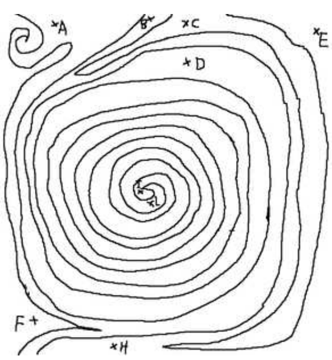
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 39

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 39.1. Wir betrachten auf dem weißen Teil des angegebenen Labyrinths die Äquivalenzrelation, die dadurch festgelegt ist, dass zwei Punkte als äquivalent gelten, wenn man durch eine stetige Bewegung (also ohne Sprünge) von einem Punkt zum anderen Punkt gelangen kann. Bestimme, welche der markierten Punkte zueinander äquivalent sind. Skizziere die Äquivalenzklassen des Labyrinths durch verschiedene Farben.



Übungsaufgaben

Aufgabe 39.2. In der Klasse $7c$ herrscht ein rigides Cliquensystem, jeder Schüler und jede Schülerin gehört genau einer Clique an. Es gibt die „Borussen-Bande“ (Heinz Ngolo, Mustafa Müller, Veronika Zaitsev, Bernd Buxtehude, Paola Rodrigues und Peter Dembele), die „Eisfreunde Sonne“ (Lucy Sonnenschein, Fred Feuerstein, Natascha Schleckmaul, Frodo Gletscherzunge) die „Nutty Nerds“ (Gabi Hochster, Primo von Hinten), das „Anarcho-Syndikat“ (Anna-Lena Müller, Annegret Maier, Ann-Kathrin Schmitt, Anabelle Belami, Antoine de la Playa, Arndt MacDermott), die „Lucky Loosers“ (Yogi Nanging, Manfred Trutzenburg, Roberta Falstaff, Dörte Waterkant), die „Cauchy-Zwillinge“ (Carmen Cauchy, Conchita Cauchy), sowie fünf weitere Einzelpersonen, die für sich jeweils eine Clique bilden. Die Zugehörigkeit zur gleichen Clique definiert eine Äquivalenzrelation in der Klasse $7c$.

(1) Bestimme [Natascha Schleckmaul].

(2) Bestimme [Ann-Kathrin Schmitt] $\cap$ [Roberta Falstaff].
(3) Bestimme {Ann-Kathrin Schmitt} $\cap$ {Anabelle Belami}.
(4) Bestimme [Ann-Kathrin Schmitt] $\cap$ [Anabelle Belami].
(5) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es in der Klasse?
(6) Wie viele Elemente besitzt die Quotientenmenge zu dieser Äquivalenzrelation?
(7) Um das Klima in der Klasse zu verbessern, ruft Frau Maier-Sengupta ein Treffen zusammen, zu dem jede Clique einen Repräsentanten schickt. Wie viele Möglichkeiten für ein solches Treffen gibt es? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die fünf Einzelpersonen zusammen eine neue Clique bilden und Antoine de la Playa das Anarcho-Syndikat verlässt und sich der Eisfreunde Sonne anschließt?

Aufgabe 39.3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die Relation auf V, die durch

$$v \sim w, \text{ falls es ein } \lambda \in K, \lambda \neq 0, \text{ mit } v = \lambda w \text{ gibt}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Was sind die Äquivalenzklassen?

Aufgabe 39.4. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$.

(1) Wir betrachten auf dem K^n die Relation R, die durch vRw gegeben ist, falls es eine lineare Abbildung $\varphi\colon K^n \to K^n$ mit $\varphi(v) = w$ gibt. Welche Eigenschaften einer Äquivalenzrelation sind erfüllt, welche nicht?
(2) Wir betrachten auf dem K^n die Relation S, die durch vSw gegeben ist, falls es eine bijektive lineare Abbildung $\varphi\colon K^n \to K^n$ mit $\varphi(v) = w$ gibt. Welche Eigenschaften einer Äquivalenzrelation sind erfüllt, welche nicht?

Aufgabe 39.5. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Wir betrachten auf dem K^n die Äquivalenzrelation $\sim$, die durch $v \sim w$ gegeben ist, falls es eine bijektive lineare Abbildung $\varphi\colon K^n \to K^n$ mit $\varphi(v) = w$ gibt. Bestimme die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation.

Aufgabe 39.6. Es sei $V = K^n$ ein Vektorraum und $m \in \mathbb{N}$. Betrachte auf der Produktmenge V^m die folgende Relation.

$$(v_1, \ldots, v_m) \sim (w_1, \ldots, w_m), \text{ falls } \langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle .$$

Die beiden Vektorentupel stehen also in Relation zueinander, wenn sie den gleichen Untervektorraum erzeugen. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Man gebe eine Bijektion zwischen der zugehörigen Quotientenmenge und der Menge der Untervektorräume von V, die durch m Vektoren erzeugt werden können.

