13. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

14. $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \Big\{f(x) + f(a-x)\Big\}dx$

15. $f(x)=f(a-x)$ ナルトキハ $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$, $f(x) = -f(a-x)$ ナルトキハ $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=0.$

16. $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a \Big\{f(x) + f(-x)\Big\}dx$

17. $f(x) = f(-x)$ ナルトキハ $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, $f(x) = -f(-x)$ ナルトキ $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

次ノ等式ヲ證明セヨ (18—20).

18. $\displaystyle\int_a^b f(kx)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(x)dx$

19. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{a}} f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x} = \int_{\sqrt{a}}^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x}$

20. $a > 0$ ニシテ $f(x) = f\left(\dfrac{a}{x}\right)$ ナルトキハ $\displaystyle\int_1^a f(x)\frac{dx}{x} = 2\int_1^{\sqrt{a}} f(x)\frac{dx}{x}$

21. k ガ小ナルトキ次ノ近似公式ヲ證明セヨ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}} \fallingdotseq \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4\right\}$$

45. 異常積分

第 41 節ニ於ケル定積分ノ定義ニヨレバ

$$\int_a^b f(x)dx$$

ハ次ノ場合ニハ意味ヲ持タナイコトニナル.

（1） $f(x)$ ガ區域 (a, b) 内ニテ連續デナイ場合

（2） 上限又ハ下限ガ無限大トナル場合

コノ様ナ場合ニ於テモ定積分ニ意義ヲ持タセルタメニ吾人ハ或

規約ヲ設ケルノデアル. 此新タナル意義ヲ持ツ定積分ヲ**異常積分**又ハ**無限積分**ト云ヒ, 之ト區別スルタメニ第 41 節ニ定義シタ定積分ヲ**常積分**ト稱スル.

先ヅ第一ノ場合卽チ $f(x)$ ガ區域 (a, b) 内ニテ連續デナイ場合ヲ考ヘル.

以下説明ノ便宜上 $a < b$ ト假定シテ置ク. $a > b$ ナル場合ハ類推セラレタイ.

(i) 被積分函數 $f(x)$ ハ $a \leqq x < b$ ナル x ニ對シテ連續デアルガ $x = b$ ニ於テ不連續トナル場合.[1]

此場合ニハ ε ヲ如何ニ小ナル正數トスルモ積分 $\displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ ハ第 41 節ノ定義ニ從ツテ定値ヲ取ル. 此時

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

ヲ以テ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ノ値ト定メル. 卽チ

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}\ ^{(2)}$$

例ヘバ $\displaystyle\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -2\Big[\sqrt{1-x}\Big]_0^{1-\varepsilon} = 2(1-\sqrt{\varepsilon})$

デアルカラ $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0} 2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2$

---

(1) 無限大トナツテ不連續トナルモ又ハ有限デ不連續トナルモ何レデモ宜シイノデアル.

(2) 此等式ハ右邊ガ定値 k ヲ取ルナラバ左邊モ k, 右邊ガ $+\infty$ $(-\infty)$ ナラバ左邊モ $+\infty$ $(-\infty)$, 又右邊ガ不定ナラバ左邊モ不定デアルコトヲ示スモノト規約スル. 以下ニ於テモ同様デアル.

又 $$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{1-x}\,dx = -\Big[\log(1-x)\Big]_0^{1-\varepsilon} = -\log\varepsilon$$

デアルカラ

$$\int_0^1\frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}(-\log\varepsilon) = +\infty$$

(ii) 被積分函數 $f(x)$ ガ積分ノ下限 a ニ於テ不連續トナル場合.

此時ハ $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ ヲ以テ $\int_a^b f(x)\,dx$ ヲ定義スル.

例ヘバ $$\int_\varepsilon^1\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\Big[\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1 = 2\Big(1-\sqrt{\varepsilon}\Big)$$

デアルカラ $$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}2\Big(1-\sqrt{\varepsilon}\Big) = 2$$

又 $$\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_\varepsilon^1 = -\log\varepsilon$$

デアルカラ $$\int_0^1\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[-\log\varepsilon\Big] = +\infty$$

(iii) 被積分函數 $f(x)$ ガ積分ノ上限 b 及ビ下限 a ニ於テ不連續トナル場合.

此時ハ $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\int_{a+\varepsilon'}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$[1] ヲ以テ $\int_a^b f(x)\,dx$ ヲ定義スル.

例ヘバ $$\int_{-1+\varepsilon'}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(1-\varepsilon)-\sin^{-1}(-1+\varepsilon')$$

デアルカラ $$\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\Big\{\sin^{-1}(1-\varepsilon)-\sin^{-1}(-1+\varepsilon')\Big\}$$
$$= \sin^{-1}1-\sin^{-1}(-1) = \pi.$$

(1) 此式ハ二ツノ變數ノ函數ノ極限値デアツテ斯クノ如キ極限値ヲ吾人ハ未ダ知ラナイノデアルガ一變數ノ函數ノ極限値カラ大體推シ得ルデアラウ.

(iv) 被積分函數 $f(x)$ ガ區域 (a,b) 內ノ有限個ノ値 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ニ對シテ不連續トナル場合.

$$a\leqq x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n\leqq b$$

トスルナラバ上ノ規約ニヨリ

$$\int_a^{x_1}f(x)\,dx,\quad \int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx,\quad \ldots\ldots,\quad \int_{x_n}^b f(x)\,dx$$

ハ意味ヲ持ツ.[1] 是等ノ積分ノ和卽チ

$$\int_a^{x_1}f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx+\cdots\cdots+\int_{x_n}^b f(x)\,dx$$

ヲ以テ $\int_a^b f(x)\,dx$ ヲ定義スル.

例ヘバ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ハ $x=0$ ニ於テ不連續トナルカラ

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

而シテ $$\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big]_{-1}^{-\varepsilon} = -\frac{3}{2}$$

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big]_\varepsilon^1 = \frac{3}{2}$$

ナル故 $$\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 0$$

又 $\dfrac{1}{x^2}$ モ $x=0$ ニ於テ不連續トナルカラ

$$\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0\frac{1}{x^2}\,dx+\int_0^1\frac{1}{x^2}\,dx$$

(1) コレラノ積分中一ツニテモ不定ノモノガアレバ $\int_a^b f(x)\,dx$ ハ不定デアルモノト定メル.

而シテ
$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\varepsilon}=+\infty$$
$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1}=+\infty$$
$$\therefore\quad\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx=+\infty$$

以上 (i) ヨリ (iv) マデ＝定義シタ積分ヲ**第一種ノ異常積分**ト稱スル.

$f(x)$ ガ區域 (a,b) 内ノ有限個ノ點＝於テ不連續トナルモ其他ノ點＝テハ連續デアツテ而シテ $f(x)$ ノ基函數 $\mathrm{F}(x)$ ガ區域 (a,b) 内＝テ連續デアル場合[1]＝ハ異常積分 $\int_a^b f(x)dx$ ハヤハリ

$$\int_a^b f(x)dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$$

＝ヨツテ計算スルコトガ出來ルノデアル. 何トナレバ $f(x)$ ガ區域 (a,b) 内ノ n 個ノ値 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ＝對シテ不連續トナルトスルト

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_1}f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx+\cdots\cdots+\int_{x_n}^{b}f(x)dx$$

デアツテ

$$\int_a^{x_1}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{x_1-\varepsilon}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\mathrm{F}(x_1-\varepsilon)-\mathrm{F}(a)\right]$$

(1) $x=x_1$ ＝對シテ $f(x)$ ガ不連續トナル場合＝ハ $x=x_1$ ＝對シテ $f(x)$ ノ値ガ定義セラレテ居ナイノガ普通デアル. 斯カル場合＝ $f(x)$ ノ基函數 $\mathrm{F}(x)$ ガ $x=x_1$ ＝於テ連續デアルト云フハ實ハ無意味デアル. コレハ $\lim_{x\to x_1+0}\mathrm{F}(x)=\lim_{x\to x_1-0}\mathrm{F}(x)$ ナルコトヲ意味スルモノト解釋セラレタイ. 而シテ此極限植ヲ $\mathrm{F}(x_1)$ ＝テ表スモノト承知セラレタイ.

$\mathrm{F}(x)$ ハ $x=x_1$ ＝於テ連續ナルガ故＝
$$=\mathrm{F}(x_1)-\mathrm{F}(a)$$

同ジク
$$\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=\mathrm{F}(x_2)-\mathrm{F}(x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad\int_a^b f(x)dx=\left\{\mathrm{F}(x_1)-\mathrm{F}(a)\right\}+\left\{\mathrm{F}(x_2)-\mathrm{F}(x_1)\right\}+\cdots\cdots$$
$$+\left\{\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(x_n)\right\}=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

コノ性質ヲ利用スレバイチイチ異常積分ノ定義＝戻ラズシテ機械的＝其値ヲ算出スルコトガ出來ル.

例ヘバ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ノ不定積分 $\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ ハ區域 $(-1,1)$ 間＝テ連續デアルカラ

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{1}=\frac{3}{2}(1-1)=0$$

併シナガラ $f(x)$ ノ基函數 $\mathrm{F}(x)$ ガ區域 (a,b) 内＝テ連續デナイ場合＝此公式ヲ用フルコトハ禁物デアル.

例ヘバ前＝示セル如ク $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}dx=+\infty$ デアル＝モ拘ラズ, $\dfrac{1}{x^2}$ ノ不定積分 $\mathrm{F}(x)$ ヲ求メ機械的＝ $\mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(-1)$ ヲ計算シテ $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}dx$ ＝等シト置クナラバ

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-1-1=-2$$

ナル誤マレル結果＝到達スルノデアル.

注意. 第 42 節＝述ベタ (i) カラ (iv) マデノ性質ハ上ノ異常積分＝對シテモ成立スルノデアル. 又第 43 節＝出シタ置換積分法ノ公式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2}f\{\phi(t)\}\phi'(t)dt\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

及ビ第 44 節ニ出シタ部分積分法ノ公式

$$\int_a^b f(x)\phi'(x)\,dx = \Big[f(x)\phi(x)\Big]_a^b - \int_a^b \phi(x)f'(x)\,dx \quad \cdots\text{(B)}$$[1]

モ異常積分ニ對シテ成立スル．但シ (A), (B) 式ニ於ケル左邊若シクハ右邊ガ常積分ニナルコトモアル．

例　　$\mathrm{B} = \int_0^a \dfrac{x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \qquad (a>0)$

$x = a\sin\theta$ ト置クナラバ $dx = a\cos\theta\,d\theta$ デアツテ θ ガ 0 カラ $\dfrac{\pi}{2}$ マデ變ズル間ニ x ハ 0 カラ a マデ變化スル．故ニ

$$\mathrm{B} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin\theta)^4 \cdot \frac{1}{a\cos\theta} \cdot a\cos\theta\,d\theta = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\,d\theta.$$

積分 B ハ異常積分デアルガ此式ノ右邊ハ常積分デアル．斯クノ如ク異常積分ガ常積分ニ變ズルコトハ往往ニアル．此式ヨリ

$$\mathrm{B} = a^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \left(\text{第44節, 例 1}\right) = \frac{3}{16}\pi a^4$$

次ニ第二ノ場合卽チ積分ノ上限又ハ下限ガ無限大トナル場合ヲ考察スル．

a ヨリ大ナル總テノ ξ ニ對シテ積分 $\int_a^\xi f(x)\,dx$ ハ存在スルモノト假定スル．[2] $\xi \to +\infty$ ナルトキノ此積分ノ極限ヲ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ニテ表ス．卽チ

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\xi\to+\infty} \int_a^\xi f(x)\,dx$$

---

(1) 此式ニ於ケル $f(x)\phi(x)$ ハ a, b 間ニテ連續デ且ツ兩邊ニアル積分ノ中一ツガ存在スルコトノ假定ガ實ハ入用ナノデアル．

(2) 此積分ハ常積分デモ第一種ノ異常積分デモ何レデモ宜シイ．

同樣ニ　$\int_a^{-\infty} f(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx,\quad \int_\infty^b f(x)\,dx$ 等ヲ定義スルコトガ出來ル．

例ヘバ　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\xi\to+\infty} \int_0^\xi \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\xi\to+\infty} \Big[\tan^{-1}x\Big]_0^\xi = \frac{\pi}{2}$

之ヲ次ノ樣ニ書イテ表ス．

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\tan^{-1}x\Big]_0^\infty = \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$$

更ニ $\xi_1 \to -\infty$, $\xi_2 \to +\infty$ ナルトキノ定積分 $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx$ ノ極限値ヲ $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ ニテ表ス．

例ヘバ　$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{\xi_1\to-\infty\\ \xi_2\to+\infty}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$= \lim_{\substack{\xi_1\to-\infty\\ \xi_2\to+\infty}} \Big[\tan^{-1}\xi_2 - \tan^{-1}\xi_1\Big] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

之ヲ次ノ如クニ書ク．

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\tan^{-1}x\Big]_{-\infty}^\infty = \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}(-\infty)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

コレラノ積分卽チ上限，下限ノ一方又ハ雙方ガ無限大トナル積分ヲ**第二種ノ異常積分**ト稱スル．

第二種ノ異常積分ニ關スル置換積分法及ビ部分積分法ノ公式モ亦常積分ノ場合ト同樣デアル．

例 1.　　$\mathrm{B} = \int_0^\infty \dfrac{1}{(a^2+x^2)^n}\,dx \qquad (a>0)$

$x = a\tan\theta$　ト置クナラバ　$dx = a\sec^2\theta\,d\theta$

デアツテ θ ガ 0 ヨリ $\dfrac{\pi}{2}$ マデ變ズル間ニ x ハ 0 ヨリ ∞ マデ變化スル．故ニ

$$\mathrm{B}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(a^2+a^2\tan^2\theta)^n}\cdot a\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{a^{2n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}\theta\,d\theta.$$

右邊ノ積分ハ $2n$ ガ 2 以上ノ整數デアルナラバ第 44 節, 例 1 ノ公式ヲ用ヒテ計算スルコトガ出來ル. 例ヘバ

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(a^2+x^2)^2}\,dx=\frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{a^3}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{a^2}$$

例 2. $\mathrm{B}_n=\int_0^{\infty}x^ne^{-\alpha x}dx \quad (\alpha>0,\ n,\ 正整數)$

$$\int x^ne^{-\alpha x}\,dx=-\frac{1}{\alpha}\Big[x^ne^{-\alpha x}-n\int x^{n-1}e^{-\alpha x}\,dx\Big]$$

デアルカラ $\mathrm{B}_n=-\frac{1}{\alpha}\Big[x^ne^{-\alpha x}\Big]_0^{\infty}+\frac{n}{\alpha}\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-\alpha x}\,dx.$

然ルニ $x^ne^{-\alpha x}=\left(\dfrac{x}{e^{\frac{\alpha}{n}x}}\right)^n$

デアッテ極限値計算ノ公式 (第 27 節, II) ニヨリ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{\alpha}{n}x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\alpha}{n}e^{\frac{\alpha}{n}x}}=0$$

デアルカラ $\lim_{x\to+\infty}x^ne^{-\alpha x}=0$

$$\therefore\quad \mathrm{B}_n=\frac{n}{\alpha}\mathrm{B}_{n-1}$$

コレガ B_n ノ漸化式デアル. コレヨリ

$$\mathrm{B}_n=\frac{n(n-1)\ldots\ldots2.1}{\alpha^n}\cdot\mathrm{B}_0=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

ヲ得ル.

問 題 21.

次ノ定積分ノ値ヲ求ム (1—13).

1. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ 　 2. $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ 　 4. $\displaystyle\int_0^a\frac{x^6}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \quad (a>0)$

5. $\displaystyle\int_0^a\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ 　 6. $\displaystyle\int_0^2\frac{1}{(1-x)^2}\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^1\Big\{2(x-1)\sin\frac{1}{x-1}-\cos\frac{1}{x-1}\Big\}dx$ [不定積分ハ $(x-1)^2\sin\dfrac{1}{x-1}$ トナル]

8. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a>0,\ b>0)$ 　 9. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{2+x}{1+x^2}\,dx$ 　 11. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

12. $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx,\quad(\alpha>0)$ 　 13. $\displaystyle\int_0^{\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)^2dx$

14. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{2n-3}{2n-2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$ ヲ證明セヨ [$x=\tan\theta$ ト置ケ]

15. $\displaystyle\int_0^{\infty}x^ne^{-x^2}dx=\frac{n-1}{2}\int_0^{\infty}x^{n-2}e^{-x^2}dx$ ヲ證明シ, 之ヲ用ヒテ n ガ正整數ナルトキハ $\displaystyle\int_0^{\infty}x^{2n+1}e^{-x^2}dx=\frac{n!}{2}$ ナルコトヲ示セ.

16. n ヲ正整數, m ヲ -1 ヨリ大ナル數トセバ

$$\int_0^1x^m(\log x)^ndx=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$$

ナルコトヲ證明セヨ [部分積分法ノ公式ヲ適用シテ漸化式ヲ作レバ宜シイ. 又ハ $x=e^{-t}$ ト置イテ $(-1)^n\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-(m+1)t}t^ndt$ ナル積分ニ變換シテモ宜シイ].

17. 不等式 $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}<\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{\pi}{2}$ ヲ證明セヨ.

18. $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ナルトキ $\sin\theta>\dfrac{2}{\pi}\theta$ ヲ證明シ, 之ヲ利用シテ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-r^2\sin\theta}d\theta<\frac{\pi}{2r^2}$, 從ッテ $\displaystyle\lim_{r\to\infty}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-r^2\sin\theta}d\theta=0$ ヲ誘導セヨ.

第　九　章

定　積　分　ノ　應　用

46. 和ノ極限値計算

函數 $f(x)$ ヲ區域 (a, b) 內ニテ連續ナル函數トシ

$$\frac{b-a}{n}=h$$

ト置クナラバ定積分ノ定義ニヨリ

$$\lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh),\quad \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$$

ノ如キ極限値ハ何レモ $\int_a^b f(x)dx$ ニ等シイ．即チ

$$\lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)=\lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)=\int_a^b f(x)dx$$

故ニ $\int_a^b f(x)dx$ ノ値ガ計算セラレルナラバ其結果ヲ用ヒテ上ノ如キ極限値ヲ求メルコトガ出來ル．

例 1.　$S_n=\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}$

トシテ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ヲ求ム．

S_n ヲ書キ換フレバ

$$S_n=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right\}$$

故ニ $\frac{1}{n}=h$ ト置クナラバ

$$S_n=h\left\{1+\frac{1}{1+h^2}+\frac{1}{1+(2h)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\left(\overline{n-1}\,h\right)^2}\right\}$$

$$=h\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{1+(rh)^2}=h\sum_{r=0}^{n-1}f(rh)$$

茲ニ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ デアル．ヨツテ

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\Big[\tan^{-1}x\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

$f(x)$ ガ區域 (a, b) ノ上端或ハ下端ニ於テ無限大トナル場合ニ上ノ公式ヲ適用スルハ實ハ妥當デナイ．ソレハ積分 $\int_a^b f(x)dx$ ノ意味ガ違フカラデアル．併シナガラ區域ノ上端 b ニ於テ $f(x)$ ガ無限大トナル場合ニハ[1]

$$\lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)=\int_a^b f(x)dx$$

ナル公式ガ成立シ，又下端 a ニ於テ無限大トナル場合ニハ[1]

$$\lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)=\int_a^b f(x)dx$$

ナル公式ノ成立スルコトガ證明セラレルノデアル．

例 2.　$S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$

トシテ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ヲ求ム．

S_n ヲ書キ換フレバ

$$S_n=\frac{1}{n}\left\{1+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}\right\}$$

故ニ $\frac{1}{n}=h$ ト置ケバ

(1) 詳シク云ヘバ單調ニ無限大トナル場合デアル．此證明ハ省略スル．

$$S_n = h\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(2h)^2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{1-(\overline{n-1}\,h)^2}}\right\}$$

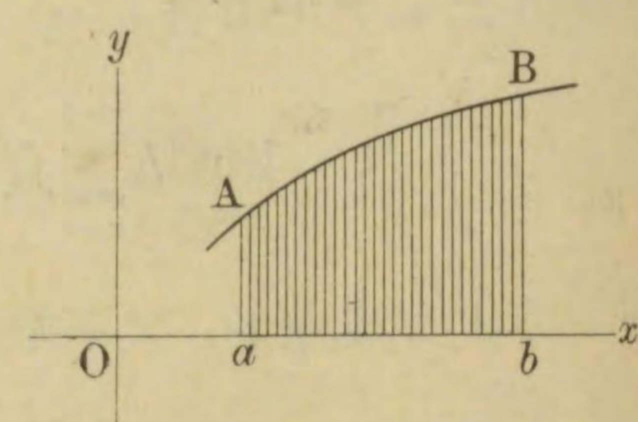
$$= h\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-(rh)^2}} = h\sum_{r=0}^{n-1} f(rh) \quad 玆ニ \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x)$ ハ區域 $(0, 1)$ ノ上端 1 ニ於テ無限大トナルガ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\sin^{-1}x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

47. 平面積

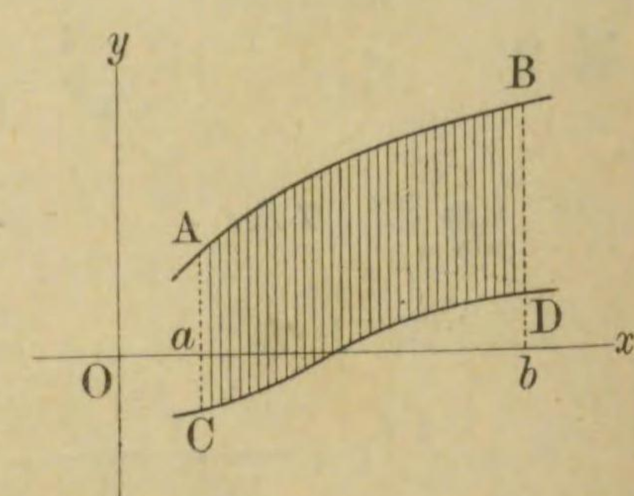
區域 (a, b)[1] 内ニテ正デアツテ且ツ連續ナル函數 $f(x)$ ノぐらふヲ $\widehat{AB}$ トスルナラバ $\widehat{AB}$ ト $x=a$, $x=b$ ナル二直線及ビ x 軸トニテ圍マレル平面圖形 $abBA$ ノ面積ハ



$$\int_a^b f(x)dx$$

ニヨツテ表サレル [第 41 節].

一般ニ區域 (a, b) 内ニテ連續ナル二ツノ函數 $y_1, y_2 (y_1 > y_2)$ ノぐらふヲ圖ノ如クソレゾレ $\widehat{AB}, \widehat{CD}$ トスルナラバ $\widehat{AB}, \widehat{CD}$ 及ビ二直線 $x=a$, $x=b$ ニヨツテ圍マレル平面圖形 CDBA ノ面積ハ



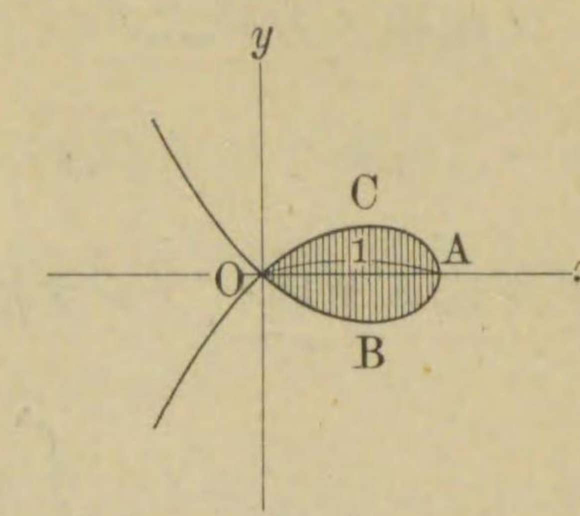
$$\int_a^b (y_1 - y_2)dx$$

ニヨツテ表サレルコトヲ容易ニ認ムルコトガ出來ル.

(1) 以下總テ $a < b$ ト假定スル.

以下ニ平面積ヲ求ムル例一，二ヲ示ス.

例 1. 曲線 $y^2 = x^2(1-x)$ ノ自閉線内ノ面積.



y ニツキ解ケバ

$$y = \pm x\sqrt{1-x}$$

トナリ曲線ハ右圖ノ如クニナル.

曲線ハ x 軸ニ關シテ對稱ナルガ故ニ x 軸ヨリ上部ニアル面積ヲ計算シテソレヲ二倍スレバ宜シイ. 故ニ自閉線 OBAC ノ面積ヲ Δ ニテ表スナラバ

$$\Delta = 2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

$\sqrt{1-x} = t$ 即チ $x = 1 - t^2$ ト置クナラバ

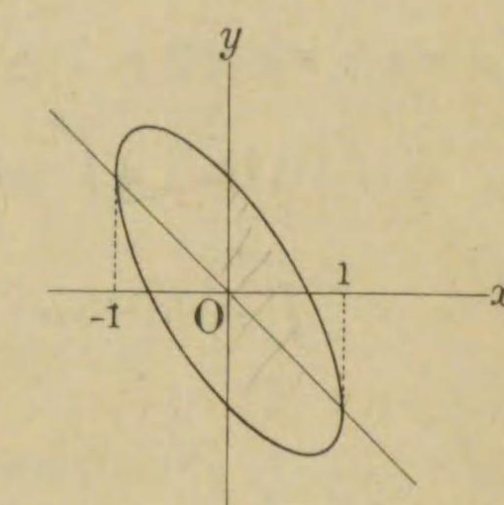
$$\Delta = 2\int_1^0 (1-t^2)t(-2t\,dt) = 4\int_0^1 (1-t^2)t^2\,dt = 4\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{15}$$

例 2. 曲線 $2x^2 + 2xy + y^2 = 1$ ノ包ム面積.

y ニツキ解ケバ

$$y = -x \pm \sqrt{1-x^2}$$

故ニ曲線ハ圖ノ如キ橢圓デアル.



$y_1 = -x + \sqrt{1-x^2}$, $y_2 = -x - \sqrt{1-x^2}$ ト置クナラバ y_1, y_2 ハ區域 $(-1, 1)$ 内ニテ實デアツテ且ツ $y_1 > y_2$ デアル. 故ニ

$$橢圓ノ全面積 = \int_{-1}^1 (y_1 - y_2)dx$$

$$= 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi.$$

曲線ノ方程式ガ $x = f(y)$ ナル形ニテ與ヘラレテ居ル場合ニ此曲線ト $y=a$, $y=b$ ナル二直線及ビ y 軸トニテ圍マレル平面圖形ノ面積ハ

$$\int_a^b f(y)dy$$

ニヨツテ表サルベキコト勿論デアル.

又曲線ノ方程式ガ

$$x=\phi(t),\qquad y=\psi(t)$$

ナル形ニテ與ヘラレテ居ル場合ニハ t_1, t_2 ヲ適當ニ選ベバ

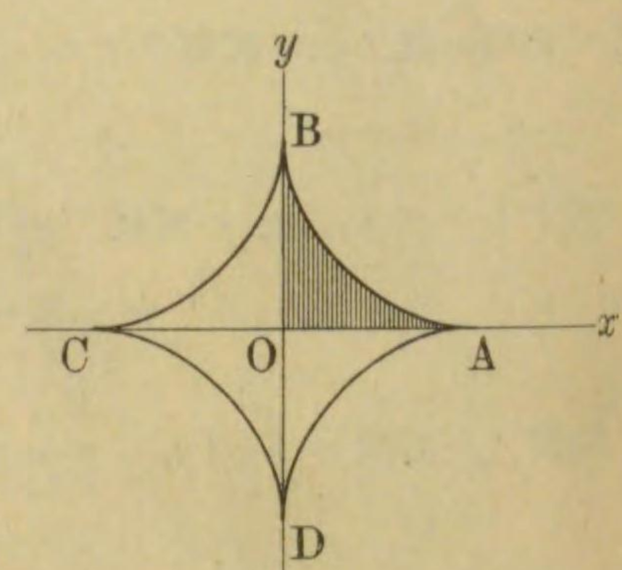
$$\int_a^b y\,dx=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\phi'(t)\,dt$$

トナル故此曲線ニテ圍マルル圖形ノ面積ハ上式ノ右邊ノ如キ積分ヲ計算スルコトニヨツテ得ラルベキコトモ勿論デアル.

例 3. 曲線 $x=a\cos^3\theta,\ \ y=a\sin^3\theta$ ノ包ム全面積ヲ計算セヨ.

此曲線ハ次圖ノ如クニナル. $\widehat{AB}$ ハ θ ガ 0 カラ $\frac{\pi}{2}$ マデ變化スル間ニ生ズル曲線ノ部分デアリ, $\widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ ハソレゾレ θ ガ $\frac{\pi}{2}$ カラ π, π カラ $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ カラ 2π マデ變ズル間ニ生ズル曲線ノ部分デアル.

此曲線ハ x 軸ニ關シテモ y 軸ニ關シテモ對稱デアルカラ全面積ヲ Δ ニテ表スナラバ



$$\Delta=4\mathrm{OAB}=4\int_0^a y\,dx$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3\theta\, 3a\cos^2\theta(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=12a^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}a^2$$

函數 $f(x)$ ガ區域 (a,b) 內ニ於テ無限大トナル場合ニハ曲線 $y=f(x)$ ト二直線 $x=a,\ x=b$ 及ビ x 軸トノ間ノ面積ナルモノハ今マデノ定義ニヨツテハ意味ヲ持タヌ. 何トナレバ斯クノ如キ平面ノ部分ヲ圍ム曲線ハ閉曲線デハナイカラデアル. 併シナガラ此場合ニ於テモ異常積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ ガ存在スルナラバ此値ヲ以テ斯クノ如キ部分ノ面積ト定メルノデアル.

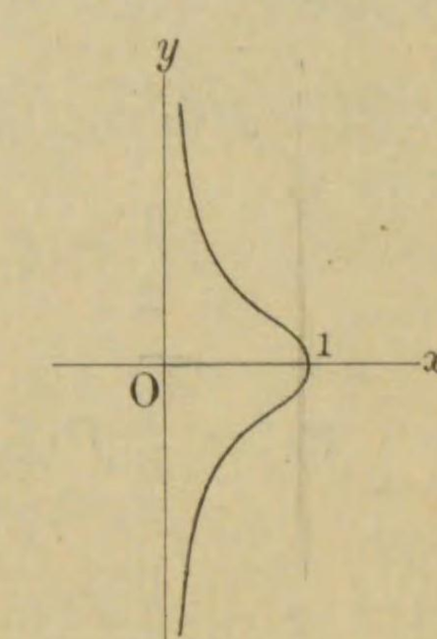
又定積分ノ上限或ハ下限, 例ヘバ上限ガ無限大トナル場合ニモ異常積分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ガ存在スルナラバ此値ヲ以テ直線 $x=a$ ノ右方ニ於ケル曲線ト x 軸トノ間ノ面積ト定メル.

只玆ニ疑問トナルハ此樣ニ異常積分ノ値ヲ以テ開曲線ノ包ム面積ヲ定義スルトキ此二樣ノ定義ニヨル同一圖形ノ面積ノ値ガ常ニ一致スルカ否ヤノ問題デアル. 吾人ハ此問題ノ議論ニハ觸レヌガ此二ツノ値ハ常ニ同一トナルコトガ證明セラレルノデアル.

例 4. 曲線 $y^2=\frac{1-x}{x}$ ト y 軸トノ間ノ面積ヲ計算セヨ.

此曲線ハ右圖ノ如キ曲線デアツテ y 軸ハ其漸近線デアル.

曲線ハ x 軸ニ關シテ對稱デアルカラ求ムル面積ヲ Δ ニテ表スナラバ



$$\Delta=2\int_0^1 y\,dx\quad (y>0)$$

$$=2\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$$

此異常積分ヲ求ムルタメニ $x=\sin^2\theta$ ト置クナラバ

$$\Delta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}\,2\sin\theta\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\pi$$

コレガ第一定義ニヨル面積ノ値デアル.

又上ノ方程式ヲ x ニツキ解ケバ $x=\frac{1}{1+y^2}$

$$\therefore\quad \Delta=2\int_0^\infty x\,dy=2\int_0^\infty\frac{1}{1+y^2}\,dy=2\Big[\tan^{-1}y\Big]_0^\infty=\pi.$$

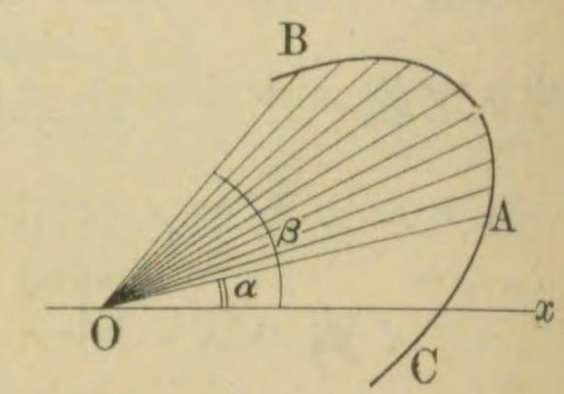
コレガ第二定義ニヨル面積ノ値デアル. 何レノ定義ニヨルモ同一ノ値ヲ得ル.

48. 極座標ニ於ケル面積

O ヲ極, Ox ヲ首線トシテ極方程式

$$r=f(\theta)$$

ノ表ス曲線ヲ C トスル. 今 $f(\theta)$ ヲ區域 (α,β) 內ニテ連續デアルトシ $\theta=\alpha$ 及ビ $\theta=\beta$ ニ對スル曲線上ノ點ヲ A, B トシ動徑 OA, OB 及ビ曲線 C ニテ圍マレル平面圖形ノ面積ヲ考ヘテ見ル.

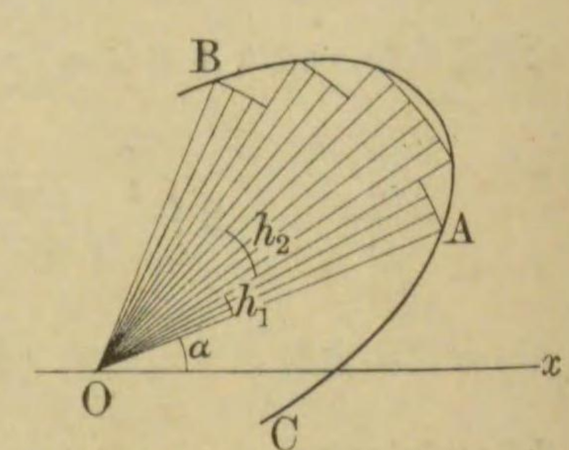


區域 (α,β) ヲ n 個ノ小區域 (α,θ_1), (θ_1,θ_2), ..., (θ_{n-1},β) ニ分チ各小區域ノ長サヲ h_1, h_2, ..., h_n トシ, 又是等ノ小區域內ニ於ケル $f(\theta)$ ノ最小値ヲ $f(\xi_1')$, $f(\xi_2')$, ..., $f(\xi_n')$, 最大値ヲ $f(\xi_1'')$, $f(\xi_2'')$, ..., $f(\xi_n'')$ トシテ次ノ和ヲ作ル.

$$S_n'=\frac{1}{2}f^2(\xi_1')h_1+\frac{1}{2}f^2(\xi_2')h_2+\cdots\cdots+\frac{1}{2}f^2(\xi_n')h_n$$ (1)

$$S_n''=\frac{1}{2}f^2(\xi_2'')h_1+\frac{1}{2}f^2(\xi_2'')h_2+\cdots\cdots+\frac{1}{2}f^2(\xi_n'')h_n$$

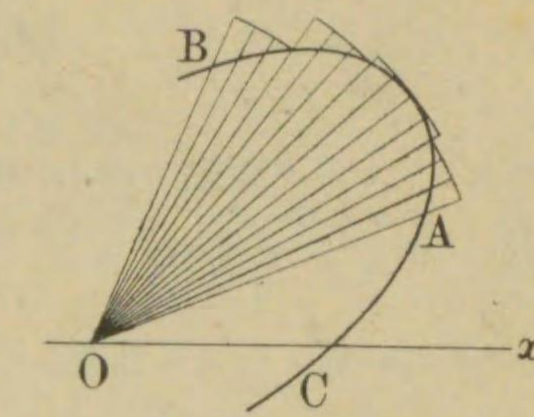
然ルトキハ $\frac{1}{2}f^2(\xi)h$ ハ中心角 h, 半徑 $f(\xi)$ ナル扇形ノ面積ニ等シイカラ S_n' ハ右圖ノ陰ヲ施セル部分ノ面積ヲ表シ, S_n'' ハ次圖ノ陰ヲ施セル部分ノ面積ヲ表ス. 卽チ S_n' ハ OAB 中ニ含マレル一圖形ノ面積デアリ, S_n'' ハ OAB ヲ內部ニ含ム一圖形



(1) $f^2(\xi_1')$ ハ $\left\{f(\xi_1')\right\}^2$ ヲ表スノデアル.

ノ面積デアル. 然ルニ

$$\lim_{h\to 0}S_n'=\lim_{h\to 0}S_n''=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta$$



トナルカラ面積 OAB ハ

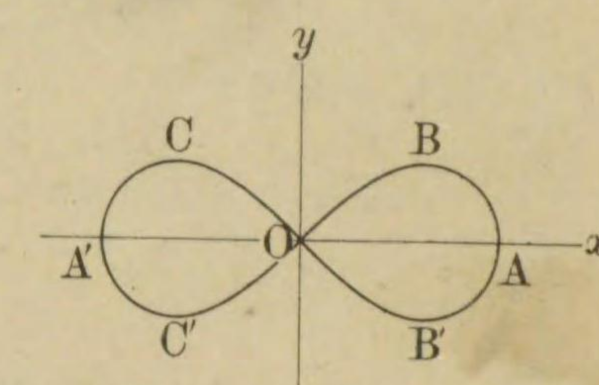
$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta$$

ニテ表サレルコトニナル.

ヨツテ面積 OAB ヲ Δ ニテ表スナラバ

$$\Delta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta.$$

例 1. 曲線 $r^2=a^2\cos 2\theta$ (1) $(a>0)$ ノ圍ム全面積

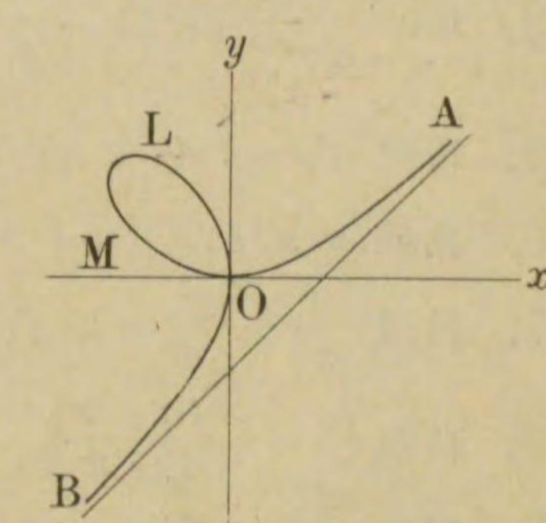


此曲線ハ右圖ノ如クニナル. ABO, A'C'O ハ θ ガ 0 カラ $\frac{\pi}{4}$ マデ變ズル間ニ生ズル曲線ノ部分デアリ, OCA', OB'A ハ θ ガ $\frac{3\pi}{4}$ カラ π マデ變ズル間ニ生ズル曲線ノ部分デアル.

曲線ハ極 O ノ左右モ上下モ共ニ對稱デアルカラ全面積ヲ Δ ニテ表スナラバ

$$\Delta=4\mathrm{OAB}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2d\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta=2a^2\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2$$

例 2. 曲線 $x^3-y^3-3xy=0$ ノ自閉線內ノ面積.



此曲線ハ右圖ノ如クニナル[第31節, 例4參照].

自閉線 OLM 內ノ面積ヲ計算スルタメニ上ノ方程式ヲ先ヅ極方程式ニ變換スル. ソレハ上ノ方程式中ニ

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

(1) 此曲線ヲ**れむにすけーと**ト稱スル.

ト置ケバ宜シイ. 斯クシテ

$$r=\frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta-\sin^3\theta}$$

ヲ得ル. コレハ原點ヲ極, x 軸ヲ首線トスルトキノ曲線ノ極方程式デアル.

圖ノ OA ハ θ ガ 0 カラ $\frac{\pi}{4}$ マデ變ズル間ニ生ズル曲線, OB ハ θ ガ $\frac{\pi}{4}$ カラ $\frac{\pi}{2}$ マデ變ズル間ニ生ズル曲線, OLM ハ θ ガ $\frac{\pi}{2}$ カラ π マデ變ズル間ニ生ズル曲線デアル. 故ニ自閉線 OLM 内ノ面積ヲ Δ ニテ表スナラバ

$$\Delta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}r^2\,d\theta=\frac{9}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^3\theta-\sin^3\theta)^2}\,d\theta$$

分子, 分母ヲ $\cos^6\theta$ ニテ割ツテ

$$=\frac{9}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{(1-\tan^3\theta)^2}\,d\theta$$

$\tan\theta=t$ ト置イテ

$$=\frac{9}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{t^2\,dt}{(1-t^3)^2}=\frac{9}{2}\left[\frac{1}{3(1-t^3)}\right]_{-\infty}^{0}=\frac{3}{2}$$

問題 22.

次ノ極限値ヲ求ム (1—4).

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{r=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+r^2}}$　　2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum\limits_{r=0}^{n-1}r\sqrt{n^2-r^2}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{r=0}^{n-1}\log\left(1-\frac{r}{n}\right)$　　4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$ [前問ノ結果ヲ用ヒヨ]

5. 曲線 $a^2y=x^2(x+a)$ ト x 軸トノ間ノ面積.

6. 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ ト座標軸トノ間ノ面積.

7. 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内ノ面積.

8. 曲線 $y^2=\frac{x^2(a+x)}{a-x}$ ノ自閉線内ノ面積.

9. 曲線 $a^2y^4=x^4(a^2-x^2)$ ハ二ツノ自閉線ヲ有ス. ソノ一ツノ自閉線内ノ面積.

10. 曲線 $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$ ハ二ツノ自閉線ヲ有ス. ソノ一ツノ自閉線内ノ面積.

11. 曲線 $y^2(x^2+a^2)=a^2x^2$ ト漸近線 $y=a$ トノ間ノ面積.

12. 曲線 $y^2(2a-x)=x^3$ ト漸近線トノ間ノ面積.

13. 曲線 $y^2(a^2-x^2)=x^4$ ト漸近線 $x=a$ トノ間ノ面積.

14. 曲線 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$, $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ ト x 軸トノ間ノ面積.

15. 曲線 $x=t-t^3$, $y=1-t^4$ ノ自閉線内ノ面積.

16. 二ツノ曲線 $y^2=4ax$, $x^2=4ay$ 間ノ面積.

17. 曲線 $r=a\sin n\theta$ ノ一ツノ自閉線内ノ面積.

18. 曲線 $r\cos\theta=a\cos 2\theta$ ノ自閉線内ノ面積.

19. 曲線 $r=a(1+2\cos\theta)$ ノ外方ノ自閉線内ノ面積及ビ内方ノ自閉線内ノ面積.

20. 曲線 $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$ ノ自閉線内ノ面積.

21. $y=f(x)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ナルトキ

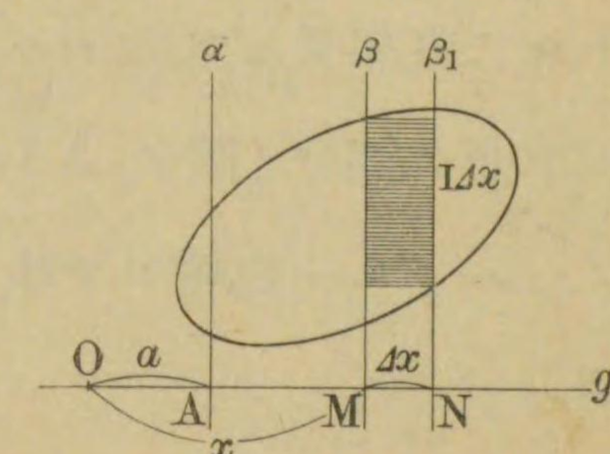
$$\int_a^b y\,dx+\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\left\{bf(b)-af(a)\right\}$$

ヲ證明セヨ. 但シ $\tan\alpha=\frac{f(a)}{a}$, $\tan\beta=\frac{f(b)}{b}$ ニシテ上式ヨリ得ル r ハ θ ノ一値函數トス.

49. 立體ノ體積

或立體ガ與ヘラレタトキ定直線 g ヲ取リ之ニ垂直ナル二平面 α,β ニテ此立體ヲ截リ其二平面間ニアル體積ヲ V トスル.

α,β 平面ト g 直線トノ交點ヲ A, M トシ g 上ノ定點 O カラ A, M マデノ距離ヲソレゾレ a 及ビ $x\,(a<x)$ トスルナラバ V ハ x ノ函數デアツテ $x=a$ ノトキ零トナル.



今 MN $=\Delta x$ トシ N ヲ通ツテ g 直線ニ垂直ナル平面 β_1 ヲ作ルナラバ β,β_1 二平面間ニアル立體ノ體積ハ x ノ増分 Δx ニ對スル V ノ

增分卽チ ΔV ニテ表サルベキモノデアル.

g 直線ニ平行ナル母線ヲ有シ, 二平面 β, β_1 間ニアル立體ノ表面ニ內接及ビ外接スル二直壔ヲ作レバ此二直壔ノ高サハ何レモ Δx デアルカラ其體積ハソレゾレ $I\Delta x$ 及ビ $I_1\Delta x$ ニヨツテ表サレル. 但シ I, I_1 ハ二直壔ノ底ノ面積デアル. 故ニ

$$I\Delta x < \Delta V < I_1\Delta x$$

ヨツテ

$$I < \frac{\Delta V}{\Delta x} < I_1$$

β 平面ト立體トノ交リナル平面圖形ノ面積ヲ $f(x)$ ニテ表スナラバ $\Delta x \to 0$ ナルトキ I 及ビ I_1 ハ何レモ $f(x)$ ニ收斂スル.

