \cdot \cos \psi$, уравненіе (36) на $\sin \psi$, послѣ вычитанія второго изъ перваго имѣемъ

$$\frac{\partial V}{\partial r} r \cdot \cos \psi - \frac{\partial V}{\partial \psi} \cdot \sin \psi = r \cdot \frac{\partial V}{\partial x},$$

подобно этому изъ тѣхъ же уравненій находимъ

$$\frac{\partial V}{\partial r} r \cdot \sin \psi + \frac{\partial V}{\partial \psi} \cos \psi = r \cdot \frac{\partial V}{\partial y},$$

слѣдовательно

$$(39) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial r} \cos \psi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \psi} \cdot \sin \psi \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial r} \sin \psi + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \psi} \cdot \cos \psi \end{aligned}$$

откуда прямо выводимъ

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2$$

Помножимъ уравненіе (37) на r^2 и сложимъ съ уравненіемъ (38), тогда найдемъ

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - r \cdot \cos \psi \frac{\partial V}{\partial x} - r \cdot \sin \psi \frac{\partial V}{\partial y}$$

но уравненія (39) даютъ

$$\frac{\partial V}{\partial x} r \cdot \cos \psi + \frac{\partial V}{\partial y} r \cdot \sin \psi = r \frac{\partial V}{\partial r}$$

слѣдовательно

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + r \frac{\partial V}{\partial r} = r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

откуда

$$(40) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$$

До сихъ поръ производныя $\frac{\partial V}{\partial z}$ и $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ остаются не преобразованными, слѣдовательно послѣ выполненнаго преобразованія дифференціальныя параметры принимаютъ видъ

$$(41) \quad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Имѣя это, замѣнимъ переменныя z и r чрезъ ρ и θ , оставляя ψ безъ переменны, а слѣдовательно останутся безъ переменны и производныя

$$\frac{\partial V}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}.$$

Новыя переменныя ρ и θ связаны съ r и z такимъ образомъ

$$z = \rho \cdot \cos \theta; \quad r = \rho \sin \theta,$$

поэтому

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta}$$

или

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial r} \sin \theta \tag{42}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = - \frac{\partial V}{\partial z} \rho \cdot \sin \theta + \frac{\partial V}{\partial r} \rho \cos \theta.$$

отсюда

$$\rho \cdot \cos \theta \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\partial V}{\partial \theta} \sin \theta = \rho \frac{\partial V}{\partial z} \tag{43}$$

$$\rho \cdot \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \cos \theta = \rho \frac{\partial V}{\partial r}$$

посредствомъ этого составляемъ

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 \tag{44}$$

по уравненіямъ (42) составляемъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial \rho} \cos \theta + \frac{\partial^2 V}{\partial z \cdot \partial r} \frac{\partial r}{\partial \rho} \cos \theta + \frac{\partial^2 V}{\partial z \cdot \partial r} \frac{\partial r}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial \rho} \sin \theta,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial \theta} \rho \cdot \sin \theta - \frac{\partial^2 V}{\partial z \cdot \partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \rho \cdot \sin \theta + \frac{\partial^2 V}{\partial r \cdot \partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} \rho \cos \theta$$

$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \rho \cos \theta - \frac{\partial V}{\partial z} \rho \cdot \cos \theta - \frac{\partial V}{\partial r} \rho \cdot \sin \theta$$

или

$$(45) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial r} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \sin^2 \theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \rho^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial r} \rho^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \rho^2 \cos^2 \theta$$

$$- \frac{\partial V}{\partial z} \rho \cdot \cos \theta - \frac{\partial V}{\partial r} \rho \cdot \sin \theta.$$

Помноживъ первое изъ этихъ уравненій на ρ^2 и сложивъ со вторымъ, имѣемъ

$$(46) \quad \rho^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \rho^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \rho^2 - \frac{\partial V}{\partial z} \rho \cos \theta - \frac{\partial V}{\partial r} \rho \cdot \sin \theta,$$

По уравненіямъ (43) находимъ

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} \sin \theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} \cos \theta$$

откуда

$$\frac{\partial V}{\partial z} \rho \cdot \cos \theta = \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \cos^2 \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} \rho \cdot \sin \theta = \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \sin^2 \theta - \frac{\partial V}{\partial \theta} \sin \theta \cdot \cos \theta$$

складывая это, имѣемъ

$$\rho \frac{\partial V}{\partial z} \cos \theta + \rho \frac{\partial V}{\partial r} \sin \theta = \rho \frac{\partial V}{\partial \rho}$$

слѣдовательно уравненіе (46) даетъ

$$(47) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}.$$

Исключая изъ уравненій (42) производную $\frac{\partial V}{\partial z}$, имѣемъ

$$(48) \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Внося выражение (44) въ первое изъ выражений (41), имѣемъ

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2$$

но $r = \rho \cdot \sin \theta$, а потому окончательно преобразованное выражение дифференціального параметра перваго порядка будетъ

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2$$

Внося выражение (47) во второе изъ выражений (41), имѣемъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$$

наконецъ внося сюда вмѣсто $\frac{\partial V}{\partial r}$ ея величину по формулѣ (48), находимъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{r \cdot \rho} \frac{\partial V}{\partial \theta},$$

а такъ какъ $r = \rho \sin \theta$, то это принимаетъ видъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \cdot \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{\cotg \theta}{\rho^2} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

это и есть окончательно преобразованное выражение дифференціального параметра втораго порядка.

V.

Детерминанты, ихъ главные свойства.

17. Когда мы рѣшаемъ систему линейныхъ уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ равно числу уравненій, тогда формулы, которыми представляются неизвѣстныя (въ функции коэффициентовъ, всѣ имѣютъ общаго знаменателя, этотъ знаменатель называется детерминантомъ или опредѣлителемъ системы коэффициентовъ.

Такъ, если имѣемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными

$$ax + by = c,$$

$$a'x + b'y = c',$$

то изъ этихъ уравненій находимъ

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}; \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Здѣсь двучленъ $ab' - a'b$ есть детерминантъ, онъ по большей части представляется въ видѣ

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Такой детерминантъ называется детерминантомъ 2-го порядка.

Если даны три линейныя уравненія съ тремя неизвѣстными, именно:

$$ax + by + cz = f,$$

$$a_1x + b_1y + c_1z = f_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = f_2,$$

то рѣшая эти уравненія относительно x, y, z , найдемъ, что соответствующій имъ детерминантъ третьяго порядка есть

$$ab_1c_2 - ab_2c_1 + a_1b_2c - a_1bc_2 + a_2bc_1 - a_2b_1c, \quad (1)$$

его, подобно предыдущему, будемъ представлять въ видѣ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

иногда детерминантъ изображается въ видѣ суммы произведеній элементовъ расположенныхъ по діагонали. Последний детерминантъ можно по этому способу представить въ формѣ

$$\sum \pm a b_1 c_2$$

подобнымъ же образомъ детерминантъ n -го порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & u_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \dots & u_n \end{vmatrix} \quad (2)$$

сокращенно представится въ видѣ

$$\sum \pm a_1 b_2 c_2 \dots u_n.$$

Разсматривая детерминантъ (1) третьяго порядка, мы можемъ указать такой способъ его составленія. Во всѣхъ шести членахъ детерминанта послѣдовательность буквъ a, b, c есть алфавитная; поэтому для составленія детерминанта напомнимъ произведеніе abc . Для распредѣленія указателей сначала оставимъ первую букву безъ указателя, второй буквѣ дадимъ указателя 1, третьей—2. Такимъ образомъ, получимъ первый положительный членъ. Перемѣстивъ указатели двухъ послѣднихъ буквъ, получимъ второй, отрицательный членъ. Дадимъ первой буквѣ въ произведеніи abc указатель 1, второй—указатель 2, третью букву оставимъ безъ указателя, такимъ образомъ, составится третій, положительный членъ, изъ него черезъ перемѣщеніе указателей двухъ послѣднихъ буквъ составится четвертый, отрицательный членъ. Наконецъ въ произведеніи abc первой буквѣ дадимъ указателя 2, вторую оставимъ безъ указателя и третей

буквъ припишемъ указатель 1, такъ найдется пятый, положительный членъ; изъ него перемѣщеніями указателей двухъ послѣднихъ буквъ составитъ шестой, отрицательный членъ.

Изъ способа составленія опредѣлителей, напр. опредѣлителя (1) третьяго порядка видно, что всякій опредѣлитель можно представить въ видѣ суммы членовъ содержащихъ множителями элементы первого столба или колонки (при другомъ расположеніи того же детерминанта этими общими множителями будутъ элементы первой горизонтальной строки). Такъ, напр., детерминантъ (1) третьяго порядка, можетъ быть представленъ въ видѣ суммы

$$a (b' c'' - b'' c') + a' (b'' c - b c'') + a'' (b c' - b' c)$$

замѣтимъ, что въ этой суммѣ при каждомъ элементѣ первого столба состоятъ множителями детерминанты, но порядокъ этихъ детерминантовъ на единицу ниже порядка данного детерминанта. Эти детерминанты множители называются минорами данного детерминанта; сумма же представляетъ разложеніе детерминанта на миноры по элементамъ первой колонки. Точно также детерминантъ можетъ быть разложенъ на миноры по элементамъ горизонтальной строки.

Детерминантъ R (2), n -го порядка разложенный на миноры по элементамъ первого столба будетъ

$$(3) \quad a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n = R$$

гдѣ напримѣръ

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & \dots & u_2 \\ b_3 & c_3 & \dots & u_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & c_n & \dots & u_n \end{vmatrix}$$

какъ видимъ, этотъ опредѣлитель-миноръ получается изъ данного опредѣлителя, если въ этомъ послѣднемъ исключимъ первую колонку и первую строку. Вообще каждому элементу данного детерминанта соответствуетъ свой миноръ, получающійся изъ данного устраненіемъ той строки и того столба, которымъ принадлежитъ этотъ элементъ.

Изъ этого вытекаютъ слѣдующія свойства детерминантовъ.

1) Если всѣ элементы одного изъ столбцовъ, или одной изъ строкъ суть нули, то и самый детерминантъ равенъ нулю.

2) Если всё элементы одного изъ столбовъ, или одной изъ строкъ помножимъ на какую нибудь величину, то на этотъ множитель помножится весь детерминантъ.

Кромѣ этихъ свойствъ детерминантовъ укажемъ еще на слѣдующія.

1) Детерминантъ сохраняетъ абсолютную величину, но измѣняетъ знакъ, если два какіе нибудь столба будутъ перемѣщены одинъ на мѣсто другого. Такъ напр.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & u_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & u_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 & \dots & u_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \dots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_n & c_n & \dots & u_n \end{vmatrix}$$

это слѣдуетъ изъ того, что слагаемые новаго детерминанта по абсолютной величинѣ остаются тѣми же самыми произведеніями какъ прежде; но тотъ членъ, который въ новомъ опредѣлителѣ есть главный (составленный изъ элементовъ діагонали) и, слѣдовательно, берется со знакомъ плюсъ, получается изъ главнаго члена даннаго детерминанта простой перестановкой двухъ буквъ, слѣдовательно, равный ему членъ даннаго опредѣлителя имѣетъ знакъ обратный. Отсюда слѣдуетъ, что и остальные члены обоихъ детерминантовъ, какъ получающіеся изъ главнаго, должны при одинакихъ абсолютныхъ величинахъ имѣть различные знаки.

2) Величина детерминанта не мѣняется, если строки будутъ замѣнены столбами и обратно, но при этомъ послѣдовательность тѣхъ и другихъ должна быть сохранена. Такимъ образомъ имѣемъ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & u_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & u_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{vmatrix}$$

Въ самомъ дѣлѣ, группы членовъ, изъ которыхъ составляются слагаемая, для обоихъ детерминантовъ одни и тѣ же (диагонали и главные члены одинакіе), а потому абсолютныя величины группъ одинаковыя, а равенство главныхъ членовъ показываетъ что и знаки равныхъ членовъ должны быть одинакіе.

3) Опредѣлитель равняется нулю, если въ немъ элементы двухъ какихъ нибудь столбовъ послѣдовательно равны между собою. Такъ напр.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & u_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & u_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & u_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & u_n \end{vmatrix} = 0$$

если

$$a_1 = c_1, a_2 = c_2 \dots a_n = c_n$$

Это слѣдуетъ изъ того, что при такомъ условіи отъ перемѣщенія одинакихъ столбовъ одного на мѣсто другаго, абсолютная величина детерминанта сохраняется, но онъ долженъ мѣнять свой знакъ. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & u_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & u_n \end{vmatrix}$$

то по одному изъ выше разсмотрѣнныхъ свойствъ

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 & \dots & u_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 & \dots & u_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 & \dots & u_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & b_n & a_n & \dots & u_n \end{vmatrix} = -R$$

но такъ какъ по предположенію

$$a_1 = c_1, a_2 = c_2 \dots a_n = c_n$$

то

$$R = -R \text{ или } 2R = 0$$

слѣдовательно

$$R = 0.$$

4) Если въ какомъ либо столбѣ всѣ элементы за исключеніемъ одного равны нулю, то такой детерминантъ обращается въ произведеніе элемента отличнаго отъ нуля на соответствующій миноръ. Это слѣдуетъ изъ выраженія (3). Въ самомъ дѣлѣ если всѣ a_i , гдѣ $i = 1 \dots n$, за исключеніемъ одного a_k равны нулю, то изъ строки (3) остается

$$a_k A_k = R.$$

линейныхъ опредѣленныхъ уравненій, но такъ какъ въ этомъ случаѣ $M_{\xi} = 0$ $M_{\eta} = 0 \dots M_{\tau} = 0$ ибо вторыя части $v_0 v_1 \dots v_{-1}$ въ этомъ случаѣ должны быть замѣнены нулями, то рѣшенія представляются въ видѣ

$$\xi = \frac{0}{R}; \quad \eta = \frac{0}{R} \dots \tau = \frac{0}{R}$$

или

$$\xi R = 0; \quad \eta R = 0 \dots \tau R = 0$$

но такъ какъ $\xi, \eta \dots \tau$ отличны отъ нуля, то этому удовлетворимъ полагая

$$R = 0.$$

Это уравненіе выведено при допущеніи, что всѣ уравненія совмѣстны; оно не содержитъ неизвѣстныхъ, а представляетъ связь между коэффициентами, поэтому оно должно считаться искомымъ условіемъ совмѣстности данныхъ уравненій.

Итакъ чтобы представить условіе совмѣстности n уравненій съ $n - 1$ неизвѣстными (или системы n однородныхъ уравненій съ n неизвѣстными) слѣдуетъ приравнять нулю детерминантъ, составленный изъ всѣхъ коэффициентовъ данныхъ уравненій.

Понятно также, что какими бы значеніями неизвѣстныхъ $\xi, \eta \dots s$ не удовлетворялось всякое изъ системы (8) однородныхъ уравненій, оно будетъ удовлетворяться и произведеніями этихъ значеній на одну и ту же произвольную величину. Поэтому изъ однородныхъ уравненій не опредѣляются самыя неизвѣстныя, а могутъ быть найдены только отношенія ихъ, или величины пропорціональныя этимъ неизвѣстнымъ.

19. Выведемъ правило перемноженія детерминантовъ, но при этомъ будемъ разсматривать только детерминанты третьяго порядка и заключеніе распространимъ на детерминанты вообще n -го порядка.

Возьмемъ систему уравненій

$$(9) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= r, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= s, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= t. \end{aligned}$$

пусть постоянные члены этихъ уравненій, т. е. r, s, t сами удовлетворяютъ уравненіямъ

$$(10) \quad \begin{aligned} a_1 r + \beta_1 s + \gamma_1 t &= \lambda, \\ a_2 r + \beta_2 s + \gamma_2 t &= \mu, \\ a_3 r + \beta_3 s + \gamma_3 t &= \nu, \end{aligned}$$

исключимъ отсюда r, s, t посредствомъ (9), тогда найдемъ

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z &= \lambda, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z &= \mu, \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z &= \nu, \end{aligned} \tag{11}$$

составимъ для этихъ уравненій детерминантъ изъ коэффициентовъ и положимъ

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = R.$$

Слѣдовательно по уравненіямъ (11) находимъ

$$x = \frac{M_x}{R}, \quad y = \frac{M_y}{R}, \quad z = \frac{M_z}{R}, \tag{12}$$

гдѣ M_x получается изъ R черезъ подстановку λ, μ, ν вмѣсто A_1, A_2, A_3 .

Чтобы рѣшить уравненія (10) относительно r, s, t составляемъ детерминантъ

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = Q,$$

тогда изъ этихъ уравненій находимъ

$$r = \frac{N_r}{Q}, \quad s = \frac{N_s}{Q}, \quad t = \frac{N_t}{Q}.$$

Наконецъ система (9), по внесеніи въ нее послѣднихъ величинъ r, s, t , принимаетъ видъ

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= \frac{N_r}{Q}, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= \frac{N_s}{Q}, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= \frac{N_t}{Q}. \end{aligned}$$

Если составимъ для нея детерминантъ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = P,$$

то найдемъ

$$x = \frac{V_x}{P}; \quad y = \frac{V_y}{P}; \quad z = \frac{V_z}{P},$$

но многочлены $V_x V_y V_z$ имѣютъ общаго дѣлителя Q и могутъ быть представлены въ видѣ

$$V_x = \frac{U_x}{Q}; \quad V_y = \frac{U_y}{Q}; \quad V_z = \frac{U_z}{Q},$$

такъ, что

$$x = \frac{U_x}{PQ}; \quad y = \frac{U_y}{PQ}; \quad z = \frac{U_z}{PQ}.$$

Эти значенія первоначальныхъ неизвѣстныхъ тождественны съ ихъ значеніями (12), а потому знаменатели въ тѣхъ и другихъ должны быть равны, слѣдовательно

$$R = PQ$$

или

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

откуда заключаемъ, что произведеніе двухъ детерминантовъ одного и того же порядка есть детерминантъ того же порядка какъ производители въ отдѣльности, и при томъ элементы въ детерминантѣ, происшедшемъ отъ перемноженія, суть суммы произведеній элементовъ множителей. Именно элементъ m -го столба и n -ой строки равенъ суммѣ произведеній элементовъ m -ой строки одного множителя на соотвѣтствующіе элементы n -ой строки другого.

Напримѣръ

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} am + bn, & cm + dn \\ ap + bq, & cp + dq \end{vmatrix}$$

въ множителяхъ строки могутъ быть принимаемы за колонки и обратно, поэтому предыдущее представляется въ видѣ

$$\begin{vmatrix} am + cp, & bm + dq \\ an + cq, & bn + dq \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} am + bp, & cm + dp \\ an + bq, & cn + dq \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} am + cp, & bm + dn \\ ar + cq, & br + dq \end{vmatrix}$$

20. Если мы имѣемъ линейную функцію n переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n вида

$$u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (13)$$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_n суть количества постоянныя, то

$$du = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n$$

и слѣдовательно

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = a_1; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = a_2 \dots \frac{\partial u}{\partial x_n} = a_n$$

и мы можемъ написать выраженія (13) въ видѣ

$$u = \frac{\partial u}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} x_n \quad (1)$$

Имѣя это въ виду, обратимся къ детерминанту R , который по элементамъ перваго столба разлагается на миноры A_1, A_2, \dots, A_n въ видѣ

$$R = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n$$

здѣсь A_k не зависитъ отъ a_k , ибо этотъ множитель въ составъ минора A_k не входитъ, а потому если будемъ дифференцировать R по a_k , то должны считать A_k за постоянную величину. Слѣдовательно

$$\frac{\partial R}{\partial a_k} = A_k \quad (14)$$

Миноръ, также какъ и начальный детерминантъ можетъ быть разложенъ на вторичныя миноры.

Предположимъ, что миноръ A_k разложенъ по элементамъ горизонтальной строки и имѣетъ видъ

$$A_k = b_i B_i + c_i C_i + \dots + l_i L_i + \dots + u_i U_i \quad (15)$$

каждый изъ элементовъ не входитъ въ соответствующій ему миноръ, слѣ-

¹⁾ Это прямо можемъ написать по теоремѣ Фонтена объ однородныхъ функціяхъ, ибо u есть линейная функція, т. е. функція перваго измѣренія.

довательно

$$\frac{\partial A_k}{\partial l_i} = L_i$$

а по уравненію (14) это представляется въ видѣ

$$(16) \quad L_i = \frac{\partial^2 R}{\partial a_k \cdot \partial l_i}$$

такимъ образомъ выраженію (15), обращая вниманіе на выраженіе (14) и (16), можно дать видѣ

$$(17) \quad \frac{\partial R}{\partial a_k} = b_i \frac{\partial^2 R}{\partial a_k \cdot \partial b_i} + c_i \frac{\partial^2 R}{\partial a_k \cdot \partial c_i} + \dots + u_i \frac{\partial^2 R}{\partial a_k \cdot \partial u_i}$$

Чтобы яснѣ представить собѣ правило дифференцірованія определителей, представимъ детерминантъ n -го порядка въ слѣдующемъ видѣ

$$(18) \quad R = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \dots & a_1^{(n)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \dots & a_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & \dots & a_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Такимъ образомъ здѣсь нижній знакъ характеризуетъ строку, есть ея номеръ, а верхній знакъ показываетъ номеръ или мѣсто колонки.

Разлагая этотъ детерминантъ по элементамъ горизонтальной строки, мѣсто которой указывается числомъ i имѣемъ

$$R = a_i^{(1)} A_i^{(1)} + a_i^{(2)} A_i^{(2)} + \dots + a_i^{(n)} A_i^{(n)}$$

но такъ какъ

$$A_i^{(r)} = \frac{\partial R}{\partial a_i^{(r)}}$$

то

$$(19) \quad R = a_i^{(1)} \frac{\partial R}{\partial a_i^{(1)}} + a_i^{(2)} \frac{\partial R}{\partial a_i^{(2)}} + \dots + a_i^{(n)} \frac{\partial R}{\partial a_i^{(n)}}$$

Разлагая тотъ же детерминантъ по элементамъ колонки съ указателемъ k , имѣемъ

$$R = a_1^{(k)} A_1^{(k)} + a_2^{(k)} A_2^{(k)} + \dots + a_n^{(k)} A_n^{(k)}$$

но такъ какъ

$$A_s^{(k)} = \frac{\partial R}{\partial a_s^{(k)}}$$

то

$$R = a_1^{(k)} \frac{\partial R}{\partial a_1^{(k)}} + a_2^{(k)} \frac{\partial R}{\partial a_2^{(k)}} + \dots + a_n^{(k)} \frac{\partial R}{\partial a_n^{(k)}} \quad (20)$$

Мы видимъ по этимъ двумъ выраженіямъ (19) и (20), что миноры суть производныя начального детерминанта, но миноръ изъ начального детерминанта получимъ, если выбросимъ изъ начального одну строку и одну колонку, пересѣкающіяся на опредѣленномъ элементѣ. Отсюда заключаемъ, что дифференцировать детерминантъ, значить опустить въ немъ ту строку и ту колонку, которыя пересѣкаются по элементу, относительно котораго беремъ производную.

Если теперь въ опредѣлителѣ R поставимъ колонку μ на мѣсто колонки ν , то опредѣлитель измѣнитъ знакъ и производная

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_1^{(\mu)} \partial a_k^{(\nu)}}$$

при такой перемѣнѣ обратится въ

$$\frac{-\partial^2 R}{\partial a_1^{(\nu)} \partial a_k^{(\mu)}}$$

но отъ перестановки колонокъ мѣняется только знакъ и не мѣняется числовая величина, поэтому

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_1^{(\mu)} \partial a_k^{(\nu)}} = \frac{-\partial^2 R}{\partial a_1^{(\nu)} \partial a_k^{(\mu)}}$$

слѣдовательно

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_1^{(\mu)} \partial a_k^{(\nu)}} + \frac{\partial^2 R}{\partial a_1^{(\nu)} \partial a_k^{(\mu)}} = 0. \quad (21)$$

21. Означимъ чрезъ $x_1, x_2 \dots x_n$ систему независимыхъ переменныхъ и рассмотримъ n ихъ функций

$$\varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n); \quad \varphi_2(x_1, x_2 \dots x_n) \dots \varphi_n(x_1, x_2 \dots x_n)$$

взявъ частныя производныя отъ каждой функции по каждому изъ переменныхъ, составимъ изъ этихъ производныхъ детерминантъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Такой детерминантъ называется функціональнымъ детерминантомъ Якоби, означается онъ буквой J (начальной буквой фамилии Якоби). Иногда функціональный детерминантъ представляется также формой

$$D \frac{\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n}{x_1, x_2 \dots x_n}$$

Докажемъ слѣдующее положеніе.

Если между функціями $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ существуетъ связь, выражаемая уравненіемъ

$$(22) \quad F(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n) = 0,$$

гдѣ F есть произвольная функція, то функціональный детерминантъ, соответствующій этому, равенъ нулю, и обратно, если детерминантъ тождественно равенъ нулю, то функціи $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ связаны уравненіемъ вида (22).

Чтобы доказать это положеніе возьмемъ частныя производныя отъ уравненія (22) по каждому изъ переменныхъ и будемъ имѣть

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} = 0,$$

.....

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = 0.$$

Это суть линейныя уравненія относительно производныхъ

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi_n},$$

а мы видѣли, что эти уравненія удовлетворяются одной системой этихъ производныхъ, если

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Итакъ, для того чтобы между разсматриваемыми функціями существовала зависимость, необходимо, чтобы Якобьенъ для нихъ составленный обращался въ нуль.

Для примѣра разсмотримъ случай, когда переменныхъ три и число функцій равно числу переменныхъ.

Допустимъ, что соотношеніе между тремя функціями u, v, w существуетъ и представляется нѣкоторымъ уравненіемъ

$$F(u, v, w) = 0.$$

Рѣшая это уравненіе относительно какой нибудь функціи, напр. относительно функціи u будемъ имѣть

$$u = \varphi(v, w).$$

Возьмемъ отъ этой функціи частныя производныя по каждой изъ независимыхъ переменныхъ x, y, z , тогда получимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}$$

Исключая отсюда производныя $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial w}$, мы получимъ необходимое условіе связи между функціями u, v, w . Это условіе представится въ видѣ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

Легко показать, что это необходимое условіе вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно.

Разсмотримъ для этого полныя дифференціалы трехъ данныхъ функцій. Они суть

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz,$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz,$$

Исключимъ изъ этихъ уравненій дифференціалы dx и dy . Результатъ этого исключенія есть.

$$Adu + Bdv + Cdw = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} dz.$$

Здѣсь A, B, C суть функціи производныхъ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ и т. д.

Но входящій сюда детерминантъ, по выраженію (23), обращается въ нуль и мы имѣемъ уравненіе

$$Adu + Bdv + Cdw = 0.$$

Если бы между u, v, w не было зависимости, то это уравненіе не могло бы существовать. Этимъ и подтверждается, что условіе (23) для связи между функціями u, v, w не только необходимо, но и достаточно.

ЛИМФАТИЧЕСКІЕ СОСУДЫ ПЕЧЕНИ ЧЕЛОВѢКА.

Протоколовъ остальныхъ препаратовъ я, какъ уже говорилъ, не печатаю, полагая, что и нижеприводимыя таблицы даютъ послѣ изложеннаго достаточное представленіе о каждомъ изъ этихъ препаратовъ: въ сущности на нихъ повторяется въ различныхъ комбинаціяхъ то, что уже описано въ приведенныхъ 20-ти случаяхъ. На таблицахъ обозначаетъ:

Выпуклая поверхность.

Правая доля.

I а. Наружная группа заднихъ сосудовъ:

1. непрободающіе діафрагму сосуды:

- a* уходящіе къ узламъ на *a. diaphragmatica dex. inf.*
- a*¹ " " " позади правой почечной вены (и артерій)
- a*² " " " въ кишечномъ концѣ *lig. hepato-duodenale*
- a*³ " " " на чревной артеріи
- a*⁴ " " " между полой веной и аортой выше или позади лѣвой почечной вены.

2. прободающіе діафрагму сосуды:

- b* уходящіе вдоль 12-го ребра къ узламъ у этого ребра
- c* " " реберной дуги къ узламъ позади 7-го (иногда 8-го и 9-го) ребернаго хряща
- d* " обратно въ брюшную полость къ узламъ позади правой почечной вены
- d*¹ " непосредственно въ *ductus thoracicus* (позади правой діафрагмальной ножки)
- d*² " обратно въ брюшную полость къ узламъ на *a. diaphragmatica dex.*
- d*³ " " " " " " " выше или позади лѣвой почечной вены

- d*⁴ уходящие къ узламъ у груднаго протока позади діафрагмальной ножки
e " къ узламъ у или на пищеводѣ въ грудной полости
*e*¹ " у пищевода обратно въ брюшную полость къ узламъ въ lig. gastro-pancreaticum.

I б. *Средняя группа заднихъ сосудовъ:*

a, *a*¹, *a*², *a*³, *a*⁴ имѣютъ то же значеніе, что въ предшествующей группѣ I а: *x* сосудъ прободающій діафрагму и впадающій въ сосудъ группы I а.

I с. *Внутренняя группа заднихъ сосудовъ:*

1. прободающие діафрагму сосуды:

f уходящие съ нижней полой веной къ узламъ около нея.

2. непрободающие діафрагму сосуды:

- g* уходящие къ узламъ на входѣ въ желудокъ
*g*¹ " " " въ lig. gastro-pancreaticum
h " справа или слѣва v. cava къ узламъ на a. diaphragmatica dex.

II б. *Средняя группа внутреннихъ сосудовъ:*

1. прободающие діафрагму сосуды:

- b* идущіе къ передней брюшной стѣнкѣ (здѣсь впадающіе въ узлы или, не встрѣчая узловъ, уходящіе въ грудную полость)
c поднимающіеся къ діафрагмѣ и прободающіе ее тотчасъ слѣва. иногда справа lig. suspensorium впереди centrum tendineum; уходящіе къ узламъ позади мечевиднаго отростка
d идущіе сначала, какъ предшествующіе (*c*), но по верхней поверхности направляющіеся назадъ къ узламъ между нижней полой веной и пищеводомъ
*d*¹ уходящіе съ нижней полой веной къ тѣмъ же узламъ.

2. непрободающие сосуды:

- e* уходящие къ узламъ въ lig. gastro-pancreaticum
*e*¹ " " " на cardia справа
*e*² " " " " " слѣва (ganglion laterale *Sappey*)
*e*³ " " " въ lig. gastro-pancreaticum, обогнувъ foramen oesophageum слѣва.

II с. *Задняя группа внутреннихъ сосудовъ:*1. *прободающіе діафрагму сосуды:*

- f* уходящіе съ нижней полой веной къ узламъ около нея
*f*¹ прободающіе діафрагму по лѣвую сторону lig. suspensorium и уходящіе къ тѣмъ же узламъ
g прободающіе centrum tendineum и уходящіе къ узламъ позади мечевиднаго отростка.

2. *непрободающіе діафрагму сосуды:*

- h* уходящіе къ узламъ въ lig. gastro-pancreaticum
*h*¹ " " " на брюшномъ отрѣзкѣ пищевода
*h*² " " " на входѣ въ желудокъ
i " (справа v. cava) къ узламъ на a. diaphragmatica dex. inf.
k " справа v. cava " " въ lig. gastro-pancreaticum.

Лѣвая доля.

I а. *Наружная группа заднихъ сосудовъ:*1. *непрободающіе діафрагму сосуды:*

- a* уходящіе къ узламъ на a. diaphragmatica sin. inf.
*a*¹ " " " на передней поверхности аорты (на высотѣ v. renalis sin.)
*a*² " окружая foramen oesophageum слѣва, къ узламъ въ lig. gastro-pancreaticum
*a*³ " къ узламъ слѣва входа въ желудокъ.

2. *прободающіе діафрагму сосуды:*

- b* уходящіе къ узламъ у хряща 7-го ребра
*b*¹ " " " у сердечной сорочки на мѣстѣ вступленія въ діафрагму n. phrenicus
*b*² " " " у или на пищеводѣ
x сосуды, идущіе по нижней поверхности діафрагмы слѣва направо и затѣмъ сквозь діафрагму къ узламъ между полой веной и пищеводомъ.

I б. *Средняя группа заднихъ сосудовъ:*

- c* сосуды, уходящіе къ узламъ въ lig. gastro-pancreaticum
*c*¹ " " " " на брюшномъ отрѣзкѣ пищевода

- c^2 сосуды, уходящіе къ узламъ на входѣ въ желудокъ справа
 c^3 " " " " огибающа foramen oesophageum слѣва, къ узламъ
 въ lig. gastro-pancreaticum
 c^4 " " " " къ узламъ слѣва входа въ желудокъ.

I с. *Внутренняя группа заднихъ сосудовъ:*

1. *непрободающіе діафрагму сосуды:*

- d уходящіе къ узламъ въ lig. gastro-pancreaticum
 d^1 " " " " на пищеводѣ
 d^2 " " " " у входа въ желудокъ
 d^3 " " " " между полой веной и аортой.

2. *прободающіе діафрагму сосуды:*

- e уходящіе къ узламъ между нижней полой веной и пищеводомъ
 e^1 " " " " позади мечевиднаго отростка.

Вогнутая поверхность.

Правая доля.

I. *Задняя группа:* a наружные сосуды, b внутренніе сосуды, c короткіе наружные сосуды, впадающіе въ отводящіе стволы группы I а выпуклой поверхности.

- a, b сосуды, уходящіе къ узламъ между полой веной и аортой тотчасъ ниже лѣвой почечной вены
 a^1, b^1 " " " " позади правой почечной вены
 a^2, b^2 " " " " между полой веной и аортой выше или позади лѣвой почечной вены
 a^3, b^3 " " " " на а. diaphragmatica dex. inf.
 a^4 " " " " къ одному изъ нижнихъ узловъ между полой веной и аортой
 b^4 " " " " къ узламъ на передней поверхности аорты сейчасъ ниже лѣвой почечной вены
 x " " впадающіе въ узелъ на передней поверхности полой вены тотчасъ ниже печени
 y " " " " лежащій на самой поверхности печени.

II. *Внутренняя группа:*

a сосуды, идущіе въ переднюю половину правой продольной и уходящіе или къ узламъ на лѣвой сторонѣ шейки желчнаго пузыря, или къ узламъ въ lig. hepato-duodenale

b сосуди, идущіе въ заднюю половину лѣвой продольной борозды или въ поперечную борозду и уходящіе туда же.

Квадратная доля.

- a* сосуди, идущіе въ правую продольную борозду и къ тѣмъ же узламъ, что сосуди *a* внутренней группы правой доли
- b* " " въ поперечную борозду и уходящіе къ узламъ въ lig. hepato-duodenale
- c* " " въ лѣвую продольную борозду и по ней уходящіе къ узламъ въ lig. hepato-duodenale.

Спигеліева доля.

1. Передніе сосуди:

- a* идущіе въ поперечную борозду и уходящіе къ узламъ въ lig. hepato-duodenale
- a*¹ " на полую вену и уходящіе къ узламъ между полой веной и аортой выше или позади лѣвой почечной вены
- a*² " на полую вену и по ней уходящіе къ узламъ между полой веной и аортой сейчасъ ниже лѣвой почечной вены
- b* " въ лѣвую борозду и уходящіе въ маломъ сальникѣ къ узламъ на малой кривизнѣ желудка и въ lig. gastro-pancreaticum.

2. Задніе сосуди:

- c* идущіе по задней стѣнкѣ живота къ узламъ на a. diaphragmatica dex. inf. или позади v. renalis sin.

Лѣвая доля.

Внутренняя группа:

1. Передніе сосуди:

- a* идущіе къ бороздѣ между лѣвой и квадратной долей и уходящіе къ узламъ въ lig. hepato-duodenale.

2. Задніе сосуди:

- a*¹ идущіе къ мѣсту впаденія поперечной борозды въ лѣвую продольную и уходящіе къ узламъ въ lig. hepato-duodenale
- b* " къ бороздѣ между лѣвой и Спигеліевой долей и уходящіе къ узламъ на пищеводѣ

- b^1 идущие къ бороздѣ между лѣвой и Спигелиевой долей и уходящие къ узламъ на малой кривизнѣ желудка
- b^2 „ къ бороздѣ между лѣвой и Спигелиевой долей и уходящие къ узламъ въ lig. gastro-pancreaticum
- b^3 „ къ бороздѣ между лѣвой и Спигелиевой долей и уходящие къ узламъ на а. hepatica.

Внутренніе сосуды выпуклой поверхности лѣвой доли, *передніе сосуды* выпуклой поверхности, *звѣздообразные сосуды* и *глубокіе* въ таблицахъ не показаны.

I. Выпуклая поверхность.

Правая доля.

№	№ препарата.	Задніе сосуды.			Внутренніе сосуды.	
		I а. Наружная группа.	I в. Средняя группа.	I с. Внутренняя группа.	II в. Средняя группа.	II с. Задняя группа.
1	54	e?, d	x, a ¹	f, h	d	f ¹
2	55	a	a	f	e	h
3	56	b?, c	—	f	e	—
4	57	c, a	a	f	—	—
5	58	e, d—d ³	—	II c	b?, e, c	f—i
6	59	b, a?	a	f	d ¹	i—k
7	60	a		f	e	g
8	61	b—a, d ¹ —d ²	a	f	e	вмѣстѣ съ с II b
9	62	a—b, c	a	f	b, e	f
10	63	b, c—a?	I a, a ¹	f	e	g
11	64	b, a	a	f, g	d	I c
12	75	b—a, c—a	a	f, g	e	g
13	76	c—a	—	—	e	—
14	81	d—a, d ¹ —a, a ¹	a	f, g ¹	e	f
15	82	c—a	a, a ²	f	b, e	h
16	83	b—a	—	—	—	—
17	86	b, b XI	—	—	e	h
18	89	b, a	a, a ²	f	e	II b
19	91	c, a—e—e ¹	—	—	d, d ¹	f, f ¹

№	№ препара-та.	Задніе сосуды.			Внутренніе сосуды.	
		I а. Наружная группа.	I б. Средняя группа.	I с. Внутренняя группа.	II б. Сред-няя группа.	II с. Задняя группа.
20	93	b-e, a ¹ -e	a, a ¹	I б, II с	с	g
21	4	с-a	a, a ²	f	с	f
22	5	e-a ¹	—	f	с	—
23	6	a	a	f	с	II б
24	7	a, b, a-b	a-a ² , a-a ¹	f	e, d, d ¹	f
25	8	a, b	a, a ³	f, h	с	—
26	9	a ¹	a	—	—	—
27	10	a	—	—	с	II б
28	11	a, d ² , d ⁴	a	f, h (оглябая ч. сава слѣва)	с	h ²
29	12	—	a	—	—	—
30	13	b-e?	a	f	b?, c	—
31	14	с, a	—	—	—	—
32	16	—	a	f	с	k
33	17	—	a	f	с?, e ² , e ³	—
34	18	—	a, a ⁴	f	с	f
35	19	b-d ² , a	a	—	с	—
36	20	с	a	f	с	f
37	21	—	a	f	с	—
38	22	a-c?	a	f	с	h ¹
39	23	a	a, a ²	f	b?, e ²	f
40	24	a, c, d ⁴	a-a ²	f	b, c	II б
41	25	a	a, a ²	f	с	f
42	26	—	a	—	с-d	—
43	27	a	a	f	с	f
44	28	b, d?	a, a ³	f, g	с-e	—
45	30	a, b-e ¹	a	f, I б	с	II б
46	31	с, a?, e?	a	f	с	—
47	32	a-a ¹ , a ²	a	f, h	с	f
48	33	a, d ¹ -d ⁴	a ⁴	g	e	h
49	34	d ²	a	f	b, c	—

№	№ препа- рата.	Задние сосуды.			Внутренние сосуды.	
		I а. Наружная группа.	I б. Средняя группа.	I с. Внутренняя группа.	II б. Сред- няя группа.	II с. Задняя группа.
50	35	a, b	a	f	c	съ с II б
51	36	a	a	f, g	c	h
52	37	a	a-a ²	f	c	f
53	38	d, e	a, a ²	f, g	b, c	f ¹
54	39	a	a	—	c, e ²	съ e ² II б
55	40	b, a	a	f, g	c	—
56	43	a, c	a	f	c	f
57	45	e-b, a	a	f	c	h
58	48	d ¹	—	f	c, e ²	h ¹
59	49	e-a	a	f	c	g
60	50	b-a, c-a	a	g ¹	c	f-i
61	51	b-a, d-a	a	f	c	—
62	52	a-a ⁴ , a-a ³	a	g	—	—
63	53	b-a, c	a	g ¹	b, c, e ¹	h ²
64	65	a-e, a	a	—	c	II б
65	66	a	—	f	c	f ¹
66	67	d-d ¹	a	f	c	II б
67	71	b?-e, a	a	f	c	—
68	72	b	a	f	c	—
69	73	a-b	a	f	c	f ¹
70	77	c, d ¹ -e	a, a ⁴	h	c	съ c II б
71	78	e, a	—	—	c	—
72	79	a	—	—	e c	II б
73	80	a-a ³	a-a ²	f	b, c	II б
74	84	a	a	f	b, c	h
75	87	a	a-a ²	—	b, c	f ¹
76	88	d ⁴ -e ¹ , a	a, a ¹	—	—	—
77	90	a-b, a	—	f	d, e?	f
78	96	a, b, d ³ -e	a, a ¹	f	c	съ c II б

II. Выпуклая поверхность.

Лѣвая доля.

№	№ препа- рата.	Задніе сосуды.			№	№ препа- рата.	Задніе сосуды.		
		I a. На- ружная группа.	I b. Сред- няя груп- па.	I c. Внут- ренняя группа.			I a. На- ружная группа.	I b. Сред- няя груп- па.	I c. Внут- ренняя группа.
1	54	a	c d		29	21	a ²	c ¹	d ¹
2	55	b?, a ²	c	d	30	22	a	c	—
3	56	a?	c ¹	—	31	23	a	c	d ²
4	59	x	c	—	32	24	a ² , a ³	c	d
5	60	a	c ¹ d		33	26	a ³		
6	61	a	c	e	34	27	b ² , a	c d	
7	62	a	c	d	35	28	a ¹	c ³	—
8	64	b, x?	c ² , c	I b	36	30	a ²	c	d
9	75	b?, a	—	d ²	37	31	a, a ²	c ¹	—
10	76	a?	—	—	38	32	a	c ²	d ²
11	81	b ¹ , a	c ² , c ⁴	d	39	35	a, a ³	c ³	d
12	82	a, a ³	c ¹	d ¹ , d	40	36	a, a ³	I a	d ²
13	83	a	c	d	41	38	a	c, c ²	d ²
14	89	a ¹	c ³	d	42	39	b?-a	c	d
15	91	b, a ²	c, c ² , c ⁴	e	43	40	a	I a	d
16	93	a	c ¹	c ¹	44	43	a, a ²	c	d, d ²
17	4	a	c ²	d	45	45	b, a	c	d ¹
18	5	b, a	c ³	—	46	49	a	c ¹ -c	d ² -d
19	6	a	c	d	47	50	b?, a	c, c ²	d, d ²
20	7	b ¹ , a?	c ¹	d	48	66	b ²	c ¹	—
21	9	b, a	c	d?	49	71	a ² , a	—	—
22	10	b, a	—	—	50	73	a ¹	c ¹ , c ²	e
23	11	a	c ²	d ²	51	78	a	c ¹	I b
24	12	a ¹	c ² -c	d ² -d	52	79	—	c	d
25	13	a	c ²	d ¹	53	80	a ¹	e	
26	14	—	c ²	d ²	54	84	a	c	d ² , d
27	19	a, a ¹	c ²	d ² , d ³	55	88	b	c, c ²	I b
28	20	b ² , a	c ²	d ²					

III. Вогнутая поверхность.

№	№ препарата.	Правая доля.		Левая доля.		Квадратная доля.	Спигелиева доля.
		I. Задняя группа.	II. Внутренняя группа.	Внутренняя группа.			
				Передние сосуды.	Задние сосуды.		
1	55	a, b	a, b	a	a ¹	a	a
2	56	x-b, b ²	a, b	—	—	a, c	—
3	57	a ¹ , a ⁴ , b, b ²	b	—	b ¹ , b ² , b ³	a, b	a
4	58	a ² -a, b, b ²	a	—	a ¹ , b ¹ , b	—	a, a ¹ , a ²
5	59	b, b ⁴	a	—	b ³	a	a
6	60	b?	a	a	—	—	—
7	61	—	a, b	—	a ¹ , b ¹ , b ²	a, b	—
8	62	b-b ⁴	b	—	a ¹	a, b	a
9	63	a ¹ , b ¹ , x-b ²	a, b	a	a ¹ , b ¹	c	a
10	64	a ² ?, b ² , b ³	a, b	a	b ²	a, b, c	c
11	75	c, a, b	b	a	b ¹	—	—
12	76	a, b-b ²	a, b	a	a ¹	a, b, c	c, a, b
13	81	c, y-b, b	b	a	—	a, b	—
14	89	—	a, b	a	a ¹	a, b, c	—
15	93	b ²	—	—	a ¹	b	—
16	10	x-b ² , b ³	a, b	—	—	a	—
17	13	a ² , a	a, b	—	—	—	c
18	14	a ¹ -a ² , b ²	a, b	a	a ¹ , b ¹ , b ²	a, b, c	b, a
19	17	a ² , b	—	a	b ¹ , b ²	—	—
20	19	c, a ²	a	—	—	a, b, c	—
21	20	a ²	a, b	a	b ¹	a	—
22	22	a ² -a ³ , b	a, b	—	b ²	—	—
23	26	a ¹ , a ² , b	b	—	—	a, b	a, b
24	27	a, x-b, b ⁴	a, b	a	—	a, c	—
25	28	a, b, b ¹	a	a	a ¹ , b ² , b ²	a, c	c, a, b
26	36	b	a, b	a	b, b ¹	a	—

№	№ препарата.	Правая доля.		Лѣвая доля.		Квадратная доля.	Спигелива доля.
		I. Задняя группа.	II. Внутренняя группа.	Внутренняя группа.			
				Передніе сосуды.	Задніе сосуды.		
27	38	a ² , b	—	—	—	—	—
28	39	a ² , b	a, b	a	b ¹ , b ²	a, b	c
29	48	a, b	a, b	a	a ¹ , b ¹ , b ²	a, b, c	a ¹ , a, b
30	50	a ¹ , b ² , b	a, b	a	—	a, b, c	a, b
31	67	a ² —a ¹ , b	b	a	b ²	—	—
32	73	c, a—a ¹ , b	a, b	—	b ¹	b, c	a, b, c
33	84	a ² —a, b, b ²	b	—	b ²	b, c	—
34	87	a, a ² , b	a, b	a	b ²	a	—
35	89	—	—	—	—	—	—
36	90	a ¹ , b	a, b	a	a ¹ , b ¹ , b ²	—	b, a ¹ , c

Приведенныя описанія (и таблицы) отдѣльныхъ препаратовъ безъ сомнѣнія обнимаютъ всѣ возможные обычные варианты лимфатическихъ сосудовъ печени. Можно ли, однако, на основаніи представленныхъ препаратовъ установить въ цифрахъ частоту того или иного варианта? Къ сожалѣнію я долженъ отвѣтить: нѣтъ, нельзя. Инъекція лимфатическихъ сосудовъ вообще, а въ томъ числѣ и печени, дѣло въ высокой степени, такъ сказать, капризное. По отношенію къ печени достаточно иногда самого незначительнаго, неосторожнаго натяженія печеночной связки, подчасъ даже перегиба связки, для того, чтобы проходящій въ ней отводящій сосудъ не наполнился или наполнился недостаточно. Мы видѣли, что, напримѣръ, крайніе задніе сосуды выпуклой поверхности лѣвой доли могутъ направляться и къ узламъ въ грудной полости, и къ узламъ въ брюшной полости. И вотъ относительно этихъ сосудовъ на каждомъ отдѣльномъ препаратѣ, на которомъ оказались налитыми лишь сосуды, идущіе къ узламъ въ брюшной полости, я не берусь сказать, что на немъ не было и сосудовъ, уходящихъ къ узламъ въ грудной полости. Отсюда однако еще не слѣдуетъ, что въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, когда были налиты только сосуды

къ узламъ въ брюшной полости, непремѣнно существуютъ и сосуды къ узламъ въ грудной полости, но они лишь не налились. Достаточно большой инъекціонный матеріалъ и обращенное спеціально вниманіе въ отдѣльныхъ случаяхъ на совершенно полную инъекцію даннаго участка и всѣхъ его отводящихъ сосудовъ позволяетъ мнѣ утверждать, что въ однихъ случаяхъ оказываются на лицо одни сосуды и отсутствуютъ другіе, которые въ другихъ случаяхъ существуютъ, и даже болѣе—позволяетъ мнѣ говорить, что оттоки даннаго направленія встрѣчаются чаще или рѣже, чѣмъ оттоки иного направленія. Но отсюда до опредѣленія частоты тѣхъ или иныхъ оттоковъ въ числахъ еще далеко. Для того, чтобы дѣлать заключеніе о численныхъ отношеніяхъ различныхъ варьянтовъ необходимо имѣть достаточное количество препаратовъ, на которыхъ съ полною увѣренностью можно считать налитыми всѣ лимфатическіе сосуды. Имѣть, однако, такихъ препаратовъ лимфатическихъ сосудовъ печени въ достаточномъ количествѣ въ высокой степени трудно. Кто въ этомъ лукаво сомнѣвается, тому я посоветую самому познакомиться со всѣми неудачами, съ какими сопряжена инъекція лимфатическихъ сосудовъ. Конечно, изъ своего матеріала я могъ бы выбрать десятокъ, можетъ быть, другой препаратовъ, удовлетворяющій сказанному требованію. Но какая цѣна цифровыхъ данныхъ, полученныхъ изъ десятка объектовъ, въ особенности при значительной, какъ видно изъ приведенныхъ протоколовъ, склонности къ варіаціи лимфатическихъ сосудовъ печени.

Исходя изъ изложенныхъ соображеній, при описаніи отдѣльныхъ сосудовъ я укажу лишь тѣ пути, по какимъ могутъ идти эти сосуды, и которые не являются для нихъ, такъ сказать, необычными, а затѣмъ отмѣчу и тѣ пути, по которымъ идутъ данные сосуды въ рѣдкихъ, исключительныхъ случаяхъ, отъ всякихъ же подсчетовъ въ числахъ воздержусь.

Начну съ поверхностныхъ лимфатическихъ сосудовъ. Поверхностные лимфатическіе сосуды мы раздѣлили на сосуды выпуклой и вогнутой поверхности, и первые въ свою очередь раздѣлили на сосуды правой и лѣвой доли, а вторые на сосуды правой, квадратной, Спигеліевой и лѣвой доли. Прежде, однако, чѣмъ приступить къ описанію сосудовъ cadaго изъ названныхъ подраздѣленій, скажу о поверхностныхъ лимфатическихъ сосудахъ печени вообще.

Поверхностные лимфатическіе сосуды печени образуютъ въ брюшинномъ покровѣ печени весьма густую сѣть, такая же сѣть находится и на той части поверхности печени, которая лишена брюшиннаго покрова и прилегаетъ непосредственно къ діафрагмѣ. Сѣть на вогнутой поверхности нѣсколько какъ бы гуще и состоитъ изъ болѣе тонкихъ сосудовъ. Среди сѣти какъ на выпуклой, такъ и на вогнутой поверхности, какъ уже говорилось, обособляются болѣе толстые стволы и стволы, одни изъ которыхъ являются отводящими сосудами, т. е. сосудами, которые нарастая лишь въ объемъ, тянутся по поверхности печени, чтобы, достигнувъ того или другого мѣста—подвѣшивающей связки, вѣнечной связки и т. д., сойти съ печени и направиться къ соответственнымъ лимфатическимъ узламъ; другіе обособляющіеся стволы являются вѣтвями предыдущихъ, т. е. вѣтвями отводящихъ сосудовъ. Крупные стволы непосредственно другъ въ друга не переходятъ, иначе говоря, анастомозовъ между крупными сосудами, какъ изображали *Вернеръ и Феллеръ*, при посредствѣ столь же крупныхъ соединяющихъ сосудовъ не существуетъ, на что указалъ уже *Маскани* въ своей оцѣнкѣ работы *Вернера и Феллера* ¹⁾. Что же касается болѣе мелкихъ сосудовъ, то они весьма богато между собою анастомозируютъ. Изъ вкола въ какомъ нибудь мѣстѣ на поверхности печени можно при удачѣ одновременно налить отводящіе сосуды весьма различнаго направленія, напримѣръ, столь удаленные другъ отъ друга, какъ сосуды, уходящіе въ трехугольную и подвѣшивающую связки. Поступленіе инъекціонной массы въ такіе сосуды въ этихъ случаяхъ происходитъ не только при посредствѣ безразличной сѣти, связывающей корни данныхъ стволовъ, но также обыкновенно и непосредственно черезъ болѣе толстые, чѣмъ образующіе сѣть, сосуды и иногда безъ того, чтобы налилась промежуточная сѣть. Такіе же анастомозы существуютъ на выпуклой поверхности и между сосуди сосѣднихъ долей: при вколѣ, напримѣръ, на выпуклой поверхности правой доли ближе къ подвѣшивающей связкѣ весьма часто наливаются сосуды и лѣвой доли, и это происходитъ не черезъ отводящіе сосуды правой стороны, принимающіе въ себя такіе же сосуды лѣвой, слѣдовательно противъ тока лимфы, а при посредствѣ анастомозовъ между правыми и лѣвыми сосудами. Этимъ

¹⁾ См. выше стр. 11.

