

Mathematik für Anwender II

Prof. Dr. Holger Brenner
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik

Sommersemester 2021

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	9
31. Vorlesung - Differentialgleichungen in einer Variablen	10
31.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen	10
31.2. Ortsunabhängige Differentialgleichungen	15
31.3. Zeitunabhängige Differentialgleichungen	16
31. Arbeitsblatt	17
31.1. Übungsaufgaben	17
31.2. Aufgaben zum Abgeben	21
32. Vorlesung - Lineare Differentialgleichungen	22
32.1. Homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen	22
32.2. Inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen	24
32. Arbeitsblatt	29
32.1. Übungsaufgaben	29
32.2. Aufgaben zum Abgeben	32
33. Vorlesung - Getrennte Variablen	33
33.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit getrennten Variablen	33
33. Arbeitsblatt	39
33.1. Übungsaufgaben	39
33.2. Aufgaben zum Abgeben	42
34. Vorlesung - Euklidische Vektorräume	43
34.1. Euklidische Vektorräume	43
34.2. Norm und Abstand	44
34.3. Orthogonalität	46
34.4. Der Gradient	51
34. Arbeitsblatt	51
34.1. Übungsaufgaben	51
34.2. Aufgaben zum Abgeben	56
35. Vorlesung - Metrische Räume	57
35.1. Metrische Räume	57
35.2. Offene Teilmengen	60
35.3. Folgen in metrischen Räumen	61

35.4. Berührungspunkte	63
35. Arbeitsblatt	64
35.1. Übungsaufgaben	64
35.2. Aufgaben zum Abgeben	67
36. Vorlesung - Stetige Abbildungen	69
36.1. Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen	69
36.2. Verknüpfungen und stetige Abbildungen	71
36.3. Polynome in mehreren Variablen	74
36. Arbeitsblatt	75
36.1. Übungsaufgaben	75
36.2. Aufgaben zum Abgeben	79
36.3. Die Aufgabe zum Abgeben	80
37. Vorlesung - Differenzierbare Kurven	81
37.1. Differenzierbare Kurven	81
37. Arbeitsblatt	87
37.1. Übungsaufgaben	87
37.2. Aufgaben zum Abgeben	93
38. Vorlesung - Kurvenlängen	95
38.1. Die Mittelwertabschätzung für differenzierbare Kurven	95
38.2. Länge von Kurven	96
38. Arbeitsblatt	101
38.1. Übungsaufgaben	101
38.2. Aufgaben zum Abgeben	104
39. Vorlesung - Wegintegrale	105
39.1. Integration von stetigen Wegen	105
39.2. Vektorfelder	107
39.3. Wegintegrale	108
39. Arbeitsblatt	112
39.1. Übungsaufgaben	112
39.2. Aufgaben zum Abgeben	116
40. Vorlesung - Gewöhnliche Differentialgleichungen	118
40.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen	118
40.2. Erste Beispiele	120

40.3.	Vektorfelder mit konstanter Richtung	122
40.4.	Zentralfelder	124
40.	Arbeitsblatt	126
40.1.	Übungsaufgaben	126
40.2.	Aufgaben zum Abgeben	130
41.	Vorlesung - Differentialgleichungen höherer Ordnung	131
41.1.	Differentialgleichungen höherer Ordnung	131
41.2.	Polygonzugverfahren	135
41.3.	Potenzreihenansatz	137
41.	Arbeitsblatt	140
41.1.	Übungsaufgaben	140
41.2.	Aufgaben zum Abgeben	146
41.3.	Die Aufgabe zum Hochladen	147
42.	Vorlesung - Lineare Differentialgleichungssysteme	147
42.1.	Lineare Transformationen	147
42.2.	Lineare Differentialgleichungssysteme	150
42.3.	Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten	153
42.	Arbeitsblatt	154
42.1.	Übungsaufgaben	154
42.2.	Aufgaben zum Abgeben	158
43.	Vorlesung - Konstante Koeffizienten	159
43.1.	Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten - Lösungsverfahren	159
43.	Arbeitsblatt	168
43.1.	Übungsaufgaben	168
43.2.	Aufgaben zum Abgeben	172
44.	Vorlesung - Bilinearformen	173
44.1.	Bilinearformen	173
44.2.	Die Gramsche Matrix	174
44.3.	Symmetrische Bilinearformen	175
44.4.	Definitheit von Bilinearformen	176
44.5.	Typkriterien für symmetrische Bilinearformen	178

44. Arbeitsblatt	179
44.1. Übungsaufgaben	179
44.2. Aufgaben zum Abgeben	183
45. Vorlesung - Spezielle Relativitätstheorie	184
45.1. Minkowski-Räume	184
45. Arbeitsblatt	192
45.1. Übungsaufgaben	192
45.2. Aufgaben zum Abgeben	195
46. Vorlesung - Richtungsableitung	197
46.1. Richtungsableitung	197
46.2. Polynomiale Funktionen	202
46. Arbeitsblatt	202
46.1. Übungsaufgaben	202
46.2. Aufgaben zum Abgeben	205
47. Vorlesung - Partielle Ableitungen	207
47.1. Partielle Ableitungen	207
47.2. Höhere Richtungsableitungen	210
47.3. Der Satz von Schwarz	211
47. Arbeitsblatt	212
47.1. Übungsaufgaben	212
47.2. Aufgaben zum Abgeben	215
48. Vorlesung - Totale Differenzierbarkeit	216
48.1. Totale Differenzierbarkeit	216
48.2. Totale Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen	221
48. Arbeitsblatt	223
48.1. Übungsaufgaben	223
48.2. Aufgaben zum Abgeben	228
49. Vorlesung - Die Kettenregel	229
49.1. Die Kettenregel	229
49. Arbeitsblatt	235
49.1. Übungsaufgaben	235
49.2. Aufgaben zum Abgeben	238
50. Vorlesung - Taylor-Polynom	240

50.1. Die Taylor-Formel - Vorbereitungen	240
50.2. Die Taylor-Formel	245
50. Arbeitsblatt	246
50.1. Übungsaufgaben	246
50.2. Aufgaben zum Abgeben	248
51. Vorlesung - Lokale Extrema	249
51.1. Extrema	249
51.2. Der Gradient	252
51.3. Lokale Extrema von Funktionen in mehreren Variablen	254
51.4. Die Hesse-Form	255
51. Arbeitsblatt	256
51.1. Übungsaufgaben	256
51.2. Aufgaben zum Abgeben	258
52. Vorlesung - Kriterien für Extrema	259
52.1. Hinreichende Kriterien für lokale Extrema	259
52. Arbeitsblatt	264
52.1. Übungsaufgaben	264
52.2. Aufgaben zum Abgeben	270
53. Vorlesung - Diffeomorphismen	271
53.1. Der Satz über die Umkehrabbildung	271
53.2. Diffeomorphismen	274
54. Arbeitsblatt	277
53.1. Übungsaufgaben	277
53.2. Aufgaben zum Abgeben	285
54. Vorlesung - Satz über implizite Abbildungen	286
54.1. Der Satz über implizite Abbildungen	286
54.2. Der Satz über die injektive Abbildung	292
54. Arbeitsblatt	292
54.1. Übungsaufgaben	292
54.2. Aufgaben zum Abgeben	298
55. Vorlesung - Extrema mit Nebenbedingungen	300
55.1. Extrema unter Nebenbedingungen	300
55. Arbeitsblatt	307

55.1. Übungsaufgaben	307
55.2. Aufgaben zum Abgeben	310
56. Vorlesung - Satz von Picard-Lindelöf	311
56.1. Lipschitz-Bedingung	311
56.2. Differential- und Integralgleichungen	313
56.3. Der Satz von Picard-Lindelöf	313
56.4. Die Picard-Lindelöf-Iteration	314
56.5. Zur Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen	315
56. Arbeitsblatt	317
56.1. Übungsaufgaben	317
56.2. Aufgaben zum Abgeben	319
57. Vorlesung - Gradientenfelder	321
57.1. Gradientenfelder	321
57.2. Wegintegrale und Gradientenfelder	323
57.3. Die Integrabilitätsbedingung	325
57. Arbeitsblatt	327
57.1. Übungsaufgaben	327
57.2. Aufgaben zum Abgeben	333
58. Vorlesung - Volumina	334
58.1. Volumenberechnungen	334
58.2. Überpflasterungseigenschaften	335
58.3. Volumina und lineare Abbildungen	337
58.4. Das Cavalieri-Prinzip	338
58.5. Rotationsmengen und Kegel	340
58. Arbeitsblatt	342
58.1. Übungsaufgaben	342
58.2. Aufgaben zum Abgeben	344
59. Vorlesung - Mehrfachintegrale	345
59.1. Mehrfache Integrale	345
59.2. Der Satz von Fubini	346
59.3. Mehrfachintegrale über stetig berandeten Gebieten	348
59.4. Der Schwerpunkt	350
59. Arbeitsblatt	352

59.1. Übungsaufgaben	352
59.2. Aufgaben zum Abgeben	355
60. Vorlesung - Die Transformationsformel	356
60.1. Die Transformationsformel für Integrale	356
60.2. Beispiele zur Transformationsformel	358
60.3. Volumentreue Abbildungen	362
60. Arbeitsblatt	363
60.1. Übungsaufgaben	363
60.2. Aufgaben zum Abgeben	365
Abbildungsverzeichnis	367

VORWORT

Dieses Skript gibt die Vorlesung Mathematik für Anwender II wieder, die ich im Sommersemester 2021 an der Universität Osnabrück gehalten habe. Leider konnte der Kurs nur online durchgeführt werden.

Der Text wurde auf Wikiversity geschrieben und steht unter der Creative-Commons-Attribution-ShareAlike 4.0 Lizenz. Die Bilder wurden von Commons übernommen und unterliegen den dortigen freien Lizenzen. In einem Anhang werden die einzelnen Bilder mit ihren Autoren und Lizenzen aufgeführt. Die CC-BY-SA 4.0 Lizenz ermöglicht es, dass das Skript in seinen Einzelteilen verwendet, verändert und weiterentwickelt werden darf.

Bei Markus Wageringel bedanke ich mich für die Durchführung des Übungsbetriebs, bei den Tutoren Julian Marco Ende, Jannik Heckmann, Fynn Pörtner, Nikola Tsarigradski für die Durchführung der Tutorien und die Korrekturen der abgegebenen Aufgaben. Bei Frau Marianne Gausmann bedanke ich mich für die Erstellung der Pdf-Files und bei den Studierenden für einzelne Korrekturen und Anregungen.

Holger Brenner

31. VORLESUNG - DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN EINER VARIABLEN

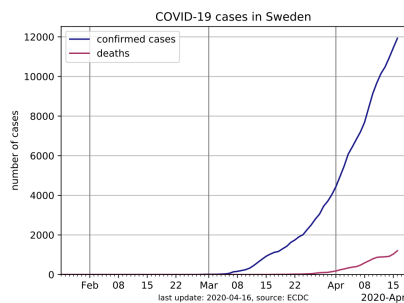
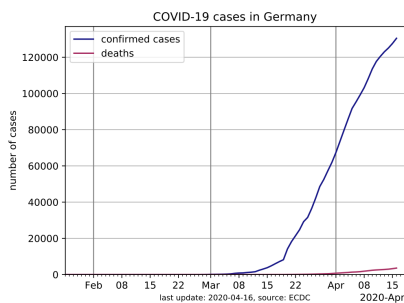
31.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Wir beginnen mit zwei Beispielen, die beide zu gewöhnlichen Differentialgleichungen führen.

Beispiel 31.1. Wir versuchen, die Ausbreitung einer Virusinfektion wie bei der Corona-Pandemie von 2020 zu modellieren. Die Ausbreitung wird durch eine Funktion

$$y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t),$$

beschrieben, wobei $t \in \mathbb{R}$ für die Zeit und $y(t)$ für die Gesamtanzahl der bis zum Zeitpunkt t Infizierten (einschließlich der Genesenen) angibt. Dies ist zunächst eine empirische Funktion, die man aus verschiedenen Gründen auch gar nicht genau kennt, insbesondere, da nicht jeder getestet wird. Man kann stattdessen auch die Entwicklung der bestätigt Infizierten betrachten. Diese empirische Funktion wird durch die Daten, die jeden Tag das Robert-Koch-Institut übermittelt, beschrieben, und ist so gesehen zunächst eine Abbildung von einer Anfangsmenge der natürlichen Zahlen (die ersten 100 Tage seit Ausbruch) in die natürlichen Zahlen, wobei jedem Tag die Anzahl der bis dahin Infizierten zugeordnet wird.



Wenn man zu den Daten aus verschiedenen Ländern den Verlauf skizziert, ergibt sich jeweils ein ähnliches Bild. Die Ausbreitung scheint einer Gesetzmäßigkeit zu folgen, die man in der *mathematischen Modellierung* verstehen möchte. Das bedeutet (in einem ersten Schritt), dass man die empirische Funktion, also das vorliegende Datenmaterial, durch eine mathematische Funktion, also einen funktionalen Ausdruck, annähern möchte, um so den qualitativen und den quantitativen Verlauf der Ausbreitung zu verstehen und auch Extrapolationen (Prognosen) formulieren zu können. Hierbei wird man den Definitionsbereich und den Wertebereich als die reellen Zahlen (oder Intervalle davon) und die Funktion als stetig oder differenzierbar ansetzen. Man kann mit verschiedenen Zeiteinheiten arbeiten und auch die Gesamtzahl absolut oder aber prozentual (bezogen auf die Erdbevölkerung, ein Land, ...) angeben. So oder so ergibt sich, dass der Verlauf gut durch eine

Exponentialfunktion beschrieben werden kann, also von der Bauart

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto b^t,$$

mit einer Basis $b > 1$ ist. Welche Basis b zu nehmen ist, hängt von der Skalierung und auch von länderspezifischen Gegebenheiten ab. Diese Basis ist äquivalent zum Verdoppelungszeitraum der Ausbreitung, man kann das eine aus dem andern berechnen, siehe Aufgabe 31.2.

Diese Modellierung ist bisher aber nur die Beobachtung einer Übereinstimmung einer mathematischen Funktionsklasse mit empirischen Funktionen. In einem zweiten Schritt kann man sich fragen, ob es „in der Natur der Sache liegt“, dass die Ausbreitung eines Virus exponentiell verläuft. Gibt es einen mathematischen Grund dafür, eine innere Dynamik, eine zu jedem Zeitpunkt gültige Gesetzmäßigkeit, die den Verlauf erklären kann? Die Antwort zu dieser Frage erfolgt im Rahmen der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, und beruht auf einer einfachen Beobachtung. Wir nehmen die Funktion $y(t)$ als differenzierbar an. Die Ableitung $y'(t)$ beschreibt dann den momentanen Zuwachs zu jedem Zeitpunkt, ist also ein Maß für die Neuinfektionen. Der naheliegende Ansatz ist nun zu sagen, dass zu jedem Zeitpunkt die Anzahl der Infizierten, also $y(t)$, proportional zur Anzahl der Begegnungen zwischen Infizierten und Nichtinfizierten ist und damit proportional zur Anzahl der Neuinfektionen, also zu $y'(t)$ (für Einschränkungen zu dieser Überlegung siehe weiter unten). Dies führt zu Beziehung

$$y'(t) = cy(t)$$

mit einem konstanten Proportionalitätsfaktor c , der ein Maß für die Ansteckungswahrscheinlichkeit ist und vom Virus, vom Abstandsverhalten der Bevölkerung u. Ä. abhängt. Wir haben also eine Beziehung zwischen der gesuchten Funktion und ihrer Ableitung, die in jedem Moment gilt und für die Ausbreitung eines Virus charakteristisch sein sollte. Ein solcher Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung heißt eine *gewöhnliche Differentialgleichung*. Wenn eine solche Differentialgleichung vorliegt, fragt man sich, welche Funktionen $y(t)$ diese Gleichung erfüllen. Dies ist im Allgemeinen schwierig. Im vorliegenden Fall lässt sich direkt durch Ableiten bestätigen, dass die Funktionen

$$y(t) = ae^{ct}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ Lösungen sind. Der Vorfaktor a ist dabei durch

$$y(0) = a$$

festgelegt, also durch den Wert der Funktion zum Zeitpunkt 0, und das c im Exponenten ist direkt der Proportionalitätsfaktor aus der Differentialgleichung. Wegen

$$ae^{ct} = e^{\ln a} e^{ct} = e^{\ln a + ct}$$

ist der Vorfaktor a im Wesentlichen eine Verschiebung im Zeitargument, und c kann man durch eine Umskalierung der Zeit zu 1 normieren. Man kann nun

sogar zeigen, dass die Exponentialfunktionen die einzigen Funktionen sind, die diese Differentialgleichung erfüllen, siehe Aufgabe 16.3 bzw. Aufgabe 31.5. Dies bedeutet, dass eine Virusausbreitung durch den Faktor c und dem Wert an einem einzigen Zeitpunkt eindeutig bestimmt ist. Dies ist ein Spezialfall des Satzes, dass ein Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt, von dem wir verschiedene Varianten kennenlernen werden.

Kommen wir nun zu einigen Einschränkungen der oben formulierten Modellierung. Zunächst ist klar, dass die Exponentialfunktion zu jeder Basis $b > 1$ gegen unendlich geht, es aber nur endlich viele Menschen gibt. Also kann irgendwas nicht stimmen. Der Punkt ist, dass in unserer Modellierung die Anzahl der Infizierten zur Anzahl der Begegnungen von Infizierten mit der Gesamtbevölkerung proportional ist, aber nicht mit der Anzahl der Begegnungen mit den Nichtinfizierten. Dieser Unterschied ist zu Beginn der Ausbreitung unerheblich, da zu Beginn die Gesamtbevölkerung nahezu vollständig nicht infiziert ist. Im Verlauf der Epidemie, wenn sich der Durchseuchungsgrad erhöht, wird es zunehmend wahrscheinlicher, dass sich Infizierte und Infizierte begegnen, was zu keiner Neuansteckung führt.

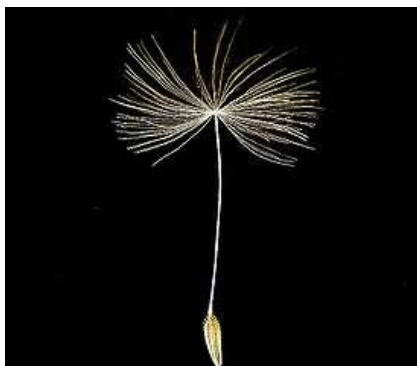
Ferner haben wir ignoriert, dass die Genesenen nicht mehr andere Leute anstecken können. Hier muss man den Unterschied zwischen infiziert und akut infiziert berücksichtigen. Dieser Unterschied ist für den Anfangsverlauf der Ausbreitung ebenfalls unerheblich, spielt aber im späteren Verlauf eine wichtige Rolle. Die Neuansteckung ist also proportional zur Anzahl der akut Infizierten, dies ist die Differenz zwischen der Gesamtinfiziertenzahl und der Gesamtinfiziertenzahl vor einem gewissen Genesungszeitraum d (bei Corona ca. 2 – 3 Wochen). Dies führt auf die Bedingung

$$y'(t) = c(y(t) - y(t - d)),$$

man spricht von einer *Differentialgleichung mit Verzögerung*, was wir nicht behandeln werden. Für den ersten Zeitraum der Länge d nach Ausbruch spielt der Korrekturterm aber keine Rolle.

Schließlich ist der Faktor c keine Konstante, sondern wird durch politische Maßnahmen und Verhaltensregeln beeinflusst.

Beispiel 31.2. Welche Bewegung vollzieht ein Löwenzahnfallschirmchen? Das Fallschirmchen lässt sich zu jedem Zeitpunkt von dem Wind tragen, der an der Stelle herrscht, wo es sich gerade befindet. Der Wind, seine Stärke und seine Richtung, hängt sowohl von der Zeit als auch vom Ort ab. Das bedeutet, dass hier ein gewisser „Rückkopplungsprozess“ vorliegt: Die bisherige Bewegung (also die Vergangenheit) bestimmt, wo sich das Fallschirmchen befindet und damit auch, welcher Wind auf es einwirkt und damit den weiteren Bewegungsablauf. Solche Bewegungsprozesse werden durch Differentialgleichungen beschrieben.



Differentialgleichungen sind ein fundamentaler Bestandteil der Mathematik und der Naturwissenschaften. Sie drücken eine Beziehung zwischen einer abhängigen Größe (häufig $y(t)$) und der Änderung dieser Größe ($y'(t)$) aus. Viele Gesetzmäßigkeiten in der Natur wie Bewegungsprozesse, Ablauf von chemischen Reaktionen, Wachstumsverhalten von Populationen werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Hier besprechen wir nur solche Differentialgleichungen, die durch Integration gelöst werden können.

Definition 31.3. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}, (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(t, y)$$

die (gewöhnliche) *Differentialgleichung* zu f (oder zum *Vektorfeld* oder zum *Richtungsfeld* f).

Dabei ist $y' = f(t, y)$ erstmal nur ein formaler Ausdruck, dem wir aber sofort eine inhaltliche Interpretation geben. Das y soll eine Funktion in einer Variablen repräsentieren und y' ihre Ableitung. Dies wird präzisiert durch den Begriff der *Lösung einer Differentialgleichung*.

Definition 31.4. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}, (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt eine Funktion

$$y: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t),$$

auf einem (mehrpunktigen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- (1) Es ist $(t, y(t)) \in U$ für alle $t \in I$.
- (2) Die Funktion y ist differenzierbar.

(3) Es ist $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.

Statt Lösung sagt man auch *Lösungsfunktion* oder *Lösungskurve*.

Differentialgleichungen beschreiben häufig physikalische Prozesse, insbesondere Bewegungsprozesse. Daran soll auch die Notation erinnern, es steht t für die Zeit und y für den Ort. Dabei ist hier der Ort eindimensional, d.h. die Bewegung findet nur auf einer Geraden statt. Den Wert $f(t, y)$ sollte man sich als eine zu einem Zeit- und Ortspunkt vorgegebene Richtung auf der Ortsgeraden vorstellen. Eine Lösung ist dann eine Funktion

$$y: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t),$$

die differenzierbar ist und deren Ableitung, vorgestellt als Momentangeschwindigkeit, zu jedem Zeitpunkt t mit dem durch $f(t, y(t))$ gegebenen Richtungsvektor übereinstimmt. Später werden wir auch Bewegungen betrachten, die sich in der Ebene oder im Raum abspielen, und die durch ein entsprechendes Richtungsfeld gesteuert werden.

Beispiel 31.5. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = y$, in der t gar nicht explizit vorkommt (solche Differentialgleichungen nennt man zeitunabhängig). Durch diese Differentialgleichung werden Wachstumsprozesse beschrieben, bei denen beispielsweise der Zuwachs gleich der Bevölkerung ist. Gesucht ist also nach einer Funktion $y(t)$, die differenzierbar ist und die mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmt. Wir wissen bereits, dass die Exponentialfunktion $y(t) = e^t$ diese Eigenschaft besitzt. Ebenso ist jede Funktion ae^t mit einem festen $a \in \mathbb{R}$ eine Lösungsfunktion.

Wenn der Zuwachs zur Bevölkerung proportional ist, so führt dies zur Differentialgleichung

$$y' = cy$$

mit einer festen Zahl c . In diesem Fall sind $y(t) = ae^{ct}$ die Lösungen. Bei $c > 0$ spricht man von *exponentiellem Wachstum* und bei $c < 0$ von *exponentiellem Verfall*.

Beispiel 31.6. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = yt$. Gesucht ist also nach einer Funktion $y(t)$, die differenzierbar ist und deren Ableitung die Gestalt $y(t)t$ besitzt. Hier ist nicht unmittelbar klar, wie eine Lösung aussieht und wie man sie findet. Durch Probieren findet man die Lösung $y(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$.

Die Lösung einer Differentialgleichung ist im Allgemeinen nicht eindeutig, man muss noch Anfangsbedingungen festlegen.

Definition 31.7. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}, (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ vorgegeben. Dann nennt man

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit der *Anfangsbedingung* $y(t_0) = y_0$.

Definition 31.8. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}, (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ vorgegeben. Dann nennt man eine Funktion

$$y: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t),$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0,$$

wenn y eine Lösung der Differentialgleichung ist und wenn zusätzlich

$$y(t_0) = y_0$$

gilt.

Es gibt kein allgemeines Verfahren eine Differentialgleichung bzw. ein Anfangswertproblem explizit zu lösen. Die Lösbarkeit hängt wesentlich von der gegebenen Funktion $f(t, y)$ ab.

Das eine Differentialgleichung beschreibende Vektorfeld $f(t, y)$ hängt im Allgemeinen von beiden Variablen t und y ab. Einfache, aber keineswegs triviale Spezialfälle von Differentialgleichungen liegen vor, wenn das Vektorfeld nur von einer der beiden Variablen abhängt.

31.2. Ortsunabhängige Differentialgleichungen.

Definition 31.9. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *ortsunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von y abhängt, wenn also $f(t, y) = g(t)$ mit einer Funktion g in der einen Variablen t gilt.

Eine ortsunabhängige gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

zu einer stetigen Funktion g ist nichts anderes als das Problem, eine Stammfunktion $G(t)$ von g zu finden; eine Lösung y der Differentialgleichung ist ja genau durch die Bedingung ausgezeichnet, dass $y'(t) = g(t)$ ist. Da eine Stammfunktion nur bis auf die Integrationskonstante bestimmt ist, besitzt ein ortsunabhängiges Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung.

Beispiel 31.10. Wir betrachten das ortsunabhängige Anfangswertproblem

$$y' = 2t^2 - t + 4 \text{ mit der Anfangsbedingung } y(2) = 7.$$

Die Funktion $2t^2 - t + 4$ besitzt die Stammfunktionen $\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t + c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung $y(2) = 7$ führt auf

$$\frac{2}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + c = \frac{16}{3} - 2 + 8 + c = 7,$$

also $c = -\frac{13}{3}$. Somit ist die Lösungsfunktion des Anfangswertproblems gleich

$$y(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t - \frac{13}{3}.$$

Beispiel 31.11. Wir betrachten das ortsunabhängige Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{t^2 - 1} \text{ mit der Anfangsbedingung } y(5) = 3.$$

Die Funktion $\frac{1}{t^2 - 1}$ besitzt die sogenannte Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t + 1},$$

daher sind die Stammfunktionen (wir beschränken uns auf $t > 1$) gleich

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln(t - 1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t + 1) + c.$$

Die Anfangsbedingung $y(5) = 3$ führt auf

$$\frac{1}{2} \cdot \ln 4 - \frac{1}{2} \cdot \ln 6 + c = 3,$$

also ist

$$c = 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot \ln 6$$

und die Lösungsfunktion des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln(t - 1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t + 1) + 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot \ln 6.$$

Bereits die ortsunabhängigen Differentialgleichungen zeigen, dass das Auffinden einer Lösung einer Differentialgleichung schwierig ist, und zwar mindestens so schwierig wie das Finden von Stammfunktionen. Ein Großteil der Lösungsverfahren für Differentialgleichungen beruht in der Tat darauf, die Probleme in Integrationsprobleme zu übersetzen und dann zu lösen.

31.3. Zeitunabhängige Differentialgleichungen.

Definition 31.12. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *zeitunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von t abhängt, wenn also $f(t, y) = h(y)$ mit einer Funktion h in der einen Variablen y gilt.

Bei einer zeitunabhängigen Differentialgleichung hängt nur das zugrunde liegende Vektorfeld nicht von der Zeit ab, die Lösungskurven sind hingegen im Allgemeinen zeitabhängig.

Beispiel 31.13. Wir betrachten die zeitliche Entwicklung einer Population, die durch folgende Eigenschaften charakterisiert ist.

- (1) Die Individuen der Population leben ewig.
- (2) Alle Individuen beteiligen sich ab ihrer Geburt mit gleichem (durchschnittlichen) Engagement und Erfolg an der Fortpflanzung.
- (3) Zeugung und Geburt finden gleichzeitig statt.
- (4) Der Fortpflanzungserfolg eines Individuums ist unabhängig von der Größe der Gesamtpopulation.

Unter diesen Bedingungen ist die Vermehrung, also der Zuwachs der Population, allein von der momentanen Populationsgröße abhängig und proportional zu dieser. Wenn man die Populationsentwicklung als $y(t)$ ansetzt, so erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(t) = cy(t)$$

(oder kurz $y' = cy$) mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}_+$. Die Lösungsfunktionen sind

$$\lambda e^{ct}$$

(wobei im Populationsbeispiel $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist). Man spricht von *exponentiellem Wachstum* der Population, und zwar unabhängig davon, ob c groß oder klein ist.

Beispiel 31.14. Eine Wüste (oder ein Kornblumenfeld) sei kreisrund und breite sich mit der Zeit kontinuierlich aus, indem die Grenze gleichmäßig nach außen geschoben werde, und zwar pro Zeiteinheit um einen gewissen Vortrieb. Die Fläche der Wüste werde durch die Funktion $z(t)$ beschrieben. Die Grenze der Wüste hat somit die Länge $2\sqrt{\pi}\sqrt{z(t)}$ und diese Länge ist proportional zum Wüstenzuwachs zum Zeitpunkt t . Es ergibt sich daher eine Differentialgleichung

$$z'(t) = c\sqrt{z(t)}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}_+$. Die Lösungen haben die Form

$$z(t) = \frac{c^2}{4}t^2,$$

wie man direkt durch Ableiten bestätigen kann.

31. ARBEITSBLATT

31.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 31.1. Die Süddeutsche Zeitung schrieb am 10.3.2020 unter dem Titel „Die Wucht der großen Zahl“ (von Christian Endt, Michael Mainka und Sören Müller-Hansen):

„Um zu verstehen, warum das neue Coronavirus so gefährlich ist, muss man sich klarmachen, was exponentielles Wachstum bedeutet. Der Begriff ist etwas sperrig, das Konzept dahinter aber einfach. Es geht um eine Vermehrung, die sich ständig selbst beschleunigt. Und dieses Muster lässt sich auch beim Coronavirus erkennen. Das ist der Hintergrund, warum nun immer strengere Auflagen verhängt werden, Fußballspiele ohne Publikum ausgetragen, Feste und Kongresse abgesagt werden. Und warum Gesundheitsminister Jens Spahn, Kanzlerin Angela Merkel und andere davon sprechen, man müsse die Ausbreitung des Virus verlangsamen. Sprich: Verhindern, dass es sich exponentiell verbreitet.“

- (1) Beschleunigt sich lineares Wachstum „ständig selbst“?
- (2) Beschleunigt sich quadratisches Wachstum wie bei der Funktion $f(x) = x^2$ „ständig selbst“?
- (3) Wie kann man exponentielles Wachstum charakterisieren?
- (4) Wenn man exponentielles Wachstum „verlangsamen“ möchte, verhindert man dann exponentielles Wachstum oder ändert man Parameter (welche?) für exponentielles Wachstum?

Aufgabe 31.2.*

- (1) Es sei $a > 1$ und $g(x) = a^x$ die Exponentialfunktion zur Basis a . Zeige, dass es ein $w \in \mathbb{R}_+$ mit $g(x+w) = 2g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt.
- (2) Es sei $w > 0$ vorgeben. Zeige, dass es eine Exponentialfunktion b^x mit $b > 1$ und mit

$$b^{x+w} = 2b^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt.

- (3) Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x+1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die keine Exponentialfunktion ist.

Aufgabe 31.3. Bestimme, für welche $c, d \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung mit Verzögerung

$$y'(t) = c(y(t) - y(t-d))$$

eine Lösung der Form

$$y(t) = \alpha t + \beta$$

besitzt.

Aufgabe 31.4. Finde alle Lösungen zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = y.$$

Aufgabe 31.5. Finde alle Lösungen zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = cy.$$

Aufgabe 31.6.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 2 \text{ mit } y(5) = 3.$$

Aufgabe 31.7.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^2 - 3t + 4 \text{ mit } y(-1) = -5.$$

Aufgabe 31.8. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^3 - 2t + 5 \text{ mit } y(3) = 4.$$

Aufgabe 31.9. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \sin t \text{ mit } y(\pi) = 7.$$

Aufgabe 31.10. Man mache sich anschaulich und mathematisch klar, dass bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung der Abstand zwischen zwei Lösungen y_1 und y_2 zeitunabhängig ist, d.h. dass $y_1(t) - y_2(t)$ konstant ist.

Man gebe ein Beispiel, dass dies bei zeitunabhängigen Differentialgleichungen nicht der Fall sein muss.

Aufgabe 31.11. Untersuche die gewöhnlichen Differentialgleichungen, die sowohl zeit- als auch ortsunabhängig sind.

Aufgabe 31.12. Wie sieht der Graph einer Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

aus, die nur von einer Variablen abhängt.

Aufgabe 31.13. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei

$$D(I, \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Zeige, dass $D(I, \mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung

$$D(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Abb}(I, \mathbb{R}), f \longmapsto f',$$

eine lineare Abbildung ist. Bestimme den Kern dieser Abbildung und seine Dimension.

Aufgabe 31.14. Es sei

$$D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ unendlich oft differenzierbar}\}$$

die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Dimension der Eigenräume der Ableitung

$$D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow D(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \longmapsto f'.$$

Aufgabe 31.15. Finde die Lösungen für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = cy^{\frac{2}{3}}$$

mit $c \in \mathbb{R}_+$.

Finde eine inhaltliche Interpretation zu dieser Differentialgleichung analog zu Beispiel 31.14.

Aufgabe 31.16. Zeige, dass $y(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}_+$) eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = ny^{\frac{n-1}{n}}$$

auf \mathbb{R}_+ ist.

Aufgabe 31.17.*

a) Es sei

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein nullstellenfreies Vektorfeld, d.h. $f(t, y) \neq 0$ für alle $(t, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass jede Lösungskurve zur Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

injektiv ist.

b) Sei f nun ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Zeige, dass f genau dann nullstellenfrei ist, wenn jede Lösungskurve injektiv ist.

c) Man gebe ein Beispiel für ein Vektorfeld, das nicht nullstellenfrei ist, für das aber jede Lösungskurve injektiv ist.

Aufgabe 31.18. Finde eine differenzierbare Funktion $y(t)$ (nicht die Nullfunktion), die die Bedingung

$$y'(t) = y(t - 1)$$

erfüllt (dabei ist $y(t - 1)$ als der Wert der Funktion y an der Stelle $t - 1$ zu verstehen, nicht als das Produkt der Funktionsvariablen y mit $t - 1$; es handelt sich also *nicht* um eine Differentialgleichung).

31.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 31.19. (2 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^2 - 4t + 7 \text{ mit } y(2) = 5.$$

Aufgabe 31.20. (3 Punkte)

Finde eine Lösung zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = y + t.$$

Aufgabe 31.21. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t^3}{t^2 + 1} \text{ mit } y(1) = 2.$$

Aufgabe 31.22. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{1}{\sinh t}$$

auf \mathbb{R}_+ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 7$.

Tipp: Man schreibe Sinus hyperbolicus mit der Exponentialfunktion, führe die Substitution $s = e^t$ durch und finde so eine Stammfunktion.

Aufgabe 31.23. (5 Punkte)

Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ unendlich oft differenzierbare Funktionen

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x),$$

derart gibt, dass die n -te Ableitung $f^{(n)}$ mit f übereinstimmt, die Ableitungen $f^{(i)}$, $1 \leq i < n$, aber nicht.

Tipp=Denke an Potenzreihen.

32. VORLESUNG - LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Wir besprechen in dieser und der nächsten Vorlesung Lösungsverfahren für gewöhnliche eindimensionale Differentialgleichungen

$$y' = f(t, y).$$

wenn das Vektorfeld $f(t, y)$ eine bestimmte Form besitzt. Heute sprechen wir über sogenannte lineare Differentialgleichungen.

32.1. Homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen.

Definition 32.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y$$

mit einer Funktion (I reelles Intervall)

$$g: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t),$$

heißt *gewöhnliche homogene lineare eindimensionale Differentialgleichung*.

Wir sprechen kurz auch von *linearen Differentialgleichungen*. Linear bedeutet hierbei, dass im (auf $I \times \mathbb{R}$ definierten) Vektorfeld $f(t, y) = g(t)y$ der Ort y linear eingeht, d.h. zu jedem fixierten Zeitpunkt t_0 ist $f(t_0, y)$ eine lineare Funktion in y .

Die folgende Aussage zeigt, dass solche Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können. Die Nullfunktion ist natürlich immer eine Lösung, interessant sind daher die Lösungen, die noch zusätzliche Eigenschaften (typischerweise eine Anfangsbedingung) erfüllen.

Satz 32.2. *Es sei*

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$g: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t),$$

die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sei. Es sei G eine Stammfunktion zu g auf I . Dann sind die Lösungen der Differentialgleichung gleich

$$y(t) = c \cdot \exp(G(t)) \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Das Anfangswertproblem

$$y' = g(t)y \text{ und } y(t_0) = y_0$$

(mit $t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$) besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Zunächst gibt es eine Stammfunktion G von g aufgrund von Korollar 19.5, so dass die angegebenen Funktionen existieren. Durch Ableiten

bestätigt man direkt, dass diese Funktionen wirklich Lösungen sind. Es sei y eine beliebige Lösungsfunktion. Wir betrachten den Quotienten

$$\begin{aligned} \left(\frac{y(t)}{\exp(G(t))} \right)' &= \frac{y'(t) \exp(G(t)) - y(t) \cdot (\exp(G(t)) \cdot g(t))}{\exp^2(G(t))} \\ &= \frac{y(t)g(t) \exp(G(t)) - y(t) \cdot (\exp(G(t)) \cdot g(t))}{\exp^2(G(t))} \\ &= 0, \end{aligned}$$

so dass aufgrund von Lemma 19.6 der Quotient $\frac{y(t)}{\exp(G(t))}$ konstant sein muss, woraus die Behauptung folgt. Die Bedingung $y(t_0) = y_0$ legt den Skalar $c = \frac{y_0}{\exp(G(t_0))}$ eindeutig fest. \square

Beispiel 32.3. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = 0$$

besitzt genau die konstanten Lösungen

$$y(t) = c \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Dies folgt direkt aus Lemma 19.6, aber auch aus Satz 32.2.

Beispiel 32.4. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y$$

besitzt genau die Lösungen

$$y(t) = ce^t \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 32.5. Sei $c \in \mathbb{R}$. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = cy$$

besitzt nach Satz 32.2 die Lösungen

$$y(t) = ae^{ct} \text{ mit } a \in \mathbb{R}.$$

In den bisherigen Beispielen war die Funktion $g(t)$ konstant, und es war besonders einfach, die Lösungen anzugeben. Man spricht von einer *homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*. Diese sind insbesondere zeitunabhängig. Die folgenden Beispiele besitzen keine konstanten Koeffizienten, sondern variable Koeffizienten. Diese Differentialgleichungen sind sowohl orts- als auch zeitabhängig.

Beispiel 32.6. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung ($t > 0$)

$$y' = \frac{y}{t}.$$

Eine Stammfunktion zu $g(t) = \frac{1}{t}$ ist der natürliche Logarithmus. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind daher nach Satz 32.2 gleich

$$c \cdot \exp(\ln t) = ct$$

mit $c \in \mathbb{R}$

Beispiel 32.7. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung ($t > 1$)

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1}.$$

Um die Lösungen zu bestimmen brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$g(t) = \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{(t - 1)(t + 1)} = \frac{1/2}{t - 1} - \frac{1/2}{t + 1}.$$

Aus der Partialbruchzerlegung gelangt man zur Stammfunktion

$$G(t) = \frac{1}{2} \ln(t - 1) - \frac{1}{2} \ln(t + 1).$$

Daher sind die Lösungen nach Satz 32.2 gleich

$$\begin{aligned} c \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \ln(t - 1) - \frac{1}{2} \ln(t + 1)\right) &= c \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \ln(t - 1)\right)}{\exp\left(\frac{1}{2} \ln(t + 1)\right)} \\ &= c \frac{\sqrt{\exp(\ln(t - 1))}}{\sqrt{\exp(\ln(t + 1))}} \\ &= c \cdot \frac{\sqrt{t - 1}}{\sqrt{t + 1}}. \end{aligned}$$

Beispiel 32.8. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 + 1}.$$

Um die Lösungen zu bestimmen brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + 1},$$

eine solche ist (nach Satz 16.20 (3)) durch

$$G(t) = \arctan t$$

gegeben. Daher sind die Lösungen gleich

$$c \cdot \exp(\arctan t).$$

32.2. Inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen.

Es gibt homogene lineare Gleichungssysteme, bei denen es darum geht, den Kern einer linearen Abbildung oder einer Matrix zu bestimmen, und es gibt inhomogene lineare Gleichungssysteme, wo man das Urbild zu einem Vektor (Störvektor) unter einer linearen Abbildung bestimmen soll. Auch zu den linearen Differentialgleichungen gibt es eine inhomogene Variante, bei der eine *Störfunktion* die Sache verkompliziert. Wie bei linearen Gleichungssystemen ist es auch hier wichtig, zuerst die zugehörige homogene Gleichung zu lösen.

Definition 32.9. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y + h(t)$$

mit zwei auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionen $t \mapsto g(t)$ und $t \mapsto h(t)$ heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung*.

Die folgende Aussage zeigt, dass solche Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können.

Satz 32.10. *Es sei*

$$y' = g(t)y + h(t)$$

eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit stetigen Funktionen $g, h: I \rightarrow \mathbb{R}$. Es sei G eine Stammfunktion von g und es sei

$$a(t) = \exp(G(t))$$

eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung. Dann sind die Lösungen (auf I) der inhomogenen Differentialgleichung genau die Funktionen

$$y(t) = c(t)a(t),$$

wobei $c(t)$ eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$ ist. Das Anfangswertproblem

$$y' = g(t)y + h(t) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

(mit $t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$) besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Da $a(t)$ keine Nullstelle besitzt, kann man jede (differenzierbare) Funktion

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}$$

als

$$y(t) = c(t)a(t)$$

mit einer unbekanntem (differenzierbaren) Funktion $c(t)$ ansetzen. Dabei ist (für eine differenzierbare Funktion y)

$$y'(t) = c'(t)a(t) + c(t)a'(t).$$

Daher kann man die Lösungsbedingung

$$y'(t) = g(t)y(t) + h(t)$$

als

$$c'(t)a(t) + c(t)a'(t) = g(t)c(t)a(t) + h(t)$$

schreiben, und diese gilt wegen $a'(t) = g(t)a(t)$ genau dann, wenn

$$c'(t)a(t) = h(t)$$

bzw.

$$c'(t) = \frac{h(t)}{a(t)}$$

gilt. D.h. $c(t)$ muss eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$ sein. Es sei nun noch die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ vorgegeben. Mit $c(t)$ ist auch $c(t) + c_0$ für jedes $c_0 \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$. Die Bedingung

$$y_0 = (c(t_0) + c_0)a(t_0)$$

legt dann c_0 eindeutig fest. \square

Die in diesem Satz verwendete Methode heißt *Variation der Konstanten*. Man ersetzt dabei die Lösungsfunktionen der zugehörigen homogenen Gleichung, also $ca(t)$ mit konstantem $c \in \mathbb{R}$, durch eine variable Funktion $c(t)$.

Beispiel 32.11. Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = ay + b$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion

$$z(t) = e^{at}$$

ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Nach Satz 32.10 müssen wir daher eine Stammfunktion zu be^{-at} bestimmen. Diese sind durch $-\frac{b}{a}e^{-at} + c$ gegeben. Also haben die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung die Form

$$\left(-\frac{b}{a}e^{-at} + c\right) \cdot e^{at} = c \cdot e^{at} - \frac{b}{a}.$$



Lieber den Kaffee trinken, bevor er gemäß einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung die Außentemperatur angenommen hat.

Eine solche Differentialgleichung tritt bei Abkühlungsprozessen auf. Wenn ein (heißer) Körper (beispielsweise eine Tasse Kaffee) sich in einem umgebenden Medium (beispielsweise in einem Straßencafé) mit konstanter Außentemperatur A befindet, so wird die Temperaturentwicklung $y(t)$ des Körpers nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz durch die Differentialgleichung

$$y'(t) = -d(y(t) - A)$$

beschrieben. Dieses Gesetz besagt, dass die Abkühlung proportional zur Differenz zwischen Außentemperatur und Körpertemperatur ist (der Proportionalitätsfaktor $d > 0$ hängt von der Wärmeleitfähigkeit des Körpers ab). Die Lösungen sind

$$y(t) = ce^{-dt} + A.$$

Dabei ist das c durch eine Anfangsbedingung bestimmt, also typischerweise durch die Anfangstemperatur des Körpers zum Zeitpunkt 0. Für $t \rightarrow +\infty$ nimmt der Körper die Außentemperatur A an.

Beispiel 32.12. Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y + t^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(3) = 4$. Die Exponentialfunktion $a(t) = e^t$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Nach Satz 32.10 müssen wir daher eine Stammfunktion zu

$$\frac{t^2}{e^t} = t^2 \cdot e^{-t}$$

finden. Mit zweifacher partieller Integration findet man die Stammfunktion

$$(-t^2 - 2t - 2)e^{-t}.$$

Also haben die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung die Form

$$e^t((-t^2 - 2t - 2)e^{-t} + c) = -t^2 - 2t - 2 + ce^t.$$

Wenn wir noch die Anfangsbedingung $y(3) = 4$ berücksichtigen, so ergibt sich die Bedingung

$$-9 - 6 - 2 + ce^3 = -17 + ce^3 = 4,$$

also $c = \frac{21}{e^3}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(t) = -t^2 - 2t - 2 + \frac{21}{e^3}e^t.$$

Beispiel 32.13. Wir betrachten für $t > 1$ die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1} + t - 1$$

mit der Anfangsbedingung $y(2) = 5$. Hier ist also $h(t) = t - 1$ die Störfunktion und

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1}$$

ist die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{t^2 - 1}$ ist

$$G(t) = \frac{1}{2} \ln(t - 1) - \frac{1}{2} \ln(t + 1) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t - 1}{t + 1}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{t - 1}}{\sqrt{t + 1}}\right).$$

Daher ist nach Satz 32.2 (bzw. nach Beispiel 32.7)

$$a(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

eine Lösung zur homogenen Differentialgleichung. Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$\frac{h(t)}{a(t)} = \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t-1}} \cdot (t-1) = \sqrt{t+1} \cdot \sqrt{t-1} = \sqrt{t^2-1}.$$

Eine Stammfunktion dazu ist

$$c(t) = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t \right).$$

Die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung haben also die Gestalt

$$\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t \right) + c \right)$$

Die Anfangsbedingung führt zu

$$5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(2\sqrt{3} - \operatorname{arcosh} 2 \right) + c_0 \right) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arcosh} 2 + c_0 \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Also ist

$$c_0 = 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} 2$$

und die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t \right) + 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} 2 \right).$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass man schon bei recht einfach aussehenden linearen Differentialgleichungen schnell an die Integrationsgrenzen kommt.

Beispiel 32.14. Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = ty + 1.$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' = ty$ hat die Lösung

$$e^{\frac{1}{2}t^2},$$

somit sind nach Satz 32.10 die Lösungen der inhomogenen Gleichung gleich $c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$, wobei $c(t)$ eine Stammfunktion von $e^{-\frac{1}{2}t^2}$ ist. Diese Funktion ist aber nicht elementar integrierbar (diese Funktion kommt auch beim sogenannten Fehlerintegral vor).

32. ARBEITSBLATT

32.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 32.1. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = (t^2 - 4t + 5)y.$$

Aufgabe 32.2. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = (t^2 - 4t + 5)y \text{ mit } y(6) = -3.$$

Aufgabe 32.3. Zeige durch Ableiten, dass

$$y(t) = \sqrt[n+1]{e^{t^{n+1}}}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = t^n y$$

ist.

Aufgabe 32.4. Es sei $y(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y$ und $z(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $z' = h(t)z$. Zeige, dass die Produktfunktion yz eine Lösung der Differentialgleichung

$$u' = (g(t) + h(t))u$$

ist, und zwar einmal durch Ableiten und einmal mit Satz 32.2.

Aufgabe 32.5. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{t}.$$

Aufgabe 32.6. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2}.$$

Aufgabe 32.7. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = e^t y.$$

Aufgabe 32.8. Bestätige durch Nachrechnen, dass die in Beispiel 32.7 gefundenen Funktionen

$$y(t) = c \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

die Differentialgleichung

$$y' = y/(t^2 - 1)$$

erfüllen.

Aufgabe 32.9.*

Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2(t-1)}$$

für $t > 1$.

Aufgabe 32.10. Es sei

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion g und es sei y eine differenzierbare Lösung.

a) Zeige, dass y ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist.

b) Es sei $y(t_0) = 0$ für einen Zeitpunkt t_0 . Zeige unter Verwendung von Aufgabe 14.25, dass $y^{(n)}(t_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 32.11.*

Es sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Finde eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung, für die f eine Lösung ist.

Aufgabe 32.12. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + 7.$$

Aufgabe 32.13. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + e^t.$$

Aufgabe 32.14. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + e^{3t}.$$

Aufgabe 32.15. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}.$$

Die folgende Aussage nennt man das *Superpositionsprinzip* für inhomogene lineare Differentialgleichungen. Es besagt insbesondere, dass die Differenz zweier Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist.

Aufgabe 32.16. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$g, h_1, h_2: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen. Es sei y_1 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_1(t)$ und es sei y_2 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_2(t)$. Zeige, dass dann $y_1 + y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = g(t)y + h_1(t) + h_2(t)$$

ist.

Aufgabe 32.17. Petra sitzt im Straßenkaffee bei einer Außentemperatur von 20 Grad. Ihr wird ein Kaffee serviert mit einer Temperatur von 90 Grad, den sie erst in fünf Minuten nach einem wichtigen Telefonat trinken möchte. Sie trinkt ihren Kaffee ohne Zucker, aber mit einem Milchanteil von 10 Prozent. Die Milch wird mit einer Temperatur von 10 Grad in einer Kühlbox serviert, die die Temperatur konstant hält. Der Abkühlungskoeffizient für Kaffee und Milch (siehe Beispiel 32.11) sei $d = \frac{1}{500}$, wobei die Zeit in Sekunden aufgefasst werde.

- Welche Temperatur besitzt der Kaffee zu Trinkbeginn, wenn die Milch sofort in den Kaffee gekippt wird.
- Welche Temperatur besitzt der Kaffee zu Trinkbeginn, wenn die Milch unmittelbar vor dem Trinken in den Kaffee gekippt wird.
- Welche Temperatur besitzt der Kaffee zu Trinkbeginn, wenn die Milch unmittelbar vor dem Trinken in den Kaffee gekippt wird, und die Kühlbox nicht funktioniert.

Aufgabe 32.18.*

- Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t}.$$

- Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t} + t^7.$$

c) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \text{ und } y(1) = 5.$$

Aufgabe 32.19.*

a) Finde alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t}y + (t^2 - 3) \cos t$$

für $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t}y + (t^2 - 3) \cos t \text{ mit } y(0) = 7.$$

Aufgabe 32.20.*

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2 + 1}y.$$

b) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2 + 1}y + t^2.$$

32.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 32.21. (3 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = (2t^3 - 7t + 4)y \text{ mit } y(3) = 7.$$

Aufgabe 32.22. (3 Punkte)

Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 - 3}.$$

Aufgabe 32.23. (3 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = (t + 2)y + t \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + 2t\right).$$

Welche Lösung hat das Anfangswertproblem $y(1) = \pi$?

Aufgabe 32.24. (5 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t}{t^2 + 2}y \text{ mit } y(3) = 7.$$

Aufgabe 32.25. (3 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + e^{2t} - 4e^{-3t} + 1.$$

Aufgabe 32.26. (5 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{t^3 - 2t + 5}{t^2 - 3}.$$

33. VORLESUNG - GETRENNTE VARIABLEN

33.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit getrennten Variablen.

Definition 33.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

mit zwei Funktionen (dabei sind I und J reelle Intervalle)

$$g: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t),$$

und

$$h: J \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto h(y),$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen*.

Eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen ist auf der Produktmenge $U = I \times J$ definiert. Eine homogene lineare Differentialgleichung $y' = g(t)y$ besitzt offenbar getrennte Variablen (mit $h(y) = y$), dagegen besitzt eine inhomogene lineare Differentialgleichung im Allgemeinen keine getrennten Variablen. Die Differentialgleichungen mit getrennten Variablen lassen sich durch Integrieren lösen. Wenn $h(y_0) = 0$ ist, so bestätigt man direkt die konstante Lösung $y(t) = y_0$. Daher beschränken wir uns im Folgenden auf die Situation, dass h keine Nullstelle besitzt. Die Grundidee ist dann, in der Gleichung

$$\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t)$$

die beiden Seiten zu integrieren, wobei man links die Substitutionsregel anwendet.

Satz 33.2. *Es sei*

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit stetigen Funktionen

$$g: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t),$$

und

$$h: J \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto h(y),$$

wobei h keine Nullstelle besitze. Es sei G eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$. Weiter sei $I' \subseteq I$ ein Teilintervall mit $G(I') \subseteq H(J)$. Dann ist H eine bijektive Funktion auf sein Bild $H(J)$ und die Lösungen dieser Differentialgleichung haben die Form

$$y(t) = H^{-1}(G(t)).$$

Wenn zusätzlich die Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0 \text{ mit } (t_0, y_0) \in I \times J$$

gegeben ist, und wenn die Stammfunktionen die zusätzlichen Eigenschaften $G(t_0) = 0$ und $H(y_0) = 0$ erfüllen, so ist

$$y(t) = H^{-1}(G(t))$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis. Da h stetig ist und keine Nullstelle besitzt, ist h bzw. $\frac{1}{h}$ nach dem Zwischenwertsatz entweder stets positiv oder stets negativ, so dass H nach Satz 15.7 streng monoton und daher nach Aufgabe 5.37 injektiv (also bijektiv auf sein Bild) ist. Sei $y(t) = H^{-1}(G(t))$ wie angegeben. Dann ist nach Satz 14.8 und Satz 14.9

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{G'(t)}{H'(H^{-1}(G(t)))} \\ &= \frac{g(t)}{\frac{1}{h}(H^{-1}(G(t)))} \\ &= g(t) \cdot h(H^{-1}(G(t))) \\ &= g(t) \cdot h(y(t)), \end{aligned}$$

so dass in der Tat eine Lösung vorliegt. Es sei nun $y(t)$ eine differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung erfüllt. Daraus folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt = \int_{y(t_1)}^{y(t_2)} \frac{1}{h(z)} dz,$$

wobei wir die Substitution $z = y(t)$ angewendet haben. Für die zugehörigen Stammfunktionen (mit den unteren Integralgrenzen t_1 bzw. $y(t_1)$) bedeutet dies $G(t) = H(y(t))$, also ist $y(t) = H^{-1}(G(t))$. Um die Anfangsbedingung zu erfüllen, kann man t_0 bzw. y_0 als untere Integralgrenzen wählen. Wir zeigen, dass dies die einzige Lösung ist. Seien also H und \tilde{H} zwei Stammfunktionen zu $\frac{1}{h}$ und G und \tilde{G} zwei Stammfunktionen zu g derart, dass sowohl $y(t) = H^{-1}(G(t))$ als auch $\tilde{y}(t) = \tilde{H}^{-1}(\tilde{G}(t))$ die Anfangsbedingung erfüllen. D.h.

die beiden Funktionen stimmen zum Zeitpunkt t_0 überein. Da sich Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden, können wir $\tilde{H} = H + c$ und $\tilde{G} = G + d$ mit zwei Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ ansetzen. Es gilt also einerseits $H(y(t)) = G(t)$ und andererseits $H(\tilde{y}(t)) + c = \tilde{H}(\tilde{y}(t)) = \tilde{G}(t) = G(t) + d$, so dass $H(\tilde{y}(t)) - H(y(t)) = d - c$ gilt, woraus wegen $\tilde{y}(t_0) = y(t_0)$ sofort $c = d$ folgt. Also ist $H(\tilde{y}(t)) = G(t) = H(y(t))$ und somit wegen der Injektivität von H auch $\tilde{y}(t) = y(t)$ für alle t . \square

Wegen

$$(H + c)^{-1}(G(t) + d) = H^{-1}(G(t) + d - c)$$

(wende $H + c$ an) genügt es, bei der Stammfunktion zu $g(t)$ eine Konstante zuzulassen, um die allgemeine Lösung zu erhalten. Durch einen Übergang von G nach $G + c$ mit einer geeigneten Konstanten c kann man auch erreichen, dass es ein (echtes) Intervall I' gibt mit

$$G(I') \subseteq H(J).$$

Sowohl orts- als auch zeitunabhängige Differentialgleichungen kann man als Differentialgleichung mit getrennten Variablen auffassen. Für zeitunabhängige Differentialgleichungen erhält man den folgenden Lösungsansatz.

Korollar 33.3. *Es sei*

$$y' = h(y)$$

eine zeitunabhängige Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$h: J \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto h(y),$$

ohne Nullstelle. Es sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ mit der Umkehrfunktion

$$H^{-1}: J' \longrightarrow J.$$

Dann sind die Funktionen

$$y(t) = H^{-1}(t + c) \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

die Lösungen dieser Differentialgleichung auf dem Intervall¹ $H(J) - c$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 33.2. \square

Beispiel 33.4. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{y}$$

für $y > 0$. Es ist also $h(y) = \frac{1}{y}$ und damit müssen wir nach Korollar 33.3 y integrieren, eine Stammfunktion dazu ist

$$H(y) = \frac{1}{2}y^2.$$

¹Mit $I + c$ ist das um c verschobene Intervall gemeint. Es ist also $I + c = \{x \in \mathbb{R} \mid x - c \in I\}$. Bei $I = [a, b]$ ist also $I + c = [a + c, b + c]$, bei $I = \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R} + c = \mathbb{R}$.

Die Umkehrfunktion berechnet sich aus dem Ansatz $z = \frac{1}{2}y^2$ zu $y = \sqrt{2z} = H^{-1}(z)$. Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = \sqrt{2(t+c)}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 33.5. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \sin y$$

für $y \in J =]0, \pi[$. Nach Korollar 33.3 müssen wir also $\frac{1}{\sin y}$ integrieren, eine Stammfunktion dazu ist nach Beispiel 27.6 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) die Funktion

$$H: J \longrightarrow J' = \mathbb{R}, y \longmapsto H(y) = \ln \left(\tan \frac{y}{2} \right).$$

Die Umkehrfunktion H^{-1} berechnet sich über $u = \ln \left(\tan \frac{y}{2} \right)$ zu

$$H^{-1}(y) = 2 \arctan (e^u).$$

Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = 2 \arctan (e^{t+c})$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$.

Nach diesen zeitunabhängigen Differentialgleichungen besprechen wir weitere Beispiele für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen.

Korollar 33.6. *Eine Differentialgleichung der Form*

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit $y > 0$ und einer stetigen Funktion

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t),$$

besitzt auf $I' \subseteq \mathbb{R}$ die Lösungen

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)},$$

wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

Beweis. Siehe Aufgabe 33.17. □

Beispiel 33.7. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = t \cdot y^3$$

für

$y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = t$ sind $\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{t^2 + 2c}}.$$

Hierbei muss c negativ gewählt werden, damit diese Lösung einen nichtleeren Definitionsbereich besitzt. Der Definitionsbereich ist dann das Intervall $]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[$. Insbesondere sind die Lösungen nur auf einem beschränkten offenen Intervall definiert, obwohl die Differentialgleichung auf ganz \mathbb{R}^2 definiert ist. An den Intervallgrenzen strebt $y(t)$ gegen $+\infty$, d. h., die Lösung „entweicht“.

Beispiel 33.8. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = -t \cdot y^3$$

für $y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

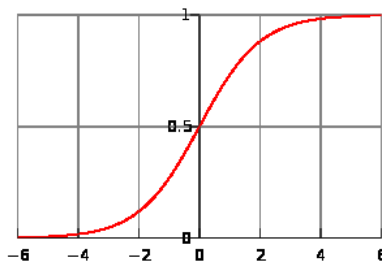
$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = -t$ sind $-\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{t^2 - 2c}}.$$

Insbesondere erhält man bei $c = 0$ die auf \mathbb{R}_+ definierte Lösung

$$y(t) = \frac{1}{t}.$$



Eine logistische Funktion

Beispiel 33.9. Es sei $p(t)$ die Größe einer Population zu einem Zeitpunkt t . Wie setzen voraus, dass die Populationsentwicklung differenzierbar ist; die

Ableitung $p'(t)$ repräsentiert dann das (infinitesimale) Bevölkerungswachstum zum Zeitpunkt t . Den Quotienten

$$r(t) = \frac{p'(t)}{p(t)}$$

nennt man die *Wachstumsrate* zum Zeitpunkt t . Wir fragen uns, inwiefern man den Populationsverlauf aus der Wachstumsrate rekonstruieren kann. Die Wachstumsrate kann von der Zeit (Jahreszeit, Nahrungsvorkommen, Entwicklung von anderen Populationen etc.) abhängen, aber auch von der aktuellen Populationsgröße p . Die Zeitabhängigkeit der Wachstumsrate beruht auf äußeren Einflüssen, während die Abhängigkeit von der aktuellen Populationsgröße eine innere Dynamik ausdrückt. Sie beruht darauf, dass eine große Population sich hemmend auf die Fortpflanzung auswirkt.

Wir beschränken uns auf eine Situation, wo die Wachstumsrate nur von der Populationsgröße abhängt, nicht aber von sonstigen Einflüssen. Dann wird die Wachstumsrate durch eine Funktion $w(p)$ beschrieben, und die Wachstumsrate zum Zeitpunkt t ist demnach durch $r(t) = w(p(t))$ gegeben. Die Wachstumsrate wirkt sich auf die Populationsentwicklung aus. Gemäß dem oben formulierten Zusammenhang gilt

$$p'(t) = p(t) \cdot r(t) = p(t) \cdot w(p(t)).$$

Es liegt also eine Differentialgleichung der Form

$$p' = p \cdot w(p)$$

vor, die zeitunabhängig ist, so dass insbesondere getrennte Variablen vorliegen (mit der Funktion $h(p) = p \cdot w(p)$). Bei *konstanter Wachstumsrate*

$$w(p) = a$$

liegt die Differentialgleichung $p' = ap$ vor, deren Lösungen die Funktionen ce^{at} sind. Das bedeutet *exponentielles Wachstum*.

Wenn wir die Wachstumsrate so ansetzen, dass es bei einer gewissen Populationsgröße g kein Wachstum mehr gibt, und bei sehr kleiner Bevölkerung die Wachstumsrate maximal gleich s ist, und dazwischen die Wachstumsrate linear von p abhängt, so erhält man die Wachstumsrate

$$w(p) = s \left(1 - \frac{1}{g}p \right)$$

und die Differentialgleichung

$$p' = sp \left(1 - \frac{1}{g}p \right) = sp - \frac{s}{g}p^2.$$

Eine solche Differentialgleichung nennt man *logistische Differentialgleichung*. Gemäß dem Lösungsansatz für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen müssen wir eine Stammfunktion zu

$$\begin{aligned}\frac{1}{sp\left(1 - \frac{1}{g}p\right)} &= \frac{g}{s} \cdot \frac{1}{p(g-p)} \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{g-p} \right)\end{aligned}$$

finden. Eine solche Stammfunktion ist

$$H(p) = \frac{1}{s}(\ln p - \ln(g-p)) = \frac{1}{s} \ln \frac{p}{g-p}.$$

Zur Berechnung der Umkehrfunktion H^{-1} lösen wir die Gleichung

$$u = \frac{1}{s} \ln \frac{p}{g-p}$$

nach p auf. Es ergibt sich

$$\exp(su) = \frac{p}{g-p}$$

und daraus

$$g \cdot \exp(su) = p + p \cdot \exp(su)$$

und damit

$$p = \frac{g \cdot \exp(su)}{1 + \exp(su)} = \frac{g}{1 + \exp(-su)}.$$

Da die Differentialgleichung zeitunabhängig ist, ist

$$p(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

eine Lösung. Bei $t = 0$ ist $p(0) = \frac{g}{2}$, für $t \rightarrow +\infty$ strebt die Lösung gegen g (die Grenzbevölkerung) und für $t \rightarrow -\infty$ gegen 0.

33. ARBEITSBLATT

33.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 33.1. Bestimme die konstanten Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{\sin(\cos t) - e^{t^5}}{(t^{14} + 8)e^{-t^2} + \sqrt{t^2 + \pi}}(y^2 + 3y - 5)$$

Aufgabe 33.2. Welche Substitution wird im Beweis zu Satz 33.2 durchgeführt?

Aufgabe 33.3. Skizziere die zugrunde liegenden Vektorfelder der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{1}{y}, y' = ty^3 \text{ und } y' = -ty^3$$

sowie die in Beispiel 33.4, Beispiel 33.7 und Beispiel 33.8 angegebenen Lösungskurven.

Aufgabe 33.4. Bestätige die in Beispiel 33.4, Beispiel 33.7 und Beispiel 33.8 gefundenen Lösungskurven der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{1}{y}, y' = ty^3 \text{ und } y' = -ty^3$$

durch Ableiten.

Aufgabe 33.5. Interpretiere eine ortsunabhängige Differentialgleichung als eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen anhand des Lösungsansatzes für getrennte Variablen.

Aufgabe 33.6. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 33.7. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y^n$$

mit $n \geq 1$ mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 33.8. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y^n$$

mit $n \leq -1$ mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 33.9. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = e^y,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 33.10. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{\sin y},$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 33.11. Löse die Differentialgleichung

$$y' = ty$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 33.12.*

Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.

Aufgabe 33.13.*

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ($y > 0$)

$$y' = t^2 y^3$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

Aufgabe 33.14.*

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{t^3}{y^2}, y > 0, t > 0,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

b) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{t^3}{y^2} \text{ mit } y(1) = 1.$$

Aufgabe 33.15. Betrachte die in Beispiel 33.9 gefundenen Lösungen

$$y(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

der logistischen Differentialgleichung.

a) Skizziere diese Funktion (für geeignete s und g).

b) Bestimme die Grenzwerte für $t \rightarrow \infty$ und $t \rightarrow -\infty$.

c) Studiere das Monotonieverhalten dieser Funktionen.

d) Für welche t besitzt die Ableitung von $y(t)$ ein Maximum (für die Funktion selbst bedeutet dies einen Wendepunkt, man spricht auch von einem *Vitalitätsknick*).

e) Über welche Symmetrien verfügen diese Funktionen?

Aufgabe 33.16. Bestimme das Taylor-Polynom vierten Grades im Nullpunkt zur logistischen Funktion

$$y(t) = \frac{2}{1 + e^{-t}}.$$

33.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 33.17. (3 Punkte)

Zeige, dass eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit einer stetigen Funktion

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t),$$

auf einem Intervall I' die Lösungen

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)}$$

besitzt, wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

Aufgabe 33.18. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ty^2, y > 0,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 33.19. (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = t^3 y^3, y > 0,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 33.20. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = (\sin t - 2t)(y^2 + 1), y > 0,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Welche Lösung hat das Anfangswertproblem $y(0) = \pi$?

Aufgabe 33.21. (5 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ty + t$$

mit

- a) dem Lösungsansatz für inhomogene lineare Differentialgleichungen,
- b) dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

34. VORLESUNG - EUKLIDISCHE VEKTORRÄUME

Eine wichtige Zielsetzung dieses Kurses ist es, die Analysis und insbesondere die Konzepte Approximation, Konvergenz, Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf höherdimensionale Situationen zu verallgemeinern. Dazu brauchen wir zunächst einen sinnvollen Abstands begriff.

34.1. Euklidische Vektorräume.

Im Anschauungsraum kann man nicht nur Vektoren addieren und skalieren, sondern ein Vektor hat auch eine Länge, und die Lagebeziehung von zwei Vektoren zueinander wird durch den Winkel zwischen ihnen ausgedrückt. Länge und Winkel werden beide durch den Begriff des *Skalarprodukts* präzisiert. Dafür muss ein reeller Vektorraum² vorliegen.

Definition 34.1. Sei V ein reeller Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Es ist

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in V$ und ebenso in der zweiten Komponente.

- (2) Es ist

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

für alle $v, w \in V$.

- (3) Es ist $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.

Die dabei auftretenden Eigenschaften heißen *Bilinearität* (das ist nur eine andere Bezeichnung für multilinear, wenn der Definitionsbereich das Produkt von zwei Vektorräumen ist), *Symmetrie* und *positive Definitheit*.

²Auch für komplexe Vektorräume gibt es Skalarprodukte, was wir aber nicht behandeln werden.

Beispiel 34.2. Auf dem \mathbb{R}^n ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) = ((v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

ein Skalarprodukt, das man das *Standardskalarprodukt* nennt. Einfache Rechnungen zeigen, dass dies in der Tat ein Skalarprodukt ist.

Beispielsweise ist im \mathbb{R}^3 mit dem Standardskalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = -11.$$

Definition 34.3. Ein reeller, endlichdimensionaler Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, heißt *euklidischer Vektorraum*.

Zu einem euklidischen Vektorraum V ist jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ selbst wieder ein euklidischer Vektorraum, da man das Skalarprodukt auf U einschränken kann und dabei die definierenden Eigenschaften erhalten bleiben.

34.2. Norm und Abstand.

Mit einem Skalarprodukt kann man die Länge eines Vektors und damit auch den Abstand zwischen zwei Vektoren erklären.

Definition 34.4. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Dann nennt man zu einem Vektor $v \in V$ die reelle Zahl

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die *Norm* von v .

Die Norm ist der Abstand (siehe weiter unten) zum Nullpunkt. Im \mathbb{R}^3 mit dem Standardskalarprodukt ist beispielsweise

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}.$$

Dass dies der „richtige“ Abstand zum Nullpunkt ist, beruht auf dem elementargeometrischen Satz von Pythagoras.

Satz 34.5. *Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $\|-\|$. Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Abschätzung, nämlich*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

für alle $v, w \in V$.

Beweis. Bei $w = 0$ ist die Aussage richtig. Sei also $w \neq 0$ und damit auch $\|w\| \neq 0$. Damit hat man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle v - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w, v - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w \right\rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle w, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle v, w \rangle + \frac{\langle v, w \rangle \langle v, w \rangle}{\|w\|^4} \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $\|w\|^2$ und Wurzelziehen ergibt das Resultat. \square

Bemerkung 34.6. Für zwei von 0 verschiedene Vektoren v und w in einem euklidischen Vektorraum V folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, dass

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

ist. Damit kann man mit Hilfe der trigonometrischen Funktion *Kosinus* (als bijektive Abbildung $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$) bzw. der Umkehrfunktion den Winkel zwischen den beiden Vektoren definieren, nämlich durch

$$\angle(v, w) := \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Der Winkel ist also eine reelle Zahl zwischen 0 und π . Die obige Gleichung kann man auch als

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\angle(v, w)),$$

was die Möglichkeit eröffnet, das Skalarprodukt in dieser Weise zu definieren. Allerdings muss man dann für den Winkel eine unabhängige Definition finden. Dieser Zugang ist etwas intuitiver, hat aber rechnerisch und beweistechnisch viele Nachteile.

Lemma 34.7. *Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Dann gelten für die zugehörige Norm folgende Eigenschaften.*

- (1) *Es ist $\|v\| \geq 0$.*
- (2) *Es ist $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.*
- (3) *Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt*

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

- (4) *Für $v, w \in V$ gilt*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften folgen direkt aus der Definition des Skalarprodukts. Die Multiplikativität folgt aus

$$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2.$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung schreiben wir

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \langle v, w \rangle \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 |\langle v, w \rangle|\end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 34.5 ist dies $\leq (\|v\| + \|w\|)^2$. Diese Abschätzung überträgt sich auf die Quadratwurzeln. \square

Die folgende Aussage heißt *Polarisationsformel*.

Lemma 34.8. *Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $\|-\|$. Dann gilt die Beziehung*

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 34.3. \square

Definition 34.9. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zu zwei Vektoren $v, w \in V$ nennt man

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

den *Abstand* zwischen v und w .

Lemma 34.10. *Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Dann besitzt der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften (dabei sind $u, v, w \in V$).*

- (1) *Es ist $d(v, w) \geq 0$.*
- (2) *Es ist $d(v, w) = 0$ genau dann, wenn $v = w$.*
- (3) *Es ist $d(v, w) = d(w, v)$.*
- (4) *Es ist*

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 34.8. \square

Damit ist ein euklidischer Raum insbesondere ein *metrischer Raum*, womit wir uns in den nächsten Vorlesungen beschäftigen werden.

34.3. Orthogonalität.

Mit dem Skalarprodukt kann man die Eigenschaft zweier Vektoren, aufeinander senkrecht zu stehen, ausdrücken.

Definition 34.11. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Man nennt zwei Vektoren $v, w \in V$ *orthogonal* zueinander (oder *senkrecht*), wenn

$$\langle v, w \rangle = 0$$

ist.

Definition 34.12. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann heißt

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U .

Beispiel 34.13. Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen. Zum eindimensionalen Untervektorraum $\mathbb{R}e_i$ zum Standardvektor e_i besteht

das orthogonale Komplement aus allen Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ 0 \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, deren i -ter Eintrag

0 ist. Zum eindimensionalen Untervektorraum $\mathbb{R}v$ zu einem Vektor

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$$

kann man das orthogonale Komplement bestimmen, indem man den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

bestimmt. Der Orthogonalraum

$$U = (\mathbb{R}v)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$$

besitzt die Dimension $n - 1$, es handelt sich also um eine sogenannte Hyperebene. Man nennt dann v einen *Normalenvektor* für die Hyperebene U .

Zu einem Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$, der durch eine Basis (oder ein Erzeugendensystem) $v_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$, $i = 1, \dots, k$, gegeben ist, bestimmt man das

orthogonale Komplement als Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

wobei $A = (a_{ij})$ die aus den v_i gebildete Matrix ist.

Definition 34.14. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Eine Basis v_1, \dots, v_n von V heißt *Orthonormalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \text{ für alle } i \text{ und } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

gilt.

Die Elemente in einer Orthonormalbasis haben alle die Norm 1 und sie stehen senkrecht aufeinander. Im \mathbb{R}^n ist die Standardbasis eine Orthonormalbasis. Das folgende *Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren* erlaubt es, ausgehend von einer Basis eine Orthonormalbasis zu konstruieren.

Satz 34.15. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und es sei v_1, v_2, \dots, v_n eine Basis von V . Dann gibt es eine Orthonormalbasis u_1, u_2, \dots, u_n von V mit³*

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_i \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_i \rangle$$

für alle $i = 1, \dots, n$.

Beweis. Die Aussage wird durch Induktion über i bewiesen, d.h. es wird sukzessive eine Familie von orthonormalen Vektoren konstruiert, die jeweils den gleichen Untervektorraum aufspannen. Für $i = 1$ muss man lediglich v_1 normieren, also durch

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

ersetzen. Sei die Aussage für i schon bewiesen und sei eine Familie von orthonormalen Vektoren u_1, \dots, u_i mit $\langle u_1, \dots, u_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ bereits konstruiert. Wir setzen

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \langle v_{i+1}, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle v_{i+1}, u_i \rangle u_i.$$

Dieser Vektor steht senkrecht auf allen u_1, \dots, u_i und offenbar ist

$$\langle u_1, \dots, u_i, w_{i+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_i, v_{i+1} \rangle.$$

Durch Normieren von w_{i+1} erhält man u_{i+1} . □

Beispiel 34.16. Es sei V der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto 2x + 3y - z.$$

Als Unterraum des \mathbb{R}^3 trägt V ein Skalarprodukt. Wir möchten eine Orthonormalbasis von V bestimmen. Dazu betrachten wir die Basis bestehend aus den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

³Hier bezeichnet $\langle - \rangle$ den von den Vektoren erzeugten Untervektorraum, nicht das Skalarprodukt.

