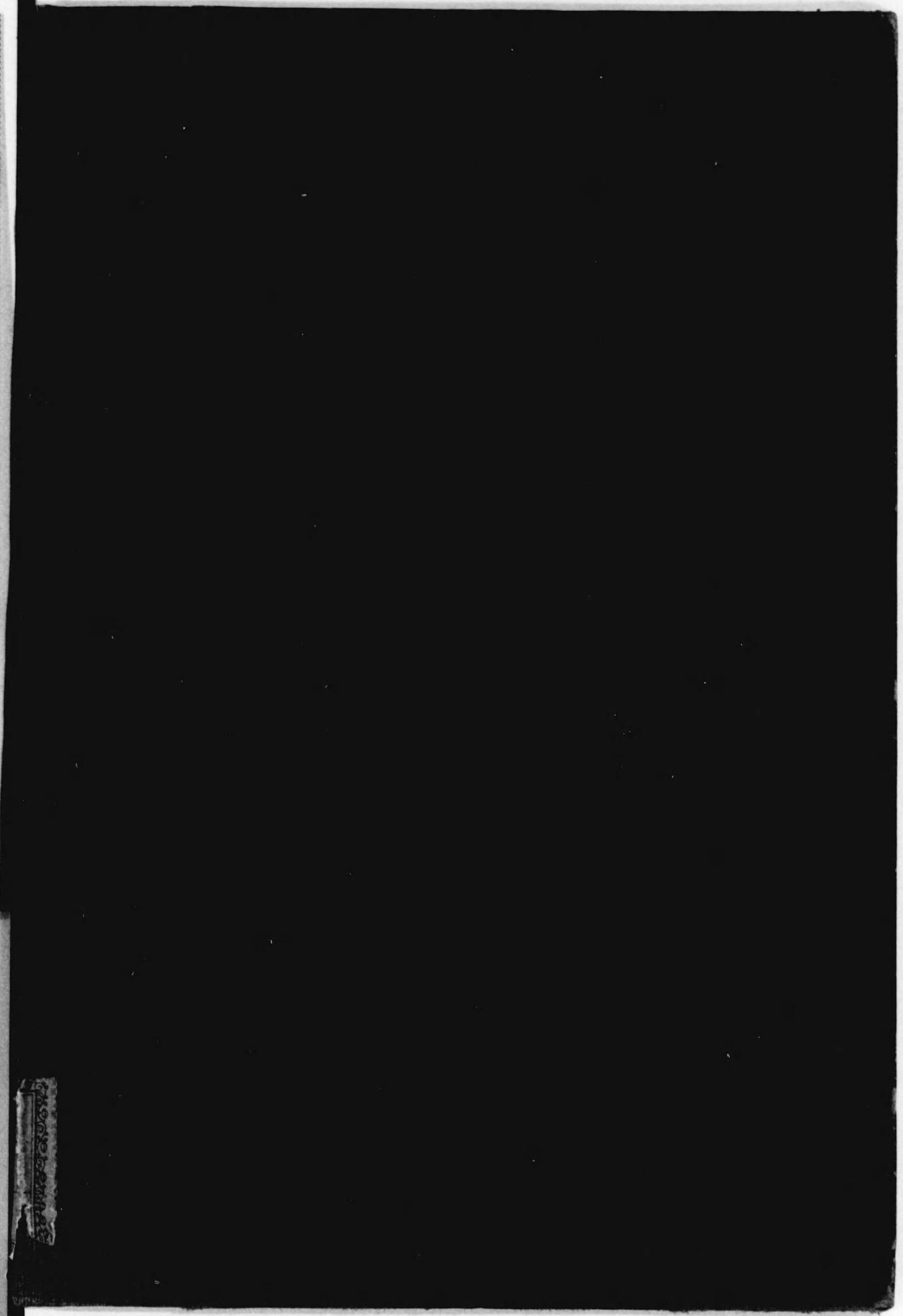
始



高等平面三角法

山崎栄作著

目次

第一章　緒論

第二章　三角函數

第三章　正弦函數ト餘弦函數

第四章　正切函數ト餘切函數

第十四章　三角形ノ解法

第十五章　三角形ノ性質

第十六章　多邊形ノ性質

第十七章　測量ヘノ應用

第十八章　逆三角函數

第十九章　簡單ナル級數ノ和

第二十章　De Moive ノ定理ト其應用

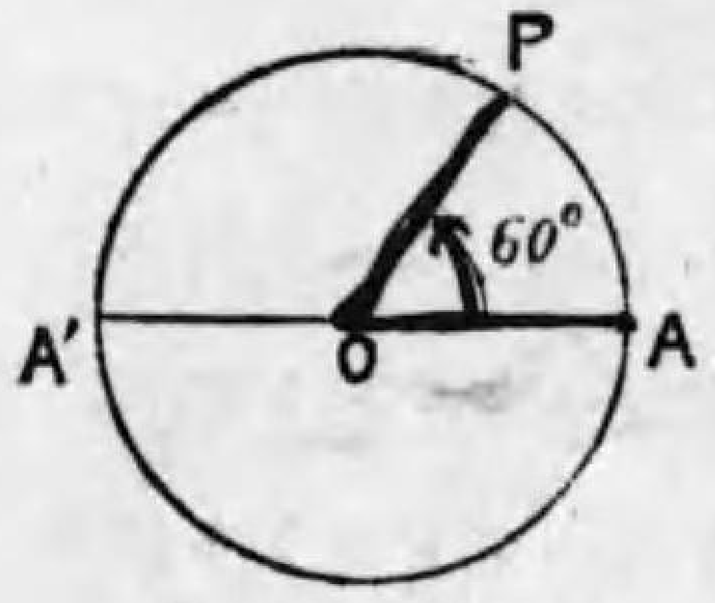
平面三角法

第一章

緒論

1. 角.

幾何學ニテ取リ扱フ角ハ通常二直角ヨリモ小ナルガ，三角法ニテハ角ノ意義ヲ擴張シテ，大サニ制限ナク且ツ正角ノ外ニ負角ヲモ設クルナリ.



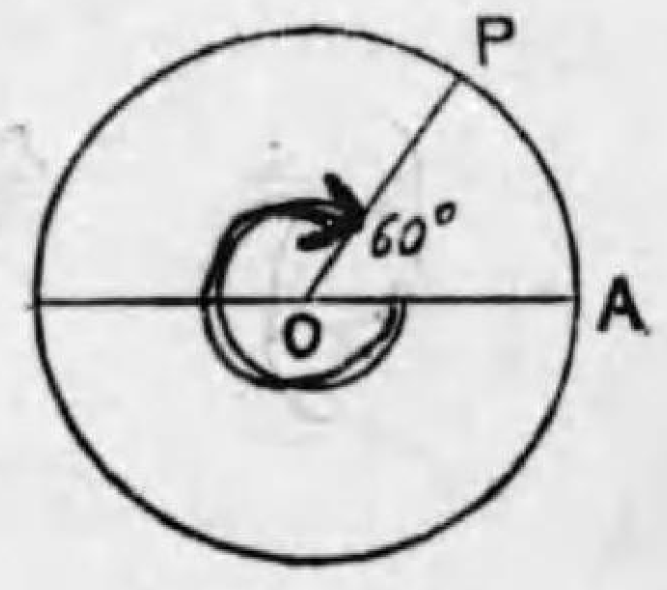
（第一圖）

今半直線 OA ヲ定位置ニアルモノトシ，動直線 OP ガ OA ノ位置ヨリ動キ初メ，時計ノ針ノ廻轉ト反對ノ方向ニ 60° ダケ O 點ノ周リヲ廻轉シタリトセバ，其時生ズル角 AOP ハ 60° ニシテ，OP ハ更ニ廻轉シテ OA′ ニ重ル時ハ角 AOP ハ二直角ナリ. 倘 OP ハ同ジ方向ニ廻轉シテ OA ノ位置ニ復歸シタル時ハ角 AOP ハ四直角ナリ.

一般ニ OP ハ前ト同ジ方向ニ O 點ノ周リヲ n 回廻轉シ更ニ圖ノ如キ位置ニマデ進ム時ハ，角 AOP ハ四直角ノ n 倍ト 60° トノ和ニ

等シ．故ニ角ノ大サガ與ヘラレタル時ハ動直線 OP ノ最後ノ位置ハ定マルベケレドモ，逆ニ動直線ノ最初ノ位置 OA ト最後ノ位置 OP トガ與ヘラレタリト雖モ角 AOP ノ大サヲ一義ニ決定スルコトヲ得ズ．

次ニ動直線 OP ガ OA ノ位置ヨリ時計ノ針ト同ジ方向ニ廻轉シテ圖ノ如キノ位置ニ來ル時ハ角 AOP ハ $360^\circ-60^\circ$ 卽チ 300° ナルベキガ如シト雖モ，前ト反對ノ方向ニ廻轉シタル角ナルヲ以テ**負角**ナリトイヒ，-300° ヲ以テ其大サトナス．尙 OP ガ其方向ニ廻轉ヲ續ケ再ビ前ノ OP ノ位置ニ復歸スル時ハ，角 AOP ハ $-300^\circ-360^\circ$ 卽チ -660° ナリ，



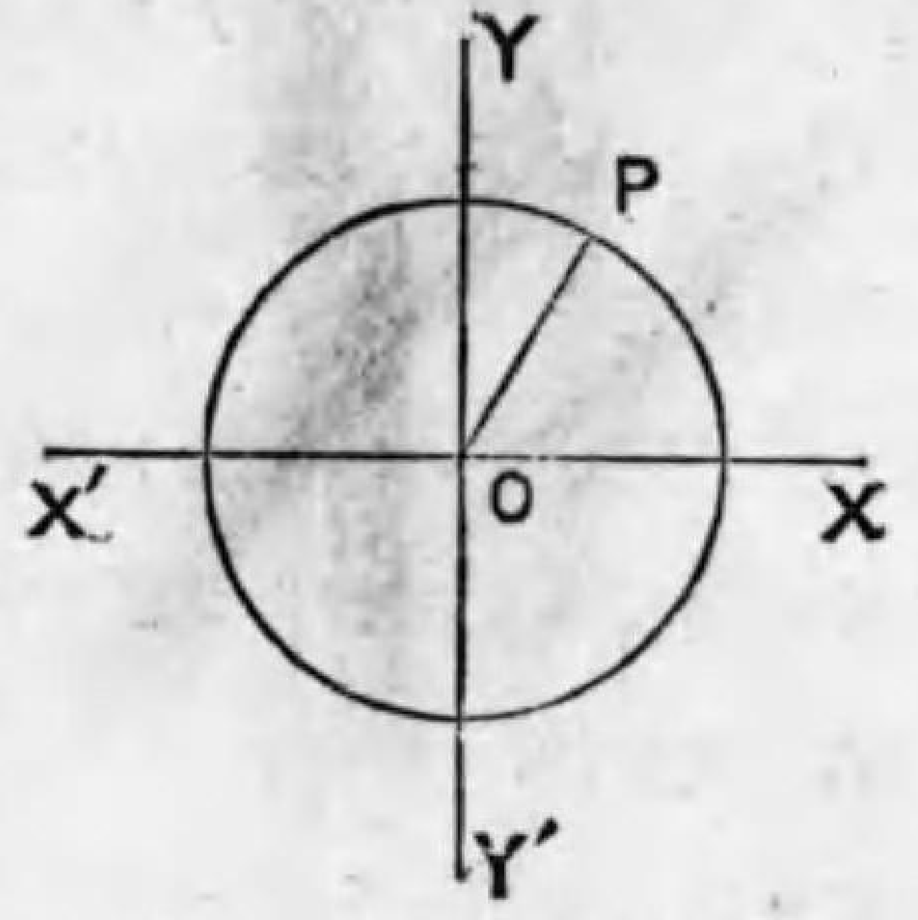
（第二圖）

一般ニ OP ハ時計ノ針ト同ジ方向ニ O 點ノ周リヲ n 回廻轉シ更ニ圖ノ如キ位置ニマデ進ム時ハ，角 AOP ノ大サハ $-360^\circ\times n-300^\circ$ ニ等シ．故ニ負角ニアリテモ其大サガ與ヘラレタル時ハ，動直線ノ位置ハ定マルト雖モ，逆ニ動直線 OP ノ最初ノ位置ト最後ノ位置トガ與ヘラレタリト雖モ，角 AOP ノ大サヲ一義ニ決定スルコトヲ得ズ．

負角ニ對シ前ノ角ヲ**正角**トイヒ，OA ヲ**原線**，動直線ノ最後ノ位置ヲ角ノ**終邊**トイフ．

2. 象限．

互ニ直交スル二ツノ直線 XOX′, YOY′ ガナス四ツノ直角ノ各々ノ内ニアル平面ノ部分ヲ名ヅケテ**象限**トイフ．而シテ XOY ノ部分ヲ**第一象限**，YOX′ ノ部分ヲ**第二象限**，X′OY′ ノ部分ヲ**第三象限**，Y′OX ノ部分ヲ**第四象限**トイフ．而シテ動直線 OP ガ第一象限ニアル時ハ角 AOP ヲ**第一象限ニ於ケル角**トイフ．又 OP ガ第二象限，第三象限，第四象限ニアル時ハ角 AOP ヲ夫々**第二象限**，**第三象限**，**第四象限ノ角**トイフ．故ニ 60° 又ハ 390° ノ如キハ第一象限ノ角ニシテ -60° 又ハ 300° ノ如キハ第四象限ノ角ナリ．



（第三圖）

3. 測角法．

測角法ニ三種ノ別アリ．**英國法**（或ハ六十分法）**佛國法**（或ハ百分法）及ビ**弧度法**コレナリ．今順次說明スベシ．

1°. 英國法．

コノ方法ハ實際家ニヨツテ用ヒラルヽモノニシテ，一直角ヲ單位トナス．而シテ其九十分ノ一ヲ**一度**トイヒ，一度ノ六十分ノ一ヲ**一分**トイヒ，一分ノ六十分ノ一ヲ**一秒**トイフ．而シテ十二度二十四分五十秒ヲ書キ表スニ

$$12^\circ\ \ 24'\ \ 50''$$

ヲ以テスルコト能ク人ノ知ル所ナリ．

2°. 佛國法．

コノ法モ亦一直角ヲ單位トナスト雖モ，其分割法ヲ異ニス．卽チ一直角ノ百分ノ一ヲ一度トイヒ，一度ノ百分ノ一ヲ一分トイヒ，一分ノ百分ノ一ヲ一秒トイフ．而シテ十二度二十四分五十秒ヲ書キ表スニ

12^g 24` 50``

ヲ以テス.

此方法ハ所謂百分法ナルガ故ニ英國法ヨリモ進化シタル測角法ナルモ今ニ用ヒラレズ. 其理如何トイフニ佛國法ヲ創作スル以前ニ已ニ英國法アリテ用ヒラレ, 從ツテ眞數表, 對數表ナドハ皆其法ニ則リテ作リ居リシガ故, 若シ佛國法ヲ用フルコトヽナラバ, 夫等ノ表ヲ悉ク變更セザルベカラザレバナリ.

3°. 弧度法.

弧度法ハ高等三角法ニ於テ用ヒラルヽ測角法ニシテ, 理論的研究上甚ダ必要ナルモノナリ. 而シテ其單位ヲ「**ラヂアン**」トイヒ, 半徑ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓ノ中心角ヲイフ.

定理 一ラヂアンハ定角ナリ.

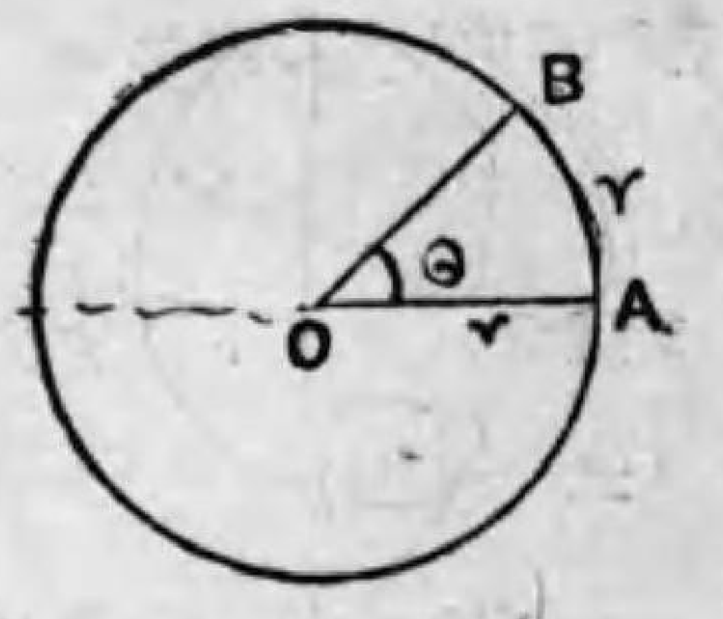
コノ定理ハ次ノ二ツノ幾何學ノ定理ニ基ヅクモノナリ.

i 圓ノ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ圓弧ノ長サニ比例ス.

ii 圓ノ周ト其直徑トノ比ハ一定不易ナリ. π

$\frac{\theta}{180}=\frac{r}{2\pi}$

今 O ヲ圓ノ中心, r ヲ其半徑トシ, 弧 AB ヲ r ニ等シカラシムル時ハ i, 及ビ ii ヨリ



（第四圖）

$$\frac{\hat{AOB}}{4\text{直角}}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\text{全圓周}}$$

$$=\frac{r}{2\pi r}$$

然ルニ定義ニヨリ $\hat{AOB}$ ヲ一ラヂアントスルガ故ニ

3.14)180

$$\text{一ラヂアン}=\frac{2\text{直角}}{\pi}\doteqdot 57°.3\ ^{*}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而シテ此右邊ハ一定ナリ. ヨツテ一ラヂアンハ定角ナリ.

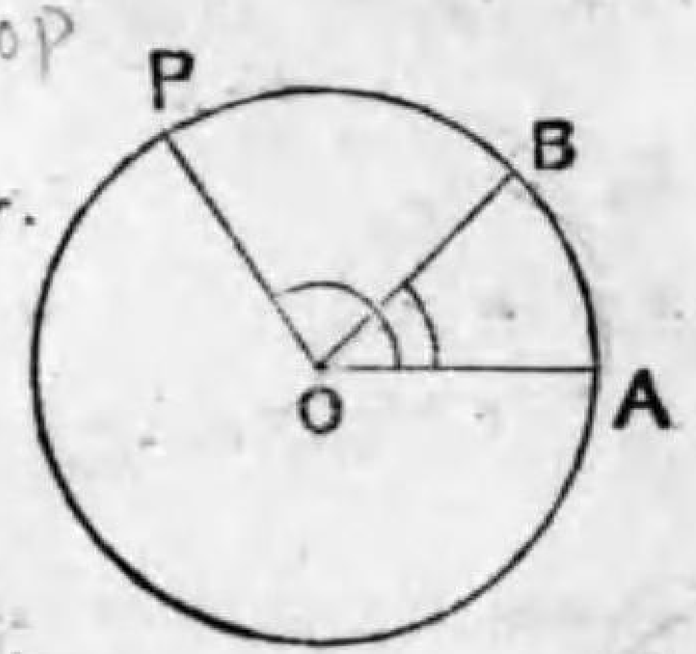
ラヂアンヲ單位トシテ測リタル角ノ數値ヲ其角ノ弧度トイフ. 例ヘバ二ラヂアンノ角ノ弧度ハ 2 ニシテ, 三ラヂアンノ角ノ弧度ハ 3 ナリ. 故ニ此方法ニヨリテ任意ノ角 AOP ヲ測ランニ,

$$\frac{\hat{AOP}}{\hat{AOB}}=\frac{\overset{\frown}{AP}}{\overset{\frown}{AB}}=\frac{\overset{\frown}{AP}}{r}$$

AOP

AOp : 1 = Ap : r

$$\text{ナルガ故ニ}\quad \hat{AOP}=\frac{\overset{\frown}{AP}}{r}\ \text{ラヂアン}\cdots\cdots(2)$$



（第五圖）

卽チ任意ノ角 AOP ノ弧度ハ $\frac{\overset{\frown}{AP}}{r}$ ナリ.

radian

4. 英國法ト弧度法トノ關係.

前節 (1) ヨリ

$$\text{二直角}=\pi\ \text{ラヂアン}$$

$$\text{直角}\ =\frac{\pi}{2}\ \text{ラヂアン}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナルガ故ニ二直角, 直角……ノ弧度ハ夫々 π, $\frac{\pi}{2}$, …… ナリ.

一般ニ或角ノ弧度ヲ θ, 英國法ニテノ度數ヲ x トスレバ, x ト θ トノ間ニ常ニ

$$\frac{x}{180}=\frac{\theta}{\pi}$$

$n° = \frac{n\pi}{180}$

ナル關係アリ. 故ニ x ヲ知ル時ハ θ ヲ求ムベク, 逆ニ θ ヲ知ル時ハ

---

* 詳シクイヘバ 57°.2957795…… 卽チ殆ンド 57°17′44.8″ ニ當ル.

x ヲ求メ得ベシ.

以下言葉ヲ簡單ニセンガ爲メ，或角ノ弧度ガ θ ナリトイフベキヲ略シテ單ニ角 θ ナリトイフ．故ニ直角ハ $\frac{\pi}{2}$ ニシテ，45° ハ $\frac{\pi}{4}$ ナリ.

8. **例 1.** 三角形ノ三ツノ角ハ等差級數ヲナシ，且ツ最小角ノ度數ト最大角ノ弧度トノ比ハ $60:\pi$ ナリトイフ．各角ヲ求メヨ.

［解］ 等差級數ヲナス三ツノ角ノ度數ヲ夫々，

$$x-y,\qquad x,\qquad x+y,$$

トスレバ　$3x=180^\circ$

ナルガ故ニ　$x=60^\circ$ ……………………(1)

$$\frac{x}{180}=\frac{\theta}{\pi}$$

ナリ．サテ最大角ヲ弧度ニ化スレバ

$$\frac{(x+y)}{180}\pi$$

ナルガ故ニ題意ニヨリテ

$$x-y:\frac{x+y}{180}\pi=60:\pi$$

即チ　$3(x-y)=x+y$ ……………………(2)

(1), (2) ヨリ　$y=30^\circ$

ヨツテ求ムル角ノ度數ハ夫々 30°, 60°, 90° ナリトス.

例 2. 地球ノ直徑ヲ 7900 哩トシ之ガ太陽ニ對スル角ヲ $17''.8$ トス．今光線ノ速サ每秒 185575 哩トスレバ太陽ノ光線ガ地球ニ達スルニハ幾分ヲ要スルカ.

［解］ 地球ト太陽ノ距離ヲ x 哩トス．x ガ非常ニ大ナルベキガ故ニ，x ヲ半徑トシ太陽ノ中心ヲ中心トスル圓ノ中心角ガ弧 7900 哩ニ對向スル角ガ $17''.8$ ナリト假定スルモ差支ヘナシ．故ニ

$$2x\pi:7900=4\hat{\mathrm{R}}:17''.8$$

$$=360\times60\times60'':17.''8 \text{ ……………………(1)}$$

サテ求ムル時間ノ秒數ハ

$$\text{秒數}=\frac{x}{185575} \text{ ……………………(2)}$$

ナルガ故ニ (1) ヨリ出ヅル x ノ値ヲ代入スレバ，約 493.3 秒即チ約 8 分 $13\frac{1}{3}$ 秒ナリ.

問　題 1.

次ノ諸角ハ各幾直角ナルカ. (1—3)

1. 60°　**2.** $75^\circ15'$　**3.** $130^\circ30'$

次ノ諸角ハ各幾度ナルカ. (4—6)

4. $\frac{2\pi}{3}$　**5.** $\frac{5}{6}\pi$　**6.** $\frac{3\pi}{4}$

次ノ諸角ハ各幾ラヂアンナルカ. (7—9)

7. 60°　**8.** $175^\circ45'$　**9.** 375°

10. 圓ノ半徑ヲ r トシ弧ノ長サヲ a トシ其上ニ立ツ中心角ノ弧度ヲ θ トスレバ

$$\boxed{r\theta=a}$$

ナル關係アルコトヲ證セヨ.

11. 直角三角形ノ二ツノ鋭角ノ差ハ $\frac{2}{5}\pi$ ナリトイフ．各幾度ナルカ.

✓**12.** 二ツノ角ノ差ハ 1° ニシテ，其弧度ノ和ガ 1 ナル時，コノ二ツノ角ノ弧度各如何.

✓**13.** 等差級數ヲナス三ツノ角アリ．其最小角ノ佛國度ト最大角ノ弧度トノ比ハ $40:\pi$ ナリトイフ．コノ三ツノ角ヲ英國法ノ度數ニテ示セ.

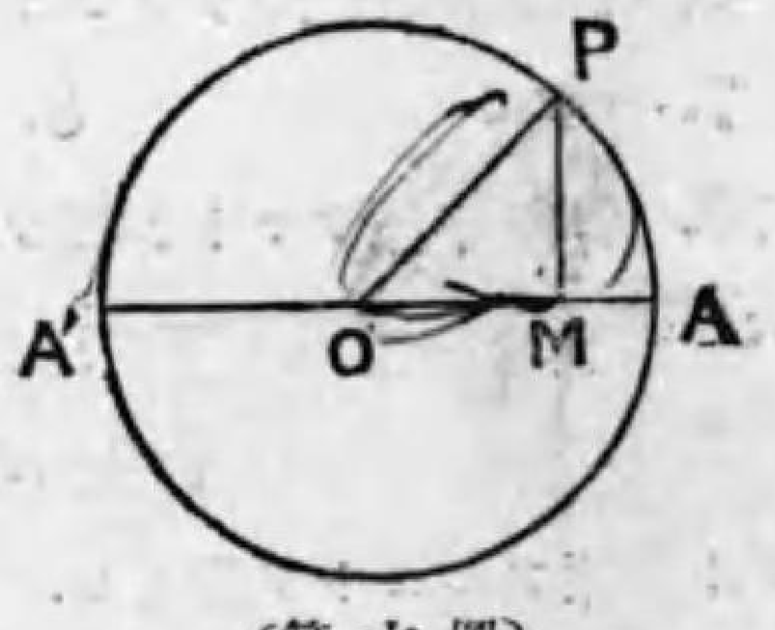
14. 正五角形，正八角形ノ角ヲ弧度法ニテ計算セヨ.

15. 地球ヨリ見ル時ハ月ノ直徑ハ $31'$ ナリトイフ．今地球トノ距離ヲ 240000 哩トスレバ月ノ直徑ハ約 2165 哩ナルコトヲ示セ.

第二章

三角函數

5. 三角函數.



(第六圖)

任意ノ角 AOP ノ大サヲ θ トシ，其終邊 OP 上ノ一ツノ點 P ヨリ原線又ハ其延長ニ垂線 PM ヲ下シ，其足ヲ M トスル時ハ

$\frac{MP}{OP}$ ヲ角 θ ノ**正弦**トイヒ，$\sin\theta$ ニテ表シ，

$\frac{OM}{OP}$ ヲ角 θ ノ**餘弦**トイヒ，$\cos\theta$ ニテ表シ，

$\frac{MP}{OM}$ ヲ角 θ ノ**正切**トイヒ，$\tan\theta$ ニテ表シ，

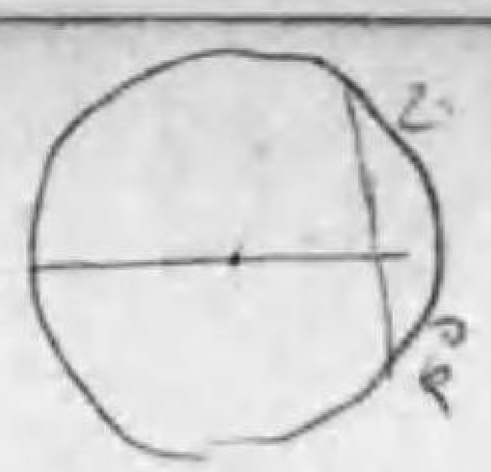
$\frac{OM}{MP}$ ヲ角 θ ノ**餘切**トイヒ，$\cot\theta$ ニテ表シ，

$\frac{OP}{OM}$ ヲ角 θ ノ**正割**トイヒ，$\sec\theta$ ニテ表シ，

$\frac{OP}{MP}$ ヲ角 θ ノ**餘割**トイヒ，$\operatorname{cosec}\theta$ ニテ表ス.

以上ノ六ツヲ**三角比**トイフ.

但シ角 θ ノ如何ニ關セズ OP ノ長サヲ正トスレドモ MP, OM ハ然ラズ. 之等ニ關シテハ次ノ規約ヲ設ク.



1°. P ハ AA′ ヨリモ上方ニアル時ハ MP ノ長サヲ正トシ，下方ニアル時ハ負トス.

2°. M ガ AA′ 上ニ於テ O ヨリモ右方ニアル時ハ OM ノ長サヲ正トシ，左方ニアル時ハ負トス.

故ニ各象限ニアル角ノ三角比ノ符號ハ次ノ表ノ如シ.

	正弦	餘弦	正切	餘切	正割	餘割
第一象限	+	+	+	+	+	+
第二象限	+	−	−	−	−	+
第三象限	−	−	+	+	−	−
第四象限	−	+	−	−	+	−

サテ角ガ定マラバ終邊 OP ノ位置ガ定マリ. 從ツテ其角ノ三角比ハ確定ス. 然レドモ角ガ變化スレバ其三角比モ亦コレニ伴ツテ變化ス. 卽チ三角比ハ角ノ函數ナリ. ヨツテ三角比ヲ**三角函數**トモイフ.

注意 六ツノ三角比ノ外ニ尙二ツ

$$1-\cos\theta=\operatorname{vers}\theta$$

$$1-\sin\theta=\operatorname{covers}\theta$$

アリテ夫々角 θ ノ正矢，餘矢ト稱スト雖モ實際ニ用ヒラルル事稀ナリ.

6. 定義ヨリ直チニ知ラルル諸公式.

三角函數ノ定義ヨリ直接誘導シ得ベキ公式ハ次ノ如シ.

1°. $\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$ $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$ $\tan\theta\cot\theta=1.$

2°. $\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$ $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ $\cos\theta.\sec\theta=1.$

DC:AC=

3°. $\sin\theta=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$ $\sin\theta.\operatorname{cosec}\theta=1.$

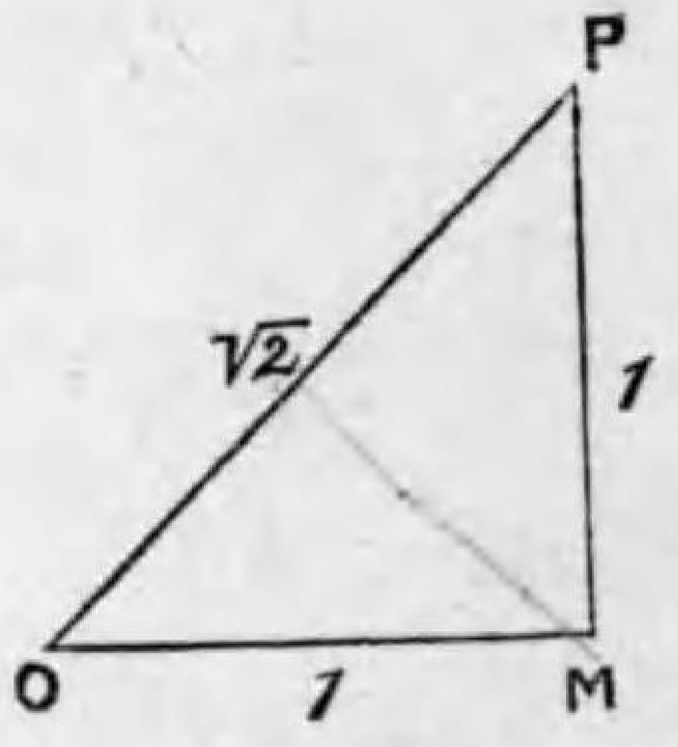
4°. $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$

7. 45°ノ角ノ三角函數.

$M\hat{O}P=45°$ トシ OP 上ニ任意ノ一點 P ヲトリ, OM ニ垂線ヲ下シ, 其足ヲ M トスレバ,

$$OM:MP:OP=1:1:\sqrt{2}$$

ナルコト能ク知ル所ナリ.



(第七圖)

故ニ

$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45°=1$ $\cot 45°=1$

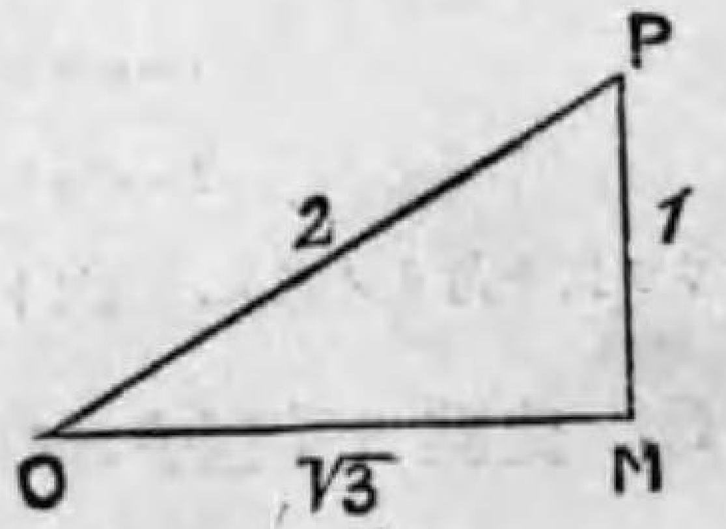
$\sec 45°=\sqrt{2}$ $\operatorname{cosec} 45°=\sqrt{2}$

8. 30°及ビ60°ノ角ノ三角函數.

$M\hat{O}P=30°$ トシ PM ヲ OM ヘノ垂線トスレバ

$$MP:OM:OP=1:\sqrt{3}:2$$

ナルコト能ク知ル所ナリ.



(第八圖)

故ニ

$\sin 30°=\frac{1}{2}$ $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cot 30°=\sqrt{3}$

$\sec 30°=\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\operatorname{cosec} 30°=2$

同様ニシテ

$\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60°=\frac{1}{2}$

$\tan 60°=\sqrt{3}$ $\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sec 60°=2$ $\operatorname{cosec} 60°=\frac{2}{\sqrt{3}}$

ナリ.

$\frac{1}{2}$

例 1. 第二象限ニアル角ノ正切ハ $\frac{-1}{3}$ ナリトイフ. 他ノ三角函數ヲ求メヨ.

［解］ 第二象限ニアル角ヲ AOP トスレバ假定ニヨリテ MP ノ長サヲ 1 トスレバ, OM ノ長サハ 3 ナリ, 從ツテ OP ノ長サハ $\sqrt{10}$ ナリ.

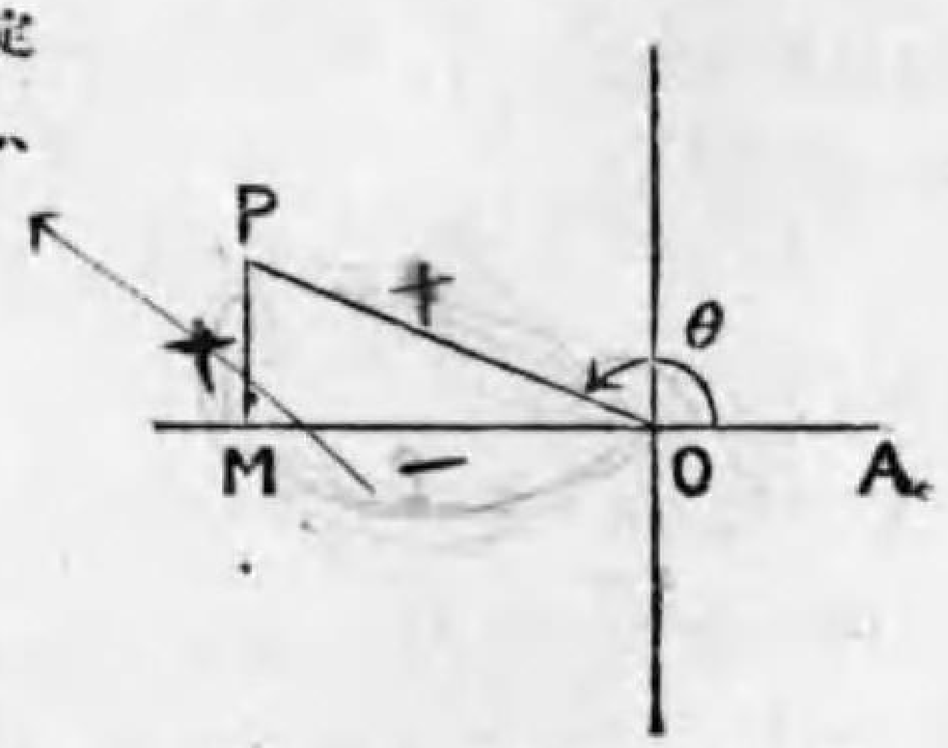
故ニ $A\hat{O}P$ ノ大サヲ θ トスレバ

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}},$ $\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\cot\theta=-3.$ $\sec\theta=-\frac{\sqrt{10}}{3}$

$\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{10}$

ナリ.



$\tan\varphi=\frac{-1}{1}$

(第九圖)

例 2. 線分 AD ノ三等分點ヲ B, C トシ BC ヲ直徑トセル圓周上ノ任意ノ點ヲ P トシ, 角 APB ヲ θ, CPD ヲ φ トスレバ

$$\tan\theta.\tan\varphi=\frac{1}{4}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

［解］ $BP\perp BE,$

$CP\perp CF$

ナルヤウニ BE, CF ヲ作ラバ

$$\tan\theta=\frac{BE}{BP} \qquad \tan\varphi=\frac{CF}{PC}$$

故ニ

$$\tan\theta.\ \tan\varphi=\frac{BE.\ CF}{BP.\ PC}$$

然ルニ BE//PC ニシテ且ツ

B ハ AC ノ中點ナルガ故ニ

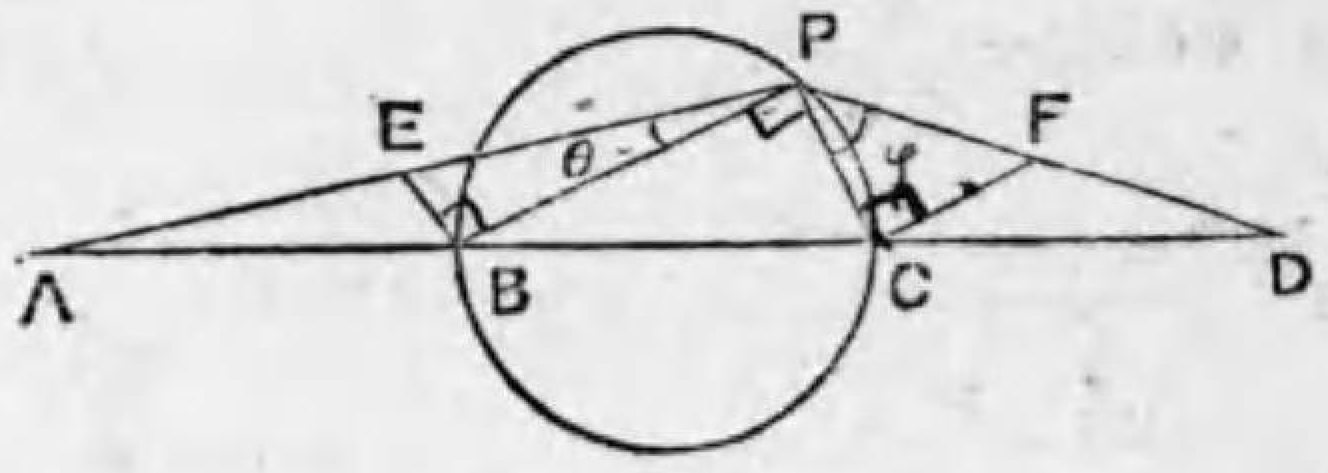
$$\frac{BE}{PC}=\frac{1}{2}$$

同樣ニ

$$\frac{CF}{BP}=\frac{1}{2}$$

ヨツテ

$$\tan\theta.\ \tan\varphi=\frac{1}{4}$$



（第十圖）

例 3. 直角三角形 ABC ニ於テ C ヲ直角頂トス．今 A, B ヨリ AB ニ垂線ヲ作リ，BC, AC ノ延長ト交ル點ヲ E, D トスレバ

$$\tan C\hat{E}D=\tan^3 B\hat{A}C$$

ナルコトヲ證セヨ，

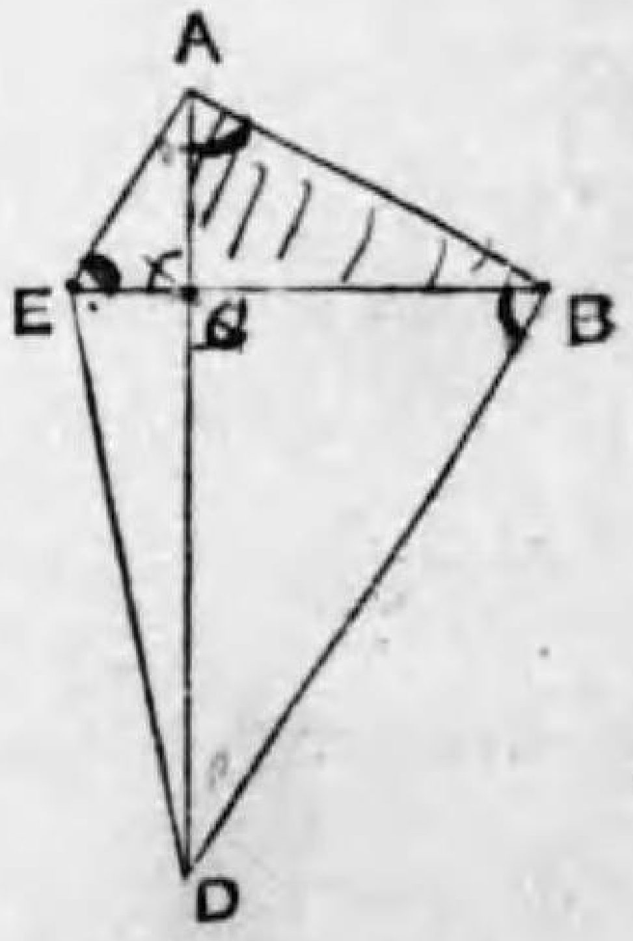
［解］ 能ク知ラレタル性質ニヨリ

$$C\hat{E}A=C\hat{B}D=C\hat{A}B$$

故ニ

$$\tan^3 B\hat{A}C=\tan C\hat{E}A.\ \tan C\hat{B}D \tan C\hat{A}B$$

$$=\frac{AC}{CE}\ \frac{CD}{BC}\ \frac{BC}{AC}=\frac{CD}{CE}=\tan C\hat{E}D$$



（第十一圖）

問　題 2.

✓ **1.** $\tan 60^\circ=\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$ ナルコトヲ證セヨ．

但シ $\tan^2 30^\circ$ ハ $(\tan 30^\circ)^2$ ノ事ナリ．正切以外ノ三角函數ニモカヽル略記法ヲ用フルモノトス．

2. $\tan^2 30^\circ+\tan^2 45^\circ+\tan^2 60^\circ$ ノ値ヲ求メヨ．

---

3. 第二象限ニアル角ノ正弦ハ $\frac{4}{5}$ ナリトイフ．其角ノ他ノ三角函數ヲ求メヨ．

4. 第三象限ニアル角ノ正切ハ $\frac{3}{4}$ ナリトイフ．其角ノ他ノ三角函數ヲ求メヨ．

✓ **5.** 半徑 r ナル圓ニ內接スル正 n 邊形ノ面積ヲ求メヨ．

6. 直角二等邊三角形 ABC ノ直角頂ヲ C トシ，角 A ノ二等分線ガ EC ト交ル點ヲ D トスル時，線分 DC ノ長サヲ求メ．次ニ之ニヨツテ二十二度三十分ノ三角函數ヲ求メヨ．

✓ **7.** $\sin\theta\tan\theta$ ガ常ニ $2(1-\cos\theta)$ ヨリ大ナルコトヲ證セヨ．

但シ θ ハ第一象限ニアル角トス．

8. 三角形ノ二邊ノ長サハ $2a$, $2b$ ニシテ其夾角ガ 120° ナル時，$2a$ ナル邊ニ對スル角ヲ θ トスレバ

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}a}{a+2b}$$

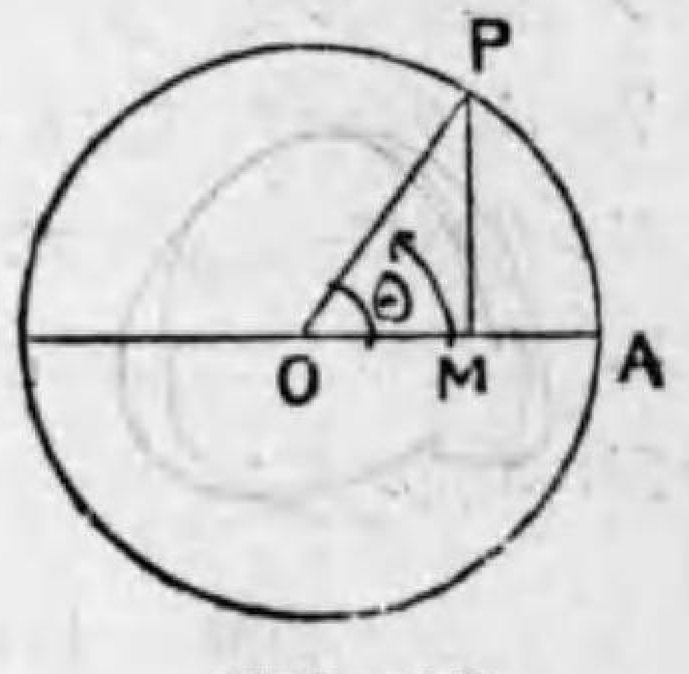
ナルコトヲ證セヨ．

第三章

正弦函數ト餘弦函數

9. 本章ニ於テハ正弦，餘弦函數ノ諸性質ニ就キテ論ゼントス.

1°. 角 θ ノ正弦，餘弦ハ角ノ終邊 OP ノ位置ニノミ關係シテ變化スルガ故ニ



(第十二圖)

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta&=\sin(\theta+2n\pi)\\ \cos\theta&=\cos(\theta+2n\pi)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル關係アリ.

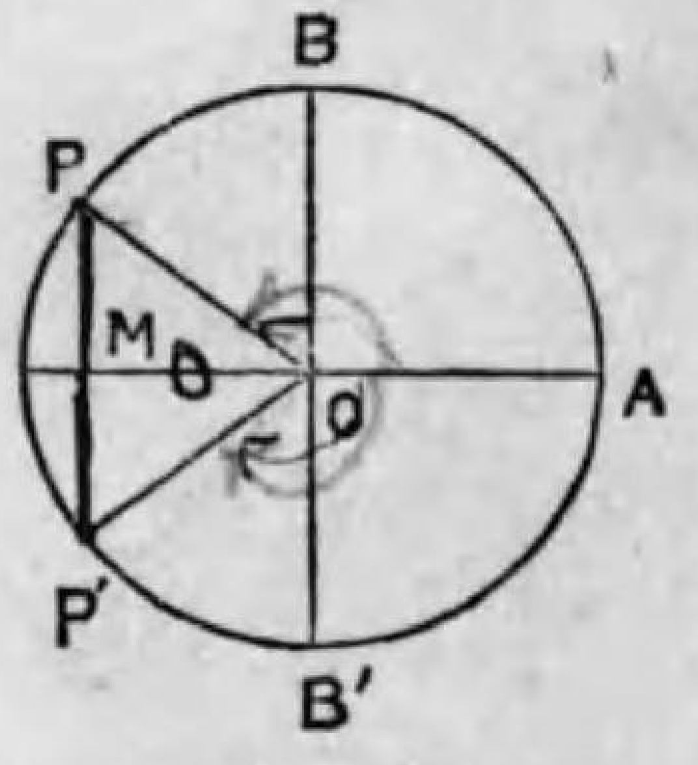
但シ θ ハ角ノ弧度ニシテ n ガ正，負ノ整數又ハ零ナリ.

此式ハタダニ正弦，餘弦ノミナラズ凡テノ三角函數ニ就イテ成立ス. 而シテコノ事柄ヲ言葉ニテハ

三角函數ハ凡テ 2π ヲ週期トスル**週期函數**ナリトイフヲ得ベシ.

コレ三角函數ノ代數函數ト異ナル一ツノ點ナリトス.

2°. $A\hat{O}P$ ト $A\hat{O}P'$ トハ θ ト $-\theta$ トノ關係ニアル時ハ P ト P′ トハ原線 OA 又ハ其延長ニ關シテ對稱ノ位置ニアルガ故ニ



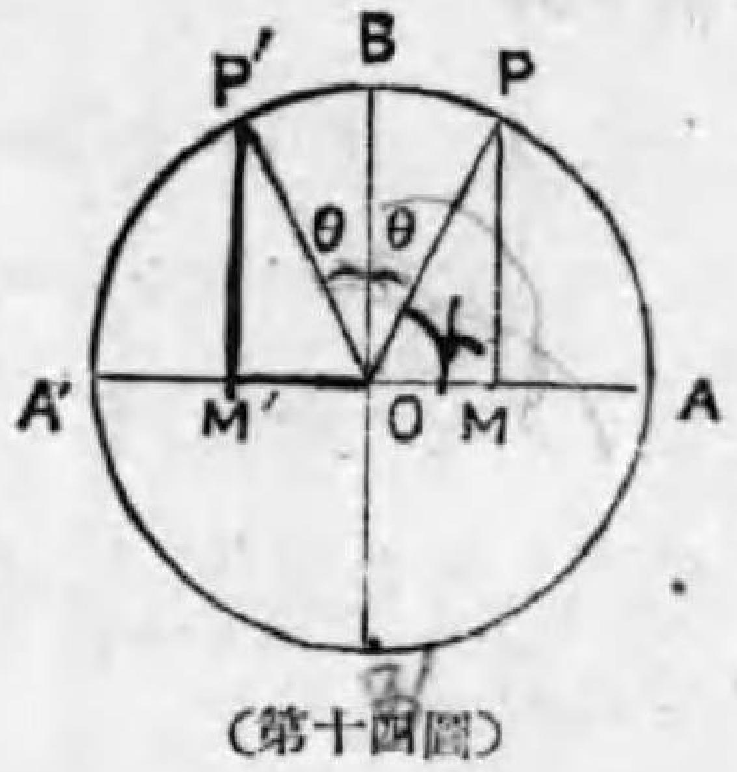
(第十三圖)

$$\left.\begin{aligned}\sin(-\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)&=\ \ \cos\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ.

從ツテ $y=\sin\theta$ トシテぐらふニテ表セバ原點ニ關シテ對稱トナリ. $\cos\theta$ ヲぐらふニテ表セバ y 軸ニ關シテ對稱トナルコト後ニ至ツテ分明セン。

3°. 圖ノ如ク AA′ ノ垂直二等分線 BB′ ノ兩側ニ等角 θ ヲナス直線 OP, OP′ ヲ引ケバ垂線 PM, P′M′ ハ相等シク OM ト OM′ トハ符號ノミヲ異ニスルガ故ニ



(第十四圖)

$$\left.\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)&=\ \ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)&=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

而シテ此關係ハ θ ノ値ノ如何ニ關セズ眞ナリ. 故ニ今

$$\frac{\pi}{2}-\theta=\alpha$$

$\frac{\pi-2\theta}{2}=\alpha$

$\angle A\hat{O}P$

$\pi-2\theta=\alpha$

$\pi=2(\alpha+\theta)+\theta$

ト置ケバ

$$\frac{\pi}{2}+\theta=\pi-\alpha$$

ナルガ故ニ (3) ハ亦

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha&=\ \ \sin(\pi-\alpha)\\ \cos\alpha&=-\cos(\pi-\alpha)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

依リテ次ノ定理ヲ得.

定理 互ニ補角ヲナス二ツノ角ノ正弦ハ相等シク，餘弦ハ絶對値相等シケレドモ符號相反ス.

