Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 27

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 27.1. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

nilpotent ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 27.2. Zeige, dass die komplexe Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

nilpotent ist.

Aufgabe 27.3. Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K. Zeige, dass die fünfte Potenz von M gleich 0 ist, also

$$M^5 = MMMMM = 0.$$

Aufgabe 27.4.*

Es seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ quadratische Matrizen der Länge n. Es gelte $a_{ij} = 0$ für $j \leq i + d$ und $b_{ij} = 0$ für $j \leq i + e$ für gewisse $d, e \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass die Einträge c_{ij} des Produktes AB die Bedingung $c_{ij} = 0$ für $j \leq i + d + e + 1$ erfüllen.

Aufgabe 27.5. Es sei

$$D\colon \mathbb{R}[X]_{\geq m} \longrightarrow \mathbb{R}[X]_{\geq m}$$

die Einschränkung des Ableitungsoperators $P \mapsto P'$ auf die Polynome vom Grad $\leq m$. Zeige, dass D nilpotent ist. Zeige ebenfalls, dass

$$D\colon \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$

nicht nilpotent ist.

Aufgabe 27.6. Es sei V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine injektive lineare Abbildung. Zeige, dass φ nicht nilpotent ist.

Aufgabe 27.7. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Zeige, dass $\varphi^n = 0$ ist, wobei n die Dimension von V bezeichnet.

Aufgabe 27.8. Es sei K ein Körper und es sei V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Zeige, dass 0 der einzige Eigenwert von φ ist.

Aufgabe 27.9.*

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung, die auch diagonalisierbar sei. Zeige

$$\varphi = 0.$$

Aufgabe 27.10. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Was ist die Determinante von φ?

Aufgabe 27.11. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Was ist die Spur von φ?

Aufgabe 27.12.*

Sei K ein Körper.

a) Charakterisiere die nilpotenten 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

über K mit Hilfe von zwei Gleichungen in den Variablen x, y, z, w.

b) Sind die Gleichungen linear?

Aufgabe 27.13.*

a) Es sei M eine 2×2-Matrix, die trigonalisierbar, aber weder diagonalisierbar noch invertierbar ist. Zeige, dass M nilpotent ist.

b) Man gebe ein Beispiel einer 3×3-Matrix M, die trigonalisierbar, aber weder diagonalisierbar noch invertierbar, noch nilpotent ist.

Aufgabe 27.14. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung $\varphi\colon K^3 \to K^3$, die trigonalisierbar ist, deren Spur und Determinante gleich 0 ist, und die nicht nilpotent ist.

Aufgabe 27.15. Zeige, dass die im Beweis zu Lemma 27.11 konstruierten Untervektorräume U_i im Allgemeinen nicht φ-invariant sind.

Aufgabe 27.16. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Der Kern von φ sei eindimensional. Es sei

$$V_i = \operatorname{kern} \varphi^i$$

und s die minimale Zahl mit

$$\varphi^s = 0.$$

(1) Zeige, dass alle V_i, $1 \leq i \leq s$, eine direkte Zerlegung

$$V_i = V_{i-1} \oplus U_i$$

mit U_i eindimensional haben.

(2) Zeige, dass die Einschränkungen

$$\varphi\colon U_i \longrightarrow V_{i-1}$$

für $1 < i < s$ bijektiv sind.

(3) Zeige, dass s mit der Dimension von V übereinstimmt.

Aufgabe 27.17. Es sei
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
ein nilpotenter Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Es sei
$$V_i := \operatorname{kern} \varphi^i .$$
Zeige, dass für die Dimensionsprünge die Beziehung
$$\dim (V_i) - \dim (V_i - 1) \geq \dim (V_{i+1}) - \dim (V_i)$$
gilt.

Aufgabe 27.18. Zeige, dass es eine Familie von (bis zu) 2^{n-1} verschiedenen $n \times n$-Matrizen mit der Eigenschaft gibt, dass jeder nilpotente Endomorphismus auf einem n-dimensionalen Vektorraum V durch eine der Matrizen beschrieben werden kann.

Aufgabe 27.19. Zeige, dass sich jeder nilpotente Endomorphismus auf einem vierdimensionalen Raum auf genau eine der folgenden Gestalten bringen lässt.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 27.20. Es sei $v_1, \ldots, v_6$ eine Basis des K-Vektorraumes V und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, die durch
$$v_1, v_2 \mapsto v_4,\ v_3, v_5 \mapsto v_6,\ v_4 \mapsto 0,\ v_6 \mapsto v_2$$
festgelegt ist.