Es ist $\|v_1\| = \sqrt{5}$ und somit ist

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

der zugehörige normierte Vektor. Gemäß dem⁴ Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren setzen wir

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\|w_2\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{36}{25} + 1 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{70}{25}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

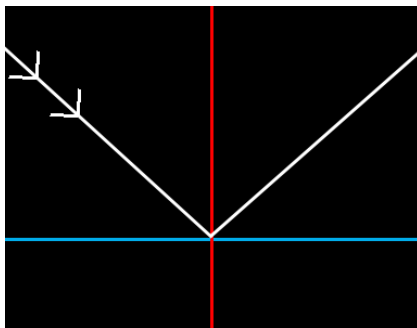
und daher ist

$$u_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

der zweite Vektor der Orthonormalbasis.

Bemerkung 34.17. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit dem orthogonalen Komplement U^\perp . Es sei $E = P + U$ ein affiner Unterraum und $v \in V$, $v \neq 0$, ein Vektor und $G = Q + \mathbb{R}v$ die Gerade durch einen Punkt Q mit dem Richtungsvektor v . Man denke bei E an eine fixierte Gerade (eine Bande) in der Ebene oder eine Spiegelungsebene im Raum und bei v an die Richtung einer Billardkugel oder eines Lichtstrahls, die Bewegung ist durch die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow V$, $t \mapsto Q + tv$, gegeben.

⁴Häufig ist es numerisch geschickter, zuerst nur zu orthogonalisieren und die Normierung erst zum Schluss durchzuführen, siehe Beispiel 34.16.

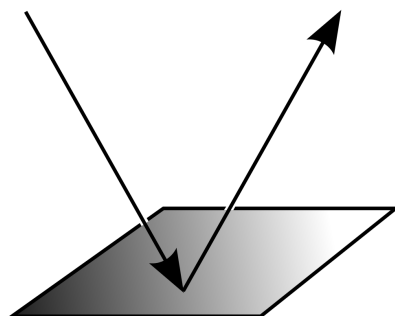


Wenn die Bewegung auf E trifft, so wird die Bewegung nach dem *Reflexionsgesetz* reflektiert, dabei gilt die Beziehung *Einfallswinkel* ist gleich *Ausfallswinkel*. Wir bestimmen den Ausfallsvektor und die Gesamtbewegung. Wir können $P = Q$ annehmen und dass die Bewegung zum Zeitpunkt 0 diesen Punkt erreicht. Der Einfallsvektor v besitzt nach Aufgabe 34.13 eine eindeutige Zerlegung

$$v = u + w$$

mit $u \in U$ und $w \in U^\perp$. Der Vektor w wird also zerlegt in die Spiegelungskomponente u und in die Lotkomponente w . Der Ausfallsvektor v^* ist dann gleich $u - w$, es gilt

$$\langle v, u \rangle = \langle u + w, u \rangle = \langle u, u \rangle = \langle u - w, u \rangle = \langle v^*, u \rangle.$$



Ein Vektor, der zu U gehört, wird gar nicht reflektiert, ein Vektor, der senkrecht auf U steht, wird in sein Negatives reflektiert. Die gesamte (ungebremsste) Bewegung ist durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} P + t(u + w) & \text{für } t \leq 0, \\ P + t(u - w) & \text{für } t \geq 0, \end{cases}$$

gegeben.

34.4. Der Gradient.

Definition 34.18. Sei K ein Körper und sei V ein K -Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow K$$

heißt eine *Linearform* auf V .

Lemma 34.19. *Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und*

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $w \in V$ mit

$$f(v) = \langle w, v \rangle.$$

Wenn u_1, \dots, u_n eine Orthonormalbasis von V und $f(u_i) = a_i$ ist, so ist dieser Vektor gleich $w = \sum_{i=1}^n a_i u_i$.

Beweis. Die Aussage folgt aus dem Zusatz. Sei also eine Orthonormalbasis u_1, \dots, u_n gegeben und sei $w = \sum_{i=1}^n a_i u_i$. Dann ist für jedes j

$$\langle w, u_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i u_i, u_j \right\rangle = a_j = f(u_j).$$

D.h. die beiden linearen Abbildungen $v \mapsto \langle w, v \rangle$ und f stimmen auf einer Basis überein, sind also nach Satz 24.7 identisch. Für jeden anderen Vektor $w' = \sum_{i=1}^n b_i u_i$ ist der Wert der zugehörigen Linearform an mindestens einem Basisvektor u_j von $f(u_j)$ verschieden, daher liegt Eindeutigkeit vor. \square

Dieser Vektor, mit dem man die Linearform mit Hilfe des Skalarproduktes beschreiben kann, heißt *Gradient* zur Linearform.

34. ARBEITSBLATT

34.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 34.1. Zeige, dass das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n in der Tat ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 34.2. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass die Einschränkung des Skalarproduktes auf U ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 34.3. Welche elementargeometrischen Beweise für den Satz des Pythagoras kennen Sie?

Aufgabe 34.4.*

Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $\|-\|$. Zeige, dass die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

gilt.

Aufgabe 34.5.*

Was bedeutet die Polarisationsformel für ein reelles Skalarprodukt für die Multiplikation von reellen Zahlen?

Aufgabe 34.6. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Bestätige

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4 \langle x, y \rangle.$$

Aufgabe 34.7. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $\|-\|$. Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

gilt.

Aufgabe 34.8. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften besitzt (dabei sind $u, v, w \in V$).

- (1) Es ist $d(v, w) \geq 0$.
- (2) Es ist $d(v, w) = 0$ genau dann, wenn $v = w$.
- (3) Es ist $d(v, w) = d(w, v)$.
- (4) Es ist

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$

Aufgabe 34.9. Es sei $n \geq 2$. Zeige, dass für die Norm $\|x\| := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$ auf dem \mathbb{R}^n kein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ mit der Eigenschaft $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ existiert.

Aufgabe 34.10. Bestimme, welche der folgenden Vektoren im \mathbb{R}^3 zueinander orthogonal bezüglich des Standardskalarproduktes sind.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 34.11. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass das orthogonale Komplement ebenfalls ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 34.12.*

Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 34.13. Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im \mathbb{R}^4 .

Aufgabe 34.14. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zu Untervektorräumen $U \subseteq U' \subseteq V$ ist

$$U^\perp \supseteq U'^\perp.$$

(2) Es ist $0^\perp = V$ und $V^\perp = 0$.

(3) Es sei V endlichdimensional. Dann ist

$$(U^\perp)^\perp = U.$$

(4) Es sei V endlichdimensional. Dann ist

$$\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U).$$

Aufgabe 34.15.*

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des \mathbb{R}^3 an.

Aufgabe 34.16. Der \mathbb{R}^3 sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto 3x + y + 7z,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U .

Es seien V, W Vektorräume über \mathbb{K} mit Skalarprodukten und

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt φ eine *Isometrie*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Aufgabe 34.17.*

Es sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n . Zeige, dass eine Vektorfamilie $u_1, \dots, u_n \in V$ genau dann eine Orthonormalbasis von V ist, wenn die zugehörige lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto u_i,$$

eine Isometrie zwischen \mathbb{R}^n und V ist.

Aufgabe 34.18. Man gebe ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, die keine Isometrie ist, für die aber für alle $u, v \in V$ die Beziehung

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = 0$$

gilt.

Für die folgenden Aufgaben siehe Bemerkung 34.17. Die Spiegelung muss nicht notwendigerweise an einem Unterraum, sondern kann auch an einem stückweise linearen Objekt, wie beispielsweise einer rechteckförmigen Billardbande, passieren.

Aufgabe 34.19. Bestimme die Bewegung im \mathbb{R}^2 , die linear durch den Punkt $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ verläuft und an der durch $3x + 7y = 5$ gegebenen Gerade reflektiert wird.

Aufgabe 34.20. Bestimme die Bewegung im \mathbb{R}^2 , die linear durch den Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ verläuft und am Achsenkreuz reflektiert wird.

Aufgabe 34.21.*

Es sei ein quadratischer Billardtisch ohne Löcher mit einer Seitenlänge von einem Meter gegeben, darauf bewegt sich eine punktförmige Kugel ohne Bremswirkung nach dem Reflexionsprinzip Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel.

- (1) Beschreibe durch eine Skizze (inklusive Winkel) eine periodische Bewegung, bei der zwei Randpunkte getroffen werden.
- (2) Beschreibe durch eine Skizze (inklusive Winkel) eine periodische Bewegung, bei der vier Randpunkte getroffen werden.
- (3) Beschreibe durch eine Skizze (inklusive Winkel) eine periodische Bewegung, bei der acht Randpunkte getroffen werden.
- (4) Zeige, dass es keine periodische Bewegung gibt, bei der drei Randpunkte getroffen werden.

Aufgabe 34.22. Bestimme die Bewegung im \mathbb{R}^3 , die linear durch den Punkt

$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ verläuft und an der durch

$$6x - y + 4z = 3$$

gegebenen Ebene E reflektiert wird.

Aufgabe 34.23. Betrachte die Linearform

$$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 4z.$$

- (1) Bestimme den Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = L(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^3,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

- (2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y - 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $\varphi = L|_E$ die Einschränkung von L auf E . Bestimme den Vektor $w \in E$ mit der Eigenschaft

$$\langle w, v \rangle = \varphi(v) \text{ für alle } v \in E,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E bezeichnet.

Aufgabe 34.24. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, der mit dem induzierten Skalarprodukt versehen sei. Es sei

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform und $v \in V$ der zugehörige Gradient im Sinne von Lemma 34.19. Zeige, dass der Gradient $u \in U$ zur Einschränkung $f|_U$ die orthogonale Projektion von v auf U ist.

Aufgabe 34.25. Wir betrachten die Linearform

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y.$$

- (1) Bestimme den Gradienten zu φ bezüglich des Standardskalarproduktes.
- (2) Bestimme den Gradienten zu φ bezüglich des Skalarproduktes Ψ auf \mathbb{R}^2 , das durch

$$\Psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right) = 2xz + 3yw$$

gegeben ist.

34.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 34.26. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Beweise den *Satz des Pythagoras*: Für zwei Vektoren $v, w \in V$, die senkrecht aufeinander stehen, gilt die Beziehung

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Aufgabe 34.27. Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im \mathbb{R}^4 .

Aufgabe 34.28. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $u_1, \dots, u_n \in V$ eine Orthonormalbasis von V . Zeige, dass für jeden Vektor $v \in V$ die Beziehung

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$$

gilt.

Aufgabe 34.29. Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des \mathbb{R}^3 , versehen mit dem Standardskalarprodukt, an.

Aufgabe 34.30. Der \mathbb{R}^4 sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, w) \longmapsto 4x - 3y + 2z - 5w,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U .

Aufgabe 34.31. (6 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1) φ ist eine Isometrie.
- (2) Für jeden Vektor v mit $\|v\| = 1$ ist auch $\|\varphi(v)\| = 1$.
- (3) Für jede Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \dots, n$, ist auch $\varphi(u_i), i = 1, \dots, n$, eine Orthonormalbasis.
- (4) Es gibt eine Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \dots, n$, derart, dass auch $\varphi(u_i), i = 1, \dots, n$, eine Orthonormalbasis ist.

35. VORLESUNG - METRISCHE RÄUME

35.1. Metrische Räume.

Euklidische Räume besitzen nach Definition ein Skalarprodukt. Darauf aufbauend kann man einfach die Norm eines Vektors und den Abstand zwischen zwei Vektoren definieren. Die wichtigsten Eigenschaften dieses euklidischen Abstandes werden im Begriff der *Metrik* bzw. des *metrischen Raumes* axiomatisiert.

Definition 35.1. Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Metrik* (oder *Distanzfunktion*), wenn für alle $x, y, z \in M$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist (Definitheit),
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie), und
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (M, d) , wobei M eine Menge und $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik ist.

Man kann leicht aus den Bedingungen folgern, dass eine Metrik nur nicht-negative Werte annimmt. Der Wert $d(x, y)$ gibt den Abstand der Punkte x und y bezüglich d an. Oft wird die Metrik nicht in der Notation erwähnt (man sagt einfach, dass M ein metrischer Raum ist), obwohl es Situationen gibt, in denen verschiedene Metriken auf ein- und derselben Menge betrachtet werden.

Beispiel 35.2. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und

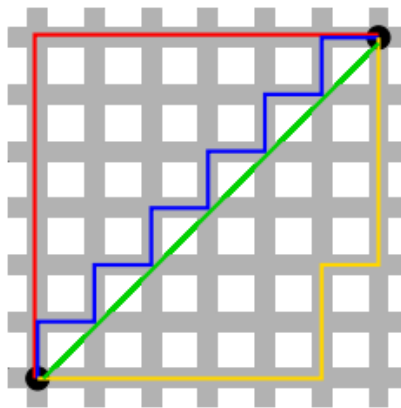
$$d(v, w) := \|v - w\| := \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}$$

der zugehörige Abstand. Dieser besitzt nach Lemma 34.10 die Eigenschaften einer Metrik. Insbesondere ist im \mathbb{R}^n der durch

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

gegebene *euklidische Abstand* eine Metrik.

Wenn wir nichts anderes sagen, so verstehen wir den \mathbb{R}^n und den $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ stets mit dem euklidischen Abstand. Insbesondere sind die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ mit der durch den Betrag definierten Metrik ein metrischer Raum.



Die Summenmetrik heißt auch *Taxi-Metrik*. Die grüne Linie repräsentiert den euklidischen Abstand, die anderen den Summenabstand.

Beispiel 35.3. Auf dem \mathbb{R}^n ist

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

eine Metrik, die man die *Summenmetrik* nennt.

Beispiel 35.4. Auf dem \mathbb{R}^n ist

$$d(x, y) = \max(|x_i - y_i|, i = 1, \dots, n)$$

eine Metrik, die man die *Maximumsmetrik* nennt.

Beispiel 35.5. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann ist T ebenfalls ein metrischer Raum, wenn man

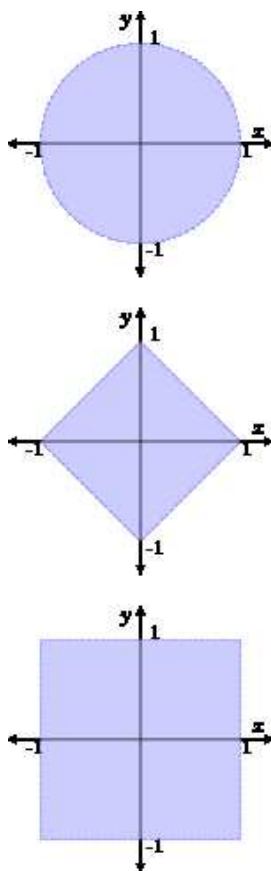
$$d_T(x, y) := d(x, y)$$

für alle $x, y \in T$ setzt. Diese Metrik heißt die *induzierte Metrik*.

Beispiel 35.6. Zu einer beliebigen Menge M kann man durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik definieren, die die *diskrete Metrik* heißt.



Die Gestalt der Kugelumgebungen hängt von der Metrik ab.

Definition 35.7. Es sei (M, d) ein metrischer Raum, $x \in M$ und $\epsilon > 0$ eine positive reelle Zahl. Es ist

$$U(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

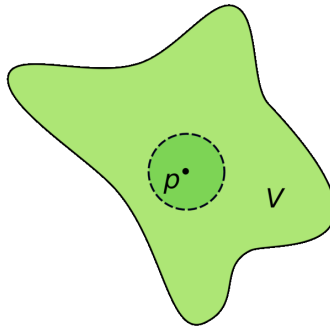
die *offene* und

$$B(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$$

die *abgeschlossene* ϵ -Kugel um x .

Natürlich müssen Kugeln nicht unbedingt kugelförmig aussehen, aber sie tun es in der euklidischen Metrik. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $U(x, \epsilon)$ einfach das beidseitig offene Intervall $]x - \epsilon, x + \epsilon[$.

35.2. Offene Teilmengen.



Eine Teilmenge ist offen, wenn jeder Punkt darin mit einer vollen Kugelumgebung drin liegt. Bei einer solchen Menge ist es entscheidend, ob die *Randpunkte* dazu gehören oder nicht.

Definition 35.8. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt *offen* (in (M, d)), wenn für jedes $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ mit

$$U(x, \epsilon) \subseteq U$$

existiert.

Definition 35.9. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $M \setminus A$ offen ist.

Achtung! Abgeschlossen ist *nicht* das „Gegenteil“ von offen. Die „allermeisten“ Teilmengen eines metrischen Raumes sind weder offen noch abgeschlossen, es gibt aber auch Teilmengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, z.B. die leere Teilmenge und die Gesamtmenge.

Lemma 35.10. *Es sei M ein metrischer Raum und $x \in M$ ein Punkt. Dann sind die offenen Kugeln $U(x, \epsilon)$ offen und die abgeschlossenen Kugeln $B(x, \epsilon)$ abgeschlossen.*

Beweis. Sei $y \in U(x, \epsilon)$, d.h. es ist $d(x, y) < \epsilon$. Wir setzen $a = \epsilon - d(x, y) > 0$ und behaupten, dass $U(y, a) \subseteq U(x, \epsilon)$ ist. Dazu sei $z \in U(y, a)$. Dann ist aufgrund der Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + a < \epsilon$$

und somit $z \in U(x, \epsilon)$. Für die zweite Behauptung siehe Aufgabe 35.7. \square

Lemma 35.11. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) Die leere Menge \emptyset und die Gesamtmenge M sind offen.

- (2) Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien $U_i, i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

- (3) Es sei I eine endliche Indexmenge und seien $U_i, i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

offen.

Beweis. Siehe Aufgabe 35.9. □

35.3. Folgen in metrischen Räumen.

Wir besprechen die Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum. Eine Folge im \mathbb{R}^2 ist beispielsweise durch

$$x_n = (\cos n, \sin n), n \in \mathbb{N}.$$

Es handelt sich um eine Folge, die sich auf dem Einheitskreis bewegt, und zwar dreht sich der Punkt um die Bogenlänge 1 (also um ca. 57,3 Grad). Die Folgenglieder nähern sich also nicht untereinander an, sodass keine Konvergenz zu erwarten ist. Bei der Folge

$$y_n = \left(\frac{1}{n} \cos n, \frac{1}{n} \sin n \right), n \in \mathbb{N},$$

bewegen sich die Glieder auf einer „gedachten Spirale“. Die Punkte drehen sich nach wie vor um den gleichen Winkel, allerdings wird der Abstand zum Nullpunkt immer kleiner, sodass man Konvergenz gegen 0 erwarten kann.

Definition 35.12. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M . Man sagt, dass die Folge gegen $x \in M$ *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$d(x_n, x) \leq \epsilon$$

gilt. In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert.), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Diese Definition stimmt natürlich für $M = \mathbb{R}$ mit unserem bisherigen Begriff für konvergente Folge überein.

Lemma 35.13. *Der \mathbb{R}^m sei mit der euklidischen Metrik versehen und sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R}^m mit*

$$z_n = (z_{1n}, \dots, z_{mn}).$$

Dann konvergiert die Folge genau dann, wenn alle Komponentenfolgen

$$(z_{in})_{n \in \mathbb{N}}$$

in \mathbb{R} konvergieren.

Beweis. Es sei die Gesamtfolge konvergent gegen $w = (w_1, \dots, w_m)$. Wir behaupten, dass die i -te Komponentenfolge $(z_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen w_i konvergiert. Sei (ohne Einschränkung) $i = 1$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz der Gesamtfolge gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(z_n, w) \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Daher ist

$$\begin{aligned} |z_{1n} - w_1| &= \sqrt{(z_{1n} - w_1)^2} \\ &\leq \sqrt{(z_{1n} - w_1)^2 + (z_{2n} - w_2)^2 + \dots + (z_{mn} - w_m)^2} \\ &= d(z_n, w) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Seien nun alle Komponentenfolgen konvergent, wobei die i -te Folge den Grenzwert w_i besitzen möge, und sei ein $\epsilon \geq 0$ vorgegeben. Wir setzen $w = (w_1, \dots, w_m)$ und behaupten, dass die Folge gegen w konvergiert. Zu ϵ/m gibt es für jede Komponentenfolge ein n_{0i} derart, dass $|z_{in} - w_i| \leq \epsilon/m$ für alle $n \geq n_{0i}$ gilt. Dann gilt für alle

$$n \geq n_0 := \max(n_{0i}, i = 1, \dots, m)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} d(z_n, w) &= \sqrt{(z_{1n} - w_1)^2 + \dots + (z_{mn} - w_m)^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\epsilon}{m}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{m}} \\ &= \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Insbesondere konvergiert eine Folge von komplexen Zahlen genau dann, wenn die zugehörigen Folgen der Realteile und der Imaginärteile konvergieren.

Für eine konvergente reelle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ haben wir im ersten Semester die Eigenschaft kennengelernt, dass wenn sämtliche Folgenglieder $\geq a$ sind, dass dann auch der Limes $\geq a$ ist (für „ $>$ “ gilt das nicht). Die Hinrichtung der folgenden Aussage ist eine wesentliche Verallgemeinerung dieses Sachverhalts.

Satz 35.14. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$, die in M konvergiert, bereits in T konvergiert.*

Beweis. Sei zunächst T abgeschlossen und eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ gegeben, die in M gegen $x \in M$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $x \in T$ ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann liegt x im offenen Komplement von T und daher gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass der gesamte ϵ -Ball $U(x, \epsilon)$ im Komplement von T liegt. Also ist

$$T \cap U(x, \epsilon) = \emptyset.$$

Da die Folge aber gegen x konvergiert, gibt es ein n_0 derart, dass alle Folgenglieder x_n , $n \geq n_0$, zu diesem Ball gehören. Da sie andererseits in T liegen, ist dies ein Widerspruch. Sei nun T nicht abgeschlossen. Wir müssen eine Folge in T konstruieren, die in M konvergiert, deren Grenzwert aber nicht zu T gehört. Da T nicht abgeschlossen ist, ist das Komplement $U := M \setminus T$ nicht offen. D.h. es gibt einen Punkt $x \in U$ derart, dass in jedem ϵ -Ball von x auch Punkte außerhalb von U , also in T liegen. Insbesondere ist also für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ der Durchschnitt

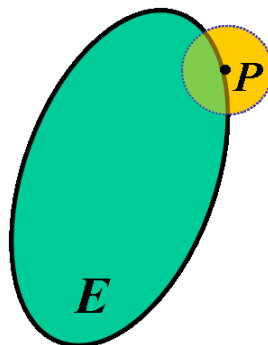
$$T \cap U\left(x, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset.$$

Wir wählen aus dieser Schnittmenge ein Element x_n und behaupten, dass die sich ergebende Folge die gewünschten Eigenschaften besitzt. Zunächst liegen nach Konstruktion alle Folgenglieder in T . Die Folge konvergiert gegen x , da man sich hierzu auf

$$\epsilon = 1/n$$

beschränken kann und alle Folgenglieder x_m , $m \geq n$, in $U(x, \frac{1}{m}) \subseteq U(x, \frac{1}{n})$ liegen. Da der Grenzwert einer Folge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist, und $x \notin T$ ist, konvergiert die Folge in T nicht. \square

35.4. Berührungspunkte.



Definition 35.15. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Ein Punkt $a \in M$ heißt *Berührungspunkt* von T , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ der Durchschnitt

$$T \cap U(a, \epsilon) \neq \emptyset.$$

Beispielsweise sind 0 und 1 Berührungspunkte des offenen Intervalls $]0, 1[$ oder 0 ist ein Berührungspunkt von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Oft ist T der Definitionsbereich einer Abbildung f in einen weiteren metrischen Raum N und man fragt sich, ob es eine sinnvolle Fortsetzung von f in einen Berührungspunkt $P \notin T$ gibt. Siehe insbesondere die 37. Vorlesung.

35. ARBEITSBLATT

35.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 35.1.*

Es seien $P = (\frac{3}{4}, -1)$ und $Q = (2, \frac{1}{5})$ zwei Punkte im \mathbb{R}^2 . Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in

- der euklidischen Metrik,
- der Summenmetrik,
- der Maximumsmetrik.
- Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Aufgabe 35.2. Zeige, dass die Summenmetrik im \mathbb{R}^n eine Metrik ist.

Aufgabe 35.3. Zeige, dass die Maximumsmetrik im \mathbb{R}^n eine Metrik ist.

Aufgabe 35.4. Es sei M die Parabel, also der Graph der Quadratfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2.$$

Entscheide, ob auf M durch

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2|$$

bzw. durch

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |y_1 - y_2|$$

eine Metrik definiert wird.

Aufgabe 35.5. Es sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

der Einheitskreis. Zeige, dass man auf K eine Metrik definieren kann, indem man $d(P, Q)$ ($P, Q \in K$) als den positiven Winkel zwischen den zugehörigen Strahlen durch den Nullpunkt $(0, 0)$ ansetzt.

Aufgabe 35.6.*

Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die offenen Kugeln $U(x, \epsilon)$ offen sind.

Aufgabe 35.7. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die abgeschlossenen Kugeln $B(x, \epsilon)$ abgeschlossen sind.

Aufgabe 35.8.*

Wir betrachten im \mathbb{R}^2 die offenen Bälle $U = U((0, 0), 1)$ und $V = U((2, 0), 2)$. Man gebe für jeden Punkt

$$x = (a, b) \in U \cap V$$

einen expliziten offenen Ball mit Mittelpunkt x an, der ganz innerhalb von $U \cap V$ liegt.

Aufgabe 35.9. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten.

- (1) Die leere Menge \emptyset und die Gesamtmenge M sind offen.
- (2) Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien $U_i, i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

- (3) Es sei I eine endliche Indexmenge und seien $U_i, i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

offen.

Aufgabe 35.10. Zeige, dass auf dem \mathbb{R}^n die euklidische Metrik, die Summenmetrik und die Maximumsmetrik dieselben offenen Mengen definieren.

Aufgabe 35.11. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass in M die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten x und y gibt es offene Mengen U und V mit

$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

Aufgabe 35.12.*

Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass jede endliche Teilmenge $T \subseteq M$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 35.13. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen in \mathbb{C} abgeschlossen ist.

Aufgabe 35.14. Zeige, dass die Menge

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

in \mathbb{R}^2 abgeschlossen ist.

Aufgabe 35.15. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} in \mathbb{R} weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 35.16. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass eine Teilmenge $Z \subseteq T$ genau dann offen in T ist, wenn es eine in M offene Menge U mit $Z = T \cap U$ gibt.

Aufgabe 35.17. Zeige, dass auf jeder Menge M die diskrete Metrik in der Tat eine Metrik ist.

Aufgabe 35.18. Sei M eine Menge, die mit der diskreten Metrik versehen sei. Zeige, dass jede Teilmenge von M sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 35.19. Bestimme den minimalen Abstand von $(4, 1, -5)$ zu einem Punkt der Ebene E , die durch die Gleichung $2x - 7y + 3z = 0$ gegeben ist.

Aufgabe 35.20. Entscheide, ob im \mathbb{R}^3 (versehen mit der euklidischen Metrik) die Folge

$$x_n = \left(\frac{n^5 - 4n^2}{e^n}, \frac{-5n^4 + n^3 - n^{-1}}{13n^4 - 9n^2 + 5n + 6}, \frac{4 \cos^3 n + 6n^2 + 5n - 2}{2n^2 - \sin^7 n} \right)$$

konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 35.21. Zeige, dass eine Folge in einem metrischen Raum maximal einen Grenzwert besitzt.

Aufgabe 35.22.*

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| < 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 35.23. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| > 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

Aufgabe 35.24. Zu einem Dreieck $\Delta = (A, B, C)$ ist das Seitenmittelpunktsdreieck durch die Eckpunkte $\frac{1}{2}(A + B)$, $\frac{1}{2}(A + C)$, $\frac{1}{2}(B + C)$ gegeben. Diese Konstruktion ergibt eine rekursiv definierte Folge von Dreiecken Δ_n , wobei $\Delta_1 = \Delta$ und Δ_{n+1} das Seitenmittelpunktsdreieck zu Δ_n ist. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R}^2 mit $x_n \in \Delta_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 35.25. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum M . Zeige, dass die Folge genau dann gegen $x \in M$ konvergiert, wenn die Folge der Abstände $d(x_n, x)$ in \mathbb{R} gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 35.26.*

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum M . Zeige, dass die Folge genau dann gegen $x \in M$ konvergiert, wenn in jeder offenen Menge U mit $x \in U$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.

35.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 35.27. (4 (1+1+1+1) Punkte)

Es seien $P = (3, \frac{5}{2}, 0)$ und $Q = (1, -6, \frac{2}{5})$ zwei Punkte im \mathbb{R}^3 . Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

- euklidischen Metrik,
- der Summenmetrik,
- und der Maximumsmetrik.

Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Aufgabe 35.28. (2 Punkte)

Entscheide, ob für vier Punkte A, B, C, X in der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 stets die Abschätzung

$$d(A, B) + d(B, C) \leq d(A, X) + d(B, X) + d(C, X)$$

gilt.

Aufgabe 35.29. (6 (2+2+2) Punkte)

a) Definiere auf der Einheitskugel, also der Kugeloberfläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

die „geodätische Metrik“, bei der der Abstand zweier Punkte $P, Q \in S$ durch die Länge der kürzesten Verbindung auf der Oberfläche gegeben ist.

b) Zeige, dass es sich um eine Metrik handelt.

c) Welchen Abstand besitzen die Punkte $(0, 0, 1)$ und $(1, 0, 0)$ in der euklidischen und in der geodätischen Metrik?

Die kürzeste Verbindung liegt auf dem Großkreis, den man erhält, wenn man die Kugeloberfläche mit der durch $P, Q, (0, 0, 0)$ gegebenen Ebene schneidet (wann definieren diese drei Punkte keine Ebene?). Die Formel für den Kreisumfang und die Tatsache, dass der Winkel proportional zur Bogenlänge ist, darf verwendet werden.

Aufgabe 35.30. (3 Punkte)

Für welche Punkte (t, t^2) der Standardparabel wird der Abstand zum Punkt $(0, 1)$ minimal?

Aufgabe 35.31. (3 Punkte)

Es seien P und Q zwei verschiedene Punkte im \mathbb{R}^2 und G die dadurch definierte Gerade. Zeige, dass G abgeschlossen in \mathbb{R}^2 ist.

Aufgabe 35.32. (4 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M , die gegen $x \in M$ konvergiert. Es sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Folge derart, dass die Abstände $d(x_n, y_n)$ eine Nullfolge in \mathbb{R} sei. Zeige, dass auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

36. VORLESUNG - STETIGE ABBILDUNGEN

Ein metrischer Raum ist dadurch ausgezeichnet, dass es in ihm eine Abstandsfunktion gibt, und dass dadurch zwei Punkte „näher“ zueinander liegen können als zwei andere Punkte. Bei einer Abbildung

$$f: L \longrightarrow M$$

zwischen zwei metrischen Räumen kann man sich fragen, inwiefern der Abstand im Werteraum M durch den Abstand im Definitionsraum L kontrollierbar ist. Sei $x \in L$ und $y = f(x)$ der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte x' , die „nahe“ an x sind, auch die Bildpunkte $f(x')$ „nahe“ an $f(x)$ sind. Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dieses ϵ repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit“ (oder „Zieltoleranz“). Die Frage ist dann, ob man ein $\delta > 0$ finden kann (eine „Startgenauigkeit“ oder „Starttoleranz“) mit der Eigenschaft, dass für alle x' mit $d(x, x') \leq \delta$ die Beziehung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung.

36.1. Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen.

Definition 36.1. Seien (L, d_1) und (M, d_2) metrische Räume,

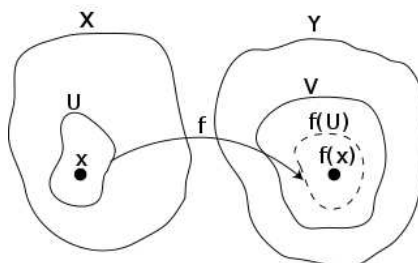
$$f: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung und $x \in L$. Die Abbildung f heißt *stetig in x* , wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, dass

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$$

gilt. Die Abbildung f heißt *stetig*, wenn sie stetig in x für jedes $x \in L$ ist.

Statt mit den abgeschlossenen Ballumgebungen könnte man hier genauso gut mit den offenen Ballumgebungen arbeiten. Die einfachsten Beispiele für stetige Abbildungen sind konstante Abbildungen, die Identität eines metrischen Raumes und die Inklusion $T \subseteq M$ einer mit der induzierten Metrik versehenen Teilmenge eines metrischen Raumes. Siehe dazu die Aufgaben. Bei $L = M = \mathbb{R}$ stimmt diese Definition mit der bisherigen überein.



Der folgende Satz heißt *Folgenkriterium* und ist eine direkte Verallgemeinerung von Lemma 10.5.

Lemma 36.2. *Es sei*

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M und sei $x \in L$ ein Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) *f ist stetig im Punkt x .*
- (2) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass aus $d(x, x') \leq \delta$ folgt, dass*

$$d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$$

ist.

- (3) *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in L mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar. Sei nun (2) erfüllt und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in L , die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (2) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$d(x_n, x) \leq \delta$$

gilt. Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert. Sei (3) erfüllt und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir nehmen an, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in L$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand größer als ϵ besitzt. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl n gibt es ein $x_n \in L$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x , aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenwerte zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (3). \square

Satz 36.3. *Es sei*

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) *f ist stetig in jedem Punkt $x \in L$.*

- (2) Für jeden Punkt $x \in L$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass aus $d(x, x') \leq \delta$ folgt, dass $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ ist.
- (3) Für jeden Punkt $x \in L$ und jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in L mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.
- (4) Für jede offene Menge $V \subseteq M$ ist auch das Urbild $f^{-1}(V) = \{x \in L \mid f(x) \in V\}$ offen.

Beweis. Die Äquivalenz der ersten drei Formulierungen folgt direkt aus Lemma 36.2. Sei (1) erfüllt und eine offene Menge $V \subseteq M$ gegeben mit dem Urbild $U := f^{-1}(V)$. Sei $x \in U$ ein Punkt mit dem Bildpunkt $y = f(x) \in V$. Da V offen ist, gibt es nach Definition ein $\epsilon > 0$ mit $U(y, \epsilon) \subseteq V$. Nach (2) gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(U(x, \delta)) \subseteq U(y, \epsilon)$. Daher ist

$$x \in U(x, \delta) \subseteq U$$

und wir haben eine offene Ballumgebung von x innerhalb des Urbilds gefunden. Deshalb ist U offen. Sei (4) erfüllt und $x \in L$ mit $y = f(x)$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da der offene Ball $U(y, \epsilon)$ offen ist, ist wegen (4) auch das Urbild $f^{-1}(U(y, \epsilon))$ offen. Da x zu dieser Menge gehört, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(y, \epsilon)),$$

so dass (1) erfüllt ist. □

Lemma 36.4. *Seien L, M, N metrische Räume und seien*

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

stetige Abbildungen. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig.

Beweis. Dies folgt am einfachsten aus der Charakterisierung von stetig mit offenen Mengen, siehe Satz 36.3. □

36.2. Verknüpfungen und stetige Abbildungen.

Wir verwenden das Symbol \mathbb{K} als gemeinsame Bezeichnung für \mathbb{R} und \mathbb{C} . Wegen $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ existiert auf \mathbb{C} eine Metrik, die durch den komplexen Betrag gegeben ist.

Lemma 36.5. *Die Negation*

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto -x,$$

und die Inversenbildung

$$\mathbb{K} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}, x \longmapsto x^{-1},$$

sind stetig.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus

$$|-x - (-y)| = |-x + y|.$$

Zur zweiten Aussage sei $x \neq 0$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Sei $b = |x| > 0$. Wir setzen $\delta = \min\left(\frac{b^2\epsilon}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Dann gilt für jedes y mit $|x - y| \leq \delta$ die Abschätzung (wegen $|y| \geq b/2$)

$$|x^{-1} - y^{-1}| = \left| \frac{y - x}{xy} \right| = \frac{|y - x|}{|x| \cdot |y|} \leq \frac{b^2\epsilon/2}{b^2/2} = \epsilon.$$

□

Lemma 36.6. *Die Addition*

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

sind stetig.

Beweis. Siehe Aufgabe 36.7. □

Lemma 36.7. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum und seien Funktionen*

$$f_i: M \longrightarrow \mathbb{K}$$

(für $i = 1, \dots, m$) gegeben mit der zusammengesetzten Abbildung

$$f: M \longrightarrow \mathbb{K}^m, x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Dann ist f genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen f_i stetig sind.

Beweis. Es genügt, diese Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu zeigen. Dafür folgt sie direkt aus Lemma 35.13 unter Verwendung von Lemma 36.2. □

Beispiel 36.8. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*,⁵ also die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Einer reellen Zahl t (im Bogenmaß) wird dabei der zugehörige Punkt auf dem Einheitskreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

zugeordnet. Diese Abbildung ist periodisch mit der Periode 2π . Sie ist stetig, da die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus nach Satz 12.2 stetig sind und daraus nach Lemma 36.7 die Stetigkeit der Gesamtabbildung folgt.

⁵Eine Abbildung $I \rightarrow M$, wobei I ein reelles Intervall ist, deren Bild gleich einer „Kurve“ $C \subseteq M$ ist, nennt man eine *Parametrisierung* von C .

Lemma 36.9. *Es sei M ein metrischer Raum und seien*

$$f, g: M \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g: M \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g: M \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x) - g(x),$$

$$f \cdot g: M \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq M$, auf der g keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion

$$f/g: U \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

Beweis. Wir betrachten Abbildungsdiagramme der Form

$$M \xrightarrow{f, g} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{+} \mathbb{K}.$$

Die Abbildung links ist stetig aufgrund von Lemma 36.7. Die rechte Abbildung ist stetig aufgrund von Lemma 36.6. Daher ist wegen Lemma 36.4 auch die Gesamtabbildung stetig. Die Gesamtabbildung ist aber die Addition der beiden Funktionen. Für die Multiplikation verläuft der Beweis gleich, für die Negation und die Division muss man zusätzlich Lemma 36.5 heranziehen und (für die Division) das Diagramm

$$U \xrightarrow{f, g^{-1}} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}$$

betrachten. □

Satz 36.10. *Es sei \mathbb{K}^n mit der euklidischen Metrik versehen und sei*

$$\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ stetig.

Beweis. Eine komplex-lineare Abbildung ist auch reell-linear, und die euklidische Metrik hängt nur von der reellen Struktur ab. Wir können also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen. Aufgrund von Lemma 36.7 können wir $m = 1$ annehmen. Die Abbildung sei durch

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Nullabbildung ist konstant und daher stetig, also sei $a = \max(|a_i|, i = 1, \dots, n) > 0$. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $d(x, y) \leq \frac{\epsilon}{na}$ ist insbesondere $|x_i - y_i| \leq \frac{\epsilon}{na}$ für alle i und daher ist

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n a_i y_i \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i=1}^n a_i(x_i - y_i) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n |a_i(x_i - y_i)| \\
&\leq na |x_i - y_i| \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

□

36.3. Polynome in mehreren Variablen.

Wir haben schon Polynome in einer Variablen verwendet. Ein Polynom in den zwei Variablen x und y ist z.B.

$$5 + 3x + 7y + 4x^2 - xy - 2y^2 + 4x^3 - 6x^2y + 5xy^2 - 11y^3 + 8x^4 - 6x^2y^2 + xy^3,$$

es ist also eine endliche Summe aus Variablenprodukten $x^i y^j$ mit zugehörigen Koeffizienten. Die folgende präzise Definition verwendet eine Multiindex-Schreibweise, um Polynomfunktionen in beliebig (endlich) vielen Variablen einzuführen. Dabei steht ein Index ν für ein Tupel

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$$

und für Variablen x_1, \dots, x_n verwendet man die Schreibweise

$$x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}.$$

Ein solcher Ausdruck heißt ein *Monom* in den Variablen x_1, \dots, x_n .

Definition 36.11. Eine Funktion

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n),$$

die man als eine Summe der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}$$

mit $a_\nu \in \mathbb{K}$ schreiben kann, wobei nur endlich viele $a_\nu \neq 0$ sind, heißt *polynomiale Funktion*.

Ein Polynom ist also eine endliche Summe aus mit Konstanten multiplizierten Monomen. Diese Konstanten nennt man die *Koeffizienten* des Polynoms. Beim eingangs erwähnten Beispiel ist $a_{0,0} = 5$, $a_{1,0} = 3$, $a_{2,1} = -6$, $a_{3,1} = 0$, u.s.w. Ein Beispiel in den drei Variablen x, y, z ist

$$\begin{aligned}
&2 + 6x - 4y - 3z + 5x^2 + y^2 - 2z^2 - xy - 4xz + 3yz + 7x^3 + 4y^3 - 5z^3 - x^2y \\
&\quad + 5xy^2 - 11xz^2 + 4x^2y + 8y^2z + 3yz^2 + 5xyz + 17x^3y^6z^5.
\end{aligned}$$

Bemerkung 36.12. Machen wir uns die Wirkungsweise eines Polynoms f in den Variablen x_1, \dots, x_n als Funktion

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

klar. An einer Stelle $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ ergibt sich $f(b)$ einfach dadurch, dass man für die Variable x_i überall die Zahl b_i einsetzt und alles in \mathbb{K} ausrechnet. Die Variable x_i ist somit einfach die i -te Projektion

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, (b_1, \dots, b_n) \longmapsto b_i.$$

Zumeist benennt man die Koordinaten einfach wieder mit x_i . Die Summe und die Produkte von polynomialen Funktionen sind wieder polynomial, und zwar ergibt sich die Summe einfach dadurch, dass man monomweise addiert, und das Produkt dadurch, dass man distributiv ausmultipliziert. Auch wenn man Polynome in andere Polynome einsetzt, ergibt sich wieder ein Polynom.

Satz 36.13. *Eine polynomiale Funktion*

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

ist stetig.

Beweis. Die einzelnen Variablen x_i repräsentieren die i -te lineare Projektion

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow x_i.$$

Nach Satz 36.10 sind diese stetig. Aufgrund von Lemma 36.9 sind dann auch die monomialen Funktionen

$$x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetig und damit aus dem gleichen Grund überhaupt alle polynomialen Funktionen. \square

36. ARBEITSBLATT

36.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 36.1. Es seien L und M metrische Räume und $m \in M$. Zeige, dass die konstante Abbildung

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto m,$$

stetig ist.

Aufgabe 36.2. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die Identität

$$M \longrightarrow M, x \longmapsto x,$$

stetig ist.

Aufgabe 36.3. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass die Inklusion $T \subseteq M$ stetig ist.

Aufgabe 36.4. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und seien $a < b < c$ reelle Zahlen. Es seien

$$f: [a, b] \longrightarrow M$$

und

$$g: [b, c] \longrightarrow M$$

stetige Abbildungen mit $f(b) = g(b)$. Zeige, dass dann die Abbildung

$$h: [a, c] \longrightarrow M$$

mit

$$h(t) = f(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } h(t) = g(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 36.5. Es sei

$$f: L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M . Ist das Urbild eines offenen Balles $U(y, \epsilon) \subseteq M$ stets wieder ein offener Ball in L ?

Aufgabe 36.6. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und sei

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in M$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ für alle y aus einer offenen Ballumgebung von x gilt.

Aufgabe 36.7. Zeige, dass die Addition

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

stetig sind.

Aufgabe 36.8. Es seien L, M, N metrische Räume und seien

$$f: L \longrightarrow M \text{ und } g: M \longrightarrow N$$

Abbildungen. Es sei f stetig in $x \in L$ und es sei g stetig in $f(x) \in M$. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f: L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig in x ist.

Aufgabe 36.9. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto |z|,$$

stetig ist.

Aufgabe 36.10. Es sei V ein euklidischer Raum. Zeige, dass die Norm

$$V \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto \|v\|,$$

eine stetige Abbildung ist.

Aufgabe 36.11. Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

stetig ist.

Aufgabe 36.12. Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ 0, & \text{falls } y \leq 0, \\ y/x, & \text{falls } x \geq y > 0, \\ x/y, & \text{falls } y > x > 0, \end{cases}$$

definiert ist. Zeige, dass die Einschränkung von f auf jeder zur x -Achse oder zur y -Achse parallelen Geraden stetig ist, dass aber f selbst nicht stetig ist.

Aufgabe 36.13. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum im euklidischen Raum \mathbb{R}^n . Zeige, dass V abgeschlossen im \mathbb{R}^n ist.

Aufgabe 36.14. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass der Graph von f abgeschlossen in \mathbb{R}^2 ist.

Aufgabe 36.15.*

Es seien L und M metrische Räume und es seien

$$f, g: L \longrightarrow M$$

zwei stetige Abbildungen. Zeige, dass die Menge

$$N = \{x \in L \mid f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen in L ist.

Aufgabe 36.16. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*, also die Abbildung

$$\varphi: [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t).$$

Zeige, dass φ eine Bijektion zwischen $[0, 2\pi[$ und dem Einheitskreis definiert, die stetig ist, deren Umkehrabbildung aber nicht stetig ist.

Aufgabe 36.17. Es sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik und $Y = \mathbb{R}^n$ mit der diskreten Metrik. Es sei

$$f: Y \longrightarrow X$$

die Identität. Zeige, dass f stetig ist, die Umkehrabbildung f^{-1} aber nicht.

Zwei metrische Räume L und M heißen *homöomorph*, wenn es eine bijektive stetige Abbildung

$$\varphi: L \longrightarrow M$$

gibt, deren Umkehrabbildung φ^{-1} ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 36.18.*

Zeige, dass das offene Einheitsintervall $]0, 1[$ und das abgeschlossene Einheitsintervall $[0, 1]$ nicht homöomorph sind.

Aufgabe 36.19. Stifte eine Homöomorphie zwischen der abgeschlossenen Kreisscheibe und dem abgeschlossenen Quadrat.

Aufgabe 36.20. Es sei $I = [a, b[$ ein halboffenes Intervall. Kann man I in zwei disjunkte Unterräume $I = T_1 \cup T_2$ derart zerlegen, dass T_1 und T_2 untereinander homöomorph sind?

Aufgabe 36.21. Sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion und v_1, \dots, v_n eine Basis von \mathbb{R}^n mit den zugehörigen Koordinatenfunktionen $z_i, i = 1, \dots, n$. Zeige, dass f auch eine Polynomfunktion in diesen Koordinaten ist.

Aufgabe 36.22. Es sei

$$f: \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

eine Abbildung, die in jeder Komponente polynomial sei und sei

$$g: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine polynomiale Funktion. Zeige, dass dann auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ eine polynomiale Funktion ist.

Aufgabe 36.23.*

Finde ein Polynom $p(x, y)$ der Form

$$p(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2,$$

das die Bedingungen

$$p(0, 0) = 0,$$

$$p(0, 1) = 1,$$

$$p(1, 0) = 0,$$

$$p(1, 1) = 3,$$

$$p(0, 2) = 6,$$

$$p(-1, 1) = 1,$$

erfüllt.

Aufgabe 36.24. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $G = \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ die Menge der reellen invertierbaren $n \times n$ -Matrizen. Zeige, dass die Abbildung

$$G \longrightarrow G, M \longmapsto M^{-1},$$

stetig ist.

36.2. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 36.25.** (5 Punkte)

Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung stetig, ist sie linear?

Aufgabe 36.26. (8 Punkte)

Ein Billardtisch sei 127 cm breit und 254 cm lang, die Kugeln haben einen Radius von 2 cm und die Ecklöcher seien ein Viertelkreis⁶ mit Radius 5 cm um einen Eckpunkt. An den Tisch sei ein Koordinatensystem angelegt, das parallel zu den Tischseiten verläuft und bei dem die linke untere Ecke der Nullpunkt sei.

Berechne für die linke untere Ecke die Koordinaten der beiden Punkte des Lochrandes, durch die der Mittelpunkt einer Kugel hindurch muss, wenn

⁶Diese Aufgabe ergibt auch Sinn, wenn die Löcher volle Kreise um die Eckpunkte sind, hat aber ein anderes Ergebnis.

sie eingelocht werden soll. Wie lang ist der Abstand zwischen diesen beiden Punkten, wie lang ist die Lochberandung zwischen diesen Punkten?

Eine Kugel soll nun direkt (ohne Verwendung von Bande oder anderen Kugeln) in dieses Loch versenkt werden, wobei der Queuestoß stets in Richtung der Kugelmitte und an deren „Äquator“ durchgeführt wird. Welche Winkeltoleranz zum Versenken der Kugel liegt vor, wenn der Kugelmittelpunkt die folgende Position besitzt:

- a) (63.5, 63.5)
- b) (100, 100)
- c) (63.5, 192,5)
- d) (63.5, 10)

Welche Länge hat das zugehörige Kreissegment auf der Kugel?

Aufgabe 36.27. (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathbb{K}^{n^2} \cong \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, M \longmapsto \det M,$$

eine polynomiale Funktion ist.

Aufgabe 36.28. (2 Punkte)

Man gebe eine Homöomorphie zwischen $]0, 1[$ und \mathbb{R} an.

Aufgabe 36.29. (5 Punkte)

Es sei $I =]a, b[$ ein offenes Intervall. Kann man I in zwei disjunkte Unterräume $I = T_1 \cup T_2$ derart zerlegen, dass T_1 und T_2 untereinander homöomorph sind?

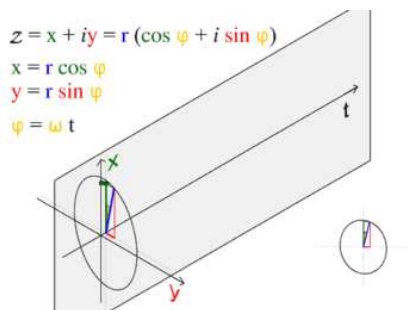
36.3. Die Aufgabe zum Aufgeben.

Aufgabe 36.30. (10 Punkte)

Es sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Kann man I in zwei disjunkte Unterräume $I = T_1 \cup T_2$ derart zerlegen, dass T_1 und T_2 untereinander homöomorph sind?

37. VORLESUNG - DIFFERENZIERBARE KURVEN

37.1. Differenzierbare Kurven.



Eine Animation des Graphen der trigonometrischen Parametrisierung des Einheitskreises. Die grünen Punkte sind Punkte des Graphen.

Es sei I ein reelles Intervall, V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und

$$f: I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Eine solche Abbildung nennen wir auch eine *Kurve* oder einen *Weg* in V . Häufig stellt man sich dabei I als ein Zeitintervall und die Abbildung als einen Bewegungsprozess im Raum V vor. Jedem Zeitpunkt $t \in I$ wird also ein Ortspunkt $f(t) \in V$ zugeordnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten, sich eine solche Abbildung zu veranschaulichen. Bei eindimensionalem V , also $V \cong \mathbb{R}$, ist der Graph die übliche Darstellungsweise. Einen Graphen gibt es bekanntlich zu jeder Abbildung. Bei $V \cong \mathbb{R}^2$ ist der Graph eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$. Häufig skizziert man bei einer Kurve bei $V = \mathbb{R}^2$ oder $V = \mathbb{R}^3$ nur das Bild (man spricht auch von der *Bahn* oder der *Spur* der Kurve) der Kurve. Man beachte aber, dass das Bild nur eine Teilmengung der Abbildung aufzeigt.

Bei einem Bewegungsprozess interessiert man sich natürlich für die „Geschwindigkeit“ zu einem bestimmten Zeitpunkt. Dabei versteht man unter Geschwindigkeit nicht nur deren Betrag (oder Norm), sondern auch deren Richtung (die Sprechweisen sind uneinheitlich).

Eine gleichmäßige Bewegung auf einem Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r , bei der eine volle Kreisbewegung die Zeit a benötigt, die zum Zeitpunkt 0 im Punkt $(r, 0)$ startet und gegen den Uhrzeigersinn verläuft, wird durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \left(r \cos \frac{2\pi}{a} t, r \sin \frac{2\pi}{a} t \right),$$

beschrieben. Der Geschwindigkeitsvektor der Kreisbewegung ist zu jedem Zeitpunkt t *tangential* an den Ortspunkt auf dem Kreis (und steht senkrecht zum Ortsvektor). Die Norm der Geschwindigkeit ist bei einer Kreisbewegung konstant, aber die Richtung ändert sich kontinuierlich.

Die Vorstellung der *Momentangeschwindigkeit* wird durch den Begriff der *differenzierbaren Kurve* und ihrer Ableitung präzisiert, der eine direkte Verallgemeinerung von differenzierbaren Funktionen ist. Die Idee ist wieder, zu zwei Zeitpunkten $t < t'$ den Durchschnittsgeschwindigkeitsvektor (die wir den *Differenzenquotienten* nennen)

$$\frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \in V$$

zu betrachten und davon den Limes für $t' \mapsto t$ zu bestimmen.

Um einen Limes bilden zu können, brauchen wir, wie schon im Eindimensionalen, eine Metrik (eine Abstandsfunktion) auf V . Wir werden daher euklidische Vektorräume betrachten, also reelle endlichdimensionale Vektorräume, für die ein Skalarprodukt erklärt ist. Ein Skalarprodukt auf V definiert über

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm und über

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

eine Metrik. Für einen Vektor v , der bezüglich einer Orthonormalbasis durch die Koordinaten

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

gegeben ist, lautet die Formel für die Norm

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

Da es auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum V eine Basis v_1, \dots, v_n und damit eine dadurch induzierte bijektive lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto v_i,$$

gibt, gibt es auch auf jedem reellen endlichdimensionalen Vektorraum ein Skalarprodukt und damit eine euklidische Metrik. Diese hängt jedoch von der gewählten Basis ab. Allerdings hängen die offenen Mengen,⁷ der Konvergenzbegriff und Grenzwerteigenschaften nicht von einer solchen Wahl ab, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 37.1. *Es sei V ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum. Es seien zwei Skalarprodukte $\langle -, - \rangle_1$ und $\langle -, - \rangle_2$ auf V gegeben. Dann stimmen die über die zugehörigen Normen $\|-\|_1$ und $\|-\|_2$ definierten Topologien überein, d.h. eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann offen bezüglich der einen Metrik, wenn sie offen bezüglich der anderen Metrik ist.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

⁷Die Menge der offenen Mengen eines metrischen Raumes wird als *Topologie* bezeichnet. Wesentliche Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit hängen nur von der Topologie ab.

Für uns bedeutet das, dass die im Folgenden zu entwickelnden Differenzierbarkeitsbegriffe nicht vom gewählten Skalarprodukt abhängen. Mit etwas mehr Aufwand kann man auch zeigen, dass eine beliebige (nicht notwendigerweise euklidische) Norm auf einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum ebenfalls die gleiche Topologie definiert, und man genauso gut mit einer beliebigen Norm arbeiten könnte. Zunächst müssen wir den Grenzwertbegriff für Abbildungen, den wir im Reellen in der zehnten Vorlesung eingeführt haben, zwischen metrischen Räumen erweitern.

Definition 37.2. Es sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührungspunkt von T . Es sei

$$g: T \longrightarrow L$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum L . Dann heißt $b \in L$ der *Grenzwert* (oder *Limes*) von g in a , wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $x \in B(a, \delta) \cap T$ ist $g(x) \in B(b, \epsilon)$. In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b.$$

Statt mit abgeschlossenen Ballumgebungen kann man auch mit offenen Ballumgebungen arbeiten. Eine alternative Bedingung ist, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus T , die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b konvergiert.

Diese Definition werden wir hier hauptsächlich in der Situation $M = I$ ein reelles Intervall, $T = I \setminus \{t\}$, $a = t$, $L = V$ ein euklidischer Vektorraum und den Differenzenquotienten

$$g: t' \longrightarrow \frac{f(t') - f(t)}{t' - t}$$

anwenden. Dieser ist für $t' = t$ nicht definiert, wir suchen aber dennoch einen sinnvollen Wert für ihn.

Definition 37.3. Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und

$$f: I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann heißt f in $t \in I$ *differenzierbar*, wenn der Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

existiert. Dieser Limes heißt dann die *Ableitung* von f in t und wird mit

$$f'(t)$$

bezeichnet.

Die Ableitung ist selbst wieder ein Vektor in V . Statt Ableitung spricht man auch vom *Differentialquotienten* in einem (Zeit)-Punkt t . Bei $f'(t) \neq 0$ versteht man unter der *Tangente* an $f(t)$ zum Zeitpunkt t die durch

$$\{f(t) + s \cdot f'(t) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

gegebene Gerade.

Definition 37.4. Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und

$$f: I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann heißt f *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $t \in I$ differenzierbar ist. Die Abbildung

$$I \longrightarrow V, t \longmapsto f'(t),$$

heißt dann die *Ableitung* von f .

Die Ableitung einer differenzierbaren Kurve ist damit selbst wieder eine Kurve. Wenn die Ableitung stetig ist, so nennt man die Kurve *stetig differenzierbar*. Wenn die Ableitung selbst differenzierbar ist, so nennt man die Ableitung der Ableitung die *zweite Ableitung* der Ausgangskurve.

Das folgende Lemma zeigt, dass dieser Differenzierbarkeitsbegriff nichts wesentlich neues ist, da er auf die Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen zurückgeführt werden kann.

Lemma 37.5. *Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und*

$$f: I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Es sei v_1, v_2, \dots, v_n eine Basis von V und es seien

$$f_j: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

die zugehörigen Komponentenfunktionen von f . Es sei $t \in I$. Dann ist f genau dann differenzierbar in t , wenn sämtliche Funktionen f_j in t differenzierbar sind. In diesem Fall gilt

$$f'(t) = f'_1(t) \cdot v_1 + f'_2(t) \cdot v_2 + \dots + f'_n(t) \cdot v_n.$$

Beweis. Sei $t' \in I$, $t' \neq t$. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{f(t') - f(t)}{t' - t} &= \frac{\sum_{j=1}^n f_j(t') \cdot v_j - \sum_{j=1}^n f_j(t) \cdot v_j}{t' - t} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{f_j(t') - f_j(t)}{t' - t} \cdot v_j. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 37.5 existiert der Limes links für $t' \rightarrow t$ genau dann, wenn der entsprechende Limes rechts komponentenweise existiert. \square

Die vorstehende Aussage wird hauptsächlich für die Standardbasis des \mathbb{R}^n angewendet.

Beispiel 37.6. Die Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2 - t^3, t \cdot \sin t, e^{-t})$$

ist in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und zwar ist

$$f'(t) = (2t - 3t^2, \sin t + t \cdot \cos t, -e^{-t}).$$

Beispiel 37.7. Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem reellen Intervall. Dann wird der Graph zu f als Bahn durch die differenzierbare Kurve $I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$, realisiert. Ihre Ableitung ist $g'(t) = (1, f'(t))$. Der Graph wird in horizontaler Richtung mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen und folgt vertikal dem Funktionsverlauf von f .

Beispiel 37.8. Die trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

besitzt nach Lemma 37.5 und nach Satz 16.8 die Ableitung

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Wegen

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle = -\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0$$

steht der Geschwindigkeitsvektor stets senkrecht auf dem Ortsvektor. Die Norm des Geschwindigkeitsvektors ist stets gleich 1, der Kreis wird also mit konstanter Geschwindigkeitsnorm durchlaufen.

Lemma 37.9. *Es sei I ein reelles Intervall und V ein euklidischer Vektorraum. Es seien*

$$f, g: I \longrightarrow V$$

zwei in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurven und es sei

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in t_0 differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Summe*

$$f + g: I \longrightarrow V, t \longmapsto f(t) + g(t),$$

ist in t_0 differenzierbar mit

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0).$$

(2) *Das Produkt*

$$hf: I \longrightarrow V, t \longmapsto h(t) \cdot f(t),$$

ist differenzierbar in t_0 mit

$$(hf)'(t_0) = h(t_0) \cdot f'(t_0) + h'(t_0) \cdot f(t_0).$$

Insbesondere ist für $c \in \mathbb{R}$ auch cf differenzierbar in t_0 mit

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0).$$

(3) Wenn h nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion

$$\frac{f}{h}: I \longrightarrow V, t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in t_0 differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 37.13. □

Man kann natürlich zwei Abbildungen $f, g: I \rightarrow V$ nicht miteinander multiplizieren, so dass in der obigen Produktregel eine differenzierbare Kurve und eine differenzierbare Funktion auftreten. Ebenso muss die Kettenregel mit Bedacht formuliert werden. In Satz 49.2 werden wir noch eine allgemeinere Kettenregel kennenlernen.

Lemma 37.10. *Es seien I und J zwei reelle Intervalle, es sei*

$$h: I \longrightarrow J, s \longmapsto h(s),$$

eine in $s_0 \in I$ differenzierbare Funktion und es sei

$$f: J \longrightarrow V, t \longmapsto f(t),$$

eine in $t_0 = h(s_0)$ differenzierbare Kurve in einen euklidischen Vektorraum V . Dann ist auch die zusammengesetzte Kurve

$$f \circ h: I \longrightarrow V, s \longmapsto f(h(s)),$$

in s_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ h)'(s_0) = h'(s_0) \cdot f'(h(s_0)).$$

Beweis. Es seien f_1, \dots, f_n die Komponentenfunktionen von f bezüglich einer Basis von V . Nach der Kettenregel in einer Variablen gilt

$$(f_i \circ h)'(s_0) = h'(s_0) \cdot f'_i(h(s_0))$$

für jedes $i = 1, \dots, n$. Dies ist wegen Lemma 37.5 die Behauptung. □

In der vorstehenden Situation sollte man sich h als eine Umparametrisierung der Zeit vorstellen. Die Bahn der Kurve bleibt erhalten, es ändert sich aber die Geschwindigkeit und eventuell die Orientierung, mit der die Bahn durchlaufen wird. Wenn $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Negation ist, so wird die Kurve mit umgekehrter Zeitrichtung durchlaufen. Die Aussage besagt in diesem Fall, dass die Ableitung der umgekehrten Kurve negiert werden muss.

Lemma 37.11. *Es sei I ein reelles Intervall, V und W seien euklidische Vektorräume und es sei*

$$f: I \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Kurve. Es sei

$$L: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist auch die zusammengesetzte Abbildung

$$L \circ f: I \longrightarrow W, t \longmapsto L(f(t)),$$

differenzierbar und es gilt

$$(L \circ f)'(t) = L(f'(t)).$$

Beweis. Sei $t_0 \in I$ fixiert und sei $t \in I, t \neq t_0$. Wegen der Linearität ist

$$L\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right) = \frac{L(f(t)) - L(f(t_0))}{t - t_0}.$$

D.h. der Differenzenquotient zu $L \circ f$ ist gleich dem Wert unter L des Differenzenquotienten zu f . Wegen der Voraussetzung und der Stetigkeit einer linearen Abbildung existiert der Limes links für $t \rightarrow t_0$, also existiert auch der Limes rechts, und das bedeutet, dass der Differentialquotient der zusammengesetzten Abbildung $L \circ f$ existiert und mit dem Wert unter L des Differentialquotienten zu f übereinstimmt. \square

Beispiel 37.12. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine differenzierbare Bewegung im Raum, bei der man sich nur für die lineare Projektion der Bewegung auf eine Ebene interessiert. Eine solche Situation liegt beispielsweise vor, wenn man zu einer Flugbewegung nur die Bewegung des Schattens des Flugkörpers auf der Erdoberfläche beschreiben möchte (bei parallel gedachten Lichtstrahlen). Die Projektion wird (in geeigneten Koordinaten) durch eine lineare Abbildung

$$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

beschrieben. Lemma 37.11 besagt in dieser Situation, dass der Geschwindigkeitsvektor der Schattenbewegung einfach die Projektion des Geschwindigkeitsvektors der Flugbewegung ist.

37. ARBEITSBLATT

37.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 37.1. Skizziere die Bilder und die Graphen der folgenden Kurven im \mathbb{R}^2 .

- (1) $t \longmapsto (t^2, t^2)$,
- (2) $t \longmapsto (t^2, -t^2)$,
- (3) $t \longmapsto (t^2, t)$,
- (4) $t \longmapsto (2t, 3t)$,
- (5) $t \longmapsto (t^2, t^3)$.

Aufgabe 37.2. Man gebe ein Beispiel für verschiedene Kurven

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

deren Bilder (Bahnen) aber übereinstimmen.

Aufgabe 37.3.*

Beschreibe (ohne weitere Begründung) den Lauf des Sekundenzeigers einer Uhr als eine differenzierbare Kurve auf dem Einheitskreis (der Zeiger soll also im Zeitintervall $[0, 60]$ eine Runde im Uhrzeigersinn drehen und zum Zeitpunkt 0 „oben“ starten).

Aufgabe 37.4. Zeige, dass der Grenzwert einer Funktion in einem Berührungspunkt der Definitionsmenge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 37.5. Es sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührungspunkt von T . Es sei

$$f: T \longrightarrow V$$

eine Abbildung in einen euklidischen Vektorraum V mit den Komponentenfunktionen

$$f_1, \dots, f_n: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

bezüglich einer Basis von V . Zeige, dass der Limes

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

genau dann existiert, wenn sämtliche Limiten

$$\lim_{x \rightarrow a} f_j(x)$$

existieren.

Aufgabe 37.6. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Es sei

$$f: T \longrightarrow L$$

eine stetige Abbildung in einen weiteren metrischen Raum L und sei $a \in T$ ein Punkt, der ein Berührungspunkt von $T \setminus \{a\}$ ist. Zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \in T \setminus \{a\}, x \rightarrow a} f(x)$$

existiert.

Aufgabe 37.7. Es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes, $a \in M$ ein Berührungspunkt von T ,

$$g: T \longrightarrow L$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum und $b \in L$. Zeige, dass für den Limes

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

genau dann gilt, wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} \|g(x) - b\| = 0$$

gilt.

Aufgabe 37.8. Seien D, E, F metrische Räume und sei

$$h: D \longrightarrow E$$

eine stetige Abbildung. Es sei $P \in D$ ein Berührungspunkt von $D \setminus \{P\}$ und $h(P) = Q \in E$ ein Berührungspunkt von $E \setminus \{Q\}$. Es sei

$$g: E \setminus \{Q\} \longrightarrow F$$

eine Abbildung und es sei vorausgesetzt, dass

$$\lim_{y \rightarrow Q} g(y)$$

existiert. Zeige, dass dann auch

$$\lim_{x \rightarrow P} g(h(x))$$

existiert und mit $\lim_{y \rightarrow Q} g(y)$ übereinstimmt.

Aufgabe 37.9.*

Bestimme die Ableitung der Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto f(t) = (t \sin t, t^3 e^{-t}),$$

in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 37.10. Bestimme die Ableitung der Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto f(t) = \left(t^2 - \sin t, e^{-t} + 2t^3, t \cdot \sinh t + \frac{1}{t^2 + 1} \right),$$

in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 37.11. Bestimme die Ableitung der Kurve

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto \left(\frac{\sin t^2}{t^5}, 4^t, \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \right),$$

für jeden Punkt $t \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 37.12. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $v, w \in V$. Zeige, dass die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow V, t \longmapsto tv + w,$$

differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(t) = v$.

Aufgabe 37.13. Es sei I ein reelles Intervall und V ein euklidischer Vektorraum. Es seien

$$f, g: I \longrightarrow V$$

zwei in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurven und es sei

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in t_0 differenzierbare Funktion. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

(1) Die Summe

$$f + g: I \longrightarrow V, t \longmapsto f(t) + g(t),$$

ist in t_0 differenzierbar mit

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0).$$

(2) Das Produkt

$$hf: I \longrightarrow V, t \longmapsto h(t)f(t),$$

ist differenzierbar in t_0 mit

$$(hf)'(t_0) = h(t_0)f'(t_0) + h'(t_0)f(t_0).$$

Insbesondere ist für $c \in \mathbb{R}$ auch cf differenzierbar in t_0 mit

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0).$$

(3) Wenn h nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion

$$\frac{f}{h}: I \longrightarrow V, t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in t_0 differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}.$$

Aufgabe 37.14. Es seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

zwei differenzierbare Kurven. Berechne die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \langle f(t), g(t) \rangle.$$

Aufgabe 37.15.*

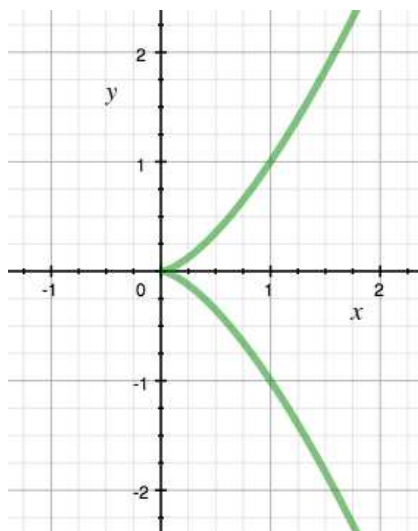
Wir betrachten die Funktionen

$$B_0(t) = (1 - t)^2, \quad B_1(t) = 2t(1 - t) \quad \text{und} \quad B_2(t) = t^2.$$

Es seien $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Wir definieren die Kurve

$$f(t) := B_0(t)v_0 + B_1(t)v_1 + B_2(t)v_2.$$

- Berechne $f(0)$ und $f(1)$.
- Berechne $f'(t)$.
- Zeige, dass $f'(0)$ ein Vielfaches von $v_1 - v_0$ und $f'(1)$ ein Vielfaches von $v_2 - v_1$ ist.
- Skizziere für $v_0 = (0, 1)$, $v_1 = (1, 1)$ und $v_2 = (2, 0)$ das Bild der Kurve $f(t)$ für $0 \leq t \leq 1$.



Aufgabe 37.16. Das Bild der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (t^2, t^3),$$

definierten Kurve heißt *Neilsche Parabel*. Zeige, dass ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann zu diesem Bild gehört, wenn er die Gleichung $x^3 = y^2$ erfüllt.

Aufgabe 37.17. Sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (t^2, t^3).$$

Bestimme die Punkte $t_0 \in \mathbb{R}$, für die der Abstand der zugehörigen Kurvenpunkte $f(t) = (t^2, t^3)$ zum Punkt $(1, 0)$ minimal wird.

Aufgabe 37.18. Wir betrachten die Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2 - 1, t^3 - t).$$

a) Zeige, dass die Bildpunkte (x, y) der Kurve die Gleichung

$$y^2 = x^2 + x^3$$

erfüllen.

b) Zeige, dass jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y^2 = x^2 + x^3$ zum Bild der Kurve gehört.

c) Zeige, dass es genau zwei Punkte t_1 und t_2 mit identischem Bildpunkt gibt, und dass ansonsten die Abbildung injektiv ist.

Aufgabe 37.19. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine differenzierbare Kurve und $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Es sei $t_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass der Abstand $d(P, f(t))$ (zwischen P und einem Kurvenpunkt) in t_0 minimal werde. Zeige, dass $P - f(t_0)$ senkrecht zu $f'(t_0)$ ist.

Aufgabe 37.20. Es sei $G = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ der Graph der reellen Betragsfunktion. Man gebe eine differenzierbare Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

an, deren Bild genau G ist.

Die folgende Aufgabe setzt das Konzept Äquivalenzrelation voraus.

Aufgabe 37.21. Sei $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und sei $I =]-1, 1[$. Wir betrachten die Menge

$$M = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ differenzierbar, } f(0) = P\}.$$

Wir nennen zwei Kurven $f, g \in M$ *tangential äquivalent*, wenn $f'(0) = g'(0)$ ist.

- Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.
- Finde den einfachsten Vertreter für die Äquivalenzklassen.
- Man gebe für jede Klasse einen weiteren Vertreter an.
- Beschreibe die Menge der Äquivalenzklassen (also die Quotientenmenge).

Aufgabe 37.22.*

Es sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension ≥ 2 und $v, w \in V$ Punkte mit

$$\|v\| = \|w\|.$$

Zeige, dass es eine stetig differenzierbare Kurve

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow V, t \longmapsto \gamma(t),$$

mit $\gamma(0) = v$, $\gamma(1) = w$ und $\|\gamma(t)\| = \|v\|$ für alle $t \in [0, 1]$ gibt.

Aufgabe 37.23. Es seien $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ endlich viele Punkte und sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$. Zeige, dass es zu je zwei Punkten $P, Q \in M$ eine differenzierbare Kurve

$$\varphi: [0, 1] \longrightarrow M$$

mit $\varphi(0) = P$ und $\varphi(1) = Q$ gibt.

37.2. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 37.24.** (5 (1+2+2) Punkte)

Betrachte die Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, x \longmapsto (x^2 - x, x^3 + \sinh x, \sin(x^2)).$$

- Bestimme die Ableitung von f in jedem Punkt x .
- Bestimme die Komponentenfunktionen von f bezüglich der neuen Basis

$$(1, 0, 3), (2, 4, 6), (1, -1, 0)$$

von \mathbb{R}^3 .

- Berechne die Ableitung in der neuen Basis direkt und mit Hilfe von Lemma 37.11.

Aufgabe 37.25. (3 Punkte)

Für welche Punkte $t \in \mathbb{R}$ ist der Abstand der Bildpunkte der Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (2 \sin t, 3 \cos t),$$

zum Nullpunkt $(0, 0)$ maximal, für welche minimal?

Aufgabe 37.26. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2,$$

die einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den eindeutigen Schnittpunkt $\neq (0, -1)$ der durch die beiden Punkte $(t, 1)$ und $(0, -1)$ gegebenen Geraden G_t mit dem Einheitskreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

zuordnet. Zeige, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und bestimme die funktionalen Ausdrücke, die diese Abbildung beschreiben. Zeige, dass f differenzierbar ist. Ist f injektiv, ist f surjektiv?

Aufgabe 37.27. (4 (2+1+1) Punkte)

Auf einem Jahrmarkt befindet sich ein „Doppel-Karussell“, bei dem sich ein Sitz alle 2 Sekunden um einen kleinen Kreis mit Radius 3 Meter dreht, wobei sich der Mittelpunkt dieses Kreises seinerseits alle 8 Sekunden um einen großen Kreis mit Radius 10 Meter dreht. Beide Drehungen sind im Uhrzeigersinn. Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzt der Sitz zum Mittelpunkt den Abstand 13 Meter.

- Beschreibe diesen Bewegungsvorgang (in einem geeigneten Koordinatensystem) als eine differenzierbare Kurve.⁸
- Berechne den Geschwindigkeitsvektor dieser Bewegung zu jedem Zeitpunkt.
- Berechne die Geschwindigkeit (den Betrag des Geschwindigkeitsvektors) dieser Bewegung zu jedem Zeitpunkt.

Aufgabe 37.28. (6 Punkte)

Bestimme in der Situation von Aufgabe 37.27 die Zeitpunkte, an denen die Geschwindigkeit maximal oder minimal wird.

Aufgabe 37.29. (5 Punkte)

Man gebe eine differenzierbare Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

an, deren Bild genau das Achsenkreuz ist.

⁸Gefragt ist hier nach der mathematischen Überlagerung der beiden Bewegungen, d.h. die große Bewegung verdreht nicht das Koordinatensystem der kleinen Bewegung. Eine volle Umdrehung des kleinen Kreises liegt vor, wenn der Verbindungsvektor aus dem äußeren Drehmittelpunkt und dem Sitz wieder in die gleiche Himmelsrichtung zeigt. Bei der mechanischen Überlagerung, die vorliegt, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit des äußeren montierten Motors feststeht, sieht dies anders aus.