4°. 公式 (4) ニ於テハ α ノ値ニ制限ナキガ故ニ

$$\alpha=-\theta$$

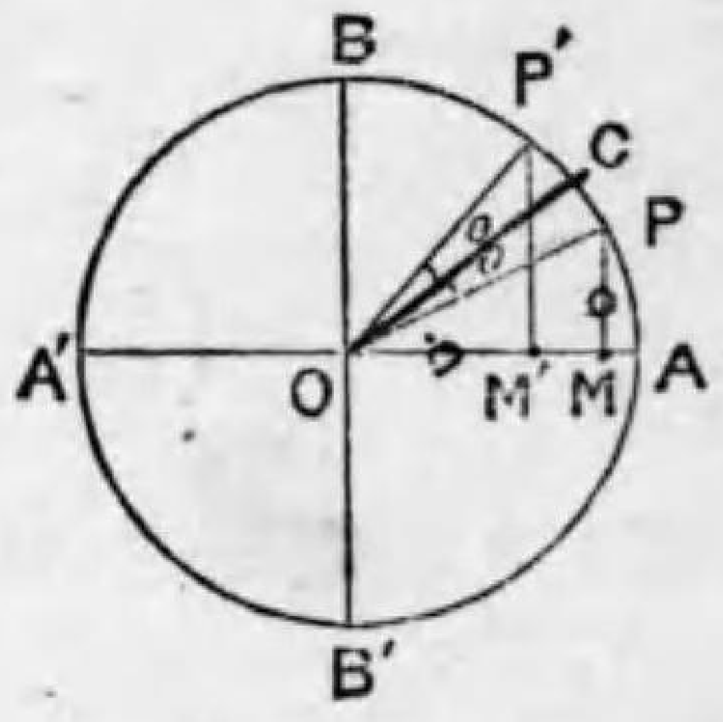
ト置ケバ

$$\left.\begin{aligned}\sin(\pi+\theta)&=\ \ \sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \cos(\pi+\theta)&=-\cos(-\theta)=-\cos\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

依ツテ次ノ定理ヲ得.

定理　角ヲ π（卽チ二直角）ダケ增セバ，正弦函數及ビ餘弦函數ハ共ニ符號ヲ變ズ.

5°.　AA′, BB′ ヲ互ニ直交スル直徑ナリトシ，$\hat{AOB}$ ノ二等分線 OC ノ兩側ニ等角 θ ヲナス直線 OP, OP′ ヲ引キ OA ニ垂線 PM, P′M′ ヲ引ケバ



（第十五圖）

$$\triangle OPM\equiv\triangle OP'M'$$

卽チ

$$OM=M'P'$$

$$MP=OM'$$

ナルガ故ニ

$$\left.\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)&=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)&=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

今此式ニ

$$\frac{\pi}{4}-\theta=\alpha$$

ト置ケバ

$$\frac{\pi}{4}+\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

ナルガ故ニ (6) ハ亦

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\ \cos\alpha&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

依ツテ次ノ定理ヲ得.

定理　一ツノ角ノ正弦ハ其餘角ノ餘弦ニ等シク，又餘弦ハ其餘角ノ正弦ニ等シ.

6°.　公式 (7) ニ於テハ α ノ値ニ制限ナキガ故ニ

$$\alpha=-\theta$$

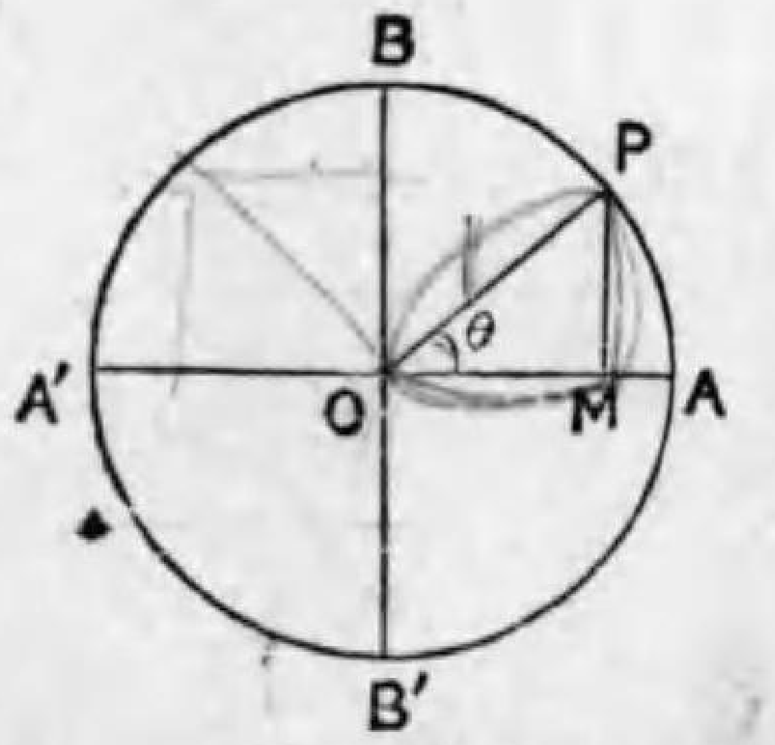
ト置カバ

$$\left.\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)&=\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)&=\cos(-\theta)=\ \ \cos\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

ヲ得.

10.　正弦函數及ビ餘弦函數ノ値ノ變化.

正弦，餘弦函數ノ變化ヲ考究スルニハ半徑 1 ナル圓（之ヲ單位圓トイフ）ヲ畫クヲ得策トス．何トナレバ



（第十六圖）

$$\sin\theta=\frac{MP}{OP}$$

$$\cos\theta=\frac{OM}{OP}$$

ニシテ且ツ OP=1 ナルガ故ニ正弦，餘弦函數ノ値ハ單ニ MP 或ハ

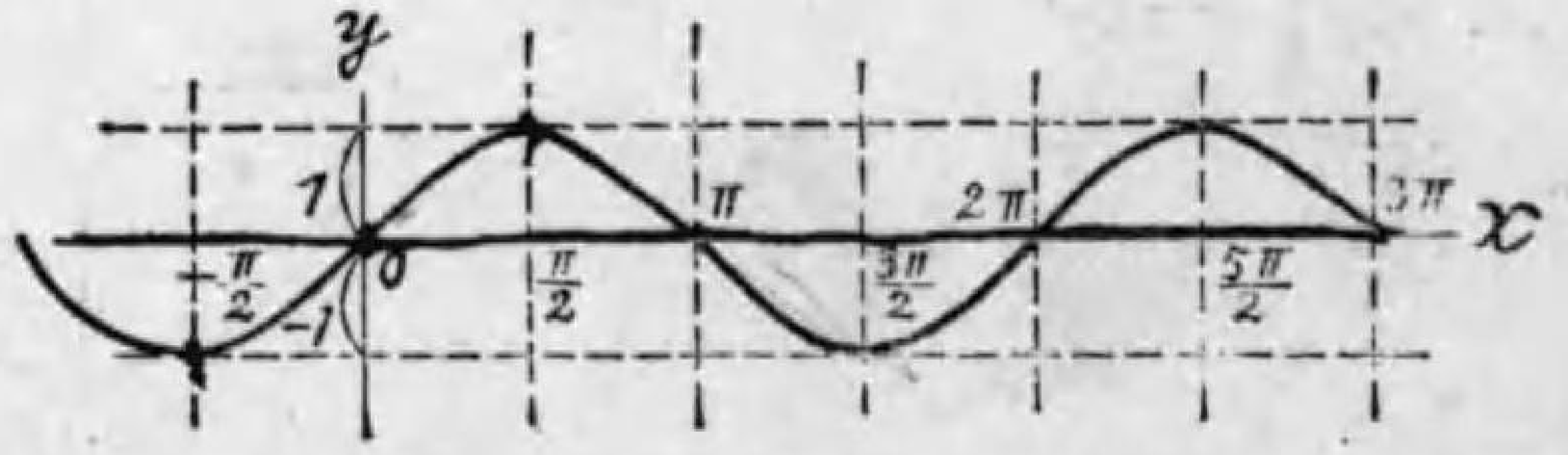
OM ノ長サヲ示ス數ニテ表スコトヲ得ベケレバナリ．ヨツテ先ヅ正弦ノ變化ヲ見ンニ，初メ θ ガ零ナル時ハ MP ガ零ナルガ故ニ $\sin\theta$ モ零ナリ．θ ガ增スニ從ヒ，MP モ增加シ，θ ガ $\frac{\pi}{2}$ ニ達スル時ハ MP ハ OB ニ一致ス．ヨツテ θ ガ零ヨリ $\frac{\pi}{2}$ ニ至ルニ從ヒ $\sin\theta$ ハ零ヨリ次第ニ增加シテ 1 ニ至ル．サテ θ ガ直角ヲ超ユルニ及ビテ MP ハ漸ク減少シ初メ π ニ至ツテ零トナルガ故ニ $\sin\theta$ ハ 1 ヨリ次第ニ減少シテ零トナル．而シテ θ ハ尙モ增加スレバ MP ハ負トナリ θ ガ $\frac{3\pi}{2}$ ニ至ツテ $\sin\theta=-1$ トナル．最後ニ θ ガ尙モ增加スレバ $\sin\theta$ ガ -1 ヨリ增加シ θ ガ 2π ニ至ルニ及ビ $\sin\theta=0$ ニ復歸ス．

之ヲ表示スレバ次ノ如シ．

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin\theta$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

但シ矢ノ上向ハ次第ニ增加スルコトヲ示シ，矢ノ下向ハ次第ニ減少スルコトヲ示ス．

尙零ヨリモ小ナル角及ビ 2π ヨリナル角ノ正弦ハ零ト 2π トノ間ノ値ヲ繰リ返スニ過ギザルベシ．故ニ $y=\sin x$ ト置キ，其ぐらふヲ作ラバ，次ノ如シ．

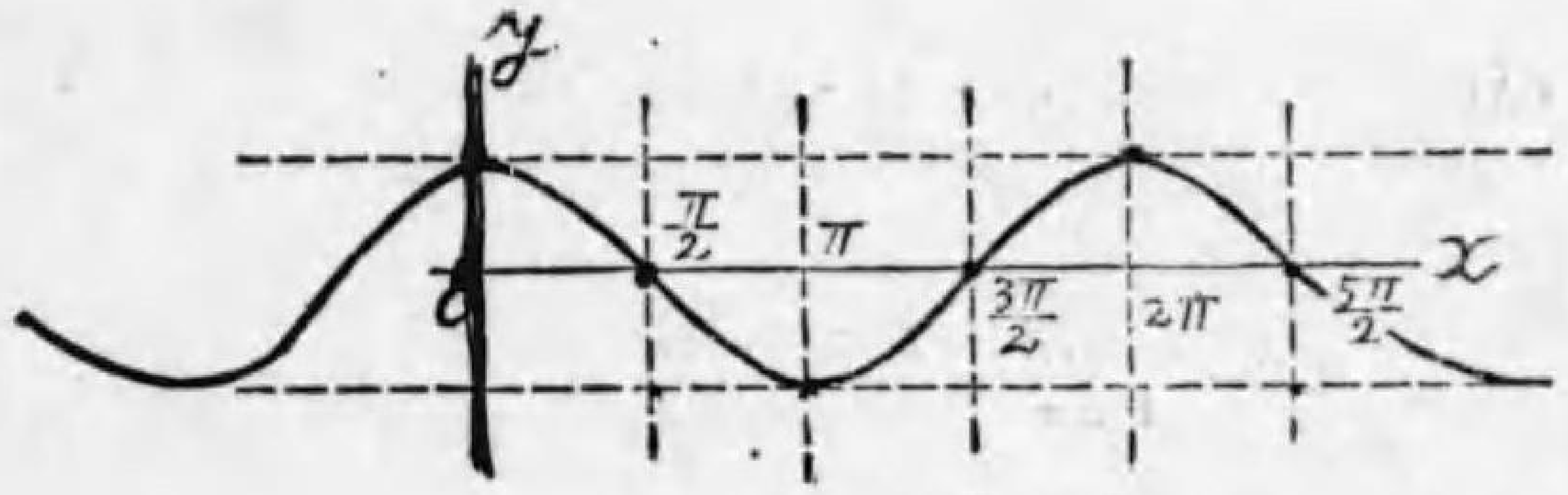


（第十七圖）

同樣ニシテ餘弦函數ノ値ノ變化ヲ表示スレバ

θ	0		$\frac{\pi}{2}$,		π		$\frac{3\pi}{2}$,		2π
$\cos\theta$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

ヨツテ $y=\cos x$ ト置キ，其ぐらふヲ作ラバ次ノ如シ．



（第十八圖）

例 1. 三角形 ABC ニ於テ

$$\cos(A+B-C)=-\cos 2C$$

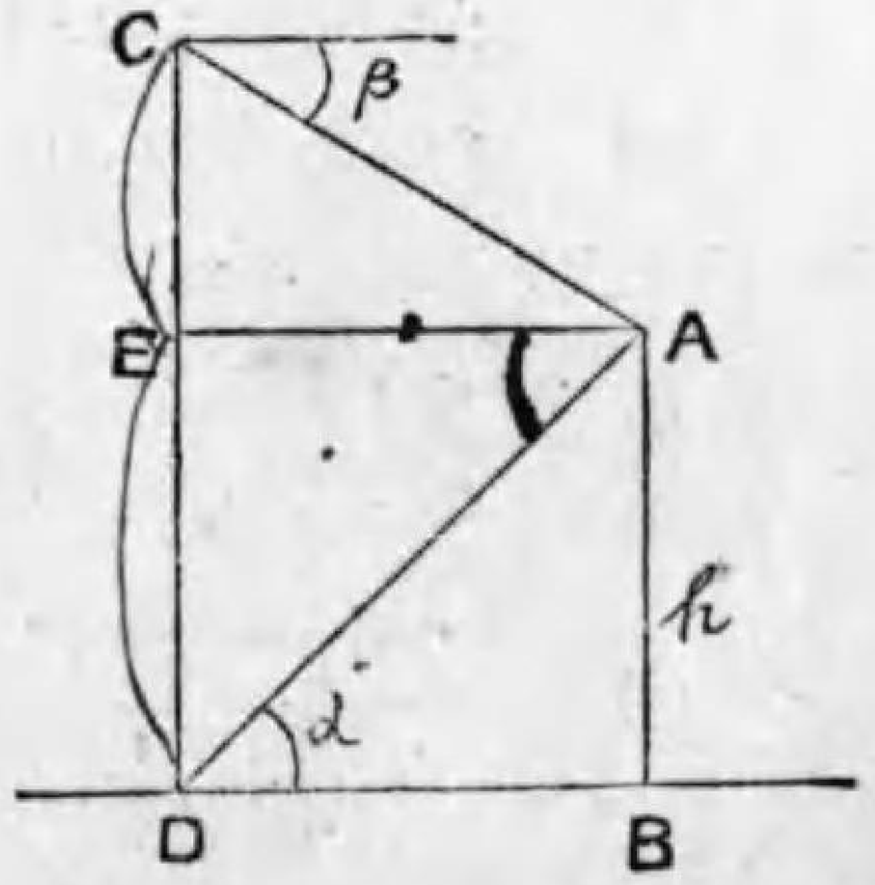
ナルコトヲ證セヨ．

［解］
$$\cos(A+B-C)=-\cos\{\pi-(A+B-C)\}$$
$$=-\cos\{A+B+C-(A+B-C)\}$$
$$=-\cos 2C$$

例 2. 平面上ニ垂直ニ立チタル二ツノ塔 AB, CD アリ塔 CD ノ足 D ヨリ塔 AB ヲ見ル角(**仰角**)ハ α ニシテ，C ヨリ塔 AB ノ頂上 A ヲ見ル俯角ハ β ナリ．今 AB ノ高サヲ h トスレバ CD ノ高サハ

$$h\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}\right)$$

ナルコトヲ證セヨ．



（第十九圖）

但シ**俯角**トハ直線 AC ガ C ヨリノ水平線トナス角ナリ．

［解］ AE ヲ DB ニ平行ニ引キ α ヲ仰角，β ヲ俯角トス．

然ル時ハ

$$\tan D\hat{A}E=\frac{ED}{AE}$$

而シテ

$$\hat{DAE}=\alpha$$

$$ED=AB=h$$

ナルガ故ニ

$$AE=\frac{h}{\tan\alpha}$$

又　$\tan\hat{CAE}=\frac{CE}{AE}$　　$\therefore\ CE=AE\tan\beta$

ヨツテ

$$CE=\frac{h\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{h\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}$$

故ニ　$CD=ED+CE=h+\frac{h\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}$

$$=h\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}\right)$$

問　題　3.

1. 次ノ三角函數ヲ 45° ヨリモ小ナル正角ノ三角函數ニテ表ハセ.

$\sin 280°$,　　$\sin 500°$

$\cos 150°$,　　$\cos 600°$

2. 次ノ方程式ヲ滿足スル角ノ中，四直角ヨリモ小ナル正角ヲ求メヨ.

(a)　$2\sin^2\theta=1$

(b)　$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$

(c)　$2\cos^2\theta-\cos\theta=0$

3. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ.

(a)　$\frac{\sin(180°-A)\cos(270°-A)}{\sin(180°+A)\cos(270°+A)}$

(b)　$\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)\cos(\pi-\theta)\sin(\pi+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\sin(\pi-\theta)\cos(\pi+\theta)}$

4. 次ノ等式ヲ證明セヨ.

(a)　$\sin(\pi+\theta)+\sin\theta+\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=0$

(b)　$\sin(270°+\alpha)+\sin(180°+\alpha)+\cos(180°+\alpha)$

$$=\sin(270°-\alpha)+\cos(180°-\alpha)+\sin(-\alpha)$$

-sin θ + sin θ + cos θ - sin

5. 三角形 ABC ニ於テ

(a)　$\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}$

(b)　$\sin(A+B)=\sin C$

ナルコトヲ證セヨ.

6.　$\sin(m\pi+\theta)=(-1)^m\sin\theta$

及ビ

$$\cos(m\pi+\theta)=(-1)^m\cos\theta$$

ナルコトヲ證セヨ. 但シ m ハ正，負ノ整數又ハ零ナリトス.

7. x ガ實數ナル時ハ方程式

$$\sin\theta=x+\frac{1}{x}$$

ヲ滿足スルガ如キ θ ガ存在セザルコトヲ示セ.

= -sin
sin -100°
= -sin 100°
= -sin 10°
= -cos

Sin 280° = sin (360°-80°)
= sin -80
= -sin 80°
= -sin = cos 10°

第四章

正切函數ト餘切函數

11. **本條ニ於テ正切及ビ餘切函數ノ諸性質ヲ考究スベシ.** 然ルニ正切, 餘切ハ夫々次ノ關係

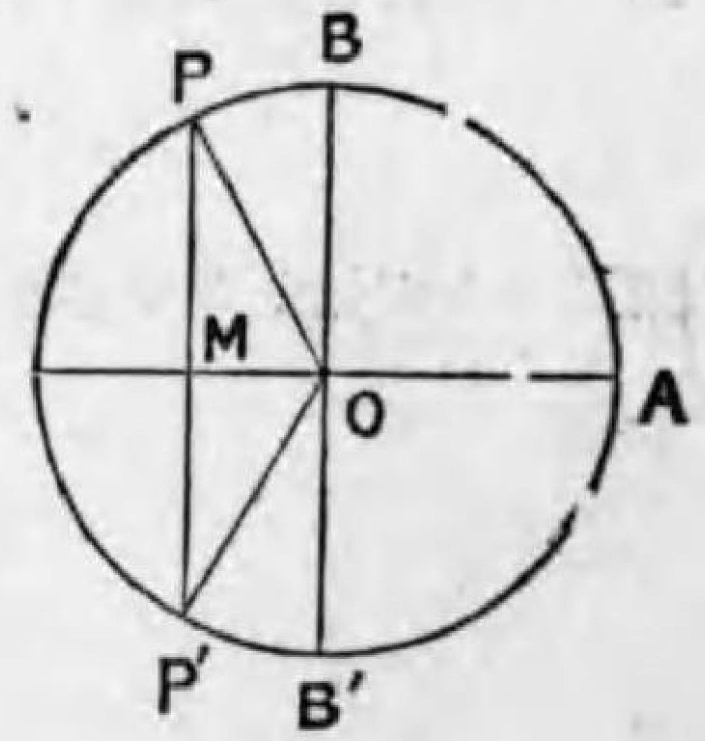
$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\qquad\qquad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

ヲ有スルヲ以テ, 正弦, 餘弦ノ公式ヲ應用スルコトニヨリテ直チニ其性狀ヲ導クコトヲ得ベシ. 以下列擧セン.

1°.
$$\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$$
$$=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad &\tan(-\theta)=-\tan\theta\\ \text{同樣ニ}\quad &\cot(-\theta)=-\cot\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ. 從ツテ $y=\tan\theta$ 及ビ $y=\cot\theta$ トシテぐらふニテ表セバ原點ニ關シテ對稱トナル.



(第二十圖)

2°.
$$\tan(\pi+\theta)=\frac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)}$$

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta\\ \text{同樣ニ}\qquad &\cot(\pi+\theta)=\cot\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

依ツテ次ノ定理ヲ得.

定理 正切及ビ餘切函數ハ π ヲ週期トスル週期函數ナリ.

3°.
$$\left.\begin{aligned}\tan(\pi-\theta)&=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta\\ \cot(\pi-\theta)&=\frac{\cos(\pi-\theta)}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

依ツテ次ノ定理ヲ得

定理 互ニ補角ヲナス二ツノ角ノ正切及ビ餘切ハ絕對値相等シク, 符號相反ス.

4°.
$$\left.\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)&=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)&=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

依ツテ次ノ定理ヲ得.

定理 或角ノ正切, 餘切ハ夫々餘角ノ餘切, 正切ニ等シ.

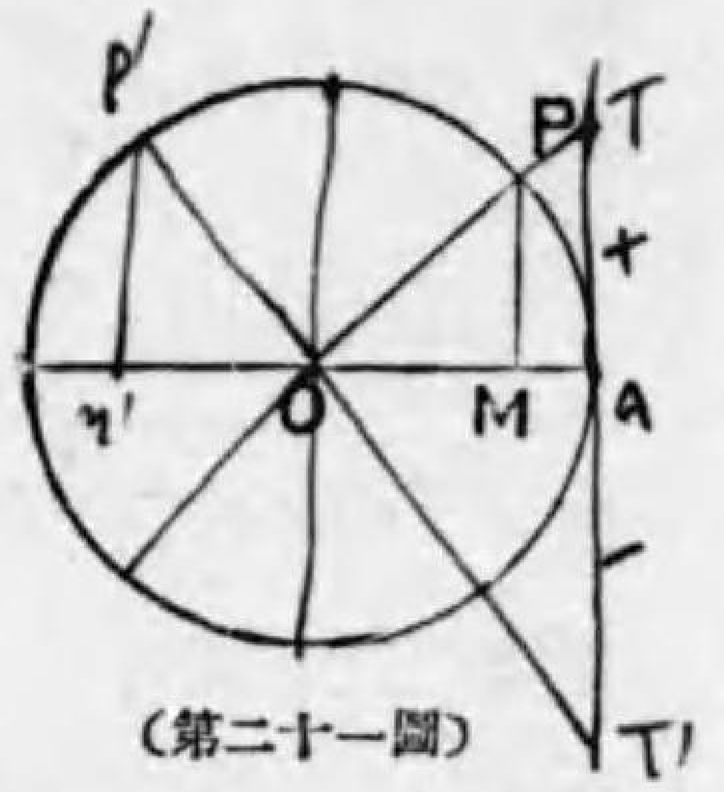
5°.
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta$$

$$\left.\begin{aligned}\text{故ニ}\qquad &\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta\\ \text{同樣ニ}\quad &\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

12. 正切及ビ餘切函數ノ値ノ變化.

先ヅ θ ガ零ナル時ハ MP ノ長サハ零ニシテ $OM\neq 0$ ナルガ故ニ

$\tan\theta$ ノ値ガ零ナリ．θ ガ增加スルニ從ヒ OM ハ次第ニ減少シ，MP ハ次第ニ增加スルガ故ニ $\tan\theta$ ノ値ハ次第ニ大トナリ，θ ガ $\frac{\pi}{2}$ 卽チ 90° ニ近ヅクニ從ヒ，$\tan\theta$ ノ値ハ如何ホドニテモ增加ス．



（第二十一圖）

コノ事實ヲ θ ガ $\frac{\pi}{2}$ ニ近ヅケル極限ニ於テハ $\tan\theta$ ノ極限値ハ ∞ ナリトイフ．ヨツテ θ ガ零ヨリ $\frac{\pi}{2}$ ニ至ルマデニハ其正切ハ 0 ヨリ $+\infty$ ナマデ增加ス．

次ニ θ ガ $\frac{\pi}{2}$ ヲ超エタル瞬間ヲ考フルト MP ハ依然トシテ正ナルモ OM ハ負ニシテ而カモ其絕對値ハ甚ダ小ナルガ故ニ，θ ガ第二象限ニアリテ $\frac{\pi}{2}$ ニ近ヅキタル極限ニ於テハ $\tan\theta$ ノ極限値ハ $-\infty$ ナリトイフ．

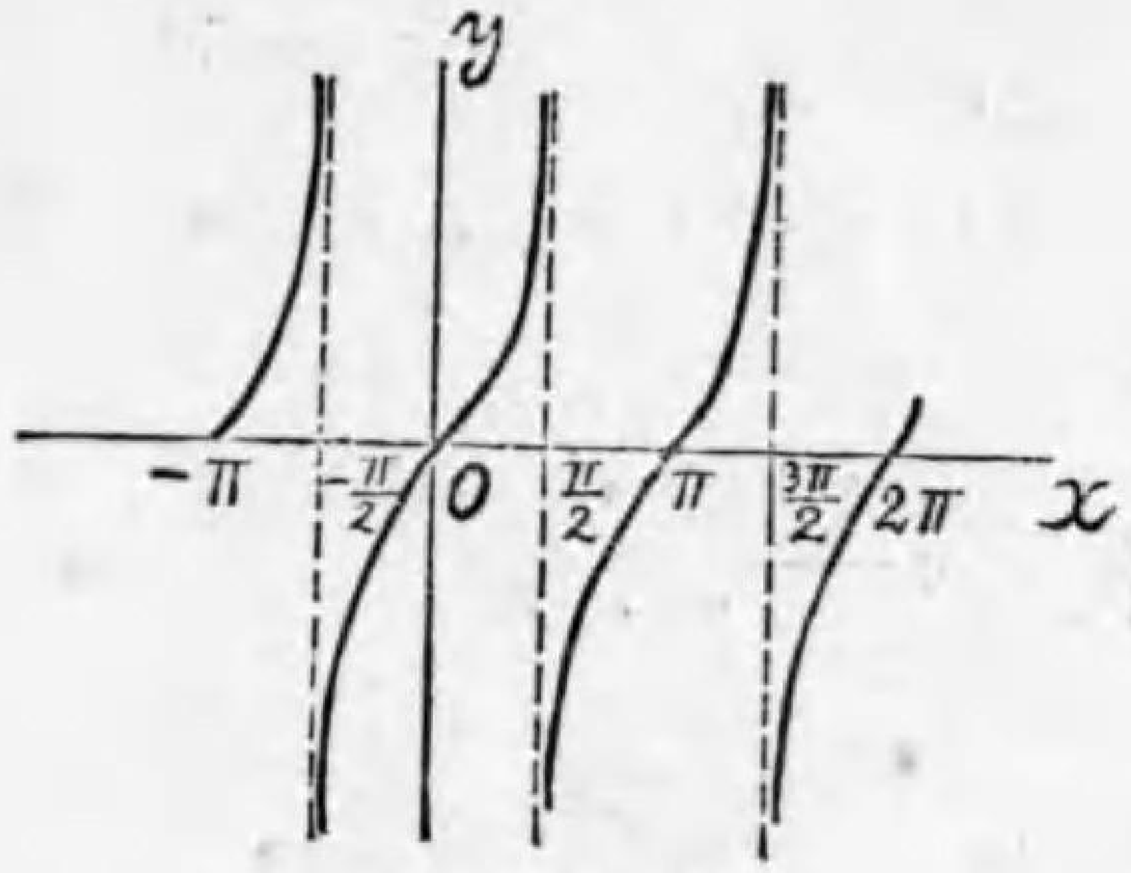
注意 θ ガ丁度 $\frac{\pi}{2}$ トナル時ハ OM ノ長サガ零トナルガ故ニ $\tan\frac{\pi}{2}$ ガ意味ヲナサズ，然レドモ尙コノ場合 $+\infty$，或ハ $-\infty$ ナリトイフコトアリ．コハ上ニ述ベタルガ如キ極限値ヲ指スモノト知ルベシ．cot 0 等ノ場合亦同樣ノ注意ヲ要ス．

サテ θ ガ第二象限ニ入リテ次第ニ增加スル時ハ PM ハ減少シ，OM ノ絕對値ガ增加スルガ故ニ θ ハ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ π マデ增加スルニ從ヒ，其正切ハ負ノ無限大ヨリ零ニ增加ス．

之ヲ表示スレバ次ノ如シ．

θ	0		$\frac{\pi}{2}-0$	$\frac{\pi}{2}+0$		π
$\tan\theta$	0	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	0

尙正切函數ハ π ヲ週期トスル週期函數ナルヲ以テ，零ヨリ小ナル負角及ビ π ヨリ大ナル正角ノ正切ハ零ト π トノ間ノ値ヲ繰リ返スニ過ギザルベシ．故ニ $y=\tan\theta$ ト置キ，其ぐらふヲ作ラバ，次ノ如シ

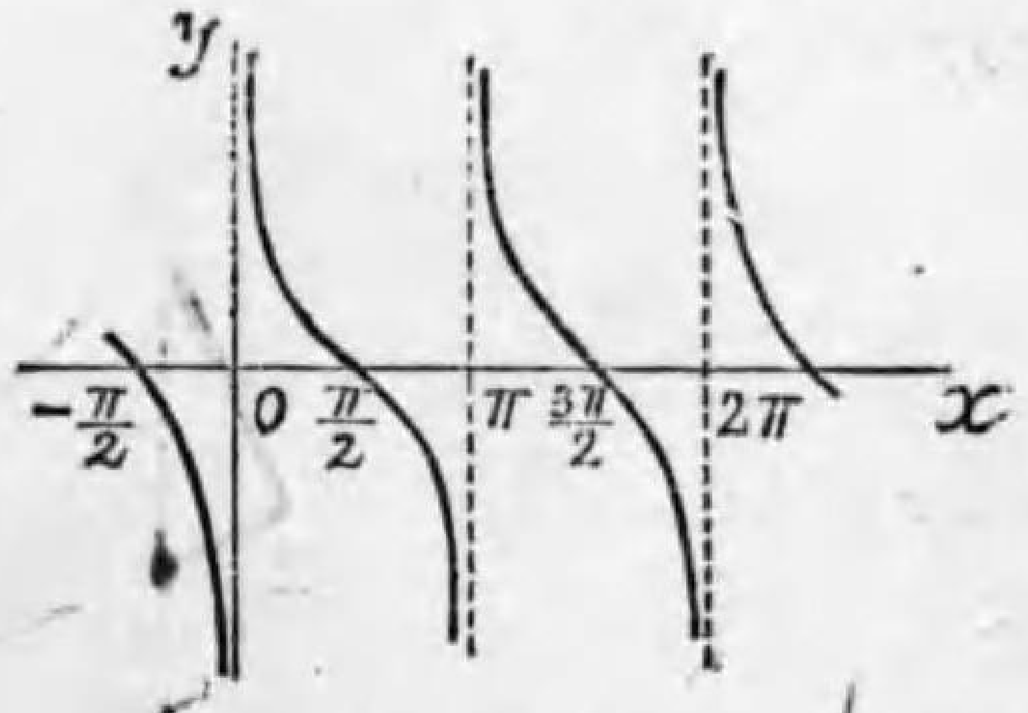


（第二十二圖）

同樣ニシテ餘切函數ノ値ノ變化ヲ表示スレバ

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-0$	$\pi+0$
$\cot\theta$	∞	↘	0	↘	$-\infty$	$+\infty$

又 $y=\cot\theta$ ト置キ，其ぐらふヲ作ラバ次ノ如シ．



（第二十三圖）

▼ **例 1.** $\tan^2\theta+\cot^2\theta+1=(\tan^2\theta+\tan\theta+1)(\cot^2\theta-\cot\theta+1)$ ナルコトヲ證セヨ．

［解］ $\tan^2\theta+\cot^2\theta+1=\tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}+1$

$$=\frac{\tan^4\theta+\tan^2\theta+1}{\mathrm{tna}^2\theta}$$

$$=\frac{(\tan^2\theta+\tan\theta+1)(\tan^2\theta-\tan\theta+1)}{\tan^2\theta}$$

$$=(\tan^2\theta+\tan\theta+1)\frac{\tan^2\theta-\tan\theta+1}{\tan^2\theta}$$

$$=(\tan^2\theta+\tan\theta+1)(1-\cot\theta+\cot^2\theta)$$

ヨツテ證セラレタリ.

例 2. $\dfrac{(a^2-b^2)\cot(\pi-\theta)}{\cos(\pi+\theta)}+\dfrac{(a^2+b^2)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos(\pi-\theta)}$

ヲ簡單ニセヨ.

［解］ $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta,$　　$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$　　$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

ナルコトニ注意スレバ

$$\text{原式}=\frac{(a^2-b^2)\cot\theta}{\cos\theta}-\frac{(a^2+b^2)\cot\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)}{\sin\theta}-\frac{(a^2+b^2)}{\sin\theta}=\frac{-2b^2}{\sin\theta}$$

トナル.

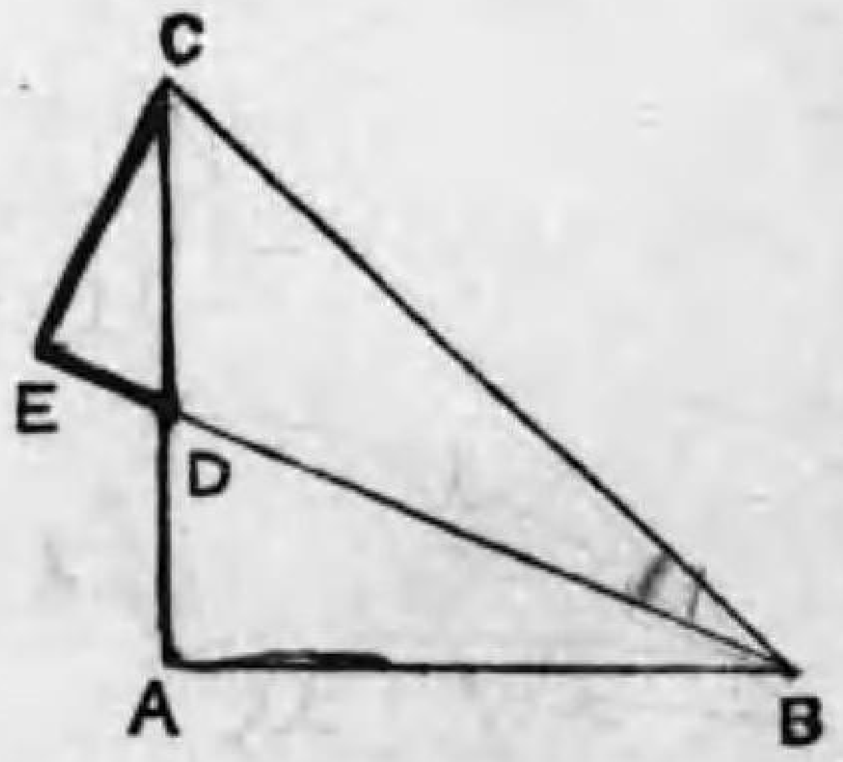
例 3. 直角二等邊三角形 ABC. ニ於テ斜邊 BC ノ一端 B ヲ邊 AC ノ中點 D ニ結ビ付クル時, $\hat{\mathrm{CBD}}$ ノ餘切ノ値ヲ求メヨ.

［解］ $\mathrm{AD}=\mathrm{CD}=l$

トスレバ

$\mathrm{AB}=2l,$　　$\mathrm{BD}=\sqrt{5}\,l$

ナリ. 今 BD ニ垂線 CE ヲ作ラバ



（第二十四圖）

$\triangle\mathrm{ABD}\backsim\triangle\mathrm{CDE}$

∴　$\mathrm{CE}:\mathrm{CD}=\mathrm{AB}:\mathrm{BD}$

∴　$\mathrm{CE}=\dfrac{2l}{\sqrt{5}},$

又　$\mathrm{DE}:\mathrm{CD}=\mathrm{AD}:\mathrm{BD}$

∴　$\mathrm{DE}=\dfrac{l}{\sqrt{5}},$

ヨツテ

$$\cot\hat{\mathrm{CBD}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{CE}}=\frac{\mathrm{BD}+\mathrm{DE}}{\mathrm{CE}}=\left(\sqrt{5}\,l+\frac{l}{\sqrt{5}}\right)\div\frac{2l}{\sqrt{5}}=3$$

例 4. θ ガ 0 ヨリ 2π マデ變ズル間ニ於ケル

$$\tan\theta+\cot\theta$$

ノ値ノ變化ヲ考究セヨ.

［解］ $\tan\theta+\cot\theta=\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

ナリ. サテ θ ガ 0 及ビ $\dfrac{\pi}{2}$ ナル時ハ與式ハ共ニ ∞ ニシテ, θ ガ $\dfrac{\pi}{4}$ ナル時ハ極小ニシテ其値ハ 2 ナリ. 何トナラバ

$$\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2=\left(\tan\theta-\frac{1}{\tan\theta}\right)^2+4$$

ナルガ故ニ $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ ノ極小ハ $\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=0$ ノ時卽チ $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ ナル時ナレバナリ.

ヨツテ與式ハ θ ガ 0 ヨリ $\dfrac{\pi}{4}$ ニ增加スル間ニ ∞ ヨリ 2 ニ減少シ, θ ガ $\dfrac{\pi}{4}$ ヨリ $\dfrac{\pi}{2}$ ニ增加スル間ニハ 2 ヨリ ∞ ニ增加ス.

次ニ θ ガ $\dfrac{\pi}{2}$ ヨリ π ニ增加スル間ニハ如何ニトイフニ

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\theta$$

$$\cot\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\tan\theta$$

ナルガ故ニ, コノ間ニ於ケル與式ノ値ハ, θ ガ 0 ヨリ $\dfrac{\pi}{2}$ マデ變化スル間ニ得タルモノト符號ノミヲ異ニシ且ツ反對ノ順序ノモノヲ得ベシ.

サテ tan θ, cot θ ハ共ニ π ヲ週期トスル週期函數ナルガ故ニ, θ ガ π ヨリ 2π ニ至ル間ノ與式ノ變化ハ全ク θ ガ 0 ヨリ π ニ至ル與式ノ値ヲ繰リ返スノミ.

問　題 4.

1. tan 750° ヲ 45° ヨリモ小ナル正角ノ三角函數ニテ表ハセ.

2. cot(−1020°) ヲ 45° ヨリモ小ナル正角ノ三角函數ニテ表ハセ.

3. 次ノ等式ヲ證明セヨ. (3—6)

$$(1+\tan\theta)(1+\cot\theta)=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin\theta\cos\theta}$$

4. $\cos\alpha\tan\alpha+\sin\alpha\cot\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha$

5. $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}=\dfrac{\cot\beta}{\cot\beta-\cot\alpha}$

6. $\tan\alpha(1-\cot^2\alpha)+\cot\alpha(1-\tan^2\alpha)=0$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ.（7—9）

7. $\dfrac{\sin\theta\tan(90^\circ+\theta)}{\tan\theta\cos(90^\circ-\theta)}$

8. $\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi+\theta)}+\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cot\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

9. $(a+b)\tan(\pi+\theta)+(a+b)\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

√ **10.** 半徑ガ a, b ナル二ツノ圓ガ互ニ外切スル時，其共通外切線ノナス角ヲ 2θ トスレバ

$$\tan\theta=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$$

ナルコトヲ證セヨ.

11. 地面ニ塔 PQ アリ，Q ヲ其足トス．又其地面ニ二點 A, B アリ，其距離ヲ 32 米トス．今 Q, A, B ハ一直線上ニアリテ且ツ

$$\cot \mathrm{PAQ}=\frac{2}{5},\qquad \cot \mathrm{PBQ}=\frac{3}{5}$$

ナル時塔ノ高サヲ求メヨ.

√ **12.** 樹ノ影ハ太陽ノ高サ 30° ノ時ハ 45° ノ時ヨリモ 6 米長シトイフ．樹ノ高サヲ求メヨ.

第 五 章

正割及ビ餘割函數

13. **正割及ビ餘割函數**ハ夫々餘弦，正弦ノ逆數ナルガ故ニ，其性質ハ之等ヨリ直接ニ推知スルコトヲ得ベシ．ヨツテ玆ニハタダ公式ヲ列記スルニ止メントス.

1°. $$\left.\begin{aligned}\sec(-\theta)&=\sec\theta\\ \operatorname{cosec}(-\theta)&=-\operatorname{cosec}\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

2°. $$\left.\begin{aligned}\sec(\pi-\theta)&=-\sec\theta\\ \operatorname{cosec}(\pi-\theta)&=\operatorname{cosec}\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

3°. $$\left.\begin{aligned}\sec(\pi+\theta)&=-\sec\theta\\ \operatorname{cosec}(\pi+\theta)&=-\operatorname{cosec}\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

4°. $$\left.\begin{aligned}\sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)&=-\operatorname{cosec}\theta\\ \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)&=\sec\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

5°. $$\left.\begin{aligned}\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)&=\operatorname{cosec}\theta\\ \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)&=\sec\theta,\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

14. **正割及ビ餘割函數ノ値ノ變化.**

角 θ ガ 0 ヨリ $\frac{\pi}{2}$ ニ増加スル時ハ餘弦ハ 1 ヨリ 0 ニ減少ス．故ニ

其逆數タル正割ガ正ニシテ1ヨリ限リナク增大ス.

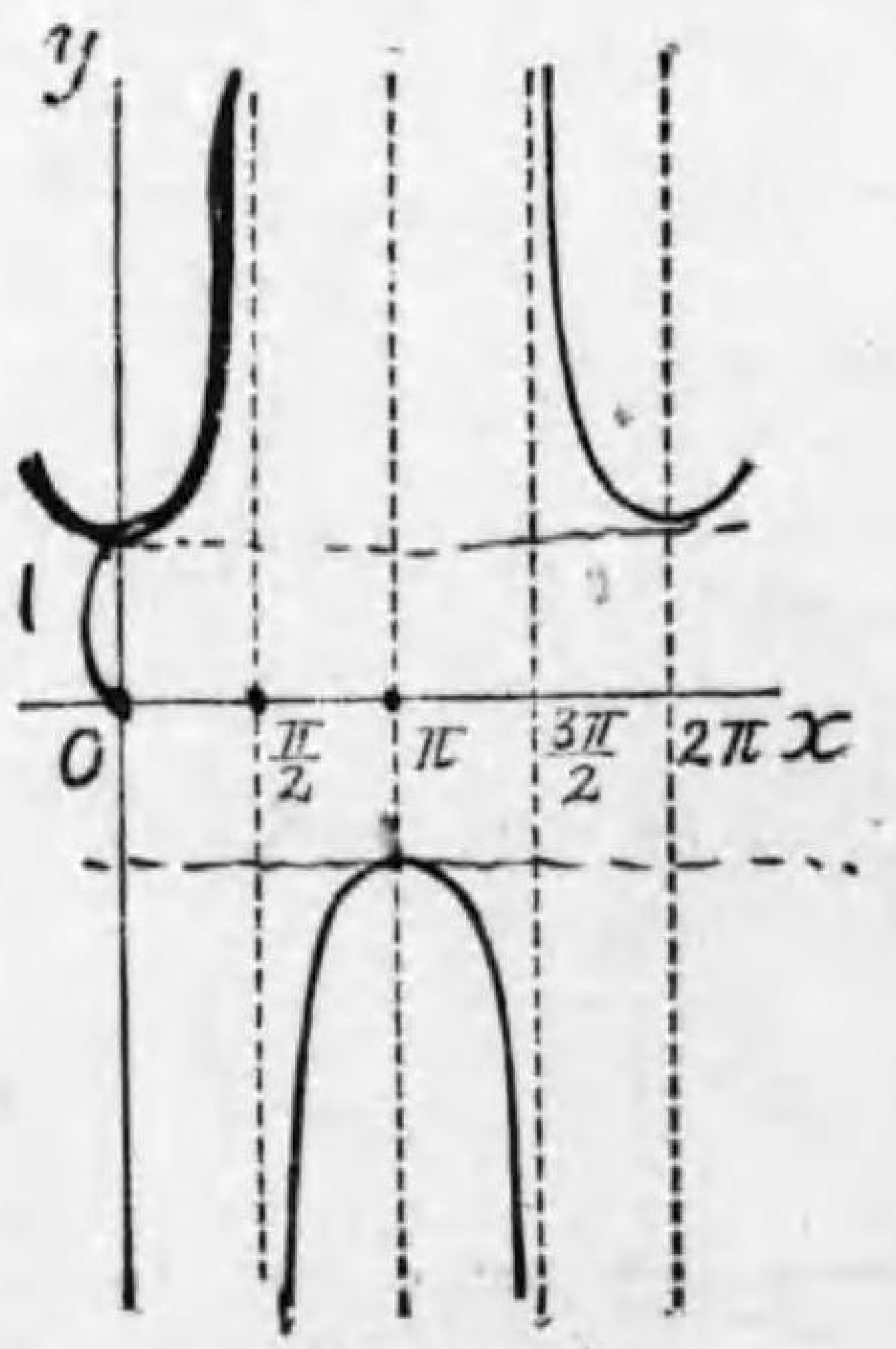
θ ガ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ π ニ增加スルニ從ヒ餘弦ハ負ニシテ0ヨリ -1 ニ減少ス. 故ニ正割モ亦負ニシテ負ノ無限大ヨリ -1 ニ增加ス.

次ニ θ ガ π ヨリ $\frac{3\pi}{2}$ ニ增加スルニ從ヒ餘弦ハ負ニシテ -1 ヨリ0ニ增加スルガ故ニ正割ハ -1 ヨリ負ノ無限大ニ減少ス.

最後ニ θ ガ $\frac{3\pi}{2}$ ヨリ 2π ニ增加スルニ從ヒ餘弦ハ正ニシテ0ヨリ1ニ增加スルガ故ニ正割モ正ニシテ無限大ヨリ1ニ減少ス. 之等ノ有様ヲ表示スレバ次ノ如シ.

θ	0		$\frac{\pi}{2}-0$	$\frac{\pi}{2}+0$		π		$\frac{3\pi}{2}-0$	$\frac{3\pi}{2}+0$		2π
$\sec\theta$	1	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	1

ヨツテ $y=\sec x$ トシテぐらふヲ作ラバ次ノ如シ.

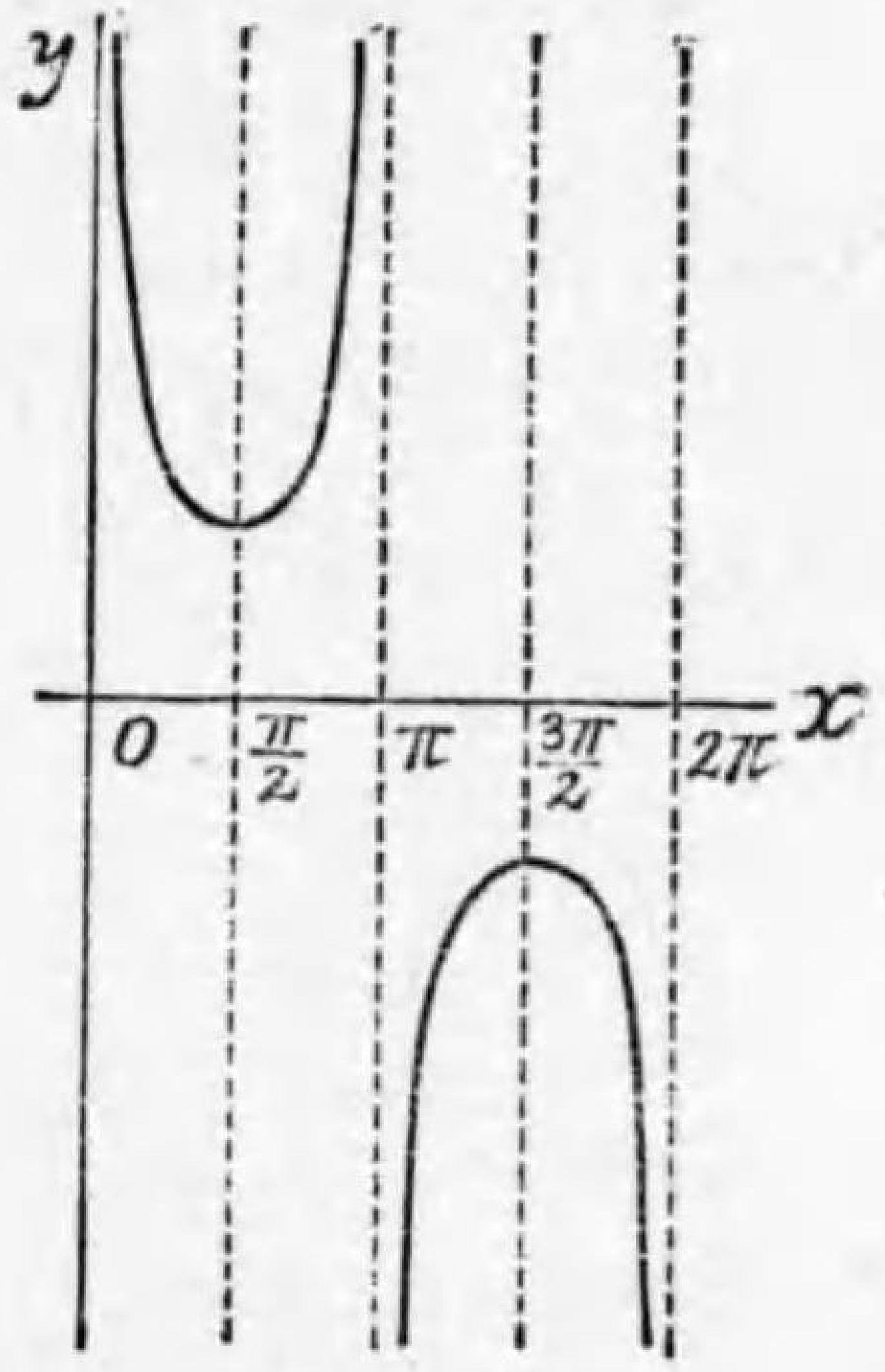


（第二十五圖）

同様ニ餘割ノ變化ヲ表記スレバ

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-0$	$\pi+0$		$\frac{3\pi}{2}$		$2\pi-0$	$2\pi+0$
$\operatorname{cosec}\theta$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$	$+\infty$.

ヨツテ $y=\operatorname{cosec} x$ トシテぐらふヲ作ラバ次ノ如シ.



（第二十六圖）

問　題 5.

1. $\sec 750°$, $\operatorname{cosec} 750°$ ノ値ヲ求メヨ.

2. $\sec 1050°$ ヲ $90°$ ヨリモ小ナル正角ノ三角函數ニテ表ハセ.

3. 積 $\operatorname{cosec}^2 45°.\ \sec^2 30.\ \sin 90°.\ \cos 60°$ ノ値ヲ求メヨ.

4. $4\cot^2 45°-\sec^2 60°+\sin^2 30°$ ノ値ヲ求メヨ.

5. $\frac{1}{\sec 45°\sec 60°}-\frac{1}{\operatorname{cosec} 45°\operatorname{cosec} 60°}$ ノ値ヲ求メヨ.

6. a 及ビ b ハ正ニシテ且ツ相異ル時ハ方程式

$$\sec^2\theta=\frac{4ab}{(a+b)^2}$$

ニ適スル θ ガ存在セザルコトヲ證セヨ.

解 a, b ハ相等シカラザル時ハ常ニ

$$a^2+2ab+b^2>4ab$$

ナリ. 從ツテ

$$1>\frac{4ab}{a^2+2ab+b^2}=\frac{4ab}{(a+b)^2}$$

然ルニ正割ノ値ハ1ヨリモ小ナルコトナシ, 故ニ與ヘラレタル方程式ニ適合スル角ハ存存セズ.

7. 次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\sec(270^\circ-\mathrm{A})\sec(90^\circ-\mathrm{A})-\tan(270^\circ-\mathrm{A})\tan(90^\circ+\mathrm{A})+1=0$$

8. $$\frac{1}{\sec\mathrm{A}}+\frac{1}{\mathrm{cosec}(270^\circ+\mathrm{A})}-\frac{1}{\mathrm{cosec}(270^\circ-\mathrm{A})}+\frac{1}{\sec(180^\circ+\mathrm{A})}=0$$

第六章

三角函數相互ノ關係

15. 三角函數ノ定義ヨリ直チニ知ラルル次ノ諸關係·

$$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta} \qquad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta} \qquad \mathrm{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta} \qquad \sin\theta=\frac{1}{\mathrm{cosec}\theta}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

ハ已ニ第六節ニ於テ述ベタリ. ヨツテ茲ニハ他ノ關係ヲ考究セントス.

