Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 34

Übungsaufgaben

Aufgabe 34.1. Zeige, dass das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ in der Tat ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 34.2. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass die Einschränkung des Skalarproduktes auf U ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 34.3.*

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$ und der zugehörigen Norm $\Vert - \Vert$. Zeige, dass die Beziehung

$$\langle v,w\rangle \;=\; \frac{1}{2}\big(\Vert v+w\Vert^2 - \Vert v\Vert^2 - \Vert w\Vert^2\big)$$

gilt.

Aufgabe 34.4.*

Was bedeutet die Polarisationsformel für ein reelles Skalarprodukt für die Multiplikation von reellen Zahlen?

Aufgabe 34.5. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$. Bestätige

$$\Vert x+y\Vert^2 - \Vert x-y\Vert^2 \;=\; 4\,\langle x,y\rangle\,.$$

Aufgabe 34.6. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$ und der zugehörigen Norm $\Vert - \Vert$. Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$\Vert v+w\Vert^2 + \Vert v-w\Vert^2 \;=\; 2\Vert v\Vert^2 + 2\Vert w\Vert^2$$

gilt.

Aufgabe 34.7. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$. Zeige, dass der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften besitzt (dabei sind $u,v,w \in V$).

(1) Es ist $d(v,w) \geq 0$.
(2) Es ist $d(v,w) = 0$ genau dann, wenn $v = w$.
(3) Es ist $d(v,w) = d(w,v)$.

(4) Es ist
$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w).$$

AUFGABE 34.8. Sei $n \geq 2$. Zeige, dass für die Norm $\|x\| := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ kein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ existiert mit der Eigenschaft $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

AUFGABE 34.9. Bestimme, welche der folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ zueinander orthogonal bezüglich des Standardskalarproduktes sind.
$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 34.10. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass das orthogonale Komplement ebenfalls ein Untervektorraum von V ist.

AUFGABE 34.11. Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im $\mathbb{R}^4$.

AUFGABE 34.12.*

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
des $\mathbb{R}^3$ an.

AUFGABE 34.13.*

Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im $\mathbb{R}^3$.

AUFGABE 34.14. Der $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kern der linearen Abbildung
$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto 3x + y + 7z,$$
versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U.

Es seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukten und

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt φ eine *Isometrie*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle \ = \ \langle v, w \rangle \, .$$

Aufgabe 34.15.*

Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n. Zeige, dass eine Vektorfamilie $u_1, \ldots, u_n \in V$ genau dann eine Orthonormalbasis von V ist, wenn die zugehörige lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V,\, e_i \longmapsto u_i,$$

eine Isometrie zwischen $\mathbb{R}^n$ und V ist.

Aufgabe 34.16. Man gebe ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, die keine Isometrie ist, für die aber für alle $u, v \in V$ die Beziehung

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = 0$$

gilt.

Aufgabe 34.17. Betrachte die Linearform

$$L\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 4z.$$

(1) Bestimme den Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = L(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^3\, ,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

(2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y - 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $\varphi = L|_E$ die Einschränkung von L auf E. Bestimme den Vektor $w \in E$ mit der Eigenschaft

$$\langle w, v \rangle = \varphi(v) \text{ für alle } v \in E\, ,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E bezeichnet.

Aufgabe 34.18. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, der mit dem induzierten Skalarprodukt versehen sei. Es sei

$$f\colon\ V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform und $v \in V$ der zugehörige Gradient im Sinne von Lemma 34.18. Zeige, dass der Gradient $u \in U$ zur Einschränkung $f|_U$ die orthogonale Projektion von v auf U ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 34.19. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Beweise den *Satz des Pythagoras*: Für zwei Vektoren $v, w \in V$, die senkrecht aufeinander stehen, gilt die Beziehung

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Aufgabe 34.20. Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 34.21. Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $u_1, \ldots, u_n \in V$ eine Orthonormalbasis von V. Zeige, dass für jeden Vektor $v \in V$ die Beziehung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle \, u_i$$

gilt.

Aufgabe 34.22. Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, an.

Aufgabe 34.23. Der $\mathbb{R}^4$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y, z, w) \longmapsto 4x - 3y + 2z - 5w,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U.

Aufgabe 34.24. (6 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) φ ist eine Isometrie.
(2) Für jeden Vektor v mit $\|v\| = 1$ ist auch $\|\varphi(v)\| = 1$.

(3) Für jede Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, ist auch $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, eine Orthonormalbasis.
(4) Es gibt eine Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, derart, dass auch $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, eine Orthonormalbasis ist.

Abbildungsverzeichnis