38. VORLESUNG - KURVENLÄNGEN

38.1. Die Mittelwertabschätzung für differenzierbare Kurven.

Die folgende Aussage, die *Mittelwertabschätzung für differenzierbare Kurven*, vergleicht die Durchschnittsgeschwindigkeit einer differenzierbaren Kurve mit der Momentangeschwindigkeit, also der Ableitung.

Satz 38.1. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und*

$$f: [a, b] \longrightarrow V, t \longmapsto f(t),$$

eine differenzierbare Kurve. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \cdot \|f'(c)\|.$$

Beweis. Wenn $f(a) = f(b)$ ist, so ist die Aussage trivialerweise richtig. Sei also $f(a) \neq f(b)$. Dann ist $u_1 = \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|}$ nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren Teil einer Orthonormalbasis von V . Es seien f_1, \dots, f_n die Komponentenfunktionen von f bezüglich dieser Basis. Wir wenden den Mittelwertsatz für eine Variable auf die erste Komponentenfunktion f_1 an. Es gibt also ein $c \in]a, b[$ mit der Eigenschaft

$$f_1(b) - f_1(a) = (b - a) \cdot f_1'(c)$$

und damit auch

$$|f_1(b) - f_1(a)| = |b - a| \cdot |f_1'(c)|.$$

Da man die Längenmessung mit jeder Orthonormalbasis durchführen kann, gilt

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &= \|(f_1(b) - f_1(a))u_1\| \\ &= |f_1(b) - f_1(a)| \\ &= |b - a| \cdot |f_1'(c)| \\ &\leq |b - a| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i'(c))^2} \\ &= |b - a| \cdot \|f'(c)\|. \end{aligned}$$

□

Beispiel 38.2. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung* des Einheitskreises, also die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t).$$

Diese Abbildung ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Die Norm dieser Ableitung ist zu jedem Zeitpunkt gleich

$$\|f'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

Wählen wir das Intervall $[0, 2\pi]$, so ist

$$f(0) = (1, 0) = f(2\pi).$$

Dies bedeutet, dass in der Mittelwertabschätzung nicht Gleichheit gelten kann.

38.2. Länge von Kurven.

Wir arbeiten im \mathbb{R}^n , versehen mit der euklidischen Metrik. Zu einer Kurve

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto f(t),$$

die wir uns als einen von der Zeit abhängigen Bewegungsvorgang im Raum vorstellen, wollen wir die Länge der Kurve definieren. Die Länge soll dabei den insgesamt zurückgelegten Weg beschreiben, nicht die Länge der zurückgelassenen Spur oder den Abstand von Start- und Zielpunkt.

Definition 38.3. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zu einer Unterteilung

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b$$

nennt man

$$[P_0, P_1, \dots, P_k] = [f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_k)]$$

den zugehörigen *Streckenzug*.

Dabei sollte man sich die Unterteilung als eine Zeiteinteilung vorstellen und die Punkte $P_i = f(t_i)$ als die zugehörigen Ortspunkte der durch f beschriebenen Bewegung im \mathbb{R}^n . Strenggenommen ist der Streckenzug einfach die geordnete Folge der Punkte, es ist aber suggestiver, sich darunter die stückweise lineare Verbindung dieser Punkte vorzustellen.

Definition 38.4. Zu einer Punktfolge

$$P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$$

nennt man

$$L(P_0, \dots, P_k) = \sum_{i=1}^k d(P_i, P_{i-1})$$

die *Gesamtlänge* des *Streckenzugs* $[P_0, P_1, \dots, P_k]$.

Definition 38.5. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$L(f) = \sup (L(f(t_0), \dots, f(t_k)), a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b \text{ Unterteilung, } k \in \mathbb{N})$$

die *Kurvenlänge* von f . Wenn $L(f)$ endlich ist, so heißt die Kurve f *rektifizierbar*.

Man nimmt hier also das Supremum über alle möglichen Unterteilungen des Definitionsintervalls. Ohne zusätzliche Eigenschaften der Kurve kann man nicht erwarten, dass man die Kurvenlänge effektiv bestimmen kann. Wenn die Kurve aber stetig differenzierbar ist, so lässt sich die Länge über ein Integral berechnen, wie die folgende Aussage zeigt. Inhaltlich gesprochen bedeutet sie, dass wenn sich beispielsweise ein Fahrzeug in der Ebene \mathbb{R}^2 bewegt, man die Gesamtlänge der zurückgelegten Strecke kennt, sobald man nur zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit (und zwar lediglich ihre Norm, die Richtung muss man nicht kennen) kennt. Die Länge ist dann das Integral über die Norm der Geschwindigkeit.

Satz 38.6. *Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist f rektifizierbar und für die Kurvenlänge gilt

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Die Rektifizierbarkeit ist schon in einer Variablen ein interessanter Begriff. Es lässt sich sogar die Rektifizierbarkeit darauf zurückführen. Dies bedeutet aber nicht, dass man die Berechnung der Kurvenlänge auf die Berechnung der Kurvenlängen der einzelnen Komponenten zurückführen könnte.

Lemma 38.7. *Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Dann ist f genau dann rektifizierbar, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.

Beweis. Siehe Aufgabe 38.11. □

Beispiel 38.8. Die Rektifizierbarkeit ist schon für Funktionen

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t),$$

ein nicht-trivialer Begriff, siehe Beispiel 38.9. Wenn allerdings f wachsend (oder fallend) ist, so lässt sich die Länge einfach ausrechnen. Zu einer beliebigen Unterteilung $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$ ist dann nämlich

$$\sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^k (f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(b) - f(a),$$

d.h. die Länge ist einfach die Differenz der Werte an den Randpunkten des Intervalls. Insbesondere existiert die Länge, d.h. monotone Funktionen sind rektifizierbar. Wenn f wachsend ist und stetig differenzierbar, so ergibt sich dies natürlich auch aus Satz 38.6 und aus Korollar 19.7. Wenn f allerdings nicht

monoton ist, so müssen bei der Längenberechnung auch die Richtungsänderungen mitberücksichtigt werden. Für das Integral $\int_a^b |f'(t)| dt$ gibt es keine direkte Berechnung, da dann $f'(t)$ das Vorzeichen ändert. Man kann aber das Intervall in (eventuell unendlich viele) Abschnitte unterteilen, wo die Funktion wachsend oder fallend, bzw. wo die Ableitung positiv oder negativ ist, und dann abschnittsweise die Länge berechnen.

Beispiel 38.9. Die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{bei } x > 0, \\ 0 & \text{bei } x = 0, \end{cases}$$

ist stetig nach Aufgabe 16.23, aber nicht rektifizierbar. Für jedes $x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{1}{2}\pi}$ ist $f(x_n) = \pm x_n$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob n gerade oder ungerade ist. Für jedes n ist daher $|f(x_n) - f(x_{n-1})| \geq 2x_n$. Wählt man dann die Unterteilungspunkte

$$0 < x_k < x_{k-1} < \dots < x_1 < x_0 = \frac{2}{\pi} < 1,$$

so ist die Länge des zugehörigen Streckenzugs mindestens gleich

$$\sum_{n=1}^k 2x_n = 2 \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n\pi + \frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+1}.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe ist dieser Ausdruck für $k \rightarrow \infty$ nicht beschränkt. Daher kann das Supremum über alle Streckenzüge nicht existieren und die Kurve ist nicht rektifizierbar.

Korollar 38.10. *Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und es sei*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist die Länge des Graphen von f gleich

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Beweis. Mit der Länge des Graphen ist die Länge der durch $x \mapsto g(x) = (x, f(x))$ definierten Kurve gemeint. Die Ableitung dieser Kurve ist $g'(x) = (1, f'(x))$. Daher ist die Länge dieser Kurve nach Satz 38.6 gleich

$$L = \int_a^b \|g'(x)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dt.$$

□

Beispiel 38.11. Wir wollen die Länge der *Standardparabel* berechnen, also die Länge der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, t^2),$$

gegebenen Kurve. Nach Korollar 38.10 ist die Länge von 0 nach b gleich

$$\begin{aligned} \int_0^b \sqrt{1+4x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2b} \sqrt{1+u^2} \, du \\ &= \frac{1}{4} \left(u\sqrt{1+u^2} + \operatorname{arsinh} u \right) \Big|_0^{2b} \\ &= \frac{1}{2} b\sqrt{1+4b^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arsinh}(2b). \end{aligned}$$

Wir berechnen nun die Länge des Kreisbogens auf zwei verschiedene Arten.

Beispiel 38.12. Wir betrachten die Funktion

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \sqrt{1-x^2},$$

die die obere Kreislinie des Einheitskreises beschreibt. Wir wollen die Länge dieses Graphen bestimmen. Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

wobei diese Gleichheit nur im Innern $] -1, 1[$ Sinn ergibt, in den Randpunkten ist die Funktion nicht differenzierbar. Dennoch kann man hier Satz 38.6 zunächst im Innern anwenden und anschließend einen Grenzübergang durchführen. Es geht somit um das Integral von

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Stammfunktion davon ist $\arcsin x$. Daher ist

$$L = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Beispiel 38.13. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*, also die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Die Ableitung davon ist

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Daher ist die Kurvenlänge eines von a bis b durchlaufenen Teilstückes nach Satz 38.6 gleich

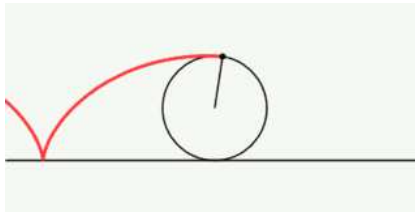
$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} \, dt = \int_a^b 1 \, dt = b - a.$$

Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen wird der Einheitskreis von 0 bis 2π genau einmal durchlaufen. Die Länge des Kreisbogens ist daher 2π .

Beispiel 38.14. Es sei ein Punkt V auf der Peripherie eines Kreises mit Radius 1 fixiert (beispielsweise ein Ventil). Die *Zykloide* ist diejenige Kurve, die der Punkt beschreibt, wenn der Kreis sich gleichmäßig auf einer Geraden (der x -Achse) abrollt, wie wenn ein Rad auf der Straße fährt. Wenn t den Winkel bzw. die abgerollte Strecke repräsentiert, und der Punkt V sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in $(0, 0)$ befindet, so wird die Bewegung des Ventils durch

$$W: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto W(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

beschrieben.



Nach einer Voldrehung befindet sich das Ventil wieder in seiner Ausgangsposition am Rad, aber verschoben um 2π . Die Ableitung dieser Kurve ist

$$W'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

Die Länge der Zykloide (also die Länge des vom Ventil beschriebenen Weges) ist nach Satz 38.6 im Zeitintervall von 0 nach s gleich

$$\begin{aligned} \int_0^s \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt &= \int_0^s \sqrt{2 - 2 \cos t} \, dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^s \sqrt{1 - \cos t} \, dt \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{1 - \cos 2u} \, du \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 u + \sin^2 u} \, du \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{2 \sin^2 u} \, du \\ &= 4 \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{\sin^2 u} \, du \\ &= 4 \int_0^{\frac{s}{2}} |\sin u| \, du \\ &= 4 \int_0^{\frac{s}{2}} \sin u \, du, \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Umformung für $s \leq 2\pi$ gilt. Für $s = 2\pi$ ist dies gleich $4 \cdot 2 = 8$.

38. ARBEITSBLATT

38.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 38.1. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Bestimme die Länge der affin-linearen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto tv + w.$$

Aufgabe 38.2. Sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Kurve und $c \in [a, b]$. Zeige, dass f genau dann rektifizierbar ist, wenn die beiden Einschränkungen von f auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ rektifizierbar sind, und dass in diesem Fall

$$L_a^b(f) = L_a^c(f) + L_c^b(f)$$

gilt.

Aufgabe 38.3. Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 - 5x^2 + 3x - 2,$$

von -5 nach 5 .



Aufgabe 38.4.*

Bestimme die Länge der durch

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (\cos t, \sin t, t),$$

gegebenen *Schraubelinie* für t zwischen 0 und b , wobei $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Aufgabe 38.5.*

Berechne die Länge der archimedischen Spirale

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t \cos t, t \sin t),$$

für die Umdrehung zwischen $t = 0$ und $t = 2\pi$.

Aufgabe 38.6. Bestimme die Länge der Neilschen Parabel

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2, t^3),$$

von 0 bis b , wobei $b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 38.7. Bestimme die Länge des Graphen des cosinus hyperbolicus $\cosh t$ von a nach b .**Aufgabe 38.8.***

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 13,$$

zwischen 4 und 8.

Aufgabe 38.9.*

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$f: [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, \sin t).$$

- Skizziere das Bild dieser Kurve und den Streckenzug, der sich ergibt, wenn man das Definitionsintervall in vier gleichlange Teilintervalle unterteilt.
- Berechne die Gesamtlänge des in a) beschriebenen Streckenzugs.
- Zeige, dass für die Länge L dieser Kurve die Abschätzung

$$L \leq \sqrt{2}\pi$$

gilt.

Aufgabe 38.10.*

Wir betrachten die reelle Ebene \mathbb{R}^2 ohne den offenen Kreis mit Mittelpunkt $M = (0, 0)$ und Radius 3, also

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \geq 3 \right\}.$$

Eine Person befindet sich im Punkt $A = (5, 0)$ und möchte zum Punkt $B = (-5, 0)$, wobei sie sich nur in T bewegen darf.

a) Zeige, dass die Person von A nach B entlang von zwei geraden Strecken kommen kann, deren Gesamtlänge 12,5 ist.

b) Zeige, dass die Person von A nach B entlang eines stetigen Weges kommen kann, dessen Gesamtlänge maximal 11,9 ist.

Aufgabe 38.11. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann rektifizierbar ist, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.

Aufgabe 38.12.*

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven Abbildung

$$\varphi: [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \subseteq \mathbb{R},$$

die rektifizierbar ist, deren Länge aber > 1 ist.

Aufgabe 38.13.*

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven Abbildung

$$\varphi: [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \subseteq \mathbb{R},$$

die nicht rektifizierbar ist.

Die folgenden Aufgaben diskutieren, inwiefern höherdimensional ein „Mittelwertsatz“ gelten kann.

Aufgabe 38.14. Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit $f(a) \neq f(b)$. Zeige, dass es kein $c \in [a, b]$ derart geben muss, dass

$$f'(c) = s \cdot (f(b) - f(a))$$

mit einem $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, gilt.

Aufgabe 38.15. Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ und mit $f(a) \neq f(b)$. Zeige, dass es kein $c \in [a, b]$ derart geben muss, dass

$$f'(c) = s \cdot (f(b) - f(a))$$

mit einem $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, gilt.

Aufgabe 38.16. Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ und mit $f(a) \neq f(b)$. Zeige, dass es kein $c \in [a, b]$ derart geben muss, dass $f'(c)$ und $f(b) - f(a)$ linear abhängig sind.

Aufgabe 38.17.*

Es sei $h: I \rightarrow V$ eine zweimal differenzierbare Kurve in einem euklidischen Vektorraum V . Zeige, dass bei $h'(t) \neq 0$ die Gleichheit

$$\|h'(t)\|' = \frac{\langle h'(t), h''(t) \rangle}{\langle h'(t), h'(t) \rangle} \|h'(t)\|$$

gilt.

Aufgabe 38.18. Wir betrachten die Zykloide aus Beispiel 38.14, also die differenzierbare Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (x(t), y(t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

- (1) Zeige, dass $x(t)$ streng wachsend ist.
- (2) Zeige, dass

$$x: [0, 2\pi] \longrightarrow [0, 2\pi], t \longmapsto x(t),$$

bijektiv ist.

- (3) Es sei $h(x)$ die Umkehrfunktion zu $x(t)$ aus Teil (2). Zeige, dass h in 0 und in 2π nicht differenzierbar ist.
- (4) Drücke $y(t)$ als Funktion von x aus. Wie verhält sich der Graph zu dieser Funktion zu der Zykloide? Ist diese Funktion differenzierbar?

38.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 38.19. (4 Punkte)

Ein Massenteil werde zum Zeitpunkt 0 von einem Berggipfel (der als Nullpunkt der Ebene angesetzt wird) mit konstanter horizontaler Geschwindigkeit v abgeschossen und bewege sich danach luftwiderstandsfrei unter der (konstanten) Schwerkraft der Erde. Berechne die Bahnkurve $f(t)$ des Körpers und die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t .

Aufgabe 38.20. (4 Punkte)

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - 4x + 11,$$

zwischen 2 und 9.

Aufgabe 38.21. (3 Punkte)

Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto \left(\frac{t^3}{3}, \frac{4t^5}{5}, \frac{8t^7}{7} \right),$$

von a nach b .

Aufgabe 38.22. (5 Punkte)

Bestimme die Länge des Graphen der Exponentialfunktion $\exp t$ von a nach b .

Aufgabe 38.23. (5 (3+2) Punkte)

Person A befindet sich im Punkt $(0, -5)$ und will nach $(0, 5)$. Im Punkt $(0, 0)$ befindet sich eine weitere unbewegliche Person B . Da die Abstandsregel von 2 einzuhalten ist, muss A um B herumlaufen.

- (1) Was ist die minimale Länge eines Weges, mit dem A an ihr Ziel gelangt?
- (2) Man gebe eine Parametrisierung dieses kürzesten Weges an, wobei die Geschwindigkeit konstant gleich 1 sein soll.

Aufgabe 38.24. (8 Punkte)

Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Zeige, dass es ein $c \in [a, b]$ derart gibt, dass $f'(c)$ und $f(b) - f(a)$ linear abhängig sind.

39. VORLESUNG - WEGINTEGRALE

39.1. Integration von stetigen Wegen.

Für eine stetige Kurve

$$g: I \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum definieren wir für $a, b \in I$ das Integral $\int_a^b g(s) ds$ komponentenweise, d.h. man wählt eine Basis v_1, \dots, v_n von V und drückt die stetige Kurve durch ihre Komponentenfunktionen g_1, \dots, g_n aus. Dann setzt man

$$\int_a^b g(s) ds := \left(\int_a^b g_1(s) ds \right) v_1 + \dots + \left(\int_a^b g_n(s) ds \right) v_n.$$

Das Ergebnis ist ein Vektor in V , der unabhängig von der gewählten Basis ist, siehe Aufgabe 39.2. Wenn man die untere Intervallgrenze a fixiert und die obere Intervallgrenze $b = t$, so bekommt man eine *Integralkurve*

$$I \longrightarrow V, t \longmapsto \int_a^t g(s) ds.$$

Diese Integralkurve (oder *Stammkurve*) kann man wieder ableiten und erhält die Ausgangskurve zurück, d.h. es gilt wieder der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

Es gilt die folgende Integralabschätzung.

Satz 39.1. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und*

$$g: [a, b] \longrightarrow V$$

eine stetige Abbildung. Dann gilt

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt.$$

Beweis. Wenn $\int_a^b g(t) dt = 0$ ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also

$$\int_a^b g(t) dt = v \neq 0.$$

Es sei $u_1 := \frac{v}{\|v\|}$. Das ergänzen wir zu einer Orthonormalbasis u_1, u_2, \dots, u_n von V . Es seien g_1, g_2, \dots, g_n die Koordinatenfunktionen von g bezüglich dieser Basis. Dann besteht aufgrund unserer Basiswahl die Beziehung

$$\begin{aligned} v &= \int_a^b g(t) dt \\ &= \left(\int_a^b g_1(t) dt \right) u_1 + \dots + \left(\int_a^b g_n(t) dt \right) u_n \\ &= \left(\int_a^b g_1(t) dt \right) u_1, \end{aligned}$$

da ja v ein Vielfaches von u_1 ist und somit die anderen Koeffizienten gleich 0 sind. Daher ist

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b g(t) dt \right\| &= \left| \int_a^b g_1(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |g_1(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \sqrt{(g_1(t))^2 + \dots + (g_n(t))^2} dt \\ &= \int_a^b \|g_1(t)u_1 + \dots + g_n(t)u_n\| dt \\ &= \int_a^b \|g(t)\| dt. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 39.2. Die Abschätzung aus Satz 39.1 ist im Allgemeinen recht grob. Wenn beispielsweise $g = f'$ die Ableitung einer stetig differenzierbaren Kurve

$$f: [a, b] \longrightarrow V$$

ist, so ist die rechte Seite nach Satz 38.6 gleich

$$\int_a^b \|g(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt = L_a^b(f),$$

also die Kurvenlänge von f . Die linke Seite ist hingegen

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| = \|f(b) - f(a)\|.$$

Die Abschätzung ist also in diesem Fall trivial, da ja die Kurvenlänge nach Definition 38.5 das Supremum der Längen der interpolierenden Streckenzüge ist, und $\|f(b) - f(a)\|$ ist die Länge der direkten Strecke.

Bemerkung 39.3. Aus Satz 39.1 kann man Satz 38.1 für eine stetig differenzierbare Kurve

$$f: I \longrightarrow V$$

gewinnen. Mit $g = f'$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &= \left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \\ &\leq \int_a^b \|g(t)\| dt \\ &= (b - a) \|g(c)\| \\ &= (b - a) \|f'(c)\| \end{aligned}$$

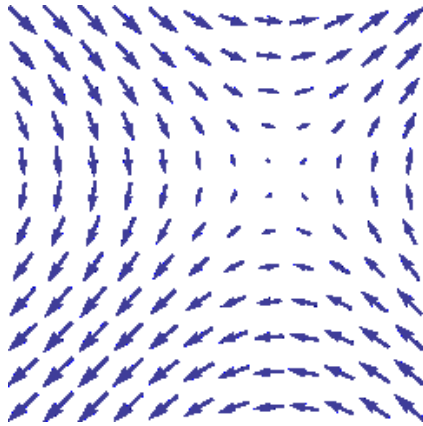
für ein gewisses $c \in [a, b]$, dessen Existenz aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (in einer Variablen) folgt.

39.2. Vektorfelder.

Definition 39.4. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und $U \subseteq V$ eine offene Menge. Dann nennt man eine Abbildung

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

ein *Vektorfeld* (auf U).



Die übliche physikalische Interpretation ist hierbei, dass $t \in I$ die Zeit repräsentiert, $x \in U$ den Ort und $f(t, x) \in V$ einen Vektor, der zum Zeitpunkt t an den Ortspunkt v angeheftet ist und dort eine Richtung vorgibt. Manchmal spricht man auch von einem *Richtungsfeld*. Im physikalischen Kontext werden die Vektoren als Geschwindigkeitsvektoren, als Kraftvektoren oder als Beschleunigungsvektoren interpretiert.

Wenn das Vektorfeld nicht von t abhängt, so spricht man von einem *zeitunabhängigen* oder *autonomen Vektorfeld*.

Wir werden im Rahmen der Differentialgleichungen auf zeitabhängige Vektorfelder zurückkommen. Zuerst untersuchen wir zeitunabhängige Vektorfelder und Wegintegrale.

39.3. Wegintegrale.

Definition 39.5. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge,

$$F: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld und

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_{\gamma} F := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

das *Wegintegral* zum Vektorfeld F längs des Weges γ .

Statt Wegintegral sagt man auch *Kurvenintegral*. Die stetige Differenzierbarkeit sichert dabei, dass die Ableitung γ' und damit auch der Integrand $t \mapsto \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ stetig sind, sodass das Integral existiert.

Wenn der Weg γ nur (stetig und) stückweise stetig differenzierbar ist, wenn es also eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ derart gibt,

dass die Einschränkungen⁹ $\gamma_i := \gamma_{[a_{i-1}, a_i]}$ stetig differenzierbar sind, so setzt man

$$\int_{\gamma} F := \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \cdots + \int_{\gamma_n} F.$$

Bemerkung 39.6. Das Vektorfeld

$$F: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

sei durch die Komponentenfunktionen

$$F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)$$

und die Kurve durch die Komponentenfunktionen

$$(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

mit der Ableitung

$$(\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

gegeben. Dann wird das Wegintegral durch

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_a^b F_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma'_1(t) + \cdots + F_n(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma'_n(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \end{aligned}$$

berechnet.

Beispiel 39.7. Zu einem konstanten Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \longmapsto v,$$

mit einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ und einem affin-linearen Weg

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto w + tu,$$

ist

$$\int_{\gamma} F = \int_a^b \langle v, u \rangle dt = (b - a) \langle v, u \rangle.$$

Beispiel 39.8. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - y^3, xy)$$

und den Weg

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2, t^3 - 5t).$$

Die Ableitung von γ ist

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2 - 5).$$

Daher ist das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs dieser Kurve gleich

$$\int_{\gamma} F = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

⁹Hier haben die γ_i eine andere Bedeutung als in der folgenden Bemerkung, wo sie die Komponentenfunktionen bezeichnen.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (\gamma_1(t)^2 - \gamma_2(t)^3) \cdot \gamma_1'(t) + \gamma_1(t)\gamma_2(t) \cdot \gamma_2'(t) dt \\
&= \int_0^1 (t^4 - (t^3 - 5t)^3) \cdot 2t + t^2(t^3 - 5t) \cdot (3t^2 - 5) dt \\
&= \int_0^1 (t^4 - t^9 + 15t^7 - 75t^5 + 125t^3)2t + t^2(3t^5 - 5t^3 - 15t^3 + 25t) dt \\
&= \int_0^1 2t^5 - 2t^{10} + 30t^8 - 150t^6 + 250t^4 + 3t^7 - 20t^5 + 25t^3 dt \\
&= \int_0^1 -2t^{10} + 30t^8 + 3t^7 - 150t^6 - 18t^5 + 250t^4 + 25t^3 dt \\
&= \left(-\frac{2}{11}t^{11} + \frac{10}{3}t^9 + \frac{3}{8}t^8 - \frac{150}{7}t^7 - 3t^6 + 50t^5 + \frac{25}{4}t^4 \right) \Big|_0^1 \\
&= 47 + \frac{-336 + 6160 + 693 - 39600 + 11550}{1848}.
\end{aligned}$$

Beispiel 39.9. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (-3x, 5y).$$

Für einen stetig differenzierbaren Weg

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \gamma(t),$$

ist das Wegintegral zu diesem Vektorfeld gleich

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} F &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b -3\gamma_1(t) \cdot \gamma_1'(t) + 5\gamma_2(t) \cdot \gamma_2'(t) dt \\
&= \left(-\frac{3}{2}(\gamma_1(t))^2 + \frac{5}{2}(\gamma_2(t))^2 \right) \Big|_a^b \\
&= -\frac{3}{2}(\gamma_1(b))^2 + \frac{5}{2}(\gamma_2(b))^2 + \frac{3}{2}(\gamma_1(a))^2 - \frac{5}{2}(\gamma_2(a))^2.
\end{aligned}$$

Insbesondere hängt dieser Wert nur von $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ ab, also dem Anfangspunkt und dem Endpunkt der Bewegung, nicht aber vom Verlauf des Weges.

Das folgende Beispiel zeigt, dass für einen *geschlossenen Weg* γ , wo also $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist, das Wegintegral nicht 0 sein muss. Wir werden allerdings später sehen, dass *Gradientenfelder* (*Potentialfelder*) die Eigenschaft besitzen, dass die Wegintegrale nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängen.

Beispiel 39.10. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (-y, x)$$

und den Weg

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t).$$

Die Ableitung von γ ist

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Daher ist das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs dieser Kurve gleich

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Bemerkung 39.11. Bei der üblichen physikalischen Interpretation eines Wegintegrals stellt man sich das Vektorfeld F als ein Kraftfeld und den Weg als die Bewegung eines Massepunktes vor. Dabei ist die Bewegung erzwungen, d.h. es handelt sich nicht um die natürliche Bewegung, die das Kraftfeld bewirkt, sondern um eine geführte Bewegung. Eine solche Bewegung erfordert einen Arbeitsaufwand, wenn sie gegen das Kraftfeld durchgeführt wird, und setzt Energie frei, wenn sie mit der Kraft geführt wird. Entscheidend ist dabei der Winkel zwischen der momentanen Bewegungsrichtung zu einem Zeitpunkt t und dem Kraftfeld zum Ortspunkt $\gamma(t)$. Daher taucht in der Definition des Wegintegrals das Skalarprodukt zwischen Vektorfeld und Bewegungsrichtung auf. Das gesamte Wegintegral ist die Arbeit, die man längs des Weges in dem Kraftfeld verrichtet. Das Skalarprodukt $\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ bedeutet zu einem fixierten Zeitpunkt t die momentane Leistung.

Satz 39.12. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge,*

$$F: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld und

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Es sei

$$g: [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

eine bijektive, monoton wachsende, stetig differenzierbare Funktion und sei $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} F = \int_{\tilde{\gamma}} F.$$

Beweis. Es seien F_1, \dots, F_n die Komponentenfunktionen von F und

$$\gamma_1, \dots, \gamma_n$$

die Komponentenfunktionen von γ . Dann gilt mit der Substitution

$$t = g(s)$$

unter Verwendung von Satz 20.6

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_c^d F_i(\gamma_1(g(s)), \dots, \gamma_n(g(s))) \cdot \gamma'_i(g(s)) \cdot g'(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_c^d F_i(\tilde{\gamma}_1(s), \dots, \tilde{\gamma}_n(s)) \cdot \tilde{\gamma}'_i(s) ds \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} F. \end{aligned}$$

□

Die Funktion $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ nennt man in diesem Zusammenhang eine (orientierungserhaltende) *Umparametrisierung*. Der Satz besagt, dass das Wegintegral nur von dem durchlaufenen Weg (einschließlich der Richtung) abhängt, nicht aber von der Geschwindigkeit, mit der das passiert. Wenn die Funktion g monoton fallend ist, so vertauschen sich bei der Substitution die Integrationsgrenzen und man erhält

$$\int_{\gamma} F = - \int_{\tilde{\gamma}} F.$$

Diese Beziehung gilt insbesondere, wenn der Weg γ in umgekehrter Richtung durchlaufen wird.

39. ARBEITSBLATT

39.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 39.1.*

Von einer Bewegung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

sei der Geschwindigkeitsverlauf

$$\varphi'(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{t}, t \sin(t^2), te^t \right)$$

bekannt. Ferner sei

$$\varphi(1) = (1, 2, 3)$$

bekannt. Bestimme $\varphi(t)$.

Aufgabe 39.2. Zeige, dass das Integral zu einer stetigen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V unabhängig von der gewählten Basis ist.

Aufgabe 39.3. Formuliere und beweise den *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für stetige Kurven

$$g: I \longrightarrow V,$$

wobei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum sei.

Aufgabe 39.4. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über $[a, b]$, und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

Aufgabe 39.5. Es sei

$$\gamma: [2, 7] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2 - 1, t + 3),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y) = (y^2 - x, -3xy - y^3).$$

Aufgabe 39.6. Sei

$$\gamma: [1, 6] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, t^3, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^2 - xz^2, xy, -3xz - y^3z).$$

Aufgabe 39.7.*

Berechne das Wegintegral $\int_{\gamma} F$ zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (y, x),$$

längs des Weges

$$\gamma: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, e^t).$$

Aufgabe 39.8.*

Sei

$$\gamma: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, -t^2 + 1, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^2 - xz, xyz, 5x^2z - yz).$$

Aufgabe 39.9. Sei

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (\cos t, \sin t, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y - z^3, x^2, -xz).$$

Aufgabe 39.10.*

Berechne das Wegintegral zur archimedischen Spirale

$$[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t \cos t, t \sin t),$$

im Vektorfeld

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (y, -x).$$

Aufgabe 39.11. Seien $a, b, c, d, r, s \geq 1$ natürliche Zahlen. Wir betrachten die stetig differenzierbare Kurve

$$[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^r, t^s).$$

Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d).$$

Aufgabe 39.12. Sei

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zu den folgenden Vektorfeldern.

- a) $F(x, y) = (x, y),$
- b) $F(x, y) = (x, -y),$
- c) $F(x, y) = (y, x),$
- d) $F(x, y) = (y, -x).$

Aufgabe 39.13. Es sei

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein stetiges Vektorfeld und

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein stetig differenzierbarer Weg. Es sei G eine Stammfunktion zu F . Zeige

$$\int_{\gamma} F = G(\gamma(b)) - G(\gamma(a)).$$

Aufgabe 39.14.*

Es sei

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld, wobei die i -te Komponente nur von der i -ten Variablen abhängen möge. Es sei

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

ein stetig differenzierbarer Weg. Zeige, dass das Wegintegral $\int_{\gamma} F$ nur von $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ abhängt.

Aufgabe 39.15. Wir betrachten das identische Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, P \longmapsto P.$$

Zeige, dass für je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$ und für jeden stetig differenzierbaren Weg

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$ das Wegintegral $\int_{\gamma} F$ gleich $\frac{1}{2}(\|Q\|^2 - \|P\|^2)$ ist.

Aufgabe 39.16.*

Es sei $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, aufgefasst als lineares Vektorfeld.

- (1) Man gebe ein Beispiel für ein diagonalisierbares F (mit $n = 2$) und eine stetig differenzierbare Kurve

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ derart an, dass das Wegintegral $\int_{\gamma} F$ nicht 0 ist.

- (2) Es sei nun F diagonalisierbar bezüglich einer Orthonormalbasis. Zeige, dass

$$\int_{\gamma} F = 0$$

für jede stetig differenzierbare Kurve γ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist.

Aufgabe 39.17. Es sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem euklidischen Vektorraum,

$$F, G: U \longrightarrow V$$

stetige Vektorfelder und

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Für $r, s \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_{\gamma} rF + sG = r \int_{\gamma} F + s \int_{\gamma} G.$$

(2) Es ist

$$\int_{-\gamma} F = - \int_{\gamma} F,$$

wobei $-\gamma$ den umgekehrt durchlaufenen Weg bezeichnet.

(3) Wenn

$$\delta: [b, c] \longrightarrow U$$

ein weiterer (stückweise) stetig differenzierbarer Weg mit $\delta(b) = \gamma(b)$ ist, so ist

$$\int_{\gamma * \delta} F = \int_{\gamma} F + \int_{\delta} F,$$

wobei $\gamma * \delta$ den aneinander gelegten Weg bezeichnet.

39.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 39.18. (3 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über $[a, b]$, und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

Aufgabe 39.19. (5 Punkte)

Es sei

$$\gamma: [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, -t^3, t^2 - t + 4),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^3 - x^2z^2, x^2y, 5x^3z - y^2z).$$

Aufgabe 39.20. (5 Punkte)

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t, -t, t^2),$$

und das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x^2, xz, y^2).$$

a) Berechne das Wegintegral $\int_{\gamma} F$.

b) Es sei

$$g: [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0, 1], s \longmapsto \sin s,$$

und $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$. Berechne (unabhängig von a)) $\int_{\tilde{\gamma}} F$

Aufgabe 39.21. (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - e^y, xy + \cos x).$$

Bestimme das Wegintegral längs des gegen den Uhrzeigersinn einmal durchlaufenen Einheitsquadrates.

Aufgabe 39.22. (6 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left(\frac{x^3 - xy + 2y^2}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Bestimme das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs des linearen Weges von $(0, -2)$ nach $(3, 4)$.

Aufgabe 39.23. (5 Punkte)

Wir betrachten das konstante Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, P \longmapsto v.$$

Zeige, dass für zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$ und jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$ das Wegintegral $\int_{\gamma} F$ gleich $\langle Q - P, v \rangle$ ist.

40. VORLESUNG - GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Wir haben schon gewöhnliche Differentialgleichungen samt einiger Lösungsverfahren zu Beginn der Vorlesung besprochen. Dort ging es um die Bewegungen auf einer Geraden, die durch ein von der Zeit und dem Ort (der Lage auf der Geraden) abhängiges Vektorfeld bestimmt wurden. Eine physikalische Bewegung spielt sich aber häufig höherdimensional (im \mathbb{R}^2 oder im \mathbb{R}^3) ab, so dass wir jetzt gewöhnliche Differentialgleichungen allgemein besprechen. Die Zeitkomponente wird sich nach wie vor in einem reellen Intervall bewegen, die Ortskomponente wird ein Element in einem beliebigen endlichdimensionalen reellen Vektorraum sein. Diesen statuen wir mit einem Skalarprodukt aus, sodass wir eine Norm, eine Metrik, offene Mengen, stetige Abbildungen, etc. zur Verfügung haben.

40.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Definition 40.1. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U . Dann nennt man

$$v' = f(t, v)$$

die *gewöhnliche Differentialgleichung* (oder *gewöhnliches Differentialgleichungssystem*) zum Vektorfeld f .

(Zeitabhängige) Vektorfelder und gewöhnliche Differentialgleichungssysteme sind im Wesentlichen äquivalente Objekte. Man spricht auch von einem *dynamischen System*. Von Differentialgleichungen spricht man insbesondere dann, wenn man sich für die Lösungen im Sinne der folgenden Definition interessiert.

Definition 40.2. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U . Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v' = f(t, v)$$

heißt eine Abbildung

$$v: J \longrightarrow V, t \longmapsto v(t),$$

auf einem offenen (Teil)Intervall¹⁰ $J \subseteq I$ eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

¹⁰Rein formal gesehen ist hier auch das leere Intervall zugelassen, wobei diese „leere Lösung“ natürlich uninteressant ist. Bei einem Anfangswertproblem sichert bereits die Anfangsbedingung, dass die Lösung nicht leer ist.

- (1) Es ist $v(t) \in U$ für alle $t \in J$.
- (2) Die Abbildung v ist differenzierbar.
- (3) Es ist $v'(t) = f(t, v(t))$ für alle $t \in J$.

Eine Lösung ist also eine differenzierbare Kurve, d.h. eine (orts-)vektorwertige Abbildung

$$v: J \longrightarrow V.$$

Wenn $V = \mathbb{R}^n$ ist, so wird eine solche Abbildung durch ihre Komponenten

$$(v_1(t), \dots, v_n(t))$$

beschrieben. Ebenso wird das Vektorfeld durch n , von t und $v = (v_1, \dots, v_n)$ abhängige Funktionen (f_1, \dots, f_n) beschrieben. Die Differentialgleichung lautet dann ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, v_1, \dots, v_n) \\ \vdots \\ f_n(t, v_1, \dots, v_n) \end{pmatrix}.$$

Daher spricht man auch von einem *Differentialgleichungssystem*.

Häufig soll eine Kurve nicht nur eine Differentialgleichung erfüllen, sondern sich zusätzlich zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort befinden. Dies führt zum Begriff des Anfangswertproblems.

Definition 40.3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U . Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ gegeben. Dann nennt man

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung $v' = f(t, v)$ mit der *Anfangsbedingung* $v(t_0) = w$.

Definition 40.4. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U . Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ vorgegeben. Dann nennt man eine Abbildung

$$v: J \longrightarrow V, t \longmapsto v(t),$$

auf einem Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w,$$

wenn v eine Lösung der Differentialgleichung $v' = f(t, v)$ ist und wenn zusätzlich

$$v(t_0) = w$$

gilt.

Eine zu einem Vektorfeld, einer gewöhnlichen Differentialgleichung und einem Anfangswertproblem passende Vorstellung ist das *Windmodell*. Das Vektorfeld

$$F: I \times U \longrightarrow V$$

beschreibt zu einem jeden Zeitpunkt $t \in I$ und einem Ortspunkt $P \in U$ die in diesem Punkt herrschende Windrichtung (oder Windgeschwindigkeit). Die Lösung einer Differentialgleichung ist die Bewegung eines Teilchens, das (beschleunigungsfrei und verzögerungsfrei) vom Wind getragen wird, dessen Momentangeschwindigkeit also zu jedem Zeitpunkt gleich der Windgeschwindigkeit an dem Ort ist, an dem sich das Teilchen gerade befindet. Die Lösung eines Anfangswertproblems beschreibt die Bewegung, wenn das Teilchen an einem bestimmten Punkt losgelassen wird.

Die Vorstellung, dass eine Differentialgleichung die Bewegung in einem Kraftfeld¹¹ beschreibt, kann irreführend sein. Ein Kraftfeld ist ein Beschleunigungsfeld und kein Geschwindigkeitsfeld. Allerdings führt ein Kraftfeld zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die in eine Differentialgleichung erster Ordnung (unter Hinzunahme neuer Variablen) übersetzt werden kann. Das werden wir in der nächsten Vorlesung durchführen.

40.2. Erste Beispiele.

Beispiel 40.5. Wir betrachten ein konstantes Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^n , also eine Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, x_1, \dots, x_n) \longmapsto w,$$

wobei $w \in \mathbb{R}^n$ ein fixierter Vektor ist. Im „Windmodell“ bedeutet dies, dass überall und zu jeder Zeit eine konstante Windgeschwindigkeit herrscht. Die Bewegung eines (durch den Wind getragenen) Teilchens muss sich also auf der durch einen Startpunkt und den Richtungsvektor w gegebenen Geraden vollziehen. In der Tat besitzt das Anfangswertproblem

$$v' = w \text{ und } v(t_0) = P$$

die eindeutige¹² (affin-lineare) Lösung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto v(t) = P + (t - t_0)w,$$

wie man durch Ableiten bestätigt.

¹¹Die physikalische Interpretation eines Vektorfeldes als Kraftfeld ist hingegen bei Wegintegralen (nämlich als Arbeitsintegral) richtig.

¹²Ob die Lösung einer Differentialgleichung (existiert und) eindeutig ist, ist ein wichtiges Problem. Der wichtigste Satz zu dieser Fragestellung ist der Satz von Picard-Lindelöf, den wir später besprechen werden. In vielen der hier besprochenen Beispiele ist die Eindeutigkeit der Lösung direkt klar oder folgt aus den Eindeutigkeitsaussagen aus den Vorlesungen 31 bis 33.

Beispiel 40.6. Wir betrachten ein stetiges ortsunabhängiges Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^n , d.h. es sei eine stetige Abbildung

$$g: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

auf einem reellen Intervall I gegeben, die wir als Vektorfeld

$$F: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, x_1, \dots, x_n) \longmapsto g(t),$$

auffassen. Im „Windmodell“ bedeutet dies, dass zu einem festen Zeitpunkt überall die gleiche Windgeschwindigkeit herrscht, diese sich aber mit der Zeit ändert. Die Bewegungskurven der (durch den Wind getragenen) Teilchen müssen also parallel zueinander sein, also durch eine Ortsverschiebung auseinander hervorgehen. Der Differenzvektor zwischen den Positionen von zwei Teilchen bleibt während des Bewegungsvorgangs erhalten. Die Lösungskurven zu einem Anfangswertproblem

$$v' = F(t, v) = g(t) \text{ und } v(t_0) = P$$

lassen sich einfach berechnen: Die eindeutige Lösung ist die Integralkurve

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto v(t) = P + \left(\int_{t_0}^t g_1(s) ds, \int_{t_0}^t g_2(s) ds, \dots, \int_{t_0}^t g_n(s) ds \right),$$

wobei die g_i die Komponentenfunktionen von g sind.

Beispiel 40.7. Es seien n reellwertige Funktionen $f_i(t, x)$ in zwei Variablen gegeben. Diese kann man zu einem Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(t, x_1), f_2(t, x_2), \dots, f_n(t, x_n))$$

zusammenfassen. Dabei hängt die i -te Koordinatenfunktion des Vektorfeldes nur von t und der i -ten Ortskoordinaten x_i ab. Eine Lösungskurve $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ muss die Bedingungen

$$x'_i(t) = F_i(t, x_1, \dots, x_n) = f_i(t, x_i)$$

(für $i = 1, \dots, n$) erfüllen. Diese n Bedingungen sind unabhängig voneinander, d.h. man kann die n Komponentenfunktionen $x_i(t)$ getrennt mit einem eindimensionalen Ansatz bestimmen. Daher spricht man von einem *entkoppelten Differentialgleichungssystem*.

Manchmal ist ein Differentialgleichungssystem in den ursprünglich gegebenen Koordinaten nicht entkoppelt, lässt sich aber durch einen Koordinatenwechsel entkoppeln und dann lösen. Dies ist vor allem für lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten wichtig, die mit Mitteln der linearen Algebra entkoppelt werden können.

Beispiel 40.8. Wir betrachten das (zeitunabhängige) Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto (-y, x).$$

Hier steht also der Richtungsvektor $F(t, x, y) = (-y, x)$ stets senkrecht auf dem Ortsvektor (x, y) , und ihre Normen stimmen überein. Man erwartet

kreisförmige Bewegungen. In der Tat ist zur Anfangsbedingung $v(0) = (r, 0)$ die Kurve

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (r \cos t, r \sin t),$$

die eindeutige Lösung.

40.3. Vektorfelder mit konstanter Richtung.

Wir betrachten Differentialgleichungen zu Vektorfeldern, die zwar nicht wie in Beispiel 40.5 konstant sind, aber wo die Richtung konstant ist, wo also die Richtungsvektoren stets skalare Vielfache eines festen Vektors $w \in V$ sind.

Definition 40.9. Es sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V , $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $w \in V$ ein fixierter Vektor. Es sei

$$g: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}, (t, v) \longmapsto g(t, v),$$

eine Funktion. Dann heißt das Vektorfeld

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v) = g(t, v) \cdot w,$$

ein *Vektorfeld mit konstanter Richtung*.

Man erwartet direkt, dass die Lösungskurven zu einem solchen Vektorfeld sich auf einer durch den Richtungsvektor w festgelegten Geraden bewegen.

Lemma 40.10. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $w \in \mathbb{R}^n$ ein fixierter Vektor. Es sei*

$$g: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}, (t, v) \longmapsto g(t, v),$$

eine Funktion mit dem zugehörigen Vektorfeld mit konstanter Richtung

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v) = g(t, v) \cdot w.$$

Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = F(t, v)$$

mit

$$v(t_0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

von der Form

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta(t)w,$$

wobei

$$\beta: J \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$z' = h(t, z) := g(t, a_1 + zw_1, \dots, a_n + zw_n)$$

mit

$$\beta(t_0) = 0$$

ist.

Beweis. Es sei

$$\beta: J \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $J \subseteq I$ eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$z' = h(t, z) := g(t, a_1 + zw_1, \dots, a_n + zw_n)$$

mit

$$\beta(t_0) = 0$$

und sei

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta(t)w$$

Dann ist nach Lemma 37.9 (2)

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \beta'(t)w \\ &= g(t, a_1 + \beta(t)w_1, \dots, a_n + \beta(t)w_n)w \\ &= F(t, \gamma(t)). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\gamma(t_0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta(t_0)w = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

□

Beispiel 40.11. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = g(t, x, y) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$g(t, x, y) = t(x + y)$$

und dem Anfangsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Gemäß Lemma 40.10 müssen wir nach einer Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$z' = h(t, z) := t(2 + 3z + 5 + z) = t(4z + 7) = 4tz + 7t$$

mit $z(0) = 0$ suchen. Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist e^{2t^2} und die Lösungen sind

$$-\frac{7}{4} + ce^{2t^2}.$$

Um das Anfangswertproblem zu lösen muss man $c = \frac{7}{4}$ nehmen. Deshalb ist

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(-\frac{7}{4} + \frac{7}{4}e^{2t^2} \right) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Lösung des Anfangwertproblems.

40.4. Zentralfelder.

Definition 40.12. Es sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V , $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei

$$g: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}, (t, v) \longmapsto g(t, v)$$

eine Funktion. Dann heißt das Vektorfeld

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v) = g(t, v) \cdot v,$$

ein *Zentralfeld*.

Bei einem Zentralfeld sind also der Ortsvektor und der Richtungsvektor linear abhängig, d.h. der Richtungsvektor weist in Richtung des Ortsvektors. Daher findet die durch ein Zentralfeld definierte Bewegung allein auf der durch einen Ortspunkt und den Nullpunkt (dem Zentrum) festgelegten Geraden statt. Es handelt sich also im Grunde um einen eindimensional festgelegten Bewegungsvorgang, was auch im folgenden Lemma zum Ausdruck kommt.

Lemma 40.13. *Es sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V . Es sei*

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v) = g(t, v) \cdot v,$$

ein stetiges Zentralfeld zur stetigen Funktion

$$g: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}, (t, v) \longmapsto g(t, v).$$

Es sei $w \in U$ und es sei

$$\alpha: J \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung der eindimensionalen Differentialgleichung

$$z' = h(t, z) := g(t, zw) \cdot z \text{ mit } \alpha(t_0) = 1.$$

Dann ist

$$v(t) = \alpha(t) \cdot w$$

eine Lösung des Anfangwertproblems

$$v' = F(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} v'(t) &= (\alpha(t) \cdot w)' \\ &= \alpha'(t) \cdot w \\ &= g(t, \alpha(t) \cdot w) \cdot \alpha(t) \cdot w \\ &= F(t, \alpha(t) \cdot w) \\ &= F(t, v(t)) \end{aligned}$$

und

$$v(t_0) = \alpha(t_0) \cdot w = w,$$

so dass eine Lösung des Anfangwertproblems vorliegt. \square

Beispiel 40.14. Wir betrachten das Zentralfeld zum zeitunabhängigen identischen Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto v,$$

die beschreibende Hilfsfunktion ist also durch

$$g(t, v) = 1$$

gegeben. Sei t_0 und $w \in V$ vorgegeben. Nach Lemma 40.13 müssen wir die eindimensionale gewöhnliche Differentialgleichung $z' = z$ betrachten, die gesuchte Lösung ist

$$z(t) = e^{t-t_0}.$$

Daher ist

$$v(t) = e^{t-t_0}w$$

die Lösung des Anfangswertproblems zum Zentralfeld.

Beispiel 40.15. Wir betrachten das Zentralfeld zur Funktion

$$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x, y) \longmapsto g(t, x, y) = \frac{t^2 x^2}{y},$$

also das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto \frac{t^2 x^2}{y} \cdot (x, y) = \left(\frac{t^2 x^3}{y}, t^2 x^2 \right),$$

und die Anfangsbedingung $\varphi(0) = (4, -3)$. Um dieses Anfangswertproblem zu lösen, müssen wir gemäß Lemma 40.13 die eindimensionale gewöhnliche Differentialgleichung

$$z' = g(t, 4z, -3z) \cdot z = \frac{t^2 16z^2}{-3z} \cdot z = -\frac{16}{3} t^2 z^2$$

mit der Anfangsbedingung $z(0) = 1$ lösen. Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, nach Korollar 33.6 ist

$$z(t) = \frac{1}{\frac{16}{9}t^3 + 1}$$

die Lösung mit $z(0) = 1$. Daher ist

$$v(t) = \frac{1}{\frac{16}{9}t^3 + 1} (4, -3)$$

die Lösung des Anfangswertproblems zum Zentralfeld.

40. ARBEITSBLATT

40.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 40.1. Bestimme die¹³ Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } v(2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 40.2. Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \begin{pmatrix} t^2 - \sin t \\ \cos^2 t \end{pmatrix} \text{ mit } v(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 40.3. Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto (-ay, ax),$$

und zur Anfangsbedingung $v(s) = (b, c)$ (dabei seien $a, b, c, s \in \mathbb{R}$ fixierte reelle Zahlen).

Aufgabe 40.4. Wie löst man eine gewöhnliche Differentialgleichung zu einem stetigen ortsunabhängigen Vektorfeld

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v) = g(t)?$$

Aufgabe 40.5. Sei

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v),$$

ein Vektorfeld. Zeige, dass eine konstante Abbildung

$$\varphi: I \longrightarrow U, t \longmapsto \varphi(t) = c,$$

genau dann eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = F(t, v)$ ist, wenn $F(t, c) = 0$ ist für alle $t \in I$.

¹³Mit dieser Formulierung wird hier und im Folgenden implizit benutzt, dass die Lösung eindeutig ist. In den meisten der hier gestellten Aufgaben ergibt sich die Eindeutigkeit direkt, sie ist aber nicht Teil der Aufgabenstellung.

Aufgabe 40.6. Löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = txy \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt 0.

Aufgabe 40.7. Löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = txy^2 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt 0.

Aufgabe 40.8.*

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow V, t \longmapsto \varphi(t),$$

eine Lösung der zeitunabhängigen Differentialgleichung

$$v' = F(t, v) = F(v)$$

zum Vektorfeld

$$F: V \longrightarrow V.$$

Zeige, dass auch

$$\psi(t) := \varphi(t + c)$$

zu jedem $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist.

Aufgabe 40.9. Es sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum in einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum V . Es sei

$$F: I \times V \longrightarrow V$$

ein Vektorfeld auf V mit der Eigenschaft, dass $F(t, v) \in W$ für alle $(t, v) \in I \times V$ gilt. Zeige, dass jede Lösung zur Differentialgleichung

$$v' = F(t, v)$$

ganz in einer Teilmenge der Form $P + W$ (einem affinen Unterraum von V) verläuft.

Aufgabe 40.10.*

Es sei V ein euklidischer Vektorraum, $u \in V$ ein fixierter Vektor und

$$F: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

ein stetiges Vektorfeld mit der Eigenschaft

$$F(t, v) = F(t, v + u)$$

für alle $v \in V$. Es sei

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow V$$

eine Lösung zur Differentialgleichung

$$v' = F(t, v).$$

Zeige, dass auch

$$\psi(t) := \varphi(t) + u$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Aufgabe 40.11. Es sei ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem zum Vektorfeld

$$F(t, x_1, \dots, x_n) = (f_1(t, x_1), \dots, f_n(t, x_n))$$

gegeben. Erläutere, wie sich die Lösungen der einzelnen Differentialgleichungen $x'_i = f_i(t, x_i)$ zur Gesamtlösung verhalten, wie dabei die Definitionsintervalle der Lösungen zusammenhängen und was man über die Eindeutigkeit von Lösungen aussagen kann.

Aufgabe 40.12. Finde alle Lösungen des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto (t^2x, yt + \sin t).$$

Aufgabe 40.13.*

a) Zeige, dass die archimedischen Spiralen

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (at \cos(t + t_0), at \sin(t + t_0)),$$

(zu fixierten $a, t_0 \in \mathbb{R}$) Lösungskurven für die Differentialgleichung (bei $t > 0$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y + \frac{x}{t} \\ x + \frac{y}{t} \end{pmatrix}$$

sind.

b) Man gebe eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu dieser Differentialgleichung an.

Aufgabe 40.14. Finde die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, v, w) \longmapsto (t^2 - t)(v, w) = ((t^2 - t)v, (t^2 - t)w),$$

mit $\varphi(0) = (1, 1)$.

Aufgabe 40.15.*

Bestimme die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto e^t x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

mit $\varphi(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 40.16.*

Es sei ein Vektorfeld der Form

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto h(t, x, y) \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},$$

mit einer stetigen Funktion

$$h: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x, y) \longmapsto h(t, x, y),$$

gegeben. Die Richtungsvektoren stehen also stets senkrecht zu den Ortsvektoren. Es sei $r \in \mathbb{R}$ und es sei

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung zur eindimensionalen Differentialgleichung

$$y' = -h(t, r \cos y(t), r \sin y(t)).$$

Zeige, dass

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \begin{pmatrix} r \cos(g(t)) \\ r \sin(g(t)) \end{pmatrix},$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$v' = F(t, v)$$

ist.

40.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 40.17. (4 Punkte)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \left(-\sin^3 t \cos t, \frac{t^3 - t + 1}{t^2 - 4} \right) \text{ mit } v(0) = (3, 7).$$

Aufgabe 40.18. (4 Punkte)

Finde die Lösung des Anfangswertproblems zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto \left(xt - 3(t+1)e^{-t}, \frac{t^2}{\sin y} \right)$$

und zur Anfangsbedingung $v(0) = (2, 0)$.**Aufgabe 40.19.** (3 Punkte)

Löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = t^2(x - y) \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt 0.

Aufgabe 40.20. (4 Punkte)Finde die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, v, w) \longmapsto (t^3 - t)(v, w) = ((t^3 - t)v, (t^3 - t)w),$$

mit $\varphi(0) = (2, 3)$.**Aufgabe 40.21.** (4 Punkte)Finde die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, v, w) \longmapsto (t^2v)(v, w) = (t^2v^2, t^2vw),$$

mit $\varphi(0) = (5, -1)$.

Aufgabe 40.22. (5 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $U \subseteq V$ offen und

$$F: U \longrightarrow V$$

ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Es sei

$$v: J \longrightarrow U$$

eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = F(v)$. Es gebe zwei Zeitpunkte $t_0 \neq t_1$ in J mit $v(t_0) = v(t_1)$. Zeige, dass es dann eine auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung dieser Differentialgleichung gibt.

41. VORLESUNG - DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG

41.1. Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Viele physikalische Bewegungsprozesse sind nicht dadurch determiniert, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt die Bewegungsrichtung (also die gerichtete Geschwindigkeit) vorgegeben wird, sondern dadurch, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt eine Kraft auf ein Teilchen wirkt, die dieses beschleunigt. In diesem Fall kann die Bewegung also nicht durch die erste Ableitung (Geschwindigkeit) modelliert werden, sondern durch die zweite Ableitung (Beschleunigung). Typische Beispiele hierzu sind die durch die Gravitation oder eine Federkraft hervorgerufenen Bewegungen.

Beispiel 41.1. Ein Gegenstand der Masse m wird im Vakuum aus einer Höhe 0 zum Zeitpunkt 0 losgelassen und fällt unter dem Einfluss der Gravitation zu Boden (freier Fall im Vakuum). Dabei wirkt auf den Körper die Gravitationskraft gm (die Erdbeschleunigung g nehmen wir für diesen Bewegungsvorgang als konstant an), die ihn nach dem Gesetz „Kraft ist Masse mal Beschleunigung“ beschleunigt. Die Beschleunigung ist also konstant und unabhängig von der Masse. Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeit $v(t)$ des Körpers die Differentialgleichung

$$v'(t) = -g$$

erfüllt (die Wahl des Vorzeichens bewirkt, dass der Körper ins Negative fällt). Die durch die Anfangsbedingung (der Gegenstand ruhe zum Zeitpunkt 0) $v(0) = 0$ festgelegte Lösung für die Geschwindigkeit ist daher

$$v(t) = -gt.$$

Der zurückgelegte Weg $y(t)$ des Körpers ergibt sich wiederum aus der Differentialgleichung

$$y'(t) = v(t) = -gt,$$

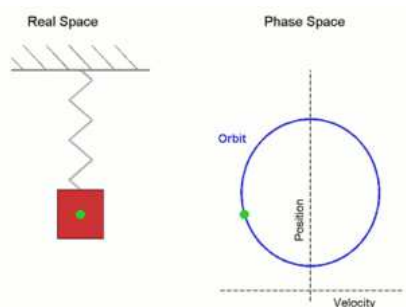
die besagt, dass die Ableitung des Weges nach der Zeit die Momentangeschwindigkeit beschreibt. Die Lösung davon ist

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2.$$

Den Gesamtvorgang kann man durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -g$$

ausdrücken.



Beispiel 41.2. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes auf einer Geraden, wobei die auf den Punkt (in Richtung des Nullpunkts) wirkende Kraft (bzw. Beschleunigung) proportional zur Lage des Punktes sein soll. Wenn der Punkt sich in \mathbb{R}_+ befindet und sich in die positive Richtung bewegt, so wirkt diese Kraft bremsend, wenn er sich in die negative Richtung bewegt, so wirkt die Kraft beschleunigend. Mit der Proportionalitätskonstante 1 gelangt man zur Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$y'' = -y,$$

die diesen Bewegungsvorgang beschreibt. Als Anfangsbedingung wählen wir $y(0) = 0$ und $y'(0) = v$, zum Zeitpunkt 0 soll die Bewegung also durch den Nullpunkt gehen und dort die Geschwindigkeit v besitzen. Man kann sofort die Lösung

$$y(t) = v \cdot \sin t$$

angeben.

Beispiel 41.3. Ein Gegenstand der Masse m wird aus der Höhe losgelassen und fällt unter dem Einfluss der Gravitation zu Boden. Dabei wirkt auf den Körper einerseits die Gravitationskraft gm (die Erdbeschleunigung g nehmen wir für diesen Bewegungsvorgang als konstant an), die ihn beschleunigt, andererseits wird diese Beschleunigung durch den Luftwiderstand verringert. Nach einem physikalischen Gesetz ist die Reibung (bei relativ kleinen Geschwindigkeiten) proportional und entgegengesetzt zur Geschwindigkeit des Körpers. Es sei β der Reibungswiderstand, also dieser Proportionalitätsfaktor. Die auf den Körper (nach unten) wirkende Gesamtkraft ist daher

$$F(t) = gm - \beta y'(t).$$

Wegen

$$y''(t) = \frac{F(t)}{m}$$

gilt daher für diesen Bewegungsvorgang die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -\frac{\beta}{m}y' + g.$$

Wenn wir dies mit der Ableitungsfunktion $v = y'$ schreiben, so erhalten wir die Bedingung

$$v' = -\frac{\beta}{m}v + g,$$

die nach Beispiel 32.11 die Lösungen

$$v(t) = ce^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{gm}{\beta}$$

besitzt. Durch Intergration erhält man für die Differentialgleichung zweiter Ordnung die Lösungsfunktionen

$$y(t) = -c\frac{m}{\beta}e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{gm}{\beta}t + d$$

mit beliebigen Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$. Siehe auch Aufgabe 41.4.

Definition 41.4. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$h: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man den Ausdruck

$$y^{(n)} = h(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

eine *Differentialgleichung der Ordnung n* .

Unter einer *Lösung einer Differentialgleichung höherer Ordnung* versteht man eine n -mal differenzierbare Funktion

$$y: J \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t)$$

(wobei $J \subseteq I$ ein offenes Teilintervall ist) derart, dass

$$y^{(n)}(t) = h(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

für alle $t \in J$ gilt.

Differentialgleichungen beliebiger Ordnung können unter Inkaufnahme von neuen Variablen auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung zurückgeführt werden.

Lemma 41.5. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$h: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist die *Differentialgleichung höherer Ordnung*

$$y^{(n)} = h(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

über die Beziehung

$$v_i := y^{(i)}$$

äquivalent zum Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wenn

$$y: J \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = h(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

ist, so sind alle Funktionen $v_i = y^{(i)}$ für $i = 0, \dots, n-1$ differenzierbar, und es gilt $v'_i = v_{i+1}$ für $i = 0, \dots, n-2$ nach Definition und schließlich

$$\begin{aligned} v'_{n-1}(t) &= (y^{(n-1)})'(t) \\ &= y^{(n)}(t) \\ &= h(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ &= h(t, v_0(t), v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Wenn umgekehrt

$$v: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$\begin{aligned} F: I \times U &\longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v_0, \dots, v_{n-1}) \longmapsto \\ &F(t, v_0, \dots, v_{n-1}) = (v_1, \dots, v_{n-1}, h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1})), \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich sukzessive aus den ersten $n-1$ Gleichungen, dass $y = v_0$ n -mal differenzierbar ist, und die letzte Gleichung des Differentialgleichungssystems besagt gerade

$$y^{(n)}(t) = h(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

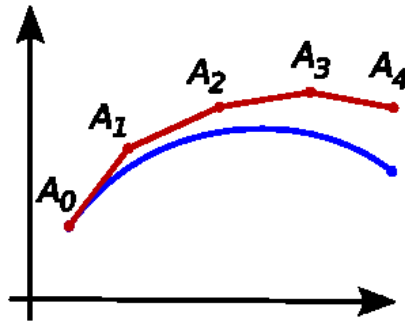
□

Mit dieser Umformung ist auch klar, wie sinnvolle Anfangsbedingungen für eine Differentialgleichung höherer Ordnung aussehen. Man muss nicht nur einen Startwert $y(t_0) = w_0$, sondern auch die höheren Ableitungen $y'(t_0) = w_1$, $y''(t_0) = w_2$, usw. festlegen.

Es ist im Allgemeinen schwierig, eine Differentialgleichung explizit zu lösen. Wir besprechen daher zwei approximierende Verfahren, nämlich das *euler-sche Polygonzugverfahren* und den *Potenzreihenansatz*. Über die Güte der Approximationen machen wir keine Angabe.

41.2. Polygonzugverfahren.

Mit dem (eulerschen) Polygonzugverfahren wird die Lösungskurve einer Differentialgleichung diskret approximiert.



Verfahren 41.6. Es sei ein Vektorfeld

$$F: G \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

auf einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ und eine Anfangsbedingung $y(t_0) = P \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Das *eulersche Polygonzugverfahren* funktioniert folgendermaßen: Man wählt eine Schrittweite $s > 0$ und berechnet rekursiv die Punktfolge P_n , $n \in \mathbb{N}$, durch $P_0 = P$ und

$$P_{n+1} = P_n + sF(t_0 + ns, P_n).$$

Zu einem schon konstruierten Punkt P_n wird also das s -fache des Richtungsvektors zum Zeitpunkt $t_0 + ns$ an diesem Punkt hinzuaddiert. Dies funktioniert nur, solange die Punkte im Definitionsbereich des Vektorfeldes liegen. Der zu dieser Punktfolge gehörende *Streckenzug* oder *Polygonzug*

$$\delta: \mathbb{R}_{\geq t_0} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

ist die lineare Interpolation mit $\delta(t_0 + ns) = P_n$, d.h. für t mit $t_0 + ns \leq t \leq t_0 + (n+1)s$ ist

$$\delta(t) = P_n + \frac{t - t_0 - ns}{s}(P_{n+1} - P_n).$$

Dieser Streckenzug δ stellt eine stückweise lineare Approximation der Lösungskurve des Anfangswertproblems dar. Für eine kleinere Schrittweite wird die Approximation im Allgemeinen besser.

Beispiel 41.7. Bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

ergibt sich y einfach als eine Stammfunktion zu g . Wendet man in dieser Situation Verfahren 41.6 zum Startzeitpunkt t_0 , zum Startpunkt c und zur Schrittweite s an, so ergibt sich die rekursive Beziehung

$$P_0 = c \text{ und } P_{n+1} = P_n + sg(t_0 + ns).$$

Daher ist offenbar

$$P_n = c + s(g(t_0) + g(t_0 + s) + g(t_0 + 2s) + \cdots + g(t_0 + (n-1)s)).$$

D.h. dass man zu dem Ausgangswert c das Treppenintegral zur äquidistanten Unterteilung $t_0, t_0+s, t_0+2s, \dots, t_0+(n-1)s$ (und zur durch $g(t_0+ks)$ auf dem Teilintervall $[t_0+ks, t_0+(k+1)s[$ gegebenen Treppenfunktion) hinzuaddiert. Der zugehörige Streckenzug ist die (stückweise lineare) Integralfunktion zu dieser Treppenfunktion.

Beispiel 41.8. Wir wollen für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - ty \\ txy \end{pmatrix} = F(t, x, y)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gemäß Verfahren 41.6 einen approximierenden Streckenzug berechnen. Wir wählen die Schrittweite $s = \frac{1}{10}$. Somit ist

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{10}F(0, P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + \frac{1}{10}F\left(\frac{1}{10}, P_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \left(\frac{11}{10}\right)^2 - \frac{1}{10} \cdot 1 \\ \frac{1}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{111}{100} \\ \frac{11}{100} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + \frac{1}{10}F\left(\frac{2}{10}, P_2\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \left(\frac{1211}{1000}\right)^2 - \frac{2}{10} \cdot \frac{1011}{1000} \\ \frac{2}{10} \cdot \frac{1211}{1000} \cdot \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{1264321}{1000000} \\ \frac{2448642}{1000000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{133743210}{10000000} \\ \frac{103548642}{10000000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

41.3. Potenzreihenansatz.

Nicht alle Differentialgleichungen sind explizit lösbar, und selbst wenn es eine explizite Lösung gibt, so ist es häufig schwierig, diese zu finden. Statt der vollen Information einer Lösungskurve begnügt man sich häufig mit der Teilinformation, die in der Taylor-Entwicklung der Kurve (bis zu einem bestimmten Grad) enthalten ist, d.h. man bestimmt gewisse Ableitungen der Kurve zu einem bestimmten Zeit- und Ortspunkt. Diese Information kann man häufig direkt aus der Differentialgleichung ablesen, ohne die Lösungskurve zu bestimmen. Diese Vorgehensweise setzt voraus, dass das Vektorfeld durch „analytische“ (beispielsweise polynomiale) Daten gegeben ist.

Verfahren 41.9. Es sei ein Anfangswertproblem

$$x' = F(t, x) \text{ mit } x(0) = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

zu einem Vektorfeld

$$F: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gegeben, wobei die Komponentenfunktionen F_i , $i = 1, \dots, n$, polynomial (oder durch Potenzreihen gegeben) seien. Dann lässt sich ein *Potenzreihenansatz* für die Lösung durchführen. Das bedeutet, dass man den Ansatz $x_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ki} t^k$ mit unbestimmten Koeffizienten a_{ki} macht, und diese Koeffizienten (bis zu einem gewünschten Grad) aus den n Gleichungen

$$x'_i(t) = F_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$$

sukzessive bestimmt. Die Anfangsbedingung

$$x_i(0) = a_{0i} = c_i$$

legt dabei die konstanten Koeffizienten fest. In das Differentialgleichungssystem werden die Potenzreihen links und rechts eingesetzt und ausgewertet, wobei die Ableitung links formal zu nehmen ist und rechts die Reihen formal zu addieren und zu multiplizieren sind. Dies ergibt Gleichungen für Potenzreihen in t , die durch Koeffizientenvergleich, beginnend mit den Koeffizienten von kleinem Grad, gelöst werden können.

Beispiel 41.10. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 t - y + t^3 + e^t \text{ mit } y(0) = 0$$

und wollen es mit einem Potenzreihenansatz lösen. Sei also

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

die auszuwertende Potenzreihengleichung ist somit

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)^2 t - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + t^3 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k.$$

Die Anfangsbedingung legt $a_0 = 0$ fest. Für den konstanten Term (also zu t^0) ergibt sich aus der Potenzreihengleichung

$$a_1 = -a_0 + 1 = 1.$$

Für t^1 ergibt sich

$$2a_2 = a_0^2 - a_1 + 1 = 0.$$

Für t^2 ergibt sich

$$3a_3 = 2a_0a_1 - a_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

also ist $a_3 = \frac{1}{6}$. Für t^3 ergibt sich

$$4a_4 = 2a_0a_2 + a_1^2 - a_3 + 1 + \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{6} = 2,$$

also ist $a_4 = \frac{1}{2}$. Für t^4 ergibt sich

$$5a_5 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2 - a_4 + \frac{1}{24} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{24} = -\frac{11}{24},$$

also ist $a_5 = -\frac{11}{120}$. Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 5 ist demnach

$$t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{11}{120}t^5.$$

Beispiel 41.11. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} tx - y^2 \\ xy - t^2 \end{pmatrix} \text{ mit } x(0) = 0 \text{ und } y(0) = 1$$

und machen den Potenzreihenansatz $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ und $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$. Aufgrund der Anfangsbedingung ist

$$a_0 = 0 \text{ und } b_0 = 1.$$

Das Differentialgleichungssystem führt auf die beiden Potenzreihengleichungen

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = t \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right)^2$$

und

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k t^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right) - t^2,$$

die wir gradweise auswerten. Für den Grad 0 (der Potenzreihengleichungen) ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$a_1 = -b_0^2 = -1 \text{ und } b_1 = a_0 b_0 = 0.$$

Für den Grad 1 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$2a_2 = a_0 - 2b_0b_1 = 0 \text{ und } 2b_2 = a_0b_1 + a_1b_0 = -1,$$

also ist $a_2 = 0$ und $b_2 = -\frac{1}{2}$. Für den Grad 2 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$3a_3 = a_1 - 2b_0b_2 - b_1^2 = -1 + 1 = 0 \text{ und } 3b_3 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 - 1 = -1,$$

also ist $a_3 = 0$ und $b_3 = -\frac{1}{3}$. Für den Grad 3 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$4a_4 = a_2 - 2b_0b_3 - 2b_1b_2 = \frac{2}{3} \text{ und } 4b_4 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = \frac{1}{2},$$

also ist $a_4 = \frac{1}{6}$ und $b_4 = \frac{1}{8}$. Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 4 ist demnach

$$\left(-t + \frac{1}{6}t^4, 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{8}t^4 \right).$$

Bemerkung 41.12. Eine Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

kann man entsprechend Bemerkung 41.12 mit einem *Potenzreihenansatz*, also mit einem Ansatz der Form

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

mit unbestimmten Koeffizienten a_k , (bis zu einer gewissen Ordnung) lösen. Dazu muss die Funktion g polynomial (oder durch eine Potenzreihe gegeben) sein. Damit die Lösung eindeutig ist, müssen zusätzlich Anfangsbedingungen

$$y(0) = b_0, y'(0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$$

vorgegeben sein. Die Koeffizienten a_k werden sukzessive unter Verwendung der Differentialgleichung und der Anfangsbedingungen gelöst.

Beispiel 41.13. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'' = y'y + \sin t \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

und wollen es mit einem Potenzreihenansatz lösen. Sei also

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

die auszuwertende Potenzreihengleichung ist somit

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)'' &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung legt $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ fest. Für den konstanten Term (also zu t^0) ergibt sich aus der Potenzreihengleichung

$$2a_2 = a_1 a_0 = 0,$$

also ist $a_2 = 0$. Für t^1 ergibt sich

$$6a_3 = a_1^2 + 2a_2 a_0 + 1 = 2$$

also ist $a_3 = \frac{1}{3}$. Für t^2 ergibt sich

$$12a_4 = a_1 a_2 + 2a_2 a_1 + 3a_3 a_0 = 0,$$

also ist $a_4 = 0$. Für t^3 ergibt sich

$$20a_5 = a_1 a_3 + 2a_2^2 + 3a_3 a_1 + 4a_4 a_0 - \frac{1}{6} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6},$$

also ist $a_5 = \frac{7}{120}$. Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 5 ist demnach

$$t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{120}t^5.$$

41. ARBEITSBLATT

41.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 41.1. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y.$$

Löse damit das Anfangswertproblem

$$y'' = y \text{ mit } y(0) = 3 \text{ und } y'(0) = -2.$$

Aufgabe 41.2. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -y.$$

Löse damit das Anfangswertproblem

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 5 \text{ und } y'(0) = 6.$$

Aufgabe 41.3. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -cy$$

mit $c > 0$.

Aufgabe 41.4. Finde alle Lösungen der in Beispiel 41.3 betrachteten Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -\frac{\beta}{m}y' + g$$

mit Hilfe von Satz 32.10.

Aufgabe 41.5.*

Ein Sprinter übt bei einem Hundert-Meter-Lauf eine konstante Kraft auf, die zu Beginn zu einer Beschleunigung b führt, die allerdings bei zunehmender Geschwindigkeit gegen den Luftwiderstand aufgebracht werden muss. Der Bewegungsvorgang wird beschrieben durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = ay' + b$$

mit $a < 0$ und $b > 0$.

- (1) Erstelle eine Differentialgleichung erster Ordnung für den Geschwindigkeitsverlauf $v(t) = y'(t)$ und löse das Anfangswertproblem für $v(t)$ mit $v(0) = 0$.
- (2) Löse das Anfangswertproblem für $y(t)$ mit $y(0) = y'(0) = 0$.
- (3) Bestimme $y(t)$ für die (realistischen) Werte $b = 4$ (in m/s^2) und $a = -\frac{1}{3}$. Wo befindet sich der Sprinter nach einer Sekunde, wo nach zehn Sekunden, welche Geschwindigkeit hat er zu diesen Zeitpunkten?

Aufgabe 41.6.*

Professor Knopfloch würde gerne einen Weltrekord über 100 Meter aufstellen. Seine Grundbeschleunigung ist $b = 2,5$ und es ist $a = -\frac{1}{3}$, vergleiche Aufgabe 41.5.