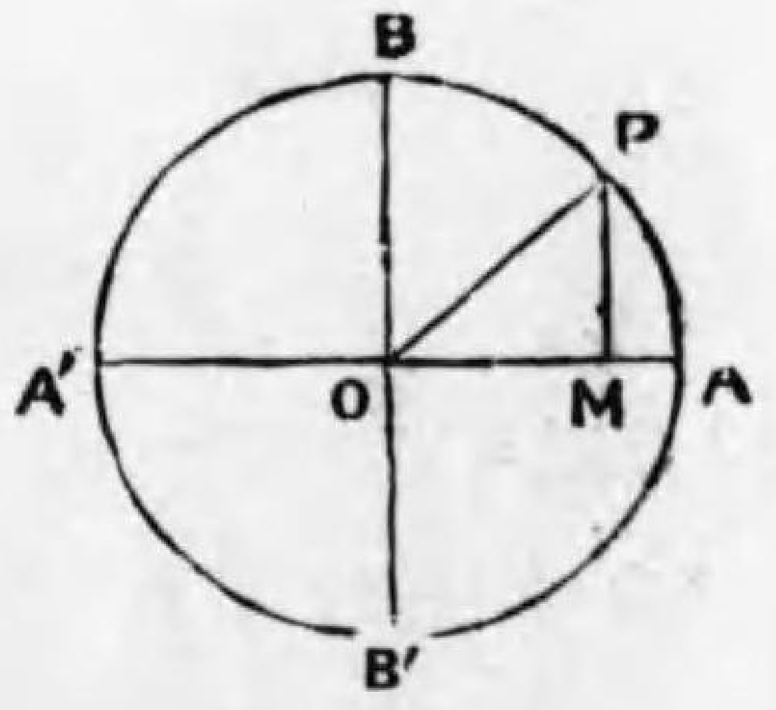
直角三角形 OMP ニ於テハ OM, MP ノ正, 負ニ關セズ常ニ

$$\mathrm{OM}^2+\mathrm{MP}^2=\mathrm{OP}^2$$

從ツテ

$$\frac{\mathrm{OM}^2}{\mathrm{OP}^2}+\frac{\mathrm{MP}^2}{\mathrm{OP}^2}=1.$$

故ニ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.........(1)



(第二十七圖)

コノ公式ハ θ ノ値ノ如何ニ關セズ成立スルモノニシテ最モ重要ナル公式ノ一ツナリトス. 此兩邊ヲ $\cos^2\theta$ 又ハ $\sin^2\theta$ ニテ除スレバ

$$\left.\begin{aligned}1+\tan^2\theta&=\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta\\1+\cot^2\theta&=\frac{1}{\sin^2\theta}=\operatorname{cosec}^2\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ得.

16. 以上ノ關係ヨリ六ツノ三角函數ノ中，任意ノ一ツノ値ヲ知ル時ハ他ノ凡テヲ表ハスコトヲ得. 例ヘバ

$$\sin\theta=k \qquad 1\geqq k\geqq-1$$

ナリトスレバ (1) ヨリ

$$\cos\theta=\pm\sqrt{1-k^2}$$

又

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\pm\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\pm\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{k}$$

但シ角 θ ガ第一及ビ第四象限ニアル時ハ複號ノ內 + ヲトリ，其他ノ象限ニアル時ハ − ヲトルモノトス.

又 k ヲ任意ノ實數ナリトシ

$$\tan\theta=k$$

ナリトスレバ

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{k}$$

$$\sec\theta=\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}=\pm\sqrt{1+k^2}$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}=\pm\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=\pm\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}=\pm\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

但シ角 θ ハ第一及ビ第四象限ニアル時ハ複號ノ中，+ ヲトリ，其他ノ象限ニアル時ハ − ヲトルモノトス.

次ニ之等ノ關係ヲ表示スベシ.

	$\sin\theta=k$	$\cos\theta=k$	$\tan\theta=k$	$\cot\theta=k$	$\sec\theta=k$	$\operatorname{cosec}\theta=k$
$\sin\theta$	k	$\sqrt{1-k^2}$	$\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$	$\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$	$\frac{1}{k}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-k^2}$	k	$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$	$\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$
$\tan\theta$	$\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$	$\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$	k	$\frac{1}{k}$	$\sqrt{k^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$	$\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$	$\frac{1}{k}$	k	$\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$	$\sqrt{k^2-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$	$\frac{1}{k}$	$\sqrt{1+k^2}$	$\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$	k	$\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$
$\operatorname{cosec}\theta$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$	$\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$	$\sqrt{1+k^2}$	$\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$	k

但シ符號ノ正，負ハ第十，第十二，及ビ第十四節ニヨツテ適當ニ定ムルヲ要ス.

例 1. $\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルコトヲ知リテ，他ノ三角函數ヲ求メヨ.

［解］ 120° ナル角ハ第二象限內ニアリ. 故ニ

$$\cos 120^\circ=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^\circ = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\operatorname{cosec} 120 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ナリ.

✓**例 2.** $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$ ナルコトヲ證セヨ!

［解］ $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$

$\therefore$ $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2$

✓**例 3.** $$\frac{1}{\cos\theta+\tan^2\theta\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta+\cot^2\theta\cos\theta}=\frac{\operatorname{cosec}\theta-\sec\theta}{\sec\theta\operatorname{cosec}\theta-1}$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］ $$原式=\frac{1}{\cos\theta+\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}}-\frac{1}{\sin\theta+\frac{\cos^3\theta}{\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}}{\frac{1-\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}}=\frac{\operatorname{cosec}\theta-\sec\theta}{\sec\theta\operatorname{cosec}\theta-1}$$

✓**例 4.** $\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=1$ ナルトキハ

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］ $原式=\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=\sin^2\alpha+\cos^2\underset{\alpha}{\alpha}$　$(\because\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1)$

故＝ $\frac{\cos^3\theta-\cos^3\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin^3\alpha-\sin^3\theta}{\sin\alpha}$ ……………………(1)

又　$原式=\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=\sin^2\theta+\cos^2\underset{\theta}{\theta}$　$(\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$

故＝ $\frac{\cos^3\theta-\cos\alpha\cos^2\theta}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\sin^2\theta-\sin^3\theta}{\sin\alpha}$

即チ $\frac{\cos^2\theta(\cos\theta-\cos\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{\sin^2\theta(\sin\alpha-\sin\theta)}{\sin\alpha}$ ……………………(2)

(1) ト (2) トニ除法ヲ施セバ

÷

$$\frac{\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\alpha+\sin\theta\sin\alpha+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$

即チ $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$

右邊ヲ移項シ, 因數ニ分解スレバ

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0.$$

問　題 6.

次ノ恒等式ヲ證明セヨ. (1—7)

1. $\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=\frac{2}{\sin A}$
2. $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha-2$
3. $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=\sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha$
4. $\sec^4\alpha+\tan^4\alpha=1+2\sec^2\alpha\tan^2\alpha$
5. $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\tan\alpha}{\cot\alpha}=\sin^2\alpha\sec^2\alpha(1+\cos\alpha)$
6. $(\sin\alpha+\sec\alpha)^2+(\cos\alpha+\operatorname{cosec}\alpha)^2=(1+\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha)^2$
7. $\sin^2\alpha\tan^2\alpha+\cos^2\alpha\cot^2\alpha+1=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$
8. $\left(\frac{\tan\alpha}{\sin\theta}-\frac{\tan\beta}{\tan\theta}\right)^2=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$ ナル時ハ

$$\cos\theta = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$$

ナルコトヲ證セヨ.

9. $\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$ ナル時ハ

$$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha} = 1$$?

ナルコトヲ證セヨ.

10. $\tan\theta + \sin\theta = m$, $\tan\theta - \sin\theta = n$ ナル時ハ

$$16mn = (m^2 - n^2)^2$$

ナルコトヲ證セヨ.

11. $u_n = \sin^n\theta + \cos^n\theta$ トスル時ハ

$$2u_6 - 3u_4 + 1 = 0$$

ナルコトヲ證セヨ.

12. $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ ナル時ハ

$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ ナルコトヲ證セヨ.

13. $2\sec^2\theta - \sec^4\theta - 2\operatorname{cosec}^2\theta + \operatorname{cosec}^4\theta$ ヲ $\tan\theta$ ニテ表ハセ

14. 或人海岸ニ向ツテ進行シ來ル汽船ヲ眺メタルニ其俯角 30° ナリシニ 10 分ノ後ニハ 60° トナリタリトイフ. 幾分ニテ海岸ニ達スベキカ.

15. 三角形ノ面積ハ二邊ト其夾角ノ正弦トノ積ニ等シキコトヲ證セヨ.

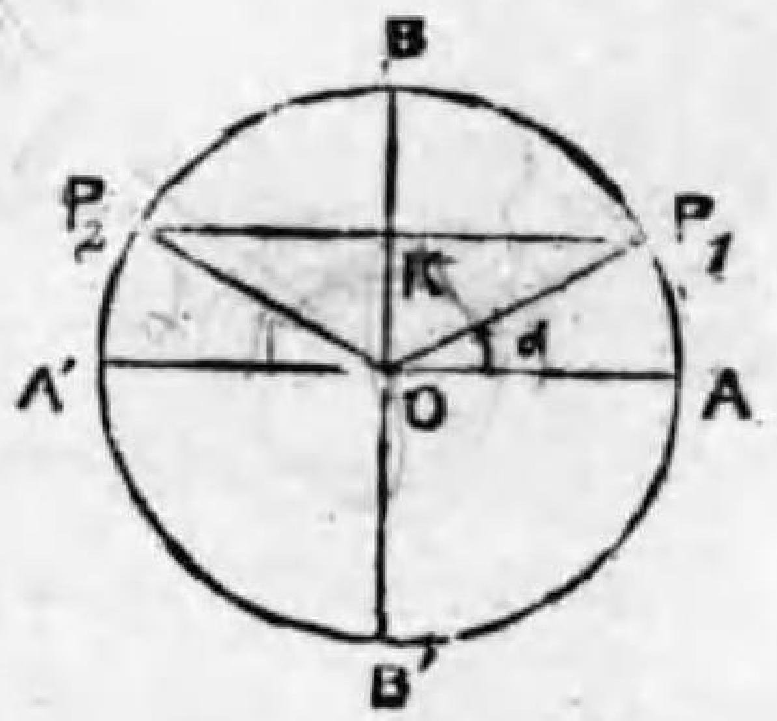
第七章

三角方程式

17. k ヲ -1, ト 1 トノ間ニアル與ヘラレタル數ナリトシ, 方程式

$$\sin\theta = k$$

ヲ滿足スル角ヲ求ムルコト.



（第二十八圖）

O ヲ中心トシテ單位圓ヲ畫キ AA′ ニ平行ニ P_1P_2 ヲ引キ平行線間ノ距離ヲ k ニ等シカラシメ, (圖ハ k ハ正ナル場合ナリ. 若シ負ナラバ AA′ ノ下方ニ引クモノトス.) 圓周トノ交點ヲ P_1, P_2 トスレバ角 AOP_1 及ビ角 AOP_2 ハ共ニ與ヘラレタル方程式ヲ滿足ス. 而シテ $A\hat{O}P_1$ ノ弧度ヲ α トスレバ $A\hat{O}P_2$ ノ弧度ハ $\pi - \alpha$ ナリ.

サラ OP_1 ヲ終邊トスル角ノ凡テハ

$$\boxed{2n\pi + \alpha} \text{ 6π+α} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニシテ, OP_2 ヲ終邊トスル角ノ凡テハ π-α

$$2n\pi + (\pi - \alpha) = (2n+1)\pi - \alpha \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナルガ故ニ, 求ムル角ハ (1), (2) ヲ綜合シテ

$$\boxed{\theta = n\pi + (-1)^n\alpha} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

但シ n ハ正, 負ノ整數又ハ零ナリトス.

θ=2nπ±α

一般ニ與ヘラレタル三角方程式ヲ滿足スル角ヲ求ムルコトヲ其方程式ヲ**解ク**トイフ.

注意 コノ公式ハ又餘割ニ關スル方程式ニモ適用セラル.

例 1. 方程式 $\sin^2\theta=\sin^2\alpha$ ニ適スル θ ヲ求メヨ.

［解］ 與ヘラレタル方程式ヨリ

$$\sin\theta=\pm\sin\alpha$$

故ニ $\theta=\alpha$ 或ハ $\theta=-\alpha$

ヨツテ公式ニヨリ

$$\theta=n\pi+(-1)^n\alpha \quad\cdots\cdots(1)$$

及ビ

$$\theta=n\pi+(-1)^n(-\alpha)=n\pi+(-1)^{n+1}\alpha \quad\cdots\cdots(2)$$

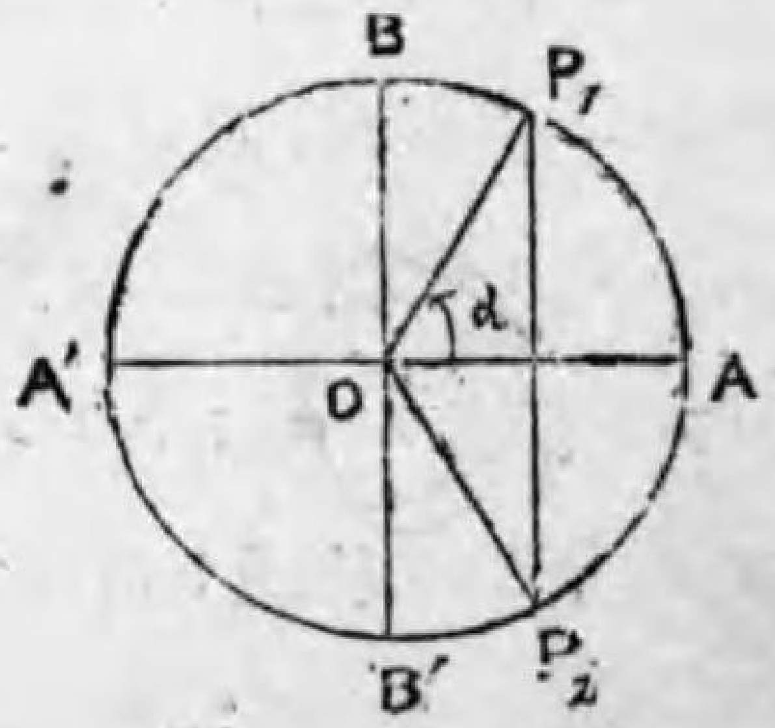
(1), (2) ヲ纏ムレバ

$$\theta=n\pi\pm\alpha$$

18. k ヲ -1 ト 1 トノ間ニアル與ヘラレタル數ナリトシ, 方程式

$$\cos\theta=k$$

ヲ滿足スル角ヲ求ムルコト.



（第二十九圖）

O ヲ中心トシテ單位圓ヲ畫キ BB′ ニ平行ニ P_1P_2 ヲ引キ, 平行線間ノ距離ヲ k ニ等シカラシメ, (圖ハ k ガ正ナル場合ナリ. 若シ負ナラバ BB′ ノ左方ニ P_1P_2 ヲ引クモノトス,) 圓周トノ交點ヲ P_1, P_2 トスレバ, 角 AOP_1 (弧度ヲ α トス.) 及ビ角 $AOP_2(-\alpha)$ ハ共ニ與ヘラレタル方程式ヲ滿足ス.

サテ OP_1 ヲ終邊トスル角ノ凡テハ

$$2n\pi+\alpha \quad\cdots\cdots(1)$$

ニシテ, OP_2 ヲ終邊トスル角ノ凡テハ

$$2n\pi-\alpha \quad\cdots\cdots(2)$$

ナリ. ヨツテ求ムル角ハ (1), (2) ヲ纏メテ

$$\theta=2n\pi\pm\alpha \quad\cdots\cdots(3)$$

但シ n ハ正, 負ノ整數又ハ零ナリトス.

注意 コノ公式ハ又正割ニ關スル方程式ニモ適用セラル.

例 2. 方程式 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ ニ適スル θ ヲ求メヨ.

［解］ 觀察ニヨリ θ ノ一ツノ値ハ $\frac{2\pi}{3}$(120°) ナリ. ヨツテ求ムル一般解ハ,

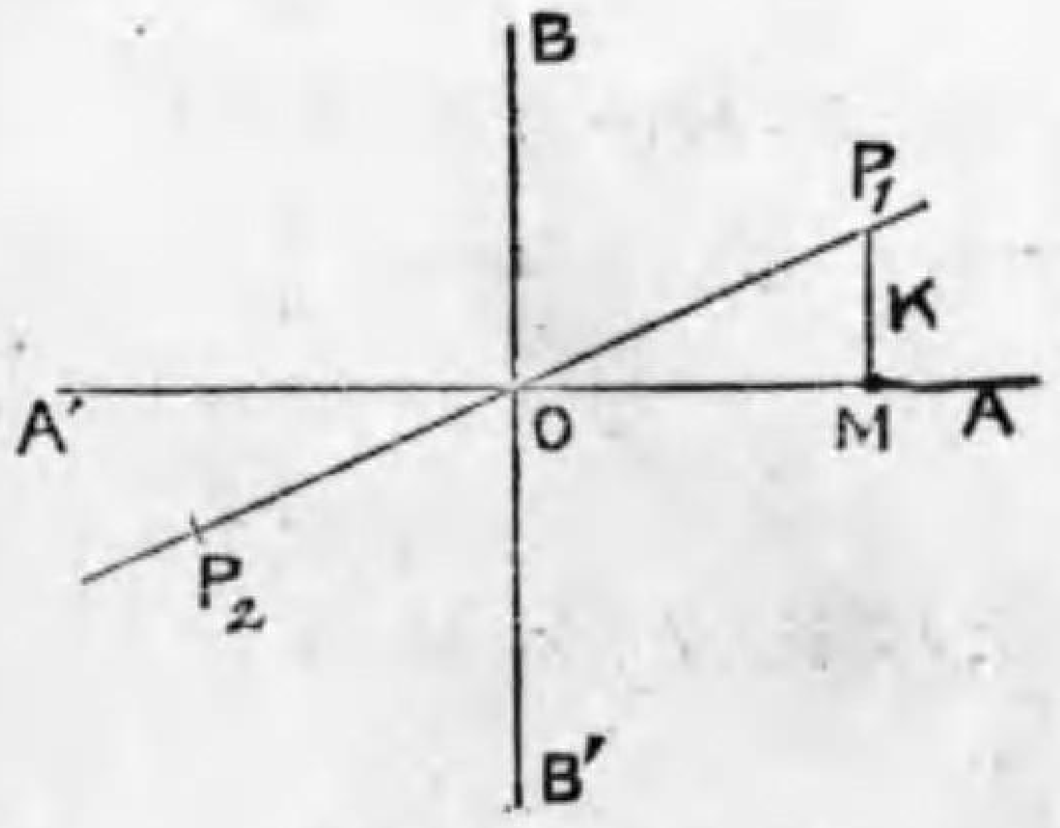
$$\theta=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

ナリ.

19. k ヲ任意ノ實數トスル時, 方程式

$$\tan\theta=k$$

ヲ滿足スル角ヲ求ムルコト.



（第三十圖）

O 點ヨリ OA ニ沿ヒテ右方ニ

$$OM=1$$

ナルガ如キ點 M ヲトリ, 次ニ

$$MP_1=k$$

ナルガ如キ點 P_1 ヲトリ (圖ハ k ハ正ナル場合ナリ. 若シ負ナラバ A′A ヨリ下方ニトル) P_1OP_2 ヲ作ラバ角 AOP_1 (弧度ヲ α トス) 及ビ角 $AOP_2(\pi+\alpha)$ ハ共ニ與ヘラレタル方程式ヲ滿足ス.

サテ, OP_1 ヲ終邊トスル角ノ凡テハ

$$2n\pi+\alpha \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ニシテ，OP₂ ヲ終邊トスル角ノ凡テハ

$$2n\pi+(\pi+\alpha)=(2n+1)\pi+\alpha \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ヨツテ求ムル角ハ (1), (2) ヨリ

$$\theta=n\pi+\alpha \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

但シ n ハ正，負ノ整數又ハ零ナリトス.

注意　コノ公式ハ又餘切ニ關スル方程式ニモ適用セラル.

例 3.　方程式　$\tan^2\theta=\frac{1}{3}$ ニ適スル角 θ ヲ求ム.

［解］　與ヘラレタル方程式ヨリ

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ヨリ θ ノ一ツノ値ハ $\frac{\pi}{6}$ ナルガ故ニ一般角ハ

$$\theta=n\pi+\frac{\pi}{6} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

次ニ (2) ヨリ

$$\theta=n\pi-\frac{\pi}{6} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

ヨツテ求ムル角ハ (3) 及ビ (4) ヨリ

$$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

問　題　7.

次ノ方程式ヲ解ケ. (1—8)

1.　$\sin\theta=1$

2.　$\cos^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4}$

3.　$2\sin^2\theta+3\cos\theta=0$

4.　$\tan^2\theta-(1+\sqrt{3})\tan\theta+\sqrt{3}=0$

欠

欠

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cancel{\sin} A \cos B - \cancel{\cos} A \sin B}$$

cos A co sin

分母子ヲ $\cos A \cos B$ ニテ除スレバ

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

次ニ

$$\tan(A-B) = \tan\{A + (-B)\}$$

$$= \frac{\tan A + \tan(-B)}{1 - \tan A \tan(-B)}$$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

之等ヲ一括スレバ

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

公式(15)ノ一ツニ $B=A$ ト置ケバ

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

又 $B=45^\circ$ トスレバ

$$\tan(A \pm 45^\circ) = \frac{\tan A \pm 1}{1 \mp \tan A} \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

全ク同様ニシテ

$$\cot(A \pm B) = \frac{\pm \cot A \cot B - 1}{\cot A \pm \cot B} \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

$$\left.\begin{aligned} \cot 2A &= \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A} \\ \cot(A \pm 45^\circ) &= \frac{\pm \cot A - 1}{\cot A \pm 1} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta.$

23. 公式(10)ヨリ又

$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)+\sin(A-B)&=2\sin A\cos B\\ \sin(A+B)-\sin(A-B)&=2\cos A\sin B\\ \cos(A+B)+\cos(A-B)&=2\cos A\cos B\\ \cos(A-B)-\cos(A+B)&=2\sin A\sin B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

今コノ式ニ $A+B=C,\ A-B=D$ ト置ケバ

$$A=\frac{C+D}{2}\qquad B=\frac{C-D}{2}$$

ナルガ故ニ公式(20)ハ又

$$\left.\begin{aligned}\sin C+\sin D&=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\\ \sin C-\sin D&=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\\ \cos C+\cos D&=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\\ \cos D-\cos C&=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

$\cos(\alpha+\beta)$

トナル.

例 1. $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$ ナルコトヲ證セヨ.

解 通分スレバ

$$左邊=\frac{\sin(A-B)\cos C+\sin(B-C)\cos A+\sin(C-A)\cos B}{\cos A\cos B\cos C}$$

然ルニ公式(20)ニヨリ

$$\sin(A-B)\cos C=\frac{1}{2}\{\sin(A-B+C)-\sin(-A+B+C)\}$$

$$\sin(B-C)\cos A=\frac{1}{2}\{\sin(A+B-C)-\sin(A-B+C)\}$$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

$$\sin(C-A)\cos B=\frac{1}{2}\{\sin(-A+B+C)-\sin(A+B-C)\}$$

邊々相加フレバ零トナル. 故ニ原式ノ値ハ零ナリ.

例 2. $\dfrac{(\cos\theta-\cos3\theta)(\sin8\theta+\sin2\theta)}{(\sin5\theta-\sin\theta)(\cos4\theta-\cos6\theta)}$

ヲ簡單ニセヨ.

解 原式 $=\dfrac{2\sin2\theta\sin\theta\times2\sin5\theta\cos3\theta}{2\cos3\theta\sin2\theta\times2\sin5\theta\sin\theta}$

$$=\frac{4\sin\theta\sin2\theta\sin5\theta\cos3\theta}{4\sin\theta\sin2\theta\sin5\theta\cos3\theta}=1.$$

24. 公式(10)ヲ用フレバ三ツノ角ノ和ノ三角函數ヲ求ムルコトヲ得ベシ. 即チ

$$\sin(A+B+C)=\sin\{(A+B)+C\}$$

$\cos C(\sin A\cos B+\sin B\cos A)\cos C$

$$\begin{aligned}&=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C\\ &=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C\\ &\quad+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C\end{aligned}$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B+C)&=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A\\ &\quad+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C\\ &\text{同様ニ}\\ \cos(A+B+C)&=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C\\ &\quad-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(22)$$

從ッテ

$$\sin(A+B+C)$$

$\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}-\dfrac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}\right)$

$$=\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)$$

$$\cos(A+B+C)$$

$$=\cos A\cos B\cos C(1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B)$$

邊々相除スレバ

○ $$\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}\quad\cdots\cdots(23)$$

同様ニ

$$\cot(A+B+C)=\frac{\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B-1}\quad\cdots\cdots(24)$$

故ニ若シ $A+B+C$ ガ π 若クハ其倍數ナル時ハ $\tan(A+B+C)=0$ ニシテ $\cot(A+B+C)=\infty$ ナルガ故ニ (23), (24) ヨリ

$$\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C=0$$

$$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B-1=0$$

ナリ. 又若シ $A+B+C$ ガ $\frac{\pi}{2}$ 若クハ其奇數倍ナル時ハ $\tan(A+B+C)=\infty$ ニシテ $\cot(A+B+C)=0$ ナルガ故ニ

$$1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B=0$$

$$\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C=0$$

ナリ.

25. 公式 (22), (23) 及ビ (24) ニ $A=B=C$ ト置ク時ハ三倍角ノ三角函數ヲ得ベシ. 即チ

$$\left.\begin{aligned}\sin 3A&=3\sin A-4\sin^3 A\\ \cos 3A&=4\cos^3 A-3\cos A\\ \tan 3A&=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\\ \cot 3A&=\frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

○ **例 3.** $$\frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}=(2\cos\theta+1)(2\cos 2\theta-1)(2\cos 2^2\theta-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1)$$

ナルコトヲ證セヨ.

解 $(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=4\cos^2\theta-1=2\cos 2\theta+1$

$(2\cos 2\theta+1)(2\cos 2\theta-1)=4\cos^2 2\theta-1=2\cos 2^2\theta+1$

$(2\cos 2^2\theta+1)(2\cos 2^2\theta-1)=\cdots\cdots\cdots=2\cos 2^3\theta+1$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(2\cos 2^{n-1}\theta+1)(2\cos 2^{n-1}\theta-1)=\cdots\cdots\cdots=2\cos 2^n\theta+1$

邊々相乘ジ共通ナル因數ヲ去レバ

$$(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)(2\cos 2\,\theta-1)\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2(\cos 2^{n-1}\theta-1)=2\cos 2^n\theta+1$$

故ニ

$$\frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}=(2\cos\theta+1)(2\cos\,.\,\theta-1)(\cos 2\,\theta-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1)$$

● **例 4.** $\cos 10A+\cos 8A+3\cos 4A+3\cos 2A=8\cos A\cos^3 3A.$

ナルコトヲ證セヨ.

解 原式$=2\cos 9A\cos A+6\cos 3A\cos A$

$=2\cos A(\cos 9A+3\cos 3A)$

$=2\cos A(4\cos^3 3A-3\cos 3A+3\cos 3A)$

$=8\cos A\cos^3 3A$

○ **例 5.** $\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \sin\gamma$ ガ等差級數ヲナス時ハ $\tan\frac{\beta+\gamma}{2},\ \tan\frac{\alpha+\beta}{2},\ \tan\frac{\gamma+\alpha}{2}$ モ亦等差級數ヲナスコトヲ證セヨ.

解 假定ニヨリテ

$$\sin\alpha-\sin\beta=\sin\beta-\sin\gamma$$

即チ

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

少シク書キ換ヘルト

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)$$

即チ

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)$$

兩邊ヲ　$\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$　ニテ除スレバ

$$\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}-\tan\frac{\beta+\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}-\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

コレ即チ　$\tan\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$　ガ等差級數ヲナスコトヲ示スモノナリ.

例 6.　$x+y+z=xyz$　ナル時ハ

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\,\frac{2y}{1-y^2}\,\frac{2z}{1-z^2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

解　$x=\tan A$, $y=\tan B$, $z=\tan C$　ト置ク時ハ假定ニヨリテ

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

ナリ. 故ニ

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

即チ　$\tan(A+B)=-\tan C=\tan(\pi-C)$

ヨツテ

$$A+B=n\pi+\pi-C$$

即チ　$A+B+C=n\pi+\pi$

然ルニ

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C$$

ニシテ　$\frac{2x}{1-x^2}\,\frac{2y}{1-y^2}\,\frac{2z}{1-z^2}=\tan 2A\tan 2B\tan 2C$

故ニ第二十四節ニヨリ

$$\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C$$

ナルコトヲ知ル.

例 7.　方程式

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=0$$

ヲ解ケ.

解　原式$=\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta=0$

故ニ　$2\sin\theta(2+\cos\theta-2\sin^2\theta)=0$

即チ　$\sin\theta(\cos\theta+2\cos^2\theta)=0$

ヨツテ

$$\sin\theta=0 \quad \text{又ハ} \quad \cos\theta=0 \quad \text{或ハ} \quad \cos\theta=-\frac{1}{2}$$

$\sin\theta=0$ ヨリ　$\theta=n\pi$ ……………………………… (1)

$\cos\theta=0$ ヨリ　$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$ ……………………………… (2)

(1), (2) ヲ纒ムレバ

$$\theta=\frac{n\pi}{2} \tag{3}$$

次ニ

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ ヨリ　$\theta=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ……………………………… (4)

ヨツテ (3) 及ビ (4) ヲ以テ答トス. 但シ n ハ正, 負ノ整數又ハ零ナリトス.

例 8.　方程式

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ヲ解ケ.

解　原方程式ヲ書キ換フレバ

$$\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

即チ

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

ヨツテ

$$\theta+\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

從ツテ

$$\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$$

玆ニ n ハ正, 負ノ整數又ハ零ナリトス.

問　題 8

次ノ等式ヲ證明セヨ．(1—30)

1. $\sin(45^\circ+A)\cos(45^\circ-B)+\cos(45^\circ+A)\sin(45^\circ-B)=\cos(A-B)$

2. $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=\cos 105^\circ+\cos 15^\circ$

3. $\sin A\sin B=\sin^2\frac{A+B}{2}-\sin^2\frac{A-B}{2}$

4. $\sin(n+1)A\sin(n-1)A+\cos(n+1)A\cos(n-1)A=\cos 2A$

5. $\sin(n+1)A\sin(n+2)A+\cos(n+1)A\cos(n+2)A=\cos A$

6. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=2\tan 2A,$

7. $\cos n\alpha\cos(n+2)\alpha-\cos^2(n+1)\alpha+\sin^2\alpha=0$

● **8.** $\cot\alpha+\cot 2\alpha+\cot 4\alpha=\operatorname{cosec}4\alpha(2+2\cos 2\alpha+3\cos 4\alpha)$

9. $\tan\alpha\tan(60^\circ+\alpha)\tan(120^\circ+\alpha)+\tan 3\alpha=0,$

○ **10.** $\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\cos 15\alpha=4\cos 4\alpha\cos 5\alpha\cos 6\alpha$

11. $\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\delta)+\sin(\gamma-\alpha)\cos(\beta-\delta)+\sin(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\delta)=0$

○ **12.** $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$

13. $\cot\alpha+\cot(60^\circ+\alpha)-\cot(60^\circ-\alpha)=3\cot 3\alpha$

○ **14.** $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{16}$

15. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{16}$

○ **16.** $\sin 5\alpha+\cos 5\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(2\cos 4\alpha+2\sin 2\alpha-1)$

17. $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta=1$

○ **18.** $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\alpha-\beta)$

$+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta-\gamma)=0$

○ **19.** $\frac{\sin 7\theta-\sin 5\theta}{\cos 7\theta+\cos 5\theta}=\tan\theta$

○ **20.** $\frac{\cos 2B+\cos 2A}{\cos 2B-\cos 2A}=\cot(A+B)\cot(A-B)$

○ **21.** $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}=0$

22. $\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\tan\alpha$

○ **23.** $\frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sin 2\alpha$

24. $\frac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}$

25. $\frac{\cos(A+B+C)}{\sin A\sin B\sin C}=\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C$

26. $\frac{\sin(A-C)+2\sin A+\sin(A+C)}{\sin(B-C)+2\sin B+\sin(B+C)}=\frac{\sin A}{\sin B}$

27. $\frac{\sin\alpha\sin 2\alpha+\sin 3\alpha\sin 6\alpha+\sin 4\alpha\sin 13\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha+\sin 3\alpha\cos 6\alpha+\sin 4\alpha\cos 13\alpha}=\tan 9\alpha$

28. $\frac{\cos 2\alpha\cos 3\alpha-\cos 2\alpha\cos 7\alpha+\cos\alpha\cos 10\alpha}{\sin 4\alpha\sin 3\alpha-\sin 2\alpha\sin 5\alpha+\sin 4\alpha\sin 7\alpha}=\cot 6\alpha\cot 5\alpha$

29. $\frac{\sin A-\sin 5A+\sin 9A-\sin 13A}{\cos A-\cos 5A-\cos 9A+\cos 13A}=\cot 4A$

30. $\frac{\cos(A+B+C)+\cos(-A+B+C)+\cos(A-B+C)+\cos(A+B-C)}{\sin(A+B+C)+\sin(-A+B+C)-\sin(A-B+C)+\sin(A+B-C)}$

$=\cot B$

○ **31.** $\sin A=\sin B,\quad\cos A=\cos B$

ナル時ハ A ハ B ニ等シキカ又ハ其差ハ四直角ノ倍數ナルコトヲ證セヨ．

○ **32.** $\frac{\tan(A-B)}{\tan A}+\frac{\sin^2 C}{\sin^2 A}=1$

ナル時ハ

$$\tan A\tan B=\tan^2 C$$

ナルコトヲ證セヨ

● **33.** $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\theta}$

ナル時ハ

$$\cot\beta-\cot\theta=\cot(\alpha+\theta)+\cot(\alpha-\beta)$$

ナルコトヲ證セヨ.

34. $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$, $\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a'}{b'}$

ナル時ハ

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{aa'+bb'}{ab'+a'b}$$

ナルコトヲ證セヨ.

35. $\sin(B+C-A)$, $\sin(C+A-B)$, $\sin(A+B-C)$ ハ等差級ヲナス時ハ $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ モ亦等差級數ヲナスコトヲ證セヨ.

次ノ方程式ヲ解ケ,

36. $\sin 4\theta-\sin 2\theta=\cos 3\theta$

37. $\cos\theta+\cos 3\theta=2\cos 2\theta$

38. $\cos\theta-\sin 3\theta=\cos 2\theta$

39. $\sin m\theta+\sin n\theta=0$

40. $\tan^2\theta-\cot^2\theta+4\cot 2\theta=0$

41. $\tan\frac{\theta}{2}=t$ ト置ケバ

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}\qquad\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ナルコトヲ示シ, 以テ方程式

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c$$

ノ解法ハ

$$t^2(a+c)-2bt+c-a=0$$

ノ解法ニ歸スルコトヲ證セヨ.

42. $\sin\alpha$ 及ビ $\sin\beta$ ガ $\sin\theta$ 及ビ $\cos\theta$ ノ等差中項及ビ等比中項ナル時ハ

$$2\cos 2\alpha=\cos 2\beta$$

ナルコト證セヨ.

第九章

分角ノ公式

26. 前章ノ公式(12)ニ於テ A ヲ $\frac{A}{2}$ ニ變ズレバ

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\\ \cos\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\\ \tan\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

コレ餘弦ヲ與ヘテ其半角ノ三角函數ヲ求ムル公式ナリ. 然ルニ其根號ノ前ニアル正負ノ符號ノ中何レヲ採ルベキカハ, 實際 A ガ與ヘラレザル限リハ判明セズ. 今其理由ヲ說明スベシ.

α ヲ與ヘラレタル餘弦ノ値ヲトラシムル角ノ一ツトスル時ハ, 第十八節ノ公式ニヨリテ

$$A=2n\pi\pm\alpha$$

從ツテ

$$\frac{A}{2}=n\pi\pm\frac{\alpha}{2}$$

ナルガ故ニ

$$\sin\frac{A}{2}=\sin\left(n\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\sin n\pi\cos\frac{\alpha}{2}\pm\cos n\pi\sin\frac{\alpha}{2}$$

然ルニ n ハ正，負ノ整數又ハ零ナルガ故ニ

$$\sin n\pi=0\qquad\qquad \cos n\pi=\pm1.$$

故ニ

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sin\frac{\alpha}{2}$$

コレ即チ $\frac{A}{2}$ ノ正弦ノ値ニ二ツヲ得ル所以ナリ.

同樣ニ

$$\cos\frac{A}{2}=\cos\left(n\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\tan\left(n\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\tan\frac{\alpha}{2}$$

即チ cos A ノミガ與ヘラルルモ，A ソノモノガ知ラレザル時ハ，其半角ノ正弦，餘弦，正切ハ符號ヲ異ニスル二ツノ値ヲ得．而シテ其何レナルベキカハ A ノ大サヲ知ルニ及ビテ初メテ判定スベシ.

例 1. sin 15° ノ値ヲ求メヨ.

解　$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルガ故ニ公式ニヨリ，

$$\sin 15^\circ=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}$

然ルニ sin 15° ハ正ナルベキガ故ニ求ムル値ハ $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ナリ.

27.　前節ニ於テハ cos A ヲ知リテ $\frac{A}{2}$ ノ三角函數ヲ求メタルガ，本節ニテハ sin A ガ知ラレタル場合ヲ論ゼントス.

サテ

$$\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=1$$

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin A$$

ナルガ故ニ邊々相加フレバ

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A$$

邊々相減ズレバ

$$\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2=1-\sin A$$

從ツテ

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{1+\sin A}\\ \sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{1-\sin A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヨツテ

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A})\\ \cos\frac{A}{2}&=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A})\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

即チ sin A ノ値ニ對シテ $\sin\frac{A}{2}$ 及ビ $\cos\frac{A}{2}$ ハ各四通リノ値ヲ得ベク，果シテ其何レヲ採ルベキカハ實際 A ガ與ヘラレザル限リハ判明

セザルベシ.

例ヘバ A ハ 30° ナル時ハ

$$\cos 15^\circ > \sin 15^\circ > 0$$

ナルガ故ニ

$$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{1+\sin 30^\circ}$$

ニシテ

$$\sin 15^\circ - \cos 15^\circ = -\sqrt{1-\sin 30^\circ}$$

従ツテ

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{1+\sin 30^\circ} - \sqrt{1-\sin 30^\circ}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ニシテ

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{1+\sin 30^\circ} + \sqrt{1-\sin 30^\circ}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

ナリ.

28. 本節ニテハ $\sin A$ ヨリ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ ノ値ヲ求ムル時ニ何故ニ四通ノ値ヲ得ラルルカニ就キテ論ゼントス.

今 α ヲ

$$\sin A = \sin\alpha$$

ナラシムルガ如キ角ノ一ツトスレバ第十七章(3)ニヨリ

$$A = n\pi + (-1)^n\alpha$$

ナリ. ソコデ n ヲ偶數ナリトシ $n=2m$ ト置ケバ

$$\boxed{\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{2m\pi+\alpha}{2}}$$

$$= \sin\left(m\pi + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$\sin m\pi \cos\frac{\alpha}{2}$

$$= \sin m\pi\cos\frac{\alpha}{2} + \cos m\pi\sin\frac{\alpha}{2}$$

$= \cos m\pi \sin\frac{\alpha}{2}$.

故ニ m ガ偶數ナルカ奇數ナルカニ從ヒ

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sin\frac{\alpha}{2}$$

次ニ n ヲ奇數ナリトシ且ツ $n=2m+1$ ト置ケバ

$$\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{(2m+1)\pi-\alpha}{2}$$

$$= \sin\left(m\pi + \frac{\pi-\alpha}{2}\right)$$

$$= \sin m\pi\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + \cos m\pi\sin\frac{\pi-\alpha}{2}$$

$$= \cos m\pi\cos\frac{\alpha}{2}$$

故ニ m ガ偶數ナルカ奇數ナルカニ從ヒ

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\cos\frac{\alpha}{2}$$

即チ $\sin A$ ノ値ヲ知リテ $\sin\frac{A}{2}$ ヲ求メントスル時ハ

$$\sin\frac{\alpha}{2}, \quad -\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\frac{\alpha}{2}, \quad -\cos\frac{\alpha}{2}$$

ノ四通リノ値ヲ得ルヲ見ルベク, 其何レヲ採ルベキヤハ A ガ與ヘラルルニ及ビテ初メテ判明スベシ. 同様ニシテ $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ ヲ求ム

ル際ニ生ズル複號ノ由來ヲモ說明スルヲ得ベシ.

29. 一般ニ公式 (2) ノ複號ハ如何ナル場合ニ如何ニトルベキカニ就キテ少シク述ベンニ

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)>0$$

ナルガ故ニ

$$(2n+1)\pi>\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}>2n\pi$$

ナル時ハ

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)>0$$

從ツテ

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}>0$$

ナリ. 次ニ

$$(2n+2)\pi>\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}>(2n+1)\pi$$

ナル時ハ

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)<0$$

從ツテ

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}<0$$

$2n\pi-\frac{\pi}{4}$

$\frac{8n\pi-\pi}{4}$

$2n\pi+2\pi-\frac{\pi}{4}$

$\frac{8\pi}{4}$

故ニ結局

$$2n+\frac{3\pi}{4}>\frac{A}{2}>2n\pi-\frac{\pi}{4}$$

ナル時ハ

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}>0$$

ニシテ

$$2n\pi+\frac{7\pi}{4}>\frac{A}{2}>2n\overset{\pi}{m}+\frac{3\pi}{4}$$

ナル時ハ

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}<0$$

ナリ.

$(2n\pi+2\pi>\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}>2n\pi+\pi,$

$2n\pi+2\pi-\frac{\pi}{4}$ 、

全ク同様ニシテ

$$2n\pi+\frac{5\pi}{4}>\frac{A}{2}>2n\pi+\frac{\pi}{4}$$

ナル時ハ

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}>0$$

ニシテ

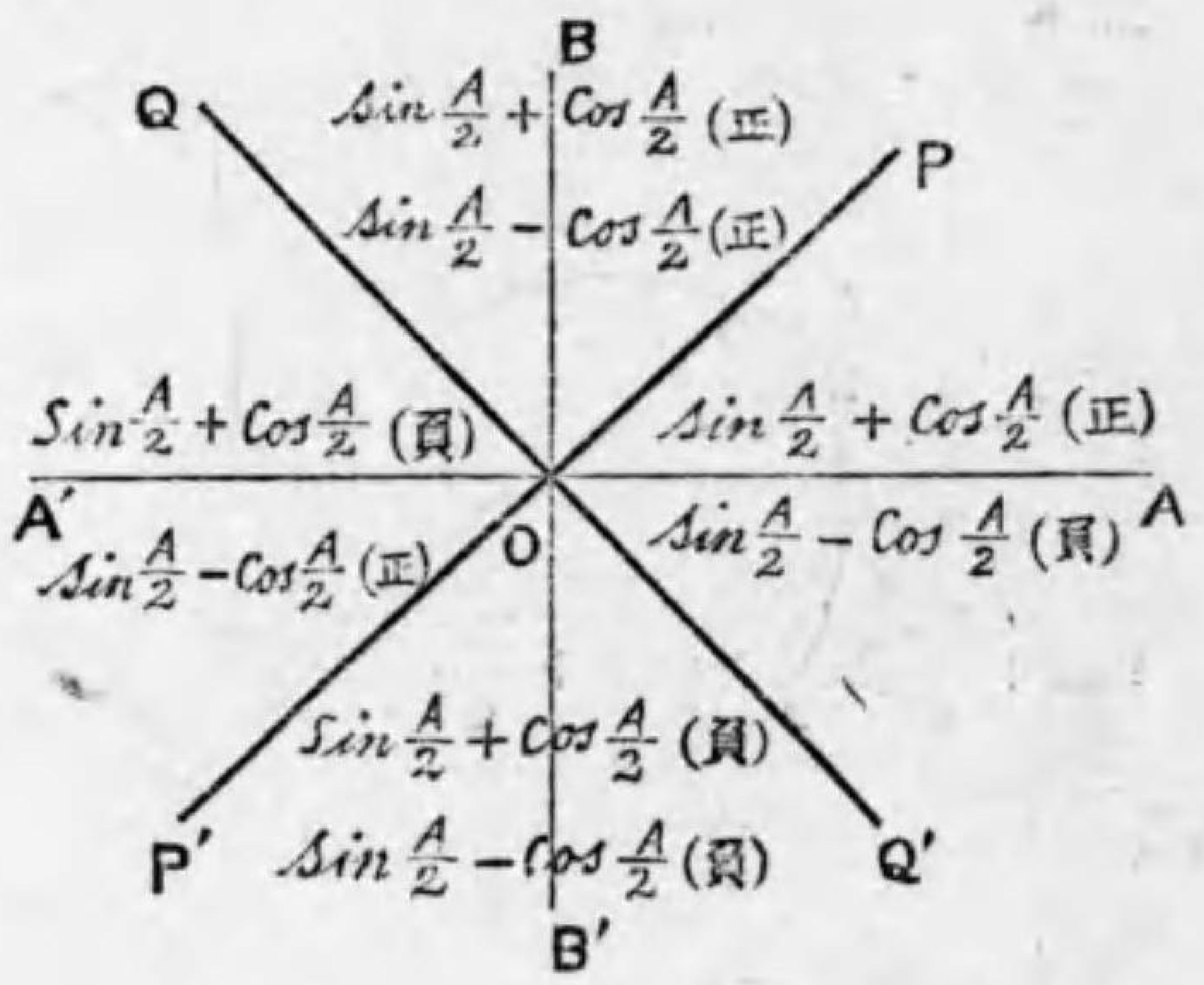
$$2n\pi+\frac{9\pi}{4}>\frac{A}{2}>2n\pi+\frac{5\pi}{4}$$

ナル時ハ

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}<0$$

ナリ. 但シ n ハ正, 負ノ整數又ハ零ナリトス.

之等ノ結果ヲ圖示スレバ次ノ如シ



茲ニ OP, OQ ハ夫々直角 AOB, BOA′ ノ二等分線ナリトス.

例 2. 次ノ等式ガ成立スル爲ニハ角 A ハ如何ナル限界内ニアルベキカ.

$$2\sin A=-\sqrt{1+\sin 2A}+\sqrt{1-\sin 2A}$$

解 所題ノ等式ハ

$$\sin A+\cos A=-\sqrt{1+\sin 2A}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\sin A-\cos A=\sqrt{1-\sin 2A}\quad\cdots\cdots(2)$$

ヲ邊々相加ヘテ得タルモノナリ.

然ルニ (1) ガ成立スルニハ

$$2n\pi+\frac{7\pi}{4}>A>2n\pi+\frac{3\pi}{4}\quad\cdots\cdots(3)$$

ナルヲ要シ, (2) ガ成立スルニハ

$$2n\tau+\frac{5\pi}{4}>A>2n\pi+\frac{\pi}{4}\quad\cdots\cdots(4)$$

ナルヲ要ス. 從ツテ (3), (4) ヲ同時ニ成立セシムル爲ニハ

$$2n\pi+\frac{5\pi}{4}>A>2n\pi+\frac{3\pi}{4}$$

ナルヲ要ス. コレ求ムル角 A ノ限界ナリ.

30. 前章二十二節公式(16)ニヨレバ

$Tan\,2\alpha A \quad \frac{2\,Tan\,A}{1-Tan^2A}$ $A=\frac{\alpha}{2}$ トオケ

$Tan\,A=\frac{2\,Ta\frac{A}{2}}{1-Ta^2\frac{A}{2}}$

$$\tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$ $-\tan A+\tan A\tan^2\frac{A}{2}$

$\tan A$ 倍

即チ

$2\tan\frac{A}{2}$

$$\tan A\tan^2\frac{A}{2}+2\tan\frac{A}{2}-\tan A=0$$

之ヲ $\tan\frac{A}{2}$ ニ就キテ解ケバ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2A}}{\tan A}\quad\cdots\cdots(4)$$

複號ノ中何レヲ採ルベキカハ實際 A ガ與ヘラレザル限リハ判明セザルベシ. 而シテ其理由モ亦容易ニ知ラル. 何トナレバ α ヲ

$$\tan A=\tan\alpha$$

ヲ滿足スル一ツノ角トスレバ

$$A=n\pi+\alpha$$

ナルガ故ニ

$$\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{n\pi+\alpha}{2}$$

ソコデ先ヅ n ヲ偶數トシ $2m$ ト置ケバ

$$\tan\frac{A}{2}=\tan\left(m\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=\tan\frac{\alpha}{2}$$

トナリ, n ヲ奇數トシ之ヲ $2m+1$ ト置ケバ

$$\tan\frac{A}{2}=\tan\left(m\pi+\frac{\pi+\alpha}{2}\right)$$ $\frac{(2m+1)\pi+\alpha}{2}$

$$=\tan\frac{\pi+\alpha}{2}=-\cot\frac{\alpha}{2}$$

トナル．卽チ二ツノ値アリ．

然レドモ sin A, cos A ヲ知ル時ハ，符號ニ曖昧ヲ生ゼズシテ $\tan\frac{A}{2}$ ノ値ヲ得ベシ．何トナレバ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2A\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin A}{1+\cos A}$$

或ハ

$$\mathrm{tna}\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

ナレバナリ．

31.　次ニ sin A ノ値ヲ與ヘテ $\sin\frac{A}{3}$ ヲ求メンニ，前章第二十五節公式 (25) ヲ用フレバ

$$\sin A=3\sin\frac{A}{3}-4\sin^3\frac{A}{3}$$

ナルヲ以テ $\sin A=k$ トスレバ，$\sin\frac{A}{3}$ ハ三次方程式

$$4x^3-3x+k=0 \text{..} (5)$$

ノ根トシテ得ラル．然レドモ此方程式ヨリ得ラルベキ三ツノ根ノ凡テガ $\sin\frac{A}{3}$ ノ値ヲ與フルモノニアラズ．今之ヲ說明スベシ．

α ヲ其正弦ガ k ニ等シキ一ツノ角トスレバ

$$A=n\pi+(-1)^n\alpha$$

ガ α ト同一ノ正弦ヲ有スベキ凡テノ角ナリ．故ニ上ノ方程式ノ三ツノ根ハ $\frac{1}{3}\{n\pi+(-1)^n\alpha)$ ニ含ム所ノ角ノ正弦ナリ．

今 $n=3m$ トスレバ

$$\sin\frac{A}{3}=\sin\frac{1}{3}\{n\pi+(-1)^n\alpha\}$$

$$=\sin\left\{m\pi+(-1)^{3m}\frac{\alpha}{3}\right\}$$

$$=(-1)^m\sin\left\{(-1)^{3m}\frac{\alpha}{3}\right\}$$

$$=(-1)^{4m}\sin\frac{\alpha}{3}=\sin\frac{\alpha}{3}$$

ニシテ，$n=3m+1$ トスレバ

$$\sin\frac{A}{3}=\sin\left\{m\pi+\frac{\pi+(-1)^{3m+1}\alpha}{3}\right\}$$

$$=(-1)^m\sin\frac{\pi+(-1)^{3m+1}\alpha}{3}$$

ニシテ $n=3m+2$ トスレバ

$$\sin\frac{A}{3}=\sin\left\{m\pi+\frac{2\pi+(-1)^{3m+2}\alpha}{3}\right\}$$

$$=(-1)^m\sin\frac{2\pi+(-1)^{3m+2}\alpha}{3}$$

$$=(-1)^{m+1}\sin\frac{-2\pi+(-1)^{3m+1}\alpha}{3}$$

$$=(-1)^{m+2}\sin\frac{\pi+(-1)^{3m+1}\alpha}{3}$$

以上ヲ綜合スレバ m ガ奇數，偶數ノ何レノ場合ニテモ

$$\sin\frac{1}{3}\{n\pi+(-1)^n\alpha\}$$

ヨリハ三ツノ相異ル値

$$\sin\frac{\alpha}{3},\qquad -\sin\frac{\pi+\alpha}{3},\qquad \sin\frac{\pi-\alpha}{3}$$

ヲ得ベシ，従ツテ $\sin A$ ノ値ノミガ與ヘラレ A ソノモノヲ知ラザル時ハ方程式(5)ノ三ツノ根ノ何レガ $\sin\frac{A}{3}$ ニ適スルヤ判別スル能ハズ．

同様ニ $\cos A=k$ トスル時，公式

$$\cos A=4\cos^3\frac{A}{3}-3\cos\frac{A}{3}$$

ヲ利用スレバ，$\cos\frac{A}{3}$ ノ値ハ方程式

$$4x^3-3x-k=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

ノ根トシテ得ラレ，$\tan\frac{A}{3}$ ノ値ハ

$$\tan A=\frac{3\tan\frac{A}{3}-\tan^3\frac{A}{3}}{1-3\tan^2\frac{A}{3}}$$

ヨリ三次方程式

$$(1-3x^2)k=3x-x^3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ノ根トシテ得ラル．

但シ α ヲ

$$\cos A=k=\cos\alpha \qquad 或ハ \qquad \tan A=k=\tan\alpha$$

ニ適スル一ツノ角トスレバ，方程式(6)ノ根ハ

$$\cos\frac{\alpha}{3},\qquad -\cos\frac{\pi-\alpha}{3},\qquad -\cos\frac{\pi+\alpha}{3}$$

[illegible]

ナル三ツノ値ニ對應スベク，(6) 7 ノ根ハ

$$\tan\frac{\alpha}{3},\qquad -\tan\frac{\pi-\alpha}{3},\qquad \tan\frac{\pi+\alpha}{3}$$

ナル三ツノ値ニ對應スベシ．而シテ其中何レガ果シテ $\cos\frac{A}{3}$ 又ハ $\tan\frac{A}{3}$ ノ値ナルカハ實際 A ヲ知ルニ非ズンバ判明セザルベシ．

32. 本章ヲ終ルニ臨ミ二三ノ例解ヲ示サントス．

○ **例 1.** 次ノ等式ヲ證明セヨ．

$$\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi=-\frac{1}{2}$$

解　左邊 $=2\cos\frac{4}{7}\pi\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi$

$$=\cos\frac{4}{7}\pi\left(2\cos\frac{2}{7}\pi+1\right)$$

$$=\cos\frac{4}{7}\pi\left(2-4\sin^2\frac{1}{7}\pi+1\right)$$

$$=\cos\frac{4}{7}\pi\,\frac{3\sin\frac{1}{7}\pi-4\sin^3\frac{1}{7}\pi}{\sin\frac{1}{7}\pi}$$

$$=\frac{\cos\frac{4}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi}{\sin\frac{1}{7}\pi}=\frac{\sin\pi-\sin\frac{1}{7}\pi}{2\sin\frac{1}{7}\pi}$$

$$=\frac{-\sin\frac{1}{7}\pi}{2\sin\frac{1}{7}\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$\cos\frac{4}{7}\pi\sin\left(\pi-\frac{4}{7}\pi\right)=\cos\frac{4}{7}\pi\sin\frac{4}{7}\pi$

$=\frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{4}{7}\pi\right)$

$=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$.