故ニ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = f(x)$$

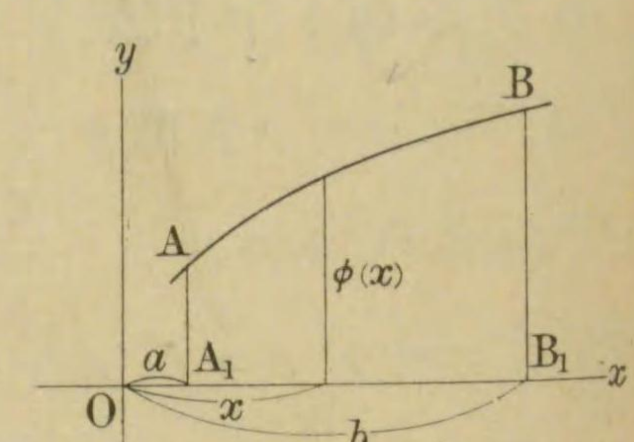
卽チ

$$\frac{dV}{dx} = f(x)$$

ヨツテ

$$\mathbf{V = \int_a^x f(x)\,dx.}$$

特ニ區域 (a, b) 內ニテ正且ツ連續ナル函數 $y = \phi(x)$ ノぐらふヲ $\widehat{AB}$ トシテ此曲線ト $x = a, \ x = b$ ナル二直線及ビ x 軸トニヨリテ圍マレル平面ノ部分 (圖ノ AA_1B_1B) ガ x 軸ノマハリニ一廻轉シテ生ズル立體ノ體積ハ

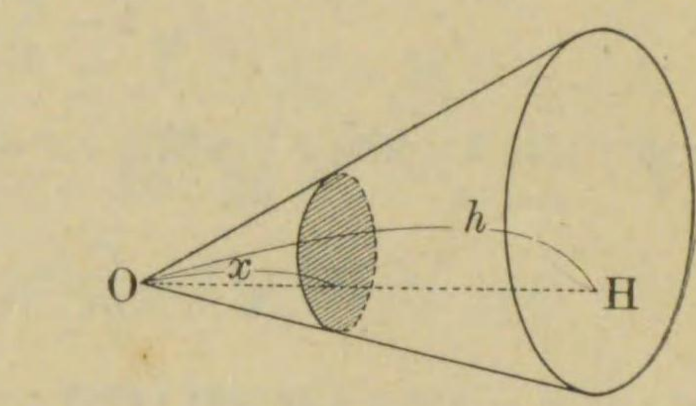


$$\mathbf{V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \phi^2(x)\,dx}$$

ニヨツテ計算セラレル. 何トナレバ此立體ヲ原點ヨリ x ナル距離ニ於テ x 軸ニ垂直ナル平面デ截レバ截リ口ハ半徑 $\phi(x)$ ナル圓トナリ其面積ハ $\pi\phi^2(x)$ トナルカラデアル.

例 1. 底ノ面積 A, 高サ h ナル錐ノ體積.

頂點 O ヨリ底ニ下セル垂線ノ足ヲ H トシ, O カラ x ナル距離ニ於テ OH ニ垂直ナル平面ヲ作レバ錐ト平面トノ交リハ底ニ相似デアツテ其面積 $f(x)$ ハ x^2 ニ比例スル. 卽チ



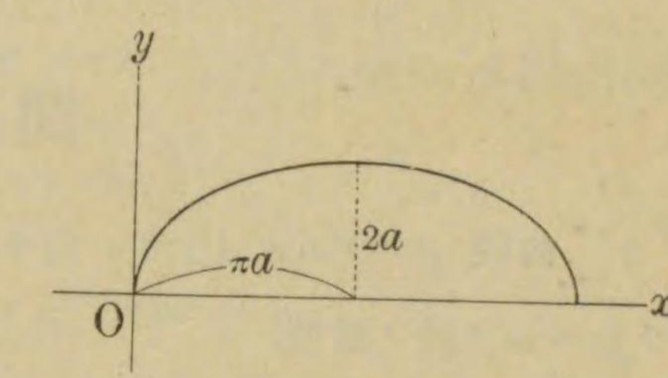
$$\frac{f(x)}{A} = \frac{x^2}{h^2} \qquad \therefore \quad f(x) = \frac{A}{h^2}x^2$$

ヨツテ錐ノ體積ハ

$$V = \int_0^h \frac{A}{h^2}x^2\,dx = \frac{A}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{hA}{3}$$

例 2. 曲線 $x = a(\theta - \sin\theta), \ y = a(1 - \cos\theta),$(1) $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ ト x 軸トノ間ニアル平面ノ部分ガ x 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル立體ノ體積.

此曲線ハ右圖ノ如クニナル. 而シテ求ムル體積ハ



$$V = \pi \int y^2 dx$$

ニヨツテ計算セラレル. 但シ積分ノ限界ハ

$$\theta = 0, \qquad \theta = 2\pi$$

ニ對スル x ノ値デアル. 故ニ積分變數ヲ θ ニ換ヘルコトニヨツテ

$$V = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2 a(1 - \cos\theta)\,d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^3 d\theta = 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$\theta = 2t$ ト置キテ

$$= 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 t\,dt = 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t\,dt$$

$$= 32\pi a^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3$$

(1) $a > 0$ ト假定スル. 以下曲線ノ方程式中ニアル文字ニテ表サレル常數ハ總テ正ナルモノト規約スル.

例 3. 楕圓面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ニヨツテ圍マルル立體ノ體積.

上ノ方程式ヲ書キ換フレバ

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1.$$

故ニ x 軸ニ垂直ナル平面ニテ此楕圓面ヲ截レバ截リ口ハソレゾレ

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

ノ二倍ヲ長軸及ビ短軸トスル楕圓トナル. 此楕圓ノ面積ハ

$$\pi.b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

デアル. ヨツテ求ムル楕圓體ノ體積ハ

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

問題 23.

1. 曲線 $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ ト x 軸トノ間ノ平面形ガ x 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル立體ノ體積.

2. 曲線 $y=(x-1)(2-x)$ ト x 軸トノ間ノ平面形ガ x 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル立體ノ體積.

3. 半徑 a ナル四分圓ト其兩端ニ於ケル切線トニヨリ圍マルル平面圖形ガ其一端ニ於ケル切線ノマハリニ廻轉シテ生ズル立體ノ體積.

4. 曲線 $y^2(x-4)=x(x-3)\ (0\leqq x\leqq 3)$ ト x 軸トノ間ノ平面形ガ x 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル立體ノ體積.

5. 圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (b>r)$ ガ x 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル立體ノ體積.

6. 平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\ (a,\ b,\ c>0)$ ト座標面トノ間ノ體積.

7. 曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^4}{c^4}=1$ ニヨリ圍マルル立體ノ體積.

8. 曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ ト平面 $z=c$ トノ間ニアル立體ノ體積.

9. 二直壔 $x^2+y^2=a^2,\ x^2+z^2=a^2$ ニヨリ圍マルル立體ノ體積.

10. 曲線 $y^2(2a-x)=x^3$ ガ漸近線 $x=2a$ ノマハリニ廻轉シテ生ズル面ノ內部ノ體積.

50. 平面曲線ノ長サ

曲線上ノ二點ヲ A, B トスルトキ A, B 間ノ曲線ノ長サトハ如何ナルモノカ. 先ヅソノ定義ヲ與ヘル.(1)

曲線ノ弧 $\widehat{AB}$ 上ニ點 P_1 ヲ取リ次ニ $\widehat{P_1B}$ 上ニ點 P_2 ヲ取リ, 次第ニ斯クノ如クシテ $\widehat{AB}$ 上ニ $n-1$ 個ノ點 $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{n-1}$ ヲ取ル. $AP_1,\ P_1P_2,\ \ldots\ldots,\ P_{n-1}B$ ヲ順次ニ結ビ付ケコレラノ線分ノ長サヲソレゾレ $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ トシソノ和ヲ S_n ト名ヅケル. 卽チ

$$S_n=p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n$$

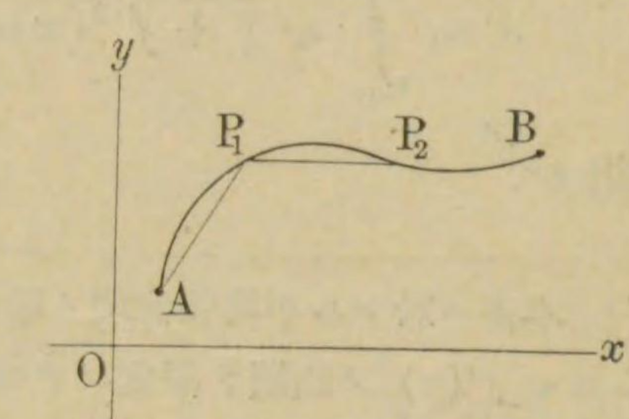
今 $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ 中ノ最大ナルモノヲ p トスルトキ極限値

$$\lim_{p\to 0} S_n=s$$

ヲ A, B 間ニ於ケル曲線ノ長サト稱スルノデアル.

以下平面曲線ノ弧ノ長サヲ求ムル公式ヲ誘導スル.

直交軸ニ關シテ與ヘラレタル曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トシ此曲線上ノ二定點ヲ A, B トシ曲線 $\widehat{AB}$ 上ニ上ノ如ク點 $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{n-1}$ ヲ取リ $A, P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{n-1}, B$ ノ橫座標ヲ



$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_{n-1},\ x_n=b\quad (a<b)$$

(1) 此定義ハ平面曲線デモ空間曲線デモ適用セラレル.

縦座標ヲ

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_{n-1},\ y_n$$

トシ且ツ

$$x_1 - x_0 = h_1,\ x_2 - x_1 = h_2,\ \ldots\ldots,\ x_n - x_{n-1} = h_n$$

ト置クナラバ

$$\overline{\mathrm{P}_{r-1}\mathrm{P}_r} = p_r = \sqrt{h_r^2 + (y_r - y_{r-1})^2}$$

デアツテ平均値定理ニヨリ

$$y_r - y_{r-1} = f(x_r) - f(x_{r-1}) = h_r f'(x_{r-1} + \theta_r h_r),^{(1)} \quad 0 < \theta_r < 1$$

トナルカラ

$$p_r = h_r \sqrt{1 + f'^2(x_{r-1} + \theta_r h_r)}$$

従ツテ

$$\mathrm{S}_n = \sum_{r=1}^{n} p_r = \sum_{r=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(x_{r-1} + \theta_r h_r)}\,.\,h_r$$

$p_1,\ p_2,\ \ldots\ldots,\ p_n$ 中ノ最大ナル p ガ零ニ收斂スルナラバ $h_1,\ h_2,\ \ldots\ldots,\ h_n$ ノ最大ヲ h トスルトキ h モ零ニ收斂シ而シテ

$$\lim_{h\to 0} \sum_{r=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(x_{r-1} + \theta_r h_r)}\, h_r = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx^{(2)}$$

デアルカラコレヨリ

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \ \ldots\ldots(1)$$

ヲ得ル.[3]

(1) 本書ニ於ケル平均値定理ノ證明ニハ $f'(x)$ ノ連續ヲ使用シタ (第21節). 故ニココニモ $f'(x)$ ノ連續ヲ假定シテ居ル譯デアル.

(2) 再ビ $f'(x)$ ノ連續ヲ使用シテ居ル.

(3) 吾人ハ $f'(x)$ ガ x ノ連續函數デアル場合ニ s ガ此公式ニテ求メラレルコトヲ證明シタニ過ギナイ. $f'(x)$ ガ連續ナラザル場合ニ於テモ曲線ノ長サハ存在スルカモ知レヌ. 實際存在スルコトハ角(カド)ノアル曲線ガ長サヲ有スルコトカラ容易ニ分ルデアラウ. ソノ様ナ場合ハ今茲ニ考ヘナイノデアル. 公式 (2) ニツイテモ同様ノ注意ヲ要スル.

曲線ノ方程式ガ

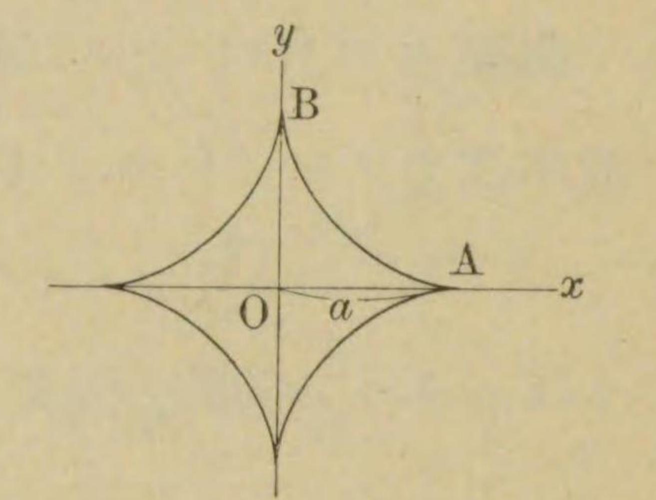
$$x = \phi(t), \qquad y = \psi(t)$$

ナル場合ニハ $t_0 \leqq t \leqq t_1$ ナル t ニヨツテ作ラレル曲線ノ弧ノ長サハ

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ニヨツテ與ヘラレルコトガ證明セラレル [第41節注意2例參照].

例 1. 曲線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ノ全長ヲ計算セヨ.



此曲線ハ右圖ノ如キ曲線デアツテ x 軸, y 軸ニ關シテ對稱デアルカラ第一象限内ノ部分 $(\widehat{\mathrm{AB}})$ ノ長サヲ計算シテソレヲ 4 倍スレバ全長ヲ得ル. (此曲線ハ第47節例 3 ノ曲線ト同ジモノデアル).

偖テ曲線ノ方程式ヨリ

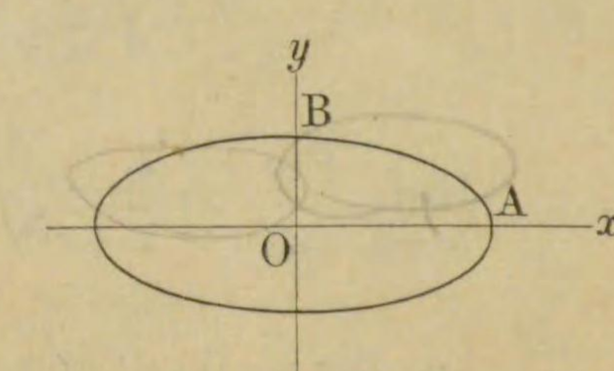
$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore\ \widehat{\mathrm{AB}} = \int_0^a \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_0^a = \frac{3}{2}a$$

$$\therefore\ \text{曲線ノ全長} = 6a.$$

例 2. 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ノ全長.



此場合ニモ第一象限内ニアル曲線ノ長サヲ求メテ之ヲ 4 倍スレバ全長ガ得ラレル.

上ノ楕圓ハ

$$x = a\cos\theta, \qquad y = b\sin\theta$$

ナル方程式ニヨツテ表スコトヲ得ル故此式ヲ用フルコトニスル.

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$$

$$\therefore \quad \widehat{AB} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\theta}\,d\theta$$

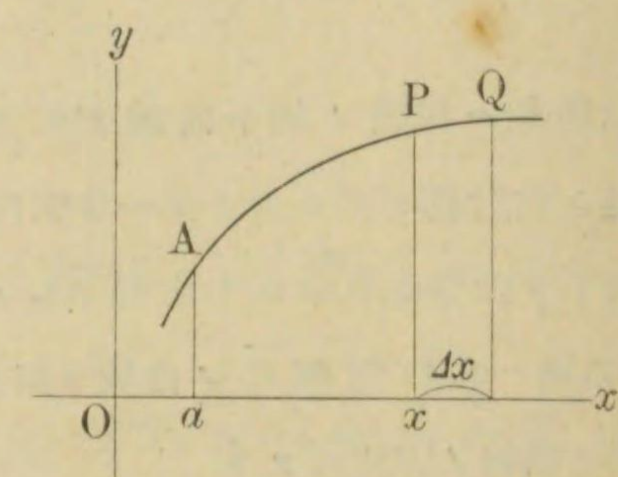
$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta \qquad 玆ニ \qquad e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

此積分ハ第二種ノ楕圓積分ト稱スルモノデアツテ初等函數ヲ以テハ表スコトヲ得ナイモノデアル.

51. 曲線ノ弧ノ微分

曲線 $y=f(x)$ 上ノ二點 A, P ノ横座標ヲソレゾレ a, x $(a<x)$ トシ

$$\widehat{AP} = s$$



トスルナラバ前節, 公式 (1) ニヨリ

$$s=\int_a^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

トナル. 此兩邊ヲ x ニツキ微分スレバ

$$\boldsymbol{\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

從ツテ $$\boldsymbol{ds=\sqrt{dx^2+dy^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

コレ s ノ微分ヲ表ス式デアル.

今曲線上ニ點 $Q(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ ヲ取リ PQ ヲ結ビ付クレバ

$$\overline{PQ}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{PQ}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{ds}{dx}$$

$\dfrac{ds}{dx}$ ハ $\Delta x\to 0$ ナルトキノ $\dfrac{\widehat{PQ}}{\Delta x}$ ノ極限デアル. 故ニ上ノ式

ヨリ

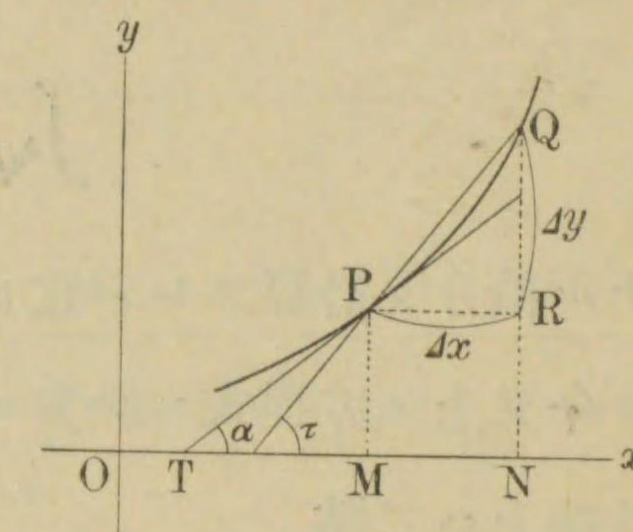
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{PQ}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\widehat{PQ}}{\Delta x}\neq 0$$

從ツテ $$\boldsymbol{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\widehat{PQ}}{\overline{PQ}}=1.} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ヲ得ル. 之ヲ言葉ニテ表セバ次ノ如クニナル.

曲線ノ弧 PQ ト弦 PQ トノ比ハ點 Q ガ限リナク P 點ニ近ヅクトキ限リナク 1 ニ近ヅク.

今 PQ ヲ結ビ付ケル直線ガ x 軸トナス角ヲ τ, P 點ニ於ケル曲線ノ切線ガ x 軸トナス角ヲ α トスレバ



$$\frac{\Delta x}{\overline{PQ}}=\cos\tau, \qquad \frac{\Delta y}{\overline{PQ}}=\sin\tau$$

デアツテ $\Delta x\to 0$ ナルトキ $\tau\to\alpha$ デアルカラ

$$\boldsymbol{\frac{dx}{ds}=\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds}=\sin\alpha}$$

トナル.

更ニ (2) ノ式ヨリ極方程式 $r=f(\theta)$ ニテ與ヘラレタル曲線ノ ds ヲ求メルコトモ容易デアル.

極座標ノ極ヲ原點ニ, 首線ヲ x 軸, 又之ニ垂直ナル直線ヲ y 軸ニ取ルナラバ任意ノ點 P ノ極座標 r, θ ト直座標 x, y トノ間ニハ

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta$$

ナル關係ガアルカラ

$$dx=-r\sin\theta\,d\theta+\cos\theta\,dr$$

$$dy = r\cos\theta\,d\theta + \sin\theta\,dr$$

$$\therefore\quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}$$

トナル. コレヨリ兩邊ヲ $d\theta$ ニテ除シテ

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,^{(1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ヲ得ル. ヨツテ極方程式ニテ與ヘラレタ曲線ノ長サヲ算出スルニハ, 適當ナル限界ノ下ニ

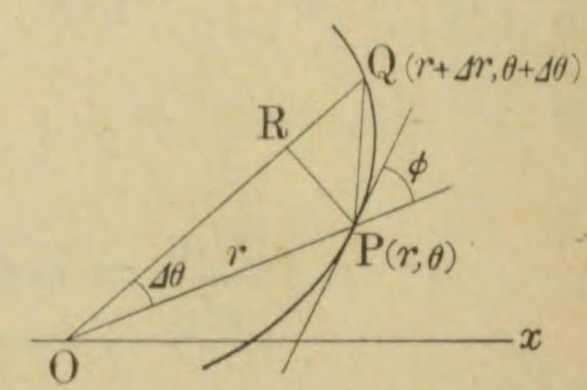
$$\int\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

ナル積分ヲ計算スレバ宜シイ.

今又上ノ方程式ニテ與ヘラレタル曲線上ニ二點

$$\mathrm{P}(r,\ \theta),\ \mathrm{Q}(r + \Delta r,\ \theta + \Delta\theta)$$

ヲ取リ P ヨリ OQ ニ下セル垂線ノ足ヲ R トスルナラバ



$$\mathrm{PR} = r\sin\Delta\theta$$

$$= r\Delta\theta + \rho_3$$

$$\mathrm{RQ} = \mathrm{OQ} - \mathrm{OR} = (r + \Delta r) - r\cos\Delta\theta = \Delta r + r(1 - \cos\Delta\theta)$$

$$= \Delta r + \rho_2$$

ρ_3, ρ_2 ハ $\Delta\theta$ ガ無限小トナルトキソレニ較ベテソレゾレ第三位及ビ第二位ノ無限小トナルモノデアル.

(1) 此公式ハ θ ガ増ストキ s モ増ス, 即チ θ ノ増ス方向ニ s ヲ計ルコトヲ假定シテ居ル. 之ト反對ノ場合ニハ $\frac{ds}{d\theta}$ ハ負トナル故此式ノ符號ヲ變ゼネバナラヌ.

$$\therefore\quad \lim_{\Delta\theta\to 0}\tan \mathrm{OQP} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RQ}} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{r\Delta\theta}{\Delta r} = \frac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}}$$

動徑 OP ノ正ノ方向ト P 點ニ於ケル切線（偏角 θ ノ增ス方向ニ引ケル）トノ間ノ角ヲ ϕ ニテ表スナラバ

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\mathrm{OQP} = \phi$$

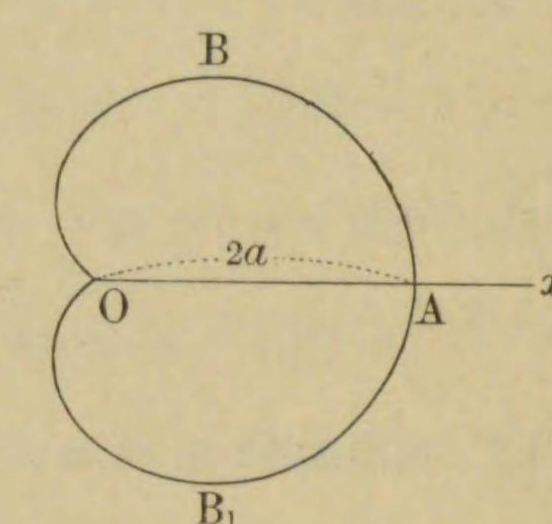
デアルカラ上ノ式カラ次ノ等式ヲ得ル.

$$\tan\phi = \frac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

例 1. 曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$ ノ全長ヲ求ム.

此曲線ハ首線ニ關シテ對稱デアルカラ首線ヨリ上ニアル部分即チ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ ニ對スル曲線ノ長サヲ求メテソレヲ 2 倍スレバ全長ヲ得ル.

曲線ノ方程式ヨリ



$$dr = -a\sin\theta\,d\theta$$

$$\therefore\quad ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}$$

$$= a\sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= a\sqrt{2(1 + \cos\theta)}\,d\theta = 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$\therefore\quad \mathrm{A\widehat{B}O} = \int_0^\pi 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi = 4a$$

ヨツテ曲線ノ全長ハ $8a$ トナル.

例 2. 曲線 $r = a^\theta$ ニ於テハ動徑ト切線トノ間ノ角ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

曲線ノ方程式ヨリ

$$\frac{dr}{d\theta} = a^\theta \log a$$

ヲ得ル故上ノ公式 (5) ニ代入シテ

$$\tan\phi = \frac{1}{\log a}$$

ヨツテ ϕ ハ一定デアル.

問題 24.

1. 曲線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ガ y 軸ヲ截ル點ヨリ y 軸ノ右ニアル曲線上ノ他ノ一點 (x_1, y_1) マデノ弧ノ長サ.

2. 拋物線 $2y=x^2$ ノ頂點ヨリ曲線上ノ他ノ一點 (x_1, y_1) マデノ弧ノ長サ.

3. 曲線 $x+\sqrt{a^2-y^2}=a\log\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$ ガ y 軸ヲ截ル點ヨリ y 軸ノ右ニアル曲線上ノ一點 (x_1, y_1) マデノ弧ノ長サ.

4. 曲線 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$, $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ ノ長サ.

5. 曲線 $y=b\sin\frac{x}{a}$ $(0\leqq x\leqq a\pi)$ ノ長サハ $2\sqrt{a^2+b^2}$, $2a$ ヲ兩軸トスル楕圓ノ周ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ.

6. 曲線 $r=a^\theta$ 上ノ二點間ニ於ケル弧ノ長サハ其ノ二點ノ動徑ノ差ニ比例スルコトヲ證明セヨ.

7. 曲線 $r=a\left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^3$ ノ自閉線ノ長サ.

8. 曲線 $r^2=a^2\cos 2\theta$ ニ於テ $\frac{ds}{d\theta}\frac{d^2s}{d\theta^2}=a^2\sec 2\theta\tan 2\theta$ ナルコトヲ證明セヨ.

9. 曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 (x, y) ニ於ケル切線ニ原點ヨリ下セル垂線ノ長サヲ p トスレバ

$$p=x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}$$

10. 曲線 $r=f(\theta)$ 上ノ一點 $\mathrm{P}(r, \theta)$ ニ於ケル切線 PT ト動徑 OP トナス角ヲ ϕ トセバ

$$\cos\phi=\frac{dr}{ds},\qquad \sin\phi=r\frac{d\theta}{ds}$$

11. 前問ニ於テ極 O ヨリ PT ニ下セル垂線ノ足ヲ T_1 トスレバ

$$\mathrm{PT}_1=r\frac{dr}{ds}$$

12. 第 10 問ニ於テ極 O ヲ通リテ OP ニ垂直ニ引ケル直線ト PT トノ交點ヲ T, P ニ於ケル法線トノ交點ヲ N トスレバ

$$\mathrm{OT}=r^2\Big/\frac{dr}{d\theta},\qquad \mathrm{ON}=\frac{dr}{d\theta}$$

13. 曲線 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ 上ノ一點 $\mathrm{P}(x, y)$ ニ於ケル切線ガ x 軸トナス角ヲ α トスレバ

$$\frac{dx}{dt}\cos\alpha+\frac{dy}{dt}\sin\alpha=\frac{ds}{dt}$$

14. 前問ノ角 α ニ對シテハ

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha+\frac{d^2y}{dt^2}\sin\alpha=\frac{d^2s}{dt^2}$$

15. 空間曲線 $x=f(t)$, $y=\phi(t)$, $z=\psi(t)$ 上ノ二點 (t_0), (t_1) 間ノ弧ノ長サハ

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

ニヨツテ與ヘラルルコトヲ示セ.

16. 曲線 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=kt$ 上ノ二點 $(t=0)$, $(t=t_1)$ 間ノ長サ.

17. 曲線 $y=x+x^2$, $6z=3x+6x^2+4x^3$ 上ノ二點 $(x=0)$, $(x=x_1)$ 間ノ長サ.

18. 空間曲線上ノ二點ヲ P, Q トスルトキ

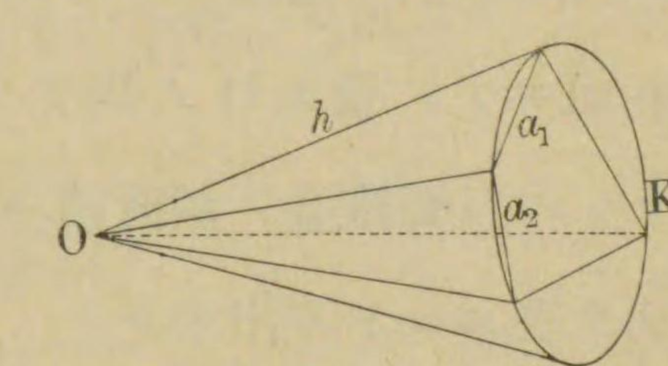
$$\lim_{\mathrm{Q}\to\mathrm{P}}\frac{\widehat{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=1$$

ヲ證明セヨ.

19. 空間曲線上ノ一點 (x, y, z) ニ於ケル切線ノ方向餘弦ハ $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ.

52. 廻轉曲面ノ表面積

一般ナル曲面ノ表面積ヲ定義シ，且ツ其定義ヨリ出發シテ表面積ヲ求ムルコトハ二重積分ノ知識ナシニハムヅカシイ問題デアル. 以下吾人ハ極メテ特別ナル曲面卽チ平面曲線ガ其平面內ニアル直線ノマハリニ廻轉シテ生ズル，所謂廻轉曲面ノ表面積ヲ求ムル方法ニツイテ述ブルコトニスル.



直圓錐ノ頂點ヲ O，ソノ底ヲ K，K ニ內接スル多角形ヲ P トシ，此多角形ノ各邊ヲ a_1, a_2, a_3, ……，直圓錐ノ頂點 O ヨリ是等ノ邊ニ至ル距離ヲ h_1, h_2, h_3, …… トスルナラバ P ヲ底トシ O ヲ頂點

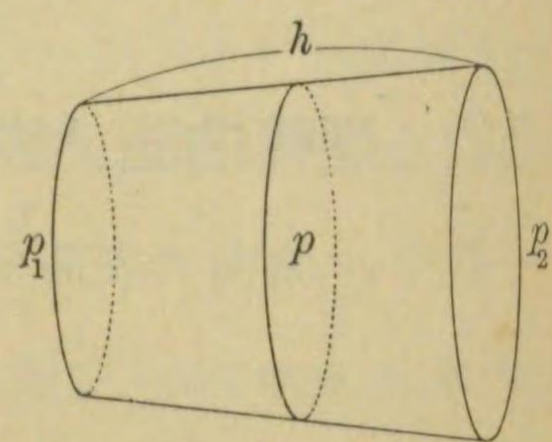
トスル角錐ノ側面積 F ハ

$$F=\frac{1}{2}(a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3+\cdots\cdots)$$

ニヨツテ定メラレル. 故ニ $h_1, h_2, \ldots\ldots$ 中ノ最大ヲ g, 最小ヲ l トスルナラバ

$$\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots\cdots)l \leqq F \leqq \frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots\cdots)g$$

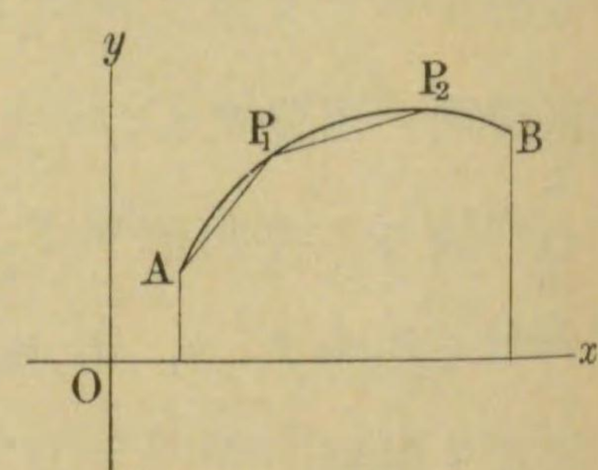
今多角形 P ノ各邊ヲ限リナク小ナラシムレバ g, l ハ何レモ直圓錐ノ側高ニ限リナク近ヅキ, 内接多角形ノ周 $a_1+a_2+\cdots\cdots$ ハ直圓錐ノ底ノ周ニ限リナク近ヅク. ヨツテ其時ノ F ノ極限ハ $\frac{1}{2}ph$ トナル. 玆ニ p ハ直圓錐ノ底ノ周, h ハ側高デアル. コノ極限値ヲ直圓錐ノ側面積ト稱スル.



直圓錐臺ノ側面積モ同ジ樣ニ内接角錐臺ノ側面積ノ極限トシテ定義サレル. 而シテ其値ハ

$$\frac{1}{2}(p_1+p_2)h$$

デアル, 玆ニ p_1, p_2 ハ直圓錐臺ノ兩底ノ周, h ハ側高デアル. ヨツテ直圓錐臺ノ兩底ヨリ等距離ニアル平面ニテノ截リ口ノ周ヲ p トスルナラバ直圓錐臺ノ側面積ハ ph ニヨツテ表スコトガ出來ル.



偖テ x, y 平面上ニ於テ方程式

$$y=f(x)$$

ニテ表サレル曲線ヲ $\widehat{AB}$[1] トシ, $\widehat{AB}$ 上ニ $n-1$ 個ノ點 $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{n-1}$ ヲ取リ線分 $AP_1, P_1P_2, \ldots\ldots, P_{n-1}B$ ノ中點ノ縱座標ヲ $\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots, \eta_n$ トスルナラバ線分 $P_{r-1}P_r$ ガ x 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル直圓錐臺ノ側面積ハ以上ニヨリ

$$2\pi\eta_r.\overline{P_{r-1}P_r} \quad (r=1, 2, \ldots\ldots, n)$$ [2]

ニヨツテ表サレル. ヨリテ是等ノ直圓錐臺ノ側面積ノ總和ハ

$$S_n=2\pi\sum_{r=1}^{n}\eta_r.\overline{P_{r-1}P_r}$$

今 A, $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{n-1}$, B ノ横座標ヲ $a, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}, b$ トシ $x_1-a=h_1$, $x_2-x_1=h_2$, ……, $b-x_{n-1}=h_n$ ト置クナラバ第 50 節ニ於ケル如ク

$$\overline{P_{r-1}P_r}=\sqrt{1+f'^2(x_{r-1}+\theta_rh_r)}.h_r, \quad 0<\theta_r<1$$ [3]

トナルカラ上式ニ代入シテ

$$S_n=2\pi\sum_{r=1}^{n}\eta_r\sqrt{1+f'^2(x_{r-1}+\theta_rh_r)}.h_r$$

$\eta_r\sqrt{1+f'^2(x_{r-1}+\theta_rh_r)}$ ハ $h_r\to0$ ナル極限ニ於テ

$$f(x_{r-1})\sqrt{1+f'^2(x_{r-1})}$$

トナル. ヨツテ第 41 節注意 2 ニヨリ

$$\lim_{h\to0} S_n=2\pi\lim_{h\to0}\sum_{r=1}^{n}f(x_{r-1})\sqrt{1+f'^2(x_{r-1})}.h_r$$

$$=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) $\widehat{AB}$ ハ x 軸ノ上部ニアルモノト假定スル.

(2) P_0 ハ A, P_n ハ B デアル.

(3) $x_0=a$, $x_n=b$ デアル.

ヲ得ル．此極限値ヲ曲線ノ弧 AB ガ x 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル**曲面ノ表面積**ト稱スルノデアル．

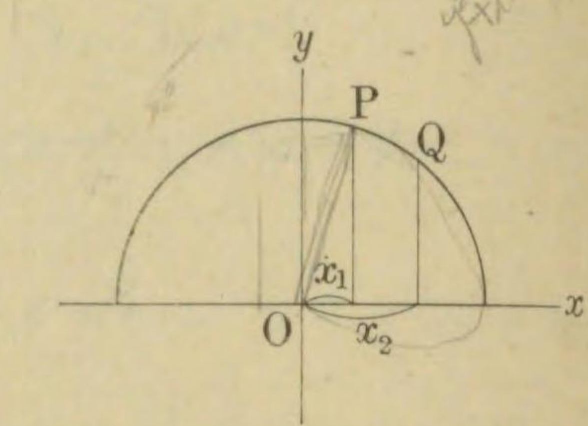
例 1．半徑 a ナル球ノ表面積．

圓ノ中心ヲ座標軸ノ原點ニ取ルナラバ y 軸ヨリ上部ニアル半圓ノ方程式ハ

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

此函數ニ對シテハ

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$



トナル故二直線 $x=x_1$, $x=x_2$ $(x_1<x_2)$ 間ニ挾マレル圓ノ弧 PQ ガ x 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル曲面ノ表面積ヲ S ニテ表スナラバ

$$\mathrm{S}=2\pi\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{a^2-x^2}\,.\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=2\pi a(x_2-x_1)$$

ヨツテ球面ノ全面積ハ $x_1=-a$, $x_2=a$ ト置イテ

$$\mathrm{S}_1=4\pi a^2$$

偖テ或點ヨリ測レル曲線ノ長サヲ s ニテ表スナラバ，

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

デアルカラ公式 (1) ハ

$$\mathrm{S}=2\pi\int_{s_0}^{s_1}y\,ds$$

ト書クコトガ出來ル．玆ニ S ハ廻轉曲面ノ表面積，s_0, s_1 ハ $x=a$, b ニ對スル s ノ値デアル．但シ此公式ハ $\dfrac{ds}{dx}>0$ ナルコトヲ假定シテ居ル．若シ $\dfrac{ds}{dx}<0$ ナラバ

$$ds=-\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

デアツテ (1) 式ハ

$$\mathrm{S}=-2\pi\int_{s_0}^{s_1}y\,ds=2\pi\int_{s_1}^{s_0}y\,ds$$

トナル．而シテ此場合ニハ $s_0>s_1$ デアル．故ニ何レニシテモ適當ナル正ノ區域內ニ於テ $2\pi y\,ds$ ヲ積分スレバ常ニ S ヲ表ス式ヲ得ル．

尙 $s=\phi(t)$ ナル場合ニ於テハ $2\pi\int y\dfrac{ds}{dt}\,dt$ ヲ求メルコトニヨツテ S ヲ計算スルコトガ出來ル．

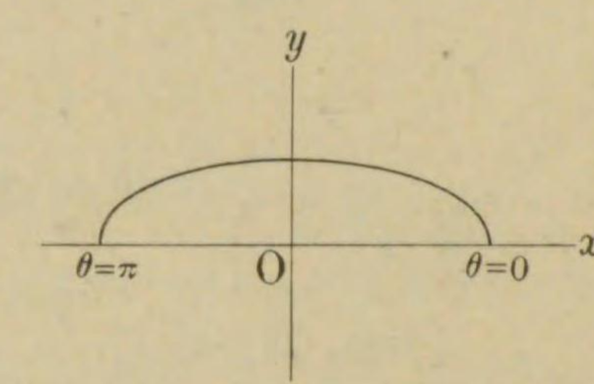
例 2．楕圓 $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ [1] $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ ガ x 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル曲面ノ表面積．

上ノ方程式ヨリ

$$dx=-a\sin\theta\,d\theta,\qquad dy=b\cos\theta\,d\theta$$

$$\therefore\ ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=a\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta,$$

玆ニ　$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$



故ニ求ムル表面積ヲ S トスレバ

$$\mathrm{S}=2\pi\int_0^\pi y\frac{ds}{d\theta}\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^\pi b\sin\theta\,.\,a\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=2\pi ab\int_0^\pi\sin\theta\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta.$$

$\cos\theta=t$ ト置クナラバ

$$\int_0^\pi\sin\theta\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta=-\int_1^{-1}\sqrt{1-e^2t^2}\,dt$$

$$=2e\int_0^1\sqrt{\frac{1}{e^2}-t^2}\,dt=\frac{1}{e}\left(e\sqrt{1-e^2}+\sin^{-1}e\right)$$

$$\therefore\quad \mathrm{S}=\frac{2\pi ab}{e}\left(e\sqrt{1-e^2}+\sin^{-1}e\right)$$

[1] $a>b$ ト假定スル．

53. 平均値

$y=f(x)$ ヲ區域 (a,b) 內ニ於テ連續ナル函數トスル．區域 (a,b) ヲ n 個ノ相等シキ小區域ニ分チ，ソノ各小區域內ニ於ケル函數 y ノ任意ノ値ヲ $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ トシテコレラノ函數値ノ平均ヲ作ル．卽チ

$$\mathrm{M}_n = \frac{y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_n}{n}$$

今各小區域ノ長サヲ h トスルナラバ

$$\mathrm{M}_n = \frac{y_1h + y_2h + \cdots\cdots + y_nh}{nh}$$

$$= \frac{1}{b-a}\left\{y_1h + y_2h + \cdots\cdots + y_nh\right\}$$

トナルカラ

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx$$

ヲ得ル．此極限値ヲ區域 (a,b) 內ニ於ケル**函數 $f(x)$ ノ平均値**又ハ略シテ**平均**ト稱スル．

例． 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ中心ヲ通リテ引ケル動徑 (1) ノ自乘ノ平均ヲ求ム．

楕圓ノ中心卽チ原點ヲ極ニ，x 軸ヲ首線ニ取リテ上ノ方程式ヲ極座標ノ方程式ニ變ズルナラバ

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$$

トナル．此 r^2 ノ平均ハ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta = \frac{a^2b^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{2a^2b^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{b^2 + a^2\tan^2\theta}$$

(1) 次ニ述ブル注意參照．

$$= \frac{2a^2b^2}{\pi}\left[\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a\tan\theta}{b}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = ab.$$

コレ所要ノ平均デアル．

注意． 平均値ハ自變數ヲ變ズルニ從ツテ變ズルガ常デアル．例ヘバ靜止セル物體ガ地球ノ引力ノ下ニ落下スルトキ速サノ平均ヲ求ムル場合ニ若シ時間 t ヲ自變數ニ取ルナラバ物體ガ落下シ始メテヨリ t 時間後ニ有スル速サ v ハ gt ニ等シイ故 $0\leqq t\leqq t_1$ 間ニ於ケル v ノ平均ハ

$$\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} gt\,dt = \frac{1}{2}gt_1$$

デ最後ノ速サノ $\dfrac{1}{2}$ トナルケレドモ落下距離 s ヲ自變數ニ取ルナラバ $v=\sqrt{2gs}$ トナルカラ $0\leqq s\leqq s_1$ 間ニ於ケル v ノ平均ハ

$$\frac{1}{s_1}\int_0^{s_1}\sqrt{2gs}\,ds = \frac{2}{3}\sqrt{2gs_1}$$

卽チ最後ノ速サノ $\dfrac{2}{3}$ トナルガ如キデアル．第一ノ解ハ時間 t_1 ヲ n 個ノ相等シキ區間ニ分チ其各區間內ニ一ツヅツ取ツタ速サ（云ハバ各區間內ニ於ケル代表速度）ノ平均ノ極限デアリ，第二ノ解ハ落下距離 s_1 ヲ n 個ノ相等シキ區間ニ分チ其各區間內ニ一ツヅツ取ツタ速サノ平均ノ極限デアル．コノ二ツノ極限値ノ相異ナルハ當然デアツテ怪シムニ足ラヌ．コノ樣ニ自變數ヲ變ズルニ從ツテ平均値モ變ズルガ故ニ平均値ヲ求メル問題ニ於テハ實ハ何ヲ自變數トシテノ平均値ナルカヲ指定セネバナラヌノデアル．併シナガラ前後ノ關係ヨリソノ意味明瞭ナル場合ニハ勿論之ヲ省クコトハアル．

問 題 25.

1. 半徑 a ナル四分圓ガ一端ニ於ケル切線ノマハリニ廻轉シテ生ズル曲面ノ表面積．

2. 拋物線 $y^2=4px$ ノ頂點ト曲線上ノ一點 (x_1, y_1) トノ間ノ弧ガ x 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル曲面ノ表面積．

3. 曲線 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$, $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ ガ x 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル曲面ノ表面積．

4. 楕圓 $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ ガ y 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル曲面ノ表面積．

5. 圓 $x^2+(y-b)^2=r^2\ (b>r)$ ガ x 軸ノマハリニ廻轉シテ生ズル曲面ノ表面積.

6. 函數 $y=a\sin kx\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{k}\right)$ ニ於テ (i) y ノ平均値, (ii) y^2 ノ平均値ノ平方根ヲ求ム.

7. 函數 $y=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots\cdots+a_n\sin nx\ (0\leqq x\leqq\pi)$ ニ於テ y^2 ノ平均値ヲ求ム.

8. 半徑 a ナル圓周上ノ一點ヲ通リテ引ケル圓ノ弦ノ平均ヲ求ム.

9. 橢圓ノ焦點ヲ通リテ引ケル橢圓ノ動徑ノ平均ヲ求ム.

10. 單弦運動ニ於テハ運動えねるぎーノ平均 (時間ヲ自變數トセル) ハ最大えねるぎーノ $\dfrac{1}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ.

第十章

偏導函數

54. 二ツ以上ノ變數ノ函數

三ツ以上ノ變數ノ函數ハ二ツノ變數ノ函數ト略同ジ様ニ定義セラレ且ツ略同ジ様ニ取リ扱ハレルノデアル. 故ニ以下主トシテ二ツノ變數ノ函數ヲ考ヘルコトニスル.

又二ツ以上ノ變數ノ函數ニ關スル種種ノ定義及ビ性質中ニハ一ツノ變數ノ函數ニ關スル定義及ビ性質ニ類似ノモノモ尠クナイ. ソレラ類似ノ事項ハ重複ヲ避ケテ成ルベク簡單ニ記述スルコトニスル.

三ツノ變數 x, y, z ガアツテ x ト y トノ値ガ定マルトキソレニ準ジテ第三ノ變數 z ノ値ガ定マルト云フ場合ニハ z ハ**二ツノ變數 x ト y トノ函數**デアルト云フ. x ト y トノ函數ヲ表スニ

$$f(x,y),\quad \phi(x,y),\quad F(x,y)$$

等ノ記號ヲ用ヒ, $x=a,\ y=b$ ナルトキノ函數 $f(x,y)$ ノ値ヲ表スニ $f(a,b)$ ヲ以テスル.