- (1) Wie lange bracht Professor Knopfloch für 100 Meter?
- (2) Mit der herkömmlichen Methode konnte Professor Knopfloch den Weltrekord nicht brechen. Deshalb versuch er es erneut, diesmal im Vakuum, um den Luftwiderstand zu umgehen und seine Kraft vollständig in Beschleunigung umzusetzen. Wie lange bracht Professor Knopfloch jetzt für 100 Meter? Bricht er den Weltrekord?

Aufgabe 41.7. Zeige, dass die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = 0$$

einen n -dimensionalen reellen Vektorraum bilden.

In der Vorlesung wurde nur besprochen, wie eine eindimensionale Differentialgleichung höherer Ordnung zu einem Differentialgleichungssystem erster Ordnung führt. Diese Übersetzung gibt es auch höherdimensional.

Aufgabe 41.8. Es sei ein Differentialgleichungssystem

$$y_1^{(n)} = h_1\left(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n-1)}\right), \dots,$$

$$y_m^{(n)} = h_m\left(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n-1)}\right)$$

der Ordnung n in m Variablen gegeben. Zeige, dass man dieses System analog zur Vorgehensweise in Lemma 41.5 in ein äquivalentes System erster Ordnung in mn Variablen übersetzen kann.

Aufgabe 41.9. Wir betrachten ein zweidimensionales Kraftfeld, das in jedem Punkt in Richtung des Ursprungs wirkt und damit eine Beschleunigung erzeugt, die proportional zur Entfernung sein soll (also ein harmonisches Pendel in der Ebene). Die zugehörige zweidimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = -c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei c eine positive Konstante ist, die von der Masse des Zentrums abhängt. Mit den zusätzlichen Geschwindigkeitsvariablen $u = x'$ und $v = y'$ führt dies auf das System erster Ordnung in vier Variablen,

$$\begin{aligned} x' &= u, \\ u' &= -cx, \\ y' &= v, \\ v' &= -cy. \end{aligned}$$

Dabei sind die beiden ersten Gleichungen unabhängig von den beiden letzten Gleichungen, und zwar handelt es sich jeweils um das in Aufgabe 41.3 besprochene System. Somit sind die Lösungen gleich

$$x(t) = \alpha \cos \sqrt{ct} + \beta \sin \sqrt{ct}$$

und

$$y(t) = \gamma \cos \sqrt{ct} + \delta \sin \sqrt{ct}.$$

Man überlege sich, wie die Anfangsbedingungen (x_0, u_0, y_0, v_0) mit den Lösungsparametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zusammenhängen und welche Bahnen die Lösungskurven beschreiben. Wann ist es ein Kreis, eine Ellipse, ein Strahl, eine Spirale?

Aufgabe 41.10. Wir betrachten ein zweidimensionales Kraftfeld, d.h. im Ursprungspunkt $(0,0)$ ist das Gravitationszentrum (ein Stern), das eine auf dieses Zentrum gerichtete Kraftwirkung und damit eine Beschleunigung erzeugt. Nach dem Gravitationsgesetz ist die Kraft proportional zum Produkt der beiden Massen geteilt durch das Quadrat des Abstandes. Das Gravitationszentrum wird als unbeweglich angenommen, und es wird die Wirkungsweise auf einen (verglichen mit der Masse des Zentrums) kleinen Probekörper untersucht. Da in die Beschleunigung des Probekörpers dessen Masse auch proportional eingeht, ist diese für den Bewegungsprozess irrelevant. Die zugehörige zweidimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = -c \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei c eine positive Konstante ist, die von der Masse des Zentrums und der Gravitationskonstanten abhängt. Mit den zusätzlichen Geschwindigkeitsvariablen $u = x'$ und $v = y'$ führt dies auf das System erster Ordnung in vier Variablen,

$$\begin{aligned} x' &= u, \\ u' &= -\frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} x, \\ y' &= v, \\ v' &= -\frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} y. \end{aligned}$$

- (1) Wir betrachten kreisförmige Lösungen der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos at \\ r \sin at \end{pmatrix}$$

mit $a, r \in \mathbb{R}_+$. Welche Beziehung muss zwischen c, a, r bestehen (drittes Keplersches Gesetz)?

- (2) Wir betrachten elliptische Lösungen der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos at \\ s \sin at \end{pmatrix}$$

mit $a, r, s \in \mathbb{R}_+$. Welche Beziehung muss zwischen c, a, r, s bestehen?

- (3) Finde Lösungen, die auf einem Strahl zum Zentrum verlaufen.

Aufgabe 41.11. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Bestimme zur Schrittweite $s = \frac{1}{k}$ die approximierenden Punkte P_n gemäß dem Polygonzugverfahren. Bestimme insbesondere P_k . Was passiert mit P_k für $k \rightarrow \infty$?

Aufgabe 41.12. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto (-y, x).$$

Es sei $P_0 \neq (0, 0)$ und $s > 0$ eine Schrittweite. Zeige, dass das Polygonzugverfahren zu einem Streckenzug P_0, P_1, P_2, \dots führt, bei dem der Abstand der Punkte zum Nullpunkt gegen unendlich läuft (obwohl nach Beispiel 40.8 die Lösungskurven Kreise beschreiben). Wie verhalten sich die Winkel am Nullpunkt, die durch P_n und P_{n+1} gegeben sind.

Aufgabe 41.13.*

a) Schreibe ein Computerprogramm, das zu dem Vektorfeld aus Beispiel 41.8 zu einem Startzeitpunkt t_0 , einem Startpunkt $P_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und einer vorgegebenen Schrittweite $s > 0$ die approximierenden Punkte P_n berechnet.

b) Berechne mit diesem Programm die Punkte P_n für

(1) $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{10}, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10.$

(2) $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{100}, n = 100.$

(3) $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$

(4) $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1,001 \\ 0,999 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$

(5) $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1,01 \\ 0,99 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$

(6) $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,9 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$

(7) $t_0 = -3, P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{10}, n = 100.$

(8) $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$

Aufgabe 41.14. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y \text{ mit } y(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz.

Aufgabe 41.15.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = ty + 1 \text{ mit } y(0) = 0$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 5.

Aufgabe 41.16. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^3 - y - 4t + 2t^2 \text{ mit } y(0) = 2$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.17. (1) Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = -\sin y$$

mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ durch einem Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 5.

(2) Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = -y$$

mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ durch einem Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 5.

(3) Vergleiche die Lösungen zu (1) und (2).

Für die beiden folgenden Aufgaben verwende man die Potenzreihe

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 \pm \dots$$

Für den inhaltlichen Hintergrund siehe Beispiel Anhang 1.5 bzw. Beispiel Anhang 1.6.

Aufgabe 41.18.*

Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$x'' = \frac{-2gx - 4x(x')^2}{1 + 4x^2}$$

mit $x(0) = 0$ und $x(1) = 1$ bis zur Ordnung 4. Dabei ist g eine Konstante.

Aufgabe 41.19. Löse das Anfangswertproblem

$$x'' = -gx\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2}x'^2.$$

mit $x(0) = 0$ und $x'(0) = 1$ durch einen Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 4.

Aufgabe 41.20.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = 3yy' + y^2 \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 2$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.21. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} xt^2 - y^2t \\ xy \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.22. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} t^3 - yt^2 \\ tx^2y - \sinh t \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

41.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 41.23. (5 (1+2+2) Punkte)

a) Übersetze das Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

b) Bestimme mit dem Polygonzugverfahren zur Schrittweite $s = \frac{1}{2}$ die Näherungspunkte P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 für dieses System.

c) Berechne den Wert des zugehörigen Streckenzuges an der Stelle $t = \pi/2$.

Aufgabe 41.24. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + t^2y - 5ty^2 + 3t^3 \text{ mit } y(0) = 0$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.25. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = y + (y')^2 \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 41.26. (4 Punkte)

Finde alle polynomialen Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = 9y - 3ty' + y'' .$$

Aufgabe 41.27. (6 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} x^2t - xyt + y^3 - yt^3 \\ x^3 - xy^2 + \cos t \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

41.3. Die Aufgabe zum Hochladen.

Für die folgende Aufgabe gibt es keinen festen Abgabetermin. Hochladen meint über Commons in einem dort erlaubten Format.

Aufgabe 41.28. (10 Punkte)

Erstelle eine Animation, die den Weltrekordlauf von Usain Bolt über 100 Meter vom 16. August 2009 mit geeigneten Parametern a und b aus Aufgabe 41.5 modelliert.

42. VORLESUNG - LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEME**42.1. Lineare Transformationen.**

Entkoppelte Differentialgleichungssysteme kann man lösen, indem man die einzelnen eindimensionalen Komponenten löst. Manchmal kann eine Differentialgleichung erst durch eine lineare Transformation entkoppelt werden. Eine lineare Transformation ist einfach eine bijektive lineare Abbildung φ zwischen zwei Vektorräumen V und W . Zu einem Vektorfeld F auf V möchte man ein Vektorfeld G auf W definieren derart, dass sich die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungssysteme entsprechen. Dies geschieht durch

$G(t, y) = \varphi(F(t, \varphi^{-1}(y)))$. Zu einem Punkt $y \in W$ betrachtet man also den Urbildpunkt $\varphi^{-1}(y)$, wertet dort (bei unverändertem Zeitpunkt t) das Vektorfeld F aus und transportiert das Ergebnis mittels φ wieder nach W . Besonders übersichtlich wird die Situation durch das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} I \times V & \xrightarrow{F} & V \\ \text{Id} \times \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ I \times W & \xrightarrow{G} & W. \end{array}$$

Lemma 42.1. *Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

ein Isomorphismus zwischen den endlichdimensionalen reellen Vektorräumen V und W und sei

$$F: I \times V \longrightarrow V, (t, x) \longmapsto F(t, x),$$

ein Vektorfeld auf V . Es sei G das durch $G(t, y) := \varphi(F(t, \varphi^{-1}(y)))$ definierte Vektorfeld auf W . Dann ist

$$\alpha: J \longrightarrow V$$

genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = F(t, x) \text{ mit } x(t_0) = x_0,$$

wenn $\varphi \circ \alpha$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = G(t, y) \text{ mit } y(t_0) = \varphi(x_0)$$

ist.

Beweis. Da mit φ auch die Umkehrabbildung φ^{-1} eine lineare Isomorphie ist, genügt es, die eine Richtung zu zeigen. Sei also α eine Lösung des Anfangswertproblems zu F . Dann gelten unter Verwendung von Lemma 37.11 für $\varphi \circ \alpha$ die Gleichheiten

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \alpha)'(t) &= \varphi(\alpha'(t)) \\ &= \varphi(F(t, \alpha(t))) \\ &= (\varphi \circ F)(t, \alpha(t)) \\ &= (\varphi \circ F \circ (\text{Id} \times \varphi^{-1}))(t, (\varphi \circ \alpha)(t)) \\ &= G(t, (\varphi \circ \alpha)(t)). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$(\varphi \circ \alpha)(t_0) = \varphi(\alpha(t_0)) = \varphi(x_0).$$

□

Wenn das Vektorfeld F nur auf einer offenen Menge $U \subseteq I \times V$ definiert ist, so ist entsprechend das Vektorfeld G auf (der ebenfalls offenen Menge) $(\text{Id} \times \varphi)(U) \subseteq I \times W$ definiert. Das Lemma gilt auch in dieser Situation.

Beispiel 42.2. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung zum Vektorfeld

$$F(t, x, y) = (tx + t^3, y^2).$$

Dieses System ist entkoppelt und besteht aus den beiden einzelnen Gleichungen (in jeweils einer Raumvariablen)

$$x' = tx + t^3 \text{ und } y' = y^2.$$

Eine Lösung der linken Differentialgleichung ist $x(t) = -t^2 - 2$, eine Lösung der rechten ist $y(t) = -t^{-1}$. Daher ist

$$\begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -t^{-1} \end{pmatrix}$$

eine Lösung zu F . Wir betrachten nun die lineare Transformation

$$\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

mit der inversen Matrix

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das transformierte Vektorfeld ist

$$\begin{aligned} & G(t, u, v) \\ &= \varphi(F(t, \varphi^{-1}(u, v))) \\ &= \varphi(F(t, -2u - 3v, 3u + 4v)) \\ &= \varphi(t(-2u - 3v) + t^3, (3u + 4v)^2) \\ &= \varphi(t(-2u - 3v) + t^3, 9u^2 + 24uv + 16v^2) \\ &= (4(t(-2u - 3v) + t^3) + 3(9u^2 + 24uv + 16v^2), \\ &\quad -3(t(-2u - 3v) + t^3) - 2(9u^2 + 24uv + 16v^2)) \\ &= (-8tu - 12tv + 4t^3 + 27u^2 + 72uv + 48v^2, \\ &\quad 6tu + 9tv - 3t^3 - 18u^2 - 48uv + 32v^2). \end{aligned}$$

Für die zu G gehörende Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = G(t, u, v)$$

ist gemäß Lemma 42.1

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -t^{-1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4t^2 - 8 - 3t^{-1} \\ 3t^2 + 6 + 2t^{-1} \end{pmatrix}$$

eine Lösung.

Für eine Verallgemeinerung von Lemma 42.1, wenn φ nicht linear, aber bijektiv und total differenzierbar ist, siehe Aufgabe 53.36.

42.2. Lineare Differentialgleichungssysteme.

Definition 42.3. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*.

Es handelt sich also um die Differentialgleichung zum Vektorfeld

$$f: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v) \longmapsto f(t, v) = (M(t))v = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \dots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \dots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix}.$$

Dieses Vektorfeld ist zu jedem fixierten Zeitpunkt $t \in I$ eine lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto M(t)v.$$

Ausgeschrieben liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \dots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \dots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

vor. Es gibt immer die Nulllösung, also die konstante Abbildung mit dem Nullvektor als Wert, diese nennt man auch die triviale Lösung.

Für lineare Differentialgleichungssysteme gibt es wieder eine inhomogene Variante.

Definition 42.4. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind und wobei

$$z: I \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix},$$

eine Abbildung ist, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*. Die Abbildung z heißt dabei *Störabbildung*.

Insgesamt liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \cdots + a_{1n}(t)v_n + z_1(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \cdots + a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vor.

Die explizite Lösbarkeit eines solchen Systems hängt natürlich von der Kompliziertheit der beteiligten Funktionen a_{ij} und z_i ab. In der folgenden Situation kann man das System auf einzelne lineare inhomogene Differentialgleichungen zurückführen und dadurch sukzessive lösen.

Lemma 42.5. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es liege eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung der Form*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

mit stetigen Funktionen $a_{ij}: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $z_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ und den Anfangsbedingungen

$$v_i(t_0) = w_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ (} t_0 \in I \text{)}$$

vor. Dann lässt sich diese Gleichung lösen, indem man sukzessive unter Verwendung der zuvor gefundenen Lösungen die inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen in einer Variablen, nämlich

$$v_n' = a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \text{ mit } v_n(t_0) = w_n,$$

$$v_{n-1}' = a_{n-1n-1}(t)v_{n-1} + a_{n-1n}(t)v_n(t) + z_{n-1}(t) \text{ mit } v_{n-1}(t_0) = w_{n-1},$$

$$\begin{aligned} v_{n-2}' &= a_{n-2n-2}(t)v_{n-2} + a_{n-2n-1}(t)v_{n-1}(t) + a_{n-2n}(t)v_n(t) + z_{n-2}(t) \\ &\text{mit } v_{n-2}(t_0) = w_{n-2}, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$v_1' = a_{11}(t)v_1 + a_{12}(t)v_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)v_n(t) + z_1(t)$ mit $v_1(t_0) = w_1$,
löst.

Beweis. Das ist trivial. □

Die Lösungen eines solchen linearen Differentialgleichungssystems in oberer Dreiecksgestalt stehen also in Bijektion zu den Lösungen der n linearen inhomogenen Differentialgleichungen in einer Ortsvariablen, wobei die Störfunktionen jeweils mit den anderen Lösungen in der beschriebenen Weise zusammenhängen. Insbesondere übertragen sich Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen.

Auch wenn man ein homogenes System lösen möchte, so muss man in den Einzelschritten inhomogene Differentialgleichungen lösen.

Beispiel 42.6. Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t-1 \\ 0 & \frac{2t}{t^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für $t > 0$. Die zweite Zeile dieses Systems bedeutet

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} \cdot y,$$

das ist eine homogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen. Ihre Lösungen sind gemäß Satz 32.2 gleich

$$y(t) = c(t^2+1) = ct^2 + c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Die erste Zeile des Systems führt daher auf

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{t}x + (t-1)y \\ &= \frac{1}{t}x + c(t-1)(t^2+1) \\ &= \frac{1}{t}x + c(t^3 - t^2 + t - 1). \end{aligned}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen. Die zugehörige homogene Gleichung $x' = \frac{1}{t}x$ besitzt t als eine Lösung. Nach Satz 32.10 müssen wir eine Stammfunktion von

$$c \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t} = c \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t} \right)$$

finden, eine solche ist

$$c \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln t \right) + d.$$

Daher ist

$$t \left(c \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln t \right) + d \right) = \frac{c}{3}t^4 - \frac{c}{2}t^3 + ct^2 - ct \ln t + dt$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Also ist die allgemeine Lösung des Systems gleich

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{3}t^4 - \frac{c}{2}t^3 + ct^2 - ct \ln t + dt \\ ct^2 + c \end{pmatrix}.$$

42.3. Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten.

Falls die Funktionen a_{ij} alle konstant sind, so spricht man von einem *linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*, welche im Wesentlichen mit Mitteln der linearen Algebra gelöst werden können. Dazu ist es sinnvoll, von vornherein auch komplexe Koeffizienten zuzulassen.

Definition 42.7. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*.

Definition 42.8. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z,$$

wobei $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist

und

$$z: I \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

eine Abbildung, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*.

Die Störfunktion muss also nicht konstant sein.

Bemerkung 42.9. Es sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y + f(t) = 0$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h. die a_i sind reelle (oder komplexe) Zahlen. Das gemäß Lemma 41.5 zugehörige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{pmatrix}$$

mit

$$v_i := y^{(i)}$$

und

$$h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) := -a_{n-1}v_{n-1} - \dots - a_1v_1 - a_0v_0 - f(t)$$

wird in dieser Situation zum linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -f(t) \end{pmatrix}.$$

42. ARBEITSBLATT

42.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 42.1. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ t^5 \end{pmatrix}$$

für $t > 0$.

Aufgabe 42.2. Berechne zum Vektorfeld

$$F: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto F(t, x, y) = \begin{pmatrix} x \sin t - \sin t \\ \frac{y}{t} + t^5 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 42.1 das transformierte Vektorfeld zur durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung φ . Bestimme die Lösungen zu diesem transformierten Vektorfeld.

Aufgabe 42.3. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.4. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.5. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.6. Bestimme alle Lösungen (für $t > 0$) des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & t^3 - t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.7. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t^2 - t + 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.8. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen mit

$$f_{11}(t)f_{22}(t) - f_{21}(t)f_{12}(t) \neq 0$$

für alle $t \in I$. Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{f'_{11}f_{22} - f'_{12}f_{21}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} & \frac{-f'_{11}f_{12} + f'_{12}f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} \\ \frac{f'_{21}f_{22} - f'_{22}f_{21}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} & \frac{-f_{12}f'_{21} + f'_{22}f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass sowohl $\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}$ Lösungen des Differentialgleichungssystems sind.

Aufgabe 42.9. Es sei

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$$

eine (variable) $n \times n$ -Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Zeige, dass die einzige konstante Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ die Nulllösung ist.

Aufgabe 42.10.*

Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem auf $I \times \mathbb{R}^n$ (I ein reelles Intervall) mit einer Funktionenmatrix

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n},$$

wobei das zugrunde liegende Vektorfeld zugleich ein Zentralfeld sei. Zeige, dass die Matrix die Gestalt

$$M(t) = \varphi(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit einer geeigneten Funktion

$$\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

besitzt.

Aufgabe 42.11. Es sei $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ eine (variable) $n \times n$ -Matrix, deren Einträge Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ für alle $t \in I$. Zeige, dass $e^{\lambda t} \cdot u$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ ist.

Aufgabe 42.12. Es sei $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ eine (variable) $n \times n$ -Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein (konstanter) Eigenvektor von $M(t)$ zum (variablen, von t differenzierbar abhängigen) Eigenwert $\lambda(t)$. Zeige durch ein Beispiel, dass $e^{\lambda(t)t} \cdot u$ keine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ sein muss.

Aufgabe 42.13. Es sei

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$$

eine (variable) $n \times n$ -Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei $u(t) \in \mathbb{R}^n$ ein (variabler, von t differenzierbar abhängiger) Eigenvektor von $M(t)$ zum konstanten Eigenwert λ . Zeige durch ein Beispiel, dass $e^{\lambda t} \cdot u(t)$ keine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ sein muss.

Aufgabe 42.14. Es sei $v' = Mv$ ein lineares Differentialgleichungssystem auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und $\varphi: V \rightarrow W$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass die transformierte Differentialgleichung auf W ebenfalls linear ist.

Aufgabe 42.15. Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 - 1 & t^3 + t + 2 \\ t + 3 & t^2 + t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bis zur fünften Ordnung.

Aufgabe 42.16. Es sei M die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} und D die Ableitung, aufgefasst als Operator¹⁴

$$D: M \longrightarrow M, f \longmapsto D(f) = f'.$$

Zu einem Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = a_n X^n + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$, betrachten wir den Operator

$$P(D): M \longrightarrow M, f \longmapsto (P(D))(f) = a_n D^n(f) + \dots + a_2 D^2(f) + a_1 D(f) + a_0 f.$$

¹⁴Eine Abbildung, die Funktionen in Funktionen überführt, nennt man häufig Operator.

Berechne $(P(D))(f)$ für $P = 2X^3 - 4X^2 + 7X - 3$ und $f = x^4, e^x, e^{2x}, \sin x$.
Zeige, dass $P(D)$ eine lineare Abbildung auf M ist.

Aufgabe 42.17. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass der Differentialoperator $(D - \lambda)^n$ die Funktionen $x^j e^{\lambda x}$ mit $0 \leq j < n$ auf die Nullfunktion abbildet.

42.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 42.18. (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & -t^2 - 3t + 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.19. (8 (2+2+4) Punkte)

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (1) Erstelle eine Differentialgleichung in einer Variablen, die die Funktion $z(t) = x^2(t) + y^2(t)$ zu einer Lösung (x, y) erfüllen muss.
- (2) Finde eine Lösung für $z(t)$ aus Teil (1).
- (3) Finde eine nichttriviale Lösung des Differentialgleichungssystems.

Bemerkung: Im ersten und zweiten Teil wird untersucht, wie sich bei einer Lösung des Systems der Abstand zum Nullpunkt (bzw. dessen Quadrat) verhält. Es liegt nahe, sich für den dritten Teil zu überlegen, wie sich bei einer Lösung der Winkel zur x -Achse verhält (Polarkoordinaten).

Aufgabe 42.20. (4 Punkte)

Finde eine nichttriviale Lösung (für $t > 1$) zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{4t^4-1}{t^5-t} & \frac{-3t}{t^4-1} \\ \frac{-t}{t^4-1} & \frac{3t^4-2}{t^5-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Aufgabe 42.8.

Die für $t \in \mathbb{R}$, $-1 < t < 1$, und ein $n \in \mathbb{N}$ definierte lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-t^2}y = 0$$

heißt *Legendresche Differentialgleichung* zum Parameter n .

Aufgabe 42.21. (5 Punkte)

Zeige, dass das n -te *Legendre-Polynom*¹⁵

$$\frac{1}{2^n(n!)}((t^2 - 1)^n)^{(n)}$$

eine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung zum Parameter n ist.

Aufgabe 42.22. (6 Punkte)

Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t^3 & t^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^5 \\ t^6 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bis zur sechsten Ordnung.

43. VORLESUNG - KONSTANTE KOEFFIZIENTEN

43.1. Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten - Lösungsverfahren.

Es sei eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gegeben, d.h.

$$v' = Mv$$

mit einer konstanten Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Wir lassen hier also auch den Fall zu, dass die Einträge komplexe Zahlen sind. Beim Auffinden der Lösungen zu einer reellen Matrix ist es nämlich hilfreich, die reellen Zahlen als komplexe Zahlen aufzufassen, um dort Umformungen durchzuführen, die im Reellen nicht möglich sind. Die Lösungen werden aber nach wie vor auf reellen Intervallen definiert sein. Wir erwähnen einige Rechenregeln für differenzierbare Abbildungen

$$f: I \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

(I ist ein reelles Intervall oder eine offene Teilmenge von \mathbb{C}) die bei der Berechnung von Differentialgleichungen zum Zuge kommen. Zunächst lässt sich

¹⁵Hier bedeutet das hochgestellte (n) die n -te Ableitung.

die reelle Exponentialfunktion e^x (unter Verwendung der Exponentialreihe) zu einer Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto e^z,$$

ausdehnen. Diese ist komplex-differenzierbar, und zwar ist die Ableitung wieder die Exponentialfunktion selbst. Für eine komplexe Zahl u gilt $(e^{uz})' = ue^{uz}$. Zwischen der komplexen Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen besteht der Zusammenhang (die *Eulersche Formel*)

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

(wobei t reell oder komplex sein kann).

Ausgeschrieben liegt also das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n \end{pmatrix}$$

vor. Solche Systeme lassen sich mit Hilfe der linearen Algebra auf eine Folge von inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen in einer Variablen zurückführen und damit sukzessive lösen. Das folgende einfache Lemma gibt bereits einen deutlichen Hinweis darauf, dass lineare Eigenschaften der Matrix M eng mit den Lösungen des Differentialgleichungssystems zusammenhängen.

Lemma 43.1. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und es sei $u \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor zu M zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist die Abbildung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n, t \longmapsto ce^{\lambda t}u = c \begin{pmatrix} e^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}u_n \end{pmatrix},$$

($c \in \mathbb{K}$) eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems.

Beweis. Dies folgt direkt aus

$$\begin{aligned} v'(t) &= \begin{pmatrix} (ce^{\lambda t}u_1)' \\ \vdots \\ (ce^{\lambda t}u_n)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda ce^{\lambda t}u_1) \\ \vdots \\ (\lambda ce^{\lambda t}u_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda ce^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ \lambda ce^{\lambda t}u_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda c e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\
&= M \left(c e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right) \\
&= M \begin{pmatrix} c e^{\lambda t} u_1 \\ \vdots \\ c e^{\lambda t} u_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Definition 43.2. Es sei

$$v' = Mv$$

mit $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Dann nennt man das charakteristische Polynom

$$\chi_M = \det(tE_n - M)$$

auch das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind nach Satz 28.2 Eigenwerte von M und liefern somit nach Lemma 43.1 Lösungen des Differentialgleichungssystems.

Bemerkung 43.3. Es sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten und es sei

$$v' = Mv$$

das zugehörige System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, also mit der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Das zu dieser Matrix gehörige charakteristische Polynom ist nach Aufgabe 28.6 gleich

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0.$$

D.h. man kann dieses Polynom direkt aus der eingangs gegebenen Differentialgleichung höherer Ordnung ablesen.

Beispiel 43.4. Zu einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

ist das charakteristische Polynom gleich

$$t^2 + a_1t + a_0.$$

Dessen Nullstellen sind einfach zu bestimmen, es ist

$$t_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}.$$

Nun untersuchen wir systematisch, wie man Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten löst.

Lemma 43.5. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, es sei $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix und es sei

$$N = BMB^{-1}.$$

Dann ist

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n, t \longmapsto v(t),$$

genau dann eine Lösung von $v' = Mv$, wenn $w = Bv$ eine Lösung der Differentialgleichung $w' = Nw$ ist.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 42.1, wir geben noch einen zweiten Beweis. Es sei vorausgesetzt, dass

$$v' = Mv$$

ist. Dann gelten für $w = Bv$ mit $B = (b_{ij})_{ij}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} w'(t) &= \begin{pmatrix} w'_1(t) \\ \vdots \\ w'_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (b_{11}v_1(t) + \cdots + b_{1n}v_n(t))' \\ \vdots \\ (b_{n1}v_1(t) + \cdots + b_{nn}v_n(t))' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}v'_1(t) + \cdots + b_{1n}v'_n(t) \\ \vdots \\ b_{n1}v'_1(t) + \cdots + b_{nn}v'_n(t) \end{pmatrix} \\ &= B \begin{pmatrix} v'_1(t) \\ \vdots \\ v'_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= BM \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} \\
&= BMB^{-1} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

so dass w die Differentialgleichung

$$w' = Nw$$

löst. Die inverse Transformation zeigt, dass zu einer Lösung von $w' = Nw$ die Abbildung $B^{-1}w$ eine Lösung für $v' = Mv$ ist. \square

Satz 43.6. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ ein homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ derart, dass das äquivalente Differentialgleichungssystem

$$w' = Nw \text{ mit } N = BMB^{-1}$$

obere Dreiecksgestalt besitzt, also von der Form

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ \vdots \\ w'_{n-1} \\ w'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}$$

(mit $c_{ij} \in \mathbb{C}$) ist. Dieses System lässt sich sukzessive von unten nach oben mit dem Lösungsverfahren für inhomogene lineare Differentialgleichungen in einer Variablen lösen. Wenn zusätzlich Anfangsbedingungen $v_i(t_0) = a_i$ für $i = 1, \dots, n$ gegeben sind, so ist die Lösung eindeutig.

Beweis. Aufgrund von Satz 28.16 ist die Matrix M trigonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ derart, dass

$$N = BMB^{-1}$$

obere Dreiecksgestalt besitzt. Das lineare Differentialgleichungssystem $w' = Nw$ besitzt also die angegebene Gestalt, und es ist wegen Lemma 43.5 äquivalent zum ursprünglichen System. Die letzte Zeile des neuen Systems, also

$$w'_n = c_{nn}w_n,$$

ist eine lineare Differentialgleichung in einer Variablen, ihre Lösungen sind $w_n(t) = ae^{c_{nn}t}$. Die zweitletzte Zeile ist

$$w'_{n-1} = c_{n-1,n-1}w_{n-1} + c_{n-1,n}w_n,$$

worin man die Lösung für w_n einsetzen kann. Dann erhält man eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung in der einen Variablen w_{n-1} , die man mit dem angegebenen Lösungsverfahren lösen kann. Für die drittletzte Zeile sind dann w_{n-1} und w_n schon bekannt und dies führt wieder zu einer inhomogenen linearen Differentialgleichung für w_{n-2} . So erhält man sukzessive eine Gesamtlösung (w_1, \dots, w_n) . Eine Anfangsbedingung für $v' = Mv$ übersetzt sich direkt in eine Anfangsbedingung für $w' = Nw$. In dem soeben beschriebenen Lösungsverfahren gibt es dann jeweils eine Anfangsbedingung für die inhomogenen Differentialgleichungen, so dass die Lösungen jeweils eindeutig sind. \square

Bemerkung 43.7. Es sei

$$v' = Mv$$

mit $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und es sei

$$z: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

eine komplexwertige Lösung dieser Differentialgleichung. Wir schreiben

$$z(t) = u(t) + iv(t),$$

wobei u, v differenzierbare Kurven im \mathbb{R}^n sind, und die Real- bzw. Imaginärteil der Funktion heißen. Es sei

$$\bar{z}(t) = u(t) - iv(t)$$

die konjugiert-komplexe Funktion zu z . Dann ist wegen

$$M\bar{z}(t) = \overline{Mz(t)} = \overline{z'(t)} = \bar{z}'(t)$$

auch \bar{z} eine Lösungsfunktion. Wegen

$$u(t) = \frac{z(t) + \bar{z}(t)}{2} \quad \text{und} \quad v(t) = \frac{z(t) - \bar{z}(t)}{2i}$$

sind auch Real- und Imaginärteil von z Lösungsfunktionen (und zwar reellwertige).

Satz 43.8. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit der Anfangsbedingung $v(t_0) = u \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine auf \mathbb{R} definierte Lösung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

für dieses Anfangswertproblem.

Beweis. Aufgrund von Satz 43.6 gibt es eine eindeutige komplexwertige Lösung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

für dieses Differentialgleichungssystem. Da eine reellwertige Lösung insbesondere eine komplexwertige Lösung ist, liegt Eindeutigkeit vor. Der Realteil der komplexen Lösung, also

$$\operatorname{Re}(v): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto \operatorname{Re}(v(t)),$$

ist ebenfalls eine Lösung dieses Systems. Wegen der Eindeutigkeit muss $v = \operatorname{Re}(v)$ sein. \square

Korollar 43.9. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit $M \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ein homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann ist die Menge der Lösungen

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum.

Beweis. Dass der Lösungsraum ein \mathbb{K} -Vektorraum ist, kann man direkt nachrechnen. Aufgrund von Satz 43.6 bzw. Satz 43.8 gibt es zu jedem Vektor

$$w \in \mathbb{K}^n$$

genau eine Lösung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

mit

$$\varphi(0) = w.$$

Die Zuordnung, die eine Lösung φ der Differentialgleichung auf den Ortspunkt $\varphi(0)$ abbildet, ist linear, so dass eine lineare Isomorphie zwischen dem Lösungsraum und \mathbb{K}^n vorliegt. \square

Definition 43.10. Es sei

$$v' = Mv$$

mit $M \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ein homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt eine Basis des Lösungsraumes ein *Fundamentalsystem von Lösungen* dieses Systems.

Korollar 43.11. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit $M \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Matrix M sei diagonalisierbar mit den linear unabhängigen Eigenvektoren u_1, \dots, u_n . Dann ist der Lösungsraum der Differentialgleichung gleich

$$\{c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot u_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \cdot u_n \mid c_i \in \mathbb{K}\},$$

wobei λ_i der Eigenwert zu u_i ist.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 43.1 und aus Korollar 43.9. \square

Beispiel 43.12. Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Für

$$v_2(t) = 0$$

(also die konstante Nullfunktion in der zweiten Komponente) ergibt sich aus der ersten Zeile (bis auf skalare Vielfache) sofort $v_1 = e^{\lambda t}$, was insgesamt der Lösung (der ersten Fundamentallösung)

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

zum Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gemäß Lemma 43.1 entspricht.

Sei nun $v_2 \neq 0$. Dann führt die zweite Zeile zu $v_2 = e^{\mu t}$, was wir Satz 43.6 entsprechend zu einer Gesamtlösung fortsetzen. Die erste Zeile lautet somit

$$v_1' = \lambda v_1 + \gamma e^{\mu t}.$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist $c \cdot e^{\lambda t}$, so dass sich mit der Variation der Konstanten der Ansatz $v_1(t) = c(t) \cdot e^{\lambda t}$ mit

$$c'(t) = \gamma \cdot e^{\mu t} \cdot e^{-\lambda t} = \gamma \cdot e^{(\mu-\lambda)t}$$

ergibt.

Bei $\mu = \lambda$ ergibt sich $c(t) = \gamma t$ und damit die zweite Fundamentallösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \gamma t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Bei $\gamma \neq 0$ gehört diese zweite Lösung nicht zu einem Eigenvektor.

Bei $\mu \neq \lambda$ ergibt sich $c(t) = \frac{\gamma}{\mu-\lambda} e^{(\mu-\lambda)t}$ und damit die zweite Fundamentallösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\mu-\lambda} e^{\mu t} \\ e^{\mu t} \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\mu-\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist wieder eine Lösung, die zu einem Eigenvektor gehört.

Das folgende Beispiel knüpft an Beispiel 41.2 an.

Beispiel 43.13. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes auf der Geraden, wobei die Lage des Punktes proportional zur auf ihn wirkenden Kraft (bzw. Beschleunigung) in Richtung des Nullpunkts sein soll. Wenn der Punkt sich in \mathbb{R}_+ befindet und sich in die positive Richtung bewegt, so wirkt diese Kraft bremsend, wenn er sich in die negative Richtung bewegt, so wirkt die Kraft beschleunigend. Mit der Proportionalitätskonstante 1 gelangt man zur linearen Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$y'' = -y,$$

die diesen Bewegungsvorgang beschreibt. Als Anfangsbedingung wählen wir $y(0) = 0$ und $y'(0) = v$, zum Zeitpunkt 0 soll die Bewegung also durch den Nullpunkt gehen und dort die Geschwindigkeit v besitzen. Man kann sofort die Lösung

$$y(t) = v \cdot \sin t$$

angeben. Wir werden diese Lösung mit den Lösungsmethoden für lineare Differentialgleichungen herleiten. Die Differentialgleichung führt zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i),$$

und Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ (zum Eigenwert i) und $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ (zum Eigenwert $-i$). Die allgemeine komplexe Lösung ist also nach Korollar 43.11 gleich

$$\begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

wobei letztlich nur der Realteil der ersten Zeile interessiert. Die Anfangsbedingung führt zu

$$c_1 + c_2 = 0 \text{ und } c_1 i - c_2 i = v.$$

Also ist $c_2 = -c_1$ und $c_1 = \frac{v}{2i}$. Daher ist die Lösung

$$\frac{v}{2i} e^{it} - \frac{v}{2i} e^{-it} = v \cdot \sin t$$

nach Bemerkung 43.7.

Mit den linearen Methoden kann man auch die folgende Aussage beweisen.

Satz 43.14. *Es sei*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten und das charakteristische Polynom zerfalle in Linearfaktoren,

$$\begin{aligned} P &= X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \\ &= (X - \lambda_1)^{\nu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\nu_k}, \end{aligned}$$

wobei die λ_i verschieden seien. Dann bilden die Funktionen

$$t^j e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, \nu_i - 1,$$

ein Fundamentalsystem für diese Differentialgleichung.

43. ARBEITSBLATT

43.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 43.1. Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.2. Sei M eine quadratische $n \times n$ -Matrix über \mathbb{K} . Es sei φ_1 eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t)$$

und φ_2 eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_2(t).$$

Zeige, dass $\varphi_1 + \varphi_2$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t) + z_2(t)$$

ist.

Aufgabe 43.3. Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten zu einer reellen $n \times n$ -Matrix M und sei $u \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von M zum Eigenvektor $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $e^{at} \cos(bt) \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(u_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Re}(u_n) \end{pmatrix}$ und $e^{at} \sin(bt)$

$\begin{pmatrix} \operatorname{Im}(u_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Im}(u_n) \end{pmatrix}$ Lösungen des Systems sind.

Aufgabe 43.4. Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, sei L der Lösungsraum dieses Systems und sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow \mathbb{K}^n, \varphi \longmapsto \varphi(t_0),$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Aufgabe 43.5. Wie transformieren sich in Lemma 43.5 die Anfangsbedingungen?

Aufgabe 43.6.*

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.7. Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.8. Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.9.*

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.10.*

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 43.11. Finde für das zeitunabhängige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Lösungen mit $u(0) = a$ und $v(0) = b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ sind.

Aufgabe 43.12. Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten mit einer oberen Dreiecksmatrix M . Zeige, dass es ein Fundamentalsystem von Lösungsfunktionen v_1, \dots, v_n mit

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

gibt.

Die folgenden Aufgaben löse man mit Lemma Anhang 2.1, man spricht vom *Ansatz vom Typ der rechten Seite*.

Aufgabe 43.13. Löse die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 5y = e^t.$$

Aufgabe 43.14.*

Löse die Differentialgleichung

$$y'' - y = e^t.$$

Aufgabe 43.15.*

Löse die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 9y = (t^2 - 8)e^{5t}.$$

Aufgabe 43.16. Löse die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 6y = (t^3 + 5t + 3)e^{2it}.$$

Aufgabe 43.17.*

Es sei $v' = Mv$ ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten in d Variablen und sei ein Punkt $P \in \mathbb{R}^d$ vorgegeben.

- (1) Erstelle eine rekursive Formel für die Punkte P_n im Polygonzugverfahren zum Startpunkt $P_0 = P$ und zur Schrittweite s in dieser Situation.
- (2) Erstelle eine geschlossene Formel für P_n zur Schrittweite s .
- (3) Erstelle eine Formel für P_n zur Schrittweite $\frac{1}{n}$.

In eine Potenzreihe kann man nicht nur Zahlen einsetzen, sondern auch quadratische Matrizen, wobei die Potenzen als Matrixpotenzen zu interpretieren sind, und sich fragen, ob die entstehenden Folgen im Raum der Matrizen konvergieren.

Aufgabe 43.18. Es sei M eine reelle (oder komplexe) $d \times d$ -Matrix. Zeige, dass

$$\begin{aligned} \exp M &= E_d + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}M^k \end{aligned}$$

im Raum der Matrizen konvergiert.

Aufgabe 43.19. Es sei $v' = Mv$ ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Zeige, dass die Lösung des Anfangswertproblems mit der Anfangsbedingung $v(0) = w \in \mathbb{R}^d$ durch

$$v(t) = (\exp(tM))w$$

gegeben ist.

Verwende, dass die Ableitung der Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \text{Mat}_d(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{d^2}, \quad t \longmapsto \exp(tM),$$

gleich $M \cdot \exp(tM)$ ist.

Aufgabe 43.20. Begründe Lemma 43.1 mit Aufgabe 43.19.

Aufgabe 43.21. Es sei $v' = Mv$ ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten in d Variablen und sei $s \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

die einem Punkt $w \in \mathbb{R}^d$ den Ortspunkt zum Zeitpunkt s der Lösung des Anfangswertproblems $v(0) = w$ zuordnet, eine lineare Abbildung ist und durch die Matrix $\exp(sM)$ beschrieben wird.

43.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 43.22. (6 Punkte)

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.23. (5 Punkte)

Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.24. (6 Punkte)

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.25. (5 Punkte)

Bestimme die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 + e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.26. (4 Punkte)

Löse die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 8y = (t^2 - 4t + 7)e^{3t}.$$

44. VORLESUNG - BILINEARFORMEN

44.1. Bilinearformen.

Reelle Skalarprodukte sind positiv definite symmetrische Bilinearformen. In dieser Vorlesung besprechen wir Bilinearformen allgemein. Neben Skalarprodukten sind die Minkowski-Formen, mit denen man die spezielle Relativitätstheorie beschreiben kann, und die Hesse-Formen wichtig, die in der höherdimensionalen Analysis betrachtet werden, um Extrema von Funktionen in mehreren Variablen zu bestimmen, siehe die folgenden Vorlesungen.

Definition 44.1. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow K, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

heißt *Bilinearform*, wenn für alle $v \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K, w \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

und für alle $w \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K, v \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

K -linear sind.

Bilinear bedeutet einfach multilinear in zwei Komponenten, diese Eigenschaft haben wir schon im Zusammenhang mit Determinanten kennengelernt. Ein extremes Beispiel ist die *Nullform*, die jedem Paar den Nullwert zuordnet. Es ist einfach, eine Vielzahl von Bilinearformen auf dem K^n anzugeben.

Beispiel 44.2. Sei $V = K^n$ und seien $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i, j \leq n$ fixiert. Dann ist die Zuordnung

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto \Psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$$

eine Bilinearform. Bei

$$a_{ij} = 0$$

für alle i, j ist dies die Nullform; bei

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

liegt das Standardskalarprodukt vor (wobei der Ausdruck für jeden Körper einen Sinn ergibt, aber die Eigenschaft, positiv definit zu sein, gegenstandslos ist). Bei $n = 4$ und

$$\Psi(x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_4) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

spricht man von einer *Minkowski-Form*. Bei $n = 2$ und

$$\Psi(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

handelt es sich um die Determinante im zweidimensionalen Fall.

44.2. Die Gramsche Matrix.

Definition 44.3. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V . Es sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V . Dann heißt die $n \times n$ -Matrix

$$\langle v_i, v_j \rangle_{1 \leq i, j \leq n}$$

die *Gramsche Matrix* von $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis.

In Beispiel 44.2 bildet $(a_{ij})_{ij}$ die Gramsche Matrix der Bilinearform Ψ bezüglich der Standardbasis des K^n , im Fall des Standardskalarproduktes ist das die Einheitsmatrix. Wenn die Gramsche Matrix zu einer Bilinearform $\langle -, - \rangle$ bezüglich einer Basis v_1, \dots, v_n gegeben ist, so kann man daraus $\langle v, w \rangle$ für beliebige Vektoren berechnen. Man schreibt $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ und erhält mit dem allgemeinen Distributivgesetz (siehe Aufgabe 44.26)

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n b_i v_i, \sum_{j=1}^n c_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i c_j \langle v_i, w_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^n c_j \langle v_i, w_j \rangle \right) \\ &= (b_1, \dots, b_n) G \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man erhält also den Wert der Bilinearform an zwei Vektoren, indem man die Gramsche Matrix auf das Koordinatentupel des zweiten Vektors anwendet und das Ergebnis (ein Spaltenvektor) mit dem Koordinatentupel des ersten Vektors als Zeilentupel von links multipliziert. Kurz und etwas ungenau ist also

$$\langle v, w \rangle = v^{\text{tr}} G w.$$

Lemma 44.4. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V . Es seien $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$ und $\mathbf{w} = w_1, \dots, w_n$ zwei Basen von V und es seien G bzw. H die Gramschen Matrizen von $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basen. Zwischen den Basiselementen gelte die Beziehungen

$$w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i,$$

die wir durch die Übergangsmatrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ ausdrücken. Dann besteht zwischen den Gramschen Matrizen die Beziehung

$$H = A^{\text{tr}} G A.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
 \langle w_r, w_s \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_{ir} v_i, \sum_{k=1}^n a_{ks} v_k \right\rangle \\
 &= \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{ir} a_{ks} \langle v_i, v_k \rangle \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ir} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} a_{ks} \langle v_i, v_k \rangle \right) \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ir} (G \circ A)_{is} \\
 &= (A^{\text{tr}} \circ (G \circ A))_{rs}.
 \end{aligned}$$

□

44.3. Symmetrische Bilinearformen.

Definition 44.5. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V . Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

Definition 44.6. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V . Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, wenn

$$\langle v, w \rangle = 0$$

ist.

Definition 44.7. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V . Eine Basis $v_i, i \in I$, von V heißt *Orthogonalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0$$

für alle

$$i \neq j$$

ist.

Für eine symmetrische Bilinearform ist es durchaus möglich, dass, anders als bei Skalarprodukten, ein von 0 verschiedener Vektor zu sich selbst orthogonal ist. Es kann auch, im ausgearteten Fall, von 0 verschiedene Vektoren geben, die orthogonal zu allen Vektoren sind. Wie im Fall eines Skalarproduktes gibt es Orthogonalbasen.

Satz 44.8. *Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V . Dann besitzt V eine Orthogonalbasis.*

Beweis. Siehe Aufgabe 44.9.

□

44.4. Definitheit von Bilinearformen.

Wir möchten die symmetrischen Bilinearformen über den reellen Zahlen klassifizieren.¹⁶ Dabei spielen die Skalarprodukte als Extremfall eine Schlüsselrolle.

Definition 44.9. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Diese Bilinearform heißt

- (1) *positiv definit*, wenn $\langle v, v \rangle > 0$ für alle $v \in V$, $v \neq 0$ ist.
- (2) *negativ definit*, wenn $\langle v, v \rangle < 0$ für alle $v \in V$, $v \neq 0$ ist.
- (3) *positiv semidefinit*, wenn $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ ist.
- (4) *negativ semidefinit*, wenn $\langle v, v \rangle \leq 0$ für alle $v \in V$ ist.
- (5) *indefinit*, wenn $\langle -, - \rangle$ weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist.

Positiv definite symmetrische Bilinearformen sind genau die reellen Skalarprodukte. Eine indefinite Form liegt vor, wenn es Vektoren v und w mit $\langle v, v \rangle > 0$ und $\langle w, w \rangle < 0$ gibt. Die Nullform ist zugleich positiv semidefinit und negativ semidefinit, aber weder positiv definit noch negativ definit (außer auf dem Nullraum).

Eine Bilinearform auf V kann man auf einen Untervektorraum $U \subseteq V$ einschränken, wodurch sich eine Bilinearform auf U ergibt. Wenn die ursprüngliche Form positiv definit ist, so überträgt sich dies auf die Einschränkung. Allerdings kann eine beliebige Form eingeschränkt auf gewisse Unterräume positiv definit werden und auf andere negativ definit. Dies führt zu folgender Definition.

Definition 44.10. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Man sagt, dass eine solche Bilinearform den *Typ*

$$(p, q)$$

besitzt, wobei

$$p := \max(\dim_{\mathbb{R}}(U), U \subseteq V, \langle -, - \rangle|_U \text{ positiv definit})$$

und

$$q := \max(\dim_{\mathbb{R}}(U), U \subseteq V, \langle -, - \rangle|_U \text{ negativ definit})$$

¹⁶Unter einer *Klassifikation* versteht man in der Mathematik, eine Menge an mathematischen Objekten vollständig und übersichtlich zu beschreiben, Kriterien anzugeben, wann zwei Objekte im Wesentlichen gleich (oder äquivalent) sind und die verschiedenen Objekte durch numerische Invariante zu erfassen und für die Objekte möglichst einfache Vertreter anzugeben. Beispielsweise werden endlichdimensionale Vektorräume durch ihre Dimension klassifiziert, gleichdimensionale Vektorräume sind zueinander isomorph. Lineare Abbildungen von \mathbb{C}^n in sich werden über die jordanische Normalform klassifiziert. Die entscheidende Frage ist hierbei, welche Jordanblöcke mit welcher Länge und zu welchen Eigenwerten wie oft vorkommen? Hier besprechen wir den Typ einer reell-symmetrischen Bilinearform. Andere Klassifikationsresultate in der linearen Algebra beziehen sich auf quadratische Formen und auf endliche Bewegungsgruppen im Raum.

ist.

Bei einem Skalarprodukt auf einem n -dimensionalen reellen Vektorraum ist der Typ $(n, 0)$. Nach Aufgabe 44.11 ist stets

$$p + q \leq \dim(V).$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist die Gramsche Matrix zu einer symmetrischen Bilinearform auf dem \mathbb{R}^3 , sagen wir bezüglich der Standardbasis. Die Einschränkung der Form auf $\mathbb{R}e_1$ ist positiv definit, die Einschränkung auf $\mathbb{R}e_2$ ist negativ definit, die Einschränkung auf $\mathbb{R}e_3$ ist die Nullform. Daher sind $p, q \geq 1$, es ist aber nicht unmittelbar klar, ob es nicht auch zweidimensionale Untervektorräume geben könnte, auf denen die Einschränkung positiv definit ist. Eine Untersuchung „aller“ Untervektorräume, wie es die Definition verlangt, scheint aussichtslos. Es gibt aber mehrere Möglichkeiten, den Typ einer symmetrischen Bilinearform zu bestimmen, ohne alle Untervektorräume von V zu überblicken. Die folgende Aussage nennt man den *Trägheitssatz von Sylvester*.



James Joseph Sylvester (1814-1897)

Satz 44.11. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ vom Typ (p, q) . Dann ist die Gramsche Matrix von $\langle -, - \rangle$ bezüglich einer jeden Orthogonalbasis eine Diagonalmatrix mit p positiven und q negativen Einträgen.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. \square

Indem man die Orthogonalvektoren umskaliert, kann man erreichen, dass in der Diagonalen nur die Werte $1, -1, 0$ vorkommen. Die auf dem \mathbb{R}^n durch die

Diagonalmatrix mit p Einsen, q Minuseinsen und $n - p - q$ Nullen gegebene Form zeigt, dass jeder Typ, der

$$p + q \leq n$$

erfüllt, realisiert werden kann. Man spricht von der *Standardform zum Typ* (p, q) auf dem \mathbb{R}^n .

44.5. Typkriterien für symmetrische Bilinearformen.

Es gibt mehrere Methoden, den Typ einer symmetrischen Bilinearform zu bestimmen, wobei der Sylvestersche Trägheitssatz eine erste Möglichkeit ist, die aber den Nachteil hat, dass man eine Orthogonalbasis bestimmen muss. Wir besprechen das *Minorenkriterium* und das *Eigenwertkriterium*. Unter einem *Minor* versteht man die Determinante einer quadratischen Untermatrix einer Matrix. Man könnte also bei dem folgenden Kriterium genauso gut von einem Determinantenkriterium sprechen.

Satz 44.12. *Sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V . Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis. Die Determinanten D_k der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}$$

seien für $k = 1, \dots, n$ von 0 verschieden. Es sei a die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$D_0 = 1, D_1 = \det M_1, D_2 = \det M_2, \dots, D_n = \det M_n = \det G.$$

Dann ist $\langle -, - \rangle$ vom Typ $(n - a, a)$.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. \square

Korollar 44.13. *Es sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V . Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis und es seien D_k die Determinanten der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}, k = 1, \dots, n.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) *Genau dann ist $\langle -, - \rangle$ positiv definit, wenn alle D_k positiv sind.*
- (2) *Genau dann ist $\langle -, - \rangle$ negativ definit, wenn das Vorzeichen in der Folge $D_0 = 1, D_1, D_2, \dots, D_n$ an jeder Stelle wechselt.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. \square

Wir erwähnen noch das folgende *Eigenwertkriterium*.

Satz 44.14. Sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum und sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V . Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis. Dann besitzt der Typ (p, q) der Form folgende Interpretation: p ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume zu G zu positiven Eigenwerten und q ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume zu G zu negativen Eigenwerten.

44. ARBEITSBLATT

44.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 44.1. Es sei $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf einem K -Vektorraum V . Zeige

$$\langle 0, v \rangle = 0$$

für alle $v \in V$.

Aufgabe 44.2. Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Bilinearformen sind.

$$(1) \quad \Psi(v, w) = \|v\|.$$

$$(2) \quad \Psi(v, w) = \|v - w\|.$$

$$(3) \quad \Psi(v, w) = \|v\| \cdot \|w\|.$$

$$(4) \quad \Psi(v, w) = \angle(v, w).$$

Aufgabe 44.3. Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im \mathbb{R}^2 bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 44.4.*

Bestimme die Gramsche Matrix zur Determinante auf dem K^2 bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 44.5. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V . Zeige, dass $\langle -, - \rangle$ genau dann symmetrisch ist, wenn es eine Basis v_1, \dots, v_n von V mit

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$ gibt.

Aufgabe 44.6. Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum mit einer Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass diese Form genau dann symmetrisch ist, wenn die Gramsche Matrix von ihr bezüglich einer Basis symmetrisch ist.

Aufgabe 44.7. Zeige, dass die Determinante in der Dimension zwei, also die Abbildung

$$K^2 \times K^2 \longrightarrow K, \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

keine symmetrische Bilinearform ist.

Aufgabe 44.8.*

Zeige, dass es eine Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf einem Vektorraum V geben kann, die nicht die Nullform ist, für die aber

$$\langle v, v \rangle = 0$$

für alle $v \in V$ ist.

Aufgabe 44.9.*

Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V . Zeige, dass V eine Orthogonalbasis besitzt.

Aufgabe 44.10. Untersuche, welche der folgenden Abbildungen $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear sind. Wenn ja, so untersuche die jeweilige Abbildung auch auf die Eigenschaften alternierend und symmetrisch.

- (1) $\varphi(x, y) := x_1 y_1$.
- (2) $\varphi(x, y) := x_1 x_2 + y_1 y_2$.
- (3) $\varphi(x, y) := 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1$.

Aufgabe 44.11. Es sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V vom Typ (p, q) . Zeige, dass

$$p + q \leq n$$

ist.

Aufgabe 44.12. Man gebe ein Beispiel einer symmetrischen Bilinearform, das zeigt, dass der Unterraum maximaler Dimension, auf dem die Einschränkung der Form positiv definit ist, nicht eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 44.13. Auf dem \mathbb{R}^2 sei durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

eine symmetrische Bilinearform gegeben. Bestimme zu jeder Geraden G durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung der Form auf die Gerade positiv definit, negativ definit oder die Nullform ist.

Aufgabe 44.14. Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum mit einer Bilinearform vom Typ (p, q) und es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Die Einschränkung der Bilinearform sei vom Typ (p', q') . Zeige $p' \leq p$ und $q' \leq q$.

Aufgabe 44.15.*

Es sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum mit einer Bilinearform vom Typ (p, q) und es sei $U \subseteq V$ ein d -dimensionaler Untervektorraum. Die Einschränkung der Bilinearform sei vom Typ (p', q') . Zeige

$$p' \geq d + p - n.$$

Aufgabe 44.16. Man gebe ein Beispiel für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf V und einer Basis u_1, \dots, u_n von V derart, dass $\langle u_i, u_i \rangle > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ ist, aber $\langle -, - \rangle$ nicht positiv definit ist.

Aufgabe 44.17. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf V . Es sei u_1, \dots, u_n eine Orthogonalbasis auf V mit der Eigenschaft $\langle u_i, u_i \rangle > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Zeige, dass $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist.

Aufgabe 44.18. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V . Zeige, dass die Gramsche Matrix zu dieser Bilinearform bezüglich einer geeigneten Basis eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge $1, -1$ oder 0 sind.

Aufgabe 44.19. Es sei M eine symmetrische reelle $n \times n$ -Matrix. Zeige, dass es eine invertierbare Matrix A derart gibt, dass

$$A^{\text{tr}} M A = D$$

eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge $1, -1$ oder 0 sind.

Aufgabe 44.20. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V . Es seien G und H die Gramschen Matrizen zu dieser Form bezüglich der Basen \mathbf{u} und \mathbf{v} . Zeige, dass die Determinante von G genau dann positiv (negativ, 0) ist, wenn dies auf die Determinante von H zutrifft.

Aufgabe 44.21. Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 44.22. Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 44.23.*

Bestimme mit dem Eigenwertkriterium den Typ der durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 44.24.*

Es sei $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf einem zweidimensionalen reellen Vektorraum, die bezüglich einer Basis durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

beschrieben werde. Bestimme den Typ der Form in Abhängigkeit von b, c .

44.2. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 44.25.** (4 Punkte)

Untersuche, welche der folgenden Abbildungen $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear sind. Wenn ja, so untersuche die jeweilige Abbildung auch auf die Eigenschaften alternierend und symmetrisch.

- (1) $\varphi(x, y) := x_1 - y_1$.
- (2) $\varphi(x, y) := x_1 y_1 - x_2 y_2$.
- (3) $\varphi(x, y) := 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1$.

Aufgabe 44.26. (4 Punkte)

Es sei Φ eine Bilinearform auf einem K -Vektorraum V . Zeige, dass für Vektoren $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s \in V$ und Skalare $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in K$ die Gleichheit

$$\Phi(a_1 v_1 + \dots + a_r v_r, b_1 w_1 + \dots + b_s w_s) = \sum_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s} a_i b_j \Phi(v_i, w_j)$$

gilt.

Aufgabe 44.27. (3 Punkte)

Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im \mathbb{R}^3 bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 44.28. (2 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ vom Typ (p, q) . Zeige, dass die negierte Form $-\langle -, - \rangle$ den Typ (q, p) besitzt.

Aufgabe 44.29. (2 Punkte)

Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 7 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

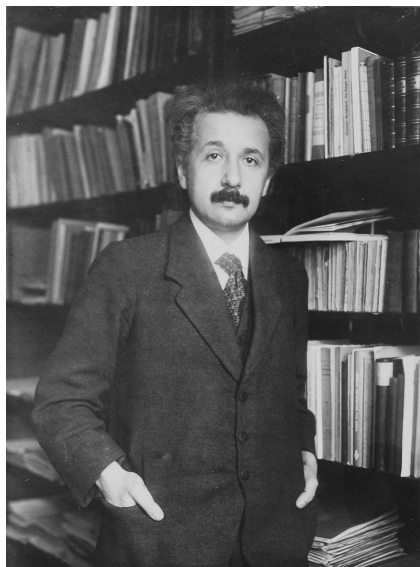
gegebenen symmetrischen Bilinearform.

45. VORLESUNG - SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

45.1. Minkowski-Räume.

Auf einer Abendgesellschaft wurde Einstein von der Gastgeberin gebeten, die Relativitätstheorie zu erklären. „Madame“, sagte er, „ich spazierte eines heißen Tages auf dem Lande mit einem blinden Freund und sagte, daß ich gern einen Trunk Milch haben würde“. - „Milch“?, sagte mein Freund, „Trinken verstehe ich, aber was ist Milch“? - „Eine weiße Flüssigkeit“ antwortete ich. - „Flüssigkeit verstehe ich; aber was ist weiß“? - „Die Farbe einer Schwanenfeder“. - „Feder verstehe ich, aber was ist ein Schwan“? - „Ein Vogel mit einem gebogenen Hals“. „Hals verstehe ich, aber was ist gebogen“? - Darauf verlor ich die Geduld, ergriff seinen Arm und und streckte diesen geradeaus: „das ist gerade“, sagte ich, und dann bog ich seinen Arm am Ellenbogen ein: „das ist gebogen“. „Ah“! sagte der Blinde, „jetzt weiß ich, was Sie mit Milch meinen“!

Wir besprechen, wie man mit einer gewissen Bilinearform einen theoretischen Rahmen für die spezielle Relativitätstheorie angeben kann, in dem viele relativistische Phänomene einfach beschrieben werden können. Die empirischen Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie gehören zur Physik und können hier nicht behandelt werden.



Albert Einstein (1879-1955)



Hermann Minkowski (1864-1909)

Definition 45.1. Ein reeller Vektorraum der Dimension n mit einer Bilinearform $\langle -, - \rangle$ vom Typ $(n - 1, 1)$ heißt *Minkowski-Raum*.

Die Minkowski-Räume liefern ein einfaches Modell für die *spezielle Relativitätstheorie*,¹⁷ man spricht auch von einem Einstein-Minkowski-Raum und die Bilinearform darauf heißt auch *Minkowski-Form* oder *Lorentz-Form*. Die klassische Raum-Zeit-Welt ist von der Form $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, wobei die dreidimensionale Komponente den Raum und die eindimensionale Komponente die Zeit repräsentiert. Darin ist grundsätzlich jede Bewegung von einem Punkt zu einem anderen möglich, solange der zweite Punkt zeitlich später als der erste Punkt ist. Entsprechend repräsentieren die Punkte in einem vierdimensionalen Minkowski-Raum die relativistischen Weltpunkte (die Ereignisse); eine Trennung in Raum und Zeit ist Beobachter-abhängig; die Theorie liefert auch eine Definition, was ein Beobachter ist, siehe unten. Eine besondere Rolle spielt die Menge der Vektoren

$$\{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 0\},$$

¹⁷Die allgemeine Relativitätstheorie wird mathematisch durch pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten beschrieben, bei denen die hier besprochenen Minkowski-Räume die lokale Situation wiedergeben. Wichtige Stichworte sind Gravitation, Äquivalenzprinzip, Feldgleichung, gekrümmter Raum.

die in diesem Zusammenhang der *Lichtkegel* heißt. Gemeint ist damit die Menge aller Lichtstrahlen, die in einem Weltpunkt eingehen und ausgehen. Dieser Lichtkegel ist gemäß der speziellen Relativitätstheorie Beobachterunabhängig (absolut), und eben dies wird durch die Minkowski-Räume modelliert. Man erlaubt grundsätzlich jede Dimension, die wesentlichen Phänomene sind schon bei $n = 2, 3$ sichtbar. Die bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^n durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegebene Minkowski-Form heißt *Minkowski-Standard-Form*. Gemäß dem Trägheitssatz von Sylvester kann man jede Minkowski-Form bezüglich einer geeignet skalierten Orthogonalbasis (einer *Minkowski-Basis*) auf diese Gestalt bringen.

Definition 45.2. Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$. Ein Vektor $v \in V$ mit

$$\langle v, v \rangle = 0$$

heißt *lichtartig*, ein Vektor $v \in V$ mit

$$\langle v, v \rangle < 0$$

heißt *zeitartig* und ein Vektor $v \in V$ mit

$$\langle v, v \rangle > 0$$

heißt *raumartig*.

Achtung, diesen Eigenschaften definieren keine Untervektorräume, die Summe von zwei raumartigen Vektoren muss im Allgemeinen nicht wieder raumartig sein.

Nicht alle Vektoren bzw. (linearen) Bewegungsvorgänge in dieser Raum-Zeit-Licht-Welt sind für einen (materiellen) Beobachter realisierbar, im Gegenteil gehört die folgende Einschränkung wesentlich zu diesem Weltmodell.

Definition 45.3. Es sei V ein Minkowski-Raum mit einer Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$. Die Vektoren $v \in V$ mit

$$\langle v, v \rangle = -1$$

heißen *Beobachtervektoren* oder *Vierergeschwindigkeit eines Beobachters*.

Der Begriff Beobachter suggeriert eine physikalische Interpretation; man kann sich darunter eine Person vorstellen, wichtig ist aber, dass dies keinen subjektiven Gehalt hat. Der Beobachter hat eine Uhr, einen Meterstab und einen Winkelmesser im Gepäck und jeder Beobachter, der die gleiche Bewegung

durchführt, kommt zu den gleichen Messungen. Statt mit der Bedingung $\langle v, v \rangle = -1$ wird ein Beobachtervektor häufig auch durch die Bedingung $\langle v, v \rangle = -c^2$ angesetzt, wobei c die Lichtgeschwindigkeit repräsentiert. Diese ist aber nur eine Umskalierung.

Die zuletzt genannten Beobachtervektoren sind insbesondere zeitartig, da jeder Beobachter älter wird, die Zeit bewegt sich also auch für einen „räumlich ruhenden“ Beobachter. Die Gerade $\mathbb{R}v$ ist ein Untervektorraum der Dimension 1, auf dem die eingeschränkte Form negativ definit ist. Es sei $U \subseteq V$ der dazu (bezüglich der Minkowski-Form) senkrechte Untervektorraum. Dies ist ein dreidimensionaler Raum, auf dem die eingeschränkte Form positiv definit ist. Dieser Untervektorraum ist der Raum V_v für diesen Beobachter (oder V_B , wenn B den Beobachter bezeichnet) und $\mathbb{R}v$ ist seine Zeitachse. Für einen Beobachter besteht also eine Zerlegung des Gesamtraumes der Form $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, nur diese Zerlegung hängt eben vom Beobachter ab. Man spricht auch von dem *Bezugssystem* des Beobachters. Die positiv definite Einschränkung der Minkowski-Form auf seine Raumkomponente ist ein Skalarprodukt, mit dem der Beobachter Längen und Winkel misst und auch in seinem Raum eine Orthonormalbasis fixieren kann. Für einen Beobachter mit der erlaubten Vierergeschwindigkeit v gibt es also insbesondere eine Orthogonalbasis e_1, e_2, e_3, v mit

$$\langle e_j, e_j \rangle = 1$$

und

$$\langle v, v \rangle = -1.$$

Bezüglich einer solchen Minkowski-Basis wird die Minkowski-Form einfach durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

als Gramsche Matrix beschrieben. Ein Großteil der relativistischen Phänomene zeigt sich in diesem Modell beim Basiswechsel von zwei solchen Basen (bei einem *Wechsel des Bezugssystems*), wobei der wesentliche Punkt der Wechsel der Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente ist.

Wenn v ein Beobachtervektor ist, so ist nach Definition auch $-v$ ein Beobachtervektor. Dieser Beobachter bewegt sich in die entgegengesetzte Zeitrichtung. Insgesamt zerfällt die Menge aller Beobachtervektoren in zwei Schalen, wobei wir eine als die Zukunftsschale auszeichnen. Ebenso zerfällt der Lichtkegel in zwei Kegeln, den Zukunfts- und den Vergangenheitskegel. Zwei Beobachter heißen *gleichgerichtet*, wenn sie der gleichen Schale angehören, also beide in die Zukunft (oder in die Vergangenheit) weisen.

Lemma 45.4. *Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) Zu jedem Beobachtervektor $v \in V$ ist

$$V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$$

eine direkte Summenzerlegung, wobei die Einschränkung der Minkowski-Form auf $\mathbb{R}v$ negativ definit und die Einschränkung der Minkowski-Form auf $V_v = (\mathbb{R}v)^\perp$ positiv definit ist. Dabei besteht V_v aus raumartigen Vektoren.

(2) Für zwei gleichgerichtete Beobachtervektoren $v, w \in V$ ist

$$\langle v, w \rangle < 0.$$

(3) Für zeitartige Vektoren $v, w \in V$ ist

$$\langle v, w \rangle^2 \geq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 45.4, Aufgabe 45.11 und Aufgabe 45.13. \square

Die Bedingung, dass die Beobachtergeschwindigkeiten $\langle v, v \rangle = -1$ erfüllen müssen, ist eine große Einschränkung an mögliche Bewegungsvorgänge. Wenn

eine Minkowski-Basis fixiert ist, so ist $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor genau

dann, wenn

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - t^2 = -1$$

(und $t \geq 0$, das ergibt sich aus der Zukunftsrichtung) ist.

Beispiel 45.5. In einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum soll

etwas vom Punkt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ r \end{pmatrix}$ zum Punkt $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ s \end{pmatrix}$ gleichmäßig bewegt

werden. Im klassischen Ansatz ist einfach der Verbindungsvektor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ r \end{pmatrix}$$

zu wählen. Dieser ist aber im Allgemeinen kein Beobachtervektor und der anvisierte Bewegungsvorgang ist dann nicht realisierbar. Wenn $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - t^2$ negativ ist, was inhaltlich bedeutet, dass ein zeitartiger Vektor vorliegt, so

kann man den Vektor aber zu einem Beobachtervektor

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{-\left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}$$

umskalieren. Es beschreibt dann

$$x \mapsto \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ r \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ u \end{pmatrix}$$

ein Bewegungsvorgang, der für $x = 0$ im Punkt P startet und für $x =$

$\sqrt{-\left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle}$ im Punkt Q endet und der physikalisch durchführbar ist.

Bemerkung 45.6. Zu einer Vierergeschwindigkeit v eines Beobachters B mit der Zerlegung

$$V = V_v \oplus \mathbb{R}v$$

nennt man die Punkte der Form $sv + V_v$ mit einem fixierten $s \in \mathbb{R}$ den Raum zum Zeitpunkt s . Die Punkte daraus heißen gleichzeitig für den Beobachter B . Für einen anderen Beobachter C mit der Vierergeschwindigkeit w sind diese Punkte nicht gleichzeitig. Sein Gleichzeitigkeitskonzept beruht auf seine, von w abhängige Zerlegung der Welt V in seine Raum- und Zeitkomponente. Wenn beispielsweise die zweite Vierergeschwindigkeit bezüglich

einer Minkowski-Basis des ersten Beobachters durch $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ gegeben ist, so ist

$$\frac{15}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis der Raumkomponente des zweiten Beobachters. Die

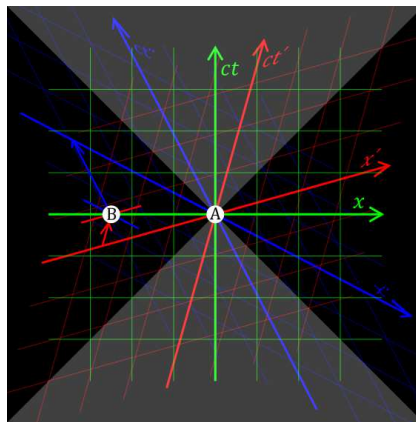
für den ersten Beobachter gleichzeitigen Ereignisse $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind für

den zweiten Beobachter nicht gleichzeitig, da der erste Vektor die gleiche Beschreibung besitzt und der zweite Vektor gleich

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{75}{16} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

ist. Seine Zeitkomponente bezüglich des zweiten Beobachters ist also $-\frac{3}{4}$.

Wir vergleichen nun Geschwindigkeiten von Beobachtern untereinander.



Zwei Ereignisse A und B in einem zweidimensionalen Minkowski-Raum, die für den Beobachter, dessen Raumachse mit x und dessen Zeitachse mit ct bezeichnet ist, gleichzeitig sind, aber nicht für den zweiten Beobachter mit den Achsen x' und ct' .

Definition 45.7. Es sei V ein Minkowski-Raum und seien B und C Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten v und w . Dann nennt man den Vektor

$$v_{BC} = -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w$$

den *Geschwindigkeitsvektor* von C relativ zu B . Man nennt

$$\rho_{BC} = \sqrt{1 - \frac{1}{\langle v, w \rangle^2}}$$

die *Relativgeschwindigkeit* der beiden Beobachter.

Der relative Geschwindigkeitsvektor ist ein Vektor. Beachte, dass nach Lemma 45.4 (3) $\langle v, w \rangle \geq 1$ und daher die Relativgeschwindigkeit eine wohldefinierte nichtnegative reelle Zahl ist, die durch 1 beschränkt ist. Die Relativgeschwindigkeit ist symmetrisch in v und w , hingegen ist

$$v_{CB} = -w - \frac{1}{\langle v, w \rangle} v$$

im Allgemeinen von v_{BC} verschieden. Da die Lichtgeschwindigkeit zu 1 normiert ist, sollte man sich diese Relativgeschwindigkeiten klein vorstellen. Bei $v = w$ ist die Relativgeschwindigkeit gleich 0.

Lemma 45.8. *Es sei V ein Minkowski-Raum und seien B und C gleichgerichtete Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten v und w . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Der Relativgeschwindigkeitsvektor v_{BC} steht senkrecht auf v .*
- (2) *Der Relativgeschwindigkeitsvektor v_{BC} ist raumartig und es gilt*

$$\|v_{BC}\| = \|v_{CB}\| = \rho_{BC} = \rho.$$

- (3) *Es ist*

$$\langle v, w \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

- (4) *Es ist*

$$w = \frac{v}{\sqrt{1 - \rho^2}} + \frac{v_{BC}}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

die Zerlegung von w in die Raum- und die Zeitkomponente von B .

- (5) *Der Zeitkoeffizient von w bezüglich B ist $\frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}}$.*

Beweis. (1) Es ist

$$\langle v, v_{BC} \rangle = \left\langle v, -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w \right\rangle = \langle v, -v \rangle + \left\langle v, -\frac{1}{\langle v, w \rangle} w \right\rangle = 1 - 1 = 0,$$

so dass diese Vektoren orthogonal zueinander sind. Somit gehört v_{BC} zur Raumkomponente zu B .

- (2) Es ist

$$\begin{aligned} \langle v_{BC}, v_{BC} \rangle &= \left\langle -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w, -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w \right\rangle \\ &= \left\langle v + \frac{1}{\langle v, w \rangle} w, v + \frac{1}{\langle v, w \rangle} w \right\rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2 \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, w \rangle} + \frac{1}{\langle v, w \rangle^2} \langle w, w \rangle \\ &= 1 - \frac{1}{\langle v, w \rangle^2}. \end{aligned}$$

Nach Teil (1) (oder nach Lemma 45.4 (3)) ist dieser Ausdruck nichtnegativ. Die Quadratwurzel davon ist die Relativgeschwindigkeit ρ .

(3) Dies folgt direkt aus der Definition

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{1}{\langle v, w \rangle^2}}$$

durch eine einfache Umstellung, wenn man berücksichtigt, dass

$$\langle v, w \rangle < 0$$

ist.

(4) Aus

$$v_{BC} = -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w$$

und (3) ergibt sich

$$w = -\langle v, w \rangle v - \langle v, w \rangle v_{BC} = \frac{v}{\sqrt{1 - \rho^2}} + \frac{v_{BC}}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Nach Teil (1) gehört v_{BC} zur Raumkomponente zu B .

(5) Aus (4) ist direkt ablesbar, dass der Zeitkoeffizient von w bezüglich B gleich $\frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}}$ ist.

□

Das in der fünften Aussage des vorstehenden Lemmas formulierte Prinzip heißt *Zeitdilatation*. Ein Beobachter beobachtet für einen weiteren Beobachter eine längere Zeit als dieser in seinem Bezugssystem.

45. ARBEITSBLATT

45.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 45.1. Berechne

$$\left\langle \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum.

Aufgabe 45.2. Es sei V ein Minkowski-Raum.