○ **例 2.**　$\cos\alpha=\cos\beta\cos\varphi=\cos\beta'\cos\varphi'$

且ツ　$\sin\alpha=2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi'}{2}$

ナル時ハ

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\beta'}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

解 假定ニヨリテ $\cos\varphi=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, $\cos\varphi'=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta'}$

ナルガ故ニ

$$1-\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad 1-\cos\varphi'=\frac{\cos\beta'-\cos\alpha}{\cos\beta'}$$

從ツテ

$$2\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad 2\sin^2\frac{\varphi'}{2}=\frac{\cos\beta'-\cos\alpha}{\cos\beta'}$$

故ニ

$$4\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi'}{2}=\frac{(\cos\beta-\cos\alpha)(\cos\beta'-\cos\alpha)}{\cos\beta\cos\beta'}$$

故ニ第二ノ假定ニヨリ

$$\sin^2\alpha=\frac{(\cos\beta-\cos\alpha)(\cos\beta'-\cos\alpha)}{\cos\beta\cos\beta'}$$

分母ヲ拂ヘバ

$$\sin^2\alpha\cos\beta\cos\beta'=\cos\beta\cos\beta'-\cos\alpha(\cos\beta+\cos\beta')+\cos^2\alpha$$

此式ニ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ ト置キテ簡單ニスレバ

$$\cos\alpha(1+\cos\beta\cos\beta')=\cos\beta+\cos\beta'$$

ヨツテ

$$\cos\alpha=\frac{\cos\beta+\cos\beta'}{1+\cos\beta\cos\beta'}$$

故ニ

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{(1-\cos\beta)(1-\cos\beta')}{(1+\cos\beta)(1+\cos\beta')}$$

故ニ結局

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\beta'}{2}$$

ヲ得.

○ **例 3.** $\tan\varphi=\dfrac{\sin\theta\cos\theta'}{\sin\theta'+\cos\theta}$

ナル時ハ $\tan\dfrac{\varphi}{2}$ ノ一ツノ値ハ $\tan\dfrac{\theta}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta'}{2}\right)$ ナルコトヲ證セヨ.

解 $\tan\varphi=\dfrac{2\tan\dfrac{\varphi}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\varphi}{2}}$

ナルガ故ニ

$$\frac{2\tan\dfrac{\varphi}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\theta\cos\theta'}{\sin\theta'+\cos\theta}$$

分母ヲ拂ヘバ

$$2\tan\frac{\varphi}{2}(\sin\theta'+\cos\theta)=(1-\tan^2\frac{\varphi}{2})\sin\theta\cos\theta'$$

コレヲ $\tan\dfrac{\varphi}{2}$ ニ就キテ解キ之ニ $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$, $\cos^2\theta'=1-\sin^2\theta'$ ト置キテ整頓スレバ

$$\tan\frac{\varphi}{2}=\frac{-(\sin\theta'+\cos\theta)\pm(1+\sin\theta'\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta'}\cdots\cdots\cdots(1)$$

上ノ二ツノ根ノ中, 復號 + ノ方ヲトラバ

$$\tan\frac{\varphi}{2}=\frac{(1-\sin\theta')(1-\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta'}$$

然ルニ

$$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1-\sin\theta'}{\cos\theta'}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right)$$

ヨツテ

$$\tan\frac{\varphi}{2}=\tan\frac{\theta}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ.

注意 (1) ニ於テ若シ復號ノ内 − ノ方ヲトラバ

$$\tan\frac{\varphi}{2}=-\cot\frac{\theta}{2}\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right)$$

トナル.

問題 9.

1. $\tan A=\frac{3}{4}$ ナル時 $\sin\frac{A}{2}$ ノ値如何

2. $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ ナルコトヨリ $\sin 15^\circ$ ノ値ヲ求メヨ.

3. $\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルコトヨリ $\sin 22\frac{1^\circ}{2}$ ノ値ヲ求メヨ.

4. $\sec\theta$ ヲ以テ $\cot\frac{\theta}{2}$ ヲ表ハセ.

5. $\frac{\theta}{2}$ ガ $-\frac{\pi}{4}$ ト $-\frac{3\pi}{4}$ トノ間ニアル時 $\sin\frac{\theta}{2}$ ヲ $\sin\theta$ ノ項ニテ表ハセ.

6. $2\cos\theta=\sqrt{1-\sin 2\theta}-\sqrt{1+\sin 2\theta}$ ナルベキ爲ニハ $(8n+5)\frac{\pi}{4}$ ト $(8n+7)\frac{\pi}{4}$ トノ間ニアルコトヲ要ス. 之ヲ證セヨ. 但シ n ハ正, 負ノ整數又ハ零ナリトス.

7. $\sec\theta=\frac{1}{2}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}$

ナルコトヲ證セヨ.

次ノ等式ヲ證明セヨ. (8—15)

8. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A$

9. $\cos^2\theta+\cos^2(\theta+120^\circ)+\cos^2(\theta-120^\circ)=\frac{3}{2}$

10. $\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$

11. $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$

12. $\left(1+\tan\frac{\theta}{2}-\sec\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\tan\frac{\theta}{2}+\sec\frac{\theta}{2}\right)=\sin\theta\sec^2\frac{\theta}{2}$

13. $4\sin^2\frac{\theta}{4}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)=\left\{1-\sqrt{1+\sin\theta}\right\}^2$

14. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\right)}$

15. $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\right)}$

16. 公式 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ ヲ用ヒテ

$$\tan 7\frac{1^\circ}{2}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$$

ナルコトヲ證セヨ.

17. $\tan x=(2+\sqrt{3})\tan\frac{x}{3}$ ナル時, $\tan x$ ノ値ヲ求メヨ.

18. $\sin\theta=2^n\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2^n}$

ナルコトヲ證セヨ.

次ノ等式ガ成立スル爲ニハ $\frac{A}{2}$ ハ如何ナル限界ニアルベキカ.

19. $2\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$

20. $2\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$

21. 與ヘラレタル角ヲ二分シ, 其分角ノ正弦ヲシテ定比ナラシメヨ.

22. 與ヘラレタル角ヲ二分シ, 其分角ノ餘弦ヲシテ定比ナラシメヨ.

Tan A 平 [illegible]

第 十 章

特別ナル角ノ三角函數

33. 15°ノ角ノ三角函數.

45°, 30° ノ三角函數ヲ利用スレバ 15° ノ三角函數ヲ求ムルコトヲ得. 卽チ

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$$

然ルニ $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}},$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ヨツテ

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

同様ニ

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

從ツテ

$$\left.\begin{array}{l} \tan 15^\circ = \dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 2-\sqrt{3} \\ \cot 15^\circ = \dfrac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = 2+\sqrt{3} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

34. 18°ノ三角函數.

A=18° トスレバ 2A=36°, 3A=54° ナルガ故ニ 2A ト 3A トハ互ニ餘角ノ關係ニアリ. 故ニ

$$\sin 2A = \cos 3A.$$

從ツテ $2\sin A \cos A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$

然ルニ $\cos 18^\circ = \cos A \neq 0$ ナルガ故ニ之ニテ除スレバ

$$2\sin A = 4\cos^2 A - 3 = 1 - 4\sin^2 A$$

卽チ

$$4\sin^2 A + 2\sin A - 1 = 0.$$

此方程式ヲ解ケバ

$$\sin A = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

然ルニ $\sin 18^\circ$ ハ正ナルベキガ故ニ負根ヲ捨テザルベカラズ. ヨツテ

$$\left.\begin{array}{ll} & \sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}, \\ \text{從ツテ} & \cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ & \tan 18^\circ = \dfrac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} \quad \cot 18^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \end{array}\right\} \cdots (4)$$

35. 36°ノ三角函數.

$$\left.\begin{aligned}
&\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\\
&\text{從ツテ}\quad \sin 36^\circ=\sqrt{1-\cos^2 36^\circ}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\
&\tan 36^\circ=\sqrt{5-2\sqrt{5}},\ \cot 36^\circ=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

36. 54° 及ビ 72° ノ三角函數.

前二節ノ公式ヲ利用スレバ, 54°, 72° ノ三角函數ヲ求ムルコトヲ得ベシ. 何トナレバ

$$\begin{aligned}
&\sin 54^\circ=\cos 36^\circ, && \cos 54^\circ=\sin 36^\circ,\\
&\tan 54^\circ=\cot 36^\circ && \cot 54^\circ=\tan 36^\circ\\
&\sin 72^\circ=\cos 18^\circ && \cos 72^\circ=\sin 18^\circ\\
&\tan 72^\circ=\cot 18^\circ && \cot 72^\circ=\tan 18^\circ
\end{aligned}$$

ナルヲ以テナリ.

37. 9° 及ビ 81° ノ三角函數.

$$\sin 9^\circ+\cos 9^\circ=\sqrt{1+\sin 18^\circ}=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}$$

$$\sin 9^\circ-\cos 9^\circ=-\sqrt{1-\sin 18^\circ}=-\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}$$

從ツテ

$$\left.\begin{aligned}
&\sin 9^\circ=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}\\
&\cos 9^\circ=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}\\
&\tan 9^\circ=\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1},\ \cot 9^\circ=\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

38. 尚進ンデ特殊ナル角ノ三角函數ヲ求メンニ

$$\sin 3^\circ=\sin(18^\circ-15^\circ)=\sin 18^\circ\cos 15^\circ-\cos 18^\circ\sin 15^\circ$$

$$=\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\frac{1}{16}\sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{故ニ}\\
&\sin 3^\circ=\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}\\
&\text{同樣ニ}\\
&\cos 3^\circ=\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\}
\end{aligned}\right\}\cdots(7)$$

次ニ

$$\begin{aligned}
&6^\circ=33^\circ-30^\circ, && 9^\circ=45^\circ-36^\circ,\\
&\boxed{12^\circ=30^\circ-18^\circ,} && 21^\circ=36^\circ-15^\circ,\\
&24^\circ=45^\circ-21^\circ, && 27^\circ=30^\circ-3^\circ,\\
&33^\circ=45^\circ-12^\circ, && 39^\circ=45^\circ-6^\circ,\\
&42^\circ=45^\circ-3^\circ,
\end{aligned}$$

ナルガ故ニ三度トビノ三角函數ヲ求ムル事ハ容易ナリ. 而シテ 45° ヨリ大ナルモノ卽チ 48°, 51°,……ノ如キハ夫々 42°, 39°,……等ノ如キ餘角ノ三角函數ヨリ直チニ知ラルベシ.

39. 二ツ以上ノ角ガ或關係ヲ有スル時, 夫等ノ角ノ三角函數ノ間ニモ亦特殊ノ關係アルヲ常トス. 今之ヲ例示スベシ.

例 1. A, B, C ノ和ガ 180° ナル時ハ

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］ $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin(A+B)\cos A-B)+2\sin C\cos C$

然ルニ A+B トCトハ互ニ補角ヲナスガ故ニ

$$\sin(A+B)=\sin C,\qquad \cos C=-\cos(A+B)$$

故ニ

$$左邊=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$$

$$=4\sin C\sin A\sin B.$$

例 2. A, B, C ノ和ガ 180° ナル時ハ

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］

$$左邊=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

例 3. A+B+C=180° ナル時ハ

$$\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C+1=4\cos 2A\cos 2B\cos 2C.$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］

$$\cos 4A+\cos 4B=2\cos 2(A+B)\cos 2(A-B)$$

$$=2\cos 2C\cos 2(A-B)$$

$$\cos 4C=2\cos^2 2C-1=2\cos 2C\cos 2(A+B)-1$$

故ニ

$$\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C=2\cos 2C\{\cos 2(A-B)+\cos 2(A+B)\}-1$$

$$=4\cos 2C\cos 2A\cos 2B-1.$$

即チ

$$\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C+1=4\cos 2A\cos 2B\cos 2C.$$

例 4.

$$1-(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)+2\cos A\cos B\cos C=0$$

ナル時ハ, 角 A, B, C ニ如何ナル關係アルベキカ.

［解］

$$1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C$$

$$=1-(\cos A-\cos B\cos C)^2+\cos^2 B\cos^2 C-\cos^2 B-\cos^2 C$$

$$=(1-\cos^2 B)(1-\cos^2 C)-(\cos A-\cos B\cos C)^2$$

$$=\sin^2 B\sin^2 C-(\cos A-\cos B\cos C)^2$$

$$=(\sin B\sin C+\cos A-\cos B\cos C)(\sin B\sin C-\cos A+\cos B\cos C)$$

$$=\{\cos A-\cos(B+C)\}\{-\cos A+\cos(B-C)\}$$

$$=4\sin\frac{A+B+C}{2}\sin\frac{B+C-A}{2}\sin\frac{A+B-C}{2}\sin\frac{A-B+C}{2}$$

故ニ上ノ左邊ヲ零ナラシムル爲ニハ

$$\frac{A+B+C}{2},\quad \frac{B+C-A}{2},\quad \frac{A+B-C}{2},\quad \frac{A-B+C}{2}.$$

ノ中少クトモ一ツハ零又ハ二直角ノ倍數ナラザルベカラズ.

例 5. A+B+C=180° ニシテ且ツ

$$\frac{\sin A}{x}=\frac{\sin B}{y}=\frac{\sin C}{z}$$

ナル時ハ

$$(x-y)\cot\frac{C}{2}+(y-z)\cot\frac{A}{2}+(z-x)\cot\frac{B}{2}=0$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］

$$\frac{\sin A}{x}=\frac{\sin B}{y}=\frac{\sin C}{z}=\frac{1}{k}$$

ト置ケバ

$$x=k\sin A,\qquad y=k\sin B,\qquad z=k\sin C$$

故ニ

$$(x-y)\cot\frac{C}{2}=k(\sin A-\sin B)\cot\frac{C}{2}$$

$$=2k\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$=2k\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}\qquad\left(\because\ \cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{c}{2}\right)$$

$$=2k\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$

$$=2k\left(\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)$$

同様ニ

$$(y-z)\cot\frac{A}{2}=2k\left(\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$(z-x)\cot\frac{B}{2}=2k\left(\sin^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

ヨツテ

$$(x-y)\cot\frac{C}{2}+(y-z)\cot\frac{A}{2}+(z-x)\cot\frac{B}{2}=0$$

ナリ.

問　題 10.

A+B+C=180° ナル時次ノ等式ヲ證セヨ. (1—10)

1. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2. $\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

3. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0,$

4. $\dfrac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$

5. $\dfrac{1-\cos A+\cos B+\cos C}{1-\cos C+\cos A+\cos B}=\dfrac{\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{C}{2}}$

6. $\dfrac{(\sin B+\sin C-\sin A)(\sin C+\sin A-\sin B)}{4\sin A\sin B}=\sin^2\frac{C}{2}$

7. $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$

8. $\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi+A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi+C}{4}$

9. $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C+\operatorname{cosec} A\operatorname{cosec} B\operatorname{cosec} C$

10. $\sin(A-B)\sin(A-C)+\sin(B-C)\sin(B-A)$

$$+\sin(C-A)\sin(C-B)=2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$-2\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$$

11. A+B+C=180° ナラバ

$$\cot A+\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

ハ A, B, C ニ就キテ對稱式ナルコトヲ證セヨ.

次ノ等式ヲ證明セヨ. (12—17)

12. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$

13. $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{5}{16}$

14. $\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ=1$

15. $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ=\frac{3}{4}$

16. $\cos 24^\circ\cos^\circ 48^\circ\cos 96^\circ\cos 168^\circ=\frac{1}{16}$

17. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}$

18. A+B+C=360° ニシテ且ツ

$$\cos A=\frac{(d-a)(b-c)}{(d+a)(b+c)}\quad \cos B=\frac{(d-b)(c-a)}{(d+b)(c+a)}$$

$$\cos C=\frac{(d-c)(a-b)}{(d+c)(a+b)}$$

ナル時ハ

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\pm 1$$

ナルコトヲ證セヨ.

19. $\dfrac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta}=\dfrac{\cos\beta(\cos x-\cos\alpha)}{\cos\alpha(\cos x-\cos\beta)}$ ナル時ハ

$$\tan^2\frac{x}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

20. A+B+C=180° ニシテ且ツ

$$\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)=n\sin\frac{C}{2}$$

ナル時ハ

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{n-1}{n+1}$$

ナルコトヲ證セヨ.

21. $\theta=\frac{\pi}{17}$ ナル時

$$\frac{\cos\theta\cos 13\theta}{\cos 3\theta+\cos 5\theta}=-\frac{1}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

22. 半圓內ニ平行ナル二ツノ弦アリ, 中心ニ對シテ夫々 72°, 144° ヲ張ル. 然ル時ハ之等ノ距離ハ半徑ノ半分ニ等シ. 之ヲ證セヨ.

23. 中心ニ對シテ 108° ヲ張ル弦ノ長サハ, 中心ニ對シテ 36° 及ビ 60° ヲ張ル二ツノ弦ノ長サノ和ニ等シキコトヲ證セヨ.

24. 頂角ガ 36° ナルガ如キ二等邊三角形ヲ作リテ sin 18° ノ値ヲ幾何學的ニ算出セヨ.

第十一章

對　數

40. 定義.

a ヲ任意ノ正數ナリトシ, x ト N トヲ他ノ數ナリトシ, 夫等ノ間ニ

$$a^x=\mathrm{N}$$

ナル關係アル時, **x ヲ a ヲ底數トスル N ノ對數ナリ**トイフ. 而シテ

$$\log_a\mathrm{N}=x$$

ト記ス.

例ヘバ

$$10^2=100 \qquad 5^3=125$$

ナルガ故ニ

$$\log_{10}100=2, \qquad \log_5 125=3$$

ト記スルガ如シ.

41. 對數ノ基本的定理.

定理 i. 底數ノ如何ニ關セズ 1 ノ對數ハ零ナリ.

證明 a ノ値ノ如何ニ關セズ $a^0=1$ ナレバナリ.

定理 ii. 底數ノ如何ニ關セズ底數ト同ジ數ノ對數ハ 1 ナリ.

證明 a ノ値ノ如何ニ關セズ $a^1=a$ ナレバナリ.

定理 iii. 二ツノ數ノ積ノ對數ハ二ツノ數ノ對數ノ和ニ等シ.

證明 $\log_a m=x, \quad \log_a n=y$

トスレバ, 定義ニヨリ

$$a^x=m \qquad a^y=n$$

故ニ

$$mn=a^x\times a^y=a^{x+y}$$

故ニ

$$\log_a(mn)=x+y$$

從ツテ

$$\log_a m+\log_a n=\log_a(mn)$$

卽チ二數ノ積ノ對數ハ二數ノ對數ノ和ニ等シ.

系 i. 三ツ以上ノ數ノ積ノ對數ハ夫等ノ數ノ對數ノ和ニ等シ.

系 ii. 或數ノ羃ノ對數ハ其對數ニ羃指數ヲ乘ジタルモノニ等シ.

定理 iv. 商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ減ジタルモノニ等シ.

證明 $\log_a m=x, \qquad \log_a n=y$

トスレバ, 定義ヨリ

$$a^x=m, \qquad a^y=n$$

ナルガ故ニ

$$\frac{m}{n}=a^{x-y}$$

ヨツテ

$$\log_a\frac{m}{n}=x-y$$

卽チ定理ハ證明セラレタリ.

定理 v. b ヲ底數トスル a ノ對數ト, a ヲ底數トスル b ノ對數ト

ハ互ニ逆數ヲナス.

證明 $\log_b a=x, \qquad \log_a b=y$

トスレバ

$$b^x=a, \qquad a^y=b$$

ナリ. コノ二ツヨリ a ヲ消去スレバ

$$b^{xy}=b$$

故ニ $xy=1$ 卽チ $\log_b a$ ト $\log_a b$ トハ互ニ逆數ヲナス.

例 $\frac{1}{2}\log 20449+\log\frac{4}{7}-\log\frac{13}{35}+\log\frac{5}{11}$ ヲ簡單ニセヨ.

解 原式 $=\frac{1}{2}\log(11^2\times13^2)+\log 4-\log 7-\log 13+\log 35+\log 5-\log 11,$

$$=\log 11+\log 13+\log 4-\log 7-\log 13+\log 5+\log 7+\log 5-\log 11$$

$$=\log 4+\log 5+\log 5=\log 100=\log 10^2=2$$

上ノ如ク底數ヲ明示セザルモノハ凡テ 10 ヲ用フルモノトス. 元來ハ如何ナル數ヲ底數ニ用フルモ差支ナシト雖モ實際的ニハ 10 ヲ用ヒ, 理論的ニハ e* ヲ用フ. 前者ヲ**常用對數**トイヒ, 後者ヲ**自然對數**トイフ. 而シテ以後特ニ斷リナケレバ凡テ常用對數ヲ用フルモノトシ底數ヲ省略シ單ニ log ト書クヲ通常トス.

42. 常用對數ノ性質.

常用對數ニテハ 10 ヲ底トスルガ故ニ

$$y=\log x$$

ハ

$$10^y=x$$

ト全ク同ジ關係ナルガ故ニ x ニ種々ノ値ヲ與フル時之ニ對應スル y ノ値ハ次ノ表ノ如シ.

---

* e ハ無理數ニシテ其値ハ 2.71828182 .... ナリ. 其詳細ハ拙著高等代數學通論ニアリ.

x	……10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3……
y	……-2	-1	0	1	2	3……

故ニ次ノ結論ヲ得ベシ.

一桁ノ數ノ對數ハ 0 ト 1 トノ間ニアリ，二桁ノ數ノ對數ハ 1 ト 2 トノ間ニアリ，三桁ノ數ノ對數ハ 2 ト 3 トノ間ニアリ．一般ニ n 桁ノ數ノ對數ハ $n-1$ ト n トノ間ニアリ.

又小點以下第一位ヨリ始マル數ノ對數ハ -1 ト 0 トノ間ニアリ. 小數點以下第二位ヨリ始マル數ノ對數ハ -2 ト -1 トノ間ニアリ. 一般ニ小數點以下第 n 位ヨリ始マル數ノ對數ハ $-n$ ト $-n+1$ トノ間ニアリ。

43. 假數ト指標.

一桁ノ數 m ノ對數ヲ x トスレバ x ハ 0 ト 1 トノ間ニアリ.

卽チ

$$\log m=x \qquad 1>x\geqq 0$$

然ルニ

$$\log(10^n\times m)=n\log 10+\log m$$
$$=n+x$$

コノ式ニ於テ n ガ正又ハ負ノ整數ナル時ハ n ヲ $10^n\times m$ ノ對數ノ**指標**トイヒ，$\log m$ 卽チ x ヲ其**假數**トイフ.

例ヘバ

$$\log 2=0.3010$$

ナルガ故ニ，2 ノ對數ノ指標ハ零ニシテ 0.3010 ハ其假數ナリ.

又コレニヨリ 20, 200,……0.2, 0.02…… ナドノ對數ハ直チニ知ラ

ルベシ. 卽チ

$$\log 20=1.3010 \qquad \log 200=2.3010$$

....

$$\log 0.2=0.3010-1 \qquad \log 0.02=0.3010-2$$

....

ノ如シ.

指標ハ負ナル對數ヲ書クニハ通常指標ニ負號 ー ヲ戴スルモノトス. 例ヘバ

$$\log 0.2=0.3010-1$$

トスベキヲ

$$\log 0.2=\bar{1}.3010$$

ト書キ

$$\log 0.02=0.3010-2$$

トスベキヲ

$$\log 0.02=\bar{2}.3010$$

ト書ク.

44. 對數表.

對數表ニハ凡テ指標ヲ省キアリ. 且ツ特別ナル數ナラザル限リハ其假數ハ無理數ナレドモ表ニハ四桁モシクハ五桁 (七桁ノ表モアレドモ)ノミ載セアルモノナレバ嚴密ニイヘバ不精確ノモノナリ. 然レドモコレヨリ生ズル誤差ハ頗ル微小ナルガ故ニ實用ニハ差支ヘナシ.

尙對數表ニ就キテ最モ注意スベキ事ハ對數ノ增減ハ本數ノ增減ニ比例スルモノト見做セル所謂**比例部分ノ法則**コレナリ. 今之ニ就キ一言スベシ.

$$\log(n+d)-\log n=\log\left(\frac{n+d}{n}\right)=\log\left(1+\frac{d}{n}\right)=\mu\log_e\left(1+\frac{d}{n}\right)$$

$$=\mu\left(\frac{d}{n}-\frac{d^2}{2n^2}+\frac{d^3}{3n^3}-\cdots\cdots\right)$$

玆ニ μ ヲ**對數率**トイヒ，其値ハ約 0.43429 ナリ．

今 d ハ n ニ比シテ甚ダ小ナル時ハ $\frac{d^2}{2n^2}$, $\frac{d^3}{3n^3}$ …… ハ極メテ小ナルガ故ニ

$$\log(n+d)-\log n=\frac{\mu d}{n}$$

ナリトイフヲ得ベシ．故ニ數ニ於テ d ダケ增ス時ハ，其對數ニ於テ $\frac{\mu d}{n}$ ダケ增スコトヲ知ル．卽チ數ノ增減ハ其對數ノ增減ニ略比例ヲナスモノナリトイフヲ得ベシ．(詳細ハ拙著高等代數學通論參照)

例 2. $\log 2=0.3010$　$\log 7=0.8451$ ヲ知リテ $\log\frac{\sqrt[3]{0.245}}{28}=x$ ヲ求メヨ．

解
$$x=\frac{1}{3}\log 0.245-\log 28$$
$$=\frac{1}{3}\log\frac{245}{1000}-\log 28$$
$$=\frac{1}{3}\log 245-\frac{1}{3}\log 1000-\log 28$$
$$=\frac{1}{3}(\log 5+2\log 7)-\log 10-\log 7-2\log 2$$
$$=-\frac{1}{3}\log 7-\frac{2}{3}\log 10-\frac{7}{3}\log 2$$
$$=-\left(\frac{0.8451}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2.1070}{3}\right)$$
$$=-\frac{4.9521}{3}=-1.6507=\bar{2}.3493$$

注意　上ノ計算ハ凡テ四捨五入法ニヨリテ小數四位マデトレリ．以下之ニ準ズ．

例 3. $\sqrt[5]{\frac{2.75}{3576}}=x$ ノ値ヲ求メヨ．

解　$x=\sqrt[5]{\frac{2.75}{3570}}$ ト置キテ兩邊ノ對數ヲトラバ

$$\log x=\frac{1}{5}(\log 2.75-\log 3570)$$

然ルニ

$$\log 2.75=0.4393$$
$$\log 3570=3.5527$$

ナルガ故ニ

$$\log x=\frac{1}{5}(0.4393-3.5527)=-0.6227=\bar{1}.3773$$

サテ

$$\log 0.238=\bar{1}.3766 \qquad \log 0.239=\bar{1}.3781$$

ナルガ故ニ求ムル數ハ二ツノ數

$$0.238 \qquad 0.239$$

ノ間ニアルベシ．數ノ差ハ其對數ノ差ニ比例スルモノト假定スレバ (比例部分ノ法則) 求ムル數ハ

$$x=0.238+\frac{(0.3773-0.3766)}{(0.3781-0.3766)}\times 0.001$$
$$=0.238+\frac{7}{18}\times 0.001$$
$$=0.2384$$

注意　比例部分ノ法則ヲ用ヒテ數ノ末尾 4 ヲ求ムルニハ上ノ如ク計算セズトモ表ヲ利用シテ直チニ得ラルベシ．

例 4. 次ノ對數方程式ヲ解ケ．

$$(\log x)^2=\log x^2+3$$

解　與ヘラレタル方程式ヨリ

$$(\log x)^2=2\log x+3$$

今 $\log x=y$ ト置ケバ

$$y^2-2y-3=0$$

故ニ　$y=3$　或ハ　$y=-1.$

$y=3$ ナル時ハ

$$\log x=3 \quad \text{ヨリ} \quad x=1000$$

$y=-1$ ナル時ハ

$$\log x=-1 \quad ヨリ \quad x=\frac{1}{10}$$

ヨツテ 1000 及ビ $\frac{1}{10}$ ハ求ムルモノナリ.

問 題 11.

1. $3+\log 1.25-\log 228+\frac{1}{2}\log 8.1225-6\log 5$ ヲ計算セヨ.

2. $\log 28-\log 15-2\log\frac{3}{14}+3\log\frac{6}{7}$ ヲ計算セヨ.

3. $\sqrt{\frac{4\times 27}{13\times 475}}$ ヲ對數ヲ用ヒテ計算セヨ.

4. $\log(2x+1)+\log(2x-3)-2\log(x-1)=\log 5$ ヲ解ケ.

5. $x^{\log x}=1000x^2$ ヲ解ケ.

6. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=a^2+b^2 \\ \log x+\log y=\log ab \end{array}\right\}$ ヲ解ケ.

7. $x=10^{\frac{1}{1-\log z}}, \quad y=10^{\frac{1}{1-\log x}}, \quad z=10^{\frac{1}{1-\log y}}$

ノ三ツハ共立スルコトヲ證セヨ.

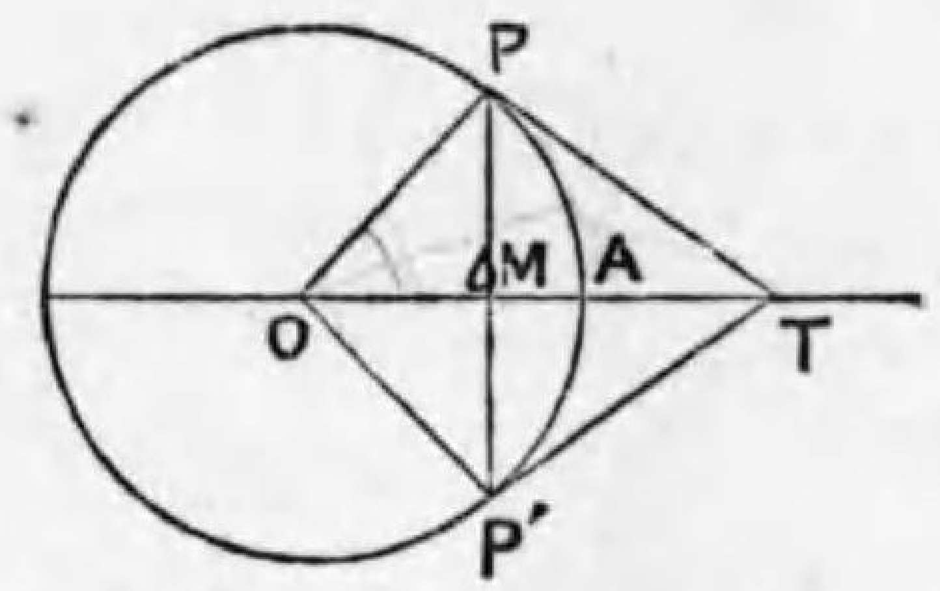
注意 表ニハ 1 ヨリ 1000 マデノ對數ノミ載セタリ. 故ニ例ヘバ 81225 ノ如キ四桁以上ノ數ノ對數ハ之ヲ求ムルコトヲ得ズ. カヽル時ハ表ニヨリテ 81200 ト 81300 トノ對數ヲ求メ然ル後比例ノ理ヲ適用シテ求ムルモノトス.

第十二章

三角函數表

45. $\frac{\theta}{\sin\theta}$ ノ極限値.

θ ヲ $\frac{\pi}{2}$ ヨリモ小ナル正角トシ, 單位圓 O ニ於テ角 AOP ヲ θ ニ等シカラシメ, 圓周トノ交點 P, P′ ニテノ切線ノ交點ヲ T トスレバ



直線PMP′$<\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}<$折線PTP′

故ニ

$$\mathrm{MP}<\overset{\frown}{\mathrm{AP}}<\mathrm{PT}$$

然ルニ單位圓ニアリテハ半徑ガ 1 ナルガ故ニ

$$\mathrm{MP}=\sin\theta, \quad \overset{\frown}{\mathrm{AP}}=\theta, \quad \mathrm{PT}=\tan\theta$$

ナルガ故ニ

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta \quad\text{……………………………………………}(1)$$

各邊ヲ $\sin\theta$ ニテ除スレバ

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

玆ニ於テ θ ヲ減少セシメ限リナク零ニ近迫セシムル時ハ, $\frac{1}{\cos\theta}$ モ又限リナク 1 ニ近迫ス. 從ツテ $\frac{\theta}{\sin\theta}$ モ亦限リナク 1 ニ近迫スベシ. コノ事實ヲ數學的ノ言葉ニテイヘバ

θ ガ零ニ近迫セル極限ニ於ケル $\frac{\theta}{\sin\theta}$ ノ極限値ハ１ナリ.

トイフ．而シテ記號的ニテハ

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1.\dots\dots\dots\dots(2)$$

トス．從ツテ又

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1.\dots\dots\dots\dots(3)$$

注意　θ ガ次第ニ變動シテ限リナク零ニ近迫スルコトヲ，記號的ニ $\theta\to0$ ト書ク.

［注意］　上ノ關係ハ θ ガ負ナル時モ眞ナリ．如何トナレバ θ ガ負ナル時ハ

$$\theta=-\theta'$$

ト置カバ θ' ハ正ナルガ故ニ

$$1<\frac{\theta'}{\sin\theta'}<\frac{1}{\cos\theta'}$$

然ルニ

$$\frac{\theta'}{\sin\theta'}=\frac{-\theta}{\sin(-\theta)}=\frac{-\theta}{-\sin\theta}=\frac{\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{1}{\cos\theta'}=\frac{1}{\cos(-\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}$$

ナルガ故ニ θ ガ負ナル時モ尙

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

ナル關係ガ成立スルガ故ナリ.

$\frac{a}{\tan a} \cdot —$

46.　$\frac{\tan\theta}{\theta}$ ノ極限値.

$$\frac{\tan\theta}{\theta}=\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{1}{\cos\theta}$$

ナルガ故ニ

$$\operatorname*{Lim}_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\operatorname*{Lim}_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$=\operatorname*{Lim}_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\operatorname*{Lim}_{\theta\to0}\frac{1}{\cos\theta}=1$$

故ニ

$$\operatorname*{Lim}_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1.\qquad\dots\dots\dots\dots(4)$$

［注意］　上二條ニイフ θ ハ弧度法ニテノ事ナリ．故ニ今 $\frac{\sin n^\circ}{n}$ ノ極限値ヲ求メンニハ先ヅ n° ヲ弧度ニ換算セザルベカラズ．即チ n° ノ弧度ヲ θ トスレバ，公式

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{n}{180}$$

ヨリ

$$n=\frac{180\theta}{\pi}$$

ナルガ故ニ

$$\frac{\sin n^\circ}{n}=\frac{\pi}{180}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

故ニ

$$\operatorname*{Lim}_{n\to0}\frac{\sin n^\circ}{n}=\frac{\pi}{180}\operatorname*{Lim}_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{\pi}{180}$$

トナル.

例 1.　$\operatorname*{Lim}_{m\to\infty}m\sin\frac{\theta}{m}$ ヲ求メヨ.

［解］　$m\sin\frac{\theta}{m}=\frac{\theta\sin\frac{\theta}{m}}{\frac{\theta}{m}}$

然ルニ $m\to\infty$ ナル時ハ，$\frac{\theta}{m}\to0$ ナルガ故ニ $\frac{\theta}{m}=\alpha$ ト置ケバ

$$\operatorname*{Lim}_{m\to\infty}m\sin\frac{\theta}{m}=\operatorname*{Lim}_{\alpha\to0}\theta\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\theta.$$

47.　θ ハ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ小ナル正角ナル時ハ，公式 (1) ヨリ

$$\tan\frac{\theta}{2}>\frac{\theta}{2}$$

故ニ兩邊ニ正ノ數 $\cos\frac{\theta}{2}$ ヲ乘ズレバ

$$\sin\frac{\theta}{2} > \frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

サテ

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

ナルガ故ニ

$$\sin\theta > 2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = \theta\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

然ルニ公式 (1) ヨリ

$$\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 > \sin^2\frac{\theta}{2}$$

從ツテ

$$\sin\theta > \theta\left(1-\frac{\theta^2}{4}\right)$$

故ニ

$$\theta > \sin\theta > \theta\left(1-\frac{\theta^2}{4}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

コレ $\sin\theta$ ノ値ノ限界ヲ示スモノニシテ頗ル重要ナル結果ナリ.

48. 正弦ノ限界ヨリ又餘弦ノ限界ヲ定ムルコトヲ得ベシ. 卽チ θ ガ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ小ナル正角ナル時ハ

$$\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

ヨリ先ヅ

$$\cos\theta > 1-2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1-\frac{\theta^2}{2}$$

又公式 (5) ニ θ ノ代リニ $\frac{\theta}{2}$ ト置ケバ

$$\sin\frac{\theta}{2} > \frac{\theta}{2}\left(1-\frac{6^2}{16}\right) = \frac{\theta}{2}-\frac{\theta^3}{32}$$

ナルガ故ニ $\cos\theta$ ハ $1-2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^3}{32}\right)^2$ 卽チ $1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{16}-2\left(\frac{\theta^3}{32}\right)^2$ ヨリモ小ナリ. 從ツテ $\cos\theta$ ハ尙更 $1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{16}$ ヨリモ小ナリ.

故ニ

$$1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{6^4}{16} > \cos\theta > 1-\frac{\theta^2}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

ナリ.

49. 公式 (5), (6) ニヨレバ小ナル正角ノ正弦及ビ餘弦ノ近似値ヲ得ベシ. 何トナレバ正弦ノ代リニ θ ヲ採ラバ, 之ガ爲ニ起ル誤差ハ $\frac{\theta}{4}$ ヨリ小ニシテ, 餘弦ノ代リニ $1-\frac{\theta^2}{2}$ ヲ採ラバ之ガ爲ニ起ル誤差ハ $\frac{6^4}{16}$ ヨリハ小ナルガ故ニ θ ガ若シ甚ダ小ナル時ハ之等ノ誤差ハ非常ニ小ナルベケレバナリ.

50. 十秒ノ正弦.

十秒ノ正弦ノ代リニ, 其弧度

$$\theta = \frac{10\pi}{180\times60\times60} = \frac{\pi}{64800}$$

$$=0.00004848136811\ldots\ldots$$

ヲ用フレバ, $\sin 10''$ ヨリモ少シク大ナリト雖モ, 其誤差ハ $\frac{6^3}{4}$ ヨリモ小ナリ.

然ルニ

$$\theta = \frac{\pi}{64800} < 0.00005 = \frac{1}{2\times10^4}$$

ナルガ故ニ

$$\frac{\theta^3}{4} < \frac{1}{32\times10^{12}} < \frac{1}{10^{13}}$$

即チ誤差ノ限界 $\frac{\theta^3}{4}$ ハ小數第十三位ヨリモ小ナルガ故ニ

$$\sin 10''=0.000048481368 \dots\dots\dots\dots (7)$$

トスル時ハ小數第十二位マデハ正確ナリ.

51. 十秒ノ餘弦

十秒ノ餘弦ノ代リニ

$$1-\frac{\theta^2}{2}$$

ヲ採ラバ $\cos 10''$ ヨリモ少シク小ナリト雖モ, 其誤差ハ $\frac{\theta^4}{16}$ ヨリモ小ナリ.

然ルニ

$$\theta<\frac{1}{2\times 10^4}$$

ナルガ故ニ

$$\frac{\theta^4}{16}<\frac{1}{16^2\times 10^{16}}<\frac{1}{10^{18}}$$

即チ誤差ノ限界 $\frac{\theta^4}{16}$ ハ小數第十八位ヨリモ小ナルガ故ニ

$$\cos 10''=1-\frac{\theta^2}{2}=0,\underset{\cdot}{9}\underset{\cdot}{9}\underset{\cdot}{9}\underset{\cdot}{9}\underset{\cdot}{9}\underset{\cdot}{9}\underset{\cdot}{9}\underset{\cdot}{9}8824 \dots\dots\dots\dots (8)$$

ヲ用フレバ勿論小數第十二位マデハ正確ナリ.

52. 十秒置キノ正弦及ビ餘弦

十秒ノ正弦, 餘弦ノ値ヲ用フレバ二十秒ノ正弦, 餘弦ハ夫々次ノ公式ニヨツテ求メラル.

$$\sin 20''=2\sin 10''\cos 10''$$

$$\cos 20''=\cos^2 10''-\sin^2 10''$$

次ニ三十秒以上ニハ次ノ公式ヲ用フルナリ.

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

即チ此式ニ $A=20''$, $B=10''$ ト置カバ $30''$ ノ正弦, 餘弦ヲ得ベシ. 又四十秒以上ノ正弦及ビ餘弦ハ要スルニ四ツノ公式

$$\sin 2A=2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$$

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

ヲ交互ニ用フルコトニヨリテ得ラルベシ.

53. トーマス, シムソンノ公式

上ノ方法ニヨルト其計算稍々煩瑣ナリ. ソレガ爲ニ**シムソンノ正弦公式**ヲ説明スベシ.

α ヲ任意ノ角トスレバ

$$\sin(n+1)\alpha+\sin(n-1)\alpha=2\sin n\alpha\cos\alpha$$

ナルガ故ニ $\alpha=10''$ トスレバ

$$\sin(n+1)10''+\sin(n-1)10''=2\sin n\,10''\cos 10''$$

然ルニ $2\cos 10''=2-k$

トスレバ, k ハ (8) ヨリ約 0,00000000235 ナリ.

ヨツテ

$$\sin(n+1)10''+\sin(n-1)10''=(2-k)\sin n\,10''$$

移項スレバ

$$\sin(n+1)10''-\sin n10''=\sin n10''-\sin(n-1)10''-k\sin n10''. \quad (9)$$

コレ卽チシムソンノ正弦公式ナリ．サテ此式ニ n ノ代リニ 1, 2, 3, …… ト置カバ

$$(\sin 20''-\sin 10'')=(\sin 10''-\sin 0^\circ)-k\sin 10''$$
$$(\sin 30''-\sin 20'')=(\sin 20''-\sin 10'')-k\sin 20''$$
$$(\sin 40''-\sin 30'')=(\sin 30''-\sin 20'')-k\sin 30''$$

……………………………………………

コノ式ニヨレバ $\sin 10''$ ヲ知ル時ハ $\sin 20''-\sin 10''$ ヲ知ルヲ得ベク，從ツテ之ニ $\sin 10''$ ヲ加フルコトニヨリテ $\sin 20''$ ヲ知ルコトヲ得ベシ．已ニ $\sin 20''$ ヲ知ル時ハ，先ニ得タル $\mathrm{sis}\,20''-\sin 10''$ ヨリ $k\sin 20''$ ヲ減ジタルモノガ $\sin 30''-\sin 20''$ ナルガ故ニ之ニ $\sin 20''$ ヲ加フレバ $\sin 30''$ ヲ得ベシ．次下之ニ準ズ．

54. 以上ノ方法ニヨリテ 0° ヨリ 45° マデ計算スベシ． 45° ヨリ 90° マデノ正弦，餘弦ハ夫々餘角ノ理ニ從ヒ 45° ヨリ 0° ニ至ルマデノ餘弦，正弦ニヨツテ表ハスコトヲ得ベシ．例ヘバ $\sin 73^\circ 20'$ ハ $\cos 16^\circ 40'$ ノ値ヲ以テスベキガ如シ．又 90° 以上ノ角又ハ負角ノ正弦，餘弦ハ 0° ヨリ 90° マデノ正弦或ハ餘弦ニテ表ハスコトヲ得．例ヘバ $\sin 132^\circ 30'$ ハ $\sin 47^\circ 30'$ ノ値ニ等シク，$\cos 237^\circ 40'$ ハ $-\cos 57^\circ 40'$ ノ値ニ等シキガ如シ．

次ニ考フベキコトハ，夫等ノ値ノ正確ノ度合ナリ．最初 $\sin 10''$, $\cos 10''$ ヲ求メシ時ハ少クトモ小數第十二位マデ正シカリシガ，$20''$, $30''$, $40''$…… ト計算ヲ進ムルニ從ヒ漸ク正確度ガ減少スルガ故ニ，イツマデモ小數第十二位マデ正シトハイフベカラズ．故ニ其算出シタル値ハ果シテ小數幾位マデ正シキモノナルカヲ檢スル必要アリ．ソレニハ已ニ正確ニ計算シ置キタル 3°, 6°, 9°, …… ノ如キ三度毎ニ增加スル角ノ正弦餘弦ニ比較スルヲヨシトス．

55. 三角函數ノ對數表ニ就キテ重要ナル事項ヲ列記スベシ．

1.° 正弦，餘弦ノ對數及ビ 0° ヨリ 45° マデノ正切ノ對數並ビニ 45° ヨリ 90° ニ至ル餘切ノ對數ノ指標ハ何レモ零又ハ負數ナリ．何トナレバ之等ノ三角函數ハ何レモ 1 ヨリモ大ナラザレバナリ．然レドモ表ニハ一切負數ヲ記入セズ．卽チ表ニハ三角函數ノ對數ニ 10 ヲ加ヘタルモノヲ記入セリ．故ニ之ヲ**表對數**トイヒ表ハスニ Log ヲ以テス．

故ニ

$$\log\sin\alpha=\mathrm{Log}\sin\alpha-10$$
$$\log\tan\alpha=\mathrm{Log}\tan\alpha-10$$

等ノ關係アリ．

2°. **表差**ハ一般ニハ急激ノ變化ヲナサズ．玆ニ表差トハ與ヘラレタル對數表ニ於テ一ツノ數ノ對數ト其次ノ數ノ對數トノ差ヲイフ．(附錄表ヲ見ヨ)

3°. 正切ノ表差ハ正弦，餘弦ノ之ニ對スル表差ヨリモ大ナリ．(餘切モ亦同ジ)

4°. 正弦ノ表差ハ零度附近ノ時大ニシテ，九十度附近ノ時ハ小ナリ．(餘弦ハ之ニ反ス)

5°. 正切及ビ余切ノ表差ハ 45° ノ附近ハ小ナリ．

56. 比例部分ノ理論

比例部分ノ理論ヲ充分ニ研究スルコトハ頗ル興味アルコトナレド

モ稍々高尙ニ亘ルガ故ニ，玆ニハ初等的說明ヲ以テ滿足スベシ．

1.° 角ノ正弦ノ變化ハホヾ其角ノ變化ニ比例ス．

$$\begin{aligned}\sin(\theta+h)-\sin\theta&=\sin h\cos\theta-\sin\theta(1-\cos h)\\&=\sin h\cos\theta\left(1-\tan\theta\frac{1-\cos h}{\sin h}\right)\\&=\sin h\cos\theta\left(1-\tan\theta\tan\frac{h}{2}\right)\end{aligned}$$

今 h ヲ角ノ增分ノ弧度トシ且ツ甚ダ小ナリトスレバ公式(5)ニヨリ $\sin h$ ハ殆ンド h ニ等シク，又 θ ハ $\frac{\pi}{2}$ ニ近カラザル時ハ $\tan\theta$ ハサマデ大ナラズシテ $\tan\frac{h}{2}$ ハ甚ダ小ナルガ故ニ $\tan\theta\tan\frac{h}{2}$ ハ甚ダ小ナリ．故ニ之ヲ省略スレバ

$$\sin(\theta+\boldsymbol{h})-\sin\theta=h\cos\theta\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

卽チ角ニ於テ h ダケ增加スレバ，正弦ノ變化ハ略 h ニ比例スルヲ見ル．

2°. 角ノ餘弦ノ變化ハホヾ其角ノ變化ニ比例ス．

$$\begin{aligned}\cos(\theta+h)-\cos\theta&=-\{\sin\theta\sin h+\cos\theta(1-\cos h)\}\\&=-\sin\theta\sin h\left(1+\cot\theta\tan\frac{h}{2}\right)\end{aligned}$$

然ルニ h ヲ角ノ增分ノ弧度トシ且ツ甚ダ小ナリトスレバ $\sin h$ ハ殆ンド h ニ等シク，又 θ ハ零ニ近カラザル時ハ $\cot\theta$ ハサマデ大ナラズシテ $\tan\frac{h}{2}$ ハ甚ダ小ナルガ故ニ $\cot\theta\tan\frac{h}{2}$ ハ甚ダ小ナリ．故ニ之ヲ省略スレバ

$$\cos(\theta+\boldsymbol{h})-\cos\theta=-\boldsymbol{h}\sin\theta\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

コレ角ノ餘弦ノ變化ハ略其角ノ變化ニ比例スルコトヲ示スモノナリ．

3°. 角ノ正切ノ變化ハホヾ其角ノ變化ニ比例ス．

$$\begin{aligned}\tan(\theta+h)-\tan\theta&=\frac{\sin(\theta+h)}{\cos(\theta+h)}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\&=\frac{\sin(\theta+h)\cos\theta-\cos(\theta+h)\sin\theta}{\cos\theta\cos(\theta+h)}=\frac{\sin(\theta+h-\theta)}{\cos\theta\cos(\theta+h)}\\&=\frac{\sin h}{\cos\theta\cos(\theta+h)}=\frac{\tan h}{\cos^2\theta(1-\tan\theta\tan h)}\end{aligned}$$

今 h ヲ角ノ增分ノ弧度トシ且ツ甚ダ小ナリトスレバ，$\tan h$ ハ殆ンド h ニ等シク，又 θ ハ $\frac{\pi}{2}$ ニ近カラザル時ハ $\tan\theta\tan h$ ハ非常ニ小ナルガ故ニ之ヲ省略スレバ

$$\tan(\theta+\boldsymbol{h})-\tan\theta=\frac{\boldsymbol{h}}{\cos^2\theta}=\boldsymbol{h}\sec^2\theta\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

コレ卽チ正切ノ變化ハ略其角ノ變化ニ比例スルコトヲ示スモノナリ．

餘切，正割及ビ餘割モ亦比例部分ノ理ガ行ハルベシト雖モ其證明ハ玆ニ省略スベシ．

以上ハ三角函數ニ就キテノ比例部分ノ理論ナリシガコレヨリ進ンデ其對數ノ場合ニ就キテ硏究スベシ．

4°. 角ノ正弦ノ對數ノ變化ハ其角ノ變化ニ比例ス．

1°. ニヨレバ h ガ甚ダ小ナル時ハ

$$\sin(\theta+h)=\sin\theta+h\cos\theta$$

故ニ

$$\frac{\sin(\theta+h)}{\sin\theta}=1+h\cot\theta$$

從ツテ

$$\log\sin(\theta+h)-\log\sin\theta=\log(1+h\cot\theta)$$

然ルニ h ハ甚ダ小ナル時ハ $\log(1+h\cot\theta)$ ハ殆ンド $\mu h\cot\theta$ ニ等

シ，茲ニ μ ハ對數率ニシテ其値ハ約 0.434294 ナリトス．(拙著高等代數學通論參照)

故ニ近似的ニハ

$$\log\sin(\theta+h)-\log\sin\theta=\mu h\cot\theta$$

ナル等式ヲ得ベシ．表對數

$$\mathrm{Log}\sin(\theta+h)=\log\sin(\theta+h)+10$$

$$\mathrm{Log}\sin\theta=\log\sin\theta+10$$

ナルガ故ニ

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\sin(\theta+h)-\mathrm{Log}\sin\theta&=\log\sin(\theta+h)-\log\sin\theta\\&=\mu h\cot\theta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)\end{aligned}$$

故ニ表對數ニ於テモ角ノ增減ニ比例シテ其角ノ正弦ノ對數ノ値ガ變化ス．

同樣ニ

$$\mathrm{Log}\cos(\theta+h)-\mathrm{Log}\cos\theta=-\mu h\tan\theta\ldots\ldots\ \cdot\ \ldots\ldots(14)$$

(13), (14) ヨリ

$$\begin{aligned}&\mathrm{Log}\tan(\theta+h)-\mathrm{Log}\tan\theta\\&\quad=\mathrm{Log}\sin(\theta+h)-\mathrm{Log}\sin\theta-\mathrm{Log}\cos(\theta+h)+\mathrm{Log}\cos\theta\\&\quad=\mu h(\cot\theta+\tan\theta)=\frac{2\mu h}{\sin 2\theta}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)\end{aligned}$$

(14), (15) ハ夫々餘弦，正切ノ對數ニモ比例部分ノ理ガ行ハルルコトヲ示スモノナリ．

問題 12.