(1) Begründe, warum φ nilpotent ist.
(2) Bestimme das minimale s mit $\varphi^s = 0$.
(3) Bestimme den Kern von φ.
(4) Finde eine Basis von V, bezüglich der φ jordansche Normalform hat.

Die folgende Aufgabe verallgemeinert das Konzept, bei dem einer Permutation eine Permutationsmatrix zugeordnet wird.

Aufgabe 27.21. Wir betrachten auf der Menge
$$S = \{1, \ldots, n, *\}$$
die Menge der Abbildungen
$$B = \{\pi : S \to S \mid \pi(*) = *\} .$$

Zu $\pi \in B$ assoziieren wir (bei einem fixierten Körper K) die lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^n,$$

die durch

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} e_{\pi(i)}, \text{ falls } \pi(i) \neq *\,, \\ 0, \text{ falls } \pi(i) = *\,, \end{cases}$$

festgelegt ist. Mit M_π bezeichnen wir die zugehörige Matrix bezüglich der Standardbasis.

a) Erstelle die Matrix M_π bei $n = 4$ für die folgenden π

(1)

x	1	2	3	4	$*$
$\pi(x)$	2	$*$	3	$*$	$*$

(2)

x	1	2	3	4	$*$
$\pi(x)$	$*$	1	2	3	$*$

(3)

x	1	2	3	4	$*$
$\pi(x)$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

(4)

x	1	2	3	4	$*$
$\pi(x)$	2	2	2	2	$*$

b) Welche Eigenschaften gelten für die Spalten und für die Zeilen von M_π?

c) Für welche π ist M_π bijektiv?

d) Für welche π ist M_π nilpotent?

e) Welche Dimension besitzt der Kern von M_π?

f) Zeige

$$M_{\pi \circ \rho} = M_\pi \circ M_\rho.$$

g) Zeige, dass jede nilpotente $n \times n$-Matrix M ähnlich zu einer Matrix der Form M_π ist.

Aufgabe 27.22. Es sei V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Es sei

$$\psi\colon V \longrightarrow V$$

eine weitere lineare Abbildung mit

$$\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi.$$

Zeige, dass $\psi \circ \varphi$ ebenfalls nilpotent ist.

Aufgabe 27.23.*

Man gebe ein Beispiel für zwei nilpotente lineare Abbildungen

$$\varphi, \psi\colon K^2 \longrightarrow K^2$$

derart, dass weder $\varphi \circ \psi$ noch $\varphi + \psi$ nilpotent sind.

Aufgabe 27.24. Es sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $|a| < 1$. Bekanntlich ist

$$\lim_{n \to \infty} a^n = 0.$$

Ist die lineare Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto ax$$

nilpotent?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 27.25. (3 Punkte)

Es sei M eine 2×2-Matrix über einem Körper K. Zeige, dass M genau dann nilpotent ist, wenn sowohl die Determinante als auch die Spur von M gleich 0 ist.

Aufgabe 27.26. (2 Punkte)

Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und es sei $V = U \oplus W$ die direkte Summe aus φ-invarianten Untervektorräumen. Zeige, dass φ genau dann nilpotent ist, wenn $\varphi|_U$ und $\varphi|_W$ nilpotent sind.

Aufgabe 27.27. (5 (1+1+1+2) Punkte)

Es sei $v_1, \ldots, v_7$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, die durch

$$v_3, v_2 \mapsto v_5,\ v_5 \mapsto 4v_6,\ v_1, v_4 \mapsto 0,\ v_6 \mapsto 5v_4,\ v_7 \mapsto 3v_2$$

festgelegt ist.

(1) Begründe, warum φ nilpotent ist.
(2) Bestimme das minimale s mit $\varphi^s = 0$.
(3) Bestimme den Kern von φ.
(4) Finde eine Basis von V, bezüglich der φ jordansche Normalform hat.

Aufgabe 27.28. (3 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis v_n, $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

diejenige lineare Abbildung, die durch

$$\varphi(v_1) = 0$$

und

$$\varphi(v_n) = v_{n-1}$$

für alle $n \geq 2$ festgelegt ist. Ist φ nilpotent?

Aufgabe 27.29. (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

nilpotent. Zeige, dass

$$\psi := \mathrm{Id} + \varphi$$

bijektiv ist.

Aufgabe 27.30. (4 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und

$$\varphi, \psi\colon V \longrightarrow V$$

nilpotente lineare Abbildungen, die

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$$

erfüllen. Zeige, dass dann auch $\psi + \varphi$ nilpotent ist.