и объясняются такіе случаи, когда при инъекціи правой доли наливаются сосуды лѣвой безъ того, чтобы отводящіе стволы, проходящіе въ подвѣшивающей связкѣ, налились въ сколько нибудь значительной степени. Такіе анастомозы, какъ между сосудами выпуклой поверхности другъ съ другомъ, существуютъ, наконецъ, и между сосудами выпуклой поверхности, съ одной стороны, и сосудами вогнутой поверхности, съ другой стороны, на протяженіи всего свободнаго края печени.—Отводящіе стволы снабжены клапанами, которые обыкновенно, какъ объ этомъ уже говорилось, оказываются вполне достаточными: по крайней мѣрѣ, инъекція противъ тока лимфы, при введеніи канюли въ такой отводящій сосудъ, удается лишь въ рѣдкихъ случаяхъ.

Кромѣ отводящихъ сосудовъ, идущихъ по поверхности печени до того мѣста, гдѣ они сходятъ съ печени, существуютъ еще отводящіе сосуды, о которыхъ также была уже рѣчь, собирающіе свои корни на поверхности органа и уходящіе въ глубину, въ вещество его. Эти сосуды позднѣе снова появляются на поверхности и вмѣстѣ съ поверхностными отводящими сосудами покидаютъ печень. На своемъ пути въ веществѣ печени эти сосуды, какъ показываетъ препарованіе ихъ, принимаютъ въ себя, анастомозируютъ или сливаются съ глубокими лимфатическими сосудами. Связь поверхностныхъ лимфатическихъ сосудовъ съ глубокими устанавливается, однако, не только при посредствѣ этихъ уходящихъ въ глубину собирающихъ стволонъ. Огромная масса глубокихъ стволонъ впадаетъ непосредственно въ сосуды поверхностной сѣти, объ этомъ я скажу еще при описаніи глубокихъ сосудовъ. Черезъ эти то сосуды при инъекціи поверхностныхъ сосудовъ выпуклой поверхности мнѣ удавалось иногда, какъ въ случаѣ, описанномъ въ проколѣ восьмомъ, налить ограниченныя участки поверхностной же сѣти на вогнутой поверхности.

Нѣкоторые изъ отводящихъ сосудовъ вогнутой поверхности правой и квадратной доли, равно какъ нѣкоторые изъ перегибающихся черезъ передній край сосуды выпуклой поверхности правой доли, направляющіеся къ правой продольной бороздѣ, а также нѣкоторые изъ глубокихъ сосудовъ, появляющіеся на поверхности въ этой бороздѣ, поднимаются на желчный пузырь, дѣлятся каждый на два и большее число стволонъ, анастомозируютъ между собою и образуютъ красивую крупнопетлистую сѣть на свободной и отчасти

на прикрѣпленной поверхности пузыря. Въ петляхъ этой сѣти располагается мелкопетлистая сѣть сосудовъ самаго пузыря. Сосуды крупнопетливой сѣти, стало быть, оказываются также отводящими сосудами и для лимфатической сѣти желчнаго пузыря.

Поверхностная лимфатическая сѣть печени на большей части своего протяженія является однослойной, по близости же связокъ сѣть эта двуслойная. Я не могу согласиться съ *Тейхманномъ* ¹⁾, полагающимъ, что *Арнольдъ* ²⁾, описывающій два слоя лимфатической сѣти печени, впалъ въ заблужденіе. По мнѣнію *Тейхманна* ошибка *Арнольда* имѣетъ причину въ томъ обстоятельстве, что сѣть мелкихъ сосудовъ покрываетъ болѣе крупныя сосуды, что и даетъ впечатлѣніе двуслойной сѣти. Двуслойность, слѣдовательно, является только кажущеюся. Это совершенно не вѣрно, не только во время инъекціи, т. е. когда сосуды напряжены въ указанныхъ мѣстахъ отчетливо выступаетъ двуслойный характеръ сѣти, но и позднѣе, когда сосуды спадутся, въ томъ же можно убѣдиться, препаруя: можно отпрепаровать, начиная отъ связокъ, брюшинный покровъ печени, такимъ образомъ, что и въ немъ, и на подлежащей поверхности печени останется какъ сѣть мелкихъ сосудовъ, такъ и болѣе крупныя собирающіе стволы.

Различныя отводящія стволы или вѣрнѣе различныя группы отводящихъ стволковъ—о группировкѣ ихъ сказано на стр. 47—50—своими развѣтвленіями въ различныхъ случаяхъ занимаютъ различныя участки поверхности печени. Чаще всего, однако, раздѣленіе поверхности печени на участки, занятыя развѣтвленіемъ той или иной группы, является въ слѣдующемъ видѣ. Наружная треть выпуклой поверхности правой доли занята развѣтвленіемъ наружной группы заднихъ сосудовъ; эта область шире спереди, уже сзади, такъ что спереди она занимаетъ всю наружную треть поверхности или даже болѣе, сзади едва только четверть этой поверхности или даже и того меньше. Остающіеся двѣ внутреннихъ трети выпуклой поверхности правой доли въ свою очередь могутъ быть раздѣлены на три равныя части: переднюю, среднюю и заднюю. Двѣ переднихъ части заняты преимущественно развѣтвленіемъ средней группы внутрен-

¹⁾ *L. Teichmann*. Das Saugadersystem vom anatomischen Standpunkte. 1861, S. 93.

²⁾ См. выше стр. 25.

нихъ сосудовъ. Задняя часть, болѣе широкая снаружи и болѣе узкая спутри, вмѣстѣ съ свободнымъ отъ развѣтвленія наружной группы заднихъ сосудовъ участкомъ наружной трети поверхности доли составляетъ область вѣтвленія, считая снаружи внутрь, стволы средней и внутренней группы заднихъ сосудовъ и стволы задней группы внутреннихъ сосудовъ. Задней группѣ внутреннихъ сосудовъ принадлежитъ небольшой участокъ поверхности, прилегающей къ задней трети подвѣшивающей связки. Область, лежащая кнаружи отъ него и кпереди отъ мѣста выхода изъ печени печеночныхъ венъ, занята внутренней группой заднихъ сосудовъ. Наконецъ, область, расположенная кнаружи отъ только что указанной, составляетъ участокъ, занятый стволами средней группы заднихъ сосудовъ. Часть печени, непокрытая брюшиной составляетъ особую область, собирающіе сосуды которой впадаютъ въ отводящіе стволы сосѣднихъ областей.

Передними сосудами занята довольно узкая полоса вдоль праваго спереди и всего передняго края; полоса эта нѣсколько шире у передняго праваго угла доли, гдѣ она иногда бываетъ и довольно значительной ширины. Стволики передней группы внутреннихъ сосудовъ занимаютъ небольшой участокъ поверхности печени, прилегающій къ передней части подвѣшивающей связки.

Изъ указанныхъ областей въ отдѣльныхъ случаяхъ то одна, то другая бываетъ то меньше, то больше. Наиболѣе рѣзкое и при томъ сравнительно чаще наблюдаемое уклоненіе представляютъ тѣ случаи, когда область наружной группы заднихъ сосудовъ бываетъ значительно увеличена,—случается, что болѣе половины поверхности всей доли оказывается занятою развѣтвленіемъ наружной группы заднихъ сосудовъ.

Не лишнимъ будетъ напомнить здѣсь, о чемъ подробно говорилось выше, что располагающаяся на границы двухъ областей сѣтъ служитъ въ одно и то же время мѣстомъ, гдѣ берутъ начало корни сосудовъ безразлично той и другой соприкасающейся области, — что вѣтви одной области заходятъ въ другую,—что между сосудами даже отдаленныхъ областей существуютъ связующіе ихъ анастомотическіе стволики,—словомъ, что описываемыя области отнюдь не рѣзко ограничены, что инъекціонная масса вводимая въ сосуды въ предѣлахъ данной области (а, слѣдовательно, надо думать, и лимфа)

оттекаетъ лишь преимущественно по отводящимъ сосудамъ этой области.

Относительно раздѣленія выпуклой поверхности правой доли на отдѣльные участки, остается еще сказать, что въ извѣстныхъ случаяхъ та или другая область бываетъ совершенно занята вѣтвями сосѣдной, т. е. сосѣдная область, такъ сказать, ее замѣщаетъ; особенно часто это бываетъ съ областью задней группы внутреннихъ сосудовъ.

Что касается звѣздообразныхъ сосудовъ, то на выпуклой поверхности правой доли въ хорошо выраженной формѣ они встрѣчаются только ближе къ свободному краю печени и чаще всего у передняго праваго угла доли, впереди сосудовъ наружной задней группы.

Подобно правой и лѣвая доля на выпуклой поверхности распадается также соотвѣтственно описаннымъ прежде группамъ сосудовъ на извѣстное число областей. Если раздѣлить поверхность лѣвой доли такъ же, какъ правой, на три части: наружную, среднюю и внутреннюю, то наружная часть и передніе участки средней окажутся занятыми развѣтвленіемъ наружной группы заднихъ сосудовъ. Область эта, какъ и соотвѣтственная правая, по направленію къзади значительно суживается, занимая сзади, т. е. у задняго края, значительно меньше, чѣмъ треть протяженія здѣсь доли; она уступаетъ тутъ мѣсто средней группѣ заднихъ сосудовъ.—Внутренняя треть поверхности доли занята внутренними сосудами; и здѣсь область болѣе широка спереди и по срединѣ и весьма узка сзади, т. е. въ части прилегающей къ задней трети подвѣшивающей связки. Остающуюся не-занятою развѣтвленіемъ наружной группы заднихъ сосудовъ и внутренними сосудами часть поверхности доли дѣлятъ между собою средняя и внутренняя группа заднихъ сосудовъ. На лѣвой долѣ чаще, чѣмъ на правой, область наружной группы заднихъ сосудовъ бываетъ весьма велика: такъ это было на препаратѣ съ котораго сдѣланъ рис. 2-й.

Передніе сосуды на лѣвой доли большею частью бываютъ мелки; болѣе крупные встрѣчаются на участкахъ, прилегающихъ къ лѣвой вырѣзки печени (участокъ свободный отъ сосудовъ на рис. 2-мъ, на другихъ препаратахъ оказывался занятымъ именно такими сосудами). Звѣздообразные сосуды на дѣтскихъ трупахъ точно также встрѣчаются лишь въ рѣдкихъ случаяхъ.

На вогнутой поверхности правая доля может быть раздѣлена на двѣ области. Если провести линію, примѣрно, отъ передняго праваго угла доли къ поперечной бороздѣ, то вся поверхность, лежащая кнаружи отъ этой линіи будетъ принадлежать заднимъ сосудамъ доли, все же что лежитъ кнутри отъ линіи, будетъ принадлежать внутреннимъ сосудамъ. Отступленія заключаются въ томъ, что область внутреннихъ сосудовъ кпереди суживается, а кзади на счетъ наружной области расширяется. Звѣздообразные сосуды располагаются какъ въ той, такъ и въ другой области, и при томъ въ переднихъ ихъ участкахъ.

На квадратной долѣ вѣтви сосудовъ, направляющихся въ различныя стороны, такъ заходятъ другъ за друга, что выдѣлить отдѣльныя области оказывается невозможнымъ. На Спигеліевой долѣ можно отличать переднюю область, занятую передними сосудами, и заднюю область, занятую задними сосудами.

На лѣвой долѣ выдѣляется двѣ главныхъ области. Меньшая занимаетъ прилегающую къ переднему краю на всемъ его протяженіи часть поверхности доли, ббльшая занимаетъ остальную часть. Первая принадлежитъ преимущественно звѣздообразнымъ сосудамъ, вторая—внутреннимъ сосудамъ доли. Располагающіеся на небольшомъ участкѣ у задняго лѣваго угла доли короткіе стволыки уходятъ на выпуклую поверхность и далѣе въ трехугольную связку; если угодно, этотъ участокъ можно разсматривать за особую, третью, маленькую область вогнутой поверхности лѣвой доли.

Все, что было сказано о лимфатическихъ областяхъ выпуклой поверхности правой доли въ той же мѣрѣ относится и къ областямъ выпуклой поверхности лѣвой доли, и къ областямъ на вогнутой поверхности.

Чтобы покончить съ общимъ описаніемъ поверхностныхъ лимфатическихъ сосудовъ печени, нужно упомянуть еще, что наклонность лимфатическихъ стволовъ на своемъ пути къ узламъ дѣлится и вновь сливается въ выраженной формѣ замѣчается уже на поверхности печени. Иногда происшедшіе отъ дѣленія ствола сосуды не сливаются снова въ одинъ стволъ, а уходятъ даже въ различныя стороны. Иногда вмѣсто одного сосуда тянется цѣлый пучекъ сосудовъ.

Лимфатическіе узлы, въ которыхъ находятъ себѣ окончаніе сосуды печени, располагаются одни въ брюшной полости, другіе въ грудной полости. Узлы, лежащіе въ брюшной полости, принимающіе въ себя сосуды печени, располагаются главнымъ образомъ на задней стѣнкѣ живота и въ соединяющихъ печень съ другими внутрибрюшными органами связкахъ, и только немногіе на передней стѣнкѣ живота. Узлы, лежащіе въ грудной полости, принимающіе печеночные сосуды, располагаются на верхней поверхности грудобрюшной преграды, затѣмъ вдоль 12-го праваго ребра и въ 11-мъ межреберномъ промежуткѣ, далѣе въ грудномъ срдѣстѣніи, наконецъ, вдоль внутреннихъ грудной артерій и вены. Говоря сейчасъ о принимающихъ въ себя сосуды печени лимфатическихъ узлахъ, я имѣю въ виду лишь первые узлы, которые встрѣчаютъ на своемъ пути сосуды печени, т. е. узлы перваго этапа печеночныхъ лимфатическихъ сосудовъ.

Многіе изъ заложенныхъ въ брюшной полости узловъ, принимающихъ въ себя сосуды печени, принимаютъ въ себя также сосуды желудка. Эти узлы въ статьѣ о лимфатическихъ сосудахъ желудка я группировалъ, нѣсколько измѣнивъ группировку *Кюнео и Деламара* ¹⁾, слѣдующимъ образомъ. Прежде всего всѣ эти узлы согласно съ названными авторами хорошо объединяются въ три главныя цѣпи узловъ: цѣпь лѣвой верхней вѣнечной артерій, цѣпь печеночной артерій и цѣпь селезеночной артерій. Каждая изъ этихъ цѣпей будетъ составлена узлами, лежащими вдоль соответственнаго артеріальнаго ствола и его вѣтвей. Цѣпь вѣнечной артерій распадается на три группы: на *группу желудочно-поджелудочную*, узлы которой заложены вдоль артерій въ желудочно-поджелудочной связкѣ, затѣмъ на *группу околокардиальную*, образованную узлами вокругъ входа въ желудокъ—спереди, стѣва и сзади, и, наконецъ, на *верхнюю желудочно-сальниковую группу*, обнимающую узлы, лежащіе въ маломъ сальникѣ на малой кривизнѣ желудка. Въ цѣпи вѣнечной артерій хорошо умѣщаются и тѣ, часто отсутствующіе, одинъ—три узла, которые лежатъ спереди и справа на брюшномъ отрѣзкѣ пищевода. Эти узлы составляютъ особую группу цѣпи вѣ-

¹⁾ B. Cunéo et G. Delamare. Les lymphatiques de l'estomac. Journal de l'Anatomie et de Physiologie. 1900. № 4, p. 393.

печной артерій, и мы ее назовемъ *брюшною околопищеводною группю* узловъ (lymphoglandulae paraoesophageae abdominales).

Цѣпь печеночной артерій распадается на цѣпь узловъ, расположенныхъ вдоль общей и собственной печеночной артерій (a. hepatica et a. hepatica propria), и на цѣпь узловъ, располагающихся вдоль общаго ствола правой желудочно-сальниковой и верхней артерій двѣнадцатиперстной кишки и далѣе вдоль правой желудочно-сальниковой артерій. Последняя цѣпь узловъ дѣлится на двѣ группы: одну образуютъ узлы, расположенные вдоль названнаго общаго артеріальнаго ствола (вдоль a. gastro-duodenalis), это *запиратникова группа* узловъ,—другую образуютъ узлы, лежащіе въ большомъ сальникѣ вдоль правой желудочно-сальниковой артерій, это *нижняя желудочно-сальниковая группа*.

Цѣпь селезеночной артерій—*селезеночно-поджелудочная цѣпь* составляетъ одну нераздѣльную группю узловъ. Всѣ перечисленныя группы лимфатическихъ узловъ принимаютъ въ себя также и сосуды, приходящіе съ печени.

Но кромѣ этихъ узловъ сосуды печени, какъ сказано, поступаютъ еще въ другіе узлы, лежащіе въ полости живота. Такими будутъ прежде всего узлы, расположенные на задней стѣнкѣ живота. Эти узлы, какъ объ этомъ я говорилъ въ статьѣ о лимфатическихъ сосудахъ почекъ, образуютъ три главныя цѣпи. Двѣ изъ нихъ (парныя) лежатъ по бокамъ позвоночнаго столба въ нѣкоторомъ отдаленіи отъ брюшной аорты—на правой сторонѣ позади нижней полой вены; за этими двумя цѣпями въ названной статьѣ было сохранено старое названіе *собственно поясничныхъ* узловъ. Третья цѣпь—непарная, средняя—образована значительнымъ числомъ иногда весьма крупныхъ узловъ, окружающихъ брюшную аорту со всѣхъ сторонъ—спереди, сзади и съ боковъ; эта цѣпь была названа въ указанной статьѣ *околоаортальною цѣпью* лимфатическихъ узловъ. Въ ней различаются, слѣдовательно, передніе, задніе, правые и лѣвые узлы. Правые узлы околоаортальной цѣпи лежатъ между нижней полой веной и аортой, а нѣкоторые иногда и на передней поверхности нижней полой вены—отчасти или совсѣмъ. Собственно поясничныя цѣпи заканчиваются вверху обыкновенно каждая узломъ, заложенымъ въ щели между внутренней и средней діафрагмальной ножкой. Околоаортальная брюшная цѣпь заканчивается у аортальнаго отверстія діафрагмы.

Выше разсмотрѣнныя цѣпи печеночной, вѣнечной желудка и селезеночной артерій, такъ сказать, отвѣтвляются отъ околоаортальной цѣпи. Отъ околоаортальной же цѣпи отвѣтвляются цѣпи обѣихъ брыжжеечныхъ артерій. наконецъ, отъ нея же отвѣтвляется съ каждой стороны по цѣпи узловъ, располагающихся вдоль соответственной нижней діафрагмальной артерій и ея вѣтвей. Каждую изъ этихъ послѣднихъ цѣпей мы назовемъ цѣпью, правою и лѣвою, нижнихъ діафрагмальныхъ артерій или проще *правою и лѣвою поддіафрагмальною цѣпью*.

Лѣвая поддіафрагмальная цѣпь состоитъ изъ одного до четырехъ узловъ, располагающихся около ствола и восходящей вѣтви лѣвой нижней діафрагмальной артерій, и одного или двухъ узловъ, лежащихъ вблизи лѣвой вѣтви артерій. Послѣдніе узлы часто совершенно отсутствуютъ. *Правая* поддіафрагмальная цѣпь состоитъ изъ одного до четырехъ узловъ, лежащихъ вдоль ствола правой артерій, затѣмъ также до четырехъ узловъ, расположенныхъ вдоль ея правой вѣтви, и, наконецъ, одного-двухъ узловъ вдоль восходящей вѣтви. Узлы около вѣтвей артерій лежатъ обыкновенно на самомъ началѣ вѣтвей, т. е. у ихъ происхожденія изъ ствола и только рѣдко гдѣ нибудь дальше, т. е. ближе къ концу вѣтвей.

Наконецъ, послѣднимъ постояннымъ мѣстомъ окончанія для сосудовъ печени въ брюшной полости будутъ узлы, заложенные въ толщѣ печеночно-кишечной связки (lig. hepato-duodenale). Одни изъ этихъ узловъ лежатъ въ печеночномъ концѣ связки—въ воротахъ печени, другіе на протяженіи ея, третьи въ кишечномъ концѣ связки. Всѣ они располагаются вдоль идущихъ въ связки воротной вены, печеночной артерій и желчныхъ протоковъ (ductus cysticus, ductus choledochus), и при томъ, главнымъ образомъ, позади этихъ сосудовъ. *Пуарье и Кюнео* на этомъ основаніи и дѣлятъ ¹⁾ описываемые узлы, за исключеніемъ нѣкоторыхъ изъ лежащихъ въ кишечномъ концѣ связки, на двѣ цѣпи: chaîne ganglionnaire du cystique et du cholédoque и chaîne hépatique. Въ составъ первой цѣпи входятъ всѣ тѣ узлы, которые располагаются ближе къ общему желчному и къ пузырьному протоку, включая и узлы у шейки желчнаго пузыря, въ составъ второй—лежащіе ближе къ печеноч-

¹⁾ *Op. et loc. cit.* p. 1185—1187.

ной артерій—собственно печеночной и далѣе общей печеночной артерій (a. hepatica propria и a. hepatica). Авторы совершенно справедливо оговариваются, что представленное дѣленіе не всегда оказывается достаточно строго выдержаннымъ, въ общемъ оно, однако, отвѣчаетъ дѣйствительности: конечно, отнесеніе того или иного узла къ той или другой цѣпи въ извѣстныхъ случаяхъ будетъ затруднительнымъ или произвольнымъ. Впрочемъ, по отношенію къ лимфатическимъ сосудамъ печени нужды въ этомъ дѣленіи нѣтъ, такъ какъ никомъ образомъ нельзя выдѣлить такихъ группъ печеночныхъ сосудовъ, которые съ постоянствомъ шли бы къ узламъ только одной изъ этихъ цѣпей. Тѣмъ не менѣе удерживая это дѣленіе, я буду называть цѣпь печеночной артеріей краткости ради *верхней печеночной цѣпью*, а цѣпь общаго желчнаго и пузырнаго протока *нижней печеночной цѣпью*.

Узлы, заложенные въ кишечномъ концѣ связки, располагаются собственно позади двѣнадцатиперстной кишки и позади или на головкѣ поджелудочной железы; они входятъ въ составъ той группы, которую тѣ же авторы—*Шварце и Кюнео* называютъ ¹⁾ *chaîne duodeno-pancreatique postérieure*. Слѣдуя имъ, мы также будемъ называть эту группу узловъ *кишечно-поджелудочной группой*.

Наиболѣе постояннымъ узломъ *верхней печеночной цѣпи* является, обыкновенно большой, узелъ на началѣ общей печеночной артерій; узелъ этотъ располагается часто такимъ образомъ, что онъ отчасти лежитъ на печеночной артерій, отчасти на лѣвой вѣнечной артерій желудка. Въ протоколахъ этотъ узелъ назывался верхнимъ узломъ въ кишечномъ концѣ печеночно-кишечной связки. Иногда на мѣстѣ этого большаго узла находятся два и даже три меньшихъ. Кромѣ того, на дальнѣйшемъ протяженіи печеночной артерій располагается одинъ-три узла; эти послѣдніе узлы иногда совершенно отсутствуютъ; ближайшіе къ печени изъ нихъ могутъ лежать въ самой поперечной бороздѣ. Общее число узловъ въ верхней печеночной цѣпи на моихъ объектахъ колебалось отъ одного—до четырехъ.

Въ *нижней печеночной цѣпи*, не считая узловъ у шейки желчнаго пузыря, чаще всего я находилъ одинъ болѣе или менѣе значительный продолговатый узелъ; иногда узловъ было два, три,

¹⁾ *Op. et loc. cit.* p. 1228 et fig. 604.

иногда же ихъ совсѣмъ не было, тогда ниже описываемый узелъ кишечно-поджелудочной группы болѣе или менѣе вытягивался въ lig. hepato-duodenale по направленію къ печени. На шейки желчнаго пузыря почти постояннымъ узломъ является узелъ съ лѣвой стороны шейки пузыря—*glandula cystica Реверхорста* и другихъ старыхъ анатомовъ. Этотъ узелъ только въ рѣдкихъ случаяхъ отсутствуетъ, часто онъ бываетъ значительной величины, и иногда на лѣвой сторонѣ шейки вмѣсто одного находится два узла. На нѣкоторыхъ изъ моихъ объектовъ кромѣ узла или двухъ узловъ на лѣвой сторонѣ шейки оказывался еще узелъ на правую ея сторону.

Изъ узловъ *кишечно-поджелудочной группы* первыми этапными узлами для печеночныхъ сосудовъ являются лишь верхніе узлы этой группы. Чаще всего мнѣ такихъ узловъ приходилось видѣть два и при томъ очень большихъ: одинъ изъ нихъ располагался позади воротной вены, другой рядомъ и ниже его—у свободного края печеночно-кишечной связки. Этотъ то послѣдній узелъ и вытягивался въ направленіи къ печени при указанномъ отсутствіи узловъ нижней печеночной цѣпи. Въ протоколахъ два описываемые узла назывались среднимъ и нижнимъ узломъ въ кишечномъ концѣ печеночно-кишечной связки. Вмѣсто средняго или нижняго узла иногда находилось нѣсколько маленькихъ узловъ. Ниже лежащіе узлы этой группы, не имѣющіе уже прямого отношенія къ сосудамъ печени, бываютъ всегда весьма небольшой величины.

Число всѣхъ узловъ, заложенныхъ въ печеночно-кишечной связкѣ (узлы на шейки пузыря, въ воротахъ печени, на протяженіи и въ кишечномъ концѣ связки) на отдѣльныхъ моихъ препаратахъ доходило до десяти, обыкновенно же оно было равно пяти-семи.

Кромѣ всѣхъ перечисленныхъ узловъ въ брюшной полости, встрѣчаются еще узлы, принимающіе въ себя сосуды печени, существованіе которыхъ не постоянно. Къ этимъ узламъ относятся прежде всего тѣ, которые лежатъ подъ брюшиною на передней стѣнкѣ живота вдоль прикрѣпленія къ ней подвѣшивающей связки (*натупочные узлы*). Въ одномъ случаѣ при инъекціи пупочныхъ лимфатическихъ сосудовъ *Кунео и Марсилль*¹⁾ налили два такихъ

¹⁾ *Poirier et Cuneo*. Op. et loc. cit. p. 1191 и *Cuneo et Marcill*. Lymphatiques de l'ombilic. Bulletins et mémoires de la Société anatomique de Paris. 1901, p. 583.

узла. Изъ печени эти узлы наливаются не часто: во многихъ случаяхъ, когда у меня были налиты тѣ сосуды печени, изъ которыхъ наливаются эти узлы, ихъ налитыми я не находилъ. Налитыми узлы этой группы мнѣ приходилось видѣть отъ одного до трехъ. Въ томъ случаѣ, когда ихъ было три (рис. 8-й), они располагались по одной линіи вдоль мѣста прикрѣпленія подвѣшивающей связки печени къ брюшной стѣнкѣ.

Къ непостояннымъ же узламъ, но, вѣроятно, существенно иного значенія (вставочные узлы, Schaltdrüsen), относятся и такіе узлы, располагающіеся на пути печеночныхъ сосудовъ, какіе описаны въ протоколахъ 14-мъ и 15-мъ, затѣмъ узлы въ бороздѣ между Спигеліевой и лѣвой долей, далѣе узлы на передней поверхности нижней полой вены тотчасъ передъ ея вхожденіемъ въ *sulcus hepatis pro vena cava*, наконецъ, узлы на самой поверхности печени. На самой поверхности печени мнѣ встрѣтился узелъ всего одинъ разъ: онъ лежалъ на вогнутой поверхности правой доли близко около задняго края печени.

Другіе узлы, принимающіе въ себя сосуды печени, располагаются въ грудной полости. Изъ узловъ въ грудной полости, какъ было сказано, сосуды печени принимаютъ въ себя узлы, располагающіеся на верхней поверхности грудобрюшной преграды, затѣмъ узлы, лежащіе вдоль 12-го ребра и въ 11-мъ межреберномъ промежуткѣ, далѣе узлы, располагающіеся вдоль внутренней грудной артеріи и вены, наконецъ, узлы въ грудномъ средостѣніи.

Узлы, расположенные на верхней поверхности грудобрюшной преграды *Пюарье и Кюнео*¹⁾, болѣе подробно описывающіе эти узлы, дѣлятся на три группы: переднюю, среднюю и заднюю.—Передняя группа въ свою очередь дѣлится на три меньшія группы: срединную и двѣ боковыхъ. Срединная лежитъ тотчасъ кзади отъ основанія мечевиднаго отростка и состоитъ изъ 2—3-хъ узловъ, боковыя лежатъ у передняго конца костной части 7-го ребра и состоитъ на каждой сторонѣ изъ 1—2-хъ узловъ.—Средняя группа узловъ также распадается на меньшія группы—числомъ двѣ: лѣвую и правую. Лѣвая лежитъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ грудобрюшной нервъ переходитъ на грудобрюшную преграду; она состоитъ изъ 3-хъ до 6-ти всегда незначительной величины узловъ. Правая группа состоитъ

¹⁾ *Op. et loc. cit.* p. 1237—1239.

изъ двоякаго рода узловъ: „одни, подобно узламъ предшествующей группы, располагаются кнаружи отъ сердечной сорочки, справа нижней полой вены, вокругъ конечнаго отрѣзка праваго грудобрюшнаго нерва,—другіе суть *intra-péricardiales* (*infra-péricardiales*?) и прилегаютъ къ передней поверхности нижней полой вены“.—Задняя группа діафрагмальныхъ узловъ состоитъ изъ 4—5-ти узловъ, которые лежатъ между заднею поверхностью пожекъ грудобрюшнаго мускула и переднею поверхностью 10-го и 11-го грудныхъ позвонковъ.

Изъ трехъ группъ діафрагмальныхъ, мы будемъ называть во избѣжаніе недоразумѣнія, *наддіафрагмальныхъ* узловъ *Пуарье и Кюмео* изъ печени наливаются передняя и средняя, задней же наливаются только правые узлы.

Правая передняя наддіафрагмальная группа въ тѣхъ моихъ случаяхъ, гдѣ она оказывалась налитой, состояла изъ одного до трехъ узловъ, чаще всего изъ одного большого узла. Когда узловъ было три, то внутренній лежалъ на грудобрюшной преградѣ соотвѣтственно срединѣ 7-го ребернаго хряща; въ томъ же мѣстѣ лежитъ и единственный узелъ, когда группа представлена однимъ узломъ. Узлы этой группы не всегда лежатъ у самой реберной дуги, но часто на нѣкоторомъ отъ нея разстояніи кзади—на поверхности грудобрюшной преграды.—*Левая передняя группа* на моихъ объектахъ состояла обыкновенно изъ одного узла, рѣдко изъ двухъ узловъ. Узелъ или узлы эти лежатъ аналогично соотвѣтственнымъ узламъ правой стороны.—*Средняя передняя группа* образована узлами, лежащими позади основанія мечевиднаго отростка. Она на моихъ объектахъ состояла изъ одного до четырехъ узловъ; узлы эти средней величины, а когда группа образована однимъ узломъ, то этотъ единственный узелъ бываетъ—по крайней мѣрѣ иногда—достаточно большимъ.

Средняя наддіафрагмальная группа узловъ распадается на двѣ меньшія группы: лѣвую и правую. *Левая группа* въ моихъ случаяхъ состояла всего изъ одного узла средней величины; изъ печени наливаются онъ рѣдко; лежитъ этотъ узелъ на грудобрюшной преградѣ непосредственно у сердечной сорочки въ томъ мѣстѣ, гдѣ лѣвый грудобрюшной нервъ съ сопровождающей его артеріей погружается въ грудобрюшную преграду. *Правая средняя группа* состоитъ изъ одного до пяти узловъ. Узлы эти разной величины и

лежать различно. Самымъ постояннымъ узломъ или узлами этой группы будетъ узелъ или два узла, лежащіе спереди слѣва нижней полой вены,—менѣе постоянны узлы, расположенные на сухожильномъ центрѣ подъ сердечной сорочкой между полой веной и пищеводомъ (влѣво и кзади отъ предыдущихъ), и еще менѣе постояннѣе узелъ спереди справа полой вены.

Узлы *задней диафрагмальной группы Пуарье и Кюнео* относятся къ тѣмъ узламъ, которые лежатъ вдоль грудного протока по обѣимъ сторонамъ его на передней поверхности позвоночнаго столба. Въ правыхъ изъ этихъ узловъ иногда оканчиваются лимфатическіе сосуды печени.

Второй группой узловъ въ грудной полости, принимающихъ въ себя сосуды печени будутъ *узлы, лежащіе вдоль нижняго края 12-го ребра и въ 11-мъ межреберномъ промежуткѣ*. Узлы одиннадцатаго межребернаго промежутка лишь рѣдко принимаютъ въ себя сосуды печени непосредственно, обыкновенно они наливаются при инъекціи печени изъ узловъ вдоль 12-го ребра. Что же касается этихъ послѣднихъ, то постоянными изъ нихъ будутъ тѣ, которые лежатъ у шейки или на головкѣ этого ребра. Но кромѣ того не рѣдко встрѣчаются узлы и на дальнѣйшемъ протяженіи ребра кпереди—до конца ребернаго хряща включительно. У задняго конца ребра бываетъ одинъ, два узла, на протяженіи же ребра чаще одинъ, рѣже два и даже три узла.

Третьею группою узловъ въ грудной полости, въ нижніе изъ которыхъ впадаютъ непосредственно иногда сосуды печени, будутъ узлы, расположенные вдоль внутреннихъ грудныхъ кровеносныхъ сосудовъ (*vasa mammaria interna*), по бокамъ ихъ. Эту группу узловъ *Пуарье и Кюнео*¹⁾ называютъ *ganglions mammaires internes*, *Санней*²⁾ *ganglions présternaux*, мы ихъ будемъ называть *грудинною цепью* узловъ. Они распадаются на правую и лѣвую цѣпь, располагающіяся каждая вдоль соответственныхъ *vasa mammaria interna*. Узлы лежатъ или въ межреберныхъ промежуткахъ, или на задней поверхности хрящей то у края грудины, то по ту сторону кровеносныхъ сосудовъ. Число узловъ на каждой сторонѣ бываетъ весьма различно. По *Пуарье и Кюнео* ихъ бываетъ на каждой сторонѣ отъ

¹⁾ *Op. et. l. cit.* p. 1239.

²⁾ *Traité d'anatomie l. cit.* p. 811.

4-хъ до 6-ти, по *Саттлю* отъ 8-ми до 10-ти, на моихъ объектахъ я находилъ такихъ узловъ отъ двухъ до четырехъ на правой и столько же на лѣвой сторонѣ. Въ самой тѣсной связи съ этими узлами находятся не всегда существующіе узлы, лежащіе на задней поверхности грудины внизу, отчасти между листками медиастинальных плевръ. Эти узлы, при существованіи ихъ, на объектахъ съ налитыми сосудами печени всѣ оказываются также налитыми. Ихъ бываетъ отъ одного до трехъ.—Изъ верхняго узла правой и лѣвой грудной цѣпи выходитъ по нѣсколько сосудовъ, которые, подымаясь вверхъ и огибая подключичную вену—одни спереди, другіе сзади, впадаютъ либо въ узлы около этой вены, либо въ грудной протокъ или правый общій лимфатическій стволъ, либо прямо въ вену (подключичную, внутреннюю яремную или въ уголь слитія ихъ).

Наконецъ, послѣдними узлами въ грудной полости, принимающими въ себя непосредственно сосуды печени, будутъ *узлы*, лежащіе *въ грудномъ средостѣннн* сзади, и именно узлы, располагающіеся на нижнемъ отрѣзкѣ грудной части пищевода. Такихъ узловъ, налитыхъ изъ печени, мнѣ приходилось видѣть одинъ, два.

Кромѣ всѣхъ разсмотрѣнныхъ узловъ при инъекціи печени наливаются въ грудной полости еще многіе другіе: такъ, узлы въ воротахъ легкаго, на бронхахъ и дыхательномъ горлѣ, впереди большихъ сосудовъ и т. д. Всѣ эти узлы не принимаютъ въ себя однако сосудовъ печени непосредственно, а наливаются изъ узловъ, налитыхъ изъ печени; они будутъ слѣдовательно для сосудовъ печени узлами второго и слѣдующихъ этаповъ.

Теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію различныхъ группъ печеночныхъ лимфатическихъ сосудовъ. Поверхностные сосуды *правой доли* на выпуклой поверхности мы раздѣлили на задніе, внутренніе, передніе и сосуды, уходящіе въ вещество печени. Задніе сосуды въ свою очередь распадаются на наружную, среднюю и внутреннюю группу, изъ которыхъ каждой на поверхности печени принадлежитъ своя, до извѣстной степени обособленная область и определенное мѣсто, гдѣ сосуды ея покидаютъ печень.

Наружная группа заднихъ сосудовъ на поверхности печени чаще всего бываетъ образована двумя весьма длинными стволами, беру-

ними начало недалеко от передняго края печени, и неопредѣленнымъ числомъ болѣе короткихъ и короткихъ; длинныхъ стволовъ иногда бываетъ всего одинъ, иногда же, рѣже, ихъ бываетъ больше—до четырехъ. Въ треугольной связкѣ къ нимъ присоединяется еще одинъ, другой изъ собирающихъ сосудовъ непокрытой брюшиною части печени. Между всѣми этими сосудами въ треугольной связкѣ существуетъ большое число анастомозовъ, благодаря чему въ связкѣ образуется своего рода крупнопетлистое сосудистое сплетеніе, въ петляхъ котораго располагается мелкопетлистая сѣть капилляровъ самой связки. По выходѣ изъ треугольной связки сосуды наружной группы обычно принимаютъ двоякое направленіе: одни уходятъ въ грудную полость, другіе остаются въ брюшной полости.

Сосуды, остающіеся въ брюшной полости, въ числѣ двухъ—трехъ стволовъ, иногда и въ большемъ числѣ (а рис. 7), направляются внутри по нижней поверхности грудобрюшной преграды вдоль нижняго листка вѣчной связки. Рано или поздно они подходятъ къ правой вѣтви правой нижней грудобрюшной артеріи, вдоль которой и идутъ то рядомъ, то нѣсколько отступая отъ нея, проходятъ позади нижней полой вены и изливаются въ узлы, расположенные у ствола этой артеріи. Въ тѣхъ случаяхъ, когда и по пути правой вѣтви артеріи оказываются узлы, нѣкоторые изъ описываемыхъ сосудовъ впадаютъ въ эти узлы, или же тотъ или другой стволъ дѣлится на два сосуда, и одинъ сосудъ вступаетъ въ встрѣчный узелъ, другой минуетъ его. Изъ узла или узловъ этихъ выходятъ сосуды, которые идутъ по тому же пути. Какъ вездѣ, такъ и здѣсь сосуды по пути къ узламъ дѣлятся, и происшедшіе отъ дѣленія стволы или вновь сливаются, или не сливаются, или сливаются съ другими стволами.

На указанномъ пути къ узламъ правой наддиафрагмальной цѣпи отводящіе сосуды наружной группы принимаютъ въ себя стволы, слагающіеся въ сѣти на непокрытой брюшиною части печени и короткіе стволы съ вогнутой поверхности правой доли; наконецъ, они принимаютъ въ себя или сливаются съ нѣкоторыми стволами средней группы тѣхъ же заднихъ сосудовъ и иногда съ стволами внутренней группы заднихъ сосудовъ.

Описанный путь оказывается обычнымъ для остающихся въ брюшной полости сосудовъ наружной группы. Сравнительно часто

однако наливаются или стволы, или отщепляющіеся отъ стволонъ сосуды, которые не идутъ позади нижней полой вены кнутри, но, не доходя до нея, круто загибаются внизъ и уходятъ къ тѣмъ уаламъ правой собственно поясничной цѣпи, которые лежатъ позади кровеносныхъ сосудовъ правой точки, и которые кромѣ другихъ сосудовъ, припимаютъ въ себя всегда и часть сосудовъ этой почки. Такъ какъ въ дальнѣйшемъ описаніи намъ многократно придется имѣть дѣло съ этими уалами, то не съ цѣлью осложнять номенклатуру, а чтобы не прибѣгать всякій разъ къ длинному описанію, я буду называть ихъ коротко глубокими почечными узлами.

Несравненно болѣе сложными являются отношенія сосудовъ, уходящихъ въ грудную полость. Сосуды эти прободаютъ грудобрюшную преграду или тотчасъ по выходѣ изъ трехугольной связки, или пройдя обыкновенно короткій путь (внизъ и кнаружи, рѣдко вверхъ) по нижней ея поверхности. До или при прободеніи грудобрюшной преграды сосуды, уходящіе въ грудную полость, могутъ сливаться въ одинъ болѣе толстый стволъ или же могутъ прободать грудобрюшную преграду въ числѣ двухъ и болѣе стволонъ; по ту сторону грудобрюшнаго мускула стволы эти могутъ снова расщепляться. Появившись на верхней поверхности грудобрюшной преграды, прободающіе ее сосуды принимаютъ тройное направленіе: одни идутъ назадъ и кнаружи, другіе впередъ и кнутри, третьи назадъ и кнутри.

Сосуды, идущіе назадъ и кнаружи (рис. 5), направляются къ 12-му ребру, чтобы, повернувъ кнутри, пойти вдоль этого ребра. Въ тѣхъ случаяхъ, когда они прободаютъ грудобрюшную преграду у самаго ребра, они сразу направляются кнутри—къ позвоночному столбу. Сосуды эти на верхней поверхности грудобрюшной преграды являются въ числѣ одного, двухъ, рѣдко трехъ стволонъ. Идутъ они обыкновенно вдоль нижняго края послѣдняго ребра (12-го или 11-го, если число реберъ уменьшено, какъ иногда встрѣчается), и лишь рѣдко одинъ идетъ вдоль 12-го ребра, другой по внутренней поверхности ребра переходитъ въ 11-ый межреберный промежутокъ. На пути къ головкѣ ребра описываемые стволы могутъ встрѣчать одинъ до трехъ узловъ, и тогда или самъ стволъ впадаетъ въ встрѣчный узелъ, или же стволъ дѣлится на два сосуда, изъ которыхъ одинъ впадаетъ въ узелъ, другой минуетъ его. Сосуды, минующіе узлы

на протяженіи ребра или не встрѣчающіе ихъ при отсутствіи такихъ узловъ, доходятъ до шейки ребра и оканчиваются въ здѣсь лежащемъ узлѣ; сюда же идутъ и сосуды изъ узловъ на протяженіи ребра, нѣкоторые изъ нихъ идутъ, впрочемъ, и въ выше лежащее межреберье. Узелъ у шейки точно также можетъ быть обидеиъ однимъ изъ стволовъ или однимъ изъ сосудовъ, происшедшихъ отъ раздѣленія ствола; тогда стволъ или сосудъ окружаетъ головку ребра снаружи и впадаетъ въ узелъ впереди сочлененія ребра съ тѣломъ позвонка, куда идетъ онъ и при отсутствіи узла у шейки, и куда идутъ также сосуды изъ узла у шейки. *Mutatis mutandis* сказанное относится и къ сосудамъ, идущимъ въ 11-мъ межреберномъ промежуткѣ.

Сосуды, идущіе впередъ и кнутри (а рис. 4-й, е рис. 5-й), идутъ по грудобрюшному мускулу впереди сухожильнаго центра, все болѣе и болѣе приближаясь къ реберной дугѣ. Сосудовъ этихъ бываетъ одинъ, два, рѣдко больше. Они сливаются между собою, расщепляются надвое, эти опять расщепляются и снова сливаются, такъ что (правда, не всегда) изъ такихъ расщепленій и слитій образуется вытянутое снаружи кнутри сплетеніе съ крупными петлями. Описываемый сосудъ или сосуды, или истоки сплетенія направляются къ 7-му реберному хрящу, въ узлѣ у котораго и оканчиваются. Иногда какъ объ этомъ говорилось, въ указанномъ мѣстѣ (въ наружной группѣ переднихъ наддиафрагмальныхъ узловъ) узловъ бываетъ не одинъ, а два и даже три, тогда въ каждомъ изъ этихъ узловъ оканчивается либо тотъ или другой изъ стволовъ, либо отщепившійся отъ него сосудъ.

Наибольшее разнообразіе представляетъ сосуды, направляющіеся кнутри и каади—позади сухожильнаго центра грудобрюшной преграды. Здѣсь можно различить четыре варьянта. Въ одномъ случаѣ сосуды идутъ позади правой ножки грудобрюшного мускула и находятъ себѣ окончаніе еще въ грудной полости,—въ другомъ случаѣ они идутъ также позади правой ножки грудобрюшного мускула, но или прободаютъ, или обходятъ ее и возвращаются въ брюшную полость,—въ третьемъ случаѣ они направляются къ пищеводу и оканчиваются въ узлахъ въ грудной полости,—наконецъ, въ четвертомъ случаѣ сосуды идутъ также къ пищеводу, но около него возвращаются въ брюшную полость.

Прежде, чѣмъ приступить къ разсмотрѣнію каждаго варьянта въ отдѣльности, скажу, что сосудовъ, держащихъ путь кнутри и кзади, бываетъ сначала одинъ, два, но затѣмъ они, подобно другімъ сосудамъ, могутъ расщепляться, и каждый получившійся отъ расщепленія сосудъ можетъ пойти по особому пути.

Въ первомъ изъ отмѣченныхъ варьянтовъ сосуды (одинъ или два сосуда) идутъ по задней поверхности правой грудобрюшной ножки, спускаются, то погружаясь въ ея мясо, то снова появляясь на поверхности, болѣе или менѣе далеко внизъ и впадаютъ либо въ узлы позади ножки на передней поверхности тѣтъ позвонковъ возлѣ грудного протока, либо впадаютъ *непосредственно* въ грудной протокъ. Изъ всѣхъ сосудовъ печени только такъ идущіе сосуды я видѣлъ впадающими непосредственно въ грудной протокъ.

Во второмъ варьянтѣ сосуды или прободаютъ грудобрюшную ножку или проходятъ въ щель между внутренней и средней ножкой и направляются либо къ глубокимъ почечнымъ узламъ, либо къ узламъ правой наддиафрагмальной цѣпи, либо, наконецъ, къ самымъ верхнимъ правымъ околоарտальнымъ узламъ—узламъ между полой веной и артой на высотѣ лѣвой почечной вены.

Въ третьемъ случаѣ сосуды (одинъ, два) идутъ, какъ сказано, къ пищеводу (с-d рис. 4-й). Они оканчиваются либо въ томъ узлѣ средней наддиафрагмальной группы (правой, которая лежитъ ближе къ пищеводу, либо въ нижнихъ заднихъ узлахъ грудного средостѣнія—въ узлахъ, лежащихъ на пищеводѣ.

Наконецъ, въ четвертомъ варьянтѣ сосуды прободаютъ грудобрюшную преграду съ лѣвой стороны пищевода, обойдя его сзади (с-e рис. 4-й), и спускаются слѣва отъ входа въ желудокъ къ одному изъ узловъ въ *lig. gastro-pancreaticum* (желудочно-поджелудочной группы).

Разнообразныя отношенія, какія представляютъ направляющіеся кнутри и кзади сосуды, встрѣчаются во всевозможныхъ комбинаціяхъ. То же самое нужно сказать и объ описанныхъ прободающихъ грудобрюшную преграду сосудахъ вообще. Встрѣчаются случаи, когда прободающіе сосуды одновременно идутъ кзади кнаружи (къ 12-му ребру) и кпереди кнутри (къ 7-му ребренному хрящу) или кзади кнаружи и кзади кнутри, или кпереди кнутри и кзади кнутри.—На вопросъ, какъ часто встрѣчаются сосуды, такъ или иначе идущіе, я на основаніи выше изложенныхъ соображеній дать

опредѣленный, цифровой отвѣтъ отказываюсь; ни разу мнѣ не случилось видѣть, чтобы на одномъ и томъ же объектѣ сосуды шли по всѣмъ тремъ указаннымъ направлениямъ. На вопросъ же, встрѣчаются ли случаи, въ которыхъ существовали бы одни только непрободающіе грудобрюшную преграду сосуды, или наоборотъ—случай, въ которыхъ существуютъ одни только прободающіе грудобрюшную преграду сосуды разсматриваемой наружной группы, я, хотя на моихъ объектахъ далеко не всегда оказывались налитыми тѣ и другіе сосуды, считаю тѣмъ не мѣнѣе возможнымъ отвѣтить, что, если такіе случаи, быть можетъ, и встрѣчаются, то только какъ рѣдкое исключеніе; описаніе *Кружешка* является поэтому недостаточнымъ, а *Саттея* не вѣрнымъ. Чтобы въ сей часъ сказанномъ не усматривалось противорѣчія, напомню, о чемъ я говорилъ прежде, что для опредѣленія всѣхъ возможныхъ путей я дѣлалъ специальныя инъекціи; и вотъ при такихъ инъекціяхъ каждый разъ, когда я наливалъ наружную группу заднихъ сосудовъ, и инъекція удавалась, я всегда находилъ налитыми какъ непрободающіе грудобрюшную преграду сосуды, такъ и тѣ или иные прободающіе сосуды.

Точно также я думаю, что послѣ прободенія грудобрюшной преграды, сосуды лишь изрѣдка идутъ въ одномъ какомъ-нибудь направленіи, обыкновенно же существуютъ сосуды, идущіе въ двухъ направленіяхъ—въ одной изъ указанныхъ выше комбинацій. Чаше другихъ наливаются сосуды, идущіе къ 12-му ребру, рѣже сосуды, идущіе къ 7-му реберному хрящу, еще рѣже сосуды, идущіе кнутри и кзади. Изъ этихъ послѣднихъ сосуды, возвращающіеся обратно въ брюшную полость, и сосуды, находящіе себѣ окончаніе въ грудной полости, существуютъ одинаково часто; сосуды, впадающіе непосредственно въ грудной протокъ встрѣчаются во всякомъ случаѣ рѣдко.

Прекрасное описаніе *Масканы* нашей наружной группы оказывается, такимъ образомъ, погрѣшающимъ преимущественно въ томъ отношеніи, что, какъ видно изъ таблицъ, прободающіе грудобрюшную преграду сосуды, идущіе впереди сухожильнаго центра къ реберной дугѣ, принадлежатъ къ весьма часто встрѣчающимся сосудамъ этой группы. Не описываетъ затѣмъ *Масканы* также столь обычныхъ сосудовъ, каковы сосуды, идущіе къ среднимъ наддиафрагмальнымъ узламъ, сосуды къ узламъ на пищеводѣ и сосуды къ узламъ позади правой ножки грудобрюшного мускула.

Сосудами и узлами второго этапа для остающихся въ брюшной полости сосудовъ разсмотрѣнной группы будутъ узлы околоаортальной цѣпи, а также узлы кишечно-поджелудочной группы и почечные узлы. Для прободающихъ грудобрюшную преграду сосудовъ вторые этапы соответственно разнообразному мѣсту окончанія этихъ сосудовъ будутъ также весьма различны. Вообще говоря, вторыми этапами для этихъ сосудовъ будутъ сосуды и узлы грудной цѣпи, узлы грудного средостѣнія и нѣкоторые сосуды и узлы въ брюшной полости. Въ частности—для сосудовъ, идущихъ къ 12-му и 11-му ребру вторыми этапами будутъ узлы и соединяющіе ихъ сосуды, располагающіеся на позвоночномъ столбѣ. Для сосудовъ, направляющихся къ наружной группѣ переднихъ наддиафрагмальныхъ узловъ, вторыми этапами будутъ сосуды и узлы правой грудной цѣпи. Для сосудовъ, идущихъ кнутри и каади: для сосудовъ нашего перваго варьянта вторыми этапами будутъ узлы на позвоночномъ столбѣ,—для второго варьянта тѣ же узлы, которые являются вторыми этапными узлами для непрободающихъ грудобрюшную преграду сосудовъ,—для третьаго варьянта вторыми этапами будутъ частью сосуды и узлы, лежащіе въ грудной полости, частью сосуды и узлы, лежащіе въ брюшной полости. Вторыми этапами, лежащими въ грудной полости, для сосудовъ третьаго варьянта будутъ либо узлы, расположенные выше на пищеводѣ, изъ какихъ узловъ идутъ сосуды къ узламъ у грудного притока,—либо узлы въ воротахъ легкаго и вдоль праваго бронха; къ бронхиальнымъ узламъ обыкновенно идетъ одинъ, но весьма толстый сосудъ: чтобы дойти до узловъ на бронхѣ, онъ иногда проходитъ между правыми легочными венами. Вторыми этапами, лежащими въ брюшной полости, будутъ узлы въ *lig. gastro-pancreaticum*, узлы у чревной артеріи (верхніе передніе узлы околоаортальной группы) и лѣвый узелъ на входѣ въ желудокъ (узелъ околокардіальной группы); къ этимъ узламъ сосуды второго этапа приходятъ, или пройдя сквозь правую ножку грудобрюшнаго мускула, или пройдя черезъ *foramen oesophageum* грудобрюшной преграды. Для четвертаго варьянта сосудовъ, идущихъ кнутри и каади, вторыми этапами узлами будутъ узлы селезеночно-поджелудочной цѣпи, узлы печеночной цѣпи и передніе околоаортальные узлы.