次ノ極限値ヲ求メヨ．

1. $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\sec\theta-\tan\theta)$

2. $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin\theta}-\cot\theta\right)$

3. $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-1}$

4. $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$

5. $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{\theta\to0}\frac{\tan2\theta-2\tan\theta}{\theta^3}$

6. $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{\theta\to0}\frac{\theta(\sin\theta-\sin m\theta)}{\cos\theta-\cos m\theta}$

7. $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{\theta\to0}\frac{\cos\theta-\cos m\theta}{\cos\theta-\cos n\theta}$

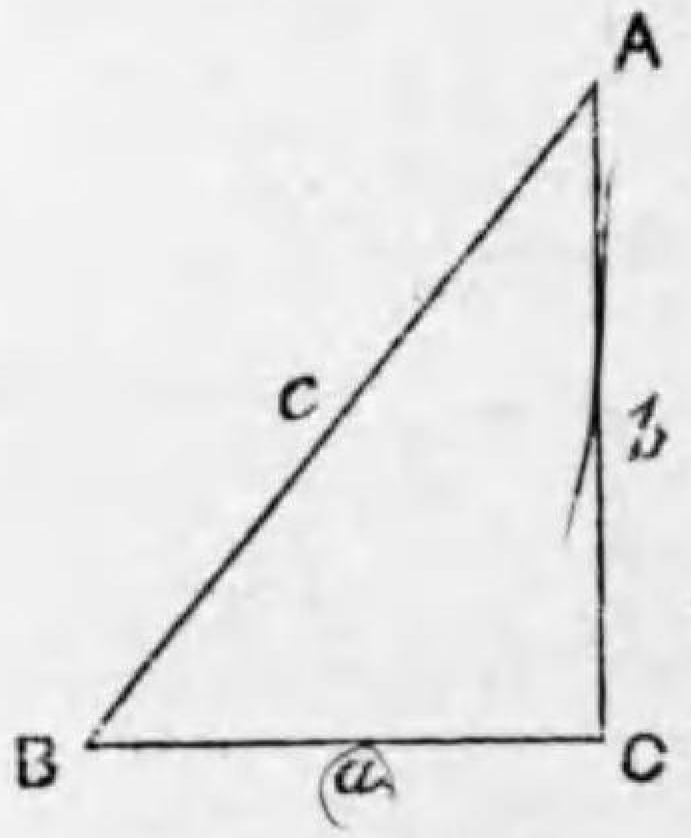
8. $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{x\to0}\frac{\sin\alpha x^{\circ}}{\sin\beta x^{\circ}}$

第十三章

三角形ノ邊ト角トノ關係

57. 直角三角形

C ヲ直角頂トスル三角形 ABC ニ於テ, 角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c トスレバ



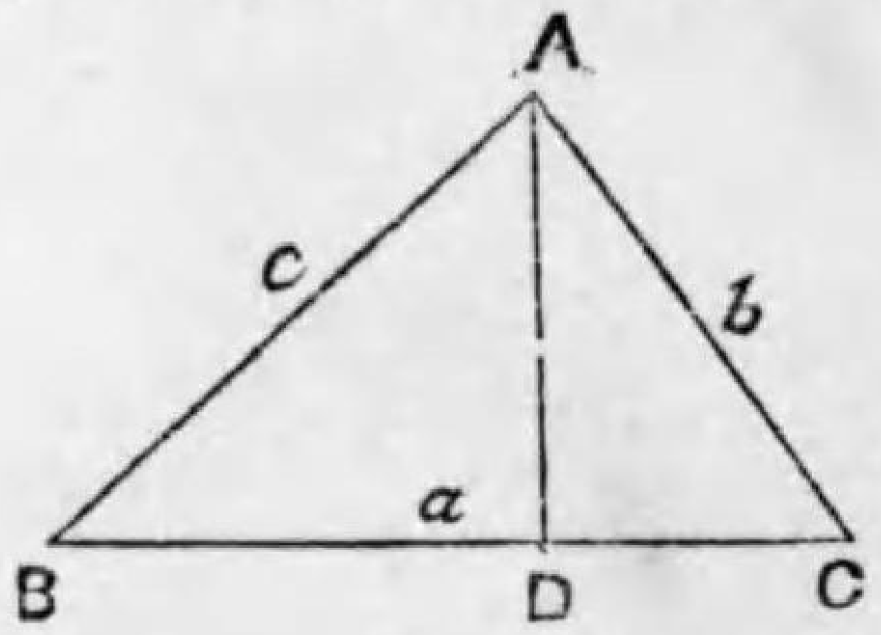
（第三十三圖）

$$\left.\begin{aligned}\sin B=\cos A=\frac{b}{c}\\ \sin A=\cos B=\frac{a}{c}\\ \tan B=\cot A=\frac{b}{a}\\ \tan A=\cot B=\frac{a}{b}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル關係アリ.

58. 正弦法則

一般ノ三角形 ABC ノ角 A, B, C ニ對スル邊ノ長サヲ夫々 a, b, c ニテ表ハス (以下之ニ準ズ). 今 A ヨリ底邊 BC ニ垂線 AD ヲ下ス時, D ハ底邊 BC ノ上ニアル時ハ



$$AD=c\sin B$$

$$AD=b\sin C$$

又 D ガ底邊ノ延長例ヘバ圖ノ如ク BC ノ延長上ニアル時ハ

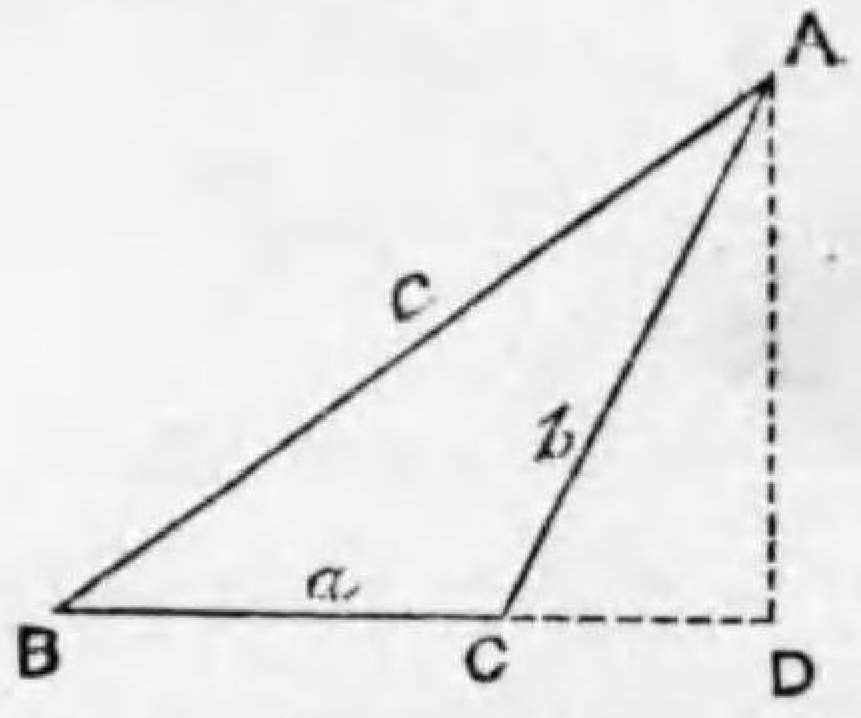
$$AD=c\sin B$$

ナリ. 又三角形 ACD ヨリ

$$AD=b\sin ACD$$

$$=b\sin(\pi-c)$$

$$=b\sin c$$



（第三十五圖）

故ニ何レノ場合ニテモ

$$c\sin B=b\sin C$$

從ツテ

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

次ニ A 點以外ノ頂點例ヘバ B ヨリ AC 又ハ其延長ニ垂線ヲ下スコトニヨリテ

$$c\sin A=a\sin C$$

卽チ、

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

從ツテ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

コレヲ**正弦法則**トイフ.

例 1. 三角形 ABC ニ於テ

$$\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}=\frac{b\cos C-c\cos B}{b\cos C+c\cos B}$$

ナルコトヲ證セヨ.

解 $$\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}=\frac{\sin B\cos C-\cos B\sin C}{\sin B\cos C+\cos B\sin C}\cdots\cdots(1)$$

然ルニ正弦法則ニヨレバ

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=k$$

ヨツテ

$$\sin B=kb,\qquad \sin C=kc$$

之ヲ (1) ニ代入スレバ所要ノ結果ヲ得.

59. 餘弦公式ト餘弦法則

前節ノ初メノ圖ニ於テハ

$$BD=c\cos B\qquad DC=b\cos C$$

コレ等ヲ加フレバ

$$a=c\cos B+b\cos C$$

又前節ノ後ノ圖ニ於テハ

$$BD=c\cos B$$

$$CD=b\cos ACD=b\cos(\pi-c)=-b\cos C$$

然ルニ此場合ハ

$$a=BC=BD-CD$$

ナルガ故ニ矢張リ

同樣ニ $$\left.\begin{aligned}a&=b\cos C+c\cos B\\ b&=c\cos A+a\cos C\\ c&=a\cos B+b\cos A\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

コレヲ**餘弦公式**トイフ.

此公式ヨリ cos A, cos B 及ビ cos C ノ値ヲ求ムレバ

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

ヲ得. 從ツテ

$$\left.\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

(3) 及ビ (4) ヲ**餘弦法則**トイフ.

例 2. 正弦法則ヨリ余弦公式ヲ導ケ.

[解] $A+B+C=\pi$ ナルガ故ニ

$$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C\cdots\cdots(1)$$

然ルニ正弦法則ニヨリ

$$\sin A=ka\qquad \sin B=kb\qquad \sin C=kc$$

ト置クコトヲ得。之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$ka=kb\cos C+kc\cos B\cdots\cdots(2)$$

即チ

$$a=b\cos C+c\cos B$$

同樣ニ $$b=c\cos A+a\cos C$$

$$c=a\cos B+b\cos A$$

ヲ得.

60. 半角ノ三角函數ヲ邊ノ長サニテ表ハスコト

前節ニヨリ

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

故ニ

$$1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

卽チ

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

從ツテ

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

然ルニ $\frac{A}{2}$ ハ 90° ヨリモ小ナル正角ナルガ故ニ，其正弦ノ値ハ必ズ正ナリ．故ニ上ノ複號ハ ＋ ヲトルベキモノナリ．

今

$$a+b+c=2s$$

ト置ケバ

$$a-b+c=2(s-b)$$

$$a+b-c=2(s-c)$$

ナルガ故ニ

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \text{同樣ニ}\quad\sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

次ニ

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

ナルガ故ニ

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$$

故ニ

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

然ルニ $\frac{A}{2}$ ハ 90° ヨリモ小ナル正角ナルガ故ニ，其餘弦ノ値ハ必ズ正ナリ．故ニ上ノ複號ハ ＋ ヲトルベキモノトス．

然ル時ハ

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \text{同樣ニ}\quad\cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(5), (6) ヨリ半角ノ正切ヲ得ベシ．卽チ

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

例 3.　三角形 ABC ニ於テ邊 a, b, c ハ等差級數ヲナス時ハ

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

ナルコトヲ證セヨ．

［解］　$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$=\frac{s-b}{s}=\frac{a-b+c}{a+b+c}$$

然ルニ a, b, c ハ等差級數ヲナスガ故ニ

$$2b=a+c$$

ヨツテ

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{2b-b}{2b+b}=\frac{1}{3}$$

ヨツテ證セラレタリ.

61. 角ノ正弦ヲ邊ニテ表ハスコト

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

ナルガ故ニ

$$\sin A=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

故ニ

同様ニ
$$\left.\begin{aligned}\sin A&=\frac{2S}{bc}\\ \sin B&=\frac{2S}{ca}\\ \sin C&=\frac{2S}{ab}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

茲ニ $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ナリトス.

注意　公式 (8) ヲ夫々 a, b, c ニテ除スレバ

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

ヲ得. コレ先キニ得タル正弦法則ニ外ナラズ.

62. 正切法則

正弦法則ニヨレバ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

加比ノ理ニヨリ

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{a-b}{a+b}$$

然ルニ

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

故ニ

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

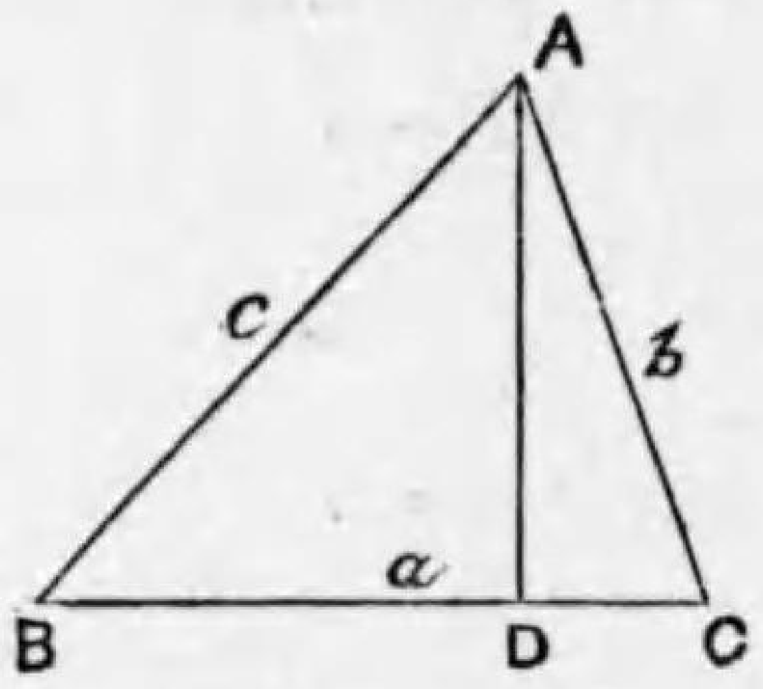
従ツテ

同様ニ
$$\left.\begin{aligned}\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}&=\frac{a-b}{a+b}\\ \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}&=\frac{b-c}{b+c}\\ \frac{\tan\frac{C-A}{2}}{\tan\frac{C+A}{2}}&=\frac{c-a}{c+a}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

63. 三角形ノ面積

1°. 二邊ト夾角トガ與ヘラレタル時,

三角形 ABC ノ面積ハ底邊 BC ト高サ AD トノ積ノ二分ノ一ニ等シ,



第三十六圖

然ルニ　$AD=b\sin C$

ヨツテ面積ヲ S トスレバ

同様ニ
$$\left.\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}ab\sin C\\ S&=\frac{1}{2}bc\sin A\\ S&=\frac{1}{2}ca\sin B\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

2°. 三ツノ邊ガ與ヘラレタル時,

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

ニシテ且ツ第六十一節ニヨリ

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ナルヲ以テ

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

3°. 一邊ト其兩端ノ角トガ與ヘラレタル時,

底邊 BC 及ビ兩端ノ角 B, C ガ與ヘラレタリトセヨ. 然ル時ハ殘リノ角 A モ亦已知ナリ.

サテ　$S=\frac{ca}{2}\sin B$

然ルニ正弦法則ニヨレバ

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

ヨツテ

$$S=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A}$$

例 4. 三角形 ABC ノ面積ハ

$$\left(\frac{a^2}{\sin A}+\frac{b^2}{\sin B}+\frac{c^2}{\sin C}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$

トスレバ

$$\begin{aligned}原式&=k^2(\sin A+\sin B+\sin C)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\&=4k^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\&=\frac{1}{2}k^2\sin A\sin B\sin C\end{aligned}$$

然ルニ

$$k^2\sin A\sin B=ab$$

ヨツテ　$原式=\frac{ab}{2}\sin C$

コレ求ムル面積ニ外ナラズ.

例 5. 三角形 ABC ニ於テ $a^2=bc$ ナル關係アル時ハ

$$\cos(B-C)=1-\cos A-\cos 2A$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］ $a^2=bc$ ナルヲ以テ, a, b, c ニ比例スベキ $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ ヲ代入スル時ハ

$$\sin^2 A=\sin B\sin C\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ　$\sin^2 A=\frac{1-\cos 2A}{2}$

$$\sin B \sin C = \frac{1}{2}\{\cos (B-C) - \cos(B+C)\}$$

故ニ (1) ハ

$$1-\cos 2A = \cos(B-C) - \cos(B+C)$$

故ニ $\cos(B-C) = 1+\cos(B+C) - \cos 2A$

即チ $\cos(B-C) = 1-\cos A - \cos 2A \qquad (\because\ \cos(B+C) = -\cos A)$

例 6 三角形ノ周圍ハ

$$2c \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \sec\frac{A+B}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］ 周圍ヲ $2s$ トスレバ

$$2s = a+b+c$$

$$= \frac{c\sin A}{\sin C} + \frac{c\sin B}{\sin C} + c \qquad \text{(正弦法則)}$$

$$= \frac{c(\sin A + \sin B + \sin C)}{\sin C} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

然ルニ

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

ナルガ故ニ (1) ハ

$$2s = \frac{4c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$= \overset{c}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sec\frac{A+B}{2}$$

例 7. 三角形ノ各邊ノ長サハ等差級數ヲナス時, 最大及ビ最小角ヲ θ 及ビ φ トスル時ハ

$$4(1-\cos\theta)(1-\cos\varphi) = \cos\theta + \cos\varphi$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］ 三角形 ABC ニ於テ a ハ最小, c ハ最大ナル邊ナリトスレバ

$$\cos\theta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\cos\varphi = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

然ルニ假定ニヨリテ

$$2b = a+c$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{5a-3c}{4a}\\ \cos\varphi &= \frac{5c-3a}{4c}\end{aligned}\right\}$$

故ニ

$$4(1-\cos\theta)(1-\cos\varphi) = \frac{(3c-a)(3a-c)}{4ac}$$

$$= \frac{10ac-3a^2-3c^2}{4ac}$$

又 $\cos\theta + \cos\varphi = \frac{5a-3c}{4a} + \frac{5c-3a}{4c} = \frac{10ac-3a^2-3c^2}{4ac}$

ヨツテ

$$4(1-\cos\theta)(1-\cos\varphi) = \cos\theta + \cos\varphi$$

例 8. 三角形 ABC ノ各頂點ヨリ順次ニ各邊ト等角 α ヲナス三ツノ直線ヲ引キテ第二ノ三角形ヲ作ル時, コノ三角形ハ原三角形ト相似ニシテ其邊ノ比ハ

$$\cos\alpha - \sin\alpha(\cot A + \cot B + \cot C) : 1$$

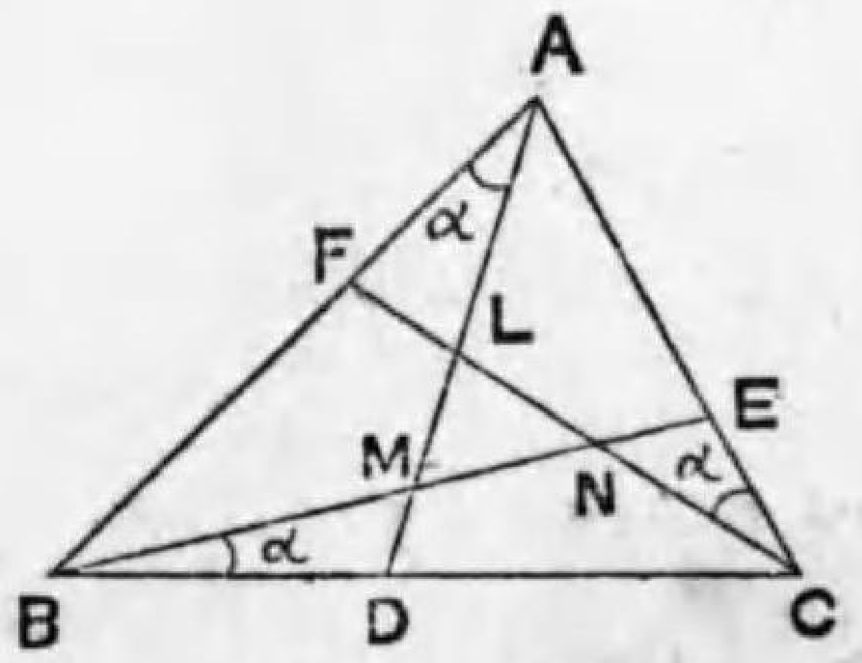
ナルコトヲ證セヨ.

［解］ 圖ニ於テ三ツノ直線 AD, BE, CF ヲ引キ

$$D\hat{A}B = E\hat{B}C = F\hat{C}A = \alpha$$

ナラシメ, 第二ノ三角形 LMN ヲ作ラバ, 之ト原三角形トハ等角ナルコト明カナリ.

サテ三角形 BNC ヨリ



第三十七圖

$$\frac{BN}{BC}=\frac{\sin ECN}{\sin BNC}=\frac{\sin C-\alpha)}{\sin CNE}=\frac{\sin(C-\alpha)}{\sin(\alpha+NCB)}=\frac{\sin(C-\alpha)}{\sin C}$$

故ニ

$$BN=\frac{a\sin(C-\alpha)}{\sin C}$$

又三角形 ABM ヨリ

$$\frac{BM}{BA}=\frac{\sin BAM}{\sin BMA}=\frac{\sin\alpha}{\sin BMD}=\frac{\sin\alpha}{\sin B}$$

故ニ

$$BM=\frac{c\sin\alpha}{\sin B}$$

從ツテ

$$BN-BM=MN=\frac{a\sin C-\alpha)}{\sin C}-\frac{c\sin\alpha}{\sin B}$$

然ルニ

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

故ニ

$$MN=\frac{a\sin(C-\alpha)}{\sin C}-\frac{a\sin\alpha\sin C}{\sin A\sin B}$$

$$=a\cos\alpha-a\cot C\sin\alpha-\frac{a\sin\alpha\sin(A+B)}{\sin A\sin B}$$

$$=a\cos\alpha-a\cot C\sin\alpha-a\sin\alpha(\cot A+\cot B)$$

ヨツテ二ツノ三角形ノ對應邊 MN, BC ノ間ニハ

$$a\{\cos\alpha-\sin\alpha(\cot A+\cot B+\cot C)\}:a$$

即チ

$$\cos\alpha-\sin\alpha(\cot A+\cot B+\cot C):1$$

ナル關係アリ.

例 9. 三角形 ABC ニ於テ, 公式

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

ヨリ $a<b+c$ ナルコトヲ證セヨ.

［解］ $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$=b^2+2bc+c^2-2bc-2bc\cos A$$

$$=(b+c)^2-2bc(1+\cos A)$$

故ニ $$a^2=(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{A}{2}$$

ヨツテ容易ニ

$$a<b+c$$

ナルコトヲ知ル.

例 10. 三角形 ABC ニ於テ一角 C ヲ鈍角ナリトスレバ

$$\tan A,\ \tan B<1$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］ $\hat{C}$ ハ鈍角ナルガ故ニ $\hat{A}+\hat{B}$ ハ 90° ヨリモ小ナリ.

故ニ

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B>0$$

從ツテ

$$\cos A\cos B>\sin A\sin B \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ此場合ハ

$$\cos A>0 \qquad \cos B>0$$

ナルガ故ニ (1) ノ兩邊ヲ正ノ數 cos A. cos B ニテ除スレバ

$$1>\tan A.\ \tan B.$$

問　　題 13.

三角形 ABC ニ於テ次ノ等式ヲ證明セヨ. (1–15)

1. $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$

2. $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C$

3. $(a+b+c)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=2c\cot\frac{C}{2}$

4. $\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{\sin 2A}=\frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{\sin 2B}=\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{\sin 2C}$

5. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0,$

6. $\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$

7. $$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}{\cot A+\cot B+\cot C}$$

8. $a\cos A\cos 2B+b\cos B\cos 2A+c\cos C=0$

9. $$\frac{a\cos B-b\cos A}{\sin(A-B)}=\frac{c}{\sin C}$$

10. $$\frac{(\cos B+\cos C)(1+2\cos A)}{1+\cos A-2\cos^2 A}=\frac{b+c}{2}$$

11. $a^2(\cos^2 B-\cos^2 C)+b^2(\cos^2 C-\cos^2 A)+c^2(\cos^2 A-\cos^2 B)=0$

○ **12.** $$\frac{\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{B}{2}}{b-c}=\frac{\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{C}{2}}{c-a}=\frac{\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{A}{2}}{a-b}$$

13. $$2(a+b+c)=\frac{a\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}+\frac{b\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{C+A}{2}}+\frac{c\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

○ **14.** $$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$$

15. $$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{a+b+c}{b+c-a}\cot\frac{A}{2}$$

○ **16.** 三角形 ABC ニ於テ

$$\cos B=\frac{\sin A}{2\sin C}$$

ナル時ハ二等邊ナリトイフ. 之ヲ證セヨ.

17. 三角形 ABC ニ於テ

$$a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$$

ナル時ハ A=B ナルコトヲ證セヨ.

○ **18.** 三角形 ABC ニ於テ

$$\cos A=\sin B-\cos C$$

ナル時ハ直角三角形ナルコトヲ證セヨ.

19. 三角形ノ三ツノ邊ノ長サハ夫々 m, n 及ビ $\sqrt{m^2+mn+n^2}$ ナル時ハ其最大角ハ 120° ナルコトヲ證セヨ.

○ **20.** 三角形 ABC ニ於テ角 A ガ 60° ニシテ且ツ三角形ノ面積ハ一邊 l ナル正三角形ノ面積ニ等シキ時ハ

$$AB^2-BC^2+CA^2=l^2$$

ナルコトヲ證セヨ.

21. 二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ニ於テ

$$A'=180°-A,\quad B'=90°-B,\quad C'=90°-C$$

ナル時ハ

$$a'^2(c^2-b^2)=a^2(b'^2-c'^2)$$

ナルコトヲ證セヨ.

○ **22.** 二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ニ於テ

$$B=B'\qquad A+A'=180°$$

ナル時ハ

$$aa'=bb'+cc'$$

ナルコトヲ證セヨ.

○ **23.** 三角形ノ各邊ヲ a, b, c トシ其對角ヲ夫々 2θ, 3θ, 4θ トスル時ハ

$$\tan^2\theta=\left(\frac{2b}{a+c}\right)^2-1$$

ナルコトヲ證セヨ.

○ **24.** 三角形 ABC ニ於テ邊ノ平方 a^2, b^2, c^2 ガ等差級數ヲナス時ハ cot A, cot B, cot C モ亦等差級數ヲナスコトヲ證セヨ.

○ **25.** 三角形 ABC ノ邊 a, b, c ガ等差級數ヲナス時ハ

$$\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

○ **26.** 三角形 ABC ニ於テ a^2, b^2, c^2 ガ等差級數ヲナス時ハ $a\sec A$, $b\sec B$, $c\sec C$ ガ調和級數ヲナスコトヲ證セヨ.

○ **27.** 三角形 ABC ニ於テ一角 C ガ 60° ナル時ハ

$$\frac{3}{a+b+c}=\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}$$

ナルコトヲ證セヨ.

28. 三角形ノ各邊ノ長サハ

$$4xy, \quad 3x^2+y^2, \quad 3x^2+2xy-y^2$$

ニ比例スル時ハ三ツノ角ガ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ.

29. 三角形 ABC ニ於テ

$$\cot A+\cot C=2\cot B$$

ナラバ

$$a^2+c^2=2b^2$$

ナルコトヲ證セヨ.

30. 點 O ヲ三角形 ABC ノ内部ニトリ

$$A\hat{O}B=B\hat{O}C=C\hat{O}A=120^\circ$$

ナラシムル時ハ

$$a^2(y-z)+b^2(z-x)+c^2(x-y)=0$$

ナルコトヲ證セヨ.

但シ x, y, z ハ夫々 OA, OB, OC ノ長サナリトス.

31. 三角形ノ邊ハ等差級數ヲナシ且ツ最大角ハ最小角ヨリモ 90° 大ナル時ハ各邊ノ長サハ $\sqrt{7}+1$, $\sqrt{7}$ 及ビ $\sqrt{7}-1$ ニ比例スルコトヲ證セヨ.

32. 三角形 ABC ニ於テ底邊 BC 上ニ一點 D ヲトリ. BD : DC $=m:n$ ナラシム. 今 $B\hat{A}D=\alpha$, $D\hat{A}C=\beta$, $C\hat{D}A=\theta$ トシ且ツ AD $=x$ ト置ケバ

$$(m+n)\cot\theta=m\cot\alpha-n\cot\beta$$
$$=n\cot B-m\cot C$$

及ビ

$$(m+n)^2x^2=(m+n)(mb^2+nc^2)-mna^2$$

ナルコトヲ證セヨ.

第十四章

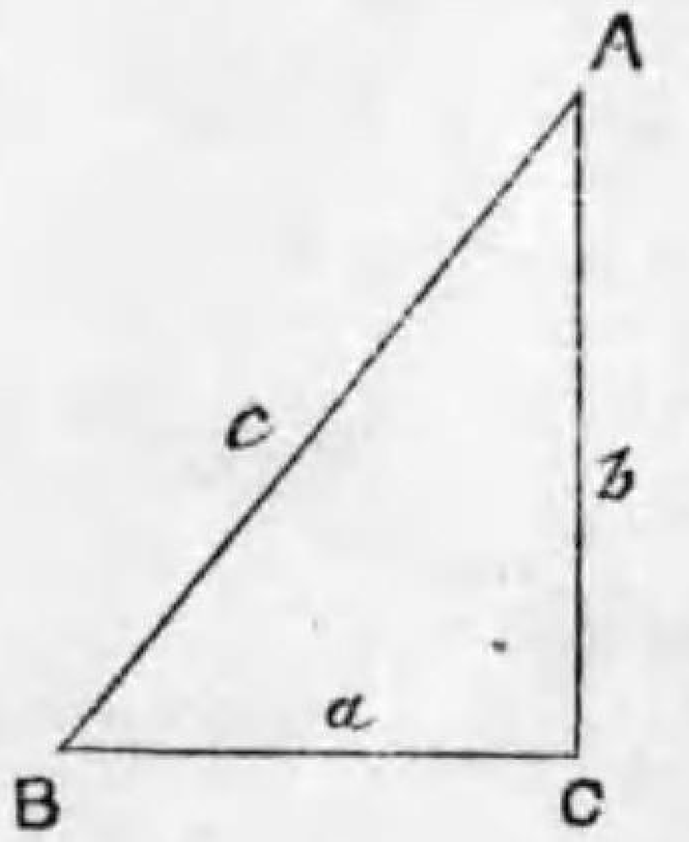
三角形ノ解法

64. **三角形ノ解法**トイフハ, 其三ツノ邊ト三ツノ角ノ中何レカ三ツヲ知リテ他ヲ求ムル方法ヲイフ. 但シ三ツノ角ガ與ヘラルル場合ヲノミ除外ス. 何トナレバコレニヨリテ三ツノ邊ノ長サノ比ハ定マリ從ツテ其形ガ知ラルト雖モ, 長サソノモノヲ決定スルコト能ハザルガ故ナリ.

本章ノ諸公式ハ凡テ對數式ヲ以テスベシ. 而シテ logsin A ナドトセルハ 10 ヲ底トスル sin A ノ對數ニシテ, Logsin A ナドトセハ logsin A ニ 10 ヲ加ヘタルモノ卽チ表對數ナリ.

65. 斜邊及ビ一ツノ鋭角ヲ知リテ直角三角形ヲ解ク方法

圖ニ於テ C ヲ直角トシ, 斜邊 c 及ビ鋭角 A ガ與ヘラレタルモノトスレバ,



$$B=90^\circ-A \quad\dots\dots\dots(1)$$

$$a=c\sin A \quad\dots\dots\dots(2)$$

$$b=c\sin B \quad\dots\dots\dots(3)$$

ナルガ故ニ (2) ヨリ

$$\log a=\log c+\log\sin A=\log c+\mathrm{Log}\sin A-10 \quad\dots\dots(4)$$

又 (3) ヨリ

$$\log b=\log c+\log\sin B=\log c+\mathrm{Log}\sin B-10 \quad\dots\dots(5)$$

(4), (5) ヨリ a, b ヲ求ムルコトヲ得. ヨツテ a, b 及ビ角 B ガ知ルラルルナリ.

例 1. $c=24.15$ $A=46°30'$ ナル直角三角形ヲ解ケ.

［解］ 先ヅ　$B=90°-46°30'=43°30'$

次ニ公式ニヨリ

$$\log a=\log 24.15+\mathrm{Log}\sin 46°30'-10$$
$$=1.3829+9.8606-10$$
$$=1,2435$$

故ニ　$a=17.52$

又　$$\log b=\log 24.15+\mathrm{Log}\sin 43°30'-10$$
$$=1.3829+9.8378-10$$
$$=1.2207$$

故ニ　$b=16,62$

ヨツテ　$B=43°30'$　$a=17,52$　$b=16.62$

ナリ.

66. 斜邊及ビ他ノ一邊ヲ知リテ直角三角形ヲ解クコト

圖ニ於テ a, c ヲ知ルモノトスレバ

$$\sin A=\frac{a}{c}$$

ナルガ故ニ

$$\log\sin A=\log a-\log c$$

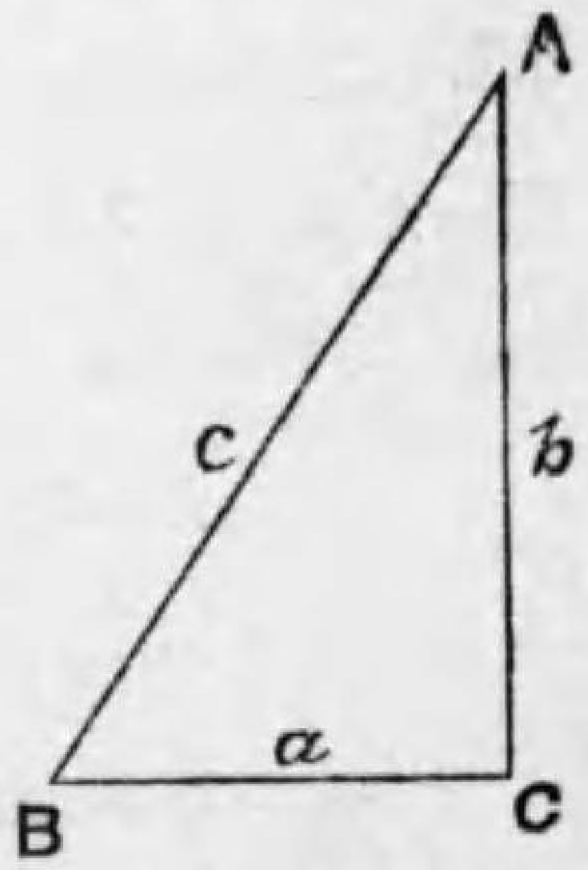
故ニ

$$\mathrm{Log}\sin A=\log a-\log c+10$$

コレヨリ角 A ヲ知ルベク, 從ツテ

$$B=90°-A$$

次ニ　$$\frac{b}{a}=\tan B$$



第三十九圖

ナルガ故ニ

$$\log b=\log a+\mathrm{Log}\tan B-10$$

コレヨリ b ヲ求ムルコトヲ得.

［注意］ $a^2+b^2=c^2$ ヨリ $b^2=(c+a)(c-a)$

故ニ

$$\log b=\frac{1}{2}\{\log(c+a)+\log(c-a)\}$$

ヨリモ b ヲ求ムルコトヲ得.

例 2. $a=123.4$ $c=200$ ヲ知リテ直角三角形ヲ解ケ.

［解］ 公式ニヨリ

$$\mathrm{Log}\sin A=\log 123.4-\log 200+10$$
$$=2.0913-2.3010+10$$
$$=9.7903$$

故ニ　$A=38°6'$

從ツテ　$B=51°54'$

又　$$\log b=\log 123.4+\log\tan 51°54'-10$$
$$=2.0913+10.1056-10$$
$$=2.1969$$

故ニ　$b=157.4$

ヨツテ　$A=38°6'$ $B=51°54'$ $b=157.4$

67. 二邊ヲ知リテ直角三角形ヲ解クコト

圖ニ於テ a, b ヲ知リタリトスレバ

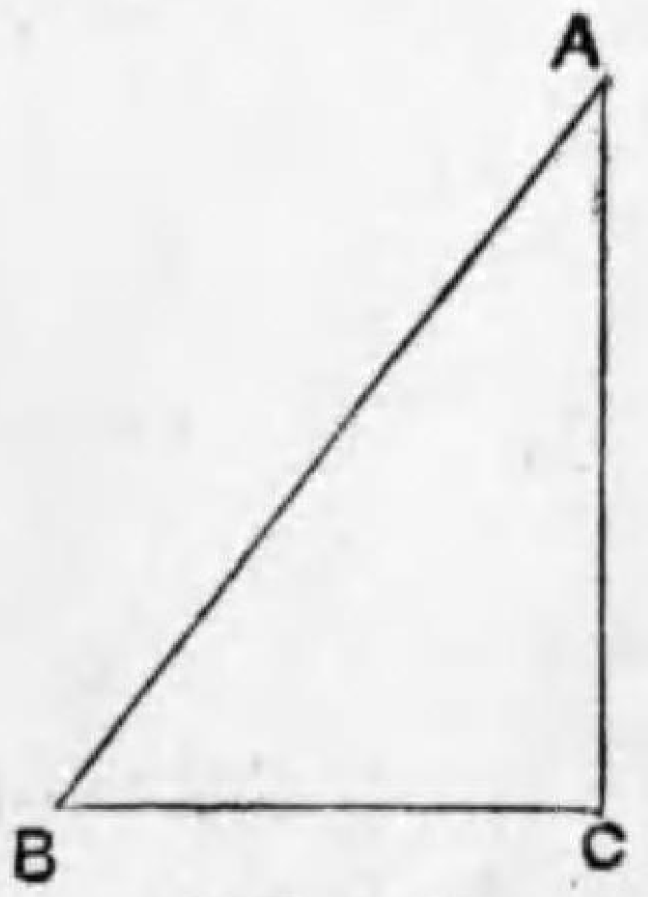
$$\tan A=\frac{a}{b}$$

ヨリ

$$\log\tan A=\log a-\log b$$

故ニ

$$\mathrm{Log}\tan A=\log a-\log b+10$$



第四十圖

コレヨリ A ヲ知ルベシ，從ッテ

$$B=90^\circ-A$$

又　$$c=\frac{a}{\sin A}$$

ヨリ

$$\log c=\log a-\log\sin A=\log a-\mathrm{Log}\sin A+10$$

ヨリ c ヲ決定スルコトヲ得.

例 3. $a=500,\ b=866$ ヲ知リテ直角三角形ヲ解ケ.

［解］　$\mathrm{Log}\tan A=\log 500-\log 866+10$

$=2.6990-2.9375+10$

$=9.7615$

故ニ　$A=30^\circ$　從ッテ　$B=60^\circ$

次ニ　$\log c=\log 500-\mathrm{Log}\sin 30^\circ+10$

$=2.6990-9.6990+10$

$=3.0000$

故ニ　$c=1000.$

即チ　$A=30^\circ,\ \ B=60^\circ,\ \ C=1000.$

68. 一邊及ビ一銳角ヲ知リテ直角三角形ヲ解クコト

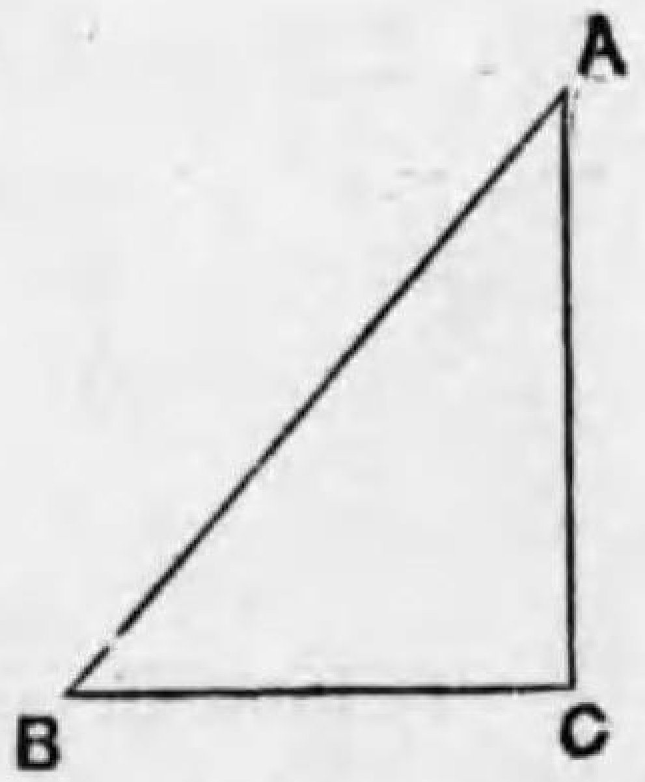
圖ニ於テ a 及ビ A ヲ知リタルモノトスレバ

$$B=90^\circ-A$$

又　$$c=\frac{a}{\sin A}$$

ヨリ

$$\log c=\log a-\log\sin A$$
$$=\log a-\mathrm{Log}\sin A+10$$



第四十一圖

コレヨリ c ヲ得ベシ.

又　$$b=\frac{a}{\tan A}$$

ヨリ

$$\log b=\log a-\log\tan A=\log a-\mathrm{Log}\tan A+10$$

ヨリ b ヲ求メ得ベシ.

例 4. $a=200,\ A=33^\circ12'$ ナル直角三角形ヲ解ケ

［解］ 先ヅ　$B=90^\circ-33^\circ12'=56^\circ48'$

又　$\log c=\log 200-\mathrm{Log\ siu}\ 33^\circ12'+10$

$=2.3010-9.7384+10$

$=2.5626$

故ニ　$c=365.3$

又　$\log b=\log 200-\mathrm{Log}\tan 33^\circ12'+10$

$=2.3010-9.8158+10$

$=2.4852$

故ニ　$b=305.6$

ヨッテ　$B=56^\circ48'$　$b=305.6$　$c=365.3$　ヲ得タリ.

69. 直角三角形ヲ研究シタル吾人ハ更ニ進ンデ一般三角形ノ場合ニ就イテ論議セントス.

コノ場合ヲ細別スレバ

1°. 三邊ヲ知ル場合

2°. 二角及ビ一邊ヲ知ル場合

3°. 二邊及ビ夾角ヲ知ル場合

4°. 二邊及ビ其一ニ對スル角ヲ知ル場合

コレナリ. 今順ヲ追ヒテ說明スベシ.

70. 三邊ヲ知リテ三角形ヲ解クコト

三ツノ邊ノ長サヲ a, b, c トシ，$a+b+c=2s$ トスレバ

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

ナルヲ以テ

$$\operatorname{Log}\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{\log(s-b)+\log(s-c)-\log s-\log(s-a)\}+10$$

$$\operatorname{Log}\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\{\log(s-c)+\log(s-a)-\log s-\log(s-b)\}+10$$

$$\operatorname{Log}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\{\log(s-a)+\log(s-b)-\log s-\log(s-c)\}+10$$

ヨリ A, B 及ビ C ヲ求メラルベシ．或ハ A, B ヲ求メタル後 180° ヨリ夫等ノ和ヲ減ズレバ C ヲ得ベシ．

［注意］ A, B, C ハ尙公式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\qquad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

等ヲ用フルコトニヨリテ得ラルベシト雖モ，之等ニヨルトキハ

$$s,\quad (s-a),\quad (s-b),\quad (s-c)$$

ノ對數ノ外ニ尙 a, b, c ノ對數ヲ要ス．ヨツテ上ノ場合ニハ常ニ正切ノ公式ヲ用フルナリ．

例 5. $a=409.4$　$b=388.2$　$c=297.0$ ヲ知リテ此三角形ノ三ツノ角ヲ求メヨ．

［解］

$$\begin{aligned} a&=409.4\\ b&=388.2\\ c&=297.0\\ \hline 2s&=1094.6 \end{aligned}$$

$$s=547.3$$

故ニ　$s-a=137.9,\quad s-b=159.1\quad s-c=250.3$

而シテ公式ニヨリ

$$\operatorname{Log}\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{\log 159.1+\log 250.3-\log 547.3$$
$$-\log 137.9\}+10=9.8612$$

故ニ　$\frac{A}{2}=36°$　　從ツテ　$A=72°$

同樣ニ

$$\operatorname{Log}\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\{\log 250.3+\log 137.9-\log 547.3-\log 159.1\}+10$$
$$=9.7991$$

故ニ　$\frac{B}{2}=32°12'$　　從ツテ　$B=64°24'$

ヨツテ　$C=180°-72°-64°24'=43°36'$

卽チ　$A=72°$　　$B=64°24'$

$$C=43°36'$$

ナリ．

注意 上ニハ C ノ値ヲ 280°−A−B ニテ求メタリ。モシ之ヲ前頁最後ノ公式ニヨリテ求ムル時ハ，結果ニ於テ少シノ差ヲ生ズル事アリ。コレ精密ナラザル表ヲ用フルヨリ起ルモノニシテ止ムヲ得ザルモノトス。

70. 二角及ビ一邊ヲ知リテ三角形ヲ解クコト

一邊 a 及ビ其兩端ニ於ケル角 B, C ガ知ラレタリトスレバ，正弦法則

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

ヨリ

$$b=a\frac{\sin B}{\sin A}\qquad c=a\frac{\sin C}{\sin A}$$

卽チ

$$\log b=\log a+\operatorname{Log}\sin B-\operatorname{Log}\sin A$$

及ビ

$$\log c=\log a+\operatorname{Log}\sin C-\operatorname{Log}\sin A$$

ヨリ b, c ヲ求ムルコトヲ得ベク，又角 A ハ

$$A=180^\circ-(B+C)$$

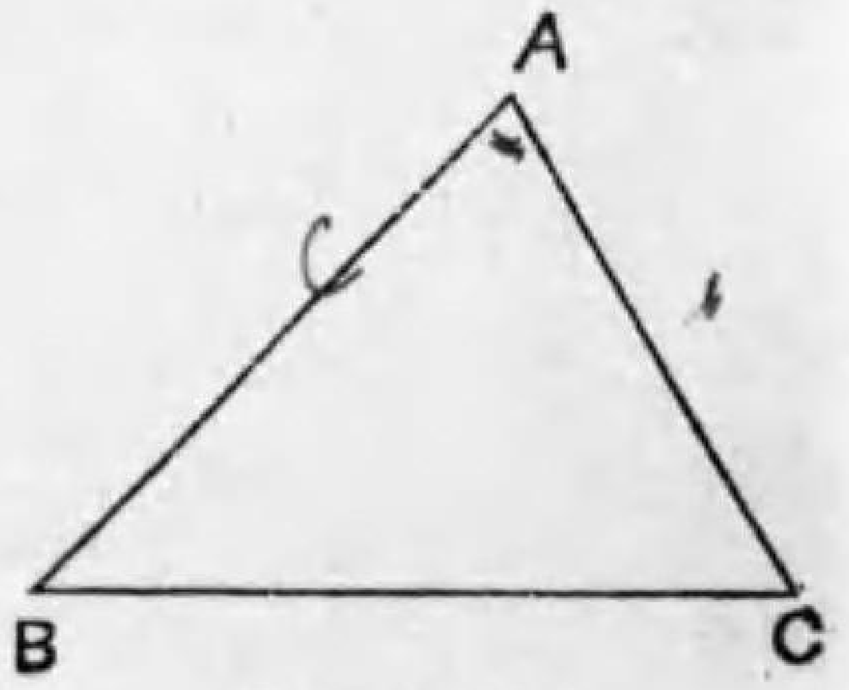
ヨリ得ラルベシ.

例 6. $a=4474$ $B=75^\circ31'$ $C=43^\circ18'$ ヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

［解］ 先ヅ
$$A=180^\circ-B-C=61^\circ11'$$
ヲ得. 次ニ
$$\begin{aligned}\log b&=\log 4474+\operatorname{Log}\sin 75^\circ31'-\operatorname{Log}\sin 61^\circ11'\\&=3.6507+9.9859-9.9425\\&=3.6041\end{aligned}$$
故ニ
$$b=4943.$$
同様ニ
$$\begin{aligned}\log c&=\log 4474+\operatorname{Log}\sin 43^\circ18'-\operatorname{Log}\sin 61^\circ11'\\&=3.6507+9.8362-9.9425\\&=3.5444\end{aligned}$$
故ニ
$$c=3503$$
即チ
$$A=61^\circ11' \qquad b=4943 \qquad c=3503$$
ヲ得.

72. 二邊及ビ夾角ヲ知リテ三角形ヲ解クコト

二ツノ邊 b, c ト其夾角 A トヲ知ルモノトスレバ正弦法則ニヨリテ



第四十二圖

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}$$
$$=\frac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan\dfrac{B+C}{2}}$$
$$=\frac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\cot\dfrac{A}{2}}$$

故ニ
$$\log\tan\frac{B-C}{2}=\log(b-c)-\log(b+c)+\log\cot\frac{A}{2}$$
故ニ表對數ヲ以テスレバ
$$\operatorname{Log}\tan\frac{B-C}{2}=\log(b-c)-\log(b+c)+\operatorname{Log}\cot\frac{A}{2}$$

コノ公式ヨリ B−C ヲ得ベク, 又 B+C ハ 180°−A ナルガ故ニ知ラルベク, 從ツテ B, C ヲ求ムルコトヲ得ベシ.

又
$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$
ヨリ
$$\log a=\log c+\log\sin A-\log\sin C$$
$$=\log c+\operatorname{Log}\sin A-\operatorname{Log}\sin C$$
ナルヲ以テ a ガ知ラルベシ.

［注意］ 上ノ解法ハ b ト c トガ相等シカラザルモノトセリ, 然レドモ $b=c$ ナル時ハ B=C ナルヲ以テ
$$B=C=\frac{1}{2}(180^\circ-A)$$
從ツテ二ツノ角ト一邊トヲ知ル場合ニ歸スベシ, コレ已ニ前節ニ於テ述ベシ所ナリ.