Aufgabe 39.7. Sei B ein Blatt Papier (oder ein Taschentuch). Man versuche, sich die folgenden Äquivalenzrelationen auf B und die zugehörige Identifizierungsabbildungen vorzustellen (möglichst geometrisch).

(1) Die vier Eckpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(2) Alle Randpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(3) äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(4) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand und jeder Punkt des oberen Randes ist äquivalent zu seinem vertikal gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(5) Jeder Punkt des Randes ist äquivalent zu seinem punktsymmetrisch (bezüglich des Mittelpunktes des Blattes) gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(6) Sei K ein Kreis (d.h. eine Kreislinie) auf dem Blatt. Alle Kreispunkte seien untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(7) Es gebe zwei Punkte $P \neq Q$, die untereinander äquivalent seien, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(8) Sei H die horizontale Halbierungsgerade des Blattes. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie achsensymmetrisch zu H sind.

AUFGABE 39.8. Es sei K ein angeordneter Körper und

$$K \longrightarrow K_{\geq 0},\, x \longmapsto |x|\,,$$

die Betragsabbildung. Zeige, dass man diese Abbildung als Quotientenabbildung zur Äquivalenzrelation $\sim$ auf K auffassen kann, für die $x \sim y$ bei $x = \pm y$ gilt.

AUFGABE 39.9. Es sei

$$f\colon M \longrightarrow N$$

eine surjektive Abbildung mit der zugehörigen Äquivalenzrelation $\sim$ auf M im Sinne von Lemma 38.9. Es sei Q die Quotientenmenge zu $\sim$ mit der kanonischen Projektion $p\colon M \to Q$. Zeige, dass es eine bijektive Abbildung

$$\psi\colon Q \longrightarrow N$$

mit

$$\varphi = \psi \circ p$$

gibt.

AUFGABE 39.10. Es sei

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^m$$

eine surjektive lineare Abbildung mit dem Kern $U \subseteq K^n$. Es sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf K^n zu diesem Untervektorraum im Sinne von Aufgabe 38.10 und sei

$$p\colon K^n \longrightarrow K^n/\sim$$

die zugehörige Quotientenabbildung. Zeige, dass es nach Lemma 39.12 (5) eine Abbildung

$$\psi\colon K^n/\sim \longrightarrow K^m$$

mit

$$\varphi = \psi \circ p$$

gibt. Zeige, dass ψ bijektiv ist.

Aufgabe 39.11. Beschreibe typische Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, die durch die Additionsabbildung

$$+\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

im Sinne von Lemma 38.9 gegeben ist.

Aufgabe 39.12. Skizziere den Graphen der Addition

$$+\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ (x, y) \longmapsto x + y.$$

Aufgabe 39.13. Zeige, dass die Addition

$$+\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

eine lineare Abbildung ist. Wie sieht die Matrix dieser Abbildung bezüglich der Standardbasis aus?

Aufgabe 39.14. Beschreibe typische Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die durch die Multiplikationsabbildung

$$\cdot\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

im Sinne von Lemma 38.9 gegeben ist. Wie sieht die Äquivalenzklasse zu $(6, 20)$ aus? Markiere in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit unterschiedlichen Farben unterschiedliche Äquivalenzklassen. Gibt es Äquivalenzklassen, die nur aus einem Element bestehen? Gibt es Äquivalenzklassen, die aus unendlich vielen Elementen bestehen? Welche Äquivalenzklassen bestehen aus zwei Elementen?

Aufgabe 39.15. Skizziere den Graphen der Multiplikation

$$\cdot\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

Aufgabe 39.16.*

Wir betrachten auf $\mathbb{N}_+$ die Relation $\sim$, die durch

$$m \sim n$$

festgelegt ist, falls m eine Potenz von n und n eine Potenz von m teilt.

(1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Bestimme, welche der folgenden Elemente zueinander äquivalent sind, welche nicht.

$$100,\ 1000,\ 9,\ 125,\ 500,\ 27,\ 10,\ 210\,.$$

(3) Es sei Q die Quotientenmenge zu dieser Äquivalenzrelation und es sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen mit der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{P})$. Zeige, dass es eine natürliche Abbildung
$$\varphi\colon \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{P})$$
gibt, die zu einer injektiven Abbildung
$$\tilde{\varphi}\colon Q \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{P})$$
führt. Ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv?

(4) Wie sieht ein besonders einfaches Repräsentantensystem für die Äquivalenzrelation aus?