- (1) Zeige, dass ein skalares Vielfaches eines zeitartigen (raumartigen, lichtartigen) Vektors wieder zeitartig (raumartig, lichtartig) ist.
- (2) Zeige, dass die Summe von zwei zeitartigen (raumartigen, lichtartigen) Vektoren im Allgemeinen nicht wieder zeitartig (raumartig, lichtartig) ist.

Aufgabe 45.3.*

Ist die Einschränkung einer Minkowski-Form im \mathbb{R}^n auf einen $n - 1$ -dimensionalen Untervektorraum wieder eine Minkowski-Form?

Aufgabe 45.4. Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass es zu jedem Beobachtervektor $v \in V$ eine direkte Summenzerlegung

$$V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$$

gibt, wobei die Einschränkung der Minkowski-Form auf $\mathbb{R}v$ negativ definit und die Einschränkung der Minkowski-Form auf $(\mathbb{R}v)^\perp$ positiv definit ist.

Aufgabe 45.5. Der \mathbb{R}^2 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} 25 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters ist. Bestimme die Raumkomponente zu diesem Vektor.

Aufgabe 45.6.*

Der \mathbb{R}^2 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor ist und bestimme die Raumkomponente dazu.

Aufgabe 45.7.*

Der \mathbb{R}^2 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu jedem Beobachtervektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ die Raumkomponente des Beobachters die Spiegelung seiner Zeitkomponente an der Hauptdiagonalen ist.

Die Hyperbelfunktionen wurden in der dreizehnten Vorlesung eingeführt.

Aufgabe 45.8. Der \mathbb{R}^2 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu $\alpha \in \mathbb{R}$ der Vektor $\begin{pmatrix} \sinh \alpha \\ \cosh \alpha \end{pmatrix}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters ist. Bestimme die Raumkomponente zu diesem Vektor.

Aufgabe 45.9.*

Der \mathbb{R}^2 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, die Vektoren

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} z - \frac{1}{z} \\ z + \frac{1}{z} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -z + \frac{1}{z} \\ z + \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektoren eines Beobachters sind. Zeige, dass jeder Beobachtervektor diese Gestalt besitzt.

Aufgabe 45.10.*

Der \mathbb{R}^3 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{2}}{5} \\ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor ist und bestimme eine Orthogonalbasis der Raumkomponente dazu.

Aufgabe 45.11.*

Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$ und es seien v, w gleichgerichtete Beobachtervektoren. Zeige

$$\langle v, w \rangle < 0.$$

Aufgabe 45.12. Es sei V ein Minkowski-Raum. Zeige, dass die Menge der Beobachtervektoren in zwei Wegzusammenhangskomponenten zerfallen. Zeige, dass zwei Beobachtervektoren v, w genau dann zur gleichen Komponente gehören, wenn

$$\langle v, w \rangle < 0$$

ist.

Aufgabe 45.13. Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$ und es seien v, w zeitartige Vektoren. Zeige die Abschätzung

$$\langle v, w \rangle^2 \geq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle.$$

Aufgabe 45.14. In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum besitze ein

Ereignis die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Minkowski-Basis. Bestimme

die Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente dieses Ereignisses bezüglich des

Beobachtervektors $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 45.15. In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum seien zwei Beobachter B und C mit den zugehörigen Raumkomponenten V_B und V_C gegeben. Was kann man über $V_B \cap V_C$ sagen?

Aufgabe 45.16. Es sei V ein zweidimensionaler Minkowski-Raum.

- (1) Zeige, dass es eine Basis von V derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 1 sind.
- (2) Zeige, dass es eine Basis von V derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich -1 sind.
- (3) Zeige, dass es eine Basis von V derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 0 sind.

Aufgabe 45.17. Bestimme den Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters B in einem Minkowski-Raum relativ zu sich selbst und die Relativgeschwindigkeit.

Aufgabe 45.18. Es seien B und C Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten

$$v_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

und

$$v_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- (1) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von C relativ zu B .
- (2) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von B relativ zu C .
- (3) Bestimme die Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter.

Aufgabe 45.19. Zeige, dass die Relativgeschwindigkeit von zwei Beobachtern in einem Minkowski-Raum zwischen 0 und 1 liegt. Kann 1 erreicht werden? Was ist die physikalische Signifikanz dieser Aussage?

45.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 45.20. (1 Punkt)

Berechne

$$\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -11 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum.

Aufgabe 45.21. (4 Punkte)

Der \mathbb{R}^3 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor ist und bestimme eine Orthonormalbasis der Raumkomponente dazu.

Aufgabe 45.22. (4 Punkte)

In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum besitze ein Ereignis die Koordinaten $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Minkowski-Basis. Bestimme die Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente dieses Ereignisses bezüglich des Beobachtervektors $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{12} \\ 0 \\ \frac{13}{12} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 45.23. (6 (2+2+2) Punkte)

Der \mathbb{R}^3 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen.

- (1) Man gebe eine Basis des \mathbb{R}^3 an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 1 sind.
- (2) Man gebe eine Basis des \mathbb{R}^3 an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich -1 sind.
- (3) Man gebe eine Basis des \mathbb{R}^3 an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 0 sind.

Aufgabe 45.24. (3 (1+1+1) Punkte)

Es seien B und C Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten

$$v_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ \sqrt{39} \end{pmatrix}$$

und

$$v_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

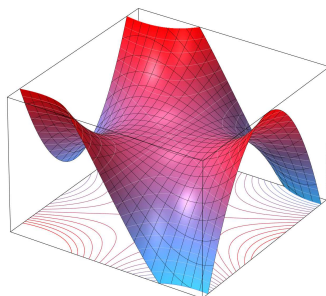
- (1) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von C relativ zu B .
- (2) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von B relativ zu C .
- (3) Bestimme die Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter.

46. VORLESUNG - RICHTUNGSABLEITUNG

Wir beschäftigen uns nun mit der Differentialrechnung für Abbildungen mit höherdimensionalem Definitionsbereich. Dazu seien zwei reelle endlichdimensionale Vektorräume V und W gegeben. Ferner sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und

$$f: G \rightarrow W$$

eine Abbildung. Diese Abbildung wollen wir „differenzieren“. Anders als in den bisher behandelten Situationen gibt es bei einem höherdimensionalen Definitionsbereich mehrere nicht äquivalente Konzepte von Differenzierbarkeit. Wir werden nacheinander die *Richtungsableitung*, *partielle Ableitungen* und das *totale Differential* sowie ihre Beziehungen untereinander diskutieren. Wir werden durchgehend voraussetzen, dass die Vektorräume euklidisch sind.



Es ist erstmal keine große Einschränkung, wenn man den Zielraum als $W = \mathbb{R}$ ansetzt. Als Definitionsmenge kann man sich zunächst auf $G = V = \mathbb{R}^2$ beschränken, und sich vorstellen, dass die Abbildung jedem Grundpunkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ einen Höhepunkt zuordnet, so dass die Abbildung insgesamt ein Gebirge über einer Grundfläche beschreibt.

46.1. Richtungsableitung.

Wir stellen uns vor, wir sind an einem Ort im Gebirge und entschließen uns, in eine bestimmte Richtung, beispielsweise nach Nordwest zu gehen, egal was

kommen mag. Damit machen wir sämtliche Steigungen und Abhänge mit, die das Gebirge uns in dieser vorgegebenen Richtung bietet. Dabei lernen wir nur den Höhenverlauf des Gebirges entlang dieses linearen Ausschnitts kennen. Durch die gewählte Richtung bewegen wir uns auf dem Graphen zu einer Funktion in einer einzigen Variablen, nämlich einer Variablen der Grundgeraden. Dies ist die Grundidee der *Richtungsableitung*.



Definition 46.1. Es seien V und W endlichdimensionale normierte Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $f: G \rightarrow W$ eine Abbildung. Weiter sei $P \in G$ ein Punkt und $v \in V$ ein fixierter Vektor. Dann heißt f *differenzierbar in P in Richtung v* , falls der Grenzwert

$$\lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f(P + sv) - f(P)}{s}$$

existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert *die Ableitung von f in P in Richtung v* . Er wird mit

$$(D_v f)(P)$$

bezeichnet.

Der Ausdruck

$$\frac{f(P + sv) - f(P)}{s}$$

heißt wieder *Differenzenquotient*. Die Existenz von $(D_v f)(P)$ hängt nur von der Abbildung $h: I \rightarrow W$, $s \mapsto f(P + sv)$, ab (wobei das Intervall $I = U(0, \delta)$ so gewählt ist, dass $s \in U(0, \delta)$ auch $P + sv \in G$ impliziert). Mit dieser Hilfsabbildung h gilt

$$h'(0) = \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{h(s) - h(0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f(P + sv) - f(P)}{s} = (D_v f)(P),$$

wobei links die Ableitung zu einer Kurve steht.

Die Richtungsableitung in einem Punkt und in eine Richtung ist selbst ein Vektor in W . Bei $W = \mathbb{R}$ ist die Richtungsableitung eine reelle Zahl.

Beispiel 46.2. Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y,$$

in einem Punkt $P = (a_1, a_2)$ in Richtung $v = (v_1, v_2)$. Der Differenzenquotient ist

$$\begin{aligned} & \frac{f(P + sv) - f(P)}{s} \\ = & \frac{f((a_1 + sv_1, a_2 + sv_2)) - f((a_1, a_2))}{s} \\ = & \frac{(a_1 + sv_1)^2(a_2 + sv_2) - a_1^2a_2}{s} \\ = & \frac{a_1^2a_2 + 2sa_1a_2v_1 + s^2a_2v_1^2 + sa_1^2v_2 + 2s^2a_1v_1v_2 + s^3v_1^2v_2 - a_1^2a_2}{s} \\ = & 2a_1a_2v_1 + a_1^2v_2 + s(a_2v_1^2 + 2a_1v_1v_2) + s^2(v_1^2v_2). \end{aligned}$$

Für $s \rightarrow 0$ gehen die beiden hinteren Summanden gegen 0, so dass sich insgesamt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(P + sv) - f(P)}{s} = 2a_1a_2v_1 + a_1^2v_2$$

ergibt.

Im Punkt $P = (2, 5)$ ergibt sich in Richtung $v = (1, -3)$ beispielsweise die Richtungsableitung

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 + 2^2 \cdot (-3) = 8.$$

Beispiel 46.3. Seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume und sei

$$L: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann existiert die Richtungsableitung in jedem Punkt $P \in V$ und in jede Richtung $v \in V$, und zwar ist

$$(D_v L)(P) = L(v),$$

insbesondere ist also die Richtungsableitung unabhängig vom Punkt. Dies folgt direkt durch Betrachten des Differenzenquotienten; es ist nämlich

$$\frac{L(P + sv) - L(P)}{s} = \frac{L(P) + sL(v) - L(P)}{s} = \frac{sL(v)}{s} = L(v).$$

Daher ist auch der Limes für $s \rightarrow 0$ gleich $L(v)$.

Typischerweise berechnet man die Richtungsableitung nicht über eine direkte Grenzwertbetrachtung, sondern über die Hilfsfunktion $h(t) = f(P + tv)$ (in den nächsten Vorlesungen werden wir noch den Zusammenhang zu partiellen Ableitungen kennenlernen, der ebenfalls für Berechnungen gut geeignet ist).

Beispiel 46.4. Wir bestimmen die Richtungsableitung zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - xy^2 + \sin(xy),$$

im Punkt $P = (3, 4)$ in Richtung $v = (2, -5)$. Dazu müssen wir die Hilfsfunktion

$$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

im Nullpunkt ableiten. Es ist

$$\begin{aligned} h(t) &= f(P + tv) \\ &= f(3 + 2t, 4 - 5t) \\ &= (3 + 2t)^2 - (3 + 2t)(4 - 5t)^2 + \sin((3 + 2t)(4 - 5t)) \\ &= 9 + 12t + 4t^2 - 48 + 88t + 5t^2 - 50t^3 + \sin(12 - 7t - 10t^2) \\ &= -39 + 100t + 9t^2 - 50t^3 + \sin(12 - 7t - 10t^2). \end{aligned}$$

Die Ableitung von dieser Funktion im Nullpunkt ist

$$h'(0) = 100 - 7 \cos 12,$$

also ist

$$(D_{(2,-5)}f)(3, 4) = 100 - 7 \cos 12.$$

Lemma 46.5. *Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ ein Punkt, $v \in V$ ein Vektor und seien*

$$f, g: G \longrightarrow W$$

Abbildungen, die im Punkt P in Richtung v differenzierbar seien. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) *Die Summe $f + g$ ist ebenfalls differenzierbar in Richtung v mit*

$$(D_v(f + g))(P) = (D_v f)(P) + (D_v g)(P).$$

- (2) *Das Produkt af mit $a \in \mathbb{R}$ ist ebenfalls differenzierbar in Richtung v mit*

$$(D_v(af))(P) = a(D_v f)(P).$$

- (3) *Die Funktion f ist auch in Richtung cv mit $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$(D_{cv}f)(P) = c(D_v f)(P).$$

Beweis. Die Eigenschaften (1) und (2) ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften für Limiten von Abbildungen, siehe Lemma 10.10. Für die Eigenschaft (3) siehe Aufgabe 46.18. \square

Im Rahmen der Theorie des totalen Differentials wird die Frage beantwortet, wie sich die Richtungsableitungen zu verschiedenen Richtungen zueinander verhalten. Wenn im Werteraum eine Basis gegeben ist, so kann man die Richtungsableitung komponentenweise bestimmen.

Lemma 46.6. *Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ ein Punkt und sei $v \in V$ ein Vektor. Es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Es sei w_1, \dots, w_n eine Basis von W und seien φ_j die Koordinatenfunktionen zu φ bezüglich dieser Basis. Dann ist φ in P in Richtung v genau dann differenzierbar, wenn sämtliche

$$\varphi_j: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

in P in Richtung v differenzierbar sind. In diesem Fall ist

$$(D_v\varphi)(P) = ((D_v\varphi_1)(P), \dots, (D_v\varphi_n)(P)) = w_1(D_v\varphi_1)(P) + \dots + w_n(D_v\varphi_n)(P).$$

Beweis. Dies folgt aus allgemeiner Aufgabe 37.5 oder aus Lemma 37.5 in Verbindung mit Aufgabe 46.6. \square

Aufgrund von diesem Lemma muss man vor allem die Richtungsableitung für den Fall verstehen, wo der Wertebereich gleich \mathbb{R} ist.

Das folgende einfache Beispiel zeigt, dass durchaus alle Richtungsableitungen existieren können, die Abbildung selbst aber noch nicht einmal stetig sein muss.

Beispiel 46.7. Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Für einen Vektor $v = (a, b)$ und einen reellen Parameter s erhalten wir auf der Geraden $\mathbb{R}v$ die Funktion

$$f_v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, s \longmapsto f(sa, sb) = \frac{sa^3b^3}{s^2a^2 + s^6b^6} = \frac{s^2ab^3}{a^2 + s^4b^6}.$$

Für $a \neq 0$ ist der Nenner stets positiv und die Funktion f_v ist stetig mit dem Wert 0 bei $s = 0$, und als rationale Funktion in s differenzierbar. Für $a = 0$ ist die Funktion f_v konstant = 0 und damit ebenfalls differenzierbar. Also existieren in 0 alle Richtungsableitungen zu f . Die Funktion f ist allerdings nicht stetig: Für die Folge $(1/n^3, 1/n)$ (die gegen $0 = (0, 0)$ konvergiert) gilt

$$f\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = \frac{(1/n^3)(1/n^3)}{(1/n^6) + (1/n^6)} = \frac{1}{2},$$

aber $f(0, 0) = 0$.

Im vorstehenden Beispiel besteht kein enger Zusammenhang zwischen den Richtungsableitungen in verschiedene Richtungen. Wir werden später sehen, dass unter stärkeren Voraussetzungen die Zuordnung

$$V \longrightarrow W, v \longmapsto (D_vf)(P),$$

linear ist.

Im Allgemeinen möchte man nicht nur in einem einzigen Punkt $P \in V$ ableiten können, sondern in jedem Punkt, was durch die folgende naheliegende Definition präzisiert wird.

Definition 46.8. Seien V und W euklidische Vektorräume, sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, sei $f: G \rightarrow W$ eine Abbildung und $v \in V$ ein fixierter Vektor. Dann heißt f *differenzierbar in Richtung v* , falls f in jedem Punkt $P \in G$ in Richtung v differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$D_v f: G \longrightarrow W, P \longmapsto (D_v f)(P),$$

die *Richtungsableitung* von f in Richtung v .

Die Richtungsableitung zu einem fixierten Vektor ist also vom selben Typ wie die Ausgangsabbildung.

46.2. Polynomiale Funktionen.

Beispiel 46.9. Wir betrachten die polynomiale Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 \cdots x_n.$$

Die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, \dots, v_n)$ in einem beliebigen Punkt

$$P = (x_1, \dots, x_n)$$

ergibt sich durch Betrachten des Differenzenquotienten, also

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 + sv_1) \cdot (x_2 + sv_2) \cdots (x_n + sv_n) - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{s} \\ &= \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n + s \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} \right) + s^2 g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{s} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} + s \cdot g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Dabei ist $g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$ eine polynomiale Funktion in s (die x_1, \dots, x_n und die v_1, \dots, v_n sind fixierte Zahlen). Der Limes von

$$s \cdot g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$$

geht für $s \rightarrow 0$ gegen 0. Daher ist

$$(D_v f)(P) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i}.$$

In den Aufgaben werden wir sehen, dass die Richtungsableitung zu einer polynomialen Funktion in jede Richtung existiert und selbst wieder polynomial ist. Dies wird sich auch einfach im Rahmen des totalen Differentials ergeben.

46. ARBEITSBLATT

46.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 46.1. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy,$$

- (1) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (2) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(2, 5)$,
- (3) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (4) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (5) im Punkt $(2, 3)$ in Richtung $(-1, 0)$,
- (6) im Punkt $(3, 7)$ in Richtung $(5, -4)$.

Aufgabe 46.2. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y},$$

- (1) im Punkt $(0, 1)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (2) im Punkt $(0, 1)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (3) im Punkt $(1, 3)$ in Richtung $(2, 4)$,
- (4) im Punkt $(-1, 6)$ in Richtung $(-3, -1)$,
- (5) im Punkt $(1, \frac{1}{100})$ in Richtung $(0, -1)$.

Aufgabe 46.3.*

Bestimme zur Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t^2,$$

die Richtungsableitung in Richtung 3 für jeden Punkt.

Aufgabe 46.4.*

Bestimme die Richtungsableitung von

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^5$$

im Punkt $(4, -1)$ in Richtung $(-3, 2)$.

Zur vorstehenden Aufgabe siehe Aufgabe 48.14 für eine weitere Berechnungsmöglichkeit.

Aufgabe 46.5. Sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f in einem Punkt $P \in \mathbb{R}$ genau dann differenzierbar ist, wenn f in P in Richtung 1 differenzierbar ist, und dass dann die Gleichheit

$$(D_1f)(P) = f'(P)$$

gilt.

Aufgabe 46.6. Bestimme die Richtungsableitung einer Abbildung in Richtung 0.

Aufgabe 46.7. Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $f: G \rightarrow W$ eine Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt und $v \in V$ ein fixierter Vektor. Zeige, dass f in P in Richtung v genau dann differenzierbar ist, wenn die (auf einem Intervall um $0 \in \mathbb{R}$ definierte) Kurve

$$g: I \longrightarrow W, t \longmapsto g(t) = f(P + tv),$$

in 0 differenzierbar ist, und dass in diesem Fall

$$(D_v f)(P) = g'(0)$$

gilt.

Wie muss dabei das Intervall gewählt werden?

Aufgabe 46.8. Bestimme, für welche Richtungen die Richtungsableitung im Nullpunkt zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

existieren.

Aufgabe 46.9. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung der euklidischen Norm

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

existiert.

Aufgabe 46.10. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^2$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto |x + y|,$$

existiert.

Aufgabe 46.11. Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

im Nullpunkt $(0, 0)$ auf Richtungsableitungen. Man entscheide für jede Gerade G durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung von f auf G im Nullpunkt ein Extremum besitzt.

Aufgabe 46.12. Es sei $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis und

$$g: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion mit $g(-Q) = -g(Q)$, gegenüberliegende Punkte auf dem Kreis haben also zueinander negierte Werte.

- (1) Zeige, dass durch $f(0) = 0$ und

$$f(P) := \|P\|g\left(\frac{P}{\|P\|}\right)$$

für $P \neq 0$ eine Funktion auf \mathbb{R}^2 definiert ist.

- (2) Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn g stetig ist.
 (3) Man gebe ein Beispiel für ein nichtstetiges g derart, dass f im Nullpunkt stetig ist.
 (4) Zeige, dass die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Nullpunkt linear ist.
 (5) Zeige, dass f im Nullpunkt in jede Richtung differenzierbar ist.
 (6) Es sei

$$g(Q) = \begin{cases} 1, & \text{falls die } x\text{-Koordinate von } Q \text{ rational ist} \\ 0, & \text{falls die } x\text{-Koordinate von } Q \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Zeige, dass f in jedem Punkt $P \neq 0$ nur in eine Richtung (bis auf Skalierung) eine Richtungsableitung besitzt.

Aufgabe 46.13. Es seien V und W euklidische Vektorräume und

$$f, g: G \rightarrow W$$

seien Abbildungen auf einer offenen Menge $G \subseteq V$, die in Richtung $v \in V$ differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$h: G \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto \langle f(P), g(P) \rangle,$$

in Richtung $v \in V$ differenzierbar ist, und dass

$$(D_v h)(P) = \langle f(P), (D_v g)(P) \rangle + \langle (D_v f)(P), g(P) \rangle$$

gilt.

46.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 46.14. (4 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 \sin y - e^x y - x,$$

- (1) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
 (2) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
 (3) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(2, 0)$,
 (4) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, -3)$,
 (5) im Punkt $(1, 1)$ in Richtung $(1, 1)$,
 (6) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(-1, \frac{1}{2})$,
 (7) im Punkt $(5, 7)$ in Richtung $(1, 0)$,
 (8) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(5, 7)$.

Aufgabe 46.15. (2 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^3 = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x^2 - xy + y^4}{x^2 + y^3},$$

- (1) im Punkt $(1, 1)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (2) im Punkt $(0, 1)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (3) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (4) im Punkt $(3, -2)$ in Richtung $(2, -5)$.

Aufgabe 46.16. (5 Punkte)Bestimme die Richtungsableitungen der Funktion $(r_i \in \mathbb{N})$

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},$$

in einem Punkt

$$a = (a_1, \dots, a_n)$$

in Richtung

$$v = (v_1, \dots, v_n).$$

Aufgabe 46.17. (4 Punkte)

Zeige, unter Verwendung von Aufgabe 46.16, dass zu einer polynomialen Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

zu einer fixierten Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $D_v \varphi$ existiert und selbst polynomial ist.**Aufgabe 46.18.** (3 Punkte)Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ ein Punkt, $v \in V$ ein Vektor und sei

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung, die im Punkt P in Richtung v differenzierbar sei. Zeige, dass f auch in Richtung cv mit $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und die Beziehung

$$(D_{cv}f)(P) = c(D_vf)(P)$$

gilt.

47. VORLESUNG - PARTIELLE ABLEITUNGEN

47.1. Partielle Ableitungen.

Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine durch

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

gegebene Abbildung. Betrachtet man für einen fixierten Index i die übrigen Variablen x_j , $j \neq i$, als Konstanten, so erhält man eine Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die nur von x_i abhängt (entsprechend betrachtet man die übrigen Variablen als Parameter). Falls diese Funktion, als Funktion in einer Variablen, differenzierbar ist, so sagen wir, dass f *partiell differenzierbar* bezüglich x_i ist und bezeichnen diese Ableitung mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Der Vorteil der partiellen Ableitungen liegt darin, dass man diese einfach berechnen kann. Jedoch hängen sie von der Wahl einer Basis ab. Die partiellen Ableitungen sind selbst Abbildungen von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 47.1. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei eine Abbildung $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

gegeben. Es sei $P = (a_1, \dots, a_n) \in G$ ein Punkt. Für fixierte Indizes i und j betrachten wir die Abbildung

$$I \rightarrow \mathbb{R}, x_i \mapsto f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

(wobei I ein reelles Intervall mit $a_i \in I$ derart sei, dass $\{(a_1, \dots, a_{i-1})\} \times I \times \{(a_{i+1}, \dots, a_n)\} \subseteq G$ gilt) als Funktion in einer Variablen, wobei die übrigen Variablen a_k , $k \neq i$, fixiert seien. Ist diese Funktion in a_i differenzierbar, so heißt f_j *partiell differenzierbar* in P bezüglich der Koordinate x_i . Man bezeichnet diese Ableitung (welche ein Element in \mathbb{R} ist) mit

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$$

und nennt sie die *i -te partielle Ableitung* von f_j in P .

Die Abbildung f heißt *partiell differenzierbar* im Punkt P , falls für alle i und j die partiellen Ableitungen in P existieren. Die *i -te partielle Ableitung* von f in P wird mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) := \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \right)$$

bezeichnet.

Diese Definition führt die *i -te partielle Ableitung* einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf den Ableitungsbegriff in einer Variablen zurück, indem die anderen Variablen „festgehalten“ und als Parameter betrachtet werden. Daher bedeutet die

Existenz der i -ten partiellen Ableitung von f im Punkt (a_1, \dots, a_n) einfach die Existenz des Limes

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + s, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{s}.$$

Beispiel 47.2. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{xy^3}{x^2 + y^2}.$$

Um die partielle Ableitung nach x (in jedem Punkt) zu berechnen, betrachtet man y als eine Konstante, so dass eine nur von x abhängige Funktion dasteht. Diese wird gemäß den Ableitungsregeln für Funktionen in einer Variablen abgeleitet, so dass sich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3(x^2 + y^2) - xy^3(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2y^3 + y^5}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

ergibt. Für die partielle Ableitung nach y betrachtet man x als eine Konstante und erhält

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - xy^3(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}.$$

Die partiellen Ableitungen sind im Wesentlichen die Richtungsableitungen in Richtung der Basisvektoren. Insbesondere machen partielle Ableitungen nur dann Sinn, wenn eine Basis im Vektorraum, der den Definitionsbereich einer Abbildung darstellt, gewählt worden ist, bzw. wenn eben von vornherein ein \mathbb{R}^n betrachtet wird.

Lemma 47.3. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $P \in G$ ein Punkt und sei*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}^m, \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

eine Abbildung. Dann ist f in P genau dann partiell differenzierbar, wenn die Richtungsableitungen von sämtlichen Komponentenfunktionen f_j in P in Richtung eines jeden Standardvektors existieren. In diesem Fall stimmt die i -te partielle Ableitung $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(P)$ von f in P mit der Richtungsableitung $(D_{e_i} f_j)(P)$ von f_j in P in Richtung des i -ten Standardvektors e_i überein, und f ist in P genau dann partiell differenzierbar, wenn die Richtungsableitungen in P in Richtung eines jeden Standardvektors existieren.

Beweis. Sei $P = (a_1, \dots, a_n)$. Wir können uns wegen Lemma 46.6 auf eine einzige Komponentenfunktion f_j beschränken. Da partielle Ableitungen die Ableitungen von Funktionen in einer Variablen sind, ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + s, a_{i+1}, \dots, a_n) - f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f_j(P + se_i) - f_j(P)}{s} \\
&= (D_{e_i} f_j)(P).
\end{aligned}$$

□

Definition 47.4. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei eine Abbildung

$$\begin{aligned}
f : G &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \\
(x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),
\end{aligned}$$

gegeben. Dann heißt f *partiell differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $P \in G$ partiell differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : G \longrightarrow \mathbb{R}^m, P \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \right),$$

die i -te *partielle Ableitung* von f .

Definition 47.5. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei eine Abbildung

$$\begin{aligned}
f : G &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \\
(x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),
\end{aligned}$$

gegeben, die in $P \in G$ partiell differenzierbar sei. Dann heißt die Matrix

$$\text{Jak}(f)_P := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

die *Jacobi-Matrix* zu f im Punkt P .

Beispiel 47.6. Wir betrachten die Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die durch

$$(x, y, z) \longmapsto (xy^2 - z^3, \sin(xy) + x^2 \cdot \exp z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$$

gegeben sei. Die partiellen Ableitungen von f_1 sind

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = -3z^2,$$

und die partiellen Ableitungen von f_2 sind

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y \cos(xy) + 2x \cdot \exp z, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x \cdot \cos(xy), \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = x^2 \cdot \exp(z).$$

Damit erhalten wir für einen beliebigen Punkt $P = (x, y, z)$ die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} y^2 & 2xy & -3z^2 \\ y \cos(xy) + 2x \exp(z) & x \cos(xy) & x^2 \exp(z) \end{pmatrix}.$$

Für einen speziellen Punkt, z.B. $P = (2, 1, 3)$, setzt man einfach ein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -27 \\ \cos(2) + 4 \exp(3) & 2 \cos(2) & 4 \exp(3) \end{pmatrix}.$$

47.2. Höhere Richtungsableitungen.

Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Für eine Abbildung $f: G \rightarrow W$ und einen fixierten Vektor $v \in V$ ist die Richtungsableitung in Richtung v (falls diese existiert) selbst eine Abbildung

$$D_v f: G \longrightarrow W, P \longmapsto (D_v f)(P).$$

Als solche ist es sinnvoll zu fragen, ob $D_v f$ in Richtung $u \in V$ differenzierbar ist. Wir sprechen dann von *höheren Ableitungen*. Dies wird präzisiert durch die folgende induktive Definition.

Definition 47.7. Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume,

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung auf einer offenen Menge $G \subseteq V$ und v_1, \dots, v_n Vektoren in V . Man sagt, dass die *höhere Richtungsableitung* von f in Richtung v_1, \dots, v_n existiert, wenn die höhere Richtungsableitung in Richtung v_1, \dots, v_{n-1} existiert und davon die Richtungsableitung in Richtung v_n existiert. Sie wird mit

$$D_{v_n}(\dots(D_{v_2}(D_{v_1}f))\dots)$$

bezeichnet.

Beispiel 47.8. Wir bestimmen die Richtungsableitung zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - xy - y^3,$$

in Richtung $v = (4, -1)$. Zu einem Punkt $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ müssen wir die Funktion

$$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(P + tv),$$

nach t im Nullpunkt ableiten. Es ist

$$\begin{aligned} p(t) &= f(P + tv) \\ &= (x + 4t)^2 - (x + 4t)(y - t) - (y - t)^3 \\ &= x^2 + 8xt + 16t^2 - xy - 4ty + xt + 4t^2 - y^3 + 3y^2t - 3yt^2 + t^3 \\ &= x^2 - xy - y^3 + 9xt - 4ty + 3y^2t + 20t^2 - 3yt^2 + t^3. \end{aligned}$$

Die Ableitung von dieser Funktion im Nullpunkt ist

$$p'(0) = 9x - 4y + 3y^2,$$

also ist

$$g(x, y) := (D_v f)(x, y) = 9x - 4y + 3y^2.$$

Für diese Funktion können wir nun die Richtungsableitung in Richtung $u = (2, -3)$ ausrechnen. Es ist

$$q(t) := g(P + tu)$$

$$\begin{aligned}
&= 9(x + 2t) - 4(y - 3t) + 3(y - 3t)^2 \\
&= 9x - 4y + 3y^2 + 18t + 12t - 18yt + 27t^2.
\end{aligned}$$

Die Ableitung von dieser Funktion im Nullpunkt ist

$$q'(0) = 30 - 18y,$$

also ist

$$(D_u g)(x, y) = (D_u(D_v f))(x, y) = 30 - 18y.$$

Definition 47.9. Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume und

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung auf einer offenen Menge $G \subseteq V$. Man sagt, dass f n -mal stetig differenzierbar ist, wenn für jede Auswahl v_1, \dots, v_n von n Vektoren aus V die höhere Richtungsableitung

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1} f) \dots)$$

in Richtung v_1, \dots, v_n existiert und stetig ist.

Einmal stetig differenzierbar bedeutet also, dass die Richtungsableitung $D_v f$ in jede Richtung $v \in V$ existiert und stetig ist.

Polynomfunktionen sind beliebig oft stetig differenzierbar, siehe Aufgabe 47.11.

Auch partielle Ableitungen kann man wie Richtungsableitungen hintereinanderausführen. Dies führt zu Schreibweisen wie

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f$$

und ähnliche.

47.3. Der Satz von Schwarz.

Beispiel 47.10. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^4 - x^3 y + 5xy^2 + 2y^3.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 3x^2 y + 5y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^3 + 10xy + 6y^2.$$

Diese Funktionen sind selbst wiederum partiell differenzierbar, und wir berechnen

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (4x^3 - 3x^2 y + 5y^2) = -3x^2 + 10y$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-x^3 + 10xy + 6y^2) = -3x^2 + 10y.$$

Die beiden zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$ stimmen also überein.

In diesem Beispiel zeigt sich ein allgemeiner Sachverhalt, der *Satz von Schwarz* (oder auch *Satz von Clairaut*) heißt.

Satz 47.11. *Es sei $G \subseteq V$ offen und $\varphi: G \rightarrow W$ eine Abbildung, so dass für $u, v \in V$ die zweiten Richtungsableitungen $D_v D_u \varphi$ und $D_u D_v \varphi$ existieren und stetig sind. Dann gilt*

$$D_v D_u \varphi = D_u D_v \varphi.$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Korollar 47.12. *Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und*

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine n -mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei v_1, \dots, v_n eine Auswahl von n Vektoren aus V . Dann gilt für jede Permutation $\sigma \in S_n$ die Gleichheit

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)) = D_{v_{\sigma(n)}}(\dots D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi)).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 47.17. □

Korollar 47.13. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass für $1 \leq i, j \leq n$ die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f$ und $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f$ existieren und stetig sind. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f.$$

Beweis. Des folgt aus Satz 47.11 und Lemma 47.3. □

47. ARBEITSBLATT

47.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 47.1. Bestimme das Minimum der Funktion

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

in Abhängigkeit von b und c . Was hat dies mit partiellen Ableitungen zu tun?

Aufgabe 47.2. Bestimme die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 y^5 - \cos(x^3 - y^2).$$

Aufgabe 47.3. Bestimme die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x, y, z) \longmapsto \left(\sqrt{x^2 y^2 + 3} + x^3 y z^2, x^{11} - x^2 y^3 e^{xz} - \ln(x^2 + y^2 + x^4 z^6 + 1) \right).$$

Aufgabe 47.4. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^3 y - x^2, x^4 y^2 - 3x y^3 + 5y).$$

Aufgabe 47.5. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2 y z^3 - \sin x, \exp(x^4 y) - 2x^2 z^3 \cos(xy^2 z)).$$

Aufgabe 47.6. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Aufgabe 47.7.*

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto \left(\frac{\sin x}{x^2 + y^4}, \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \ln(x^2 + y^2) \right),$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 47.8. Beschreibe die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^2,$$

in reellen Koordinaten und bestimme die Jacobi-Matrix. Ebenso für z^3, z^4, z^5 .

Aufgabe 47.9. Bestimme sämtliche höheren Richtungsableitungen der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 y^3 - x^3 y,$$

die sich mit den beiden Standardrichtungen $(1, 0)$ und $(0, 1)$ ausdrücken lassen.

Aufgabe 47.10.*

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(t, x) = \sin(\lambda x) e^{-\lambda^2 t}.$$

Zeige, dass f die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}$$

erfüllt.

Aufgabe 47.11. Zeige, dass eine Polynomfunktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 47.12.*

Man gebe ein Beispiel für eine Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

die im Nullpunkt partiell differenzierbar ist und dort die Eigenschaft besitzt, dass die Richtungsableitung in keine Richtung $v = (a, b)$ mit $a, b \neq 0$ existiert.

In der folgenden Aufgabe ist

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

Die partiellen Ableitungen im komplexen Fall sind wie im reellen Fall zu bestimmen, man verwende die gleichen Regeln für Polynome.

Aufgabe 47.13.*

Es seien P, Q zwei komplexe (bzw. reelle) Polynome und

$$\varphi: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2, (x, y) \longmapsto (P(x, y), Q(x, y)),$$

die zugehörige Abbildung. Die Determinante der Jacobi-Matrix zu φ sei in jedem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ von 0 verschieden.

- (1) Zeige, dass bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Determinante konstant ist.
- (2) Zeige durch ein Beispiel, dass bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Determinante nicht konstant sein muss.

Aufgabe 47.14. Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine k -fach stetig differenzierbare Funktion, $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^n$.

Es sei

$$h(t) := f(P + tv).$$

Zeige, dass h k -fach stetig differenzierbar ist und dass

$$h^{(k)}(0) = D_v \cdots D_v f(P)$$

(mit k Richtungsableitungen) gilt.

Aufgabe 47.15.*

Zeige für Polynomfunktionen

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

direkt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gilt.

Aufgabe 47.16. Zeige, dass keine partiell differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

existiert, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y^2$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 47.17. Es seien V und W endlichdimensionale, \mathbb{R} -Vektorräume $G \subseteq V$ offen und

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine n -mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei v_1, \dots, v_n eine Auswahl von n Vektoren aus V . Zeige, dass dann für jede Permutation $\sigma \in S_n$ die Gleichheit

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)\dots) = D_{v_{\sigma(n)}}(\dots D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi)\dots)$$

gilt.

47.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 47.18. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (\sin xy, x^2y^3z^4 - y \sinh z, xy^2z + 5).$$

Aufgabe 47.19. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^3 - x^2y^2 - 4y^2.$$

Berechne die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt (x, y) in Richtung $(2, 5)$. Bestätige, dass sich diese Richtungsableitung auch ergibt, wenn man die Jacobi-Matrix auf den Vektor $(2, 5)$ anwendet.

Aufgabe 47.20. (4 Punkte)

Sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass sämtliche k -ten Richtungsableitungen 0 sind.

Aufgabe 47.21. (6 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \varphi(x, y),$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \varphi(P) = 0$$

gelte. Zeige, dass es dann Funktionen

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass

$$\varphi(x, y) = f(x) + g(y)$$

gilt.

Aufgabe 47.22. (6 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar ist, und dass

$$D_1 D_2 f(0, 0) \neq D_2 D_1 f(0, 0)$$

gilt.

48. VORLESUNG - TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT

48.1. Totale Differenzierbarkeit.

Wir möchten Abbildungen $\varphi: V \rightarrow W$ zwischen Vektorräumen differenzieren (ohne auf eine Richtung Bezug zu nehmen), und allgemeiner Abbildungen

$$\varphi: G \longrightarrow W,$$

wobei $G \subseteq V$ eine gewisse offene Teilmenge ist. Wir wiederholen kurz die Situation in einer Variablen: Angenommen wir haben eine Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist die Grundidee einer differenzierbaren Abbildung und ihrer Ableitung, eine „Tangente an den Graphen“ anzulegen. Dabei kann man

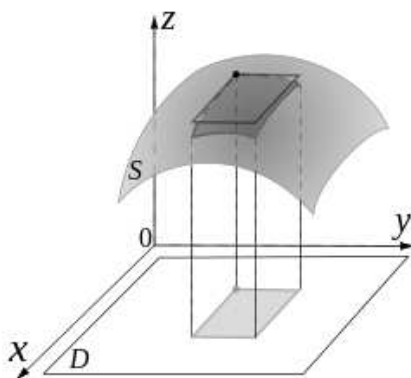
sagen, dass die Tangente die beste *lineare Approximation* von φ (genauer: Der Graph einer affin-linearen Approximation) in einem gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}$ darstellt. Da die Steigung der Tangente wieder eine reelle Zahl ist, wird beim Differenzieren jedem Punkt x wieder eine Zahl zugeordnet. Wir erhalten also eine neue Funktion, welche wir mit φ' bezeichnen. Im höherdimensionalen Fall ist dies komplizierter, aber die Idee einer bestmöglichen *linearen Approximation* bleibt bestehen.

Die Übereinstimmung der Konzepte wird auch deutlich, wenn man den Graphen einer Abbildung anschaut. Zu einer differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ schmiegt sich die Tangente im Punkt $(P, f(P))$ an den Graphen zu f an. Zu einer Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist der Graph eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, den man sich als ein Gebirge über der Ebene vorstellen sollte. Eine sinnvolle Fragestellung ist, ob es zu einem Punkt $(P, f(P))$ eine anschmiegende Tangentialebene an den Graphen zu f gibt, die man als den Graphen einer affin-linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ realisieren kann.

Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Vektorräume endlichdimensional und mit einer euklidischen Norm versehen sind. Wie schon in Lemma 37.1 erwähnt wurde, hängt die Topologie, also die Konzepte offene Menge, Stetigkeit, Konvergenz, nicht von der gewählten euklidischen Struktur ab.



Definition 48.1. Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Menge und $\varphi: G \rightarrow W$ eine Abbildung. Dann heißt φ *differenzierbar* (oder *total differenzierbar*) im Punkt $P \in G$, wenn es eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $L: V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\|r(v)$$

gibt, wobei $r: U(0, \delta) \rightarrow W$ eine in 0 stetige Abbildung mit $r(0) = 0$ ist und die Gleichung für alle $v \in V$ mit $P + v \in U(P, \delta) \subseteq G$ gilt.

Diese lineare Abbildung L heißt, falls sie existiert, das (*totale*) *Differential* von φ an der Stelle P und wird mit

$$(D\varphi)_P$$

bezeichnet.

Äquivalent zur totalen Differenzierbarkeit ist die Eigenschaft, dass der Ausdruck

$$r(v) = \frac{\varphi(P+v) - \varphi(P) - L(v)}{\|v\|}$$

für $v \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert. Ebenfalls äquivalent ist die Eigenschaft, dass der Limes (von Funktionen)

$$\lim_{v \rightarrow 0, v \neq 0} \frac{\|\varphi(P+v) - \varphi(P) - L(v)\|}{\|v\|}$$

existiert und gleich 0 ist (siehe Aufgabe 37.7).

Das Konzept der totalen Differenzierbarkeit ist eher theoretisch und weniger konkreten Berechnungen zugänglich. Wir werden in Satz 48.11 dieses Konzept mit dem Konzept der partiellen Ableitungen in Verbindung bringen, welches eher für Berechnungen geeignet ist, jedoch von Koordinaten, d.h. von der Auswahl einer Basis, abhängt (siehe auch Beispiel 49.7 in der nächsten Vorlesung).

Lemma 48.2. *Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume und sei die Abbildung $\varphi: G \rightarrow W$ auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq V$ definiert. Sei $P \in G$ ein Punkt. Dann existiert höchstens eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften aus Definition 48.1. Ist φ im Punkt P differenzierbar, so ist das totale Differential $(D\varphi)_P$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Angenommen, es gelte

$$\varphi(P+v) = \varphi(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v)$$

und

$$\varphi(P+v) = \varphi(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v)$$

mit zwei linearen Abbildungen L_1 und zwei L_2 und im Punkt 0 stetigen Funktionen $r_1, r_2: U(0, \delta) \rightarrow W$ mit $r_1(0) = r_2(0) = 0$. Wir müssen $L_1 = L_2$ zeigen. Dazu ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab (da es sich hier um Gleichungen von Funktionswerten im Vektorraum W handelt, ist hier werteweises Abziehen gemeint) und erhalten die Gleichung

$$0 = (L_1 - L_2)(v) + \|v\| \cdot (r_1(v) - r_2(v)).$$

Daher müssen wir zeigen, dass die (konstante) Nullabbildung die Eigenschaft besitzt, dass die lineare Abbildung 0 ihre einzige lineare Approximation ist. Wir nehmen daher an, dass

$$0 = L(v) + \|v\| \cdot r(v)$$

gilt, wobei L linear und r eine in 0 stetige Funktion mit $r(0) = 0$ ist. Wenn L nicht die Nullabbildung ist, so gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $L(v) = w \neq 0$. Dann gilt für $s \in \mathbb{R}$

$$0 = L(sv) + \|sv\|r(sv) = sw + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv).$$

Dies impliziert, dass $r(sv) = -\frac{sw}{|s|\|v\|}$ für $s \neq 0$ gilt. Die Norm von $r(sv)$ ist daher konstant gleich $\frac{\|w\|}{\|v\|} \neq 0$. Also gilt $\lim_{s \rightarrow 0} \|r(sv)\| \neq 0$, ein Widerspruch. \square

Beispiel 48.3. Ist $\varphi: V \rightarrow W$ konstant mit $\varphi(v) = w \in W$ für alle $v \in V$, so ist φ differenzierbar mit totalem Differential 0 (siehe Aufgabe 48.6).

Proposition 48.4. *Es sei $L: V \rightarrow W$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen \mathbb{R} -Vektorräumen V und W . Dann ist L in jedem Punkt $P \in V$ differenzierbar und stimmt in jedem Punkt mit ihrem totalen Differential überein.*

Beweis. Aufgrund der Linearität gilt

$$L(P + v) = L(P) + L(v).$$

Also können wir $r = 0$ wählen. \square

Diese Aussage gilt auch für affin-lineare Abbildungen, also Abbildungen der Form

$$\varphi: V \longrightarrow W, v \longmapsto L(v) + w,$$

mit einer linearen Abbildung L und einem festen Vektor $w \in W$. In diesem Fall ist das totale Differential gleich L .

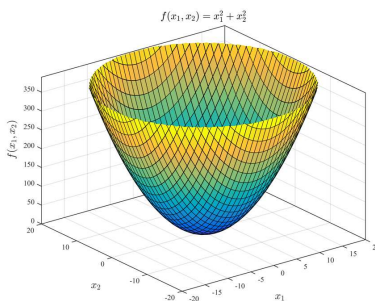
Beispiel 48.5. Wir zeigen direkt, dass die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

im Nullpunkt $(0, 0)$ total differenzierbar ist, und zwar mit der Nullabbildung als totales Differential. Dazu muss man nur zeigen, dass in der Gleichung

$$\begin{aligned} f((0, 0) + (x, y)) &= f(x, y) \\ &= x^2 + y^2 \\ &= f(0, 0) + 0 \cdot (x, y) + \|(x, y)\|r(x, y) \\ &= \|(x, y)\|r(x, y) \end{aligned}$$

die Funktion $r(x, y)$ die verlangten Eigenschaften besitzt. Wegen $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist aber $r(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ und diese Funktion ist stetig im Nullpunkt mit dem Wert 0.



Lemma 48.6. *Es sei I ein reelles Intervall, W ein euklidischer Vektorraum und*

$$\gamma: I \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Dann ist γ genau dann in $t \in I$ als Kurve differenzierbar, wenn γ in t total differenzierbar ist. In diesem Fall besteht die Beziehung

$$\gamma'(t) = (D\gamma)_t(1).$$

Beweis. Die Kurvendifferenzierbarkeit im Punkt t bedeutet nach Definition 37.3 die Existenz des Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}.$$

Diese Existenz ist (entsprechend Satz 14.5) dazu äquivalent, dass man

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + hw + h \cdot r(h)$$

mit einem Vektor $w \in W$ und einer in 0 stetigen Abbildung r mit $r(0) = 0$ schreiben kann (wobei $w = \gamma'(t)$ sein muss). Dabei kann man hinten h durch $|h|$ ersetzen (wobei man auch $r(h)$ abwandeln muss). Diese lineare Approximierbarkeit ist aber die Definition der totalen Differenzierbarkeit, und zwar ist die lineare Abbildung durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow W, h \longmapsto hw,$$

gegeben. Somit ist

$$\gamma'(t) = w = (D\gamma)_t(1).$$

□

Proposition 48.7. *Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume und es sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Seien $\varphi_1, \varphi_2: G \rightarrow W$ im Punkt $P \in G$ differenzierbare Abbildungen mit den totalen Differentialen $(D\varphi_1)_P$ und $(D\varphi_2)_P$. Dann ist auch $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ in P differenzierbar und es gilt*

$$(D(\varphi_1 + \varphi_2))_P = (D\varphi_1)_P + (D\varphi_2)_P.$$

Ebenso gilt $(D(a\varphi_1))_P = a(D\varphi_1)_P$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\varphi_1(P + v) = \varphi_1(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v)$ und $\varphi_2(P + v) = \varphi_2(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)(P + v) &= \varphi_1(P + v) + \varphi_2(P + v) \\ &= \varphi_1(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v) + \varphi_2(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v) \\ &= (\varphi_1 + \varphi_2)(P) + (L_1 + L_2)(v) + \|v\|(r_1(v) + r_2(v)). \end{aligned}$$

Wir erhalten also die gewünschte Gestalt, da auch $r_1 + r_2$ in 0 stetig mit $(r_1 + r_2)(0) = 0$ ist. Der Beweis der zweiten Aussage ist ähnlich. \square

Proposition 48.8. *Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Sei $\varphi: G \rightarrow W$ eine in $P \in G$ differenzierbare Abbildung. Dann ist φ auch stetig im Punkt P .*

Beweis. Nach Definition gilt $\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\| \cdot r(v)$. Die rechte Seite ist stetig (nach Definition 46.1 und Satz 36.10) in $v = 0$. Damit ist φ stetig in P . \square

48.2. Totale Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen.

Im Folgenden wollen wir den Zusammenhang zwischen Richtungsableitungen, partiellen Ableitungen und dem totalen Differential verstehen. Totale Differenzierbarkeit impliziert richtungsweise Differenzierbarkeit.

Proposition 48.9. *Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume, es sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $\varphi: G \rightarrow W$ eine im Punkt $P \in G$ differenzierbare Abbildung. Dann ist φ in P in jede Richtung v differenzierbar, und es gilt*

$$(D_v\varphi)(P) = (D\varphi)_P(v).$$

Beweis. Da $(D\varphi)_P$ eine lineare Abbildung von V nach W ist, liefert die Anwendung dieser Abbildung auf einen Vektor $v \in V$ einen Vektor in $(D\varphi)_P(v) \in W$. Nach Voraussetzung haben wir

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + (D\varphi)_P(v) + \|v\| \cdot r(v)$$

(mit den üblichen Bedingungen an r). Insbesondere gilt für (hinreichend kleines) $s \in \mathbb{R}$

$$\varphi(P + sv) = \varphi(P) + s(D\varphi)_P(v) + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{\varphi(P + sv) - \varphi(P)}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{s(D\varphi)_P(v) + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \left((D\varphi)_P(v) + \frac{|s|}{s} \|v\| \cdot r(sv) \right) \\ &= (D\varphi)_P(v), \end{aligned}$$

da $\lim_{s \rightarrow 0} r(sv) = 0$ und der Ausdruck $\frac{|s|}{s} \|v\|$ beschränkt ist. \square

Bemerkung 48.10. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine in $P \in G$ total differenzierbare Abbildung. Dann existieren nach Proposition 48.9 und nach Lemma 47.3 die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

im Punkt P . Daher existiert die¹⁸

Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix beschreibt das totale Differential bezüglich der Standardbasen im \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m . Es ist ja nach Proposition 48.9 und Lemma 47.3

$$(Df)_P(e_i) = (D_{e_i}f)(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \end{pmatrix}$$

und dies ist die i -te Spalte der Jacobimatrix. Durch diese Eigenschaft ist aber die beschreibende Matrix zu einer linearen Abbildung bezüglich einer Basis festgelegt.

Satz 48.11. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Es seien $x_i, i = 1, \dots, n$, die Koordinaten von \mathbb{R}^n und $P \in G$ ein Punkt. Es sei angenommen, dass alle partiellen Ableitungen in einer offenen Umgebung von P existieren und in P stetig sind. Dann ist φ in P (total) differenzierbar. Ist*

18

Die Benennung der Dimensionen und der Indizes bei höherdimensionalen Abbildungen und insbesondere bei der Jacobimatrix ist ein gewisses Problem, was auch schon in der linearen Algebra auftritt. Für eine Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^{\text{Dimension des ersten Raumes}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\text{Dimension des zweiten Raumes}}$$

ist es naheliegend, die erste Dimension links mit einem im Alphabet früheren Buchstaben als die zweite Dimension zu bezeichnen, also etwa $\mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^b$ oder $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$ oder $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diese Reihenfolge überträgt sich sinnvollerweise auf Objekte, die mit dem ersten bzw. dem zweiten Raum verbunden sind, man spricht dann von der Standardbasis $e_i, 1 \leq i \leq a$, links und der Standardbasis $e_j, 1 \leq j \leq b$, rechts, bezeichnet die Variablen links mit $x_i, 1 \leq i \leq a$, und rechts mit $y_j, 1 \leq j \leq b$, und die Komponentenfunktionen zu φ bezeichnet man mit $\varphi_j, 1 \leq j \leq b$. Diese Bezeichnungsphilosophie beißt sich allerdings mit den Bezeichnungen für Matrizen. Bei einer Matrix sagt man die Anzahl der Zeilen zuerst und dann die Anzahl der Spalten, man spricht von einer Zeilenanzahl x Spaltenanzahl-Matrix und gemäß dieser Reihenfolge werden auch die Einträge benannt. Der Eintrag $a_{3,5}$ ist in der dritten Zeile und der fünften Spalte der Matrix. Nun wird aber eine lineare Abbildung durch eine Matrix beschrieben, deren Spaltenanzahl wegen „Zeile mal Spalte“ mit der Dimension des ersten Raumes übereinstimmt. Hier liegen also verschiedene Reihenfolgen vor, und dies ist der Grund, warum eine gewählte Bezeichnung nie völlig überzeugend ist. Bei einer partiell differenzierbaren Abbildung sollten die Bezeichnungen für die Indizes der Komponentenfunktionen zu den Bezeichnungen der Jacobimatrix passen.

die Abbildung φ bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^m durch die Koordinatenfunktionen f_1, \dots, f_m gegeben, so wird unter diesen Bedingungen das totale Differential in P durch die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

beschrieben.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. \square

Bemerkung 48.12. Bei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und einer total differenzierbaren Abbildung

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

wird die affin-lineare Approximation in einem Punkt $P = (a_1, \dots, a_n) \in G$ in Koordinaten folgendermaßen geschrieben. Es sei L das totale Differential, so dass die lineare Approximation für $\varphi(P + v)$ die Gestalt

$$\varphi(P) + L(v)$$

besitzt. Wenn man dies in den Koordinaten x_1, \dots, x_n schreiben möchte, so ist $v_i = x_i - a_i$ und daher ist die lineare Approximation für $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ gleich

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) + L \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \varphi(a_1, \dots, a_n) - L \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Korollar 48.13. *Polynomfunktionen sind total differenzierbar.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 48.11 und daraus, dass die partiellen Ableitungen von Polynomfunktionen wieder Polynomfunktionen sind, die nach Satz 36.13 stetig sind. \square

48. ARBEITSBLATT

48.1. Übungsaufgaben.

Für dieses Aufgabenblatt darf die Beziehung zwischen totalem Differential und partiellen Ableitungen bzw. Richtungsableitungen nicht verwendet werden, außer bei Aufgabe 48.15 bis Aufgabe 48.19 und bei Aufgabe 48.24 und Aufgabe 48.25.

Aufgabe 48.1. Sei $\varphi: V \rightarrow W$ eine total differenzierbare Abbildung mit $(D\varphi)_P = 0$ für alle $P \in V$. Zeige, dass φ konstant ist.

Aufgabe 48.2. Ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

im Punkt -3 total differenzierbar? Was ist das totale Differential in diesem Punkt?

Aufgabe 48.3.*

Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 y^3.$$

(1) Schreibe $(x + v)^2(y + w)^3$ als

$$(x + v)^2(y + w)^3 = x^2 y^3 + av + bw + cv^2 + dvw + ew^2$$

mit geeigneten Termen a, b, c, d, e , wobei a und b nicht von v und w abhängen dürfen.

(2) Man folgere aus der Darstellung aus (1), dass $x^2 y^3$ in einem beliebigen Punkt (x, y) total differenzierbar ist.

Aufgabe 48.4. Berechne für die Addition

$$+: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und für die Multiplikation

$$\cdot: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

das totale Differential.

Aufgabe 48.5. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \min(x, y).$$

- (1) Skizziere die Funktion.
- (2) Zeige, dass f stetig ist.
- (3) Bestimme für jeden Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2$, ob die Richtungsableitung in diesem Punkt und in diese Richtung existiert.
- (4) Bestimme für jeden Punkt, ob in diesem Punkt die Funktion f total differenzierbar ist.

Aufgabe 48.6. Sei $\varphi: V \rightarrow W$ konstant mit $\varphi(v) = w \in W$ für alle $v \in V$. Zeige, dass φ differenzierbar ist mit totalem Differential 0.

Aufgabe 48.7. Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Es sei $\varphi: G \rightarrow W$ im Punkt $P \in G$ differenzierbar mit dem Differential $(D\varphi)_P$. Zeige, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$(D(a\varphi))_P = a(D\varphi)_P$$

gilt.

Aufgabe 48.8. Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass f im Nullpunkt total differenzierbar ist. Man gebe dabei explizit das totale Differential und die Abweichungsfunktion an.

Aufgabe 48.9. Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass f in jedem Punkt total differenzierbar ist. Man gebe dabei explizit das totale Differential und die Abweichungsfunktion an.

Aufgabe 48.10. Seien V , W_1 und W_2 endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume.

- (1) Seien $L_1: V \rightarrow W_1$ und $L_2: V \rightarrow W_2$ \mathbb{R} -lineare Abbildungen. Zeige, dass die Abbildung

$$L_1 \times L_2: V \longrightarrow W_1 \times W_2, v \longmapsto (L_1(v), L_2(v)),$$

\mathbb{R} -linear ist.

- (2) Seien $f_1: V \rightarrow W_1$ und $f_2: V \rightarrow W_2$ im Punkt $P \in V$ differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass die Abbildung

$$f = (f_1 \times f_2): V \longrightarrow W_1 \times W_2, Q \longmapsto (f_1(Q), f_2(Q)),$$

im Punkt P differenzierbar ist mit dem totalen Differential

$$(Df)_P = (Df_1)_P \times (Df_2)_P.$$

Die folgende Aufgabe verwendet das Konzept Äquivalenzrelation.

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, die die folgenden drei Eigenschaften besitzt (für beliebige $x, y, z \in M$).

- (1) Es ist $x \sim x$ (*reflexiv*).
- (2) Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (*symmetrisch*).
- (3) Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (*transitiv*).

Dabei bedeutet $x \sim y$, dass das Paar (x, y) zu R gehört.

Aufgabe 48.11. Seien V, W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Weiter seien $f, g: G \rightarrow W$ Abbildungen und $P \in G$. Wir nennen f, g im Punkt P *tangential äquivalent*, wenn der Limes

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{(f - g)(P + v)}{\|v\|}$$

existiert und gleich 0 ist.

- (1) Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf der Abbildungsmenge von G nach W gegeben ist.
- (2) Es sei f total differenzierbar. Zeige, dass f zu seiner linearen Approximation tangential äquivalent ist.
- (3) Es seien f und g tangential äquivalent. Zeige, dass in diesem Fall f genau dann in P total differenzierbar ist, wenn dies für g gilt, und dass ihre totalen Differentiale im Punkt P übereinstimmen.

Aufgabe 48.12. Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Zeige, dass die Skalarmultiplikation

$$\varphi: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V, (s, v) \longmapsto sv,$$

in jedem Punkt $P = (s, v)$ total differenzierbar ist mit

$$(D\varphi)_P(t, w) = tv + sw.$$

Aufgabe 48.13.*

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Zeige, dass f stetig ist.
- b) Zeige, dass die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Nullpunkt eine lineare Abbildung ist.
- c) Zeige, dass zu f im Nullpunkt in jede Richtung die Richtungsableitung existiert.
- d) Zeige, dass f im Nullpunkt nicht total differenzierbar ist.

Aufgabe 48.14.*

Bestimme die Richtungsableitung von

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^5$$

im Punkt $(4, -1)$ in Richtung $(-3, 2)$ über das totale Differential von f .

Aufgabe 48.15. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (xy - 2y^3 + 5, x^3 - xy^2 + y),$$

in jedem Punkt.

- b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1, 2)$?
- c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(4, -3)$.
- d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 48.16. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (xy - zy + 2z^2, \sin(x^2yz)),$$

in jedem Punkt.

- b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1, -1, \pi)$?
- c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(2, 0, 5)$.
- d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 48.17. Bestimme das totale Differential der Determinante

$$\det: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, M \longmapsto \det M,$$

für $n = 2, 3$ an der Einheitsmatrix.

Aufgabe 48.18.*

Wir betrachten die Abbildung

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = x^y.$$

- (1) Was ist der Definitionsbereich $G \subseteq \mathbb{R}^2$ dieser Abbildung?
- (2) Berechne die Jacobi-Matrix von φ in jedem Punkt $P \in G$.
- (3) Ist die Funktion total differenzierbar?

Aufgabe 48.19. Bestimme die affin-lineare Approximation zu

$$f(x, y) = 3x^2 - 2x^3$$

im Punkt $(-5, 6)$ im Sinne von Bemerkung 48.12.

48.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 48.20. (5 Punkte)

Untersuche die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{bei } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{bei } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

auf partielle Ableitungen und totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 48.21. (4 Punkte)

Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $\varphi: G \rightarrow W$ eine Abbildung und $L: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) φ ist differenzierbar in P mit dem totalen Differential L .
- (2) Der Limes

$$\lim_{v \rightarrow 0, v \neq 0} \frac{\varphi(P+v) - \varphi(P) - L(v)}{\|v\|}$$

existiert und ist gleich 0.

- (3) Der Limes

$$\lim_{v \rightarrow 0, v \neq 0} \frac{\|\varphi(P+v) - \varphi(P) - L(v)\|}{\|v\|}$$

existiert und ist gleich 0.

Aufgabe 48.22. (4 Punkte)

Seien f_1, \dots, f_n differenzierbare Funktionen in einer Variablen. Bestimme das totale Differential der Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)).$$

Aufgabe 48.23. (5 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x|y|,$$

für jeden Punkt P und jede Richtung v , ob die Richtungsableitung in P in Richtung v existiert und ob die Funktion in P total differenzierbar ist.

Aufgabe 48.24. (4 Punkte)

a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto (x + y^2, xy, \exp x),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(3, 2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(-1, -7)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 48.25. (2 Punkte)

Bestimme die affin-lineare Approximation zu

$$f(x, y, z) = 4xyz^2 - 3z^2 + 9x^2y + 7x^3z$$

im Punkt $(2, 4, -5)$ im Sinne von Bemerkung 48.12.

49. VORLESUNG - DIE KETTENREGEL

49.1. Die Kettenregel.

Die Eleganz des totalen Differentials wird in der folgenden allgemeinen Version der Kettenregel deutlich. Sie besagt, dass bei einer Verknüpfung von differenzierbaren Abbildungen das totale Differential (also die lineare Approximation) gleich der Verknüpfung der einzelnen totalen Differentiale ist. Der Beweis verwendet an einer Stelle, dass das Bild einer abgeschlossenen Kugel unter einer linearen Abbildung L beschränkt ist, d.h. dass es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\|L(v)\| \leq b$$

für alle v mit

$$\|v\| \leq 1.$$

Diese Aussage gilt sogar für jede stetige Abbildung, wir werden sie hier aber nur für eine lineare Abbildung beweisen.

Lemma 49.1. *Es sei $L: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen reellen Vektorräumen V und W . Dann ist das Bild von $B(0, 1)$ beschränkt.*

Beweis. Wir fixieren ein Skalarprodukt auf V und auf W und wählen eine Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n von V . Sei $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ aus $B(0, 1)$. Wegen

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq 1$$

ist

$$|a_i| \leq 1.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\|L(v)\| &= \left\| L\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^n a_i L(v_i) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n |a_i| \|L(v_i)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|L(v_i)\|,
\end{aligned}$$

das heißt, dass die Beschränktheit mit

$$b := \sum_{i=1}^n \|L(v_i)\|$$

gilt. □

Satz 49.2. *Seien V , W und U endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume, $G \subseteq V$ und $D \subseteq W$ offene Mengen, und $\varphi: G \rightarrow W$ und $\psi: D \rightarrow U$ Abbildungen derart, dass $\varphi(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass φ in $P \in G$ und ψ in $\varphi(P) \in D$ total differenzierbar ist. Dann ist $\psi \circ \varphi: G \rightarrow U$ in P differenzierbar mit dem totalen Differential*

$$(D(\psi \circ \varphi))_P = (D\psi)_{\varphi(P)} \circ (D\varphi)_P.$$

Beweis. Wir haben nach Voraussetzung (wobei wir $Q := \varphi(P)$ setzen)

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\|r(v)$$

und

$$\psi(Q + w) = \psi(Q) + M(w) + \|w\|s(w)$$

mit linearen Abbildungen $L: V \rightarrow W$ und $M: W \rightarrow U$, und mit in 0 stetigen Funktionen $r: U(0, \delta) \rightarrow W$ und $s: U(0, \delta') \rightarrow U$, die beide in 0 den Wert 0 annehmen. Damit gilt

$$\begin{aligned}
&(\psi \circ \varphi)(P + v) \\
&= \psi(\varphi(P + v)) \\
&= \psi(\varphi(P) + L(v) + \|v\|r(v)) \\
&= \psi(\varphi(P)) + M(L(v) + \|v\|r(v)) \\
&\quad + \|L(v) + \|v\|r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v)) \\
&= \psi(\varphi(P)) + M(L(v)) + M(\|v\|r(v)) \\
&\quad + \|L(v) + \|v\|r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v)) \\
&= \psi(\varphi(P)) + (M \circ L)(v) + \|v\|M(r(v)) \\
&\quad + \| \|v\|L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + \|v\|r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v)) \\
&= \psi(\varphi(P)) + (M \circ L)(v)
\end{aligned}$$

$$+\|v\| \left(M(r(v)) + \|L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v)) \right).$$

Dabei haben wir in der dritten Gleichung die lineare Approximation für

$$w = L(v) + \|v\|r(v)$$

eingesetzt. Die beiden letzten Gleichungen gelten nur für $v \neq 0$. Der Ausdruck

$$t(v) := M(r(v)) + \|L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v))$$

ist unser Kandidat für die Abweichungsfunktion. Der erste Summand $M(r(v))$ ist in $v = 0$ stetig und hat dort auch den Wert 0. Es genügt also den zweiten Summanden zu betrachten. Der $\|-\|$ -Ausdruck ist in einer Umgebung der Null beschränkt, da L auf der abgeschlossenen Kugel $B(0, 1)$ nach Lemma 49.1 beschränkt ist und da r in 0 stetig ist. Daher hängt die Stetigkeit nur von dem rechten Faktor ab. Aber $L(v) + \|v\|r(v)$ hat für $v \rightarrow 0$ den Grenzwert 0. Damit ist auch $s(L(v) + \|v\|r(v))$ in 0 stetig und hat dort den Grenzwert 0. \square

Korollar 49.3. *Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen, und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g: D \rightarrow \mathbb{R}^k$ seien Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f in $P \in G$ und g in $f(P) \in D$ total differenzierbar ist. Dann ist $h = g \circ f: G \rightarrow U$ in P differenzierbar und zwischen den Jacobi-Matrizen gilt die Beziehung*

$$\text{Jak}(h)_P = \text{Jak}(g \circ f)_P = \text{Jak}(g)_{f(P)} \circ \text{Jak}(f)_P,$$

also ausgeschrieben

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(P)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(P)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(f(P)) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(f(P)) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 49.2 unter Berücksichtigung von Bemerkung 48.10. \square

Bei der vorstehenden Aussage kann man mit Satz 48.11 häufig direkt auf die totale Differenzierbarkeit schließen.

Beispiel 49.4. Wir wollen die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u, v, w) \longmapsto (uv^3w^2, u^2 - v^2w)$$

und

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto (xy - y^2, \cos x, x - y)$$

illustrieren. Diese Abbildungen sind stetig partiell differenzierbar und daher nach Satz 48.11 auch total differenzierbar. Die Jacobi-Matrizen zu diesen Abbildungen (in einem beliebigen Punkt $P = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ bzw. $Q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$) sind

$$\text{Jac}(f)_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial w}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial w}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^3 w^2 & 3uv^2 w^2 & 2uv^3 w \\ 2u & -2vw & -v^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\text{Jac}(g)_Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(Q) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(Q) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(Q) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(Q) \\ \frac{\partial g_3}{\partial x}(Q) & \frac{\partial g_3}{\partial y}(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x - 2y \\ -\sin x & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die zusammengesetzte Abbildung $g \circ f$ ist

$$\begin{aligned} & g(f(u, v, w)) \\ &= \left(uv^3 w^2 (u^2 - v^2 w) - (u^2 - v^2 w)^2, \cos(uv^3 w^2), uv^3 w^2 - u^2 + v^2 w \right) \\ &= \left(u^3 v^3 w^2 - uv^5 w^3 - u^4 - v^4 w^2 + 2u^2 v^2 w, \cos(uv^3 w^2), uv^3 w^2 - u^2 + v^2 w \right), \end{aligned}$$

die zugehörige Jacobi-Matrix in $P = (u, v, w)$ ist

$$\text{Jac}(g \circ f)_P = \begin{pmatrix} 3u^2 v^3 w^2 - v^5 w^3 - 4u^3 + 4uv^2 w & 3u^3 v^2 w^2 - 5uv^4 w^3 - 4v^3 w^2 + 4u^2 v w & 2u^3 v^3 w - 3uv^5 w^2 - 2v^4 w + 2u^2 v^2 \\ -v^3 w^2 \sin(uv^3 w^2) & -3uv^2 w^2 \sin(uv^3 w^2) & -2uv^3 w \sin(uv^3 w^2) \\ v^3 w^2 - 2u & 3uv^2 w^2 + 2vw & 2uv^3 w + v^2 \end{pmatrix}.$$

Die zusammengesetzte lineare Abbildung ist

$$\begin{aligned} & \text{Jak}(g)_{f(P)} \circ \text{Jak}(f)_P \\ &= \text{Jak}(g)_{(uv^3 w^2, u^2 - v^2 w)} \circ \text{Jak}(f)_P \\ &= \begin{pmatrix} u^2 - v^2 w & uv^3 w^2 - 2u^2 + 2v^2 w \\ -\sin(uv^3 w^2) & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} v^3 w^2 & 3uv^2 w^2 & 2uv^3 w \\ 2u & -2vw & -v^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3u^2 v^3 w^2 - v^5 w^3 - 4u^3 + 4uv^2 w & 3u^3 v^2 w^2 - 5uv^4 w^3 - 4v^3 w^2 + 4u^2 v w & 2u^3 v^3 w - 3uv^5 w^2 - 2v^4 w + 2u^2 v^2 \\ -v^3 w^2 \sin(uv^3 w^2) & -3uv^2 w^2 \sin(uv^3 w^2) & -2uv^3 w \sin(uv^3 w^2) \\ v^3 w^2 - 2u & 3uv^2 w^2 + 2vw & 2uv^3 w + v^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung 49.5. Es sei I ein reelles Intervall, V und W seien euklidische Vektorräume und es sei

$$\gamma: I \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Kurve. Es sei

$$L: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. In Lemma 37.11 wurde gezeigt, dass die zusammengesetzte Abbildung

$$L \circ \gamma: I \longrightarrow W, t \longmapsto L(\gamma(t)),$$

(ebenfalls differenzierbar ist) und dass die Beziehung

$$(L \circ \gamma)'(t) = L(\gamma'(t))$$

besteht. Hier erhält man also den Richtungsvektor der zusammengesetzten Kurve, indem man den Richtungsvektor der Kurve in die lineare Abbildung

einsetzt. Dies ist ein Spezialfall der Kettenregel angewendet auf γ und L . Es ist $(DL)_Q = L$ nach Proposition 48.4 und es ist nach Lemma 48.6 $(D\gamma)_t(1) = \gamma'(t)$. Gemäß der Kettenregel ist das totale Differential der zusammengesetzten Kurve $L \circ \gamma$ gleich

$$(DL)_{\gamma(t)} \circ (D\gamma)_t = L \circ (D\gamma)_t$$

und damit ist

$$\begin{aligned} (L \circ \gamma)'(t) &= (D(L \circ \gamma))_t(1) \\ &= ((DL)_{\gamma(t)} \circ (D\gamma)_t)(1) \\ &= L((D\gamma)_t(1)) \\ &= L(\gamma'(t)). \end{aligned}$$

Bemerkung 49.6. Es seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und

$$f: G \longrightarrow W$$

eine in $P \in G$ total differenzierbare Abbildung. Es sei $v \in V$ ein Vektor und

$$\gamma: I \longrightarrow G, t \longmapsto P + tv,$$

die zugehörige affin-lineare Abbildung durch diesen Punkt (dabei sei das reelle Intervall $I = [-a, a]$ so gewählt, dass $\gamma(I) \subseteq G$) liegt. Die zusammengesetzte Abbildung

$$I \longrightarrow W, t \longmapsto f(\gamma(t)),$$

wird zur Definition der Richtungsableitung von f in P in Richtung v verwendet, es ist

$$(D_v f)(P) = (f \circ \gamma)'(0).$$

Das zur Kurve $f \circ \gamma$ gehörige totale Differential in 0 von \mathbb{R} nach W , also $(D(f \circ \gamma))_0$, ist durch $1 \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$ festgelegt. Andererseits ist nach der Kettenregel

$$(D(f \circ \gamma))_0 = (Df)_{\gamma(0)} \circ (D\gamma)_0$$

und somit ist

$$\begin{aligned} (D_v f)(P) &= (f \circ \gamma)'(0) \\ &= (D(f \circ \gamma))_0(1) \\ &= \left((Df)_{\gamma(0)} \circ (D\gamma)_0 \right)(1) \\ &= (Df)_{\gamma(0)}((D\gamma)_0(1)) \\ &= (Df)_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) \\ &= (Df)_P(v). \end{aligned}$$

Dies ergibt einen neuen Beweis für Proposition 48.9.

Das folgende Beispiel illustriert, dass das totale Differential unabhängig von der Wahl einer Basis ist, die partiellen Ableitungen aber nicht.

Beispiel 49.7. Wir betrachten die Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$(x, y, z) \mapsto 2xy^2 + x^2z^3 + z^2$$

gegeben sei. Es ist leicht die partiellen Ableitungen in jedem Punkt zu berechnen, nämlich:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(x,y,z)} = (2y^2 + 2xz^3, 4xy, 3x^2z^2 + 2z).$$

Da diese alle stetig sind, haben wir nach Satz 48.11 das totale Differential in jedem Punkt gefunden.

Nehmen wir nun an, dass wir nur an der Restriktion dieser Funktion auf die Ebene

$$E \subset \mathbb{R}^3, E = \{(x, y, z) \mid 3x + 2y - 5z = 0\}$$

interessiert sind. E ist also der Kern der linearen Abbildung

$$L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 3x + 2y - 5z.$$

Als Kern ist E selbst ein (zweidimensionaler) Vektorraum. Die Einschränkung von f auf die Ebene ergibt also die Abbildung

$$\tilde{f} = f|_E: E \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Abbildung kann man als die Komposition $E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ auffassen und diese ist nach der Kettenregel differenzierbar. Wenn wir die Inklusion von E in \mathbb{R}^3 mit N bezeichnen, so ist das totale Differential der Komposition in einem Punkt $P \in E$ gemäß der Kettenregel gerade die Abbildung

$$\left(D\tilde{f} \right)_P = (Df)_P \circ N: E \rightarrow \mathbb{R}.$$

Daher ergibt es hier Sinn vom totalen Differential zu sprechen.

Es ergibt allerdings keinen Sinn von partiellen Ableitungen der Abbildung $f|_E: E \rightarrow \mathbb{R}$ zu sprechen, da es keine natürliche Basis auf E gibt und daher auch keine natürlichen Koordinaten. Es ist leicht eine Basis von E zu finden und damit Koordinaten, es gibt aber keine „beste Wahl“, und die partiellen Ableitungen sehen in jeder Basis verschieden aus.