例 7. $b=500$ $c=425$ $A=40^\circ$ ナルコトヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

［解］ 公式ニヨリ
$$\begin{aligned}\operatorname{Log}\tan\frac{B-C}{2}&=\log 75-\log 925+\operatorname{Log}\cot 20^\circ\\&=1.8751-2.9661+10.4389\\&=9.3479\end{aligned}$$
故ニ
$$\frac{B-C}{2}=12^\circ34'$$
從ツテ
$$B-C=25^\circ8' \qquad B+C=140^\circ$$

故＝　$B=82°34'$　　$C=57°26'$

又　$\log a=\log 425+\text{Log}\sin 40°-\text{Log siu }57°23'$

$$=2.6234+9.8081-9.9257$$

$$=2.5108$$

故＝　$a=324.2$

ヨツテ　$a=324.2$　　$B=82°34'$

$$C=57°26'$$

ヲ得.

73. 二邊及ビ其一ニ對スル角ヲ知リテ三角形ヲ解クコト

邊 a, c 及ビ角 A ガ與ヘラレタルモノトスレバ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

故＝　$\sin C=\frac{c}{a}\sin A$ ……………………………(1)

ヨツテ

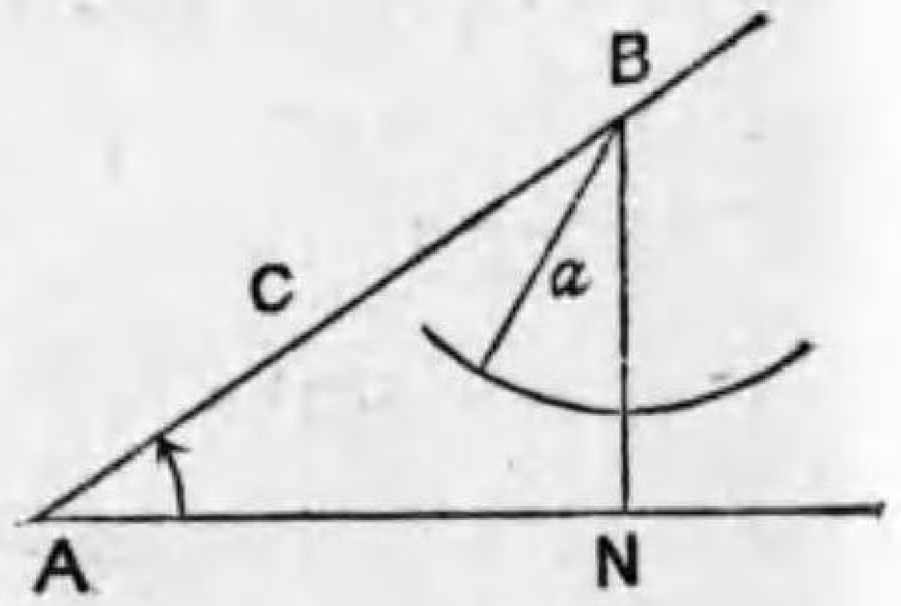
$$\log\sin C=\log c-\log a+\log\sin A$$

卽チ　$\text{Log}\sin C=\log c-\log a+\text{Log}\sin A$

ヨリ C ヲ求メ得ベク，從ツテ B 及ビ b ヲ求メ得ベシ．然レドモコノ場合吟味ヲ要スルコトアリ．以下分類的＝說明スベシ．

1°. $c\sin A>a$ ナル時.

コノ場合ハ (1) ヨリ $\sin C>1$. 故＝ (1) ヲ滿足スル角 C ガ存在セズ. 實＝モ a ガ垂線 BN ($BN=c\sin A$) ヨリモ小ナレバナリ.



第四十三圖

2°. $c\sin A=a$ ナル時,

コノ場合ハ $\sin C=1$ ナルガ故＝ A ガ若シ銳角ナラバ

$$C=90°$$

ヲ採用スルコトヲ得ベシ，卽チ直角三角形ナリ．從ツテ B ハ

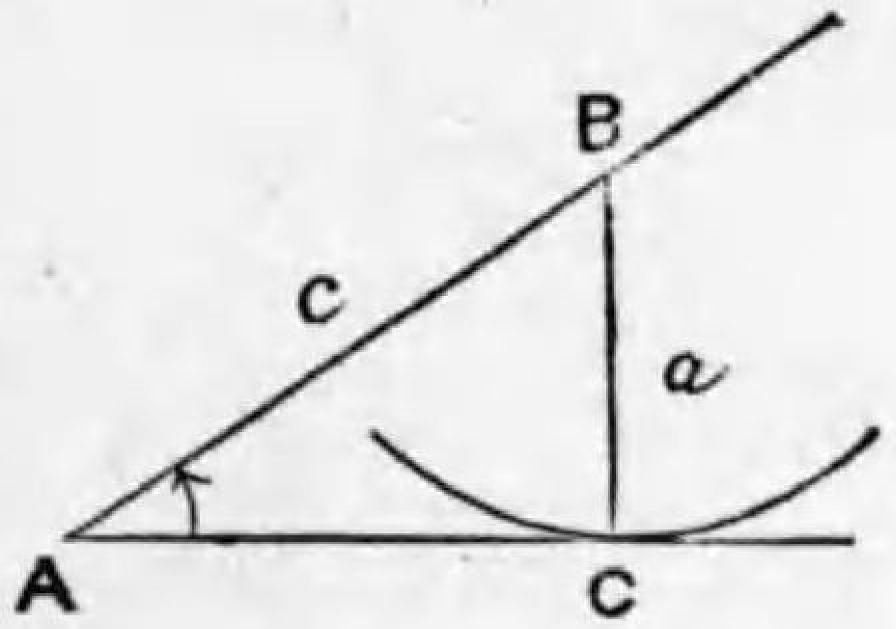
$$B=180°-(A+90)$$

ヨリ得ラルベク，b ハ

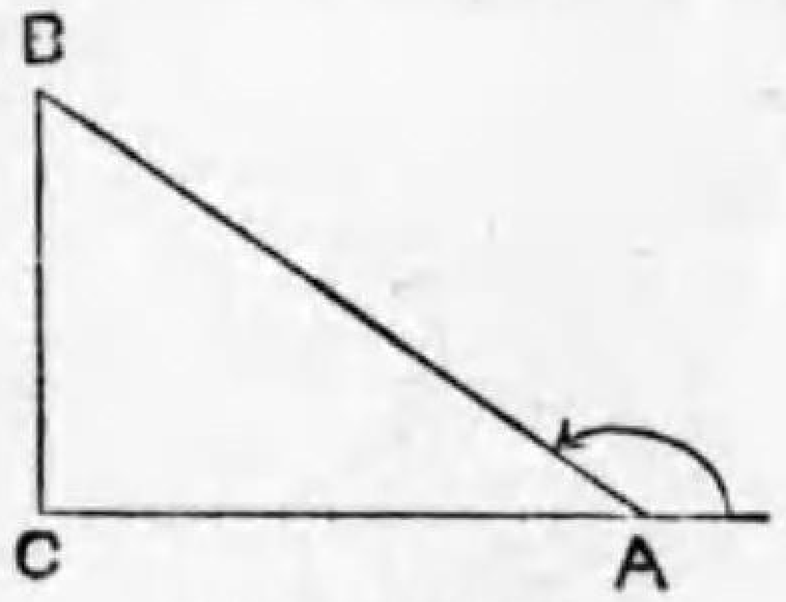
$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$$

故＝　$\log b=\log a+\text{Log}\sin B-\text{Log}\sin A$

ナル公式＝ヨリテ得ベシ．然レドモ A ガ若シ銳角ナラザル時ハ所要ノ三角形ヲ得ズ．何トナレバカヽル時ハ，其內角ノ和ガ二直角ヨリモ大ナレバナリ．(第四十五圖)



(第四十四圖)

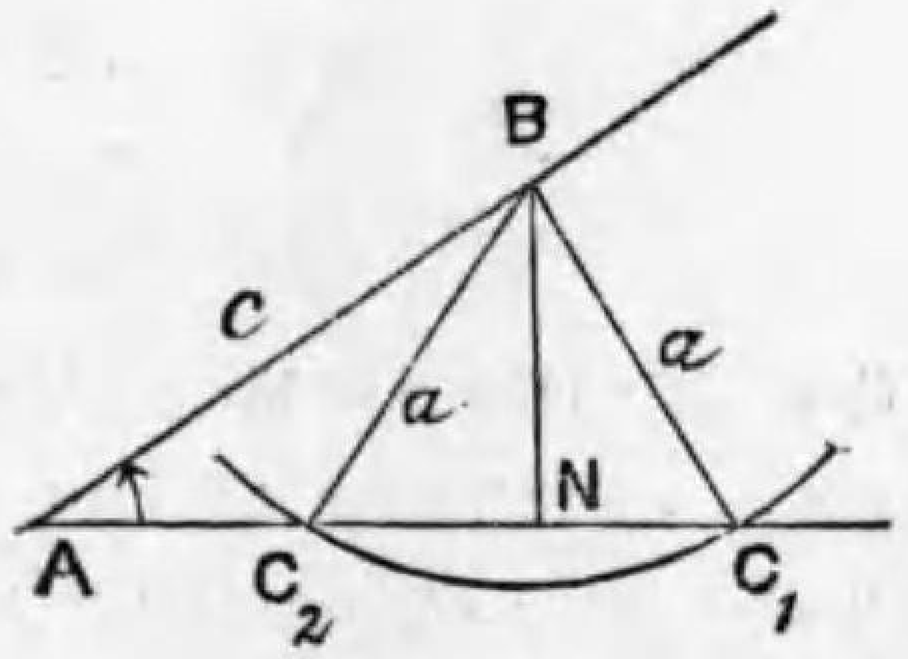


(第四十五圖)

3°. $c\sin A<a$ ナル時.

コノ場合＝ハ　$\sin C<1$

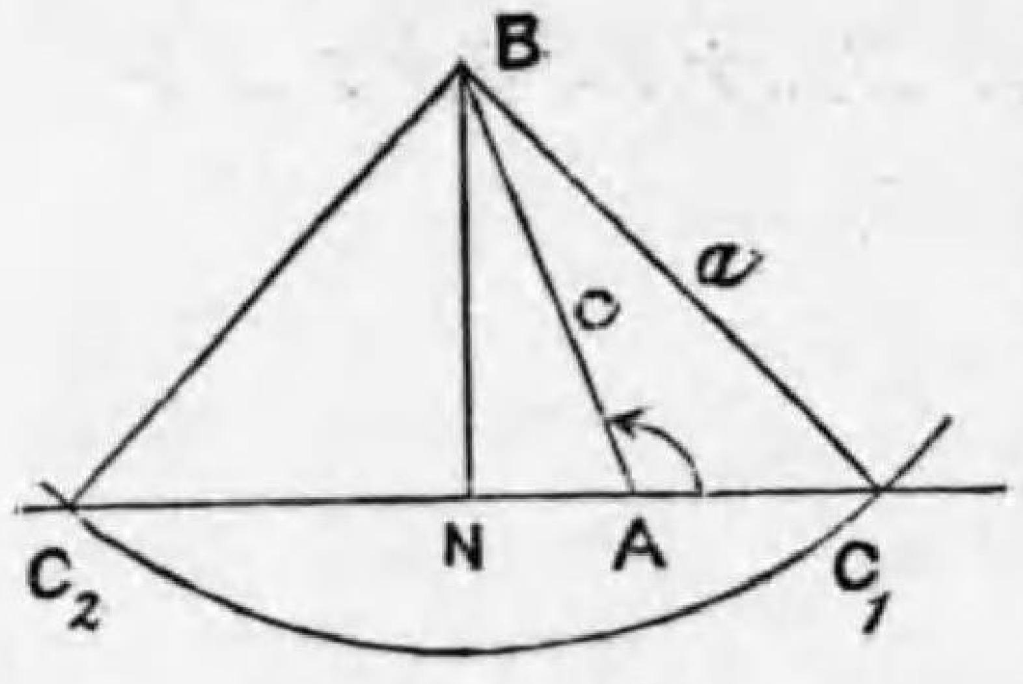
ナルガ故＝ C ノ値ハ二ツアリ．一ツハ銳角＝シテ他ノ一ツハ鈍角＝シテ且ツ互＝補角ナリ．從ツテ一般＝ハ二ツノ三角形ヲ得．卽チ右圖＝於ケル三角形 ABC_1 ABC_2 コレナリ.



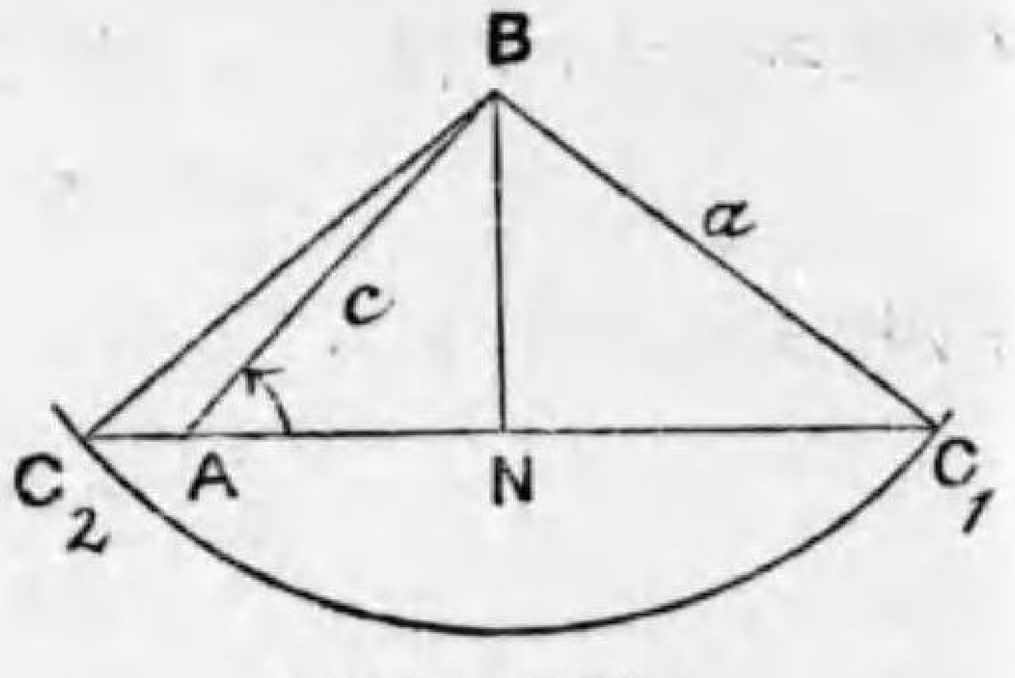
(第四十六圖)

然レドモ A ガ若シ銳角ナラザル時ハ，C 角トシテ鈍角ノ方ヲ採

用スベカラズ．從ツテ一ツノ三角形 ABC_1 ヲ得ルノミ．(第四十七圖)



(第四十七圖)

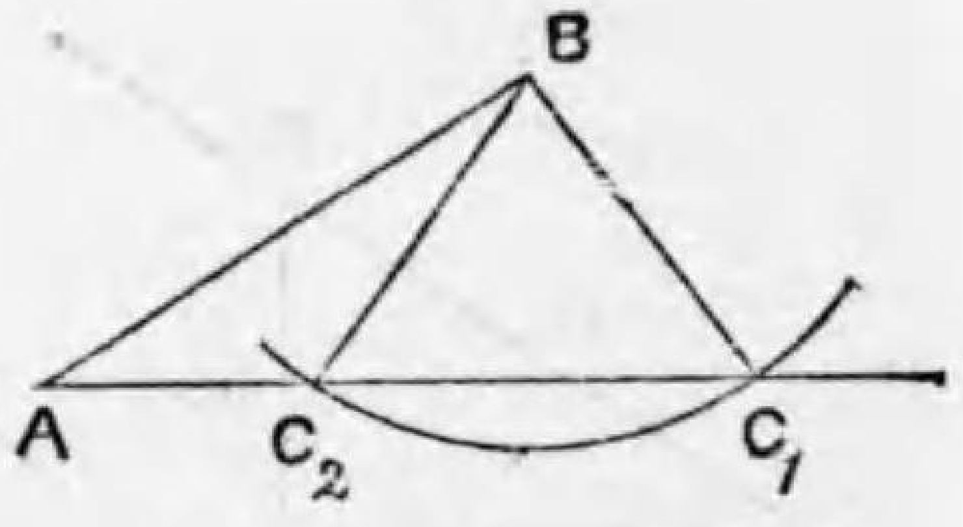


(第四十八圖)

又 A ガ若シ鋭角ナル時ニテモ $a \geqq c$ ナル時ハ C 角トシテ鈍角ノ方ヲ採用スベカラズ．從ツテコノ場合ニモ一ツノ三角形 ABC_1 ヲ得ルノミ．(第四十八圖)

カクシテ二ツノ三角形ヲ得ルハ實ニ

$$\left.\begin{array}{l} c\sin A<a \\ A=\text{鋭角} \\ a<c \end{array}\right\}$$



(第四十九圖)

ナル時ニ限レヲ知ル．此場合ヲ特ニ**兩意ノ場合**トイフ．

例 8. $a=450$, $c=510$, $A=60^\circ$ ヲ知リテ三角形ヲ解ケ．

［解］ 先ヅ C ヲ求メンニハ公式ニヨリ

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}\sin C &= \operatorname{Log} 510-\log 450+\operatorname{Log}\sin 60^\circ \\ &= 2.7076-2.6532+9.9375 \\ &= 9.9919 \end{aligned}$$

故ニ　$C=79^\circ$　或ハ　$C=101^\circ$

然ルニ A ガ鋭角ニシテ且ツ $c>a$ 而カモ $c\sin A<a$ ナルコト計算ニヨリテ知ラルヽガ故ニ之等ノ二ツノ値ハ採用スルヲ得ベシ．

1°. $C=79^\circ$ ノ時，

コノ時ハ　$B=180^\circ-60^\circ-79^\circ=41^\circ$

ニシテ　$b=a\dfrac{\sin B}{\sin A}$

ヨリ

$$\begin{aligned} \log b &= \log 450+\operatorname{Log}\sin 41^\circ-\operatorname{Log}\sin 60^\circ \\ &= 2.6532+9.8169-9.9375 \\ &= 2.5326 \end{aligned}$$

故ニ　$b=340{\cdot}9$

2°. $C=101^\circ$ ノ時

$$B=180^\circ-60^\circ-101^\circ=19^\circ$$

又

$$\begin{aligned} \log b &= \log 450+\operatorname{Log}\sin 19^\circ-\operatorname{Log}\sin 60^\circ \\ &= 2.6532+9.5126-9.9375 \\ &= 2.2283 \end{aligned}$$

故ニ　$b=1\,9.2$

74.　前條ニテ考究セル結果ハ又二次方程式ノ定理ニヨツテ吟味スルコトヲ得ベシ．

卽チ三角形 ABC ニ於テ

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

ナルガ故ニ a, c 及ビ A ヲ知ルトキ b ハ

$$b^2-2bc\cos A+(c^2-a^2)=0$$

ノ二根ナリトイフヲ得ベシ．

卽チ

$$b_1=c\cos A+\sqrt{c^2\cos^2 A-c^2+a^2}$$

$$b_2=c\cos A-\sqrt{c^2\cos^2 A-c^2+a^2}$$

簡單ニスレバ

$$b_1=c\cos A+\sqrt{a^2-c^2\sin^2 A}$$

$$b_2=c\cos A-\sqrt{a^2-c^2\sin^2 A}$$

ヨツテ次ノ結果ヲ得．

1°. $c\sin A>a$ ナル時．

コノ場合 b_1 及ビ b_2 ノ値ハ共ニ虚數ナリ．ヨツテ三角形ヲ得ズ

2°. $c\sin A=a$ ナル時

コノ場合ハ $b_1=b_2=c\cos A$ ナルヲ以テ實數ナリ．故ニ一般ニ一ツノ三角形ヲ得．然レドモ $A=90°$ ナル時ハ b_1, b_2 ノ値ハハ共ニ零トナリ，$A>90°$ ナル時ハ b_1, b_2 ノ値ハ共ニ負ナリ．故ニ共ニ三角形ヲ得ズ．

3°. $c\sin A<a$ ナル時．

コノ場合ハ b_1 ト b_2 トノ値ハ相等シカラズ．故ニ二ツノ解アリ．然レドモ A ガ鈍角ナルトキ及ビ直角ナル時ハ，b_2 ガ正數ナラズ．故ニ解一ツナリ．

若シ A ガ鋭角ナル時ト雖モ $a>c$ ナル時ハ b_1 ハ正ナルモ b_2 ハ負トナル．何トナラバ二ツノ根ノ積ヲ考フレバ

$$b_1b_2=c^2-a^2<0$$

ナルガ故ニ一ツノ根ハ負ナレバナリ．

故ニ二ツノ解アルトイフハ

$$\left.\begin{array}{l} c\sin A<a \\ A=\text{鋭角} \\ c>a \end{array}\right\}$$

ナル時ニ限ルコト前節ニ於テ述ベシガ如シ．

75. 本章ヲ終ヘルニ臨ミ尚一二ノ問題ヲ考究スベシ．

1°. 底邊ト一底角及ビ底ニ至ル高サヲ與ヘテ三角形ヲ解クコト

a ヲ底トシ其一端ノ角ヲ B トシ高サヲ h トスレバ

$$h=c\sin B$$

ヨリ c ヲ知ルコトヲ得ベシ．然ラバ問題ハ二ツノ邊 a, c 及ビ其夾角 B トヲ知リテ三角形ヲ解ク場合ニ歸ス．

2°. 周ト二ツノ角トヲ知リテ三角形ヲ解クコト．

先ヅ二ツノ角ヲ知ルガ故ニ第三ノ角ガ知ラルベシ．

次ニ正弦法則ニ加比ノ理ヲ應用スレバ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2s}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

故ニ $$a=\frac{2s\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{4s\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{s\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

同様ニ $$b=\frac{s\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}\qquad c=\frac{s\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

ヨリ a, b, c ヲ得ベシ．

3°. 三ツノ高サヲ知リテ三角形ヲ解クコト

p, q, r ヲ夫々頂點 A, B, C ヨリ對邊ヘ至ル高サトスレバ

$$ap=bq=cr=2S\text{……………………………}(1)$$

茲ニ S ハ三角形ノ面積ナリトス．

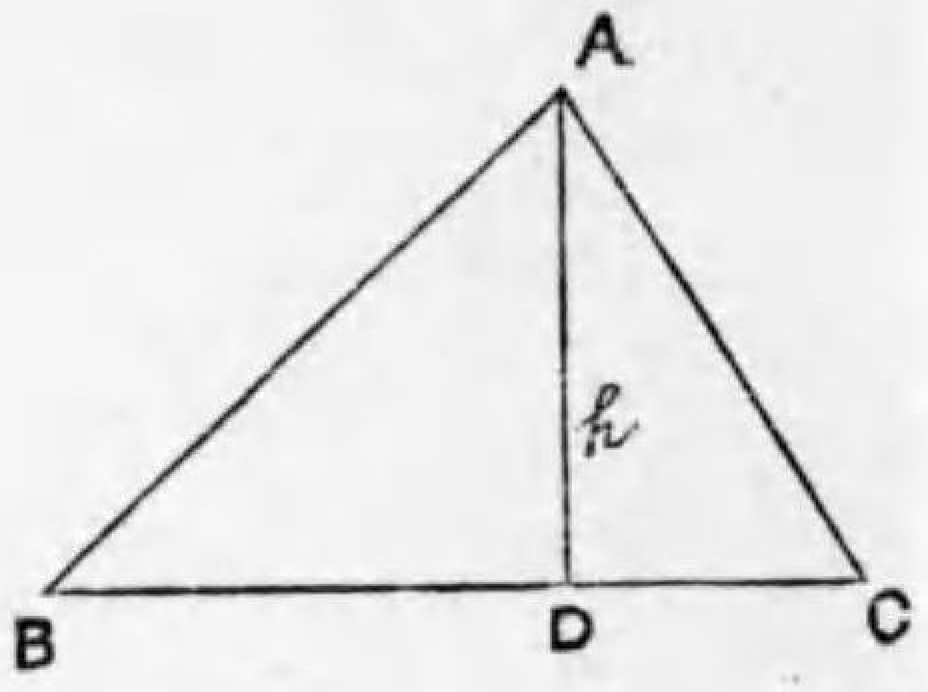
(1) ヨリ $$a:b:c=\frac{1}{p}:\frac{1}{q}:\frac{1}{r}$$

ナルガ故ニ三邊ヲ $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$ 及ビ $\frac{1}{r}$ トスル三角形ハ求ムル三角形ト相似ナルガ故ニ三ツノ角ヲ知ルコトヲ得．然ル時ハ

$$c=\frac{p}{\sin B}$$

ヨリ c ヲ得ベク，然ル時ハ一邊ト其夾角トヲ知リテ三角形ヲ解ク場合ニ歸ス.

例 9. 底，高サ及ビ底角ノ差ヲ知リテ三角形ヲ解ケ.



［解］ 底邊ヲ a トシ高サヲ AD トシ其長サヲ h トスル時ハ

$$\cot B=\frac{BD}{h}$$

$$\cot C=\frac{DC}{h}$$

ナルガ故ニ

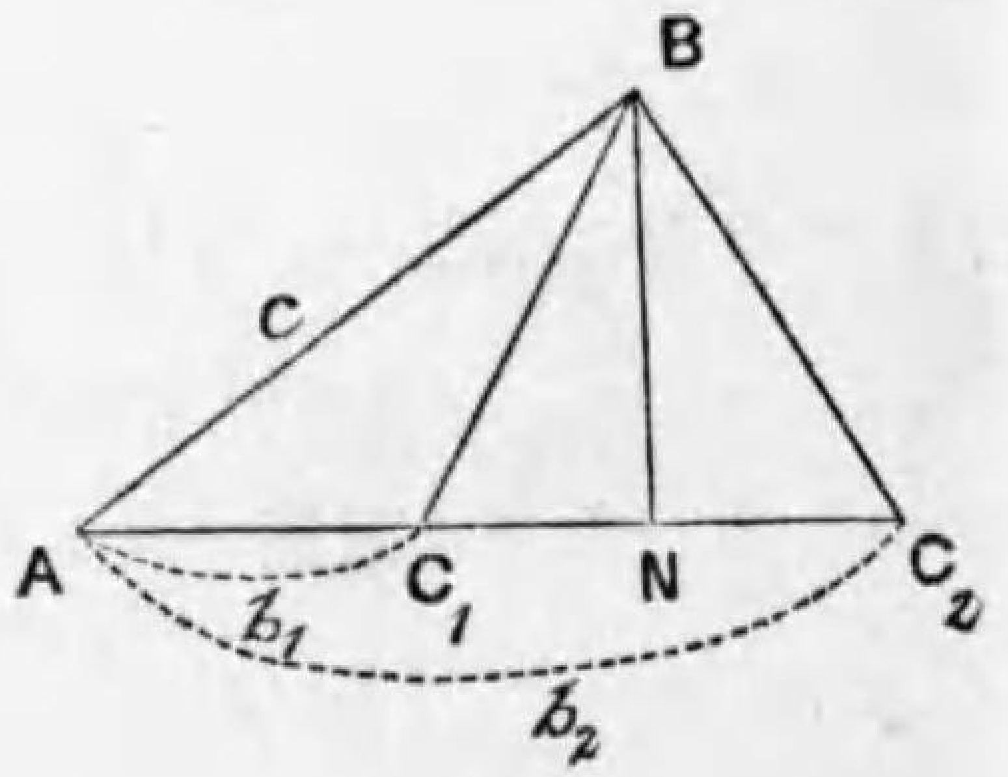
$$\cot B+\cot C=\frac{a}{h}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 B−C ヲ知ルガ故ニ

$$\cot(B-C)=\frac{\cot B\cot C+1}{\cot C-\cot B}=k\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ト置クヲ得ベシ. 然ル時ハ (1), (2) ヨリ cot A, cot B ヲ得ベク從ツテ A, B ヲ知ル，然ル時ハ二ツノ邊 b, c ヲ求ルコト容易ナリ.

例 10. 兩意ノ場合ニ於ケル面積ノ和ヲ求ムル公式ヲ作レ.



［解］ 面積ノ和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{b_1c}{2}\sin A+\frac{b_2c}{2}\sin A$$

$$=\frac{c(b_1+b_2)}{2}\sin A\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今 BN ヲ底邊ヘノ垂線トスレバ

$$b_1=AN-C_1N$$

$$b_2=AN+C_2N=AN+C_1N$$

故ニ

$$\frac{b_1+b_2}{2}=AN=c\cos A\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ヲ (1) ニ代入スレバ

$$S=c^2\sin A\cos A$$

問題 14.

次ノ條件ニ適スル三角形ヲトケ. (1—5)

1. $a=25,\ b=24,\ A=45°$

2. $a=19,\ b=18,\ c=15$

3. $a=12,\ B=80°,\ C=60°$

4. $a=100,\ c=100\sqrt{2},\ A=45°$

5. $b=215,\ c=105,\ A=74°27'$

6. B−C, $b-c$, 及ビ A ヨリ BC ヘノ垂線ノ長サヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

7. 兩意ノ場合ニ於テ一ツノ三角形ノ面積ハ他ノ一ツノ三角形ノ面積ノ n 倍ナル時 c ヲ已知ノ邊ノ最大ナルモノ，a ヲ已知ノ邊ノ内最小ナルモノトスレバ $\frac{c}{a}$ ハ $\frac{n+1}{n-1}$ ヨリモ小ナルコトヲ證セヨ.

8. 三角形ノ一ツノ角ガ 60° ニシテ其夾邊ノ比ハ 5:3 ナル時他ノ二角ノ正切ハ夫々 $\frac{3\sqrt{3}}{7}$, $5\sqrt{3}$ ナルコトヲ證セヨ.

9. 三角形ノ三ツノ角ハ等差級數ヲナシ，最大邊ト最小邊トノ比ガ 5:4 ナル時ハ A, B, C ノ大サハ凡ソ

$$70°53',\quad 60°,\quad 49°7'$$

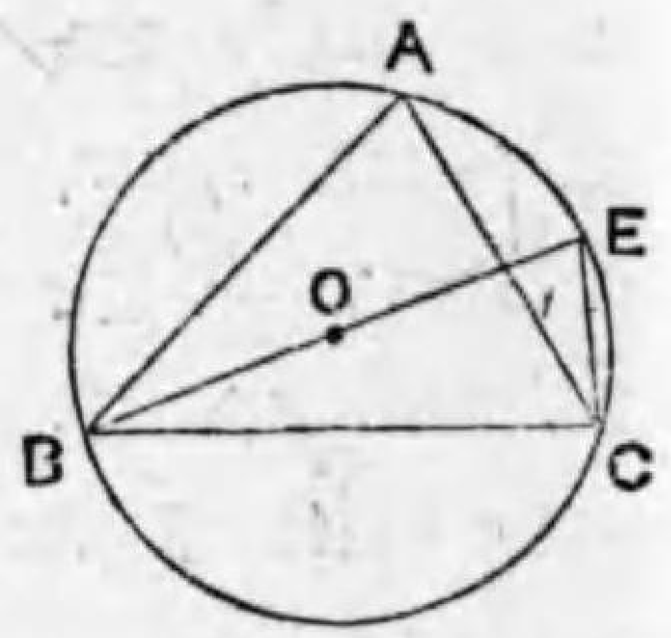
ナルコトヲ示セ.

10. 三角形ノ二ツノ底角ガ夫々 22°30′, 112°30′ ナル時ハ底邊ハ高サノ二倍ニ等シキコトヲ證セヨ.

第十五章

三角形ノ性質

87. 外接圓ノ半徑



三角形 ABC ノ外接圓ノ中心ヲ O トシ, BO ヲ作リ圓周ト E ニテ交ラシメ, CE ヲ作ラバ, $\hat{A}$ ガ鋭角ナラバ $B\hat{E}C$ ニ等シク, $\hat{A}$ ガ鈍角ナラバ $B\hat{E}C$ トハ互ニ補角ナリ. 何レニシテモ $\sin A=\sin BEC$ ナリ.

然ルニ三角形 BEC ハ直角三角形ナルガ故ニ

$$\sin A=\sin BEC=\frac{BC}{BE}$$

故ニ外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ,

$$BE=2R=\frac{BC}{\sin A}=\frac{a}{\sin A}$$

同様ニシテ

$$2R=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

又三角形ノ面積 S ハ $\frac{1}{2}bc\sin A$ 等ナルコトニ注意スレバ

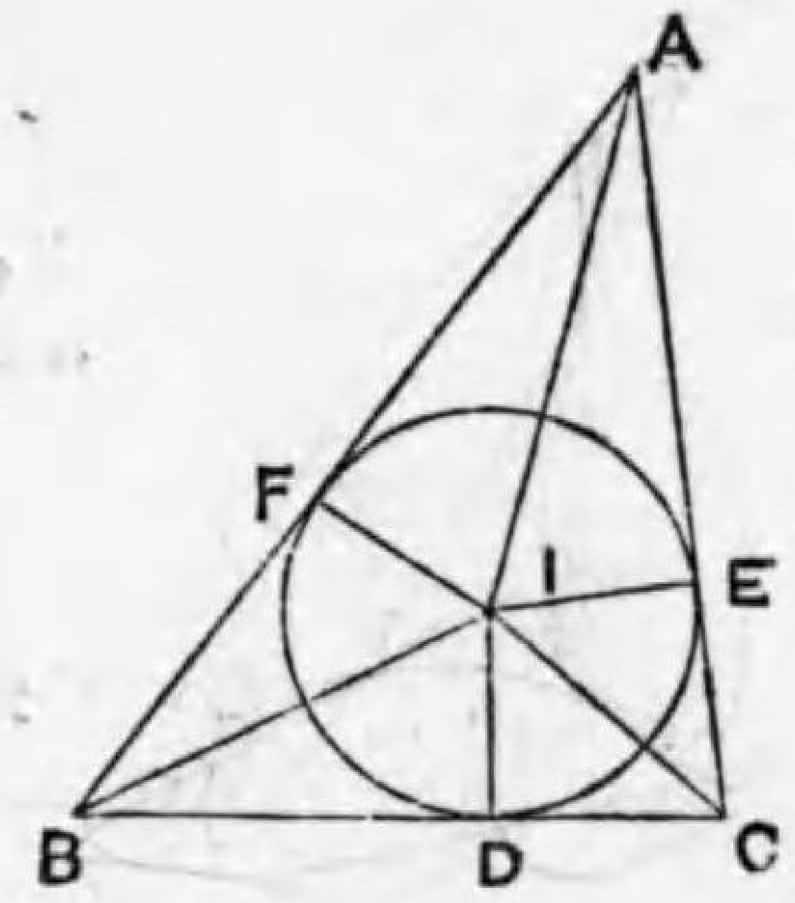
$$2R=\frac{abc}{2S}$$

$4R=\frac{abc}{2}$

ヨッテ次ノ公式アリ.

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{abc}{2S}\text{ .... }1)$$

88. 內接圓ノ半徑



I ヲ三角形 ABC ノ內切圓ノ中心トシ, r ヲ其半徑トスレバ

$$\triangle ABC=\triangle BIC+\triangle CIA+\triangle AIB$$

ナルガ故ニ

$$S=\frac{1}{2}(ar+br+cr)$$

$$=\frac{1}{2}r(a+b+c)=sr$$

ヨッテ $$r=\frac{S}{s}\text{ .... }2)$$

r ノ値ハ他ノ形ニ於テモ表ハスコトヲ得. 卽チ內心 I ヨリ BC ニ垂線 ID ヲ下セバ

$$BD+DC=BC=a$$

ニシテ且ツ

$$BD=r\cot\frac{B}{2},\qquad DC=r\cot\frac{C}{2}$$

ナルガ故ニ

$$r\left[\cot\frac{B}{2}+\text{cat}\,\frac{C}{2}\right]=a$$

從ッテ

$$r=\frac{a}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}$$

$$=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin A}$$

然ルニ
$$2R=\frac{a}{\sin A}$$

ナルガ故ニ

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\dots\dots(3)$$

又
$$AE=s-a,\quad BD=s-b,\quad CD=s-c$$

ナルガ故ニ

$$r=(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}\dots\dots(4)$$

例 1. 三角形 ABC ニ於テ

$$\frac{s}{r}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

〔解〕
$$\frac{s}{r}=\frac{s^2}{rs}=\frac{s^2}{S}=\frac{s^2}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{s^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$$

$$=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

サテ

$$\cot\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}-1}$$

而シテ

$$\cot\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cot 90^\circ=0$$

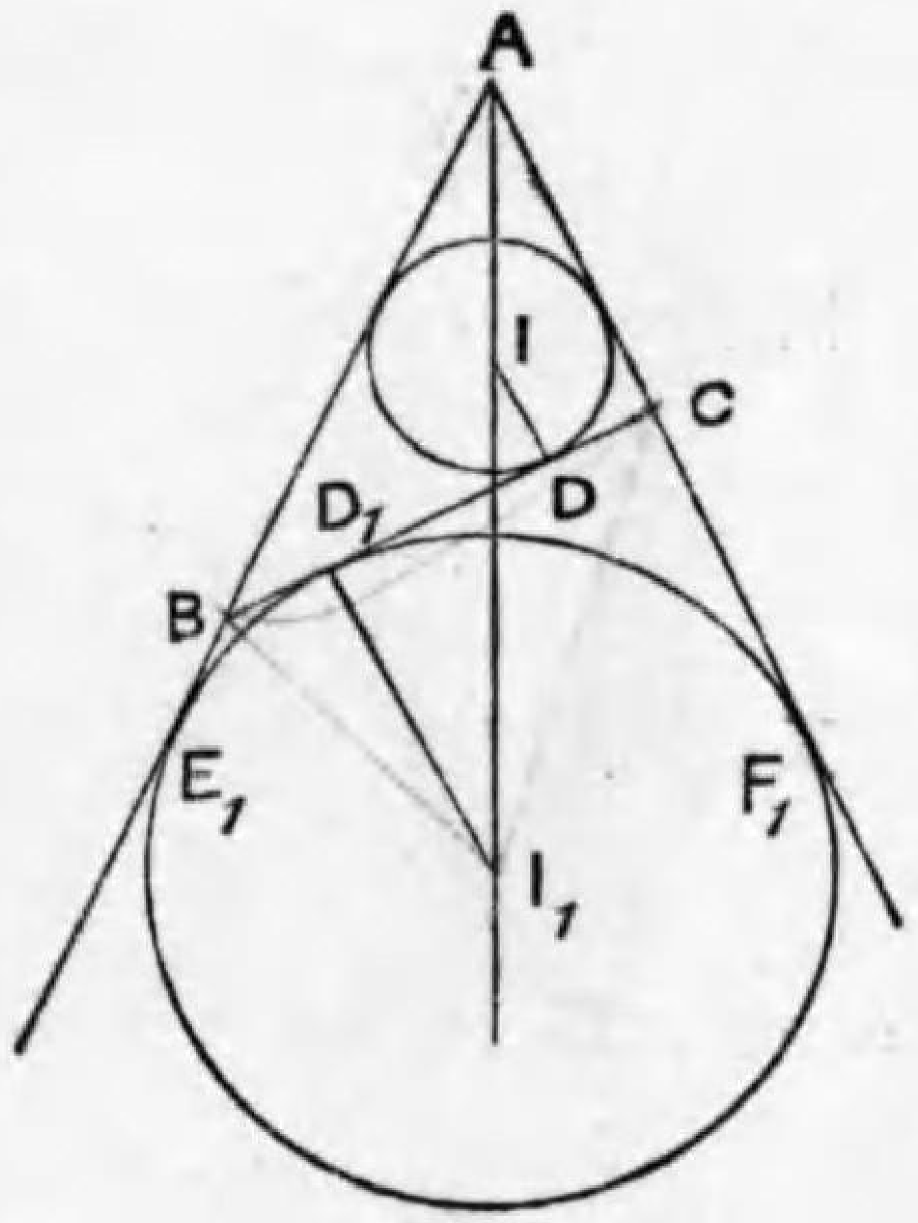
ナルガ故ニ

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{C}{2}=0$$

ヨツテ

$$\frac{s}{r}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$$

89. 傍切圓ノ半徑



邊 BC ニ切スル傍切圓ノ中心ヲ I_1, 其半徑ヲ r_1 トシ, 邊 CA, AB ニ切スル傍切圓ノ中心ヲ夫々 I_2, I_3 トシ其半徑ヲ r_2, r_3 トス. 然ル時ハ

$$\triangle ABC=\triangle BI_1A+\triangle CI_1A-\triangle BI_1C$$

$$=\frac{1}{2}cr_1+\frac{1}{2}br_1-\frac{1}{2}ar_1$$

$$=\frac{r_1}{2}(c+b-a)$$

$$=r_1(s-a)$$

故ニ
$$r_1=\frac{S}{s-a}$$

同様ニ
$$\left.\begin{aligned}r_2&=\frac{S}{s-b}\\ r_3&=\frac{S}{s-c}\end{aligned}\right\}\dots\dots(5)$$

又 $$\mathrm{BC}=\mathrm{BD_1}+\mathrm{D_1C}=\mathrm{D_1I_1}\cot\mathrm{I_1BD_1}+\mathrm{D_1I_1}\cos\mathrm{I_1CD_1}$$

$$=r_1\left[\tan\frac{\mathrm{B}}{2}+\tan\frac{\mathrm{C}}{2}\right]=\frac{r_1\cos\frac{\mathrm{A}}{2}}{\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}$$

従ツテ $$r_1=\frac{a\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}{\cos\frac{\mathrm{A}}{2}}=\frac{2a\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}{\sin\mathrm{A}}$$

然ルニ $$2\mathrm{R}=\frac{a}{\sin\mathrm{A}}$$

ナルガ故ニ

$$\left.\begin{aligned}r_1&=4\mathrm{R}\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}\\ r_2&=4\mathrm{R}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}\\ r_3&=4\mathrm{R}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\end{aligned}\right\}\text{同様ニ}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

又傍切圓ガ邊 AB, AC ト切スル點ヲ夫々 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$ トスレバ

$$\mathrm{AE_1}=s\qquad\mathrm{BD_1}=s-c\qquad\mathrm{CD_1}=s-b$$

ニシテ, $\mathrm{BI_1}$, $\mathrm{CI_1}$ ガ角 B, C ノ外角ノ二等分線ナルガ故ニ

$$\left.\begin{aligned}r_1&=s\tan\frac{\mathrm{A}}{2}=(s-c)\cot\frac{\mathrm{B}}{2}=(s-b)\cot\frac{\mathrm{C}}{2}\\ r_2&=s\tan\frac{\mathrm{B}}{2}=(s-c)\cot\frac{\mathrm{A}}{2}=(s-a)\cot\frac{\mathrm{C}}{2}\\ r_3&=s\tan\frac{\mathrm{C}}{2}=(s-a)\cot\frac{\mathrm{B}}{2}=(s-b)\cot\frac{\mathrm{A}}{2}\end{aligned}\right\}\text{同様ニ}\quad\cdots\cdots(7)$$

例 2. r_1, r_2, r_3 ヲ三角形ノ三ツノ傍切圓ノ半徑トシ, r ヲ内切圓ノ半徑トスル時ハ

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］ 公式 (5) ニヨリテ

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{s-a}{\mathrm{S}}+\frac{s-b}{\mathrm{S}}+\frac{s-c}{\mathrm{S}}$$

$$=\frac{3s-(a+b+c)}{\mathrm{S}}$$

$$=\frac{s}{\mathrm{S}}$$

然ルニ公式 (2) ニヨリ

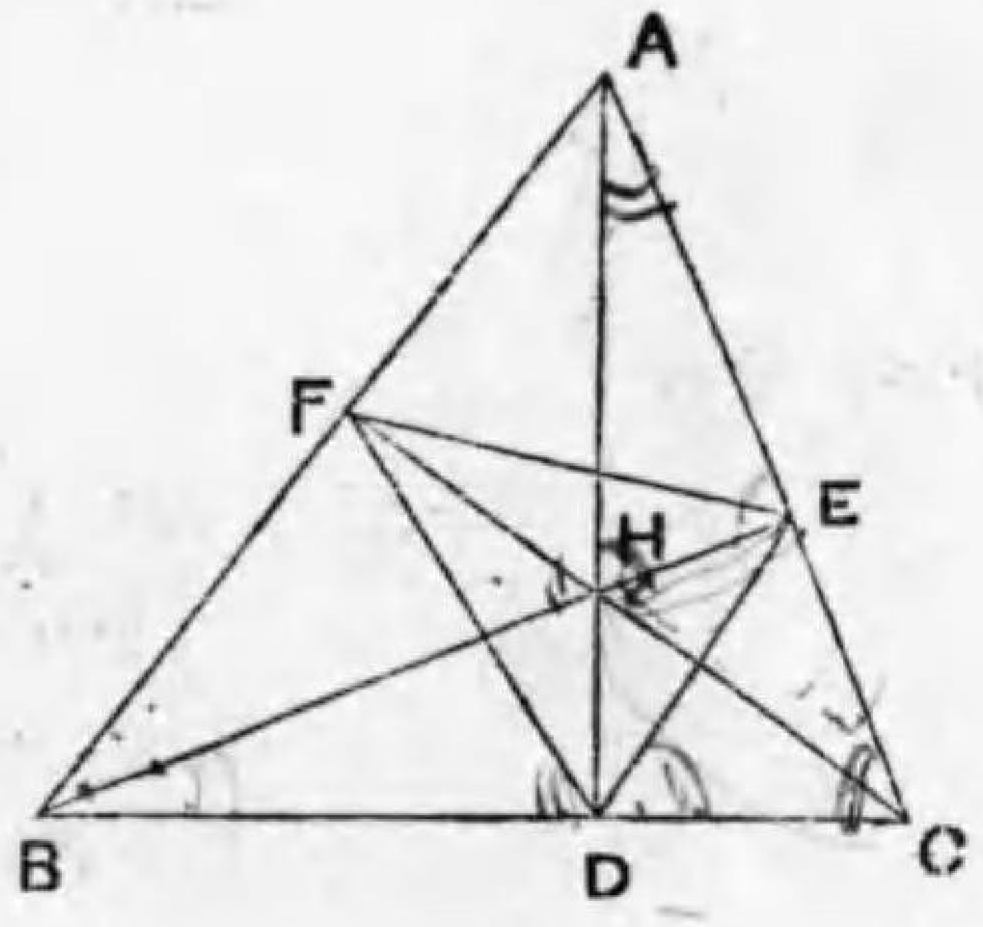
$$\frac{s}{\mathrm{S}}=\frac{1}{r}$$

ナルガ故ニ

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$$

ナリ.

90. 垂足三角形



三角形 ABC ノ垂足三角形ヲ DEF トスル時ハ

$$\mathrm{HD}=\mathrm{BD}\tan\mathrm{HBD}$$

$$=\mathrm{BD}\tan(90^\circ-\mathrm{C})$$

$$=\mathrm{AB}\cos\mathrm{B}\cot\mathrm{C}$$

$$=\frac{c}{\sin\mathrm{C}}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{HD}&=2\mathrm{R}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}\\ \mathrm{HE}&=2\mathrm{R}\cos\mathrm{C}\cos\mathrm{A}\\ \mathrm{HF}&=2\mathrm{R}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\end{aligned}\right\}\text{同様ニ}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

又

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AE}\sec\mathrm{DAC}$$

$$=c\cos A\sec(90^\circ-c)$$

$$=c\cos A\operatorname{cosec}C$$

$$=\frac{c}{\sin C}\cos A$$

故ニ

$$\text{同様ニ}\quad\left.\begin{aligned}\mathbf{AH}&=\mathbf{2R\cos A}\\ \mathbf{BH}&=\mathbf{2R\cos B}\\ \mathbf{CH}&=\mathbf{2R\cos C}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

次ニ垂足三角形ノ邊ノ長サヲ求メンニ △AEF ヨリ

$$\frac{\sin AEF}{\sin A}=\frac{AF}{EF}$$

$$=\frac{b\cos A}{EF}$$

ナルガ故ニ

$$EF=\frac{b\sin A\cos A}{\sin AEF}=\frac{b\sin A\cos A}{\sin B}$$

$$=\frac{a\sin B\cos A}{\sin B}$$

故ニ

$$\text{同様ニ}\quad\left.\begin{aligned}\mathbf{EF}&=\boldsymbol{a}\mathbf{\cos A}\\ \mathbf{FD}&=\boldsymbol{b}\mathbf{\cos B}\\ \mathbf{DE}&=\boldsymbol{c}\mathbf{\cos C}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

例 3. 三角形ノ名頂點ヨリ對邊ニ至ル垂線ノ長サヲ h_1, h_2, h_3 トスレバ

$$\frac{1}{S}=\sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)\left(\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)}$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］ $a=\frac{2S}{h_1}$ $b=\frac{2S}{h_2}$ $c=\frac{2S}{h_3}$,

ニシテ且ツ

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

此式ノ a, b, c ニ前ノ値ヲ代入スレバ

$$S=S^2\sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)\left(\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)}$$

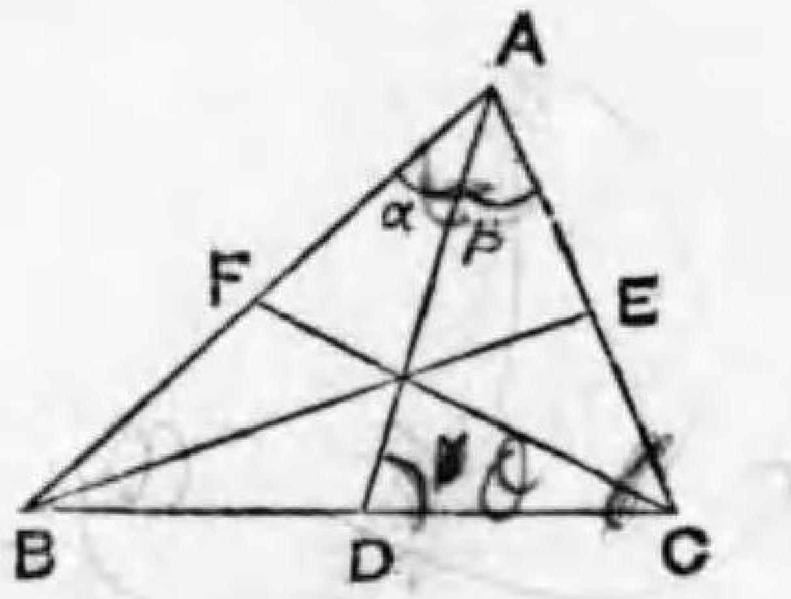
コレヨリ容易ニ求ムル結果ヲ得ベシ.

91. 三角形ノ中線

三角形 ABC ニ於テ三ツノ中線ヲ AD, BE, CF トスレバ

$$AD^2=AC^2+CD^2-2AC,\ CD\cos C$$

$$=b^2+\frac{a^2}{4}-ab\cos C$$



然ルニ

$$c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$$

ナルガ故ニ

$$4AD^2=2b^2+2c^2-a^2$$

ヨツテ

$$\text{同様ニ}\quad\left.\begin{aligned}\mathbf{AD}&=\frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{2b^2+2c^2-a^2}}\\ \mathbf{BE}&=\frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{2c^2+2a^2-b^2}}\\ \mathbf{CF}&=\frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{2a^2+2b^2-c^2}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

或ハ又公式(11) ニ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 等ヲ代入スレバ

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{AD}&=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos\mathrm{A}}\\ \mathrm{BE}&=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2+2ca\cos\mathrm{B}}\\ \mathrm{CF}&=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\mathrm{C}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

又 $\mathrm{B\hat{A}D}=\alpha,\qquad \mathrm{C\hat{A}D}=\beta$

トスレバ $\triangle\mathrm{ACD}$ ヨリ

$$\frac{\sin\beta}{\sin\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AD}}=\frac{a}{2\mathrm{AD}}$$

故ニ

$$\sin\beta=\frac{a\sin\mathrm{C}}{2\mathrm{AD}}=\frac{a\sin\mathrm{C}}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}$$

同様ニ

$$\sin\alpha=\frac{a\sin\mathrm{B}}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}$$

又 $\mathrm{A\hat{D}C}=\theta$ トスレバ

$$\frac{\sin\theta}{\sin\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\frac{b}{\mathrm{AD}}$$

故ニ

$$\sin\theta=\frac{b\sin\mathrm{C}}{\mathrm{AD}}$$

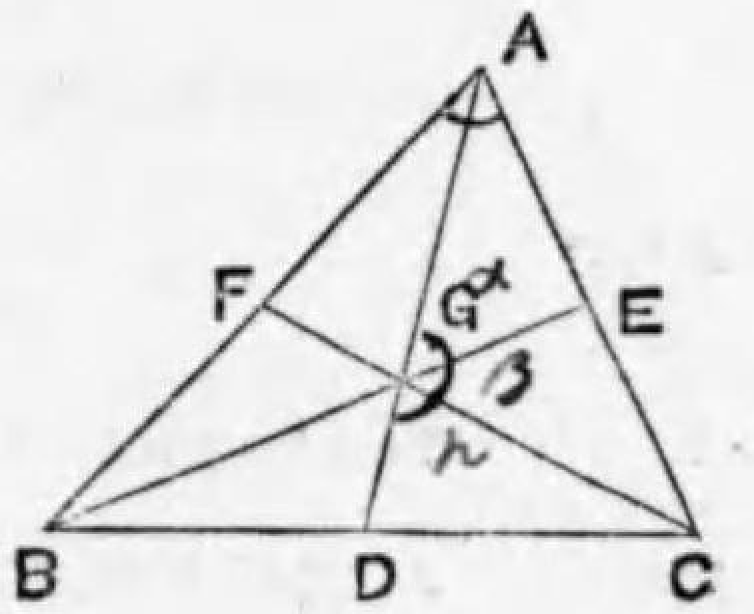
$$=\frac{2b\sin\mathrm{C}}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}$$

ナリ.