一ツノ變數ノ函數ノ場合ニ於ケルト同ジク, z ガ x ト y トノ函數デアルトキ x, y ノ取ル値ニ制限ノアルコトガアル. 例ヘバ

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

ハ $x^2 + y^2 \leqq r^2$ ナル制限ノ下ニアル x, y ノ組ニ對シテソノ函數トナル．コノ制限ノ下ニアル x, y ノ組ノ全體ヲ**變數 x, y ノ變域**又ハ**函數 z ノ定義域**ト稱スル．

直交軸ニ關シテ不等式 $x^2 + y^2 \leqq r^2$ ヲ滿足スル x, y ノ組ヲ座標トスル點ハ原點ヲ中心トシ r ヲ半徑トスル圓ノ內部（圓ノ周ヲモ含ム，以下總テ同樣）ニアル．故ニ幾何學的ニ考フルナラバ上ノ函數ノ定義域ハ此圓ノ內部デアル．此意味ニ於テ次ノ如キ陳述ヲナスコトガアル．

函數 $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ハ原點ヲ中心トシ半徑 r ナル圓ノ內部ニ於テ x, y ノ函數トナル．

コノ例ニ於ケル如ク函數 z ノ定義域ガ平面ノ一部ヲナストキハ x, y ノ**變域ハ連續デアル**ト云フ．以下吾人ハ此種ノ變域ノミヲ考フルガ故ニコレヲ單ニ變域又ハ**領域**ト稱スルコトニスル．

二ツノ變數ノ函數ニ於テモ一値函數ト多値函數トノ區別ハ勿論存在スル．併シナガラ一變數ノ函數ノ場合ト同ジク多値函數ハ之ヲイクツカノ一値函數ニ分ケテ考ヘルコトニシ單ニ函數ト云ヘバ一値函數ナルモノト規約スル．

z ガ x ト y トノ函數デアル場合ニハ x ト y トヲ**自變數**，z ヲ**從屬變數**ト稱スルコトガアル．(1)

偖テ $x = x_1, y = y_1$ ナルトキノ函數 $z = f(x, y)$ ノ値ハ存在シ

(1) 併シナガラ x ト y トヲ自變數ト稱スルハ x ト y トノ間ニ函數的關係ノ存在シテ居ナイコトヲ前提トスルノデアツテ若シ x, y ノ間ニ函數的關係ガ存在スルナラバ縱令 z ガ x, y ノ函數デアルトハ云ヘ，x ト y トヲ自變數ト稱スルハ妥當デナイ．

テモ，シナクテモ何レデモ宜シイ．x ヲ x_1 ニ，y ヲ y_1 ニ漸次近ヅクルトキ，(1) 函數 z ノ取ル値ト常數 z_1 トノ差ヲ何程ニテモ小ナラシメ得ル場合，通俗的ニ云ヘバ x ガ x_1 ニ，y ガ y_1 ニ極メテ近イ値ヲ取ルトキ（$x = x_1, y = y_1$ ノ場合ダケハ除ク）函數 z ノ取ル値ガ常數 z_1 ニ極メテ近イト云フ場合ニハ **x ガ x_1 ニ，又 y ガ y_1 ニ收斂スルトキ z ハ z_1 ニ收斂スル**ト云ヒ之ヲ表スニ

$$x \to x_1,\ y \to y_1 \ \text{ナルトキ}\ z \to z_1$$

又ハ

$$\lim_{x \to x_1,\, y \to y_1} z = z_1$$

ヲ以テスル．

x_1, y_1, z_1 ノ中ノ或モノガ ∞ トナル場合ノ同種ノ記號ノ意味ニツイテハ一變數ノ函數ノ場合ヨリ類推セラレタイ．

第一章，第 5 節ニ於ケル諸定理ハ二變數ノ函數ニ擴張シ得ルコト勿論デアル．

次ニ二變數ノ函數ノ連續ヲ定義スル．

$x \to x_1, y \to y_1$ ナルトキノ函數 $z = f(x, y)$ ノ極限値ガ $x = x_1, y = y_1$ ナルトキノ函數ノ値 $f(x_1, y_1)$ ニ等シイ場合ニハ函數 z ハ **$x = x_1$，$y = y_1$ ニ對シテ**，或ハ幾何學ノ語ヲ借リテ**點 $x = x_1$，$y = y_1$ ニ於テ連續デアル**ト稱スル．而シテ領域 D ニ屬スル總テノ點ニ於テ函數 z ガ連續デアルトキハ z ハ**領域 D ニ於テ連續デアル**ト云フ．例ヘバ $z = x^2 + y^2$ ハ任意ノ領域ニ於テ連續デアリ $z = \dfrac{1}{x+y}$ ハ直線 $x + y = 0$ 上ノ點ヲ含マナイ任意ノ領域ニ於テ連續デアル．

(1) $x = x_1$ デアツテ y ヲ漸次 y_1 ニ近ヅケル場合及ビ $y = y_1$ デアツテ x ヲ漸次 x_1 ニ近ヅケル場合ヲモ勿論含ムノデアル．

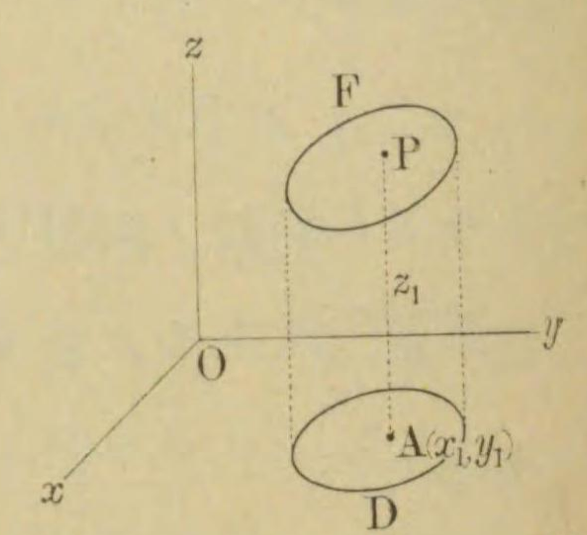
又點 $x=x_1,\ y=y_1$ ヲ內部ニ含ム或領域ニ於テ函數 $z=f(x,y)$ ガ連續デアルトキハ z ハ**點 $x=x_1,\ y=y_1$ ノ近傍ニ於テ連續デアル**ト稱スル.

第一章, 第 6 節ニ述ベタ一變數ノ連續函數ニ關スル定理ハ二變數ノ連續函數ニツイテモソノママ成立スル. 卽チ

有限個ノ連續函數ノ和, 差, 積ハ連續函數デアル.

連續函數ノ連續函數ハ亦一ツノ連續函數デアル.

連續函數 $f(x,y)$ ト連續函數 $\phi(x,y)$ トノ比 $\dfrac{f(x,y)}{\phi(x,y)}$ ハ $\phi(x,y)\neq 0$ ナル如キ x,y ノ組ニ對シテ連續デアル.



三次元空間ニ於ケル直交軸ニ關シテ方程式 $z=f(x,y)$ ノ表ス幾何學的像ヲ F トシ, x,y 平面上ノ點 $A(x_1,y_1)$ ヲ通ツテ z 軸ニ平行ニ直線ヲ引キ F トノ交點ヲ P トスルナラバ P 點ノ z 座標ハ $f(x_1,y_1)$ デアル. 函數 z ガ $x=x_1,\ y=y_1$ ニ於テ連續デアルトキハ x,y 平面上ノ A ニ極メテ近ク取ツタ點ニ對スル F 上ノ點ノ z 座標ハ亦 z_1 ニ極メテ近イ. 換言セバ x,y 平面上ノ A ニ極メテ近ク取リタル點ニ對スル F 上ノ點ハ亦 P 點ニ極メテ近イ.

函數 z ガ領域 D ニ於テ連續デアル場合ニハ D 內ノ任意ノ點ニ對スル F 上ノ點ニツイテ此事ガ云ハレル. 而シテ此時幾何學的像 F ハ連續曲面デアル.

以上二ツノ變數ノ函數ニツイテ定義セル事項ハソノママ三ツ以

上ノ變數ノ函數ニ適用スルコトガ出來ル. 只多次元空間ノ幾何學ヲ知ラナイ吾人ニハソレヲ幾何學的ニ說明スルコトハ出來ヌ. ソレダケノ相違デアル.

55. 偏導函數

$$z=f(x,y)$$

ヲ二變數 x,y ノ函數トスル. 今 y ニ定值 y_1 ヲ與フルナラバ z ハ $f(x,y_1)$ トナリ x ノ函數トナル. 故ニ x ニツイテ微分スルコトガ出來ル. $x=x_1$ ニ於ケル函數 $f(x,y_1)$ ノ微分係數卽チ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x,y_1)-f(x_1,y_1)}{\Delta x}$$

ヲバ $x=x_1,\ y=y_1$ ニ對スル, 或ハ幾何學ノ語ヲ借リテ, 點 $x=x_1,\ y=y_1$ ニ於ケル函數 $z=f(x,y)$ ノ **x ニ關スル偏微分係數**ト云ヒ之ヲ表スニ

$$f_x(x_1,y_1)$$

ナル記號ヲ用フル. 同樣ニ

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_1,y_1+\Delta y)-f(x_1,y_1)}{\Delta y}$$

ヲバ $x=x_1,\ y=y_1$ ニ對スル, 又ハ點 $x=x_1,\ y=y_1$ ニ於ケル函數 $z=f(x,y)$ ノ **y ニ關スル偏微分係數**ト稱シ $f_y(x_1,y_1)$ ナル記號ニテ表ス.

點 $x=x_1,\ y=y_1$ ニ於ケル函數 $z=f(x,y)$ ノ x ニ關スル偏微分係數 $f_x(x_1,y_1)$ ハ x_1,y_1 ノ函數デアル. 故ニ x_1 ノ代リニ x ニテ, y_1 ノ代リニ y ニテ置キカフルナラバ x,y ノ一ツノ函數ヲ

得ル. 此函數ヲ z ノ x ニ關スル**偏導函數**ト稱シ

$$z_x,\quad f_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

等ノ記號ニテ表シテ居ル. 卽チ

$$z_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

デアル.

同様ニ z ノ y ニ關スル偏導函數ヲ定義スルコトガ出來ル.

卽チ
$$z_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

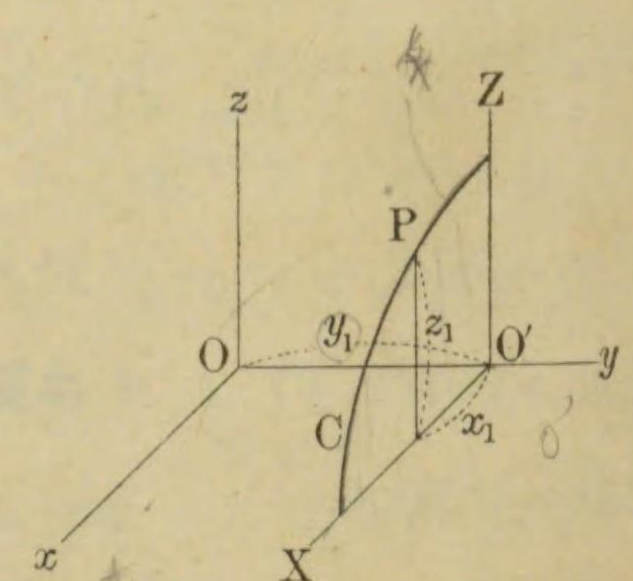
z_x ハ y ヲ常數ト看做シテ z ヲ x ニ關シテ微分シタモノデアル故 z_x ヲ求ムルニ際シテハ一變數ノ函數ノ微分公式ヲ適用シ得ルコト勿論デアル. z_y ニツイテモ同様デアル. 例ヘバ

$$z=e^{3x}\cos 2y$$

デアルナラバ

$$z_x=3e^{3x}\cos 2y,\qquad z_y=-2e^{3x}\sin 2y$$

直交軸ニ關シテ $z=f(x,y)$ ノ表ス曲面ヲ F トシ F 上ノ一點ヲ $P(x_1,y_1,z_1)$ トスル. P ヲ通ツテ y 軸ニ垂直ナル平面 α ヲ引キ F トノ交線ヲ C トスルナラバ C 上ノ任意ノ點ノ y 座標ハ y_1 デアツテ x, z 座標ノ間ニハ



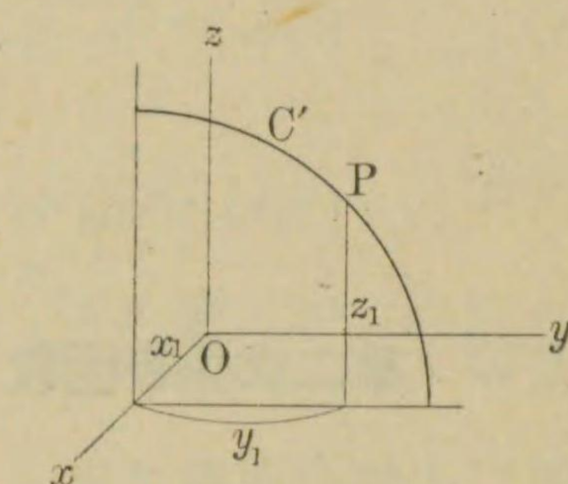
$$z=f(x,y_1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

y_1=const

ナル關係ガアル. 故ニ平面 α ト y 軸トノ交點 O' ヲ通ツテ x, z 兩軸ニ平行ナル二直線 O'X, O Z ヲ引キコレヲ α 平面内ニ於ケ

ル座標軸ニ取ルナラバ曲線 C ノ方程式ハ此二軸ニ關シテ (1) デアル. 故ニ $f_x(x_1,y_1)$ ハ點 P ニ於ケル C ノ切線ガ X 軸トナス角, 從ツテ又モトノ x 軸トナス角ノ正切ニ等シイ.

同様ニ點 P ヲ通ツテ x 軸ニ垂直ナル平面ヲ引キ F トノ交線ヲ C' トスルナラバ $f_y(x_1,y_1)$ ハ點 P ニ於ケル曲線 C' ノ切線ガ y 軸トナス角ノ正切ニ等シイ.



ヨツテ偏微分係數 $f_x(x_1,y_1)$, $f_y(x_1,y_1)$ ハソレゾレ點 $P(x_1,y_1,z_1)$ ヲ通ツテ y 軸, x 軸ニ垂直ニ引ケル平面ト曲面 F トノ交リノ P 點ニ於ケル勾配ヲ表スト云フコトニナル.

三ツ以上ノ變數ノ函數

$$u=f(x,y,z,\ldots\ldots)$$

ニツイテモ其偏導函數 u_x, u_y, u_z 等ヲ同様ニ定義スルコトガ出來ル. 是等ノ偏導函數ヲ求ムルコトヲソレゾレ x, y, z 等ニ關シテ u ヲ**偏微分**[1]**スル**ト稱スル.

56. 高次偏導函數

$$z=f(x,y)$$

ヲ x, y ノ函數トスルナラバ z_x 及ビ z_y ハ亦 x, y ノ函數トナル故是等ヲソレゾレ x 及ビ y ニツイテ偏微分スルコトガ出來ル. z_x ノ x ニ關スル偏微分係數卽チ $(z_x)_x$ ヲ z_{xx}, $f_{xx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

[1] 偏ノ字ヲ略シテ單ニ微分スルト云フコトモアル.

等ノ記號ニテ表ス. 式ニテ書クナラバ

$$(z_x)_x = z_{xx} = f_{xx}(x,\ y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

同樣ニ

$$(z_x)_y = z_{xy} = f_{xy}(x,\ y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(z_y)_x = z_{yx} = f_{yx}(x,\ y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(z_y)_y = z_{yy} = f_{yy}(x,\ y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

是等ヲ**第二次偏導函數**ト稱スル.

第二次偏導函數ヲ更ニ x 又ハ y ニツキ偏微分セルモノヲ**第三次偏導函數**ト稱スル. 以下同樣デアル. 是等ノ高次偏導函數ヲ表ス記號ニツイテハ類推セラレタイ. 例ヘバ

$$(z_{xy})_y = z_{xyy} = f_{xyy}(x,\ y) = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

三ツ以上ノ變數ノ函數ニツイテモ高次ノ偏導函數ヲ同樣ニ定義シ得ルコト勿論デアル.

$f_{xy}(x,\ y)$ ハ $f(x,\ y)$ ヲ最初 x ニツキ, 而シテ次ニ y ニツキ偏微分シタモノ, $f_{yx}(x,\ y)$ ハ $x,\ y$ ニツキテノ偏微分ノ順序ガ上ト反對ノモノデアル. 此二ツハ, 兩方トモ x, y ニツキ連續デアルナラバ, 相等シイコトガ次ノ如クニシテ證明セラレル.

今 $A = f(x+h,\ y+k) - f(x+h,\ y) - f(x,\ y+k) + f(x,\ y)$

ナル式ヲ考ヘテ見ル.

$$f(x,\ y+k) - f(x,\ y)$$

ハ x, y ノ函數デアルケレドモ混雜ヲ防グタメニ x ノ函數ト看做

シテ $\phi(x)$ ト置クナラバ

$$A = \phi(x+h) - \phi(x)$$

トナル故平均値定理ヲ適用シテ

$$A = h\phi'(x+\theta_1 h), \qquad 0 < \theta_1 < 1$$

然ルニ $\phi'(x) = f_x(x,\ y+k) - f_x(x,\ y)$

デアルカラ

$$A = h\left\{f_x(x+\theta_1 h,\ y+k) - f_x(x+\theta_1 h,\ y)\right\}$$

トナル. 此右邊ヲ y ノ函數ト考ヘテ再ビ平均値定理ヲ適用スルナラバ

$$A = h\left\{k f_{xy}(x+\theta_1 h,\ y+\theta_2 k)\right\}, \quad 0 < \theta_2 < 1 \ldots\ldots (1)$$

次ニ $\psi(y) = f(x+h,\ y) - f(x,\ y)$

ト置キ上ト同樣ノ變形ヲ施スナラバ

$$\begin{aligned} A &= \psi(y+k) - \psi(y) \\ &= k\psi'(y+\theta_3 k), \qquad 0 < \theta_3 < 1 \\ &= k\left\{f_y(x+h,\ y+\theta_3 k) - f_y(x,\ y+\theta_3 k)\right\} \\ &= k\left\{h f_{yx}(x+\theta_4 h,\ y+\theta_3 k\right\}, \quad 0 < \theta_4 < 1 \ldots\ldots (2) \end{aligned}$$

(1) 式ト (2) 式トヲ相等シト置イテ

$$f_{xy}(x+\theta_1 h,\ y+\theta_2 k) = f_{yx}(x+\theta_4 h,\ y+\theta_3 k) \ \ldots\ldots\ldots (3)$$

$f_{xy}(x,\ y)$ 及ビ $f_{yx}(x,\ y)$ ガ兩方トモ $x,\ y$ ニツイテ連續デアルナラバ

$$\lim_{h\to 0,\ k\to 0} f_{xy}(x+\theta_1 h,\ y+\theta_2 k) = f_{xy}(x,\ y)$$

$$\lim_{h\to 0,\ k\to 0} f_{yx}(x+\theta_4 h,\ y+\theta_3 k) = f_{yx}(x,\ y)$$

デアルカラ (3) 式ノ極限ヲ取ツテ

$$f_{xy}(x,\ y) = f_{yx}(x,\ y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

此結果カラ，高次偏導函數ノ連續性ヲ假定シテ，次ノ一般ノ結論ヲ誘導スルコトガ出來ル.

$z=f(x,\ y)$ ヲ $x,\ y$ ニツキ何回カ偏微分セル結果ハ $x,\ y$ ニツイテノ偏微分ノ順序ニ全ク無關係デアル.

例ヘバ
$$z_{xxy} = z_{yxx}$$
デアツテ之ヲ證明スルニハ次ノ如クスレバ宜シイ.

$$z_{xxy} = (z_x)_{xy} = (z_x)_{yx} = z_{xyx}$$
$$= (z_{xy})_x = (z_{yx})_x = z_{yxx}$$

三ツ以上ノ變數ノ函數ニツイテモ同様ノ事實ノ成立スルコトハ容易ニ認ムルコトガ出來ル.

偏導函數ガ連續デナイ場合ニハ偏微分ノ順序ヲ變ヘルコトニヨツテ異ナル結果ニ到達スルコトハ往往アルノデアル. 併シナガラ以下吾人ハ主トシテ偏導函數ノ連續ナル領域ヲ考フルガ故ニイチイチ之ヲ斷ルコトヲヤメ，無斷ニテ偏微分ノ順序ヲ交換スルコトニスル.

問 題 26.

1. $z = x^2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} - y^2\tan^{-1}\dfrac{x}{y}$ ナルトキ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及ビ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ヲ求ム.

2. $z=f(ax+by)$ ナルトキ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及ビ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ヲ求メ，ヨリテ $b\dfrac{\partial z}{\partial x} = a\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ヲ證明セヨ.

3. 前問ニ於テ $b^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ヲ證明セヨ.

4. $z = f(x+at) + \phi(x-at)$ ナルトキ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ヲ證明セヨ.

5. $z = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ナルトキ $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = nz$ ナルコトヲ證明セヨ.

6. $z-\gamma = (x-\alpha)f\left(\dfrac{y-\beta}{x-\alpha}\right)$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.
$$(x-\alpha)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-\beta)\frac{\partial z}{\partial y} = (z-\gamma)$$

7. $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x} = f\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right)$ ナルトキ $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2$ ヲ證明セヨ.

8. $z = x\phi(ax+by) + y\psi(ax+by)$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.
$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2ab\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

9. $u = \dfrac{1}{r},\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ナルトキ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ ヲ證明セヨ.

10. $u = f(r),\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$$

11. 第 1 問ノ函數ニ對シテ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ ヲ驗證セヨ.

57. 合成函數ノ偏導函數

先ヅ簡單ナル場合カラ始メルコトニスル.

z ハ $u,\ v$ ノ函數デアツテ $u,\ v$ ハ一ツノ變數 x ノ函數デアルトスル. 此時ハ z ハ x ノミノ函數トナル故 $\dfrac{dz}{dx}$ ガ存在シ得ル. 之ヲ求ムルニハ如何ニスベキカ.

$$z = f(u,v)$$

ヲ $u,\ v$ ノ函數トシ，x ノ増分 Δx ニ對スル $u,\ v,\ z$ ノ増分ヲソレゾレ $\Delta u,\ \Delta v,\ \Delta z$ トスルナラバ

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u,v)\\ &= \left\{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)\right\}\\ &\qquad + \left\{f(u, v+\Delta v) - f(u,v)\right\},\end{aligned}$$

トナルカラ平均値定理ヲ適用シテ

$$\Delta z = \Delta u f_u(u+\theta_1\Delta u,\, v+\Delta v) + \Delta v f_v(u,\, v+\theta_2\Delta v)$$

$$0<\theta_1<1, \qquad 0<\theta_2<1$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta z}{\Delta x} = f_u(u+\theta_1\Delta u,\, v+\Delta v)\frac{\Delta u}{\Delta x} + f_v(u,\, v+\theta_2\Delta v)\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

今若シ $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ ガ存在シ且ツ $f_u(u, v), f_v(u, v)$ ガ共ニ u, v ニツキ連續デアルトスルナラバ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f_u(u+\theta_1\Delta u,\, v+\Delta v) = f_u(u, v)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f_v(u,\, v+\theta_2\Delta v) = f_v(u, v)$$

トナルカラ上ノ式カラ

$$\frac{dz}{dx} = f_u(u, v)\frac{du}{dx} + f_v(u, v)\frac{dv}{dx} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或ハ
$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1')$$

ヲ得ル. コレハ又次ノ如クニ書クコトモ出來ル.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1'')$$

コレガ $\frac{dz}{dx}$ ヲ求ムル公式デアル.

z ガ u, v, w 等ノ函數デアツテ $u, v, w, \ldots\ldots$ ガ一變數 x ノ函數ナル場合ニハ

$$z = f(u, v, w, \ldots\ldots)$$

トスルナラバ

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \cdots \quad \cdots\cdots(2)$$

ナル公式ヲ得ル.[1]

次ニ $z=f(u, v)$ ハ u, v ノ函數デアツテ u, v ガ二變數 x, y ノ函數デアルトスル. 此時ハ z ハ x ト y トノ函數トナルカラ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ガ存在シ得ル. 是等ヲ求ムル公式モ (1′) 式ヨリ誘導スルコトガ出來ル. 何トナレバ $\frac{\partial z}{\partial x}$ ハ y ヲ常數ト看做シテ z ヲ x ニツキ微分シタモノデアツテ y ヲ常數ト看做シタ以上ハ u, v, z ハ x ノミノ函數トナル故 (1′) 式ヲソノママ適用シ得ルカラデアル. 但シ y ヲ常數ト看做スト云フコトヲ式ノ上デ見セネバナラヌ故 (1′) 中ノ $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ ノ代リニ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ ヲ使用セネバナラヌ. 即チ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

同樣ニシテ
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3')$$

z ガ u, v, w 等ノ函數

$$z = f(u, v, w, \ldots\ldots)$$

デアリ u, v, w 等ガ n 個ノ變數 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ノ函數デアル場合ニ於テハ次ノ公式ヲ得ル.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x_1} + \cdots\cdots \\
\frac{\partial z}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x_2} + \cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial z}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x_n} + \cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(4)$$

[1] 但シ $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}$ 等ハ $u, v, w, \ldots\ldots$ ノ連續函數ナルコトヲ前提トシテ居ルコト勿論デアル. 以下此種ノ斷リ書キヲ省クコトニスル.

例 1 $z=f(x,y),\ y=\phi(x)$ ナルトキ $\dfrac{dz}{dx}$ ヲ求ム.

z ハ x, y ノ函數デアリ而シテ x, y 共ニ x ノ函數デアルカラ公式 $(1')$ ヲ用ヒテ $\dfrac{dz}{dx}$ ヲ求ムルコトガ出來ル. 即チ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\phi'(x)^{(1)}$$

例 2. $z=f(x,y,u),\ u=\phi(x,y),\ y=\psi(x)$ ナルトキ $\dfrac{dz}{dx}$ ヲ求ム.

例 1 ニ於ケルト同ジクシテ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

又 $u=\phi(x,y)$ ヨリ

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

更ニ $y=\psi(x)$ ヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\psi'(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{C})$$

(B), (C) ノ値ヲ (A) ニ代入シテ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'(x)+\frac{\partial f}{\partial u}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\psi'(x)\right\}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\left\{\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right\}\psi'(x)$$

例 3. $z=f(x,y),\ x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

z ハ x, y ノ函數デアリ, x, y ハ何レモ r, θ ノ函數デアルカラ z ハ結局 r, θ ノ函數トナル. $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ 及ビ $\dfrac{\partial z}{\partial\theta}$ ハ公式 (3), (3′) ニヨツテ求メラレル.

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

然ルニ $\qquad \dfrac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\quad \dfrac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

(1) 此式ノ左邊ハ $f(x,y)$ 中ノ y ヲ x ノ函數ト看做シテ $f(x,y)$ ヲ x ニツキ微分セルモノ, 右邊ノ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ハ $f(x,y)$ 中ノ y ヲ常數ト看做シテ x ニツキ偏微分セルモノデアル.

同様ニシテ

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}$$

$$=-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

$$\therefore\quad\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\left(-\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

例 4. $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\partial r}{\partial x}$$

$x=r\cos\theta$ ヨリ $\qquad \dfrac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta$

又上ノ式ヨリ r ヲ x, y ノ函數トシテ表セバ

$$r^2=x^2+y^2$$

y ヲ常數ト看做シテ兩邊ヲ x ニツキ偏微分スレバ

$$2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x$$

$$\therefore\quad\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\theta$$

ヨツテ $\qquad \dfrac{\partial x}{\partial r}=\dfrac{\partial r}{\partial x}$

注意. 例 4 ニ於ケル $\dfrac{\partial x}{\partial r}$ ハ θ ヲ常數ト看做シテ x ヲ r ニツキ偏微分シタモノデアリ, $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ ハ y ヲ常數ト看做シテ r ヲ x ニツキ偏微分シタモノデアル. 偏微分スル場合ニハ何ヲ常數ト看做シテノ偏微分ナルカヲ常ニ頭ニ置ク必要ガアルコトヲ注意シテ置ク.

次ニ高次偏導函數ヲ求ムル方法ヲ述ベル. 他ノ場合モ全ク同様デアルカラ吾人ハ

$$z=f(u,v),\quad u=\phi(x,y),\quad v=\psi(x,y)$$

ナル場合ニツイテ考察スル.

此函數 z ニ對シテハ (3), (3′) ニヨリ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3')$$

(3) ノ兩邊ヲ x ニツキ偏微分スルナラバ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}^{(1)}$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial u},\ \dfrac{\partial f}{\partial v}$ ハ何レモ u, v ノ函數デアルカラ是等ヲ x ニツキ偏微分スルニハ亦 (3) ノ式ヲ用フルコトガ出來ル. 即チ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

又 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial x}$ ハ何レモ x, y ノ函數デアルカラ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

是等ノ値ヲ上ノ式ニ代入シ且ツ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$ ナルコトニ注意スレバ

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)$ ハ $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ ヲ x ニツキ偏微分スルコトヲ表ス.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdots\cdots\cdots(5)$$

同様ニ (3′) ノ兩邊ヲ y ニツキ偏微分シテ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ヲ求メルコトガ出來ル. 又ハ (5) 式ニ於テ x ノ代リニ y ヲ置換シテ出スコトモ出來ル. 更ニ (3) ノ兩邊ヲ y ニツキ偏微分スルナラバ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ヲ求メルコトガ出來ル.

以上ハ z ノ x, y ニ關スル二次ノ偏導函數ヲ與フル式デアル. 之ヲ更ニ x, y ニツキ偏微分スルコトニヨリ三次以上ノ偏導函數ヲ求メルコトモ出來ル.

例 1. $\rho=f(u, v),\ u=tx,\ v=ty$ ナルトキ $\dfrac{\partial^n\rho}{\partial t^n}$ ヲ求ム.

先ヅ ρ ヲ t ニツキ一回微分スレバ

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

而シテ
$$\frac{\partial u}{\partial t}=x,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}=y$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}=x\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}$$

コレヲ更ニ t ニツキ微分スレバ

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=x\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+y\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$=x\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right]+y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial t}\right]$$

$$=x\left[x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right]+y\left[x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right]$$

$$=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

順次 t ニツキ微分シテ

$$\frac{\partial^n \rho}{\partial t^n} = x^n \frac{\partial^n f}{\partial u^n} + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} y \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-1}\partial v} + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} y^2 \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-2}\partial v^2} + \cdots\cdots + y^n \frac{\partial^n}{\partial v^n}$$

ナル結果ヲ得ル. コレハ歸納法ニヨツテ證明スルコトガ出來ル.

此結果ヲ
$$\frac{\partial^n \rho}{\partial t^n} = \left(x\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}\right)^n f(u,\ v)$$

ト書イテ表スコトガアル. $\left(x\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}\right)^n$ ヲ機械的ニ二項定理ヲ用ヒテ展開スレバ

$$x^n \frac{\partial^n}{\partial u^n} + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} y \frac{\partial^n}{\partial u^{n-1}\partial v} + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} y^2 \frac{\partial^n}{\partial u^{n-2}\partial v^2} + \cdots\cdots + y^n \frac{\partial^n}{\partial v^n}$$

トナリ此各項ニ $f(u,\ v)$ ヲ付ケ加フレバ

$$x^n \frac{\partial^n f}{\partial u^n} + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} y \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-1}\partial v} + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} y^2 \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-2}\partial v^2} + \cdots\cdots + y^n \frac{\partial^n f}{\partial v^n}$$

ヲ得ル. 上式ノ右邊ハコレヲ表ス記號デアル.

注意. $\rho = f(u, v, w, \ldots\ldots)$ ガ u, v, w 等イクツカノ變數ノ函數デアツテ $u = tx$, $v = ty$, $w = tz$, …… デアル場合ニハ

$$\frac{\partial^n \rho}{\partial t^n} = \left(x\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v} + z\frac{\partial}{\partial w} + \cdots\cdots\right)^n f(u,\ v,\ w,\ \ldots\ldots)$$

ナルコトガ證明セラレル. 但シ此式ノ右邊ハ $\left(x\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v} + z\frac{\partial}{\partial w} + \cdots\cdots\right)^n$ ヲ多項定理ヲ用ヒテ機械的ニ展開シ然ル後其各項ニ f ヲ附ケ加ヘタモノヲ表ス.

例 2. $x,\ y$ ノ函數 $f(x,\ y)$ ガ次ノ關係ヲ滿足スルトスル.

$$f(tx,\ ty) \equiv t^n f(x,\ y)$$

コノ様ナ函數 $f(x,\ y)$ ヲ x, y ニツイテノ **n 次ノ同次函數**ト云フ. 例ヘバ $\sqrt{x^2+y^2}$ ハ x, y ニツキ一次ノ同次函數, $\sqrt{x+y}.\tan\frac{y}{x}$ ハ $x,\ y$ ニツキ $\frac{1}{2}$ 次ノ同次函數デアル. n 次ノ同次函數 $f(x,\ y)$ ハ次ノ式ヲ滿足スルコトヲ證明セヨ.

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(x,\ y) = n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)f(x,\ y)$$

n 次ノ同次函數 $f(x,\ y)$ ニ對シテハ

$$u = tx, \qquad v = ty$$

ト置クナラバ
$$f(u,\ v) = t^n f(x,\ y)$$

トナル故此兩邊ヲ t ニツキ r 回微分シテ (前例參照)

$$\left(x\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}\right)^r f(u,\ v) = n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)t^{n-r} f(x,\ y)$$

ヲ得ル. コレハ $x,\ y,\ t$ ニツイテノ恒等式デアル. 今 $t = 1$ ト置クナラバ

$$u = x, \qquad v = y$$

トナル故

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(x,\ y) = n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)f(x,\ y)$$

ヲ得ル. コレヲ同次函數ニ關スル **Euler ノ定理**ト稱スル.

例ヘバ $f(x,\ y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ ハ零次ノ同次函數ナル故

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

問 題 27.

1. $u = f(x, y, z)$, $x = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1$, $y = a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2$, $z = a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3$ ナルトキ $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial u}{d\zeta}$ ヲ求ム.

2. $z = f(x + ht,\ y + kt)$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = h\frac{\partial z}{\partial x} + k\frac{\partial z}{\partial y}$$

3. $z = f(x,\ y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

[第 240 頁, 例 3 (A), (B) 兩式ヨリ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ヲ求メヨ].

4. 函數 $f(x,\ y,\ z)$ ガ $f(tx,\ ty,\ tz) = t^n f(x, y, z)$ ヲ滿足スルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z)$$

5. 第 2 問ニ於ケル函數 z ニ對シテ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{\partial^n z}{\partial t^n} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$$

6. $z = f(u,\ v)$, $u = \varphi(x,\ y)$, $v = \psi(x,\ y)$ ナルトキ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ヲ求ム.

7. 第 3 問ニ於ケル函數ニ對シテハ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) f$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

ナルヲ知ル. コレヨリ $i = \sqrt{-1}$ トシテ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\times\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

etc.

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = (\cos\theta + i\sin\theta)\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = (\cos\theta - i\sin\theta)\left(\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

ヲ誘導シ之ヲ用ヒテ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)z$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$$

ワカラヌ

ヲ證明セヨ.

8. 前問ニヨリ $u = f(x, y, z)$, $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ ナルトキハ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ナルヲ知ル. コノ式ニ於テ $z = r\cos\theta$, $\rho = r\sin\theta$ ト置クトキハ上式ハ

$$\frac{1}{r^2}\left\{r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right\}$$

ニ等シクナルコトヲ證明セヨ.

58. 陰函數ノ微分法

$f(x, y)$ ヲ x, y ノ函數トスルトキ, 二變數 x, y ノ間ニ

$$f(x, y) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル關係存在スルナラバ y ハ x ノ函數トナル. 方程式 (1) ニヨツテ定メラレル x ノ函數 y ヲ**陰函數**ト稱スル. 例ヘバ

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ナル方程式ニヨツテ定メラレル函數 y ハ陰函數デアル.

方程式 (2) ヲ y ニツキ解クナラバ

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

トナル. (3) ノ如ク y ニツキ解カレタ形ニテ與ヘラレタ函數ヲ**陽函數**ト云フ.

方程式 (1) ニヨツテ定メラレル函數 y ハ一般ニハ一値函數デハナイ. 例ヘバ (2) ニヨツテ定メラレル函數 y ハ x ノ二値函數デアル. 併シナガラ (1) ニヨリ定メラレル函數 y ガ多値函數デアル場合ニハ之ヲイクツカノ一値函數ニ分ケテ考フルコトニシ, 以下ノ議論ニ於テハ其中ノ一ツヲ取ルコトニスル.

偖テ方程式 (1) ニヨリ定メラレル函數ヲ

$$y = \phi(x) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

トスルナラバ (4) ヲ (1) ノ y ニ代入スルトキ恒等式ヲ得ル. 故ニ y ヲ (4) ニテ與ヘラレル x ノ函數トシテ (1) ノ兩邊ヲ x ニツキ微分スルナラバ

$$\frac{d}{dx}f(x, y) = 0$$

即チ
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

ヲ得ル. 從ツテ $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ デアルナラバ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \quad \cdots\cdots\cdots(5')$$

[1]

(1) 此所ノ議論ハ (4) ノ函數ガ存在シ且ツソレガ微分可能ナルコトヲ前提トシテ居ルノデアル. 併シナガラ $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ デアル様ナ所デハ此結論ハ正シイノデアル (證明省略). 尚本節ニ於テハ到ル所暗默ノ中ニ同樣ノ前提ヲ假定シテ居ル.

コレガ (1) 式ヨリ得ル y ノ x ニ關スル微分係數デアル.

更ニ高次ノ微分係數ヲ求メンニハ $(5')$ ヨリ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ハ x ト y トノ函數デアルカラ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx}$$

$(5')$ ヲ用ヒテ

$$= \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

同様ニシテ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

是等ノ値ヲ上ノ式ニ代入スレバ

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}} \qquad \cdots\cdots(6)$$

ヲ得ル. コレハ又 (5) ノ兩邊ヲ x ニツキ微分シテモ得ラレル.

即チ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ヨリ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

或ハ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ヲ得ベク此式中ニ $(5')$ ノ値ヲ代入スレバ (6) 式ガ得ラレルノデアル.

例. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ求ム.

$$f(x, y) \equiv x^2 + 2xy + 2y^2 - 1$$

ト置ケバ與ヘラレタル方程式ハ $f(x, y) = 0$ トナル.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x + 2y)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{x + y}{x + 2y} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{A})$$

此兩邊ヲ x ニツキ微分スレバ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(1 + \dfrac{dy}{dx}\right)(x + 2y) - (x + y)\left(1 + 2\dfrac{dy}{dx}\right)}{(x + 2y)^2} = -\frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{(x + 2y)^2}$$

上式ノ (A) ノ値ヲ代入シテ

$$= -\frac{y + x\dfrac{x + y}{x + 2y}}{(x + 2y)^2} = -\frac{x^2 + 2xy + 2y^2}{(x + 2y)^3}$$

分子ハ與ヘラレタ方程式カラ, 1 ニ等シイ. 故ニ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{(x + 2y)^3}$$

次ニ $f(x, y, z)$ ヲ x, y, z ノ函數トスルトキ, x, y, z ノ間ニ

$$f(x, y, z) = 0 \qquad \cdots\cdots(7)$$

ナル關係存在スル場合ニハ x, y, z 中ノ一ツ例ヘバ z ハ他ノ二ツ

x ト y トノ函數トナル. コノ様ナ函數 z ヲ x **トyトノ陰函數**ト稱スル.

(7) ニヨリ定メラレル函數ヲ

$$z=\phi(x,\ y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

トスルナラバ (8) ヲ (7) ノ z ニ代入スルトキ恒等式ヲ得ル. 今 y ヲ常數ト看做シ從ツテ z ヲ x ノミノ函數トシテ (7) ノ兩邊ヲ x ニツキ微分スルナラバ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

ヨツテ $\dfrac{\partial f}{\partial z}\neq 0$ ナラバ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9')$$

同様ニ

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y}\Big/\frac{\partial f}{\partial z} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

ヲ得ル. 公式 (9′) 及ビ (10) ハ實ハ (5′) ト實質的ニ同ジモノデアル.

(9′) 及ビ (10) ノ兩邊ヲソレゾレ x 及ビ y ニツキ微分シテ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及ビ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ヲ求メルコトガ出來ル. 其形ハ公式 (6) ヨリ推定シ得ルデアラウ. 尙 (9′) ノ兩邊ヲ y ニツキ微分スルナラバ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\dfrac{\partial f}{\partial z}-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^{(1)}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

---

(1) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ ハ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ヲ $x=\text{const.}$ トシテ y ニツキ偏微分スル意デアル. 故ニ此偏微分ニ於テハ z ハ常數デナク y ノ函數ト看做サレネバナラヌ. $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ ニ於テモ同様デアル.

$$=-\frac{\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\dfrac{\partial f}{\partial z}-\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

此式中ノ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ニ (10) ノ値ヲ代入シテ

$$=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\dfrac{\partial f}{\partial z}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^3}$$

ヲ得ル.

次ニ又 $f(x,\ y,\ z)$, $\phi(x,\ y,\ z)$ ヲ共ニ $x,\ y,\ z$ ノ函數トスルトキ $x,\ y,\ z$ ノ間ニ

$$f(x,\ y,\ z)=0, \qquad \phi(x,\ y,\ z)=0$$

ナル關係存在スルナラバ $x,\ y,\ z$ 中ノ二ツ例ヘバ $y,\ z$ ハ他ノ一ツ x ノ函數トナル. 斯ノ様ナ場合ニハ此二ツノ方程式ノ兩邊ヲ x ニツキ微分シテ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0$$

ヲ得ル故 $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0$ デアルナラバ此二ツヨリ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$ ヲ求メルコトガ出來ル.

其様ニシテ求メラレタ式ヲ更ニ x ニツキ微分シテ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ 等ヲ計算スルコトガ出來ル.

ヨリ複雜ナル陰函數ノ微分法モ大同小異デアル. 類推セラレヨ.

例. $u=f(x,\ y,\ z),\ \phi(x,\ y)=0,\ \ \psi(x,\ z)=0$ ナルトキ $\dfrac{du}{dx}$ ヲ求ム.[1]

第一ノ方程式ノ兩邊ヲ x ニツキ微分シテ

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

而シテ第二, 第三ノ方程式カラ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial y}},\qquad \frac{dz}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial z}}$$

コレラノ値ヲ上ノ式ニ代入シテ

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial y}}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial z}}$$

ヲ得ル.

問題 28.

1. $x^3+y^3-3axy=0$ ナルトキ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$ ヲ證明セヨ.
2. $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz=0$ ナルトキ $z_x,\ z_y,\ z_{xx},\ z_{yy},\ z_{xy}$ ヲ求ム.
3. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ \ lx+my+nz=p$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{dz}{dx}$ ヲ求ム.
4. $x^3+y^3+z^3-3axyz=0,\ \ lx+my+nz=p$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{dz}{dx}$ ヲ求ム.
5. $x(t+y)=y^2+t,\ \ y(y-t)=x-t^2$ ヨリ $\dfrac{dx}{dt}$ ヲ求ム.
6. $z=f(x,\ y),\ z=\phi(x)$ ヨリ $\dfrac{dz}{dy}$ ヲ求ム.
7. $y=f(x,\ y,\ z),\ z=\phi(x,\ y,\ z)$ ヨリ $\dfrac{dz}{dx}$ ヲ求ム.
8. $y-nz=f(x-mz)$ ナルトキ $m\dfrac{\partial z}{\partial x}+n\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$ ヲ證明セヨ.
9. $x+y+z=f(x^2+y^2+z^2)$ ナルトキ $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-y$ ヲ證明セヨ.
10. $z=f\left(\dfrac{y-nz}{x-mz}\right)$ ナルトキ $(x-mz)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-nz)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ ヲ證明セヨ.
11. $y=xf(z)+\phi(z)$ ナルトキ $z_{xx}z_y^2-2z_{xy}z_xz_y+z_{yy}z_x^2=0$ ヲ證明セヨ.

(1) 此例ニ於ケル如ク變數ノ數ガ方程式ノ數ヨリ 1 ツダケ多イ場合ニハ自變數ガ一ツデ他ノ變數ハソレノ函數トナルノデアル.

59. 二ツ以上ノ變數ノ函數ノ極大, 極小

$z=f(x,\ y)$ ヲ $x,\ y$ ノ函數トスル. $x=a,\ y=b$ ノ附近ニ於テハ $x=a,\ y=b$ ノトキ函數 z ガ最大トナルト云フ場合ニハ函數 z ハ $x=a,\ y=b$ ニ於テ (若シクハ $x=a,\ y=b$ ニ對シテ)**極大ニナル**ト云フ. ソシテソノ時ノ函數ノ値ヲ**極大値**ト云フ. 極小値ニツイテハ類推セラレタイ.

以下 $f_x(x,\ y),\ f_y(x,\ y)$ ハ $x,\ y$ ノ連續函數デアルモノト假定スル.

函數 $z=f(x,\ y)$ ガ $x=a,\ y=b$ ニ於テ極大トナルトキハ x ノ函數 $f(x,\ b)$ ハ $x=a$ ニ於テ極大トナル故 $f_x(x,b)$ ハ $x=a$ ニ於テ零トナラネバナラヌ. 卽チ

$$f_x(a,\ b)=0 \quad \text{(1)} \qquad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

同様ニ $f(a,\ y)$ モ $y=b$ ニ於テ極大トナル故

$$f_y(a,\ b)=0 \qquad\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) 及ビ (2) ハ $x=a,\ y=b$ ニ於テ z ガ極大トナルタメノ必要條件デアル. コレハ又 $x=a,\ y=b$ ニ於テ z ガ極小トナルタメノ必要條件デアルコトモ容易ニ分ルデアラウ.

コレニヨリ $z=f(x,\ y)$ ノ極大, 極小ヲ求ムルニハ先ヅ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

ヲ滿足スル x,y ノ値ヲ求メ而シテ其各組ニ對シテ函數 z ガ果シテ極大若シクハ極小トナルカ否カヲ調ブレバ宜シイ.

(1) $f_x(a,\ b)$ ハ $\Big[f_x(x,\ b)\Big]_{x=a}$ 或ハ $\Big[f_x(x,\ y)\Big]_{x=a,\ y=b}$ ノ意デアル.