Eine Basis von E ist beispielsweise durch $v_1 = (0, 5, 2)$ und $v_2 = (5, 0, 3)$ gegeben, und eine weitere durch $w_1 = (1, 1, 1)$ und $w_2 = (2, -3, 0)$. Mit solchen Basen erhalten wir Identifikationen $\mathbb{R}^2 \rightarrow E$ und somit numerische Beschreibungen der Abbildung $\mathbb{R}^2 \cong E \rightarrow \mathbb{R}$, womit wir die partiellen Ableitungen bezüglich der gewählten Basen berechnen können.

In der ersten Basis ist die Identifikation gegeben durch die Abbildung

$$(s, t) \mapsto sv_1 + tv_2 = s(0, 5, 2) + t(5, 0, 3) = (5t, 5s, 2s + 3t)$$

und dieser Ausdruck wird durch f abgebildet auf

$$\begin{aligned} & 2(5t)(5s)^2 + (5t)^2(2s + 3t)^3 + (2s + 3t)^2 \\ &= 250ts^2 + 25t^2(8s^3 + 36s^2t + 54st^2 + 27t^3) \\ & \quad + 4s^2 + 9t^2 + 12st \end{aligned}$$

$$= 250ts^2 + 200s^3t^2 + 900s^2t^3 + 1350st^4 \\ + 675t^5 + 4s^2 + 9t^2 + 12st.$$

Die partiellen Ableitungen dieser Komposition (nennen wir sie g) bezüglich dieser Basis sind gegeben durch

$$\partial g / \partial s = 500ts + 600s^2t^2 + 1800st^3 + 1350t^4 + 8s + 12t$$

und

$$\partial g / \partial t = 250s^2 + 400s^3t + 2700s^2t^2 + 5400st^3 + 3375t^4 + 18t + 12s.$$

In der zweiten Basis $w_1 = (1, 1, 1)$ und $w_2 = (2, -3, 0)$ ist die Identifikation gegeben durch

$$(r, u) \mapsto rw_1 + uw_2 = r(1, 1, 1) + u(2, -3, 0) = (r + 2u, r - 3u, r)$$

und dieser Ausdruck wird unter f abgebildet auf

$$\begin{aligned} & 2(r + 2u)(r - 3u)^2 + (r + 2u)^2r^3 + r^2 \\ &= 2r^3 + 4r^2u - 12r^2u - 24ru^2 \\ &= 2r^3 - 8r^2u - 6ru^2 + 36u^3 + r^5 + 4r^4u. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen der Komposition (nennen wir sie h) bezüglich dieser Basis sind

$$\partial h / \partial r = 6r^2 - 16ru - 6u^2 + 5r^4 + 16r^3u + 12r^2u^2 + 2r$$

und

$$\partial h / \partial u = -8r^2 - 12ru + 108u^2 + 4r^4 + 8r^3u.$$

Fazit: Koordinaten sind manchmal gut für Berechnungen, manchmal verdunkeln sie aber auch den eigentlichen mathematischen Sachverhalt.

49. ARBEITSBLATT

49.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 49.1. Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für Funktionen in einer Variablen ab.

Aufgabe 49.2. Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für differenzierbare Kurven (für eine differenzierbare Kurve $f: J \rightarrow V$ und eine differenzierbare Umparametrisierung $h: I \rightarrow J$) ab.

Aufgabe 49.3. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Beweise die Produktregel aus der allgemeinen Kettenregel unter Verwendung von Aufgabe 48.4.

Aufgabe 49.4. Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Weiter seien $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}$ zwei in $P \in G$ differenzierbare Funktionen. Wende die Kettenregel und Aufgabe 48.4 auf das Diagramm

$$G \xrightarrow{f, g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{mult}} \mathbb{R}$$

an, um zu zeigen, dass die Gleichung

$$(D(f \cdot g))_P = g(P) \cdot (Df)_P + f(P) \cdot (Dg)_P$$

gilt.

Aufgabe 49.5.*

Bestätige die Kettenregel für $g \circ f$ für die beiden differenzierbaren Abbildungen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3 - t, -t^2),$$

und

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy + x + y.$$

Aufgabe 49.6. Bestätige die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u^2v^2, u + \sin v, v^3),$$

und

$$\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x^2y - z^2, xy^2 + yz \exp x),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ in folgenden Schritten.

- (1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
- (2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{R}^3$ das totale Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
- (3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- (4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ das totale Differential von $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- (5) Berechne das totale Differential von $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 49.7. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^m$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g: D \rightarrow \mathbb{R}^k$ Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f in $P \in G$ und g in $f(P) \in D$ total differenzierbar ist. Zeige

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(P) = \left(\frac{\partial g_j}{\partial y_1}(f(P)), \dots, \frac{\partial g_j}{\partial y_m}(f(P)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 49.8. Es seien

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

und

$$\psi: W \longrightarrow U$$

in $P \in V$ bzw. in $\varphi(P) \in W$ total differenzierbare Abbildungen. Es sei $v \in V$ ein Vektor. Zeige mit der Kettenregel, dass

$$(D_v(\psi \circ \varphi))(P) = (D_{(D\varphi)_P(v)}(\psi))(\varphi(P))$$

gilt.

Aufgabe 49.9. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^m$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g: D \rightarrow \mathbb{R}^k$ Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f und g stetig differenzierbar sind. Zeige, dass auch $g \circ f$ stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 49.10. Man gebe ein Beispiel für partiell differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ derart, dass $g \circ f$ nicht partiell differenzierbar ist.

Aufgabe 49.11. Man gebe ein Beispiel für partiell differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ derart, dass auch $g \circ f$ partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\text{Jak}(g \circ f)_P = \text{Jak}(g)_{f(P)} \circ \text{Jak}(f)_P$$

nicht gilt.

Aufgabe 49.12. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^m$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g: D \rightarrow \mathbb{R}^k$ Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f und g ℓ -fach stetig differenzierbar sind. Zeige, dass auch $g \circ f$ ℓ -fach stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 49.13. Sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xf(y),$$

genau dann im Punkt $(0, 0)$ total differenzierbar ist, wenn f in 0 stetig ist.

Aufgabe 49.14. Seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Zeige, dass φ genau dann stetig differenzierbar ist, wenn φ total differenzierbar ist und wenn die Abbildung

$$G \longrightarrow \text{Hom}(V, W), P \longmapsto (D\varphi)_P,$$

stetig ist.

Aufgabe 49.15. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar im Nullpunkt und $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = 0, \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h_m}{\|h_m\|} = v \in \mathbb{R}^n, f(h_m) = f(h_k) \text{ für alle } m, k \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass v ein Eigenvektor von $(Df)_0$ zum Eigenwert 0 ist.

49.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 49.16. (5 (1+1+1+1+1) Punkte)

Wir wollen die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \longmapsto (uv, u - v, v^2),$$

und

$$\psi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (xyz^2, y \exp(xz)),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ veranschaulichen.

- (1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
- (2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{R}^3$ das totale Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
- (3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- (4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ das totale Differential von $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- (5) Berechne das totale Differential von $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 49.17. (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$$

mit

$$f(u, v) = (u^2, uv, u - v^2),$$

$$g(x, y, z) = (x + y^2 - z, x^2yz),$$

und

$$h(r, s) = (r^2s, s^2).$$

Berechne das totale Differential von $h \circ g \circ f$ in einem beliebigen Punkt $P = (u, v)$ auf vier verschiedene Arten.

Aufgabe 49.18. (3 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Verschiebung ist, also von der Art $P \mapsto P + v$ mit einem festen Vektor $v \in V$, wenn

$$(D\varphi)_P = \text{Id}_V$$

für alle $P \in V$ ist.

Aufgabe 49.19. (4 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto \|f(P)\|,$$

differenzierbar ist und bestimme das totale Differential davon.

Aufgabe 49.20. (4 Punkte)

Seien V und W endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Mengen, $P \in G$ ein Punkt, $\varphi: G \rightarrow W$ und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ in P differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass dann die Produktabbildung

$$f \cdot \varphi: G \longrightarrow W$$

in P differenzierbar ist mit

$$(D(f \cdot \varphi))_P = f(P) \cdot (D\varphi)_P + (Df)_P \cdot \varphi(P).$$

Tipp: Verwende Aufgabe 48.12 und die Kettenregel.

Aufgabe 49.21. (10 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine differenzierbare Kurve

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und eine stetige Funktion,

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die die Richtungsableitung in jede Richtung existiert, derart, dass die Verknüpfung

$$f \circ \varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht differenzierbar ist.

50. VORLESUNG - TAYLOR-POLYNOM

Wir betrachten die Polynomfunktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2x^3 - 5x^2y - 3y^3 - 4x^2 + 6xy + 7x + 8y - 1.$$

Offenbar ist $f(0, 0) = -1$, d.h. der Wert der Funktion ist unmittelbar am konstanten Koeffizienten des Polynoms ablesbar. Ähnliches gilt für die Ableitungen an der Stelle $(0, 0)$: Um beispielsweise $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ auszurechnen, muss man lediglich den Term $7x$ anschauen. Alle anderen Summanden ergeben unter der partiellen Ableitung nach x direkt 0 (wenn x gar nicht vorkommt) oder einen Ausdruck der Form $iax^{i-1}y^j$. Da man darin $x = 0$ und $y = 0$ einsetzt, ergibt sich immer 0, mit der Ausnahme $i = 1$ und $j = 0$. Somit ist $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 7$.

Die höheren Ableitungen sind ebenfalls „direkt“ aus den Koeffizienten ablesbar. Beispielsweise ist

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = 2 \cdot (-4) = -8,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 6,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 2 \cdot (-5) = -10.$$

50.1. Die Taylor-Formel - Vorbereitungen.

Die Taylor-Entwicklung bzw. Taylor-Formel in einer Variablen, die wir im ersten Semester kennengelernt haben (siehe insbesondere Satz 17.2 und Satz 17.2), liefert zu einem Punkt und einer gewünschten Ordnung eine optimale Approximation in diesem Punkt einer (hinreichend oft differenzierbaren) Funktion durch ein Polynom, das Taylor-Polynom. Eine entsprechende Aussage gilt auch in mehreren Variablen. Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen.

Zu einem Monom $x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$ nennt man die Summe

$$|r| := |(r_1, \dots, r_n)| := \sum_{j=1}^n r_j$$

den *Grad* des Monoms. Ein Polynom in n Variablen,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$$

(wobei die Summe endlich ist) lässt sich entlang des Grades der beteiligten Monome anordnen, also

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{d=0}^e \left(\sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n, |r|=d} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right).$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ kann man dies auch als

$$f(x_1, \dots, x_n) = T_k(x_1, \dots, x_n) + R_k(x_1, \dots, x_n)$$

schreiben mit ($x = (x_1, \dots, x_n)$)

$$T_k(x) = \sum_{d=0}^k \left(\sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n, |r|=d} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right)$$

und

$$R_k(x) = \sum_{d=k+1}^e \left(\sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n, |r|=d} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right).$$

Für R_k gilt dabei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|R_k(x)\|}{\|x\|^k} = 0,$$

siehe Aufgabe 50.12. Bei $k = 1$ ist

$$T_1(x) = a_{(0, \dots, 0)} + a_{(1, 0, \dots, 0)} x_1 + \cdots + a_{(0, \dots, 0, 1)} x_n$$

die affin-lineare Approximation von f im Punkt $0 = (0, \dots, 0)$, und dabei gilt für die Abweichung in der linearen Approximation die Beziehung $r(x) = \frac{R_1(x)}{\|x\|}$. Im Allgemeinen liefern die Polynome $T_k(x)$ bessere Approximationen im Nullpunkt als die lineare Approximation, und mit $R_k(x)$ kann man die Abweichung kontrollieren. Entscheidend für uns ist, dass man nicht nur für Polynomfunktionen, sondern generell für hinreichend oft differenzierbare Funktionen f approximierende Polynome finden und die Abweichung gut kontrollieren kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Formel für Funktionen in mehreren Variablen*.

Zu einem Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und einem Tupel $r = (r_1, \dots, r_n)$ aus natürlichen Zahlen setzt man abkürzend

$$x^r := x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}.$$

Entsprechend schreibt man für eine Polynomfunktion abkürzend

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} = \sum_{r \in \mathbb{N}^n} a_r x^r.$$

Die gleiche Abkürzungsphilosophie übernimmt man für Richtungsableitungen. Wenn V ein \mathbb{R} -Vektorraum ist mit einer Basis w_1, \dots, w_n , so setzt man $D_i := D_{w_i}$, und für $r = (r_1, \dots, r_n)$ setzt man

$$D^r := D_1^{r_1} \circ D_2^{r_2} \circ \cdots \circ D_n^{r_n}.$$

Diese Bezeichnung verwendet man insbesondere im \mathbb{R}^n , versehen mit der Standardbasis und den partiellen Ableitungen. Man beachte, dass man aufgrund des Satzes von Schwarz unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen sämtliche Reihenfolgen von Richtungsableitungen in dieser Weise ausdrücken kann. Des weiteren definieren wir für ein Tupel $r = (r_1, \dots, r_n)$ die *Fakultät* durch

$$r! := r_1! \cdots r_n!$$

und bei $\sum_{j=1}^n r_j = k$ die *Multinomialkoeffizienten* (oder *Polynomialkoeffizienten*) durch

$$\binom{k}{r} := \frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}.$$

Bevor wir die Taylor-Formel beweisen, die das lokale Verhalten einer Funktion in einer „kleinen“ offenen Ballumgebung eines Punktes beschreibt, wenden wir uns dem lokalen Verhalten in dem Punkt längs einer fixierten Richtung zu, wofür wir die Taylor-Formel in einer Variablen zur Verfügung haben. Zu einer Funktion ($G \subseteq V$, V euklidischer Vektorraum)

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist die Differenzierbarkeit im Punkt $P \in G$ in Richtung $v \in V$ äquivalent zur Differenzierbarkeit der Funktion

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

für $t = 0$, wobei I ein geeignetes reelles Intervall ist. Wir werden zunächst zeigen, dass eine entsprechende Beziehung auch für höhere Ableitungen gilt. D.h. die höheren Ableitungen von h können als eine Kombination der höheren partiellen Ableitungen auf der durch $P + \mathbb{R}v$ gegebenen Geraden ausgerechnet werden.

Satz 50.1. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine k -mal stetig differenzierbare Funktion, $P \in G$ ein Punkt und $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ eine fixierte Richtung. Es sei

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

wobei I ein offenes Intervall um 0 sei mit $P + tv \in G$ für alle $t \in I$. Dann ist h ebenfalls k -mal stetig differenzierbar, und es gilt

$$h^{(k)}(t) = \sum_{|r|=k} \frac{k!}{r!} D^r f(P + tv) \cdot v^r$$

für alle $t \in I$.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. \square

Definition 50.2. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge,

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine k -mal stetig-differenzierbare Funktion und $P \in G$. Dann heißt

$$\sum_{r=(r_1, \dots, r_n), |r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r$$

das *Taylor-Polynom vom Grad*¹⁹ $\leq k$ zu f in P .

Es liegt also ein Polynom in den (verschobenen) Variablen v_1, \dots, v_n vor. Der Punkt P heißt *Entwicklungspunkt*. Wenn P der Nullpunkt ist, so schreibt man in der Regel x_1, \dots, x_n (oder große X_i) statt v_1, \dots, v_n . Dies ist im Normalfall unproblematisch, da man ja in die partiellen Ableitungen schon die Koordinaten eingesetzt hat. Wenn $P = (a_1, \dots, a_n)$ ist, so schreibt man meistens $x_i - a_i$ statt v_i , wobei die x_i die Standardkoordinaten des \mathbb{R}^n bezeichnen. Man spricht auch vom *Taylor-Polynom der Ordnung k* oder einfach vom k -ten Taylor-Polynom.

Das 0-te Taylor-Polynom ist das konstante Polynom, das durch den Funktionswert $f(P)$ gegeben ist, das 1-te Taylor-Polynom ist die lineare Approximation von f in P und das 2-te Taylor-Polynom ist die *quadratische Approximation* von f in P .

Bemerkung 50.3. Ein Polynom f vom Grad d stimmt mit seinem Taylor-Polynom vom Grad $k \geq d$ im Nullpunkt $0 = (0, \dots, 0)$ überein. Wegen der Additivität der Richtungsableitungen muss man dies nur für $f = ax_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ überprüfen. Es ist aber

$$D^r f(0) = D_1^{r_1} \cdots D_n^{r_n} f(0) = (r_1!) \cdots (r_n!) a = r! a$$

und

$$D^s f(0) = 0$$

für jedes n -Tupel $s = (s_1, \dots, s_n) \neq r$, siehe Aufgabe 50.2.

Wenn man zu einem Polynom f die Taylor-Polynome in einem Punkt

$$P = (a_1, \dots, a_n)$$

¹⁹Die etwas sperrige Formulierung „vom Grad $\leq k$ “ ist dem Umstand geschuldet, dass die k -ten Ableitungen alle 0 sein können. In diesem Fall hat das Taylor-Polynom einen Grad $< k$, enthält aber alle Informationen bis zum Grad k .

berechnen möchte, so kann man (neben der Berechnung der Ableitungen) auch folgendermaßen vorgehen: Man schreibt das Polynom f in den Variablen $y_i = x_i - a_i$. Dazu ersetzt man in f die Variablen x_i durch

$$x_i = x_i - a_i + a_i = y_i + a_i$$

und rechnet dies aus, bis ein Polynom in y_i dasteht. Aus diesem Polynom sind die Taylor-Polynome im Entwicklungspunkt P direkt ablesbar.

Beispiel 50.4. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto e^y \sin x - 3xy,$$

und wollen die Taylor-Polynome bis zur Ordnung 3 dazu im Nullpunkt berechnen. Das Taylor-Polynom der Ordnung 0 ist das konstante Nullpolynom, da $f(0, 0) = 0$ ist. Für das Taylor-Polynom der Ordnung 1 müssen wir die beiden partiellen Ableitungen ausrechnen. Diese sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \cos x - 3y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \sin x - 3x$$

mit den Werten 1 und 0. Daher ist x die lineare Approximation zu f , also das Taylor-Polynom der Ordnung 1. Für das Taylor-Polynom der Ordnung 2 berechnen wir die zweiten Ableitungen, diese sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= -e^y \sin x, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^y \cos x - 3 \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \sin x.$$

Die Werte dieser zweiten partiellen Ableitungen im Nullpunkt sind der Reihe nach $0, -2, 0$, sodass das zweite Taylor-Polynom (also die quadratische Approximation) gleich

$$x - 2xy$$

ist. Für das Taylor-Polynom der Ordnung 3 berechnen wir die dritten Ableitungen, diese sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= -e^y \cos x, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= -e^y \sin x, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^y \cos x, \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \sin x.$$

Die Werte dieser dritten partiellen Ableitungen im Nullpunkt sind $-1, 0, 1, 0$, sodass (wegen $(3, 0)! = 6$ und $(1, 2)! = 2$) das dritte Taylor-Polynom gleich

$$x - 2xy - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}xy^2$$

ist.

Satz 50.5. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(k + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion, $P \in G$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^n$ derart, dass die Strecke von P nach $P + v$ ganz in G liegt. Dann gibt es ein $c \in [0, 1]$ mit

$$f(P + v) = \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k+1} \frac{1}{r!} D^r f(P + cv) \cdot v^r.$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. \square

50.2. Die Taylor-Formel.

Satz 50.6. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine k -mal stetig differenzierbare Funktion, $P \in G$ ein Punkt und $\epsilon > 0$ derart, dass $U(P, \epsilon) \subseteq G$ ist. Dann gilt für alle v mit $P + v \in U(P, \epsilon)$ die Beziehung

$$f(P + v) = \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + R_k(v),$$

wobei

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|R_k(v)\|}{\|v\|^k} = 0$$

ist.

Beweis. Nach Satz 50.5 gibt es zu jedem $v \in U(0, \epsilon)$ ein (von v abhängiges) $c \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} f(P + v) &= \sum_{|r| \leq k-1} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} D^r f(P + cv) \cdot v^r \\ &= \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} (D^r f(P + cv) - D^r f(P)) v^r. \end{aligned}$$

Die rechte Summe ist also die Abweichungsfunktion R_k , die wir abschätzen müssen. Wegen

$$\|R_k(v)\| \leq \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\| \cdot \|v^r\|$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\| \cdot |v_1^{r_1}| \cdots |v_n^{r_n}| \\
&\leq \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\| \cdot \|v\|^{r_1} \cdots \|v\|^{r_n} \\
&= \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\| \cdot \|v\|^k
\end{aligned}$$

ist

$$\frac{\|R_k(v)\|}{\|v\|^k} \leq \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\|.$$

Da nach Voraussetzung die k -ten Richtungsableitungen stetig sind, existiert für jede einzelne Funktion $D^r f(P + cv) - D^r f(P)$ der Limes für $v \rightarrow 0$ und ist gleich 0. Daher gilt dies auch für die Summe rechts und damit auch für den Ausdruck links. \square

50. ARBEITSBLATT

50.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 50.1. Es sei $X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}$ ein Monom und es sei $D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n}$ eine Hintereinanderschaltung von partiellen Ableitungen, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

(1) Zeige

$$(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}) = 0,$$

falls $s_j > r_j$ für ein j ist.

(2) Zeige

$$(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}) = \frac{r_1! \cdots r_n!}{(r_1 - s_1)! \cdots (r_n - s_n)!} X_1^{r_1 - s_1} \cdots X_n^{r_n - s_n},$$

falls $s_j \leq r_j$ für alle j ist.

Aufgabe 50.2. Es sei $X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}$ ein Monom und es sei $D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n}$ eine Hintereinanderschaltung von partiellen Ableitungen, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

(1) Zeige

$$(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n})(0, \dots, 0) = 0,$$

falls $s_j \neq r_j$ für ein j ist.

(2) Zeige

$$(D_1^{r_1} \cdots D_n^{r_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n})(0, \dots, 0) = r_1! \cdots r_n!.$$

Aufgabe 50.3. Bestätige Satz 50.1 für $f(x, y) = x^a y^b$ in $(0, 0)$ und $v = (2, 3)$ bis zur dritten Ableitung.

Aufgabe 50.4. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y \cdot \sin x,$$

im Nullpunkt $(0, 0)$.

Aufgabe 50.5.*

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = e^{x-y^2},$$

im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe 50.6.*

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = e^x y z^2 - xy,$$

im Punkt $(1, 0, -1)$.

Aufgabe 50.7.*

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = e^{\sin x - \cos y},$$

im Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 50.8. Notiere das Taylor-Polynom für eine (hinreichend oft differenzierbare) Funktion in 2 oder 3 Variablen für die Grade $k = 1, 2, 3$.

Aufgabe 50.9.*

Bestimme das Taylor-Polynom vierter Ordnung der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = x \sin y - e^{xy},$$

im Nullpunkt.

Aufgabe 50.10. Es sei

$$f(x, y) = x^2 y - 3xy + 5y^2 + 4x.$$

Berechne das Taylor-Polynom der Ordnung 3 im Punkt $P = (1, -2)$ algebraisch (d.h. man drücke das Polynom in den neuen Variablen $u = x-1, v = y+2$ aus und lese daraus das Taylor-Polynom ab) und über Ableitungen.

Aufgabe 50.11. Es sei f ein Polynom in n Variablen vom Grad $\leq k$. Zeige, dass f mit dem Taylor-Polynom vom Grad $\leq k$ von f im Nullpunkt übereinstimmt.

Aufgabe 50.12. Es sei $x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ ein Monom vom Grad $|r| = \sum_{j=1}^n r_j > k$. Zeige

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}}{\|x\|^k} = 0.$$

Aufgabe 50.13. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige durch ein Beispiel, dass das Taylor-Polynom zum Produkt fg im Punkt P vom Grad ≤ 2 nicht das Produkt der beiden Taylor-Polynome von f und g in P vom Grad ≤ 1 sein muss.

Aufgabe 50.14. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $0 \in G$ und

$$R: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, falls für eine Konstante $c > 0$ und alle v in einer offenen Umgebung von 0 die Abschätzung $\|R(v)\| \leq c\|v\|^{k+1}$ gilt, dass dann $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|R(v)\|}{\|v\|^k} = 0$ folgt.

Zeige umgekehrt durch ein Gegenbeispiel, dass aus $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|R(v)\|}{\|v\|^k} = 0$ im Allgemeinen nicht die Abschätzung $\|R(v)\| \leq c\|v\|^{k+1}$ folgt.

50.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 50.15. (5 Punkte)

Bestätige Satz 50.1 anhand des folgenden Beispiels.

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 y^3 - \cos(x - y^2),$$

$$P = (1, -3), v = (5, -2), k = 2.$$

Aufgabe 50.16. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto z \cdot \exp(xy),$$

im Nullpunkt $(0, 0, 0)$.

Aufgabe 50.17. (4 Punkte)

Es sei

$$f(x, y) = -2xy^3 - 5x^2y^2 + 4xy^2 - 7y + 3.$$

Berechne das Taylor-Polynom der Ordnung 3 im Punkt $P = (-3, 4)$ algebraisch (d.h. man drücke das Polynom in den neuen Variablen $u = x+3, v = y-4$ aus und lese daraus das Taylor-Polynom ab) und über Ableitungen.

Aufgabe 50.18. (5 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei k -mal stetig differenzierbare Funktionen mit den Taylor-Polynomen $T_k(f)$ und $T_k(g)$ in P vom Grad $\leq k$. Zeige, dass das Produkt fg ebenfalls k -mal stetig differenzierbar ist, und dass für das Taylor-Polynom $T_k(fg)$ von fg in P vom Grad $\leq k$ die Beziehung

$$T_k(fg) = (T_k(f) \cdot T_k(g))_{\leq k}$$

besteht, wobei der Subskript $\leq k$ bedeutet, dass das Polynom bis zum Grad k genommen wird.

Aufgabe 50.19. (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $P \in G$ ein Punkt und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es maximal ein Polynom $p(x_1, \dots, x_n)$ vom Grad $\leq k$ mit der Eigenschaft geben kann, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(x) - p(x)\|}{\|x\|^k} = 0$$

gilt.

51. VORLESUNG - LOKALE EXTREMA

51.1. **Extrema.**

Zu einer reellwertigen Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ interessieren wir uns, wie schon bei einem eindimensionalen Definitionsbereich, für die Extrema, also Maxima und Minima, der Funktion, und inwiefern man dies anhand der (höheren) Ableitungen (falls diese existieren) erkennen kann. Wir verallgemeinern zuerst die relevanten Definitionen auf die Situation, wo der Definitionsbereich ein beliebiger metrischer Raum ist.

Definition 51.1. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in M$ ein *lokales Maximum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in M$ mit $d(x, x') \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \geq f(x')$$

gilt. Man sagt, dass f in $x \in M$ ein *lokales Minimum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in M$ mit $d(x, x') \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \leq f(x')$$

gilt.

Definition 51.2. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in M$ ein *isoliertes lokales Maximum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in M$ mit $d(x, x') \leq \epsilon$ und $x' \neq x$ die Abschätzung

$$f(x) > f(x')$$

gilt. Man sagt, dass f in $x \in M$ ein *isoliertes lokales Minimum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in M$ mit $d(x, x') \leq \epsilon$ und $x' \neq x$ die Abschätzung

$$f(x) < f(x')$$

gilt.

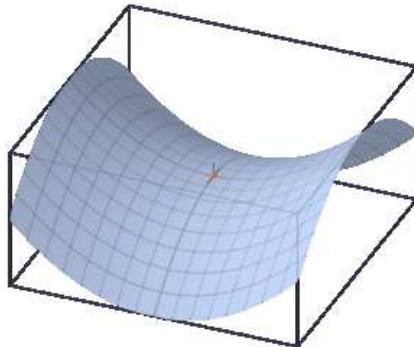
Ein *globales Maximum* liegt in $x \in M$ vor, wenn $f(x) \geq f(x')$ für alle $x' \in M$ ist.

Beispiel 51.3. Die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2,$$

hat in $P = (0, 0)$ den Wert 0 und überall sonst positive Werte, daher liegt in P ein (isoliertes) globales Minimum vor.

Wenn die Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Minimum im Punkt $P \in M$ besitzt, so gilt dies auch für die Einschränkung von f auf jede Teilmenge $N \subseteq M$, die P enthält. Beispielsweise muss ein (lokales) Minimum einer Funktion der Ebene auch auf jeder Geraden durch diesen Punkt ein (lokales) Minimum sein.



Dies heißt umgekehrt, dass wenn eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Geraden L_1 durch P ein isoliertes lokales Maximum und auf einer anderen Geraden L_2 ein isoliertes lokales Minimum besitzt, dass dann kein lokales Extremum vorliegen kann. Solche Punkte nennt man *Sattelpunkt* oder *Passpunkt*, das Standardbeispiel ist das folgende.

Beispiel 51.4. Wir betrachten das Verhalten der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2.$$

in $P = (0, 0)$. Die Einschränkung dieser Funktion auf die durch $y = 0$ gegebene Gerade (also auf der x -Achse) ist die Funktion $x \mapsto x^2$, die in P ein (isoliertes) globales Minimum besitzt. Die Einschränkung dieser Funktion auf die durch $x = 0$ gegebene Gerade (also auf der y -Achse) ist die Funktion $y \mapsto -y^2$, die in P ein (isoliertes) globales Maximum besitzt. Daher kann f in P kein Extremum besitzen. Auf den durch $y = x$ und $y = -x$ gegebenen Geraden ist die Funktion die Nullfunktion.

Das folgende Beispiel zeigt, dass zu einer Funktion die Einschränkung auf jede Gerade durch einen Punkt dort ein lokales Minimum haben kann, ohne dass die Funktion dort ein lokales Minimum hat.

Beispiel 51.5. Wir betrachten im \mathbb{R}^2 die beiden Kreise K_1 und K_2 , wobei K_1 den Mittelpunkt $(0, 1)$ und Radius 1 und K_2 den Mittelpunkt $(0, 2)$ und Radius 2 habe. K_1 liegt innerhalb von K_2 , und die beiden Kreise berühren sich in $P = (0, 0)$. Durch diese beiden Kreise wird die Ebene (neben den zwei Kreislinien selbst) in drei offene Gebiete aufgeteilt: Das Innere des Kreises K_1 ($= A$), die große offene Kreisscheibe ohne die kleine abgeschlossene Kreisscheibe ($= B$) und das Äußere von K_2 ($= C$). Der innere Kreis K_1 wird als Nullstelle der Funktion

$$f_1(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 - 1$$

beschrieben. Im Innern von K_1 ist diese Funktion negativ, auf K_1 hat sie den Wert 0 und außerhalb davon hat sie positive Werte. Entsprechendes gilt für K_2 und die Funktion $f_2(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 - 4$. Wir setzen

$$f(x, y) := f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + (y-1)^2 - 1) \cdot (x^2 + (y-2)^2 - 4) \\
&= (x^2 + y^2 - 2y) \cdot (x^2 + y^2 - 4y) \\
&= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6y^3 - 6x^2y + 8y^2.
\end{aligned}$$

Diese Funktion nimmt auf den beiden Kreisen den Wert 0 an, sie ist auf A positiv, auf B negativ und auf C wieder positiv.

Die Funktion f besitzt in P kein lokales Minimum, da sie dort den Wert 0 besitzt und da jede beliebig kleine Ballumgebung $U(P, \epsilon)$ den Bereich B trifft, wo f negative Werte besitzt. Die Einschränkung der Funktion auf jede Gerade durch den Nullpunkt besitzt aber dort ein lokales Minimum. Sei dazu G eine solche Gerade. Wenn G die x -Achse ist, so verläuft diese Gerade (bis auf P selbst) in C , wo f nur positive Werte annimmt, so dass in P ein (sogar globales) Minimum vorliegt. Sei also G eine von der x -Achse verschiedene Gerade durch P . Die eine Hälfte der Geraden verläuft ganz in C , wo die Funktion positiv ist. Die andere Hälfte verläuft, ausgehend von P , zuerst in A , dann in B und schließlich wieder in C . Da die Funktion auf A positiv ist, kann man ein Teilintervall $[-\delta, \delta]$ der Geraden derart wählen, dass dieses Teilstück (abgesehen von P) nur in A und C verläuft. Auf diesem Teilintervall nimmt die Funktion in P den Wert 0 und sonst überall positive Werte an. Daher besitzt die eingeschränkte Funktion ein lokales Minimum. Das dabei zu wählende δ hängt natürlich wesentlich von der Steigung der Geraden ab, es gibt kein gemeinsames δ für alle Geraden.

51.2. Der Gradient.

Wenn eine Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, so ist das totale Differential in einem Punkt eine lineare Abbildung von V nach \mathbb{R} , also eine Linearform.

Wenn $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, so bilden die partiellen Ableitungen von

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $P \in G$ eine Matrix mit einer einzigen Zeile, die bei stetigen partiellen Ableitungen nach Satz 48.11 das totale Differential repräsentiert. Eine solche Matrix kann man aber ebenso auch als ein n -Tupel in \mathbb{R} und damit als einen Vektor in \mathbb{R}^n auffassen. Vergleiche Lemma 34.19.

Definition 51.6. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ offen und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in $P \in G$ differenzierbare Funktion. Dann nennt man den eindeutig bestimmten Vektor $w \in V$ mit

$$(Df)_P(v) = \langle w, v \rangle$$

für alle $v \in V$ den *Gradienten* von f in P . Er wird mit

$$\text{Grad } f(P)$$

bezeichnet.

Man beachte, dass wir durchgehend die endlichdimensionalen Vektorräume mit einem Skalarprodukt versehen, um topologische Grundbegriffe wie Konvergenz und Stetigkeit zur Verfügung zu haben, dass diese Begriffe aber nicht von dem gewählten Skalarprodukt abhängen. Dem entgegen hängt aber der Gradient von dem gewählten Skalarprodukt ab, was schon für den Gradienten zu einer Linearform gilt, siehe Aufgabe 34.25.

Bei $V = \mathbb{R}^n$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, ist der Gradient einfach gleich

$$\text{Grad } f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 51.7. Zu einer differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich der Gradient (bezüglich des Standardskalarproduktes) einfach durch partielles Differenzieren berechnen. Es wäre aber eine künstliche Einschränkung, nur diese Situation zu betrachten. Um dies zu illustrieren sei beispielsweise

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion und $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene, die etwa als Lösungsmenge der linearen Gleichung $5x - 4y + 9z = 0$ gegeben sei. Dann induziert das Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^3 durch Einschränkung ein Skalarprodukt auf E . Diese Ebene ist zwar isomorph zu \mathbb{R}^2 , es ergibt aber keinen Sinn, das eingeschränkte Skalarprodukt als Standardskalarprodukt anzusprechen. Der Gradient G zu f in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ lässt sich direkt mit den partiellen Ableitungen zu den drei Raumkoordinaten berechnen. Bei $P \in E$ wird im Allgemeinen der Gradient *nicht* auf E liegen. Die eingeschränkte Funktion

$$f|_E: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist aber ebenfalls differenzierbar und besitzt daher einen Gradienten \tilde{G} , der auf E liegt, und dieser lässt sich nicht über partielle Ableitungen berechnen, da es auf E keine Standardbasis gibt. Übrigens ist \tilde{G} die orthogonale Projektion von G auf E .

Satz 51.8. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, sei $G \subseteq V$ offen und sei

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in $P \in G$ differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Für jeden Vektor $v \in V$ ist

$$|(Df)_P(v)| \leq \|v\| \cdot \|\text{Grad } f(P)\|.$$

- (2) Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn v linear abhängig zum Gradienten ist.

- (3) Sei $\text{Grad } f(P) \neq 0$. Unter allen Vektoren $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ ist die Richtungsableitung in Richtung des normierten Gradienten maximal, und zwar gleich der Norm des Gradienten.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. \square

Der Gradient gibt demnach die Richtung an, in die die Funktion den steilsten Anstieg hat. In die entgegengesetzte Richtung liegt entsprechend der steilste Abstieg vor.

51.3. Lokale Extrema von Funktionen in mehreren Variablen.

Wir wollen mit den Mitteln der Differentialrechnung Kriterien erarbeiten, in welchen Punkten eine Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum annimmt. Wenn man sich den Graphen einer solchen Funktion als ein Gebirge über der Grundmenge G vorstellt, so geht es also um die Gipfel und die Senken des Gebirges. Der folgende Satz liefert ein notwendiges Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums, das das entsprechende Kriterium (Satz 15.3) in einer Variablen verallgemeinert.

Satz 51.9. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Es sei

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt $P \in G$ ein lokales Extremum besitzt. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Wenn f in P in Richtung $v \in V$ differenzierbar ist, so ist

$$(D_v f)(P) = 0.$$

- (2) Wenn f in P total differenzierbar ist, so verschwindet das totale Differential, also

$$(Df)_P = 0.$$

Beweis. (1) Zu $v \in V$ betrachten wir die Funktion

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

wobei I ein geeignetes reelles Intervall ist. Da die Funktion f in P ein lokales Extremum besitzt, besitzt die Funktion h in $t = 0$ ebenfalls ein lokales Extremum. Nach Voraussetzung ist h differenzierbar und nach Satz 15.3 ist $h'(0) = 0$. Diese Ableitung stimmt aber mit der Richtungsableitung überein, also ist

$$(D_v f)(P) = h'(0) = 0.$$

- (2) folgt aus (1) aufgrund von Proposition 48.9. \square

Ein lokales Extremum kann also nur in einem sogenannten kritischen Punkt einer Funktion auftreten.

Definition 51.10. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann heißt $P \in G$ ein *kritischer Punkt* von f (oder ein *stationärer Punkt*), wenn

$$(Df)_P = 0$$

ist. Andernfalls spricht man von einem *regulären Punkt*.

Bei einer differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist P genau dann ein kritischer Punkt, wenn sämtliche partiellen Ableitungen von f in P gleich 0 sind.

51.4. Die Hesse-Form.

Wir sind natürlich auch an hinreichenden Kriterien für das Vorliegen von lokalen Extrema interessiert. Wie schon im eindimensionalen Fall muss man sich die zweiten Ableitungen anschauen, wobei die Situation natürlich dadurch wesentlich verkompliziert wird, dass es zu je zwei Richtungsvektoren v und w eine zweite Richtungsableitung $D_{vw} = D_v D_w$ gibt. Die zweite Richtungsableitung wird dadurch handhabbar, dass man sie in die sogenannte Hesse-Form bzw. Hesse-Matrix zusammenfasst.

Definition 51.11. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zu $P \in G$ heißt die Abbildung

$$\text{Hess}_P f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto D_u D_v f(P),$$

die *Hesse-Form* im Punkt $P \in G$.

Definition 51.12. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei eine Basis v_i , $i = 1, \dots, n$, von V gegeben mit den zugehörigen Richtungsableitungen $D_i := D_{v_i}$, $i = 1, \dots, n$. Zu $P \in G$ heißt dann die Matrix

$$\begin{pmatrix} D_1 D_1 f(P) & \cdots & D_1 D_n f(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(P) & \cdots & D_n D_n f(P) \end{pmatrix}$$

die *Hesse-Matrix* zu f im Punkt P bezüglich der gegebenen Basis.

Die Hesse-Form zu einem festen Punkt P ordnet also zwei Vektoren eine reelle Zahl zu, und sie ist durch ihre Hesse-Matrix vollständig beschrieben. Damit ordnet sie sich in das Konzept von symmetrischen Bilinearformen ein.

51. ARBEITSBLATT

51.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 51.1. Es sei (M, d) ein metrischer Raum, $P \in M$ ein Punkt und es sei

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng wachsende Funktion. Zeige, dass f in P genau dann ein lokales Maximum besitzt, wenn $h \circ f$ ein lokales Maximum in P besitzt.

Aufgabe 51.2. Es seien L und M metrische Räume und es sei

$$\varphi: L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung. Es sei

$$\varphi(P) = Q$$

und es sei

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt $Q \in M$ ein lokales Extremum besitze. Zeige, dass

$$f \circ \varphi$$

in P ein lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 51.3. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

Aufgabe 51.4.*

Es sei f ein Polynom in zwei Variablen der Bauart

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{(r_1, r_2) \in \mathbb{N}^2, r_1 + r_2 \geq 3} a_{(r_1, r_2)} x^{r_1} y^{r_2}.$$

Zeige ohne Differentialrechnung, dass f im Nullpunkt ein isoliertes lokales Minimum besitzt. Bestimme in Abhängigkeit der Koeffizienten $a_{(r_1, r_2)}$ ein $\epsilon >$

0 derart, dass die Einschränkung von f auf $U(0, \epsilon)$ außerhalb des Nullpunktes echt positiv ist.

Aufgabe 51.5. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2y - z^3xe^{xyz},$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 51.6. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto \frac{xyz - z^2}{\ln(xy) + z^2},$$

in jedem Punkt $P \in G$ mit $G = \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}$

Aufgabe 51.7. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass f und $(Df)_P$ im Punkt P den gleichen Gradienten besitzen.

Aufgabe 51.8. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass ein Vektor $v \in V$ genau dann zum Kern von $(Df)_P$ gehört, wenn er orthogonal zum Gradienten $\text{Grad } f(P)$ ist.

Aufgabe 51.9. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Aufgabe 51.10.*

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^2 - x.$$

Aufgabe 51.11. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y - y^2 + x.$$

51.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 51.12. (4 Punkte)

Berechne den Anstieg der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y - x + y^3,$$

im Punkt $P = (1, 1)$ in Richtung des Winkels $\alpha \in [0, 2\pi]$. Für welchen Winkel ist der Anstieg maximal?

Aufgabe 51.13. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x + \sin(y) - xz.$$

- (1) Bestimme den Gradienten G von f im Punkt $P = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle -, - \rangle$.
- (2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 2x - y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $g = f|_E$ die Einschränkung von f auf E . Bestimme den Gradienten \tilde{G} von g bezüglich der Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E .

- (3) Zeige, dass \tilde{G} die orthogonale Projektion von G auf E ist.

Aufgabe 51.14. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^3 - xy + \sin y.$$

Aufgabe 51.15. (5 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte zur Funktion

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6y^3 - 6x^2y + 8y^2$$

aus Beispiel 51.5.

52. VORLESUNG - KRITERIEN FÜR EXTREMA

52.1. Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Wir kommen jetzt zu hinreichenden Kriterien für die Existenz von lokalen Extrema einer Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R},$$

die auf Eigenschaften der zweiten Richtungsableitungen, genauer der Hesse-Form, beruhen und die entsprechenden Kriterien in einer Variablen verallgemeinern. Zunächst brauchen wir ein Lemma, das beschreibt, wie die Definitheit (oder der „Definitheitstyp“) der Hesse-Form vom Punkt abhängt.

Lemma 52.1. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in G$ ein Punkt, in dem die Hesse-Form $\text{Hess}_P f$ positiv (negativ) definit sei. Dann gibt es eine offene Umgebung U , $P \in U \subseteq G$, derart, dass die Hesse-Form $\text{Hess}_Q f$ in jedem Punkt $Q \in U$ positiv (negativ) definit ist.

Beweis. Sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V , und sei $H(Q)$ die Gramsche Matrix zur Hesse-Form $\text{Hess}_Q f$ im Punkt $Q \in G$ bezüglich dieser Basis. Aufgrund der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen hängt $H(Q)$ stetig von Q ab. Daher hängen auch die Determinanten der quadratischen Untermatrizen von $H(Q)$ stetig von Q ab. Die Determinanten

$$D_k(P) = \det((H(P)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$$

sind nach Korollar 44.13 alle von 0 verschieden. Daher gibt es eine offene Umgebung U , $P \in U \subseteq G$, derart, dass für alle $Q \in U$ die Determinanten

$$D_k(Q) = \det((H(Q)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$$

das gleiche Vorzeichen haben wie $D_k(P)$. Da diese Vorzeichen nach Korollar 44.13 über die Definitheit entscheiden, folgt die Behauptung. \square

Satz 52.2. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in G$ mit $(Df)_P = 0$. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) *Wenn $\text{Hess}_P f$ negativ definit ist, so besitzt f ein isoliertes lokales Maximum in P .*
- (2) *Wenn $\text{Hess}_P f$ positiv definit ist, so besitzt f ein isoliertes lokales Minimum in P .*
- (3) *Wenn $\text{Hess}_P f$ indefinit ist, so besitzt f in P weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.*

Beweis. (1). Aufgrund von Lemma 52.1 gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass die Hesse-Form $\text{Hess}_Q f$ für alle $Q \in U(P, \delta)$ negativ definit ist. Für alle Vektoren $v \in V$, $v \in U(0, \delta)$, gibt es nach Satz 50.5 ein $c = c(v) \in [0, 1]$ mit

$$f(P + v) = f(P) + \sum_{|r|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P + cv) \cdot v^r = f(P) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{P+cv} f(v, v),$$

wobei die erste Formulierung sich auf eine fixierte Basis bezieht und wobei die zweite Identität auf Aufgabe 52.15 beruht. Da die Hesse-Form negativ definit ist, steht rechts für $v \neq 0$ eine Zahl, die echt kleiner als $f(P)$ ist. Daher liegt ein isoliertes lokales Maximum vor. (2) wird wie (1) bewiesen oder durch betrachten von $-f$ darauf zurückgeführt. (3). Sei $\text{Hess}_P f$ indefinit. Dann gibt es Vektoren v und w mit

$$\text{Hess}_P f(v, v) > 0 \text{ und } \text{Hess}_P f(w, w) < 0.$$

Wegen der stetigen Abhängigkeit der Hesse-Form gelten diese Abschätzungen auch für $\text{Hess}_Q f$ für Q aus einer offenen Umgebung von P (mit den gleichen Vektoren v und w). Wir können durch Skalierung von v und w annehmen, dass $P + v$ und $P + w$ zu dieser Umgebung gehören. Wie im Beweis zu Teil (1) gilt daher (v und w sind nicht 0)

$$f(P + v) = f(P) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{P+cv} f(v, v) > f(P)$$

und

$$f(P + w) = f(P) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{P+dw} f(w, w) < f(P)$$

mit $c, d \in [0, 1]$. Also kann in P kein lokales Extremum vorliegen. \square

Beispiel 52.3. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + 3x^2 - 2xy - y^2 + y^3.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 6x - 2y \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 2y + 3y^2.$$

Zur Berechnung der kritischen Punkte dieser Funktion eliminieren wir x und erhalten die Bedingung

$$9y^2 - 8y + 1 = 0,$$

die zu

$$y = \frac{\pm\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9}$$

führt. Die kritischen Punkte sind also

$$P_1 = \left(\frac{2\sqrt{7} - 1}{54}, \frac{\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9} \right) \text{ und } P_2 = \left(\frac{-2\sqrt{7} - 1}{54}, \frac{-\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9} \right).$$

Die Hesse-Form ist in einem Punkt $Q = (x, y)$ gleich

$$\text{Hess}_Q f = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2 + 6y \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Definitheitstyps ziehen wir Korollar 44.13 heran, wobei der erste Minor, also 6, natürlich positiv ist. Die Determinante der Hesse-Matrix ist

$$-16 + 36y,$$

was genau bei $y > \frac{4}{9}$ positiv ist. Dies ist im Punkt P_1 der Fall, aber nicht im Punkt P_2 . Daher ist die Hesse-Matrix im Punkt P_1 nach Korollar 44.13 positiv definit und somit besitzt die Funktion f im Punkt P_1 nach Satz 52.2 ein isoliertes lokales Minimum, das zugleich ein globales Minimum ist. In P_2 ist die Determinante negativ, so dass dort die Hesse-Form indefinit ist und somit, wiederum nach Satz 52.2, kein Extremum vorliegen kann.

Beispiel 52.4. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^y.$$

Es ist

$$x^y = e^{(\ln x) \cdot y}.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y}{x} \cdot e^{(\ln x) \cdot y} = \frac{y}{x} \cdot x^y \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (\ln x) \cdot e^{(\ln x) \cdot y} = (\ln x) \cdot x^y.$$

Da die Exponentialfunktion stets positiv ist, ist $P = (1, 0)$ der einzige kritische Punkt. Die Hesse-Matrix in einem Punkt (x, y) ist

$$\begin{pmatrix} \frac{-y+y^2}{x^2} \cdot e^{(\ln x) \cdot y} & \frac{1+y \ln x}{x} \cdot e^{(\ln x) \cdot y} \\ \frac{1+y \ln x}{x} \cdot e^{(\ln x) \cdot y} & (\ln x)^2 \cdot e^{(\ln x) \cdot y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y+y^2}{x^2} \cdot x^y & \frac{1+y \ln x}{x} \cdot x^y \\ \frac{1+y \ln x}{x} \cdot x^y & (\ln x)^2 \cdot x^y \end{pmatrix}.$$

In P ist dies

$$\text{Hess}_P \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Korollar 44.13 ist daher die Hesse-Form im kritischen Punkt weder positiv definit noch negativ definit. Man kann direkt zeigen, dass diese Matrix indefinit ist (vom Typ $(1, 1)$), da diese Bilinearform auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ positiv und auf

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ negativ definit ist. Nach Satz 52.2 liegt in diesem Punkt also kein Extremum vor.

Dies kann man auch ohne Differentialrechnung erkennen. Für $x = 1$ oder $y = 0$ ist $x^y = 1$. Ansonsten gelten die folgenden Beziehungen.

- (1) Für $0 < x < 1$ und $y > 0$ ist $x^y < 1$.
- (2) Für $x > 1$ und $y > 0$ ist $x^y > 1$.
- (3) Für $0 < x < 1$ und $y < 0$ ist $x^y > 1$.
- (4) Für $x > 1$ und $y < 0$ ist $x^y < 1$.

Daher gibt es in jeder Umgebung von $(1, 0)$ Punkte, an denen die Funktionswerte größer bzw. kleiner als 1 sind.

Bemerkung 52.5. Es sei

$$g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b = x_{n+1}$$

eine Unterteilung des Intervalls durch n Zwischenpunkte (in $n + 1$ Teilintervalle). Dazu gehört die Treppenfunktion, die auf $[x_i, x_{i+1}[$ den konstanten Wert $g(x_i)$ annimmt. Wenn g monoton wachsend ist, so ist dies eine untere Treppenfunktion, und das zugehörige Treppenintegral ist eine untere Schranke für das bestimmte Integral $\int_a^b g(t)dt$. Das Treppenintegral ist durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n g(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

gegeben. Wir fragen uns, für welche Intervallunterteilung mit n Teilpunkten das Treppenintegral maximal oder minimal wird. Dazu kann man die differentiellen Methoden zur Bestimmung von Extrema für Funktionen in mehreren Variablen verwenden (nämlich den variablen Unterteilungspunkten x_1, \dots, x_n), vorausgesetzt, dass g (hinreichend oft) differenzierbar (in einer Variablen) ist. In diesem Fall sind die partiellen Ableitungen von f gleich

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g'(x_i)(x_{i+1} - x_i) - g(x_i) + g(x_{i-1})$$

für $i = 1, \dots, n$ (wobei $x_0 = a$ und $x_{n+1} = b$ zu lesen ist). Als Definitionsbereich von f kann man die offene Menge

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

oder aber $[a, b]^n$ wählen. Es ist im Allgemeinen schwierig, die kritischen Punkte dieser Abbildung zu bestimmen.

Beispiel 52.6. Wir wollen für die Funktion

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t) = 1 - t^3,$$

und das Einheitsintervall $[0, 1]$ bestimmen, für welche zwei Unterteilungspunkte $0 < x < y < 1$ das Treppenintegral der zugehörigen (dreistufigen) unteren Treppenfunktion maximal wird. Das Treppenintegral wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x(1 - x^3) + (y - x)(1 - y^3) \\ &= x - x^4 + y - y^4 - x + xy^3 \\ &= -x^4 + y - y^4 + xy^3 \end{aligned}$$

beschrieben. Die partiellen Ableitungen dieser Funktion sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 + y^3$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 4y^3 + 3xy^2.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte. Aus der ersten partiellen Ableitung ergibt sich die Bedingung

$$y = \sqrt[3]{4}x$$

und daraus ergibt sich mit der zweiten partiellen Ableitung die Bedingung

$$1 - 16x^3 + 3 \cdot 4^{2/3}x^3 = 0,$$

also

$$(16 - 3 \cdot 4^{2/3})x^3 = 1$$

bzw.

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{16 - 3 \cdot 4^{2/3}}}.$$

Somit ist

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{16 - 3 \cdot 4^{2/3}}}, \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16 - 3 \cdot 4^{2/3}}} \right) \cong (0,4911, 0,7796)$$

der einzige kritische Punkt. Wir bestimmen die Hesse-Matrix in diesem Punkt, sie ist

$$\text{Hess}_P f = \begin{pmatrix} -12x^2 & 3y^2 \\ 3y^2 & -12y^2 + 6xy \end{pmatrix}$$

und in P gleich

$$\begin{pmatrix} -2,8942 & 1,8233 \\ 1,8233 & -4,9961 \end{pmatrix},$$

also negativ definit nach Korollar 44.13. Daher liegt in P ein Maximum nach Satz 52.2 vor.

Beispiel 52.7. Wir wollen für die Funktion

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t,$$

und das Einheitsintervall $[0, 1]$ bestimmen, für welche n Unterteilungspunkte $0 < x_1 < \dots < x_n < 1$ das Treppenintegral der zugehörigen ($(n + 1)$ -stufigen) unteren Treppenfunktion maximal wird. Das Treppenintegral wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= x_1(x_2 - x_1) + x_2(x_3 - x_2) + \dots \\ &\quad + x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + x_n(1 - x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_n - \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

beschrieben. Die partiellen Ableitungen dieser Funktion sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= x_2 - 2x_1, \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} &= x_{i-1} + x_{i+1} - 2x_i \end{aligned}$$

für $i = 2, \dots, n-1$ und

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = x_{n-1} + 1 - 2x_n.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte, indem wir die partiellen Ableitungen gleich 0 setzen. Die ersten $n-1$ Gleichungen ergeben sukzessive die Bedingungen

$$x_i = ix_1$$

für alle i . Dies zeigt man durch Induktion, der Induktionsanfang ($i = 1$) ist trivial, $i = 2$ folgt direkt aus der ersten Gleichung und der Induktionsschritt ergibt sich aus

$$x_{i+1} = -x_{i-1} + 2x_i = -(i-1)x_1 + 2ix_1 = (i+1)x_1.$$

Aus der letzten Gleichung folgt schließlich

$$0 = x_{n-1} + 1 - 2x_n = 1 + (n-1-2n)x_1 = 1 - (n+1)x_1$$

und somit $x_1 = \frac{1}{n+1}$. Der einzige kritische Punkt liegt also in der äquidistanten Unterteilung vor. Die Hesse-Matrix ist (unabhängig vom Punkt) gleich

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist negativ definit nach Korollar 44.13. Daher liegt in der äquidistanten Unterteilung nach Satz 52.2 das Maximum vor.

52. ARBEITSBLATT

52.1. Übungsaufgaben.

Wenn in den folgenden Aufgaben nach Extrema gefragt wird, so ist damit gemeint, dass man die Funktionen auf (isolierte) lokale und globale Extrema untersuchen soll. Zugleich soll man, im differenzierbaren Fall, die kritischen Punkte bestimmen.

Aufgabe 52.1. Untersuche die Addition

$$+ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

auf kritische Punkte und auf Extrema.

Aufgabe 52.2. Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

auf Extrema.

Aufgabe 52.3. Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^4,$$

auf Extrema.

Aufgabe 52.4. Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 5xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 52.5. Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 4xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 52.6.*

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto (3x^2 - 2xy - y^2 + 5x),$$

und entscheide, ob in diesen kritischen Punkten ein lokales Extremum vorliegt.

Aufgabe 52.7.*

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto \frac{xz}{x^2 + y^2},$$

(es ist also $y > 0$).

a) Berechne die partiellen Ableitungen von f und stelle den Gradienten zu f auf.

b) Bestimme die isolierten lokalen Extrema von f .

Aufgabe 52.8.*

Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto -3x^2 + 2xy - 7y^2 + x,$$

auf Extrema.

Aufgabe 52.9. Man untersuche die Funktion

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^y,$$

auf Extrema (vergleiche Beispiel 52.4), indem man die Funktion als Hintereinanderschaltung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $(x, y) \mapsto (\ln x, y)$, $(u, v) \mapsto (uv)$, $z \mapsto e^z$ auffasst und Aufgabe 51.1 und Aufgabe 51.2 heranzieht.

Aufgabe 52.10. Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y - xy^2 + x^2 - y^3,$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 52.11.*

Wir betrachten die Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto xyz.$$

- (1) Bestimme die Jacobi-Matrix zu φ in einem Punkt (x, y, z) .
- (2) Bestimme die kritischen Punkte von φ .
- (3) Bestimme die Hesse-Matrix zu φ in einem Punkt (x, y, z) .
- (4) Bestimme die Eigenräume der Hesse-Matrix zu φ im Punkt $(1, 1, 1)$.
- (5) Bestimme den Typ der Hesse-Form zu φ im Punkt $(1, 1, 1)$ mit Hilfe des Eigenwertkriteriums.

Aufgabe 52.12.*

Wir betrachten die Determinante für 2×2 -Matrizen als Funktion

$$\det: \text{Mat}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \longmapsto xw - zy.$$

- (1) Bestimme die Jacobi-Matrix zu \det und die kritischen Punkte.
- (2) Untersuche \det auf lokale Extrema. Bestimme insbesondere den Typ der Hesse-Matrix im Nullpunkt.
- (3) Finde einen zweidimensionalen Untervektorraum

$$U \subseteq \text{Mat}_2(\mathbb{R}),$$

auf dem die (Einschränkung der) Determinante ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 52.13.*

Man gebe für vorgegebene natürliche Zahlen p, q, n mit $p + q \leq n$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Hesse-Form im Nullpunkt den Typ (p, q) besitzt.

Aufgabe 52.14. Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $P \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt. Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zur Hesse-Matrix in P mit einem positiven Eigenwert. Zeige, dass f in P kein lokales Maximum besitzt.

Aufgabe 52.15.*

Es sei

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge sei. Zeige, dass für $P \in G$ und $v \in V$ die Beziehung

$$\sum_{r \in \mathbb{N}^n, |r|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r = \frac{1}{2} \text{Hess}_P f(v, v)$$

gilt.

Aufgabe 52.16. Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^2 - x^3y,$$

auf Extrema.

Aufgabe 52.17.*

Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + xy - 6y^2 - y,$$

auf kritische Punkte und Extrema.

Aufgabe 52.18.*

Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$f(P) = f(-P)$$

für alle $P \in \mathbb{R}^n$.

- Zeige, dass f in 0 einen kritischen Punkt besitzt.
- Man gebe ein Beispiel für eine solche Funktion, die in 0 ein isoliertes lokales Maximum besitzt.
- Man gebe ein Beispiel für eine solche Funktion, die in 0 kein Extremum besitzt.

Aufgabe 52.19.*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ definierten Funktion

$$f: B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^3 - y^2 - y.$$

Aufgabe 52.20.*

Prof. Knopfloch, Dr. Eisenbeis und Vorli machen Urlaub in den Bergen. Das Gebirge wird in einer geeigneten Umgebung durch die Funktion (alles in Meter)

$$f(x, y) = 3000 - \frac{1}{1000}x^2 - \frac{1}{1000}y^2 + \frac{1}{100}x$$

beschrieben.

- In welchem Punkt (welchen Punkten) besitzt das Gebirge einen Gipfel? Wie hoch ist es in den Gipfeln?
- Vorli hat Höhenangst und möchte nicht auf den Gipfel. Deshalb wählen sie einen Rundgang, der zum Punkt $(0, 0)$ konstant den Grundabstand 1000 besitzt. Bestimme die größte und die niedrigste Höhe, die die drei auf ihrer Wanderung erreichen.

Aufgabe 52.21. Bestimme für die Funktion

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy\sqrt{3 - x^2 - y^2},$$

den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und untersuche die Funktion auf Extrema.

Aufgabe 52.22. Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welches $x \in [0, 1]$ besitzt die zugehörige zweistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 52.23.*

Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welche $x, y \in [0, 1]$, $x < y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Die folgende Aufgabe knüpft an Aufgabe 18.10 an.

Aufgabe 52.24.*

Wir betrachten die Funktion

$$[1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t) = \frac{1}{t}.$$

- (1) Beschreibe den Flächeninhalt zur unteren maximalen Treppenfunktion zu g zur Intervallunterteilung $1 \leq x \leq y \leq 2$ in Abhängigkeit von x und y .
- (2) Bestimme das Punktepaar (x, y) zwischen 1 und 2, für das der Flächeninhalt zur unteren maximalen Treppenfunktion zu g zur Intervallunterteilung $1 \leq x \leq y \leq 2$ maximal wird. Welchen Wert hat dieser Flächeninhalt?

Aufgabe 52.25. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in P übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in P besitzt, die andere nicht.

Aufgabe 52.26. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\dim(V) \geq 2$, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in P übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in P besitzt, die andere nicht.

52.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 52.27. (4 Punkte)

Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + 9y^2 + 6xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 52.28. (4 Punkte)

Sei $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Untersuche die Funktion

$$f: I \times I \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{\cos x}{\cos y},$$

auf Extrema.

Aufgabe 52.29. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t^2.$$

Für welche $x, y \in]0, 1[$, $x < y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 52.30. (5 Punkte)

Sei

$$h: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und betrachte

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto h(x^2 + y^2).$$

Zeige, dass f allenfalls im Nullpunkt $(0, 0)$ ein isoliertes lokales Extremum besitzen kann, und dass dies genau dann der Fall ist, wenn h in 0 ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 52.31. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein isolierter Punkt, d.h. es gebe eine offene Umgebung $P \in U$ derart, dass $\varphi(Q) \neq \varphi(P)$ ist für alle $Q \in U$, $Q \neq P$. Zeige, dass dann φ in P ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

53. VORLESUNG - DIFFEOMORPHISMEN

53.1. Der Satz über die Umkehrabbildung.

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x_0) \neq 0$ in einem Punkt $x_0 \in I$. Nehmen wir an es gelte $f'(x_0) > 0$. Da die Ableitung stetig ist, gibt es auch ein offenes Intervall $J =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subseteq I$ derart, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in J$ ist. Aufgrund von Satz 15.7 (2) ist somit f auf J streng wachsend. Daher ist insbesondere f auf J injektiv. Das Bild $J' = f(J)$ ist nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall und daher liegt eine Bijektion

$$f|_J: J \longrightarrow J'$$

vor. Nach Satz 14.9 ist die Umkehrfunktion

$$g: J' \longrightarrow J$$

ebenfalls differenzierbar, und ihre Ableitung in $y \in J'$ ist $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Daher ist die Umkehrfunktion auf J' auch stetig differenzierbar. Eine ähnliche Argumentation ist durchführbar, wenn $f'(x_0) < 0$ ist. Insgesamt bedeutet dies, dass aus dem Nichtverschwinden der Ableitung in einem Punkt folgt, dass die Funktion sich in einer kleinen offenen Umgebung des Punktes bijektiv verhält mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung.

Der Satz über die (lokale) Umkehrabbildung verallgemeinert diese Beobachtung auf höhere Dimensionen. Er gehört zu den wichtigsten Sätzen der mehrdimensionalen Analysis und besagt, dass eine stetig differenzierbare Abbildung φ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen, für die das totale Differential in einem Punkt P bijektiv ist (was voraussetzt, dass die Dimension des Definitionsraumes mit der Dimension des Zielraums übereinstimmt), die Abbildung selbst auf geeigneten kleinen offenen Umgebungen von P und von $\varphi(P)$ eine Bijektion ist. D.h. die Abbildung verhält sich *lokal* so wie das totale Differential.

Der folgende Satz heißt *Satz über die Umkehrbarkeit*. Wir verzichten auf den recht aufwändigen Beweis.

Satz 53.1. *Es seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V_1$ offen und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt derart, dass das totale Differential

$$(D\varphi)_P$$

bijektiv ist. Dann gibt es eine offene Menge $U_1 \subseteq G$ und eine offene Menge $U_2 \subseteq V_2$ mit $P \in U_1$ und mit $\varphi(P) \in U_2$ derart, dass φ eine Bijektion

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

induziert, und dass die Umkehrabbildung

$$(\varphi|_{U_1})^{-1}: U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. \square

Dabei ergibt sich das totale Differential der Umkehrabbildung in einem Punkt $\varphi(P)$ aufgrund der Kettenregel einfach als Umkehrabbildung des totalen Differentials in P .

Definition 53.2. Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, sei $P \in G$ und sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine in P differenzierbare Abbildung. Dann heißt P ein *regulärer Punkt* von φ , wenn

$$\text{rang } (D\varphi)_P = \min(\dim(V), \dim(W))$$

ist. Andernfalls heißt P ein *kritischer Punkt* oder ein *singulärer Punkt*.

Bemerkung 53.3. Eine differenzierbare Abbildung $\varphi: G \rightarrow W$ ist genau dann regulär in einem Punkt $P \in G$, wenn das totale Differential $(D\varphi)_P$ den maximal möglichen Rang besitzt. Der Rang ist nach Lemma 26.2 und nach Lemma 26.3 gleich dem Spalten- bzw. Zeilenrang einer beschreibenden Matrix. Daher ist der Rang maximal gleich der Anzahl der Zeilen und maximal gleich der Anzahl der Spalten, also maximal gleich dem Minimum der beiden Dimensionen.

Bei $\dim(W) = 1$ ist P ein regulärer Punkt genau dann, wenn $(D\varphi)_P$ nicht die Nullabbildung ist. Daher stimmt diese Definition von regulär mit Definition 51.10 überein. Bei $\dim(V) = 1$ bedeutet die Regularität wiederum, dass $(D\varphi)_P \neq 0$ ist. Generell bedeutet bei $\dim(V) \leq \dim(W)$ die Regularität, dass $(D\varphi)_P$ injektiv ist, und bei $\dim(V) \geq \dim(W)$ bedeutet die Regularität, dass $(D\varphi)_P$ surjektiv ist. Insbesondere bedeutet bei $\dim(V) = \dim(W)$ die Regularität in P , dass das totale Differential bijektiv ist und dass daher die Voraussetzung im Satz über die lokale Umkehrbarkeit erfüllt ist.

Beispiel 53.4. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - y, x + xy).$$

Diese Abbildung ist differenzierbar und die Jacobi-Matrix in einem Punkt $P = (x, y)$ ist

$$\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 + y & x \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$2x^2 + 1 + y,$$

so dass die Bedingung

$$y \neq -2x^2 - 1$$

die regulären Punkte der Abbildung charakterisiert. Im Nullpunkt $(0, 0)$ liegt beispielsweise ein regulärer Punkt vor, so dass dort aufgrund des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit lokal eine Bijektion vorliegt, d.h. es gibt offene Umgebungen U_1 und U_2 von $(0, 0)$ derart, dass die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

bijektiv ist (mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung).

Wie groß kann dabei U_1 gewählt werden? Wir beschränken uns auf offene Ballumgebungen $U((0, 0), r)$. Bei $r > 1$ enthält eine solche Kreisscheibe zwei Punkte der Form

$$(\pm x, -1).$$

Diese werden unter φ auf

$$\varphi(\pm x, -1) = (x^2 - (-1), x + x(-1)) = (x^2 + 1, 0)$$

abgebildet, also auf den gleichen Punkt. Daher ist die Einschränkung der Abbildung auf eine solche Kreisscheibe nicht injektiv, und auf einer solchen Menge kann es keine Umkehrabbildung geben.

Betrachten wir hingegen

$$U_1 = U((0, 0), 1)$$

und

$$U_2 := \varphi(U_1)$$

Da U_1 keine kritischen Punkte enthält, ist nach Aufgabe 53.38 das Bild U_2 offen. Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{U_1}: U_1 \rightarrow U_2$ ist nach Definition von U_2 surjektiv, so dass nur die Injektivität zu untersuchen ist.

Das Gleichungssystem

$$x^2 - y = u \text{ und } x + xy = v$$

führt auf

$$y = x^2 - u$$

und auf

$$x(1 + x^2 - u) = x^3 + (1 - u)x = v.$$

Seien (x, y) und (\tilde{x}, \tilde{y}) aus $U((0, 0), 1)$ mit

$$\varphi(x, y) = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

gegeben. Dann ist

$$x^3 + (1 - u)x = v = \tilde{x}^3 + (1 - u)\tilde{x}$$

und somit

$$0 = x^3 - \tilde{x}^3 + (1 - u)(x - \tilde{x}) = (x - \tilde{x})(x^2 + x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 - u).$$

Bei $x = \tilde{x}$ folgt direkt $y = \tilde{y}$. Bei $x \neq \tilde{x}$ muss

$$x^2 + x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 - u = 0$$

sein. Dies bedeutet $y = x^2 - u = -x\tilde{x} - \tilde{x}^2 - 1$ und ebenso $\tilde{y} = -x\tilde{x} - x^2 - 1$. Wegen

$$x(y + 1) = v$$

und $y + 1 > 0$ müssen x und v das gleiche Vorzeichen besitzen. Daher müssen auch x und \tilde{x} das gleiche Vorzeichen besitzen. Daraus folgt aber

$$y = -x\tilde{x} - \tilde{x}^2 - 1 \leq -1,$$

so dass es in der offenen Kreisumgebung mit Radius 1 keine zwei verschiedenen Urbilder geben kann.²⁰ Mit $U_1 = U((0, 0), 1)$ liegt also eine Bijektion $U_1 \rightarrow U_2$ vor.

53.2. Diffeomorphismen.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 53.5. Es seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume und $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ offene Teilmengen. Eine Abbildung

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$$

heißt C^k -*Diffeomorphismus*, wenn φ bijektiv und k -mal stetig differenzierbar ist, und wenn die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}: U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls k -mal stetig differenzierbar ist.

²⁰Man kann auch folgendermaßen argumentieren: Die Ableitung von $x^3 + (1 - u)x$ nach x ist $3x^2 + (1 - u) = 3x^2 + 1 - (x^2 - y) = 2x^2 + 1 + y$. Wegen $|y| < 1$ ist dies positiv. Somit ist $x^3 + (1 - u)x$ streng wachsend in x nach Satz 15.7. Daher gibt es zu einem vorgegebenen Punkt $(u, v) \in U_2$ nur ein x , das die Bedingung

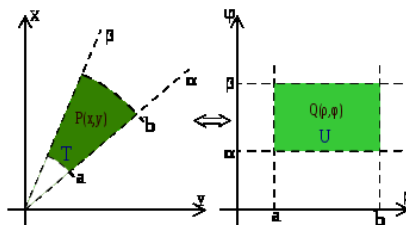
$$x^3 + (1 - u)x = v$$

erfüllt. Wegen $y = x^2 - u$ ist auch die zweite Komponente y eindeutig bestimmt.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit besagt also, dass eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarem totalen Differential lokal (!) ein C^1 -Diffeomorphismus ist (es gibt auch C^k -Versionen von diesem Satz). Zwei offene Mengen U_1 und U_2 heißen C^k -diffeomorph, wenn es einen C^k -Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt. Man spricht auch von einem *differenzierbaren Koordinatenwechsel*.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit macht keine Aussage über die Größe der offenen Mengen, auf denen ein Diffeomorphismus vorliegt. Abbildungen, die auf großen und übersichtlichen Teilmengen umkehrbar sind, werden durch Koordinatensysteme bereit gestellt. Wir besprechen hier Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten.

Wir haben gelegentlich für die reelle Ebene (bzw. die komplexen Zahlen) Polarkoordinaten verwendet. Hier besprechen wir Polarkoordinaten in Hinblick auf lokale Umkehrbarkeit.



Beispiel 53.6. Die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (r, \alpha) \longmapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha),$$

heißt *Polarkoordinatenauswertung*. Sie ordnet einem Radius r und einem Winkel α (wegen diesen Bedeutungen schränkt man den Definitionsbereich häufig ein) denjenigen Punkt der Ebene (in kartesischen Koordinaten) zu, zu dem man gelangt, wenn man in Richtung des Winkels (gemessen von der x -Achse aus gegen den Uhrzeigersinn) die Strecke r zurücklegt. Sie ist in jedem Punkt (r, α) stetig differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist nicht injektiv, da die Abbildung im zweiten Argument, also im Winkel α , periodisch mit der Periode 2π ist. Bei $r = 0$ ist - unabhängig von α - das Bild gleich $(0, 0)$. Ferner ist $\varphi(-r, \alpha + \pi) = \varphi(r, \alpha)$. Die Abbildung kann also nicht global invertierbar sein.

Die Determinante der Jacobi-Matrix ist

$$r(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = r.$$

Bei $r \neq 0$ liegt also nach Satz 26.11 ein bijektives totales Differential vor. Nach dem Satz über die lokale Umkehrabbildung gibt es zu jedem Punkt

(r, α) mit $r \neq 0$ eine offene Umgebung $(r, \alpha) \in U_1$ und eine bijektive Abbildung

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2 = \varphi(U_1).$$

Bei $r > 0$ kann man beispielsweise als offene Umgebung das offene Rechteck

$$U_1 =]r - \delta, r + \delta[\times]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$$

mit $r > \delta > 0$ und mit $\pi > \epsilon > 0$ wählen. Das Bild davon, also U_2 , ist der Schnitt des (offenen) Kreisringes zu den Radien $r - \delta$ und $r + \delta$ und dem (offenen) Kreissektor, der durch die beiden Winkel $\alpha - \epsilon$ und $\alpha + \epsilon$ begrenzt ist.

Man kann diese Abbildung zu einer bijektiven Abbildung, und zwar zu einem Diffeomorphismus, auf großen offenen Mengen einschränken, beispielsweise zu

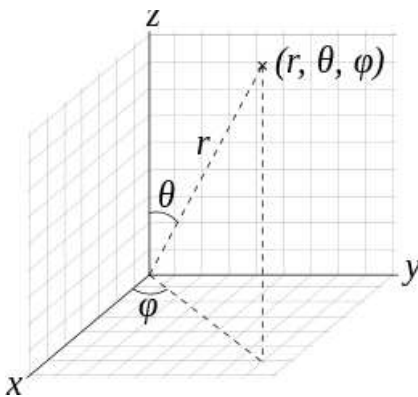
$$\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}, (r, \alpha) \longmapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

Die Bijektivität folgt dabei aus den grundlegenden Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, siehe insbesondere Satz 16.12. Wenn man das offene Intervall $]-\pi, \pi[$ durch das halboffene Intervall $]-\pi, \pi]$ ersetzt, so bekommt man eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi]$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Man kann aber nicht von einem Diffeomorphismus sprechen, da dies nur für offene Mengen definiert ist. Die Umkehrabbildung ist übrigens noch nicht einmal stetig.

Beispiel 53.7. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \longmapsto (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta),$$

(bzw. die Einschränkung davon auf Teilmengen wie $\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$) nennt man *Kugelkoordinatenauswertung*. Diese Abbildung bildet die *Kugelkoordinaten* (r, θ, φ) auf die zugehörigen kartesischen Koordinaten (x, y, z) ab.



Die Bedeutung der Kugelkoordinaten sind folgendermaßen: r ist der Abstand von (x, y, z) zum Nullpunkt. Bei $r = 1$ definieren die beiden Winkel φ und θ einen Punkt auf der Einheitskugel, und zwar bestimmt φ einen Punkt auf

dem Einheitskreis in der $x - y$ -Ebene (auf dem Äquator) und θ bestimmt einen Punkt auf dem zugehörigen Halbkreis (der durch den Äquatorpunkt und Nord- und Südpol festgelegt ist), wobei der Winkel zum Nordpol gemessen wird. Für ($r = 1$ und) einen festen Winkel θ parametrisiert φ einen *Breitenkreis*, wobei $\theta = \frac{\pi}{2}$ den Äquator beschreibt. Bei einem festen Winkel φ hingegen parametrisiert θ den oben angesprochenen Halbkreis, einen *Längenkreis*. In der Geographie herrschen übrigens etwas andere Konventionen, man wählt den zweiten Winkel aus $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (statt $+$ und $-$ spricht man von nördlicher und südlicher Breite) und nimmt $-\sin \theta$.