Органами, которыхъ лимфатическіе сосуды непосредственно впадаютъ въ первые этапные узлы описанной наружной группы

печеночныхъ сосудовъ будутъ правая почка (почечные и верхніе околоаортальные узлы), правый надпочечникъ (верхніе околоаортальные узлы), желудокъ (околокардіальные узлы, узлы желудочно-поджелудочной группы), двѣнадцатиперстная кишка (узлы кишечно-поджелудочной группы), поджелудочная железа (тѣ же узлы), пищеводъ (околокардіальные узлы, узлы желудочно-поджелудочной цѣпи, узлы на пищеводѣ въ грудной полости), грудобрюшная преграда (наддіафрагмальные узлы) и легкое (наддіафрагмальные узлы, узлы у пищевода, околокардіальные узлы и узлы въ *lig. gastropancreaticum*).

Сосуды легкаго, о которыхъ я буду говорить въ особой статьѣ, находятъ себѣ окончанія между прочимъ и въ узлахъ, расположенныхъ на грудной части пищевода; сюда поступаютъ они черезъ *lig. pulmonis*. При одновременной инъекціи легкаго и печени мнѣ нѣсколько разъ случалось видѣть, что нѣкоторые изъ этихъ-то сосудовъ легкаго, идущихъ въ *lig. pulmonis*, впадали въ тѣ же узлы на пищеводѣ, которые принимали въ себя сосуды печени; кромѣ того мнѣ случалось видѣть, что сосуды легкаго и сосуды печени сливались между собою въ общій сосудъ еще *до впаденія* въ узелъ; между сосудами печени и сосудами легкаго существуетъ, слѣдовательно, весьма тѣсная связь. Точно также сосуды выпуклой поверхности грудобрюшной преграды не только впадаютъ въ тѣ же узлы, что сосуды печени, но болѣе крупныя сливаются съ ними, а болѣе мелкіе впадаютъ въ нихъ.

Кромѣ указанныхъ сосудовъ въ первые этапные печеночные узлы, какъ описываютъ авторы, впадаютъ еще нѣкоторые другіе сосуды—сосуды стѣнокъ брюшной и грудной полости, сосуды сердечной сорочки, но о нихъ я не говорю, такъ какъ этихъ частей не наливалъ.

Средняя группа заднихъ сосудовъ представляетъ несравненно болѣе простыя отношенія, чѣмъ наружная группа. Образующіе ее стволы на поверхности печени не длинны, и только въ рѣдкихъ случаяхъ (какъ на объектѣ, съ котораго сдѣланъ рис. 1) среди нихъ бываютъ почти такой же длины стволы, какъ длинныя сосуды наружной группы. Вступивъ въ вѣчную связку, они, обыкновенно въ видѣ двухъ пучковъ—одного наружнаго, другого внутренняго, направляются между непокрытою брюшиною частью печени и грудобрюшную преграду. Въ каждомъ пучкѣ отдѣльныхъ стволонъ бы-

ваетъ то 2—3, то 5—6. На своемъ пути позади печени они принимаютъ въ себя сосуды изъ сѣти на непокрытой брюшиною ея части. Наружный пучекъ (наружное *b* на рис. 7-мъ) спускается болѣе или менѣе круто внизъ, затѣмъ поворачиваетъ кнутри и присоединяется къ непрободающимъ грудобрюшную преграду сосудамъ наружной группы. Внутренній пучекъ (внутреннее *b* на рис. 7-мъ) спускается съ правой стороны правой печеночной вены и идетъ дальше внизъ вдоль восходящей вѣтви правой нижней діафрагмальной артерій, чтобы у ствола артерій присоединиться къ наружному пучку и къ непрободающимъ грудобрюшную преграду сосудамъ. Мѣстомъ окончанія какъ наружнаго, такъ и внутренняго пучка будутъ тѣ же узлы, которые отмѣчены нами выше, какъ первые этапные узлы для непрободающихъ сосудовъ наружной группы; для внутренняго пучка первыми этапными узлами будутъ еще и тѣ узлы правой поддіафрагмальной группы, которые лежатъ иногда подлѣ восходящей вѣтви нижней діафрагмальной артерій. Кромѣ того либо тотъ или иной стволъ этой группы, либо происшедшій отъ расщепленія ствола сосудъ впадаетъ иногда въ узлы кишечно-поджелудочной группы, въ узлы у чревной артерій или въ верхніе узлы между полой веною и аортой. Сейчасъ названные узлы впрочемъ иногда такъ тѣсно примыкаютъ къ крайнимъ внутреннимъ узламъ поддіафрагмальной цѣпи, что не всегда можно съ полною увѣренностью отнести тотъ или другой изъ нихъ къ той или иной группѣ. Обычнымъ мѣстомъ окончанія сосудовъ средней группы будутъ во всякомъ случаѣ узлы правой поддіафрагмальной цѣпи.

Какъ на весьма рѣдкое уклоненіе сосудовъ разсматриваемой группы я могу указать на описанный въ протоколѣ № 1 случаѣ, когда значительная часть ихъ давала стволъ, который прободалъ грудобрюшную преграду и на верхней поверхности ея сливался съ прободающимъ стволомъ наружной группы. По характеру развѣтвленія на поверхности печени въ этомъ случаѣ нельзя было признать замѣщеніе сосудовъ средней группы сосудами наружной.

Почти такія же простыя отношенія представляютъ и сосуды *внутренней группы*. На поверхности печени группа эта обыкновенно бываетъ образована короткими стволами. Они сливаются въ концѣ концовъ въ два, три, пять иногда больше сосудовъ, которые уходятъ вмѣстѣ съ нижнею полой веною въ грудную полость и тамъ впадаютъ въ узлы правой средней наддіафрагмальной группы—въ

узлы, лежащие на грудобрюшной преградѣ справа, спереди или, какъ бываетъ чаще, слѣва полой вены. Но кромѣ стволонъ, уходящихъ въ грудную полость изъ сосудовъ этой группы рождаются иногда стволы, направляющіеся влѣво. Стволы эти идутъ между лѣвою долей печени и грудобрюшной преградой и уходятъ въ lig. phrenico-oesophageum къ узламъ у входа въ желудокъ (узламъ верхней желудочно-сальниковой группы) или къ узламъ въ lig. gastropancreaticum, или же они спускаются вдоль нижней полой вены къ узламъ правой поддѣфрагмальной цѣпи; иногда сосуды, спускающіеся къ узламъ поддѣфрагмальной цѣпи идутъ не между лѣвой долей и грудобрюшной преградой, а между послѣдней и правой долей печени. О томъ, что описываемая группа иногда замѣщается въ значительной части заднею группою внутреннихъ сосудовъ, была уже рѣчь, съ другой стороны, она сама можетъ до известной степени замѣщать эту послѣднюю, равно какъ отчасти замѣщать или замѣщаться среднею группою заднихъ сосудовъ.

Все необходимое объ этапахъ второго порядка средней и внутренней группы и о связи сосудовъ ихъ съ сосудами другихъ органовъ было уже сказано при описаніи наружной группы.

Данное сейчасъ описаніе сосудовъ средней и внутренней группы, какъ легко видѣть, находится почти въ полномъ согласіи съ описаніемъ соответственныхъ сосудовъ *Масканы* и совершенно расходится съ неправильнымъ описаніемъ *Саннея*. *Масканы* не упоминаетъ только о сосудахъ, направляющихся къ узламъ у входа въ желудокъ и къ узламъ въ lig. gastro-pancreaticum.

Внутренніе сосуды выпуклой поверхности правой доли, т. е. сосуды правой доли, направляющіеся къ подвѣшивающей печень связкѣ, мы раздѣлили на переднюю, среднюю и заднюю группу. Сосуды *передней группы* (а рис. 1-й и 5-й), которые лишь въ рѣдкихъ случаяхъ на поверхности печени бываютъ сколько-нибудь длинны, поднимаются въ подвѣшивающей связкѣ обыкновенно въ числѣ трехъ-четырехъ стволонъ, которые, загибаясь дугою съ выпуклостью кверху и кпереди, скоро сливаются въ два и даже одинъ стволъ. Этотъ или эти послѣдніе проходятъ въ связкѣ вблизи lig. teres hepatis черезъ лѣвую вырѣзку и, такимъ образомъ, попадаютъ въ лѣвую продольную борозду вогнутой поверхности. По бороздѣ они направляются къ воротамъ печени либо самостоятельно, либо сливаясь съ дру-

гими поверхностными сосудами, вступающими въ борозду, и съ глубокими сосудами, появляющимися на поверхность въ бороздѣ. Изъ воротъ сосуды эти идутъ вмѣстѣ съ другими сосудами, приходящими въ ворота, о чемъ будетъ сказано дальше.

Самую большую группу внутреннихъ сосудовъ представляетъ *средняя группа*. Нѣкоторые изъ образующихъ ее стволовъ на поверхности печени оказываются весьма длинны, другіе короче, нѣкоторые же весьма коротки. Число ихъ на поверхности печени опредѣлить совершенно невозможно. Ихъ такъ много, что *le crayen le plus habile ne saurait les représenter*, какъ говоритъ *Сампей*. Въ подвѣшивающей связкѣ вслѣдствіе слитія при самомъ вхожденіи въ связку число ихъ значительно уменьшается. И здѣсь опредѣлить число ихъ все-таки оказывается затруднительно, такъ какъ, подымаясь въ связкѣ, они продолжаютъ все снова сливаться между собою. Если я опредѣлю число ихъ въ связкѣ въ 10—15, то этимъ я хочу сказать только, что цифры, даваемые *Сампеемъ*, 8—10, иногда 3—4, не даютъ должнаго представленія о все же большемъ числѣ этихъ сосудовъ и на пути въ подвѣшивающей связкѣ.

Среди сосудовъ средней группы въ подвѣшивающей связкѣ нужно прежде всего выдѣлить одинъ-два самыхъ переднихъ ствола (b рис. 1-й и 5-й, а рис. 8-й). Они идутъ въ связкѣ болѣе или менѣе параллельно *lig. teres*, подходятъ къ брюшной стѣнкѣ и направляются или въ связкѣ вдоль ея прикрѣпленія къ брюшной стѣнкѣ, или по самой брюшной стѣнкѣ около связки къ мечевидному отростку. На этомъ пути они могутъ встрѣчать одинъ до трехъ надпупочныхъ узловъ и тогда оканчиваются въ нихъ. Выходящіе изъ узловъ сосуды, а при отсутствіи узловъ, сами описываемые сосуды подходятъ къ мечевидному отростку, переходятъ на его переднюю поверхность и по ней, направляясь направо или налево, доходятъ до прикрѣпленія 7-го ребернаго хряща къ грудины. Иногда они приходятъ къ этому же мѣсту, не переходя на переднюю поверхность мечевиднаго отростка. Подъ 7-мъ ребернымъ хрящемъ сосуды либо встрѣчаютъ лежащій здѣсь маленькій узелъ, либо, не встрѣчая узла, уходятъ въ грудную полость и изливаются въ узлы правой или лѣвой грудной цѣпи. Такъ идутъ эти сосуды, однако, не всегда: иногда они, идя по указанному пути и дойдя до грудобрюшной преграды, направляются по ея вогнутой поверхности, чтобы присоединиться къ прочимъ сосудамъ группы.

Остальные сосуды группы (с рис. 1-й, 2-й, 3-й) чаще всего поднимаются въ связкѣ къ грудобрюшной преградѣ, проходятъ по ней короткій путь влѣво и прободаютъ ее впереди сухожильнаго центра и позади мечевиднаго отростка; иногда тотъ или иной изъ сосудовъ прободаетъ самый сухожильный центръ. Передъ самымъ прободеніемъ грудобрюшной преграды они могутъ сливаться въ одинъ стволъ. Но это слитіе въ одинъ стволъ бываетъ далеко не постоянно, даже и не часто. Сосуды равнымъ образомъ могутъ сливаться въ два, три ствола, которые прободаютъ грудобрюшную преграду въ нѣкоторомъ разстояніи другъ отъ друга. Въ другихъ случаяхъ одни сосуды уходятъ по грудобрюшной преградѣ налѣво, другіе направо, иногда всѣ направо, и лѣвые прободаютъ грудобрюшную преграду по лѣвую сторону подвѣшивающей связки, правые по правую. По ту сторону грудобрюшной преграды мы находимъ одинъ, два, три, четыре, рѣдко больше сосудовъ; сосуды эти спускаются по верхней поверхности грудобрюшной преграды къ узламъ позади основанія мечевиднаго отростка (срединная группа переднихъ наддіафрагмальныхъ узловъ).

Описанный путь для сосудовъ средней группы является наиболѣе часто находимымъ, но далеко не постояннымъ. Прежде всего встрѣчаются случаи, когда послѣ прободенія грудобрюшной преграды въ обычномъ мѣстѣ слѣва подвѣшивающей связки, одинъ или два такихъ сосуда идутъ къ узламъ позади мечевиднаго отростка, другіе два или одинъ болѣе толстыхъ сосуда направляются между сухожильнымъ центромъ и сердечной сорочкой назадъ—къ наддіафрагмальнымъ узламъ между полной веной и пищеводомъ. Въ другихъ случаяхъ сосудовъ, идущихъ къ узламъ позади мечевиднаго отростка совсѣмъ нѣтъ, а всѣ сосуды послѣ прободенія грудобрюшной преграды идутъ между ея сухожильнымъ центромъ и сердечной сорочкой къ названному наддіафрагмальнымъ узламъ. (f, g рис. 4-й). Послѣдніе случаи несомнѣнно существуютъ, такъ какъ подобныя отношенія встрѣчаются также на такихъ препаратахъ, на которыхъ сосуды разсматриваемой средней группы оказываются налитыми вполнѣ.

Другой вариантъ представляютъ тѣ случаи, когда всѣ или большая часть сосудовъ разсматриваемой группы сливается въ подвѣшивающей связкѣ въ толстый стволъ, который направляется въ связкѣ параллельно ея печеночному прикрѣпленію, болѣе или

менѣе близко къ этому прикрѣпленію, назадъ. Перейдя на грудобрюшную преграду, стволъ этотъ поворачиваетъ иногда направо, иногда налево—последнее бываетъ чаще. Въ первомъ случаѣ онъ уходитъ подлѣ нижней полой вены въ грудную полость и впадаетъ въ правые средніе наддиафрагмальные узлы. Во второмъ случаѣ онъ идетъ или выше вѣнечной связки, или ниже ея. Когда стволъ идетъ выше вѣнечной связки, онъ рано или поздно поворачиваетъ внизъ и назадъ, проходитъ подъ лѣвой трехугольной связкой и впадаетъ либо въ узелъ на лѣвой сторонѣ входа въ желудокъ, либо, обогнувъ *foramen oesophageum* грудобрюшной преграды, впадаетъ въ одинъ изъ узловъ желудочно-поджелудочной группы. Когда стволъ идетъ ниже вѣнечной связки, онъ въ *lig. phrenico-oesophageum* направляется либо къ верхнимъ узламъ верхней желудочно-сальниковой группы, либо къ узламъ въ *lig. gastro-pancreaticum*. Встрѣчаются и такіе комбинаціи, когда одна часть сосудовъ даетъ стволъ, остающійся въ брюшной полости, другая—стволъ, прободающій грудобрюшную преграду впереди сухожильнаго центра и направляющійся по ея верхней поверхности назадъ, подобно сосудамъ вышеописаннаго варьянта.

Стволы *задней группы* внутреннихъ сосудовъ (d рис. 1-й и 5-й) сравнительно рѣдко такъ тѣсно присоединяются къ сосудамъ средней группы, что выдѣлить задніе сосуды, какъ отдѣльную группу оказывается невозможнымъ. Тогда приходится говорить о замѣщеніи задней группы среднею. Область, принадлежащая сосудамъ задней группы, всегда не велика; она примыкаетъ къ задней трети подвѣшивающей связки, будучи шире спереди и уже сзади. Сообразно съ этимъ сосуды задней группы всегда коротки. Стволы, образующіеся въ подвѣшивающей связкѣ изъ сосудовъ этой группы, иногда поднимаются въ связкѣ къ тому же мѣсту, что сосуды средней группы, и, сливаясь или не сливаясь съ ними, уходятъ къ узламъ позади мечевиднаго отростка; иногда же для того, чтобы дойти до узловъ позади мечевиднаго отростка, они прободаютъ грудобрюшную преграду дальше кзади, чѣмъ сосуды средней группы даннаго случая. Когда сосуды средней группы идутъ не къ узламъ позади мечевиднаго отростка, и сосуды задней группы точно также иногда направляются вмѣстѣ съ ними къ соответственнымъ узламъ. Такъ идутъ, однако, сосуды задней группы рѣже; чаще они направляются по совершенно иному пути, чѣмъ сосуды средней группы того же

объекта. Вообще же сосуды задней группы, кромѣ названнаго, къ узламъ позади мечевиднаго отростка, идутъ по слѣдующимъ путямъ. Въ однихъ случаяхъ изъ подвѣшивающей связки они направляются направо и уходятъ вмѣстѣ съ нижней полой веной въ грудную полость, гдѣ впадаютъ въ наддиафрагмальные узлы, расположенные около полой вены (i—i рис. 4-й); иногда, чтобы достигнуть тѣхъ же узловъ, рассматриваемые сосуды прободаютъ грудобрюшную преграду по лѣвую сторону подвѣшивающей связки (h рис. 4-й). Въ другихъ случаяхъ сосуды задней группы по нижней поверхности грудобрюшной преграды направляются налѣво, проходятъ позади лѣвой доли печени и направляются вдоль lig. phrenico-oesophageum къ узламъ на брюшномъ отрѣзкѣ пищевода, или къ узламъ у входа въ желудокъ, или къ узламъ въ lig. gastro-pancreaticum. Въ иныхъ случаяхъ сосуды по грудобрюшной преградѣ идутъ направо, затѣмъ огибаютъ правую печеночную вену и спускаются позади нижней полой вены къ узламъ поддиафрагмальной группы или къ нижнимъ узламъ въ lig. gastro-pancreaticum. Встрѣчаются, наконецъ, случаи, въ которыхъ сосуды задней группы идутъ и по тому, и по другому направленію.

Чтобы не возвращаться къ сосудамъ, идущимъ въ подвѣшивающей связкѣ, при описаніи сосудовъ лѣвой доли, скажу здѣсь же о *внутреннихъ сосудахъ этой доли*. Сосудамъ этимъ на поверхности печени не только абсолютно, но и относительно обыкновенно принадлежитъ меньшая область, чѣмъ такимъ же сосудамъ правой доли. Болѣе длинныя стволы, какъ и на правой долѣ, принадлежатъ сосудамъ средней группы. По вступленіи въ подвѣшивающую связку сосуды лѣвой доли какъ правило рано или поздно сливаются съ сосудами правой доли, и только въ рѣдкихъ случаяхъ они даютъ кромѣ того стволы, которые принимаютъ различное отъ остальныхъ, идущихъ въ связкѣ сосудовъ направленіе; относительно чаще это послѣднее бываетъ съ сосудами задней группы, мѣстомъ окончанія и такихъ сосудовъ являются все тѣ же извѣстные намъ узлы, въ которыхъ оканчиваются вообще внутренніе сосуды. Какъ на рѣдкій вариантъ должно указать на случаи, подобные описанному въ протоколѣ 11-мъ, гдѣ всѣ стволы средней группы внутреннихъ сосудовъ лѣвой доли шли къ узламъ въ lig. gastro-pancreaticum, въ то время какъ правой доли къ наддиафрагмальнымъ узламъ.

Къ сказанному о сосудахъ, идущихъ въ подвѣшивающей связкѣ остается прибавить еще, что кромѣ болѣе крупныхъ сосудовъ и связывающихъ ихъ анастомозовъ въ связкѣ наливается еще густая капиллярная сѣть.

Представленное описаніе внутреннихъ сосудовъ выпуклой поверхности находится въ согласіи съ описаніемъ этихъ сосудовъ у авторовъ лишь по столько, по сколько дѣло касается сосудовъ нашей передней группы и сосудовъ, уходящихъ къ узламъ позади мечевиднаго отростка. О сосудахъ, остающихся въ брюшной полости, у авторовъ (*Криккенкъ, Бианъ, Гьюсонъ*) находятся весьма недостаточныя указанія. Задняя группа сосудовъ какъ особая группа только намѣчена *Саттеемъ*. О такихъ же сравнительно нерѣдкихъ случаяхъ, когда всѣ (за исключеніемъ, конечно, передней группы) или большая часть сосудовъ подвѣшивающей связки идетъ къ наддиафрагмальнымъ узламъ подлѣ нижней полой вены (правая группа среднихъ наддиафрагмальныхъ узловъ) ни одинъ изъ извѣстныхъ мнѣ авторовъ не упоминаетъ.

О путяхъ второго этапа для внутреннихъ сосудовъ приходится сказать не многое, такъ какъ такими путями являются тѣ же сосуды и узлы, которые указаны при описаніи заднихъ сосудовъ правой доли. Здѣсь остается только сказать о вторыхъ этапахъ для сосудовъ, вступающихъ въ узлы позади мечевиднаго отростка. Для этихъ сосудовъ вторыми этапами будутъ сосуды и узлы правой и лѣвой грудной цѣпи, равно какъ непостоянные узлы позади грудины. Сосуды, выходящіе изъ узловъ позади мечевиднаго отростка (изъ срединной группы переднихъ наддиафрагмальныхъ узловъ) идутъ то къ узламъ правой грудной цѣпи, то къ узламъ лѣвой грудной цѣпи, то къ узламъ той и другой. Это обычный для разсматриваемыхъ сосудовъ второго порядка этапный путь. Но кромѣ него мнѣ случалось наливать такіе сосуды, какой изображенъ на рис. 6-мъ, гдѣ изъ узла позади мечевиднаго отростка выходятъ, кромѣ сосудовъ къ груднымъ узламъ, толстый стволъ, который подымается вдоль *vasa pericardiacae phrenicae* вверхъ по сердечной сорочкѣ и оканчивается въ узлѣ, лежащемъ на верхней полой венѣ. Въ другихъ случаяхъ подобный же сосудъ шелъ къ узламъ въ воротахъ легкаго.

Группа переднихъ сосудовъ выпуклой поверхности правой доли состоитъ изъ различнаго числа стволонъ, перегибающихся черезъ правый и передній край печени и идущихъ далѣе по вогнутой поверхности. Тѣ, которые перегибаются черезъ правый край и черезъ передній край ближе къ переднему правому углу доли, на вогнутой поверхности либо впадаютъ въ тотъ или другой болѣе крупный стволъ, либо входятъ въ составъ звѣздообразныхъ сосудовъ. Тѣ, которые перегибаются черезъ край ближе къ правой вырѣзкѣ печени или къ отвѣчающему ей мѣсту, по вогнутой поверхности подходятъ сбоку къ дну желчнаго пузыря; здѣсь они дѣлятся на нѣсколько стволонъ, которые поднимаются на желчный пузырь и принимаютъ участіе въ образованіи на немъ описываемаго ниже сосудистаго сплетенія. Наконецъ, тѣ передніе сосуды, которые перегибаются черезъ передній край лѣвѣе правой вырѣзки, идутъ по квадратной долѣ въ лѣвую продольную борозду или, перегибаясь на вогнутую поверхность въ самой вырѣзкѣ, вступаютъ сразу въ эту борозду. Одни изъ этихъ сосудовъ идутъ болѣе или менѣе въ отвѣсномъ направленіи къ тому мѣсту края, гдѣ они переходятъ на вогнутую поверхность,— это будутъ правые, другіе проходятъ болѣе или менѣе длинный путь вдоль самага края, —это будутъ лѣвые. Болѣе крупными стволами этой группы бывають тѣ, которые располагаются ближе къ переднему наружному углу доли (*i* на рис. 1-мъ), и стволъ, тянущійся вдоль передняго края (*k* на рис. 1-мъ). Иногда стволы, перегибающіеся черезъ передній край, проходятъ длинный путь по вогнутой поверхности правой доли, чтобы вступить въ заднюю полувину правой борозды.

Сосуды четвертой большой группы, т. е. сосуды уходящіе въ вещество печени, въ видѣ хорошо выраженныхъ звѣздообразныхъ фигуръ на выпуклой поверхности правой доли встрѣчаются не часто. Они располагаются въ различныхъ мѣстахъ доли, почти всегда не далеко отъ передняго края ея. Въ рѣдкихъ случаяхъ сосудами, принадлежащими къ этой группѣ, но не слагающимися въ звѣздообразной формы фигуры, бываетъ занять болѣе или менѣе значительный участокъ поверхности доли. Этотъ участокъ лежитъ впереди длинныхъ стволонъ наружной группы заднихъ сосудовъ; названные стволы въ такихъ случаяхъ бывають значительно укорочены.

На выпуклой поверхности *лѣвой доли* мы различимъ, какъ и на правой, четыре большихъ группы сосудовъ: сосуды задніе, внутренніе, передніе и звѣздообразные.

О *звѣздообразныхъ* и *переднихъ сосудахъ* можно сказать немного. Первые встрѣчались мнѣ лишь въ рѣдкихъ случаяхъ въ переднихъ областяхъ доли; что же касается вторыхъ, то сколько нибудь крупнѣе стволы ихъ занимаютъ участокъ, прилегающій къ переднему краю у лѣвой вырѣзки,—послѣ перегиба черезъ передній край они идутъ по вогнутой поверхности доли въ лѣвую продольную борозду.—Все необходимое о *внутреннихъ сосудахъ* было уже сказано при описаніи тѣхъ же сосудовъ правой доли. Такимъ образомъ, теперь остается только описать задніе сосуды.—Эти послѣдніе мы дѣлили на три меньшія группы: наружную, среднюю и внутреннюю.

Въ *наружной группѣ заднихъ сосудовъ* различаются длинныя и короткіе стволы. Одинъ длинный стволъ—самый наружный (*g* на рис. 2-мъ)—начинается недалеко отъ лѣвой вырѣзки печени у передняго края и идетъ параллельно и вдоль этого края. На пути къ треугольной связкѣ онъ принимаетъ въ себя съ правой стороны сосуды такого же какъ самъ направленія и съ лѣвой стороны мелкіе боковыя вѣтви. Описанный длинный стволъ не всегда существуетъ и часто онъ замѣщается нѣсколькими, сливающимися къ треугольной связкѣ, параллельно идущими сосудами. Другой длинный стволъ—главный стволъ наружной группы (*f* на рис. 2-мъ)—лежитъ правѣе предыдущаго; онъ начинается также близко у передняго края и на пути къ треугольной связкѣ, располагаясь въ нѣкоторомъ разстояніи отъ остраго края доли, не слѣдитъ такъ, какъ предыдущій, за направленіемъ этого края. Стволъ этотъ принимаетъ крупныя боковыя вѣтви какъ съ правой, такъ и съ лѣвой стороны, и часто своимъ развѣтвленіемъ занимаетъ большую часть области, принадлежащей сосудамъ данной группы; подобно предыдущему онъ по крайней мѣрѣ мѣстами является двойнымъ или тройнымъ. Остальные сосуды группы короче, а нѣкоторые и весьма коротки. Во многихъ случаяхъ сейчасъ описанный стволъ отсутствуетъ, а вмѣсто него находится нѣсколько въ нѣкоторомъ разстояніи другъ отъ друга лежащихъ стволовъ, располагающихся болѣе въ сагиттальномъ направленіи.

Въ треугольной связкѣ всѣ стволы наружной группы богато между собою анастомозируютъ, иногда образуя настоящую сѣть съ

крупными петлями. Въ связкѣ наливается также и капиллярная сѣть.

По выходѣ изъ связки сосуда наружной группы—одни прободаютъ грудобрюшную преграду, другіе остаются въ брюшной полости. Остающіеся въ брюшной полости на пути къ узламъ принимаютъ нѣсколько различное направленіе (е—е рис. 7): наружные по нижней поверхности грудобрюшной преграды обыкновенно описываютъ большую дугу, подходятъ къ лѣвой вѣтви лѣвой нижней діафрагмальной артеріи и вдоль нея, обогнувъ верхній край лѣваго надпочечника, направляются къ соответственнымъ узламъ; внутренніе спускаются вдоль восходящей вѣтви артеріи болѣе промолниейно къ своимъ узламъ.

Самымъ обычнымъ мѣстомъ окончанія остающихся въ брюшной полости сосудовъ наружной группы являются узлы лѣвой поддіафрагмальной цѣпи. Тотъ или другой изъ нихъ—изъ лежащихъ болѣе кнутри иногда оканчивается въ лѣвомъ узлѣ околокардіальной группы или послѣ расщепленія надвое еще и въ одномъ изъ переднихъ околокардіальныхъ узловъ, въ другомъ случаѣ такой сосудъ можетъ огнать foramen oesophageum грудобрюшной преграды (слѣва и снизу) и впадать въ узлы желудочно-поджелудочной цѣпи; наконецъ, въ иныхъ случаяхъ нѣкоторые изъ этихъ сосудовъ спускаются къ переднимъ и лѣвымъ околоаортальнымъ узламъ—узламъ, лежащимъ на высотѣ почечныхъ кровеносныхъ сосудовъ.

Прободающіе грудобрюшную преграду сосуда наружной группы по верхней поверхности ея направляются къ лѣвымъ узламъ передней (l—m на рис. 4-мъ) и средней наддіафрагмальной группы и къ узламъ у пищевода (правая группа среднихъ наддіафрагмальныхъ узловъ) или на немъ. Чаше мнѣ случалось наливать сосуды, идущіе къ узламъ позади 7-го ребернаго хряща, т. е. къ лѣвымъ переднимъ наддіафрагмальнымъ. Какъ часто встрѣчаются сосуды прободающіе грудобрюшную преграду, я сказать не могу. Наливаются они не легко: обыкновенно однако, хотя не всегда, когда я обращаю особенное вниманіе на то, чтобы налить ихъ, мнѣ это удавалось; по этому я думаю, что сосуды эти существуютъ чаще, чѣмъ это отмѣчено въ моихъ таблицахъ.

Какъ до извѣстной степени на варьянтъ сосудовъ наружной группы я могу указать на случаи, когда изъ части ихъ слагается стволъ, идущій по нижней поверхности грудобрюшной преграды

направо, затѣмъ прободающій ее и изливающейся въ узлы правой средней наддиафрагмальной группы.

Отводящіе сосуды *средней и внутренней группы* можно разсматривать вмѣстѣ. И та и другая на поверхности доли обыкновенно бываетъ образована значительнымъ числомъ болѣе короткихъ сосудовъ. Въ трехугольной и вѣнечной связкѣ между сосудами обѣихъ группъ, равно какъ и между ними и сосудами наружной группы существуютъ обильные анастомозы, такъ что при наливаніи сосудовъ только наружной группы, черезъ эти анастомозы часто наливаются и отводящіе сосуды средней и даже внутренней группы.

Отводящіе сосуды средней и внутренней группы (d-d, с рис. 7-ой) изъ трехугольной и вѣнечной связки переходятъ въ числѣ нѣсколькихъ стволовъ въ lig. phrenico-oesophageum и направляются, располагаясь сосуды средней группы выше, внутренней ниже, къ узламъ на пищеводѣ, если такіе узлы въ данномъ случаѣ оказываются на лицо, затѣмъ—къ верхнимъ узламъ на малой кривизнѣ желудка и, наконецъ, къ узламъ въ желудочно-поджелудочной связкѣ. Сосуды средней группы чаще находятъ себя окончаніе въ брюшныхъ околопищеводныхъ узлахъ, чѣмъ сосуды внутренней группы. Ирѣдка всѣ или нѣкоторые изъ сосудовъ средней группы идутъ къ лѣвому околокардіальному узлу или огибаютъ foramen oesophageum слѣва и только тогда впадаютъ въ узлы въ lig. gastro-pancreaticum, а сосуды внутренней группы спускаются по задней стѣнкѣ живота къ верхнимъ узламъ между нижней половиной веной и аортой. Какъ на варьянтъ этихъ сосудовъ приходится смотрѣть на случаи, когда они вмѣсто того, чтобы идти къ узламъ въ брюшной полости прободаютъ грудобрюшную преграду и направляются къ наддиафрагмальнымъ узламъ между половиной веной и аортой или къ узламъ позади мечевиднаго отростка.

Представленное описаніе заднихъ сосудовъ выпуклой поверхности лѣвой доли, какъ не трудно видѣть, находится въ болѣемъ согласіи съ описаніемъ тѣхъ же сосудовъ у старыхъ авторовъ и въ частности у *Маскани*, чѣмъ съ описаніемъ ихъ у авторовъ послѣ *Маскани* и прежде всего у *Саттея*, съ описаніемъ котораго мои препараты, какъ и описаніе *Маскани* совершенно расходятся. Противно *Маскани* прободающіе грудобрюшную преграду сосуды сред-

пей и внутренней группы я находилъ лишь въ рѣдкихъ случаяхъ, и наоборотъ въ текстѣ совсѣмъ не упоминаемые *Масканы* прободающіе грудобрюшную преграду сосуды наружной группы, указанные *Кружишеникомъ*, я наливать не такъ рѣдко и считаю ихъ, если не постоянными, то все же обычными сосудами группы.

Вторыми этапами для сосудовъ, берущихъ начало на выпуклой поверхности лѣвой доли печени—для сосудовъ, прободающихъ грудобрюшную преграду, будутъ уже описанные сосуды, происходящіе изъ наддіафрагмальныхъ узловъ, и узлы, въ которыхъ они оканчиваются. Для сосудовъ, впадающихъ въ узлы на пищеводъ, входъ въ желудокъ, на малої кривизнѣ его и въ желудочно-поджелудочной связкѣ, вторыми этапами будутъ сосуды и узлы, заложенные въ этой послѣдней связкѣ, затѣмъ узлы селезеночно-поджелудочной цѣпи и верхней печеночной цѣпи.

Вторыми этапами для сосудовъ, изливающихся въ узлы лѣвой поддіафрагмальной группы будутъ узлы и соединяющіе ихъ сосуды околоаортальной цѣпи, а также узлы и сосуды селезеночно-поджелудочной цѣпи.

Въ первыхъ этапныхъ узлахъ сосудовъ выпуклой поверхности лѣвой доли печени находятъ себѣ также окончаніе нѣкоторые сосуды пищевода, желудка, легкаго, поджелудочной железы, лѣваго надпочечника, лѣвой почки и грудобрюшной преграды.

Сосуды *вогнутой поверхности правой доли* согласно нашему дѣленію распадаются на заднюю и внутреннюю группу. Третью группу образуютъ сосуды, дающіе стволы, уходящіе въ вещество печени—звѣздообразные сосуды.

Среди сосудовъ *задней группы* обособляются по своей величинѣ обыкновенно два-три ствола. Изъ нихъ самымъ крупнымъ чаще всего бываетъ тотъ, который лежитъ болѣе кнутри. Стволъ этотъ (h рис. 3-й) беретъ начало недалеко отъ передняго края доли, нѣсколько отступя кнутри отъ передняго праваго угла ея. Отсюда онъ идетъ по направленію кзади и кнутри—къ тому мѣсту задняго края, гдѣ къ нему прилегаетъ нижняя полая вена, къ краю *sulcus pro vena cava*. На этомъ пути онъ принимаетъ въ себя крупныя вѣтви, особенно съ наружной стороны, а болѣе кзади къ нему присоединяются и

идуть съ нимъ рядомъ еще два-три болѣе короткихъ сосуда. Иногда онъ расщепляется надвое, и одинъ стволъ идетъ по указанному пути, другой же уходитъ въ поперечную борозду. Описанные стволы вмѣстѣ съ нѣкоторымъ числомъ короткихъ сосудовъ составляютъ внутренніе сосуды задней группы. Другіе задніе сосуды занимаютъ область, расположенную кнаружи отъ той части поверхности доли, которая покрыта сейчасъ описанными сосудами, по преимуществу область *impressio renalis*. Они образуютъ наружные сосуды задней группы. Болѣе крупныхъ сосудовъ между ними бываетъ то одинъ, то два, рѣдко больше. Эти стволы идутъ или болѣе или менѣе въ сагиттальномъ направленіи, или же болѣе въ косомъ—снаружи спереди кзади кнутри. Въ первомъ случаѣ они или еще на поверхности печени вблизи задняго края доли круто поворачиваютъ кнутри и идутъ вдоль этого края, или же, только сойдя съ печени въ нижній листокъ вѣнечной связки, поворачиваютъ кнутри, и такъ или иначе подходятъ къ наружной сторонѣ нижней полой вены. Во второмъ случаѣ они просто направляются къ тому мѣсту задняго края, которое лежитъ тотчасъ кнаружи отъ нижней полой вены. Когда бываетъ одинъ крупный стволъ (bb рис. 3-й), то онъ обыкновенно имѣетъ именно это послѣднее направленіе, и тогда участокъ, прилегающій къ наружной половинѣ задняго края доли, оказывается свободнымъ отъ его развѣтвленій и покрытъ короткими стволами (a рис. 3-й), уходящими въ нижній листокъ вѣнечной связки, чтобы тамъ присоединиться или впасть въ проходящія тутъ задніе сосуды выпуклой поверхности доли.—Область, занятая развѣтвленіемъ сосудовъ задней группы не всегда однако бываетъ такою, какъ сейчасъ описано: нерѣдко она значительно уменьшается—спереди звѣздообразными сосудами, снутри бѣльшимъ развитіемъ сосудовъ внутренней группы. Точно также и взаимное отношеніе областей наружныхъ и внутреннихъ сосудовъ задней группы бываетъ различно.

Внутренніе сосуды задней группы сходятъ съ печени на переднюю поверхность нижней полой вены обыкновенно въ числѣ двухъ, трехъ, четырехъ стволовъ. На венѣ стволы эти тотчасъ расщепляются, и, хотя нѣкоторые происшедшіе отъ расщепленія стволы снова сливаются, все же общее число спускающихся дальше по нижней полой венѣ стволовъ бываетъ больше, чѣмъ число вступившихъ на нее съ печени. Мѣстомъ окончанія внутреннихъ сосудовъ задней группы служатъ верхніе узлы между полой веной и

аортой, т. е. узлы, лежащие позади или выше лѣвой почечной вены, узлы на стволѣ правой нижней діафрагмальной артерин (рѣдко) и главнымъ образомъ узлы тотчасъ ниже лѣвой почечной вены. Но кромѣ того тотъ или иной стволъ или сосудъ, получившійся отъ расщепленія, направляется иногда къ узламъ на передней поверхности аорты или спускается, обогнувъ нижнюю полую вену снаружи, къ узламъ позади правой почечной вены и артерин (къ глубокимъ почечнымъ узламъ).—Нѣкоторые изъ внутреннихъ сосудовъ задней группы иногда впадаютъ въ узелъ, лежащій на передней поверхности полой вены тотчасъ ниже печени и даже, какъ мнѣ пришлось видѣть одинъ разъ,—на самой поверхности печени у задняго края; узелъ на передней поверхности полой вены встрѣчается не часто, его нужно отнести къ категоріи такъ называемыхъ вставочныхъ узловъ.

Наружные сосуды задней группы—одни, самые наружные, какъ уже сказано, сходятъ съ печени въ нижній листокъ вѣнечной связки и или впадаютъ, или присоединяются къ сосудамъ, сопровождающимъ правую нижнюю діафрагмальную артерію,—сосудамъ, берущимъ начало на выпуклой поверхности правой доли. Сосудовъ этихъ не бываетъ въ томъ случаѣ, какъ объ этомъ говорилось, когда существуетъ тотъ крупный стволъ, который идетъ снаружи внутри по самой поверхности печени вблизи задняго края. Другіе наружные сосуды задней группы сходятъ съ печени тотчасъ вправо отъ нижней полой вены (въ *lig. hepato-renal*). Подобно внутреннимъ сосудамъ они также расщепляются и вновь сливаются, подходят къ полой венѣ и частью справа, частью позади, частью спереди нея направляются къ тѣмъ же узламъ, въ которыхъ нашли себѣ окончаніе внутренние сосуды, т. е. къ верхнимъ узламъ между полой веной и аортой (къ узламъ позади или выше лѣвой почечной вены, къ узламъ у правой нижней діафрагмальной артерин, къ узламъ тотчасъ ниже лѣвой почечной вены) и къ глубокимъ почечнымъ узламъ; только наружные сосуды въ противоположность внутреннимъ чаще оканчивается и въ этихъ послѣднихъ узлахъ. Къ рѣдкимъ находкамъ относятся, сколько я могу судить, такіе случаи, когда одинъ изъ наружныхъ сосудовъ спускается по передней поверхности нижней полой вены далеко внизъ и впадаетъ въ одинъ изъ нижнихъ узловъ между нею и аортой; у меня налилса такой сосудъ всего одинъ разъ.

Сосуды *внутренней группы* (f-f рис. 3-II) вогнутой поверхности правой доли направляются къ правой продольной бороздѣ и къ правому концу поперечной борозды. По мѣсту вступленія въ борозду ихъ можно раздѣлить на передніе и задніе. Передніе входятъ въ борозду около дна желчнаго пузыря и въ переднюю половину продольной борозды, задніе—въ заднюю половину продольной борозды и въ поперечную борозду. Передніе сосуды относительно коротки. Вступивъ въ борозду, они частью поднимаются на желчный пузырь, частью идутъ по обращенной къ желчному пузырю свободной поверхности борозды. Подымающіеся на желчный пузырь образуютъ на его свободной поверхности сплетеніе съ вытянутыми по длинѣ пузыря крупными петлями. Сплетеніе это располагается сначала болѣе на правой сторонѣ свободной поверхности пузыря, но чѣмъ ближе къ его шейкѣ, тѣмъ болѣе оно обыкновенно переходитъ на лѣвую сторону. Сосуды, идущіе въ бороздѣ по самой поверхности печени, изъ которыхъ нѣкоторые также поднимаются на прилегающую поверхность пузыря, или остаются все время по правую сторону пузыря, или—по крайней мѣрѣ нѣкоторые—направляются наизкосъ между печью и пузыремъ справа налѣво и вновь появляются на поверхности слѣва его шейки. Эти послѣдніе сосуды, анастомозируя между собою, позади пузыря также образуютъ сплетеніе. Въ сплетеніи на свободной поверхности пузыря принимаютъ участіе и тѣ передніе сосуды выпуклой поверхности, которые приходятъ въ правую продольную борозду, равно какъ глубокіе сосуды, появляющіеся на поверхности въ бороздѣ, а также сосуды, берущіе начало на печени спереди вокругъ дна желчнаго пузыря,—въ тѣхъ случаяхъ, когда, какъ это нерѣдко бываетъ, правая борозда не достигаетъ передняго края органа. О сосудахъ, образующихъ сплетеніе на пузырьѣ, происходящихъ на квадратной долѣ, будетъ сказано при описаніи сосудовъ этой доли; тогда же скажемъ и о дальнѣйшей судьбѣ всѣхъ этихъ сосудовъ.

Задніе сосуды внутренней группы, по крайней мѣрѣ, нѣкоторые бываютъ иногда весьма длинныя. Длинными они бываютъ всегда въ тѣхъ случаяхъ, когда внутренніе сосуды задней группы коротки; въ этихъ случаяхъ они могутъ почти совершенно замѣщать эти внутренніе сосуды. Самые длинныя изъ нихъ берутъ начало, подобно длиннымъ сосудамъ задней группы, недалеко отъ передняго края печени; они тянутся по поверхности органа наизкосъ къзади и

кнутри—къ правому концу поперечной борозды. Такихъ сосудовъ бываетъ одинъ, два. На пути къ поперечной бороздѣ они анастомозируютъ съ сосудами задней группы и принимаютъ то большей, то меньшей величины боковыя вѣтви; величина наружныхъ вѣтвей находится въ прямой зависимости отъ большаго или меньшаго развитія внутреннихъ сосудовъ задней группы.—Другіе сосуды короче или совсѣмъ коротки; изъ нихъ одни уходятъ въ правую продольную борозду, другіе вмѣстѣ съ длинными въ поперечную. Иногда вся группа, какъ уже сказано, состоитъ только изъ такихъ болѣе короткихъ сосудовъ.

Такъ какъ всѣ сосуды внутренней группы въ концѣ концовъ направляются въ поперечную борозду и изъ нея уходятъ въ *lig. hepato-duodenale*, то о мѣстѣ окончанія ихъ я скажу тогда, когда будутъ рассмотрѣны и прочіе сосуды, приходящіе въ поперечную борозду.

Кромѣ описанныхъ сосудовъ, все время остающихся на поверхности печени, пока они не уйдутъ съ нея, на вогнутой поверхности правой доли съ большимъ постоянствомъ обнаруживаются короткіе стволы, уходящіе въ вещество железы (*звѣздообразные сосуды*). Здѣсь именно иногда встрѣчаются красивыя, крупныя звѣздообразныя фигуры, какія оказались, напримѣръ, на препаратѣ, съ котораго сдѣланъ рис. 3-й. Такихъ крупныхъ звѣздъ бываетъ одна, двѣ. Онѣ располагаются всегда на участкѣ, прилежащемъ къ переднему краю у передняго праваго угла доли. Въ другихъ случаяхъ на томъ же участкѣ поверхности печени мы не находимъ сосудовъ, слагающихся въ звѣздообразныя фигуры, но среди сѣти тамъ и тутъ обнаруживаются стволики, которые очень скоро погружаются въ вещество печени. Эти уходящіе въ глубь сосуды, какъ и отводящіе стволы звѣздообразныхъ фигуръ можно препаровать въ веществѣ печени и, такимъ образомъ, прослѣдить до того мѣста, гдѣ они вновь появятся на поверхности. Такимъ мѣстомъ будетъ правая продольная борозда и поперечная борозда. На пути въ веществѣ печени сосуды эти сливаются, анастомозируютъ или принимаютъ въ себя глубокіе сосуды, а по выходѣ на поверхность сливаются съ другими сосудами, находящимися въ соотвѣтственномъ мѣстѣ.—Вдоль праваго края доли звѣздообразныхъ фигуръ мнѣ не случилось наливать.

На *квадратной доли* обособляются троякаго направленія отводящіе сосуды: одни идутъ въ правую продольную борозду, другіе въ лѣвую, третьи въ поперечную. Величина сосудовъ того или иного направленія бываетъ различна. Если сосуды, идущіе въ поперечную борозду, длинны, то сосуды, идущіе въ ту и другую продольную борозду, коротки и малы, и наоборотъ. Сосуды, идущіе въ правую продольную борозду, какъ и соотвѣтственные сосуды правой доли, поднимаются на желчный пузырь. Крупнопетлистая сѣть, образуемая ими на пузырьѣ, расположена сначала болѣе по лѣвой сторонѣ его свободной поверхности. Такимъ образомъ на свободной поверхности желчнаго пузыря выдѣляется, такъ сказать, два главныхъ потока лимфатическихъ сосудовъ: одинъ, направляющійся по лѣвой его сторонѣ, другой, направляющійся по правой сторонѣ и только къ шейкѣ пузыря частью мало по малу переходящій на лѣвую сторону. Вслѣдствіе, однако, богатыхъ анастомозовъ между правыми и лѣвыми сосудами, и главнымъ образомъ вслѣдствіе того, что нѣкоторые сосуды, происходящіе на квадратной долѣ, уже у два пузыря иногда переходятъ съ лѣвой стороны на правую, а сосудъ съ правой доли съ правой стороны на лѣвую, указанное отношеніе сосудовъ не всегда бываетъ достаточно выражено.—Всѣ сосуды квадратной доли рано или поздно приходятъ въ поперечную борозду, почему о дальнѣйшемъ ихъ пути скажу также позднѣе.

На *Спигеліевой доли* мы различили передніе и задніе сосуды. Передніе сосуды идутъ въ поперечную борозду, въ лѣвую продольную и на переднюю поверхность нижней полой вены. Сосуды, идущіе въ поперечную и лѣвую продольную борозду, направляются дальше вмѣстѣ съ другими сосудами, поступающими въ эти борозды,—о нихъ послѣ; сосуды же, идущіе на нижнюю полую вену, направляются по *tuberculum caudatum* доли,—они сливаются съ короткими внутренними сосудами задней группы правой доли и идутъ къ тѣмъ же узламъ, что эти. Задніе сосуды Спигеліевой доли съ печени переходятъ на заднюю стѣнку живота и спускаются къ узламъ, лежащимъ по лѣвую сторону нижней полой вены—узламъ правой поддіафрагмальной группы и верхнимъ правымъ узламъ околоаортальной цѣпи.

На вогнутой поверхности *левой доли*, кромѣ собирающихъ сосудовъ, уходящихъ въ вещество печени, существуетъ собственно

лишь одна группа— группа внутренних сосудов, т. е. сосудов, уходящих въ лѣвую продольную борозду. Сосуды этой группы, какъ объ этомъ говорилось, одни уходятъ въ ту часть лѣвой продольной борозды, которая отдѣляетъ лѣвую долю отъ квадратной, другіе уходятъ въ часть борозды, отдѣляющую лѣвую долю отъ Спигелиевой. Первые будутъ передними сосудами группы, вторые— задними. Передніе сосуды (п, п рис. 3-й) чаще бываютъ не велики, число ихъ бываетъ различно—болѣе крупныхъ обыкновенно два-три ствола. Идутъ эти сосуды по поверхности доли болѣе или менѣ поперечно къ направленію борозды,—войдя же въ борозду, они направляются по ней назадъ и достигаютъ *lig. hepato-duodenale*, въ которую и уходятъ. Среди заднихъ сосудовъ обособляются иногда два, иногда три или четыре крупныхъ ствола и нѣсколько меньшихъ. Они со всѣхъ сторонъ сходятся къ бороздѣ между лѣвой и Спигелиевой долей. Самымъ крупнымъ часто бываетъ тотъ стволъ, который идетъ къ мѣсту впаденія поперечной борозды въ продольную, иначе говоря къ переднему концу борозды между лѣвой и Спигелиевой долями. Стволъ этотъ своими вѣтвями иногда покрываетъ значительную часть поверхности доли. Другой крупный стволъ идетъ въ такомъ случаѣ болѣе или менѣ параллельно заднему краю доли и развѣтвляется на прилежащемъ къ этому краю участкѣ. Онъ уходитъ въ задній конецъ борозды между лѣвой и Спигелиевой долей. Между этими двумя стволами располагаются болѣе короткіе. Болѣе или менѣ параллельно и вблизи борозды между лѣвой и квадратной долей тянется иногда третій крупный стволъ; этотъ стволъ замѣщаетъ иногда въ значительной мѣрѣ передніе сосуды группы. Въ другихъ случаяхъ отношенія стволонъ бываетъ такимъ, какъ оно изображено на рис. 3-мъ, гдѣ всѣ стволы болѣе или менѣ одинаковой величины. Въ иныхъ случаяхъ отношенія стволонъ бываютъ опять иными. Вообще число стволонъ, размѣры отдѣльныхъ стволонъ, взаимное ихъ положеніе далеко не постоянно; повидному, описанный самый крупный стволъ оказывается наиболѣе постояннымъ. Войдя въ борозду, сосуды сливаются между собою и съ появляющимися здѣсь глубокими и снова расщепляются, и одни изъ нихъ уходятъ въ *lig. hepato-duodenale*, другіе въ малый сальникъ.

