

**Mathematik für Anwender II****Arbeitsblatt 45****Übungsaufgaben**

AUFGABE 45.1. Berechne

$$\left\langle \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum.

AUFGABE 45.2. Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum.

- (1) Zeige, dass ein skalares Vielfaches eines zeitartigen (raumartigen, lichtartigen) Vektors wieder zeitartig (raumartig, lichtartig) ist.
- (2) Zeige, dass die Summe von zwei zeitartigen (raumartigen, lichtartigen) Vektoren im Allgemeinen nicht wieder zeitartig (raumartig, lichtartig) ist.

AUFGABE 45.3.\*

Ist die Einschränkung einer Minkowski-Form im  $\mathbb{R}^n$  auf einen  $n-1$ -dimensionalen Untervektorraum wieder eine Minkowski-Form?AUFGABE 45.4. Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass es zu jedem Beobachtervektor  $v \in V$  eine direkte Summenzerlegung

$$V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$$

gibt, wobei die Einschränkung der Minkowski-Form auf  $\mathbb{R}v$  negativ definit und die Einschränkung der Minkowski-Form auf  $(\mathbb{R}v)^\perp$  positiv definit ist.AUFGABE 45.5. Der  $\mathbb{R}^2$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass  $\begin{pmatrix} \frac{7}{24} \\ \frac{23}{24} \end{pmatrix}$  der Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters ist. Bestimme die Raumkomponente zu diesem Vektor.

## AUFGABE 45.6.\*

Der  $\mathbb{R}^2$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$  ein Beobachtervektor ist und bestimme die Raumkomponente dazu.

## AUFGABE 45.7.\*

Der  $\mathbb{R}^2$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu jedem Beobachtervektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  die Raumkomponente des Beobachters die Spiegelung seiner Zeitkomponente an der Hauptdiagonalen ist.

Die Hyperbelfunktionen wurden in der dreizehnten Vorlesung eingeführt.

AUFGABE 45.8. Der  $\mathbb{R}^2$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu  $\alpha \in \mathbb{R}$  der Vektor  $\begin{pmatrix} \sinh \alpha \\ \cosh \alpha \end{pmatrix}$  der Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters ist. Bestimme die Raumkomponente zu diesem Vektor.

## AUFGABE 45.9.\*

Der  $\mathbb{R}^2$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu  $z \in \mathbb{R}$ ,  $z \neq 0$ , die Vektoren

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} z - \frac{1}{z} \\ z + \frac{1}{z} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -z + \frac{1}{z} \\ z + \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektoren eines Beobachters sind. Zeige, dass jeder Beobachtervektor diese Gestalt besitzt.

## AUFGABE 45.10.\*

Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form  $\langle -, - \rangle$  und es seien  $v, w$  gleichgerichtete Beobachtervektoren. Zeige

$$\langle v, w \rangle < 0.$$

AUFGABE 45.11. Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum. Zeige, dass die Menge der Beobachtervektoren in zwei Wegzusammenhangskomponenten zerfallen. Zeige, dass zwei Beobachtervektoren  $v, w$  genau dann zur gleichen Komponente gehören, wenn

$$\langle v, w \rangle < 0$$

ist.

AUFGABE 45.12. Es sei  $V$  ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form  $\langle -, - \rangle$  und es seien  $v, w$  zeitartige Vektoren. Zeige die Abschätzung

$$\langle v, w \rangle^2 \geq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle.$$

AUFGABE 45.13. In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum besitze ein Ereignis die Koordinaten  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  bezüglich einer Minkowski-Basis. Bestimme die Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente dieses Ereignisses bezüglich des Beobachtervektors  $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ .

AUFGABE 45.14. In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum seien zwei Beobachter  $B$  und  $C$  mit den zugehörigen Raumkomponenten  $V_B$  und  $V_C$  gegeben. Was kann man über  $V_B \cap V_C$  sagen?

AUFGABE 45.15. Es sei  $V$  ein zweidimensionaler Minkowski-Raum.

- (1) Zeige, dass es eine Basis von  $V$  derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 1 sind.
- (2) Zeige, dass es eine Basis von  $V$  derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich  $-1$  sind.
- (3) Zeige, dass es eine Basis von  $V$  derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 0 sind.

AUFGABE 45.16. Bestimme den Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters  $B$  in einem Minkowski-Raum relativ zu sich selbst und die Relativgeschwindigkeit.

AUFGABE 45.17. Es seien  $B$  und  $C$  Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten

$$v_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

4

und

$$v_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- (1) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von  $C$  relativ zu  $B$ .
- (2) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von  $B$  relativ zu  $C$ .
- (3) Bestimme die Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter.

AUFGABE 45.18. Zeige, dass die Relativgeschwindigkeit von zwei Beobachtern in einem Minkowski-Raum zwischen 0 und 1 liegt. Kann 1 erreicht werden? Was ist die physikalische Signifikanz dieser Aussage?

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 45.19. (1 Punkt)

Berechne

$$\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -11 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum.

AUFGABE 45.20. (4 Punkte)

Der  $\mathbb{R}^3$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass  $\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  ein Beobachtervektor ist und bestimme eine Orthonormalbasis der Raumkomponente dazu.

AUFGABE 45.21. (4 Punkte)

In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum besitze ein Ereignis die Koordinaten  $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  bezüglich einer Minkowski-Basis. Bestimme die Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente dieses Ereignisses bezüglich des Beobachtervektors  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{12} \\ 0 \\ \frac{13}{12} \end{pmatrix}$ .

AUFGABE 45.22. (6 (2+2+2) Punkte)

Der  $\mathbb{R}^3$  sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen.

- (1) Man gebe eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 1 sind.
- (2) Man gebe eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich  $-1$  sind.
- (3) Man gebe eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 0 sind.

AUFGABE 45.23. (3 (1+1+1) Punkte)

Es seien  $B$  und  $C$  Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten

$$v_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ \sqrt{39} \end{pmatrix}$$

und

$$v_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von  $C$  relativ zu  $B$ .
- (2) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von  $B$  relativ zu  $C$ .
- (3) Bestimme die Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter.



## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7