例 4. 三角形 ABC ノ三ツノ中線ノナス角ヲ α, β, γ トスレバ

$$\cot\mathrm{A}+\cot\mathrm{B}+\cot\mathrm{C}+\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=0$$

ナルコトヲ證セヨ.



〔解〕 三ツノ中線ヲ AD, BE, CF トシ, AD ト BE ノナス角 AGB ヲ α, BE ト CF ノナス角 BGC ヲ β, CF ト AD ノナス角 CGA ヲ γ トス.

次ニ C ヨリ AB ニ垂線 CC′ ヲ引ケバ

$$\cot\mathrm{A}+\cot\mathrm{B}=\frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{CC'}}+\frac{\mathrm{BC'}}{\mathrm{CC'}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CC'}}$$

然ルニ $\mathrm{AB.CC'}=2\mathrm{S}$ ナルガ故ニ

$$\cot\mathrm{A}+\cot\mathrm{B}=\frac{c^2}{2\mathrm{S}}$$

同様ニ

$$\cot\mathrm{B}+\cot\mathrm{C}=\frac{a^2}{2\mathrm{S}}$$

$$\cot\mathrm{C}+\cot\mathrm{A}=\frac{b^2}{2\mathrm{S}}$$

ヨツテ $$\cot\mathrm{A}+\cot\mathrm{B}+\cot\mathrm{C}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\mathrm{S}}$$

又 AD, BE, CF ノ長サヲ夫々 l, m, n トスレバ三角形 AGB ヨリ

$$\cos\alpha=\frac{\frac{4}{9}(l^2+m^2)-c^2}{\frac{8}{9}lm}$$

又三角形 AGB ノ面積ハ $\frac{\mathrm{S}}{3}$ ナレバ

$$\frac{\mathrm{S}}{3}=\frac{2}{9}lm\sin\alpha$$

ヨツテ $$\cot\alpha=\frac{\frac{4}{3}(l^2+m^2)-2c^2}{4\mathrm{S}}$$

同様ニ $$\cot\beta=\frac{\frac{4}{3}(m^2+n^2)-3a^2}{4\mathrm{S}}$$

$$\mathrm{cor}\,\gamma=\frac{\frac{4}{3}(n^2+l^2)-3b^2}{4\mathrm{S}}$$

ヨツテ

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\frac{\frac{8}{3}(l^2+m^2+n^2)-3(a^2+b^2+c^2)}{4S}$$

從ツテ

$$\Sigma\cot A+\Sigma\cot\alpha=\frac{\frac{8}{3}(l^2+m^2+n^2)-2(a^2+b^2+c^2)}{4S}$$

然ルニ三ツノ三角形 AGB, BGC, CGA ヨリ

$$\frac{4}{9}(l^2+m^2)=2(FG^2+AF^2)=\frac{2n^2}{9}+\frac{c^2}{2}$$

$$\frac{4}{9}(m^2+n^2)=2(DG^2+BD^2)=\frac{2l^2}{9}+\frac{a^2}{2}$$

$$\frac{4}{9}(n^2+l^2)=2(EG^2+CE^2)=\frac{2m^2}{9}+\frac{b^2}{2}$$

邊々相加ヘ四倍シタル後整頓スレバ

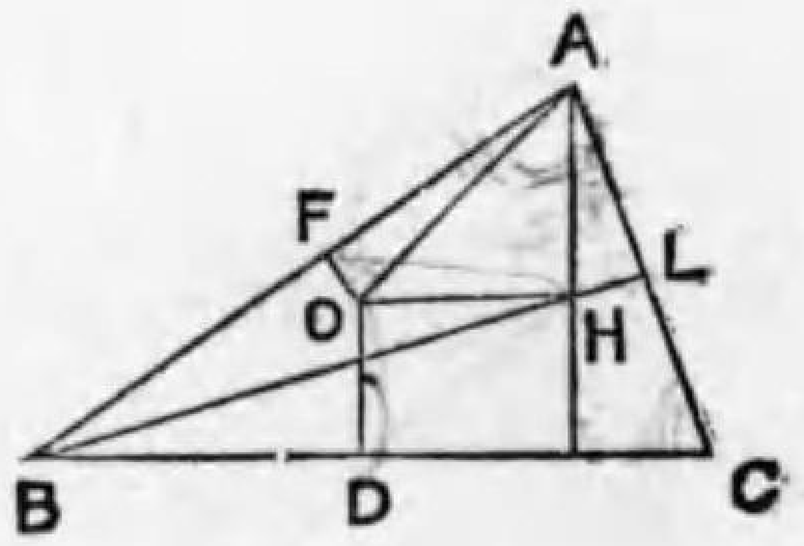
$$\frac{8}{3}(l^2+m^2+n^2)-2(a^2+b^2+c^2)=0,$$

ヨツテ

$$\Sigma\cot A+\Sigma\cot\alpha=0$$

ナリ.

92. 外心ト垂心トノ距離



O ヲ外心, H ヲ垂心, OD, OF ヲ夫々 BC, BA ニ下セル垂線トスレバ

$$O\hat{A}F=90°-C$$

$$H\hat{A}L=90°-C$$

故ニ

$$\begin{aligned}O\hat{A}H&=A-O\hat{A}F-H\hat{A}L\\&=A-2(90°-C)\\&=A+2C-(A+B+C)=C-B\end{aligned}$$

又 R ヲ外接圓ノ半徑トスレバ第九十節ニヨリ

$$HA=2R\cos A$$

故ニ

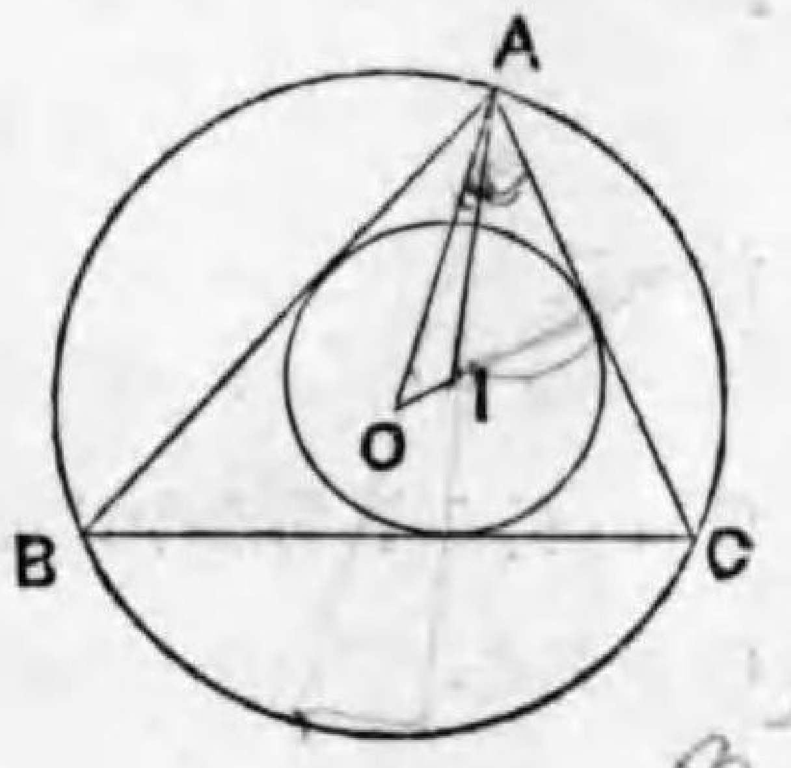
$$\begin{aligned}OH^2&=OA^2+HA^2-2OA.\,HA\cos OAH\\&=R^2+4R^2\cos^2A-4R^2\cos A\cos(C-B)\\&=R^2+4R^2\cos A[\cos A-\cos(C-B)]\\&=R^2-4R^2\cos A[\cos(B+C)+\cos(C-B)]\\&=R^2-8R^2\cos A\cos B\cos C\end{aligned}$$

故ニ

$$OH=R\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

注意 玆ニハ $\hat{C}$ ガ $\hat{B}$ ヨリモ大ナル場合ヲ論ゼリ. $\hat{C}$ ガ $\hat{B}$ ヨリモ小ナル時モ結果ニ於テハ同一ナリ.

93. 外心ト內心トノ距離



O ヲ外心, I ヲ內心トスレバ三角形 AOI ヨリ

$$OI^2=OA^2+IA^2-2OA.\,AI\cos OAI$$

然ルニ $O\hat{A}I$ ハ $\frac{C-B}{2}$ 或ハ $\frac{B-C}{2}$

又

$$AI=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$$

B−C

$\frac{B-C}{2}$

ニシテ且ツ第八十八節公式 (3) ニヨリ

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

故ニ

AI

$$AI=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

從ツテ

$$OI^2=OA^2+AI^2-2OA.\,AI\cos OAI$$

$$=R^2+16R^2\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}-8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C-B}{2}$$

$$=R^2+8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C-B}{2}\right)$$

$$=R^2-8R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\dots\dots\text{(B)}$$

$$=R^2\left(1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

故ニ

$$OI=R\sqrt{1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\dots\dots(14)$$

或ハ (B) ニ (A) ヲ代入スレバ

$$OI^2=R^2-2Rr$$

故ニ又

$$OI=\sqrt{R^2-2Rr}\dots\dots(15)$$

94. 外心ト傍心トノ距離

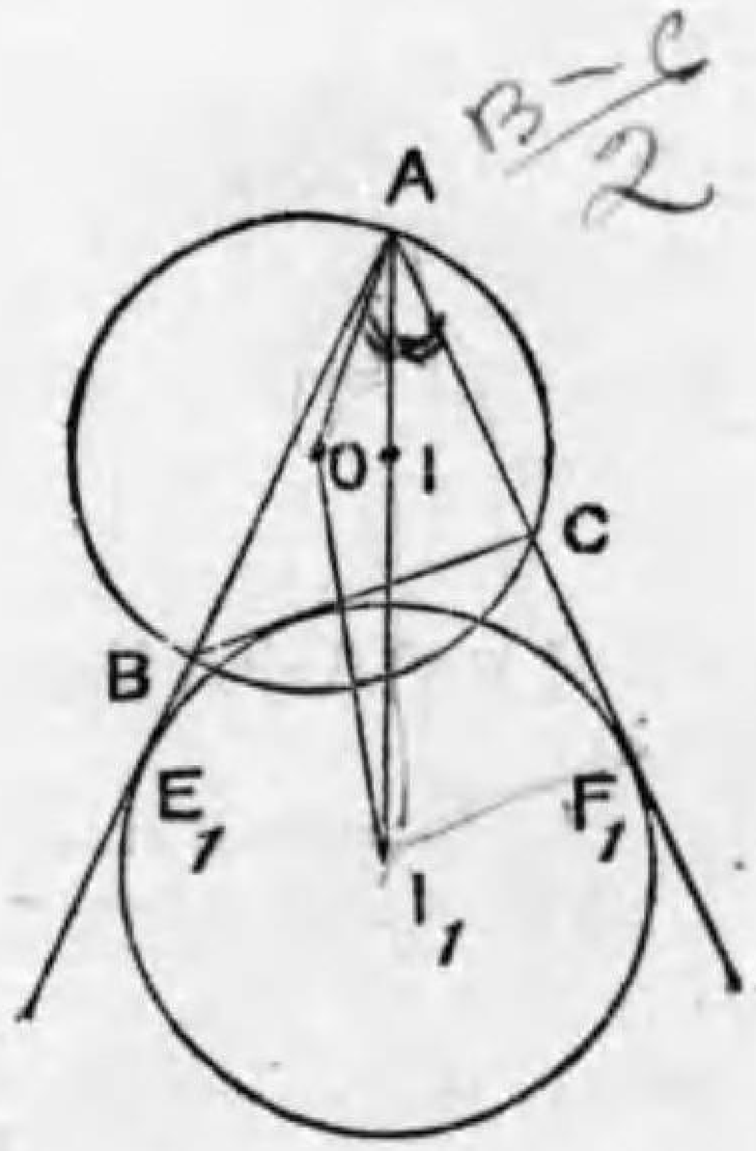
O ヲ外心, I_1 ヲ一ツノ傍心トスレバ三角形 OAI_1 ヨリ

$$OI_1{}^2=OA^2+AI_1{}^2-2OA.\,AI_1\cos OAI_1$$

然ルニ

OAI_1 ハ $\frac{C-B}{2}$ 或ハ $\frac{B-C}{2}$ ニ等シク且ツ第八十九節公式 (6) ニヨリ

$$AI_1=\frac{r_1}{\sin\frac{A}{2}}=4R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$



ナルガ故ニ

$$OI_1{}^2=R^2+16R^2\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}-8R^2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C-B}{2}$$

$$=R^2+8R^2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{C-B}{2}\right)$$

$$=R^2+8R^2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$=R^2+8R^2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

故ニ

$$OI_1=R\sqrt{1+8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\dots\dots(16)$$

或ハ第八十九節公式 (6) ニヨリ

$$OI_1=\sqrt{R^2+2Rr_1}\dots\dots(17)$$

例 5. 三角形 ABC ノ三ツノ傍心ヲ I_1, I_2, I_3 トシ, 内心ヲ I トスレバ四ツノ三角形 $I_1I_2I_3$, I_2I_3I, I_3I_1I, I_1I_2I ノ面積ハ r, r_1, r_2 及ビ r_3 ニ反比例スルコトヲ證明セヨ.

茲ニ r, r_1, r_2, r_3 内接圓及ビ三ツノ傍切圓ノ半徑ナリトス.

［解］ 先ヅ I_2I_3 ハ AI_1 ニ垂直ナルコト明カナリ.

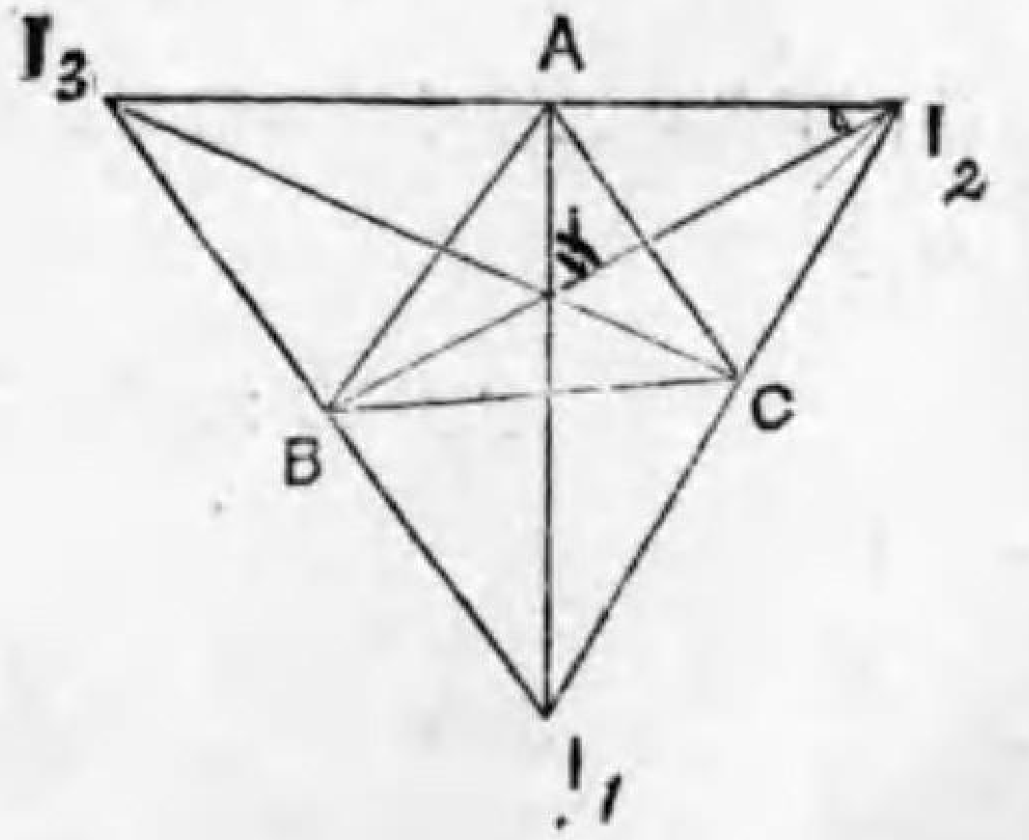
故ニ

$$\triangle I_1I_2I_3:\triangle I_2I_3I=AI_1:AI$$

$$=r_1\operatorname{cosec}\frac{A}{2}:r\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$$

$$=\frac{1}{r}:\frac{1}{r_1}$$

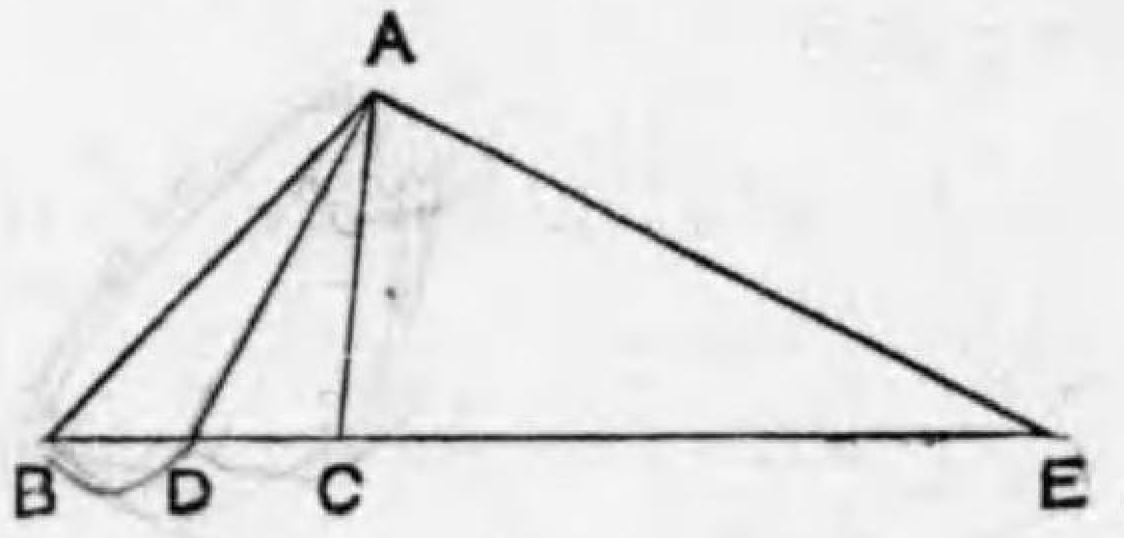
他モ同様ニ證明スルコトヲ得.



95. 角ノ二等分線

三角形 ABC ノ一ツノ頂角 A ノ二等分線ヲ AD トシ, 其外角ノ

二等分線ヲ AE トスレバ



BD : DC = AB : AC

ナルガ故ニ

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB+AC}}$$

從ツテ

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{BD}&=\frac{ac}{b+c}\\ \text{同様ニ}\qquad \mathrm{DC}&=\frac{ab}{b+c}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

又

BE : CE = AB : AC　從ツテ $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB-AC}}$

故ニ

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{BE}&=\frac{ac}{c-b}\\ \text{同様ニ}\qquad \mathrm{CE}&=\frac{ab}{c-b}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

他ノ頂角ノ二等分線ニ就キテモ亦同様ニシテ求メラル.

次ニ

$$\triangle\mathrm{BAD}+\triangle\mathrm{DAC}=\triangle\mathrm{ABC}$$

ニシテ

$$\triangle\mathrm{BAD}=\frac{1}{2}\mathrm{AB.\ AD}\sin\frac{\mathrm{A}}{2}$$

$$\triangle\mathrm{DAC}=\frac{1}{2}\mathrm{AD.\ AC}\sin\frac{\mathrm{A}}{2}$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{AD}&=\frac{2\mathrm{S}}{(b+c)\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}=\frac{bc\sin\mathrm{A}}{(b+c)\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}\\ &=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}\\ \text{同様ニ}\qquad \mathrm{AE}&=\frac{2\mathrm{S}}{(c-b)\cos\frac{\mathrm{A}}{2}}=\frac{2bc}{c-b}\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

他ノ二等分線モ亦同様ニシテ求メラル.

例 6. 三角形 ABC ノ三ツノ角 A, B, C ノ二等分線ノ長サヲ夫々 p, q, r トスル時ハ

$$\frac{p^2(b+c)^2}{bc}+\frac{q^2(c+a)^2}{ca}+\frac{r^2(a+b)^2}{ab}=4s^2$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］ 公式 (20) ニヨリ

$$\frac{p^2(b+c^2}{bc}=4bc\cos^2\frac{\mathrm{A}}{2}=2bc(1+\cos\mathrm{A})$$

$$=2bc\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=(b+c)^2-a^2$$

同様ニ

$$\frac{q^2(c+a)^2}{ca}=(c+a)^2-b^2$$

$$\frac{r^2(a+b^2}{ab}=(a+b)^2-c^2$$

ヨツテ

$$\frac{p^2(b+c)^2}{bc}+\frac{q^2(c+a)^2}{ca}+\frac{r^2(a+b)^2}{ab}=(a+b+c)^2=4s^2$$

問　題 15.

三角形ニ於テ次ノ等式ヲ證セヨ. (1—15)

1. $rr_1\cot\frac{\mathrm{A}}{2}=\mathrm{S}$

2. $\sqrt{rr_1r_2r_3}=\mathrm{S}$

3. $r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2=s^2$

○ **4.** $\dfrac{r_1r_2r_3}{\sqrt{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}}=S$

5. $4Rrs=abc$

6. $r=2R\left(\cos^2\dfrac{A}{2}-\sin^2\dfrac{B}{2}-\sin^2\dfrac{C}{2}\right)$

7. $2(R+r)=a\cot A+b\cot B+c\cot C$

8. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$

○ **9.** $r_1+r_2+r_3=4R+r$

○ **10.** $\Sigma a(a-b)(a-c)=4S(R-2r)$

11. $\dfrac{r_1}{bc}+\dfrac{r_2}{ca}+\dfrac{r_3}{ab}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{2R}$

○ **12.** $r_1-r=4R\sin^2\dfrac{A}{2}$

○ **13.** $r_2+r_3=4R\cos^2\dfrac{A}{2}$

14. $R=\dfrac{(r_1+r_2)(r_2+r_3)(r_3+r_1)}{4(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)}$

15. $\dfrac{r}{R}=\dfrac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a+b+c}$

○ **16.** 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ノ長サヲ l トシ底邊トナス角ヲ θ トスレバ

$$s\left(\sin\theta-\sin\frac{A}{2}\right)=l\sin\theta\cos\frac{A}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

○ **17.** 三角形ノ三ツノ傍心ヲ結ンデ作ラルヽ三角形 $I_1I_2I_3$ ノ面積ハ $2Rs$ 或ハ $\dfrac{abc}{2r}$ ニ等シキコトヲ證セヨ.

○ **18.** 三角形 ABC ノ一ツノ中線 AD ガ底線 BC トナス角ヲ θ トスレバ

$$\cot\theta=\frac{1}{2}(\cot B-\cot C)$$

ナルコトヲ證セヨ.

19. 三角形ノ重心ヲ G 外心ヲ O トスレバ

$$R^2-OG^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$

ナルコトヲ證セヨ.

○ **20.** 三角形ノ面積ハ

$$\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$$

ナルコトヲ證セヨ.

○ **21.** 三角形ノ面積ハ又

$$\frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

○ **22.** 鋭角三角形ノ各頂點 A, B, C ヨリ各對邊ニ垂線ヲ引キ之ヲ延長シテ外接圓ニ交ラシム. 其各延長部ノ長サヲ α, β, γ トスル時ハ

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=2(\tan A+\tan B+\tan C)$$

ナルコトヲ證セヨ.

○ **23.** 三角形 ABC ノ外心 O ヨリ各邊ニ垂線 OD, OE, OF ヲ下ス時ハ

$$4(OD^2+OE^3+OF^2)=a^2\cot^2 A+b^2\cot^2 B+c^2\cot^2 C$$

ナルコトヲ證セヨ.

○ **24.** 三角形ノ內切圓ノ面積ヲ A トシ. 傍切圓ノ面積ヲ A_1, A_2, A_3 トスレバ

$$\frac{1}{\sqrt{A}}=\frac{1}{\sqrt{A_1}}+\frac{1}{\sqrt{A_2}}+\frac{1}{\sqrt{A_3}}$$

ナルコトヲ證セヨ.

25. 三角形 ABC ノ傍切圓ノ中心ヲ I_1, I_2, I_3 トスレバ三角形 ABC 及ビ $I_1I_2I_3$ ノ內切圓ノ半徑ノ比ハ

$$\frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}$$

トルコトヲ證セヨ.

26. 三角形 ABC ニ於テ

$$OI^2+OI_1{}^2+OI_2{}^2+OI_3{}^2+II_1{}^2+II_2{}^2+II_3{}^2$$
$$+I_2I_3{}^2+I_3I_1{}^2+I_1I_2{}^2=60R^2$$

ナルコトヲ證セヨ.

27. 三角形ノ三ツノ傍心ニテ作レル三角形ノ外接圓ノ半徑ハ 2R ニ等シキコトヲ證セヨ.

28. 三角形 ABC ニ於テ AM, AD ヲ夫々中線, 二等分線トスルトキコノ二ツノ直線ノナス角ヲ θ トスレバ

$$\tan\theta=\frac{c-b}{c+b}\tan\frac{A}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

29. 三角形 ABC ニ於テ角 C ノ二等分線ガ D ニ於テ AB ニ, E ニ於テ外接圓ニ交ルモノトスレバ

$$\frac{CE}{DE}=\frac{(a+b)^2}{c^2}$$

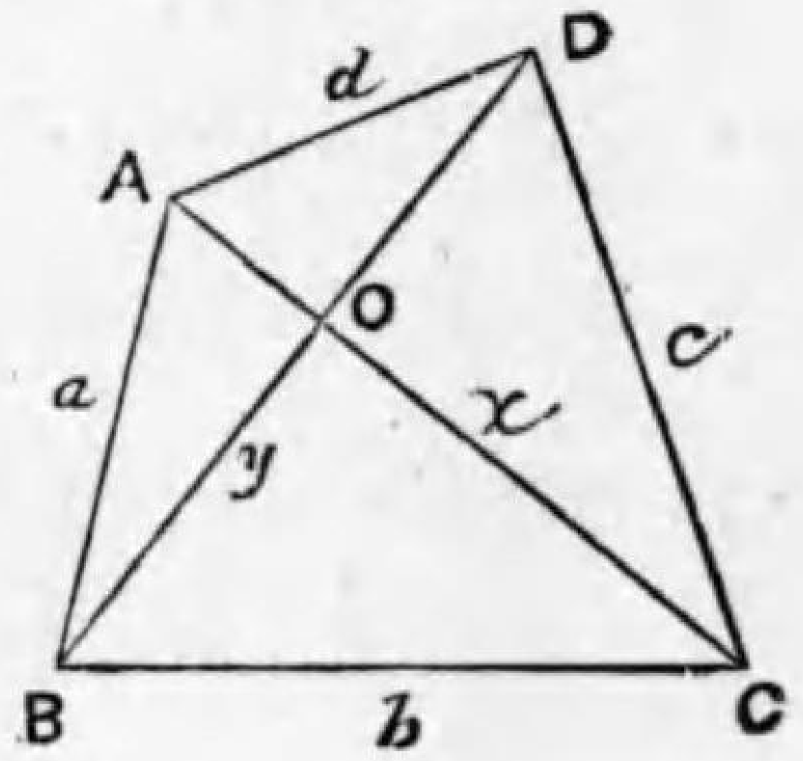
ナルコトヲ證セヨ.

30. 三角形 ABC ノ垂足三角形ノ内切圓ノ半徑ハ 2R cos A cos B cos C ニ等シキコトヲ證セヨ.

第十六章

多邊形ノ性質

97. 四邊形ノ面積



ABCD ヲ四邊形トシ, 邊 AB, BC, CD, DA ノ長サヲ夫々 a, b, c, d トシ, 對角線ノ長サヲ x, y トス.

今 $a+b+c+d=2p,$ ト置キ四邊形ノ面積ヲ S ニテ表ハセバ

$$y^2=a^2+d^2-2ad\cos A$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos C$$

$$\therefore\quad bc\cos C-ad\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2-d^2}{2}$$

然ルニ四邊形ノ面積ハ二ツノ三角形 ABD, BCD ノ面積ノ和ナルガ故ニ

$$bc\sin C+ad\sin A=2S$$

之等ヲ平方シテ相加フレバ

$$b^2c^2+a^2d^2-2abcd\cos(A+C)=4S^2+\frac{(b^2+c^2-a^2-d^2)^2}{4}$$

從ツテ

$$16S^2=4(ad+bc)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$

然ルニ

$$4(ad+bc)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2$$

$$=\{2(ad+bc)+(b^2+c^2-a^2-d^2)\}\{2(ad+bc)-(b^2+c^2-a^2-d^2)\}$$

$$=\{(b+c)^2-(a-d)^2\}\{(a+d)^2-(b-c)^2\}$$

$$=(b+c+a-d)(b+c-a+d)(a+d+b-c)(a+d-b+c)$$

$$=16(p-d)(p-a)(p-c)(p-b)$$

$$=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

ヨツテ四邊形 ABCD ノ面積 S ハ

$$\mathbf{S}=\sqrt{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{d})-\boldsymbol{abcd}\cos^2\frac{\mathbf{A}+\mathbf{C}}{2}}\;\text{........}(1)$$

若シ四邊形ハ圓ニ內接スルナラバ

$$\frac{A+C}{2}=\frac{\pi}{2}\quad\text{従ツテ}\quad\cos\frac{A+C}{2}=0$$

ナルガ故ニ

$$\mathbf{S}=\sqrt{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{d})}\;\text{....................}(2)$$

又若シ四邊形ハ圓ニ內接スルト同時ニ他ノ圓ニ外切スルナラバ

$$a+c=b+d$$

ナルガ故ニ

$$p-a=\frac{1}{2}(-a+b+c+d)=\frac{1}{2}(-a+c+b+d)$$

$$=\frac{1}{2}(-a+c+a+c)=\frac{2c}{2}=c$$

同樣ニ

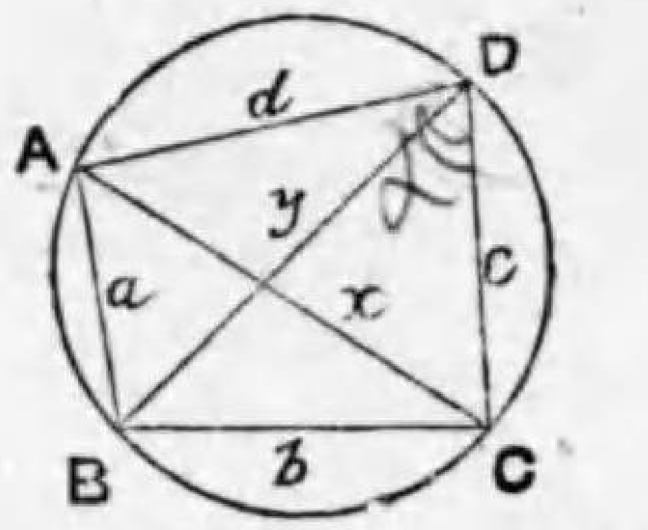
$$p-b=d\qquad p-c=a\qquad p-d=b$$

ナルガ故ニ

$$\mathbf{S}=\sqrt{\boldsymbol{abcd}}\;\text{................ ....}(3)$$

トナル.

97. 內接四邊形ノ對角線



圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ長サヲ夫々 x, y トスレバ三角形 ABC ヨリ

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cos B$$

故ニ

$$\cos B=\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$$

又三角形 ADC ヨリ

$$x^2=c^2+d^2-2cd\cos D=c^2+d^2-2cd\cos(\pi-B)$$

$$=c^2+d^2+2cd\cos B$$

ヨツテ

$$\cos B=\frac{x^2-c^2-d^2}{2cd}$$

故ニ

$$\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}=\frac{x^2-c^2-d^2}{2cd}$$

従ツテ

$$\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\right)x^2=\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}$$

卽チ

$$\frac{(ab+cd)x^2}{abcd}=\frac{(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab}{abcd}$$

$$=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{\overset{\cancel{abcd}}{ab+dc}}$$

故ニ
$$x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

x ハ正ナルベキガ故ニ上式右邊ノ平方根ノ正號ヲトラバ

$$\left.\begin{aligned} x&=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \\ y&=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

同樣ニ（上式 y ノ行）

ナリ.

98. 內接四邊形ノ角

三角形 ABD (前圖) ヨリ

$$y^2=a^2+d^2-2ad\cos A$$

又三角形 BCD ヨリ

$$\begin{aligned} x^2&=b^2+c^2-2bc\cos C \\ &=b^2+c^2-2bc\cos(\pi-A) \\ &=b^2+c^2+2bc\cos A \end{aligned}$$

故ニ
$$b^2+c^2+2bc\cos A=a^2+d^2-2ad\cos A$$

從ツテ

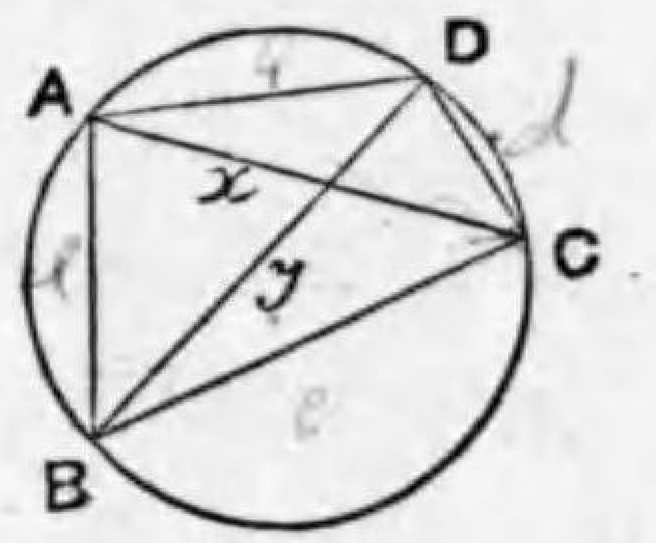
$$\left.\begin{aligned} \cos A&=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)} \\ \cos B&=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \\ \cos C&=\frac{b^2+c^2-a^2-d^2}{2(bc+ad)} \\ \cos D&=\frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(cd+ab)} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

同樣ニ（上式 $\cos B$, $\cos C$, $\cos D$ ノ行）

---

99. 四邊形ノ外接圓ノ半徑

ABCD ヲ圓ニ內接スル四邊形トシ外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ, 三角形 ABC ヨリ



$$\begin{aligned} AC&=2R\sin B \\ &=4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} \end{aligned}$$

然ルニ第九十七節ニヨリ

$$x=AC=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

ニシテ且ツ

$$\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

ナルガ故ニ

$$\begin{aligned} \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}&=\sqrt{\frac{2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)}{4(ab+cd)}} \\ &=\sqrt{\frac{(2p-2a)(2p-2b)}{4(ab+cd)}} \\ &=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}} \end{aligned}$$

同樣ニ

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos B}{2}}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}}$$

但シ $a+b+c+d=2p$ トス.

從ツテ

$$\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}=4R\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}}\sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}}$$

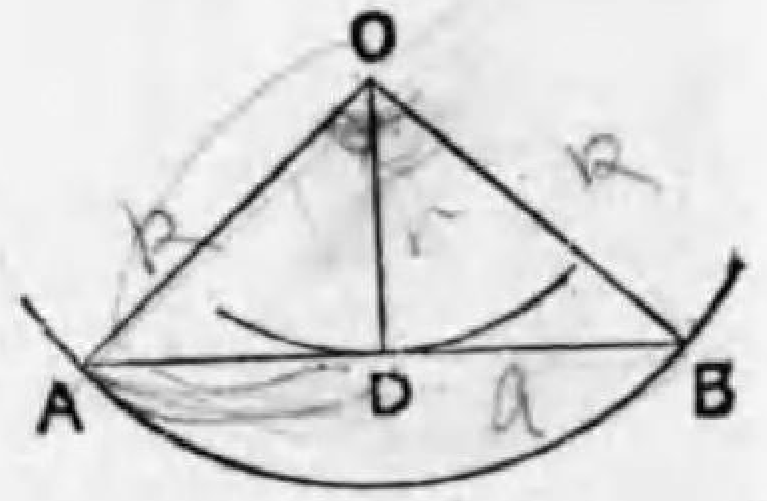
故＝

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

ナリ.

100. 正多邊形ノ邊ト面積

正 n 多邊形ノ內切圓ノ半徑ヲ r, 外接圓ノ半徑ヲ R, 一邊ノ長サヲ a, 面積ヲ S トス. 卽チ圖ニ於テ



$$AB=a,\qquad OA=OB=R$$

$$OD=r$$

トスレバ $\qquad AD=AO\sin AOD$

卽チ $\qquad a=2R\sin\frac{\pi}{n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$

又 $\quad AD=OD\tan AOD\quad$ 從ツテ $\quad \frac{1}{2}a=r\tan\frac{\pi}{n}$

故ニ面積ハ

$$S=\triangle AOB\times n=\frac{1}{2}nar$$

卽チ $\qquad S=nr^2\tan\frac{\pi}{n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$

或ハ又

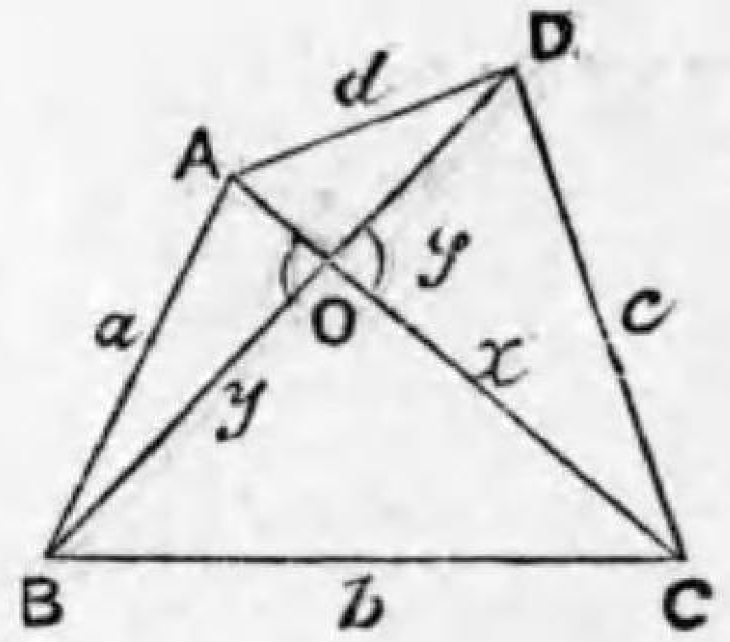
$$S=n\times\frac{OA.OB}{2}\sin AOB$$

故ニ $\qquad S=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$

○ **例 1.** 四邊形ノ對角線ノナス鋭角ヲ φ トスレバ, 其面積ハ

$$\frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)\tan\varphi$$

ニ等シキコトヲ證セヨ.



［解］ 四邊形 ABCD ノ面積ハ二ツノ三角形 ABD, BCD ノ面積ノ和ニ等シ. 卽チ

$$S=\frac{1}{2}yAO.\sin\varphi+\frac{1}{2}yOC\sin\varphi$$

$$=\frac{1}{2}(AO+OC)y\sin\varphi=\frac{1}{2}xy\sin\varphi\ldots\ldots(1)$$

然ルニ又

$$2OA.\ OB\cos\varphi=OA^2+OB^2-a^2$$

$$2OC.\ OD\cos\varphi=OC^3+OD^2-c^2$$

$$2OA.\ OD\cos\varphi=d^2-OA^2-OD^2$$

$$2OB.\ OC\cos\varphi=b^2-OB^2-OC^2$$

邊々相加フレバ

$$2xy\cos\varphi=b^2+d^2-a^2-c^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1), (2) ヨリ

$$S=\frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)\tan\varphi$$

○ **例 2.** 正六邊形ノ內切圓ニ第一ノ內切正六邊形ヲ作リ, 此正六邊形ノ內切圓ニ第二ノ正六邊形ヲ作ル. 以下カクノ如クシテ第 n ノ正六邊形ヲ作ルトキ, 之等ノ面積ノ和ハ

$$6a^2\sqrt{2}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

ニ等シキコトヲ證セヨ. 但シ a ハ原六邊形ノ一邊ノ長サトス.

［解］ 第一ノ正六邊形ノ面積 S_1 ハ

$$S_1=6\times\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ$$

然ルニ第二ノ正六邊形ノ邊ノ長サハ其內接圓ノ半徑ニ等シキガ故ニ

$$r=\frac{a}{2}\div\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

ヨツテ第二ノ正六邊形ノ面積 S_2 ハ

$$S_2=6\times\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\sin 60^\circ=\frac{3}{4}S_1$$

同様＝第三ノ正六邊形ノ面積 S_3 ハ

$$S_3=S_1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

ヨツテ求ムル面積ノ和ハ

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2+\cdots\cdots\cdots+S_n\\&=6\times\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ\left\{1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}\\&=6a^2\sqrt{3}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

問　題 16.

1. 梯形ノ四ツノ邊ノ長サヨリ其角ノ大サヲ求ムル方法ヲ述ベヨ.

2. 四邊形ハ一ツノ圓＝內接シ，他ノ一ツノ圓＝外切スル時，後ノ圓ノ半徑ハ

$$\frac{2\sqrt{abcd}}{a+b+c+d}$$

ナルコトヲ證セヨ.

3. 平行四邊形ノ相隣ル邊ノ長サヲ a, b トシ其ナス角ノ中鋭角ヲ θ トシ，對角線ノナス鋭角ヲ φ トスレバ

$$\frac{a}{b}\sin\varphi=\sin\theta\cos\varphi+\sqrt{1-\cos^2\theta\cos^2\varphi}$$

ナルコトヲ證セヨ.

4. 前題＝於テ若シ θ ト φ トガ等シキ時ハ

$$\cos\theta=\frac{a^2-b^2}{2ab}$$

ナルコトヲ證セヨ.

5. a, b, c, d ヲ四邊形ノ邊トシ，對角線ノ長サヲ x, y トスル時ハ其面積ハ

$$\frac{1}{4}[4x^2y^2-(b^2+d^2-a^2-c^2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

ナルコトヲ證セヨ,

6. 四邊形ノ各邊ヲ $m:n$ ＝內分シタル分點ヲ結ンデ生ズル四邊形ノ面積ト原ノ四邊形ノ面積トノ比ハ

$$m^2+n^2:(m+n)^2$$

＝等シキコトヲ證セヨ.

7. 四邊形ガ圓＝內接スル時ハ

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}$$

ナルコトヲ證セヨ.

8. 四邊形 ABCD 內ノ一點ヲ O トシ，OP, OQ, OR, OS ヲ AB, BC, CD, AD 上ヘノ垂線トスレバ四邊形 PQRS ノ面積ハ

$$\frac{1}{2}S-\frac{1}{8}(OA^2\sin 2A+OB^2\sin 2B+OC^2\sin 2C+OD^2\sin 2D)$$

ナルコトヲ證セヨ. 但シ S ハ原四邊形ノ面積ナリトス.

9. 正五邊形＝外接スル圓ノ半徑ト其一邊トノ比ハ殆ンド 17:20 ナルコトヲ證セヨ.

10. 正三角形ト正六角形トノ周圍ガ相等シキ時ハ其面積ノ比ハ 2:3 ナルコトヲ證セヨ.

11. 正六邊形ノ頂點ヲ一ツ置＝結ンデ第二ノ正六邊形ヲ作リ，第二ノ正六邊形ヨリ又同様＝第三ノ正六邊形ヲ作ル. 以下カクノ如ク無限＝作ル時ハ其面積ノ和ノ極限値ハ原形ノ $\frac{1}{2}$ ＝等シ. 之ヲ證セヨ.

12. 正 n 邊形ノ一邊ノ長サヲ a トスル時夫レ＝內切スル圓ノ半徑ト外接スル圓ノ半徑トノ和ハ

$$\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{2n}$$

＝等シキコトヲ證セヨ.

13. 圓ノ外接多角形 ABCD…… ノ各邊上＝其圓ノ中心ヨリ引ク垂線ノ足ヲ結ビテ生ズル多角形ノ面積ハ原形ノ半分ナル時ハ

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C+\cdots\cdots=0$$

ナルコトヲ證セヨ.

14. 二ツノ正n邊形アリ，一ツハ圓ニ外切シ，一ツハ同ジ圓ニ內切ス. 然ル時ハソレ等ノ周圍ノ比ハ

$$\sec\frac{\pi}{2}:1$$

ニ等シキコトヲ證セヨ.

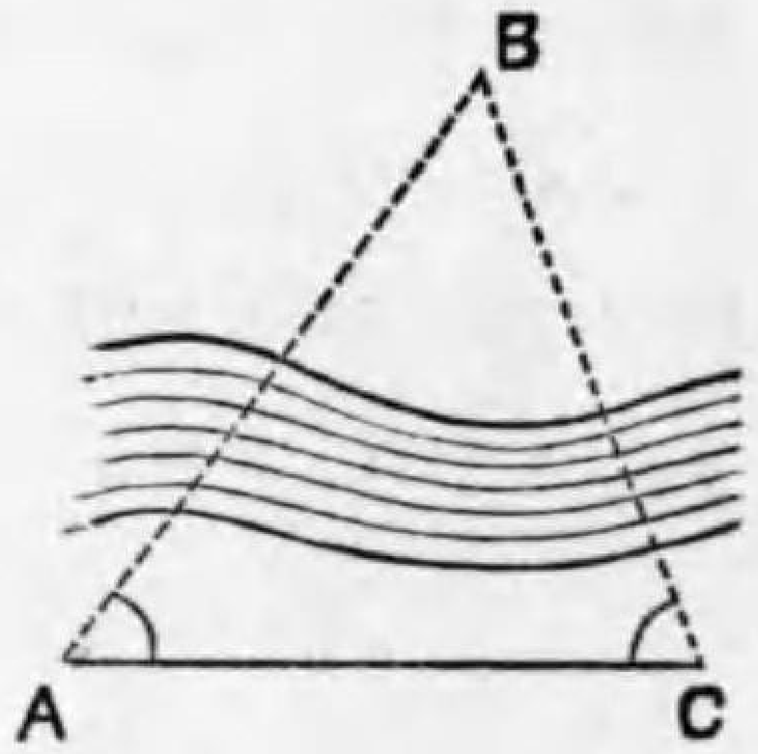
15. 二ツノ正多角形アリ. 一ツノ邊數ハ他ノ一ツノ邊數ノ二倍ニシテ，其角ノ比ハ 9:8 ナル時之等ノ邊ノ數ヲ求メヨ.

16. 圓ニ內接シ且ツ邊ノ數ハ偶數ナル正多邊形ノ面積ハ，邊ノ數ガ前者ノ二分ノ一ナル同ジ圓ニ內接スル正多邊形ト外切スル正多邊形トノ面積ノ比例中項ナリ.

第十七章

測量ヘノ應用

101. 二點間ノ距離（其一）



圖ノ如ク A 點ヨリ見ルベク近ヅクベカラザル B 點ニ至ル距離ヲ求メンニハ，先ヅ A ヨリ任意ノ方向ニ線分 AC ヲ定メ，(**基線**トイフ) 測鎖ト稱スル測量器ヲ以テ其長サヲ測リ，**測角器**ヲ以テ二ツノ角 BAC, BCA ヲ測ルベシ.

然ル時ハ三角形 ABC ニ於テ一邊 AC ト其兩底角ヲ知ルガ故ニ，

$$B=\pi-(A+C) \qquad \text{従ツテ} \quad \sin B=\sin(A+C)$$

ヨツテ正弦法則ニ從ヘバ

$$AB=\frac{AC\sin C}{\sin(A+C)}$$

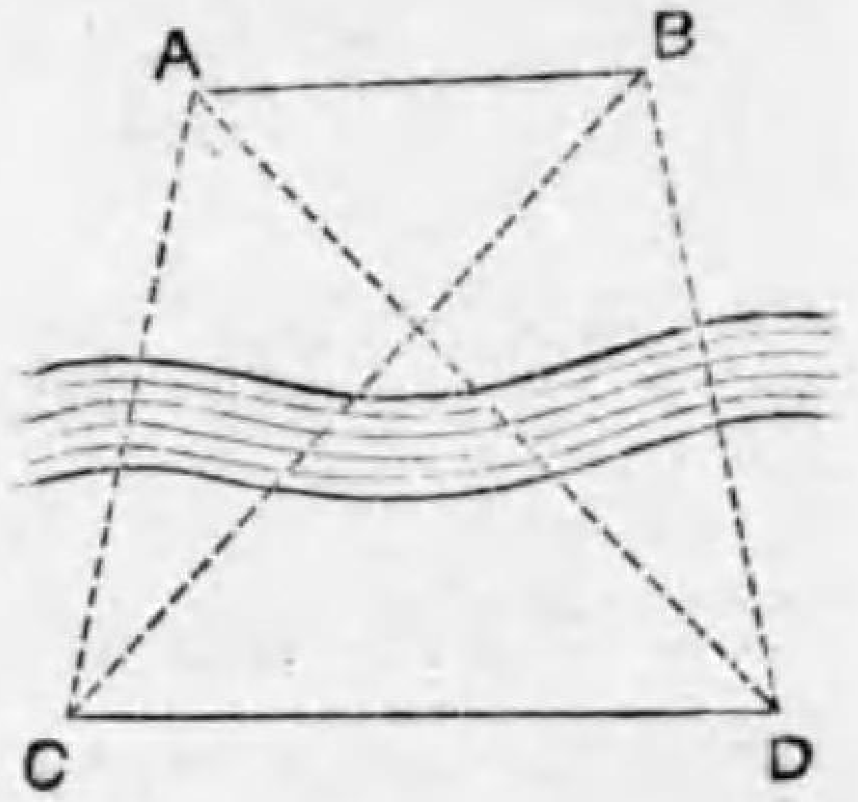
卽チ AB ノ長サガ求メラレタリ.

［注意］ 基線ノ長サ及ビ方向ハ任意ニ定メテ可ナレドモ，三角形 ABC ノ各角ハ甚ダシキ銳角又ハ鈍角ナラザル樣ニスベシ. 何トナレバ若シカヽル場合ニハ測角ノ時ニ起ル少シノ誤差モ邊ノ長サニ大ナル影響ヲ來スガ故ナリ.

102. 二點間ノ距離（其二）

本節ニ論ゼントスルハ，二點トモ近ヅクベカラザル場合ノ距離測定法ナリ. 例ヘバ圖ノ如ク河ノ對岸ニアル二點 A, B 間ノ距離ヲ求

ムルガ如シ.



コノ場合ニハ先ヅ基線 CD ヲ定ムベシ. 其方向及ビ長サハ如何様ニスルモ可ナレドモ前節ニ於ケル注意及ビ, 二點 C, D ヨリ二ツノ點 A, B ヲ望見シ得ルコトヲ要ス.