Такимъ образомъ, въ *lig. hepato-duodenale* поступаетъ значительная часть поверхностныхъ сосудовъ вогнутой поверхности пе-

чени. Сюда идутъ сосуды внутренней группы правой доли, всѣ сосуды квадратной доли, передніе сосуды Спигеліевой доли, наконецъ, передніе и часть заднихъ сосудовъ внутренней группы лѣвой доли. Кромѣ того въ lig. hepato-duodenale поступаютъ нѣкоторые изъ поверхностныхъ сосудовъ выпуклой поверхности печени, а именно передніе сосуды внутренней группы и нѣкоторые сосуды передней группы правой и лѣвой доли, наконецъ, сюда же поступаетъ большая часть нисходящихъ глубокихъ сосудовъ. Всѣ эти сосуды находятъ себѣ окончаніе въ узлахъ верхней и нижней печеночной цѣпи и въ узлахъ кишечно-поджелудочныхъ. Что касается распределенія сосудовъ въ lig. hepato-duodenale и отношенія ихъ къ заложенымъ въ ней узламъ, то, вообще говоря, сосуды, идущіе въ ближайшей къ свободному краю половинѣ связки (сосуды правой доли, сосуды съ желчнаго пузыря, частью сосуды квадратной доли и тѣ глубокіе сосуды, которые появляются въ правой половинѣ поперечной и въ правой продольной бороздахъ) и спереди кровеносныхъ сосудовъ и печеночныхъ и желчнаго протоковъ, впадаютъ въ узлы нижней печеночной цѣпи и въ нижній большой узелъ кишечно-поджелудочной группы.—сосуды, идущіе въ другой половинѣ связки и также спереди кровеносныхъ сосудовъ (сосуды квадратной доли, передніе и часть заднихъ сосудовъ лѣвой доли, сосуды выпуклой поверхности, поступающіе въ лѣвую продольную борозду, и глубокіе сосуды, которые появляются въ лѣвой половинѣ поперечной борозды и въ бороздѣ между лѣвой и квадратной долей, равно какъ часть изъ появляющихся въ бороздѣ между лѣвой и Спигеліевой долей) впадаютъ въ узлы верхней печеночной цѣпи. наконецъ, сосуды, идущіе позади воротной вены, печеночной артерій и печеночныхъ и желчнаго протоковъ (передніе сосуды Спигеліевой доли, глубокіе сосуды изъ поперечной борозды и борозды между лѣвой долей и Спигеліевой) впадаютъ въ узлы обѣихъ печеночныхъ цѣпей и въ узлы кишечно-поджелудочные — преимущественно въ верхній. Описанное отношеніе замѣчается при многоцвѣтной инъекціи сосудовъ печени, но лишь какъ предпочтительное направленіе, принимаемое сосудами того или другого происхожденія. Оно именно въ значительной мѣрѣ нарушается тѣмъ, что нѣкоторые изъ сосудовъ, идущихъ спереди кровеносныхъ сосудовъ первой группы, присоединяются къ сосудамъ второй, а изъ сосудовъ, идущихъ позади кровеносныхъ сосудовъ, одни къ сосудамъ

первой, другіе къ сосудамъ второй и обратно, равно какъ сосуды, идущіе впереди кровеносныхъ, къ сосудамъ, идущимъ позади нихъ, и обратно; кромѣ того между всѣми этими сосудами существуетъ не мало анастомозовъ, такъ что, словомъ, выдѣлить узлы, въ которыхъ съ постоянствомъ оканчивались бы сосуды того или иного происхожденія, какъ объ этомъ уже говорилось, нѣтъ никакой возможности.

Какъ на рѣдкій варьянтъ сосудовъ, идущихъ въ *lig. hepato-duodenale*, я могу указать на слѣдующіе случаи. Одинъ разъ у меня напился сосудъ, который слагался на квадратной долѣ, шелъ въ поперечной бороздѣ, принималъ въ себя тамъ нѣкоторые глубокіе сосуды и направлялся (безъ перерыва) въ *lig. hepato-duodenale* на переднюю поверхность двѣнадцатиперстной кишки, гдѣ дѣлился на два сосуда; изъ нихъ одинъ уходилъ къ узламъ у корня верхней брыжжеечной артеріи, другой направлялся въ большой сальникъ и впадалъ въ одинъ изъ узловъ нижней желудочно-сальниковой цѣпи. Въ другомъ случаѣ (см. протоколъ № 10) одинъ изъ глубокихъ сосудовъ, появляющихся въ поперечной бороздѣ, шелъ точно такимъ же образомъ и доходилъ до одного изъ узловъ нижней желудочно-сальниковой цѣпи.

Кромѣ сосудовъ, вступающихъ въ *lig. hepato-duodenale*, на вогнутой поверхности лѣвой доли мы видѣли еще сосуды, идущіе въ малый сальникъ. вмѣстѣ съ этими сосудами идутъ и тѣ передніе сосуды Спигеліевой доли, которые спускаются въ лѣвую продольную борозду, равно какъ большая часть нисходящихъ глубокихъ сосудовъ, выходящихъ на поверхность въ задней половинѣ той же борозды. Часть этихъ сосудовъ идетъ въ маломъ сальникѣ разсѣяно къ различнымъ мѣстамъ малой кривизны желудка, часть же слагается въ пучекъ, направляющійся ко входу въ желудокъ. Въ тѣхъ случаяхъ, когда существуетъ печеночная вѣтвь лѣвой верхней вѣпечной артеріи желудка, названный пучекъ идетъ вдоль этой вѣтви, въ тѣхъ же случаяхъ, когда ея нѣтъ, онъ занимаетъ соответственное ей мѣсто, т. е. лежитъ въ *pars condensata* малаго сальника. Печеночную вѣтвь лѣвой верхней вѣпечной артеріи я встрѣчалъ какъ на трупахъ взрослыхъ людей, такъ особенно часто на дѣтскихъ трупахъ. На послѣднихъ она бываетъ иногда такого же значительнаго калибра, какъ и собственная печеночная артерія (а. hep. propr.). Сосуды описываемаго пучка анастомозируютъ съ сосу-

дами съ выпуклой поверхности, идущими въ lig. phrenico-oesophageum, и впадаютъ въ рѣдкихъ случаяхъ въ узлы на брюшномъ отрѣзкѣ пищевода, обыкновенно же въ узлы у входа въ желудокъ, (верхніе узлы верхней желудочно-сальниковой цѣпи) и въ узлы въ lig. gastro-pancreaticum. Прочіе сосуды въ маломъ сальникѣ, какъ сказано, идутъ разсѣянно. Изъ нихъ одни оканчиваются въ узлахъ на малой кривизнѣ желудка, другіе — идущіе къ pars pylorica, подойдя къ малой кривизнѣ, поворачиваютъ слѣва направо и впадаютъ въ большой узелъ на a. hepatica (узелъ верхней печеночной цѣпи). Нѣкоторые изъ сосудовъ, поступающихъ или появляющихся въ бороздѣ между лѣвой и Спигеліевой долей, впадаютъ въ встрѣчающійся иногда заложенный въ самой этой бороздѣ узелъ; происходящіе изъ узла сосуды идутъ въ малый сальникъ.

Звѣздообразные сосуды на вогнутой поверхности лѣвой доли располагаются на участкѣ, прилежащемъ къ переднему краю доли на всемъ его протяженіи. Число звѣздообразныхъ фигуръ постоянно, болѣе крупныхъ бываетъ иногда три-четыре. Съ постоянствомъ и легко наливаются такіе сосуды не далеко отъ задняго лѣваго угла доли. Здѣсь обыкновенно располагаются поверхностно и болѣе значительные кровеносные сосуды.

У задняго края доли возлѣ задняго наружнаго угла ея наливаются мелкіе стволіки (г рис. 3-й), которые уходятъ въ лѣвую трехугольную связку; они принимаютъ въ себя сосуды съ выпуклой поверхности, лежащей ниже трехугольной связки, и въ связкѣ сливаются съ сосудами, идущими въ ней (наружной группой заднихъ сосудовъ выпуклой поверхности).

Изложенное описаніе лимфатическихъ сосудовъ вогнутой поверхности печени мало чѣмъ отличается отъ описанія этихъ сосудовъ у *Масканы*. *Масканы* не упоминаетъ о возможномъ окончаніи сосудовъ задней группы правой доли въ почечныхъ узлахъ, а также не указываетъ на существованіе заднихъ сосудовъ Спигеліевой доли. Описываемое *Пуарье и Кюнео* окончаніе заднихъ сосудовъ правой и Спигеліевой доли въ наддиафрагмальныхъ узлахъ, мнѣ кажется, должно считать за недоразумѣніе (ср. съ *Салпеемъ*), а даваемое *Салпеемъ* описаніе сосудовъ лѣвой доли основано на недостаточно налитыхъ объектахъ.

Объ этапахъ второго порядка и объ органахъ, которыхъ лимфатическіе сосуды изливаются въ тѣ же узлы, въ которые впадаютъ сосуды вогнутой поверхности печени, было уже все сказано при описаніи сосудовъ выпуклой поверхности.

О болѣе тонкихъ отношеніяхъ глубокихъ сосудовъ у авторовъ, наливавшихъ лимфатическіе сосуды печени ртутью, мы находимъ не многое. Впервые болѣе подробныя данныя на этотъ счетъ даетъ *Тейхманнъ*¹⁾, примѣнявшій для наливаанія ихъ свои особыя массы (по существу употребляемая мною и другими т. н. *Геротовскія* массы суть лишь модификація массъ *Тейхманна*). *Тейхманну* удалось протѣдить глубокіе лимфатическіе сосуды только до вступленія ихъ въ дольки. Междольковые лимфатическіе сосуды образуютъ по немъ или сѣти съ неравнобѣрными петлями, или пробѣгаютъ въ видѣ отдѣльныхъ стволикотъ. Они сопровождаютъ междольковыя вѣтви воротной вены, печеночной артеріи и желчныя протоки. Сливаясь, меньшіе сосуды образуютъ большіе. Эти послѣдніе направляются къ воротамъ печени, сопровождая вѣтви воротной вены, и еще въ веществѣ печени получаютъ клапаны. Связь между глубокою и поверхностною сѣтью помимо тѣхъ сосудовъ, которые въ поверхностной сѣти обособляются какъ собирающіе стволики, уходящіе въ вещество печени (наши звѣздообразныя сосуды), устанавливается еще черезъ большое число другихъ сосудовъ, происходящихъ въ глубокой сѣти и впадающихъ въ поверхностную. Эти связующіе сосуды (*Capillaren*—р. 94) располагаются то разсѣянно—по одиночкѣ, то скученно—группами. Первый способъ встрѣчается повсюду, второй въ тѣхъ мѣстахъ, „гдѣ мелкія вѣтви а. hepatica соединяются съ артеріями покрова, печени, или гдѣ болѣе крупныя вѣтви воротной вены или желчныя протоки проходятъ вплотную подъ покровомъ печени“.

Поступленіе инъекціонной массы изъ междольковыхъ лимфатическихъ сосудовъ внутрь дольки, при чемъ внутри дольки наливается красивая сѣть, въ петляхъ которой лежатъ печеночныя

¹⁾ *Op. et. loc. cit.*

представляет лимфатическіе ходы, не имѣющіе собственныхъ стѣнокъ. Въ периферическихъ частяхъ дольки стѣнки ходовъ образованы во-первыхъ „von spärlichen Bindegewebsfibrillen“, во-вторыхъ прилегающими печеночными клѣтками и желчными капиллярами,— къ центру дольки количество соединительнотканыхъ волоконъ клѣтки, было доказано *Макъ-Гиллаври* ¹⁾. Сѣтъ эта по *Макъ-Гиллаври* становится все меньше (р. 217). Кровеносные капилляры проходятъ внутри этихъ лимфатическихъ ходовъ.

Киселевъ ²⁾ на основаніи картинъ, даваемыхъ препаратами съ напытыми азотнокислымъ серебромъ лимфатическими сосудами, приходитъ къ другому заключенію относительно строенія внутридольковыхъ ходовъ *Макъ-Гиллаври*. Внутридольковые ходы по *Киселеву* суть волосныя лимфатическія трубки, снабженныя собственными эндотеліальными стѣнками. Эндотелій, выстилающій междольковые лимфатическіе сосуды, продолжается въ формѣ эндотеліальныхъ трубокъ внутрь дольки. Какъ и *Макъ-Гиллаври*, *Киселевъ* находилъ, что внутридольковые лимфатическіе капилляры заключаютъ въ себѣ внутридольковые кровеносные капилляры, т. е. лимфатическія трубки образуютъ влагалища для кровеносныхъ капилляровъ.

Образованіе стѣнокъ внутридольковыхъ лимфатическихъ влагалищъ эндотеліальными клѣтками не подтверждаетъ, однако, *Диссе* ³⁾. *Диссе* согласно съ предшествовавшими авторами находить, что внутридольковые лимфатическіе ходы образуютъ влагалища для кровеносныхъ капилляровъ, но стѣнка этихъ ходовъ построены не изъ эндотеліальныхъ клѣтокъ, какъ описываетъ *Киселевъ*, равно какъ не von spärlichen Bindegewebsfibrillen, печеночныхъ клѣтокъ и желчныхъ капилляровъ. Она—стѣнка внутридольковыхъ ходовъ представляетъ оболочку, состоящую изъ безструктурнаго основного вещества съ заложеной въ немъ сѣтью неравномѣрной толщины волоконъ и содержащую разсѣянныя звѣздчатая клѣтки.

Диссе наливаетъ разсматриваемыя внутридольковыя лимфатическія влагалища со стороны лимфатическихъ сосудовъ, проходя-

¹⁾ *Th. Mac-Gillavry*. Zur Anatomie der Leber. Sitzungseberichte d. Wiener Akademie d. Wissenschaften. Matem.—Naturwissensch. Klasse Bd. L. 1864. S. 207—224.

²⁾ *Киселевъ*. О лимфатическихъ сосудахъ печени. Военно-медицинскій журналъ. Книжка осьмая. Часть CV. 1869 Стр. 191—206.

³⁾ *J. Disse*. Ueber d. Lymphbahnen d. Säugethierleber. Archiv f. mikroskopische Anatomie. Bd. 36. Heft. 2. 1890. S. 203—224.

щих въ adventitia печеночныхъ венъ, *Макъ-Гиллаври* и *Киселевъ*—со стороны сосудовъ, сопровождающихъ воротную вену и со стороны поверхностныхъ сосудовъ. Такимъ образомъ, черезъ внутридольковую лимфатическую сѣть устанавливается связь между сосудами, сопровождающими воротную вену—нисходящими глубокими лимфатическими сосудами, и сосудами, сопровождающими печеночныя вены—восходящими глубокими сосудами (indirecte Verbindung *Диссе*, p. 210). Но кромѣ этой посредственной или непрямой связи между восходящими и нисходящими сосудами *Диссе* установилъ еще существованіе прямой связи (directe Verbindung). Adventitia печеночныхъ венъ связывается при посредствѣ соединительнотканыхъ тяжей съ тою соединительною тканью, которая сопровождаетъ развѣтвленіе воротной вены; въ этихъ то тяжахъ и проходятъ болѣе крупныя, высланные эндотелиемъ сосуды, которые соединяютъ систему восходящихъ съ системою нисходящихъ лимфатическихъ сосудовъ печени.

Итакъ вопросъ о существованіи внутридольковыхъ лимфатическихъ сосудовъ (ходовъ), казалось бы, долженъ былъ считаться рѣшеннымъ въ положительномъ смыслѣ ¹⁾. Однако, *Тейхманъ* ²⁾ въ недавнее время снова отрицалъ эти внутридольковые лимфатическіе сосуды; въ этой новой работѣ онъ отрицаетъ также восходящіе лимфатическіе сосуды (p. 361).

Чтобы оградить себя по возможности отъ сомнѣнія въ истинномъ происхожденіи получаемыхъ картинъ—поступленія инъекціонной массы не въ предсуществующіе пути, для своихъ микроскопическихъ изслѣдованій, я бралъ куски изъ объектовъ, полученныхъ при слѣдующихъ условіяхъ. Объекты прежде всего выбирались совершенно свѣжіе. Вколъ дѣлался только одинъ, и именно

¹⁾ См. также *Wittich*.—Ueber die Lymphbahnen in d. Leber. Centralblatt f. d. medic. Wissenschaften, 1874, S. 914; *E. Fleischl*.—Von d. Lymphe und d. Lymphgefäßen d. Leber. Berichte d. Sächsischen Gesellschaft. d. Wissensch. I, II. 1875. S. 42; *A. Budge*.—Neue Mittheilungen über d. Lymphgefäße d. Leber. Berichte d. Sächsischen Gesellschaft d. Wissensch. 1875.

²⁾ *L. Teichmann*. Naczynia limfatyczne w sprawach zapalnych błon surowicznych, tudzież płuc i wątroby. Compt rend. Classe des sc-mat. et nat. Ac. Sc. Cracovie. Vol 34. 1897, p. 1—23. Цитированъ по реферату въ Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie. 1896, p. 356—363. Die Lymphgefäße bei entzündlichen Processen seröser Häute ferner der Lungen und der Leber.

въ болѣе крупный сосудъ на выпуклой поверхности не далеко отъ подвѣшивающей связки. Если черезъ этотъ вколъ паливался значительный участокъ другой доли, если въ то же время достаточно паливались глубокіе сосуды, выходящіе изъ поперечной борозды, если, наконецъ, ни на мѣстѣ вкола, ни гдѣ либо въ другомъ мѣстѣ на поверхности не получалось подтековъ, а инъекціонная масса безпрепятственно поступала въ поверхностную сѣть и отводящіе стволы, то такіе объекты я считалъ пригодными. Куски вырѣзывались не изъ той доли, гдѣ дѣлался вколъ, а изъ другой, и при томъ, насколько возможно, дальше отъ мѣста вкола. Кромѣ того я изслѣдовалъ подъ микроскопомъ еще и такіе объекты, въ которыхъ инъекція произведена была черезъ болѣе крупный отводящій стволъ, проходящій въ подвѣшивающей связкѣ; въ стволъ послѣ вѣрѣза его ввязывалась канюля, и инъекція производилась, слѣдовательно, противно положенію клапановъ. Такія инъекціи удавались мнѣ, какъ я говорилъ, лишь въ исключительныхъ случаяхъ. Послѣ инъекціи лимфатическихъ сосудовъ тою же массою другого, конечно, цвѣта наливалась иногда воротная вена, а также массою опять другого цвѣта и печеночная артерія.

На срѣзахъ, полученныхъ изъ такихъ объектовъ, видно, что отъ поверхностной сѣти отходятъ въ глубину стволики, какъ описываетъ *Тейхманъ*, то разсѣянно, будучи болѣе или менѣе удалены другъ отъ друга, то скученно—по нѣсколько. Стволики эти дальше присоединяются къ тѣмъ, которые сопровождаютъ кровеносные сосуды и желчные протоки. Около каждой вѣтви воротной вены или печеночной артеріи идетъ рѣдко одинъ, обыкновенно же по нѣсколько лимфатическихъ сосудовъ. Сосуды эти обычно богато анастомозируютъ между собою, такъ что не рѣдко артеріальная или венозная вѣточка оказывается оплетенною настоящею сѣтью лимфатическихъ сосудовъ. Богатые анастомозы обнаруживаются не только между сосудами, сопровождающими данную кровеносную вѣточку, но и между тѣми сосудами, которые идутъ съ вѣтками, лежащими выше и ниже, иначе говоря, въ междольковыхъ промежуткахъ въ печени распространена непрерывная сѣть лимфатическихъ сосудовъ.

Отъ междольковыхъ сосудовъ внутрь дольки отходятъ также палитые сосуды; они образуютъ внутри дольки сѣть, совершенно напоминающую кровеносную сѣть. Сѣть эта доходитъ до центра

дольки. Въ каждой петлѣ ея лежить то по одной, то по двѣ, по три печеночныхъ клѣтки. Продолжаются ли внутридольковые сосуды вдоль центральной вены, и существуетъ ли описываемая *indirecte Verbindung Диссе*, я на своихъ препаратахъ не видалъ. Что же касается указанной *Диссе* прямой связи между восходящею и нисходящею лимфатическою системою печени черезъ сосуды, проходящія въ упомянутыхъ связывающихъ соединительнотканыхъ тяжахъ, то такіе сосуды мнѣ случалось даже препаровать подъ лупой.

На препаратахъ, на которыхъ одновременно были налиты и кровеносные сосуды, такихъ ясныхъ картинъ взаимнаго отношенія внутридольковыхъ сосудовъ, какъ рисуютъ и описываютъ *Макъ-Гиллавра*, *Киселевъ*, *Диссе*, мнѣ видѣть не приходилось. Все что мнѣ случалось видѣть, отвѣчающаго описанію этихъ авторовъ, это отдѣльныя синія точки, окруженныя толстымъ желтымъ кольцомъ, — синей массой была налита воротная вена, желтой лимфатическіе сосуды. Обыкновенно же синяя масса, вливаемая въ воротную вену, у меня или совсѣмъ не поступала въ участки съ налитыми лимфатическими сосудами, или же въ одной и той же долькѣ рядомъ съ желтыми петлями оказывались зеленые петли. Это послѣднее, мнѣ кажется, говорить за положеніе въ долькѣ кровеносныхъ капилляровъ внутри лимфатическихъ.

Тѣ же внутридольковые лимфатическіе сосуды мнѣ приходилось видѣть и на препаратахъ, на которыхъ инъекція была сдѣлана со стороны сосуда, проходящаго въ подвѣшивающей связкѣ. Эти препараты, однако, болѣе интересны въ другомъ отношеніи. Въ то время какъ при такой инъекціи наливалась у меня иной разъ лишь весьма узкая прилегающая къ подвѣшивающей связкѣ полоса поверхностной лимфатической сѣти, глубокіе сосуды, выходящія изъ поперечной борозды оказывались налитыми въ значительномъ числѣ. На разрѣзахъ такой печени и на микроскопическихъ срѣзахъ сдѣланныхъ изъ нея, оказывались на большомъ протяженіи достаточно богато налитыми междольковые лимфатическіе сосуды. Эти препараты указываютъ, слѣдовательно, на болѣе прямую и обильную связь между глубокими сосудами печени и отводящими стволами, проходящими въ подвѣшивающей связкѣ. Такимъ образомъ, надо думать, кромѣ описанныхъ выше мелкихъ сосудовъ, соединяющихъ глубокую и поверхностную сѣть, существуютъ еще болѣе крупныя глубокіе лимфатическіе сосуды, впадающіе непосредственно въ крупныя

поверхностные стволы, т. е. поверхностные лимфатическіе стволы въ равной мѣрѣ являются такими же отводящими стволами для глубокихъ сосудовъ печени, какъ и тѣ ея сосуды, которые появляются на поверхности изъ вещества органа уже въ качествѣ отводящихъ стволотъ.

Что касается этихъ послѣднихъ, то, какъ сказано, со времени изслѣдованія *Санта* среди нихъ различаютъ нисходящія, т. е. сопровождающія воротную вену, и восходящія, т. е. сопровождающія печеночныя вены. Нисходящія я наливать исключительно изъ поверхностныхъ сосудовъ. На поверхности они появляются, о чемъ не разъ уже было сказано, не только въ поперечной бороздѣ, какъ обыкновенно описывается, но и въ правой продольной бороздѣ, равно какъ и въ лѣвой продольной на всемъ ея протяженіи; большая часть ихъ появляется на поверхности въ поперечной бороздѣ, затѣмъ не мало—въ бороздѣ между лѣвой долей и Спигелиевой; въ правой бороздѣ и въ бороздѣ между квадратной долей и лѣвой на поверхность выходятъ глубокіе сосуды лишь въ небольшомъ числѣ. Появляющіеся въ правой бороздѣ частью поднимаются на желчный пузырь и участвуютъ въ образованіи на немъ описанной крупнопетливой сѣти, частью идутъ въ самой бороздѣ къ воротамъ печени. Сюда же идутъ и сосуды, появляющіеся въ передней половинѣ лѣвой борозды—въ бороздѣ между лѣвой и квадратной долей. Сосуды приходящія въ поперечную борозду и появляющіеся въ ней сосуды уходятъ въ *lig. hepato-duodenale*. Въ *lig. hepato-duodenale* уходитъ также часть сосудовъ, выходящихъ въ бороздѣ между лѣвой долей и Спигелиевой. О дальнѣйшей судьбѣ этихъ сосудовъ все было уже сказано при описаніи поверхностныхъ сосудовъ, уходящихъ въ *lig. hepato-duodenale*. Другая часть сосудовъ, появляющихся въ бороздѣ между лѣвой долей и Спигелиевой идетъ въ малый сальникъ и уходитъ вмѣстѣ съ поступающими въ него поверхностными сосудами этихъ долей къ тѣмъ же узламъ, что они. Глубокіе сосуды при самомъ появленіи на поверхность въ бороздахъ и на дальнѣйшемъ пути въ связкахъ сливаются и анастомозируютъ съ поверхностными.

Глубокіе восходящія сосуды наливаются также при инъекціи поверхностныхъ. Для болѣе точнаго опредѣленія ихъ хода я дѣлать, однако, еще спеціальныя инъекціи, вкалывая канюлю въ стѣнку печеночныхъ венъ со стороны ихъ просвѣта—послѣ вскрытія вены

разрѣзомъ черезъ толщу печени. При такихъ инъекціяхъ во внѣшней оболочкѣ венъ наливается сѣтъ лимфатическихъ сосудовъ, какую впервые описалъ и изобразилъ *Cannet*,—сѣтъ въ которой рождаются отводящіе стволы этой группы сосудовъ. Отводящіе стволы глубокихъ восходящихъ сосудовъ сопровождаютъ печеночныя вены къ мѣсту впаденія ихъ въ нижнюю полую и уходятъ къ наддѣфрагмальнымъ узламъ, расположеннымъ вокругъ нижней полой вены, однако не всѣ, какъ описываетъ *Cannet* и за нимъ другіе авторы. Туда идетъ только часть этихъ сосудовъ, другіе же принимаютъ другое направленіе. Иные изъ нихъ спускаются, обогнувъ печеночныя вены, позади нижней полой къ узламъ между ней и аортой (къ узламъ правой наддѣфрагмальной группы и къ верхнимъ правымъ околоаортальнымъ узламъ), иные же направляются къ узламъ у входа въ желудокъ и къ узламъ въ *lig. gastro-pancreaticum*. И восходящіе сосуды подобно нисходящимъ сливаются и анастомозируютъ съ поверхностными.

Въ противоположность отводящимъ стволамъ нисходящихъ сосудовъ, число тѣхъ же стволонъ восходящихъ сосудовъ бываетъ не велико: уходящихъ въ грудную полость три, шесть,—уходящихъ къ узламъ въ брюшную полость по тому и другому направленію одинъ, два.

Подведемъ теперь итогъ всему тому, что было сказано въ настоящей статьѣ.—Изъ всѣхъ авторовъ, писавшихъ о лимфатическихъ сосудахъ печени человѣка, только у одного *Масканы* мы находимъ достаточно подробное, хотя и не совсѣмъ полное описаніе сложныхъ анатомическихъ отношеній, какія представляютъ эти сосуды. Описаніе *Cannet* сильно грѣшитъ противъ дѣйствительности.

Лимфатическая система печени представляется въ настоящее время въ слѣдующемъ видѣ. Существуетъ двѣ сѣти лимфатическихъ сосудовъ: поверхностная и глубокая. Глубокая сѣтъ болѣе крупными петлями оплетаетъ печеночныя дольки со всѣхъ сторонъ—эта междольковая сѣтъ. Ея сосуды сопровождаютъ вѣтви воротной вены и печеночной артерій,—эти вѣтви кровеносныхъ сосудовъ благодаря об-

лію анастомозовъ между названными лимфатическими сосудами оказываются, по крайней мѣрѣ, мѣстами покрытыми настоящею лимфатическою сѣткою. Отъ междольковой сѣти внутрь дольки отходятъ сосуды, образующіе внутри дольки мелкопетлистую сѣть, въ петляхъ которой заложено то по одной, то по двѣ-три печеночныхъ клѣтки. Сѣть эта доходитъ до центра дольки. Сосуды внутридольковой сѣти образуютъ лимфатическія влагалища для внутридольковыхъ кровеносныхъ капилляровъ (*Макъ-Гиллаври, Киселевъ, Диссе* и др.) и продолжаются на центральную вену (*Диссе* и др.). Вокругъ печеночныхъ венъ также располагается лимфатическая сѣть. Такимъ образомъ, внутридольковая сѣть имѣетъ оттоки въ сосуды междольковой сѣти и въ сосуды сѣти вокругъ печеночныхъ венъ, и, слѣдовательно, что то же, междольковая сѣть при посредствѣ внутридольковой связывается съ сѣтью вокругъ печеночныхъ венъ (*Диссе* и др.). Кромѣ этой посредственной связи между сосудами междольковой сѣти и сосудами сѣти вокругъ печеночныхъ венъ существуетъ еще прямое соединеніе при посредствѣ стволиковъ, идущихъ въ соединительно-тканыхъ тяжахъ отъ однихъ сосудовъ къ другимъ. Отводящіе стволы междольковой сѣти—нисходящіе глубокіе лимфатическіе сосуды на поверхности печени появляются въ обѣихъ продольныхъ бороздахъ и въ поперечной—преимущественно въ послѣдней и въ бороздѣ между лѣвой долей и Спигелиевой. Отводящіе стволы сѣти вокругъ печеночныхъ венъ сопровождаютъ эти послѣднія и направляются къ нижней полой венѣ; покидая печень, одни изъ нихъ идутъ вмѣстѣ съ полой веной въ грудную полость и впадаютъ въ узлы, расположенные на верхней поверхности діафрагмы около полой вены,—другіе спускаются къ узламъ, лежащимъ между нижней полой веной и аортой (около ствола *a. diaphragmatica dex. inf.* и на высотѣ лѣвой почечной вены), и къ узламъ у входа въ желудокъ и въ *lig. gastro-pancreaticum*. Но кромѣ того лимфа изъ глубокой сѣти оттекаетъ въ поверхностные сосуды—

отчасти через тѣ мелкіе сосуды, которые въ большомъ количествѣ соединяютъ глубокую сѣть съ поверхностной, отчасти черезъ болѣе крупныя стволы, которые связываютъ болѣе крупныя глубокіе сосуды съ такими же поверхностными сосудами.

Отводяшіе сосуды поверхностной сѣти на выпуклой поверхности правой доли—одни направляются кзади—задніе сосуды, другіе—кнутри, къ подвѣшивающей связкѣ—внутренніе сосуды, третьи—кпереди, къ переднему и правому краю печени—передніе сосуды, наконецъ, четвертые уходятъ въ вещество органа.

Задніе сосуды распадаются на три группы: 1) наружную, сосуды которой направляются къ трехугольной связкѣ,— 2) среднюю, сосуды которой направляются къ вѣчной связкѣ,—и 3) внутреннюю, сосуды которой направляются къ частямъ, прилежающимъ къ печеночнымъ венамъ и къ нижней полій венѣ.

Сосуды наружной группы, по выходѣ изъ трехугольной связки, дѣлятся на непрободающіе грудобрюшную преграду и на прободающіе ее. Непрободающіе сосуды идутъ по нижней поверхности грудобрюшной преграды снаружи кнутри, и нѣкоторые впадаютъ въ узлы на правой вѣтви *a. diaphragmatica inf. dex.*, когда такіе узлы существуютъ,—остальные уходятъ къ узламъ у ствола этой артеріи и къ сосѣднимъ съ ними узламъ, а иногда еще и къ узламъ, лежащимъ позади правой почечной вены и артеріи.—Прободающіе грудобрюшную преграду сосуды направляются по верхней поверхности ея—одни кнаружи и назадъ, другіе кнутри и впередъ, третьи кнутри и назадъ. Первые идутъ къ хрящу 12-го ребра, иногда къ хрящу 11-го, и, направляясь вдоль нижняго края 12-го ребра, иногда въ 11-мъ межреберномъ промежуткѣ, уходятъ къ узламъ у головки 12-го resp. 11-го ребра; иногда на пути этихъ сосудовъ вдоль реберъ встрѣчаются узлы; тогда они оканчиваются въ этихъ узлахъ, а къ узламъ у головки 12-го и 11-го ребра идутъ уже сосуды.

происходящіе изъ этихъ послѣднихъ. Прорободающіе грудобрюшную преграду сосуды, направляющіеся кнутри и кпереди, идутъ впереди сухожильнаго центра и оканчиваются въ узлѣ или узлахъ, лежащихъ на грудобрюшной преградѣ позади хряща 7-го ребра. Сосуды, направляющіеся кнутри и кзади идутъ позади сухожильнаго центра и оканчиваются либо въ узлахъ позади правой ножки грудобрюшной преграды или непосредственно въ грудномъ протокѣ, либо, прободая эту ножку и возвращаясь въ брюшную полость, оканчиваются въ узлахъ у ствола *a. diaphragmatica dex. inf.* и сосѣднихъ или въ узлахъ позади правой почечной вены и артеріи, либо они оканчиваются въ узлахъ, лежащихъ на верхней поверхности грудобрюшной преграды у пищевода или на самомъ пищеводѣ, либо, наконецъ, они, сопровождая пищеводъ, возвращаются въ брюшную полость и оканчиваются въ узлахъ въ *lig. gastro-pancreaticum*.—Въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ существуютъ обычно какъ непрободающіе, такъ и прободающіе сосуды, но изъ послѣднихъ сосуды не всѣхъ трехъ направленій.

Сосуды средней группы спускаются позади непокрытой брюшиною части печени въ видѣ двухъ пучковъ: наружнаго и внутренняго. Наружный присоединяется къ непрободающимъ сосудамъ наружной группы,—внутренній спускается вдоль восходящей вѣтви *a. diaphragmatica dex. inf.* и также присоединяется къ непрободающимъ сосудамъ наружной группы: при существованіи узловъ вдоль восходящей вѣтви *a. diaphragmatica dex. inf.* нѣкоторые изъ сосудовъ внутренняго пучка впадаютъ въ нихъ.

Сосуды внутренней группы обыкновенно идутъ къ наддиафрагмальнымъ узламъ возлѣ нижней полой вены, иногда же они идутъ между лѣвой долей печени и грудобрюшной преградой къ узламъ у входа въ желудокъ и въ *lig. gastro-pancreaticum*, либо позади лѣвой доли печени (иногда и правой) спускаются къ узламъ у ствола *a. diaphragmatica dex. inf.*

Внутренніе сосуды дѣлятся на переднюю, среднюю и заднюю группу.

Сосуды передней группы уходятъ въ подвѣшивающей связкѣ черезъ лѣвую вырѣзку печени въ лѣвую продольную борозду и по ней достигаютъ воротъ печени.

Большая часть сосудовъ средней группы—самая большая группа внутреннихъ сосудовъ—чаще всего подымается въ подвѣшивающей связкѣ къ грудобрюшной преградѣ, прободаетъ ее (чаще слѣва, рѣже справа связки) впереди сухожильнаго центра, то сѣившись въ одинъ стволъ, то въ числѣ нѣсколькихъ стволовъ, и впадаетъ въ узлы позади основанія мечевиднаго отростка. Рѣже всѣ или нѣкоторые изъ этихъ сосудовъ впадаютъ въ узлы на грудобрюшной преградѣ между полой веной и пищеводомъ; иногда, чтобы впасть въ эти послѣдніе узлы, они уходятъ въ грудную полость не впереди *centrum tendineum*, а вмѣстѣ съ нижней полой веной. Въ иныхъ случаяхъ, однако, часть разсматриваемыхъ сосудовъ или даже всѣ грудобрюшной преграды не прободаетъ, а идетъ по ея нижней поверхности справа налѣво—къ узламъ на правой или лѣвой сторонѣ входа въ желудокъ или, обходя входъ справа или слѣва, къ узламъ въ *lig. gastro-pancreaticum*.—Самые передніе сосуды средней группы идутъ въ подвѣшивающей связкѣ къ брюшной стѣнкѣ, направляются по ней вдоль мѣста прикрѣпленія связки къ мечевидному отростку, идутъ по передней поверхности мечевиднаго отростка или позади него и подъ прикрѣпленіемъ къ груди нѣ 7-го ребернаго хряща правой или лѣвой стороны проникаютъ въ грудную полость, гдѣ впадаютъ въ узлы около *a. mammae int.*; на пути этихъ сосудовъ по брюшной стѣнкѣ въ нѣкоторыхъ случаяхъ лежатъ узлы, тогда они оканчиваются въ этихъ узлахъ, а къ узламъ около *a. mammae int.* идутъ сосуды изъ этихъ послѣднихъ узловъ. Иногда передніе сосуды дойдя до мечевиднаго отростка переходятъ на грудобрюшную преграду и присоединяются къ прочимъ сосудамъ группы.

Сосуды задней группы иногда присоединяются къ сосудамъ средней, обыкновенно же они либо направляются по грудобрюшной преградѣ вправо и уходятъ вмѣстѣ съ полой веной къ наддиафрагмальнымъ узламъ около нея, либо направляются налѣво и или, прободая грудобрюшную преграду, идутъ къ тѣмъ же узламъ, или, не прободая грудобрюшной преграды, уходятъ къ узламъ на брюшной части пищевода, на входѣ въ желудокъ и въ *lig. gastro-pancreaticum*, а иногда они спускаются вдоль нижней полой вены къ узламъ у ствола *a. diaphragmatica dex. inf.* и къ нижнимъ узламъ въ *lig. gastro-pancreaticum*.

Передніе сосуды перегибаются черезъ передній и правый край печени и либо сливаются съ сосудами вогнутой поверхности, либо уходятъ на желчный пузырь и теряются въ сѣти на его свободной поверхности, либо, наконецъ, уходятъ въ лѣвую продольную борозду.

Обособляющіеся на поверхности стволы, уходящіе въ вещество печени (звѣздообразные сосуды) присоединяются къ нисходящимъ глубокимъ сосудамъ; они располагаются обыкновенно недалеко отъ передняго края печени и чаще у передняго праваго ея угла.

На выпуклой поверхности лѣвой доли можно различить также задніе, внутренніе, передніе и сосуды, уходящіе въ вещество печени.

Задніе сосуды также дѣлятся на три группы: наружную, среднюю и внутреннюю.

Сосуды наружной группы, по выходѣ изъ трехугольной связки, одни направляются по нижней поверхности грудобрюшной преграды вдоль вѣтвей *a. diaphragmatica sin. inf.* къ узламъ у ствола этой артеріи; нѣкоторые изъ этихъ сосудовъ оканчиваются въ узлахъ, иногда лежащихъ на вѣтвяхъ названной артеріи,—нѣкоторые иногда оканчиваются въ узлахъ на *cardia* желудка или въ узлахъ въ *lig. gastro-pancreaticum*, а также въ узлахъ на передней поверхности брюшной аорты и узлахъ по лѣвую сторону ея. Другіе со-

суды наружной группы прободают грудобрюшную преграду и направляются по верхней поверхности ея или къ узлу позади хряща 7-го ребра, или къ узлу (узламъ) у сердечной сорочки на мѣстѣ вхожденія въ грудобрюшную преграду п. phrenici, или къ узламъ у либо на пищеводѣ. Прободающіе грудобрюшную преграду сосуды не постоянны.

Сосуды средней и внутренней группы идутъ къ узламъ на брюшной части пищевода, къ узламъ у входа въ желудокъ съ правой его стороны и къ узламъ въ lig. gastropancreaticum; иногда сосуды средней группы идутъ къ узламъ на лѣвой сторонѣ входа въ желудокъ, иногда они огибаютъ входъ слѣва и только тогда впадаютъ въ узлы въ lig. gastropancreaticum, а сосуды внутренней группы иногда даютъ стволы, прободающіе сухожильный центръ грудобрюшной преграды и впадающіе либо въ узлы позади мечевиднаго отростка, либо въ узлы на грудобрюшной преградѣ между полой веной и пищеводомъ,—и стволы, спускающіеся по задней стѣнкѣ живота къ верхнимъ узламъ между нижней полой веной и аортой.

Внутренніе сосуды лѣвой доли распадаются на тѣ же три группы, что и соответственные сосуды правой доли. Они обыкновенно присоединяются къ этимъ послѣднимъ, и только иногда изъ нихъ слагаются стволы, которые уходятъ въ другое мѣсто, чѣмъ правые сосуды даннаго случая. Мѣстомъ окончанія ихъ и въ этомъ случаѣ служатъ все же одни изъ тѣхъ узловъ, которые указаны выше для сосудовъ правой стороны.

Передніе сосуды на лѣвой долѣ мелки, болѣе крупныя уходятъ въ лѣвую продольную борозду, а уходящія въ вещество сосуды, собирающіе свои корни на поверхности (звѣздообразныя сосуды), встрѣчаются рѣдко.

На вогнутой поверхности правой доли, поверхностныя сосуды распадаются на: 1) задніе сосуды, направляющіеся къ заднему краю доли, 2) внутренніе сосуды, направляю-

щіеся къ правой продольной бороздѣ и къ поперечной бороздѣ, и 3) сосуды, уходящіе въ вещество печени.

Задніе сосуды спускаются въ *lig. hepato-renalē*, а самыя наружныя въ нижнемъ листкѣ вѣнечной связки, и по нижней полой венѣ. Они направляются кнутри—одни впереди полой вены, другіе позади и оканчиваются въ узлахъ между полой веной и аортой, выше и ниже лѣвой почечной вены, а также въ узлахъ у ствола *a. diaphragmatica dex. inf.* и на передней поверхности брюшной аорты; нѣкоторые изъ заднихъ сосудовъ спускаются по правую сторону нижней полой вены и впадаютъ въ узлы позади правой почечной вены и артерій. Изрѣдка на передней поверхности нижней полой вены тотчасъ ниже задняго края доли лежитъ лимфатическій узелъ, тогда тотъ или другой изъ заднихъ сосудовъ оканчивается (прерывается) въ этомъ узлѣ.

Внутренніе сосуды идутъ къ правой продольной бороздѣ и къ поперечной бороздѣ. Первые частью поднимаются на желчный пузырь и образуютъ на немъ сѣть, частью идутъ въ бороздѣ по правую сторону пузыря къ воротамъ печени, а нѣкоторые проходятъ между пузыремъ и печенью налѣво. Въ концѣ концовъ всѣ внутренніе сосуды уходятъ въ *lig. hepato-duodenale*.

Сосуды квадратной доли направляются въ правую продольную борозду, гдѣ представляютъ тѣ же отношенія, какъ и соотвѣтственные сосуды правой доли, затѣмъ—въ лѣвую продольную борозду, чтобы по ней дойти до воротъ печени, наконецъ—въ поперечную борозду. Всѣ сосуды квадратной доли рано или поздно уходятъ въ *lig. hepato-duodenale*.

Сосуды Спигелиевой доли, идущіе въ поперечную и лѣвую продольную борозду, уходятъ—первыя въ *lig. hepato-duodenale*, вторыя—въ малый сальникъ, а идущіе по *processus candelatus*—на нижнюю полую вену, гдѣ присоединяются къ заднимъ сосудамъ правой доли. Другіе сосуды Спигелиевой доли—съ задней поверхности доли—идутъ на заднюю стѣнку живота и по ней спускаются къ узламъ у ствола

а. *diaphragmatica dex. inf.* и къ верхнимъ узламъ между полой веной и аортой.

Сосуды вогнутой поверхности лѣвой доли образуютъ только двѣ группы: внутреннюю, сосуды которой уходятъ въ лѣвую продольную борозду, и группу сосудовъ уходящихъ въ вещество печени (звѣздообразныхъ сосудовъ); кромѣ того у наружнаго задняго угла доли мелкіе короткіе сосуды уходятъ въ лѣвую трехугольную связку и въ ней сливаются съ сосудами съ выпуклой поверхности доли.

Сосуды внутренней группы, вступающіе въ переднюю половину лѣвой борозды, идутъ въ бороздѣ къ воротамъ и уходятъ въ *lig. hepato-duodenale*; изъ сосудовъ же, идущихъ въ заднюю половину борозды—въ борозду между лѣвой и Спигелиевой долей, нѣкоторые также уходятъ въ *lig. hepato-duodenale*, большая однако часть—въ малый сальникъ.

Сосуды, поступающіе въ *lig. hepato-duodenale*—съ правой, квадратной, Спигелиевой и лѣвой доли, равно какъ нисходящіе глубокіе, появляющіеся на поверхность или проходящіе въ поперечную борозду, идутъ къ узламъ заложеннымъ въ связкѣ вдоль печеночной артеріи и пузыряго и желчнаго протока, а другіе къ узламъ на головкѣ поджелудочной железы, къ которымъ узламъ идутъ и сосуды изъ узловъ у печеночной артеріи и пузыряго и желчнаго протока. Часть сосудовъ, идущихъ по желчному пузырю оканчивается въ узлахъ на его шейкѣ съ лѣвой стороны и иногда и съ правой стороны; выходящіе изъ этихъ узловъ сосуды уходятъ съ прочими сосудами *lig. hepato-duodenale*.

Сосуды, поступающіе въ малый сальникъ—съ лѣвой и Спигелиевой доли и нисходящіе глубокіе, появляющіеся на поверхность въ бороздѣ между лѣвой и Спигелиевой долей, достигаютъ, идя въ немъ, узловъ на малой кривизнѣ желудка и узловъ въ *lig. gastro-pancreaticum*, и иногда узловъ на брюшной части пищевода; сосуды же, идущіе въ маломъ сальникѣ по направленію къ привратниковой части желудка,

впадаютъ въ узелъ (узлы) на стволѣ общей печеночной артеріи (*a. hepatica*).

Сосуды, слагающіеся на поверхности печени въ короткіе, уходящіе въ вещество ея стволы какъ на правой, такъ и на лѣвой долѣ располагаются на частяхъ, лежащихъ ближе къ переднему краю; они часто образуютъ красивыя звѣздообразныя фигуры, фигуръ такихъ больше бываетъ на лѣвой долѣ. Отводящіе стволы звѣздообразныхъ фигуръ, какъ и одиночныя, въ глубь уходящіе сосуды, въ вещество печени присоединяются къ нисходящимъ глубокимъ сосудамъ.

Между отдѣльными сосудами печени какъ на поверхности и въ веществѣ ея, такъ и въ связкахъ и на дальнѣйшемъ пути къ узламъ существуютъ обильныя анастомозы; нерѣдко сосудъ еще на поверхности печени и особенно часто на дальнѣйшемъ пути расщепляются, и получившіеся отъ расщепленія даннаго ствола сосуды либо сливаются снова въ одинъ стволъ, либо сливаются съ другими сосудами, либо не сливаются,—въ послѣднемъ случаѣ получившіеся отъ расщепленія ствола сосуды иногда уходятъ въ совершенно различныя мѣста.

Вторыми этапами для сосудовъ, оканчивающихся въ узлахъ на верхней поверхности грудобрюшной преграды, будутъ сосуды и узлы на грудной части пищевода и вдоль *ductus thoracicus*,—затѣмъ сосуды къ узламъ въ воротахъ легкаго и на бронхахъ и эти узлы,—далѣе сосуды, идущіе къ узламъ впереди большихъ кровеносныхъ сосудовъ (*v. cava sup.*, *aorta asc.* и пр.), и эти узлы,—затѣмъ сосуды и узлы, лежащіе вдоль *art. et v. mammaria int. dex. et sin.* и позади грудины,—наконецъ сосуды, берущіе начало въ узлахъ на верхней поверхности грудобрюшной преграды и уходящіе въ брюшную полость къ узламъ въ *lig. gastropancreaticum* и къ верхнимъ узламъ на передней поверхности аорты, а также къ узламъ на входѣ въ желудокъ.

Вторыми этапами для сосудовъ, оканчивающихся въ узлахъ, лежащихъ въ брюшной полости, будутъ сосуды соединяющіе эти узлы съ узлами на поджелудочной железѣ и вокругъ брюшной аорты, равно какъ эти узлы.

Узлы, являющіеся первыми этапными узлами для сосудовъ печени оказываются въ то же время первыми же этапными узлами и для нѣкоторыхъ другихъ органовъ. Такъ, узлы, лежащіе на верхней поверхности грудобрюшной преграды, будутъ первыми этапными узлами для сосудовъ грудобрюшной преграды и нѣкоторыхъ сосудовъ легкаго и пищевода (сосуды легкаго сливаются иногда съ сосудами печени до вхожденія въ узелъ); узлы на малой кривизнѣ и у входа въ желудокъ—для сосудовъ желудка; пищевода, легкаго; узлы въ *lig. gastro-pancreaticum* для нѣкоторыхъ сосудовъ тѣхъ же органовъ; узлы позади *vena et art. renalis dex.* и узлы между полой веной и аортой—для правой почки, послѣдніе также для праваго надпочечника, праваго яичка или яичника и для нѣкоторыхъ сосудовъ матки; узлы съ лѣвой стороны брюшной аорты и на ея передней поверхности—для сосудовъ лѣвой почки, лѣваго надпочечника, лѣваго яичка или яичника и для нѣкоторыхъ сосудовъ матки; узлы на стволѣ *a. hepatica*—для нѣкоторыхъ сосудовъ привратниковой части желудка и для нѣкоторыхъ сосудовъ двѣнадцатиперстной кишки; наконецъ, узлы на головѣ поджелудочной железы—для нѣкоторыхъ сосудовъ поджелудочной железы и для нѣкоторыхъ сосудовъ двѣнадцатиперстной кишки.

Прилагаемыми къ статьѣ рисунками я обязанъ многоуважаемому товарищу доктору Владиміру Константиновичу Думитрашко, за что и приношу ему здѣсь мою сердечную благодарность.

Августъ, 1903-го года.

Объясненіе къ рисункамъ.

Рис. 1. Лимфатическіе сосуды выпуклой поверхности правой доли печени.

A, A, A—грудобрюшная преграда; *B, B*—подвѣшивающая связка печени;

a—передняя группа внутреннихъ сосудовъ; *b, c, c*—средняя группа внутреннихъ сосудовъ, *b*—самый передній изъ нихъ; *d*—задняя группа внутреннихъ сосудовъ; *e*—внутренняя, *f, f, f*—средняя, *g, g, g*—наружная группа заднихъ сосудовъ; *h, i, k*—передніе сосуды. Съ препарата отъ ребенка недѣль трехъ, нали- таго желтой массой.

Рис. 2. Лимфатическіе сосуды выпуклой поверхности лѣвой доли печени.

A A—грудобрюшная преграда; *B B*—подвѣшивающая связка печени;

a, b, c, c—то же, что на рис. 1-мъ; *d*—внутренняя, *e*—средняя, *f, g*—наружная группа заднихъ сосудовъ. Съ того же, что рис. 1-й, препарата.

Рис. 3. Лимфатическіе сосуды вогнутой поверхности печени. Печень от-

вернута вправо и кверху, желудокъ оттянуть влѣво и внизъ.

Правая доля: *a, b—b, h*—задніе, *e, f, f*—внутренніе сосуды.

a—короткіе сусуды задней группы, впадающіе въ отводящіе стволы выпуклой поверхности; *b—b*—наружные длинныя сосуды задней группы; *c, c*—звѣздообразныя сосуды; *d*—одинъ изъ переднихъ сосудовъ выпуклой поверхности; *e*—сосуды впереди дна желчнаго пузыря; *f, f*—передніе и задніе сосуды внутренней группы; *h*—внутренніе длинныя сосуды задней группы; *s*—глубо- кіе нисходящіе сосуды.

Квадратная доля: *g*—сосуды впереди дна желчнаго пузыря; *i*—сосуды, уходящіе на желчный пузырь; *k*—сосуды, уходящіе въ

поперечную борозду; *l*—сосудъ, уходящій въ правую борозду, *m*—сосудъ, уходящій въ лѣвую борозду.

Лѣвая доля: *n, n*—передніе, *o, p, q, q*—задніе сосуды внутренней группы.

n, n—сосуды, уходящіе въ борозду между квадратной и лѣвой долей; *o*—сосуды, уходящіе въ lig. hepato-duodenale; *p*—сосуды, уходящіе въ маломъ сальникѣ къ pars pylorica желудка; *q, q*—сосуды, уходящіе въ маломъ сальникѣ по направленію ко входу въ желудокъ,—изъ нихъ одни впадаютъ въ узелъ на лѣвой сторонѣ входа, другіе уходятъ къ узламъ въ lig. gastro-pancreaticum; *r*—сѣтъ у наружнаго угла лѣвой доли, отводящіе сосуды которой уходятъ въ lig. triangularе; *s, s, s, s, s*—глубокіе нисходящіе сосуды, появляющіеся на поверхность въ поперечной бороздѣ и въ бороздѣ между лѣвой и квадратной, лѣвой и Спигелиевой долей; *t, t*—звѣздообразные сосуды; *u, u*—мелкіе сосуды, налитые при инъекціи выпуклой поверхности; *x*—отводящіе стволы заднихъ сосудовъ выпуклой поверхности лѣвой доли.

1—узелъ у входа въ желудокъ, *2*—просвѣчивающая сквозь малый сальникъ часть большого узла на стволѣ а. hepatica; *3*—узелъ на лѣвой сторонѣ шейки желчнаго пузыря, *4*—часть узла позади правой почечной вены, неприкрытая веной, *5*—узелъ между аортой и полой веной тотчасъ ниже лѣвой почечной.