Die Jacobi-Matrix der Abbildung ist

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

und die Determinante davon ist

$$r^2 \sin \theta.$$

D.h. bei $r \neq 0$ und $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$ ist das totale Differential invertierbar und daher liegt nach Satz 53.1 ein lokaler Diffeomorphismus vor. Die inhaltliche Interpretation der Abbildung zeigt, dass hier überhaupt ein Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}_+ \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ vorliegt.

54. ARBEITSBLATT

53.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 53.1.*

Finde zwei natürliche Zahlen, deren Summe 65 und deren Produkt 1000 ist.

Aufgabe 53.2. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, (x, y) \longmapsto (x + y, xy),$$

surjektiv ist.

Aufgabe 53.3.*

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$$

mit einer stetigen Umkehrabbildung ψ derart, dass ψ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 53.4.*

Man gebe ein Beispiel einer Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

das zeigt, dass im Satz über die (lokale) Umkehrbarkeit die Bijektivität im Allgemeinen nur auf echten Teilintervallen besteht.

Aufgabe 53.5. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, (x, y) \longmapsto (x, e^{x+y}),$$

bijektiv ist. Man gebe explizit eine Umkehrabbildung an.

Aufgabe 53.6. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x),$$

eine Funktion. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x, y + f(x)),$$

bijektiv ist. Bestimme explizit eine Umkehrabbildung.

Was besagt in der vorstehenden Aufgabe der Satz über die Umkehrabbildung, wenn f differenzierbar ist?

Aufgabe 53.7. Es seien

$$f_1, \dots, f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Betrachte die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)),$$

Zeige:

- (1) Die Abbildung f ist differenzierbar.
- (2) Das totale Differential von f in 0 ist genau dann bijektiv, wenn von sämtlichen Funktionen f_i , $i = 1, \dots, n$, die Ableitungen in 0 nicht 0 sind.
- (3) f ist genau dann auf einer offenen Umgebung von 0 bijektiv, wenn die einzelnen f_i in einer geeigneten Umgebung bijektiv sind.

Aufgabe 53.8. Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (\sin xy, yz \cos(x^2), e^{xyz}).$$

Zeige, dass φ im Punkt $P = (1, \pi, 1)$ lokal umkehrbar ist, und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung im Punkt $Q = \varphi(P)$.

Aufgabe 53.9. Es seien $P = a + bX + cY + \dots$ und $Q = d + eX + fY + \dots$ Polynome in zwei Variablen und

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (P(x, y), Q(x, y)),$$

die zugehörige Abbildung. Wann besitzt φ in $\varphi(0, 0)$ lokal eine Umkehrabbildung? Wie sieht in diesem Fall das totale Differential der Umkehrabbildung im Punkt $\varphi(0, 0)$ aus?

Aufgabe 53.10.*

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nullstellenfreie stetig differenzierbare Funktion und sei g eine Stammfunktion zu f . Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x}{f(y)}, g(y) \right).$$

- Bestimme die Jacobi-Matrix zu φ .
- Zeige, dass man auf φ in jedem Punkt den Satz über die lokale Umkehrbarkeit anwenden kann.
- Zeige, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 53.11.*

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine total differenzierbare Abbildung derart, dass es eine reelle Zahl $c \in [0, 1[$ gibt mit

$$\|(D\varphi)_P\| \leq c$$

für alle $P \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass φ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Im Beweis des Umkehrsatzes wurde mit folgender Definition gearbeitet.

Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\|\varphi\| := \sup(\|\varphi(v)\|, \|v\| = 1)$$

die *Norm* von φ .

Aufgabe 53.12. Begründe, warum die Norm einer linearen Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen wohldefiniert ist.

Aufgabe 53.13. Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es einen Vektor $v \in V$, $\|v\| = 1$, mit

$$\|\varphi(v)\| = \|\varphi\|$$

gibt.

Aufgabe 53.14. Zeige, dass die Norm einer linearen Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen folgende Eigenschaften erfüllt.

- (1) Es ist $\|\varphi(v)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|v\|$.
- (2) Es ist $\|\varphi\| = 0$ genau dann, wenn $\varphi = 0$ ist.
- (3) Es ist $\|c\varphi\| = |c| \cdot \|\varphi\|$.
- (4) Es ist $\|\varphi_1 + \varphi_2\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$.

Aufgabe 53.15. Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von φ . Zeige, dass die Abschätzung

$$|\lambda| \leq \|\varphi\|$$

gilt.

Aufgabe 53.16. Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung derart, dass eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von φ existiert. Zeige, dass

$$\|\varphi\| = \max(|\lambda|, \lambda \text{ ist Eigenwert von } \varphi)$$

gilt.

Aufgabe 53.17. Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

eine lineare Abbildung $\neq 0$. Bestimme einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ auf der abgeschlossenen Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius 1, an dem die Funktion

$$B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto |\varphi(v)|,$$

ihr Maximum annimmt. Bestimme die Norm von φ .

Mit diffeomorph ist im Folgenden stets C^1 -diffeomorph gemeint.

Aufgabe 53.18. Definiere explizit einen Diffeomorphismus zwischen \mathbb{R}^n und einer offenen Kugel $U(0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 53.19. Zeige, dass eine offene Kreisscheibe $U(P, r) \subseteq \mathbb{R}^2$ ($r > 0$) und ein offenes Rechteck $]a, b[\times]c, d[$ ($b > a, d > c$) diffeomorph sind.

Aufgabe 53.20. Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Die Identität ist ein Diffeomorphismus.
- (2) Eine lineare bijektive Abbildung ist ein Diffeomorphismus.
- (3) Die Umkehrabbildung eines Diffeomorphismus ist wieder ein Diffeomorphismus.
- (4) Die Hintereinanderschaltung von Diffeomorphismen ist ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 53.21. Es seien $U_1 \subseteq V_1$, $U_2 \subseteq V_2$, $U_3 \subseteq V_3$, und $U_4 \subseteq V_4$ offene Teilmengen in reellen endlichdimensionalen Vektorräumen. Es seien

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_3$$

und

$$\psi: U_2 \longrightarrow U_4$$

C^1 -Diffeomorphismen. Zeige, dass auch die Produktabbildung

$$\varphi \times \psi: U_1 \times U_3 \longrightarrow U_2 \times U_4$$

ein C^1 -Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 53.22. Sei

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und

$$U_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 4v\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

- a) Skizziere U_1 und U_2 .
- b) Zeige, dass U_1 und U_2 offen sind.
- c) Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2, (x, y) \longmapsto (x + y, xy),$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 53.23. Bestimme die regulären Punkte der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2y, x - \sin y).$$

Zeige, dass φ in $P = (1, 0)$ regulär ist und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung von $\varphi|_U$ in $\varphi(P)$, wobei U eine offene Umgebung von P sei (die nicht explizit angegeben werden muss).

Aufgabe 53.24.*

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine bijektive, total differenzierbare Abbildung

$$\varphi_n: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an, für die das totale Differential in mindestens einem Punkt nicht regulär ist.

Aufgabe 53.25. Es seien U, V, W euklidische Vektorräume und seien $\varphi: U \longrightarrow V$ und $\psi: V \longrightarrow W$ differenzierbare Abbildungen. Es sei φ regulär in $P \in U$ und ψ regulär in $Q = \varphi(P) \in V$. Ist dann $\psi \circ \varphi$ regulär in P ? Unter welchen Voraussetzungen stimmt dies?

Aufgabe 53.26. Das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^2,$$

kann man reell als

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, x + iy = (x, y) \longmapsto (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = (x^2 - y^2, 2xy),$$

schreiben. Untersuche φ auf reguläre Punkte. Auf welchen (möglichst großen) offenen Teilmengen ist φ umkehrbar?

Aufgabe 53.27. Finde möglichst große offene Teilmengen $G \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und $H \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^3,$$

einen Diffeomorphismus von G nach H induziert.

Aufgabe 53.28.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left(\frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2} \right).$$

a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ .

b) Zeige, dass φ in $P = (1, 2)$ lokal eine differenzierbare Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}$ besitzt, und bestimme das totale Differential von ψ im Punkt $\varphi(P)$.

c) Man gebe alle Punkte $Q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ an, in denen φ nicht lokal invertierbar ist.

Aufgabe 53.29. Zeige, dass die Transformation

$$[0, 2\pi] \times [0, 1] \longrightarrow B(0, 1), (\alpha, w) \longmapsto (\sqrt{w} \cos \alpha, \sqrt{w} \sin \alpha),$$

auf geeigneten offenen Teilmengen ein Diffeomorphismus ist und berechne die Jacobi-Determinante in jedem Punkt.

Aufgabe 53.30. Es seien P_1, \dots, P_n und Q_1, \dots, Q_n Punkte in der Ebene \mathbb{R}^2 . Zeige, dass die beiden offenen Mengen $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{Q_1, \dots, Q_n\}$ zueinander diffeomorph sind.

Aufgabe 53.31. Es sei

$$T = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\},$$

$$U = \mathbb{R} \setminus T$$

und

$$V = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Zeige, dass U und V zueinander diffeomorph sind.

Aufgabe 53.32. Es sei

$$T = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{(0, 0)\},$$

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus T$$

und

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}.$$

Zeige, dass U und V zueinander nicht homöomorph sind.

Aufgabe 53.33.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^4, (a, b, c, d, u, v) \longmapsto (au + bv + c + d, ad - bc, ac - b^2, bd - c^2).$$

a) Bestimme die Jacobi-Matrix zu dieser Abbildung.

b) Zeige, dass φ im Nullpunkt nicht regulär ist.

c) Zeige, dass φ in $(1, 1, 0, 0, 1, 1)$ regulär ist.

Aufgabe 53.34.*

Wir betrachten die Abbildung

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, xy + xz + yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt $P = (x, y, z)$ genau dann ein regulärer Punkt von F ist, wenn die Koordinaten von P paarweise verschieden (also $x \neq y$, $x \neq z$ und $y \neq z$) sind.

Aufgabe 53.35.*

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Zeige, dass die Menge der regulären Punkte von φ offen ist.

Aufgabe 53.36.*

Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, $U \subseteq V$ und $U' \subseteq W$ offene Teilmengen und

$$\varphi: U \longrightarrow U'$$

ein Diffeomorphismus. Es sei

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, x) \longmapsto F(t, x),$$

ein Vektorfeld auf U . Es sei G das durch

$$G(t, y) := (D\varphi)_{\varphi^{-1}(y)}(F(t, \varphi^{-1}(y)))$$

definierte Vektorfeld auf U' . Zeige, dass

$$\alpha: J \longrightarrow U$$

genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = F(t, x) \text{ mit } x(t_0) = x_0,$$

wenn $\varphi \circ \alpha$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = G(t, y) \text{ mit } y(t_0) = \varphi(x_0)$$

ist.

53.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 53.37. (2 Punkte)

Seien U_1 und U_2 offene Mengen in euklidischen Vektorräumen V_1 und V_2 . Es sei

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$$

eine bijektive Abbildung, die in einem Punkt $P \in U_1$ differenzierbar sei derart, dass die Umkehrabbildung in $Q = \varphi(P)$ auch differenzierbar ist. Zeige, dass das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist.

Aufgabe 53.38. (3 Punkte)

Seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume, $G \subseteq V_1$ offen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $U \subseteq G$ eine offene Teilmenge derart, dass für jeden Punkt $P \in U$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist. Zeige, dass dann das Bild $\varphi(U)$ offen in V_2 ist.

Aufgabe 53.39. (4 Punkte)

Bestimme die Umkehrabbildung zur Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y).$$

Aufgabe 53.40. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, xy + xz + yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt (x, y, z) genau dann ein kritischer Punkt von φ ist, wenn in (x, y, z) zwei Zahlen doppelt vorkommen.

Aufgabe 53.41. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2 - y^2z, y + \sin xz).$$

Zeige, dass die Menge der kritischen Punkte von φ eine Gerade umfasst, aber auch noch weitere (mindestens einen) Punkte enthält.

Aufgabe 53.42. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x, xy).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern (also die Urbilder zu einem Punkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$), das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung. Man gebe möglichst große offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ derart an, dass

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 53.43. (4 Punkte)

Es seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ und $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen mit $0 \in V_1, V_2$ und es sei

$$\varphi: U_1 \times V_1 \longrightarrow U_2 \times V_2$$

ein Diffeomorphismus, der eine Bijektion zwischen $U_1 \times \{0\}$ und $U_2 \times \{0\}$ induziert. Zeige, dass dann auch die Einschränkung von φ auf $U_1 \cong U_1 \times \{0\}$ nach $U_2 \cong U_2 \times \{0\}$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 53.44. (3 Punkte)

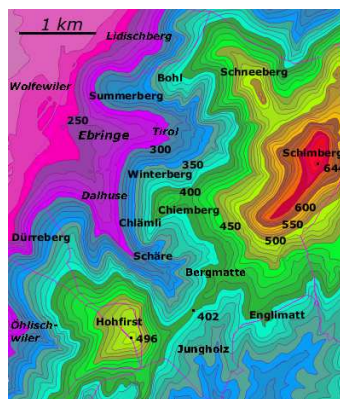
Beschreibe das komplexe Potenzieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^n,$$

in Polarkoordinaten.

54. VORLESUNG - SATZ ÜBER IMPLIZITE ABBILDUNGEN

54.1. Der Satz über implizite Abbildungen.



In einer topographischen Karte wird ein Gebirge durch seine Niveaulinien (Höhenlinien) repräsentiert.

Definition 54.1. Zu einer Abbildung

$$\varphi: L \longrightarrow M$$

zwischen zwei Mengen L und M heißt zu $y \in M$ die Menge

$$F_y = \{x \in L \mid \varphi(x) = y\}$$

die *Faser* von φ über y .



Die Küstenlinie ist die Nullfaser der Höhenabbildung. In den regulären Punkten der Küste kann man eine Tangente anlegen und die Küste lokal als einen Graphen einer Funktion beschreiben. Ein singulärer Punkt einer Küste ergibt sich beispielsweise bei einer Meereshöhe, die genau in einem Punkt an die Wasseroberfläche stößt, oder einem Sattelpunkt zwischen „zwei“ Inseln, der sich auf Meeresniveau befindet.²¹

Die Faser zu einem Punkt ist also einfach das Urbild $\varphi^{-1}(\{y\})$ von y . Zu einem Punkt $P \in L$ nennt man die Faser über $\varphi(P)$ auch die *Faser durch* P . Bei $M = \mathbb{R}$ sagt man statt Fasern auch *Niveaumengen* oder, insbesondere bei $L = \mathbb{R}^2$, auch *Höhenlinien*. In meteorologischen Kontexten spricht man von Isothermen oder von Isobaren.

Beispiel 54.2. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Da diese nur nichtnegative Werte annimmt, sind die Fasern zu $z \in \mathbb{R}_-$ leer. Die Faser zum Wert 0 besteht aus dem einzigen Punkt $(0, 0)$. Die Faser zu einem positiven Wert $z \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = z\},$$

das ist der Kreis mit dem Radius \sqrt{z} . Zu jedem Punkt $P = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ ist die Faser (oder die Niveaumenge) durch diesen Punkt also ein Kreis Z . Eine hinreichend kleine offene Ballumgebung $U(P, \delta)$ von P enthält nur einen

²¹ Dass man solche singulären Punkte in der Natur nur selten antrifft, liegt daran, dass das Höhenprofil der Erde nur endlich viele kritische Punkte und damit nur endlich viele Gipfel und Sattelpunkte besitzt. Es ist daher unwahrscheinlich, dass der Meeresspiegel genau auf der Höhe eines solchen kritischen Punktes liegt. Wenn man aber Ebbe und Flut betrachtet, so werden solche Punkte immer wieder durchlaufen.

Teil des Kreisbogens, der homöomorph zu einem offenen Intervall ist. Die differenzierbare Abbildung

$$]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \sqrt{x_0^2 + y_0^2} (\cos t, \sin t)$$

(mit geeignet gewählten Intervallgrenzen) induziert dabei eine Homöomorphie zwischen $]a, b[$ und dem Kreisbogenausschnitt $Z \cap U(P, \delta)$.

Beispiel 54.3. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, eine Funktion in einer Variablen. Dazu kann man die Funktion in zwei Variablen,

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto y - f(x),$$

betrachten. Die Fasern von φ über $c \in \mathbb{R}$ sind durch

$$F_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) + c\}$$

charakterisiert. D.h. die Faser über c ist einfach der Graph der durch $x \mapsto f(x) + c$ definierten Funktion. Alle Fasern gehen durch eine Verschiebung ineinander über, sie sind parallel zueinander. Die Punkte einer jeden Faser stehen in Bijektion mit der x -Achse, indem nämlich x auf $(x, f(x) + c)$ abgebildet wird.

Der *Satz über implizite Abbildungen* wird zeigen, dass unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen die Fasern einer Abbildung sich *lokal* als Graphen von Abbildungen realisieren lassen.

Eine Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_m)$$

führt unmittelbar zu einem Gleichungssystem

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n).$$

Die Lösungsmenge eines solchen Gleichungssystems ist gerade die Faser über $y = (y_1, \dots, y_m)$. Man kann sich fragen, wie zu gegebenem $y = (y_1, \dots, y_m)$ die Lösungsmenge aussieht, welche Struktur sie hat und wie sie sich mit y verändert. Das „grobe Muster“ zeigt sich schon deutlich bei einem *linearen Gleichungssystem* in n Variablen und m Gleichungen. Dort sind bei

$$n \geq m$$

und wenn die Gleichungen linear unabhängig sind, die Lösungsmengen $(n - m)$ -dimensionale affine Untervektorräume des \mathbb{R}^n . Insbesondere sind alle Lösungsmengen gleich und besitzen die gleiche Dimension.

Das Bestimmen der Lösungsmengen ist im Allgemeinen sehr viel schwieriger als im linearen Fall und auch gar nicht effektiv durchführbar. Dennoch vermittelt die lineare Approximation durch das totale Differential den richtigen Ansatz für das Studium allgemeiner Fasern. Eine reichhaltige Strukturaussage über die Gestalt der Faser in einem Punkt P ist nur dann zu erwarten, wenn das totale Differential in P surjektiv ist. In diesem Fall ist der Kern des

totalen Differentials, also die Lösungsmenge des durch diese lineare Abbildung gegebenen linearen Gleichungssystems, *tangential* an die Faser durch P , und man kann auf hinreichend kleinen offenen Mengen eine Bijektion zwischen dem Kern und der Faser stiften.



Der Querschnitt eines Achats. Die chemische Zusammensetzung variiert mit dem Ort und damit variiert auch die Frequenz des reflektierten Lichts, also die optische Erscheinung, mit dem Ort. Man sieht also die (verdickten) Fasern der Lichtabbildung.

Satz 54.4. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei*

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ und es sei

$$Z = \varphi^{-1}(\varphi(P))$$

die Faser durch P . Das totale Differential $(D\varphi)_P$ sei surjektiv. Dann gibt es eine offene Menge $W \subseteq G$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi: V \longrightarrow W$$

derart, dass $\psi(V) \subseteq Z \cap W$ ist und ψ eine Bijektion

$$\psi: V \longrightarrow Z \cap W$$

induziert. Die Abbildung ψ ist in jedem Punkt $Q \in V$ regulär und für das totale Differential von ψ gilt

$$(D\varphi)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0.$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Die Bedingung, dass das totale Differential surjektiv ist, kann man auch so ausdrücken, dass $n \geq m$ ist und dass der Punkt P regulär ist.

Bemerkung 54.5. Den Satz über implizite Abbildungen kann man auch so formulieren: Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und es sei $\varphi: G \rightarrow W$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es

sei $a \in G$ ein Punkt, in dem das totale Differential $(D\varphi)_a$ surjektiv sei, und es sei $V = E_1 \oplus E_2$ eine direkte Summenzerlegung von V in Untervektorräume E_1 und E_2 (mit $a = (a_1, a_2)$) derart, dass $E_1 = \ker(D\varphi)_a$ und $(D\varphi)_a|_{E_2}$ surjektiv (und damit bijektiv ist) ist (dadurch ist E_1 , aber nicht E_2 eindeutig festgelegt). Dann gibt es offene Mengen $U_1 \subseteq E_1$ und $U_2 \subseteq E_2$ mit $U_1 \times U_2 \subseteq G$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\theta: U_1 \longrightarrow U_2$$

derart, dass der Graph von θ , also

$$\Gamma = \{(x, \theta(x)) \mid x \in U_1\},$$

mit der Faser über $b = \varphi(a)$, geschnitten mit $U_1 \times U_2$, also

$$\{(x, v) \in U_1 \times U_2 \mid \varphi(x, v) = b\},$$

übereinstimmt. Sind auf E_1 und E_2 jeweils Basen fixiert mit Koordinaten (x_1, \dots, x_{n-m}) bzw. (v_1, \dots, v_m) (n und m seien die Dimensionen von V und W), so wird lokal die Faser durch den Graphen von m Funktionen $\theta_1, \dots, \theta_m$ in den $n - m$ Variablen (x_1, \dots, x_{n-m}) gegeben. Die Faser ist dann nach den Variablen (v_1, \dots, v_m) „aufgelöst“, d.h. diese Koordinaten lassen sich unter der impliziten Bedingung, dass die Punkte zur Faser gehören sollen, explizit durch die anderen, frei wählbaren Koordinaten (x_1, \dots, x_{n-m}) ausdrücken.

Definition 54.6. Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, es sei $G \subseteq V$ offen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt, in dem das totale Differential $(D\varphi)_P$ surjektiv sei, und sei Y die Faser von φ durch P . Dann nennt man

$$T_P Y := \ker(D\varphi)_P = \{v \in V \mid (D\varphi)_P(v) = 0\}$$

den *Tangentialraum* an die Faser Y in P .

Häufig wird auch der an P angelegte affine Raum

$$P + \ker(D\varphi)_P = \{P + v \mid (D\varphi)_P(v) = 0\}$$

als Tangentialraum bezeichnet. In diesem Sinne ist der Tangentialraum kein Untervektorraum von V , da er nicht durch den Nullpunkt verlaufen muss, er ist aber die Verschiebung eines Untervektorraums. Solche Räume nennt man *affin-lineare Unterräume*. Sie besitzen eine sinnvoll definierte Dimension, nämlich die Dimension des zugehörigen Vektorraumes. Der Tangentialraum an einem regulären Punkt zu einer Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ besitzt die Dimension $n - m$. Der Satz über implizite Abbildungen besagt, dass eine offene Teilmenge des Tangentialraumes an P sich bijektiv und differenzierbar auf eine offene Umgebung von P auf der Faser abbilden lässt. Der Tangentialraum ist also eine *lineare Approximation* der Faser.

Beispiel 54.7. Wir betrachten die differenzierbare Funktion

$$\varphi: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Die Jacobi-Matrix dieser Funktion ist

$$\left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} \right),$$

so dass die Funktion in jedem Punkt regulär ist und der Satz über implizite Abbildungen anwendbar ist. In diesem Fall kann man die Fasern auch direkt bestimmen. Die Bedingung

$$\frac{x}{y} = c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ führt auf $x = cy$, so dass die Fasern der Abbildung die *punktierten Geraden* (d.h. ein Punkt ist rausgenommen) durch den Nullpunkt sind (außer der x -Achse, auf der die Abbildung nicht definiert ist). Damit hat man explizit eine Auflösung der Faser nach x gegeben. Dass die Fasern unter dieser *Divisionsabbildung* (punktierte) Geraden sind ist ein Ausdruck davon, dass man Brüche erweitern kann, ohne ihren Wert zu ändern.

Der Tangentialraum in $P = (x, y)$ wird nach der Definition durch den Kern der Jacobi-Matrix gegeben, und dieser wird durch den Vektor (x, y) selbst aufgespannt. Der Tangentialraum an P ist hier also die Gerade, die durch P und den Nullpunkt definiert ist, und stimmt (bis auf den Nullpunkt) mit der Faser überein.

Beispiel 54.8. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^y$$

und knüpfen an Beispiel 52.4 an. Der einzige kritische Punkt ist $P = (1, 0)$, ansonsten ist die Abbildung in jedem Punkt regulär und daher lassen sich lokal die Fasern als Graphen beschreiben. Die Faser über 1 besteht aus der durch $x = 1$ gegebenen Geraden und der durch $y = 0$ gegebenen Halbgeraden, die sich im kritischen Punkt senkrecht schneiden. Ansonsten sind die Fasern durch die Gleichung

$$x^y = c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}_+, c \neq 1$, bestimmt (für nichtpositives c sind die Fasern leer). Wir schreiben diese Bedingung als $e^{(\ln x)y} = c$ und daher als

$$(\ln x)y = \ln c.$$

Wegen $x \neq 1$ kann man dies zu $y = \frac{\ln c}{\ln x}$ auflösen und wegen $y \neq 0$ zu

$$x = e^{\frac{\ln c}{y}}.$$

Die Faser besteht jeweils aus zwei Komponenten, die $x > 1$ bzw. $x < 1$ entsprechen.

54.2. Der Satz über die injektive Abbildung.

Als ein weiteres Korollar aus dem Satz über die Umkehrabbildung besprechen wir die Situation, wo das totale Differential injektiv ist.

Satz 54.9. *Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen und sei*

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt, in dem das totale Differential $(D\varphi)_P$ injektiv sei. Dann gibt es eine offene Umgebung U , $P \in U \subseteq G$, derart, dass $\varphi|_U$ injektiv ist.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

54. ARBEITSBLATT

54.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 54.1. Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 - x^2 - 2x + 2.$$

Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}$ ist φ regulär? Was besagt der Satz über implizite Abbildungen in dieser Situation? Wie sieht lokal die Faser in einem regulären Punkt aus? Kann es leere Fasern geben? Bestimme die Faser über 0.

Aufgabe 54.2. Was besagt der Satz über implizite Abbildungen für den Fall einer stetig differenzierbaren Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$? Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}$ sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt? Wie sieht es aus, wenn φ ein Polynom ist?

Aufgabe 54.3. Was besagt der Satz über implizite Abbildungen für den Fall einer stetig differenzierbaren Funktion $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$? Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt?

Aufgabe 54.4. Es seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetig differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen f' und g' stets positiv seien. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x) + g(y),$$

stetig differenzierbar und in jedem Punkt regulär ist. Man gebe explizit eine Beschreibung der Fasern von φ als Graph an.

Aufgabe 54.5. Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen \mathbb{R} und den Fasern von φ an.

Aufgabe 54.6. Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy.$$

Aufgabe 54.7. Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen offenen Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ und (möglichst großen) offenen Teilmengen der Fasern von φ an.

Aufgabe 54.8. Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Aufgabe 54.9. Finde für die folgenden Kurven

$$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Abbildungen

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von γ genau die Faser von φ über 0 ist.

- (1) $\gamma(t) = (t, t^3)$.
- (2) $\gamma(t) = (t^3, t^3 + 1)$.
- (3) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Aufgabe 54.10.*

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion.

a) Realisiere den Graphen von f als Faser zu einer Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

über 0.

b) Sei f stetig differenzierbar. Zeige, dass die Punkte auf dem Graphen von f regulär sind.

Aufgabe 54.11. Sei

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Man fertige eine Skizze an, die die Fasern, die Tangentialräume und lokale Diffeomorphismen zwischen Tangentialraum und Faser sichtbar macht.

Aufgabe 54.12. Sei

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^y.$$

Man fertige Skizzen für den (1) Graph und (2) die Fasern und die Tangentialräume dieser Abbildung an.

Aufgabe 54.13. Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetige Abbildung und $F \subseteq \mathbb{R}^n$ die Faser über $P \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass es auch eine stetige Abbildung

$$\psi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

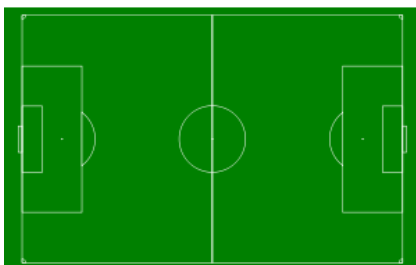
derart gibt, dass F die Faser von ψ über einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 54.14. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es eine lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

in einen weiteren reellen endlichdimensionalen Vektorraum W derart gibt, dass U die Faser über $0 \in W$ ist und dass φ in jedem Punkt $v \in V$ regulär ist.

Aufgabe 54.15. Ein Fußballfeld soll in einen Park mit Erhebungen und mit Senken umgewandelt werden. Dabei sollen die Linien unverändert bleiben und alle anderen Punkte sollen ihre Höhe ändern. Ist dabei jede Vorgabe, welche umrandeten Gebiete erhöht oder gesenkt werden sollen, möglich? Ist jedes solche Vorhaben durch eine stetige oder eine differenzierbare Höhenfunktion durchführbar? Können im differenzierbaren Fall alle Punkte regulär sein?



Aufgabe 54.16. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung, die im Punkt $P \in G$ ein surjektives totales Differential besitze. Es sei

$$\psi: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(mit $U \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ offen) ein lokaler Diffeomorphismus auf die Faser durch P , bei dem $Q \in U$ auf P abgebildet wird. Zeige, dass man den Tangentialraum an die Faser durch P auch als

$$\left\{ P + (D\psi)_Q(u) \mid u \in \mathbb{R}^{n-m} \right\}$$

beschreiben kann.

Die nächste Aufgabe knüpft an Aufgabe 36.25 an.

Aufgabe 54.17. Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung differenzierbar? Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär, wie sehen die Fasern aus?

Aufgabe 54.18. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x, y) \longmapsto -t^2 + x^2 + y^2.$$

Bestimme die regulären Punkte und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgabe 54.19. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (xy, yz).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern, das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung.

Aufgabe 54.20. Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Aufgabe 54.21.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2 + y^2 + z^2, 2x + 3y + 4z).$$

a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ . Zeige, dass

$$P = (1, -2, 1)$$

regulär ist.

b) Beschreibe für den Punkt $P = (1, -2, 1)$ den Tangentialraum an die Faser F von φ durch P .

c) Man gebe für $P = (1, -2, 1)$ einen lokalen Diffeomorphismus zwischen einem offenen Intervall und einer offenen Umgebung von P in der Faser F durch P an.

Aufgabe 54.22.*

Der \mathbb{R}^4 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen.

- (1) Beschreibe den Lichtkegel in \mathbb{R}^4 als Faser $Y = f^{-1}(0)$ einer geeigneten Funktion $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ über $0 \in \mathbb{R}$.
- (2) Zeige, dass der Nullpunkt der einzige kritische Punkt des Lichtkegels ist.
- (3) Es sei $P \in Y$ ein Punkt $\neq 0$ des Lichtkegels und $v \in T_P Y \subseteq \mathbb{R}^4$ ein Tangentenvektor in P an der Faser, der zugleich selbst lichtartig sei. Zeige, dass $P + v$ ebenfalls lichtartig ist.
- (4) Zeige, dass man in (3) nicht auf die Bedingung verzichten kann, dass v selbst lichtartig ist.

Aufgabe 54.23.*

Der \mathbb{R}^4 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen.

- (1) Beschreibe die Menge der Beobachtervektoren in \mathbb{R}^4 als Faser $Z = f^{-1}(s)$ einer geeigneten Funktion $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ über einer reellen Zahl $s \in \mathbb{R}$.
- (2) Zeige, dass die Menge der Beobachtervektoren keine kritischen Punkte enthält.

- (3) Es sei $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Beobachtervektor. Beschreibe eine explizite stetige Bijektion zwischen dem \mathbb{R}^3 und einer geeigneten Teilmenge der Beobachtermenge Z , zu der P gehören muss.

Aufgabe 54.24. Es seien L und M Mengen und $L \times M$ ihre Produktmenge. Beschreibe die Faser der Projektion

$$L \times M \longrightarrow M, (x, y) \longmapsto y,$$

über einem Punkt $y \in M$. Kann die Faser leer sein?

Aufgabe 54.25. Seien L_1, \dots, L_n und M_1, \dots, M_n Mengen und seien

$$\varphi_i: L_i \longrightarrow M_i$$

Abbildungen. Zu einem Punkt $P_i \in M_i$ sei $F_i \subseteq L_i$ die Faser von φ_i über P_i . Zeige, dass die Faser der Produktabbildung $\varphi = \varphi_1 \times \dots \times \varphi_n$ über $P = (P_1, \dots, P_n)$ gleich $F_1 \times \dots \times F_n$ ist.

Aufgabe 54.26.*

Es sei

$$U = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \{(2, 4), (4, 2)\}.$$

Begründe, ob die Abbildung

$$\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto (x + y, xy, x^y) = (u, v, w).$$

injektiv ist oder nicht.

Aufgabe 54.27.*

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (s, t) \longmapsto (s, -s - t^2, t^3) = (x, y, z).$$

- Erstelle die Jacobi-Matrix von φ .
- Bestimme die regulären Punkte (s, t) von φ .
- Zeige, dass $\varphi(s, t)$ die Bedingung

$$(x + y)^3 + z^2 = 0$$

erfüllt.

- Zeige, dass die Abbildung injektiv ist.

Aufgabe 54.28. Formuliere und beweise den „Satz über die surjektive Abbildung“.

54.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 54.29. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 \cdot \sin y - y \cdot \cos(xy).$$

Zeige, dass die Faser durch den Punkt $P = (2, 3)$ sich lokal durch eine differenzierbare Kurve

$$\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \gamma(t),$$

mit $\gamma(0) = P$ parametrisieren lässt, und bestimme die möglichen Werte der Ableitung $\gamma'(0)$.

Aufgabe 54.30. (4 Punkte)

Bestimme den Tangentialraum an die Faser im Punkt $(2, -1, 3)$ der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto \left(x^2 e^z - y^3, \frac{x}{e^{yz}} \right),$$

und zwar sowohl durch lineare Gleichungen als auch durch eine parametrisierte Gerade.

Aufgabe 54.31. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2,$$

im Punkt $P = (1, -1, 2)$. Man gebe eine differenzierbare Abbildung

$$\psi: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, wobei U eine möglichst große offene Teilmenge des Tangentialraumes $T_P F$ an die Faser F_P von φ durch P ist, die eine Bijektion zwischen U und $V \cap F_P$ stiftet ($P \in V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen).

Aufgabe 54.32. (4 Punkte)

Es seien

$$\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Abbildungen und seien F_1 und F_2 Fasern dieser Abbildungen, d.h. es sei $F_1 = \varphi_1^{-1}(b_1)$ und $F_2 = \varphi_2^{-1}(b_2)$ (für gewisse $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$). Zeige, dass es eine stetige Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ein $a \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass $F_1 \cup F_2 = \varphi^{-1}(a)$ ist.

Aufgabe 54.33. (4 Punkte)

Man gebe explizit eine stetige Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

derart, dass die Faser von φ über 0 gleich $I = \{(x, 0) \mid x \in [0, 1]\}$ ist.

Aufgabe 54.34. (5 Punkte)

Zeige, dass die Fasern der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^3,$$

in jedem Punkt $P = (x, y)$ lokal homöomorph zu einem offenen reellen Intervall sind. D.h. dass es zu jedem Punkt $P = (x, y)$ eine offene Umgebung $(x, y) \in U$, ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine stetige Bijektion

$$I \longrightarrow U \cap F_P,$$

gibt (wobei F_P die Faser von φ durch P bezeichnet), deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 54.35. (5 Punkte)

Es sei

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine reguläre Kurve. Zeige, dass die Faser über jedem Punkt $c \in \mathbb{R}^n$ endlich ist.

Aufgabe 54.36. (6 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine in $P \in G$ total differenzierbare Abbildung mit injektivem totalen Differential. Zeige, dass es eine offene Umgebung U von P mit $\varphi^{-1}(\varphi(P)) \cap U = \{P\}$ gibt.

Tipp: Betrachte das totale Differential auf der Einheitssphäre. Der Satz über die injektive Abbildung ist hier nicht anwendbar.

55. VORLESUNG - EXTREMA MIT NEBENBEDINGUNGEN

55.1. Extrema unter Nebenbedingungen.



Beispiel 55.1. Ein Nilpferd hat die ganze Nacht an Land gegrast und befindet sich gerade im Punkt $P = (r, s) \in \mathbb{R}^2$. Jetzt kommt plötzlich die heiße Sonne hervor und es muss möglichst schnell zurück in seinen Teich. Es sucht also den Punkt $a = (x, y) \in M$ des Teichufers M , der seiner momentanen Position am nächsten ist, d.h. es soll die Abstandsfunktion

$$h(x, y) = d(P, (x, y)) = \sqrt{(x - r)^2 + (y - s)^2}$$

minimiert werden, wobei allerdings nur die Punkte $(x, y) \in M$ relevant sind. Es geht also um ein Minimierungsproblem, wobei die Punkte die *Nebenbedingung* erfüllen müssen, zum Teichufer zu gehören. Das Teichufer werde mit Hilfe der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = b\}$$

zu einem gewissen $b \in \mathbb{R}$ beschrieben, d.h., es liegt als Faser einer Funktion vor. Wenn der Teich beispielsweise eine Ellipse ist, so ist $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$. Wir nehmen weiter an, dass die Funktion f stetig differenzierbar ist und jeder Punkt der Faser regulär ist. Kann man die Punkte des Teichufers, in denen ein lokales Extremum vorliegt, mit Mitteln der Differentialrechnung charakterisieren? Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es lokal eine differenzierbare Parametrisierung des Teichufers, d.h. eine Funktion

$$\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

auf einem offenen Intervall I , deren Bild gerade ein Ausschnitt aus dem Teichufer ist. Insgesamt erhält man die zusammengesetzte Funktion

$$h \circ \gamma: I \longrightarrow \mathbb{R},$$

und genau dann besitzt h in $a \in M$ ein lokales Extremum, wenn $h \circ \gamma$ ein lokales Extremum in $\gamma^{-1}(a) \in I$ besitzt. Auf $h \circ \gamma$ kann man die Kriterien für lokale Extrema (also Satz 51.9 bzw. Satz 15.3) anwenden, da jetzt

der Definitionsbereich (man hat die Nebenbedingung sozusagen eliminiert) eine offene Teilmenge von \mathbb{R} ist. Wenn ein lokales Extremum vorliegt, so ist einerseits

$$(h \circ \gamma)'(\gamma^{-1}(a)) = (Dh)_a(\gamma'(\gamma^{-1}(a))) = 0.$$

Andererseits bestimmt $\gamma'(\gamma^{-1}(a))$ den (eindimensionalen) Tangentialraum $T_a M$, und dieser ist wiederum der Kern des totalen Differentials $(Df)_a$. Daher müssen $(Dh)_a$ und $(Df)_a$ linear abhängig sein. Das Nilpferd muss also nach Punkten $a \in M$ Ausschau halten, für die es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(Dh)_a = \lambda (Df)_a$$

gibt.

Satz 55.2. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei*

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $M = f^{-1}(b)$ die Faser von f über $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion und die eingeschränkte Funktion $h|_M$ besitze im Punkt $a \in M$ ein lokales Extremum auf M und a sei ein regulärer Punkt von f . Dann ist

$$T_a M \subseteq \text{kern}(Dh)_a,$$

d.h. die Linearform $(Dh)_a$ verschwindet auf dem Tangentialraum an der Faser von f durch a . Die Linearform $(Dh)_a$ ist eine Linearkombination aus den Linearformen

$$(Df_1)_a, \dots, (Df_m)_a.$$

Beweis. Wir wenden den Satz über implizite Abbildungen auf den Punkt $a \in M$ an. Es gibt also eine offene Menge $a \in W$, $W \subseteq U$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi: V \longrightarrow W$$

derart, dass $\psi(V) \subseteq M \cap W$ ist und ψ eine Bijektion

$$\psi: V \longrightarrow M \cap W$$

induziert. Dabei ist ψ in jedem Punkt $Q \in V$ regulär und für das totale Differential von ψ gilt

$$(Df)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0.$$

Da $h|_M$ in a ein lokales Extremum besitzt, besitzt auch $h \circ \psi$ in $Q = \psi^{-1}(a)$ (also $a = \psi(Q)$) ein lokales Extremum. Nach Satz 51.9 (2) ist daher

$$(D(h \circ \psi))_Q = (Dh)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0.$$

Somit ist einerseits

$$\text{bild}(D\psi)_Q \subseteq \text{kern}(Dh)_a$$

und andererseits

$$\text{bild}(D\psi)_Q = \text{kern}(Df)_a = T_a M.$$

Der Zusatz folgt, da $\text{kern}(Df)_a$ der Durchschnitt der $\text{kern}(Df_i)_a$, $i = 1, \dots, m$, ist und somit

$$\bigcap_{i=1}^m \text{kern}(Df_i)_a \subseteq \text{kern}(Dh)_a$$

gilt. Nach Aufgabe 55.1 folgt daraus, dass $(Dh)_a$ zu dem von

$$(Df_1)_a, \dots, (Df_m)_a$$

erzeugten Untervektorraum gehört. \square

Man beachte, dass dieser Satz nur ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema angibt, kein hinreichendes. Die auf dem Satz über implizite Abbildungen beruhende Existenz der Bijektion ψ wird zwar im Beweis verwendet, sie muss aber nicht explizit bekannt sein, um die Kandidaten für lokale Extrema zu bestimmen. Eine explizite Bijektion kann aber helfen zu entscheiden, ob in den Kandidaten ein lokales Extremum vorliegt oder nicht. Wenn es nur endliche viele Kandidaten gibt, so kann man die Funktionswerte ausrechnen und auf diesem Weg zumindest die globalen Extrema finden.

Korollar 55.3. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und seien*

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Es sei $b \in \mathbb{R}$ und $M = f^{-1}(b)$ die Faser von f über b . Die eingeschränkte Funktion $h|_M$ besitze im Punkt $a \in M$ ein lokales Extremum auf M und a sei ein regulärer Punkt von f . Dann ist $(Dh)_a$ ein Vielfaches von $(Df)_a$, d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(Dh)_a = \lambda (Df)_a.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 55.2. \square

Den Faktor λ nennt man *Lagrange-Multiplikator*. Diese Aussage legt folgendes Verfahren nahe, Kandidaten für lokale Extrema (unter Nebenbedingung) zu finden: Man untersucht einfach, für welche (bezüglich f) regulären Punkte $a \in M$ eine lineare Abhängigkeit zwischen $(Df)_a$ und $(Dh)_a$ vorliegt.

Beispiel 55.4. Wir betrachten die Funktion

$$h(x, y) = x^3 - xy^2$$

auf dem Einheitskreis

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

und interessieren uns für die Punkte $a \in K$, auf denen h ein lokales Extremum annehmen kann. Das totale Differential von h ist

$$(3x^2 - y^2, -2xy)$$

und das totale Differential von

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

ist

$$(2x, 2y).$$

Gemäß Korollar 55.3 müssen wir die Punkte $a \in K$ bestimmen, für die die beiden Differentiale linear abhängig sind. Die Determinante ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 - y^2 & -2xy \end{pmatrix} &= -4x^2y - 6x^2y + 2y^3 \\ &= -10x^2y + 2y^3 \\ &= 2y(-5x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Somit liegt bei $y = 0$ und bei $y = \pm\sqrt{5}x$ lineare Abhängigkeit vor. Die Kreisbedingung führt somit auf die Punkte

$$\begin{aligned} a_1 = (1, 0), a_2 = (-1, 0), a_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{6}} \right), a_4 = \left(\sqrt{\frac{1}{6}}, -\sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{6}} \right), \\ a_5 = \left(-\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{6}} \right), a_6 = \left(-\sqrt{\frac{1}{6}}, -\sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{6}} \right). \end{aligned}$$

Korollar 55.5. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, sei*

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform und sei $M = f^{-1}(b)$ die (affin-lineare) Faser von f über $b \in \mathbb{R}$. Es sei $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf U , deren Einschränkung $h|_M$ auf M im Punkt $a \in M$ ein lokales Extremum besitze. Dann ist $(Dh)_a$ ein Vielfaches von f , d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(Dh)_a = \lambda f.$$

Beweis. Dies folgt bei $f \neq 0$ wegen

$$(Df)_a = f$$

unmittelbar aus Korollar 55.3. Bei $f = 0$ ist $M = U$ (da ja M nach Voraussetzung nicht leer ist) und die Aussage folgt aus Satz 51.9 (2). \square

Beispiel 55.6. Wenn man eine bestimmte Geldmenge g zur Verfügung hat und n verschiedene Produkte zum fixierten Stückpreis a_i kaufen möchte, wobei noch nicht feststeht, wie viel man von jedem Produkt kaufen möchte, so ergibt sich die Nebenbedingung

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = g$$

auf $U = \mathbb{R}_+^n$. Unter dieser Nebenbedingung möchte man den Nutzen optimieren. Betrachten wir eine Zielfunktion der Form

$$h(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Nach Korollar 55.5 ergibt sich die Bedingung

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2-1} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ \vdots \\ \alpha_n x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Wir multiplizieren die i -te Bedingung mit x_i und erhalten die Bedingungen

$$\alpha_i x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = \lambda a_i x_i.$$

Mit dem Ansatz

$$\lambda = c x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ergibt sich

$$x_i = \frac{\alpha_i}{c a_i},$$

wobei man c so bestimmt, dass der Punkt auf dem affin-linearen Unterraum liegt, also

$$c = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{g}.$$

Korollar 55.7. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, sei*

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und sei $M = f^{-1}(b)$ die Faser von f über $b \in \mathbb{R}$. Es sei h eine Linearform auf \mathbb{R}^n , deren Einschränkung $h|_M$ auf M im (zu f) regulären Punkt $a \in M$ ein lokales Extremum besitze. Dann ist h ein Vielfaches von $(Df)_a$, d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$h = \lambda (Df)_a.$$

Beweis. Dies folgt wegen

$$(Dh)_a = h$$

unmittelbar aus Korollar 55.3. □

Beispiel 55.8. Wir betrachten die Linearform

$$h(x, y, z) = 3x - 2y + 5z$$

auf der Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 = 1\}.$$

Die Lagrange-Bedingung wird zu

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z^3 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf $x \neq 0$ und

$$\lambda = \frac{3}{2x}.$$

Damit ist

$$y = -\frac{1}{\lambda} = -\frac{2x}{3}$$

und

$$z = \sqrt[3]{\frac{5}{4\lambda}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}x}.$$

Dies führt insgesamt zur Bedingung

$$x^2 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{5}{6}x\sqrt[3]{\frac{5}{6}x} = 1,$$

die nach dem Zwischenwertsatz mindestens zwei Lösungen hat, die allerdings nicht so einfach explizit anzugeben sind.

Korollar 55.9. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei*

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Die Faser $M = f^{-1}(b)$ von f zu einem Punkt $b \in \mathbb{R}$ sei kompakt und in jedem Punkt regulär. Dann ist jeder $(n-1)$ -dimensionale Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ für mindestens einen Punkt $a \in M$ gleich dem Tangentialraum T_aM .

Beweis. Der $(n-1)$ -dimensionale Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ wird durch eine Linearform beschrieben, sagen wir $V = \ker h$ mit

$$h(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n,$$

wobei nicht alle c_i gleich 0 sind. Die Funktion h nimmt nach Satz 36.12 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) auf der kompakten Teilmenge M ihr Maximum an, d.h. es gibt einen Punkt $a \in M$ derart, dass $h|_M$ in a insbesondere ein lokales Extremum besitzt. Da a ein regulärer Punkt ist, folgt nach Korollar 55.7, dass

$$h = (Dh)_a = \lambda(Df)_a$$

ist ($\lambda \neq 0$) und somit ist

$$V = \ker h = \ker (Df)_a = T_aM.$$

□

Ohne die Kompaktheitsvoraussetzung und ohne die Regularitätsvoraussetzung ist die vorstehende Aussage nicht richtig, wie einfache Beispiele zeigen.

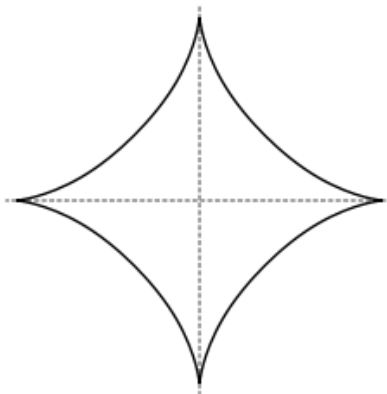
Beispiel 55.10. Es sei

$$f(x, y) = xy$$

und

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 1\}$$

die Standardhyperbel, realisiert als Faser einer Funktion. Jeder Punkt der Hyperbel ist ein regulärer Punkt von f , die Hyperbel ist nicht kompakt. Die beiden Linearformen x bzw. y besitzen kein lokales Extremum auf M und die beiden Koordinatenrichtungen treten nicht als Tangentialräume der Hyperbel auf.



Beispiel 55.11. Wir betrachten

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2$$

und das zugehörige Nullstellengebilde, also

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

Dieses nennt man eine *Astroide*. Dieses Nullstellengebilde liegt innerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe und ist daher kompakt. Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y^2 - 1)^2 \cdot 2x + 54xy^2 = 6x \left((x^2 + y^2 - 1)^2 + 27y^2 \right)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(x^2 + y^2 - 1)^2 \cdot 2y + 54x^2y = 6y \left((x^2 + y^2 - 1)^2 + 27x^2 \right).$$

Beide partiellen Ableitungen verschwinden genau für die vier Punkte

$$(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0),$$

die alle zu Z gehören. Die x -Achse $\mathbb{R}(1, 0)$ tritt nicht als Tangente von Z auf. Die zweite partielle Ableitung verschwindet nämlich nur bei $y = 0$ oder $(x, y) = (0, \pm 1)$, in diesen Fällen verschwinden aber bereits beide partielle Ableitungen.

55. ARBEITSBLATT

55.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 55.1. Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum über einem Körper K und es seien L, L_1, \dots, L_m Linearformen auf V . Zeige, dass die Beziehung

$$\bigcap_{i=1}^m \ker L_i \subseteq \ker L$$

genau dann gilt, wenn L zu dem von den L_1, \dots, L_m erzeugten Untervektorraum (im Dualraum) gehört.

Aufgabe 55.2. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = 5x + 3y$$

auf der Ellipse

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1\}.$$

Aufgabe 55.3. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x^2 y^3$$

unter der Nebenbedingung

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 7y = 100\}.$$

Aufgabe 55.4.*

Für eine Party soll eine Bowle gemischt werden, wobei 100 Euro zur Verfügung stehen. Die Zutaten sind Orangensaft, Erdbeeren, Rum und Sekt. Die Preisfunktion ist

$$\mathbb{R}_+^4 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, w) \longmapsto x + y + 5z + 3w.$$

Die Stimmungsfunktion h wird durch

$$h: \mathbb{R}_+^4 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, w) \longmapsto x^3 y \sqrt{z} w,$$

beschrieben. Bei welchem Mischungsverhältnis wird die Stimmung optimiert? (Es genügt, den (die) kritischen Punkt(e) für die Lagrange-Bedingung auszurechnen).

Aufgabe 55.5. Man beweise die Formel aus Beispiel 55.6, indem man den durch die Linearform f gegebenen affinen Unterraum linear parametrisiert und das Optimierungsproblem für h auf dem zugehörigen \mathbb{R}^{n-1} betrachtet.

Man löse die folgende Aufgabe direkt und als eine Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen.

Aufgabe 55.6. Für welche Punkte (t, t^2) der Standardparabel wird der Abstand zum Punkt $(0, 1)$ minimal?

Aufgabe 55.7. Bestimme sämtliche Tangenten an die Hyperbel

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}.$$

Aufgabe 55.8. Zeige, dass durch

$$[0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t),$$

eine bijektive Parametrisierung der Standardastroide

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0\}$$

gegeben ist.

Aufgabe 55.9. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x$$

auf der Standardastroide

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0\}.$$

Aufgabe 55.10. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x$$

auf der Standardastroide

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0\}$$

unter Verwendung der durch $(x, y) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ gegebenen Parametrisierung (siehe Aufgabe 55.8) von M .

Aufgabe 55.11. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

auf

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20\}.$$

Aufgabe 55.12. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2)$$

auf

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Aufgabe 55.13. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$$

auf

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Aufgabe 55.14.*

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = 3x - 7y$$

auf der Ellipse

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 2y^2 = 1\}.$$

Aufgabe 55.15.*

Es sei

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion.

a) Zeige, dass g in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ genau dann ein lokales Maximum besitzt, wenn die Einschränkung der Funktion

$$y: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto y,$$

auf den Graphen

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = g(x)\}$$

im Punkt $(a, g(a))$ ein lokales Maximum besitzt.

b) Wie steht in dieser Situation der Satz über Extrema mit Nebenbedingungen mit dem eindimensionalen notwendigen Kriterium für ein lokales Extremum in Verbindung?

c) Man gebe ein Beispiel von zwei stetig differenzierbaren Funktionen

$$f, h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

und einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ derart, dass $(Df)_P$ und $(Dh)_P$ linear abhängig sind und dass h auf der Faser zu f durch P kein lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 55.16.*

Es soll eine (quaderförmige) Schachtel mit den Seitenlängen $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ angefertigt werden, deren Inhalt gleich

$$abc = 1000 \text{ cm}^3$$

sein soll.

- a) Wie müssen a, b, c , gewählt werden, damit der Materialaufwand für die sechs Seiten kritisch (also extremal sein könnte) wird?
- b) Ist der Materialaufwand unter der in a) beschriebenen Situation minimal oder maximal?
- c) Für die Luxusversion der Schachtel aus Teil a) soll die kleinste Seitenfläche (vorne und hinten) mit einer Goldfolie bedeckt werden. Die Materialkosten für eine solche Seite sind dreimal so hoch wie für eine normale Seite. Für welche Seitenlängen sind nun die Materialkosten extremal?

55.2. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 55.17.** (4 Punkte)

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y, z) = 3x + 4y + 2z$$

auf dem Ellipsoid

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 4\}.$$

Aufgabe 55.18. (4 Punkte)

Bestimme sämtliche Tangenten an die Astroide

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0\}.$$

Aufgabe 55.19. (6 (1+2+3) Punkte)

Wir betrachten im Einheitswürfel $E = [-1, 1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ eingeschriebene Vierecke mit den Eckpunkten $(-1 \leq a, b \leq 1)$

$$(1, a, -1), (b, 1, -1), (-1, -a, 1), (-b, -1, 1).$$

- (1) Zeige, dass die vier Punkte in einer Ebene liegen.
- (2) Unter welcher Bedingung an a, b handelt es sich um ein Quadrat?
- (3) Für welche a, b erhält man ein Quadrat mit maximalem Flächeninhalt?

Aufgabe 55.20. (6 Punkte)

Es seien

$$f, g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen derart, dass die Nullfasern $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ und $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ disjunkt sind und beide nur reguläre Punkte besitzen. Es sei

$$(P, Q) \in M \times N \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

ein Punktepaar, für das der Abstand zwischen solchen Punkten minimal wird. Zeige, dass die zugehörigen Tangenten parallel sind.

56. VORLESUNG - SATZ VON PICARD-LINDELÖF

Wir haben schon für verschiedene Differentialgleichungen gezeigt, dass eine Lösung existiert und durch eine Anfangswertbedingung eindeutig bestimmt ist. Der *Satz von Picard-Lindelöf* beweist dies recht allgemein unter der Voraussetzung, dass das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

56.1. Lipschitz-Bedingung.



Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Für den Satz von Picard-Lindelöf wird die Voraussetzung wesentlich sein, dass das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Definition 56.1. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U . Man sagt, dass das Vektorfeld f einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es eine reelle Zahl $L \geq 0$ mit

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L \cdot \|u - v\|$$

für alle $t \in I$ und $u, v \in U$ gibt.

Die reelle Zahl L nennt man auch eine *Lipschitz-Konstante* für das Vektorfeld f .

Definition 56.2. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U . Man sagt, dass das Vektorfeld f *lokal* einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es zu jedem Punkt $(t, v) \in I \times U$ eine offene Umgebung

$$(t, v) \in I' \times U' \subseteq I \times U$$

derart gibt, dass das auf $I' \times U'$ eingeschränkte Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Die folgende Aussage liefert ein wichtiges und leicht überprüfbares hinreichendes Kriterium, wann ein Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Lemma 56.3. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles offenes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und*

$$f: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v_1, \dots, v_n) \longmapsto f(t, v_1, \dots, v_n),$$

ein Vektorfeld auf U derart, dass die partiellen Ableitungen nach v_j existieren und stetig sind. Dann genügt f lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Für ein lineares Differentialgleichungssystem

$$v' = A(t)v + z(t)$$

mit einer stetigen Matrix $A(t)$ sind die Bedingungen der vorstehenden Aussage erfüllt. Die i -te Komponente des Vektorfelds besitzt ja die Gestalt

$$f_i(t, v_1, \dots, v_n) = a_{i1}(t)v_1 + \dots + a_{in}(t)v_n + z_i(t).$$

Daraus folgt, dass f_i nach v_j partiell ableitbar ist mit der stetigen Ableitung $a_{ij}(t)$, so dass die Bedingungen erfüllt sind.

56.2. Differential- und Integralgleichungen.

Mit dem Begriff des Integrals einer Kurve, das wir in Vorlesung 36 eingeführt haben, kann man Differentialgleichungen auch als Integralgleichungen schreiben.

Lemma 56.4. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein stetiges Vektorfeld auf U . Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ vorgegeben. Dann ist eine stetige Abbildung

$$v: J \longrightarrow U, t \longmapsto v(t),$$

auf einem Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems (insbesondere muss v differenzierbar sein)

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w,$$

wenn v die Integralgleichung

$$v(t) = w + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$$

erfüllt.

Beweis. Sei die Integralbedingung erfüllt. Dann ist

$$v(t_0) = w$$

und aufgrund des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung gilt

$$v'(t) = f(t, v(t)).$$

Insbesondere sichert die Integralbedingung, dass v differenzierbar ist. Wenn umgekehrt v eine Lösung des Anfangswertproblems ist, so ist

$$v'(s) = f(s, v(s))$$

und daher

$$w + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds = w + \int_{t_0}^t v'(s) ds = w + v(t) - v(t_0) = v(t).$$

□

56.3. Der Satz von Picard-Lindelöf.

Wir kommen nun zum wichtigsten Existenz- und Eindeutigkeitsatz für die Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 56.5. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U . Es sei vorausgesetzt, dass dieses Vektorfeld stetig sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Dann gibt es zu jedem $(t_0, w) \in I \times U$ ein offenes Intervall J mit $t_0 \in J \subseteq I$ derart, dass auf diesem Intervall eine eindeutige Lösung für das Anfangswertproblem

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

existiert.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

56.4. Die Picard-Lindelöf-Iteration.

Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf, den wir nicht vorgeführt haben, läuft über die äquivalente Integralgleichung und ist prinzipiell konstruktiv. Darauf beruht die *Picard-Lindelöf-Iteration*, mit der man Lösungen approximieren kann. Die Güte der Approximationen wird dabei durch geeignete Normen auf Funktionenräumen gemessen, was wir nicht ausführen.

Bemerkung 56.6. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U . Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ eine Anfangsbedingung. Es sei vorausgesetzt, dass dieses Vektorfeld stetig sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. In der *Picard-Lindelöf-Iteration* definiert man iterativ eine Folge von Funktionen

$$\varphi_n: I \longrightarrow V$$

durch $\varphi_0 = w$ (dies ist also die konstante Funktion mit dem Wert w) und durch

$$\varphi_{n+1}(t) = w + \int_{t_0}^t F(s, \varphi_n(s)) ds.$$

Dann gibt es ein Teilintervall $]a, b[\subseteq I$ mit $t_0 \in]a, b[$ derart, dass für $t \in]a, b[$ die Folge $\varphi_n(t)$ gegen einen Punkt $\varphi(t)$ konvergiert (man sagt, dass die Funktionenfolge punktweise konvergiert; es gelten hier auch stärkere Konvergenzaussagen). Diese Grenzfunktion φ ist dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w.$$

Bei einer linearen Differentialgleichung mit stetigen Koeffizientenfunktionen konvergiert dieses Verfahren auf ganz I .

Wir wenden dieses Verfahren auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen an, für die wir die Lösung schon kennen (siehe Aufgabe 33.11).

Beispiel 56.7. Wir wenden die Picard-Lindelöf-Iteration auf die Differentialgleichung

$$y' = F(t, y) = ty$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(0) = 1$$

an (die Lösung ist $e^{\frac{1}{2}t^2}$). Daher ist $\varphi_0 = 1$. Die erste Iteration liefert

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t s ds = 1 + \frac{1}{2}t^2.$$

Die zweite Iteration liefert

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= 1 + \int_0^t F(s, \varphi_1(s)) ds \\ &= 1 + \int_0^t F\left(s, 1 + \frac{1}{2}s^2\right) ds \\ &= 1 + \int_0^t s + \frac{1}{2}s^3 ds \\ &= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4. \end{aligned}$$

Die dritte Iteration liefert

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) &= 1 + \int_0^t F(s, \varphi_2(s)) ds \\ &= 1 + \int_0^t F\left(s, 1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s^4\right) ds \\ &= 1 + \int_0^t s + \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{8}s^5 ds \\ &= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{48}t^6. \end{aligned}$$

Dabei stimmt die i -te Iteration mit der Taylor-Entwicklung der Ordnung $2i$ der Lösung überein.

56.5. Zur Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen.

Der Satz von Picard-Lindelöf sagt, dass es unter den gegebenen Voraussetzungen lokal, also auf einem gewissen Teilintervall, eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung gibt. Die folgende Aussage zeigt, dass eine Lösung dort, wo sie definiert ist, eindeutig bestimmt ist. Wir verwenden die folgende Zusammenhangseigenschaft eines reellen Intervalls J , die aus dem Zwischenwertsatz folgt: Eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq J$, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, muss gleich ganz J sein.

Satz 56.8. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein stetiges Vektorfeld auf U das lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Es sei $J \subseteq I$ ein offenes Teilintervall und es seien

$$v_1, v_2: J \longrightarrow V$$

Lösungen des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w.$$

Dann ist $v_1 = v_2$.

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$M = \{t \in J \mid v_1(t) = v_2(t)\}.$$

Wegen $t_0 \in M$ ist diese Menge nicht leer. Zu jedem Punkt $t \in I$ gibt es nach Satz 56.5 eine offene Intervallumgebung $t \in J'$, worauf es zu gegebener Anfangsbedingung $v(t) = v_0$ genau eine Lösung der Differentialgleichung gibt. Wenn $t \in M$ ist, so ist $v_1(t) = v_2(t)$ und daher stimmen v_1 und v_2 in einer offenen Umgebung $t \in J'$ mit der eindeutigen Lösung und damit untereinander überein. Also ist $J' \subseteq M$. Dies bedeutet, dass M eine offene Teilmenge von J ist. Andererseits sind v_1 und v_2 stetig und daher ist nach Aufgabe 36.15 die Menge M auch abgeschlossen in J . Aus der Vorbemerkung folgt $M = J$. \square

Das folgende Beispiel zeigt, dass ohne die Lipschitz-Bedingung die Lösung eines Anfangswertproblems nicht eindeutig bestimmt ist. In diesem Beispiel ist das Vektorfeld nach v ableitbar, die Ableitung ist aber nicht stetig, so dass Lemma 56.3 nicht anwendbar ist.

Beispiel 56.9. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$v' = 3v^{2/3} \text{ mit } v(0) = 0$$

zum zeitunabhängigen Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Offensichtlich gibt es die stationäre Lösung

$$h(t) = 0,$$

aber auch

$$g(t) = t^3$$

ist eine Lösung, wie man durch Nachrechnen sofort bestätigt. Aus diesen beiden Lösungen kann man sich noch weitere Lösungen basteln. Seien dazu $a < b$ reelle Zahlen. Dann ist auch

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-a)^3 & \text{für } t < a, \\ 0 & \text{für } a \leq t \leq b, \\ (t-b)^3 & \text{für } t > b, \end{cases}$$

eine Lösung. D.h. es gibt Lösungen, bei denen das Teilchen beliebig lange (im Zeitintervall von a nach b) ruht und danach (und davor) sich bewegt. Sobald

sich das Teilchen in einem Punkt $\neq 0$ befindet, ist der Bewegungsablauf lokal eindeutig bestimmt.

Bemerkung 56.10. Zu einem stetigen Vektorfeld

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

kann man sich fragen, ob es ein maximales Definitionsintervall J für die Lösung eines Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

gibt. Dies ist in der Tat der Fall, wenn das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt! Man kann nämlich alle Teilmengen

$$J \subseteq I \text{ offen, } t_0 \in J, \text{ es gibt eine Lösung } v_J \text{ auf } J$$

betrachten. Wegen Satz 56.8 stimmen zwei Lösungen v_J und $v_{J'}$ auf dem Durchschnitt $J \cap J'$ überein, und liefern daher eine eindeutige Lösung auf der Vereinigung $J \cup J'$. Daher enthält die Menge der Teilintervalle, auf denen eine Lösung definiert ist, ein maximales Teilintervall J .

Dieses Teilintervall kann kleiner als I sein. Die Grenzen des maximalen Teilintervalls, auf dem eine Lösung definiert ist, heißen auch *Entweichzeiten*.

56. ARBEITSBLATT

56.1. Übungsaufgaben.

Es sei

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M . Die Abbildung heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine reelle Zahl $c \geq 0$ mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in L$ gibt.

Aufgabe 56.1. Zeige, dass die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x|,$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist.

Aufgabe 56.2. Zeige, dass eine lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow W$ zwischen euklidischen Vektorräumen Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 56.3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U . Zeige die folgenden Aussagen.

a) Wenn f (als Abbildung) Lipschitz-stetig ist, so genügt das Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung.

b) Wenn das Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt, so sind für jedes feste $t \in I$ die Abbildungen

$$U \longrightarrow V, v \longmapsto f(t, v),$$

Lipschitz-stetig.

c) Man gebe Beispiele, die zeigen, dass die Implikationen aus a) und b) nicht umkehrbar sind.

Aufgabe 56.4. Es sei

$$f: I \times U \longrightarrow V$$

ein stetiges Vektorfeld, das auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums definiert sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Es sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in I$ und $P \in U \cap W$ die Beziehung $f(t, P) \in W$ gilt. Zeige, dass eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w \in U \cap W$$

ganz in W verläuft.

Aufgabe 56.5. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y + 1 \text{ mit } y(0) = 0.$$

mit der Picard-Lindelöf-Iteration.

Aufgabe 56.6.*

Bestimme für das Anfangswertproblem

$$y' = y \text{ mit } y(0) = 1$$

explizite Formeln für die Picard-Lindelöf-Iterationen.

Aufgabe 56.7. Bestimme in Beispiel 56.7 eine explizite Formel für die Iterationen φ_n .

Aufgabe 56.8.*

Bestimme die ersten drei Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y^2 + t + yt^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Aufgabe 56.9.*

Bestimme die ersten drei Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 2$ und $y(0) = -7$.

Aufgabe 56.10.*

Bestimme die ersten drei Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $y(0) = 1$.

Aufgabe 56.11. Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -t & t^2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$.

56.2. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 56.12.** (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, u, v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Bestimme für jedes $t \in \mathbb{R}$ die nicht-regulären Punkte des Vektorfeldes

$$f_t: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Welche Ortspunkte sind zu keinem Zeitpunkt regulär?

Aufgabe 56.13. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(1) = (3, 2, 6)$$

zum ortsunabhängigen Vektorfeld

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, (t, x, y, z) \\ &\longmapsto t^3(3, 1, 4) - e^{-2t}(2, -1, 7) + (t - t^2 e^t)(0, 4, 5) + (2, 2, 2). \end{aligned}$$

Aufgabe 56.14. (3 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 4$ und $y(0) = 5$.

Aufgabe 56.15. (5 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ und $y(0) = 1$.

Aufgabe 56.16. (4 Punkte)

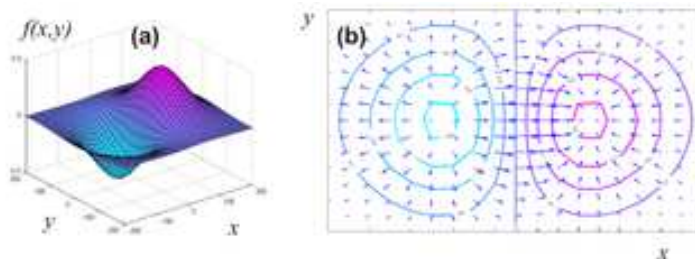
Wir betrachten das zeitunabhängige Vektorfeld

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Zeige direkt, dass dieses Vektorfeld stetig ist, aber nicht lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

57. VORLESUNG - GRADIENTENFELDER

57.1. Gradientenfelder.



Definition 57.1. Es sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ offen und

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann nennt man die Abbildung

$$U \longrightarrow V, P \longmapsto \text{Grad } h(P),$$

das zugehörige *Gradientenfeld*.

Ein Gradientenfeld ist also ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Man spricht auch von einem *Potentialfeld*, die Funktion h (manchmal $-h$) heißt dann ein Potential des Vektorfeldes. Wenn h zweimal stetig differenzierbar ist, so genügt nach Lemma 56.3 das zugehörige Gradientenfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Die folgende Aussage zeigt, dass die Lösungskurven der zugehörigen Differentialgleichung $v' = \text{Grad } h(v)$ senkrecht auf den Fasern von h liegen. Die Fasern beschreiben, wo das Potential (oder die Höhenfunktion) konstant ist, die Lösungen beschreiben den Weg des steilsten Anstiegs. Wenn h beispielsweise die Höhenfunktion eines Gebirges ist, so gibt das Gradientenfeld in jedem Punkt den steilsten Anstieg an und die Trajektorie einer Lösungskurve beschreibt den Verlauf eines Baches (wir behaupten nicht, dass die Bewegung eines Wassermoleküls im Bach durch diese Differentialgleichung bestimmt ist, sondern lediglich, dass der zurückgelegte Weg, also das Bild der Kurve, mit dem Bild der Lösungskurve übereinstimmt). Der Bach verläuft immer senkrecht zu den Höhenlinien.

Lemma 57.2. Es sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ offen,

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion und

$$U \longrightarrow V, P \longmapsto G(P) = \text{Grad } h(P),$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei

$$\varphi: J \longrightarrow U$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$v' = G(v).$$

Dann steht $\varphi'(t)$ senkrecht auf dem Tangentialraum $T_{\varphi(t)}F$ der Faser F von h durch $\varphi(t)$ für $t \in J$, für die $\varphi(t)$ reguläre Punkte von h sind.

Beweis. Sei $P = \varphi(t)$ ein regulärer Punkt von h und sei $v \in T_P F = \text{kern}(Dh)_P$ ein Vektor aus dem Tangentialraum. Dann gilt direkt

$$\langle v, \varphi'(t) \rangle = \langle v, G(\varphi(t)) \rangle = \langle v, \text{Grad } h(P) \rangle = (Dh)_P(v) = 0.$$

□

Beispiel 57.3. Wir betrachten die Produktabbildung

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy.$$

Das zugehörige Gradientenfeld ist

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto G(x, y) = (y, x).$$

Die Fasern von h sind das Achsenkreuz (die Faser über 0) und die durch $xy = c$, $c \neq 0$, gegebenen Hyperbeln. Die Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

sind von der Form

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (a \cosh t + b \sinh t, a \sinh t + b \cosh t)$$

mit beliebigen $a, b \in \mathbb{R}$, wie man direkt nachrechnet. Dabei ist $\varphi(0) = (a, b)$. Für $a = b = 0$ ist dies die stationäre Lösung im Nullpunkt, in dem die Produktabbildung nicht regulär ist. Bei $a = b = 1$ ist $\varphi(t) = (e^t, e^t)$, das Bild dieser Lösung ist die obere Halbdiaagonale (ohne den Nullpunkt), bei $a = b = -1$ ist $\varphi(t) = (-e^t, -e^t)$, das Bild dieser Lösung ist die untere Halbdiaagonale, bei $a = 1$ und $b = -1$ ist $\varphi(t) = (e^{-t}, -e^{-t})$, das Bild dieser Lösung ist die untere Hälfte der Nebendiagonalen, bei $a = -1$ und $b = 1$ ist $\varphi(t) = (-e^{-t}, e^{-t})$, das Bild dieser Lösung ist die obere Hälfte der Nebendiagonalen.

Ansonsten treffen die Lösungskurven das Achsenkreuz in einem Punkt $\neq (0, 0)$. Wenn man diesen Punkt als Anfangswert zum Zeitpunkt $t = 0$ nimmt, so kann man die Lösungskurven als

$$(a \cosh t, a \sinh t)$$

(zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Lösung auf der x -Achse im Punkt $(a, 0)$), und als

$$(b \sinh t, b \cosh t)$$

(zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Lösung auf der y -Achse im Punkt $(0, b)$) realisieren. Die Bahnen dieser Lösungen erfüllen die Gleichung $x^2(t) - y^2(t) = a^2$ bzw. $x^2(t) - y^2(t) = b^2$, d.h. sie sind selbst Hyperbeln.

57.2. Wegintegrale und Gradientenfelder.

Eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *(weg-)zusammenhängend*, wenn man je zwei Punkte $P, Q \in U$ durch einen stetigen Weg miteinander verbinden kann.

Lemma 57.4. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und*

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion mit dem zugehörigen Gradientenfeld $G = \text{Grad } h$. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein stetig differenzierbarer Weg in U . Dann gilt für das Wegintegral

$$\int_{\gamma} G = h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)).$$

*D.h. das Wegintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab.*²²

Beweis. Aufgrund der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} G &= \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n G_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b (h \circ \gamma)'(t) dt \\ &= h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

Korollar 57.5. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und*

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion mit dem zugehörigen Gradientenfeld $G = \text{Grad } h$. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dann ist

$$\int_{\gamma} G = 0.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 57.4. □

²²In einem Potentialfeld ist also die geleistete Arbeit gleich der Potentialdifferenz von Start- und Endpunkt.

Satz 57.6. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene zusammenhängende Teilmenge und*

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

- (1) *G ist ein Gradientenfeld.*
- (2) *Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ hängt das Wegintegral $\int_{\gamma} G$ nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ ab.*

Beweis. Die Implikation (1) \Rightarrow (2) folgt aus Lemma 57.4. Sei umgekehrt die Eigenschaft (2) erfüllt. Wir geben eine auf U definierte Funktion h an, die differenzierbar ist und deren Gradientenfeld gleich dem vorgegebenen Vektorfeld ist. Dazu sei ein Punkt $P \in U$ fixiert. Für jeden Punkt $Q \in U$ gibt es einen stetig differenzierbaren Weg²³

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$. Wir setzen

$$h(Q) := \int_{\gamma} G.$$

Aufgrund der vorausgesetzten Wegunabhängigkeit des Integrals ist $h(Q)$ wohldefiniert. Wir müssen zeigen, dass diese so definierte Funktion in jedem Punkt $Q \in U$ und in jede Richtung $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und die Richtungsableitung mit $\langle G(Q), v \rangle$ übereinstimmt. Dazu betrachten wir

$$h(Q+tv) - h(Q) = \int_{\delta} G = \int_0^t \langle G(Q+sv), v \rangle ds = \int_0^t \sum_{i=1}^n G_i(Q+sv) \cdot v_i ds,$$

wobei δ der verbindende lineare Weg von Q nach $Q+tv$ auf $[0, t]$ sei (und t hinreichend klein sei, so dass $Q+tv \in U$ ist). Für den Differentialquotienten ist

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(Q+tv) - h(Q)}{t} &= \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t G_i(Q+sv) \cdot v_i ds \\ &= \sum_{i=1}^n G_i(Q) \cdot v_i \\ &= \langle G(Q), v \rangle. \end{aligned}$$

Somit existiert die Richtungsableitung von h in Richtung v und hängt stetig von Q ab. Diese Gleichung zeigt ferner

$$(Dh)_Q(v) = (D_v h)(Q) = \langle G(Q), v \rangle,$$

so dass G das Gradientenfeld zu h ist. □

²³Aus der Existenz eines verbindenden stetigen Weges folgt die Existenz eines verbindenden stetig differenzierbaren Weges. Man könnte also auch diese Eigenschaft als Definition für zusammenhängend nehmen.