コノ様ナ x, y ノ組ニ對シテ函數 z ガ極大若シクハ極小トナルタメノ充分條件ノ議論ハ本書ニハ省略スル.

例. 平面上ニ三點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ガアル.

$$\Delta = PA^2 + PB^2 + PC^2$$

ガ最小ナル様ナ點 P ヲ求ム.

P 點ノ座標ヲ x, y トスルナラバ

$$\Delta = \left\{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\right\} + \left\{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2\right\} + \left\{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2\right\}$$

此 Δ ノ極大若シクハ極小ニ對シテハ

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial y} = 0$$

$$\therefore \quad \begin{cases}(x-x_1)+(x-x_2)+(x-x_3)=0\\(y-y_1)+(y-y_2)+(y-y_3)=0\end{cases}$$

コレヨリ

$$\begin{cases}x = \dfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\\[2mm] y = \dfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\end{cases} \quad \text{..................(A)}$$

ヲ得ル. 故ニ Δ ノ極大若シクハ極小ハアツテモ只一ツデアル. 然ルニ Δ ノ式ニ立チ戻ツテ考フルナラバ Δ ハ點 P ヲ遠方ニ取ルコトニヨツテ何程ニテモ大トナリ得ルガ, 小サクナル方ニハ制限ガアル (少クトモ Δ ハ零ニハナリ得ナイ). 故ニ Δ ニハ最小ガアル. ソシテソレハ極小デアラネバナラヌ. コノ事カラ Δ ハ (A) 式ノ x, y ニ對シテ極小, 且ツ最小トナルコトガ分ル. (A) 式ニテ與ヘラレル x, y ヲ座標ニ持ツ點ハ三角形 ABC ノ重心デアル. 點 P ガ此重心ト合スルトキ Δ ハ最小トナルノデアル.

三ツ以上ノ變數ノ函數

$$u = f(x, y, z, \ldots\ldots)$$

ノ極大, 極小モ同様ニ定義セラレル. ソシテソレニ對スル必要條件トシテ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \ldots\ldots$$

ガ得ラレルコトモ同様デアル.

60. 陰函數ノ極大, 極小及ビ條件附極大, 極小

$f(x, y)$ ヲ x, y ノ函數トスルトキ

$$f(x, y) = 0 \quad \text{..............................(1)}$$

ニヨツテ定メラレル函數 y ノ極大, 極小ハ (1) ヨリ得ル $\dfrac{dy}{dx}$ ニ對シテ

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{..............................(2)}$$

ヲ滿足セネバナラヌ.[1] 然ルニ第 58 節, 公式 (5′) ニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x}\bigg/\frac{\partial f}{\partial y}$$

故ニ (2) 式ハ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{..............................(3)}$$

トナル. ヨツテ (1) 式ニヨリ定メラレル函數 y ノ極大, 極小ヲ求ムルニハ (1), (3) ヲ聯立方程式トシテ解キ, ソノ根ニツキ果シテ極大, 若シクハ極小トナルカ否カヲ調ブレバ宜シイ.

然ルニ (1) 式ノ y ニ對シテハ第 58 節, 公式 (6) ニヨリ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

デアルカラ (3) 式ヲ代入シテ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg/\frac{\partial f}{\partial y}\,{}^{(2)} \quad \text{....................(4)}$$

---

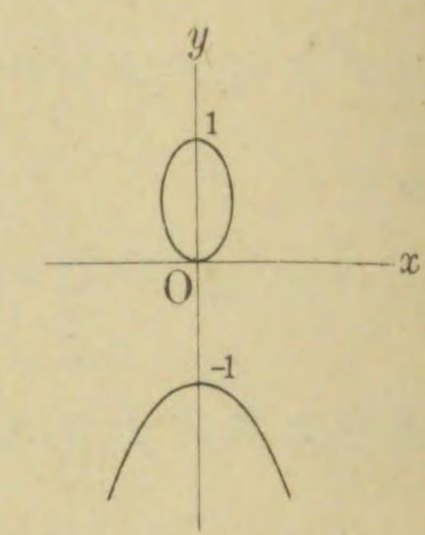
(1) $\dfrac{dy}{dx}$ ノ連續ヲ假定シテ居ル.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ ナルコトヲ假定シテ居ル. 併シ此假定ハ當然次ノ結論中ニ含マレルモノ故特ニ斷ルヲ要シナイ.

ヲ得ル．故ニ (1)，(3) ノ聯立方程式ノ根ニ對シテ此式ガ負トナラバソノ x ニ對シテ y ハ極大トナリ，又此式ガ正トナラバソノ x ニ對シテ y ハ極小トナル．

例. $f(x,\ y) \equiv x^4 + 2x^2 + y^3 - y = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x^3 + x)$$



今 $f(x,\ y) = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ ヲ聯立方程式トシテ解クナラバ次ノ三組ノ根ヲ得ル．

(i) $x = 0,\ y = 0$ (ii) $x = 0,\ y = 1$

(iii) $x = 0,\ y = -1$

而シテ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 1, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(3x^2 + 1)$

デアルカラ (4) 式ニ代入シテ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4(3x^2+1)}{3y^2-1}$$

$\therefore$ (i) ニ對シテハ $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0,\ y$ ハ極小

(ii) ニ對シテハ $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0,\ y$ ハ極大

(iii) ニ對シテハ $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0,\ y$ ハ極大

此方程式ノ表ス曲線ハ上圖ノ如キモノデアル．

次ニ $\qquad z = f(x,\ y), \qquad \phi(x,\ y) = 0$

ナル關係アルトキハ z ハ一變數 x ノ函數トナル．其極大，極小ヲ求ムルニハコノ二ツノ關係式ヨリ $\dfrac{dz}{dx},\ \dfrac{d^2z}{dx^2}$ ヲ求メ，而シテ聯立方程式

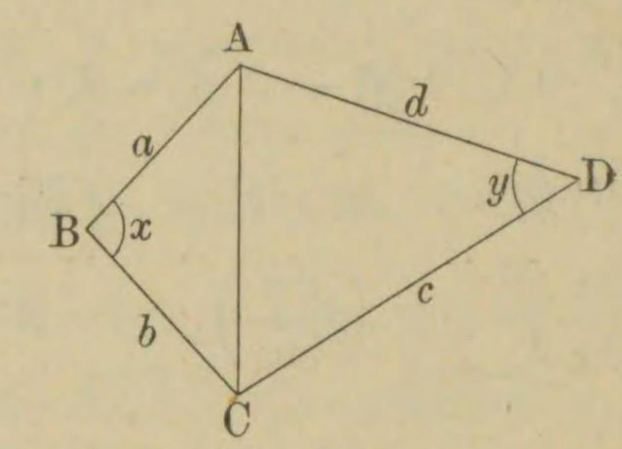
$$\phi(x,\ y) = 0, \qquad \frac{dz}{dx} = 0$$

ヲ解キ，ソノ根ニ對シテ $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ ノ符號ヲ調ブレバ宜シイ．但シ問題ノ性質上極大又ハ極小ナルコトガ直チニ分ル場合ニハ $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ ノ

符號ヲ調ブルニハ及バヌ．此種ノ極大，極小ヲ**條件附極大，極小**ト云フ．

例. 與ヘラレタル四邊ヲ有スル四邊形ノ最大面積ヲ求ム．

與ヘラレタル四邊 $a,\ b,\ c,\ d$ ヲ有スル四邊形ヲ圖ノ如ク ABCD トシ角 B ヲ x，角 D ヲ y，四邊形ノ面積ヲ z ニテ表スナラバ



$$z = 三角形\ \mathrm{ABC} + 三形角\ \mathrm{ADC}$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin x + \frac{1}{2}cd\sin y$$

然ルニ

$$\mathrm{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos x = c^2 + d^2 - 2cd\cos y$$

ナル故 $x,\ y$ 間ニハ

$$2(ab\cos x - cd\cos y) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \quad \text{.........................} \quad (\mathrm{A})$$

ナル關係ガアル．

(A) 式ノ兩邊ヲ x ニツキ微分スレバ

$$-2\left(ab\sin x - cd\sin y\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ab\sin x}{cd\sin y}$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}ab\cos x + \frac{1}{2}cd\cos y\frac{dy}{dx}$$
$$= \frac{1}{2}ab\cos x + \frac{ab\sin x\cos y}{2\sin y} = \frac{ab\sin(x+y)}{2\sin y}$$

z ノ極大又ハ極小ニ對シテハ

$$\frac{dz}{dx} = 0 \qquad \therefore \ \sin(x+y) = 0$$

而シテ問題ノ性質上 $0 < x + y < 2\pi$ ナル故

$$x + y = \pi$$

ヲ得ル．コレト (A) 式トヨリ $x,\ y$ ヲ求ムルコトガ出來ル．コノ $x,\ y$ ニ對シテハ

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{ab}{2}\left[\sin(x+y)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin y}\right) + \frac{\cos(x+y)\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)}{\sin y}\right]$$

$$= \frac{ab}{2}\frac{\cos(x+y)}{\sin y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{ab}{2\sin y}\left(1+\frac{ab}{cd}\right) < 0$$

$\therefore z$ ハ極大トナル. 而シテ此極大ハ最大ナルコト明カデアアル. 即チ四邊形ハ圓ニ內接スル場合ニ最大トナル.

次ニ又 $$u = f(x, y, z), \qquad \phi(x, y, z) = 0$$

ナル關係アルトキハ第二ノ式ヨリ z ハ x ト y トノ函數トナル故, ソレヲ第一ノ式ニ入レテ u ヲ x ト y トノ函數トスルコトガ出來ル. 故ニ此 u ノ極大, 極小ヲ求ムルニハ上ノ二式ヨリ $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=\mathrm{const}}$[1], $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=\mathrm{const}}$ ヲ求メ, 而シテ聯立方程式

$$\phi(x, y, z) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ヲ解キ, ソノ x, y, z ノ値ニ對シテ u ガ果シテ極大若シクハ極小トナルカ否カヲ調ブレバ宜シイ. コレモ亦條件附極大, 極小ノ一例デアル.

例. 空間內ノ一點 $A(a, b, c)$ ヨリ平面

$$lx + my + nz = p \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

ニ至ル最短距離ヲ求ム.

平面上ニ取リタル點 P ノ座標ヲ x, y, z トシ PA^2 ヲ u ニテ表セバ

$$u = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

デアツテ x, y, z ノ間ニハ (A) ノ關係ガ存在スル.

偖テ (A) 式ヨリ

$$l + n\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad m + n\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

即チ $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{l}{n}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{m}{n}$$

ヲ得ル故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\left\{(x-a) + (z-c)\frac{\partial z}{\partial x}\right\} = 2\left\{(x-a) - \frac{l}{n}(z-c)\right\}$$

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=\mathrm{const}}$ ハ y ヲ常數, 從ツテ z ヲ x ノ函數ト看做シテ u ヲ x ニツキ微分スルコトヲ表ス. 以下之ヲ單ニ $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ト書クコトニスル.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\left\{(y-b) + (z-c)\frac{\partial z}{\partial y}\right\} = 2\left\{(y-b) - \frac{m}{n}(z-c)\right\}$$

u ノ極大若シクハ極小ニ對シテハ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ デアルカラ

$$x - a = \frac{l}{n}(z-c), \qquad y - b = \frac{m}{n}(z-c) \cdots\cdots\cdots(\mathrm{C})$$

コレト (A) 式トヨリ x, y, z ノ只一組ノ値ヲ得ル. u ハ少クモ一ツノ極小ヲ有スベキガ故ニ此 x, y, z ノ値ハ u ヲ極小從ツテ最小ニスルモノデナケレバナラヌ. ヨツテ此値ヲ (B) 式ニ代入スレバ u ノ最小, 從ツテ最短距離ヲ得ル.

注意. (C) 式ハ點 A ヲ通ツテ與ヘラレタル平面ニ垂直ナル直線ノ方程式デアル. 故ニ (A) ト (C) トヨリ得ル x, y, z ノ値ヲ (B) 式ニ入ルレバ求ムル最短距離ノ自乘ヲ得ベキコト幾何學的ニ明白デアル.

問題 29.

1. $2x^5 + 3ay^4 - x^2y^3 = 0$ ナラバ $x = 5^{\frac{4}{3}}a$ ナルトキ y ハ極小トナルコトヲ證明セヨ.
2. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ナルトキハ y ハ $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\dfrac{a}{2}$ ニ對シテ極大及ビ極小トナルコトヲ示セ.
3. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdot + x_n^2$ ノ極小ヲ求ム. 但シ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ノ間ニハ $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdot + a_nx_n = k$ ナル關係存在スルモノトス.
4. 直六面體ノ稜ノ和ガ一定ナルトキ體積ノ最大如何.
5. 直六面體ノ稜ノ和ガ一定ナルトキ表面積ノ最大如何.
6. 定圓ニ內接スル最大面積ノ三角形ハ正三角形ナルコトヲ證明セヨ.
7. 與ヘラレタル球ニ內接スル最大體積又ハ最大表面積ノ直六面體ハ立方體ナルコトヲ證明セヨ.
8. 與ヘラレタル三角形ノ三邊ニ至ル距離ノ自乘ノ和ノ最小ヲ求ム.

61. 全微分

z ガ x, y ノ函數デアツテ x, y ガ何レモ自變數 t ノ函數デアル場合ニハ z モ亦 t ノ函數トナル故,

$$z=f(x,\ y),\qquad x=\phi_1(t),\qquad y=\phi_2(t)$$

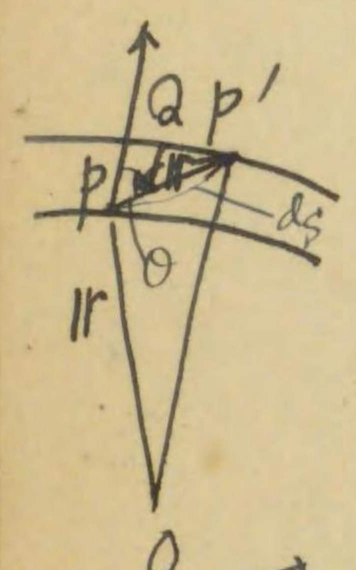
デアルナラバ x, y, z ノ微分 dx, dy, dz ハ第24節 (82 頁) ニヨリ

$$dx=\phi_1'(t)\Delta t,\qquad dy=\phi_2'(t)\Delta t,\qquad dz=\frac{dz}{dt}\Delta t$$

デアツテ

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\phi_1'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\phi_2'(t)$$

デアルカラ



$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\phi_1'(t)\Delta t+\frac{\partial f}{\partial y}\phi_2'(t)\Delta t=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\quad\ldots(1)$$

トナル. 一般ニ u ガ $x, y, z,\ \ldots\ldots$ ノ函數デアツテ $x, y, z,\ \ldots\ldots$ ガ一自變數ノ函數デアル場合ニハ $x, y, z, \ldots$ ノ微分 $dx, dy, dz, \ldots$ ト u ノ微分 du トノ間ニハ

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\cdots\cdots\quad\ldots\ldots(2)$$

ナル關係存在スルコトガ上ト同樣ニシテ證明セラレル.

併シナガラ z ガ x, y ノ函數, 即チ $z=f(x,\ y)$ デアツテ x, y ガ兩方トモ自變數ナル場合ニ於テハ dz ノ意味ガ未ダ定メラレテ居ナイ. ソコデ此時モ同ジ式ガ成立スル樣ニ (1) 式ヲ以テ dz ヲ定義スルノデアル. 即チ x, y ガ兩方トモ自變數ナル場合ニハ

$$dx=\Delta x,\qquad dy=\Delta y$$

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

ヲ以テ dz ヲ定義シ名ヅケテ z ノ**全微分**ト稱スル.

一般ニ u ガ $x, y, z,\ \ldots\ldots$ ノ函數デアツテ $x, y, z,\ \ldots\ldots$ ガ自變數デアル場合ニハ

$d\mathbb{V}_\theta=\left(\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial s}\right)_\theta ds$
$=\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial n}\cos\theta\, ds$
$d\mathbb{V}_\theta=\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial n}m_1(\overrightarrow{pp_1})ds$
[∵ $m_1(\overrightarrow{pp_1})=\cos\theta$]
$=\left(\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial n}m_1\right)d\mathbf{r}$
$=d\mathbf{r}\,\nabla\mathbb{V}$
$d\mathbf{r}=i\,dx+j\,dy+k\,dz$
$\nabla\mathbb{V}=\left(i\frac{\partial V}{\partial x}+j\frac{\partial V}{\partial y}+k\frac{\partial V}{\partial z}\right)$
∴ [θノ90°間ニ[illegible]]
$d\mathbb{V}=dx\frac{\partial V}{\partial x}+dy\frac{\partial V}{\partial y}+dz\frac{\partial V}{\partial z}$
$d\mathbf{r}\cdot\nabla\equiv\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)$ トオクト
スル。

$$dx=\Delta x,\quad dy=\Delta y,\quad dz=\Delta z,\ \ldots\ldots$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\cdots\cdots$$

ヲ以テ u ノ全微分 du ヲ定義スル.

偖テ z ガ x, y ノ函數デアツテ x, y ガ他ノイクツカノ自變數例ヘバ二ツ t_1, t_2 ノ函數デアルトスルナラバ定義ニヨツテ

$$dz=\frac{\partial z}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial z}{\partial t_2}\Delta t_2$$

然ルニ

$$\frac{\partial z}{\partial t_1}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t_2}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2}$$

デアルカラ之ヲ上式ニ代入シテ

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_1}\right)\Delta t_1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2}\right)\Delta t_2$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial x}{\partial t_2}\Delta t_2\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial y}{\partial t_2}\Delta t_2\right)$$

ヲ得ル. 而シテ又此時

$$dx=\frac{\partial x}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial x}{\partial t_2}\Delta t_2,\qquad dy=\frac{\partial y}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial y}{\partial t_2}\Delta t_2$$

デアルカラ結局

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

即チ (1) 式ニ到達スル. 一般ニ

$$u=f(x,\ y,\ z,\ \ldots\ldots)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

デアツテ $x, y, z,\ \ldots\ldots$ ガ他ノイクツカノ自變數ノ函數デアル場合ニ於テモ全微分 $dx, dy, dz, \ldots\ldots, du$ ノ間ニハ (2) 式ノ成立

スルコトガ同様ニシテ證明セラレル．故ニ u ガ $x, y, z, \ldots\ldots$ ノ函數デアル場合ニハ $x, y, z, \ldots\ldots$ ヲ自變數ト看做スモ，又ハ他ノイクツカノ自變數ノ函數ト看做スモ $dx, dy, dz, \ldots\ldots, du$ ノ間ニハ (2) ニテ表サレル同一ノ關係式ガ恒ニ成立スルノデアル．$x, y, z, \ldots\ldots$ ガ自變數デアル場合ニハ $dx, dy, dz, \ldots\ldots$ ハ，$x, y, z, \ldots\ldots$ ノ增分デアリ，$x, y, z, \ldots\ldots$ ガ他ノ自變數ノ函數デアル場合ニハ $dx, dy, dz, \ldots\ldots$ ハ全微分デアツテ意味ヲ異ニスルケレドモ常ニ du ト同一ノ關係式ニテ結ビ付ケラレテ居ルト云フコトガ重要デアル．

偖テ零ノ微分ハ零デアルカラ今 (3) 式ノ u ヲ零ナラシメル如ク $x, y, z, \ldots\ldots$ ニ關係ヲツケルトソノ $x, y, z, \ldots\ldots$ ニ對シテハ $du=0$ 從ツテ

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\cdots\cdots=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ヨツテ

$$f(x, y, z, \ldots\ldots)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

ナル場合ニハ恒ニ (4) 式ガ成立スル．換言セバ他ニ $x, y, z, \ldots\ldots$ ノ間ニ關係式ガ存在スルト否トニ拘ラズ (4) 式ハ (5) 式ヨリノ結論デアル．故ニ (5) 式ノ外ニ

$$\phi(x, y, z, \ldots\ldots)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

ナル方程式ガモ一ツ別ニ與ヘラレタ場合ニハ (4) 式ノ外ニ

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \phi}{\partial y}dy+\frac{\partial \phi}{\partial z}dz+\cdots\cdots=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

ナル關係ヲモ得ル．$x, y, z, \ldots\ldots$ ノ間ニ更ニイクツカノ關係アル場合モ同様デアル．

62. 小誤差ノ計算

x, y ヲ自變數トシ $z=f(x, y)$ ヲソノ函數トスルナラバ前節ニヨリ

$$dx=\Delta x, \qquad dy=\Delta y$$

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

今 x, y ノ增分 $\Delta x, \Delta y$ ニ對スル z ノ增分ヲ Δz トスルナラバ

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)\\&=\{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)\}+\{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)\}\\&=\Delta x f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)+\Delta y f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\\&\qquad(0<\theta_1<1, \quad 0<\theta_2<1)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)=f_x(x, y)+\varepsilon_1$$

$$f_y(x, y+\theta_2\Delta y)=f_y(x, y)+\varepsilon_2$$

ト置クナラバ

$$\begin{aligned}\Delta z&=f_x(x, y)\Delta x+f_y(x, y)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y\\&=dz+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y\end{aligned}$$

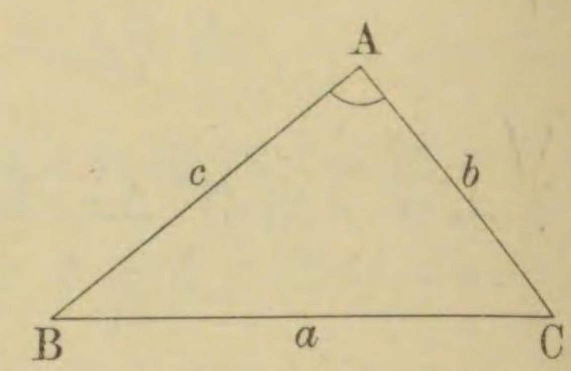
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ハ $\Delta x, \Delta y$ ガ共ニ零ニ收斂スルトキ同ジク零ニ收斂スルモノデアル．[1] 故ニ $\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$ ハ Δx ヨリ高位ノ無限小ト Δy ヨリ高位ノ無限小トノ和デアル．斯クノ如キ無限小ヲ Δx ト Δy トニツキ一位ヨリ高キ無限小ト稱スル．然ルトキハ Δx ト Δy トニツキ一位ヨリ高キ無限小ヲ捨テテ

(1) $f_x(x, y)$. $f_y(x, y)$ ノ連續性ヲ假定セルコト勿論デアル．

$$\Delta z \fallingdotseq dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

ナル近似公式ヲ得ル. 三ツ以上ノ自變數ノ函數ノ全微分ト增分トノ間ニモ同樣ノ關係アルコト勿論デアル. 全微分 dz ノ實用上重要ナルハ此性質ニヨルノデアル.

例. 三角形 ABC ニ於テ邊 b, c 及ビ角 A ガソレゾレ小量 Δb, Δc, ΔA ダケ變ズルトキ第三邊 a ノ變ズル量何程.



a ヲ b, c, A ノ函數トシテ表スナラバ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

兩邊ノ微分ヲ取レバ

$$2a\,da = 2(b - c\cos A)db + 2(c - b\cos A)dc + 2bc\sin A\,dA$$
$$= 2\left\{a\cos C\,db + a\cos B\,dc + ba\sin C\,dA\right\}$$

而シテ $db = \Delta b$, $dc = \Delta c$, $dA = \Delta A$, $da \fallingdotseq \Delta a$ デアルカラ

$$\Delta a \fallingdotseq \cos C\,\Delta b + \cos B\,\Delta c + b\sin C\,\Delta A.$$

問 題 30.

1. $u = f(x, y, z)$, $v = \phi(x, y, z)$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$d(c_1 u + c_2 v) = c_1 du + c_2 dv \quad (c_1,\ c_2\ \text{常數})$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

[全微分ノ定義ヨリ直接ニ證明スルカ又ハ第 61 節ノ後半ニ述ベタル全微分ノ性質ヲ用ヒヨ].

2. x, y ハ自變數ニシテ $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ ナルトキハ $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$ ナルコトヲ證明セヨ [$dx = 1$, $dy = 0$ ナル場合及ビ $dx = 0$, $dy = 1$ ナル場合ヲ考ヘヨ].

3. x, y ハ自變數, z ハ其函數ニシテ $dz = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy$ ナルトキハ $\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y, z)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y, z)$ ナルコトヲ證明セヨ [$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ ト比較シ $dx = 1$, $dy = 0$ ナル場合及ビ $dx = 0$, $dy = 1$ ナル場合ヲ考ヘヨ].

4. x, y ハ自變數, z ハ其函數ニシテ $f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz = 0$ ナルトキハ $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_1(x, y, z)}{f_3(x, y, z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_2(x, y, z)}{f_3(x, y, z)}$ ナルコトヲ證明セヨ [前問參照].

5. $F(x, y, z) = 0$ ナルトキハ兩邊ノ微分ヲ取リテ $F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$ ヲ得. ヨツテ前問ノ結果ヲ利用シ $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$ ヲ證明セヨ.

6. $F(x, y, z) = 0$, $\phi(x, y, z) = 0$ ナルトキハ兩邊ノ微分ヲ取リテ

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0, \quad \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz = 0$$

ヲ得. 此式ヲ利用シテ $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ ヲ求ム.

7. 前問ト同樣ニシテ $z = f(x, y)$, $z = \phi(x)$ ヨリ $\frac{dz}{dy}$ ヲ求ム.

8. 同樣ニシテ $y = f(x, y, z)$, $z = \phi(x, y, z)$ ヨリ $\frac{dz}{dx}$ ヲ求ム.

9. $u = f(x, y)$ ノ極大, 極小ニ對シテハ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ニシテコレハ $du = 0$ ナル條件ニテ置キカヘラル. ヨツテ $\phi(x, y, z) = 0$ ナルトキ $u = f(x, y, z)$ ノ極大, 極小ニ對シテハ $du = 0$, $d\phi = 0$ トナル. 此二條件ヨリ次ノ等式ヲ誘導セヨ.

$$\frac{f_x}{\phi_x} = \frac{f_y}{\phi_y} = \frac{f_z}{\phi_z}$$

注意. 條件附極大, 極小ヲ求ムル問題ハ此結果ヲ利用スルコトニヨリ多少ノ勞力ヲ節約スルコトガ出來ル.

10. 前問ヲ利用シテ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k$ ナルトキ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ノ極小ヲ求ム.

11. 單振子ノ週期 T ハ次式ニヨツテ與ヘラル.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

l, g ガ小量 Δl, Δg ダケ變ズルトキ T ノ變量ヲ ΔT トスレバ

$$\frac{\Delta T}{T} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta g}{g}\right)$$

ナルコトヲ證明セヨ.

12. 三角形 ABC ニ於テ二角 B, C 及ビ夾邊 a ガソレゾレ少量 ΔB, ΔC, Δa ダケ變ズルトキ邊 b ノ變ズル量ヲ Δb ニテ表セバ

$$\frac{\Delta b}{b} \fallingdotseq \frac{\Delta a}{a} + (\cot A + \cot B)\Delta B + \cot A\Delta C$$

ナルコトヲ證明セヨ.

13. z ガ二ツノ自變數 x, y ノ函數デアツテ

$$\Delta z = P(x, y, z)\Delta x + Q(x, y, z)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\lim_{\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0} \varepsilon_1 = 0, \qquad \lim_{\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0} \varepsilon_2 = 0$$

ナルトキハ $dz = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy$ ナルコトヲ證明セヨ $\Delta y = 0$ トシテ $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ ノ極限, 及ビ $\Delta x = 0$ トシテ $\frac{\Delta z}{\Delta y}$ ノ極限ヲ考ヘヨ.

14. $f(x, y)$ ヲ x, y ノ與ヘラレタル函數, $P(x, y)$, $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ ヲ與ヘラレタル曲線 C 上ノ二點トスルトキ

$$\lim_{Q \to P} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{PQ}$$

ヲ P 點ニ於ケル曲線 C ニ沿ウテノ**方向微分係數**ト云ヒ $\frac{df}{ds}$ ニテ表ス.[1] 然ルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

但シ α ハ P 點ニ於ケル曲線 C ノ切線ガ x 軸トナス角トス.

15. $f(x, y, z)$ ヲ x, y, z ノ與ヘラレタル函數, $P(x, y, z)$, $Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ ヲ與ヘラレタル空間曲線 C 上ノ點トスルトキ

$$\lim_{Q \to P} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{PQ}$$

ヲ P 點ニ於ケル曲線 C ニ沿ウテノ**方向微分係數**ト云ヒ $\frac{df}{ds}$ ニテ表ス.[1] 然ルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{df}{ds} = l\frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} + n\frac{\partial f}{\partial z}$$

但シ l, m, n ハ P 點ニ於ケル曲線ノ切線ノ方向餘弦トス.

(1) $\frac{\partial f}{\partial s}$ ニテ表スコトモアル.

第十一章

平面曲線餘論

吾人ハ前諸章ニ於テ平面曲線ニ關スル種種ノ問題ヲ考察シタ. 本章ニ於テハ殘サレタ若干ノ問題ニツキ考究シヨウト思フ.

イチイチ斷ハルハ煩ニ堪エヌ故以下ニ取リ扱フ總テノ函數及ビ其微分係數ハ必要ナル程度マデ總テノ自變數ニ對シテ連續ナルモノト假定シテ置ク.

63. 包曲線

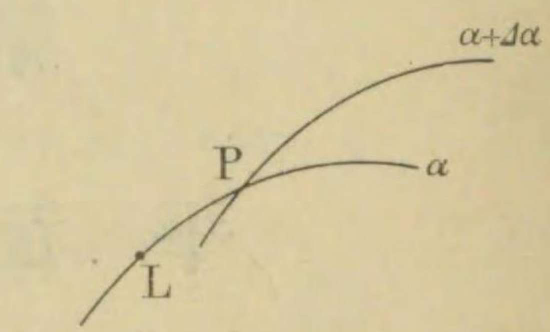
$f(x, y, \alpha)$ ヲ x, y, α ノ函數トスル. α ニ一ツノ値ヲ與フレバ $F(x, y, \alpha)$ ハ x, y ノ函數トナリ方程式

$$f(x, y, \alpha) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ハ一ツノ曲線ヲ表シ, α ニ前ト異ナル他ノ値ヲ與フレバ (1) ハ又他ノ異ナル曲線ヲ表ス. 斯クテ α ニ種種ノ値ヲ與フルコトニヨリ方程式 (1) ヲシテ種種ノ曲線ヲ表サシメルコトガ出來ル. 是等ノ曲線ノ群ヲ**方程式 (1) ノ表ス曲線群**若シクハ單ニ**曲線群 (1)** ト呼ビ α ヲ元, 元ガ α_1 ナル曲線卽チ曲線 $f(x, y, \alpha_1) = 0$ ヲバ**曲線 α_1** ト稱スルコトニスル.

今曲線群 (1) ニ屬スル二曲線 α 及ビ $\alpha + \Delta\alpha$ ヲ取リ其交點ノ一ツヲ P トスルナラバ P 點ハ $\Delta\alpha$ ガ變ズルニ從ツテ α 曲線上

ヲ動ク. $\Delta\alpha$ ガ零ニ收斂スルトキ點 P ガ限リナク近ヅク所ノ點 L ヲ**曲線 α ト其隣接曲線トノ交點**ト稱スル.



サテ P 點ノ座標ハ (1) 式及ビ

$$f(x,\ y,\ \alpha+\Delta\alpha)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ヲ滿足シ而シテ (2) ハ平均値定理ニヨリ

$$f(x,y,\alpha)+\Delta\alpha f_\alpha(x,y,\alpha+\theta\Delta\alpha)=0 \qquad (0<\theta<1)$$

ト書キ得ル故結局 P 點ノ座標ハ (1) 式及ビ

$$f_\alpha(x,y,\alpha+\theta\Delta\alpha)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ヲ滿足スルコトヽナル. 今 $\Delta\alpha$ ヲ零ニ收斂セシムルナラバ (3) 式ハ其極限ニ於テ

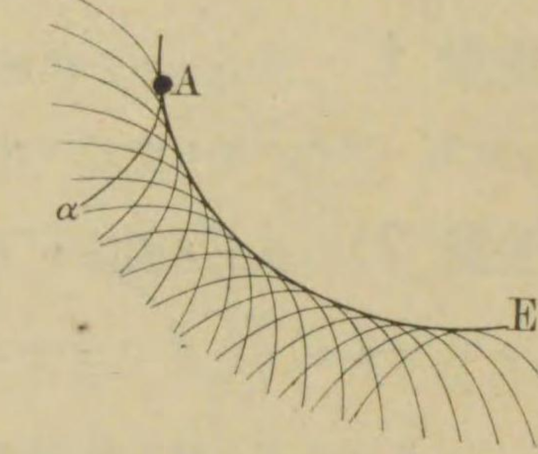
$$f_\alpha(x,y,\alpha)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

トナリ, P ノ極限點 L ノ座標ニヨツテ滿足セラレル方程式ヲ得ル. (1) 式ト (4) 式トハ共ニ點 L ノ座標ニヨツテ滿足セラレル方程式デアルカラ此二方程式ヨリ α ヲ消去スルナラバ此曲線群ニ屬スル隣接二曲線ノ交點 L ノ軌跡ノ方程式ヲ得ル. 或ハ α ヲ消去セズニ之ヲ媒介變數ト看做シテ (1), (4) ノ二式ヲ以テ隣接二曲線ノ交點ノ軌跡ノ方程式トシテモ宜シイ.[1]

[1] 但シ嚴密ニ云フトキハ此結論ニハ缺陷ガアル. 何トナレバ以上ノ推理カラ結果スルコトハ二曲線 $\alpha,\ \alpha+\Delta\alpha$ ノ交點 P ガ存在シ且ツ其極限點 L モ存在スルナラバ L 點ノ座標ハ (1) ト (4) トヲ滿足スルト云フダケデアツテ逆ニ (1) ト (4) トヲ滿足スル $x,\ y$ ノ値ガアルナラバ二曲線 $\alpha,\ \alpha+\Delta\alpha$ ノ交點 P 幷ニ其極限點 L ガ存在スルト云フコトガ未ダ證明セラレテ居ナイカラデアル. 事實此逆ハ必シモ成立シナイ(本節, 例 4 參照). 故ニ二曲線 $\alpha,\ \alpha+\Delta\alpha$ ノ交點ガ存在シ而シテ其座標ハ $\Delta\alpha$ ノ連續函數ナルコトヲ確メタル上ナラデハ實ハ上ノ結論ハ正當デナイノデアル.

偖テ隣接二曲線ノ交點ノ軌跡タル (1), (4) ノ二式ヲ以テ表サレル曲線ヲ E ト名ヅクルナラバ E トモトノ曲線群ノ曲線トハ其交點ニ於テ (其交點ガ特別ノ條件ヲ滿足スル點ニアラザル限リ) 互ニ切スルコトガ證明セラレル.

點 A (x,y) ヲ曲線 E ト曲線群 (1) ノ曲線 α トノ交點トスルナラバ點 A ニ於ケル E 及ビ曲線 α ノ切線ノ方向ハソレゾレ E 及ビ α ノ方程式ヨリ得ル $\dfrac{dy}{dx}$ ニヨツテ定メラレル. 先ヅ曲線 α ノ方程式卽チ (1) 式ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メルナラバ



$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f}{\partial x}\bigg/\frac{\partial f}{\partial y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

次ニ曲線 E ノ方程式ハ (4) ヨリ α ヲ x,y ノ函數トシテ出シソレヲ (1) 式中ニ入ルレバ得ラレル故 (1) 式中ノ α ヲ (4) ニテ定メラレル x,y ノ函數ト看做シテ (1) 式ノ兩邊ヲ x ニツキ微分スルナラバ曲線 E ニツイテノ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メルコトガ出來ル, 卽チ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

然ルニ (4) 式ニヨリ

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$$

デアル故上式ハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

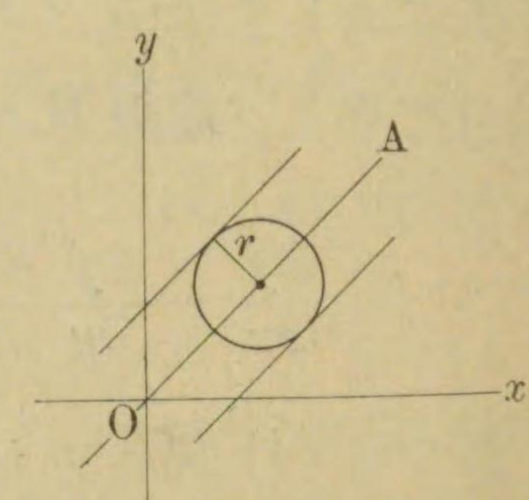
従ツテ
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}$$

トナリ上ノ (5) 式ト一致スル. 斯クテ曲線 α ト曲線 E トハ點 A ニ於テ相等シキ $\frac{dy}{dx}$ ヲ有スルガ故ニ互ニ切スルコトヲ知リ得ルノデアル. 此様ナ曲線 E 卽チ曲線群 (1) ノ曲線ト其交點ニ於テ切スル曲線ヲ曲線群 (1) ノ**包曲線**ト稱シ曲線群 (1) ヲ**被包曲線**ト稱スル.

注意 1. 以上ニテハ曲線群 (1) ノ各曲線ニ切スル曲線ハ E 以外ニ存在シナイコトガ實ハ證明セラレテ居ラヌ. コノ證明ハ左程困難デハナイガ省略スル.

注意 2. 以上ノ議論ハ A 點ノ座標ニ對シテ $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ ナルコトヲ假定シテ居ル. $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ナルモ $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ デアルナラバ曲線 α ト曲線 E トノ方程式カラ $\frac{dx}{dy}$ ヲ求メルコトニヨツテ上ト同ジ結論ガ得ラレル. 併シナガラ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ 且ツ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ナル場合ニ於テハ上ノ議論ハ成立セヌ. 此様ナ事ノ起ルノハ點 A ガ曲線 α 上ノ重復點 (結節點, 尖點, 孤立點ノ如キモノ) ト稱スルモノニナル場合デアツテ今マデノ吾人ノ定義ニヨル切線ナルモノハ點 A ニ於テ存在シナイコトニナルノデアル. α 曲線上ニ斯クノ如キ點ノ存在セザル假定ノ下ニ上ノ結論ハ正シイ.[1]

例 1. 軸角 xOy ノ二等分線 OA 上ニ中心ヲ有シ且ツ定半徑 r ヲ有スル圓ノ包曲線ヲ求ム.



圓ノ中心ノ x 座標ヲ α トスレバ y 座標モ α トナル故圓群ノ方程式ハ

$$f(x,\ y,\ \alpha) \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 - r^2 = 0$$

トナル. 玆ニ α ハ元デアル. 此方程式ト

$$f_\alpha(x,\ y,\ \alpha) \equiv -2\Big\{(x-\alpha)+(y-\alpha)\Big\} = 0$$

トカラ α ヲ消去スレバ求ムル包曲線ノ方程式ヲ得ル.

偖テ後ノ方程式ヨリ $$\alpha = \frac{1}{2}(x+y)$$

[1] 直線, 圓, 楕圓, 雙曲線, 抛物線等アリフレタ曲線ハ斯クノ如キ點ヲ持ツテ居ナイ. 故ニ是等ノ曲線群ニツイテハ上ノ事ハ無條件デ成立スル.

之ヲ前ノ方程式ニ代入シテ簡單ニスレバ

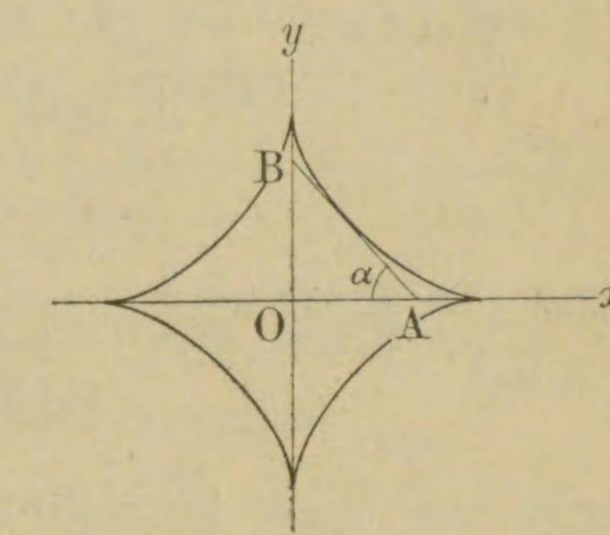
$$(x-y) = \pm\sqrt{2}\,r$$

コレガ包曲線ノ方程式デアル. ヨツテ包曲線ハ OA 直線カラ r ナル距離ニアル二ツノ平行直線デアル. コノ事ハ幾何學的ニハ容易ニ分ルコトデアル.

例 2. 定長線分 AB ガ兩端ヲ $x,\ y$ 兩軸上ニ有シツツ動クトキ此直線ノ包曲線ヲ求ム.

圖ニ於テ AB $= l$ トシ OA ヲ a ニテ, OB ヲ b ニテ表セバ AB 直線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



今角 BAO ヲ α ニテ表スナラバ

$$a = l\cos\alpha,\quad b = l\sin\alpha$$

ナル故直線群ノ方程式ハ

$$f(x,\ y,\ \alpha) \equiv \frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} - l = 0$$

ト書クコトガ出來ル. 此直線群ノ包曲線ヲ求メンニハ此式ト

$$f_\alpha(x,\ y,\ \alpha) \equiv x\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - y\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0$$

トカラ α ヲ消去スレバ宜シイ. 先ヅ後ノ式ヨリ

$$\frac{x}{\cos^3\alpha} = \frac{y}{\sin^3\alpha}$$

此等式ノ各邊ヲ λ ニテ表セバ

$$x = \lambda\cos^3\alpha,\qquad y = \lambda\sin^3\alpha$$

之ヲ前ノ式ニ代入シテ

$$\lambda = l$$

故ニ

$$x = l\cos^3\alpha,\qquad y = l\sin^3\alpha$$

コレヨリ α ヲ消去シテ

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$$

ヲ得ル. コレガ包曲線ノ方程式デアル.

例 3. 抛物線 $y^2 = 2px$ ノ法線ノ包曲線.

抛物線 $y^2 = 2px$ 上ノ點 P$(x,\ y)$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$\mathrm{Y} - y = -\frac{y}{p}(\mathrm{X} - x)$$

或ハ x ノ代リニ $\frac{y^2}{2p}$ ヲ代入シテ

$$Y - y = -\frac{y}{p}\left(X - \frac{y^2}{2p}\right)$$

之ヲ書キ換フレバ

$$2p^2Y + 2p(X-p)y - y^3 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

コレガ法線群ノ方程式デアル．此方程式ノ兩邊ヲ元 y ニツキ偏微分スレバ

$$2p(X-p) - 3y^2 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

(A) ト (B) トヨリ y ヲ消去スレバ法線群ノ包曲線ノ方程式ヲ得ル．(A) 式ノ兩邊ニ 3 ヲ乘ジタルモノヨリ (B) 式ノ兩邊ニ y ヲ乘ジタルモノヲ減ズレバ

$$6p^2Y + 4p(X-p)y = 0$$

$$\therefore\quad y = -\frac{3pY}{2(X-p)}$$

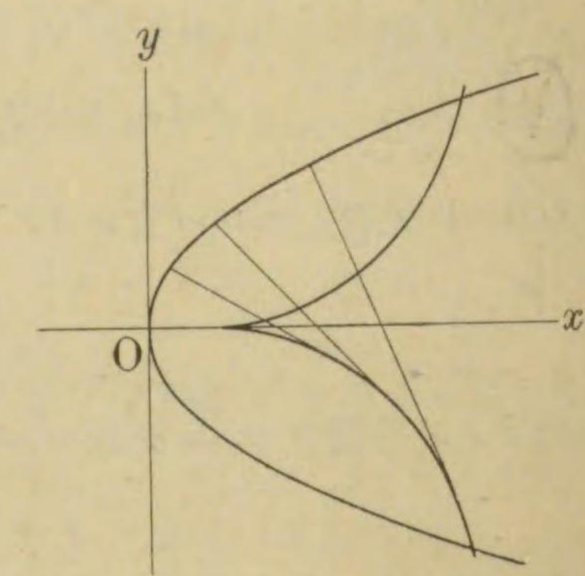
之ヲ (B) 式ニ代入シテ

$$2p(X-p) - 3\frac{9p^2Y^2}{4(X-p)^2} = 0$$

或ハ

$$27pY^2 = 8(X-p)^3$$

コレガ求ムル包曲線ノ方程式デアル．コノ方程式ヨリ包曲線ヲ畫クトキハ右圖ノ如キ曲線ヲ得ル．



例 4. α ヲ元トシテ曲線群

$$y = (x-\alpha)^3 \quad \cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

ノ包曲線ヲ求ム．

(A) 式ノ兩邊ヲ元 α ニツキ偏微分スルナラバ

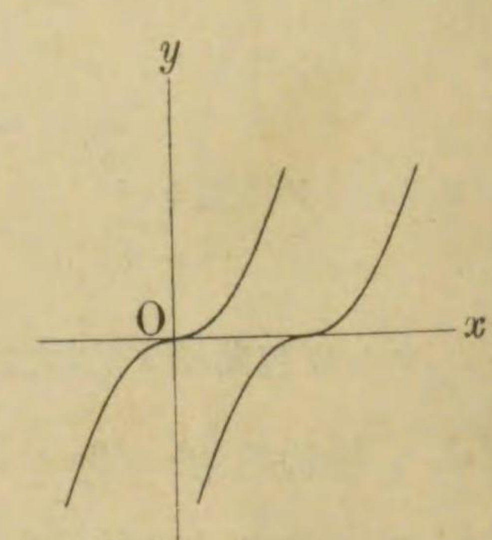
$$0 = -3(x-\alpha)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

(A), (B) 二式ヨリ α ヲ消去スルナラバ

$$y = 0$$

故ニ求ムル包曲線ハ x 軸デアル．

曲線群 (A) ニ屬スル任意ノ二曲線ハ決シテ出會ハナイ．從ツテ隣接二曲線ノ交點ナルモノハ此場合ニ存在シナイ．併シナガラ曲線群 (A) ノ總テノ曲線ハ x 軸ニ切シテ居ル．コノ意味ニ於テ x 軸ハ曲線群 (A) ノ包曲線デアル．



注意． 極座標ニテ與ヘラレタル曲線群 $f(r, \theta, \alpha) = 0$ ノ隣接二曲線ノ交點ノ座標

r, θ ハ二ツノ方程式 $f(r, \theta, \alpha) = 0$, $f_\alpha(r, \theta, \alpha) = 0$ ヲ解イテ得ラレ，又上ノ曲線群ノ包曲線ノ方程式ハ此二方程式ヨリ α ヲ消去シテ得ラルベキコト勿論デアル．

問題 31.