Рис. 4. Прорободающіе грудобрюшную преграду отводящіе сосуды выпуклой поверхности печени (см. протоколъ 19-й). Верхняя поверхность діфрагмы. А—аорта, В—пищеводъ, С—нижняя полая вена. *a*—прорободающій діфрагму отводящій стволъ наружной группы заднихъ сосудовъ правой доли, направляющійся впередъ и внутри къ узлу *n*; *b*—выходящій изъ этого узла сосудъ, поднимающійся далѣе вдоль а. et v. mammae int.; *c*—такого же происхожденія, что *a*, стволъ, направляющійся внутри и къзади; *d*—сосудъ, происшедшій отъ расщепленія ствола *c*, уходящій по пищеводу вверхъ къ узлу въ lig. pulmonis; *e*—другой сосудъ, происшедшій отъ расщепленія ствола *c*, уходящій слѣва пищевода въ брюшную полость къ узлу на поджелудочной желѣзѣ; *f*—отводящій стволъ средней группы внутреннихъ сосудовъ, послѣ прорободенія діфрагмы въ обычномъ мѣстѣ направляющійся между сухожильнымъ центромъ и сердечной сорочкой къ узлу *r* между полой веной и пищеводомъ; *g*—другой такой же стволъ, но прорободающій діфрагму по правую сторону lig. suspensorium hepatis,—послѣ расщепленія надвое онъ впадаетъ въ узлы *r* и *p*; *h, i, i*—отводящіе стволы задней группы внутреннихъ сосудовъ; *h*¹—отводящій стволъ

внутренней группы заднихъ сосудовъ лѣвой доли; *k*—отводящій изъ узловъ *r* и *p* сосудъ, уходящій въ брюшную полость, гдѣ онъ впадаетъ въ узелъ на лѣвой сторонѣ входа въ желудокъ; *l*—прободающій діафрагму стволъ наружной группы заднихъ сосудовъ лѣвой доли; *m*—узелъ на діафрагмѣ позади 7-го лѣваго ребернаго хряща; *n*—такой же узелъ позади 7-го праваго ребернаго хряща; *o*—узелъ на діафрагмѣ впереди нижней полой вены; *p*, *r* узлы на діафрагмѣ между полой веной и пищеводомъ. Съ препарата отъ дѣвочки недѣль двухъ, налитаго частью желтой, частью синей массой.

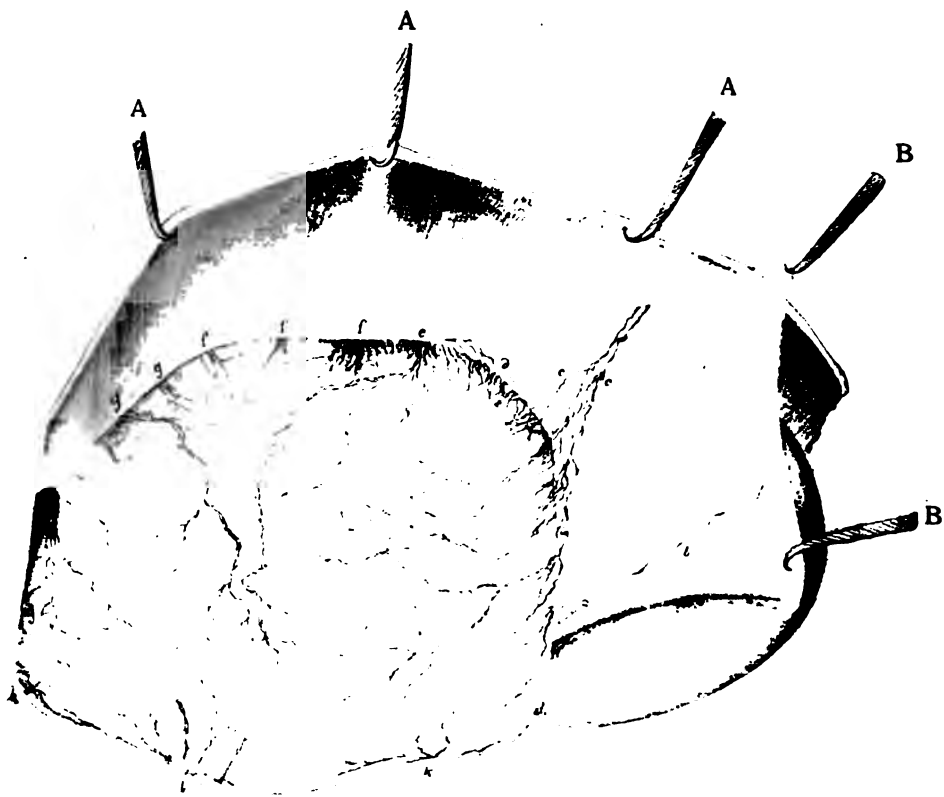
Рис. 5. Прободающіе грудобрюшную преграду сосуда выпуклой поверхности печени (см. протоколъ 5-й). Грудина съ отрѣзками реберъ повернута справа налево и оттянута. А, А, А—грудобрюшная преграда, —среднее А—отвернутый лоскутъ ея; В—подвѣшивающая связка печени, С—лѣвая вырѣзка печени.

a—передняя группа внутреннихъ сосудовъ; *b*—отводящій стволъ переднихъ изъ средней группы внутреннихъ сосудовъ; *c*, *c*—остальные отводящіе стволы средней группы внутреннихъ сосудовъ, изъ которыхъ передніе, слившись въ одинъ стволъ, послѣ прободенія діафрагмы по правую сторону *lig. suspensorium*, идутъ къ узлу *k* у верхняго края 7-го ребернаго хряща, а задніе, слившись въ два ствола и прободая діафрагму по лѣвую сторону связки, идутъ къ узлу *i* позади мечевиднаго отростка; *d*—задняя группа внутреннихъ сосудовъ; *e*—прободающій діафрагму стволъ наружной группы заднихъ сосудовъ, направляющій по ея верхней поверхности вкнутри и впереди; *f*—такого же происхожденія стволъ, направляющійся къ 12-му ребру (XII) и дальше вдоль этого ребра; *g*—выходящій изъ узла *i* сосудъ; *h*—выходящій изъ узла *k* сосудъ; *i*—узелъ позади мечевиднаго отростка; *k*—узелъ у грудины позади 7-го ребернаго хряща; *l*—узелъ въ 1-мъ правомъ межреберномъ промежуткѣ. Съ препарата отъ дѣвочки недѣль двухъ; на выпуклой поверхности сосуда правой доли налиты желтой массой, лѣвой—синей.

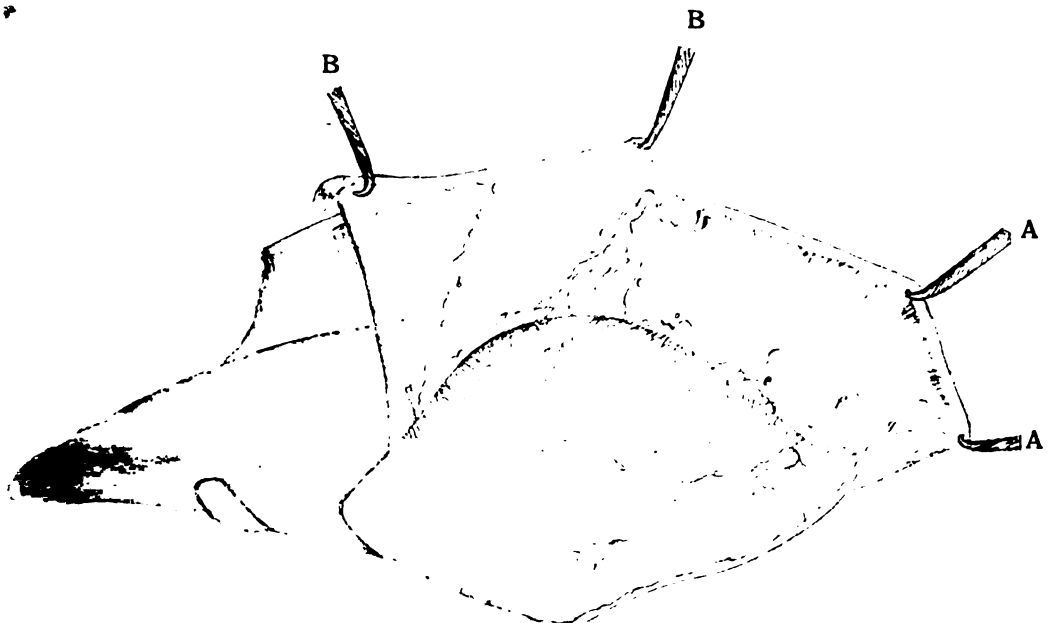
Рис. 6. Грудная клѣтка шестинедѣльнаго мальчика, вскрытая справа,— по удаленіи легкаго. А—мѣшокъ сердечной сорочки, В—верхняя полая вена, С—большая непарная вена, D—нижняя полая вена. *a*—узелъ позади мечевиднаго отростка; *b*—узелъ впереди верхней полой вены; *c*—узелъ у грудины въ 4-мъ межреберномъ промежуткѣ; *d*—отводящій стволъ переднихъ изъ средней группы внутреннихъ сосудовъ выпуклой поверхности печени, впадающій въ узелъ *c*. Съ препарата, налитаго желтой массой.

Рис. 7. Непрободаючіе грудобрюшную преграду отводящіе сосуды выпуклой поверхности печени (см. протоколь 14-й). Печень удалена. А—правая трехугольная, В—лѣвая трехугольная связка печени. а—отводящіе стволы наружной группы заднихъ сосудовъ правой доли; б, в—отводящіе стволы средней группы заднихъ сосудовъ правой доли; с—отводящіе стволы внутренней группы заднихъ сосудовъ лѣвой доли; д, д--отводящіе стволы средней группы заднихъ сосудовъ лѣвой доли; е, е--отводящіе стволы наружной группы заднихъ сосудовъ лѣвой доли; ф, ф—семь узловъ вдоль а. diaphragmatica dex inf. и ея правой вѣтви; г—три узла у ствола а. diaphragmatica sin. inf.; и--три узла въ lig. gastro-pancreaticum; к—узелъ на лѣвой сторонѣ входа въ желудокъ; л—узелъ на v. hepatis dex.; о—cardia отрѣзаннаго желудка. Съ препарата отъ мальчика мѣсяцевъ 6-ти; на выпуклой поверхности сосуды налиты желтой массой.

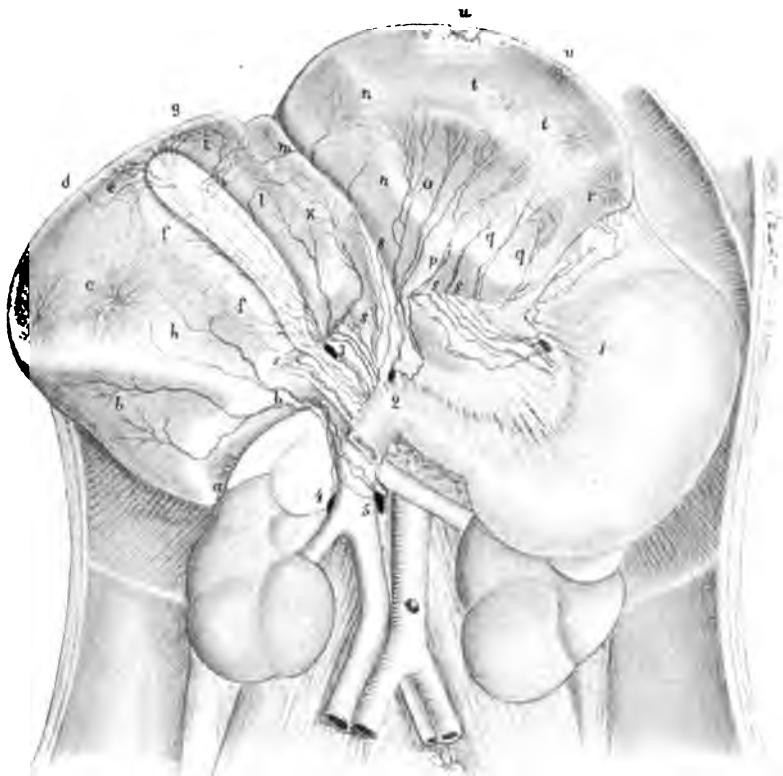
Рис. 8. Часть передней стѣнки живота и груди (см. протоколь 15). А, А—отвернутый лоскутъ грудобрюшной преграды; В—оттянутая влѣво подвѣшивающая связка печени. а—отводящій стволъ переднихъ изъ средней группы внутреннихъ сосудовъ выпуклой поверхности правой доли печени, идущій къ надпупочнымъ узламъ (три узла); б—сосудъ, выходящій изъ надпупочныхъ узловъ. Съ препарата отъ мальчика 1-го мѣсяца.



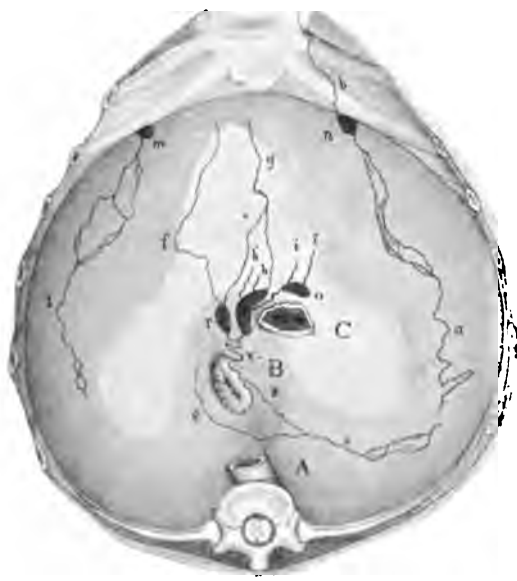
Фиг. 1.



Фиг. 2.



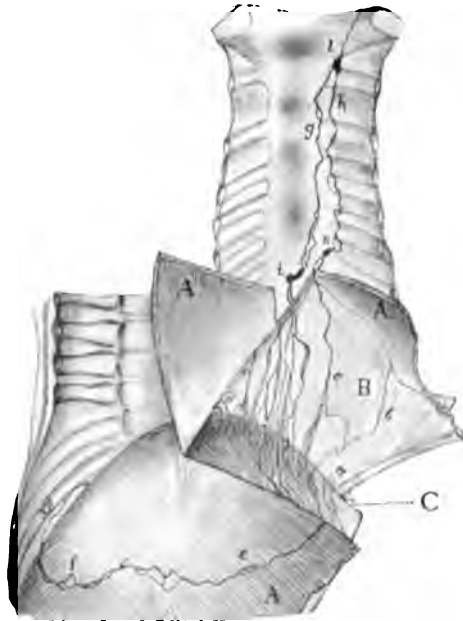
Фиг. 3.



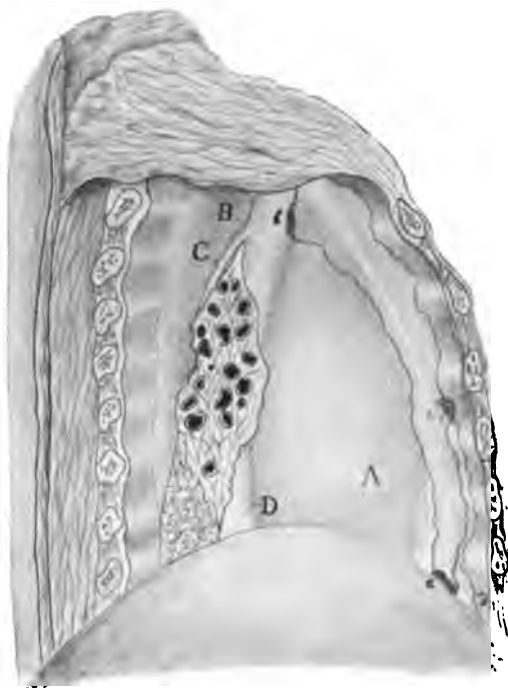
Фиг. 4.

Рис. съ натуры Д-ръ В. К. Думитрашко

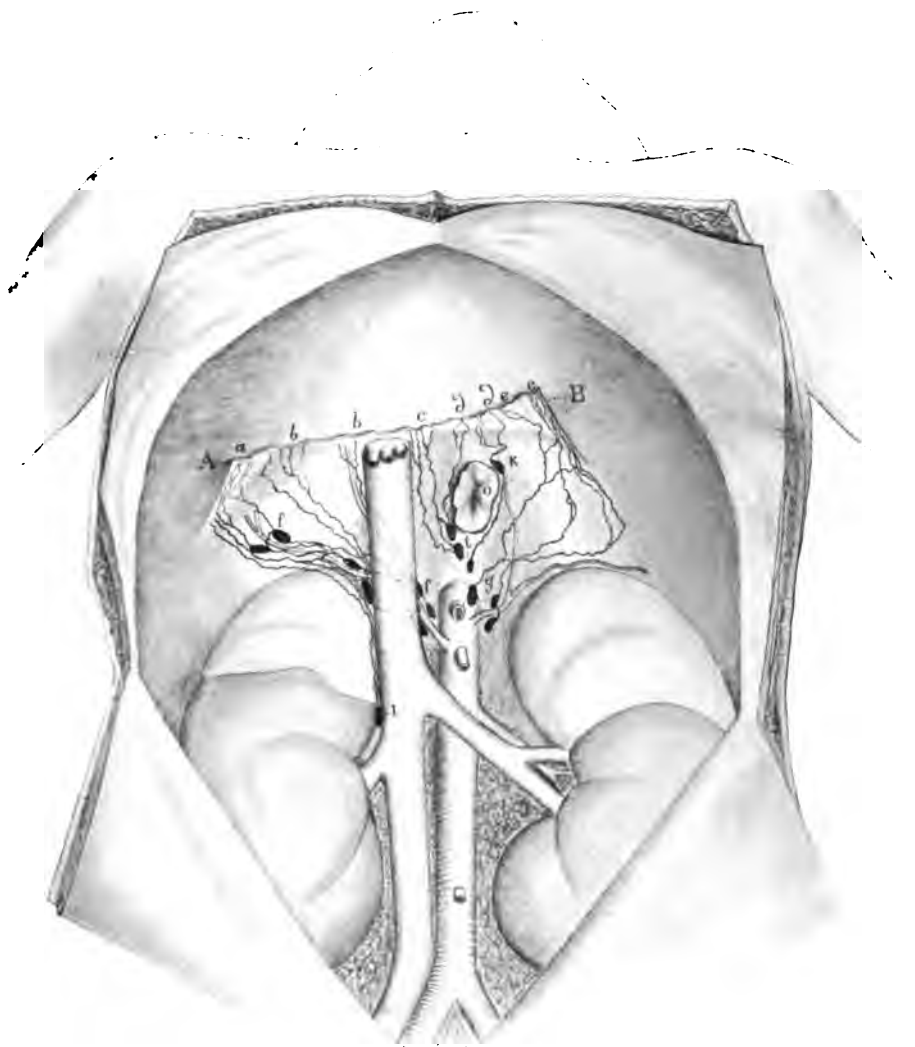
Худож. Графич. Завед. А. Брукманъ, Мюнхенъ



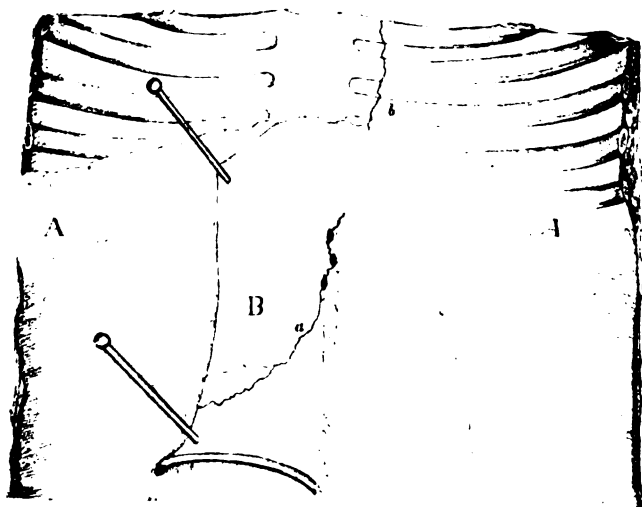
Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7



Фиг. 8.

Рис. съ натуры Д-ръ В. К. Думитрашко

Худож. Графич. Завед. А. Брукманъ, Мюнхенъ

Digitized by Google

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФІЯ.

Критико-библиографическій обзоръ новѣйшихъ трудовъ и изданій по славяновѣдѣнію.

ХІ.

1. Archiv für slavische Philologie. Herausgegeben von *V. Jagić*. Fünf-und-zwanzigster Band. Berlin. 1903. 8°. 659.

Журналъ академика Ягича *Archiv für slavische Philologie* вышелъ въ 1903 году двадцать пятымъ томомъ. Такъ дождалось своего юбилея специальное изданіе по славянской филологіи, давно и вполне справедливо пользующееся почетною извѣстностью въ ученомъ мірѣ. Несомнѣнно это событіе весьма отрадное и вполне достойное занесенія въ лѣтопись славяновѣдѣнія. Правда, юбилейный томъ нѣсколько запоздалъ: свой журналъ И. В. Ягичъ основалъ въ 1876 г. и, слѣдовательно, двадцатипятилѣтіе существованія журнала исполнилось уже въ 1900 г.; но нѣкоторые томы изданія замедлили своевременнымъ выходомъ въ свѣтъ и, такимъ образомъ, двадцать пятый томъ пришелся на 1903 г. Это обстоятельство, конечно, нисколько не умаляетъ значенія данного юбилея. Слависты всѣхъ странъ имѣютъ полное право съ истиннымъ удовольствіемъ привѣтствовать юбилейное изданіе. „Archiv“ ак. Ягича сослужилъ не малую службу дѣлу успѣшнаго развитія славянской филологіи въ новѣйшія времена, и можно искренно пожелать, чтобы эта служба журнала наукѣ продолжалась и далѣе. Въ 25 томахъ изданія помѣщено огромное количество цѣнныхъ трудовъ по разнымъ отдѣламъ науки о славянствѣ: по славянскому языкознанію, въ частности по сравнительной славянской грам-

мативѣ, по исторіи и діалектологіи отдѣльныхъ славянскихъ языковъ, далѣе по славянской этнографіи, особенно по народной славянской поэзіи, по исторіи письменности и литературы разныхъ славянскихъ народовъ, наконецъ, по славянскимъ древностямъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ журналъ внимательно слѣдитъ за всѣми выдающимися явленіями научной литературы по славяновѣдѣнію; обширный критико-библіографическій отдѣлъ его служилъ и продолжаетъ служить вѣрнымъ показателемъ современнаго состоянія научной разработки славянской филологіи. Академикъ Ягичъ, основатель и редакторъ журнала, является вмѣстѣ съ тѣмъ самымъ главнымъ и самымъ дѣятельнымъ сотрудникомъ его. Ему принадлежитъ большое число цѣнныхъ вкладовъ въ журналъ, то въ видѣ большихъ изслѣдованій, то меньшихъ статей, сообщеній, критическихъ замѣтокъ. Въ общемъ „Archiv“ ак. Ягича отличается научно-объективнымъ направленіемъ. Въ немъ по возможности избѣгается проявленіе узко-національныхъ и политическихъ тенденцій, отъ которыхъ часто не свободны труды славянскихъ ученыхъ. Тѣмъ не менѣе иногда, особенно въ послѣдніе годы, редакція, какъ бы уступая духу времени, измѣняла своему основному направленію и допускала проведеніе въ журналъ тенденцій, имѣющихъ мало общаго съ объективной наукой. Сюда, напр., относятся: явное одобреніе и поддержка стремленія извѣстной группы львовскихъ ученыхъ создать для русскаго народа, именно для малорусской его вѣтви, второй особый научный и образованный языкъ; завѣдомо неприязненное отношеніе къ словацкой народности и словацкимъ ученымъ; пренебреженіе къ трудамъ нѣкоторыхъ ученыхъ, взгляды которыхъ не совпадаютъ со взглядами редакціи. Эти и подобныя имъ отступленія отъ господствующаго въ изданіи научно-объективнаго направленія являются черными точками на общемъ свѣтломъ фонѣ журнала и, еслибъ ихъ не было, то отъ этого только выигрывалъ бы журналъ.

Весьма характерно въ исторіи славяновѣдѣнія то обстоятельство, что спеціальныи журналъ по славянской филологіи, въ которомъ участвуютъ почти исключительно славянскіе ученые, уже 28 лѣтъ ведется на чужомъ, нѣмецкомъ языкѣ. Спрашивается, чѣмъ можно объяснить это странное явленіе: недостаточной ли зрѣлостью и слабой культурностью славянскаго племени, не имѣющаго возможности пользоваться своимъ языкомъ даже въ области самоизученія, или же личными соображеніями и вкусами редактора журнала? Нѣсколько лѣтъ назадъ самъ акад. Ягичъ на страницахъ „Архива“ коснулся этого

вопроса. Онъ указалъ на общеизвестный фактъ культурной разъединенности славянскихъ народовъ и отсутствія у нихъ своего единого и общепризнаннаго литературнаго языка, вслѣдствіе чего у нихъ до поры до времени связующимъ звеномъ, по крайней мѣрѣ, въ области научнаго обмѣна, долженъ оставаться, по его мнѣнію, нѣмецкій языкъ, на которомъ онъ и продолжаетъ вести свой журналъ по славянской филологіи. Но съ этимъ мнѣніемъ трудно согласиться по скольку оно касается даннаго спеціального изданія. Если обиліе и разнообразіе литературныхъ славянскихъ языковъ дѣйствительно затрудняетъ для образованныхъ классовъ различныхъ славянскихъ народовъ взаимное общеніе въ области литературы и науки, то такихъ затрудненій не существуетъ для славянскихъ и иныхъ ученыхъ, занимающихся изученіемъ славянской филологіи и сродныхъ съ нею наукъ, такъ какъ имъ болѣе или менѣе понятны и доступны всѣ или, по крайней мѣрѣ, главнѣйшіе славянскіе языки. А, вѣдь, для такихъ спеціалистовъ и только при ихъ участіи и издается „Архивъ славянской филологіи“. Совершенно естественно и вполне возможно, чтобъ такой спеціально-славянскій журналъ издавался на одномъ изъ самыхъ распространенныхъ славянскихъ языковъ съ допущеніемъ, въ случаѣ надобности, и другихъ менѣе распространенныхъ славянскихъ же языковъ. Столь же естественно, чтобы въ данномъ случаѣ выборъ палъ на тотъ языкъ, которымъ говоритъ самый численный изъ славянскихъ народовъ, на которомъ имѣется обширная литература, который не безъизвестенъ на западѣ, въ романо-германскомъ мірѣ, и весьма усердно изучается западными и южными славянами, который, наконецъ, такъ хорошо известенъ и близокъ самому редактору „Архива“, русскому академику и бывшему профессору двухъ русскихъ университетовъ. Противъ такой славянской внѣшности журнала могутъ возразить, что многіе западно-славянскіе и инородческіе ученые, занимающіеся славянской филологіей; хотя и знакомы съ русскимъ литературнымъ языкомъ, но не настолько владѣютъ имъ, чтобы писать на немъ, вслѣдствіе чего присылаемая въ редакцію статьи на разныхъ языкахъ приходилось бы переводить на русскій языкъ. Это, конечно, вѣрно. Но вѣдь безъ переводовъ нельзя обойтись и теперь при нѣмецкомъ характерѣ журнала. Мнѣ хорошо известно, что всѣ статьи, присылаемая въ редакцію „Архива“ русскими, болгарскими и сербскими (изъ королевства) филологами пишутся авторами на ихъ родныхъ языкахъ и переводятся редакціей на нѣмецкій языкъ. Только живущіе въ Австріи и

Германіи славянскіе ученые пишутъ прямо по-нѣмецки. Слѣдовательно, для многихъ славянскихъ филологовъ, сотрудниковъ и читателей ж. „Archiv für Slavische Philologie“ нѣмецкій языкъ является общимъ научнымъ языкомъ не добровольно и не вслѣдствіе естественнаго порядка вещей, а искусственно, по волѣ и желанію редакціи. Любопытно, что акад. Ягичу, въ бытность его профессоромъ С.-Петербургскаго университета, открывалась возможность превратить нѣмецкій „Архивъ“ въ русское изданіе, но онъ не воспользовался этою возможностью, предпочитая продолжать изданіе въ томъ видѣ, какой ему былъ приданъ Берлинской книгоиздательской фирмой Вейдмана. Такъ идетъ дѣло и теперь. Ни малѣйшихъ уступокъ въ пользу славянскихъ языковъ не допущено и въ юбилейномъ томѣ. Статьи русскихъ ученыхъ, раньше напечатанныя въ русскихъ журналахъ или написанныя спеціально для „Архива“, могли явиться въ юбилейномъ изданіи только въ нѣмецкой оболочкѣ. Столь настойчивая послѣдовательность редактора въ отношеніи славянскихъ языковъ не можетъ не поражать славянскихъ читателей журнала, особенно въ виду того обстоятельства, что въ данномъ томѣ (какъ это бывало и прежде) сдѣлано исключеніе для французскаго языка: на этомъ языкѣ напечатаны двѣ статьи. Ужели жъ на ряду съ французскимъ не заслуживалъ подобной чести и русскій языкъ?! Единственнымъ наиболѣе нѣскимъ основаніемъ въ пользу изданія журнала по славянской филологіи на нѣмецкомъ языкѣ можно было бы признать стремленіе облегчить для нѣмецкихъ ученыхъ ознакомленіе съ современной разработкой славянской филологіи, но и противъ этого основанія имѣется не маловажное возраженіе: къ чему славистамъ въ ихъ заботахъ о наиболѣе полномъ историко-филологическомъ изученіи своего племени выдвигать на первый планъ интересы нѣмецкихъ ученыхъ и нѣмецкой науки? Можно быть покойнымъ, что нѣмцы и безъ нашей помощи сьумѣютъ найти необходимыя свѣдѣнія о славянствѣ и въ частности о славянской филологіи, если только эти свѣдѣнія имъ понадобятся.

Особенность юбилейнаго тома—парадная вѣшность его и участіе въ немъ большого числа ученыхъ. Въ началѣ тома помѣщенъ великолѣпный портретъ почтеннаго основателя и редактора журнала акад. И. В. Ягича, а затѣмъ и статьи всѣхъ участниковъ журнала снабжены фотографіями ихъ авторовъ. Открывается юбилейный томъ выраженіемъ благодарности со стороны книгоиздательской фирмы Вейдмана акад. Ягичу за его труды по веденію журнала и заканчивается

онъ такою же благодарностью со стороны редактора издателю и всѣмъ сотрудникамъ „Архива“. Изъ этого заключительнаго слова акад. Ягича узнаемъ, что многія статьи, присланныя для юбилейнаго тома, не могли въ него попасть по недостатку мѣста и будутъ помѣщены въ слѣдующемъ 26-мъ томѣ, который будетъ разсматриваться, какъ продолженіе настоящаго, юбилейнаго. Никакой руководящей статьи, посвященной подведенію итоговъ столь продолжительнаго существованія журнала, а равно указателя къ послѣднимъ десяти томамъ, который служилъ бы дополненіемъ къ вышедшему раньше указателю для первыхъ пятнадцати томовъ, въ данномъ томѣ не имѣется. Въ юбилейномъ изданіи приняли участіе кромѣ редактора 39 ученыхъ, въ томъ числѣ 12 русскихъ, 7 чеховъ, 3 поляка, 2 болгарина, 6 сербо-хорватовъ, 3 словенца, 3 нѣмца, 1 французъ, 1 румынецъ, 1 мадьяринъ.

Академику И. В. Ягичу въ юбилейномъ томѣ принадлежитъ, кромѣ двухъ рецензій (на сочиненія Нидерле „Slovanské starožytности“ и Здоховскаго „Odrodzenie Chorwacyi w wieku XIX“) и замѣтки о Петинскомъ Октоихѣ 1494 г., большая статья, подъ общимъ заглавіемъ „Analecta Romana“, содержащая рядъ новыхъ цѣнныхъ данныхъ изъ разысканій автора въ излюбленной имъ области глаголической письменности. И. В. Ягичъ сообщаетъ свѣдѣнія о своихъ занятіяхъ славянскими рукописями Ватиканской бібліотеки, какъ тѣми, которыя издавна принадлежатъ этой бібліотекѣ, такъ и тѣми, которыя лишь недавно поступили въ нее изъ бібліотеки Пропаганды. Сначала онъ дѣлаетъ краткія и общія замѣчанія о цѣломъ рядѣ рукописей, имѣющія цѣлью кое въ чемъ исправить и дополнить свѣдѣнія о нихъ, сообщенныя предшествующими учеными, какъ то Добровскимъ, Кукулевичемъ-Сакцинскимъ, Рачкимъ, Черничемъ, Красносельцевымъ и др., затѣмъ подробнѣе останавливается на нѣсколькихъ памятникахъ бібліотеки Пропаганды, которые особенно привлекли къ себѣ его вниманіе. Это — 1) глаголическій миссалъ нач. XIV в.; 2) глаголическій брениарій 1379 г. и 3) боснійско-богомилская рукопись Радосава, уже извѣстная изъ описанія Рачкаго (Starine XIV). Въ заключеніе, въ связи съ замѣчаніями о ватиканскихъ рукописяхъ, И. В. Ягичъ приводитъ съ коментаріями любопытный отрывокъ изъ апокрифическаго евангелія Іакова, находящійся въ Люблинскомъ глаголическомъ бревіаріи XV в.

Остановимся на двухъ изъ этихъ памятниковъ.

Въ глаголическомъ бревіаріи (часословѣ) 1379 г. акад. И. В. Ягичъ открылъ новый текстъ легенды о Св. Вячеславѣ (923—935), сторонникѣ славянскаго богослуженія въ Чехіи, и службу этому Святому. Та же легенда (но безъ службы) всего годъ назадъ была напечатана И. В. Ягичемъ по Люблянскоу глаголическоу рукописи XV в. въ Русскомъ Филологическомъ Вѣстникѣ (1902 г. т. XLIII 92—108). Тамъ же почтеннымъ славистомъ произведено сравненіе глаголическаго текста легенды съ давно извѣстными кирилловскими текстами и высказано нѣсколько соображеній о взаимныхъ отношеніяхъ тѣхъ и другихъ текстовъ. Въ данной статьѣ акад. Ягичъ напечаталъ римскій текстъ легенды и службы, съ подведеніемъ варіантовъ изъ Люблянскоу рукописи. Оказывается, что римскій текстъ въ общемъ довольно близокъ къ люблянскому; представляемыя же имъ уклоненія, по мнѣнію И. В. Ягича, указываютъ что этотъ текстъ еще дальше отстоитъ отъ предполагаемаго древняго оригинала, чѣмъ люблянскій. Уже въ первой своей статьѣ о новооткрытомъ памятникѣ И. В. Ягичъ призналъ высокую его важность и высказалъ мнѣніе, что глаголическая версія сказанія о св. Вячеславѣ, несмотря на свой сокращенный видъ по сравненію съ кирилловскоу и разныя позднѣйшія измѣненія и подновленія, все-таки представляетъ такъ много чертъ древности, что ее, въ недошедшемъ до насъ древнемъ и болѣе полномъ видѣ, можно признать источникомъ кирилловскоу версіи. Теперь, въ новой статьѣ еще сильнѣе подчеркнута важное значеніе глаголическаго текста сказанія о св. Вячеславѣ. И. В. Ягичъ утверждаетъ, что онъ въ упомянутой выше первой своей статьѣ достаточно показалъ, что эта глаголическая легенда имѣетъ выдающееся, даже рѣшающее значеніе (von hervorragendster, ja geradezu Ausschlag gebender Bedeutung sei) какъ для цѣльнаго представленія о происхожденіи славянскоу литургіи въ Чехіи, такъ для рѣшенія вопроса о старшинствѣ глаголическаго письма“. „Дѣйствительно, говоритъ И. В. Ягичъ, я не знаю, какихъ еще дальнѣйшихъ доказательствъ можно требовать въ пользу того твердаго убѣжденія, что въ Чехіи, при княжескомъ дворѣ славянская литургія, полученная, какъ наслѣдіе, поддерживалась Людмилой, которая передала уваженіе къ ней и внуку Вячеславу, и что вскорѣ послѣ его смерти составленное въ Чехіи на древнемъ церковно-славянскомъ языкѣ сказаніе о мученіи Вячеслава было написано глаголицей“. Противъ первой части этого утвержденія, касающагося существованія въ Чехіи славянскаго богослуженія

при Людмилѣ и Вячеславѣ, конечно, ничего нельзя возразить. Относительно же признанія старшинства за глаголицей, какъ такимъ письмомъ, которое унаслѣдовано чехами отъ моравовъ Мееодіевской эпохи, и которымъ была написана первичная версія легенды о св. Вячеславѣ, я позволю себѣ высказать рядъ сомнѣній.

Какъ ни любопытна находка И. В. Ягича и сама по себѣ, и для исторіи славянской письменности, она не даетъ основаній для тѣхъ широкихъ заключеній, какія находимъ въ данной статьѣ. Открытіе и изданіе глаголическаго текста сказанія о св. Вячеславѣ, по моему мнѣнію, не прибавляетъ ни одного новаго аргумента въ пользу отстаиваемого И. В. Ягичемъ взгляда на происхождение и взаимныя отношенія славянскихъ азбукъ и ужъ никакъ не можетъ имѣть на окончательное рѣшеніе спорнаго вопроса о старшинствѣ глаголицы.

Прежде всего, на чемъ основывается безспорность положенія, что сказаніе о мученіи Вячеслава, составленное вскорѣ послѣ кончины князя, т. е. въ первой половинѣ X ст., было написано глаголицей и что кирилловскій текстъ сказанія ведетъ свое происхожденіе отъ первичнаго глаголическаго? Вотъ существенныя данныя, извлекаемыя изъ статей самого акад. Ягича. 1) Глаголическій текстъ, такъ же какъ и кирилловскій дошелъ въ сравнительно позднихъ спискахъ конца XIV и XV в.в., такъ что въ отношеніи хронологіи рукописнаго преданія глаголическая версія не имѣетъ никакого преимущества передъ кирилловской. 2) Обѣ версіи въ томъ видѣ, въ какомъ онѣ дошли до насъ, представляютъ разныя уклоненія и отступленія отъ предполагаемаго древняго оригинала; но въ отношеніи полноты содержанія кирилловскій изводъ (по Румянцевскому списку) имѣетъ преимущество передъ глаголическимъ: въ послѣднемъ опущены многія любопытныя историческія подробности, находящіяся въ первомъ; напр. въ немъ не упоминается названіе церкви, гдѣ происходили постриги Вячеслава: не упомянута по имени баба Людмила, участіе ея въ обученіи сына въ славянскихъ книгахъ такъ же пропущено, какъ и участіе отца Вратислава въ отпращиваніи сына въ Будечъ для обученія въ латыни; не указанъ 18-лѣтній возрастъ Вячеслава, когда онъ долженъ былъ занять мѣсто отца; не упомянута названіе города, гдѣ сдѣлано убійство, не указано точно время, когда оно совершилось и т. д. Въ виду этихъ опущеній и сокращеній, оставаясь при наличномъ рукописномъ матеріалѣ, можно было бы сдѣлать лишь одно заключеніе, что глаголическая версія, какъ сокращенная, возникла изъ

кирилловской, а не наоборотъ. 3) Со стороны языка и изложенія обѣ версіи также отошли болѣе или менѣе значительно отъ первоначальнаго извода; въ кирилловской (извѣстной пока въ русскихъ спискахъ) видно вліяніе русскаго языка, въ глаголической—хорватскаго. Тѣмъ не менѣе въ языкѣ обѣихъ версій сохранилось не мало остатковъ старины. Акад. Ягичъ находитъ наибольшее количество такихъ архаизмовъ въ глаголической версіи, но онъ не отрицаетъ того, что иногда они попадаются въ тѣхъ мѣстахъ кирилловскаго извода, въ которыхъ отсутствуютъ въ глаголическомъ. При томъ по отношенію къ отдѣльнымъ словамъ и выраженіямъ можетъ быть вопросъ, что считать болѣе древнимъ. Такъ И. В. Ягичъ считаетъ слово *мама* (древн. *мъша*) глаголическаго текста древнимъ, а слово *литургія* кирилловскаго текста позднѣйшей замѣной. Съ этимъ, однако, едва ли возможно согласиться, такъ какъ слово „*литургія*“ несомнѣнно существовало въ книжномъ языкѣ Кирилло-Меѳодіевской эпохи, на что едва ли нужно приводить доказательства. Впрочемъ, если и признать, что глаголическій текстъ XV ст. отличается болѣе древнимъ языкомъ по сравненію съ кирилловскимъ, то одно это обстоятельство не дастъ основанія признать первенство происхожденія за глаголическимъ изводомъ. Оно можетъ свидѣтельствовать лишь о томъ, что данные глаголическіе списки или ближайшіе ихъ прототипы меньше потерпѣли отъ исправленія переписчика, а данные кирилловскіе больше, или что въ хорватской глаголической письменности вообще лучше сохранились древнія особенности языка памятника, чѣмъ въ русской. 4) Самое вѣское доказательство въ пользу своего мнѣнія акад. Ягичъ усматриваетъ въ слѣдующемъ фактѣ. Въ глаголическомъ текстѣ перенесеніе тѣла Вячеслава въ Прагу помѣчено 4-мъ марта, при чемъ это число выражено по глаголическому счету буквой Г; въ кирилловскихъ спискахъ также стоитъ Г, но здѣсь эта буква должна обозначать 3-е число. Такое различіе въ датахъ по мнѣнію И. В. Ягича (а также Коляржа и Калусека) объясняется тѣмъ, что при транскрипціи глаголическаго текста по ошибкѣ числовое глаголическое Г не было замѣнено соотвѣствующимъ числовымъ кирилловскимъ Д. Это объясненіе можно признать вѣролтымъ, хотя ничего нѣтъ невозможнаго въ томъ, что въ данныхъ кирилловскихъ спискахъ (ихъ всего два) эта ошибка явилась и самостоятельно. Вѣдь не можемъ мы на основаніи двухъ только, и притомъ позднихъ, рукописей утверждать, что и во всѣхъ другихъ кирилловскихъ спискахъ, намъ неизвѣстныхъ, числовая

дата указаннаго событія была обозначена буквой Г, а не Д. Но даже признавая нѣкоторую вѣроятность за указаннымъ объясненіемъ, я никакъ не могу признать за фактомъ, къ которому оно относится значеніе вѣскаго свидѣтельства въ пользу мнѣнія, что глаголическій текстъ былъ „подлинникомъ“ для кирилловскихъ изводовъ. Если видѣть въ данномъ случаѣ вліяніе глаголическаго текста на кирилловскій, то возникаетъ еще вопросъ, къ какому времени должно приурочить это вліяніе. Взаимодѣйствіе между кирилловской и глаголической письменностью могло имѣть мѣсто не только въ X ст., но и позже, въ XI, XII и XIII ст., какъ это особенно можно утверждать по отношенію къ славянскому югу, гдѣ общеніе между хорватами—католиками и сербами—православными въ ихъ церковныхъ книгахъ, кирилловскихъ и глаголическихъ, продолжалось въ теченіе цѣлаго ряда вѣковъ. Ничего нѣтъ невѣроятнаго въ томъ, что тотъ или другой глаголическій списокъ послужилъ оригиналомъ для одного или нѣсколькихъ позднихъ кирилловскихъ списковъ въ то время, когда уже существовали самостоятельныя кирилловскія изводы. Не слѣдуетъ забывать, что въ настоящее время извѣстно такъ мало списковъ разсматриваемаго сказанія и эти списки такъ поздны, что всякая попытка выяснитъ по нимъ исторію текста этого любопытнаго памятника можетъ приводить только къ гипотезамъ, а не къ положительнымъ даннымъ. Нельзя не пожалѣть, что нѣкоторые матеріалы, имѣющіе отношеніе къ данному вопросу, притомъ давно указанные, еще не подвергнуты изслѣдованію. Таково, напр., проложное Житіе св. Вячеслава, отмѣченное еще Востоковымъ въ пергаменномъ спискѣ 1432 г., принадлежащемъ Имп. Публичной Библіотекѣ. Сравненіе этого проложнаго Житія съ новоизданными глаголическими текстами, быть можетъ, привело бы къ нѣкоторымъ любопытнымъ указаніямъ относительно исторіи текста памятника. Наконецъ, И. В. Ягичъ указываетъ, что изученіе найденнаго имъ глаголическаго текста сравнительно съ кирилловскими, привело его къ заключенію, что не этотъ поздній и сокращенный глаголическій текстъ, а болѣе полный и древній, изъ котораго возникъ этотъ позднѣйшій, былъ подлинникомъ кирилловскихъ изводовъ. Но, вѣдь, этотъ полный глаголическій текстъ пока не найденъ и во всякомъ случаѣ представляетъ нѣчто неизвѣстное: ничего достовѣрнаго о немъ пока нельзя сказать. Не съ полнымъ ли правомъ можно предпологать, что и для кирилловской версіи будетъ найденъ болѣе древній списокъ, который при архаизмахъ языка

будеть представлять и другія особенности, устраняющія всякое сомнѣніе относительно кирилловскаго первоисточника сказанія. На такихъ пяткахъ основаніяхъ покоится мнѣніе И. В. Ягича о старшинствѣ глаголической версіи сказанія о св. Вячеславѣ. Мнѣніе это онъ выдаетъ за непреложную истину; мнѣ оно представляется лишь гипотезой, слабо доказанной и вызывающей не мало возраженій.

Теперь пойдѣмъ дальше. Предположимъ, что въ болѣе или менѣе близкомъ будущемъ будутъ найдены болѣе древніе, кирилловскіе и глаголическіе, списки даннаго памятника, которые окончателно подтвердятъ мнѣніе И. В. Ягича, что сказаніе о св. Вячеславѣ впервые явилось на свѣтъ въ глаголической оболочкѣ. Что же изъ этого будетъ слѣдовать? Развѣ этотъ фактъ можетъ имѣть, согласно утверженію акад. Ягича, рѣшающее значенія для признанія глаголицы за древнѣйшее письмо, введенное въ употребленіе свв. Кирилломъ и Меѳодіемъ? Несомнѣнно онъ давалъ бы право только на одинъ выводъ: въ Чехіи въ X в. существовала глаголическая письменность. Но этотъ выводъ нисколько не мѣшалъ бы признанію того факта, который многимъ ученымъ кажется вполне достовѣрнымъ, что какъ въ Велико-моравскомъ княжествѣ, такъ въ Чехіи, въ Кирилло-Меѳодіевскую эпоху, т. е. во второй половинѣ IX в. употреблялось кирилловское письмо, введенное въ культурную жизнь Славянъ незабвенными солунскими братьями. Что было въ X в., того могло не быть въ IX в. Глаголица, согласно старому, весьма вѣроятному предположенію, могла возникнуть въ Чехіи и Моравіи въ эпоху преслѣдованія славянской народной церкви и славянскихъ еретическихъ книгъ, наступившую вслѣдъ за изгнаніемъ учениковъ Меѳодія. Сторонники дѣла свв. Братьевъ перевелись не вдругъ. Желая какъ-нибудь сохранить для чеховъ и моравовъ славянское богослуженіе, они отказались отъ ненавистной латинно-нѣмецкому духовенству кириллицы и выработали новое болѣе замысловатое, но въ главномъ основанное на кирилловскихъ же начертаніяхъ письмо. Такъ явилась глаголица, распространившаяся у другихъ славянъ, но особенно окрѣпшая у католическихъ хорватовъ. Появленіе глаголицы, нужно думать, совпадало съ устраненіемъ изъ богослуженія въ чешскихъ и моравскихъ церквахъ восточнаго, греческаго обряда, принесеннаго свв. Кирилломъ и Меѳодіемъ, и съ замѣной его западнымъ, римскимъ.

Итакъ, попытку акад. И. В. Ягича воспользоваться новооткрытыми имъ глаголическими текстами для обоснованія излюбленнаго имъ

положенія о старшинствѣ глаголицы передъ кириллицей едва ли можно считать удачной.

Замѣчанія И. В. Ягича объ известномъ сборникѣ боснійскаго богомила Радосава (XV в.) существенно дополняютъ свѣдѣнія объ этомъ любопытномъ памятникѣ, сообщенныя покойнымъ Рачкимъ (Starine XIV) и Стасовымъ (въ его монументальномъ трудѣ, посвященномъ Славянскому Орнаменту). Большая часть сборника занята Апокалипсисомъ. И. В. Ягичъ привелъ нѣсколько данныхъ изъ сдѣланнаго имъ сопоставленія этого текста съ текстами того же памятника по другой боснійско-богомильской рукописи (Хвала) и одному венеціанскому списку (Магсіана), но главнымъ образомъ остановился на любопытномъ письмѣ Сборника. Онъ писанъ кириллицей, но одна изъ приписокъ сдѣлана глаголицей; сверхъ того глаголическія письмена встрѣчаются еще на двухъ листахъ. Анализъ этихъ письменъ, представляющихъ нѣчто среднее между угловатой и круглой глаголицей, приводитъ автора къ заключенію, что въ Босніи выработался свой особый типъ глаголическаго письма, отличный отъ хорватскаго. Равнымъ образомъ и кирилловское письмо рукописи отличается своимъ особымъ характеромъ и не имѣетъ себѣ параллелей среди другихъ боснійскихъ памятниковъ XV ст. Приложенныя къ статьѣ прекрасныя фототипическія снимки даютъ отчетливое представленіе о томъ и другомъ письмѣ. Вся работа привноситъ цѣнный матеріалъ въ кирилловскую и глаголическую палеографію.

Старѣйшими и главными сотрудниками журнала со времени его основанія были и остаются профессора славянской филологіи трехъ вѣмецкихъ университетовъ (Лейпцигскаго, Берлинскаго и Бреславльскаго) А. Лескинъ, А. Брюкнеръ и В. Неринъ. Ихъ статьи въ юбилейномъ изданіи слѣдуютъ за статьей редактора. Двѣ изъ нихъ не представляютъ ничего важнаго. Проф. *Неринъ* (Der Name *bélbog* in der Slavischen Mythologie) далъ небольшую библиографическую замѣтку о появленіи и употребленіи въ славянской мифологіи имени Бѣлбога, мнимаго славянскаго божества. Проф. *А. Брюкнеръ* помѣстилъ обычный свой критико-библиографическій обзоръ *Polonica* за 1901 г. Болѣе вниманія останавливаетъ на себѣ статья *А. Лескина* объ Іоаннѣ Экзархѣ, какъ переводчикѣ (Die Uebersetzungskunst des Exarchen Johannes). Языкъ твореній Іоанна Экзарха, одного изъ древнѣйшихъ болгарскихъ писателей, вполне заслуживаетъ изученія. Со стороны грамматической онъ уже былъ предметомъ изслѣдованія чешскаго филолога Вондрака (О

mluvě Exarcha bulharského, Praha. 1896). Проф. А. Лескинъ поставилъ себѣ задачей выяснитъ внутреннія качества переводовъ Іоанна Экзарха и для этой цѣли остановился на сопоставленіи съ греческимъ подлинникомъ перевода „Богословія Іоанна Дамаскина“. Авторъ признаетъ выполнение этого перевода предпріятіемъ очень смѣлымъ для перваго періода славянской письменности, когда еще только выработывался славянской литературный языкъ, а переводчику пришлось имѣть дѣло съ точно установленной философской и богословской терминологіей выдающагося греческаго богослова. По мнѣнію проф. Лескина, уже а priori можно было предпологать, что переводъ будетъ не изъ удачныхъ. Къ такому же невыгодному для Іоанна Экзарха заключенію приводятъ его непосредственныя наблюденія надъ текстомъ перевода. Онъ отмѣчаетъ цѣлый рядъ неточныхъ, неясныхъ и испорченныхъ мѣстъ. Допуская, что нѣкоторые изъ недостатковъ перевода могутъ быть отнесены на счетъ порчи текста памятника, дошедшаго лишь въ русско-славянскомъ спискѣ XII—XIII в. или же объясняются неисправностью греческой рукописи, съ которой сдѣланъ славянской переводъ, проф. Лескинъ все таки убѣжденъ, что вина за неясность и невразумительность перевода падаетъ, главнымъ образомъ, на самага Іоанна Экзарха: переводчикъ не только стремился къ дословно-рабской передачѣ подлинника, но мѣстами обнаружилъ незнавіе греческаго языка и непониманіе текста. Въ частности авторъ упрекаетъ Іоанна Экзарха за неумѣлую передачу греческихъ сложныхъ словъ славянскими, тоже сложными; напр. *δημιουργός*—народотворецъ. Въ цѣломъ переводъ Богословія, по мнѣнію Лескина, таково, что онъ совершенно непонятенъ безъ параллельнаго чтенія подлинника. Не отрицая важности приведенныхъ авторомъ статьи данныхъ, я не могу не признатъ общій приговоръ его объ Іоаннѣ Экзархѣ, какъ переводчикѣ, слишкомъ суровымъ. Не подлежитъ сомнѣнію, что въ переводѣ Богословія попадаются неудачныя и неясныя мѣста, но для признанія всего труда почтеннаго болгарскаго писателя неудовлетворительнымъ даже для своего времени (X в.) указанныхъ при мѣровъ едва ли достаточно. Для категорическаго сужденія о достоинствахъ перевода и вообще книжнаго языка Іоанна Экзарха необходимо болѣе полное и подробное сопоставленіе съ греческимъ подлинникомъ какъ Богословія, такъ и Шестоднева. А это будетъ возможно лишь тогда, когда осуществится новое критическое изданіе того и другого памятника параллельно съ греческимъ текстомъ.