次ニ五ツノ角 ACD, BCD, ACB, BDC 及ビ ADC ヲ測ルベシ. 然ル時ハ二ツノ三角形 ACD, BCD ヨリ邊 AC, BC ハ夫々

$$\log AC = \log CD + \mathrm{Log}\sin ADC - \mathrm{Log}\sin CAD$$

$$\log BC = \log CD + \mathrm{Log}\sin BDC - \mathrm{Log}\sin CBD$$

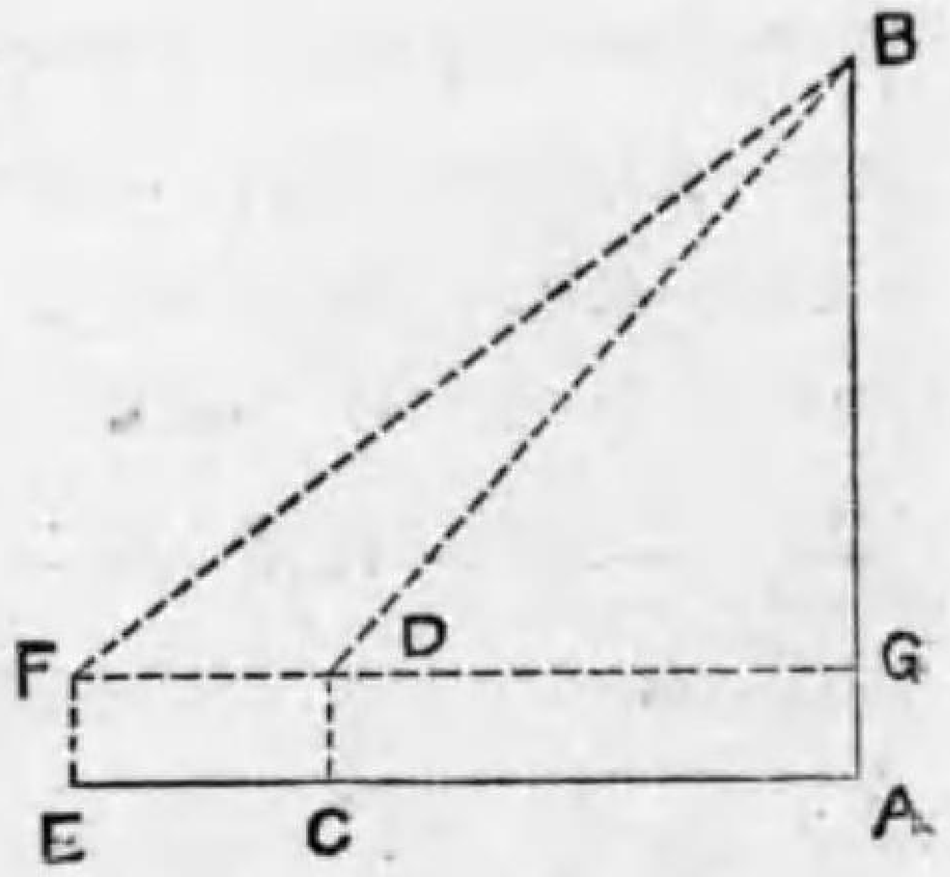
ニヨツテ得ラルベシ. 但シ $C\hat{A}D$ ハ $180^0 - A\hat{C}D - A\hat{D}C$ ヨリ得ラレ, $C\hat{B}D$ ハ $180^0 - B\hat{C}D - B\hat{D}C$ ヨリ得ラルベシ.

然ル時ハ三角形 ABC ハ一ツノ角 ACB 及ビ之ヲ夾ム二邊 AC, BC ヲ知ルガ故ニ邊 AB ノ長サヲ求ムルコトヲ得ベシ.

［注意］ 四ツノ點 A, B, C, D ハ同一平面ニアル時ハ角ACB ハ角 ACD ヨリ角 BCD ヲ減ズルコトニヨリテ直チニ得ラル.

103. 近ヅクベカラザル塔ノ高サ

塔ヲ AB トシ, ソノ足 A ニ向ツテ一直線ニナルヤウニ基線 CE ヲ測レ. 今測角器ノ高サヲ CD トシ角 BDG 及ビ BFG ヲ測ルベシ.



然ル時ハ三角形 DBF ニ於テ角 DBF ハ知ラル丶ガ故ニ邊 DB ハ

$$\log DB = \log DF + \mathrm{Log}\sin BFD - \mathrm{Lcg}\sin DBF$$

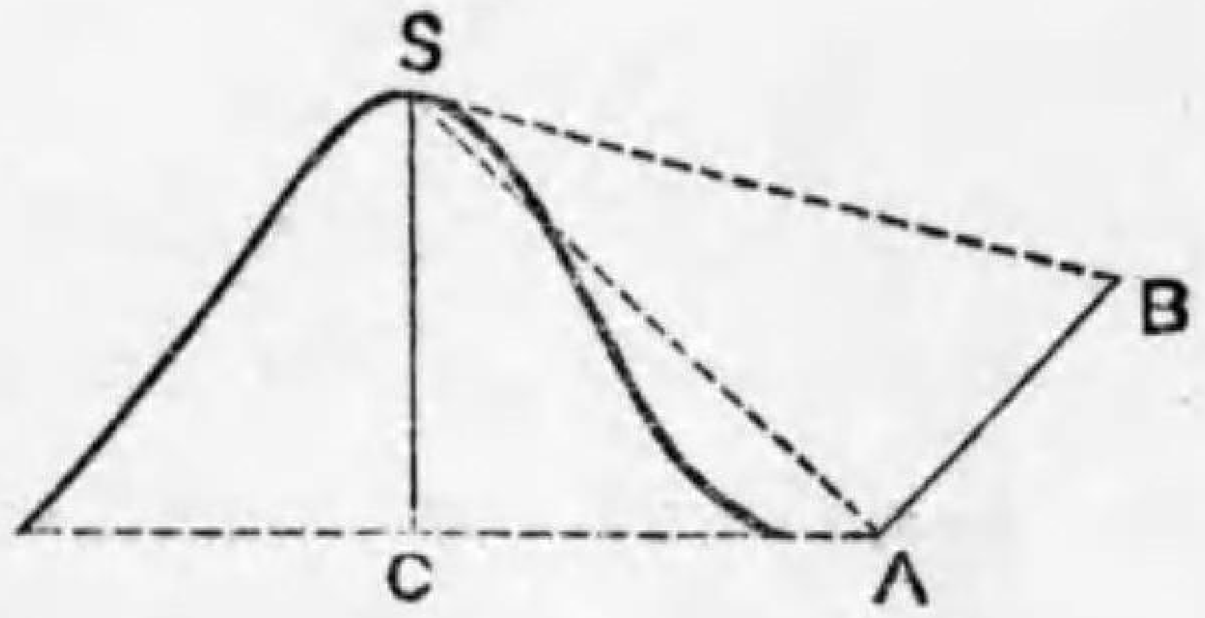
ニヨリテ得ラル.

次ニ直角三角形 BDG ニ於テ, 邊 BG ヲ公式

$$\log BG = \log DB + \mathrm{Log}\sin BDG - 10$$

ニヨツテ計算シ. 然ル後測角器ノ高サ CD ヲ加ヘ以テ塔 AB ノ高サヲ求ムベシ.

104. 山ノ高サ



山ノ頂上 S ヨリ下シタル垂線ノ足 C ガ見エザルガ故ニ, 垂線ノ足ヨリハ基線 AC ヲ作ルコトヲ得ズ. ヨツテ平地ニ S ヲ望見シ得ルヤウニ二ツノ點 A, B ヲ定メ之ヲ基線トスベシ. 而シテ角 SAB, SBA ヲ測ルベシ. 然ル時ハ三角形 ASB ニ於テ

$$\log AS = \log AB + \mathrm{Log}\sin ABS - \mathrm{Log}\sin ASB$$

ニヨツテ AS ガ定マル. 次ニ SA ヲ過リ平地ニ垂直ナル平面ヲ想定シ其面内ニ測角器ノ望遠鏡ヲ置キ AS ト水平ノ方向トノナス角 SAC ヲ測ル時ハ, 公式

$$\log SC = \log AS + \mathrm{Log}\sin SAC - 10$$

ニヨツテ山ノ高サ SC ハ決定スベシ.

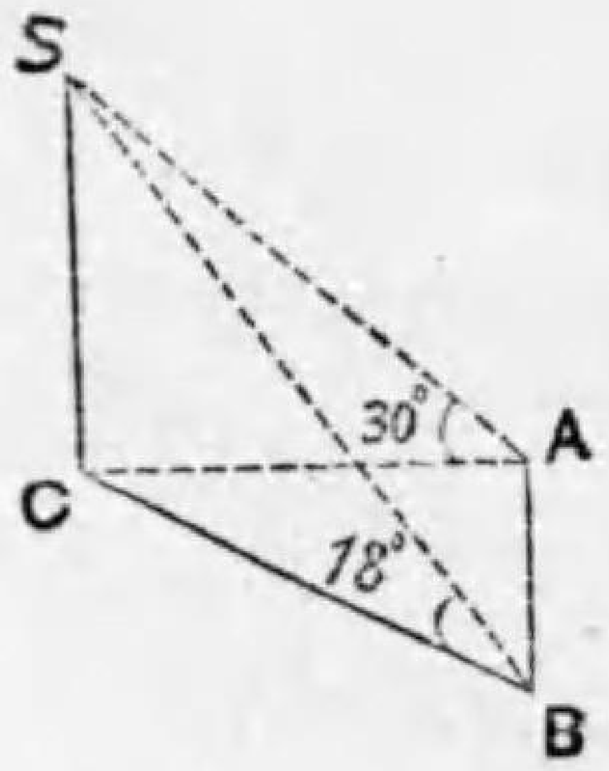
105. 本節ニ於テ二三ノ例解ヲ示サントス

例 1. 塔アリ, 其正南ノ一地 A ニ於テハ仰角 30° ニシテ A ノ正西 a ナル距離ニアル一地 B ニ於テハ仰角 18° ナリトイフ. コノ塔ノ高サ如何.

［解］ 塔 SC ノ高サヲ h トシ

$$AC=x,\quad BC=y$$

トスレバ



$$x=h\cot 30^\circ$$

$$y=h\cot 18^\circ$$

然ルニ三角形 ABC ニ於テ

$$y^2-x^2=a^2$$

ナルガ故ニ

$$h^2(\cot^2 18^\circ-\cot^2 30^\circ)=a^2$$

ヨツテ七十九頁公式 (1) ニヨリ

$$h^2\{5+2\sqrt{5}-3\}=a^2$$

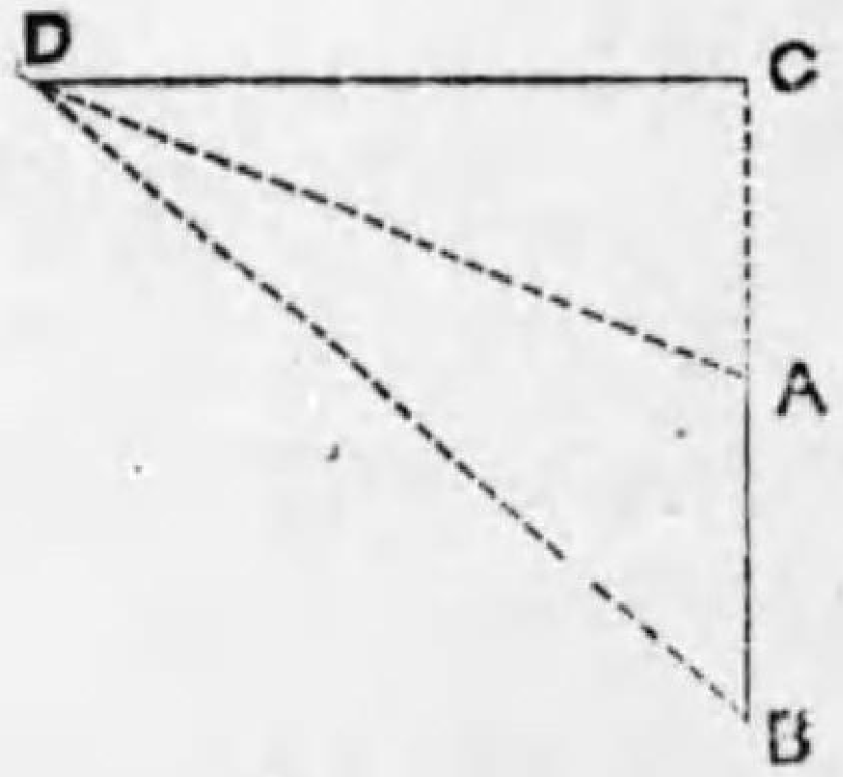
故ニ

$$h=\frac{a}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}$$

ナリ.

例 2. 北ニ向ツテ航海スル汽船アリ. 或時間ニ二個ノ燈臺ヲ正西ニ見タリ. コレヨリ一時間航海セシ時見タルニ一ツハ南西ノ方向ニアリ他ノ一ツハ南々西ノ方向ニアリタリトイフ. 二ツノ燈臺ノ距離 8 浬トスレバ汽船ノ速度如何.

［解］ 汽船ノ初メノ位置ヲ C 一時間後ノ位置ヲ D トシ, A, B ヲ二ツノ燈臺トシ其距離ヲ 8 浬トス. 然ル時ハ



$$\hat{ADC}=22^\circ\frac{1}{2}$$

$$\hat{BDC}=45^\circ$$

トルガ故ニ　$BAD=112^\circ\frac{1}{2}$

ヨツテ三角形 ABD ヨリ

$$\frac{BD}{AB}=\frac{\sin BAD}{\sin BDA}=\frac{\sin 112^\circ\frac{1}{2}}{\sin 22^\circ\frac{1}{2}}=\frac{\cos 22^\circ\frac{1}{2}}{\sin 22^\circ\frac{1}{2}}$$

$$=\cot 22^\circ\frac{1}{2}=\sqrt{2}+1$$

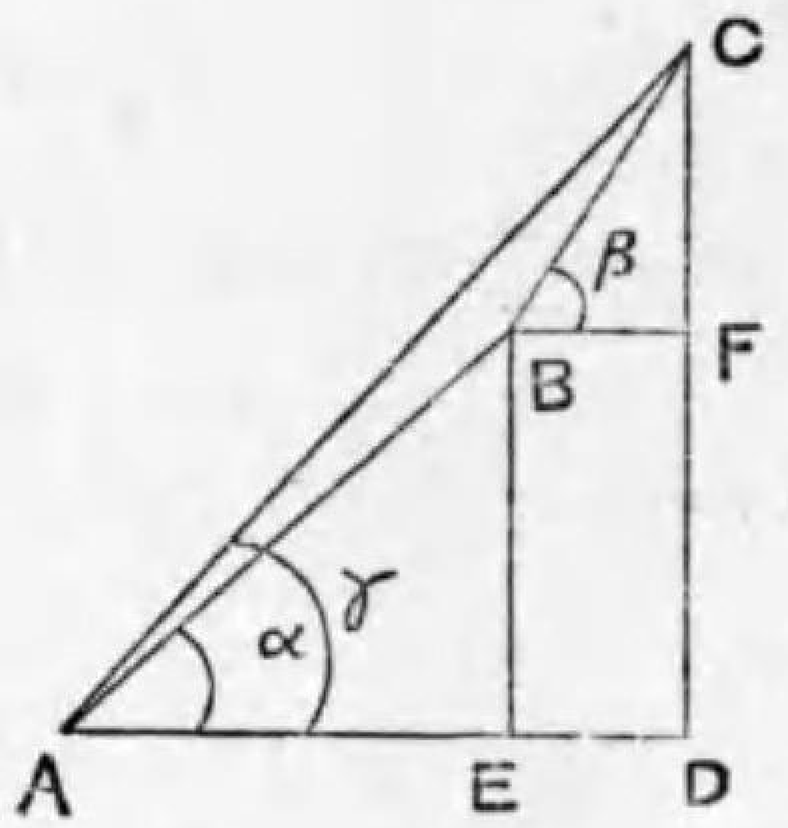
故ニ

$$BD=8(\sqrt{2}+1)$$

從ツテ　$CD=BD\sin 45^\circ=8+4\sqrt{2}$

例 3. 測量者ガ山麓ヨリ山頂マデ最短通路ヲトリテ上ルニ, 最初其路ガ水平面トナス傾斜角 α ナリシガ, 途中ニテ傾斜角ガ増シテ β トナレリ. 然ル時此山ノ高サガ h 米ニシテ且ツ最初山麓ヨリ山頂ノ仰角ヲ測リタルニ γ ナリシトイフ. 此人ノ歩ミシ通路ノ全長ヲ求ム.

［解］ 通路ノ全體ヲ ABC トシ, 山ノ高サヲ CD トシ三ツノ角 BAE, CBF 及ビ CAD ヲ夫々 α, β, γ トスレバ



$$\hat{CAB}=\gamma-\alpha$$

$$\hat{ACB}=\beta-\gamma$$

$$\hat{ABC}=\pi-(\beta-\alpha)$$

ナリ.

先ヅ直角三角形 ADC ヨリ

$$AC=\frac{h}{\sin\gamma}$$

又三角形 ABC ヨリ

$$\frac{AB}{\sin ACB}=\frac{BC}{\sin BAC}=\frac{CA}{\sin ABC}$$

ナルガ故ニ

$$AB=\frac{h\sin(\beta-\gamma)}{\sin\gamma\sin(\beta-\alpha)}\qquad BC=\frac{h\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin(\beta-\alpha)}$$

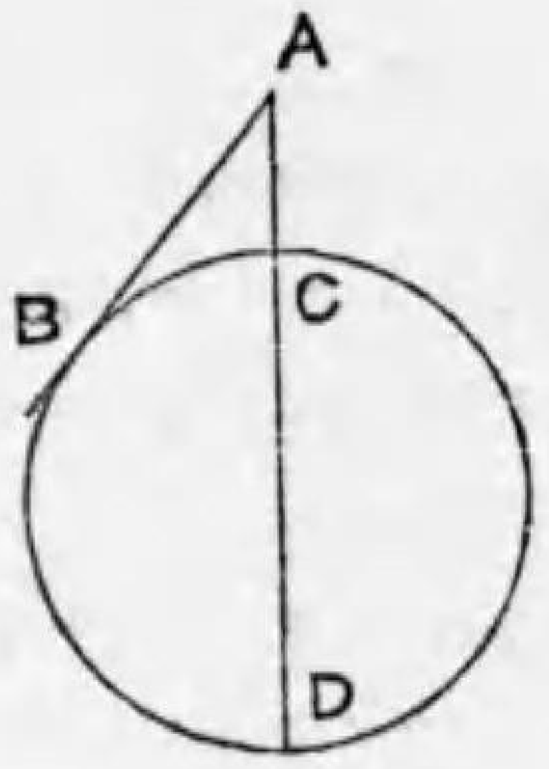
故ニ求ムル結果ハ

$$AB+BC=\frac{h\sin(\beta-\gamma)}{\sin\gamma\sin(\beta-\alpha)}+\frac{h\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin(\beta-\alpha)}$$

$$=\frac{h\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)}{\sin\gamma\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

ナリ.

例 4. 地球ノ半徑ヲ r トスレバ，高サ h ナル一點ヨリノ切線ノ長サ（**視水平ノ距離**トイフ）ハ約 $\sqrt{2rh}$ ナルコトヲ證セヨ.



［**解**］ A ヲ高サ h ナル地點トシ，CD ヲ地球ノ直徑，AB ヲ切線トスレバ，能ク知ラレタル幾何學ノ定理ニ從ヘバ

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{AC,AD}\\&=\sqrt{h(2r+h)}\end{aligned}$$

然ルニ

$$\begin{aligned}\sqrt{h(2r+h)}&=\sqrt{2rh}\sqrt{1+\frac{h}{2r}}\\&=\sqrt{2rh}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{h}{2r}+\cdots\cdots\right)\end{aligned}$$

而シテ $\frac{h}{2r}$ 及ビ其羃ハ甚ダ小ナルガ故ニ之等ヲ省畧スレバ

$$AB\fallingdotseq\sqrt{2rh}$$

トナル.

問　題 17.

1. 塔ノ正東ニ於テ互ニ 100 米ヲ隔テタル兩地ヨリ其塔ノ頂上ヲ望ムニ仰角 45° 及ビ 30° ナリトイフ. 塔ノ高サ如何.

2. 山ノ麓ヨリ頂上ヲ望ムニ仰角 45° ナリシガ，30° ノ傾斜ヲナス直線狀ノ坂路ヲ頂上ニ向ヒ進ムコト 1 哩ニシテ再ビ頂上ヲ望ミタルニ仰角 60° ナリシトイフ. 山ノ高サ如何.

3. 地上ノ定點ヨリ空中ニアル徑六米ノ輕氣球ヲ望ムニ其視角 30° ニシテ中心ノ仰角ハ 45° ナリトイフ. 輕氣球ノ中心ガ地面ヨリ如何ホドノ高サニアルカ。

4. 高サ a 米ノ旗ヲ頂ニ立テタル塔ノ麓ヨリ b 米ノ所ニテハ旗ノ視角ハ γ 度ナリトイフ. 塔ノ高サ如何.

5. 川ノ岸ニ於テ高サ 200 尺ノ塔ノ頂上ニ 30 尺ノ銅像アリ又塔ノ下ニ高サ 6 尺ノ人アリ. 對岸ニ於テ之等ヲ望ムニ其視角相等シトイフ. 川ノ幅如何.

6. 甲驛ハ乙驛ノ正西ニアリ. 今乙驛ヲ出發セル汽車ガ西北ニ 6 哩走リシ時，甲驛ヲ望メバ南西ニ見エタリトイフ. 甲乙兩驛ノ距離如何.

7. 正北ニ θ ダケ傾ク塔アリ，塔ノ正南 a, b ナル距離ニアル二ツノ點ニ於テ其仰角 α, β ヲ得タリ，塔ノ高サハ h ナル時ハ

$$h=\frac{b-a}{\cot\beta-\cot\alpha},\qquad \tan\theta=\frac{b-a}{b\cot\alpha-a\cot\beta}$$

ナルコトヲ證セヨ.

8. 海面上 64 尺ノ高サニアル船ノ檣上ヨリ水平ノ方向ニ燈臺ノ光ヲ見タリ. ソレヨリ船ガ半時間燈臺ニ向ツテ進行セシニ 16 尺ノ高サナル甲板ヨリ見ルヲ得タリトイフ. 今地球ノ半徑ヲ四千哩ノ球トシテ船ノ速度ヲ求メヨ.

9. 塔アリ，其麓ヲ通過スル直線上ノ三ツノ點 A, B, C ヨリ測ルニ B, C ヨリノ仰角ハ夫々 A ヨリノ仰角ノ二倍. 三倍ニ等シトイフ. AB=a, BC=b ナル時ハ，塔ノ高サハ

$$\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$$ （名古屋高工）

ナルコトヲ證セヨ.

第十八章

逆三角函數

106. ニツノ變數 x, y ノ間ニ

$$x=f(y)$$

ナル關係存在スル時，逆ニ x ヲ y ノ函數

$$y=\varphi(x)$$

ト見做スコトヲ得ベシ．コノ場合後ノ函數ヲ前ノ函數ノ**逆函數又ハ反函數**トイフ．例ヘバ

$$x=\sin y$$

ニ於テ y ヲ x ノ函數トスレバ，其函數ハ x ノ**逆正弦函數又ハ反正弦函數**ニシテ記號的ニハ

$$\arcsin x \quad 或ハ \quad \sin^{-1}x$$

ニテ表ハス．卽チ $\sin^{-1}x$ 或ハ $\arcsin x$ トハ正弦ノ値ガ x ニ等シキ角トイフ事ナリ．故ニ

$$\sin^{-1}\frac{1}{2}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

ニシテ

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$$

ナリ．

一般ニ三角函數ノ逆函數ヲ**逆三角函數又ハ反三角函數**トイフ．卽チ

$x=\sin y$ **ノ逆三角函數ハ** $\sin^{-1}x$
$x=\cos y$ 〃 〃 $\cos^{-1}x$
$x=\tan y$ 〃 〃 $y=\tan^{-1}x$
$x=\cot y$ 〃 〃 $y=\cot^{-1}x$
$x=\sec y$ 〃 〃 $y=\sec^{-1}x$
$x=\operatorname{cosec} y$ 〃 〃 $y=\operatorname{cosec}^{-1}x$

ナリ．

107. 逆三角函數ノぐらふ

逆三角函數ノぐらふハ三角函數ノぐらふニ於テ x 軸ト y 軸トヲ交換スレバ得ラル．故ニ之等ノ二ツノぐらふハ軸ノナス角 xOy ノ二等分線ニ關シテ對稱ナリ．

正弦，餘弦函數ノ値ハ -1 ト 1 トノ間ヲ上下スベク，正切，餘切函數ノ値ハ有ユル實數ヲトルガ故ニ

$$y=\sin^{-1}x, \qquad y=\cos^{-1}x$$

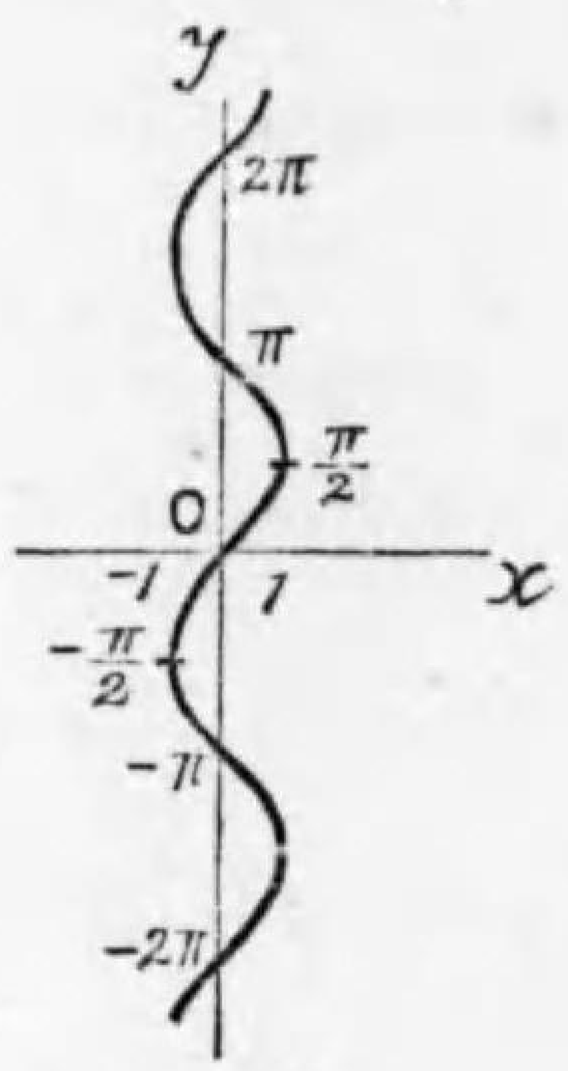
ハ $-1\leqq x\leqq 1$ ナル x ノ凡テノ値ニ對シテ y ノ値ハ實數ニシテ，

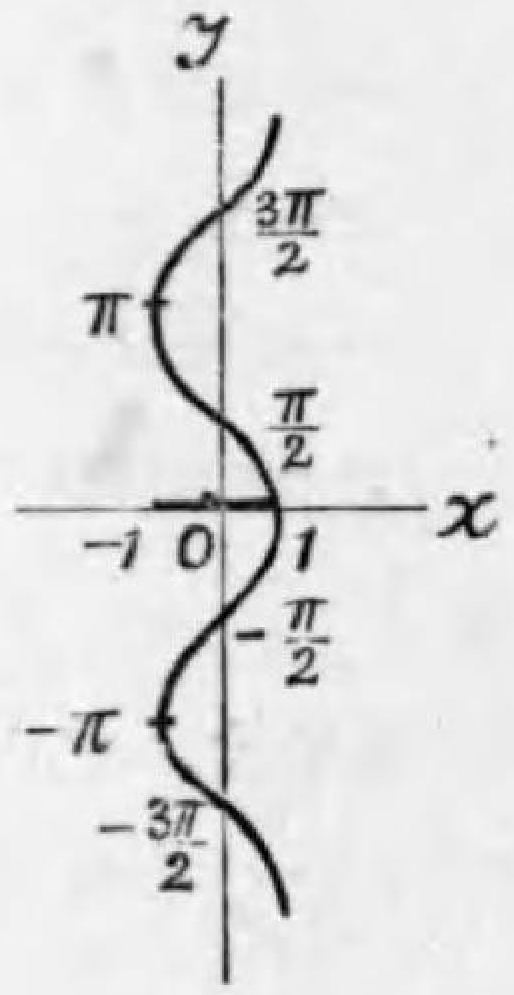
$$y=\tan^{-1}x \qquad y=\cot^{-1}x$$

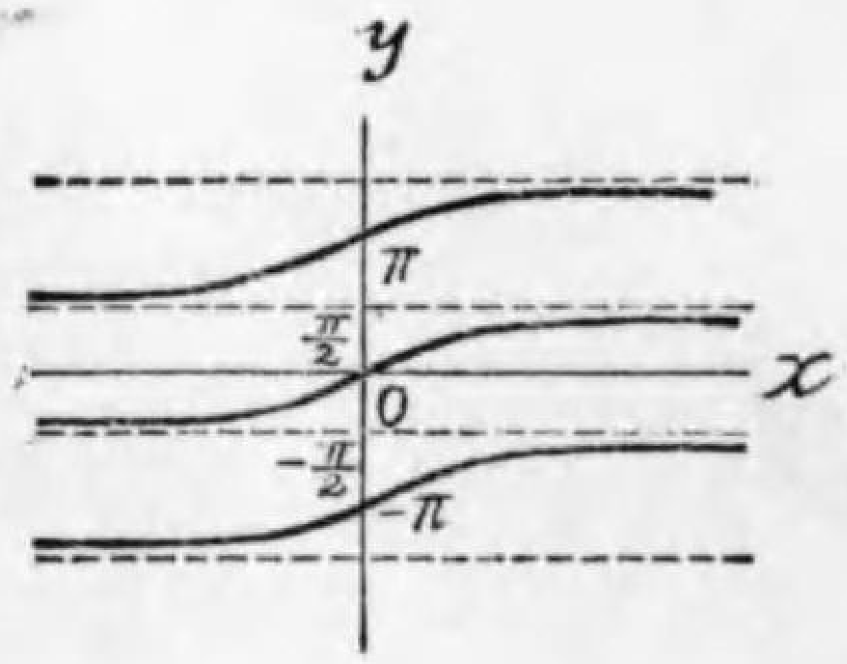
ハ x ノ任意ノ實數ニ對シテ y ハ實數ナリ．又正割及ビ餘割函數ハ -1 ト 1 トノ間ノ値ヲノミ取ラザルガ故ニ

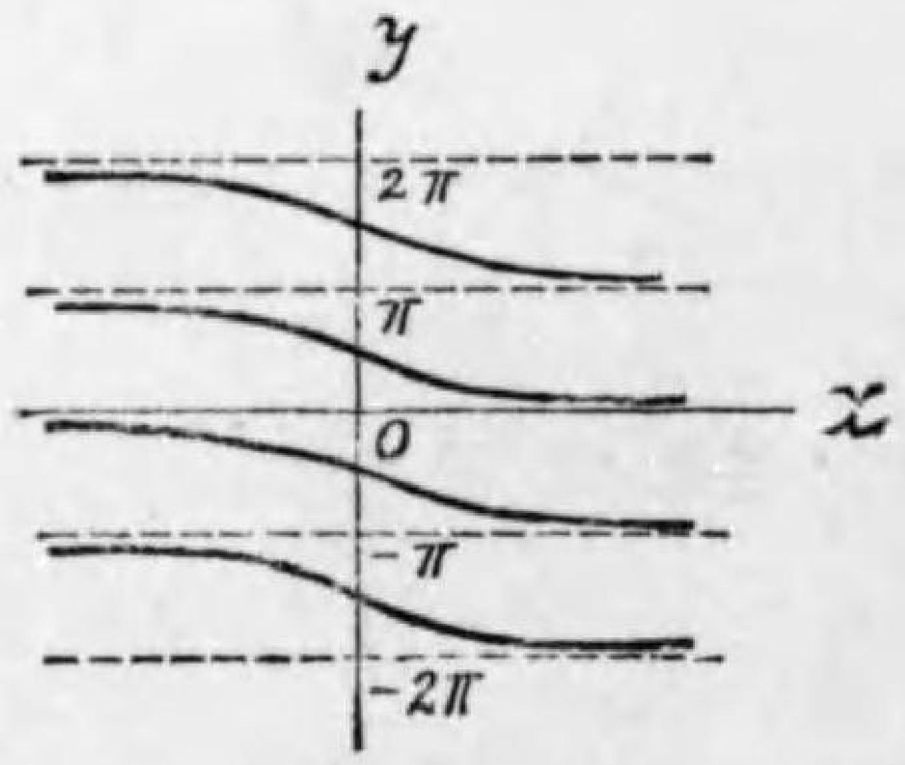
$$y=\sec^{-1}x \qquad y=\operatorname{cosec}^{-1}x$$

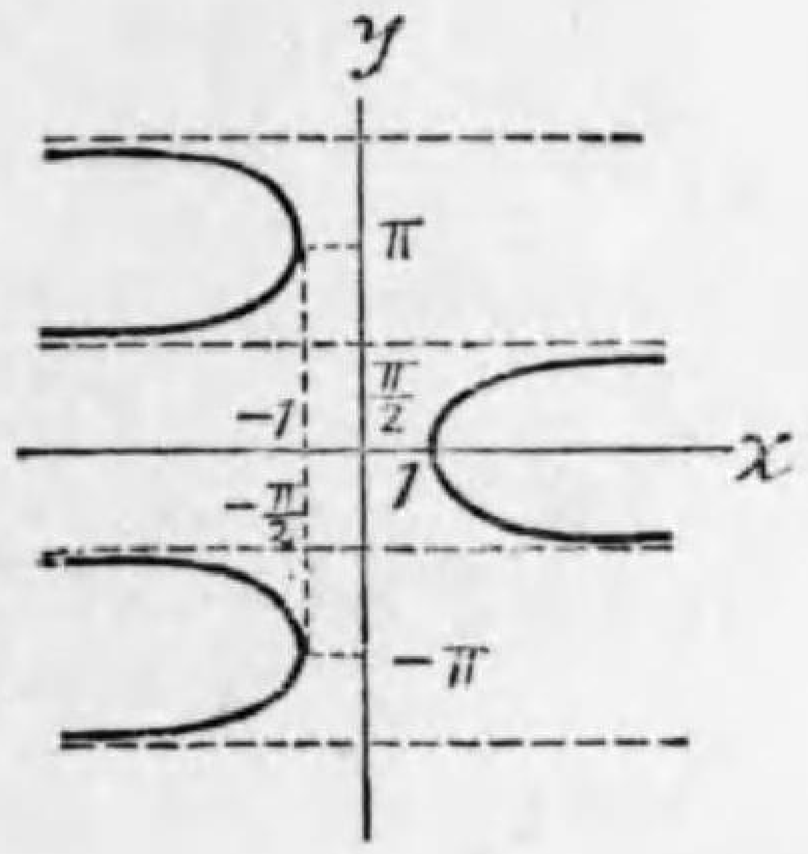
ハ $-1\geqq x$ 及ビ $x\geqq 1$ ナル x ノ凡テノ値ニ對シテ y ノ値ハ實數ナリ．而シテ夫等ノぐらふハ次ノ如シ．

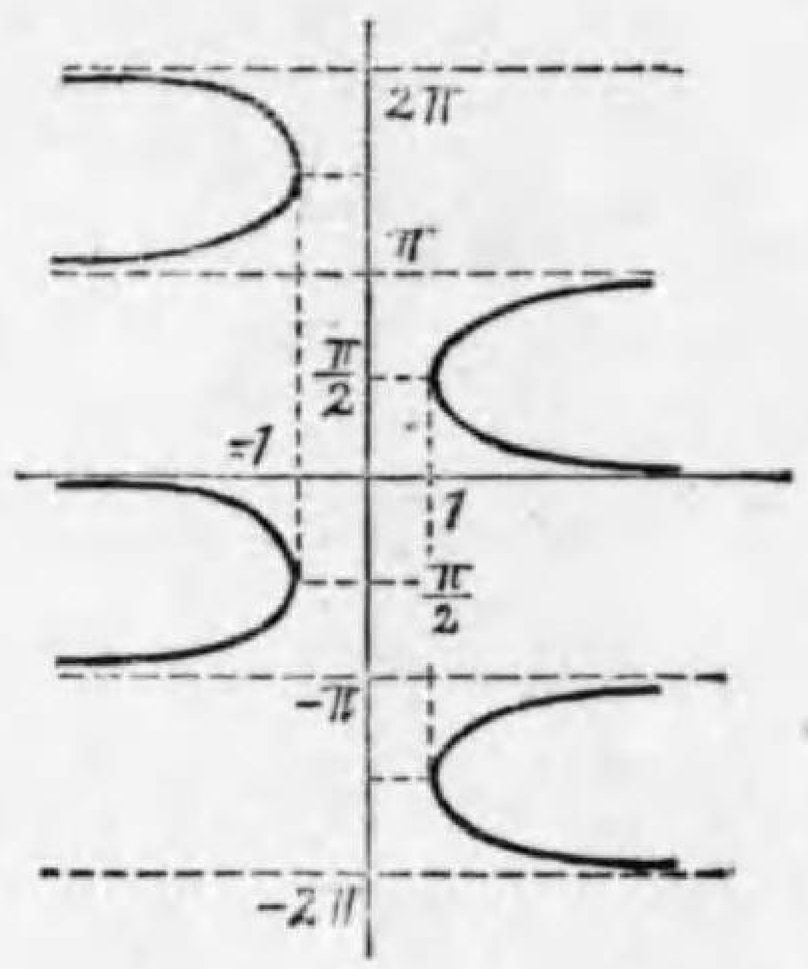

$y=\sin^{-1}x$


$y=\cos^{-1}x$


$y=\tan^{-1}x$


$y=\cot^{-1}x$


$y=\sec^{-1}x$


$y=\mathrm{cosec}^{-1}x$

108. 三角函數ハ週期函數ナルガ故ニ其逆三角函數ハ凡テ多値函數ナリ.

例ヘバ

$$x=\sin y$$

ヲ滿足スル一ツノ角ヲ α トスレバ

$$y=n\pi+(-1)^n\alpha$$

ナルガ故ニ

$$y=\sin^{-1}x$$

ニ於テ x ニアル値ヲ代入スレバ, 之ニ對應スル y ノ値ハ無數ニアリ. 從ツテ逆三角函數ハ凡テ**多値函數**ナリト稱セラル然レドモ次ノ如キ制限ヲ加フル時ハ之等ノ逆函數ハ凡テ x ノ**一値函數**トナル.

$$-\frac{\pi}{2}\leqq\sin^{-1}x\leqq\frac{\pi}{2}$$

$$0\leqq\cos^{-1}x\leqq\pi$$

$$-\frac{\pi}{2}\leqq\tan^{-1}x\leqq\frac{\pi}{2}$$

$$0\leqq\cot^{-1}x\leqq\pi$$

$$0\leqq\sec^{-1}x\leqq\pi$$

$$-\frac{\pi}{2}\leqq\mathrm{cosec}^{-1}x\leqq\frac{\pi}{2}$$

カクノ如ク制限シタル反三角函數ノ値ヲ其**主値**トイフ. 次下本書ニテハ此規約ニ從フモノトス.

然ル時ハ

$$\left.\begin{aligned}\sin^{-1}\frac{1}{2}&=\frac{\pi}{6}\\ \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}&=\frac{\pi}{3}\\ \sin^{-1}1&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)&=-\frac{\pi}{6}\\ \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)&=-\frac{\pi}{3}\\ \sin^{-1}(-1)&=-\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}&=\frac{\pi}{4}\\ \cos^{-1}\frac{1}{2}&=\frac{\pi}{3}\\ \cos^{-1}1&=0\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)&=\frac{3\pi}{4}\\ \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)&=\frac{2\pi}{3}\\ \cos^{-1}(-1)&=\pi\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}&=\frac{\pi}{6}\\ \tan^{-1}\infty&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)&=-\frac{\pi}{6}\\ \tan^{-1}(-\infty)&=-\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}$$

及ビ

$$\left.\begin{aligned}\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}&=\frac{\pi}{3}\\ \cot^{-1}\infty&=0\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)&=\frac{2\pi}{3}\\ \cot^{-1}(-\infty)&=\pi\end{aligned}\right\}$$

6.60

4.60

等ハ容易ニ知ラル.

注意 嚴格ニイヘバ $\tan\frac{\pi}{2}$ 等ハ無意義ナリ. 從ツテ $\tan^{-1}\infty=\frac{\pi}{2}$ ナリトスルハ不都合ナリ. 然レドモシバラク從來ノ慣例ニ從フ. 其他モ亦之ニ準ズ.

109. 逆三角函數相互ノ關係

$$x=\cos y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\qquad\pi\geqq y\geqq0$$

a = Cos φ

トスレバ

$$\frac{\pi}{2}-y=\sin^{-1}x,\qquad y=\cos^{-1}x$$

ナルガ故ニ

$$\left.\begin{array}{ll} & \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}\\ \text{同樣ニ} & \tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}\\ & \sec^{-1}x+\mathrm{cosec}^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之等ハ何レモ主値ノ間ニ於テ成立スルモノニシテ, 一般的ニ成立ストイフベカラズ.

110. $\sin^{-1}x$ ハ正弦ノ値ハ x ニ等シキ角トイフ義ナルガ故ニ

$$\sin(\sin^{-1}x)=x$$

ナリ. 同樣ニ

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\cos^{-1}x)=x\quad\tan(\tan^{-1}x)=x\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナリ.

[注意] 初學者ハ往々ニシテ $\sin^{-1}x$ ト $(\sin x)^{-1}$, 及ビ $\cos^{-1}x$ ト $(\cos x)^{-1}$ 等ヲ混

同スルコトアリ．注意スベシ．

例 1. $2\sin^{-1}\frac{1}{2}=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルコトヲ證セヨ．

〔解〕 $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ ＝應ズル角ハ其主值ヲトラバ $\frac{\pi}{6}$ ナリ．故＝

$$2\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$$

然ル＝

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ナルガ故＝

$$2\sin^{-1}\frac{1}{2}=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例 2. $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ ナルコトヲ證セヨ．

〔解〕 $\tan^{-1}x=y$ トスレバ $\tan y=x$ ナリ．

サテ

$$\tan 2y=\frac{2\tan y}{1-\tan^2 y}$$

ナルガ故＝

$$\tan 2y=\frac{2x}{1-x^2}$$

故＝

$$\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=2y$$

次＝

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y}=\cos 2y$$

ナルガ故＝

$$\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=2y$$

從ツテ

$$\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$$

ナリ．

例 3. $$2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

ナルコトヲ證セヨ．

解 $\tan^{-1}\frac{1}{3}=\alpha$ ト置ケバ $\tan\alpha=\frac{1}{3}$ ＝シテ $\tan^{-1}\frac{1}{7}=\beta$ ト置ケバ $\tan\beta=\frac{1}{7}$ ナリ．而シテ

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$$

ナルガ故＝

$$\tan(2\alpha+\beta)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\beta}{1-\tan 2\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\frac{1}{7}}=1=\tan\frac{\pi}{4}$$

故＝

$$2\alpha+\beta=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

例 4. 次ノ式ヲ簡單＝セヨ．

$$\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

解 $$\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\tan^{-1}y$$

ト置ケバ

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=y$$

コレヲ x ＝就キテ解ケバ

$$x=\frac{2y}{1-y^2}$$

故＝ $$\tan^{-1}x=2\tan^{-1}y\ .$$

從ツテ $$\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\tan^{-1}y=\frac{1}{2}\tan^{-1}x.$$

例 5. $$3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$$

ナルコトヲ證セヨ．

解 $$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

今 $\sin\theta=x$ トスレバ $\theta=\sin^{-1}x$ ナリ．故ニ

$$\sin 3\theta=3x-4x^3$$

ヨツテ

$$3\theta=\sin^{-1}(3x-4x^3)$$

從ツテ

$$3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$$

例 6. 方程式

$$\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$$

ヲ解ケ

解 $\tan^{-1}a=\theta$ ト置ケバ $\tan\theta=a$ ニシテ且ツ

$$\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2a}{1+a^2}$$

故ニ

$$\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}=2\theta=2\tan^{-1}a,$$

同様ニ

$$\sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}b$$

ナルガ故ニ，與ヘラレタル方程式ハ

$$2\tan^{-1}a+2\tan^{-1}b=2\tan^{-1}x$$

從ツテ

$$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}x$$

兩邊ノ正切ヲ求ムレバ

$$\frac{\tan(\tan^{-1}a)+\tan(\tan^{-1}b)}{1-\tan(\tan^{-1}a\tan(\tan^{-1}b)}=\tan(\tan^{-1}x)$$

即チ

$$\frac{a+b}{1-ab}=x$$

例 7.

$$\tan^{-1}\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ca}}$$
$$+\tan^{-1}\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}=\pi$$

ナルコトヲ證セヨ．

解

$$\tan^{-1}\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}=\alpha,\quad \tan^{-1}\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ca}}=\beta$$
$$\tan^{-1}\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}=\gamma$$

トスレバ

$$\tan\alpha=\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}\qquad \tan\beta=\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ca}}$$
$$\tan\gamma=\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}$$

ナリ．從ツテ α,β,γ ハ何レモ零ニアラズシテ而カモ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ小ナル正角ナリ．

（108 節）……………(1)

又

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$$

コノ分子ニ上ノ値ヲ代入スレバ零トナル．故ニ

$$\alpha+\beta+\gamma=n\pi \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナラザルベカラズ．

故ニ (1), (2) ヨリ

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

例 8.

$$\tan^{-1}\frac{x}{y}=\tan^{-1}\frac{c_1x-y}{c_1y+x}+\tan^{-1}\frac{c_2-c_1}{c_2c_1+1}$$
$$+\tan^{-1}\frac{c_3-c_2}{c_3c_2+1}+\cdots\cdots+\tan^{-1}\frac{c_n-c_{n-1}}{c_nc_{n-1}+1}+\tan^{-1}\frac{1}{c_n}$$

ナルコトヲ證セヨ．但シ $c_1, c_2, c_3,\cdots\cdots c_n$ ハ任意ノ實數ナリトス．

解

$$\tan^{-1}\frac{c_1x-y}{c_1y+x}=\tan^{-1}\frac{\frac{x}{y}-\frac{1}{c_1}}{1+\frac{x}{c_1y}}=\tan^{-1}\frac{x}{y}-\tan^{-1}\frac{1}{c_1}$$

同様ニ

$$\tan^{-1}\frac{c_2-c_1}{c_2c_1+1}=\tan^{-1}\frac{1}{c_1}-\tan^{-1}\frac{1}{c_2}$$
$$\tan^{-1}\frac{c_3-c_2}{c_3c_2+1}=\tan^{-1}\frac{1}{c_2}-\tan^{-1}\frac{1}{c_3}$$

……

邊々相加フレバ容易ニ所要ノ結果ヲ得ベシ.

問題 18.

次ノ等式ヲ證明セヨ. (1—8)

1. $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\frac{\pi}{4}$,

2. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$,

3. $\cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{82}}+\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{41}}{4}=\frac{\pi}{4}$,

4. $\tan^{-1}\{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha\}-\tan^{-1}\{(\sqrt{2}-1)\tan\alpha\}=\tan^{-1}(\sin 2\alpha)$

5. $\frac{a^3}{2}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{a}{b}\right)+\frac{b^3}{2}\sec^2\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)=(a+b)(a^2+b^2)$

6. $\cos^{-1}x+\cos^{-1}(-x)=\pi$

7. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}(-x)=0$

8. $2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}\right)$

9. 若シ $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$ ナル時ハ

$$xy+yz+zx=1$$

ナルコトヲ證セヨ.

10. 若シ $\sec\theta-\operatorname{cosec}\theta=\frac{4}{3}$ ナル時ハ

$$\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

ナルコトヲ證セヨ.

11. $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$

ナルコトヲ示セ.

12. $\tan^{-1}\frac{m}{n}-\tan^{-1}\frac{m-n}{m+n}=\frac{\pi}{4}$

ナルコトヲ示セ.

13. $\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)=\frac{x+y}{1-xy}$

ナルコトヲ示セ.

14. 方程式

$$\sin^{-1}2x-\sin^{-1}x\sqrt{3}=\sin^{-1}x$$

ヲ解ケ.

15. 方程式

$$\tan^{-1}\frac{1}{a-1}=\tan^{-1}\frac{1}{x}+\tan^{-1}\frac{1}{a^2-x+1}$$

ヲ解ケ.

16. 方程式

$$\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1}+\tan^{-1}\frac{x-1}{x}=\tan^{-1}(-7)$$

ヲ解ケ.

第十九章

簡單ナル級數ノ和

111. 等差級數ヲナス角ノ正弦ノ和

等差級數ヲナス n 個ノ角ヲ

$$\alpha,\ \alpha+\beta,\ \alpha+2\beta,\ \ldots\ldots\ldots\{\alpha+(n-1)\beta\}$$

トシ

$$S=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots\ldots+\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}$$

ト置キ以テ其和ヲ求メントス. 然ルニ第八章公式 (21) ニヨレバ

$$2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)$$

$$2\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)$$

$$2\sin(\alpha+2\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)$$

$\alpha+n\beta+\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}$

$\alpha+n\beta-\frac{2\beta+\beta}{2}$

……………………………………………

$$2\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin\frac{\beta}{2}=\cos\left\{\alpha+\left(n-\frac{3}{2}\right)\beta\right\}-\cos\left\{\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right\}$$

$\alpha+(n-\frac{3}{2})\beta$

邊々相加フレバ

$$2\sin\frac{\beta}{2}S=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left\{\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right\}$$

$\alpha+n\beta-\beta+\frac{\beta}{2}$

故ニ求ムル結果ハ

$$S=\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left\{\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right\}}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

或ハ簡單ニシテ

$\alpha+(n-\frac{1}{2})\beta$

$$S=\frac{\sin\left\{\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right\}\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

コノ公式ニ於テ $\beta=2\alpha$ ト置カバ

$$\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\ldots\ldots+\sin 2n-1)\alpha$$

$$=\frac{\sin\{\alpha+(n-1)\alpha\}\sin n\alpha}{\sin\alpha}$$

$na-a$　na

$$=\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ヲ得.

112. 等差級數ヲナス角ノ餘弦ノ和

等差級數ヲナス n 個ノ角ヲ

$$\alpha,\ \alpha+\beta,\ \alpha+2\beta,\ \ldots\ldots\ldots\alpha+(n-1)\beta$$

トシ

$$S=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots\ldots+\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}$$

トス.

然ル時第八章公式 (21) ニヨレバ

$$2\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$2\cos(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)$$

$si\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-si\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)$

$si\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-si\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)$

$$2\cos(\alpha+2\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)$$

……………………………………………………

$$2\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left\{\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right\}$$
$$-\sin\left\{\alpha+\left(n-\frac{3}{2}\right)\beta\right\}$$

邊々相加フレバ

$$2S\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left\{\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right\}-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)$$

$\frac{2n-1}{2}\beta$

故ニ求ムル結果ハ

$n+\frac{1}{2}$

$$S=\frac{\sin\left\{\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right\}-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta-$

$\frac{\beta}{2}$

$n\beta-\frac{1}{2}\beta$

$\alpha+d$

$n-\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}$

$\alpha+n\pi\frac{1+\beta}{2}$

或ハ簡單ニシテ

$$S=\frac{\cos\left\{\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right\}\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此公式ニ於テ $\beta=2\alpha$ ト置ケバ

$$\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\ldots\ldots+\cos(2n-1)\alpha$$
$$=\frac{\cos n\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ヲ得.

113. 公式 (1), (3) ニ於テ $\sin\frac{n\beta}{2}$ ノ値ハ零ナル時, 卽チ

$$\frac{n\beta}{2}=m\pi\qquad(\text{但シ } m \text{ ハ正, 負ノ整數})$$

ナル時ハ S ノ値ハ共ニ零ナリ. $a\sim\pi$

故ニ m ハ任意ノ正, 負ノ整數ナル時ハ

$$\beta=m\frac{2\pi}{n}$$

ヲ公差トスル n 個ノ角ノ正弦及ビ餘弦ノ和ハ何レモ零ナリ. 從ツテ

$$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots\ldots$$

及ビ

$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{8\pi}{n}\right)+\ldots\ldots$$

ナル n 項ノ和ハ共ニ零ナリ.

114. 百十一節ニ述ベタル公式ヲ利用スレバ

$$\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}$$

ヲ求ムルコトヲ得.

何トナレバ與ヘラレタル級數ヲ書キカフレバ

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta+\pi)+\sin(\alpha+2\beta+2\pi)+\ldots\ldots$$
$$+\sin\{\alpha+(n-1)(\beta+\pi)\}$$

トナルガ故ニ公式 (1) ノ β ノ代リニ $\beta+\pi$ ト置ケバヨシ.

故ニ求ムル結果ハ

$$S=\frac{\sin\left\{\alpha+\frac{(n-1)(\beta+\pi)}{2}\right\}\sin\frac{n(\beta+\pi)}{2}}{\sin\frac{\beta+\pi}{2}}$$