1. P, Q, R ガ x, y ノ函數ニシテ α ガ元ナルトキ曲線群 $P\cos\alpha + Q\sin\alpha = R$ ノ包曲線ハ $P^2 + Q^2 = R^2$ ナルコトヲ證明セヨ．

2. P, Q, R ガ x, y ノ函數ニシテ α ガ元ナルトキ曲線群 $P\alpha^2 + Q\alpha + R = 0$ ノ包曲線ハ $Q^2 - 4PR = 0$ ナルコトヲ證明セヨ． Discriminant

3. 直線群 $(y - \alpha x)^2 = a^2\alpha^2 + b^2$ ノ包曲線ヲ求ム [前問參照]．

4. 二點ガソレゾレ x 軸及ビ y 軸上ヲ異ナリタル定速度ニテ走ルトキソノ二點ヲ結合スル直線ノ包曲線ハ拋物線ナルコトヲ證明セヨ．

5. 圓 $x^2 + y^2 = r^2$ ノ，y 軸ニ平行ナル弦ヲ直徑トスル圓群ノ包曲線ヲ求ム．

6. α, β ガ $\phi(\alpha, \beta) = 0$ ナル關係ニテ結ビ付ケラルルトキ曲線群 $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$ ノ包曲線ノ方程式ハ上ノ二方程式ト $\frac{f_\alpha}{\phi_\alpha} = \frac{f_\beta}{\phi_\beta}$ トヨリ α, β ヲ消去シテ得ラルルコトヲ證明セヨ．

7. l, m ガ $\frac{l}{a} + \frac{m}{b} = 1$ ナル關係ヲ滿足シツツ變ズルトキ直線群 $\frac{x}{l} + \frac{y}{m} = 1$ ノ包曲線ヲ求ム [前問參照]．

8. 兩軸ヲ共有シ且ツ面積一定ナル楕圓ノ包曲線ハ楕圓ノ兩軸ヲ漸近線トスル二ツノ等邊雙曲線ナルコトヲ證明セヨ．

9. 楕圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上ノ任意ノ點ヨリ兩軸ニ下セル垂線ノ足ヲ結ビ付クル直線ノ包曲線ヲ求ム．

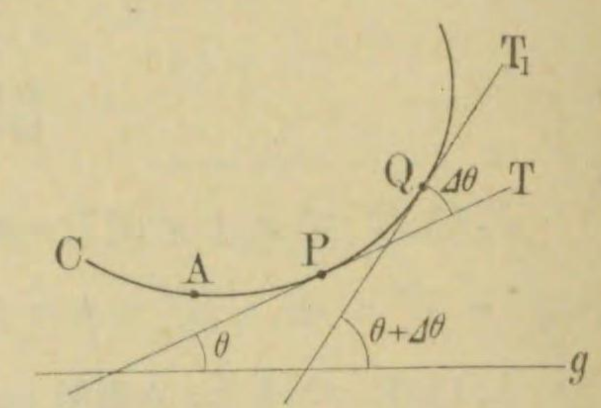
10. 二定點ヨリノ距離ノ積ガ一定ナル直線ノ包曲線ハソノ二定點ヲ焦點トスル二次曲線ナルコトヲ證明セヨ．

11. 曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$ 上ノ任意ノ點 P ニ於テ動徑 OP ニ垂直ニ引ケル直線ノ包曲線ハ圓ナルコトヲ證明セヨ．

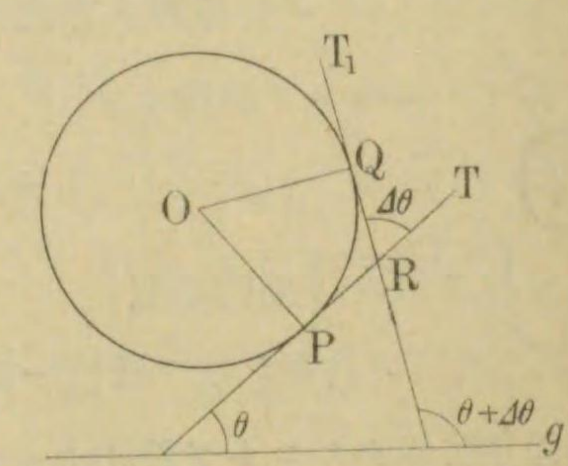
64. 曲線ノ曲率及ビ曲率半徑

一ツノ曲線 C 上ノ點 P ニ於ケル切線 PT ガ定直線 g トナス角ヲ θ ニテ表シ，曲線 C 上ノ定點 A ヨリ測レル $\widehat{AP}$ ノ長サヲ

s ニテ表スナラバ θ ハ s ノ函數トナル. 今曲線 C 上ニ $\widehat{PQ}=\Delta s$ ナル如キ點 Q ヲ取リ Q ニ於ケル切線 QT_1 ガ g 直線トナス角ヲ $\theta+\Delta\theta$ ニテ表スナラバ $\Delta\theta$ ハ s ノ增分 Δs ニ對スル θ ノ增分デアル. 小ナル Δs ニ對シテ比 $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ ヲ作ルトキ, 此ノ値ノ大ナルハ曲線ノ切線ガ P 點ノ附近ニ於テ急激ニ方向ヲ變ズルコトヲ示シ, 之ニ反シテ此比ノ値ノ小ナルハ緩漫ニ其方向ヲ變ズルコトヲ示ス. $\Delta s\to 0$ ナルトキノ此比ノ極限卽チ $\frac{d\theta}{ds}$ ヲバ點 P ニ於ケル曲線ノ**曲率**ト稱スル.



半徑 r ナル圓ニ於テハ中心 O ヲ圓周上ノ二點 P, Q ニ結ビ, P ニ於ケル切線 PT ト Q ニ於ケル切線 QT_1 トノ交點ヲ R ト名ヅクルナラバ $\angle POQ=\angle TRQ=\Delta\theta$ ナル故



$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{\angle POQ}{\widehat{PQ}}=\frac{1}{r}\qquad\therefore\quad\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{r}$$

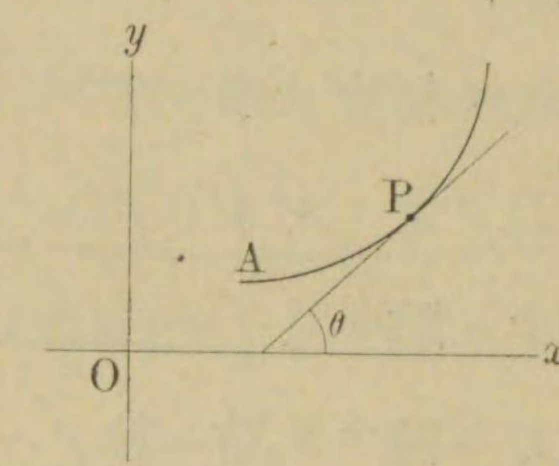
卽チ圓ノ曲率ハ一定デアツテ半徑ノ逆數ニ等シイ.

圓ノ場合ニハ上ニ示セル如ク曲率ノ逆數ハ圓ノ半徑トナル. 一般ニ曲線上ノ點 P ニ於ケル曲率ノ逆數ヲソノ點ニ於ケル**曲率半徑**ト稱スル. 之ヲ ρ ニテ表スナラバ

$$\rho=\frac{ds}{d\theta}$$

デアツテ圓ノ場合ニハ其半徑ニ一致スル.

今一ツノ座標軸ニ關シテ與ヘラレタル曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 $P(x, y)$ ニ於ケル切線ガ x 軸トナス角ヲ θ ニテ表スナラバ



$$\tan\theta=\frac{dy}{dx}$$

此兩邊ヲ x ニツキ微分シテ

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\therefore\quad\frac{d\theta}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\tan^2\theta}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

次ニ曲線上ノ定點 A ヨリ測レル弧 AP ノ長サヲ s ニテ表スナラバ

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

デアルカラ點 P ニ於ケル曲率半徑 ρ ハ次ノ如クニナル.

$$\rho=\frac{ds}{d\theta}=\frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{d\theta}{dx}}=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

或ハ y ノ x ニ關スル微分係數ヲ y', y'' ニテ表スナラバ

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

コレガ曲率半徑ヲ計算スル公式デアル. 但シ曲率半徑 ρ ハ常

ニ正デアルモノトスルナラバ (1) 式ノ分母ノ y'' ノ代リニ其絶對値 $|y''|$ ヲ取ラネバナラヌ. 併シナガラ ρ ニ符號ヲ附ケテ考フルコトモ便宜ナ事ガアル. ソレハ (1) 式ガ常ニ成立スル様ニ ρ ノ符號ヲ定メルノデアル. 此規約ノ結果 $y''>0$ 卽チ曲線ガ上方ニ凹ナル點ニ於テハ $\rho>0$ トナリ, 之ニ反シテ $y''<0$ 卽チ曲線ガ下方ニ凹ナル點ニ於テハ $\rho<0$ トナル. 以後吾人ハ此規約ニ從フコトニスル.

例. 曲線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 上ノ一點 $P(x, y)$ ニ於ケル曲率半徑.

曲線ノ方程式ヨリ

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),\qquad y''=\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$\therefore\quad 1+y'^2=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2=\frac{y^2}{a^2}$$

$$y''=\frac{y}{a^2}$$

ヨツテ

$$\rho=\left(\frac{y}{a}\right)^3\Big/\frac{y}{a^2}=\frac{y^2}{a}$$

65 二曲線ノ切觸

$$y=f(x)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y=\phi(x)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ二曲線ノ方程式トスル. 此二曲線ガ共ニ點 $P(x_0, y_0)$ ヲ通ルナラバ

$$y_0=f(x_0)=\phi(x_0)$$

デアル. 若シ此時更ニ

$$f'(x_0)=\phi'(x_0),\ f''(x_0)=\phi''(x_0),\ \cdots\cdots,\ f^{(n)}(x_0)=\phi^{(n)}(x_0),$$

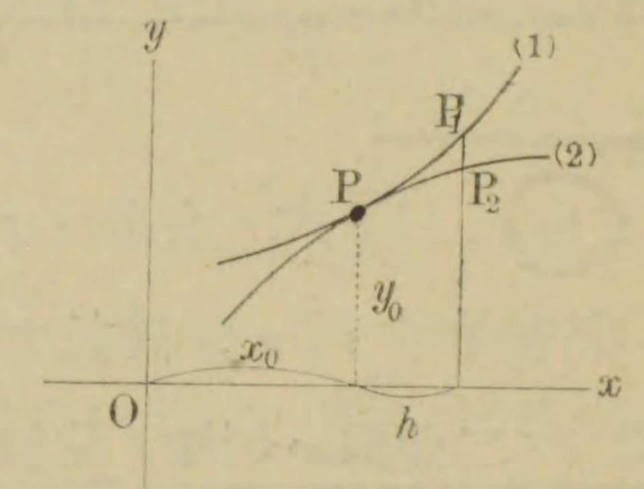
$$f^{(n+1)}(x_0)\neq\phi^{(n+1)}(x_0)\qquad (n\geqq 1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

デアルナラバ, 換言セバ二曲線ノ $y, y', y'', \cdots\cdots, y^{(n)}$ ガ點 P ニ於テ相等シク而シテ $y^{(n+1)}$ ガ相等シクナイナラバ, 此二曲線ハ點 $P(x_0, y_0)$ ニ於テ**第 n 位ノ切觸**ヲナスト云フ.

(1) ト (2) トガ點 P ニテ切觸ヲナス場合ニハ切觸ノ位數ノ如何ニ拘ラズ

$$f(x_0)=\phi(x_0),\qquad f'(x_0)=\phi'(x_0)$$

デアルカラ二曲線ハ P 點ニテ常ニ切スル. 從ツテ點 P ニテ (1) 又ハ (2) ト切觸スル直線ハ P 點ニ於ケル曲線ノ切線デアル.



偖テ y 軸ニ平行ナル直線

$$x=x_0+h$$

ヲ引キ第一ノ曲線トノ交點ヲ P_1, 第二ノ曲線トノ交點ヲ P_2 トシ, P_1, P_2 ノ縱座標ヲソレゾレ Y_1, Y_2 トスルナラバ

$$\begin{cases} Y_1=f(x_0+h)=f(x_0)+\dfrac{h}{1!}f'(x_0)+\cdots\cdots+\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)+\rho_{n+1} \\ Y_2=\phi(x_0+h)=\phi(x_0)+\dfrac{h}{1!}\phi'(x_0)+\cdots\cdots+\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(x_0)+\rho'_{n+1} \end{cases}$$

茲ニ ρ_{n+1}, ρ'_{n+1} ハ h ガ無限小トナルトキ h ニ比シ $n+1$ 位ヨリ高位ノ無限小トナルモノデアル.

故ニ (1), (2) ノ二曲線ガ點 P ニ於テ第 n 位ノ切觸ヲナス場合卽チ (3) ノ成立スル場合ニハ

$$Y_1-Y_2=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(x_0)-\phi^{(n+1)}(x_0)\right]+\rho_{n+1}-\rho'_{n+1}$$

トナリ，高位ノ無限小ヲ棄テテ

$$Y_1 - Y_2 \doteqdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(x_0) - \phi^{(n+1)}(x_0)\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

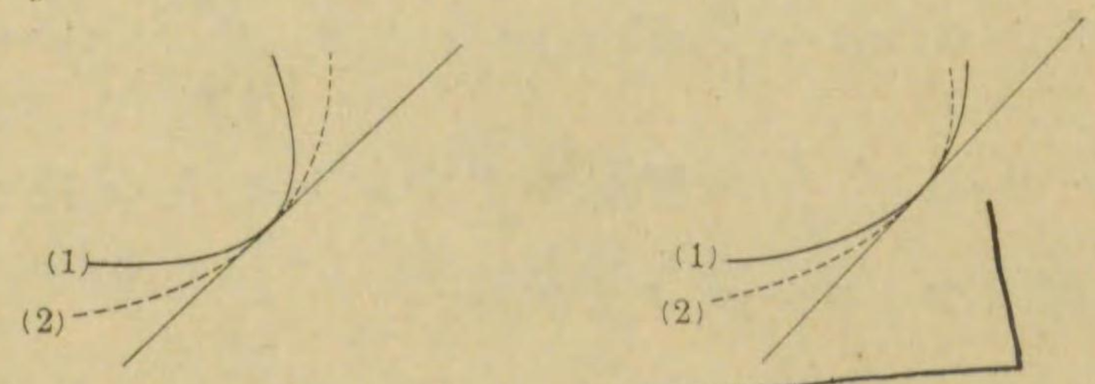
ト書クコトガ出來ル．コレヨリ次ノ結論ヲ得ル．

大切

(i)　(1), (2) ノ二曲線ガ點 P ニ於テ第 n 位ノ切觸ヲナストキハ $Y_1 - Y_2$ ハ h ガ第一位ノ無限小デアルトキ第 $n+1$ 位ノ無限小トナル．

(ii)　點 P ニ於テ (1) 又ハ (2) ノ曲線ト n 位ヨリ低位ノ切觸ヲナス第三ノ曲線ハ P 點ノ附近ニ於テハ此二曲線ノ間ニ入ルコトガナイ．

(iii)　(4) 式ノ右邊ハ n ガ奇數ナラバ h ノ正負ニ拘ラズ一定ノ符號ヲ有シ，n ガ偶數ナラバ h ト共ニ符號ヲ變ズルガ故ニ (1), (2) ノ二曲線ハ切觸ノ位數 n ガ奇數ナラバ P 點ニ於テ切リ合ハズ，之ニ反シテ偶數ナラバ P 點ニ於テ切リ合フ．例ヘバ第一位ノ切觸ヲナス二個ノ曲線ハ切點ニ於テ切リ合ハズ，第二位ノ切觸ヲナス二個ノ曲線ハ切點ニ於テ切リ合フ．



偖テ二個ノ曲線 (1) ト (2) トガ點 $P(x_0, y_0)$ ニテ第 n 位ノ切觸ヲナスニハ

$$f(x_0) = \phi(x_0),\quad f'(x_0) = \phi'(x_0),\quad \cdots\cdots,\ f^{(n)}(x_0) = \phi^{(n)}(x_0)$$

ナル $n+1$ 個ノ條件ヲ必要トスルガ故ニ，若シ $y = \phi(x)$ ガ k 個ノ任意常數ヲ含メル方程式デアルナラバソレラノ任意常數ノ値ヲ適當ニ選ンデ此方程式ノ表ス曲線ヲシテ曲線 $y = f(x)$ 上ノ一點 P ニテ之レト $k-1$ 位ノ切觸ヲナサシムルコトハ一般的ニ可能デアルケレドモ之ヨリ高イ位數ノ切觸ヲナサシムルコトハ特別ノ場合ヲ除イテハ可能デナイ．卽チ k 個ノ任意常數ヲ含メル方程式ニヨツテ表サレル曲線群中ノ曲線ハ與ヘラレタル曲線ト一般ニハ多クトモ $k-1$ 位ノ切觸ヲナシ得ルノミデアル．此最大切觸ヲナス曲線ヲソノ曲線群ニ屬スル**切觸曲線**ト云フ．

例ヘバ直線ノ一般ノ方程式ハ

$$y = mx + b$$

デアツテ m, b ナル二個ノ任意常數ヲ有スル故與ヘラレタ曲線 $y = f(x)$ 上ノ與ヘラレタ點 P ニ於テ之ト第一位ノ切觸ヲナス直線ヲ作ルコトガ出來ルケレドモ第二位以上ノ切觸ヲナス直線ヲ作ルコトハ P 點ガ曲線上ノ特別ナル點デナイ限リ，不可能デアル．此第一位ノ切觸ヲナス直線ガ切觸直線デアル．之ハ點 P ニ於ケル切線ニ外ナラヌ．

又圓ノ一般ノ方程式ハ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

デアツテ a, b, r ナル三個ノ任意常數ヲ有スル故與ヘラレタ曲線上ノ與ヘラレタ點ニ於テ之ト第二位ノ切觸ヲナス圓ハ**切觸圓**デアル．[1]

66.　切觸圓，曲率圓，縮閉線，伸開線

曲線 $y = f(x)$ 上ノ一點 P ノ座標ヲ x, y ニテ表シ點 P ニ於テ此曲線ト第二位ノ切觸ヲナス圓卽チ切觸圓ノ中心及ビ半徑ヲ求

[1] 切觸直線ハ與ヘラレタル曲線ト一般ニハ第一位ノ切觸ヲナス直線デアルケレドモ時ニハ第二位以上ノ切觸ヲナスコトモアル．卽チ嚴密ニ云ヘバ切觸直線トハ與ヘラレタル曲線ト少クトモ第一位ノ切觸ヲナス直線ト云フベキデアル．同樣ニ切觸圓トハ與ヘラレタル曲線ト少クトモ第二位ノ切觸ヲナス圓ト云フノガ實ハ嚴密ナ云ヒ方デアル．

メテ見ル.

點 $P(x, y)$ ニ於ケル切觸圓ノ中心ヲ $C(\xi, \eta)$, 其半徑ヲ R トスルナラバ切觸圓ノ方程式ハ

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2=R^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

デアツテ $\dfrac{dY}{dX}$, $\dfrac{d^2Y}{dX^2}$ ハ次ノ二式ヨル求メラレル.

$$(X-\xi)+(Y-\eta)\frac{dY}{dX}=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+(Y-\eta)\frac{d^2Y}{dX^2}=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

然ルニ (1) ハ點 $P(x, y)$ ニ於ケル切觸圓デアルカラ $X=x$ ニ對シテ

$$Y=y,\quad \frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2Y}{dX^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

コレラノ値ヲ (1), (2), (3) ニ代入シテ

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2 \quad \cdots\cdots(1')$$

$$(x-\xi)+(y-\eta)\frac{dy}{dx}=0 \quad \cdots\cdots(2')$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \cdots\cdots(3')$$

此三方程式カラ ξ, η, R ヲ求ムレバ切觸圓ノ中心ノ座標及ビ半徑ヲ得ル.[1]

(3′) ヨリ

$$y-\eta=-\frac{1+y'^2}{y''} \quad \cdots\cdots(4)$$

之ヲ (2′), ニ代入シテ

(1) 公式 (2′) ハ (1′) ノ兩邊ヲ x ニツキ微分シテ得ラレルモノ, 又公式 (3′) ハ (2′) ノ兩邊ヲ x ニツキ微分シテ得ラレルモノデアル.

$$x-\xi=\frac{(1+y'^2)y'}{y''} \quad \cdots\cdots(5)$$

此二ツノ値ヲ (1′) ニ入レテ

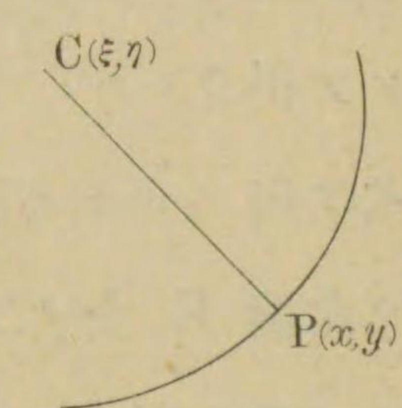
$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad \cdots\cdots(6)$$

故ニ切觸圓ノ半徑ハ曲率半徑ニ等シイ. 此關係ニヨリ切觸圓ヲ**曲率圓**, 切觸圓ノ中心ヲ**曲率中心**トモ稱スル.

切觸圓ノ半徑ト曲率半徑トノ相等シイコトハ次ノ如クニシテ證明スルコトモ出來ル.

曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 $P(x, y)$ ニ於ケル曲率半徑ハ第 64 節ノ公式ヨリ見得ル如ク y' 及ビ y'' ニノミ關係シテ居ル. 故ニ P 點ヲ通ル二曲線 $y=f(x)$, $y=\phi(x)$ ガ P 點ノ x ニ對シテ同ジ y' 及ビ y'' ヲ持ツ場合ニハ此二曲線ノ P 點ニ於ケル曲率半徑ハ相等シイ. 曲線 $y=f(x)$ ト其切觸圓トハ切點ニ於テ相等シキ y' 及ビ y'' ヲ持ツ故又相等シキ曲率半徑ヲ有セネバナラヌ. 然ルニ圓ノ曲率半徑ハ其半徑ニ等シイ. ヨツテ曲線ノ曲率半徑ハ切觸圓ノ半徑ニ等シクナケレバナラヌ.

偖テ初メニ戻リ, 曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 $P(x, y)$ ニ於ケル切觸圓ノ中心卽チ曲率中心ノ座標 ξ, η ハ (4) ト (5) 或ハ (2′) ト (3′) トカラ得ラレル. 方程式 (2′) ハ曲率中心 $C(\xi, \eta)$ ガ點 P ニ於ケル曲線 $y=f(x)$ ノ法線上ニアルコトヲ表シテ居ル. 切觸圓ハ P 點ニ於テモトノ曲線ト切スルガ故ニコレハ當然ノ結果デアル.

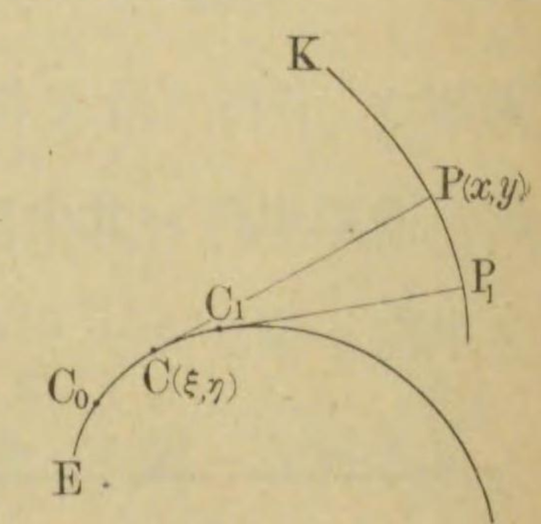


今 ξ, η ヲ變座標ト看做セバ方程式 (2′) ハ點 $P(x, y)$ ニ於ケルモトノ曲線 $y = f(x)$ ノ法線ノ方程式デアリ，此式ニ於テ x ヲ元トシ y ヲ曲線ノ方程式 $y = f(x)$ ニヨツテ定メラレル x ノ函數トスルナラバ此式ハモトノ曲線ノ法線群ノ方程式トナル．此方程式ヲ元 x ニ關シテ微分スレバ

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

(2′) ト (A) トヨリ ξ, η ヲ求ムレバ隣接二法線ノ交點ノ座標ヲ得ル．然ルニ (A) 式ハ方程式 (3′) ニ外ナラヌ．ヨツテ隣接二法線ノ交點ハ曲率中心ト一致セネバナラヌ．

隣接二法線ノ交點ノ軌跡ハ法線群ノ包曲線デアル．故ニ與ヘラレタル曲線ノ曲率中心ノ軌跡ハ法線群ノ包曲線ト一致スル．曲率中心ノ軌跡卽チ法線群ノ包曲線ヲバモトノ曲線 $y = f(x)$ ノ**縮閉線**ト云ヒ，縮閉線ニ對シテモトノ曲線ヲ
Involute
伸開線ト稱スル．
Evolute

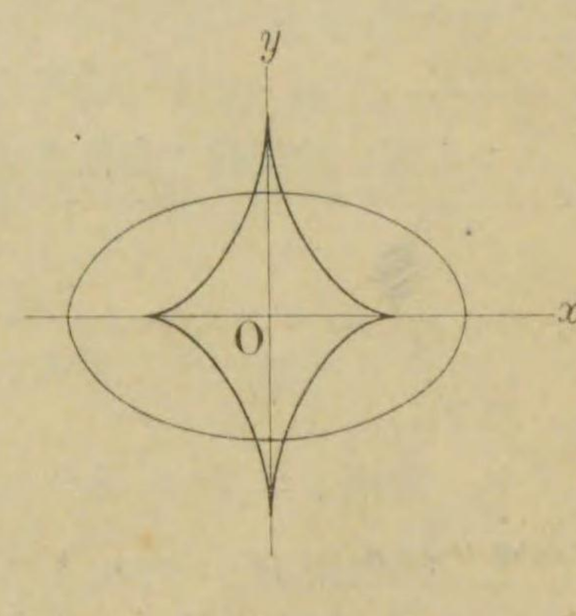


曲線 $y = f(x)$ ノ縮閉線ノ方程式ハ (2′) 及ビ (3′) 中ノ y, y', y'' ニ $f(x), f'(x), f''(x)$ ヲ代入シ而シテ後此二方程式ヨリ x ヲ消去シテ得ラレル．又ハ直接ニ原曲線ノ法線群ノ包曲線トシテ其方程式ヲ出スコトモ出來ル．第 63 節，例 3 ハ其一例デアル．

原曲線 K 上ノ二點 P, P_1 ニ於ケル曲率半徑ノ差 $PC \sim P_1C_1$ ハ其二點ニ對スル曲率中心間ノ縮閉線ノ弧ノ長サ $\overset{\frown}{CC_1}$ ニ等シイコト [問題 32, 第 22 問]，及ビ逆ニ一ツノ曲線 E 上ニ定點 C_0 及ビ動點 C ヲ取リ，C ニ於テ $\overset{\frown}{C_0C}$ ノ增ス方向ニ切線 CP ヲ引キ $\overset{\frown}{C_0C} + CP$ ガ一定ナル如キ點 P ヲ取ルナラバ P 點ノ軌跡ハ曲線 E ノ伸開線ナルコトガ證明セラレル [問題 32, 第 23 問]．

之ニヨリ曲線 E ニ絲ヲ卷キツケ置キ，絲ヲ引キ張リツツ解キ行クトキハ絲上ノ定點ハ曲線 E ノ伸開線ヲ畫クコトガ分ル．斯クテ一ツノ曲線ニ對シテ無數ニ多クノ伸開線ヲ得ル．

例 1. 楕圓ノ縮閉線．



楕圓ノ方程式ヲ，媒介變數ヲ用ヒテ，

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta$$

ト書クナラバ

$$dx = -a\sin\theta\, d\theta, \quad dy = b\cos\theta\, d\theta$$

ナル故

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$$

故ニ楕圓上ノ點 (θ) ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$(X - a\cos\theta)a\sin\theta = (Y - b\sin\theta)b\cos\theta$$

或ハ

$$aX\sin\theta - bY\cos\theta = (a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

兩邊ヲ元 θ ニツキ偏微分シテ

$$aX\cos\theta + bY\sin\theta = (a^2 - b^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1), (2) ヨリ θ ヲ消去スレバ法線群ノ包曲線卽チ楕圓ノ縮閉線ノ方程式ヲ得ル．先ヅ (1), (2) ヨリ X, Y ヲ求ムレバ

$$aX = (a^2 - b^2)\cos^3\theta, \quad bY = -(a^2 - b^2)\sin^3\theta$$

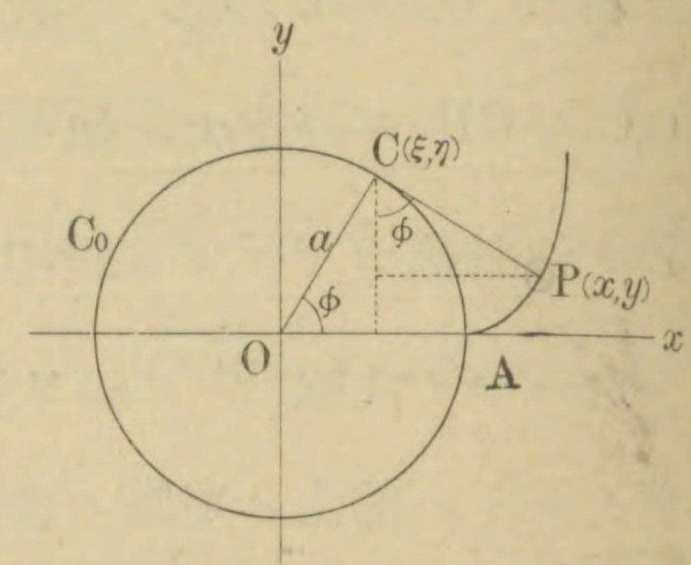
コノ二式ヨリ θ ヲ消去シテ

$$(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

コレ所要ノ方程式デアル．

例 2. 圓ノ伸開線.

伸開線ト圓トノ交點ヲ A トシ此點ヲ通ル直徑ヲ x 軸, 之ニ垂直ナル直徑ヲ y 軸ニ取ル. 圓周上ノ點 $C(\xi, \eta)$ ニ於ケル圓ノ切線ト伸開線トノ交點ヲ $P(x, y)$ トシ $\angle AOC = \phi$, $OC = a$ ト置ケバ



$$x = \xi + CP \sin\phi,\quad y = \eta - CP\cos\phi$$

デアツテ

$$\xi = a\cos\phi,\qquad \eta = a\sin\phi,\qquad CP = \overset{\frown}{CA} = a\phi$$

デアルカラ

$$x = a(\cos\phi + \phi\sin\phi),\qquad y = a(\sin\phi - \phi\cos\phi)$$

コレガ圓ノ伸開線ノ方程式デアル

問 題 32.

1. 曲線 $y = 2x + 3x^2 - x^4$ ノ原點ニ於ケル曲率半徑ヲ求ム.

2. 抛物線 $y^2 = 4px$ 上ノ一點ニ於ケル曲率半徑ヲ求ム.

3. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 上ノ一點ニ於ケル曲率半徑ヲ求ム.

4. $x = a\cos\phi$, $y = b\sin\phi$ 上ノ一點ニ於ケル曲率半徑ヲ求ム.

5. 曲線 $x = f(t)$, $y = \phi(t)$ 上ノ一點ニ於ケル曲率半徑ヲ求ム.

6. 一ツノ曲線ニ於テ

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{dy}{ds},\qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\frac{dx}{ds}$$

ヲ證明シ, ヨツテ次式ヲ誘導セヨ.

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

7. 曲線 $x = f(t)$, $y = \phi(t)$ 上ノ一點 $P(x, y)$ ニ於ケル切線ガ x 軸トナス角ヲ θ トスレバ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\theta - \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\sin\theta$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\sin\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\cos\theta$$

ナルコトヲ證明セヨ.

8. 曲線 $y=f(x)$ ガ原點ヲ通リ且ツ x 軸ガ原點ニ於ケル曲線ノ切線ナルトキハ, 原點ニ於ケル曲率半徑ハ $\dfrac{1}{f''(0)}$ ニ等シク從ツテ又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2y}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ [$\dfrac{x^2}{2y}$ ハ $x = 0$ ニテ不定形ヲ取ル. 第27節ノ方法ニテ $x \to 0$ ナルトキノ極限値ヲ求メヨ].

9. 極方程式 $r = f(\theta)$ ニテ表サルル曲線ガ極ヲ通リ, 且ツ首線ガ極ニ於ケル曲線ノ切線ナルトキハ極ニ於ケル曲率半徑ハ $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{r}{2\theta}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ [前問ノ結果ヲ用ヒヨ].

10. 曲線 $r = a\sin n\theta$ ノ極ニ於ケル曲率半徑ヲ求ム [前問參照].

11. 曲線上ノ點 P ニ於テ之ト切シ且ツ曲線上ノ他ノ點 Q ヲ通ル圓ヲ S トス. 點 Q ガ限リナク點 P ニ近ヅク極限ニ於テ圓 S ハ切觸圓トナルコトヲ證明セヨ [P 點ヲ原點, P ニ於ケル曲線ノ切線ヲ x 軸ニ取リ S 圓ノ半徑ヲ Q 點ノ座標ニテ表シ, 然ル後極限ヲ取レ].

12. 曲線 $r = f(\theta)$ 上ノ一點 $P(r, \theta)$ ニ於ケル切線ガ首線トナス角ヲ α トスレバ

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{r^2 + r'^2}$$

ナルコトヲ示シ, 之ヲ用ヒテ點 P ニ於ケル曲率半徑ハ次式ニテ與ヘラルルコトヲ證明セヨ.

$$\frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 - rr'' + 2r'^2}$$

玆ニ r', r'' ハ θ ニ關スル微分係數ヲ表ス[(1)] [切線ガ動徑 OP トナス角ヲ ϕ トスレバ $\alpha = \theta + \phi$, $\tan\phi = \dfrac{r}{r'}$ ナルコトヲ利用セヨ].

13. 圓 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$ ト曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ トハ $x = y = 1$ ニ於テ第三位ノ切觸ヲナスコトヲ證明セヨ.

14. 抛物線 $(5y-8)^2 = 2(7-5x)$ ト圓 $x^2 + y^2 = 5$ トハ點 $(1, 2)$ ニ於テ第二位ノ切觸ヲナスコトヲ證明セヨ.

15. 曲線 $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 上ノ點 (x, y) ニ對スル曲率中心ノ座標 ξ, η ハ次ノ式ニテ與ヘラルルコトヲ證明セヨ.

---

(1) 此結果ハ又第 4 章, 問題 9, 第10問ニモ出テ居ル.

$$\xi = x - y\sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}, \qquad \eta = 2y$$

16. 曲線 $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ 上ノ點 (θ) ニ對スル曲率中心ノ座標 ξ, η ハ $\xi = a(\cos\theta + \sin\theta\sin 2\theta)$, $\eta = a(\sin\theta + \cos\theta\sin 2\theta)$ ニヨツテ與ヘラルルコトヲ證明セヨ.

17. 曲線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ノ縮閉線ノ方程式ハ $(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi-\eta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$ ナルコトヲ證明セヨ [前問參照].

18. 曲線 $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ 上ノ點 (θ) ニ對スル曲率中心ノ座標 ξ, η ハ $\xi = a(\theta + \sin\theta)$, $\eta = a(\cos\theta - 1)$ ニヨツテ與ヘラルルコトヲ證明セヨ.(1)

19. 曲線上ノ一點 P ニ於ケル曲率半徑ヲ ρ, P 點ニ對スル縮閉線上ノ點 C ニ於ケル縮閉線ノ曲率半徑ヲ ρ_1 トスレバ $\rho_1 = \rho\dfrac{d\rho}{ds}$ ナルコトヲ證明セヨ.

20. 曲線 K 上ノ點 $\mathrm{P}(x, y)$ ニ對スル縮閉線上ノ點ヲ $\mathrm{C}(\xi, \eta)$ トシ K ノ弧ヲ s ニテ表セバ

$$\xi = x - \rho\frac{dy}{ds}, \qquad \eta = y + \rho\frac{dx}{ds}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

21. 前問ノ ξ, η ハ, 點 P ニ於ケル切線ガ x 軸トナス角ヲ θ ニテ表セバ,

$$\xi = x - \rho\sin\theta, \qquad \eta = y + \rho\cos\theta$$

ト書カル. 此式ヨリ

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$$

ヲ誘導セヨ.

22. 前問ノ結果ヨリ次ノ定理ヲ證明セヨ. 曲線 K 上ノ二點ニ於ケル曲率半徑ノ差ハ其二點ニ對スル曲率中心間ノ縮閉線ノ弧ノ長サニ等シ.

23. 曲線 E 上ノ點 $\mathrm{C}(\xi, \eta)$ ニ於ケル切線ガ x 軸トナス角ヲ θ_1, 切線上ニ弧ノ長サ σ ノ增ス方向ニ C ヨリ $k - \sigma$ (k ハ常數) ナル距離ニ取レル點ヲ $\mathrm{P}(x, y)$ トスレバ

$$x = \xi + (k-\sigma)\cos\theta_1, \quad y = \eta + (k-\sigma)\sin\theta_1$$

トナル. 此兩邊ヲ σ ニツキ微分シ然ル後其比ヲ取リテ

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{d\eta}{d\xi}$$

ヲ證明セヨ. ヨリテ CP ハ P 點ノ軌跡ニ對シ常ニ法線トナルコトヲ示セ.

---

(1) コレヨリさいくろいどノ縮閉線ハ亦さいくろいどナルコトヲ知ル.

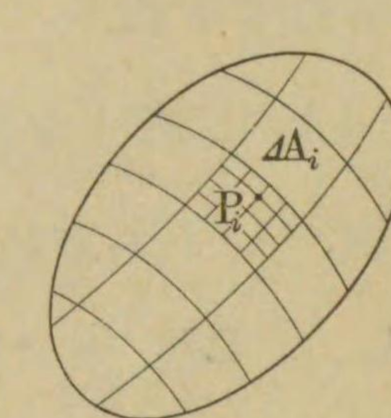
第十二章

重複積分

67. 二重積分

二重積分ノ定義ハ吾人ガ第八章, 第 41 節 (168 頁) ニ與ヘタ定積分ノソレト殆ンド同ジデアル. 以下簡單ニ之ヲ說明スルコトニスル. 但シ了解ヲ容易ナラシメルタメニ幾何學的ノ言葉ヲ用フルコトニスル.

$z = f(x, y)$ ヲ領域 A 內ニ於テ連續ナル x, y ノ函數トスル. 今領域 A ヲ n 個ノ小領域 $\Delta\mathrm{A}_1, \Delta\mathrm{A}_2, \ldots\ldots, \Delta\mathrm{A}_n$ ニ分チ ($\Delta\mathrm{A}_1, \Delta\mathrm{A}_2, \ldots\ldots, \Delta\mathrm{A}_n$ 及ビ A ハ領域ソレ自身ヲ表スト同時ニソノ面積ヲモ表スモノトスル) 領域 $\Delta\mathrm{A}_i$ 內ノ任意ノ一點ヲ $\mathrm{P}_i(\xi_i, \eta_i)$ トシ次ノ和ヲ作ル.



$$\mathrm{S}_n = f(\xi_1, \eta_1)\Delta\mathrm{A}_1 + f(\xi_2, \eta_2)\Delta\mathrm{A}_2 + \cdots\cdots + f(\xi_n, \eta_n)\Delta\mathrm{A}_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\mathrm{A}_i$$

偖テ領域 A ヲ n 個ノ小領域ニ分ツ仕方ハ色色アル. 又 ξ_i, η_i ノ選ビ方モ種種雜多アル. 領域 A ヲ分ツ仕方及ビ ξ_i, η_i ノ取リ方ハ無數ニアルケレドモ $\Delta\mathrm{A}_1, \Delta\mathrm{A}_2, \ldots\ldots, \Delta\mathrm{A}_n$ ノ各ヲ含ム最

小正方形[1]中ノ最大ナルモノヲ限リナク小ナラシムルトキ(之ヲ單ニ $\Delta A \to 0$ ト書イテ表ス) ハ S_n ハ小領域ノ分ケ方及ビ ξ_i, η_i ノ選ビ方ニ全ク無關係ナ一ツノ常數 S ニ限リナク近ヅクコトガ證明セラレルノデアル. 卽チ

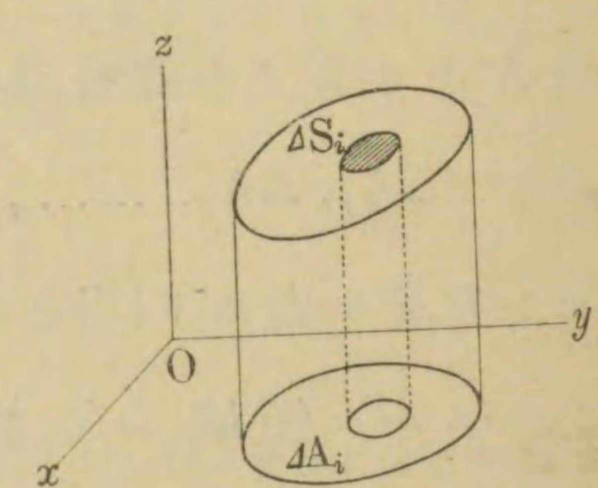
$$\lim_{\Delta A \to 0} S_n = S$$

此 S ヲ領域 A 上ニ取ツタ函數 $f(x, y)$ ノ**二重積分**ト稱シ之ヲ

$$\iint_{(A)} f(x, y)dA \qquad 又ハ \qquad \iint_{(A)} f(x, y)\,dx\,dy$$

ナル記號ニテ表ス. 而シテ二重積分ニ對シテ第 41 節ニ定義シタ積分ヲ**單一積分**ト云フ.

$f(x, y)$ ガ A 內ニテ正且ツ連續デアル場合ニハ $z = f(x, y)$ ハ其領域內ニテ xy 平面ノ上部ニアル連續曲面ヲ表ス. xy 平面上ノ小領域 ΔA_i ヲ底トシ此上ニ立ツ直壔ト曲面 $z = f(x, y)$ トノ交リヲ ΔS_i, ΔA_i ト ΔS_i トノ間ニアル直壔ノ部分ヲ ΔV_i ニテ表スナラバ (ΔV_i ハ立體ソレ自身ヲ表スト同時ニソノ體積ヲモ表スモノトスル. 以下同樣デアル)



$$L\Delta A_i \leqq \Delta V_i \leqq G\Delta A_i$$

茲ニ L, G ハ領域 ΔA_i 內ニ於ケル z ノ最小値及ビ最大値デアル. 故ニ

(1) 最小正方形ノ代リニ最小圓トスルモ宜シイ. 要ハ ΔA_i ノ面積ガ小トナルバカリデナク ΔA_i ノ中ニ取ツタ任意ノ二點ノ距離モ小トナレバ宜シイノデアル.

$$\Delta V_i = k\Delta A_i$$

ト置クナラバ

$$L \leqq k \leqq G$$

然ルニ $f(x, y)$ ハ A, 從ツテ ΔA_i 內ニ於テ連續デアルカラ ΔA_i 內ニ適當ナル點 $P(\xi_i, \eta_i)$ ヲ取ルナラバ

$$f(\xi_i, \eta_i) = k$$

ヨツテ

$$\Delta V_i = f(\xi_i, \eta_i)\Delta A_i$$

領域 A ヲ底トシ此上ニ立ツ直壔ト曲面 $z = f(x, y)$ トノ間ニアル立體ノ體積ヲ V ニテ表スナラバ

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta A_i$$

左邊ハ $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots\ldots, \Delta A_n$ ノ取リ方ニ全ク無關係ナ一ツノ常數デアル. ヨツテ $\Delta A_i \to 0$ ノ極限ヲ考ヘテ

$$V = \iint f(x, y)dA$$ [1]

卽チ二重積分ハ xy 平面上ノ領域 A ヲ底トシ此上ニ立ツ直壔ト曲面 $z = f(x, y)$ トノ間ニアル立體ノ體積ヲ表ス.[2]

注意 1. 小領域 $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots\ldots, \Delta A_n$ ノ代表者ヲ ΔA ニテ表シ ΔA 中ニ取ツタ一點ノ座標ヲ x, y ニテ表スナラバ二重積分ノ定義ヲ

$$\iint f(x, y)dA = \lim \Sigma f(x, y)\Delta A$$

ト書イテ表スコトガ出來ル. 左邊ノ記號ノ起リハ此關係ニヨルノデアル.

(1) コレハ立體ノ體積 V ノ存在ヲ假定シテ居ル結論デアル.

(2) 以上ハ $f(x, y)$ ガ領域 A 內ニテ正ト假定シタノデアルガ $f(x, y)$ ガ A 內ニテ負トナル場合ニハ A ヲ底トスル直壔ト xy 平面ヨリ上部ニアル曲面ノ部分トノ間ノ體積ハ正, xy 平面ヨリ下部ニアル曲面ノ部分トノ間ノ體積ハ負ト考ヘ, 是等ノ正, 負ノ體積ノ代數和ヲ A ノ上ニ立ツ直壔ノ體積ト規約スルナラバ此體積ハ常ニ二重積分 $\iint f(x, y)dA$ ニヨツテ表サレルコトガ容易ニ證明セラレルノデアル.

注意 2. xy 平面上ノ領域 A ノ面積ハ $\iint 1dA$ ナル二重積分ヲ計算シテ求メルコトモ出來ル.