Изъ русскихъ ученыхъ приняли участіе въ юбилейномъ изданіи: академики В. И. Ламанскій, А. Н. Пыпинъ, Ѡ. Е. Корнъ, А. А. Шахматовъ и профессора А. А. Кочубинскій, М. Халанскій, М. Н. Сперанскій, В. Щепкинъ и К. Ѡ. Радченко. Академики *Ламанскій* и *Пыпинъ* сообщили свои труды, уже раньше явившіеся по-русски: Ламанскій—начало своего замѣчательнаго изслѣдованія о Житіи св. Кирилла (*Vita Cyrilli*); Пыпинъ—свою юбилейную рѣчь: „О значеніи Гогаля въ русской литературѣ“. Акад. *Ѡ. Е. Корнъ* далъ рецензію на новое изданіе (Ашкерда, въ Люблянѣ 1902 г.) поэтическихъ произведеній словинскаго поэта Прешерна, изученію котораго посвященъ замѣчательный трудъ на русскомъ языкѣ самого г. рецензента. Академику *А. А. Шахматову* принадлежитъ цѣнная статья объ одной изъ любопытныхъ звуковыхъ особенностей малорусскаго нарѣчія—неспособности простыхъ согласныхъ къ смягченію (палатализации) передъ общерусскими и общеславянскими *e* и *i* [Wie im Kleinrussischen die Palatalisation der Consonanten vor *e* und *i* verloren ging]. Авторъ на ряду съ большинствомъ наслѣдователей признаетъ, что смягчаемость согласныхъ въ данномъ случаѣ, свойственна великорусскому и бѣлорусскому нарѣчіямъ (напр. село, веденіе, тихо, вино) составляетъ исконную особенность русскаго языка, утраченную малорусскимъ нарѣчіемъ (село, веденіе, вино) и старается выяснитъ какъ и почему произошла эта утрата. Проф. *А. А. Кочубинскій* сообщилъ нѣсколько данныхъ для характеристики взаимныхъ отношеній Мильошича и Шафарика. Проф. *М. Халанскій* въ своей статьѣ „*Hiias von Reussen und H'ja Murgomes*“ (440—45) еще разъ возвращается къ давно занимающему его вопросу о тождествѣ русскаго былеваго Ильи Муромца съ *Hiias von Reussen* западныхъ сказаній, при чемъ вновь старается обосновать прежде высказанное имъ положеніе, что связующимъ звеномъ между русскими былинами объ Ильѣ Муромцѣ и германскими сказаніями объ *Hiias von Reussen* служатъ древнерусскія сказанія о Вѣщемъ Олегѣ. Русскій *Олеги*, для котораго допускается и другое параллельное названіе *Елиги* или *Елиги*, по мнѣнію автора, воспѣвается въ „Орнитѣ“ и „Тидрекъ-сагѣ“ подъ именемъ *Eligas*, *Elyas*, *Hiias*, а этотъ *Hiias* уже позже вновь перешелъ на Русь, гдѣ и превратился въ богатыря Илью Муромца. Такой взглядъ проф. Халанскаго на происхожденіе былинъ объ Ильѣ Муромцѣ уже подвергался рѣзкой критикѣ въ ученой литературѣ. Кое въ чемъ оспариваетъ его и акад. Ягичъ въ своей замѣткѣ, сопровождающей данную статью.

Особенно онъ возражаетъ противъ существованія параллельной формы *Elmъ* и образованія изъ нея западнаго *Eligas*. Проф. *М. Н. Сперанскій* сообщилъ съ вводными замѣчаніями греческій текстъ особаго типа гаданія по Евангелію и Псалтыри, извѣстнаго въ южно-славянскихъ спискахъ, изслѣдованныхъ въ трудѣ того же автора „Гаданія по псалтыри“ (Спб. 1899 г.). Проф. *В. Щенкину* принадлежитъ небольшая, но весьма цѣнная статья изъ области палеографіи—„О Кирилловской визѣ“. Не менѣе цѣнно и сообщеніе проф. *К. Ѳ. Радченка* о любопытномъ текстѣ „Вопросовъ и Отвѣтовъ“ въ рукописи № 188 Зографскаго монастыря.

Изъ австро-русскихъ ученыхъ приняли участіе въ юбилейномъ изданіи проф. *Е. Калужнякскій* и *І. Верхратскій*. Первый сопоставилъ легенду о видѣніи Анфилога („Сказаніе Анфилога царю о сватѣи литургіи“) съ аналогичнымъ греческимъ произведеніемъ—„Λόγος ιστορικος“ Григорія Декаполита и отмѣтилъ вліяніе этого произведенія на славянскую легенду (101--108). Второй представилъ описаніе одного изъ смѣшанныхъ лемковскихъ говоровъ, который слышится въ области Угерцы, близъ Лиска.

Южно-славянскимъ ученымъ принадлежитъ рядъ болѣе или менѣе цѣнныхъ статей. Изъ нихъ, прежде всего, слѣдуетъ отмѣтить прекрасный этюдъ проф. *Л. Милетича*—Объ языкѣ и происхожденіи Крашованъ (*Ueber die Sprache und die Herkunft der sog. Krašovaner in Süd. Ungarn*). Подъ именемъ Крашованъ извѣстно славянское населеніе, въ числѣ ок. 7690 душъ занимающее 7 селъ въ южной Венгріи, въ прежнемъ Темешскомъ Банатѣ. Самое большое изъ этихъ селъ Крашова, давшее названіе и всей этой маленькой славянской вѣтви. Эти Крашоване, такъ же, какъ и другіе славяне-католики, обитающіе въ томъ же Банатѣ (Темешскомъ и Тарантольскомъ комитетахъ) до послѣдняго времени считались въ наукѣ болгарами, потомками выселенцевъ изъ восточной Болгаріи. Проф. *Л. Милетичъ* лично посѣтилъ Крашову и собралъ на мѣстѣ точныя свѣдѣнія о славянскихъ обитателяхъ какъ этого села, такъ и другихъ сосѣднихъ шести и пришелъ къ заключенію, что Крашоване отнюдь не болгары, а сербы. Языкъ ихъ—чисто сербскій, хотя и представляетъ нѣкоторыя свои характерныя особенности. Авторъ приводитъ любопытныя образцы этого языка и разъясняетъ, какимъ путемъ сложилось въ наукѣ неправильное представленіе о народности Крашованъ. Выселились эти сербы въ южную Венгрію, по мнѣнію проф. *Л. Миле-*

тича, вѣроятно изъ Старой Сербіи въ XV в. Къ области сербской діалектологіи относится и небольшое сообщеніе акад. *Л. Стояновича* объ одномъ изъ говоровъ Крушевцакаго округа (въ окрестностяхъ Врнци). Проф. *И. Шишмановъ* въ большой статьѣ (580—611) представлялъ подробный пересмотръ стараго вопроса объ извѣстной поддѣлкѣ въ области болгарскаго эпоса „Веда Словена“ Ст. Верковича. Проф. *Т. Маретичъ* сдѣлалъ небольшое сообщеніе „О типическихъ числахъ въ русскомъ народномъ эпосѣ“. Подобная работа недавно была выполнена авторомъ по отношенію къ сербо-хорватскому эпосу (*Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena. Zagreb. 1902*). Въ данномъ этюдѣ проф. Маретичъ воспользовался матеріаломъ, находящимся только въ одномъ сборникѣ былинъ—Гильфердинга. Проф. *Решетару* принадлежитъ обстоятельное изслѣдованіе о метрикѣ Гундулича. Маститый сербскій историкъ-филологъ *Ст. Новаковичъ* помѣстилъ (на французскомъ языкѣ) вводную главу изъ своего спеціальнаго труда о городахъ въ средневѣковой Сербіи. Она представляетъ рядъ общихъ, основанныхъ на близкомъ знакомствѣ съ дѣломъ, разсужденій о городахъ въ средніе вѣка въ Западной Европѣ и на Балканскомъ полуостровѣ. Другой сербскій историкъ, почтенный *архимандритъ Иларіонъ Руварицъ* ограничился небольшою замѣткой о діаконѣ Іоаннѣ Малешевцѣ, перенесчякѣ и справщикѣ книгъ въ XVI ст., дополненной примѣчаніями И. В. Ягича и К. Иречка. Два славянскихъ филолога *Шкрабецъ* и *Штрекель* дали спеціальныя статьи изъ области изученія роднаго языка: первый разсмотрѣлъ употребленіе глаголовъ совершеннаго и несовершеннаго вида въ словинскомъ; второй старался выяснитъ причину выхода изъ употребленія въ словинскомъ и сербо-лужицкомъ языкахъ конструкціи съ творительнымъ надежемъ въ значеніи сказуемаго.

Весьма разнообразны по содержанію вклады чешскихъ ученыхъ. Проф. *Я. Гебауеръ* подробно выясняетъ значеніе имперфекта въ древнечешскомъ языкѣ. Проф. *Ю. Поливка* сообщаетъ цѣнный матеріалъ для изученія смѣшанныхъ чешско-польскихъ говоровъ въ Силезіи; матеріалъ извлеченъ изъ сборника „*Powieści ludu polskiego na Śląsku*“ (*Materiały antropologo-archeologiczne i etnograficzne. T. V*). Проф. *Фр. Пастернакъ* въ своемъ этюдѣ „*Die griechischen Artikelkonstruktionen in der alt-kirchenslavischen Psalter-und Evangelienübersetzung*“, составляющемъ лишь первую часть болѣе обширнаго труда, занимается изслѣдованіемъ языка древне-славянскаго перевода Псалтыри

съ точки зрѣнія возможнаго вліянія на этотъ переводъ латинской Вульгаты. Вопросъ о такомъ вліянїи, какъ извѣстно, былъ поставленъ М. Вальявцемъ, указавшимъ на однородную въ латинскомъ и славянскомъ переводѣ передачу греческаго неопредѣленнаго наклоненія съ членомъ черезъ описательные предложенія съ союзами цѣли—*ut, da*. Чешскій ученый разсмотрѣлъ всѣ представляемые древне-славянскимъ переводомъ Псалтыри случаи воспроизведенія указанной греческой конструкціи, а также остановился на нѣкоторыхъ другихъ чертахъ перевода и пришелъ къ заключенію, что пользование Вульгатой со стороны славянскаго переводчика можно установить только въ отдѣльных случаяхъ; въ общемъ же древнеславянскій переводъ Псалтыри, по мнѣнію автора, сдѣланъ по греческому тексту, при чемъ не лишень „извѣстной формальной самостоятельности“, направленной къ сохраненію чистоты славянскаго языка. Исправленіе первоначальнаго перевода по Вульгатѣ, по словамъ проф. Фр. Пастерника, должно было произойти еще въ Кирилло-Меѳодіевскую эпоху. На нашъ взглядъ и такое частное вліянїе латинскаго перевода Псалтыри на древній славянскій, какъ его устанавливаетъ авторъ данной статьи, едва ли можно считать доказаннымъ. Въ такихъ примѣрахъ, какъ: да поземъ на земли пять твом, славянскій переводчикъ могъ передать греч. τὸν γῆρας описательно да поземъ и безъ вліянія латинскаго *ut cognoscamus*. Значеніе выводовъ проф. Фр. Пастерника ослабляется еще и тѣмъ обстоятельствомъ, что они основаны на изученіи древнеславянскаго перевода Псалтыри лишь по одному списку (Синайскому— глаголическому). Проф. *Вондрикъ* — въ своей статьѣ *Zur Liquidametathese im Slavischen* оспариваетъ извѣстную новую теорію *Torgbiörnsson'a* о перестановкѣ плавныхъ при гласныхъ, объясняющую происхожденіе русскихъ сочетаній типа *togot*, сербо-луж. *trot* и полабскаихъ *tort* изъ праславянскаго *tort* черезъ посредствующую ступень *trōt*¹⁾. Проф. *Зубатый* далъ нѣсколько соображеній объ образованіи въ славянскомъ языкѣ словъ женскаго рода на *ymi* (господыни, нѣмкини).

Другія работы чешскихъ ученыхъ относятся къ области исторіи. Проф. *Л. Нидерле* (*Ein Beitrag zur Geschichte der Südslavischen Wanderungen*) приводитъ не лишеныя значенія соображенія о времени поселенія славянъ на Дунаѣ и переходѣ ихъ черезъ эту рѣку.

¹⁾ Объ этой теоріи была рѣчь въ одномъ изъ предшествующихъ моихъ „Обзоровъ“ (Унив. Изв. 1902 г.).

Онъ оспариваетъ распространенное въ наукѣ мнѣніе, по которому эти событія приурочиваются къ нач. VI в. и доказываетъ, что славяне жили на Дунаѣ уже въ III—IV вѣкѣ и уже въ концѣ IV в. появились на Балканскомъ полуостровѣ. Кромѣ другихъ общеизвѣстныхъ свидѣтельствъ, авторъ особенно выдвигаетъ доселѣ мало-истолкованное свидѣтельство армянскаго географа Монсея Хоренскаго о томъ, что готы, вторгнувшись во Фракію, нашли въ этой области 25 славянскихъ народовъ. Хотя трудно опредѣлить съ точностью время, къ которому относится это свидѣтельство—къ V или VI вѣку, тѣмъ не менѣе проф. Л. Нидерле находитъ его не противорѣчающимъ другимъ даннымъ и склоненъ придавать ему большую важность. На мой взглядъ дѣло не такъ просто. О движеніи славянъ на Балканскій полуостровъ въ VI в. мы имѣемъ отчетливыя и достовѣрныя извѣстія. Данныя же отъ V и тѣмъ болѣе IV и III вв. о пребываніи славянъ на Дунаѣ настолько отрывочны, скудны и неопредѣленны, что на основаніи ихъ едва ли можно дѣлать достовѣрные заключенія.

Проф. К. Иречекъ, извѣстный изслѣдователь исторіи южныхъ славянъ, въ частности Далмаціи, помѣстилъ начало большой весьма цѣнной работы, объ организаціи и дѣятельности государственной канцеляріи въ Дубровникѣ, при чемъ пока сообщаетъ свѣдѣнія о латинской канцеляріи.

Изъ польскихъ ученыхъ, кромѣ упомянутыхъ уже постоянныхъ сотрудниковъ журнала А. Брикнера и В. Неринга, принялъ участіе въ юбилейномъ томѣ одинъ Я. Карловичъ, приславшій небольшую статью по исторіи носовыхъ гласныхъ въ польскомъ языкѣ и этимологическую замѣтку. Повидимому, это были послѣднія работы славнаго польскаго діалектолога и этнографа, составителя замѣчательнаго, къ сожалѣнію, пока не оконченнаго словаря польскихъ говоровъ (*Słownik gwag polskich*) и редактора этнографическаго журнала „*Wisła*“. 1 іюня 1903 г. почтенный ученый скончался. Краткій некрологъ его, написанный А. Брикнеромъ, заканчиваетъ юбилейный томъ „Архива“.

Наконецъ, надо отмѣтить еще слѣдующія статьи: *A. Meillet*, *De quelques déplacements d'accent dans les dialectes slaves*; *A. Jensen*, *Einige litterarische Bemerkungen zum „Ribanje“ von Petar Hektorović* (по поводу книги Петровскаго. О сочиненіяхъ Петра Гекторовича); *J. Bogdan*, *Ueber die romanischen Knesen* (не окончено); *J. Asboth*, *Ein Stuck Volksetymologie*.

Въ критико-библиографическомъ отдѣлѣ разсмотрѣно всего десять книгъ, а именно, кромѣ указанныхъ уже выше—Jan Karłowicz, *Słownik gwar polskich*; Н. Симиѣ, Множина именица мушкога рода од једнога и од два слога; Dr. L. Niederle, *Slovanské starožitnosti*; Ed. Bogusławski, *Methode und Hilfsmittel der Erforschung der vorhistorischen Zeit in der Vergangenheit der Slaven*; Максимовиѣ, *Песнички зборник. У Мостару. 1902.* Ј. Стојановиѣ, *Стари српски записи и натписи. Кн. 1*; Поржевинскій. *Къ исторіи формъ спряженія въ балтійскихъ языкахъ. М. 1901.* (рец. Е. Berneker).

Такъ разнообразно содержаніе юбилейнаго тома Архива. Огромное количество участниковъ въ изданіи и ихъ имена свидѣтельствуютъ о высококомъ уваженіи, какимъ пользуется журналъ академика Ягича въ славянскомъ ученомъ мірѣ. Пусть и настоящая замѣтка будетъ принята почтенной редакціей, какъ выраженіе искренней доброжелательности къ *Archiv für slavische Philologie* со стороны одного изъ русскихъ славистовъ, всегда слѣдившаго за этимъ журналомъ съ самымъ живымъ интересомъ и извлекавшаго изъ него обильный матеріалъ для поученія.

2. Русскій Филологическій Вѣстникъ, издаваемый подъ редакціей профессора А. И. Смирнова. 1903 г. № 1—2, 3—4. Томы XLIX и L. (Годъ изданія 25-й). Варшава. 370 + 16 + 356 + 66.

Съ юбилеемъ нѣмецкаго „Архива Славянской филологіи“ совпалъ по времени такой же юбилей русскаго филологическаго журнала, преслѣдующаго почти тѣ же задачи, что и *Archiv* акад. Ягича. Въ 1903 г. исполнилось двадцатипятилѣтіе изданія „Русскаго Филологическаго Вѣстника“, выходящаго въ Варшавѣ подъ редакціей проф. А. И. Смирнова; въ этомъ году явились въ свѣтъ 49-й и 50-й томы журнала. Основанъ Русскій Филологическій Вѣстникъ варшавскимъ же профессоромъ, извѣстнымъ изслѣдователемъ русскаго языка Митрофаномъ Алексѣевичемъ Колосовымъ въ 1878 г. и со второго же года вслѣдствіе болѣзни редактора, вскорѣ затѣмъ умершаго (14 янв. 1881 г.), перешель въ завѣдываніе нынѣшняго редактора, проф. А. И. Смирнова, которому и принадлежитъ большая честь и заслуга въ фактъ достиженія спеціальнымъ ученымъ журналомъ юбилейнаго термина. Предметами журнала при самомъ его основаніи были намѣчены: языкъ, народная поэзія и древняя литература славянскихъ племенъ,

преимущественно русскаго народа. Впослѣдствіи эта программа естественно расширилась. Въ журналѣ стали помѣщаться статьи и по новой русской литературѣ (о Пушкинѣ, Гоголѣ, Жуковскомъ и др.) матеріалы и изслѣдованія по русской и вообще славянской этнографіи, работы по сравнительному языковеденію, на ряду со славянскими языками выдвинуть литовскій языкъ и т. д. По этой широкой программѣ и издавался „Вѣстникъ“ въ теченіе истекшихъ 25 лѣтъ. Рядомъ съ главной научною частью въ изданіи отводится небольшое мѣсто Педагогическому Отдѣлу, который посвященъ статьямъ и замѣткамъ по вопросамъ методики преподаванія русскаго языка и словесности, преимущественно въ среднихъ школахъ. Русскій Филологическій Вѣстникъ не пользуется такою широкою извѣстностью въ западно-славянскомъ мірѣ и у западно-европейскихъ филологовъ, какую пріобрѣлъ себѣ нѣмецкій журналъ акад. Ягича. Онъ является преимущественно органомъ русскихъ филологовъ-славистовъ. Рѣдко кто изъ занимающихся въ послѣдніи 25 лѣтъ русскимъ языковѣдѣніемъ не печаталъ въ немъ своихъ диссертаций, статей или замѣтокъ. Справедливо замѣчаетъ профессоръ Варшавскаго Университета Е. О. Карскій въ своей статьѣ, помѣщенной въ юбилейномъ томѣ журнала, что „слишкомъ долго пришло бы перечислять имена умершихъ и донынѣ здравствующихъ русскихъ академиковъ, профессоровъ, преподавателей и вообще ученыхъ, принимавшихъ участіе въ Вѣстникѣ“. Тѣмъ не менѣе и западно-славянскіе ученые не отгазываютъ въ своемъ вниманіи русскому филологическому журналу. При самомъ возникновеніи его обѣщали редакціи свое содѣйствіе проф. Гейтлеръ и Крекъ. Позже помѣщали свои статьи въ Вѣстникѣ: Ягичъ, І. Колларъ, Станоевичъ, Бѣличъ и др. Въ послѣднее время въ журналѣ стали появляться статьи и неславянскихъ ученыхъ, напр., О. Брока, Микколы, Мелье и др. Въ виду исправнаго веденія Вѣстника, его большой содержательности и научности направленія, этотъ живой интересъ къ нему среди лицъ, занимающихся славянской и въ частности русской филологіей за предѣлами нашего отечества, постоянно увеличивается.

По справедливости велики передъ филологическою наукою заслуги этого почтеннаго журнала, такъ же, какъ и его старшаго собрата, „Филологическихъ Записокъ“, выходящихъ въ Воронежѣ. Работамъ по русскому языку отводится первое мѣсто въ журналѣ. Изученію русскаго языка въ его историческомъ развитіи и діалектологі-

ческомъ разнообразіи, въ памятникахъ старой письменности и въ современной живой рѣчи, самого по себѣ, какъ отдѣльной лингвистической особи, и въ связи съ другими славянскими языками посвящено наибольшее число изслѣдованій, статей и змѣтокъ. Чтобы въ двухъ словахъ опредѣлить громадную роль Русскаго Филологическаго Вѣстника въ научной разработкѣ нашего родного языка, достаточно напомнить, что на страницахъ этого журнала появились многія важнѣйшія работы выдающихся изслѣдователей русскаго языка: Срезневскаго, Колосова, Потебни, Соболевскаго, Шахматова, Карскаго и др. Выдвигая на первый планъ изученіе русскаго языка, Вѣстникъ охотно открывалъ свои страницы для изслѣдованій о всѣхъ остальныхъ славянскихъ языкахъ, а равно для работъ по сравнительной славянской грамматикѣ и по общимъ вопросамъ индоевропейскаго языкознанія. О томъ, какъ много сдѣлано журналомъ для славянскаго языкознанія вообще можно судить по систематическому указателю по языкознанію для первыхъ 40 томовъ (помѣщ. въ ХLI т. за 1899 г.) Вѣстника. Собранныя здѣсь данныя, конечно, значительно пріумножаются болѣе новыми, представленными въ послѣднихъ десяти томахъ. Не менѣе цѣнныя вклады сдѣланы журналомъ въ область изученія древней и новой литературы и народной поэзіи. Систематическіе обзоры относящихся сюда изслѣдованій и статей за первые два десятилѣтія были напечатаны въ соответствующихъ томахъ Вѣстника; а въ послѣднемъ 50-мъ томѣ представлень обзоръ содержанія журнала и за послѣднія пять лѣтъ. Не лишнимъ будетъ припомнить, что въ Вѣстникѣ, помимо множества болѣе или менѣе значительныхъ статей, печатались цѣлыя диссертациі, большія изслѣдованія и труды, охватывающіе цѣлыя отдѣлы науки; сюда, напримѣръ, относятся изслѣдованія Потебни о малорусскихъ колядкахъ, розысканія по исторіи русскаго языка проф. Соболевскаго, изслѣдованія о глагольныхъ основахъ въ славянскомъ и литовскомъ яв. проф. Ульянова, монографія о сербо-хорватскомъ удареніи Шахматова, трехтомное сочиненіе проф. Халанскаго „Южнославянскія сказанія о Кралевицѣ Маріѣ“, диссертациія А. Кадлубовскаго: „Очерки по исторіи древне-русской литературы житій святыхъ“, курсы по славяновѣдѣнію покойнаго В. И. Григоровича, Лекціи по палеографіи проф. Е. Θ. Карскаго, его же болѣе ранній трудъ „Въ исторіи звуковъ и формъ бѣлорусской рѣчи“ и мн. др. Не мало разсѣяно въ разныхъ томахъ Вѣстника матеріаловъ для исторіи славянской филологіи. Критико-библіографическій отдѣлъ журнала никогда

но отличался полнотой и систематичностью, но и онъ служилъ свою посильную службу въ дѣлѣ развитія науки славянской филологіи. Нѣкоторые томы Русскаго Филологическаго Вѣстника имѣютъ свой особый специальный характеръ. Такъ, 42-й т. посвященъ преимущественно статьямъ о Пушкинѣ; 48-й томъ—представляетъ собой юбилейный сборникъ статей въ честь известнаго лингвиста, профессора и академика Ф. Θ. Фортунатова. Въ общемъ значеніе Вѣстника въ наукѣ едва ли меньше, чѣмъ значеніе журнала академика Ягича. Пятьдесятъ томовъ этого изданія являются столь же необходимымъ подспорьемъ для каждаго, занимающагося любымъ отдѣломъ славянской филологіи.

Юбилейные томы русскаго филологическаго журнала не отличаются никакой особой парадной внѣшностью, въ родѣ той, какую мы видимъ въ юбилейномъ томѣ *Archiv für Slavische Philologie*. Они содержатъ статьи, главнымъ образомъ, молодыхъ филологовъ, усердно сотрудничающихъ въ Вѣстникѣ за послѣдніе годы. Старые сотрудники журнала, известнѣйшіе ученые, за исключеніемъ немногихъ, не вспомнили объ юбилеѣ, не прислали въ редакцію ни статей, ни своихъ портретовъ. Особенно жаль, что 50-й томъ не снабженъ даже портретомъ почтеннаго редактора проф. А. И. Смирнова, выпустившаго подъ своей редакціей 48 томовъ Вѣстника. Учено-издательская дѣятельность почтеннаго редактора тѣмъ больше заслуживаетъ признательности, что она совершенно безкорыства и ничѣмъ не оплачивается, такъ какъ журналъ, существующій лишь благодаря небольшой субсидіи отъ Министерства Народнаго Просвѣщенія, не приноситъ никакихъ матеріальныхъ выгодъ. Единственнымъ указаніемъ на исполнившійся 25-лѣтній юбилей журнала служитъ помѣщеніе въ 50-мъ томѣ двухъ портретовъ и статьи о первомъ редакторѣ. Открывается этотъ томъ портретомъ покойнаго профессора М. Колосова, основателя Русскаго Филологическаго Вѣстника, а заканчивается портретомъ наборщика Л. С. Нартовскаго, набравшаго всѣ 50 томовъ журнала. Первая статья этого тома, написанная проф. Е. Θ. Карскимъ, посвящена памяти Колосова; въ ней дана обстоятельная и непристрастная оцѣнка ученой дѣятельности безвременно погибшаго русскаго филолога, при чемъ рассмотрѣны всѣ его важнѣйшіе труды. Затѣмъ въ двухъ томахъ Вѣстника за 1903 г. помѣщены слѣдующія болѣе или менѣе интересныя статьи и замѣтки.

Профессору *Е. О. Карскому*, кромѣ указанной статьи о проф. Колосовѣ, принадлежитъ любопытная статья: Къ вопросу о вліяніи литовскаго и латышскаго языковъ на бѣлорусское нарѣчіе (т. XLIX, 1—23). Указавъ на близкое сосѣдство и общеніе бѣлоруссовъ съ латышами и литовцами, и на вытекающее отсюда неизбежное взаимное вліяніе этихъ народностей, авторъ вкратцѣ отмѣчаетъ, въ чемъ главнѣйше выразилось вліяніе бѣлорусскаго нарѣчія на литовскій и латышскій языки, а затѣмъ подробно останавливается на обратныхъ заимствованіяхъ у литовцевъ и латышей со стороны бѣлоруссовъ, при чемъ пользуется какъ извѣстными словарями этихъ языковъ, такъ и работами по данному вопросу предшествующихъ ученыхъ. Получается слѣдующій любопытный выводъ: „Бѣлоруссы заняли у литовцевъ и латышей около 35 словъ общераспространенныхъ и около 56 словъ, извѣстныхъ только отчасти въ нѣкоторыхъ мѣстахъ, отчасти лишь въ старинныхъ памятникахъ. Слова эти больше обозначаютъ предметы, относящіеся къ земледѣлію, рыбной ловлѣ, къ обыденной жизни, и очень немногія касаются умственныхъ интересовъ человѣка. Тогда какъ, если мы рассмотримъ слова, взятые литовцами и латышами у бѣлоруссовъ, то ихъ окажется огромное количество, и касаться они будутъ всѣхъ сторонъ жизни человѣка. Это и естественно: Литва всегда находилась въ умственной и вообще духовной зависимости отъ Руси, а затѣмъ отъ Польши, откуда и шли къ нимъ разныя названія культурныхъ предметовъ выѣстѣ съ самыми произведеніями“. Проф. *Г. Ульяновъ* возвращается къ излюбленному имъ вопросу о значеніи глагольныхъ основъ въ литовско-славянскомъ языкѣ, изслѣдованному имъ съ большою обстоятельностью въ прежнихъ его большихъ работахъ. Въ новой своей статьѣ „Краткое значеніе удвоенныхъ основъ“ (т. XLIX, 235—249) онъ старается выяснитъ отличіе кратнаго („итеративнаго“) значенія удвоенныхъ основъ типа др. инд. *jīgāti*, греч. *βίβαι* отъ такого же значенія основъ другихъ образованій, какъ др. инд. *ratāyati*, греч. *φορέω*, слав. *носити* и приходитъ къ заключенію, что послѣднія обозначали *повторяемость длительного времени признака*, и удвоенныя основы—*повторяемость недлительнаго времени признака*. Этимъ удвоеннымъ индоевропейскимъ основамъ, по мнѣнію автора, должны соответствовать литовско-славянскія основы съ приставкой *рѣ*, которыя, такимъ образомъ, являются новыми только по формѣ, по значенію же стоятъ въ преемственной связи съ извѣстными индоевропейскими кратными основами.

Акад. А. А. Шахматовъ (т. L, 161—186) въ своемъ цѣнномъ этюдѣ „Къ вопросу о различеніи іота и неслогового і въ исторіи славянскихъ языковъ“ даетъ рядъ тонкихъ наблюденій и остроумныхъ гипотезъ о судьбѣ общеславянскихъ сочетаній ij, ѳj.

Маститый чешскій филологъ I. Коларъ (J. Kolař) пересматриваетъ мудреный вопросъ „о склоненіи прилагательныхъ славянскихъ и индо-европейскихъ вообще“ (т. XLIX, 105—139 и т. L, 201—227). Онъ возстаетъ противъ общепринятой (по его выраженію) теоріи образованія падежныхъ формъ, т. н. опредѣленныхъ прилагательныхъ (сложное склоненіе) путемъ сложенія, стяженія именныхъ и мѣстоименныхъ окончаній и послѣ длинныхъ разсужденій приходитъ къ заключенію, что сложное склоненіе прилагательныхъ въ нынѣшнихъ славянскихъ языкахъ (какъ это особенно видно въ русскомъ языкѣ) образовалось совершенно инымъ путемъ, а именно, черезъ соединеніе основы именной формы прилагательныхъ (т. н. неопредѣленныхъ) съ падежными окончаніями мѣстоименія и (безъ его основы ю). Этюдъ г. I. Коларя вполнѣ заслуживаетъ вниманія по разсѣяннмъ въ немъ частнымъ наблюденіямъ, замѣчаніямъ и гипотезамъ, но въ общемъ онъ представляетъ одно крупное упущеніе. Авторъ оставляетъ безъ вниманія тотъ фактъ, что своеобразныя формы сложнаго склоненія въ нынѣшнихъ славянскихъ языкахъ въ современной наукѣ объясняются не только какъ результатъ сложенія и стяженія именныхъ и мѣстоименныхъ флексій (что во многихъ случаяхъ совершенно и невозможно), а какъ результатъ дѣйствія закона аналогіи, вліяніемъ мѣстоименнаго склоненія на сложное. Это послѣднее объясненіе и представляется мнѣ наиболее вѣроятнымъ, на что я имѣлъ случай указать, во многихъ мѣстахъ своихъ „Лекцій по славянскому языковеденію“ (Т. I, 308—466. Т. II, 154—155, 302, 470). Разсуждать о томъ, насколько гипотеза г. I. Коларя можетъ быть признана вѣроятной, въ настоящей краткой замѣткѣ было бы не умѣстно.

Юрьевскому, повидимому, молодому ученому I. Эндзему принадлежитъ дѣльная статья подъ общимъ заглавіемъ: „Исслѣдованія въ области кашубскаго языка“. (Т. XLIX, 67—104). Интересъ среди филологовъ къ изученію кашубскаго языка, одного изъ самыхъ любопытныхъ въ славянской семьѣ, постоянно возрастаетъ. Со времени выхода въ свѣтъ II т. моихъ „Лекцій по славянскому языковеденію“, гдѣ я старался подвести итоги наблюденіямъ и разысканіямъ объ этомъ языкѣ, появилось нѣсколько новыхъ болѣе или менѣе важныхъ

трудовъ. Таковы, напримѣръ, Миккола, Нѣсколько замѣтокъ по кашубскимъ говорамъ въ сѣверо-восточной Помераніи (Извѣстія Отд. русск. яз. и словесн. Импер. Академіи Наукъ, II, 400); Бропиша, Kaschubische Dialectstudien, zweites Heft, (Leipzig, 1898); Фр. Лоренцъ, Slovinzische Grammatik (Спб. 1903 г.). Сюда же относится статья І. Эндзеліна, написанная еще въ 1901 г. Авторъ ея изучалъ кашубскій языкъ по печатнымъ матеріаламъ и хорошо знакомъ съ литературой предмета. Онъ приводитъ рядъ заслуживающихъ вниманія замѣчаній о частныхъ явленіяхъ кашубской графики, фонетики, морфологій и этимологій, но, главнымъ образомъ, подробнѣе всего, останавливается на самой характерной особенностях кашубскаго языка—рефлексъ праславянскаго сочетанія *tort* (или *tärt* по мнѣнію Эндзеліна). Онъ отстаиваетъ, и съ полнымъ правомъ, исконность этой черты въ кашубскомъ языкѣ (напримѣръ, въ такихъ словахъ—*bagda*, *kaqva*, *paqsä*, *varna*, *gagd* и др.) противъ тѣхъ польскихъ ученыхъ, которые возводятъ сочетаніе *ar* къ польскому *ro* и объясняютъ появленіе его влияніемъ нѣмецкаго языка. Въ противоположность послѣднему мнѣнію авторъ доказываетъ (согласно съ мнѣніемъ проф. Бодуэна де Куртене), что *ro*, являющееся въ кашубскомъ яз. рядомъ съ *ar*, проникло сюда изъ польскаго языка. Вся работа отличается критическимъ характеромъ и имѣетъ задачей кое въ чемъ исправить или лучше разъяснить данныя о кашубскомъ языкѣ, сообщенныя предшествующими изслѣдователями.

Къ области изученія древне-славянскаго языка и письменности относится лишь одна небольшая, но не лишенная интереса, замѣтка г. В. Погорѣлова: „Къ вопросу о Македонскомъ глаголическомъ листкѣ“ (Т. XLIX, 24—31) Листокъ этотъ, содержащій отрывки двухъ словъ Ефрема Сирина, какъ извѣстно, былъ изданъ два раза: И. И. Срезневскимъ въ Свѣдѣніяхъ и Замѣткахъ № V и акад. И. В. Ягичемъ въ книгѣ „Образцы языка церковно-славянскаго“ (Спб. 1882 г.). Авторъ сопоставляетъ этотъ листокъ съ извѣстными кирилловскими списками большого собранія Словъ Ефрема Сирина, подъ названіемъ Паренесисъ и приходить къ заключенію, что въ кирилловскихъ и глаголическихъ изводахъ текстъ приблизительно одинъ и тотъ же, безъ существенныхъ отличій. Изученіе же языка этого памятника, главнѣйше съ лексической стороны приводитъ г. В. Погорѣлова къ выводу, что переводъ Словъ Ефрема Сирина въ указанныхъ спискахъ представляетъ тѣ же характерныя особенности, какія

наблюдаются въ намятникахъ, относящихся къ болгарской письменности IX—X в., каковы были несомнѣнно Труды Іоанна Экзарха и Константина Пресвитера Болгарскаго, Изборникъ 1073, и вѣроятно, Супрасльская рукопись, Хиландарскіе Листки и отрывокъ изъ цѣпоченій Кирилла Іерусалимскаго. Слѣдовательно, и переводъ словъ Ефрема Сиріина, по мнѣнію автора статьи, могъ быть сдѣланъ лишь въ Болгаріи, во время разцвѣта литературной дѣятельности въ эпоху царя Симеона.

Весьма цѣнны статьи и матеріалы, относящіеся къ области русской діалектологіи. Прежде всего нужно отмѣтить, что въ данныхъ томахъ Вѣстника закончено тянувшееся съ 44-го тома обширное, подробное описаніе говора деревни Парфѣнокъ, Рузскаго у. Московской губерніи“. (Т. XLIX 297—321, т. L. 64—148, 285—297). Это трудъ *Н. Дурново*, выполненный съ полнымъ знаніемъ дѣла, съ соблюденіемъ требованій, предъявляемыхъ современнымъ научнымъ изученіемъ говоровъ. Въ заключеніе авторъ работъ ставитъ нѣсколько общихъ вопросовъ относительно классификаціи великорусскихъ говоровъ и, между прочимъ, указываетъ на необходимость „признать на ряду съ двумя установленными группами—сѣверно-великорусской и южно-великорусской существованіе еще третьей группы—средне-великорусской, къ которой и относится изслѣдованный имъ Парфѣновскій говоръ вмѣстѣ съ собственно московскимъ говоромъ (и нашимъ литературнымъ языкомъ) и говорами нѣкоторыхъ уѣздовъ Московской, Тверской, частью Тульской, Рязаневой и Поволжскихъ губерній... „Средневеликорусскими, говоритъ г. Дурново, я называю тѣ смѣшанные великорусскіе говоры, которые усвоили акаанье и нѣкоторыя другія южно-великорусскія черты, но большей части связанныя съ акааньемъ, но сохранили остальные черты сѣверно-великорусской фонетики, морфологіи и словаря. Самымъ древнимъ по времени смѣшенія въ немъ сѣверныхъ и южныхъ чертъ средне-великорусскимъ говоромъ является московскій умѣренно-акающій говоръ; т. е. нашъ литературный языкъ; въ другіе говоры акаанье проникло поздне и притомъ часто не изъ Москвы, а изъ южно-великорусскихъ говоровъ“. Выводъ очень любопытный, но относительно московскаго говора онъ былъ уже сдѣланъ раньше акад. А. А. Шахматовымъ.

Закончилась въ данномъ году и другая работа по русской діалектологіи, также печатавшаяся въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ (съ 45-го тома): Народные говоры Жыздринскаго уѣзда Калужской гу-

бернии, трудъ *А. Никольскаго* (Т. XLIX 322—335). Эта работа значительно уступаетъ предыдущей въ отношеніи богатства матеріала и полнотѣ обработки его. На немногихъ страницахъ данной части труда изложена вся морфологія, сдѣлано лишь нѣсколько замѣчаній объ особенностяхъ ударенія и синтаксиса и сообщенъ списокъ характерныхъ словъ. Никакихъ общихъ соображеній объ отношеніи живдринскихъ говоровъ къ другимъ южно-великорусскимъ не имѣется. Весьма любопытны отмѣченныя г. А. Никольскимъ совпаденія нѣкоторыхъ особенностей разсматриваемыхъ имъ говоровъ съ бѣлорусскими.

Къ области изученія великорусскихъ говоровъ относится еще одно небольшое, но цѣнное сообщеніе—*Д. Ушакова*, Нѣсколько діалектическихъ данныхъ изъ Коломенскаго у. Московской губерніи (говоръ села Черкизова.—Т. XLIX 32—40). Наконецъ одна статья посвящена малорусскому говору: *В. Бѣлявскаго*, Народный говоръ уѣзднаго города Глухова (Черниговской губ.). Глуховъ довольно многолюдный городокъ съ значительнымъ количествомъ школъ и т. п. интеллигенціи, чѣмъ обуславливается болѣе или менѣе широкое распространеніе въ немъ общерусскаго книжнаго и образованнаго языка. Это обстоятельство естественно должно было отражаться на свойствахъ мѣстнаго простонароднаго говора, который несомнѣнно относится къ группѣ сѣверно-малорусскихъ говоровъ. Авторъ данной работы, однако, не отмѣчаетъ этихъ привносныхъ особенностей говора города Глухова въ сравненіи съ говоромъ хотя бы сосѣднихъ селъ. Въ своемъ описаніи говора г. Бѣльскій останавливается съ должнымъ вниманіемъ какъ на фонетикѣ, такъ на морфологіи, а равно сообщаетъ списокъ характерныхъ для мѣстнаго нарѣчія словъ и выраженій. Въ отдѣлѣ гласныхъ звуковъ, между прочимъ, указывается, что ударяемое *о* нерѣдко приближается къ *у* (волувъ, вунъ, пуйде) а ударяемое *ѣ*—къ *ю* (принюсъ, вювъ), причемъ авторъ статьи высказываетъ сомнѣніе на счетъ того, чтобы въ этихъ случаяхъ въ какихъ-либо украинскихъ говорахъ слышались дифтонги *юо* (вюонъ, вюонъ) *юю* (вюовъ, принюосъ), какъ это утверждаютъ „ученые“. На это можно замѣтить лишь одно: фактъ существованія въ сѣверно-малорусскихъ говорахъ дифтонговъ вмѣсто основныхъ *о*, *ѣ* установленъ многими точными исслѣдованіями малорусской рѣчи, и не подлежитъ сомнѣнію; если же въ Глуховѣ слышатся только *у* и *ю* или приближающіеся къ этимъ звукамъ полные, то это явленіе наблюдается и въ

другихъ сѣверно-малорусскихъ говорахъ (Ср. А. И. Соболевскій Очеркъ малорусской діалектологіи стр.). Еще одно замѣчаніе. Сообщенный г. Бѣлявскимъ словарь, судя по данному ему заглавію долженъ былъ заключать *характерныя* для мѣстнаго нарѣчія слова и выраженія, а между тѣмъ въ немъ если и не всѣ, то большинство, слова, употребляемая чуть не на всей территоріи малорусской рѣчи, какъ то: хрѣши, дитїна, нань, лихо, очи, цыбуля, хлѣпецъ, балѣкать, трѣба, хйба, нехай, якъ, хче, у хати, чи, нема, дѣже и т. п.

Отмѣчаю остальные статьи по языку, изъ которыхъ нѣкоторыя не имѣютъ прямого отношенія къ славянскому языкознанію: *В. Н. Перетца* Русско-корельскій словарь по рукописи начала XVIII ст. (т. L. 148—160) *А. Яцимирскаго*, Книжное вліяніе славянскаго языка на румынскій (т. L. 185—200); *А. И. Томсона*, Вивительный падежъ прямого дополненія въ отрицательныхъ предложеніяхъ въ русскомъ языкѣ (т. XLIX 192—235); *А. Погодина*, а, Матеріалы для словаря литовскихъ цыганъ (т. XLIX 60—66) б, Этимологическія замѣтки (т. L. 223—231); *Н. Шлякова* Къ замѣткѣ „Веденей“ (т. L. 182—184) *В. К. Поржезинскаго*, Явленія конца слова въ латышскомъ и прусскомъ языкахъ (т. XLIX 140—178); *Ф. Сольмсена*, Явленія диссимляціи и ассимиляціи въ древне-греческихъ задне-небныхъ звукахъ (т. XLIX 41—57).

Такимъ образомъ, большая часть статей въ данныхъ томахъ Вѣстника относится къ языкознанію. Къ области фольклора принадлежатъ давно начатая и все еще не законченная, широко задуманная и весьма интересная работа *А. Ветухова*, Заговоры, заклинанія обереги и другіе виды народнаго врачеванія, основанные на вѣрѣ въ силу слова (Изъ исторіи мысли). Въ главѣ, помѣщенной въ т. L (232—284) разсматриваются заговоры отъ сглаза. Къ исторіи литературы относится всего нѣсколько небольшихъ, но интересныхъ сообщеній и замѣтокъ, а именно: *Н. Петровскаго*. Къ хронологіи проповѣдей Григорія Цамблака (т. L 58—63); *В. Шенрона*, Къ вопросу о вліяніи Гоголя на послѣдующихъ писателей (о вліяніи Гоголя на Григоровича) XLIX. 179—191) Проф. *Г. А. Боброва*, А. И. Полежаевъ, какъ переводчикъ (т. XLIX. 336—335); *Н. Державина* А. С. Пушкинъ и юбилейная литература (Т. L. 324—353. Продолженіе).

Весьма любопытна статья проф. *В. А. Францева* „В. Г. Дундеръ и Имп. Россійская Академія“, рассказывающая одинъ курьезный эпизодъ изъ исторіи нашихъ книжныхъ сношеній со славянами въ

тридцатыхъ годахъ. Дундеръ, вѣнскій книгопродавецъ — шарлатанъ обратился въ 1835 г. къ Россійской Академіи съ широкоувѣщательнымъ проектомъ изданія „полнаго и общаго книжнаго лексикона“, принявъ на себя выполненіе этого проекта и лишь выразивъ надежду на поощреніе и поддержку со стороны Академіи. Россійская Академія во главѣ съ Шишковымъ, не разобравъ въ чемъ дѣло, поспѣшила послать книгопродавцу—шарлатану, ничего не сдѣлавшему для осуществленія рекламированнаго имъ предпріятія, серебрянную медаль, что произвело крайне непріятное впечатлѣніе среди чешскихъ ученыхъ, и особенно огорчило Шафарика. Всю эту исторію проф. Францевъ разъяснилъ на основаніи документовъ Академіи Наукъ и перенесъ западно-славянскихъ ученыхъ того времени. Профессору Францеву принадлежит также нѣсколько критико-библиографическихъ замѣтокъ о новостяхъ по славяновѣдѣнію. Въ обоихъ томахъ находится также указатели новыхъ книгъ.

Въ педагогическомъ отдѣлѣ заслуживаютъ вниманія рецензіи на два профессорскихъ труда: Д. Н. Овсяннико-Куликовскаго Синтаксисъ русскаго языка (рец. С. Браиловскаго въ т. XLIX) и Е. Θ. Будде, Учебникъ грамматики русскаго языка. Часть первая. Этимологія, 2-е изд. (рец. В. Чернышева въ т. L-мъ).

Таково въ общихъ чертахъ содержаніе двухъ юбилейныхъ томовъ Русскаго Филологическаго Вѣстника. По широтѣ и разнообразію выдвинутыхъ и рѣшаемыхъ въ нихъ вопросовъ, по научности метода помѣщенныхъ въ нихъ работъ они не уступаютъ многимъ своимъ предшественникамъ. Широкое участіе въ нихъ молодыхъ русскихъ филологовъ только подтверждаетъ сказанное мной въ началѣ настоящей замѣтки о важной роли Вѣстника въ разработкѣ славяно-русской филологіи. Истинные друзья этой науки не могутъ не выразить почтенному журналу и его многозаслуженному редактору свой привѣтъ по случаю исполнившагося юбилея вмѣстѣ съ пожеланіемъ Вѣстнику дальнѣйшаго роста и процвѣтанія въ новомъ двадцатипятилѣтіи.

3. *Е. Θ. Карскій. Бѣлоруссы. Томъ I. Введеніе въ изученіе языка и народной словесности. Съ приложеніемъ двухъ картъ. Варшава 1903. 8°. X + 46. [Оттискъ изъ „Вилежскаго Временника“, кн. I].*

Неутомимый изслѣдователь стараго западно-русскаго языка и бѣлорусскаго нарѣчія проф. Е. Θ. Карскій предпринялъ новый боль-

шой трудъ о бѣлорусской народности, первый томъ котораго передъ нами. Объемъ и задачи какъ всего труда, такъ и выпускаемой въ свѣтъ первой его части авторъ опредѣляетъ въ предисловіи слѣдующимъ образомъ. „Выпуская въ свѣтъ настоящую книгу, авторъ имѣлъ въ виду дать пособіе лицамъ, приступающимъ къ изученію бѣлорусскаго нарѣчія и народной повѣи. Непосредственно настоящее введеніе служитъ 1-мъ томомъ задуманнаго авторомъ труда по исторіи бѣлорусскаго нарѣчія (фонетика, морфологія и синтаксисъ). Въ тѣсной связи съ указанною цѣлью находится и другая: дать указатель матеріаловъ для крайне необходимыхъ словарей по бѣлорусскому нарѣчію. Имѣющийся бѣлорусскій словарь Носовича очень неудовлетворителенъ во всѣхъ отношеніяхъ, между тѣмъ надобность въ научномъ словарѣ живого бѣлорусскаго нарѣчія и въ особомъ словарѣ стараго западно-русскаго языка очевидны для каждаго занимающагося исторіей русскаго языка, юго-западной литературой, западно-русской исторіей и этнографіей, а также и для разныхъ практическихъ цѣлей. Прежде чѣмъ приступить къ составленію такихъ словарей, необходимо точно уяснить себѣ область бѣлорусскаго племени, намѣтить основные элементы, вошедшіе въ составъ языка, привести къ извѣстности и критически оцѣнить имѣющіеся лингвистическіе матеріалы: все это авторъ и хотѣлъ дать въ настоящей книгѣ. Указаніе границы иллюстрировано приложенной этнографической картой, иноземныя вліянія подтверждаются разсмотрѣніемъ соответствующихъ словарныхъ заимствованій. Настоящее введеніе можетъ быть полезнымъ и при этнографическомъ изученіи бѣлорусскаго племени въ обширномъ смыслѣ слова. Въ этомъ отношеніи уже немало потрудились, но еще больше предстоитъ сдѣлать. ...необходимо знать, что въ этой области уже сдѣлано предшественниками русскими и поляками; сдѣлать указанія въ этомъ родѣ также входило въ задачи автора настоящей книги“.

Такимъ образомъ, данная новая книга проф. Карскаго независимо отъ своего спеціального значенія, какъ введенія къ задуманной авторомъ научной грамматикѣ бѣлорусскаго языка, преслѣдуетъ широкія научно-образовательныя задачи. Она имѣетъ цѣлью, съ одной стороны, дать точныя, соответствующія состоянію науки свѣдѣнія о бѣлорусскомъ племени и его языкѣ, ихъ прошломъ и современномъ состояніи, съ другой—представить критико-библіографическій обзоръ изученія бѣлорусской народности и ея языка, стараго и новаго. Такъ

какъ авторъ давно уже занимается бѣлоруссами, главнѣйше ихъ языкомъ, и считается лучшимъ знатокомъ въ этой области, то совершенно понятно, что обѣ указанныя задачи прекрасно разрѣшены въ его сочиненіи. И это было для него тѣмъ легче, что свои прежнія неоднократныя наблюденія надъ бѣлоруссами онъ могъ освѣтить и провѣрить во время спеціальной командировки въ бѣлорусскія губерніи, состоявшейся въ 1903 г. при содѣйствіи виленскаго генерал-губернатора генералъ-лейтенанта князя Святополкъ-Мирскаго. Однимъ изъ самыхъ крупныхъ результатовъ этой поѣздки было составленіе двухъ этнографическихъ картъ бѣлорусскаго племени, приложенныхъ къ книгѣ: одна довольно подробно обозначаетъ границы бѣлоруссовъ, другая знакомитъ съ раздѣленіемъ бѣлорусскаго нарѣчія на говоры.

Все сочиненіе распадается на 9 главъ. Перечень ихъ можетъ дать общее понятіе о содержаніи и схемѣ труда. Т. I. Территорія, занятая бѣлорусскимъ племенемъ. Границы и общій характеръ страны. Гл. II. Древнѣйшіе обитатели бѣлорусской территоріи въ доисторическое время и при началѣ Русскаго государства. Гл. III. Языкъ русскихъ племенъ, заселявшихъ бѣлорусскую территорію въ древнѣйшее время. Зарожденіе бѣлорусскихъ особенностей. Старѣйшія словарныя заимствованія—у финновъ и иранцевъ. Гл. IV. Объединеніе всѣхъ бѣлорусскихъ племенъ подъ властью Литвы и окончательная выработка „бѣлорусской народности“ и „бѣлорусскаго языка“. Заимствованія изъ литовскаго и латышскаго языковъ. Гл. V. Бѣлоруссы вмѣстѣ съ литовцами подъ властью Польши. Наплывъ разныхъ иностранныхъ словъ въ бѣлорусское нарѣчіе. Гл. VI. Возсоединеніе Бѣлоруссіи съ общерусской жизнью. Количество бѣлоруссовъ въ настоящее время и ихъ народныя говоры. Гл. VII. Очеркъ изученія живого бѣлорусскаго языка и народной поэзіи (199—340). Гл. VIII. Очеркъ постепеннаго ознакомленія ученыхъ съ памятниками стараго западно-русскаго языка. Изученіе самаго языка. Гл. IX. Ненародныя произведенія на современномъ бѣлорусскомъ нарѣчіи (430—453).

