Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 50

Übungsaufgaben

Aufgabe 50.1. Sei A_n eine alternierende Gruppe mit $n \geq 4$. Zeige, dass A_n nicht kommutativ ist.

Aufgabe 50.2. Bestimme sämtliche Matrizen, die den Symmetrien eines Quadrates mit den Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)$ entsprechen. Sehen diese Matrizen für jedes Quadrat (mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt) gleich aus?

Aufgabe 50.3. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit $(1, 0)$ als einem Eckpunkt. Bestimme die (eigentlichen und uneigentlichen) Matrizen, die den Symmetrien an diesem Dreieck entsprechen.

Aufgabe 50.4. Bestimme die Ordnung der ebenen Drehung um 291 Grad.

Aufgabe 50.5.*

Wie viele Elemente besitzt die von der Drehung um 45 Grad, von der Drehung um 99 Grad und von der Zwölfteldrehung erzeugte Untergruppe der Drehgruppe SO_2?

Aufgabe 50.6. Betrachte die Gruppe der Drehungen am Kreis um Vielfache des Winkels $\alpha = 360/12 = 30$ Grad. Welche Drehungen sind Erzeuger dieser Gruppe?

Die nächste Aufgabe verwendet die sogenannte *Kleinsche Vierergruppe*. Dies ist einfach die Produktgruppe $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$.

Aufgabe 50.7. Zeige, dass die Kleinsche Vierergruppe zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe S_4 isomorph ist. Wie sieht eine Realisierung als Untergruppe der Würfelgruppe aus?

Aufgabe 50.8. Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper. Bestimme die Anzahl der Elemente in

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \ .$$

Die folgende Aufgabe verwendet das Zentrum einer Gruppe.

Sei G eine Gruppe. Das *Zentrum* $Z = Z(G)$ von G ist die Teilmenge

$$Z = \{g \in G |\, gx = xg \text{ für alle } x \in G\} \ .$$

Aufgabe 50.9. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass das Zentrum $Z \subseteq G$ ein Normalteiler in G ist. Man bringe das Zentrum in Zusammenhang mit dem Gruppenhomomorphismus

$$\kappa\colon G \longrightarrow \operatorname{Aut}(G),\ g \longmapsto \kappa_g.$$

Was ist das Bild von diesem Homomorphismus, und was besagen die Homomorphiesätze in dieser Situation?

Aufgabe 50.10. Führe folgendes Gedankenexperiment durch: Gegeben sei eine Kugeloberfläche aus Metall und n gleiche Teilchen mit der gleichen positiven Ladung. Die Teilchen stoßen sich also ab. Diese Teilchen werden auf die Kugeloberfläche gebracht, wobei sie sich nach wie vor gegenseitig abstoßen, aber auf der Kugel bleiben. Welche Konfiguration nehmen die Teilchen ein? Müsste sich nicht „aus physikalischen Gründen“ eine „gleichverteilte“ Konfiguration ergeben, in der alle Teilchen gleichberechtigt sind? Müsste es nicht zu je zwei Teilchen P, Q eine Kugelbewegung geben, die eine Symmetrie der Konfiguration ist und die P in Q überführt?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 50.11. (2 Punkte)

Betrachte die Wirkung der Tetraedergruppe auf den vier Eckpunkten eines Tetraeders. Zeige, dass dies eine Isomorphie zwischen der Tetraedergruppe und der alternierenden Gruppe A_4 ergibt.

Aufgabe 50.12. (2 Punkte)

Wie viele Elemente besitzt die von der Drehung um 51 Grad, von der Drehung um 99 Grad und von der Siebteldrehung erzeugte Untergruppe der Drehgruppe SO_2?

Aufgabe 50.13. (3 Punkte)

Betrachte ein regelmäßiges n-Eck und die zugehörige Gruppe der (eigentlichen und uneigentlichen) Symmetrien, also die Diedergruppe D_n. Beschreibe D_n als Untergruppe der Permutationsgruppe S_n. Durch welche Permutationen wird sie erzeugt? Für welche n handelt es sich um eine Untergruppe der alternierenden Gruppe?

Aufgabe 50.14. (2 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathrm{O}_2$ eine endliche Untergruppe der (eigentlichen und uneigentlichen) Bewegungsgruppe der reellen Ebene, und sei $G \not\subseteq \mathrm{SO}_2$. Zeige, dass es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \mathbb{Z}/(2)$$

gibt, dessen Kern eine zyklische Gruppe ist. Schließe, dass die Ordnung von G gerade ist.

Aufgabe 50.15. (3 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$. Zeige:

(1) G ist genau dann abelsch, wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist.
(2) Der Index von $Z(G)$ in G ist keine Primzahl.
(3) Ist G von der Ordnung pq für zwei Primzahlen p und q, so ist G abelsch oder $Z(G)$ trivial.

Aufgabe zum Hochladen

Für die folgende Aufgabe gibt es keinen festen Abgabetermin. Sie gilt so lange, bis eine befriedigende Lösung auf Commons hochgeladen wurde.

Aufgabe 50.16. (10 Punkte)

Schreibe eine Computeranimation, die zeigt, wie sich fünf auf einer Kugeloberfläche platzierte Teilchen mit der gleichen positiven Ladung aufgrund ihrer gegenseitigen Abstoßung bewegen (wobei sie aber auf der Kugeloberfläche bleiben), und welche Endposition (?) sie einnehmen.