注意 3. 小領域 $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots\ldots, \Delta A_n$ 中 A ノ境界ト共通ノ境界ヲ有スル小領域ニ對スル和ヲ $\sum''$ ニテ, 殘リノ領域ニ對スル和ヲ $\sum'$ ニテ表スナラバ、

$$\sum = \sum' + \sum''$$

ニアッテ

$$\lim_{\Delta A\to 0} \sum'' f(x,\ y)\Delta A = 0$$

ナルコトガ證明セラレル. 從ツテ

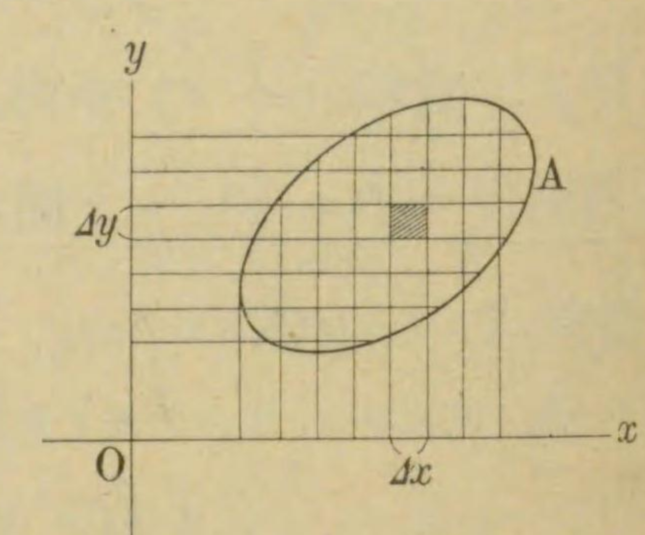
$$\lim_{\Delta A\to 0} \sum' f(x,\ y)\Delta A = \iint_{(A)} f(x,\ y)dA$$

例ヘバ領域 A ヲ x 軸ニ平行ナル直線群ト y 軸ニ平行ナル直線群トニヨツテ小領域ニ分ツナラバ A ノ境界ト共通ノ境界ヲ有シナイ小領域ハ悉ク矩形デアツテ此矩形ニ對シテハ

$$\Delta A = \Delta x \Delta y$$

($\Delta x, \Delta y$ ハ矩形ノ邊ノ長サ) デアルカラ

$$\lim \sum' f(x,\ y)\Delta x\,\Delta y = \iint_{(A)} f(x,\ y)dA$$



A 上ニ取ツタ二重積分ヲ $\iint_{(A)} f(x,\ y)dx\,dy$ ニテ表スノハ此性質ガアルカラデアル.

注意 4. 點 $(x,\ y),\ (x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ ガ ΔA 內ノ點デアツテ $\Delta A\to 0$ (從ツテ $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$) ナルトキ 高位ノ無限小ヲ捨テテ $\Delta S \fallingdotseq f(x,\ y)\Delta A$ デアルナラバ

$$\lim \sum' \Delta S = \lim \sum' f(x,\ y)\Delta A$$

從ツテ

$$\lim \sum' \Delta S = \lim \sum f(x,\ y)\Delta A = \iint_{(A)} f(x,\ y)dA$$

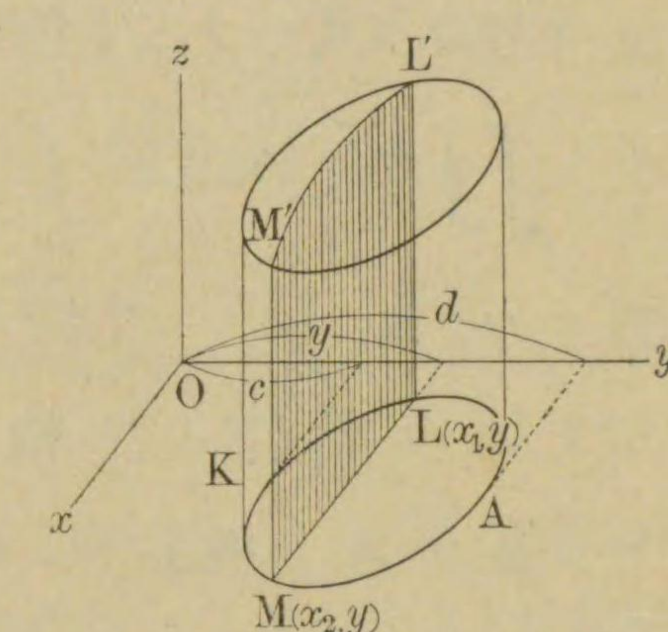
ナルコトモ證明セラレル. コレモ應用上大切ナ定理デアル [第41節, 注意 2 參照].

68. 二重積分ノ計算

$f(x,\ y)$ ヲ領域 A 內ニテ連續ナル $x,\ y$ ノ函數トスレバ前節ニヨリ二重積分 $\iint f(x,\ y)dA$ ハ A ヲ底トスル直壔ノ曲面

$$z = f(x,\ y)$$

ニヨツテ限ラレタ部分 K ノ體積ヲ表ス. 今 xy 平面上ニ於テ x 軸ニ平行ナル直線ハ A ノ境界ト二點 L, M ニテ出會フモノトシ, L 點ノ座標ヲ x_1, y, M 點ノ座標ヲ $x_2, y\ (x_1 < x_2)$ トスルナラバ直線 LM ヲ含ミテ z 軸ニ平行ナル平面ト立體 K トノ交リナル平面圖形 LMM′L′ ノ面積[1] ハ y ノ函數デアツテ



$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)dx$$

ニヨツテ計算セラレル. 而シテ此面積ヲ $\phi(y)$ ニテ表スナラバ立體 K ノ體積 V ハ

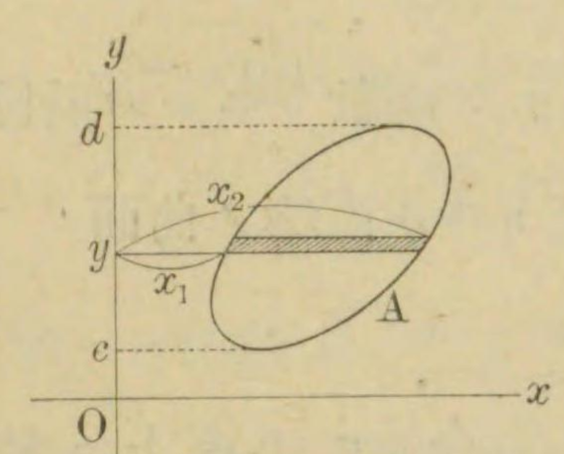
[1] 面積ニモ適當ナル符號ヲツケ置クモノトスル.

$$\mathrm{V} = \int_c^d \phi(y)dy$$

茲ニ $c,\ d\,(c<d)$ ハ A ノ境界上ニ於テ x_1 ト x_2 ト合スル點ノ y 座標デアル. ヨツテ

$$\mathbf{V} = \iint f(x,\ y)\,d\mathrm{A} = \int_c^d \left\{ \int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)\,dx \right\} dy^{(1)} \quad \text{......(1)}$$

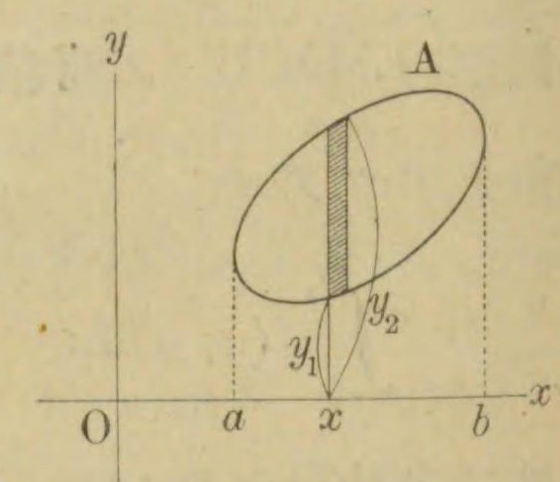
$x_1,\ x_2$ ハ一般ニハ y ノ函數デアル. 斯クノ如クニシテ二重積分ヲ二回ノ單一積分ニ直スコトガ出來ル.



以上ハ y ヲ一定シ置キ x ニツキ x_1 ヨリ x_2 マデ積分シ, 次ニ其結果ニ於テ y ニツキ c ヨリ d マデ積分シタモノデアル(左圖參照). 若シ y 軸ニ平行ナル直線ガ A ノ境界ト同ジク二點ニテ交ルナラバ $x,\ y$ ノ順序ヲ更ヘテ二重積分ヲ次ノ如クニ表スコトモ出來ル.

$$\iint f(x,\ y)\,d\mathrm{A} = \int_a^b \left\{ \int_{y_1}^{y_2} f(x,\ y)\,dy \right\} dx \quad \text{...............(2)}$$

茲ニ $y_1,\ y_2,\ a,\ b$ ハ右圖ノ如キモノデアル. x 軸(又ハ y 軸)ニ平行ナル直線ガ A ノ境界ト二ツヨリ多クノ點ニ於テ交ル場合ニハ境界ガ x 軸(又ハ y 軸)ニ平行ナル直線ト二

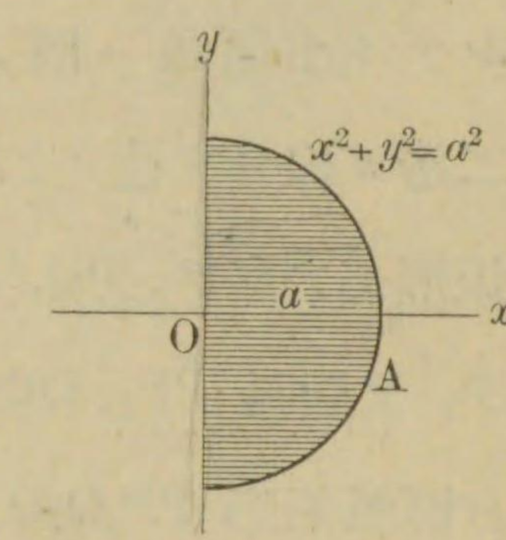


(1) 此積分ヲ $\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)dx$ 又ハ $\int_c^d \int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)\,dx\,dy$ ト書イテ表スコトモアル.

個ノ點ニテ交ル樣ナイクツカノ領域ニ分ケソノ各領域上ニテ上ノ方法ニヨリ二重積分ヲ計算シソレヲ加ヘ合スレバ A 上ニテノ二重積分ヲ得ル.

例. xy 平面ノ上部, 平面 $z=2x$ ノ下部ニアル圓壔 $x^2+y^2=a^2$ ノ體積ヲ計算セヨ.

$0 \leqq x,\ x^2+y^2 \leqq a^2$ ナル領域即チ圖ノ半圓上ニテ函數 $z=2x$ ノ二重積分ヲ計算スレバ所要ノ體積ヲ得ル.



$$\therefore \quad \mathrm{V} = \int_{-a}^{a} \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} 2x\,dx \right\} dy$$

或ハ

$$= \int_0^a \left\{ \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2x\,dy \right\} dx$$

ト書クコトガ出來ル.

第一ノ式ニヨツテ計算スレバ

$$\mathrm{V} = \int_{-a}^{a} (a^2-y^2)\,dy = \frac{4}{3}a^3$$

第二ノ式ニヨツテ計算スレバ

$$\mathrm{V} = \int_0^a 4x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{4}{3}a^3$$

注意. 前頁ノ最初ノ圖ノ領域 A ヲ式デ表セバ

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \qquad c \leqq y \leqq d \quad \text{..............................(3)}$$

トナル. 同樣ニ前頁ノ後ノ圖ノ領域 A ハ

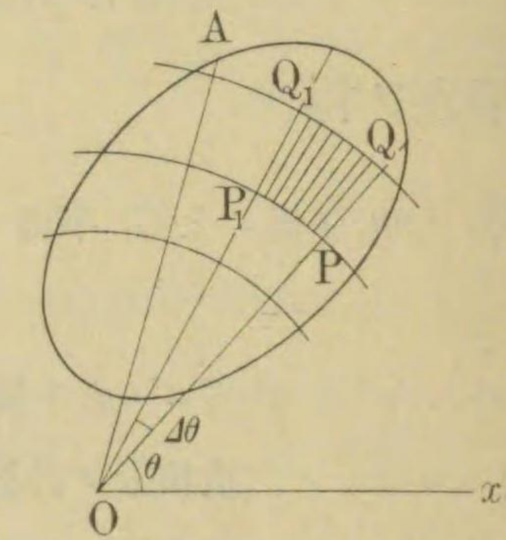
$$y_1 \leqq y \leqq y_2, \qquad a \leqq x \leqq b \quad \text{..............................(4)}$$

ニヨツテ表サレル. 故ニ (3) ナル領域內ノ二重積分ハ (1) 式ニテ, 又 (4) ナル領域內ノ二重積分ハ (2) 式ニテ計算セラレルコトガ證明セラレタノデアル. (1), (2) ノ如キ積分ヲ**二回積分**ト稱スル.

次ニ領域 A ヲ, 原點ヲ通ル直線群即チ極座標ニ於ケル $\theta=\mathrm{const}$ ナル直線群ト, 原點ヲ中心トスル圓群即チ極座標ニ於ケル

$r=\text{const}$ ナル圓群トニヨツテ小領域ニ分チコレラノ小領域ニ對スル

$$\sum f(x,\ y)\Delta A$$



ノ極限ヲ考ヘテ見ル.

此場合ニ A ノ境界ト共通ノ境界ヲ有シナイ小領域ハ圖ノ PP_1Q_1Q ノ如キ二邊ガ線分デ他ノ二邊ガ圓弧ヨリ成ル矩形デアツテ, PQ, P_1Q_1 ガ x 軸トナス角ヲソレゾレ $\theta,\theta+\Delta\theta$ ニテ, 又圓弧 PP_1, QQ_1 ノ半徑ヲソレゾレ, $r,\ r+\Delta r$ ニテ表スナラバ圓弧矩形 PP_1Q_1Q ノ面積 ΔA ハ

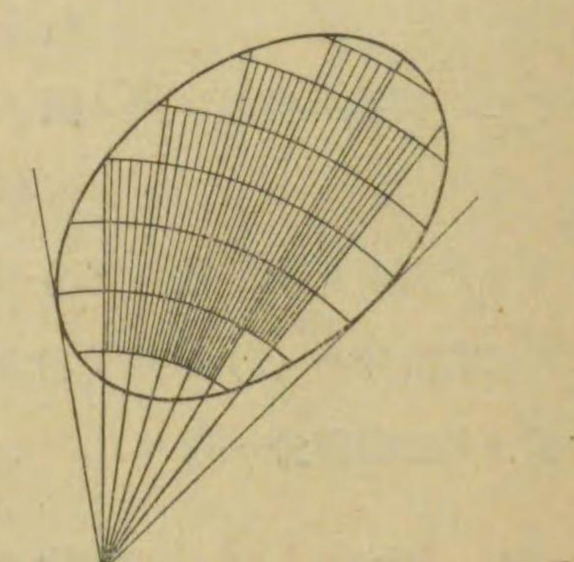
$$\Delta A = \text{面積}\ OQQ_1 - \text{面積}\ OPP_1 = \frac{1}{2}\left\{(r+\Delta r)^2 - r^2\right\}\Delta\theta$$

$$= \left(r+\frac{1}{2}\Delta r\right)\Delta r\Delta\theta \doteqdot r\Delta r\Delta\theta \ ^{(1)}$$

デアルカラ前節注意 4 ニヨツテ

$$\iint_{(A)} f(x,\ y)dA = \lim \sum{}' f(x,\ y)r\Delta r\Delta\theta$$

右邊ノ $\sum'$ ハ A 內ニアル總テノ圓弧矩形（下圖ノ蔭ヲ施セル部分）ニ對スル和デアル. 故ニ上式ノ右邊ハ又 $r,\ \theta$ ノ或領域（$x,\ y$ ノ領域 A ニ對應スル領域）內ニ於ケル二重積分ニヨツテ表サレ從ツテ又 r ト θ トニ關スル二回積分ヲ計算スルコトニヨツテ其値ヲ求メルコトガ出來ル.



(1) Δr, $\Delta\theta$ ヲ無限小トスルトキ高位ノ無限小ヲ棄テテ成立スル近似式デアル.

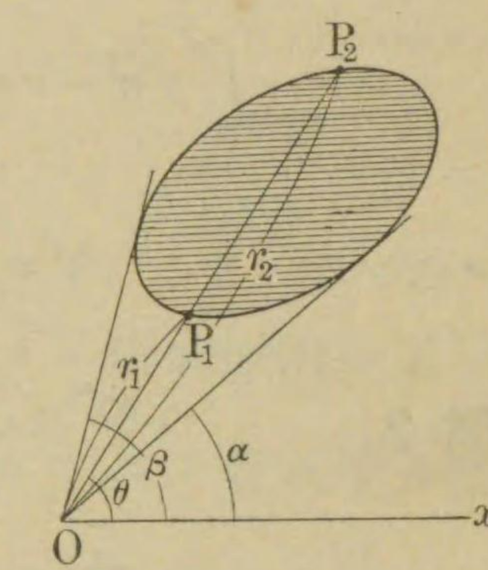
例ヘバ $\theta=\text{const}$ ナル直線ガ A ノ境界ト二點 $P_1,\ P_2$ ニ於テ交ル場合ニハ $P_1,\ P_2$ 點ノ極座標ヲ $r_1,\ \theta;\ r_2,\ \theta$ トスレバ $r_1,\ r_2$ ハ θ ノ函數デアツテ $x,\ y$ ノ領域 A ニハ $r,\ \theta$ ノ領域

$$A'(r_1\leqq r\leqq r_2,\ \alpha\leqq\theta\leqq\beta)$$

ガ對應スル故上式ノ右邊ハ

$$\iint_{(A')} f(x,\ y)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\left\{\int_{r_1}^{r_2} f(x,\ y)r\,dr\right\}d\theta$$



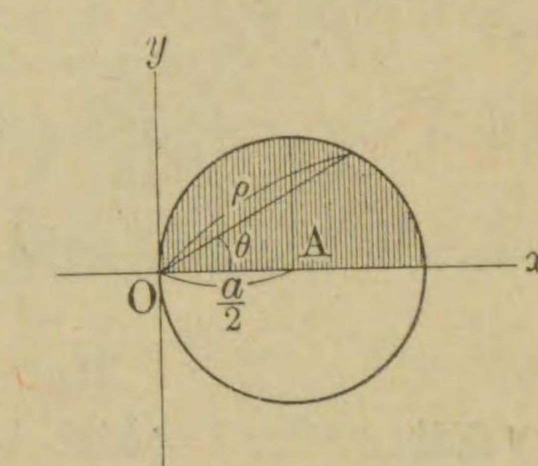
トナル. 斯クテ上ノ如キ領域ニ對シテハ

$$\iint_{(A)} f(x,\ y)dx\,dy = \int_\alpha^\beta\left\{\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\right\}d\theta$$

ナル關係成立スル. コノ公式モ二重積分ノ計算ニ於テ屢用ヒラルル重要ナル公式ノ一ツデアル.

例 1. 圓壔 $x^2+y^2=ax$ ノ內部ニアル球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ ノ體積.

$x^2+y^2=ax$ ハ $x,\ y$ 平面上ニテハ圖ノ如キ圓ヲ表ス. 上ノ圓壔ハ此圓ノ上ニ立ツ直壔デアル.



圖形ノ對稱性カラ $y\geqq0$, $z\geqq0$ ナル部分ノ體積ヲ求メテソレヲ 4 倍スレバ所要ノ體積ガ得ラレル, 偖テ球面ノ方程式カラ

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

故ニ求ムル體積ハ

$$V=4\iint_{(A)}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

A ハ x 軸ノ上部ニアル半圓ノ內部デアル.

此二重積分ヲ求ムルタメニ xy 平面上ノ點ノ座標ヲ極座標ニ直スナラバ

$$\mathrm{V} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\rho}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\right\}d\theta$$

茲ニ ρ ハ 偏角 θ ニ對スル圓周上ノ點ノ動徑デアル. 即チ

$$\rho = a\cos\theta$$

$$\therefore\quad \int_0^{\rho}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr = -\frac{1}{3}\Big[(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{a\cos\theta} = \frac{a^3}{3}(1-\sin^3\theta)$$

ヨツテ
$$\mathrm{V} = \frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{8}{9}a^3$$

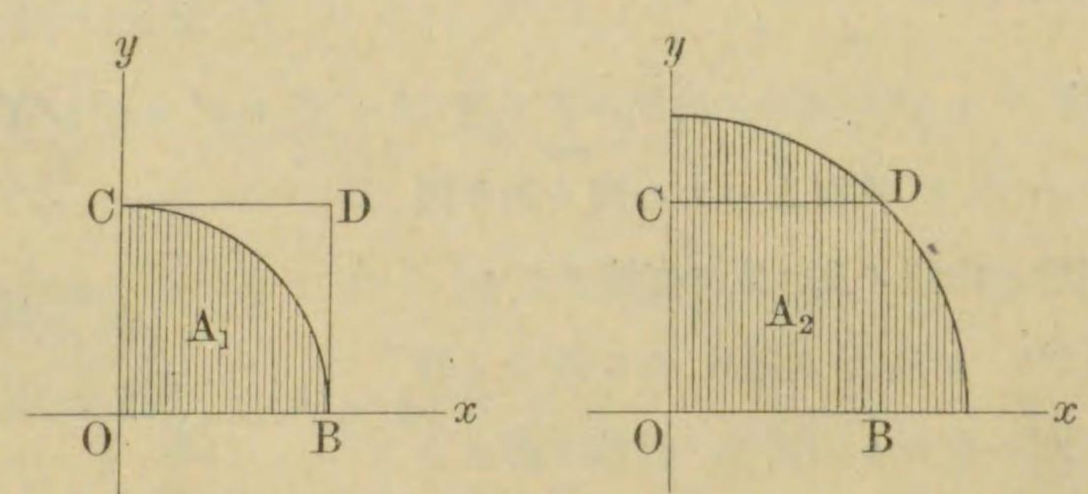
例 2. $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$ ノ値ヲ求ム.

先ヅ
$$\phi(\lambda) = \int_0^{\lambda}e^{-x^2}dx,\qquad \rho(\lambda) = \int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

ト置キ此二ツノ積分ノ關係ヲ考ヘテ見ル.

$$\rho(\lambda) = \int_0^{\lambda}e^{-y^2}\left\{\int_0^{\lambda}e^{-x^2}dx\right\}dy = \int_0^{\lambda}e^{-y^2}\phi(\lambda)dy = \phi(\lambda)\int_0^{\lambda}e^{-y^2}dy = \Big[\phi(\lambda)\Big]^2$$

所デ $\rho(\lambda)$ ハ xy 平面上ノ正方形 OBDC (一邊ノ長サ λ) 上ニ取ツタ函數 $e^{-(x^2+y^2)}$ ノ二重積分ニ等シイ. 今原點ヲ中心トシ OB, OD ヲ半徑トスル四分圓 A_1, A_2



ヲ作リ函數 $e^{-(x^2+y^2)}$ ノ領域 A_1, A_2 上ニ取ツタ二重積分ヲソレゾレ D_1, D_2 ニテ表スナラバ

$$\mathrm{D}_1 < \rho(\lambda) < \mathrm{D}_2$$

而シテ極座標ヲ用ヒテ D_1, D_2 ヲ計算スルトキハ

$$\mathrm{D}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\lambda}e^{-r^2}r\,dr\right\}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^{\lambda}d\theta = \frac{\pi}{4}(1-e^{-\lambda^2})$$

$$\mathrm{D}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\sqrt{2}\lambda}e^{-r^2}r\,dr\right\}d\theta = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2\lambda^2})$$

トナル故
$$\lim_{\lambda\to\infty}\mathrm{D}_1 = \lim_{\lambda\to\infty}\mathrm{D}_2 = \frac{\pi}{4}$$

ヨツテ
$$\lim_{\lambda\to\infty}\rho(\lambda) = \frac{\pi}{4},\quad 即チ\quad \lim_{\lambda\to\infty}\Big[\phi(\lambda)\Big]^2 = \frac{\pi}{4}$$

ヲ得ル. 然ルニ $\phi(\lambda)$ ハ正デアルカラ

$$\lim_{\lambda\to\infty}\phi(\lambda) = \int_0^{\infty}e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

69. 重複積分

前前節ニ於テハ了解ヲ容易ナラシムルタメニ幾何學的ニ二重積分ヲ定義シタケレドモコレハ便宜上ノコトデアツテ幾何學ヲ離レテ二重積分ヲ定義シ得ルコト勿論デアル. ソレニハ上ニ用ヒタ幾何學ノ言葉ヲ解析的ニ解釋スレバ宜シイ. 例ヘバ原點ヲ中心トシテ半徑 r ナル圓ノ内部 (周ヲモ含ム) ト云フコトハ $x^2+y^2\leqq r^2$ ナル x, y ノ領域ト云フコトデアルト解釋スルノデアル. 此解釋ハ既ニ前節注意ニ於テモ採用シタノデアル. カクテ幾何學ノ言葉ヲ解析的ノ意味ニ解釋スルコトニヨリ幾何學ヲ離レテ二重積分ヲ定義シ得ルコトガ分ルデアラウ. 此見地ニヨル二重積分ノ定義ハ之ヲ**三重積分**, **四重積分**, 一般ニ n **重積分**ニ擴張スルコトガ出來ル. 而シテ是等ノ重複積分ハ單一積分ヲ何回カ繰リ返スコトニヨツテ求メラレルコトモ二重積分ノ場合ト同様デアル. 下ニ其一例ヲ示ス.

例. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\leqq a^2$ ナル領域内ニ取リタル 1 ノ四重積分ヲ計算セヨ.
之ヲ四次元空間内ノ半徑 a ナル球ノ體積ト稱スル. 之ヲ V ニテ表スナラバ

$$\mathrm{V} = \underset{(\mathrm{A})}{\iiiint}dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$$

A ハ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\leqq a^2$ ナル領域デアル.

先ヅ x_1, x_2, x_3 ヲ常數トシテ x_4 ニ對シテ積分スルナラバ x_4 ノ積分限界ハ

$$-\sqrt{a^2-(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)}, \qquad \sqrt{a^2-(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)}$$

トナル. 次ニ x_1, x_2, x_3 ハ

$$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2 \leqq a^2$$

ヲ滿足スベキデアルカラ, x_1, x_2 ヲ常數ト看做シテ x_3 ニ對シテ積分スルナラバ其積分限界ハ

$$-\sqrt{a^2-(x_1{}^2+x_2{}^2)}, \qquad \sqrt{a^2-(x_1{}^2+x_2{}^2)}$$

以下同様ニシテ x_2, x_1 ニ關スル積分限界ヲ定メルコトガ出來ル. 斯クシテ

$$\mathrm{V}=\int_{-a}^{a} dx_1 \int_{-\sqrt{a^2-x_1{}^2}}^{\sqrt{a^2-x_1{}^2}} dx_2 \int_{-\sqrt{a^2-x_1{}^2-x_2{}^2}}^{\sqrt{a^2-x_1{}^2-x_2{}^2}} dx_3 \int_{-\sqrt{a^2-x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2}}^{\sqrt{a^2-x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2}} dx_4$$

ヲ得ル. 此四回ノ單一積分ヲ順次計算スレバ

$$\begin{aligned}\mathrm{V}&=\int_{-a}^{a} dx_1 \int_{-\sqrt{a^2-x_1{}^2}}^{\sqrt{a^2-x_1{}^2}} dx_2 \int_{-\sqrt{a^2-x_1{}^2-x_2{}^2}}^{\sqrt{a^2-x_1{}^2-x_2{}^2}} 2\sqrt{a^2-x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2}\,dx_3\\ &=\int_{-a}^{a} dx_1 \int_{-\sqrt{a^2-x_1{}^2}}^{\sqrt{a^2-x_1{}^2}} \pi(a^2-x_1{}^2-x_2{}^2)\,dx_2\\ &=\int_{-a}^{a} \frac{4}{3}\pi(\sqrt{a^2-x_1{}^2})^3\,dx_1=\frac{\pi^2}{2}a^4\end{aligned}$$

問題 33.

次ノ二重積分ノ値ヲ求メヨ (1—5).

1. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqq a^2} x^4\,dx\,dy$

2. $\displaystyle\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy$

3. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqq x} \sqrt{x}\,dx\,dy$

4. $\displaystyle\iint_{(\mathrm{A})} \tan^{-1}\frac{y}{x}\,dx\,dy$ 但シ A ハ $x^2+y^2\leqq a^2$, $0\leqq x$, $0\leqq y$ ナル領域トス.

5. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqq a^2} f'(x^2+y^2)\,dx\,dy$

6. 曲面 $2z=\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}$ $(p, q>0)$, $x^2+y^2=a^2$ 及ビ平面 $z=0$ 間ノ體積ヲ計算セヨ.

7. 曲面 $z=xy$, $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 及ビ平面 $z=0$ 間ノ體積ヲ計算セヨ.

8. 曲面 $x^2+y^2=4z$, $x^2+y^2=2x$ 及ビ平面 $z=0$ 間ノ體積ヲ計算セヨ.

xy 平面內ノ領域 A 內ノ點ノ橫座標ノ平均及ビ縱座標ノ平均ハソレゾレ

$$x=\frac{\displaystyle\iint_{(\mathrm{A})} x\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_{(\mathrm{A})} dx\,dy} \quad 及ビ \quad \bar{y}=\frac{\displaystyle\iint_{(\mathrm{A})} y\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_{(\mathrm{A})} dx\,dy}$$

ニヨツテ與ヘラル. 此 $\bar{x}$, $\bar{y}$ ヲ座標トスル點ハ平面圖形 A ノ重心ナリ. 次ノ圖形ノ重心ノ座標ヲ求ム (9—10).

9. 曲線 $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ ト兩軸トニヨリ圍マルル圖形.

10. 曲線 $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$ ト x 軸トノ間ニ生ズル圖形.

11. $\displaystyle\iint_{(\mathrm{A})} f(x, y)\,dx\,dy$ (但シ A ハ $y\geqq 0$, $y\leqq x$, $x\leqq a$ ナル領域) ヲ最初 y ニツキ, 次ニ x ニツイテ積分シ然ル後 x, y ニツイテノ積分ノ順序ヲ變換シテ次式ヲ證明セヨ.

$$\int_0^a dx\int_0^x f(x, y)\,dy=\int_0^a dy\int_y^a f(x, y)\,dx$$

12. $\displaystyle\int_0^a dx\int_0^x \sqrt{(a-x)(x-y)}\,f'''(y)\,dy$ ノ値ヲ求ム [前問ノ結果ヲ用ヒヨ].

次ノ等式ヲ證明セヨ (13—14).

13. $\displaystyle\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1} f(x, y)\,dx\,dy=ab\iint_{x^2+y^2\leqq 1} f(ax, by)\,dx\,dy$

[$\dfrac{x}{a}=\xi$, $\dfrac{y}{b}=\eta$ ト置ケバ x, y 平面上ノ領域 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ ト ξ, η 平面上ノ領域 $\xi^2+\eta^2\leqq 1$ トハ相對應シ且ツ $\Delta x\,\Delta y=ab\,\Delta\xi\,\Delta\eta$ デアル. 之ヲ利用セヨ].

14. $\displaystyle\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=abc\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqq 1} f(ax, by, cz)\,dx\,dy\,dz$

次ノ重複積分ノ値ヲ求ム (15—17).

15. $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqq a^2} x^2\,dx\,dy\,dz$

16. $\displaystyle\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$

17. $\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\leqq a^2} dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,dx_5$

立體 V 内ノ點ノ x 座標, y 座標及ビ z 座標ノ平均ハソレゾレ

$$\bar{x}=\frac{\iiint x\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz},\quad \bar{y}=\frac{\iiint y\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz}\quad 及ビ\quad \bar{z}=\frac{\iiint z\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz}$$

ニヨツテ與ヘラル. 此 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ヲ座標トスル點ハ立體 V ノ重心ナリ. 次ノ立體ノ重心ヲ求ム (18—19).

18. 拋物線 $y=kx^2$ 上ノ一點 P ヨリ頂點 A ニ於ケル切線ニ下セル垂線ノ足ヲ N トスルトキ平面圖形 ANP ガ x 軸ノマハリニ回轉シテ生ズル立體.

19. 四分圓ノ兩端 A, B ニ於ケル切線ノ交點ヲ T トスルトキ平面圖形 ATB ガ AT ノマハリニ回轉シテ生ズル立體.

附錄第一

無限級數

1. 定義

無限ニ續ク數ノ列 $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots$ ヲ加號「+」ニテ連結シタ式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots \qquad (1)$$

ヲ**無限級數**或ハ略シテ單ニ**級數**ト稱シ, $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots$ ヲ級數ノ**項**ト云フ.

上ノ級數ニ於テ初項ヨリ第 n 項マデノ和

$$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$$

ヲ S_n ニテ表ストキ

$$\lim_{n\to\infty} S_n \qquad (2)$$

ガ定值ヲ取ル場合ニハ級數 (1) ハ**收斂デアル**ト稱シ, 然ラザル場合ニハ**發散デアル**ト云フ. 而シテ級數 (1) ガ收斂デアル場合ニハ (2) 式ノ值ヲ**級數ノ和**ト稱スル.

級數ガ發散デアル場合ハ次ノ三ツニ區別スルコトガ出來ル.

(i) $\lim_{n\to\infty} S_n=+\infty$　　(ii) $\lim_{n\to\infty} S_n=-\infty$

(iii) $\lim_{n\to\infty} S_n=$ 不定 (振動)

第一ノ場合ニハ級數ハ**正無限大ニ發散**, 第二ノ場合ニハ**負無限大ニ發散**, 第三ノ場合ニハ**振動デアル**ト云フ.

以下 (1) ノ如キ無限級數ヲ表スニ

$$\mathrm{S} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots \quad \text{或ハ} \quad \mathrm{S} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

ヲ以テシ級數ガ收斂デアル場合ニハ S ハ級數ソレ自身ヲ表スト同時ニ其和ヲモ表スモノト定メル.

例.　$\mathrm{S} = 1 + x + x^2 + \cdots\cdots$

此級數ニ於テハ初項ヨリ第 n 項マデノ和 S_n ハ

$|x|<1$

$$\mathrm{S}_n = 1 + x + \cdots\cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}. \quad (x \neq 1)$$

トナリ而シテ $|x|<1$ ナラバ $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, $x>1$ ナラバ $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = +\infty$, $x<-1$ ナラバ $\lim\limits_{r\to\infty} x^{2r} = +\infty$, $\lim\limits_{r\to\infty} x^{2r+1} = -\infty$ デアルカラ

$$|x|<1 \quad \text{ナル場合ニハ} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n = \frac{1}{1-x}$$

$$x>1 \quad \text{〃} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n = +\infty$$

$$x<-1 \quad \text{〃} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n = \text{不定}$$

ヨツテ級數 S ハ第一ノ場合ニ收斂, 第二ノ場合ニ正無限大ニ發散, 第三ノ場合ニ振動デアル.

又 $x=1$ ナラバ $\mathrm{S}_n = 1+1+\cdots\cdots+1 = n$, 故ニ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{S}_n = +\infty$, 從ツテ S ハ正無限大ニ發散, 更ニ $x=-1$ ナラバ $\mathrm{S}_{2r} = 1-1+1-1+\cdots\cdots+1-1 = 0$, $\mathrm{S}_{2r+1} = 1-1+1-1+\cdots\cdots+1 = 1$, 故ニ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{S}_n$ ハ不定, 從ツテ S ハ振動デアル.

級數ノ收斂發散ノ定義ヨリ次ノ結論ヲ得ルコト容易デアル.

收斂 (發散) 級數ニ有限個ノ項ヲツケ加フルモ, 又ハ有限個ノ項ヲ引キ去ルモヤハリ收斂 (發散) 級數ヲ得ル.

苟收斂級數 $\mathrm{S} = u_1 + u_2 + \cdots\cdots$ ニ於テハ

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

デアル. 何トナレバ

$$\mathrm{S}_n = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n$$

ト置ケバ $\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} = u_n$ デアツテ收斂級數ニ於テハ

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n = \mathrm{S}, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_{n-1} = \mathrm{S}$$

ナル故　$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

トナルカラデアル. ヨツテ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ナル條件ノ成立セザル級數ハ發散デアル.

以上ノ逆ハ必ズシモ成立シナイ. 卽チ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ナレバトテ級數ハ必ズシモ收斂デハナイノデアル (第2節, 例1參照).

2. 正項級數

總テノ項ガ正ナル級數ヲ**正項無限級數**或ハ略シテ**正項級數**ト稱スル. 正項級數ノ性質ヲ下ニ掲グル.

(1) 正項級數ハ收斂デアルカ, 然ラザレバ正無限大ニ發散スル(振動級數ニハナリ得ナイ).

$$\mathrm{S} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$$

ヲ正項級數トシ $\mathrm{S}_n = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n$ ヲ作レバ $u_1, u_2, \cdots\cdots, > 0$ ナル故 S_n ハ n ノ增スニ從ツテ漸次增大スル. 故ニ S_n ハ限リナク大トナルカ, 然ラザレバ一定ノ値ニ限リナク近ヅク. 卽チ S ハ正無限大ニ發散スルカ然ラザレバ收斂デアル.

系. 總テノ n ニ對シテ S_n ガ一定正數ヨリ小ナル場合ニハ S

ハ收斂デアル.[1]

(2) 正項級數ノ項ヲイクツヅツカ括ツテ得ル新シイ級數ハモトノ級數ト同ジ樣ニ收斂若シクハ發散デアル. ソシテ收斂デアル場合ニハ其和ハモトノ級數ノ和ニ等シイ.

$$\mathrm{S} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$$

ヲ正項級數トシ S 中ノイクツカノ項ヲ括ツテ得ル級數, 例ヘバ

$$u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + \cdots\cdots + u_8) + u_9 + \cdots\cdots$$

ヲ T トスレバ S ト T トハ同時ニ收斂カ同時ニ發散デアル.

級數 S, T ノ最初ノ n 項ノ和ヲソレゾレ S_n, T_n ニテ表スナラバ

$$\mathrm{T}_1 = u_1 = \mathrm{S}_1$$

$$\mathrm{T}_2 = u_1 + (u_2 + u_3) = \mathrm{S}_3$$

$$\mathrm{T}_3 = u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + \cdots\cdots + u_8) = \mathrm{S}_8$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般ニ $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_m$, 茲ニ $n < m$ デアル.

上ノ式ニ於ケル m ハ n ト共ニ增シ $n \to \infty$ ノトキ $m \to \infty$ デアル. 偖テ S ガ收斂ナラバ $m \to \infty$ ノトキ $\mathrm{S}_m \to \mathrm{S}$. 故ニ此場合ニハ

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_n = \lim_{m\to\infty} \mathrm{S}_m = \mathrm{S}.^{(2)}$$

コレ級數 T ガ收斂デ其和ガ S ニ等シイコトヲ示スモノデアル.

次ニ S ガ發散ナラバ正項級數ナル故正無限大ニ發散スル. 卽チ $m \to \infty$ ノトキ $\mathrm{S}_m \to +\infty$. 故ニ此場合ニハ

---

(1) S ガ正項級數デナイト此事ハ必ズシモ成立セヌ.

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ ニ對シテ m ハ $1, 3, 8, \cdots\cdots$ ト飛ビ飛ビノ値ヲ取ツテ限リナク大トナルノデアル. m ガ飛ビ飛ビノ値ヲ取ツテ限リナク大トナル場合ニモ S_m ハ勿論 S ニ限リナク近ヅクノデアル.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_n = \lim_{m\to\infty} \mathrm{S}_m = +\infty$$

卽チ級數 T ハ亦發散デアル.

此定理ニヨリ S ノ收斂, 發散ハ T ノ收斂, 發散ニヨツテ定メラレルコトガ分ル.

注意. 此定理ハ一般ノ級數ニ對シテハ成立セヌ.[1] 例ヘバ

$$\mathrm{S} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots$$

ハ振動級數デアルガ

$$\mathrm{T} = (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots\cdots$$

ハ和ガ零ナル收斂級數デアル.

例 1. $\mathrm{S} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots\cdots$

今 $$\mathrm{T} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots\cdots$$

トスル. 此級數ニ於テハ第三項 $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right)$ ハ $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}$ 卽チ $\dfrac{1}{2}$ ヨリ大, 第四項 $\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8}\right)$ モ $\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}$ 卽チ $\dfrac{1}{2}$ ヨリ大, 以下同樣デアル. ヨツテ

$$\mathrm{T}_n > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2}}_{n\text{ 個}} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_n = +\infty$$

故ニ T 從ツテ S ハ發散デアル. ∴ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{2}$ = 發散

例 2. $\mathrm{S} = 1 + \dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{3^k} + \cdots\cdots \quad (k > 1)$ 　$T_n \geqq T_n$

$$\mathrm{T} = 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) + \left(\frac{1}{4^k} + \cdots\cdots + \frac{1}{7^k}\right) + \cdots\cdots$$

トスレバ級數 T ニ於テハ第二項 $\left(\dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{3^k}\right)$ ハ $\dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{2^k}$ 卽チ $\dfrac{1}{2^{k-1}}$ ヨリ小, 第三項 $\left(\dfrac{1}{4^k} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{7^k}\right)$ ハ $\dfrac{1}{4^k} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{4^k}$ 卽チ $\dfrac{1}{4^{k-1}}$ ヨリ小, 以下同樣デアル.

---

(1) 但シ一般ノ級數ニ對シテモ次ノ事ハ云ハレル. S ガ收斂ナラバ T モ收斂デアリ, 又 S ガ $+\infty$ $(-\infty)$ ニ發散スルナラバ T モ $+\infty$ $(-\infty)$ ニ發散スル. ソノ證明ハ上ト同樣デアル. 只一般ノ級數ニ對シテハ S ガ振動デアル場合ニ T ガドウナルカ分ラナイノデアル.

ヨツテ　　$T_n < 1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{4^{k-1}} + \cdots\cdots + \frac{1}{(2^{n-1})^{k-1}}$

此右邊ハ公比 $\frac{1}{2^{k-1}}$ ナル等比級數デアル. 而シテ $k>1$ ナル故此公比ハ1ヨリ小サイ. ヨツテ

$$T_n < \frac{1}{1-\frac{1}{2^{k-1}}}$$

故ニ (1) ノ系ニヨリ T ハ收斂デアル. 從ツテ S モ亦收斂デアル.

(3)　二ツノ正項級數

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$$

$$T = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots\cdots$$

ニ於テ $u_r \leqq v_r$ $(r = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$ デアルトスル. 然ルトキハ T ガ收斂ナラバ S モ收斂デアル.

二ツノ級數 S, T ノ最初ノ n 項ノ和 S_n, T_n ノ間ニハ上ノ假設ニヨリ $S_n \leqq T_n$ ナル關係ガアル. 今若シ T ガ收斂デアルトスレバ

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T$$

デアツテ且ツ T_n ハ n ト共ニ増ス故 $T_n < T$ デアル. 故ニ總テノ n ニ對シテ $S_n < T$. ヨツテ (1) ノ系ニヨリ S ハ收斂デアル. 尚此時 $S \leqq T$ ナルコトモ明カデアル.

系.　　$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$

$T = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots\cdots$

ナル二ツノ正項級數ニ於テ $u_r \geqq v_r (r = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ デアルトスル. 然ルトキハ T ガ發散ナラバ S モ發散デアル.

例.　　$S = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots\cdots \quad (k<1)$

級數　$T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots$

ハ發散ナルコトヲ知ル. 而シテ $k<1$ ナル故 S ノ各項ハ T ノ相對應スル項ヨリ大デアル. 故ニ S ハ發散デアル.

注意.　級數 $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots\cdots$ ハ $k>1$ ナルトキ收斂, $k \leqq 1$ ナルトキ發散トナル. 例ヘバ $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots$ ハ收斂デアリ, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots$ ハ發散デアル.

(4)　正項級數 $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$ ニ於テ

$$\rho_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

ナル比ヲ作ルトキ總テノ n ニ對シテ ρ_n ガ 1 ヨリ小ナル一定正數 p ヨリ尚小デアル場合ニハ S ハ收斂デアリ, 總テノ n ニ對シテ ρ_n ガ 1 ヨリ大又ハ 1 ニ等シイ場合ニハ S ハ發散デアル.

總テノ n ニ對シテ $\rho_n < p < 1$ デアルナラバ

$$\frac{u_2}{u_1} < p \qquad \therefore\ u_2 < pu_1$$

$$\frac{u_3}{u_2} < p \qquad \therefore\ u_3 < p^2u_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ級數 S ノ各項ハ級數

$$T = u_1 + pu_1 + p^2u_1 + \cdots\cdots$$

ノ各項ヨリ小デアル.[1] 級數 T ハ公比 p ナル無限等比級數デア

[1] 第一項ダケハ相等シイ.

ツテ $0<p<1$ デアルカラ收斂級數デアル．故ニ S モ亦收斂級數デアル．

次ニ總テノ n ニ對シテ $\rho_n \geqq 1$ デアルナラバ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1 \qquad \therefore \quad u_{n+1} \geqq u_n$$

u_n ハ n ト共ニ增ス．[1] 故ニ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ナルコトハアリ得ナイ．ヨツテ S ハ發散デアル．

系．　　$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$

ナル正項級數ニ於テ　$\rho_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$　ト置キ $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n$ ヲ作ルトキ若シ此極限値ガ 1 ヨリ小ナラバ S ハ收斂シ，此極限値ガ 1 ヨリ大ナラバ S ハ發散スル．

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \rho < 1$$

デアルナラバ ρ ト 1 トノ間ニアル一ツノ定數 p ヲ取ルトキ適當ニ大ナル n ニ對シテハ

$$\rho_n < p$$

デアル．卽チ適當ナル正數 r ヲ取ルナラバ $n \geqq r$ ナル總テノ n ニ對シテ上ノ不等式ハ成立セネバナラヌ．其樣ナ r ニ對シテハ

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} < p, \quad \frac{u_{r+2}}{u_{r+1}} < p, \quad \cdots\cdots$$

ヨツテ今

$$u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \cdots\cdots$$

ナル級數ヲ考フルナラバ此級數ハ上ノ定理ニヨツテ收斂デアル．

(1)　詳シクハ n ガ增ストキ u_n ハ減ズルコトハナイト云フベキデアル．

此收斂級數ニ有限個ノ項ヲ附加シテ得ルモノ級數

$$u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_r + u_{r+1} + \cdots\cdots$$

モ收斂デナケレバナラヌ．之ニ反シテ

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \rho > 1$$

デアルナラバ適當ニ大ナル n ニ對シテハ

$$\rho_n > 1$$

デアル．故ニ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ナルコトハアリ得ナイ．ヨツテ S ハ發散デアル．

注意． $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1$ ナル場合ニハ S ハ收斂スルコトモアレバ發散スルコトモアル．

例 1.　　$S = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots\cdots, \quad x > 0$

此級數ヲ**指數級數**ト稱スル．此級數ニ於テハ

$$u_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x_n}{n!} \Big/ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{x}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1.$$

ヨツテ級數 S ハ收斂デアル．

例 2.　　$S = 1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2} \cdots\cdots, \quad x > 0$

此級數ニ於テハ

$$u_n = \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^n}{n} \Big/ \frac{x^{n-1}}{n-1} = \frac{n-1}{n} x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$$

ヨツテ $x<1$ ナラバ S ハ收斂，$x>1$ ナラバ發散デアル．

$x=1$ ニ對シテハ此方法ニヨツテ收斂, 發散ヲ定メルコトハ出來ヌ. 併シナガラ $x=1$ ナルトキハ

$$\mathrm{S}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$$

トナリコレハ本節 (2) ノ例 1 ニヨツテ發散デアル.