Изъ этого общаго обзора содержанія книги видно, что проф. Карскій отнесся съ одинаковымъ вниманіемъ къ каждой изъ двухъ поставленныхъ имъ передъ собой задачъ. На 200 страницъ онъ далъ отчетливое изложеніе образованія и исторической судьбы бѣлорусской народности и ея нарѣчія, при чемъ тщательно отмѣтилъ какъ политическія и культурныя вліянія, подъ которыми протекла жизнь этой вѣтви русскаго народа, такъ тѣ разнообразныя иноязычныя элементы,

которое въ разную пору проникали въ бѣлорусскую рѣчь. Равнымъ образомъ, насколько возможно, точно опредѣлены этнографическія границы бѣлорусской народности и установлено раздѣленіе бѣлорусскаго нарѣчія на говоры съ указаніемъ разграниченія послѣднихъ. Критико-библіографическая часть сочиненія, изложенная на 230 страницахъ, отличается такой полнотой и обстоятельностью, что едва-ли можетъ вызывать какія-либо возраженія. Въ ней авторъ не только знакомитъ съ исторіей изученія бѣлорусской народности, но и ясно опредѣляетъ, что и какъ сдѣлано въ этомъ отношеніи и что еще необходимо сдѣлать впереди. Послѣдняя глава, кажется, впервые даетъ полный обзоръ всѣхъ попытокъ употребленія въ литературѣ современнаго живого бѣлорусскаго нарѣчія.

Спеціальная критика быть можетъ, откроетъ въ большомъ трудѣ проф. Карскаго разные недочеты, но таковыхъ во всякомъ случаѣ будетъ не много. Данная книга должна сдѣлаться настольной для каждаго занимающагося изученіемъ бѣлоруссовъ и ихъ языка и вмѣстѣ съ тѣмъ можетъ быть рекомендована, какъ прекрасное пособіе для ознакомленія съ бѣлорусской народностью, съ прошлымъ и современнымъ положеніемъ.

Весьма желательно было бы появленіе подобнаго труда для малорусской народности.

4. Древности. Труды Славянской Коммисіи Императорскаго Московскаго Археологическаго Общества. Томъ третій, изданъ подъ редакціей *М. И. Соколова*, дѣйствительнаго члена Общества и Предсѣдателя Славянской Коммисіи. Москва. 1902. 4-^о 230+78.

О первомъ (1895 г.) и второмъ (1898 г.) томахъ этого прекраснаго изданія Императорскаго Московскаго Археологическаго Общества я уже говорилъ своевременно въ своихъ „Обзорахъ“. Оно служитъ органомъ Славянской Коммисіи Общества, около которой группируется кружокъ московскихъ славяновѣдцевъ, занимающихся изученіемъ археологій и исторіи славянскихъ племенъ. Благодаря энергій и любви къ дѣлу своего предсѣдателя, проф. *М. И. Соколова* Славянская Коммисія проявила весьма значительную дѣятельность. „Труды“ его содержатъ рядъ цѣнныхъ изслѣдованій и массу важныхъ сообщеній по разнымъ вопросамъ славянской старины, преимущественно изъ области древней славянской литературы. Приходится только

пожалѣть, что сборники „Трудовъ“ Коммиссіи появляются слишкомъ рѣдко. За 11 лѣтъ существованія коммиссіи вышло всего три тома. Данный томъ, какъ и оба предыдущихъ, состоятъ изъ двухъ частей: а, Изслѣдованій и статей и б; Протоколовъ засѣданій Коммиссіи. Всѣ работы, помѣщенные въ первомъ отдѣлѣ, относятся почти исключительно къ области старинной русской и вообще древне-славянской литературы. На первомъ мѣстѣ находится изслѣдованіе г. Н. Е. Евсѣева, Толкованіе на книгу пророка Давіила въ древне-славянской и старинной русской литературѣ. Главные выводы изъ наблюденій автора, основанные на тщательномъ изученіи Толкованій на книгу Пророка Давіила, сводятся къ слѣдующему: 1. Первоначальное и самое лучшее толкованіе на книгу пророка Давіила дано было въ вѣкъ болгарскаго царя Симсона въ видѣ перевода толкованій св. Ипполита. 2. Въ нашей русской письменности толкованіе это усвоилось слабо—и то преимущественно въ видѣ отрывковъ эсхатологическаго характера. 3. Толкованіе это не положило начала самостоятельнымъ выясненіямъ пророческой книги въ нашей старинной письменности, и ознакомленіе съ книгой было случайное и отрывочное. 4. Опыты систематическаго изъясненія книги Давіила въ иномъ, не ипполитовскомъ родѣ, появляются только въ XVI в. въ духѣ, соответствующемъ изъясненіямъ западнаго выученика—Франциска Скорины. 5. Изъясненія пророческой книги XVII в. стояли внѣ церковнаго пониманія пророчествъ и вызваны были къ жизни особыми узкопублицистическими соображеніями составителей этихъ изъясненій.— Въ приложеніи помѣщены извлечения изъ текстовъ Толкованій.

Въ высшей степени цѣнна по матеріалу и обстоятельности изслѣдованія работа *Н. Н. Дурново*, Къ исторіи сказаній о животныхъ въ старинной русской литературѣ. Она посвящена изданію и критическому изученію двухъ старинныхъ произведеній: 1, Отъ шестоднеца избрано о животныхъ и 2, Слово о разсѣченіи челоѣческаго естества. Первое—повидимому, русское сочиненіе. Оно представляетъ очень сжатую и умѣлую передачу содержанія 5 и 6-го слова Шестоднева Іоанна Эксарха съ дополненіями по другимъ источникамъ, при чемъ основная религіозно-правственная мысль Шестоднева понята и выражена очень удачно. Авторъ даетъ критическое изданіе памятника и опредѣляетъ источники всѣхъ его частей. Второе произведеніе давно было извѣстно ученымъ, между прочимъ, Буслаеву и Карвѣеву, но издана была только часть его (Хр. Лопаревымъ но по очень

плохому списку. Н. Н. Дурново впервые дает полное издание и этого памятника по 5 рукописямъ, опредѣляетъ источники его для каждой главы, и сообщаетъ рядъ любопытныхъ историко-литературныхъ замѣчаній относительно характера произведенія и его значенія. Важность „Слова“ авторъ, между прочимъ, опредѣляетъ такимъ образомъ: „Слово о разсѣченіи челоѳического естества—самостоятельное произведеніе русской литературы конца XVII вѣка. Изученіе его даетъ возможность выиснить своеобразныя черты характера старорусскаго мыслящаго начетчика, опредѣлить его міровоззрѣніе и его манеру пользованія источниками. При этомъ открываются нѣкоторые небезынтересныя источники, на которыхъ ученые до сихъ поръ еще не останавливались. Для исторіи фізіологическихъ сказаній на Руси Слово представляетъ цѣнный матеріалъ, потому что заключаетъ сказанія о 40 животныхъ. Популярность его въ раскольничьей средѣ вызываетъ вопросъ о причинахъ этой популярности, „эти причины надо искать въ характерѣ религіозно-нравственнаго ученія Слова о разсѣченіи челоѳического естества и въ міровоззрѣніи его автора“.

Затѣмъ слѣдуютъ шесть статей *А. И. Яцимирскаго* (119—174). Каждая изъ нихъ представляетъ изъ себя сообщеніе, приносящее кое-что новое или въ область историческаго матеріала или для освѣщенія тѣхъ или другихъ частныхъ историко-литературныхъ вопросовъ. Перечисляю эти статьи.

1. „Тропа трояня“ въ Словѣ о полку Игоревѣ и попытка румынскаго ученаго объяснить это выраженіе“. Авторъ знакомитъ съ мнѣніемъ Хыждеу о связи „Трояня“ славянскаго эпоса съ румынскими переживаниями, опирающимися на преданія о римскомъ императорѣ Троянѣ, построившемъ дорогу отъ Дуная въ глубь Дакии, и подтверждаетъ это мнѣніе нѣкоторыми своими данными.

2. „Синодикъ Погоніатскаго монастыря въ Македоніи, съ которымъ греческіе монахи собирали милостыню въ Россіи въ концѣ XVII вѣка“. Любопытный памятникъ изъ рукописной бібліотеки профессора богословскаго факультета Бухарештскаго Университета Константина Ербичину, содержащій свѣдѣнія о совершенно новыхъ фактахъ русской благотворительности одному греческому монастырю въ Македоніи въ концѣ XVII вѣка.

3. „Вновь найденный автографъ святителя Димитрія Ростовскаго“. Рукопись эта, содержащая выписки изъ Патериковъ о монашеской жизни, рассказъ подвижниковъ о случаяхъ изъ аскетической

жизни и проч., была подарена святителемъ Димитріемъ бывшему епископу Романовому Пахомію, когда послѣдній посѣтилъ въ началѣ XVIII в. г. Черниговъ и не разъ бесѣдовалъ со святителемъ на религиозныя темы, и хранится въ ризницѣ скита Покровскаго, основаннаго епископомъ Пахоміемъ († 1721 г.), недалеко отъ извѣстнаго немецкаго монастыря. Г. Яцимирскій даетъ описаніе рукописи и сообщаетъ свѣдѣнія объ епископѣ Пахоміи.

4. „Иллюстраціи XVII вѣка къ апокрифическому сказанію „О древѣ крестномъ“. Эти иллюстраціи, подробно описанныя и истолкованныя авторомъ, находятся на древней иконѣ съ румынскими подписями, вывезенной изъ Іерусалима однимъ румынскимъ священникомъ въ концѣ XVII в.

5. „Кирилловскія нотныя рукописи съ глаголическими тайнописными записями“. Весьма цѣнные матеріалы для исторіи глаголическаго письма, сопровождаемые прекрасными фототипическими снимками и объясненіями автора.

6. Сербская „поэтическая семья“ Ильичей.—Краткая, но содержательная характеристика четырехъ выдающихся сербскихъ поэтовъ изъ семьи Ильичей—отца Іована Ильича и трехъ его сыновей—Вослава, Милутина и Драгутина, изъ которыхъ живъ понынѣ только послѣдній.

Вполнѣ заслуживаетъ вниманія слѣдующая большая статья (175—213) *Р. Р. Настича* „Нѣсколько замѣтокъ о слѣдахъ древне-славянскаго паримейника въ хорватско-глаголической литературѣ“. Авторъ послѣ кропотливаго, весьма тщательно выполненнаго сопоставленія собранныхъ И. Берничемъ (*Ulozei svetoga pisma*) отрывковъ библейскаго текста въ хорватско-глаголическихъ рукописныхъ и печатныхъ бревіаріяхъ и миссалахъ съ древне-славянскимъ паримейникомъ по древнѣйшему списку Григоровича (издаваемому Брандомъ) приходитъ въ заключенію, что во многихъ мѣстахъ нужно признать полное или близкое совпаденіе текста памятниковъ того и другого рода, что указываетъ на присутствіе слѣдовъ древне-славянскаго паримейника въ хорватско-глаголической литературѣ.

Послѣднее, также весьма цѣнное сообщеніе принадлежитъ председателю Славянской Коммиссіи, проф. *М. И. Соколову*: „Нѣкоторыя произведенія Кирилла Туровскаго въ сербскихъ спискахъ“. Извѣстно, что литературное общеніе между славянскими племенами существовало съ самаго возникновенія славянской письменности. Такъ, въ

древне-русскую письменность перешло много памятниковъ переводныхъ и оригинальныхъ отъ южныхъ славянъ, болгаръ и сербовъ. Но бывало и наоборотъ: и южные славяне уже въ древнюю пору иногда усвоили себѣ произведенія русской письменности. Проф. М. И. Соколовъ отмѣчаетъ такое заимствованіе по отношенію въ двумъ произведеніямъ извѣстнаго русскаго писателя XII в., знаменитаго Кирилла Туровскаго, отырытымъ имъ въ сербскихъ рукописяхъ. Это „Повѣсть о бѣлоризцѣ“—въ извѣстномъ пергаментномъ сборникѣ Пена Драгома XIII—XIV в., принадлежавшемъ покойному извѣстному проф. П. С. Оречковичу, и „Молитвы Кирилла мниа Туровскаго“ въ сборникѣ Бѣлградской народной библиотеки № 306, XVII в. Авторъ сообщенія даетъ подробное описаніе второй рукописи, приводя изъ нея отрывки, а изъ первой сообщаетъ полный текстъ „Повѣсти о бѣлоризцѣ“. Такъ какъ въ русскихъ спискахъ послѣдній памятникъ извѣстенъ по рукописи XIV в. лишь въ одной своей части, то „данный сербскій текстъ въ рукописи Оречковича оказывается древнѣйшимъ доселѣ извѣстнымъ по рукописямъ полнымъ текстомъ. Въ этомъ его значеніе, а также въ томъ, что здѣсь мы имѣемъ древнѣйшій доселѣ извѣстный образецъ передачи русскаго памятника въ сербской транскрипціи“. Текстъ наданъ изъ буквы въ букву по рукописи, съ подведеніемъ вариантовъ изъ разныхъ списковъ и печатныхъ изданій.

Во второмъ отдѣлѣ помѣщены Протоколы 28 засѣданій Славянской комиссіи за время съ января 1898 по январь 1902 г. Протоколы содержатъ сжатое изложеніе 40 рефератовъ, доложенныхъ въ засѣданіяхъ комиссіи. Для ознакомленія съ характеромъ и направленіемъ дѣятельности комиссіи считаю не лишнимъ дать здѣсь перечень этихъ рефератовъ; тѣмъ болѣе, что многіе изъ нихъ представляютъ большой интересъ. *Н. М. Вторахъ*, „Лѣствица Іакова; *В. М. Истрина*, „Златая матица“ и „Толковая Палея“, *Н. А. Лаврова*, Новоболгарскіе сборники XVIII—XIX в., извѣстные подъ названіемъ „Дамаскинъ“; *В. А. Погорьлова*, Замѣчанія о составѣ рукописныхъ псалтырей Типографской библиотеки; *М. И. Соколова*, О рукописномъ сборникѣ старинныхъ повѣстей, принадлежащемъ докладчику; *А. И. Бѣлича*, „Сербская литературная задруга“; *А. С. Орлова*, О сборникахъ, извѣстныхъ подъ названіемъ „Торжественниковъ“; *А. И. Яцимирская*, О новооткрытомъ житіи юго-славянскаго святого Варвара Разбойника; *А. Д. Григорьева*, Когда, гдѣ, съ какого языка и

на какой славинскій языкъ впервые былъ сдѣланъ переводъ повѣсти объ Акирѣ Премудромъ? *А. И. Яцимирскаго*, Новыя данныя о хожденіи Антонія въ Царьградъ; *Н. И. Дурново*, О нѣкоторыхъ именахъ въ славянскомъ переводѣ повѣсти объ Акирѣ; *В. А. Погорьлова*, О лексикологическихъ трудахъ XVII в. по рукописямъ Типографской библиотеки; *И. М. Тарабрина*, Новыя данныя о Симеонѣ Полоцкомъ; *А. И. Бѣлица*, Къ двойственному числу въ старославянскомъ языкѣ; *И. Е. Евстеева*, Слѣды утраченнаго первоначальнаго полнаго перевода пророческихъ книгъ на славянскомъ языкѣ; *Н. И. Дурново*, „Слово о разсѣченіи человѣческаго естества“; *В. А. Погорьлова*, Славянскій переводъ псалтыри съ толкованіемъ Θεодорита Кирскаго; *А. Д. Григорьева*, Описаніе рукописей, вывезенныхъ имъ изъ Поморья; *И. Е. Евстеева*, Новыя данныя для литературной исторіи Толковой Пален; *И. М. Тарабрина*, Апокрифическій элементъ въ „Вертоградѣ“ С. Полоцкаго; *М. И. Соколова*, Объ апокрифическомъ „Откровеніи Варуха“; *Н. И. Дурново*, Повѣсть о старцѣ, просившемъ руки царской дочери; *А. А. Покровскаго*, Одинъ изъ греческихъ источниковъ сочиненій Максима Грека; *М. И. Соколова*, Повѣсть о Дмитріи Римскомъ; *А. Д. Григорьева*, Архивская Толковая Псалтырь особаго состава; *В. К. Поржезинскаго*, О дошедшихъ до насъ памятникахъ языка полабскихъ славянъ, съ дополненіемъ *М. И. Соколова*, Объ историческихъ условіяхъ, содѣйствовавшихъ забвенію своего языка полабскими славянами; *А. Д. Григорьева*, О малорусскихъ говорахъ Сѣдлецкой губерніи; *А. А. Покровскаго*, Объ источникахъ Луцидаріуса; *М. И. Соколова*, Сербская повѣсть о Москвѣ; *Н. И. Кононова*, Новооткрытая комедія Петровскаго времени; *К. В. Покровскаго*, Памяти А. С. Хомякова; *В. А. Погорьлова*, Замѣчанія объ изобрѣтеніи славянскаго алфавита; *И. Н. Сакулина*, Повѣсть объ Евстратіи-Велизаріи; *И. Е. Евстеева*, О новомъ памятникѣ изъ литературнаго наслѣдія жидовствующихъ; *Н. И. Дурново*, „Привѣтство брачное“, стихотвореніе С. Медвѣдева; *И. Е. Евстеева*, О лицевомъ сборникѣ XIX в.;—его-же, О полемическомъ противоиудейскомъ памятникѣ: „Словеса св. пророковъ по рукописи XV в.“; *А. С. Мадусова*, Повѣсть о Саввѣ Грудцынѣ и легенда о Θεофілѣ Икономѣ; *А. С. Хазанова*, Новый грузинскій текстъ повѣсти о Хикирѣ; *А. И. Яцимирскаго*, Мнѣніе новѣйшихъ ученыхъ о происхожденіи румынъ.

Въ приложеніяхъ къ протоколамъ напечатаны: *Р. Ф. Брандта*, а, Францъ Палацкій; б, Нѣсколько словъ о Найденѣ Геровѣ; в, Па-

иати Яна Коллара; *М. И. Соколова*: а, „Повѣсть о благовѣрномъ князѣ Дмитріи Римскомъ“; б, Сербская повѣсть о Москвѣ; *И. Е. Ессеева*, Александръ Васильевичъ Горскій; *С. О. Долова*, Изъ писемъ А. В. Горскаго къ Н. К. Соколову.

Изъ обзора содержанія протоколовъ видно, что большая часть сообщений, доложенныхъ въ засѣданіяхъ Славянской Комиссіи, но не напечатанныхъ въ Трудахъ ея, также относятся къ древне-славянской и старинной русской литературѣ. Собственно исторія и археологія славянскихъ племенъ почти не затрогивается въ рефератахъ, читаемыхъ и обсуждаемыхъ въ Комиссіи, хотя эта сторона научной дѣятельности и была выдвинута на первый планъ въ докладной запискѣ объ учрежденіи Славянской Комиссіи.

Отъ души желая процвѣтанія кружку славяновѣдовъ, группирующихся около Императорскаго Московскаго Археологическаго Общества, не могу не высказать искренняго пожеланія, чтобы дѣятельность его не ограничивалась предѣлами усвоеннаго имъ въ послѣднее время односторонняго направленія, а распространилась также на область исторіи славянскихъ народовъ. Это тѣмъ желательнѣе, что среди существующихъ въ Россіи ученыхъ учреждений нѣтъ ни одного, которое ставило бы такъ ясно задачу изученія славянской исторіи, какъ она поставлена въ упомянутой докладной запискѣ.

5. Саввина книга, Трудъ *Вячеслава Щепкина*. Изданіе Отдѣленія русскаго языка и словесности Императорской Академіи Наукъ. Съ приложеніемъ 4-хъ фототипическихъ снимковъ. Спб. 1903. 8°. III + 235. (Памятники старо-славянскаго языка. Томъ I, вып. 2-й).

Саввина книга, старославянская рукопись Евангельскихъ чтеній XI вѣка, хранимая въ Типографской библіотекѣ въ Москвѣ, знаменитый памятникъ древней Кирилловской письменности, открытый и впервые изданный покойнымъ академикомъ И. И. Срезневскимъ, дождалась новаго академическаго болѣе исправнаго изданія. Оно приготовлено молодымъ ученымъ В. Н. Щепкинымъ, уже раньше, четыре года назадъ, написавшимъ специальное изслѣдованіе объ этомъ памятникѣ. (Разсужденіе о языкѣ Саввиной книги. Спб. 1899 г. и въ „Сборникѣ“ Отд. русск. яз. и словесности Имп. Академіи Наукъ, т. LXVII). Текстъ памятника воспроизведенъ согласно требованіямъ современной науки съ возможною точностью. Относительно приемовъ

издація г. Щепкинаъ говоритъ подробно въ предисловіи; за всѣми же спеціальными справками и свѣдѣніями о памятникѣ отсылаетъ читателей къ своему вышеуказанному изслѣдованію. Изданіе текста сопровождается 4-превосходно исполненными фототипическими снимками, дающими отчетливое представленіе о палеографическихъ особенностяхъ памятника, и двумя таблицами съ изображеніями большихъ инициаловъ и заставокъ Саввиной книги. За текстомъ слѣдуетъ словоуказатель, тщательно составленный по образцу словоуказателя акад. И. В. Ягича къ Маріинскому глаголическому Евангелію. Впрочемъ, стремленіе до мелочей подражать акад. Ягичу, довело здѣсь г. В. Щепкина до странной крайности. Объясненія въ словоуказателѣ онъ предлагаетъ на латинскомъ языкѣ, какъ это сдѣлано и въ указателѣ къ тексту Маріинскаго Евангелія. Почему здѣсь—въ изданіи Отдѣленія русскаго языка и словесности латинскій языкъ, а не русскій—не понятно. Книга вышла въ свѣтъ въ русской оболочкѣ, съ русскимъ предисловіемъ, русскимъ заглавіемъ, русскими объяснительными примѣчаніями. Съ какой же стати вводить въ ней латинскій языкъ въ словоуказателѣ къ тексту? Вѣдь и западные филологи, интересующіеся славянскимъ текстомъ памятника, должны быть въ состояніи понять всѣ объясненія къ нему, сдѣланныя на русскомъ языкѣ. Непонятно, какъ академическая редакція „Памятниковъ старо-славянскаго языка“ могла допустить безъ надобности такое смѣшеніе языковъ. Какъ бы то-ни было, критическое изданіе Саввиной книги нужно признать весьма полезнымъ явленіемъ. Между прочимъ это изданіе даетъ возможность провѣрить нѣкоторыя черезъ-чуръ смѣлыя и поспѣшныя заключенія, допущенныя г. В. Н. Щепкинымъ въ его „Разсужденія о языкѣ Саввиной книги“. Такимъ мнѣ прежде всего представляется утвержденіе, будто Саввина книга есть непосредственный списокъ съ глаголической рукописи. Къ этому вопросу я намѣренъ обратиться въ ближайшее время.

6. Академика А. И. Соболевскаго. Житія Святыхъ въ древнемъ переводѣ на церковно-славянскій съ латинскаго языка. Спб. 1904 г. V + 62. (Отдѣльный оттискъ изъ Изв. Отд. русск. яз. и словесности Импер. Академіи Наукъ, т. VІІІ, кн. 1, 2, 4).

Академикъ А. И. Соболевскій, неутомимый въ своихъ поискахъ за новыми данными въ области изученія древняго церковно-славян-

скаго языка и старинной славянской литературы, въ настоящей небольшой, но цѣнной работѣ снова выдвигаетъ любопытный вопросъ, затронутый имъ нѣсколько лѣтъ назадъ (Русскій Филологическій Вѣстникъ, 1900, № 1),—о латинскомъ, или западно-европейскомъ вліяніи на древнѣйшую церковно-славянскую письменность. Сдѣланныя почтеннымъ изслѣдователемъ уже раньше наблюденія надъ церковно-славянскимъ переводомъ съ латинскаго Бесѣды на Евангеліе папы Григорія Великаго привели его къ заключенію, что въ этомъ памятникѣ латинское вліяніе на церковно-славянскій языкъ перевода очень незначительно. Дальнѣйшія поиски натолкнули его на рядъ произведеній, которыя несомнѣнно переведены прямо съ латинскаго, и въ которыхъ латинское вліяніе сказывается довольно сильно. Эти произведенія—житіе преп. Бенедикта Нурсійскаго, Мученіе св. Вита, Мученіе св. Аполлинарія Равенскаго и Мученіе свв. Анастасіи Римлянки и Хрисогона. А. И. Соболевскій отпечаталъ тексты всѣхъ этихъ произведеній по извѣстнымъ ему спискамъ, снабдивъ ихъ объяснительными примѣчаніями и указателями встрѣчающихся въ нихъ любопытныхъ словъ. Всѣ эти объясненія издателя и отмѣченныя имъ языковѣдныя данныя твердо устанавливаютъ присутствіе въ данныхъ памятникахъ слѣдовъ латинскаго подлинника, несмотря на то, что кое-гдѣ попадаются указанія и на вліяніе греческаго текста (напр. земля ликіянська, кумбаль, въ цркви *Дисоу*, потрикъ (*potricius*), Димостена, Лиѳерій).

Какъ объяснять присутствіе особенностей послѣдняго рода въ текстахъ съ явными указаніями на латинское происхожденіе, этого вопроса здѣсь А. И. Соболевскій не ставитъ и не раскрываетъ. Быть можетъ, и въ данномъ случаѣ годится то объясненіе, какое дано тѣмъ же изслѣдователемъ по отношенію къ переводу Бесѣды на Евангеліе папы Григорія Великаго? Вѣроятно переводчики и данныхъ Житій и Мученій работали „тогда, когда въ церковно-славянской письменности уже господствовало греческое вліяніе“, вслѣдствіе чего имъ приходилось по-неводѣ дѣлать уступку послѣдному и не смотря на знакомство съ латинскимъ языкомъ и желаніе переводить ближе къ латинскому подлиннику, иногда необходимо было въ собственныхъ именахъ слѣдовать греческому произношенію. Акад. А. И. Соболевскій полагаетъ, что дальнѣйшіе поиски могутъ привести къ открытію еще и другихъ памятниковъ, переведенныхъ на церковно-славянскій языкъ съ латинскаго. Съ вѣроятностью можно это утверж-

дать относительно нѣкоторыхъ молитвъ. Не невозможно, что были и поученія подобнаго латинскаго происхожденія. О времени и мѣстѣ перевода напечатанныхъ произведеній пока трудно сказать что-либо опредѣленное. Во всякомъ случаѣ сообщенные ав. Соболевскимъ факты весьма любопытны, а поставленный имъ вопросъ заслуживаетъ дальнѣйшаго изслѣдованія,

7. А. С. Будиловичъ. Къ вопросу о племенныхъ отношеніяхъ въ Угорской Руси Спб. 1904. 15. (Оттискъ изъ журнала „Живая Старина“ 1903 г., вып. III).

Настоящая небольшая работа многозаслуженнаго слависта, А. С. Будиловича, представляетъ нѣсколько замѣчаній и соображеній по поводу выхода въ свѣтъ двухъ новыхъ западнославянскихъ сочиненій, посвященныхъ угрославянской этнографіи и діалектологіи: 1, д-ра Л. Нидерле: „Národopisná mapa uherských Slováků na základě sčítání lidu z roku 1900“ (Praha, 1903) и 2, д-ра С. Цамбеля: „Slováci a ich reč“²⁾, (Budapest, 1903). Знакомя съ общимъ содержаніемъ этихъ сочиненій, авторъ обращаетъ особое вниманіе на тѣ ихъ стороны, которыя относятся къ спорному донынѣ вопросу о разграниченіи племенъ угрословенскаго и угрорусскаго. Онъ отмѣчаетъ рѣзкое противорѣчіе во взглядахъ чешскаго и словацкаго ученыхъ на этнографическій составъ славянскаго населенія восточныхъ столицъ Угорскаго королевства: Снпшской, Шарашской, Земплинской, Абауй-Торпянской и значительной части Ужгородской. Л. Нидерле видитъ здѣсь главнымъ образомъ словаковъ и наблюдаемые здѣсь смѣшанные словенско-русскіе говоры причисляетъ къ говорамъ восточно-словенскимъ; напротивъ, Цамбель высказывается за русское происхожденіе и характеръ этихъ говоровъ и готовъ считать говорящихъ ими славянъ восточной Угорщины не словаками, а скорѣе ословачиваемою Русью. А. С. Будиловичъ старается выяснитъ „источникъ и значеніе столь существенныхъ разногласій по этому предмету между двумя названными учеными. Онъ упрекаетъ проф. Л. Нидерле за то, что въ данномъ случаѣ онъ совершенно отрѣшился отъ историческаго

¹⁾ Объ этой работѣ Л. Нидерле см. замѣтку и въ моемъ Обзорѣ за 1903 г. IX.

²⁾ Объ этой книгѣ я говорю особо.

метода и построилъ свою картографическую работу исключительно на основаніи произвольныхъ данныхъ мадьярской переписи, почему эта работа, по его мнѣнію, и не приближаетъ насъ въ объективно-научному рѣшенію вопроса о закарпатскомъ рубежѣ русской народности". Болѣе правильной представляется А. С. Будиловичу (и съ полнымъ основаніемъ) точка зрѣнія д-ра Цамбела, какъ основанная на историко-синтетическомъ методѣ". Методъ этотъ заключается въ томъ, что при рѣшеніи вопросовъ этнологической области всегда необходимо сравнивать настоящее съ прошедшимъ, изучать явленія не въ поперечномъ лишь, но и въ продольномъ, такъ сказать, разрѣзѣ; что, съ другой стороны, вопросъ о народности того или другого населенія не можетъ быть рѣшаемъ на основаніи однихъ языковѣдныхъ данныхъ, а, напротивъ, путемъ непрерывнаго сопоставленія таковыхъ съ данными антропологическими съ одной стороны, и культурно-историческими съ другой. Въ самомъ дѣлѣ, понятіе народности по отношенію къ тому или другому историческому народу не исчерпывается его языкомъ, а касается всѣхъ прочихъ врожденныхъ или пріобрѣтенныхъ свойствъ и стремленій какъ физической, такъ и психологической его природы. Сюда относятся, слѣдовательно, и расовый субстратъ народа, и племенные его черты, и отраженіе ихъ въ полусознательной массовой дѣятельности, въ сферѣ рѣчи, пѣсни, преданій, обряда, обычая, наконецъ, наслоенія культурныя въ областяхъ церковной, государственной, общественно-экономической и научно-художественной"... Лишь по изученіи со всѣхъ этихъ сторонъ угрорусскаго типа въ его историческомъ развитіи и по сравненію этого типа съ аналогичными сторонами и особенностями словенскаго племенного типа, по мнѣнію автора, возможно будетъ всесторонне и научно рѣшить вопросъ о крайнемъ западномъ рубежѣ русской народности. Для достиженія же этой важной цѣли весьма желательно было бы снаряженіе хотя по инициативѣ Императорскаго Русскаго Географическаго Общества, научной экспедиціи въ угрорусскую область. Мысль о необходимости такой экспедиціи не разъ проводилась въ русской ученой литературѣ; горячо отстаиваетъ ее и А. С. Будиловичъ. Думается намъ, что и наша Академія Наукъ должна бы содѣйствовать осуществленію этой мысли.

Впрочемъ, основываясь на выясненныхъ теперь данныхъ языковѣдныхъ и историческихъ, опираясь на свое непосредственное знакомство съ Угорскою Русью и на авторитетъ такихъ ученыхъ, какъ

некойми угророссъ А. И. Добрянскій и нѣмецкій профессоръ Г. И. Бидерманъ, авторъ разсматриваемой здѣсь цѣнной критической статьи считаетъ возможнымъ утверждать, что крайній западный рубежъ русской народности не по Унгу, не по Ондавѣ или Торисѣ, (какъ полагалъ Шафарикъ и нынѣ полагаетъ проф. Нидерле), а по линіи отъ Восточной Татры къ Кралевой Голѣ, затѣмъ по водораздѣлу Гернади и Шаявы вплоть до горъ Токвайскихъ или Гедальи и далѣе по рр. Тисѣ и Симошу до Семиградскихъ горъ. Такое представленіе дѣла, кажется, и надо считать наиболѣе близкимъ къ истинѣ.

8. К. Θ. Радченко. а, Забѣтки о нѣкоторыхъ рукописяхъ Филиппопольской городской бібліотеки. Спб. 1903. 17 стр.; б. Забѣтки о пергаменномъ сборникѣ XIV вѣка Вѣнской придворной бібліотеки. Спб. 1904. 37 стр. (Два оттиска изъ Изв. Отд. русск. яз. и словесности Импер. Акад. Наукъ, Т. VIII. кн. 3 и 4 ч.).

Означенныя въ заголовкѣ двѣ небольшія работы проф. К. Θ. Радченка содержатъ нѣсколько цѣнныхъ бібліографическихъ и историко-литературныхъ данныхъ изъ области южно-славянской письменности, собранныхъ молодымъ славистомъ во время его ученой командировки по славянскимъ землямъ.

Въ первой работѣ сообщены свѣдѣнія о 9 рукописяхъ Филиппопольской или Пловдивской бібліотеки. Всѣ онѣ сравнительно поздняго письма—XVI, XVII и XVIII в., но представляютъ значительный интересъ или по своему содержанию, или по языку. Съ большимъ вниманіемъ остановился К. Θ. Радченко на тѣхъ, которыя содержатъ апокрифическія статьи, представляющія любопытныя варіаціи къ изданнымъ текстамъ, и написаны живою народною рѣчью. Изъ одного сборника XVI в. (а по моему мнѣнію XVII в.) № 34 онъ напечаталъ „Слово о змиѣ“ и двѣ статьи—„Почетіе свята“ и „О концѣ міра“; изъ другого (XVII в.) рассказъ на народномъ языкѣ о чудесахъ Богородицы. Нѣкоторыя изъ отмѣченныхъ богослужебныхъ книгъ, Тріодъ Постная и Цвѣтная 1636 г. (№ 24) Псалтирь и Часословъ 1576, (№ 20), Требникъ серб. ред. 1592 г. (№ 40) Минея 1695 (№ 26), Тріодъ Постная 1632 г. серб. пр. (№ 31), Евангеліе болгар. пр. 1682 (№ 19) имѣютъ длинныя записи, любопытныя по своему народному языку и содержанию. Почти всѣ разсмотрѣнныя въ данной статьѣ рукописи сербскаго правописанія, но съ примѣсю бол-

гаризмовъ, а нѣкоторыя записи на народныхъ болгарскихъ нарѣчіяхъ. Такое смѣшанное сербско-болгарское правописаніе, какъ извѣстно, обычное явленіе въ рукописяхъ, обращающихся въ Болгаріи. Оно объясняется широкимъ распространеніемъ въ Болгаріи въ XIV, XV, XVI вв. и позднѣе богослужебныхъ книгъ сербской редакціи, да и другихъ произведеній, писанныхъ на живомъ сербскомъ языкѣ.

Данное сообщеніе К. Θ. Радченка, безспорно представляетъ значительный интересъ. Не могу только не пожалѣть объ одномъ: о томъ, что въ немъ не дано болѣе точныхъ свѣдѣній о всемъ собраніи рукописей Пловдивской бібліотеки. Авторъ говоритъ: „Рукописи Филиппопольской городской бібліотеки относятся по большей части къ позднѣйшему времени—XVII, XVIII и XIX вѣкамъ. Рукописей немного, и большая часть ихъ богослужебныя книги. Однако, есть рукописи, представляющія значительный интересъ или по своему содержанію, или по языку“. И только. Сколько же всего рукописей въ Пловдивской Библіотекѣ? Есть ли между ними хоть нѣсколько древнихъ и какія именно? На этотъ вопросъ нѣтъ отвѣта въ „Замѣткахъ“ молодого слависта, а между тѣмъ дать этотъ отвѣтъ слѣдовало и не трудно было, разъ онъ работалъ въ бібліотекѣ. Если эти свѣдѣнія вообще пригодились бы славистамъ, то для меня лично они были бы особенно цѣнны. Двадцать два года назадъ, лѣтомъ 1882 г., въ первую свою поѣздку по славянскимъ землямъ я самъ работалъ въ Пловдивской бібліотекѣ (тогда только что учрежденной) съ согласія ея перваго директора г. Балмакова (автора дѣлаго ряда работъ о Болгаріи и Македоніи, пишущаго подъ псевдонимомъ „Вѣщаго Олега“) впервые разобралъ поступившія въ бібліотеку рукописи и составилъ имъ каталогъ, который тогда же былъ напечатанъ въ мѣстныхъ газетахъ „Марца“ и „Редъ“. Повятно, что мнѣ очень хотѣлось бы знать, что представляетъ Пловдивское собраніе рукописей въ настоящее время; насколько оно умножилось, входятъ ли въ составъ его его тѣ рукописи, которыя я когда-то имѣлъ въ рукахъ и изучалъ. Изъ 9 рукописей, отмѣченныхъ К. Θ. Радченкомъ только, три—Сборникъ № 34, Минея 1694—№ 29 и Тріодъ 1632 г. № 31—оказались мнѣ старыми знакомыми, но уже подъ другими номерами, а не тѣми, что я выставилъ. Остальныя 6, вѣроятно, поступили въ бібліотеку уже послѣ 1882 г. А сохранились ли въ бібліотекѣ извѣстныя мнѣ 5 древнихъ пергаментныхъ рукописей, о которыхъ совсѣмъ не упоминаетъ нашъ молодой ученый? Нѣкоторыя изъ нихъ, какъ

Постная Тріодь конца XIII или начала XIV в., очень любопытна и въ палеографическомъ отношеніи, и по языку. Позволю себѣ сообщить здѣсь въ сокращеніи составленный мной въ 1882 г. каталогъ рукописей „Болгарской народной Библіотеки въ Пловдивѣ“. Бать можетъ, онъ пригодится кое-кому изъ ученыхъ пока не появится полное описаніе рукописей собранія Пловдивской библіотеки въ современномъ его видѣ.

Всего рукописей 34 номера.

1. Тріодь Постная, получена изъ Битоля отъ священника Стояна; пергамень, 153 л. большого формата, безъ начала и конца; въ срединѣ и концѣ нѣсколько листовъ попорчено и вырвано. Письмо — уставъ конца XIII или нач. XIV в. Рукопись писана нѣсколькими почерками. Заглавныя и начальныя буквы сдѣланы киноварью. Любопытно начертаніе Ж, часто приближающееся къ Л. Изводъ среднеболгарскій.

2. Книга Евангельскихъ Чтеній. На рукописи помѣтка: „Изъ Венелинской Болгарской библіотеки въ Одессѣ. Пергамень; 82 л., безъ начала и конца, уставъ XIV в., среднеболгарскій изводъ, своеобразное начертаніе юсовъ.

3. Отрывки изъ книги Апостольскихъ Чтеній, 9 пергаменныхъ листовъ; уставъ XIII—XIV в.; палимпсестъ. Особенности графики: а, ои; исключительное употребленіе ъ; среднеболгарскій изводъ.

4. Отрывки изъ книги Апостольскихъ Чтеній, 6 пергаменныхъ листовъ въ 8-ку, уставъ XIV в., сербск. правописаніе.

5. Отрывокъ изъ Тріоди Постной, разорванный пергаменный листокъ; уставъ XIV в.

6. Евангеліе, въ кожаномъ переплетѣ; уставъ XV вѣка, нѣсколько заставокъ; среднеболгарское правописаніе.

7. Евангеліе безъ первыхъ листовъ; уставъ XVI в.; сербское правописаніе.

8. Евангеліе, въ кожаномъ переплетѣ; послѣдніе листы, содержавшіе указатель чтеній, разорваны. Въ текстѣ изображенія четырехъ Евангелистовъ и нѣсколько хорошо исполненныхъ заставокъ. На многихъ страницахъ замѣтки лицъ, владѣвшихъ рукописью. Письмо XVII в., сербское правописаніе.

9. Евангеліе въ переплетѣ, сохраняющемъ слѣды бархата. Въ началѣ, концѣ и серединѣ недостаетъ нѣсколькихъ листовъ; нѣсколько заставокъ, исполненныхъ краской и золотомъ. Письмо XVII в., сербское правописание.

10. Евангеліе съ записью, указывающей на 1659 г., съ заставками и украшеніями.

11. Евангеліе, вѣроятно, XVII в. Послѣдніе листы разорваны, а потому нельзя прочесть всей находящейся на одномъ изъ нихъ записи. Видно только, что Евангеліе писано „у жупе Лабской“. Въ немъ много новоболгарскихъ элементовъ.

12. Евангеліе отъ Іоанна, три листка на бумагѣ, уставъ XV в., употребленіе юсовъ выдержано.

13. Апостолъ 1699 г., сербское правописание.

14. Псалтырь и Минея за сентябрь—XVIII в. южнослав. изв.

15. Минея за іюнь, 1695 г. Прекрасное письмо и заставки; сербо-болг. прав.

16. Минея за май, 1695 г. Книга написана для монастыря свв. Космы и Даміана; смѣшан. сербское правописание.

17. Минея за сентябрь 1696 г. Въ началѣ красивая заставка; въ концѣ записи о томъ, что рукопись писалъ Грамотникъ Кръстіа въ 1696 г. Правописание южно-славянское.

18. Минея за ноябрь. Первые и послѣдніе листы разорваны. На 14 л. подъ строкой записи о томъ, что книга писана въ 1695 г. для монастыря свв. Космы и Даміана, что выше села Кукленъ. Сербское правописание.

19. Тріодъ Постная, XVII в. сербское правописание.

20. Тріодъ Постная, рукопись весьма попорченная, XVII в., сербо-болг. письма.

21. Тріодъ Цвѣтная, XVIII в. куплена какъ видно изъ записи, въ 1632 г. Рукопись пострадала отъ пожара.

22. Четы-Миней. Житія святыхъ за сентябрь—февраль, XVII в. Рукопись обгорѣла и попорченная, поступила изъ села Дермендере. Правописание сербо-болгарское.

23. Осмогласникъ, XVII в. юсовое письмо.

24. Тріодъ Постная, XVIII в. сербское письмо.

25. Молитвословъ XVII в. смѣшан. южно-слав. правописание.

26. Служебникъ, истрепанная бумажная рукопись; болгарское правописание. XVI в.

27. Требникъ, въ кожаномъ переплетѣ, XVIII в., смѣшани южно-слав. правописаніемъ.

28. Требникъ, въ кожаномъ переплетѣ, изорванная рукопись, XVIII в.

29. Требникъ, безъ начала и конца, XVIII в. южно-слав. правописаніемъ.

30. Требникъ, безъ начала и конца, въ переплетѣ, XVIII в. смѣшанное сербо-болг. правописаніемъ.

31. Октоихъ 1760 г. вѣтъ конца, южно-слав. правописаніемъ.

32. Сборникъ, пис. полууставомъ, переходящ. въ скоропись, апр. XVII в., серб. правописаніемъ. Теперь подъ № 34. Описанъ К. Θ. Радченкомъ.

33. Слово Θεодорита, епископа Болгарскаго, 2 листа, XVIII в. южно-слав. правописаніемъ.

34. Указатель Евангельскихъ Чтеній, 5 листовъ, XVII в., смѣшанное сербо-болгар. правописаніемъ.

Не меньшаго вниманія заслуживаетъ и вторая статья проф. К. Θ. Радченка. Она вся посвящена обстоятельному описанію и разсмотрѣнію со стороны языка и содержанія пергаменнаго болгарскаго сборника XIV в. Вѣнской придворной библиотеки, № 137. Языкъ памятника изобилуетъ архаизмами, которые тщательно отмѣчены авторомъ работы. Со стороны содержанія сборникъ представляетъ рядъ любопытныхъ житій и словъ. Изъ нихъ изслѣдователь особенно остановился на апокрифическомъ „Житіи блаженнаго апостола Петра“, о которомъ сдѣлалъ нѣсколько важныхъ историко-литературныхъ замѣчаній, и которое издалъ въ приложеніи къ своей работѣ съ подведеніемъ вариантовъ по другому уже изданному списку.

9. *Г. А. Ильинскій*. Рукописи Копитара въ Люблянской лицейской библиотекѣ Спб. 1904. 8. 26 (Отдѣльный оттискъ изъ Извѣстій Отд. русск. яз. и слов. Импер. Академіи Наукъ, т. IX кн. 1).

Рукописи извѣстнаго славѣста Копитара, хранящіяся въ Люблянской лицейской библиотекѣ, уже давно привлекаютъ къ себѣ вниманіе славяновѣдцевъ. Замѣчательнѣйшая изъ нихъ—Супрасльская рукопись еще въ 1851 г. издана Миклошичемъ, который воспользовался и многими другими рукописями собранія Копитара для своего словаря церковно-славянскаго языка. Другая рукопись „Дамаскинъ“ XVII в. въ 1868 послужила предметомъ цѣлаго изслѣдованія проф.

В. И. Ламаанскаго, давъ толчокъ къ изученію исторіи новоболгарскаго языка, и въ недавнее время издана г. Аргировымъ въ „Сборникѣ за народни умотворенія, науката и книжнина“ (кн. XII). Нѣкоторыя части рукописнаго собранія Копитара уже были описаны. Такъ проф. Г. А. Воскресенскій описалъ въ 1883 г. семь рукописей (Славянскія рукописи, хранящіяся въ заграничныхъ бібліотекахъ: берлинской, пражской, вѣнскаго, люблянскаго, загребскаго и двухъ болгарскихъ). Въ недавнее время перечень рукописей Копитара, впрочемъ не совсѣмъ полный, представилъ акад. И. В. Ягичъ (*Anzeiger der philosophisch—histor. Classe Wiener Akademie* 1899, № XX). Но полного описанія рукописей Копитара еще не было. Г. А. Ильинскій въ данномъ трудѣ выполняетъ значительную часть этой задачи. Онъ даетъ обстоятельное научное описаніе всѣхъ кирилловскихъ рукописей Копитара, за исключеніемъ двухъ хорошо извѣстныхъ—Супрасльскаго кодекса и „Дамаскина“ XVII в. Мнѣ думается, что авторъ описанія напрасно исключилъ эти двѣ рукописи: это опущеніе дѣлаетъ все описаніе неполнымъ и тѣмъ умаляетъ его значеніе, какъ справочнаго пособія. Жаль также, что составитель описанія *Kopitara* совсѣмъ оставилъ безъ вниманія глаголическія рукописи. Всего занесено въ описаніе 25 номеровъ. Такъ какъ двѣ рукописи не вошли въ описаніе, то значитъ, кирилловскихъ рукописей въ собраніи Копитара 27. Описаніе рукописей, не смотря на свою сжатость и краткость, отвѣчаетъ запросамъ современной науки. Оно содержитъ свѣдѣнія какъ о палеографическихъ особенностяхъ памятника, такъ объ его языкѣ, отмѣчаетъ содержаніе рукописей и находящіяся въ нихъ важнѣйшія записи. Наиболѣе замѣчательными изъ рукописей, кромѣ указанныхъ: Четвероевангеліе боснійскаго типа нач. XV в., Октоихъ № 3., Требникъ (№ 32), Златоустъ 1574 (№ 5), Зерцало Михаила Пселла XIV в. (№ 141), Книги Ефрема Сирока XVI—XVII в. (№ 18).

Т. Флоринскій.

Слѣдовательно изъ (22):

$$Z = -2\pi \epsilon^2 \sigma a b \gamma z_1 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda_1}{(\lambda_1 + \gamma^2) \sqrt{(\lambda_1 + a^2)(\lambda_1 + \beta^2)(\lambda_1 + \gamma^2)}}.$$

Чтобы выразить Z черезъ величины, относящіяся къ данному эллипсоиду (a), замѣнимъ координату z_1 координатою z изъ (20), а въ определенномъ интегралѣ вводимъ новую переменную λ съ помощью равенства:

$$\lambda_1 = \lambda - \omega,$$

гдѣ ω большій корень уравненія (19). Тогда, пользуясь соотношеніями (15), получимъ окончательно:

$$Z = -2\pi \epsilon^2 \sigma a b c z \int_{\omega}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda + c^2) \sqrt{(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)}}. \quad (24)$$

Подобнымъ образомъ для остальныхъ двухъ проэкцій найдемъ:

$$X = -2\pi \epsilon^2 \sigma a b c x \int_{\omega}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda + a^2) \sqrt{(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)}}; \quad (25)$$

$$Y = -2\pi \epsilon^2 \sigma a b c y \int_{\omega}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda + b^2) \sqrt{(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)}}.$$

26. Теорема Ньютона. Положимъ, что кромѣ эллипсоида даннаго мы имѣемъ еще другой, подобный ему, однородный эллипсоидъ съ тою же плотностью σ , и пусть центръ и оси этихъ эллипсоидовъ совпадаютъ. Тогда уравненіе второго эллипсоида будетъ

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} + \frac{\zeta^2}{c_1^2} = 1,$$

причемъ

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k, \tag{26}$$

гдѣ k нѣкоторая постоянная.

Если точка $M(x, y, z)$ внутренняя для обоихъ эллипсоидовъ, то проэкции силы притяженія этой точки первымъ эллипсоидомъ даются формулами (12)—(14); проэкции же X_1, Y_1, Z_1 силы притяженія той же точки эллипсоидомъ вторымъ напишутся по аналогіи, такъ, напр., для Z_1 имѣемъ выраженіе:

$$Z_1 = -2\pi \epsilon^2 \sigma a_1 b_1 c_1 z \int_0^\infty \frac{d\lambda_1}{(\lambda_1 + c_1^2) \sqrt{(\lambda_1 + a_1^2)(\lambda_1 + b_1^2)(\lambda_1 + c_1^2)}}.$$

Въ опредѣленномъ интегралѣ введемъ новую переменную λ , полагая

$$\lambda_1 = k^2 \lambda,$$

и, кромѣ того, исключимъ изъ взятаго выраженія полюсы a_1, b_1, c_1 съ помощью равенствъ (26). Тогда, по сокращеніи на k^3 , найдемъ по (12):

$$Z_1 = -2\pi \epsilon^2 \sigma abc z \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda + c^2) \sqrt{(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)}} = Z.$$

Подобнымъ образомъ убѣдимся, что

$$X_1 = X; \quad Y_1 = Y;$$

и слѣд. силы притяженія, оказываемыя на одну и ту же внутреннюю точку обѣими эллипсоидами, одинаковы.

Отсюда непосредственно вытекаетъ теорема Ньютона: однородный матеріальный слой, ограниченный двумя подобными и соосными эллипсоидами, не оказываетъ притяженія на массу, помѣщенную въ его внутренней полости.

27. Теорема Маклорена. Составляющіи притяженія однороднымъ эллипсоидомъ внѣшней точки $M(x, y, z)$ даны формулами (24) и (25). Пусть кромѣ даннаго эллипсоида имѣется еще другой, софокусный ему, также однородный эллипсоидъ съ полуосями α, β, γ и плотностью σ_1 .

Составляющія X_1, Y_1, Z_1 силы притяженія этиѣмъ эллипсоидомъ той же внѣшней точки найдутся по (24) и (25); такъ, напр.,

$$Z_1 = -2\pi \epsilon^2 \sigma_1 \alpha \beta \gamma z \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{d\lambda_1}{(\lambda_1 + \gamma^2) \sqrt{(\lambda_1 + \alpha^2)(\lambda_1 + \beta^2)(\lambda_1 + \gamma^2)}}. \quad (27)$$

Здѣсь по (19) ω_1 большій корень уравненія:

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \omega_1} + \frac{y^2}{\beta^2 + \omega_1} + \frac{z^2}{\gamma^2 + \omega_1} - 1 = 0.$$

Изъ условія софокусности эллипсоидовъ слѣдуетъ:

$$\alpha^2 - a^2 = \beta^2 - b^2 = \gamma^2 - c^2 = \tau, \quad (28)$$

гдѣ τ нѣкоторая постоянная.

Квадраты полуосей вспомогательнаго эллипсоида, проходящаго черезъ взятую точку M , выражаются съ одной стороны черезъ полуоси даннаго эллипсоида такъ:

$$a^2 + \omega, \quad b^2 + \omega, \quad c^2 + \omega,$$

а черезъ полуоси втораго эллипсоида такъ:

$$a^2 + \omega_1, \quad \beta^2 + \omega_1, \quad \gamma^2 + \omega_1.$$

Отсюда выводимъ, что

$$\alpha^2 - a^2 = \beta^2 - b^2 = \gamma^2 - c^2 = \omega - \omega_1;$$

а по сравненію съ (28) находимъ, что

$$\tau = \omega - \omega_1. \quad (29)$$

Въ опредѣленномъ интегралѣ (27) дѣлаемъ замѣну переменнѣй, полагая

$$\lambda_1 = \lambda - \tau.$$

Тогда новые предѣлы интеграла будутъ $\tau + \omega_1$ и ∞ , или по (29) ω и ∞ . А потому для Z_1 находимъ выраженіе:

$$Z_1 = -2\pi \epsilon^2 \sigma_1 \alpha \beta \gamma z \int_{\omega}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda + c^2) \sqrt{(\lambda + \alpha^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)}}.$$

если воспользуемся зависимостями (28).