Es seien $\sim_1$ und $\sim_2$ Äquivalenzrelationen auf der Menge M. Man sagt, dass $\sim_1$ eine Verfeinerung von $\sim_2$ ist, wenn aus $x \sim_1 y$ stets $x \sim_2 y$ folgt.

Aufgabe 39.17. Wir betrachten auf der Menge aller höheren Säugetiere die Äquivalenzrelationen, die durch „gehören zur gleichen Gattung“, „gehören zur gleichen Familie“, „gehören zur gleichen Art“, „gehören zur gleichen Klasse“, „gehören zur gleichen Ordnung“ gegeben sind. Welche Äquivalenzrelation ist eine Verfeinerung von welcher Äquivalenzrelation? Man gebe für je zwei dieser Äquivalenzrelationen Tiere an, die bezüglich der einen Relation äquivalent sind, aber nicht bezüglich der anderen. Wie viele Äquivalenzklassen besitzt die Äquivalenzrelation zur Ordnung?

Aufgabe 39.18. Es sei M eine Menge und seien $\sim_1$ und $\sim_2$ Äquivalenzrelationen auf M mit den zugehörigen kanonischen Abbildungen
$$p_1\colon M \longrightarrow Q_1$$
und
$$p_2\colon M \longrightarrow Q_2 .$$
Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $\sim_1$ ist eine Verfeinerung von $\sim_2$.
(2) Für die Äquivalenzklassen zu jedem Element $x \in M$ gilt $[x]_1 \subseteq [x]_2$.
(3) Es ist (als Teilmengen von $M \times M$)
$$\sim_1 \subseteq \sim_2 .$$
(4) Es gibt eine Abbildung
$$\psi\colon Q_1 \longrightarrow Q_2$$
mit $\psi \circ p_1 = p_2$.

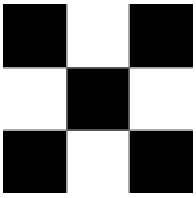
Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 39.19. (2 Punkte)

Es sei R eine Relation zwischen den Mengen M und N. Wir definieren auf M die Relation S durch aSb, wenn für alle $x \in N$ die Beziehung aRx genau dann gilt, wenn bRx gilt. Zeige, dass S eine Äquivalenzrelation auf M ist.

Aufgabe 39.20. (3 Punkte)

Betrachte die Schachfiguren Turm, Läufer, Pferd und Esel zusammen mit ihren erlaubten Zügen auf einem 8×8-Schachbrett. Ein Esel darf dabei pro Zug einen Doppelschritt nach vorne, nach hinten, nach rechts oder nach links machen. Jede dieser Figuren definiert eine Äquivalenzrelation auf den 64 Feldern, indem zwei Felder als äquivalent angesehen werden, wenn das eine Feld von dem anderen Feld aus mit dieser Figur in endlich vielen Zügen erreichbar ist. Beschreibe für jede dieser Schachfiguren die zugehörige Äquivalenzrelation und ihre Äquivalenzklassen. Wie sieht es auf einem 3×3-Schachbrett aus?



Aufgabe 39.21. (1 Punkt)

Im Portemonnaie befinden sich vier 2-Euro-Münzen, sechs 1-Euro-Münzen, drei 50-Cent-Münzen, zwei 20-Cent-Münzen, eine 10-Cent-Münze, keine 5-Cent-Münze, fünf 2-Cent-Münzen und acht 1-Cent-Münzen. Wir betrachten auf dieser Münzmenge diejenige Äquivalenzrelation, bei der zwei Münzen als äquivalent gelten, wenn sie den gleichen Münzwert haben. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es? Wie viele Elemente besitzt die Quotientenmenge?

Aufgabe 39.22. (3 Punkte)

Es seien $\sim_1$ und $\sim_2$ Äquivalenzrelationen auf der Menge M mit den zugehörigen kanonischen Abbildungen

$$p_1\colon M \longrightarrow Q_1$$

und

$$p_2\colon M \longrightarrow Q_2.$$

Es sei $\sim$ der Durchschnitt der beiden Äquivalenzrelationen mit der zugehörigen kanonischen Projektion

$$p\colon M \longrightarrow Q.$$

Zeige, dass es eine injektive Abbildung

$$\psi\colon Q \longrightarrow Q_1 \times Q_2$$

mit $\psi \circ p = p_1 \times p_2$ gibt.

Aufgabe 39.23. (4 Punkte)

Wir betrachten auf der Menge der Geraden in der Ebene $\mathbb{Q}^2$ die Äquivalenzrelation, die durch die Parallelität von Geraden gegeben ist. Zeige, dass die folgende Menge ein Repräsentantensystem ist: die x-Achse und diejenigen Geraden, die durch den Nullpunkt und einen Punkt der Form $(x, 1)$ mit $x \in \mathbb{Q}$ verlaufen.

Abbildungsverzeichnis