57.3. Die Integrabilitätsbedingung.

Wie kann man erkennen, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist? Eine notwendige Bedingung schlägt sich in der folgenden Definition nieder.

Definition 57.7. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein differenzierbares Vektorfeld. Man sagt, dass G die *Integrabilitätsbedingung* erfüllt (oder *lokal integrabel* ist), wenn

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(P) = \frac{\partial G_j}{\partial x_i}(P)$$

für alle $P \in U$ und alle i, j gilt.

Lemma 57.8. *Das Gradientenfeld einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion erfüllt die Integrabilitätsbedingung.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 47.11. □

Beispiel 57.9. Das lineare Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

erfüllt wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial G_2}{\partial x}$$

nicht die Integrabilitätsbedingung. Es kann also nach Lemma 57.8 kein Gradientenfeld sein.

Definition 57.10. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bezüglich eines Punktes $P \in T$, wenn für jeden Punkt $Q \in T$ die Verbindungsstrecke $sQ + (1-s)P$, $s \in [0, 1]$, ganz in T liegt.

Satz 57.11. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine sternförmige offene Teilmenge und*

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

- (1) G ist ein Gradientenfeld.
- (2) G erfüllt die Integrabilitätsbedingung.
- (3) Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ hängt das Wegintegral $\int_\gamma G$ nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ ab.

Beweis. Die Äquivalenz (1) \iff (3) folgt aus Satz 57.6 und die Implikation (1) \implies (2) aus Lemma 57.8. Es bleibt also (2) \implies (1) zu zeigen, wobei wir explizit eine Stammfunktion h zum Vektorfeld G angeben. Es sei $P \in U$ ein

Punkt derart, dass U bezüglich P sternförmig ist. Wir definieren $h(Q)$ über das Wegintegral zu G zum linearen Verbindungsweg

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow U, t \longmapsto P + t(Q - P),$$

also

$$h(Q) := \int_{\gamma} G = \int_0^1 \langle G(\gamma(t)), Q - P \rangle dt.$$

Wir müssen zeigen, dass der Gradient zu h gleich G ist, d.h. es ist

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = G_i$$

zu zeigen. Dafür können wir $P = 0$ annehmen und wir schreiben v statt Q . Mit diesen Bezeichnungen und Voraussetzungen ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} h(v) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^1 \langle G(tv), v \rangle dt \right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \langle G(tv), v \rangle \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n G_j(tv) \cdot v_j \right) \right) dt \\ &= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} G_j \right) (tv) + G_i(tv) dt \\ &= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} G_i \right) (tv) + G_i(tv) dt \\ &= \int_0^1 (t \mapsto t \cdot G_i(tv))' dt \\ &= (t \cdot G_i(tv)) \Big|_0^1 \\ &= G_i(v). \end{aligned}$$

Dabei beruht die zweite Gleichung auf der Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation (angewendet auf die stetig differenzierbare Funktion $[0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, v) \mapsto \langle G(tv), v \rangle$) die vierte Gleichung auf Aufgabe 46.13, die fünfte Gleichung auf der Integrabilitätsbedingung, die sechste Gleichung auf der Kettenregel und der Produktregel und die siebte Gleichung auf der Newton-Leibniz-Formel. \square

Beispiel 57.12. Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

erfüllt dieses Vektorfeld die Integrabilitätsbedingung. Es handelt sich aber nicht um ein Gradientenfeld: Das Wegintegral zur (geschlossenen) trigonometrischen Parametrisierung des Einheitskreises

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} G &= \int_0^{2\pi} \left\langle G(\gamma(t)), \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

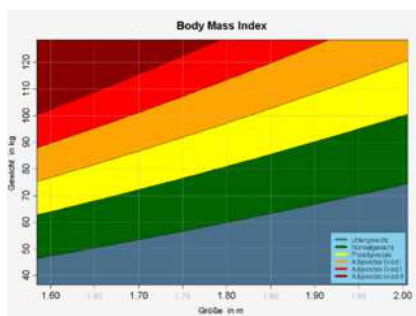
im Gegensatz zu Korollar 57.5.

57. ARBEITSBLATT

57.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 57.1. Skizziere die Höhenlinien und das Gradientenfeld zur Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2(x - 3)^2 + 3(y - 1)^2.$$



Aufgabe 57.2. Der Body-Mass-Index wird bekanntlich über die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, (m, l) \longmapsto \frac{m}{l^2},$$

berechnet, wobei m für die Masse und l für die Länge eines Menschen (oder eines Tieres, einer Pflanze, eines Gebäudes) steht (in den Einheiten Kilogramm und Meter).

- (1) Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär?
- (2) Skizziere das zugehörige Gradientenfeld.
- (3) Wenn man seinen Body-Mass-Index verringern möchte, und dabei dem Gradienten dieser Abbildung vertraut, sollte man dann besser abnehmen oder größer werden? Inwiefern hängt dies vom Punkt, inwiefern von den gewählten Einheiten ab?
- (4) Wie lassen sich die Fasern dieser Abbildung als Graphen von Funktionen beschreiben?
- (5) Berechne die Hesse-Matrix von φ und bestimme ihren Typ in jedem Punkt.
- (6) Zu welchen Daten wird das Maximum bzw. das Minimum des Body-Mass-Index angenommen, wenn man ihn auf $[30, 300] \times [1, 2]$ einschränkt, und welche Werte besitzt er dann?
- (7) Modelliere die Abbildung, die den Menschen aus einer Menge T ihren Body-Mass-Index zuordnet, mittels Messungen, Produktabbildung und Hintereinanderschaltung.

Aufgabe 57.3. Es sei

$$h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und $P \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt zu h . Wie sieht die Lösung des Anfangswertproblems

$$v(0) = P$$

zum zugehörigen Gradientenfeld $\text{Grad } h(P)$ aus?

Aufgabe 57.4.*

Bestimme die Lösung zum Anfangswertproblem

$$v' = \text{Grad } h(v)$$

mit $v(0) = w$ ($w \in \mathbb{R}^2$) zum Gradientenfeld zur Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Aufgabe 57.5. Bestimme die Lösung zum Anfangswertproblem

$$v' = \text{Grad } h(v)$$

mit $v(0) = w$ ($w \in \mathbb{R}^3$) zum Gradientenfeld zur Funktion

$$h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 - y^2 + 3yz.$$

Aufgabe 57.6. Berechne die ersten drei Iterationen der Picard-Lindelöf-Iteration zum Anfangswertproblem

$$v' = \text{Grad } h(v) \text{ und } v(0) = (3, 2)$$

zu

$$h(x, y) = x^3 - xy^2 + y^2.$$

Aufgabe 57.7.*

Es sei

$$G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein Gradientenfeld und sei

$$\varphi: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

($J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = G(v)$. Es gelte $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Zeige, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 57.8.*

Es sei

$$h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und

$$G(P) = \text{Grad } h(P)$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Lösung zur zugehörigen Differentialgleichung, die eine Faser F zu h zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $t_0 < t_1$ trifft. Zeige, dass $\varphi|_{[t_0, t_1]}$ konstant ist.

Aufgabe 57.9.*

Es sei

$$h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und

$$G(P) = \text{Grad } h(P)$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Lösung zur zugehörigen Differentialgleichung und es sei $t \in \mathbb{R}$ ein Zeitpunkt mit

$$\varphi'(t) = 0.$$

- a) Es sei h zweimal stetig differenzierbar. Zeige, dass φ konstant ist.
 b) Zeige durch ein Beispiel, dass ohne die Voraussetzung aus a) φ nicht konstant sein muss.



Die Himmelscheibe von Nebra. Ist die Mondsichel darauf sternförmig?

Aufgabe 57.10. Betrachte zu $r, s \in \mathbb{R}_+$ mit $r + s > 1$ und $s < r + 1$ die „sichelförmige“ Menge

$$M_{r,s} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq r, \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq s \right\}.$$

Für welche r, s ist diese Menge sternförmig?

Aufgabe 57.11. Zeige, dass eine sternförmige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 57.12. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann ein (nichtleeres) Intervall ist, wenn T sternförmig ist.

Aufgabe 57.13. Es seien P_1, \dots, P_k ($k \geq 1$) endlich viele Punkte im \mathbb{R}^n . Zeige, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$ nicht sternförmig ist.

Aufgabe 57.14. Man gebe ein Beispiel für eine sternförmige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ an, die nur bezüglich eines einzigen Punktes sternförmig ist.

Aufgabe 57.15. Man gebe ein Beispiel für eine offene, sternförmige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ an, die nur bezüglich eines einzigen Punktes sternförmig ist.

Aufgabe 57.16. Überprüfe, ob das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left(\frac{-2x^2 + 2y^4}{(x^2 + y^4)^2}, \frac{8xy^3}{(x^2 + y^4)^2} \right),$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt oder nicht.

Aufgabe 57.17. Überprüfe, ob das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left(\frac{-2x^2 + 2y^4}{(x^3 + y^3)^2}, \frac{8xy^3}{(x^3 + y^3)^2} \right),$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt oder nicht.

Aufgabe 57.18. Zeige, dass das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (2x - y \cos x, -\sin x),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

Ob ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^2$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt lässt sich äquivalent mit der sogenannten Rotation ausdrücken.

Zu einem partiell differenzierbaren Vektorfeld

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ nennt man

$$\text{rot}(G)(P) := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial x_2}(P) - \frac{\partial G_2}{\partial x_3}(P) \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_3}(P) - \frac{\partial G_3}{\partial x_1}(P) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(P) - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(P) \end{pmatrix}$$

die *Rotation* von G .

Die Rotation ist ebenfalls ein Vektorfeld.

Aufgabe 57.19. Es sei

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeige, dass G genau dann die Integrabilitätsbedingung erfüllt, wenn $\operatorname{rot}(G) = 0$ ist.

Aufgabe 57.20. Berechne zum Vektorfeld

$$G: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto \left(x^3 - z^2, \frac{xy}{z}, \frac{z}{x^2y}\right)$$

die Rotation.

Aufgabe 57.21.*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$G(x, y) = (y, -x^3)$$

Zeige auf zweifache Weise, dass G kein Gradientenfeld ist.

- (1) Mit der Integrabilitätsbedingung.
- (2) Mit Wegintegralen.

Aufgabe 57.22.*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (y - \cos(x + z), x, 2z - \cos(x + z)).$$

- a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass G ein Gradientenfeld ist.
- b) Bestimme ein Potential zu G .

Aufgabe 57.23.*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto \left(ye^{xy} + \ln z, xe^{xy} - 2yz, \frac{x}{z} - y^2\right).$$

- a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass G ein Gradientenfeld ist.
- b) Bestimme ein Potential zu G .

Aufgabe 57.24.*

Es sei

$$F: G \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und es sei

$$\rho(P) := \frac{\partial F_2}{\partial x}(P) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(P).$$

Zeige

$$\rho(P) = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\gamma_\epsilon} F,$$

wobei γ_ϵ den einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreisweg um P mit Radius ϵ bezeichnet.

57.2. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 57.25.** (3 Punkte)

Es sei

$$h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform. Bestimme das zugehörige Gradientenfeld und die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichung.

Aufgabe 57.26. (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung, die zum Gradientenfeld der Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y^2,$$

gehört.

Aufgabe 57.27. (3 Punkte)

Welche linearen Vektorfelder

$$G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto Mv,$$

sind Gradientenfelder? Wie sehen die Potentialfunktionen dazu aus?

Aufgabe 57.28. (3 Punkte)

Bestimme, ob zur Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

der Subgraph und ob der Epigraph sternförmig ist.

Aufgabe 57.29. (6 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine sternförmige Teilmenge. Zeige, dass auch der Abschluss \overline{T} sternförmig ist.

Aufgabe 57.30. (3 Punkte)

Zeige, dass das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (ye^z - 3x^2z, xe^z + 2yz, xye^z + y^2 - x^3),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

Aufgabe 57.31. (3 Punkte)

Berechne zum Vektorfeld

$$G: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \neq 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (x, y, z) \mapsto \left(\frac{e^{3x} - z}{y}, \frac{\cos x}{z^2}, \frac{\ln z}{xy} \right)$$

die Rotation.

58. VORLESUNG - VOLUMINA

58.1. Volumenberechnungen.

Ein n -dimensionaler (achsenparalleler) Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$$

hat nach Definition das n -dimensionale Volumen

$$\lambda^n(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Bei $n = 1$ handelt es sich um die Streckenlänge, bei $n = 2$ um den Flächeninhalt eines Rechtecks, bei $n = 3$ um das Volumen eines Quaders. Im Rahmen der Maßtheorie versucht man „möglichst vielen“ Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sinnvolles Volumen (ein Maß), geschrieben

$$\lambda^n(T),$$

zuzuordnen. Dies ist eine recht aufwändige Theorie, von der wir hier nur einige Prinzipien, Ergebnisse und Berechnungsansätze vorstellen können. Wir beschränken uns auf kompakte, also abgeschlossene und beschränkte Teilmengen des \mathbb{R}^n (diese stellen wir uns als einen „starrten Körper“ vor). Für den Subgraphen zu einer Funktion, also die Menge (die in der Tat beschränkt und abgeschlossen ist)

$$\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

zu einer stetigen Funktion

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

haben wir schon verwendet, dass der Flächeninhalt durch das bestimmte Integral der Funktion berechnet werden kann. Integration ist das wichtigste Hilfsmittel zur numerischen Bestimmung von allgemeinen Volumina.

Wir besprechen nun einige wichtige Prinzipien von Volumina.

58.2. Überpflasterungseigenschaften.

Integrierbare Funktionen hatten wir über Ober- und Untersummen eingeführt. Für eine beliebige (kompakte) Teilmenge T kann man das Volumen ebenfalls über Obersummen berechnen, wobei man Überpflasterungen von T mit einer Familie von (achsenparallelen) Quadern Q_i , $i \in I$, betrachtet.

Definition 58.1. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Eine Familie von (achsenparallelen) Quadern Q_i , $i \in I$, mit $T \subseteq \bigcup_{i \in I} Q_i$ nennt man eine *Quader-Überpflasterung* von T .

Zu einer endlichen Überpflasterung (bei der also die Indexmenge I endlich ist) nennt man die Summe $\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i)$ die *Quadersumme* (oder *Quadervolumensumme* oder *Gesamtvolumensumme*) der Überpflasterung. Eine wichtige Charakterisierung des Volumens einer kompakten Teilmenge ist, dass sie gleich dem Infimum über alle Quadersummen von Überpflasterungen ist.

Satz 58.2. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist das n -dimensionale Volumen von T gleich dem Infimum über die Volumensumme aller endlichen Quader-Überpflasterungen Q_i , $i \in I$, von T , also

$$\lambda^n(T) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) \mid T \subseteq \bigcup_{i \in I} Q_i \right\}.$$

Man könnte insbesondere die rechte Seite, also das Infimum über die Quadervolumensummen von Überpflasterungen, als Definition des Volumens ansetzen. Die Aussage gilt auch, wenn man mit beliebigen Quadern statt nur mit achsenparallelen Quadern arbeitet. Die Infimumseigenschaft bedeutet insbesondere, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Überpflasterung Q_i , $i \in I$, mit

$$\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) - \epsilon \leq \lambda^n(T) \leq \sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i)$$

gibt, das wahre Volumen wird also beliebig genau durch Quadervolumensummen approximiert.

Wir erwähnen einige weitere wichtige Eigenschaften des Volumens. Diese Eigenschaften werden natürlich von einer sinnvollen Volumentheorie erwartet, ihr Nachweis kann aber im einzelnen schwierig sein.

Lemma 58.3. (1) Für kompakte Teilmengen T_1 und T_2 in \mathbb{R}^n mit $T_1 \subseteq T_2$ ist

$$\lambda^n(T_1) \leq \lambda^n(T_2).$$

(2) Für kompakte Teilmengen T_i (I endlich) ist

$$\lambda^n\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) \leq \sum_{i \in I} \lambda^n(T_i).$$

(3) Für $T \subseteq \bigcup_{i \in I} T_i$ mit kompakten Teilmengen T, T_i (I endlich) ist

$$\lambda^n(T) \leq \sum_{i \in I} \lambda^n(T_i).$$

Beweis. Wir argumentieren über die Überpflasterungseigenschaft im Sinne von Satz 58.2. Die Eigenschaft (1) ist klar, da eine Quaderüberpflasterung der größeren Menge insbesondere eine Überpflasterung der kleineren Menge ist.

Zum Beweis von (2) können wir uns auf zwei kompakte Teilmengen S und T beschränken. Nehmen wir an, dass die Aussage nicht stimmt, sei also

$$\lambda^n(S \cup T) > \lambda^n(S) + \lambda^n(T).$$

Es sei $\epsilon > 0$ die Differenz. Wir können das Volumen von S durch eine Quaderüberpflasterung Q_i , $i \in I$, bis auf einen Fehler $\leq \frac{\epsilon}{3}$ und ebenso das Volumen von T durch eine Quaderüberpflasterung P_j , $j \in J$, bis auf einen Fehler $\leq \frac{\epsilon}{3}$ approximieren. Die Vereinigung der beiden Quaderüberpflasterungen ist eine Quaderüberpflasterung von $S \cup T$ mit einem Fehler von maximal $\frac{2\epsilon}{3}$. Das ergibt einen Widerspruch.

(3) folgt direkt aus (1) und (2). \square

Lemma 58.4. *Es seien T_1 und T_2 disjunkte kompakte Teilmengen im \mathbb{R}^n . Dann ist*

$$\lambda^n(T_1 \cup T_2) = \lambda^n(T_1) + \lambda^n(T_2).$$

Beweis. Die Abschätzung \leq folgt aus Lemma 58.3 (2).

Für die andere Abschätzung sei eine Überpflasterung von $T_1 \cup T_2$ gegeben. Aufgrund der Disjunktheit und der Kompaktheit gibt es einen positiven Abstand zwischen den beiden Mengen, d.h. es gibt ein $\epsilon > 0$ derart, dass $d(P_1, P_2) > 0$ für alle $P_1 \in T_1$, $P_2 \in T_2$, ist. Einen Quader aus der Überpflasterung, der beide Teilmengen schneidet, kann man dann in endlich viele Quader unterteilen, so dass diese zu (mindestens) einer der beiden Mengen disjunkt sind. So erreicht man eine Verfeinerung der Überpflasterung mit der gleichen Quadervolumensumme, deren Quader jeweils nur eine Teilmenge treffen. Daher ist die Volumensumme dieser Überpflasterung gleich der Summe der Volumensumme der beiden Teilüberpflasterungen und damit mindestens so groß wie $\lambda^n(T_1) + \lambda^n(T_2)$. \square

Lemma 58.5. *Es seien $T_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $T_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakte Teilmengen. Dann gilt für die Produktmenge $T_1 \times T_2 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ die Beziehung*

$$\lambda^{n+m}(T_1 \times T_2) = \lambda^n(T_1) \cdot \lambda^m(T_2).$$

Eine typische Produktmenge ist ein *Zylinder*, also das Produkt aus einer Grundmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und einer Strecke, also einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Sein Volumen ist das Produkt aus dem Volumen der Grundmenge und der Streckenlänge.

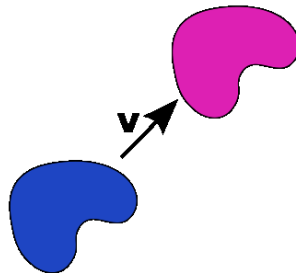
Lemma 58.6. *Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $k < n$ und $T \subseteq V$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist $\lambda^n(T) = 0$.*

Man beachte, dass dies eine Aussage über das n -dimensionale Volumen ist, nicht über das k -dimensionale Volumen als Teilmenge in $V \cong \mathbb{R}^k$. Insbesondere besitzen einzelne Punkte im \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, das Volumen 0. Da sich jede Teilmenge aus seinen Einzelpunkten zusammensetzt, kann die obige Vereinigungsregel nicht für beliebige Vereinigungen gelten, d.h. die Gleichungskette

$$\lambda^n(T) = \lambda^n\left(\bigcup_{P \in T} \{P\}\right) = \sum_{P \in T} \lambda^n(\{P\}) = \sum_{P \in T} 0 = 0$$

ist falsch (andernfalls hätte jede Teilmenge das Volumen 0). Teilmengen, deren Volumen 0 ist, nennt man *Nullmenge*.

58.3. Volumina und lineare Abbildungen.



Eine weitere wichtige Eigenschaft der Maßtheorie ist die *Translationsinvarianz*. Für eine beliebige Teilmenge $T \subseteq V$ in einem Vektorraum V und einen Vektor $v \in V$ nennt man

$$T + v = \{x + v \mid x \in T\}$$

die um v verschobene Menge.

Lemma 58.7. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist*

$$\lambda^n(T + v) = \lambda^n(T).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Überpflasterungseigenschaft, da beliebige Quader-Überpflasterungen mitverschoben werden können und so über die gleiche Menge das Infimum gebildet wird. \square

Für lineare Abbildungen gilt die folgende Beziehung zwischen dem Volumen einer Teilmenge und dem Volumen ihres Bildes.

Satz 58.8. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und*

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \longmapsto \varphi(x),$$

eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\lambda^n(\varphi(T)) = |\det \varphi| \cdot \lambda^n(T).$$

Beweis. Dies folgt u.A. aus der multiplikativen Zerlegung einer Matrix in Elementarmatrizen und eine Diagonalmatrix und aus dem Determinantenmultiplikationssatz. \square

Korollar 58.9. *Bei einer Streckung*

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto av,$$

um den Streckungsfaktor $a \in \mathbb{R}$ gilt für jede kompakte Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ die Formel

$$\lambda^n(\varphi(T)) = |a|^n \cdot \lambda^n(T).$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Satz 58.8 \square

Beispiel 58.10. Den Flächeninhalt des Einheitskreises haben wir in Beispiel 20.10 über ein Integral als π bestimmt. Unter der durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung wird die Einheitskreisscheibe $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ auf

$$\{(ax, by) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} = \left\{ (u, v) \mid \frac{1}{a^2}u^2 + \frac{1}{b^2}v^2 \leq 1 \right\} = \{(u, v) \mid b^2u^2 + a^2v^2 \leq a^2b^2\}$$

abgebildet. Das Bild ist eine (achsenparallele) Ellipsenscheibe. Ihr Flächeninhalt ist nach Satz 58.8 gleich πab .

58.4. Das Cavalieri-Prinzip.



Das Cavalieri-Prinzip

Für Berechnungen ist das *Cavalieri-Prinzip* entscheidend. Mit ihm wird die Berechnung eines n -dimensionalen Volumens auf die Integration des $(n-1)$ -dimensionalen Volumens des Querschnitts des Körpers T zurückgeführt. Zu einer Teilmenge

$$T \subseteq [a, b] \times \mathbb{R}^{n-1}$$

und einem $x \in [a, b]$ nennt man $T(x) = (\{x\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap T$ den *Querschnitt* von T durch x . Der Querschnitt zu kompaktem T ist eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^{n-1} und besitzt somit ein $(n-1)$ -dimensionales Volumen, das mit x variiert.



Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

Satz 58.11. *Es sei $T \subseteq [a, b] \times \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte Teilmenge und es sei vorausgesetzt, dass die Funktion*

$$h: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto h(x) = \lambda^{n-1}(x \times \mathbb{R}^{n-1} \cap T)$$

stetig ist. Dann ist

$$\lambda^n(T) = \int_a^b h(x) dx.$$

Beispiel 58.12. Wir wollen das Volumen einer dreidimensionalen abgeschlossenen Kugel vom Radius r berechnen, also von

$$B(r) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq r\}.$$

Wegen Satz 58.8 gilt dabei $\lambda^3(B(r)) = r^3 \lambda^3(B(1))$, d.h. es geht im Wesentlichen darum, das Volumen der Einheitskugel auszurechnen.

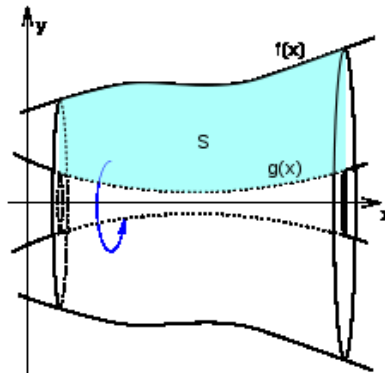
Für jedes fixierte u , $-1 \leq u \leq 1$, kann man den Querschnitt als

$$\begin{aligned} T(u) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in B(1) \mid x_3 = u\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 - u^2\} \end{aligned}$$

schreiben, d.h. als eine Kreisfläche vom Radius $\sqrt{1-u^2}$. Aufgrund des Cavalieri-Prinzips ist daher

$$\begin{aligned}
 \lambda^3(B(1)) &= \int_{-1}^1 \lambda^2\left(B_2\left(\sqrt{1-u^2}\right)\right) dh \\
 &= \pi \int_{-1}^1 1-u^2 du \\
 &= \pi \left(u - \frac{1}{3}u^3\right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \pi \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right) \\
 &= \pi \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

58.5. Rotationsmengen und Kegel.



Definition 58.13. Zu einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ nennt man

$$\{(x, y \cos \alpha, y \sin \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

die zugehörige *Rotationsmenge* (um die x -Achse).

Zu einer Funktion

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

nennt man die Rotationsmenge (oder Rotationskörper) zum Subgraphen zu f auch den Rotationskörper zu f .

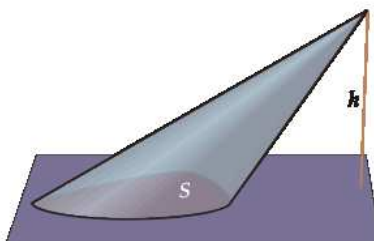
Satz 58.14. *Es sei*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, t \longmapsto f(t),$$

eine stetige Funktion und sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ der Rotationskörper zu f um die x -Achse. Dann besitzt K das Volumen

$$\lambda^3(K) = \pi \cdot \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Beweis. Die Querschnittsfläche zu t ist ein Kreis mit Radius $f(t)$, dessen Flächeninhalt ist $\pi f(t)^2$ nach Beispiel 20.10. Somit folgt die Aussage aus dem Cavalieri-Prinzip. \square



Definition 58.15. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times 0$ und $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt. Dann nennt man die Menge

$$K_B = \{P + t(Q - P) \mid Q \in B, t \in [0, 1]\}$$

den *Kegel* zur Basis B mit der Spitze P .

Satz 58.16. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt und K_B der zugehörige Kegel. Es sei $h = P_{n+1}$ die letzte Koordinate von P . Dann ist K_B ebenfalls kompakt, und es gilt

$$\lambda^{n+1}(K_B) = \frac{1}{n+1} \lambda^n(B) \cdot |h|.$$

Beweis. Der Durchschnitt von $K = K_B$ mit der durch $x_{n+1} = u$, u zwischen 0 und h , gegebenen Hyperebene ist

$$K(u) = \{(x_1, \dots, x_n, u) \mid (x_1, \dots, x_n, u) \in K_B\} = \left\{ P + \frac{(h-u)}{h}(Q - P) \mid Q \in B \right\}.$$

Wegen der Translationsinvarianz und Korollar 58.10 ist dessen Volumen gleich $\left|\frac{h-u}{h}\right|^n \lambda^n(B)$. Nach dem Cavalieri-Prinzip ist also (mit $s = h - u$)

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1}(K_B) &= \int_0^{|h|} \lambda^n(K(s)) ds \\ &= \int_0^{|h|} \lambda^n(B) \cdot \left(\frac{s}{|h|}\right)^n ds \\ &= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{|h|^n} \cdot \int_0^{|h|} s^n ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{|h|^n} \cdot \frac{1}{n+1} |h|^{n+1} \\
&= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |h|.
\end{aligned}$$

□

58. ARBEITSBLATT

58.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 58.1. Bestimme den Flächeninhalt der Vereinigung der beiden Rechtecke R und S , wobei R durch die Eckpunkte $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 2)$, $(3, 2)$ und S durch die Eckpunkte $(2, 1)$, $(5, 1)$, $(2, 4)$, $(5, 4)$ gegeben ist.

Aufgabe 58.2. Bestimme den Flächeninhalt eines regulären Sechsecks mit der Seitenlänge 1.

Aufgabe 58.3. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, eine kompakte Teilmenge, die eine nichtleere offene Teilmenge umfasse. Zeige $\lambda^n(T) > 0$.

Aufgabe 58.4.*

Es seien $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2)$ und $P_3 = (a_3, b_3)$ drei Punkte im \mathbb{R}^2 . Stelle den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks mit $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ dar.

Aufgabe 58.5. Es seien drei Punkte $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Zeige, dass der Flächeninhalt des durch diese drei Punkte bestimmten Dreiecks eine rationale Zahl ist.

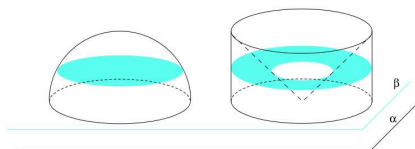
Aufgabe 58.6. Bestimme das Volumen einer gleichseitigen Pyramide (eines *Tetraeders*) mit Seitenlänge 1.

Aufgabe 58.7. Bestimme den Flächeninhalt eines Dreiecks mit dem Cavalieri-Prinzip.

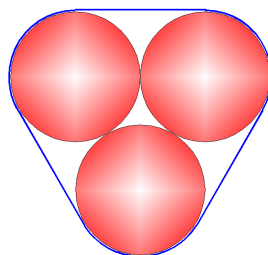
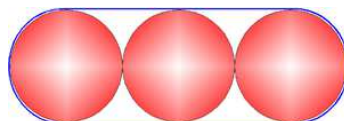
Aufgabe 58.8. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Sinusbogen zwischen 0 und π um die x -Achse gedreht wird.

Aufgabe 58.9. Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Standardparabel um die y -Achse gedreht wird und dies mit der Ebene zu $y = h$ „gedeckelt“ wird, in Abhängigkeit von $h \geq 0$.

Aufgabe 58.10. Fasse die Einheitskugel als Rotationskörper auf und berechne damit ihr Volumen.



Aufgabe 58.11. Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man aus dem Einheitszylinder, dessen Grundfläche eine Einheitskreisscheibe ist und der die Höhe 1 besitzt, den (offenen) Kegel herausnimmt, der den oberen Zylinderdeckel als Grundfläche und den unteren Kreismittelpunkt als Spitze besitzt.



Aufgabe 58.12.*

Es sollen drei Kugeln mit Radius 1 straff in eine Folie eingepackt werden. Berechne das Volumen des Gesamtpakets, wenn

- die Kugeln linear und anliegend angeordnet werden,
- die Kugeln als Dreieck anliegend angeordnet werden.

Aufgabe 58.13.*

Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, t \longmapsto t + \sqrt{t} + 1,$$

um die t -Achse rotieren lässt.

Aufgabe 58.14.*

Häuptling Winnetou möchte sich ein neues Tipi über einer quadratischen Grundfläche von 3×3 Metern errichten. Er verwendet dafür vier Stangen mit einer Länge von 5 Metern, die in den Eckpunkten der Grundfläche stehen und sich in der Zeltspitze treffen sollen.

- Wie viel Quadratmeter Büffelhaut wird für das Zeltdach gebraucht?
- Wie viel Kubikmeter Rauminhalt hat das neue Zelt?

Aufgabe 58.15.*

Ein Eimer steht im Garten, gestern abend war er leer. Der Eimer ist 30 cm hoch, er hat am Boden einen Durchmesser von 20 cm und oben am Rand einen Durchmesser von 25 cm. Über Nacht hat es 5 cm geregnet. Wie hoch ist der Wasserstand im Eimer am Morgen?

58.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 58.16. Es sei K die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt in $(0, R)$ und dem Radius $0 < r < R$. Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn sich K um die x -Achse dreht.

Aufgabe 58.17. Es sei V der Viertelkreis mit dem Mittelpunkt in $(1, 0)$, dem Radius 1 und den Eckpunkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Berechne das Volumen des „runden Trichters“, der entsteht, wenn man V um die y -Achse dreht.

Aufgabe 58.18. Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(3, 4)$, $(5, 5)$ und $(4, 6)$. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man D um die x -Achse dreht.

Aufgabe 58.19. Berechne das Volumen des Kegels, dessen Spitze in $(2, 3, 5)$ liegt und dessen Grundfläche die durch

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 2y^2 \leq 4\}$$

gegebene Ellipse ist.

Aufgabe 58.20. Es sei T ein Kreissektor des Einheitskreises zum Winkel α (im Bogenmaß). Begründe mit Überpflasterungseigenschaften und mit Satz 58.8, dass der Flächeninhalt von T gleich $\frac{\alpha}{2}$ ist.

59. VORLESUNG - MEHRFACHINTEGRALE

59.1. Mehrfache Integrale.

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und es sei

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine stetige Funktion. Wir wollen das Integral $\int_T f d\lambda^n$ definieren, wofür man, wenn die Variablen des \mathbb{R}^n mit x_1, x_2, \dots, x_n bezeichnet werden, auch

$$\int \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

schreibt. Diese Schreibweise wird dann bevorzugt, wenn die jeweiligen Grenzen sinnvoll beschrieben werden können und so die Berechnung des Integrals auf die sukzessive Berechnung von n Einzelintegralen (in einer Variablen) zurückgeführt werden kann. Bei $n = 2$ spricht man von einem *Doppelintegral* und bei $n = 3$ von einem *Dreifachintegral*.

Eine wichtige Interpretation des Integrals ist, dass f eine *Massenverteilung* (oder Ladungsverteilung oder Temperaturverteilung) auf dem Körper T beschreibt. In diesem Fall ist das Integral gleich der Gesamtmasse des Körpers T . Bei $f = 1$, also bei einer konstanten Massenverteilung, erhält man über ein Integral das Volumen des Grundkörpers. Wir führen das Integral als $(n + 1)$ -dimensionales Volumen des Subgraphen ein.

Definition 59.1. Es sei T eine Menge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative Funktion. Dann nennt man die Menge

$$S(f) = \{(x, y) \in T \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

den *Subgraphen* der Funktion.

Definition 59.2. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine stetige Funktion. Es sei $S(f)$ der Subgraph dieser Funktion. Dann setzt man

$$\int_T f d\lambda^n := \lambda^{n+1}(S(f))$$

und nennt dies das (mehrdimensionale) *Integral* über T zu f .

Damit wird der Integralbegriff auf den Volumenbegriff zurückgeführt. Für eine stetige, aber nicht notwendigerweise nichtnegative Funktion f zerlegt man den Definitionsbereich in die beiden Teilmengen $T_{\geq 0} = \{P \in T \mid f(P) \geq 0\}$ und $T_{\leq 0} = \{P \in T \mid f(P) \leq 0\}$, die ebenfalls kompakt sind, und setzt

$$\int_T f d\lambda^n = \int_{T_{\geq 0}} f d\lambda^n - \int_{T_{\leq 0}} (-f) d\lambda^n.$$

Ebenso kann man die positiven und negativen Funktionen $f_+ = \min(f, 0)$ und $f_- = \min(-f, 0)$ einführen und das Integral als $\int_T f_+ d\lambda^n - \int_T f_- d\lambda^n$ ansetzen.

Aus allgemeinen Volumenregeln ergeben sich die folgenden Integrationsregeln.

Lemma 59.3. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und es seien*

$$f, g: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_T af + bg d\lambda^n = a \int_T f d\lambda^n + b \int_T g d\lambda^n.$$

(2) *Aus $f(P) \leq g(P)$ für alle $P \in T$ folgt $\int_T f d\lambda^n \leq \int_T g d\lambda^n$.*

(3) *Wenn es eine Zerlegung $T = T_1 \cup T_2$ in kompakte Teilmengen mit $\lambda^n(T_1 \cap T_2) = 0$ gibt, so ist*

$$\int_T f d\lambda^n = \int_{T_1} f d\lambda^n + \int_{T_2} f d\lambda^n.$$

Die letzte Aussage ist auch ein Ansatz, um das Integral zu einer Funktion zu definieren, die nicht notwendigerweise stetig ist. Wenn es eine Zerlegung $T = \bigcup_{i \in I} T_i$ in endlich viele kompakte Teilmengen T_i derart gibt, dass das Volumen der Durchschnitte $T_i \cap T_j$ für $i \neq j$ jeweils 0 ist (die Durchschnitte müssen also Nullmengen sein) und dass die Einschränkungen $f_i = f|_{T_i}$ stetig sind, so setzt man $\int_T f d\lambda^n = \sum_{i \in I} \int_{T_i} f_i d\lambda^n$. Eine solche Zerlegung ist auch bei stetigen Funktionen häufig sinnvoll.

59.2. Der Satz von Fubini.

Ein besonders einfacher Fall liegt vor, wenn $T = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck ist. Diese Situation wird durch den *Satz von Fubini* abgedeckt.



Satz 59.4. *Es sei*

$$f: [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f d\lambda^2 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) d\lambda^1 \right) d\lambda^1 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) d\lambda^1 \right) d\lambda^1.$$

Beweis. Der Querschnitt des Subgraphen zu $x = x_0$ ist der Subgraph der auf $x = x_0$ eingeschränkten Funktion, also

$$\{(x_0, y, z) \mid 0 \leq z \leq f(x_0, y), c \leq y \leq d\}.$$

Sein Flächeninhalt ist $\int_c^d f(x_0, y) dy$, und dieser Flächeninhalt hängt selbst stetig von x_0 ab (das haben wir nicht bewiesen). Daher ergibt sich die Aussage aus dem Cavalieri-Prinzip. \square

Zumeist schreibt man in der vorstehenden Situation $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$.

Beispiel 59.5. Wir wollen das Integral der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - xy + 2y^3,$$

über dem Rechteck $Q = [-2, 1] \times [0, 2]$ mit dem Satz von Fubini ausrechnen. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \int_Q f d\lambda^2 &= \int_0^2 \left(\int_{-2}^1 (x^2 - xy + 2y^3) dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + 2y^3x \right) \Big|_{-2}^1 \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}y + 2y^3 + \frac{8}{3} + 2y + 4y^3 \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(3 + \frac{3}{2}y + 6y^3 \right) dy \\ &= \left(3y + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y^4 \right) \Big|_0^2 \\ &= 6 + 3 + 24 \\ &= 33. \end{aligned}$$

Korollar 59.6. *Es seien*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g: [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Dann gilt

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} fg d\lambda^2 = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d g(y) dy \right).$$

Beweis. Nach Satz 59.4 ist

$$\begin{aligned} \int_{[a,b] \times [c,d]} fg d\lambda^2 &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b f(x) \left(\int_c^d g(y) dy \right) dx \\ &= \left(\int_c^d g(y) dy \right) \cdot \left(\int_a^b f(x) dx \right). \end{aligned}$$

□

59.3. Mehrfachintegrale über stetig berandeten Gebieten.

Wir betrachten nun Mehrfachintegrale über komplizierteren Teilmengen T , wobei zunächst T eine kompakte Teilmenge im \mathbb{R}^2 sei. Eine handhabbare Klasse von Teilmengen sind diejenigen, die (zumindest stückweise) durch stetige Funktionen in einer Variablen berandet sind. Die Grundversion sieht dabei folgendermaßen aus: Es sei $I = [a, b]$ ein reelles Intervall und es seien

$$g, h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Diese zwei Funktionen (bzw. ihre Graphen) legen dann ein Flächenstück T fest, nämlich

$$T = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Man spricht von einem *stetig berandeten Flächenstück*. Das Integral über T zu einer stetigen Funktion $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ kann man folgendermaßen berechnen.

Satz 59.7. *Es sei $I = [a, b]$ ein reelles Intervall und es seien*

$$g, h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Es sei T das durch die beiden zugehörigen Graphen begrenzte Flächenstück über $[a, b]$, und es sei

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_T f d\lambda^2 = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Beweis. Dies folgt aus dem Cavalieri-Prinzip: Indem man f_+ und f_- getrennt betrachtet, kann man annehmen, dass f keine negativen Werte annimmt. Für diese Funktionen ist das Integral durch das Volumen des Subgraphen definiert. Der Flächeninhalt der Querschnittsfläche des Subgraphen zu $x_0 \in [a, b]$ ist gerade $\int_{g(x_0)}^{h(x_0)} f(x_0, y) dy$. Diese Flächeninhalte hängen stetig von x_0 ab (das haben wir nicht bewiesen) und somit ist das Integral über diese Flächeninhalte nach dem Cavalieri-Prinzip das Volumen des Subgraphen. \square

Beispiel 59.8. Es sei T die obere Einheitskreishälfte und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2y + xy^3.$$

Dann ist nach Satz 59.7

$$\begin{aligned} \int_T f d\lambda^2 &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y + xy^3 dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}xy^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2\sqrt{1-x^2}^2 + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}^4 \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2(1-x^2) + \frac{1}{4}x(1-x^2)^2 \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^5 \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^6 \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Natürlich können die begrenzenden Funktionen auch von y abhängen. Allgemeiner kann man häufig ein komplizierteres Flächenstück durch Einführung eines „Gitters“ in Flächenstücke zerlegen, die zu diesem Grundtyp gehören. In diesem Fall erhält man das Gesamtintegral durch Aufsummieren der Teilintegrale.

Wir betrachten nun dreidimensionale Bereiche T und Integrale darüber. Eine typische Situation ist dabei wieder, dass T durch stetige Funktionen berandet wird, und zwar in der folgenden Weise: Es sei $I = [a, b]$ ein reelles Intervall,

$$g, h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien zwei stetige Funktionen mit $g(x) \leq h(x)$ und

$$p, q: \{(x, y) \mid x \in I, g(x) \leq y \leq h(x)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien zwei stetige Funktionen mit $p(x, y) \leq q(x, y)$. Diese Funktionen begrenzen dann den Bereich

$$T = \{(x, y, z) \mid x \in I, g(x) \leq y \leq h(x), p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}.$$

Eine stetige Funktion $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ kann man integrieren, indem man die be-
randenden Funktionen als Integrationsgrenzen verarbeitet.

Satz 59.9. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte Teilmenge, die durch folgende
Daten beschrieben werde: Ein reelles Intervall $I = [a, b]$, zwei stetige Funk-
tionen*

$$g, h: I \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und zwei stetige Funktionen

$$p, q: \{(x, y) \mid x \in I, g(x) \leq y \leq h(x)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $p(x, y) \leq q(x, y)$ derart, dass

$$T = \{(x, y, z) \mid x \in I, g(x) \leq y \leq h(x), p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}$$

ist. Es sei

$$f: T \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_T f d\lambda^3 = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Beweis. Dies folgt ebenfalls aus dem Cavalieri-Prinzip. □

Häufig lässt man dabei die Klammern weg, da die Integralzeichen und das
Integrationsymbol du als Klammerung ausreichen. Ein Mehrfachintegral ist
von innen nach außen zu lesen und zu berechnen. Die einzelnen Integrale sind
dabei, abgesehen davon, dass sie von zusätzlichen unbestimmten Parametern
abhängen, gewöhnliche eindimensionale Integrale.

Beispiel 59.10. Es sei $R = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck,

$$q: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \mapsto q(x, y),$$

eine stetige Funktion und T der Subgraph zu dieser Funktion, also $T =$
 $\{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq q(x, y)\}$. Für eine auf T definierte
stetige Funktion f ist somit nach Satz 59.9

$$\int_T f d\lambda^3 = \int_a^b \int_c^d \int_0^{q(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

59.4. Der Schwerpunkt.

Definition 59.11. Zu einer kompakten Teilmenge (einem Körper) $T \subseteq \mathbb{R}^n$
und einer stetigen Massenverteilung

$$f: T \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit dem Gesamtvolumen $M = \int_T f d\lambda^n$ (das als positiv vorausgesetzt sei)
nennt man den Punkt $S = (s_1, \dots, s_n)$ mit

$$s_i := \frac{1}{M} \int_T x_i f d\lambda^n = \frac{1}{M} \int_T x_i \cdot f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

den *Schwerpunkt* von T (bezüglich der Massenverteilung f).

Um die i -te Koordinate des Schwerpunktes zu erhalten muss man also über das Produkt aus i -ter Koordinatenfunktion und der Massenverteilung integrieren. Wenn die Massenverteilung (oder Massendichte oder Gewichtsfunktion) f konstant (also der Körper homogen ist), so nennt man den Schwerpunkt auch den *geometrischen Schwerpunkt*. Wenn keine Massenverteilung angegeben wird, so meint man stets den geometrischen Schwerpunkt.

Beispiel 59.12. Wir berechnen den Schwerpunkt der oberen Einheitshalbkugel, also von

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

Die x - und die y -Koordinate muss aus Symmetriegründen natürlich 0 sein. Für die z -Koordinate berechnen wir

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} (1-x^2-y^2) dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left((1-x^2)y - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2)\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \\ &\quad - \left(-(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{4}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (1-x^2)\sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

Wir führen die Substitution mit $x = \sin u$ durch und erhalten (ohne den Vorfaktor)

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 u) \cos u \cdot \cos u du &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 u)(1 - \sin^2 u) du \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\sin^2 u + \sin^4 u du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\sin^2 u + \sin^4 u du. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Beispiel 20.3 ist dieses Integral gleich

$$2 \left(\frac{\pi}{2} - 2 \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{8} \pi.$$

Das Volumen der halben Einheitskugel ist nach Beispiel 58.12 gleich $\frac{2}{3}\pi$. Daher ist die z -Koordinate des Schwerpunkts gleich

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}\pi}{\frac{2}{3}\pi} = \frac{3}{8}.$$

59. ARBEITSBLATT

59.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 59.1. Berechne das Integral

$$\int_Q xy \, d\lambda^2$$

über dem Quader $Q = [a, b] \times [c, d]$.

Aufgabe 59.2. Es sei G der Subgraph unterhalb der Standardparabel zwischen 1 und 3. Berechne das Integral

$$\int_G x^2 + xy - y^3 \, d\lambda^2.$$

Aufgabe 59.3.*

- Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ mit einer reellen Zahl aus $[c, d]$ addiert?
- Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ mit einer reellen Zahl aus $[c, d]$ multipliziert?
- Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ durch eine reelle Zahl aus $[c, d]$ ($c > 0$) dividiert?

Aufgabe 59.4.*

Berechne das Integral zur Funktion

$$f(r, s, t) = s^2t + r \cos t$$

über dem Einheitswürfel $W = [0, 1]^3$.

Aufgabe 59.5.*

Berechne das Integral zur Funktion

$$f(r, s, t) = rst + t \sin s$$

über dem Einheitswürfel $W = [0, 1]^3$.

Aufgabe 59.6. Verallgemeinere Korollar 59.6 auf den Fall eines Quaders $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Aufgabe 59.7.*

Es sei

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

ein Quader im \mathbb{R}^n und sei

$$f = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$$

ein Monom. Berechne $\int_Q f d\lambda^n$.

Aufgabe 59.8. Berechne das Integral $\int_T f d\lambda^3$, wobei $f(x, y, z) = xz$ und T der Einheitszylinder $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq x, y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ ist.

Aufgabe 59.9.*

Zeige, dass der Schwerpunkt eines Intervalls $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit dem arithmetischen Mittel der Intervallgrenzen übereinstimmt.

Aufgabe 59.10. Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.

Aufgabe 59.11. Berechne mittels Integration den Schwerpunkt eines Dreiecks, das durch die drei Punkte $(0, 0)$, $(a, 0)$ und (b, c) (mit $a, c > 0$) gegeben sei.

Aufgabe 59.12. Zeige, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C gleich $\frac{A+B+C}{3}$ ist.

Für einen einfacheren Ansatz zur Lösung der vorstehenden Aufgabe siehe Aufgabe 60.13.

Aufgabe 59.13.*

Es seien $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte Teilmengen mit positivem Volumen derart, dass ihr Durchschnitt $S \cap T$ das Volumen 0 besitze. Es sei P der Schwerpunkt von S und Q der Schwerpunkt von T . Zeige, dass der Schwerpunkt der Vereinigung $S \cup T$ durch

$$\frac{\lambda^n(S)}{\lambda^n(S) + \lambda^n(T)} P + \frac{\lambda^n(T)}{\lambda^n(S) + \lambda^n(T)} Q$$

gegeben ist.

Zu einer endlichen Teilmenge $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert man den Schwerpunkt durch $\frac{\sum_{j=1}^k P_j}{k}$. Dies ist kein Spezialfall von Definition 59.11, da dort vorausgesetzt wird, dass das Volumen der Teilmenge nicht 0 ist. Aufgabe 59.12 zeigt, dass für ein Dreieck der Schwerpunkt der drei Eckpunkte mit dem Schwerpunkt des flächigen Dreiecks übereinstimmt. Eine weitere Beziehung zwischen den beiden Konzepten wird durch die folgende Aufgabe gestiftet.

Aufgabe 59.14. Es seien $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich viele Punkte. Es sei $\epsilon > 0$ derart, dass die abgeschlossenen Bälle $B(P_j, \epsilon)$ paarweise zueinander disjunkt seien. Es sei

$$T = \bigcup_{j=1}^k B(P_j, \epsilon).$$

Zeige, dass der Schwerpunkt von T gleich $\frac{\sum_{j=1}^k P_j}{k}$ ist.

Aufgabe 59.15. Bestimme den Schwerpunkt des oberen Einheitshalbkreises

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}.$$

Aufgabe 59.16.*

Bestimme den Schwerpunkt derjenigen Fläche, die auf $[-1, 1]$ durch die Standardparabel und die durch $y = 1$ gegebene Gerade begrenzt wird.

Aufgabe 59.17. Bestimme den Schwerpunkt derjenigen Fläche, die auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ durch die beiden positiven Koordinatenachsen und den Graphen der Kosinusfunktion begrenzt wird.

Aufgabe 59.18. Bestimme durch Integration die x - und die y -Koordinate des Schwerpunktes der oberen Einheitshalbkugel (siehe Beispiel 59.12).

Aufgabe 59.19.*

Wir betrachten ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel die Länge 1 haben und dessen Winkel am Schenkelschnittpunkt 30 Grad beträgt.

- (1) Berechne die Grundseite des Dreiecks.
- (2) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe 59.20.*

Dr. Eisenbeis und Prof. Knopfloch haben einen runden Kuchen mit einem Durchmesser von 40 cm gebacken und ihn in 12 gleichgroße Kuchenstücke aufgeteilt. Am übernächsten Tag ist leider nur noch ein Stück übrig, das sie gerecht aufteilen möchten. Da Dr. Eisenbeis den Rand nicht mag, teilen sie nicht der Länge nach, sondern so, dass die eine Hälfte ein gleichschenkliges Dreieck wird.

- (1) Wie lang ist die Schnittkante?
- (2) Liegt der Schwerpunkt des Kuchenstücks auf der Schnittkante? Falls nein, wer isst den Schwerpunkt?

Tipp: Bei einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Winkel 30 Grad ist das Verhältnis von Grundfläche zu Schenkellänge gleich $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (siehe Aufgabe 59.19). Vergleiche mit dem Schwerpunkt des gleichschenkligen Dreiecks, das entsteht, wenn man das Kuchenstück zu einem gleichschenkligen Dreieck auffüllen würde, als den runden Rand durch eine im Randmittelpunkt tangentielle gerade Strecke ersetzt. Bei einem Dreieck mit den Ecken A, B, C liegt der Schwerpunkt in $\frac{A+B+C}{3}$.

Zur exakten Berechnung des Schwerpunktes in der vorstehenden Situation siehe Aufgabe 60.3.

Aufgabe 59.21.*

Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass der Schwerpunkt des Intervalls $[a, b]$ zur Massenverteilung f mit der x -Koordinate des geometrischen Schwerpunktes des Subgraphen zu f übereinstimmt.

Aufgabe 59.22. Auf der quadratischen Platte $P = [-1, 1] \times [-1, 1]$ sei eine elektrische Ladung gemäß $f(x, y) = y - x^2$ verteilt. Bestimme den Schwerpunkt der positiven Teilladung und den Schwerpunkt der negativen Teilladung.

59.2. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 59.23.** (5 Punkte)

Es sei G der Subgraph der Sinusfunktion zwischen 0 und π . Berechne die Integrale

a) $\int_G x \, d\lambda^2,$

b) $\int_G y \, d\lambda^2.$

Aufgabe 59.24. (5 Punkte)

Berechne das Integral zur Funktion $f(x, y) = x(\sin x)(\cos(xy))$ über dem Rechteck $Q = [0, 3\pi] \times [0, 1]$.

Aufgabe 59.25. (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto \frac{2uv}{(u^2 + 1)(v^2 + v + 1)}.$$

Für welche Quadrate $Q = [a, a + 1] \times [b, b + 1]$ der Kantenlänge 1 wird das Integral

$$\int_Q f \, d\lambda^2$$

maximal? Welchen Wert besitzt es?

Aufgabe 59.26. (5 Punkte)

Berechne das Integral $\int_{B(P,r)} x^2 - y^3 \, d\lambda^2$ über der Kreisscheibe $B(P, r)$ in Abhängigkeit von $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 59.27. (4 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und v_1, \dots, v_n eine Basis von \mathbb{R}^n mit den zugehörigen Koordinatenfunktionen y_1, \dots, y_n . Es sei

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Massenverteilung auf T mit der Gesamtmasse $M > 0$. Zeige, dass

$$t_i = \frac{1}{M} \int_T y_i \cdot f \, d\lambda^n$$

die i -te Koordinate des Schwerpunktes von T bezüglich dieser Basis ist.

60. VORLESUNG - DIE TRANSFORMATIONSFORMEL

60.1. Die Transformationsformel für Integrale.

Wir kommen zur *Transformationsformel für Integrale*, wofür wir noch eine Bezeichnung einführen.

Definition 60.1. Es sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei

$$\varphi: G \longrightarrow V$$

eine total differenzierbare Abbildung. Dann nennt man die Determinante

$$\det(D\varphi)_P$$

die *Jacobi-Determinante* (oder *Fundamental-Determinante*) von φ in $P \in G$.

Wir betrachten die Jacobi-Determinante als eine auf G definierte reellwertige Funktion $P \mapsto J(\varphi)(P) = J(P) := \det(D\varphi)_P$. Bei einer stetig partiell differenzierbaren Abbildung ist sie stetig, da dann die Einträge in der Jacobi-Matrix stetige Funktionen sind. Bei einer linearen Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

stimmt das totale Differential in jedem Punkt mit φ selbst überein, und daher ist die Jacobi-Determinante konstant. In Satz 58.8 haben wir gesehen, dass die Determinante der linearen Abbildung das Verhältnis zwischen dem Volumen von Bild und Urbild festlegt. Eine wesentliche Verallgemeinerung von dieser Beziehung wird durch die beiden folgenden Aussagen gegeben.

Satz 60.2. *Es seien G und H offene Mengen im \mathbb{R}^n und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein C^1 -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$$

für $x \in G$. Es sei $T \subseteq H$ eine (in \mathbb{R}^n) kompakte Teilmenge und es sei

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist $\varphi^{-1}(T)$ ebenfalls kompakt und es gilt

$$\int_T f \, d\lambda^n = \int_{\varphi^{-1}(T)} (f \circ \varphi) |J(\varphi)| \, d\lambda^n.$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Häufig startet man auch mit einer kompakten Teilmenge $S \subseteq G$ und setzt $T = \varphi(S)$. Es kann auch auf S eine stetige Funktion f definiert sein, dann muss man $f = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$ setzen. Da ein Diffeomorphismus vorausgesetzt wird, ist die Aussage dieses Satzes grundsätzlich symmetrisch.

Korollar 60.3. *Es seien G und H offene Mengen im \mathbb{R}^n und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein C^1 -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$$

für $x \in G$. Es sei $T \subseteq H$ eine (in \mathbb{R}^n) kompakte Teilmenge. Dann gilt

$$\lambda^n(T) = \int_{\varphi^{-1}(T)} |J(\varphi)| \, d\lambda^n.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 60.2, angewendet auf die konstante Funktion $f = 1$. □

60.2. Beispiele zur Transformationsformel.

Beispiel 60.4. Wir betrachten das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^2.$$

In reellen Koordinaten ist dies die differenzierbare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - y^2, 2xy).$$

Diese Abbildung ist wegen $\varphi(x, y) = \varphi(-x, -y)$ nicht injektiv. Allerdings ist die Einschränkung auf die positive Halbebene $G = \{(x, y) \mid x > 0\}$ injektiv, und das Bild davon ist $H = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-$ (also die Ebene ohne die negative reelle Achse). Die Jacobi-Matrix von φ ist

$$\text{Jak}(\varphi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x, y) = 4x^2 + 4y^2.$$

Wir möchten den Flächeninhalt des Bildes $T = \varphi(S)$ des Einheitsquadrates $S = [0, 1] \times [0, 1]$ unter dieser Abbildung berechnen (die eine Seite des Einheitsquadrates gehört nicht zu G , dieser Rand ist aber eine Nullmenge nach Lemma 58.6 und daher für den Flächeninhalt und die Integration unerheblich). Aufgrund von Korollar 60.3 ist dann

$$\begin{aligned} \lambda^2(T) &= \int_S (4x^2 + 4y^2) d\lambda^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (4x^2 + 4y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 + 4xy^2 \right) \Big|_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{4}{3} + 4y^2 \right) dy \\ &= \left(\frac{4}{3}y + \frac{4}{3}y^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Korollar 60.5. *Es sei*

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

die Polarkoordinatenauswertung und es seien G und H offene Mengen, auf denen φ einen Diffeomorphismus induziert. Es sei $T \subseteq H$ eine (in \mathbb{R}^2) kompakte Teilmenge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_T f(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_{\varphi^{-1}(T)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r d\lambda^2(r, \theta).$$

Dies gilt auch dann, wenn außerhalb von Nullmengen ein Diffeomorphismus vorliegt. Insbesondere gilt bei stetigem f die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r d\theta dr.$$

Beweis. Dies folgt wegen

$$\det(D\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

direkt aus Satz 60.2. □

Lemma 60.6. *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Durch eine einfache Substitution ist die Aussage äquivalent zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

Nennen wir dieses Integral I . Nach einer Variante des Satzes von Fubini für uneigentliche Integrale ist

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} d\lambda^2.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten $x = r \cos \theta$ und $y = r \sin \theta$ ist dieses Integral nach Korollar 60.5 und nach Fubini gleich

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \times \mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\lambda^2(r, \theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{[0, 2\pi]} 1 d\lambda^1(\theta) \right) \left(\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\lambda^1(r) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{> 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\lambda^1(r) \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r dr \\ &= -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^\infty \\ &= 1. \end{aligned}$$

Damit ist auch $I = 1$. □

Korollar 60.7. *Für die Zylinderkoordinatenauswertung*

$$\Psi: G = \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, z) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z),$$

eine kompakte Teilmenge $T \subseteq \Psi(G)$ und eine stetige Funktion

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gilt die Beziehung

$$\int_T f \, d\lambda^3 = \int_{\Psi^{-1}(T)} (f \circ \Psi) \cdot r \, d\lambda^3.$$

Dies kann man auch als

$$\int \int \int_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int \int \int_{\Psi^{-1}(T)} \tilde{f}(r, \theta, z) \cdot r \, dr \, d\theta \, dz$$

schreiben, wobei $\tilde{f} = f \circ \Psi$ bezeichnet.

Beweis. Dies folgt aus Satz 60.2, da die Jacobi-Determinante der Zylinderkoordinatenauswertung gleich r ist. \square

Korollar 60.8. *Für die Kugelkoordinatenauswertung*

$\Psi: G = \mathbb{R}_+ \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \longmapsto (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta),$

eine kompakte Teilmenge $T \subseteq \Psi(G)$ und eine stetige Funktion

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gilt die Beziehung

$$\int_T f \, d\lambda^3 = \int_{\Psi^{-1}(T)} (f \circ \Psi) r^2 \sin \theta \, d\lambda^3.$$

Dies kann man auch als

$$\int \int \int_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int \int \int_{\Psi^{-1}(T)} \tilde{f}(r, \theta, \varphi) \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

schreiben, wobei $\tilde{f} = f \circ \Psi$ bezeichnet.

Beweis. Nach Beispiel 53.7 ist die Jacobi-Determinante von Ψ im Punkt (r, θ, φ) gleich $r^2 \sin \theta$, so dass die Aussage aus Satz 60.2 folgt. \square



Beispiel 60.9. Es soll eine Straße in der Ebene der Breite $2a$ asphaltiert werden. Dabei wird die Straße durch den Verlauf des Mittelstreifen vorgegeben, der durch die Kurve

$$[0, s] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \psi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

bestimmt ist. Dabei sei ψ zweimal stetig differenzierbar und bogenparametrisiert, d.h. es sei $f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1$, was bedeutet, dass die Mittelstreifenkurve mit normierter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Die Breite ist dabei senkrecht zum Mittelstreifen zu messen. Die zu asphaltierende Trasse wird dann durch die Abbildung

$$\varphi: [0, s] \times [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, r) \longmapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -g'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix},$$

parametrisiert. Wir nehmen an, dass diese Parametrisierung injektiv ist, was erfüllt ist, wenn die Mittelstreifenabbildung ψ injektiv ist und die Straße nicht zu breit werden soll.

Die Jacobi-Matrix der Parametrisierung ist

$$(D\varphi)_{(t,r)} = \begin{pmatrix} f'(t) - rg''(t) & -g'(t) \\ g'(t) + rf''(t) & f'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$\begin{aligned} & f'(t)f'(t) + g'(t)g'(t) - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) \\ &= 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)). \end{aligned}$$

Daher ist die Asphaltfläche nach der Transformationsformel gleich

$$\int_{[0,s] \times [-a,a]} |1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t))| d\lambda^2.$$

Wenn wir weiter annehmen, dass

$$|g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)| \leq \frac{1}{a}$$

ist (was bedeutet, dass die Straßenbreite nicht allzu groß ist), so ist dieses Integral nach Korollar 59.6 gleich

$$\begin{aligned} & \int_{[0,s] \times [-a,a]} 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) d\lambda^2 \\ &= 2as - \left(\int_{-a}^a r dr \right) \left(\int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t) dt \right) \\ &= 2as - 0 \cdot \left(\int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t) dt \right) \\ &= 2as. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Asphaltfläche gleich der Mittelstreifenlänge mal der Straßenbreite ist.

60.3. Volumentreue Abbildungen.

In einer früheren Vorlesung haben wir über Isometrien gesprochen, also lineare Abbildungen zwischen euklidischen Vektorräumen, die das Skalarprodukt und insbesondere die Norm respektieren. Aufgrund von Aufgabe 60.8 ist die Determinante einer Isometrie auf dem \mathbb{R}^n gleich 1 oder -1 , so dass sich gemäß Korollar 60.3 das Volumen von beliebigen kompakten Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}^n$ unter der Abbildung nicht ändert, d.h. es ist stets $\lambda^n(\varphi(T)) = \lambda^n(T)$.

Definition 60.10. Es seien G und H offene Mengen im \mathbb{R}^n und es sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein C^1 -Diffeomorphismus. Man sagt, dass φ *volumentreu* ist, wenn

$$|(J(\varphi))(x)| = |\det(D\varphi)_x| = 1$$

für alle $x \in G$ ist.

Im ebenen Fall spricht man natürlich von *flächentreu*. Für einen volumentreuen Diffeomorphismus ist

$$\lambda^n(\varphi(T)) = \lambda^n(T)$$

nach Korollar 60.3.

Beispiel 60.11. Es sei $h \in \mathbb{R}[y]$ ein beliebiges Polynom in der einen Variablen y . Dann ist die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + h(y), y)$$

ein flächentreuer Diffeomorphismus. Die Jacobi-Matrix von φ ist ja

$$\text{Jak}(\varphi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & h'(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

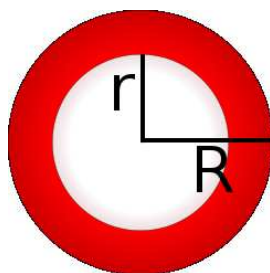
so dass die Jacobi-Determinante konstant gleich 1 ist. Wenn man die Rollen von x und y vertauscht und die Hintereinanderschaltung von solchen Abbildungen betrachtet, so erhält man flächentreue Abbildungen, denen man es nicht auf den ersten Blick ansieht. Beispielsweise ist zu $\varphi(x, y) = (x + y^2, y)$ und $\psi(x, y) = (x, y + x^3)$ die Hintereinanderschaltung

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(x, y) &= \psi(\varphi(x, y)) \\ &= \psi(x + y^2, y) \\ &= \left(x + y^2, y + (x + y^2)^3\right) \\ &= \left(x + y^2, y + x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6\right). \end{aligned}$$

60. ARBEITSBLATT

60.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 60.1. Interpretiere die Substitutionsregel als einen Spezialfall der Transformationsformel.



Aufgabe 60.2. Zeige, dass der Flächeninhalt eines Annulus gleich dem Produkt aus der Länge des Mittelkreises und der Breite ist.

Aufgabe 60.3.*

Wir betrachten den Kreissektor T aus dem Einheitskreis zum Winkel 30 Grad, der an der x -Achse anliegt. Bestimme mit der Hilfe von Polarkoordinaten den Schwerpunkt von T .

Aufgabe 60.4. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y),$$

flächentreu ist.

Aufgabe 60.5. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + \sin y, y + \cos x).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det(D\varphi)_P|$ auf dem Quadrat $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Welche Abschätzung ergibt sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q))$?

Aufgabe 60.6. Beschreibe die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^3,$$

in reellen Koordinaten und bestimme die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante davon. Ebenso für z^4 .

Aufgabe 60.7. Finde möglichst große offene Teilmengen $G \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und $H \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^3,$$

einen Diffeomorphismus von G nach H induziert.

Aufgabe 60.8.*

Zeige, dass die Determinante einer linearen Isometrie

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gleich 1 oder gleich -1 ist.

Tipp: Was passiert mit dem Einheitswürfel?

Aufgabe 60.9. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

derart, dass φ volumentreu, aber keine Isometrie ist.

Aufgabe 60.10. Es seien G und H offene Mengen im \mathbb{R}^n und es sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein volumentreuer C^1 -Diffeomorphismus. Es sei G zusammenhängend. Zeige, dass entweder $(J(\varphi))(x) = 1$ für alle $x \in G$ oder aber $(J(\varphi))(x) = -1$ für alle $x \in G$ gilt.

Aufgabe 60.11. Es sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Verschiebung und sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit $\lambda^n(S) \neq 0$ und sei $T = \varphi(S)$ das Bild von S unter φ . Zeige, dass der Schwerpunkt von S unter φ in den Schwerpunkt von T abgebildet wird.

Aufgabe 60.12.*

Es sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine bijektive lineare Abbildung und sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit $\lambda^n(S) \neq 0$ und sei $T = \varphi(S)$ das Bild von S unter φ . Zeige, dass der Schwerpunkt von S unter φ in den Schwerpunkt von T abgebildet wird.

Aufgabe 60.13. Zeige mit Aufgabe 59.10, Aufgabe 60.11 und Aufgabe 60.12, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks im \mathbb{R}^2 mit den Eckpunkten A, B, C gleich $\frac{A+B+C}{3}$ ist.

Aufgabe 60.14.*

Berechne den Flächeninhalt des Bildes des Rechtecks $Q = [-1, 3] \times [0, 2]$ unter der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^3, y - x^2).$$

Aufgabe 60.15.*

Es sei

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid x^2 > y^3\},$$

wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (xy, x^2 - y^3).$$

- (1) Zeige, dass φ injektiv ist.
- (2) Zeige, dass φ einen Diffeomorphismus auf sein Bild induziert.
- (3) Zeige, dass das Rechteck $Q = [3, 4] \times [1, 2]$ in G liegt.
- (4) Berechne den Flächeninhalt des Bildes von $Q = [3, 4] \times [1, 2]$ unter φ .

60.2. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 60.16.** (4 Punkte)

Zeige durch ein Beispiel, dass unter den Polarkoordinaten der Schwerpunkt einer kompakten Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ *nicht* in den Schwerpunkt des Bildes $\varphi(T)$ überführt werden muss.

Aufgabe 60.17. (5 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^3 - y^2, xy^2).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det(D\varphi)_P|$ auf den beiden Quadraten $Q_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ und $Q_2 = [1, 2] \times [1, 2]$. Welche Abschätzungen ergeben sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q_1))$ und für $\lambda^2(\varphi(Q_2))$?

Aufgabe 60.18. (7 (3+2+2) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$[0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

und interessieren uns für die Straße der Breite 1, deren Mittelstreifen der vorgegebene Funktionsgraph ist.

- a) Zeige, dass zu zwei verschiedenen Punkten auf dem Funktionsgraphen die Senkrechten der Länge 1 (mit dem Mittelpunkt auf dem Graphen) untereinander überschneidungsfrei sind.

- b) Man gebe eine (möglichst einfache) Parametrisierung der Straße an.
- c) Bestimme den Flächeninhalt der Straße.

Aufgabe 60.19. (4 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante zur Abbildung

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, z \longmapsto z^n,$$

in einem beliebigen Punkt $P = (a, b)$ mit der Hilfe von Polarkoordinaten.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Quelle = COVID-19-Germany.svg , Autor = Benutzer Hbf878 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	10
Quelle = COVID-19-Sweden.svg , Autor = Benutzer Hbf878 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	10
Quelle = Taraxacum sect Ruderalia13 ies.jpg , Autor = Frank Vincentz, Lizenz = CC-by-sa 3.0	13
Quelle = Cup of coffee 5084862159.jpg , Autor = Jason Walsh (hochgeladen von Benutzer Lobo auf Commons), Lizenz = CC-by-2.0	26
Quelle = Logistic-curve.svg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz =	37
Quelle = Animasjon lysrefleksjon.gif , Autor = Benutzer Ingvald Straume auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	50
Quelle = Light matter reflection.svg , Autor = Benutzer Kdkeller auf Commons, Lizenz = CC BY 3.0	50
Quelle = Manhattan distance.svg , Autor = Benutzer Psychonaut auf Commons, Lizenz = PD	58
Quelle = Unit disc metrics.svg , Autor = Benutzer Krishnavedala auf Commons, Lizenz = PD	59
Quelle = Neighborhood illust1.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	60
Quelle = Neighborhood edge.png , Autor = Benutzer Zasdfgbnm auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	63
Quelle = Continuity topology.svg , Autor = Benutzer Dcoetzee auf Commons, Lizenz = PD	70
Quelle = ComplexSinInATimeAxe.gif , Autor = Nashev, Lizenz =	81
Quelle = Cusp.png , Autor = Benutzer Satipatthana auf Commons, Lizenz = PD	91
Quelle = Cycloid f.gif , Autor = Benutzer Zorgit auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	100
Quelle = Helix2.png , Autor = Benutzer Siebrand auf nl Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	101

Quelle = VectorField.svg , Autor = Benutzer Jim.belk auf Commons, Lizenz = PD	108
Quelle = Simple Harmonic Motion Orbit.gif , Autor = Benutzer Mazemaster auf Commons, Lizenz = PD	132
Quelle = Euler method.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	135
Quelle = Usain Bolt smiling Berlin 2009.JPG , Autor = Benutzer Selligpau auf Commons, Lizenz = GNU-Lizenz	147
Quelle = James Joseph Sylvester.jpg , Autor = nicht bekannt, Lizenz = PD	177
Quelle = 08608 einstein 1916.jpg , Autor = Benutzer Drdoht auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	185
Quelle = De Raum zeit Minkowski Bild.jpg , Autor = Benutzer Feitscherg auf Commons, Lizenz = PD	185
Quelle = Relativity of Simultaneity.svg , Autor = Benutzer Acdx auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	190
Quelle = Monkey Saddle Surface (Shaded).png , Autor = Benutzer Inductiveload auf Commons, Lizenz = PD	197
Quelle = Feldberg 3913.jpg , Autor = Benutzer Flominator auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	198
Quelle = Surface integral1.svg , Autor = Benutzer Cronholm144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	217
Quelle = Simple paraboloid.png , Autor = Benutzer Babak. K. Shandiz auf Commons, Lizenz = CC-by sa 4.0	220
Quelle = Saddle point.png , Autor = Benutzer Ævar Arnfjörð Bjarmason auf PD, Lizenz =	251
Quelle = Waeller39.jpg , Autor = Benutzer Odatrulle auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	268
Quelle = Passaggio in coordinate polari.svg , Autor = Benutzer Cronholm144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	275
Quelle = 3D Spherical.svg , Autor = Benutzer Andeggs auf Commons, Lizenz = PD	276
Quelle = Schoenberg-ebringen-isohypsen.png , Autor = Benutzer W-j-s auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	286

	369
Quelle = Coast line east Karystos, Euboea, Greece.jpg , Autor = Benutzer Straitgate auf Commons, Lizenz = PD	287
Quelle = Agate1 hg.jpg , Autor = Benutzer Hgrobe auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5	289
Quelle = Soccer field - empty.svg , Autor = Benutzer Nuno Tavares auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	295
Quelle = AHippoBird2200.jpg , Autor = Benutzer PJ KAPDostie auf Commons, Lizenz = CC-bysa 3.0	300
Quelle = Astroid.svg , Autor = Benutzer Joelholdsworth auf Commons, Lizenz = PD	306
Quelle = RLipschitz.jpeg , Autor = Benutzer Ahellwig auf Commons, Lizenz = PD	311
Quelle = Gradient field.png , Autor = Benutzer Christophe.Finot auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	321
Quelle = BodyMassIndex.png , Autor = Benutzer Thire auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5	327
Quelle = Nebra Scheibe.jpg , Autor = Benutzer Dbachmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	330
Quelle = Translation illustration.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	337
Quelle = Cavalieriho princip.svg , Autor = Benutzer Anton auf de Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	339
Quelle = Bonaventura Cavalieri.jpeg , Autor = Benutzer Gene.arboit auf Commons, Lizenz = PD	339
Quelle = Integral apl rot objem3.svg , Autor = Benutzer Pajs auf cs Wikipedia, Lizenz = PD	340
Quelle = Coneirr3.svg , Autor = Benutzer Mpfiz auf Commons, Lizenz = PD	341
Quelle = Cavalieriho princip.svg , Autor = Benutzer Pajs auf Commons, Lizenz = PD	343
Quelle = Wurst.png , Autor = Benutzer Rainer Bielefeld auf Wikipedia.de, Lizenz = GFDL	343
Quelle = Clusterförmige Anordnung.png , Autor = Benutzer Rainer Bielefeld auf Wikipedia.de, Lizenz = GFDL	343

370

Quelle = Volume under surface.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov
auf Commons, Lizenz = PD 347

Quelle = Hesoun? rybník.JPG , Autor = Benutzer Juan de Vojník auf
Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 360

Quelle = Annulus.svg , Autor = Benutzer Nandhp auf Commons, Lizenz
= PD 363

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor
bzw. Hochlader und der Lizenz. 367

Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 367