Сравнивая полученный результат съ (24), имѣемъ:

$$Z_1 : Z = \sigma_1 a \beta \gamma : abc :$$

или, что то же,

$$Z_1 : Z = \frac{4}{3} \pi \sigma_1 a \beta \gamma : \frac{4}{3} \pi abc = M_1 : M ,$$

если через M и M_1 означимъ массы разсматриваемыхъ эллипсоидовъ.

Совершенно также найдемъ, что

$$\frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y} = \frac{M_1}{M} .$$

Изъ доказанныхъ равенствъ вытекаетъ теорема Маклорена: силы притяженія одной и той же внѣшней матеріальной точки двумя софокусными однородными эллипсоидами совпадаютъ по направленію, а по величинѣ пропорціональны массамъ этихъ эллипсоидовъ.

28. Потенціалъ однороднаго эллипсоида. Послѣ того, какъ вычислены составляющія X, Y, Z напряженія поля, зависящаго отъ однороднаго эллипсоида, нахожденіе самаго потенциала U требуетъ лишь интегрированія полнаго дифференціала:

$$dU = X dx + Y dy + Z dz . \tag{30}$$

Мы поведемъ вычисленія лишь для случая точки внѣшней, какъ болѣе сложнаго. Подставляя въ (30) изъ (24) и (25), находимъ:

$$dU = -2\pi \epsilon^2 \sigma abc \int_{\omega}^{\infty} \left[\frac{x dx}{\lambda + a^2} + \frac{y dy}{\lambda + b^2} + \frac{z dz}{\lambda + c^2} \right] \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} ,$$

если для сокращенія положимъ:

$$\Delta(\lambda) = \sqrt{(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)} .$$

Иначе можемъ написать:

$$dU = d \left\{ -\pi \epsilon^2 \sigma abc \int_{\omega}^{\infty} \left[\frac{x^2}{\lambda + a^2} + \frac{y^2}{\lambda + b^2} + \frac{z^2}{\lambda + c^2} \right] \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \right\} - \pi \epsilon^2 \sigma abc \left[\frac{x^2}{\omega + a^2} + \frac{y^2}{\omega + b^2} + \frac{z^2}{\omega + c^2} \right] \frac{d\omega}{\Delta(\omega)}, \quad (31)$$

такъ какъ ω , какъ корень уравненія (19), въ свою очередь зависитъ отъ переменныхъ x, y, z .

Въ послѣднемъ членѣ предыдущаго равенства выраженіе, стоящее въ скобкахъ, въ силу уравненія (19) обращается въ единицу, а потому весь этотъ членъ, очевидно, представляетъ собою

$$d \left\{ \pi \epsilon^2 \sigma abc \int_{\omega}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \right\}.$$

Подставляя въ (31), имѣемъ:

$$dU = d \left\{ \pi \epsilon^2 \sigma abc \int_{\omega}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{\lambda + a^2} - \frac{y^2}{\lambda + b^2} - \frac{z^2}{\lambda + c^2} \right] \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \right\},$$

откуда для внѣшнихъ точекъ,

$$U = \pi \epsilon^2 \sigma abc \int_{\omega}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{\lambda + a^2} - \frac{y^2}{\lambda + b^2} - \frac{z^2}{\lambda + c^2} \right] \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}. \quad (32)$$

Произвольной постоянной прибавлять не надо, такъ какъ для точекъ безконечноудаленныхъ ($\omega = \infty$) потенциалъ U (§ 17) долженъ обращаться въ нуль.

Для точек же внутренних, очевидно,

$$U = \pi \epsilon^2 \sigma abc \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{\lambda + a^2} - \frac{y^2}{\lambda + b^2} - \frac{z^2}{\lambda + c^2} \right] \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}. \quad (33)$$



ГЛАВА V.

Основные свойства векторіального поля.

29. **Векторъ-функція точки. Векторіальное поле. Линіи направленія (векторіальныя нити).** Векторъ V , координаты котораго P, Q, R представляют собою функціи трехъ независимыхъ переменныхъ x, y, z , называется векторъ-функціею трехъ аргументовъ. Если эти три переменныхъ x, y, z примемъ за декартовы координаты, опредѣляющія положеніе нѣкоторой точки M пространства, то рассматриваемый векторъ V можно, по аналогіи съ § 1, назвать векторъ-функціею точки, такъ какъ тогда, вообще говоря, заданіемъ точки M задается и самъ векторъ V . Тотъ объемъ или совокупность тѣхъ объемовъ, внутри которыхъ лежатъ точки, дающія вектору V вещественныя, конечныя и опредѣленныя значенія, называется полемъ вектора V или, короче, векторіальнымъ полемъ.

Кривыя, обладающія тѣмъ свойствомъ, что касательныя къ нимъ параллельны значеніямъ векторъ-функціи для точекъ касанія, носятъ названіе линій направленія или векторіальныхъ нитей. Дифференціальныя уравненія семейства векторіальныхъ нитей или линій направленія, очевидно, будутъ:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \quad (1)$$

Примѣры: а) Векторъ v , скорость точки (x, y, z) твердаго тѣла, опредѣляется формулами:

$$v \cos(v, x) = -\omega y; \quad v \cos(v, y) = \omega x; \quad v \cos(v, z) = c; \quad ^1)$$

¹⁾ I § 68.

если за OZ взята винтовая ось для рассматриваемого момента; ω и c постоянныя. Полеъ вектора v служить все неограниченное пространство.

Дифференціальныя уравненія линий направленія представляются такъ:

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} = \frac{dz}{c}.$$

Очевидными интегралами этихъ уравненій служатъ:

$$x^2 + y^2 = C_1; \quad z = \frac{c}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C_2,$$

гдѣ C_1, C_2 постоянныя произвольныя. Отсюда видимъ, что линіи направленія будутъ гелисы или винтовыя линіи съ однимъ и тѣмъ же ходомъ.

б) Для вектора съ координатами:

$$P = \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad Q = 1; \quad R = \log(x^2 + y^2 + z^2 - 1);$$

полеъ служить пространство, заключенное между двумя концентрическими сферами радіусовъ 1 и 2.

30. Работа вектора на данномъ векторѣ, на данной кривой. Возьмемъ точку M поля и построимъ изъ нея значеніе вектора V , затѣмъ изъ той же точки M построимъ другой какой-нибудь векторъ V_1 , тогда произведеніе вида

$$V V_1 \cos(\Gamma, V_1)$$

носитъ названіе работы вектора V на векторѣ V_1 (или, обратно, работы вектора V_1 на векторѣ V , такъ какъ предыдущее выраженіе симметрично относительно обоихъ векторовъ).

Проведемъ внутри поля нѣкоторую кривую и назначимъ на ней направление. Тогда черезъ каждую точку кривой пройдутъ два вектора—данная векторъ-функція точки V и элементъ дуги кривой dS . Произведеніе $V dS \cos(V, dS)$ выразить собою работу вектора V на векторѣ dS , а потому интеграль

$$\int V \cos(V, dS) \cdot dS, \tag{2}$$

распространенный на всю взятую кривую, называется работою вектора на данной кривой.

Замкнутую кривую линію условимся для краткости называть контуромъ; тогда и интеграль (2) для замкнутой кривой выразить собою работу вектора V на данномъ контурѣ.

31. Течение вектора сквозь данную площадку, сквозь данную поверхность. Построим опять из точки M поля соответствующее этой точке значение векторь-функции V и проведем через ту же точку M бесконечно малую площадку $d\sigma$ съ нормалью n въ опредѣленную сторону. Тогда произведение

$$V \cdot d\sigma \cdot \cos(V, n)$$

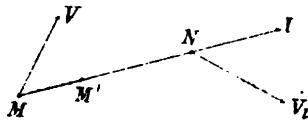
носитъ название течения вектора V сквозь площадку $d\sigma$ въ направленіи n .

Аналогично сказанному, если внутри поля проведемъ какую либо поверхность Σ , то интегралъ

$$\iint V \cos(V, n) d\sigma, \tag{3}$$

распространенный на всю поверхность Σ , назовемъ течениемъ вектора V сквозь поверхность Σ въ направленіи нормали n .

Фиг. 22.



32. Геометрическая производная отъ векторь-функции точки по данному направленію. Черезъ точку $M(x, y, z)$ поля проведемъ направление l , характеризуемое косинусами α, β, γ . Возьмемъ другую точку M' поля, лежащую на построенной оси и отстоящую отъ M на бесконечно-маломъ разстояніи Δl . Если ни M , ни M' не принадлежать къ числу особенныхъ точекъ векторь-функции $V(P, Q, R)$, то значение V для точки M'

$$(V) + (\Delta V)$$

будетъ бесконечно мало отличаться отъ значения (V) въ точкѣ M .

Векторь $\frac{(\Delta V)}{\Delta l}$ будетъ параллеленъ вектору (ΔV) и одинаково съ нимъ направленъ при $\Delta l > 0$, или прямопротивоположенъ при $\Delta l < 0$. Положимъ, что M' сливается съ M ; тогда предѣлъ вектора $\frac{(\Delta V)}{\Delta l}$ при Δl бесконечно-маломъ, если, конечно, такой предѣлъ существуетъ, назовемъ геометрическою производною отъ векторь-функции V по направленію l и будемъ обозначать V_1 . Проекціи этого вектора на оси координатъ по § 5 представляются такъ:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \cos(\dot{V}_1, x) &= \frac{\partial P}{\partial x} \alpha + \frac{\partial P}{\partial y} \beta + \frac{\partial P}{\partial z} \gamma; \\ \dot{V}_1 \cos(\dot{V}_1, y) &= \frac{\partial Q}{\partial x} \alpha + \frac{\partial Q}{\partial y} \beta + \frac{\partial Q}{\partial z} \gamma; \\ \dot{V}_1 \cos(\dot{V}_1, z) &= \frac{\partial R}{\partial x} \alpha + \frac{\partial R}{\partial y} \beta + \frac{\partial R}{\partial z} \gamma. \end{aligned} \tag{4}$$

По самому определению своему векторъ \dot{V}_1 представляет собою то геометрическое приращение, которое получилъ бы векторъ V въ точкѣ L (Фиг. 22), отстоящей отъ M на единичномъ разстояніи въ направленіи L , если бы на всемъ протяженіи MN векторъ V измѣнялся такъ, какъ онъ измѣняется на бесконечномаломъ разстояніи Δl . Поэтому условимся считать, что геометрическая производная отъ векторъ-функции по данному направленію приложена къ точкѣ, отстоящей отъ данной въ указанномъ направленіи на единичномъ разстояніи, т. е. въ нашемъ случаѣ примемъ, что \dot{V}_1 приложенъ къ названной выше точкѣ N . Иначе говоря, координатами вектора \dot{V}_1 , какъ вектора приложеннаго, служатъ количества ¹⁾:

$$\dot{V}_1 \cos(\dot{V}_1, x); \dot{V}_1 \cos(\dot{V}_1, y); \dot{V}_1 \cos(\dot{V}_1, z); x + \alpha; y + \beta; z + \gamma. \tag{5}$$

33. Расходимость векторіального поля. Въ сосѣдствѣ какой либо точки M векторіального поля построимъ замкнутую поверхность Σ такъ, чтобы точка M лежала внутри этой поверхности или на ней самой. Рассмотрим отношеніе течения векторъ-функции $V(P, Q, R)$ сквозь построенную поверхность къ объему, ограниченному этой поверхностью. По § 31 отношеніе это представится такъ

$$\frac{\iiint [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)] d\sigma}{\iiint dx dy dz}, \tag{6}$$

гдѣ $d\sigma$ элементъ поверхности, n направленіе внѣшней нормали, а интегралы распространены—двойной по взятой поверхности, а тройной по объему, заключенному внутри ея.

На основаніи леммы Грина (§ 15):

$$\begin{aligned} \iiint [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)] d\sigma &= \\ &= \iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

¹⁾ I § 7.

Предположимъ теперь, что поверхность Σ стягивается въ точку M , тогда видимъ, что предѣломъ отношенія (6) служить количество:

$$D = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (7)$$

если, конечно, Гриновское преобразование приложимо къ поверхностному интегралу въ любой моментъ его измѣненія.

Количество D называется расходимостью векторіальнаго поля въ точкѣ M .

Нетрудно показать непосредственно, что расходимость не зависитъ отъ выбора осей координатъ, а только отъ свойствъ самого поля. Дѣйствительно, пусть для новой системы осей $A\xi\eta\zeta$ векторъ-функции V опредѣляется проеціями P_1, Q_1, R_1 . Тогда

$$\begin{aligned} P_1 &= P\lambda_x + Q\lambda_y + R\lambda_z; \\ Q_1 &= P\mu_x + Q\mu_y + R\mu_z; \\ R_1 &= P\nu_x + Q\nu_y + R\nu_z; \end{aligned} \quad (8)$$

гдѣ λ_x, \dots, ν_z косинусы, значенія которыхъ ясны изъ схемы:

	x	y	z
ξ	λ_x	λ_y	λ_z
η	μ_x	μ_y	μ_z
ζ	ν_x	ν_y	ν_z

(9)

Но тогда и координаты x, y, z точки M перейдутъ въ координаты ξ, η, ζ , при чемъ

$$\begin{aligned} x &= x_A + \xi\lambda_x + \eta\mu_x + \zeta\nu_x; \\ y &= y_A + \xi\lambda_y + \eta\mu_y + \zeta\nu_y; \\ z &= z_A + \xi\lambda_z + \eta\mu_z + \zeta\nu_z; \end{aligned} \quad (10)$$

гдѣ x_A, y_A, z_A координаты новаго начала ¹⁾.

Составимъ выраженіе для расходимости D_1 въ новыхъ координатахъ:

$$D_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_1}{\partial \eta} + \frac{\partial R_1}{\partial \zeta}. \quad (11)$$

¹⁾ I § 57.

Но по (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial \xi} &= \lambda_x \frac{\partial P}{\partial \xi} + \lambda_y \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \lambda_z \frac{\partial R}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \eta} &= \mu_x \frac{\partial P}{\partial \eta} + \mu_y \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \mu_z \frac{\partial R}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial R_1}{\partial \zeta} &= \nu_x \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \nu_y \frac{\partial Q}{\partial \zeta} + \nu_z \frac{\partial R}{\partial \zeta}. \end{aligned} \tag{12}$$

Далѣ по (10)

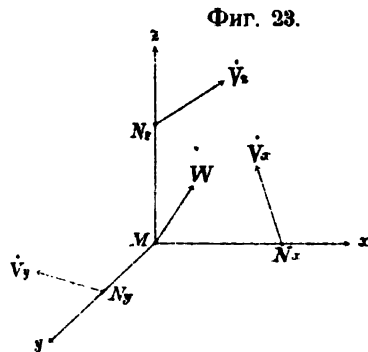
$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} &= \lambda_x \frac{\partial P}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial P}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial P}{\partial z}; \\ \frac{\partial Q}{\partial \xi} &= \lambda_x \frac{\partial Q}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial Q}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial Q}{\partial z}; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial R}{\partial \zeta} &= \nu_x \frac{\partial R}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial R}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \tag{13}$$

Подставляемъ въ (11) изъ (12)—(13) и воспользуемся соотношеніями между косинусами:

$$\lambda_x^2 + \mu_x^2 + \nu_x^2 = 1; \dots \lambda_x \lambda_y + \mu_x \mu_y + \nu_x \nu_y = 0; \dots \tag{14}$$

тогда найдемъ, что

$$D_1 = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = D.$$



34. Моментъ завитія вектора (завитіе векторіального поля). Распределеніе векторовъ по точкамъ поля, кромѣ расходимости D , характеризуется еще нѣкоторымъ векторомъ, къ разсмотрѣнію котораго и перейдемъ. Возьмемъ точку M (Фиг. 23) поля векторъ-функція $V(P, Q, R)$ и построимъ три геометрическія производныя отъ V по какимъ либо тремъ

взаимноперпендикулярнымъ направлѣніямъ, напр. по направлѣніямъ координатныхъ осей OX, OY, OZ . Означимъ эти производныя соответственно $\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$, тогда по (4) координатами будутъ

$$\begin{aligned} \text{для } \dot{V}_x &= \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}; \\ \text{для } \dot{V}_y &= \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y}; \\ \text{для } \dot{V}_z &= \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \tag{15}$$

Каждый изъ этихъ векторовъ по условію § 32 будетъ приложенъ соответственно въ точкахъ N_1, N_2, N_3 (Фиг. 23), отстоящихъ отъ M въ единичномъ разстояніи по направлѣнію осей координатъ. Составимъ выраженія для проэкцій на оси главнаго момента вокругъ точки M системы изъ трехъ приложенныхъ векторовъ $\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$. Если искомый моментъ означимъ W , то принимая во вниманіе равенства:

$$MN_1 = MN_2 = MN_3 = 1,$$

легко найдемъ:

$$\begin{aligned} W \cos(W, x) &= \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; & W \cos(W, y) &= \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \\ W \cos(W, z) &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \tag{16}$$

Въ дальѣйшемъ моментъ W и будемъ называть моментомъ завитія вектора V или, короче, завитіемъ векторіальнаго поля въ точкѣ M .

Нетрудно убѣдиться непосредственно, что ни длина, ни направлѣніе момента W не зависятъ отъ выбора осей координатъ, а только отъ свойствъ поля, т. е. отъ распредѣленія векторовъ по точкамъ поля. На самомъ дѣлѣ, пользуясь обозначеніями предыдущаго параграфа, подчислимъ для новыхъ осей ξ, η, ζ разность $\frac{\partial R_1}{\partial \eta} - \frac{\partial Q_1}{\partial \zeta}$; тогда найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial \eta} - \frac{\partial Q_1}{\partial \zeta} &= \frac{\partial P}{\partial \eta} v_x + \frac{\partial Q}{\partial \eta} v_y + \frac{\partial R}{\partial \eta} v_z - \\ &- \frac{\partial P}{\partial \zeta} \mu_x - \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \mu_y - \frac{\partial R}{\partial \zeta} \mu_z. \end{aligned}$$

Подставим сюда значения производных $\frac{\partial P}{\partial \eta}, \dots, \frac{\partial R}{\partial \zeta}$ изъ (13) и сократимъ; въ такомъ случаѣ получимъ:

$$\frac{\partial R_1}{\partial \eta} - \frac{\partial Q_1}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) (\mu_y \nu_x - \mu_x \nu_y) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) (\mu_x \nu_z - \mu_z \nu_x) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (\mu_x \nu_y - \mu_y \nu_x).$$

Если же вспомнимъ соотношенія между косинусами ¹⁾, изъ которыхъ типическимъ служатъ

$$\lambda_x = \mu_y \nu_z - \mu_z \nu_y, \tag{17}$$

а остальные получаются отсюда круговою подстановкою буквъ λ, μ, ν и значковъ x, y, z , то изъ предыдущаго выводимъ по (16):

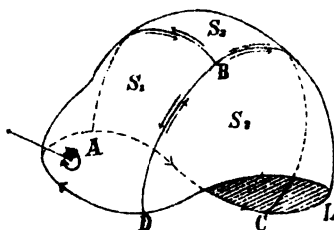
$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial \eta} - \frac{\partial Q_1}{\partial \zeta} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \lambda_x + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \lambda_y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \lambda_z = \\ &= W \cos(W, \xi). \end{aligned}$$

Такимъ же точно образомъ найдемъ:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial R_1}{\partial \xi} = W \cos(W, \eta); \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \xi} - \frac{\partial P_1}{\partial \eta} = W \cos(W, \zeta),$$

что и доказываетъ требуемое.

Фиг. 24.



35. Лемма Стокса. Въ полѣ вектора $V(P, Q, R)$ проведемъ нѣкоторый контуръ L (Фиг. 24), и пусть этотъ контуръ служить границею нѣкоторой поверхности S , также лежащей внутри векторіального поля. Въ такомъ случаѣ, если векторъ-функція V конечна, непрерывна и однозначна на контурѣ L , а моментъ завитія этого вектора конеченъ, непрерывенъ и однозначенъ всюду на поверхности S , то работа вектора V на

¹⁾ I § 57 (5).

контуръ L можетъ быть выражена черезъ течение момента завитія W сквозь поверхность S . Означимъ черезъ n такое направление нормали къ поверхности S , при которомъ для точекъ поверхности вблизи контура направление контура по отношенію къ нормали соотвѣтствуетъ направленію положительнаго вращенія вокругъ нормали, какъ оси, т. е. по часовой стрѣлкѣ: въ такомъ случаѣ

$$\int_{(L)} V \cdot dl \cdot \cos(V, dl) = \iint_{(S)} W \cos(W, n) dS,$$

гдѣ dl элементъ контура, dS элементъ поверхности, а буквы внизу знаковъ интеграла напоминаютъ, на какіе геометрическіе объекты распространено интегрированіе.

Иначе предыдущее равенство можно переписать такъ:

$$\int_{(L)} (P dx + Q dy + R dz) = \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \gamma \right\} dS, \quad (18)$$

если dx, dy, dz проэкции dl на оси координатъ, а α, β, γ косинусы, опредѣляющіе направление нормали n .

Само собою разумѣется, что на равенство (18), называемое леммою Стокса, можно смотрѣть, какъ на нѣкоторое соотношеніе между тремя аналитическими функціями точки P, Q, R и ихъ производными, причемъ сами функціи должны быть конечны, непрерывны и однозначны на контурѣ L , а ихъ производныя выполнять тѣ же условія на поверхности S .

Прежде всего замѣтимъ, что, если поверхность S какими либо кривыми раздѣлена на нѣсколько частей, напр. на три S_1, S_2, S_3 (Фиг. 24), и если справедливость равенства (18) доказана для каждой части въ отдѣльности, то теорема окажется справедливою и для полной поверхности S . На самомъ дѣлѣ, поверхностные интегралы непосредственно въ суммѣ даютъ интеграль по поверхности S , а интегралы по пограничнымъ контурамъ $ABDA, DBCD, CBAC$, въ нашемъ случаѣ, при суммированіи сливаются въ одинъ интеграль по контуру $ACDA$ поверхности S , такъ какъ интегралы по общимъ частямъ AB, BC, BD контуровъ, будучи взяты по двумъ противоположнымъ направленіямъ, взаимно сокращаются.

Если въ различныхъ точкахъ данной поверхности S нормаль n , направленіе которой назначено такъ, какъ было указано выше, образуетъ съ одной изъ координатныхъ осей, напр. OZ , уголъ то острый, то тупой, тогда дѣлимъ поверхность S на нѣсколько участковъ такимъ образомъ, чтобы въ каждомъ участкѣ либо всѣ нормали были наклонены къ OZ подъ острымъ угломъ, либо всѣ подъ тупымъ угломъ. По сдѣланному выше замѣчанію, когда мы докажемъ справедливость леммы Стокса для участковъ, то тѣмъ самымъ докажемъ теорему и для всей поверхности.

Итакъ, пусть всюду на участкѣ нормаль n образуетъ съ OZ уголъ острый. При интегрированіи по поверхности мы должны считать одну изъ переменныхъ x, y, z функціею остальныхъ двухъ въ силу даннаго уравненія поверхности. Выберемъ за такую функцію координату z ; тогда изъ очевиднаго соотношенія между дифференціалами:

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0,$$

которое можно разсматривать какъ дифференціальное уравненіе поверхности, выводимъ слѣдующія значенія для частныхъ производныхъ отъ z по x или по y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\gamma}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

Поэтому, если напр. подъ знакомъ интеграла придется брать частную производную по y отъ какой либо функціи

$$\varphi(x, y, z),$$

то

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (19)$$

Отмѣченная скобками производная взята въ томъ предположеніи, что функція z исключена изъ функціи φ при помощи уравненія поверхности.

Соберемъ теперь въ поверхностномъ интегралѣ (18) члены, содержащіе производныя отъ P ; это будутъ:

$$\iint \left(\frac{\partial P}{\partial z} \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \gamma\right) dS. \quad (20)$$

Но, по условію, коснусь γ на взятомъ участкѣ поверхности больше нуля, слѣдовательно:

$$\gamma dS = dx dy. \quad (21)$$

А потому вмѣсто (20) имѣемъ:

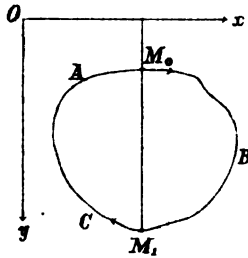
$$-\iint \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx dy,$$

или на основаніи (19):

$$-\int dx \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) dy, \tag{22}$$

если желаемъ первое интегрированіе произвести по y .

Фиг. 25.



Пусть контуръ разсматриваемаго участка проэктируется на плоскость XOY кривою ABC (Фиг. 25). По сдѣланному условію о направленіи нормали n и о знакѣ γ направленіе на контурѣ ABC будетъ такое, какое изображено на чертежѣ. При интегрированіи по y , переменная x считается постоянною, слѣд. надо будетъ взять значенія неопредѣленнаго интеграла:

$$\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = P,$$

для точекъ M_0 и M_1 . въ которыхъ контуръ $ABCA$ пересѣкается прямою, параллельною OY . Поэтому изъ (22):

$$-\int dx \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = -\int (P_1 - P_0) dx, \tag{23}$$

если значками 0 и 1 отмѣтимъ величины, относящіяся къ точкамъ M_0 и M_1 . Но при указанномъ направленіи контура

$$dx_0 = dk_0 \cos (dk_0, x); \quad dx_1 = -dk_1 \cos (dk_1, x); \tag{24}$$

если dk означает элемент контура $ABCA$. Таким образом из (20)–(23) находимъ:

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{\partial P}{\partial z} \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \gamma \right) dS &= \int (P_0 dx_0 - P_1 dx_1) = \\ &= \int \{ P_0 dk_0 \cos (dk_0, x) + P_1 dk_1 \cos (dk_1, x) \} = \\ &= \int P dk \cos (dk, x). \end{aligned}$$

А такъ какъ, очевидно,

$$dk \cos (dk, x) = dl \cos (dl, x) = dx,$$

гдѣ, какъ и прежде, dl элементъ пограничнаго контура для разсматриваемаго участка, то имѣемъ окончательно

$$\iint \left(\frac{\partial P}{\partial z} \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \gamma \right) dS = \int P dx. \tag{25}$$

Такимъ же точно путемъ убѣдимся въ равенствахъ:

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \alpha \right) dS = \int Q dy, \quad \iint \left(\frac{\partial R}{\partial y} \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \beta \right) dS = \int R dz,$$

а слѣд. и въ справедливости равенства (18) для взятаго участка.

Если же на разсматриваемомъ участкѣ нормаль n образуетъ съ OZ уголъ тупой, то косинусъ γ отрицателенъ, а потому равенство (21) замѣняется такимъ:

$$\gamma dS = - dx dy,$$

но зато направление проэкции контура на плоскость XOY будетъ таково, что и равенства (24) замѣнятся противоположными:

$$dx_0 = - dk_0 \cos (dk_0, x); \quad dx_1 = dk_1 \cos (dk_1, x);$$

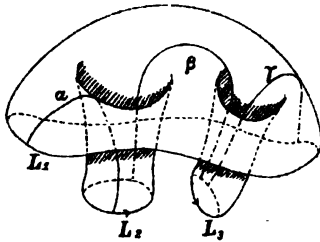
такъ что окончательный результатъ останется безъ перемѣны.

Суммируя результаты для всѣхъ разсмотрѣнныхъ участковъ, добавимъ справедливость теоремы для всей данной поверхности S .

Должно замѣтить, что преобразование интеграловъ по теоремѣ Стокса будетъ возможно и тогда, когда векторъ W (т. е. производныя функций P, Q, R) претерпѣваетъ разрывъ на нѣкоторыхъ линияхъ поверхности S , лишь бы только самъ векторъ V (т. е. функции P, Q, R) на этихъ линияхъ оставался непрерывнымъ. Убѣдиться въ сказанномъ можно путемъ аналогичнымъ тому, которымъ мы доказали въ § 15 подобное положеніе относительно приложимости леммы Грина.

Кромѣ того упомянемъ, что лемма Стокса справедлива и для поверхности перифрактической, т. е. такой, которая ограничена не однимъ контуромъ, а нѣсколькими, такъ какъ такую поверхность всегда можно разсматривать какъ состоящую изъ участковъ неперифрактическихъ, напр. поверхность, изображенная на Фиг. 26 и ограниченная тремя контурами L_1, L_2, L_3 , послѣ проведенія кривыхъ α, β, γ раздѣлится на двѣ части и у каждой изъ этихъ частей будетъ лишь одинъ контуръ.

Фиг. 26.



36. Соленоидальное (трубчатое) поле. Если расходимость D (7) векторіального поля всюду равняется нулю, т. е. если по (7)

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \tag{26}$$

то теченіе векторъ-функции V сквозь любую замкнутую поверхность, не выходящую изъ границъ поля, также обращается въ нуль, какъ это непосредственно слѣдуетъ изъ равенства:

$$\begin{aligned} \iint V \cos(V, n) ds &= \iiint \{ P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z) \} ds = \\ &= \iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv, \end{aligned} \tag{27}$$

гдѣ двойные интегралы распространены на взятую поверхность, а тройной—на объемъ, заключенный внутри поверхности. Само собою разумѣется, что равенство (27) справедливо лишь тогда, когда поверхность не заключаетъ въ себѣ границъ поля.

Проведемъ внутри поля какой либо контуръ и черезъ точки, лежащія на этомъ контурѣ, построимъ линіи направленія или векторіальныя нити. Геометрическимъ мѣстомъ такихъ нитей будетъ нѣкоторая трубчатая поверхность, носящая названіе векторіальной трубки. Пересѣчемъ векторіальную трубку двумя какими либо поверхностями или діафрагмами и рассмотримъ объемъ, ограниченный трубкою и діафрагмами. Такъ какъ теченіе вектора V сквозь полную поверхность разсматриваемаго тѣла равно нулю, а теченіе сквозь боковую поверхность (поверхность векторіальной трубки) само по себѣ нуль, ибо здѣсь всюду векторъ V и нормаль къ поверхности взаимноперпендикулярны, то слѣд. теченія вектора V сквозь діафрагмы на ружу тѣла равны между собою и противоположны по знаку. Допустимъ теперь, что мы взяли бесконечно тонкую векторіальную трубку, и что діафрагмы проведены ортогонально къ поверхности трубки. Тогда, если площади діафрагмъ означимъ соотвѣтственно $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$, теченіе черезъ одну изъ нихъ, скажемъ $d\sigma_1$, у которой внѣшняя нормаль совпадаетъ съ направлениемъ вектора V , выразится такъ

$$V_1 d\sigma_1;$$

здѣсь V_1 значеніе векторъ-функціи въ той точкѣ, гдѣ проведена діафрагма. Теченіе же черезъ другую діафрагму будетъ соотвѣтственно

$$- V_2 d\sigma_2.$$

Но по сказанному выше

$$V_1 d\sigma_1 - V_2 d\sigma_2 = 0;$$

слѣдовательно

$$V_1 d\sigma_1 = V_2 d\sigma_2 = const.,$$

т. е. для бесконечно тонкой векторіальной трубки произведеніе изъ площади поперечнаго сѣченія трубки на значеніе векторъ-функціи въ томъ же мѣстѣ есть величина постоянная вдоль всей трубки. Бесконечно тонкую векторіальную трубку называютъ соленоидомъ, а упомянутое выше постоянное произведеніе — напряженіемъ соленоида. Поэтому также и условіе (26) называютъ соленоидальнымъ, а само поле, для котораго соблюдается условіе (26), соленоидальнымъ или трубчатымъ полемъ.

Все соленоидальное поле можетъ быть заполнено соленоидами съ одинаковыми напряженіями, и тогда для опредѣленія теченія векторъ-функціи сквозь какую-либо поверхность достаточно счесть тѣ соленоиды, которые встрѣчаютъ поверхность нечетное число разъ.

Изъ того обстоятельства, что напряженіе соленоида $V ds$ вдоль его постоянно, вытекаетъ, что соленоидъ не можетъ окончиться внутри поля, а или идетъ отъ границы поля до границы, или замыкается самъ въ себя.

Когда въ полѣ построены соленоиды одинаковаго напряженія, то тѣмъ самымъ геометрически опредѣлена векторъ-функція V для любой точки поля—величина ея обратно пропорціональна площади поперечнаго сѣченія соленоида, а направленіе совпадаетъ съ направлениемъ нитей на боковой поверхности соленоида.

Замѣтимъ, что для поля, соответствующаго вектору W , моменту завитія первоначальнаго вектора V , по (16) всегда выполняется соленоидальное условіе (26).

Образцомъ соленоидальнаго поля можетъ служить примѣръ а) § 29. т. е. распредѣленіе скоростей по точкамъ твердаго тѣла. Здѣсь въ общемъ случаѣ соленоиды идутъ изъ безконечности въ безконечность по гелисамъ; для случая движенія поступательнаго гелисы спрямляются; для случая чистаго вращенія всѣ соленоиды идутъ по окружностямъ и замыкаются сами въ себя. Моментъ завитія поля постояненъ по величинѣ и по направле- нію; онъ параллеленъ всюду оси z -овъ (центральной оси) и равенъ 2ω . удвоенной угловой скорости.

37. Ламеллярное (пластинчатое) поле. Если завитіе векторіальнаго поля (16) всюду равно нулю, то прозкція P , Q , R векторъ-функція V могутъ быть представлены какъ производныя отъ нѣкоторой функція φ по соответствующимъ координатамъ

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad R = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (28)$$

Другими словами, тогда векторъ V представляетъ собою дифференціальныи параметръ перваго порядка (§ 2) отъ функція $\varphi(x, y, z)$, называемой потенціаломъ вектора.

Когда функція φ однозначна, то работа вектора V на любомъ контурѣ, лежащемъ внутри поля, равна нулю. На самомъ дѣлѣ, по (28) въ нашемъ случаѣ дифференціальное выраженіе

$$P dx + Q dy + R dz$$

обращается въ полный дифференціалъ $d\varphi$, а потому интегралъ

$$\int (P dx + Q dy + R dz), \quad (1.)$$

выражающей работу на данном контуре, будет нулем, если только мы вернемся к начальной точке контура с тем же значением φ , с которым мы вышли; а это будет всегда, если функция φ однозначна.

Точно также, при однозначности φ , работа вектор-функции V на разомкнутой кривой зависит лишь от положения концов кривой, а не от формы кривой между этими концами, так как эта работа выразится разностью

$$\varphi - \varphi_0,$$

где φ и φ_0 значения потенциала вектора для точек в начале и в конце кривой.

Условимся раз навсегда за положительное направление векториальной нити принимать направление самой вектор-функции V ; тогда нетрудно убедиться, что по направлению векториальной нити потенциал φ непрерывно возрастает. На самом деле, тогда работа вектора V на нити всегда положительна, но, по сказанному выше, эта работа выражается разностью $\varphi - \varphi_0$, след. $\varphi > \varphi_0$, что и требовалось доказать.

По (28) течение вектора V сквозь какую либо площадку dS с нормалью n представится теперь, на основании § 5, так:

$$\frac{d\varphi}{dn} dS,$$

где $\frac{d\varphi}{dn}$ производная от φ по направлению нормали n . Подобным образом течение V сквозь какую либо поверхность выразится интегралом:

$$\iint \frac{d\varphi}{dn} dS, \tag{29}$$

распространенным на эту поверхность.

Если припомним свойства дифференциального параметра первого порядка от функции точки, изложенные в §§ 2—5, то увидим, что в поле без завихрения, т. е. при условии:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \tag{30}$$

может быть построено семейство эквипотенциальных поверхностей или поверхностей уровня, ортогональных к линиям направления, векториальным нитям. Если параметры этих поверхностей последовательно возрастают на одну и ту же бесконечно малую величину, то построенное

семе́йство по́верхностей геометрически опреде́ляетъ данную векторъ-функцію V , такъ какъ направле́нiе V совпадаетъ съ положительною нормалью къ соответственной поверхности уровня, а длина, по теоремѣ лорда Кельвина (§ 3), обратно пропорциональна разстоянiю между смежными поверхностями уровня.

Основываясь на такомъ постро́енiи, называютъ поле безъ завитiя ламелларнымъ или пластинчатымъ.

38. Лапласово поле. Если для векторiального поля соблюдаются одновременно оба условiя (26) и (30), т. е. если поле и соленоидальное, и ламелларное, то φ , потенциалъ вектора, удовлетворяетъ по (26) и (28) уравненiю Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = 0. \quad (31)$$

По́тому и само поле называется тогда Лапласовымъ.

Векторъ-функція въ Лапласовомъ поле можетъ быть охарактеризована, какъ системою соленоидовъ, такъ и системою безконечно тонкихъ пластинокъ, ограниченныхъ смежными поверхностями уровня, причемъ, конечно, поверхности уровня и боковыя поверхности соленоидовъ будутъ взаимно ортогональны.

Примѣръ Лапласова поля мы уже имѣли, когда говорили о потенциалѣ силъ, дѣйствующихъ по закону Ньютона.

Положимъ, что семе́йство эквипотенциальныхъ поверхностей ламелларнаго поля имѣетъ своимъ уравненiемъ:

$$f(x, y, z) = C, \quad (32)$$

гдѣ C произвольный параметръ, постоянный для каждой поверхности въ отдѣльности. Посмотримъ, какова должна быть форма функціи f для того, чтобы это ламелларное поле могло быть Лапласовымъ. Въ такомъ случаѣ на каждой изъ поверхностей (32) Лапласовъ потенциалъ φ долженъ оставаться постояннымъ, т. е.

$$\varphi = \text{const}(C) = \omega(C). \quad (33)$$

Дифференцируя это равенство, получимъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial C} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Дифференцируя еще разъ, найдемъ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial C^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \omega}{\partial C} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Подобнымъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial C^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \omega}{\partial C} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial C^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial \omega}{\partial C} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Складывая, получимъ:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \omega}{\partial C^2} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \right\} + \frac{\partial \omega}{\partial C} \nabla^2 f.$$

Но по условию (31)

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

слѣдовательно

$$\frac{\nabla^2 f}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = - \frac{1}{\frac{\partial \omega}{\partial C}} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial C^2} = \text{funct.}(C),$$

т. е. лѣвая часть равенства должна выражаться какъ функція одного только параметра C .

Пусть дѣйствительно

$$\frac{\nabla^2 f}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = \psi(C).$$

Тогда Лапласовъ потенциалъ $\varphi = \omega(C)$, получится, какъ интегральное уравненіе

$$\frac{\frac{\partial^2 \omega}{\partial C^2}}{\frac{\partial \omega}{\partial C}} = - \psi(C).$$

Первая квадратура даетъ

$$\log \frac{\partial \omega}{\partial C} = - \int \psi(C) dC$$

или

$$\frac{\partial \omega}{\partial C} = e^{-\int \psi(C) dC},$$

откуда окончательно

$$\varphi = \omega(C) = \int e^{-\int \psi(C) dC} dC.$$



ГЛАВА VI.

Односвязное Лапласово поле.

39. Гармоническая функция. Функция точки, обладающая внутри данного объема конечнымъ, непрерывнымъ и однозначнымъ дифференціальнымъ параметромъ перваго порядка и удовлетворяющая въ любой точкѣ объема Лапласову уравненію (31) § 38, называется объемною гармоническою функциею или гармоническою функциею трехъ аргументовъ. По самому опредѣленію гармоническая функция непрерывна внутри даннаго объема, конечна, если конечны ея значенія на границахъ объема, но она можетъ быть и однозначною, и многозначною въ зависимости отъ свойствъ даннаго объема.

Дифференціальный параметръ перваго порядка отъ гармонической функции φ будемъ для краткости называть векторомъ съ потенциаломъ φ . По § 38 для этого вектора $V \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ данный объемъ представляетъ собою Лапласово поле.

40. Діафрагма. Объемъ односвязный и многосвязный. Исчезающей контуръ. Условимся называть діафрагмою всякую поверхность, которая пересѣкаетъ данный объемъ и ограничена линіями, лежащими на предѣльныхъ поверхностяхъ объема. Если объемъ любую діафрагмою дѣлится на двѣ отдѣльныя части, такъ что нельзя точку, лежащую въ одной части, непрерывнымъ движеніемъ перевести въ другую часть иначе, какъ проведя эту точку предварительно черезъ пограничную поверхность, то такой объемъ будемъ называть односвязнымъ. Если же существуютъ такія діафрагмы, которыя не нарушаютъ связности объема, такъ что точку, лежащую гдѣ либо въ объемѣ, не смотря на діафрагму, можно непрерывно перевести въ любое мѣсто объема, не выводя изъ границъ объема, то такой объемъ носить названіе многосвязнаго.

Назовем исчезающимъ всякій контуръ, который непрерывнымъ измѣненіемъ, не выводящимъ его изъ предѣловъ даннаго объема, можетъ быть стянутъ въ точку. Тогда односвязный объемъ можно определить какъ такой, въ которомъ любой контуръ будетъ исчезающимъ.

Въ настоящей главѣ мы займемся раскрытіемъ свойствъ гармонической функціи внутри нѣкотораго односвязнаго объема. Другими словами, мы займемся изученіемъ свойства односвязнаго Лапласова поля, такъ какъ для дифференціального параметра перваго порядка или, короче, вектора съ гармоническимъ потенциаломъ данный объемъ будетъ односвязнымъ Лапласовымъ полемъ.

41. Теорема Грина. Для изслѣдованія гармонической функціи мы будемъ главнымъ образомъ пользоваться или свойствами соленоидовъ (§ 36), или чисто аналитическимъ преобразованіемъ, носящимъ названіе теоремы Грина.

Теорема эта непосредственно вытекаетъ изъ леммы § 15. Для вывода ея воспользуемся равенствомъ (5) § 15:

$$\begin{aligned} & \iiint \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dv = \\ & = - \iint \left\{ f_1 \cos(n_i, x) + f_2 \cos(n_i, y) + f_3 \cos(n_i, z) \right\} dS, \end{aligned} \quad (1)$$

гдѣ тройной интеграль распространяетъ на нѣкоторый объемъ, а двойной— на поверхность, ограничивающую этотъ объемъ; n_i означаетъ внутреннюю нормаль.

Положимъ теперь, что

$$f_1 = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad f_2 = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad f_3 = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (2)$$

причемъ функціи ψ и φ должны удовлетворять условіямъ приложимости преобразованія (1), т. е. функція ψ и первыя производныя отъ φ должны быть конечны, непрерывны и однозначны на поверхности объема, а функція ψ съ ея первыми производными, первыя и вторыя производныя отъ φ конечны, непрерывны и однозначны внутри объема. По замѣчанію въ концѣ § 15 послѣднее условіе допускаетъ исключеніе, а именно первыя производныя отъ ψ и вторыя отъ φ могутъ претерпѣвать разрывъ на нѣкоторыхъ поверхностяхъ внутри объема, если только соответственно сама функція ψ и первыя производныя отъ φ остаются на этихъ поверхностяхъ непрерывными.

Подставляемъ значенія (2) въ формулу (1) и находимъ:

$$\begin{aligned} & \iiint \psi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) dv + \iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dv = \\ & = - \iint \psi \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n_i, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n_i, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(n_i, z) \right] dS. \end{aligned}$$

Если же воспользуемся символомъ ∇^2 для дифференціального параметра второго порядка, а также понятіемъ о производной по нормали (§ 5), то найдемъ

$$\begin{aligned} & \iiint \psi \nabla^2 \varphi dv + \iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dv = \\ & = - \iint \psi \frac{d\varphi}{dn_i} dS, \end{aligned} \tag{3}$$

первую форму теоремы Грина. Здѣсь $\frac{d\varphi}{dn_i}$ означаетъ производную по внутренней нормали къ поверхности.

Если функция ψ выполняетъ условія, наложенныя на φ , и наоборотъ, то вмѣсто (3) изъ (1) подстановкою

$$f_1 = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad f_2 = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad f_3 = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

получимъ:

$$\begin{aligned} & \iiint \varphi \nabla^2 \psi dv + \iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dv = \\ & = - \iint \varphi \frac{d\psi}{dn_i} dS. \end{aligned} \tag{4}$$

Если же условія, наложенныя на функции, ихъ первыя и вторыя производныя, выполняются и тою, и другою функциями одновременно, то справедливы обѣ формулы (3) и (4), а потому правильно и слѣдствіе изъ нихъ:

$$\iiint (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dv = - \iint \left(\psi \frac{d\varphi}{dn_i} - \varphi \frac{d\psi}{dn_i} \right) dS, \tag{5}$$

полученное вычитаніемъ (4) изъ (3). Это вторая форма Гриновой теоремы.

Наконецъ въ томъ же случаѣ, полагая $\psi = \varphi$, изъ (3) выводимъ третью форму теоремы Грина:

$$\begin{aligned} & \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dv = \\ & = - \iiint \varphi \nabla^2 \varphi dv - \iint \varphi \frac{d\varphi}{dn_i} dS. \end{aligned} \quad (6)$$

42. Однозначность гармонической функціи въ односвязномъ объемѣ. По опредѣленію любой контуръ въ односвязномъ объемѣ исчезающій (§ 40), слѣд. работа дифференціального параметра перваго порядка данной гармонической функціи φ или, короче, работа вектора съ потенциаломъ φ на любомъ контурѣ, проходящемъ черезъ взятую точку поля, при непрерывномъ измѣненіи контура можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины. Работа же эта по § 37 представляется разностью $\varphi - \varphi_0$, гдѣ φ_0 значеніе потенциала, съ которымъ мы вышли изъ взятой точки, а φ значеніе, съ которымъ вернулись въ неё. При непрерывномъ измѣненіи контура разность $\varphi - \varphi_0$ или сама измѣняется непрерывно, или остается равною постоянной величинѣ, которая для исчезающаго контура можетъ быть только нулемъ. Первое предположеніе не справедливо, такъ какъ тогда и сама гармоническая функціи и ея векторъ были бы бесконечно многозначны, слѣд. возможно лишь второе предположеніе:

$$\varphi - \varphi_0 = 0 \quad \text{или} \quad \varphi = \varphi_0,$$

т. е. рассматриваемая гармоническая функціи однозначна.

Иначе въ этомъ убѣждаемся съ помощью теоремы Стокса (§ 35). Всякій исчезающій контуръ можно затянуть поверхностью, лежащею внутри даннаго объема, а тогда по леммѣ Стокса работа вектора съ потенциаломъ φ на данномъ контурѣ или, что тоже, разность $\varphi - \varphi_0$ равняется теченію момента завитія этого вектора сквозь построенную поверхность. Но въ Лапласовомъ полѣ завитіе равно нулю, слѣд. какъ двойной интегралъ, выражающій теченіе, такъ и равная ему разность $\varphi - \varphi_0$, обращаются въ нуль, т. е. функціи φ однозначна.

Изъ однозначности функціи φ вытекаетъ, что соленоиды рассматриваемаго поля не могутъ замыкаться сами въ себя, а непремѣнно идутъ отъ границы поля до границы. На самомъ дѣлѣ, если бы какой нибудь со-

леноидъ замкнулся, то и векторіальныя нити, лежащія на его поверхности, были бы замкнутыми; но тогда функція φ , непрерывно возрастающая (§ 37) вдоль по векторіальной нити, перестала бы быть однозначною.

43. Отсутствие внутри поля максимума или минимума гармонической функціи. Гармоническая функція φ не можетъ имѣть ни максимума, ни минимума внутри поля; въ противномъ случаѣ оттуда, гдѣ функція φ имѣетъ максимумъ или минимумъ, должны были бы начинаться или тамъ должны были бы оканчиваться векторіальныя нити, вдоль которыхъ идетъ возрастаніе функціи φ , а тогда въ томъ же мѣстѣ внутри поля должны были бы начинаться или оканчиваться и соленоиды, что по § 36 невозможно.

Въ сказанномъ можно убѣдиться еще иначе. Въ сосѣдствѣ съ тѣмъ протяженіемъ, гдѣ функція φ принимаетъ максимальныя или минимальныя значенія, строимъ замкнутую поверхность. Во всѣхъ точкахъ такой поверхности производная $\frac{d\varphi}{dn_i}$ должна имѣть одинъ и тотъ же знакъ (положительный для максимума, отрицательный для минимума). Но въ такомъ случаѣ интеграль

$$\iint \frac{d\varphi}{dn_i} dS,$$

представляющій собою по (29) § 37 теченіе вектора съ потенциаломъ φ сквозь построенную поверхность, не можетъ равняться нулю, какъ этого требуетъ соленоидальное условіе (31) § 38, выполняемое векторомъ съ гармоническимъ потенциаломъ.

44. Отсутствие внутри поля максимума для векторъ-функціи съ гармоническимъ потенциаломъ. Замѣтимъ прежде всего, что, если функція φ удовлетворяетъ уравненію Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{7}$$

то и производная отъ φ по любому количеству ξ , входящему въ составъ этой функціи, будетъ удовлетворять тому же уравненію (7). На самомъ дѣлѣ, дифференцируя лѣвую часть уравненія (7) по ξ и допуская, что порядокъ дифференцированія можно измѣнить, находимъ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = 0,$$

что и подтверждаетъ сказанное. Отсюда вытекаетъ, что, если дифферен-

ціальний параметр первого порядка отъ функции $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ будетъ конеченъ и однозначенъ въ данномъ объемѣ, то функция $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ будетъ новою гармонической функциею для того же объема.

На основаніи только что сдѣланнаго замѣчанія нетрудно показать, что дифференціальный параметр первого порядка отъ гармонической функции φ или векторъ-функция V съ гармоническимъ потенциаломъ φ не можетъ имѣть максимума внутри поля. Допустимъ противное, и пусть въ точкѣ M_0 векторъ-функция V принимаетъ значеніе V_0 , максимальное относительно смежныхъ. Возьмемъ направленіе оси z -овъ такъ, чтобы она была параллельна и одинаково направлена съ V_0 , тогда координаты V_0 будутъ:

$$V_0 \cos(V_0, x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad V_0 \cos(V_0, y) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

$$V_0 \cos(V_0, z) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0.$$

и слѣд. самъ векторъ V_0 равняется $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0$. Но по сказанному раньше функция $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ не можетъ имѣть максимума внутри поля, слѣд. въ сосѣдствѣ съ точкою M_0 всегда найдется такая точка M_1 , для которой функция $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ принимаетъ значеніе $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_1$ большее, чѣмъ $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0$, а тогда и подавно

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_1^2} > \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0,$$

т. е. значеніе векторъ-функции V въ точкѣ M_1 больше, чѣмъ V_0 , что противорѣчитъ условію.

Такимъ образомъ максимальныя значенія вектора V могутъ лежать лишь на границахъ поля, но должно отмѣтить, что ничто не препятствуетъ вектору V принимать внутри поля минимальныя значенія, а потому и обращаться въ нуль.

45. Среднее значеніе гармонической функции на поверхности сферы. Построимъ внутри разсматриваемаго объема сферу произвольнаго радіуса r такъ, чтобы весь объемъ сферы входилъ въ составъ поля гармонической функции φ . Тогда теченіе вектора V съ потенциаломъ φ сквозь построенную сферическую поверхность должно быть нулемъ, т. е. по (29)

$$\iint \frac{d\varphi}{dn} dS = 0. \tag{8}$$

Но для сферы, если n внутренняя нормаль

$$\frac{d\varphi}{dn} = - \frac{d\varphi}{dr},$$

гдѣ $\frac{d\varphi}{dr}$ производная по направлению радиуса r . Съ другой стороны элементъ поверхности сферы

$$dS = r^2 d\omega,$$

гдѣ $d\omega$ элементъ сферы съ единичнымъ радиусомъ.

Такимъ образомъ принимая во вниманіе, что радиусъ r , какъ постоянное при интеграціи, можно вынести за знакъ интеграла, изъ (8) получаемъ:

$$- r^2 \iint \frac{d\varphi}{dr} d\omega = 0,$$

или

$$\iint \frac{d\varphi}{dr} d\omega = 0.$$

Равенство это можно представить подѣ такимъ видомъ:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{4\pi r^2} \iint \varphi r^2 d\omega \right\} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{4\pi r^2} \iint \varphi dS \right\} = 0. \tag{9}$$

Найденная формула показываетъ, что среднее значеніе гармонической функціи φ на поверхности сферы не зависитъ отъ радиуса сферы. По условію вся сфера лежитъ внутри поля, слѣд. мы имѣемъ право принять r количествомъ безконечно малымъ. Но среднее значеніе φ на безконечно малой сферической поверхности въ предѣлѣ равняется φ_0 , значенію функціи φ для центра сферы. Такимъ образомъ изъ (9) для разсматриваемой сферы вытекаетъ

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint \varphi dS = \varphi_0, \tag{10}$$

т. е. среднее значеніе гармонической функціи на поверхности шара, составляющаго часть поля, равно значенію этой функціи для центра шара.

Изъ этого предложенія непосредственно вытекаетъ теорема § 43. На самомъ дѣлѣ, пусть въ точкѣ M_0 функція φ имѣетъ максимальное или ми-

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Университета Св. Владиміра
Ректоръ Н. Бобрецкій.