3. 交項級數

一ツ置キニ正項, 負項ヲ有スル級數ヲ**交項級數**ト稱スル. 卽チ交項級數トハ

$$\mathrm{S}=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots,^{(1)}\quad (u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\cdots\cdots>0)$$

ノ如キモノデアル. 此級數ニ於テハ次ノ定理ガ成立スル.

$u_1>u_2>u_3>u_4>\cdots\cdots$ デアツテ且ツ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ ナル場合ニハ級數 $\mathrm{S}=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots$ ……………(1) ハ收斂デアル.

級數 (1) ノ初項ヨリ第 n 項マデノ和ヲ S_n ニテ表スナラバ

$$\mathrm{S}_{2r}=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots+u_{2r-1}-u_{2r}$$
$$=\mathrm{S}_{2r-2}+(u_{2r-1}-u_{2r})$$

然ルニ假定ニヨリ

$$u_{2r-1}>u_{2r}\qquad\therefore\ \mathrm{S}_{2r}>\mathrm{S}_{2r-2}$$

卽チ S_{2r} ハ r ガ增スニ從ツテ增ス. 併シナガラ

$$\mathrm{S}_{2r}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots\cdots-(u_{2r-2}-u_{2r-1})-u_{2r}<u_1$$

デアツテ S_{2r} ハ一定數 u_1 ヨリ小デアル. ヨツテ r ガ限リナク大トナルトキ S_{2r} ハ一定ノ數ニ限リナク近ヅク. 此數ヲ S' トスレバ

$$\lim_{r\to\infty}\mathrm{S}_{2r}=\mathrm{S}'$$

(1) コレハ $u_1+(-u_2)+u_3+(-u_4)+\cdots\cdots$ ノ略デアル.

然ルニ
$$\mathrm{S}_{2r+1}=\mathrm{S}_{2r}+u_{2r+1}$$

デ且ツ假定ニヨツテ $\lim\limits_{r\to\infty}u_{2r+1}=0$ デアルカラ

$$\lim_{r\to\infty}\mathrm{S}_{2r+1}=\lim_{r\to\infty}\mathrm{S}_{2r}=\mathrm{S}'$$

ヲ得ル. 卽チ S_{2r} モ S_{2r+1} モ r ガ限リナク大トナルトキ同一ノ數 S' ニ限リナク近ヅクノデアル. ヨツテ

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{S}_n=\mathrm{S}'$$

トナリ級數 (1) ハ收斂スル.

例.
$$\mathrm{S}=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}-\cdots\cdots\qquad k>0$$

此級數ハ上ノ條件ヲ滿足スル. 故ニ收斂デアル.

4. 一般級數

以下項ノ符號ニツイテ何等ノ制限ノナイ級數ヲ考察スル.

級數
$$\mathrm{S}=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$$

ノ絕對値ヲ以テ作ツタ級數

$$\mathrm{T}=|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots$$

ヲ S ノ**絕對値級數**ト稱スル. 絕對値級數 T ガ收斂デアルトキハモトノ級數 S ハ亦收斂トナルノデアル.

S, T ノ始メヨリ n 項ノ和ヲソレゾレ S_n, T_n ニテ表シ S_n 中ニ於ケル正項ノ和ヲ P_n, 負項ノ和ヲ $-\mathrm{Q}_n$ ニテ表スナラバ

$$\mathrm{S}_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=\mathrm{P}_n-\mathrm{Q}_n$$
$$\mathrm{T}_n=|u_1|+|u_2|+\cdots\cdots+|u_n|=\mathrm{P}_n+\mathrm{Q}_n$$

級數 T ガ收斂ナラバ

$$T_n < T \qquad \therefore \quad P_n < T, \quad Q_n < T$$

然ルニ P_n, Q_n ハ n ガ増スニ從ツテ増ス.[1]

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n = Q$$

ナル如キ二數 P, Q ガ存在スル. ヨツテ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (P_n - Q_n) = P - Q$$

卽チ S ハ收斂デアル.

絕對値級數 T ガ收斂ナラバモトノ級數 S ハ收斂デアルガ此逆ハ必ズシモ成立シナイ. 卽チ級數 S ガ收斂ナレバトテ絕對値級數 T ハ必ズシモ收斂デハナイノデアル (次ノ例 3 參照).

絕對値級數 T ガ收斂デアル場合ニハ S ハ**對絕收斂**デアルト云ヒ絕對値級數 T ハ收斂デナイガ S ハ收斂デアル場合ニハ S ハ**條件附收斂**デアルト云フ.

例 1. $$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots\cdots$$

此級數ノ絕對値級數 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots$ ハ收斂デアル. 故ニ S ハ絕對收斂デアル.

例 2. $$S = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots$$

此級數ノ絕對値級數モ收斂デアル [第 2 節, (4) ノ例 1]. 故ニ總テノ x ニ對シテ S ハ絕對收斂デアル.

例 3. $$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\cdots$$

此級數ハ前節ニヨリ收斂デアルガ絕對値級數 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots$ ハ發散デアル. 故ニ S ハ條件附收斂デアル.

(1) n ガ増ストキ P_n, Q_n ハ減ズルコトガナイト云フベキヲ略シタモノト承知セラレタイ.

絕對收斂級數ニ於テハ項ノ順序ヲ取リカヘテモヤハリ絕對收斂デアツテ其和ハモトノ級數ノ和ニ等シイガ條件附收斂級數ニ於テハ項ノ順序ヲ取リカヘルコトニヨツテ和ノ異ナル級數ニ變ジ得ルノデアル. 而カモ任意ノ和ヲ持ツ級數ニスルコトモ出來レバ又發散級數ニスルコトモ出來ルノデアル.[1]

5. 級數ノ加減乘法

二ツノ級數 $$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$T = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ガ共ニ收斂デアルトキハ級數

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \cdots\cdots$$

及ビ $$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + \cdots\cdots$$

ハヤハリ收斂デアツテ其和ハソレゾレ S+T 及ビ S−T デアルコトガ容易ニ證明セラレル.

又級數 (1) 及ビ (2) ガ共ニ絕對收斂デアルナラバ級數

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \cdots\cdots$$

モ收斂 (絕對收斂) デアツテ其和ハ ST ニ等シイコトガ證明セラレルノデアル.[2]

例. $$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots$$

此級數ハ $|x| < 1$ ナル x ニ對シテ絕對收斂デアツテ其和ハ $\frac{1}{1-x}$ ニ等シイ.

故ニ $$\frac{1}{(1-x)^2} = (1 + x + x^2 + \cdots\cdots)(1 + x + x^2 + \cdots\cdots) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots\cdots$$

(1) (2) 證明省略

同様ニ $\dfrac{1}{(1-x)^3} = (1 + 2x + 3x^2 + \cdots\cdots)(1 + x + x^2 + \cdots\cdots)$

$= 1 + 3x + 6x^2 + \cdots\cdots$

6. 冪級數

$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots$ ヲ常數トスルトキ

$$S = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル形ノ級數ヲ x ノ**冪級數**ト云フ.

級數 (1) ノ總テノ項ガ $x = x_0$ ニ對シテ**有界**デアルトキ,[1] 換言セバ $|a_0|,\ |a_1x_0|,\ |a_2x_0^2|,\ \cdots\cdots$ ガ悉ク一定正數 M ヨリ小デアルトキハ $|x_0|$ ヨリ小ナル絶對値ヲ有スル x ニ對シテ級數 (1) ハ收斂 (而カモ絶對收斂) デアルコトガ次ノ如クニシテ證明セラレル.

總テノ n ニ對シテ $|a_nx_0^n| < M$ デアルナラバ

$$|a_nx^n| = |a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

デアル故 S ノ絶對値級數

$$T = |a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ノ各項ハ

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナル等比級數ノ對應項ヨリ小デアル. 然ルニ (3) ハ $|x| < |x_0|$ ナル x ニ對シテ收斂デアル. ヨツテ (2) ガ收斂トナリ從ツテ (1) ハソノ x ニ對シテ絶對收斂トナル.

(1) 有界デアルトハ絶對値ガ一定正數ヲ超エナイト云フ事デアル.

級數 (1) ガ若シ $x = x_0$ ニテ收斂ナラバ

$$\lim_{n\to\infty} a_nx_0^n = 0$$

デアルカラ (1) ノ總テノ項ハ有界デアラネバナラヌ. 故ニ又次ノ定理ヲ得ル.

$x = x_0$ ニテ級數 (1) ガ收斂ナラバ $|x| < |x_0|$ ナル x ニ對シテ (1) ハ收斂 (而カモ絶對收斂) トナル.

從ツテ又コレノ對偶トシテ次ノ定理ヲ得ル.

級數 (1) ガ $x = x_0$ ニテ發散ナラバ $|x| > |x_0|$ ナル x ニ對シテ (1) ハ發散トナル.

例. $S = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots\cdots$.

此級數ヲ**對數級數**ト稱スル. 此級數ハ $x = 1$ ニ於テ收斂デアル. 故ニ $|x| < 1$ ナル總テノ x ニ對シテ收斂 (絶對收斂) デアル. 又上ノ級數ハ $x = -1$ ニ於テ發散デアル. 故ニ $|x| > 1$ ナル總テノ x ニ對シテ發散デアル.

以上ニヨリ x ノ絶對値ヲ 0 ヨリ $+\infty$ マデ漸次增シ行クトキハ或一ツノ値ヲ通過スルマデハ冪級數 (1) ハ收斂デアツテ, ソレヲ通過シタル後ハ發散トナル樣ナ一ツノ數ガ存在スベキデアル. 換言セバ級數 (1) ハ $|x| < \lambda$ ナルトキ收斂, $|x| > \lambda$ ナルトキ發散ナル如キ λ ナル數ガ存在スル.[1][2] 此數 λ ヲ級數 (1) ノ**收斂半徑**ト稱スル. 例ヘバ對數級數 $\dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots\cdots$ ノ收斂半徑ハ 1 デアル.

(1) 但シ $\lambda = 0$ 又ハ $\lambda = \infty$ ノコトモアル. $\lambda = 0$ トハ 0 以外ノ總テノ x ニ對シテ級數 (1) ガ發散ナルコト, 又 $\lambda = \infty$ トハ總テノ x ニ對シテ級數 (1) ガ收斂ナルコトデアル.

(2) $x = \lambda$ 又ハ $x = -\lambda$ ナルトキハ級數ハ收斂カ發散カ不明デアル.

偖テ級數 (1) ノ絶對値級數 (2) ガ收斂ナラバ (1) ハ當然收斂ナル故 (2) ノ收斂半徑ハ (1) ノ收斂半徑ヨリ大デハアリ得ナイ. 卽チ (1), (2) ノ收斂半徑ヲソレゾレ λ, λ' トスレバ $\lambda' \leqq \lambda$ デアル. 然ルニ (1) ノ收斂半徑 λ ヨリ小ナル $|x|$ ニ對シテハ (1) ハ絶對收斂, 從ツテ (2) ハ收斂デアル故 $\lambda' < \lambda$ ナルコトモアリ得ナイ. ヨツテ $\lambda' = \lambda$ デアル. 斯クテ (1) ト (2) トハ同ジ收斂半徑ヲ有スルヲ知ル.

(1) ト (2) トガ同一ノ收斂半徑ヲ有スルナラバ (1) ノ收斂半徑ヲ求ムル代リニ (2) ノ收斂半徑ヲ求メテモ宜シイ.

例. $$S = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots\cdots$$

此級數ヲ**二項級數**ト稱スル. m ガ正整數ナラバ S ハ有限級數トナル故 m ハ正整數ナラザルモノト假定スル.

此級數ノ絶對値級數

$$T = 1 + \left|\frac{m}{1!}x\right| + \left|\frac{m(m-1)}{2!}x^2\right| + \cdots\cdots$$

ノ第 n 項ヲ u_n トスレバ

$$u_{n+1} = \left|\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!}x^n\right|$$

$$= \left|\frac{m-n+1}{n}x\right| u_n$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{m-n+1}{n}x\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = |x|$$

ヨツテ $|x|<1$ ナラバ T ハ收斂, $|x|>1$ ナラバ T ハ發散デアル. 故ニ T, 從ツテ S ノ收斂半徑ハ 1 デアル.

冪級數 $$S = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots$$

ノ收斂半徑ヲ λ トスレバ $|x|<\lambda$ ナル x ニ對シテ S ハ x ノ函數トナル. 此函數ハ上ノ變域内ニ於テ x ノ連續函數トナリ而シテ x ニツイテ項項微分及ビ積分セラレルノデアル.[1] 卽チ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS}{dx} &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots\cdots \\ \int_0^x S\,dx &= a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots\cdots \end{aligned}\right\}, \quad |x|<\lambda$$

問題 I.

次ノ級數ノ收斂, 發散ヲ調ベヨ (1—12).

1. $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\cdots$
2. $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \cdots\cdots$
3. $1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \cdots\cdots$
4. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\cdots$
5. $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{2^2}{3^4} + \frac{3^3}{4^5} + \cdots\cdots$
6. $u_n = \frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-1)}{n!}$ ナル級數
7. $u_n = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+1}$ ナル級數 (A, B ハ常數).
8. $1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} - \cdots\cdots$
9. $1 - \frac{x}{\sqrt{1}} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} - \cdots\cdots$
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n \quad (|x| \neq 1).$
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{(n+1)!}x^n \quad (|x| \neq 1)$
12. $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})x^n$
13. $x>0$ ニ對シテ $f(x)$ ガ正ニシテ x ノ減少函數ナルトキ積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ ト級數 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots$ トハ同時ニ收斂ナルカ又ハ同時ニ發散ナルコトヲ證明セヨ.[2] [第八章, 問題 19, 第 16 問參照].

(1) 證明省略.

(2) 積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ ノ値ガ存在スルトキ積分ハ收斂デアルト云ヒ然ラザルトキ發散デアルト云フ.

14. 前問ノ結果ヲ用ヒテ級數 $1+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{3^k}+\cdots\cdots$ ハ $k>1$ ナルトキ收斂, $k\leqq 1$ ナルトキ發散ナルコトヲ證明セヨ.

15. $\phi(x,\ m)=1+\dfrac{m}{1!}x+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots\quad\left(|x|<1\right)$ ト置ケバ

$$\phi(x,\ m)=(1+x)\phi(x,\ m-1)$$

ナルコトヲ證明セヨ.

16. $f(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots\cdots$ トセバ $f(x)f(y)=f(x+y)$ ナルコトヲ證明セヨ.

17. 等式 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\quad\left(|x|<1\right)$ ノ兩邊ヲ順次 x ニツキ微分シテ次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2}&=1+2x+3x^2+\cdots\cdots\\ \frac{1}{(1-x)^3}&=1+\frac{2.3}{2}x+\frac{3.4}{2}x^2+\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\qquad\left(|x|<1\right)$$

18. 等式 $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots\cdots\quad\left(|x|<1\right)$ ノ兩邊ヲ 0 ヨリ x マデ積分スルコトニヨツテ次式ヲ證明セヨ.

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots\quad\left(|x|<1\right)$$

19. 等式 $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots\cdots\quad\left(|x|<1\right)$ ノ兩邊ヲ 0 ヨリ x マデ積分スルコトニヨツテ次式ヲ證明セヨ.

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots\quad\left(|x|<1\right)$$

20. $f(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots\cdots$ ト置ケバ $f''(x)=-f(x)$ ニシテ $f(0)=1$, $f'(0)=0$ ナリ. 此關係ヲ利用シテ $f(x)=\cos x$ ナルコトヲ證明セヨ.

21. $f(x)=1+\dfrac{m}{1!}x+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots\left(|x|<1\right)$ ナルトキ $(1+x)f'(x)=mf(x)$ ナルコトヲ示シ, 此關係ト $f(0)=1$ トヲ用ヒテ $f(x)=(1+x)^m$ ナルコトヲ證明セヨ.

附 錄 第 二

Taylor ノ定理及ビ函數ノ展開

7. 一變數ノ函數ノ Taylor 定理

吾人ハ第五章, 第 29 節ニ於テ $f^{(n)}(x)$ ガ $x=a$ ノ附近ニテ連續デアルナラバ絶對値ノ極メテ小ナル h ニ對シテ

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

ナル近似公式ノ成立スルコトヲ學ンダ[公式 (3)]. コノ近似公式ノ誤差如何. コレハ當然起ラネバナラヌ問題デアル. コノ問題ニ答フルモノハ Taylor ノ定理デアル.

先ヅ $f(b)=f(a)+\dfrac{(b-a)}{1!}f'(a)+\dfrac{(b-a)^2}{2!}f''(a)$

$$+\cdots\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\mathrm{R}_n\ \cdots\cdots(1)$$

ト置キ, R_n ヲ $(b-a)^p\ \ (p\geqq 1)$ ニテ除シタル商ヲ k トスルナラバ

$$\mathrm{R}_n=k(b-a)^p$$

デアツテ (1) 式ハ

$$f(b)-\left[f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+k(b-a)^p\right]=0\ \ldots(2)$$

ト書クコトガ出來ル.

今 $f(x), f'(x), \ldots\ldots, f^{(n)}(x)$ ヲ區域 (a, b) 內ニテ連續デアルトシ,[1] (2) 式ノ左邊ノ a ヲ x ニテ置キ換ヘタル式卽チ

$$f(b)-\left[f(x)+\frac{(b-x)}{1!}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+k(b-x)^p\right]$$

ヲ $\mathrm{F}(x)$ ニテ表スナラバ (2) 式ニヨリ

$$\mathrm{F}(a)=0$$

又明カニ $\qquad \mathrm{F}(b)=0$

而シテ

$$\mathrm{F}'(x)=-\left[f'(x)+\left\{-f'(x)+\frac{(b-x)}{1!}f''(x)\right\}\right.$$
$$+\left\{-\frac{(b-x)}{1!}f''(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x)\right\}+\cdots\cdots$$
$$+\left\{-\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\right\}$$
$$\left.-kp(b-x)^{p-1}\right]$$
$$=-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)+kp(b-x)^{p-1}, \quad (p\geqq 1)$$

トナルカラ $\mathrm{F}'(x)$ ハ區域 (a, b) 內ニテヤハリ連續トナル. 故ニ Rolle ノ定理ニヨリ $\mathrm{F}'(x)$ ハ a, b 間ノ一ツノ x ニ對シテ零トナラネバナラヌ. 卽チ

$$\mathrm{F}'(\xi)=0, \quad \xi=a+\theta(b-a) \qquad (0<\theta<1)$$

[1] コレハ $f^{(n)}(x)$ ノ連續性カラ出テ來ル結論デアルガ便宜上此樣ナ云ヒ方ヲスル.

此 ξ ヲ上式ニ入ルレバ

$$-\frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)+kp(b-\xi)^{p-1}=0$$

$$\therefore \quad k=\frac{(b-\xi)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(\xi)$$
$$=\frac{\left\{(b-a)(1-\theta)\right\}^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}\left\{a+\theta(b-a)\right\}$$

コレヲ R_n ノ式ニ代入シテ

$$\mathrm{R}_n=\frac{(b-a)^n}{p(n-1)!}(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}\left\{a+\theta(b-a)\right\}$$

ヲ得ル. p ハ $p\geqq 1$ ナル制限ノ下ニアル數デアル. 此制限ノ下ニ p ニ種種ノ値ヲ與ヘテ R_n ノ種種ノ式ヲ作ルコトガ出來ル. 併シナガラ特ニ重要ナノハ $p=n$ 及ビ $p=1$ ニ對スル R_n ノ式デアル. $p=n$ ト置ケバ

$$\mathrm{R}_n=\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}\left\{a+\theta(b-a)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$p=1$ ト置ケバ

$$\mathrm{R}_n=\frac{(b-a)^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}\left\{a+\theta(b-a)\right\} \ldots(4)$$

但シ此二式ニ於ケル θ ハ勿論相等シクハナイ. コレヲ區別スルタメニ何レカ一方ニハ他ノ文字ヲ使用スルガ通例デアル.

是等ノ R_n ノ式ヲ (1) 式ニ代入スレバ

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}\{a+\theta(b-a)\} \quad \cdots\cdots(5)$$

又ハ

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{(b-a)^n}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}f^{(n)}\{a+\theta_1(b-a)\} \quad \cdots\cdots(6)$$

(5), (6) ニ於ケル θ, θ_1 ハ何レモ 0 ト 1 トノ間ノ數デアル. 此關係ヲ **Taylor ノ定理**ト稱シ,[1] (1) 式ニ於ケル R_n ヲ Taylor 定理ニ於ケル n 番目ノ**剩餘**, (3) 式ヲ R_n ノ **Lagrange ノ形**, (4) 式ヲ R_n ノ **Cauchy ノ形**ト稱シテ居ル.

(5) 式ニ於テ $b-a=h$ 卽チ $b=a+h$ ト置ケバ

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\cdots\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h) \quad \cdots\cdots(5')$$

或ハ a ノ代リニ x ヲ用ヒテ

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f(x)+\cdots\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)$$
$$+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h) \quad \cdots\cdots(5'')$$

(1) 歷史的ニハ函數 $f(x)$ ヲ x ノ無限冪級數ニ展開スル公式 (次節參照) ヲ Taylor 定理ト稱スルガ至當デアル. 吾人ハ便宜上本定理ヲ Taylor 定理ト呼ブコトニスル.

此式ニ於テ x ト h トヲ交換スレバ

$$f(x+h)=f(h)+\frac{x}{1!}f'(h)+\cdots\cdots+\frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(h)$$
$$+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(h+\theta x) \quad \cdots\cdots(5''')$$

(6) 式ヨリモ同樣ノ公式ヲ得ベキコト勿論デアル. コレラハ皆 Taylor 定理ノ變形ニ過ギヌ.

尙 (5) 式ニ於テ $n=1$ トセバ

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\{a+\theta(b-a)\}$$

トナル. コレハ平均値定理デアル. 故ニ Taylor 定理ハ平均値定理ノ擴張ト看做スコトヲ得ルモノデアル.

偖テ此 Taylor 定理ヲ用ヒテ本節冒頭ニ掲ゲタル函數ノ近似公式

$$f(a+h)\doteqdot f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

ノ誤差ヲ求メテ見ヨウ.

區域 $(a,\ a+h)$ 內ニテ函數 $f(x)$, $f'(x)$, ……, $f^{(n)}(x)$ ハ勿論, 次ノ導函數 $f^{(n+1)}(x)$ モ連續デアルモノト假定スレバ Taylor 定理ニヨリ

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

デアルカラ

$$f(a+h)-\left[f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)\right]$$

$$= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

コレガ上ノ近似公式ノ誤差ヲ表ス式デアル．故ニ區域$(a, a+h)$內ニ於ケル函數 $|f^{(n+1)}(x)|$ ノ最大値ヲ G ニテ表スナラバ此誤差ノ絕對値ハ

$$\frac{|h^{n+1}|}{(n+1)!} \mathrm{G}$$

ヲ超ユルコトハナイ．

例 1. $f(x) = \log(1+x)$

此函數ニ於テハ

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\therefore \quad f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(\theta h) = -\frac{1}{(1+\theta h)^2}$$

是等ノ値ヲ公式

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1!} f'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(\theta h)$$

中ニ入ルレバ

$$\log(1+h) = h - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{1+\theta h}\right)^2 \qquad 0 < \theta < 1$$

$h > 0$ ナラバ $\dfrac{1}{1+\theta h}$ ハ 0 ト 1 トノ間ニアル．之ヲ α ト置ケバ

$$\log(1+h) = h - \frac{1}{2}(\alpha h)^2, \qquad (0 < \alpha < 1)$$

故ニ極メテ小ナル正ノ h ニ對シテハ

$$\log(1+h) \fallingdotseq h$$

デアツテ其誤差ハ $\dfrac{1}{2}h^2$ ヨリモ小デアル．

例 2. $\log_{10} n$ ト $\log_{10}(n+1)$ トヲ知ツテ n ト $n+1$ トノ間ノ一數 $n+h$ ノ常用對數ヲ求ムルニハ通例對數ノ增分ハ眞數ノ增分ニ比例スルト云フ原理ニヨツテ居ル．卽チ式ニテ書ケバ

$$\frac{\log_{10}(n+h) - \log_{10} n}{\log_{10}(n+1) - \log_{10} n} = \frac{h}{1}$$

デアル．此原理ヲ用ヒテ得タル $\log_{10}(n+h)$ ノ値トソノ眞値トノ差如何．

上ノ式ヨリ得ル $\log_{10}(n+h)$ ノ値ハ

$$\log_{10} n + h\left\{\log_{10}(n+1) - \log_{10} n\right\}$$

デアル．故ニソノ眞値トノ差ヲ δ ニテ表スナラバ

$$\delta = \log_{10}(n+h) - \log_{10} n - h\left\{\log_{10}(n+1) - \log_{10} n\right\}$$

$$= \log_{10}\frac{n+h}{n} - h \log_{10}\frac{n+1}{n}$$

而シテ

$$\log_{10} \mathrm{X} = \frac{\log_e \mathrm{X}}{\log_e 10}$$

デアルカラ

$$\delta = \frac{1}{\log 10}\left\{\log\left(1+\frac{h}{n}\right) - h\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

然ルニ $h > 0$ ナル故前例ニヨリ

$$\log\left(1+\frac{h}{n}\right) = \frac{h}{n} - \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{h}{n}\right)^2, \qquad 0 < \alpha < 1$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\alpha_1\frac{1}{n}\right)^2, \qquad 0 < \alpha_1 < 1$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{1}{\log 10}\left[\frac{h}{n} - \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{h}{n}\right)^2 - h\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\alpha_1\frac{1}{n}\right)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\log 10}\cdot\frac{1}{2n^2}(\alpha_1^2 h - \alpha^2 h^2)$$

而シテ $\alpha_1^2 h$ モ $\alpha^2 h^2$ モ共ニ 1 ヨリ小ナル正數デアルカラ

$$|\alpha_1^2 h - \alpha^2 h^2| < 1 \qquad \therefore \quad |\delta| < \frac{1}{\log 10}\cdot\frac{1}{2n^2}$$

常數 $\dfrac{1}{\log 10}$ ノ値ハ 0.43429...... デアル．之ヲ代入スレバ

$$|\delta| < \frac{0.218}{n^2}$$

五桁ノ對數表ニ於テ比例部分ノ理論ヲ適用スルハ 1000 以上ノ數ノ對數ヲ求ムル場合デアル．斯クノ如キ場合ニ於テハ $n \geqq 1000$ デアルカラ上記ノ誤差ハ 0.000000218 ヨリモ小デアル．

問 題 2.

次式ヲ證明セヨ $(1-3)$．

1. $\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \dfrac{h^2}{2}\sin(x+\theta h)$

2. $\cos(x+h)=\cos x-h\sin x-\dfrac{h^2}{2}\cos(x+\theta h)$

3. $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{x^2}{8(1+\theta x)^{\frac{3}{2}}}$

4. 1 分ノ間隔ニ於ケル正弦表ニ於テハ比例部分ノ誤差ハ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{180\times 60}\right)^2$ ヨリ小ナルコトヲ證明セヨ［問題 1 ノ公式ヲ用ヒヨ］.

5. $x>0$ ナルトキ $\log(1+x)\fallingdotseq x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ ナル近似公式ノ誤差ハ $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ ヨリ小ナルコトヲ證明セヨ.

6. $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ ナルトキ $\lim\limits_{h\to 0}\theta$ ヲ求ム. 但シ $f''(a)=f'''(a)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\ f^{(n)}(a)\neq 0$ トス.

8. 一變數ノ函數ノ展開

函數 $f(x)$ ガ a ヲ含ム或ル區域内ニテ連續ナル逐次ノ導函數ヲ有スル場合ニハ其區域内ノ $a+x$ ニ對シテ

$$f(a+x)-\left[f(a)+\frac{x}{1!}f'(a)+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\right]=\mathrm{R}_n$$

ト置クトキ R_n ハ

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{R}_n&=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta x),\qquad 0<\theta<1\\ \text{或ハ}\quad&=\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}f^{(n)}(a+\theta_1 x),\ 0<\theta_1<1\end{aligned}\right\}\cdots(1)$$

ト書キ得ルコト前節ニ於テ學ンダ所デアル.

故ニ函數 $f(x)$ ガ $x=0$ ノ附近ニ於テ連續ナル逐次ノ導函數ヲ有スルナラバ

$$f(x)-\left[f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\right]=\mathrm{R}_n$$

ト置クトキ

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{R}_n&=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)\\ \text{又ハ}\quad&=\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}f^{(n)}(\theta_1 x)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ得ル. 今若シ此 R_n ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{R}_n=0$$

ナル條件ガ滿足セラレルナラバ

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x)-\left\{f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\right\}\right]=0$$

從ツテ

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\right]=f(x)$$

ナル關係ガ成立スル. コレハ無限級數

$$f(0)+\frac{x}{1!}f(0)+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

ガ收斂デアツテ, 而カモ其和ハ $f(x)$ ニ等シイト云フコトヲ表シテ居ル. 即チ

$$\boldsymbol{f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\cdots\cdots}$$

コレ $f(x)$ ヲ x ノ無限冪級數ニ展開スル公式デアル. コノ展開式ヲ **Taylor ノ展開式**又ハ **Maclaurin ノ展開式**ト稱シテ居ル.

注意 1. $\lim\mathrm{R}_n=0$ デアルナラバ級數 (3) ハ收斂シ而シテ其和ハ $f(x)$ ニ等シイケレドモ單ニ級數 (3) ガ收斂スルダケデハ其和ハ必ズシモ $f(x)$ ニ等シクナイ. 實際 (3) ノ級數ハ收斂シ而カモ其和ガ $f(x)$ ニ等シクナイ例ガ存在スルノデアル.

注意 2. (1) 式ノ R_n ガ $n\to\infty$ ノトキ零ニ收斂スルナラバ

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1!}f'(a)+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\cdots\cdots$$

ナル展開式ノ成立スベキコト勿論デアル.

注意 3. $\lim_{n\to\infty}\mathrm{R}_n$ ガ零トナルカ否カヲ判定スル一般ノ方法ハムヅカシイ. 併シナガラ總テノ n ＝對シテ $f^{(n)}(x)$ ガ有界デアルト云フ場合, 換言セバ總テノ n ＝對シテ $f^{(n)}(x)$ ノ絶對値ガ一定正數ヨリ小デアル場合＝ハ $\lim_{n\to\infty}\mathrm{R}_n$ ハ零トナルコトガ證明セラレル.

何トナレバ總テノ n ＝對シテ $|f^{(n)}(x)|$ ガ定正數 A ヨリ小ナラバ

$$|\mathrm{R}_n|=\left|\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)\right|<\mathrm{A}\left|\frac{x^n}{n!}\right|$$

デアリ, 而シテ級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$ [1]

ハ總テノ x ＝對シテ收斂スル故收斂級數ノ性質＝ヨツテ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

トナルカラデアル.

故＝總テノ n ＝對シテ $f^{(n)}(x)$ ガ有界ナル場合＝ハ Taylor ノ展開式ハ他＝何等ノ條件ナシ＝成立スル. 其他ノ場合＝アツテハイチイチ R_n ノ極限値ヲ調ベルコトヲ要スルノデアル.

例 1. $f(x)=e^x$

此函數＝對シテハ

$$f^{(n)}(x)=e^x$$

故＝總テノ n ＝對シテ $f^{(n)}(x)$ ハ有界デアル. ヨツテ Taylor ノ展開式ハ x ノ如何＝拘ラズ成立スル. 即チ

$$\boldsymbol{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$ [2]

注意. 此展開式ノ係數ハ第五章, 第 29 節, 例 1 ＝於テ求メテアル. 其結果ヲ用ヒテ上ノ式ヲ書キ下シタノデアル. 以下ノ例＝於ケル係數モ第五章, 第 29 節ノ他ノ例ノ結果ヲ用ヒテ直チ＝書キ下スコトガ出來ル. 尙本節＝於ケル「＋……」ハ無限級數ノ和ヲ表スコト勿論デアル.

---

(1) コレハ指數級數デアル.

(2) 此記號ハ「x ノ如何＝拘ラズ」ト云フコトヲ表スモノト承知セラレタイ.

例 2. $f(x)=\sin x$

此函數＝對シテハ

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\qquad\therefore\quad|f^{(n)}(x)|\leqq 1$$

ヨツテ亦 Taylor ノ展開式ハ x ノ如何＝拘ラズ成立スル.

$$\boldsymbol{\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^r\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}+\cdots\cdots}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

同樣＝シテ

$$\boldsymbol{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+(-1)^r\frac{x^{2r}}{(2r)!}+\cdots\cdots}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

例 3. $f(x)=\log(1+x)$ 1=x x=h

此函數＝於テハ $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$

故＝ $f^{(n)}(x)$ ハ總テノ n ＝對シテハ有界デハナイ. ヨツテ R_n ヲ作ル.

$$\mathrm{R}_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)=(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\cdot\frac{1}{(1+\theta x)^n}$$

或ハ

$$=\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}f^{(n)}(\theta_1 x)=(-1)^{n-1}x^n\frac{(1-\theta_1)^{n-1}}{(1+\theta_1 x)^n}$$

$0\leqq x\leqq 1$ ナル場合＝於テハ

$$0<\frac{1}{(1+\theta x)^n}\leqq 1\qquad\text{且ツ}\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}=0$$

ナル故 R_n ノ第一ノ式ヨリ

$$\lim_{n\to 0}\mathrm{R}_n=0$$

又 $-1<x<0$ ナル場合＝ハ

$$0<\frac{(1-\theta_1)^{n-1}}{(1+\theta_1 x)^n}=\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_1|x|}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{1-\theta_1|x|}<\frac{1}{1-\theta_1|x|}<\frac{1}{1-|x|}$$

且ツ

$$\lim_{n\to\infty}x^n=0$$

デアルカラ R_n ノ第二ノ式カラ

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{R}_n=0$$

ヨツテ $-1<x\leqq 1$ ナル x ＝對シテハ Taylor ノ展開式

$$\boldsymbol{\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots}$$

ノ成立スルコトガ分ル.

然ル＝右邊ノ級數ノ收斂範圍ハ $-1<x\leqq 1$ デアル. 故＝コレ以外ノ x ＝對シテ上ノ展開式ノ成立セザルコトハ明カデアル.

例 4. $f(x)=(1+x)^m$

此函數ニ於テハ.

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

ヨツテ $f^{(n)}(x)$ ハ總テノ n ニ對シテハ有界デハナイ. R_n ヲ作レバ

$$\mathrm{R}_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)=\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{n!}x^n\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n-m}$$

或ハ

$$=\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}f^{(n)}(\theta_1 x)$$

$$=\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n(1-\theta_1)^{n-1}\left(\frac{1}{1+\theta_1 x}\right)^{n-m}$$

トナル.

サテ $0\leqq x<1$ ナル場合ニ於テハ

$$0<\frac{1}{1+\theta x}\leqq 1$$

又級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$$ [1]

ハ $|x|<1$ ナル x ニ對シテ收斂デアルカラソノ x ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{n!}x^n=0$$

故ニ R_n ノ第一式カラ

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{R}_n=0$$ [2]

又 $-1<x<0$ ナル場合ニ於テハ

$$(1-\theta_1)^{n-1}\left(\frac{1}{1+\theta_1 x}\right)^{n-m}=\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_1|x|}\right)^{n-1}\left(1-\theta_1|x|\right)^{m-1}<\left(1-\theta_1|x|\right)^{m-1}$$

デアツテ此不等式ノ右邊ハ $m>1$ ナラバ 1 ヨリ小, $m=1$ ナラバ 1, $m<1$ ナラバ $\dfrac{1}{\left(1-|x|\right)^{1-m}}$ ヨリ小, 何レニシテモ總テノ n ニ對シテ有界デアル. 且ツ級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n$$

ハ收斂デアル故

---

(1) コレニ 1 ヲ加ヘタモノハ二項級數デアル.

(2) 此場合ハ R_n ノ第二ノ式カラコレヲ誘導スルコトモ出來ルノデアル.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n=0$$

故ニ又 R_n ノ第二ノ式カラ

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{R}_n=0$$

ヨツテ $-1<x<1$ ナル x ニ對シテハ Taylor ノ展開式

$$\mathbf{(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2}$$

$$\mathbf{+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\cdots}$$

ノ成立スルコトガ分ル. 此展開式ヲ**二項定理**ト稱スル.

$|x|>1$ ナル x ニ對シテハ右邊ノ級數ハ發散スル. 故ニ上ノ展開式ノ成立セザルコトハ明カデアル. $x=1$ 及ビ $x=-1$ ニ對シテハ m ノ値ニヨツテ上式ノ成立スルコトト成立シナイコトトガアル. 結果ハ上式ノ右邊ガ收斂級數デアルナラバ成立スルコトニナルノデアル.

9. 函數展開ノ他ノ方法

Taylor 定理ノミニ依頼シテ函數ヲ無限級數ニ展開シヨウトスルト往往困難ニ遭遇スルノデアル. 其樣ナ場合ニハ他ノ適當ナル方法ヲ講ズルガ宜シイ. 以下ニ一二ノ例ヲ示ス.

例 1. $f(x)=\dfrac{\log(1-x)}{1-x}$

$$\left.\begin{aligned}\log(1-x)&=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots\right)\\ \frac{1}{1-x}&=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\quad |x|<1$$

デアルカラ級數ノ乘法公式ヲ適用シテ

$$f(x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots\right)(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots)$$

$$=-\left\{x+\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3+\cdots\cdots\right\}\quad |x|<1$$

例 2. $f(x)=(1+x)^m$

此函數ハ次ノ微分方程式ヲ滿足スル.

$$(1+x)f'(x) = mf(x) \qquad\qquad (1)$$

而シテ $$f(0) = 1 \qquad\qquad (2)$$

微分方程式 (1) ハ第一階デアル故一ツノ任意常數ヲ含ム一般解ヲ有スル. (2) ノ條件=テ此常數ヲ定メルトキソノ解ガ $(1+x)^m$ デアル. 故=

$$f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots \qquad\qquad (3)$$

ノ收斂半徑ガ零デナク, 而シテ此函數ガ (1) ヲ滿足スル樣= $a_1, a_2, \cdots\cdots$ ヲ定メ得タトスレバ (3) ノ級數ハ $(1+x)^m$ =等シカルベキデアル.

偖テ (3) ノ $f(x)$ =對シテハ

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots\cdots$$

デアルカラ是等ノ値ヲ (1) 式=代入シテ

$$a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + \cdots\cdots + \left\{(n-1)a_{n-1} + na_n\right\}x^{n-1} + \cdots\cdots$$
$$= m\left\{1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots\right\}$$

ヲ得ル. 此式ノ x ノ同羃ノ係數ヲ相等シト置クナラバ

$$a_1 = m, \quad a_1 + 2a_2 = ma_1, \ \cdots\cdots, \quad (n-1)a_{n-1} + na_n = ma_{n-1}, \ \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad a_1 = m, \quad a_2 = \frac{m(m-1)}{2!}, \ \cdots\cdots, \quad a_n = \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!}, \ \cdots\cdots$$

ヨツテ此樣= $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ ヲ選ブナラバ (3) 式ハ形式的= (1) ヲ滿足スルコトヲ知ル. 然ル= (3) 式ハ $|x|<1$ ナル x =對シテ收斂デアル. 故=ソノ樣ナ x =對=シテハ (3) 式ハ $(1+x)^m$ =等シイ. 卽チ

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots\cdots$$

問題 3.

1. $\sin(x+h)$ ヲ h ノ羃級數=展開シ, ソレヲ用ヒテ

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

ヲ證明セヨ.

2. $\cos(x+h)$ ヲ h ノ羃級數=展開シ, ソレヲ用ヒテ

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

ヲ證明セヨ.

3. e^{ix} ヲ x ノ羃級數=展開シ, ヨツテ $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ヲ證明セヨ. 但シ i ハ虛數單位トス.[1]

Taylor 定理ヲ用ヒテ次ノ展開ヲ證明セヨ (4—7).

4. $\sin^2 x = \dfrac{2}{2!}x^2 - \dfrac{2^3}{4!}x^4 + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\cdots$

5. $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha) = 1 + \dfrac{x}{1!}\cos\alpha + \dfrac{x^2}{2!}\cos 2\alpha + \cdots\cdots$

6. $e^x \sin(x+\alpha) = \sin\alpha + x\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$+ \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!}(\sqrt{2})^n \sin\left(\alpha + n\frac{\pi}{4}\right) + \cdots\cdots$$

7. $\tan^{-1}x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots\cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\cdots \quad (|x|<1)$

[第四章, 問題 8, 第 8 問 (81 頁) ノ結果ヲ用ヒヨ].

二項定理ヲ用ヒテ次ノ展開ヲ證明セヨ (8—11).

8. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \cdots\cdots + \dfrac{1.3.5\cdots\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + \cdots\cdots \quad (|x|<1)$

9. $\tan x = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin^3 x + \dfrac{1.3}{2.4}\sin^5 x + \cdots\cdots \quad \left(|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$

10. $\sin 2x = 2\left\{\sin x - \dfrac{\sin^3 x}{2} - \dfrac{\sin^5 x}{2.4} - \cdots\cdots\right\} \quad \left(|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$

適當ナル方法=ヨリ次ノ函數ヲ x ノ羃級數=展開セヨ (11—17).

11. $\sin^{-1}x$ **12.** $\log(x+\sqrt{1+x^2})$ **13.** $\dfrac{\tan^{-1}x}{1+x^2}$

14. $(\tan^{-1}x)^2$ **15.** $\left\{\log(1-x)\right\}^2$ **16.** $\dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

[此函數ハ微分方程式 $(1-x^2)y' - xy = 1$ ヲ滿足スルコトヲ利用セヨ].

17. $(\sin^{-1}x)^2$

---

(1) 吾人ハ x ガ實數ナルトキ e^{ix} ノ意味ヲ未ダ知ラヌ. 實ハ此式ガ e^{ix} ノ意義ヲ定メルノデアル. 故=此式ヲ證明セヨト云フコトハ本來ハ無意味ノ事デアル. 併シナガラ複素數ヲ項トスル無限級數ノ和ヲ定義シ然ル後 z ガ複素數ナルトキノ e^z ノ意味ヲ $e^z = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \cdots\cdots$ =ヨツテ定メルモノトセバ此式ハ證明ヲ要スルコト=ナル. 本問題ハ其意味=解釋セラレタイ.

10. 二ツ以上ノ變數ノ函數ノ Taylor 定理

$f(x, y)$ ヲ x, y ノ函數トシ[1] x ノ代リニ $x+ht$, y ノ代リニ $y+kt$ ト置イタ式ヲ假リニ $\phi(t)$ ト置ク. 卽チ

$$\phi(t)=f(x+ht,\ y+kt)$$

然ルトキハ第十章, 問題 27, 第5問 (245頁) ニヨツテ

$$\phi'(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x+ht,\ y+kt)$$

$$\phi''(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x+ht,\ y+kt)$$

....

是等ノ式ニ於テ $t=0$ ト置クナラバ

$$\phi(0)=f(x, y)$$

$$\phi'(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x, y)$$

$$\phi''(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y)$$

....

又　$$\phi^{(n)}(\theta t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+\theta ht,\ y+\theta kt)$$

然ルニ $\phi(t)$ ヲ t ノ函數ト看做シテ一變數ノ函數ノ Taylor 定理ヲ適用スルナラバ

$$\phi(t)=\phi(0)+\frac{t}{1!}\phi'(0)+\frac{t^2}{2!}\phi''(0)$$
$$+\cdots\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\phi^{(n-1)}(0)+\frac{t^n}{n!}\phi^{(n)}(\theta t),\quad 0<\theta<1$$

(1) 必要ノ所マデ連續ナル偏導函數ヲ有スルモノト假定スル.

コレニ上ノ式ヲ代入スレバ

$$f(x+ht,\ y+kt)=f(x, y)+\frac{t}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x, y)$$
$$+\frac{t^2}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y)$$
$$+\cdots\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(x, y)$$
$$+\frac{t^n}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+\theta ht,\ y+\theta kt)$$

コレハ恒等式デアル. 此恒等式ニ於テ $t=1$ ト置クナラバ

$$\boldsymbol{f(x+h,\ y+k)=f(x, y)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x, y)}$$
$$\boldsymbol{+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y)}$$
$$\boldsymbol{+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(x, y)}$$
$$\boldsymbol{+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+\theta h,\ y+\theta k)}\text{[1]}\cdots\cdots(1)$$

コレヲ**二變數ノ函數ノ Taylor 定理**ト稱スル.

同樣ニ $f(x, y, z)$ ヲ x, y, z ノ函數トスルナラバ

$$\boldsymbol{f(x+h,\ y+k,\ z+l)=f(x, y, z)}$$
$$\boldsymbol{+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x, y, z)+\cdots\cdots}$$
$$\boldsymbol{+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-1} f(x, y, z)}$$

(1) コレハ Lagrange ノ剩餘ノ形ニ應ズル式デアル. Cauchy ノ剩餘ノ形ニ應ズル式ヲ作ルコトモ容易デアル.

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x+\theta h,\ y+\theta k,\ z+\theta l)\ldots(2)$$

ヲ得ル. コレガ三變數ノ函數ノ Taylor 定理デアル.

(1) 式ヲヒロゲテ書ケバ

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\cdots\cdots$$

或ハ
$$=f(x,\ y)+\frac{1}{1!}\left\{hf_x(x,\ y)+kf_y(x,\ y)\right\}$$

$$+\frac{1}{2!}\left\{h^2f_{xx}(x,y)+2hkf_{xy}(x,y)+k^2f_{yy}(x,y)\right\}+\cdots\cdots$$

此式ニ於テ x ト h, y ト k トヲ交換スレバ

$$=f(h,\ k)+\frac{1}{1!}\left\{xf_x(h,\ k)+yf_y(h,\ k)\right\}$$

$$+\frac{1}{2!}\left\{x^2f_{xx}(h,\ k)+2xyf_{xy}(h,\ k)+y^2f_{yy}(h,\ k)\right\}+\cdots\cdots$$ [1]

11. 曲面ノ切平面及ビ法線

曲面ノ方程式ヲ

$$F(x,\ y,\ z)=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

トシ曲面上ノ一點 $P(x,\ y,\ z)$ ヲ通ル直線ノ方程式ヲ

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n}=r\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

或ハ
$$X=x+lr,\quad Y=y+mr,\quad Z=z+nr\ldots\ldots(2')$$

(1) $f_x(h,\ k)$ ハ $\left[f_x(x,\ y)\right]_{\substack{x=h\\y=k}}$ ヲ表スノデアル. 他ノ記號ニツイテモ同様デアル.

トスル. 但シ $l,\ m,\ n$ ハ直線ノ方向餘弦, r ハ直線上ノ一點 $(X,\ Y,\ Z)$ ト P 點トノ間ノ距離 (符號ヲ有スル距離) デアル.

方程式 $F(X,\ Y,\ Z)=0$ ト $(2')$ トカラ $X,\ Y,\ Z$ ヲ消去スレバ

$$F(x+lr,\ y+mr,\ z+nr)=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ナル r ニツイテノ方程式ヲ得ル. 此方程式ノ根ハ (1) ト (2) トノ交點ニ對スル r ノ値デアツテ P 點カラソレラノ交點ニ至ル距離ヲ表ス.

(3) ヲ Taylor 定理ニヨツテ展開スレバ

$$F(x,\ y,\ z)+r\left(l\frac{\partial}{\partial x}+m\frac{\partial}{\partial y}+n\frac{\partial}{\partial z}\right)F(x,\ y,\ z)$$

$$+\frac{1}{2!}r^2\left(l\frac{\partial}{\partial x}+m\frac{\partial}{\partial y}+n\frac{\partial}{\partial z}\right)^2F(x,\ y,\ z)+\cdots=0\ldots(4)$$

然ルニ P 點ハ曲面 (1) 上ノ點デアルカラ

$$F(x,\ y,\ z)=0$$

ヨツテ (4) ヨリ得ル r ノ一ツノ値ハ零デアル. 之ハ曲面ト直線トノ交點ノ一ツガ P 點ト合スルト云フコトデアツテ曲面ガ P 點ヲ通ルト云フコトニ外ナラヌ.

今 $l,\ m,\ n$ ヲ勝手ニ取ラナイデ

$$\left(l\frac{\partial}{\partial x}+m\frac{\partial}{\partial y}+n\frac{\partial}{\partial z}\right)F(x,\ y,\ z)=0\ \ldots\ldots\ldots(5)$$

ヲ滿足スル樣ニ取ツタモノトスレバ[1] (4) ヨリ得ル r ノ値ノ中二

(1) 恒等的ニ $F_x(x,\ y,\ z)=F_y(x,\ y,\ z)=F_z(x,\ y,\ z)=0$ ナル場合ハ除外シテ居ル. 以下ノ結論ハ此假定ノ下ニ正シイノデアル.

ツガ零トナリ曲面ト直線トハ P 點＝テ二回交ルコトニナル.[1][2] 此樣ナ特別ノ方向ヲ有スル直線ヲ P 點＝於ケル曲面ノ**切線**ト稱スル.

(5) ヲ滿足スル l, m, n ノ値ハ無數＝アル. 故＝ P 點＝於ケル曲面ノ切線ハ無數＝多ク存在スル. 是等ノ切線ノ作ル面ノ方程式ハ (2) ト (5) トカラ l, m, n ヲ消去スルコトニヨツテ得ラレル. 卽チ

$$(X-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial F}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial F}{\partial z}=0 \quad \ldots\ldots(6)$$

コレハ平面ノ方程式デアル. 故＝ P 點＝於ケル切線ノ作ル面ハ一ツノ平面デアル. 此平面ヲ P 點＝於ケル曲面ノ**切平面**ト稱スル. 之＝ヨリ P 點＝於ケル切平面ノ方向餘弦卽チ切平面＝垂直ナル直線ノ方向餘弦ハ $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ ＝比例スルコトヲ知ル.

點 P ヲ通ツテ切平面＝垂直＝引イタ直線ヲ曲面ノ**法線**ト云フ. 曲面 $F(x,y,z)=0$ 上ノ一點 $P(x,y,z)$ ＝於ケル法線ノ方程式ハ

$$\frac{X-x}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

デアル.

---

(1) 嚴密＝ハ二回以上交ルト云フベキデアル.

(2) 曲面ト直線トガ P 點＝テ二回交ルト云フコトハ次ノ樣ナ意味ヲ有スルノデアル. P 點ヲ通ツテ勝手ナ方向＝直線 s ヲ引キ次＝此直線ヲ方向餘弦ガ (5) ヲ滿足スル一ツノ直線＝限リナク近ヅケルナラバ s 直線ト曲面トノ交點ノ中 P 以外ノ一ツガ亦限リナク P 點＝近ヅク.

例. $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ 上ノ一點 $P(x, y, z)$ ＝於ケル切平面及ビ法線ノ方程式.

$$F(x, y, z)=Ax^2+By^2+Cz^2-1$$

ヨリ

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2Ax, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2By, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=2Cz$$

故＝切平面ノ方程式ハ

$$(X-x)Ax+(Y-y)By+(Z-z)Cz=0.$$

或ハ

$$AxX+ByY+CzZ=Ax^2+By^2+Cz^2=1$$

又法線ノ方程式ハ

$$\frac{X-x}{Ax}=\frac{Y-y}{By}=\frac{Z-z}{Cz}$$

問題 4.

1. $f(x, y)$ ガ x, y ＝ツキ n 次ノ同次整式ナルトキ $f(x+\xi, y+\eta)$ ヲ x, y ノ昇冪ノ順及ビ ξ, η ノ昇冪ノ順＝展開シ, ヨツテ次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\frac{1}{r!}\left(x\frac{\partial}{\partial \xi}+y\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^r f(\xi, \eta)=\frac{1}{(n-r)!}\left(\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-r} f(x, y)$$

2. $f(x, y, z)$ ガ x, y, z ＝ツキ n 次ノ同次整式ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{1}{r!}\left(x\frac{\partial}{\partial \xi}+y\frac{\partial}{\partial \eta}+z\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^r f(\xi, \eta, \zeta)$$

$$=\frac{1}{(n-r)!}\left(\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-r} f(x, y, z)$$

3. $f(x, y)$ ガ x, y ノ二次式ナルトキ $f(x, y)=0$ ハ二次曲線ヲ表ス. 此二次曲線ノ中心ノ座標ヲ ξ, η トセバ原點ヲ此點＝移ストキ二次曲線ノ方程式ハ $f(x+\xi, y+\eta)=0$ トナリ而シテ此方程式ハ x, y ノ代リ＝ $-x, -y$ ト置クモ變ゼズ. 此性質ヲ利用シテ二次曲線ノ中心ノ座標 ξ, η ハ $f_\xi(\xi, \eta)=0, f_\eta(\xi, \eta)=0$ ヲ滿足スベキコトヲ證明セヨ.

4. $f(x, y)=0$ ガ三次曲線ヲ表ストキ其中心ノ座標 ξ, η ハ

$$f(\xi, \eta)=f_{\xi\xi}(\xi, \eta)=f_{\xi\eta}(\xi, \eta)=f_{\eta\eta}(\xi, \eta)=0$$

ヲ滿足スベキコトヲ證明セヨ.[1]

---

(1) ヨツテ三次曲線ノ中心ハ曲線上＝アル.

次ノ曲面上ノ一點 (x, y, z) ニ於ケル切平面及ビ法線ノ方程式ヲ求ム (5—8).

5. $xyz = a^3$　　**6.** $ax^n + by^n + cz^n = 1$

7. $z = px^2 + qy^2$　　**8.** $z = f(x, y)$

9. 曲面 $z = f(x, y)$ ノ法線ト z 軸トノ間ノ角ヲ γ トスレバ

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

10. 曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上ノ點 $P(x, y, z)$ ニ於ケル法線ニ沿ウテノ函數 $\phi(x, y, z)$ ノ方向微分係數ヲ求ム (266 頁, 第15問參照).

附錄第三

雙曲線函數

12. 雙曲線函數

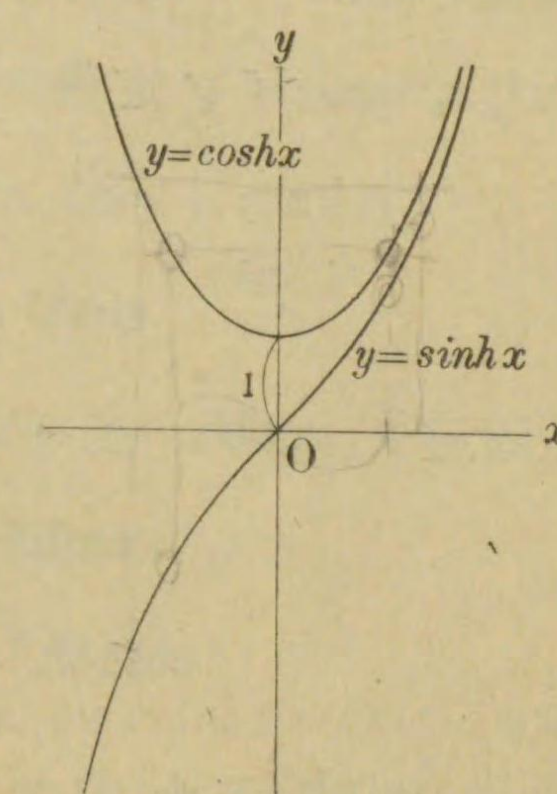
雙曲線函數ハ指數函數ノ結合ニヨツテ生ズル函數デアツテ特ニ新シイ函數デハナイ. 併シナガラ之ヲ用フルコトハ實用上非常ニ便利ナコトガアルノデソノ見地カラ重要ナルモノデアル. 故ニ以下簡單ニ之ヲ記述スル.

$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ヲ x ノ**雙曲正弦**ト云ヒ $\sinh x$ ニテ表シ, $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ヲ x ノ**雙曲餘弦**ト云ヒ $\cosh x$ ニテ表ス. 卽チ

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$$

$\sinh x$ ハ x ノ奇函數, $\cosh x$ ハ x ノ偶函數デアル. 此二函數ノぐらふハ右圖ノ如クニナル.



ぐらふヨリ見テ明カナル如ク $\cosh x \geqq 1$ デアル.

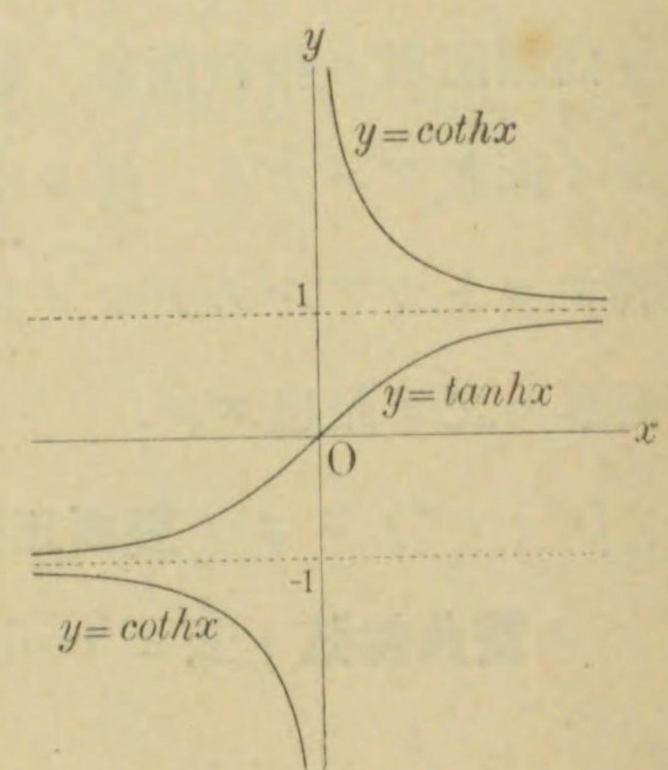
次ニ $\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ ヲ x ノ**雙曲正切**, $\dfrac{\cosh x}{\sinh x}$ ヲ**雙曲餘切**ト云ヒソレゾレ

tanh x 及ビ coth x ニテ表ス．即チ

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

此二函數ハ何レモ x ノ奇函數デアリ，ぐらふハ右圖ノ如クニナル．



ぐらふヨリ見テ明カナル如ク $|\tanh x| < 1$, $|\coth x| > 1$ デアッテ此二函數ノぐらふハ直線

$$y = \pm 1$$

ヲ漸近線トスル．

尚 $\dfrac{1}{\cosh x}$ ヲ**雙曲正割**, $\dfrac{1}{\sinh x}$ ヲ**雙曲餘割**ト云ヒソレゾレ sech x 及ビ cosech x ニテ表ス．

以上ヲ總稱シテ**雙曲線函數**ト稱スル．

sinh x, cosh x ノ定義ヨリ直チニ

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\therefore \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

此兩邊ヲ $\cosh^2 x$ 或ハ $\sinh^2 x$ ニテ除スレバ

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\operatorname{cosech}^2 x = \coth^2 x - 1 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

更ニ $\sinh(x+y) = \dfrac{1}{2}(e^x e^y - e^{-x}e^{-y})$

$$= \frac{1}{2}\Big[(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y) - (\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)\Big]$$

$$= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

同様ニシテ

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad \cdots\cdots(5)$$

(4), (5) ノ各ヨリ

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

(1) ト (7) トヨリ

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$$

等ヲ得ル．是等ノ諸公式ハ三角函數ノ諸公式ニ於テ sin ノ代リニ i sinh (或ハ $-i$ sinh), cos ノ代リニ cosh ト置クコトニヨッテ得ラレルコトヲ見ルデアラウ．實際ソウナッテ然ルベキコトハ次ノ關係式カラ説明スルコトガ出來ルノデアル．

$$\sinh ix = i\left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots\right\} = i \sin x$$

$$\cosh ix = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots = \cos x$$

或ハ $\quad \sin x = -i \sinh ix, \quad \cos x = \cosh ix$

例ヘバ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ナル關係ヲ雙曲線函數間ノ關係ニ直セバ

$$(-i \sinh ix)^2 + (\cosh ix)^2 = 1$$

トナリ ix ノ代リニ x ニテ置キカヘテ $-\sinh^2 x + \cosh^2 x = 1$ ヲ得ル．コレガ (1) ノ公式デアル．

雙曲線函數ノ導函數ハ次ノ如クニシテ求メラレル.

$$y=\sinh x \quad \text{トセバ} \quad y=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$$

$$\therefore \quad y'=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})=\cosh x$$

同様ニ $y=\cosh x$ トセバ $y'=\sinh x$

又 $y=\tanh x$ トセバ

$$y'=\frac{\cosh x(\sinh x)'-(\cosh x)'\sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=\operatorname{sech}^2 x$$

同様ニ $y=\coth x$ トセバ $y'=-\operatorname{cosech}^2 x$

以上ノ微分公式ヨリ又次ノ積分公式ヲ得ル.

$$\int \sinh kx\,dx=\frac{\cosh kx}{k}, \qquad \int \cosh kx\,dx=\frac{\sinh kx}{k}$$

$$\int \operatorname{sech}^2 kx\,dx=\frac{\tanh kx}{k}, \qquad \int \operatorname{cosech}^2 kx\,dx=-\frac{\coth kx}{k}$$

13. 逆雙曲線函數

雙曲正弦, 雙曲餘弦, 雙曲正切, 雙曲餘切等ノ逆函數ヲ**逆雙曲正弦, 逆雙曲餘弦, 逆雙曲正切, 逆雙曲餘切**等ト稱シソレゾレ $\sinh^{-1}x$, $\cosh^{-1}x$, $\tanh^{-1}x$, $\coth^{-1}x$ 等ノ記號ニテ表ス. 卽チ

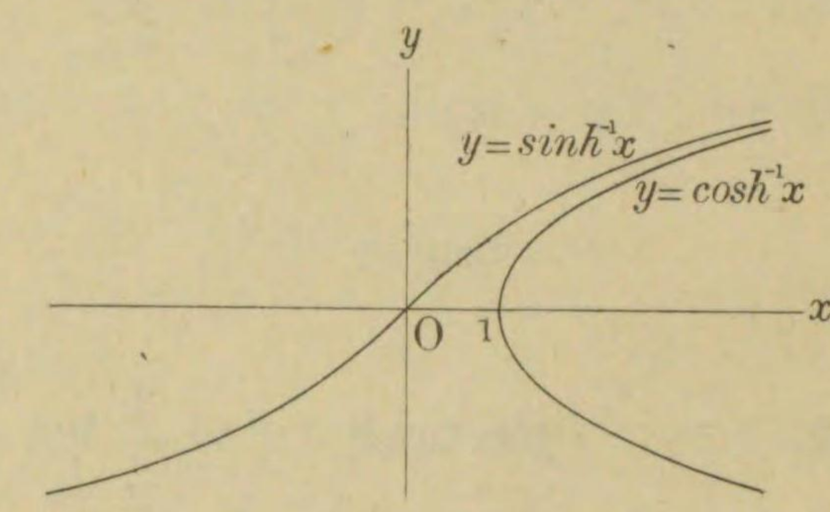
$y=\sinh^{-1}x$ ナリトハ $x=\sinh y$ ナルコト

$y=\cosh^{-1}x$ ナリトハ $x=\cosh y$ ナルコト

$y=\tanh^{-1}x$ ナリトハ $x=\tanh y$ ナルコト

$y=\coth^{-1}x$ ナリトハ $x=\coth y$ ナルコト

デアル. 是等ノ逆函數ノぐらふハ次圖ノ如クニナル.



偖テ $y=\sinh^{-1}x$

ナラバ

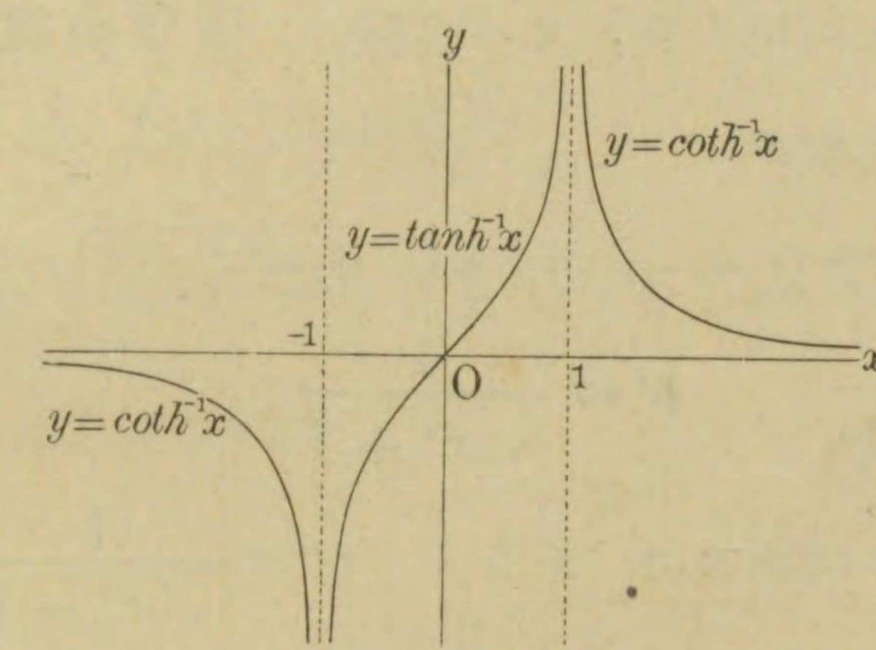
$$x=\sinh y=\frac{1}{2}(e^{y}-e^{-y})$$

$$\therefore \quad e^{2y}-2xe^{y}-1=0$$

e^{y} ニツキ解イテ

$$e^{y}=x\pm\sqrt{x^2+1}$$

y ガ實數ナラバ $e^{y}>0$ ナルベキ故正號ヲ取ッテ



$$e^{y}=x+\sqrt{x^2+1}$$

$$\therefore \quad y=\sinh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

同様ニシテ

$$\cosh^{-1}x=\log(x\pm\sqrt{x^2-1}), \qquad (x>1)$$

$\cosh^{-1}x$ ハぐらふヨリ見テ明カナル如ク $x>1$ ナル x ニ對シテ x ノ二値函數デアッテ上式ニ於ケル符號ハ正, 負何レヲモ取ルコトガ出來ル. 併シナガラ通例ハ正號ヲ取ッテ

$$\cosh^{-1}x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

ト規約スル．吾人モ此規約ニ從フコトニスル．

次ニ　$y = \tanh^{-1}x$　ナラバ

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \qquad \therefore \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

從ッテ　$$y = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad (|x|<1)$$

同様ニ　$$\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \quad (|x|>1)$$

以上ノ關係式ヲ利用シテ，又ハ直接ニ，逆雙曲線函數ノ導函數ヲ求メルコトガ出來ル．

$y = \sinh^{-1}x$　ナラバ　$y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$　ナル故

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

同様ニ　$y = \cosh^{-1}x$　ナラバ　$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

又　$y = \tanh^{-1}x$　ナラバ　$y' = \dfrac{1}{1-x^2}$

$y = \coth^{-1}x$　ナラバ　$y' = -\dfrac{1}{x^2-1}$

以上ノ微分公式ヨリ次ノ積分公式ヲ得ルコト亦容易デアル．

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \sinh^{-1}\frac{x}{a} \text{ (1)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \cosh^{-1}\frac{x}{a} \text{ (2)}$$

(1)　$a>0$ ナルコトヲ假定シテ居ルノデアル．

(2)　$a>0$, $x>0$ ナルコトヲ假定シテ居ルノデアル．

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a} \quad (|x|<|a|)$$

或ハ　$$= \frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a} \quad (|x|>|a|)$$

例．　$$\mathrm{I} = \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx \qquad (a>0)$$

$x = a\sinh\theta$ ト置ケバ $dx = a\cosh\theta\,d\theta$

而シテ　$\sqrt{x^2+a^2} = a\sqrt{\sinh^2\theta+1} = a\cosh\theta$

$$\therefore \quad \mathrm{I} = \int \coth^2\theta\,d\theta = \int (1+\operatorname{cosech}^2\theta)\,d\theta$$

$$= \theta - \coth\theta = \sinh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$$

或ハ　$$\mathrm{I} = -\int \sqrt{x^2+a^2}\,d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\left[\sqrt{x^2+a^2}\,\frac{1}{x} - \int \frac{1}{x}\,d\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \sinh^{-1}\frac{x}{a}$$

問題 5.

1. $\operatorname{sech}x$,　$\operatorname{cosech}x$ ノぐらふヲ畫ケ．

次ノ等式ヲ證明セヨ (2—5)．

2. $\sinh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1-\tanh^2 x}$,　$\cosh 2x = \dfrac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}$,　$\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$

3. $\tanh\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sinh x}{\cosh x+1} = \dfrac{\cosh x - 1}{\sinh x}$　　**4.** $\tanh^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \log x$ (1)

5. $\cosh^{-1}x + \cosh^{-1}y = \cosh^{-1}\left(xy \pm \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}\right)$

次ノ函數ヲ微分セヨ (6—12)．

6. $\cosh^5 x$　　**7.** $\cosh x\cos x + \sinh x\sin x$

(1)　$x>0$ ナルコトヲ假定シテ居ルノデアル．

8. $\dfrac{\cosh x - \cos x}{\sinh x + \sin x}$　　**9.** $\cosh^{-1}\dfrac{1}{x}$

10. $\sinh^{-1}\dfrac{1}{x}\quad (x > 0)$　　**11.** $\tanh^{-1}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$

12. $\tanh^{-1}\dfrac{x+2}{1+2x}$

次ノ函數ヲ積分セヨ (13—23).

13. $\cosh^2 x$　　**14.** $\sinh^2 x$

15. $\dfrac{\sinh x}{\cosh^3 x}$　　**16.** $\mathrm{sech}^4 x$

17. $\cosh^3 x$　　**18.** $\cosh x \cos x$

19. $\sinh x \sin x$　　**20.** $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}}$

$\left[\sqrt{1+x} = z\right.$ ト置ケ$\left.\right]$.　　**21.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$　$[x = \sinh\theta$　ト置ケ$]$

22. $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$　$[x = \sinh\theta$ ト置ケ$]$.

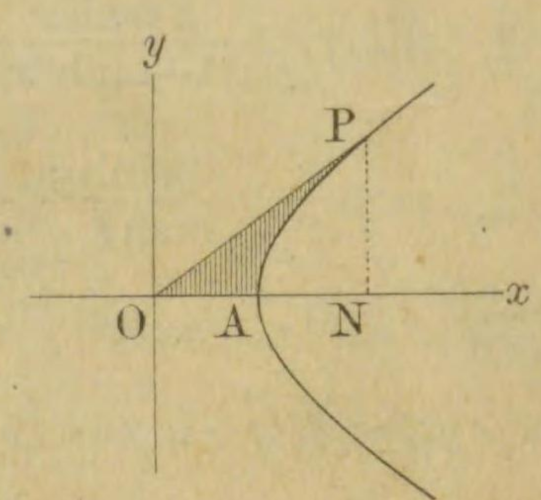
23. $\dfrac{1}{(1-3x^2)\sqrt{1-x^2}}$　$[x = \sin\theta$　ト置ケ$]$.

次ノ等式ヲ證明セヨ (24—25).

24. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\left\{x+\sqrt{x^2+1}\right\}^n} = \frac{n}{n^2-1}\quad (n>1)$　$[x = \sinh\theta$ ト置ケ$]$.

25. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh^n x} = \frac{n-2}{n-1}\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh^{n-2} x}$　$[\cosh x = \sec\theta$ ト置ケ$]$.

26. 雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ノ y 軸ヨリ右ニアル分枝ハ $x = a\cosh u,\ \ y = b\sinh u$ ニヨツテ表スコトヲ得. 此曲線上ノ一點 $\mathrm{P}(u)$ ヨリ x 軸ニ下セル垂線ノ足ヲ N, 雙曲線ノ頂點ヲ A, 原點ヲ O トスレバ面積 $\mathrm{ANP} = \dfrac{1}{2}ab(\sinh u\cosh u - u)$, 從ツテ面積 $\mathrm{OAP} = \dfrac{1}{2}ab\,u$ ナルコトヲ證明セヨ.



問題ノ答

第一章

問題 1.

1. $6,\ -19,\ \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{4}{x} + 2$　　**2.** $x^3 + (3h+1)x^2 + (3h^2+2h)x + h^3 + h^2 - 3,$
$8x^6 + 16x^4 + 10x^2 - 1$　　**3.** $\phi(x) = f(2a-x)$　　**4.** $\phi(x) = -f(2a-x)$

5. $f(x) + \phi(2a-x) = 2b$　　**6.** $x + f(-y) = 0$

7. $x = 1 + f(y+1)$　　**8.** $\dfrac{2mx - (1-m^2)y}{1+m^2} = f\left(\dfrac{(1-m^2)x + 2my}{1+m^2}\right)$

問題 2.

1. $\dfrac{6}{5}$　　**2.** $\dfrac{7}{10}$　　**3.** $-\dfrac{9}{8}$　　**4.** $\dfrac{3}{4}$　　**5.** 0

6. $n \gtreqless 2$ ニ從ツテ $0,\ 1,\ \infty$　　**7.** $\dfrac{1}{2}$　　**8.** -8　　**9.** 2

10. $\dfrac{1}{3}$　　**11.** $\dfrac{1}{3}(b^2+c^2)$　　**14.** $4x^3$　　**15.** $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

16. $\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$　　**17.** $-\dfrac{x}{(\sqrt{a^2+x^2})^3}$　　**18.** $+\infty,\ -\infty$　　**19.** $1,\ -1$

第二章

問題 3.

$(\sqrt{x})^3 -$

1. $2x + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　　**2.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{x} + \dfrac{1}{(\sqrt{x})^3}$　　**3.** $\dfrac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$

4. $-15nx^2(2-5x^3)^{n-1}$　　**5.** $(1+x)^{m-1}(2-x)^{n-1}\left\{(2m-n)-(m+n)x\right\}$

6. $\dfrac{(1+x)^{m-1}}{(2-x)^{n+1}}\left\{(2m+n)-(m-n)x\right\}$　　**7.** $-\dfrac{-2x+12x^3}{3(\sqrt[3]{1-x^2+3x^4})^2}$

8. $-5x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$　　**9.** $\dfrac{x(4a^2-7x^3)}{2\sqrt{a^2-x^2}}$　　**10.** $\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

11. $\dfrac{-(3x+1)}{2(x+1)^2x^{\frac{3}{2}}}$　　**12.** $\dfrac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}$　　**13.** $\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$

14. $\dfrac{2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x^2}}$

問題 4.

1. $(1-x^2)\sec^2 x - 2x\tan x$　**2.** $\dfrac{\cot x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{cosec}^2 x \sin^{-1} x$

3. $\tan x \sec x$　**4.** $-\cot x \operatorname{cosec} x$　**5.** $-\dfrac{(1+x)+\sqrt{1-x^2}\cos^{-1} x}{(1+x)^2\sqrt{1-x^2}}$

6. $\dfrac{-(1-x^2)\sin x + 2x\cos x}{(1-x^2)^2}$　**7.** $3\tan^2 x \sec^2 x$　**8.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

9. $\dfrac{2n\tan(n\sqrt[3]{x})\sec^2(n\sqrt[3]{x})}{3(\sqrt[3]{x})^2}$　**10.** $-\dfrac{3k}{2x^{\frac{3}{2}}}\sin^2\left(\dfrac{k}{\sqrt{x}}\right)\cos\left(\dfrac{k}{\sqrt{x}}\right)$

11. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}(1-\sin x)}$　**12.** $\dfrac{n}{\cos^2 x + n^2\sin^2 x}$　**13.** $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{2(1+x\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}$

14. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$　**15.** n ガ偶數ナラバ $-\dfrac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$, n ガ奇數ナラバ x ノ正負ニ從ツテ $\mp\dfrac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$　**16.** $\sin x \gtrless 0$ ニ從ツテ $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2+\cos x}$

17. $\dfrac{mn(\sin nx)^{m-1}\cos(m-n)x}{(\cos mx)^{n+1}}$　**18.** $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ (但シ $a>0$ トス)

19. $\dfrac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{x}{1-x^2}$　**20.** $\dfrac{a^2\cos x}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

問題 5.

1. $\dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}$　**2.** $\dfrac{nbx^{n-1}}{(a+bx^n)\log(a+bx^n)}$

3. $-\dfrac{k}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\sin\left\{k\log(\sqrt{x}+1)\right\}$　**4.** $2kxe^{kx^2}\sec^2(e^{kx^2})$

5. $\dfrac{2kx}{1+x^4}e^{k\tan^{-1}(x^2)}$　**6.** $\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}\right)$　**7.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

8. $e^{mx^3}(3mx^2\cos kx - k\sin kx)$　**9.** $e^{\sqrt{x}}(\log kx)^4\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\log kx + \dfrac{5}{x}\right\}$

10. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$　**11.** $x^{\sin^{-1} x}\left(\dfrac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\sin^{-1} x}{x}\right)$

12. $e^{x^x}x^x(\log x + 1)$　**13.** $a^{f(x)}(\tan x)^x\left\{f'(x)\log a + \log\tan x + \dfrac{x}{\sin x\cos x}\right\}$　**14.** $-\dfrac{b}{a}\cot t$　**15.** $\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$

16. $\dfrac{\log x}{(1+\log x)^2}$　**17.** $\dfrac{\sin^2(a+y)}{e^y\left\{\sin(a+y)-\cos(a+y)\right\}}$

第三章

問題 6.

1. $yY = 2p(X+x)$, $2p(Y-y)+y(X-x)=0$　**2.** $\dfrac{x^{n-1}}{a^n}X + \dfrac{y^{n-1}}{b^n}Y = 2$

12. $|\lambda|>8$ ナラバ四ツ, $|\lambda|=8$ ナラバ三ツ, $|\lambda|<8$ ナラバ二ツ

13. $x=-2$ ニテ極大, $x=3$ ニテ極小　**14.** $x=-\dfrac{9}{7}$ ニテ極大, $x=1$ ニテ極小　**15.** $x=-(\sqrt{41}+5)$ ニテ極大, $x=\sqrt{41}-5$ ニテ極小　**16.** $x=1$ ニテ極大　**17.** $x=e$ ニテ極大　**18.** 方程式 $x-\cos x=0$ ノ根ヲ x_1 トスレバ函數ハ $x=x_1$ ニテ極大, $x=-x_1$ ニテ極小　**19.** $x=-\dfrac{2}{3}$ ニテ極大, $x=0$ ニテ極小　**21.** PA = QA ナルトキ最小　**22.** P_1 點ヨリ OA ニ下セル垂線ノ足ヲ M トシ OM $=a$, $MP_1=b$ ト置ケバ (i) MA $=\sqrt{ab}$ ナルトキ最小 (ii) MA $=a$ ナルトキ最小　**23.** 中心角ガ 2 radian ナルトキ最大　**25.** P 點ノ横座標ヲ x トセバ $x=\dfrac{a}{2}$ ナルトキ最大　**28.** $bv \leqq u\sqrt{a^2+b^2}$ ナラバ B 點, $bv>u\sqrt{a^2+b^2}$ ナラバ A 點ト B 點トノ間ニ於テ A 點ヨリ $\dfrac{au}{\sqrt{v^2-u^2}}$ 粁ノ地點

問題 7.

1. 1.0 cm　**2.** $\dfrac{1}{2}ab\cos C\,\Delta C$　**3.** $\dfrac{ab\sin C\,\Delta C}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}}$

9. $\dfrac{1}{\sqrt{34}}$ cm/sec　**10.** 25 cm²/sec　**11.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ cm/sec　**12.** $F=\dfrac{d(mv)}{dt}$

13. 力ハ運動ノエネルギーノ移動距離ニ對スル變化率ニ等シイ.

15. γp　**17.** $\dfrac{1}{2}$　**18.** $a=0$ ナラバ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $a\neq 0$ ナラバ $\dfrac{1}{2}$

第四章

問題 8.

1. $\dfrac{(1+\sin x)^2}{\cos^3 x}$　**2.** $\dfrac{4a^3}{(a^2+x^2)^2}$　**3.** $\dfrac{2}{x}$

4. $\dfrac{24}{(1-x)^5}$　　5. $\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$　　6. $\dfrac{(n-1)!}{x}$

9. $(-1)^n\dfrac{n!}{2}\left\{\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right\}$

10. $\dfrac{1}{4}\left\{3\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)-3^n\sin\left(3x+n\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

11. $\left\{x^2-n(n-1)\right\}\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)+2nx\sin\left(x+\overline{n-1}.\dfrac{\pi}{2}\right)$

15. $f^{(2r+1)}(0)=0,\ f''(0)=2,\ f^{(2r)}(0)=2.2^2.4^2.6^2\ldots\ldots(2r-2)^2,\ (r\geqq 2)$

16. $f^{(2r)}(0)=0,\ f^{(2r+1)}(0)=m(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ldots\ldots\left\{(2r-1)^2-m^2\right\}$

第　五　章

問題 10.

1. $x=0$ ニテ極小, $x=6$ ニテ極大, $x=3$ ニテ變曲點　2. $x=3$ ニテ極小, $x=0$ 及ビ $x=2$ ニテ變曲點　3. $x=0$ ニテ極大, $x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ ニテ變曲點

4. $x=0$ ニテ極大, $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ニテ變曲點　5. $x=2m\pi+\dfrac{\pi}{4}$ ニテ極大, $x=(2m+1)\pi+\dfrac{\pi}{4}$ ニテ極小, $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ニテ變曲點

問題 11.

1. 2　2. $\dfrac{1}{3}$　3. $-\dfrac{1}{6}$　4. $-\dfrac{1}{2}$　5. -2

6. $\log\dfrac{x}{a}$　7. $\dfrac{\phi'''(y)}{6}$　8. 1　9. $+\infty$　10. m

11. $\dfrac{\pi^2}{6}$　12. 1　13. $e^{\frac{1}{3}}$　14. $a_1a_2\ldots\ldots a_n.$　24. $\dfrac{1}{2}$

問題 12.

1. 漸近線 $y=x$　2. 漸近線 $x=0,$　3. 漸近線 $y=\pm 1$

4. 漸近線 $x=\pm a,\ y=\pm a$　5. 漸近線 $y=x$　6. 漸近線 $x+y=0$

7. 漸近線ナシ　8. 漸近線ナシ　9. 漸近線 $x=2,\ y=\pm\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$

10. 漸近線 $x+y=0.$　11. 漸近線 $y=0$

12. 動圓ノ中心ヲ O′, 動圓上ノ定點ヲ P, P ノ畫ク曲線ガ定直線ト交ル點ノ一ツヲ O トシ O ヲ原點, 定直線ヲ x 軸ニ取ル. O′ ヨリ x 軸ニ下セル垂線ノ足ヲ H, O′H ガ O′P トナス角ヲ θ トスレバ軌跡ノ方程式ハ $x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$

13. 動圓ノ中心ヲ O′, 動圓ニ對シテ固定セル點ヲ Q, O′Q ト動圓トノ交點ヲ P トシ他ハ前問ト同ジ記號ヲ用フレバ軌跡ノ方程式ハ $x=a\theta-d\sin\theta,\ y=a-d\cos\theta.$

14. 固定圓ノ中心ヲ O, 動圓ノ中心ヲ O′, 動圓上ノ定點ヲ P, P ノ畫ク曲線ガ固定圓ト交ル點ノ一ツヲ A トシ O ヲ原點, OA ヲ x 軸ニ取ル. OO′ ガ x 軸トナス角ヲ θ トスレバ軌跡ノ方程式ハ $x=(a+b)\cos\theta-b\cos\dfrac{a+b}{b}\theta,\ \ y=(a+b)\sin\theta-b\sin\dfrac{a+b}{b}\theta$　15. 前問ト同ジ記號ヲ用フレバ軌跡ノ方程式ハ前問ノ方程式ニ於テ b ノ代リニ $-b$ ト置キタルモノ, 即チ $x=(a-b)\cos\theta+b\cos\dfrac{a-b}{b}\theta,\ y=(a-b)\sin\theta-b\sin\dfrac{a-b}{b}\theta$

第　六　章

問題 13.

1. $x-6\log x-\dfrac{9}{x}$　2. $\dfrac{x^2}{2}+2x^{\frac{3}{2}}+3x+2\sqrt{x}$　3. $-\left(\dfrac{1}{5}e^{-5x}+\dfrac{1}{3}\cos 3x\right)$

4. $\tan x-x$　5. $2\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{5}{4}\log\dfrac{2+x}{2-x}$　6. $\log(x+\sqrt{x^2-5})-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{3}}$　7. $x+\dfrac{\cos 2x}{2}$　8. $-\cot x-x+\dfrac{\sin 2x}{2}$

9. $v=\dfrac{k}{\omega}\sin(\omega t+\varepsilon)+c_1,\ s=-\dfrac{k}{\omega^2}\cos(\omega t+\varepsilon)+c_1t+c_2$　(c_1, c_2, 常數)

問題 14.

1. $\dfrac{2}{15}(x+a)^{\frac{3}{2}}(3x-2a)$　2. $a^2\log(x-a)+\dfrac{1}{2}(x-a)(x+3a)$

3 $\dfrac{2}{3b^2}\sqrt{a+bx}(bx-2a)$　4. $2\sqrt{x-1}\left\{x+\dfrac{3}{5}(x-1)^2+\dfrac{1}{7}(x-1)^3\right\}$

5. $\dfrac{1}{4}\log(x^4+\sqrt{x^8+a^8})$　6. $-\dfrac{1}{b}\log(a+b\cos x)$　7. $\dfrac{1}{2}(\log x)^2$

8. $\log(\log x)$　9. $-\dfrac{1}{4}\cos^4 x$　10. $\dfrac{1}{2}\tan^2 x+\log\cos x$

11. $\dfrac{1}{2}\log(1+x+x^2)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$　12. $-\dfrac{1}{2}\log(1+x-x^2)-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\log\dfrac{\sqrt{5}-1+2x}{\sqrt{5}+1-2x}$　13. $\sqrt{x(1+x)}+\dfrac{3}{2}\log\left\{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\sqrt{x(1+x)}\right\}$

14. $\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$　15. $\sin^{-1}\dfrac{2x-(\alpha+\beta)}{\beta-\alpha}$　$(\beta>\alpha)$

16. $\log\left\{\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}\right\}$ 17. $\dfrac{1}{3}\tan^3 x+\tan x$

18. $\log(1+\sin x)$ 19. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{7}}(2e^x+3)$

20. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\dfrac{\tan\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2}}$ 21. $\dfrac{x}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$

問題 15.

1. $\dfrac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log x-\dfrac{1}{m+1}\right)$ 2. $x\tan^{-1}x-\dfrac{1}{2}\log(1+x^2)$

3. $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$ 4. $\dfrac{1}{2}(1+x^2)\tan^{-1}x-\dfrac{x}{2}$

5. $x\sin x+\cos x,\ -x\cos x+\sin x$ 6. $x\tan x+\log\cos x$

7. $\dfrac{e^{kx}}{k}\left\{x^3-\dfrac{3x^2}{k}+\dfrac{6x}{k^2}-\dfrac{6}{k^3}\right\}$ 8. $\dfrac{e^{kx}}{k}\left\{x^4-\dfrac{4x^3}{k}+\dfrac{12x^2}{k^2}-\dfrac{24x}{k^3}+\dfrac{24}{k^4}\right\}$

9. $\dfrac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2},\ \dfrac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$

10. $\displaystyle\int\sin^n x\,dx=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$

$\displaystyle\int\sin^4 x\,dx=\frac{1}{8}(-2\sin^3 x\cos x-3\sin x\cos x+3x)$

11. $\displaystyle\int x^n\sin x\,dx=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos x\,dx,\quad \int x^n\cos x\,dx=x^n\sin x$

$\displaystyle -n\int x^{n-1}\sin x\,dx,\quad \int x^3\sin x\,dx=-(x^3-6x)\cos x+3(x^2-2)\sin x,$

$\displaystyle\int x^3\cos x\,dx=(x^3-6x)\sin x+3(x^2-2)\cos x$

12. $x\left\{(\log x)^4-4(\log x)^3+12(\log x)^2-24\log x+24\right\}$

13. $\dfrac{\tan^4 x}{4}-\dfrac{\tan^2 x}{2}-\log\cos x,\ \dfrac{\tan^5 x}{5}-\dfrac{\tan^3 x}{3}+\tan x-x$

14. $x(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-2x,\quad x(\sin^{-1}x)^3+3\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)^2$
$-6x\sin^{-1}x-6\sqrt{1-x^2}$ 15. $\dfrac{\sin^3 x}{\cos x}+\dfrac{3\sin x\cos x}{2}-\dfrac{3x}{2}$

17. $\dfrac{1}{2}\left\{5-(x^2+1)e^{-x^2}\right\}$ 18. $\dfrac{1}{10}\left\{2x^5\tan^{-1}x-\dfrac{(x^2-1)^2}{2}-\log(x^2+1)\right.$
$\left.+\log 2-\dfrac{\pi}{2}\right\}$

第七章

問題 16.

1. $x+\dfrac{3}{4}\log\dfrac{x-2}{x+2}$ 2. $\dfrac{2}{5}\log(x-3)+\dfrac{3}{5}\log(x+2)$ 3. $\log\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $\dfrac{1}{4}\log\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x$ 5. $\dfrac{1}{4}\log\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

6. $x+\log(x^2-x+1)+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$

7. $\dfrac{1}{a^2-b^2}\left\{\dfrac{1}{b}\tan^{-1}\dfrac{x}{b}-\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}\right\}$

8. $\dfrac{1}{3}\left\{\sqrt{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{x-1}{x+1}\right\}$

9. $\dfrac{1}{3}\log\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$

10. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}-\log\dfrac{1+x}{x}$ 11. $\log\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}$

12. $\dfrac{2x-1}{x(1-x)}+2\log\dfrac{x}{1-x}$ 13. $\dfrac{5-3x}{8(x^2+2x+5)}+\dfrac{5}{16}\tan^{-1}\dfrac{x+1}{2}$

14. $\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{x}{(1+x^2)^2}+\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2}+\tan^{-1}x\right)\right\}$

問題 17.

1. $\dfrac{1}{3}\left\{(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right\}$ 2. $2(\sqrt{x}-\tan^{-1}\sqrt{x})$

3. $\log(x+\sqrt{x-1})-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}$

4. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\log(\sqrt[6]{x}+1)$

5 $6\left\{\dfrac{x^{\frac{7}{6}}}{7}-\dfrac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{3}-x^{\frac{1}{6}}+\tan^{-1}(x^{\frac{1}{6}})\right\}$ 6. $\dfrac{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{15b^2}(3bx^2-2a)$

7. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\log\dfrac{\sqrt{4+2x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{4+2x}+\sqrt{2-x}}$ 8. $\dfrac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}$

9. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x}$ 10. $-\dfrac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2}-\dfrac{3}{8}x\sqrt{1-x^2}+\dfrac{3}{8}\sin^{-1}x$

11. $\dfrac{x(3a^2+2x^2)}{3a^4(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ **12.** $\dfrac{1}{4}x^3\sqrt{a^2+x^2}-\dfrac{3}{8}a^2x\sqrt{a^2+x^2}+\dfrac{3}{16}a^4\log\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}-x}$

14. $-\dfrac{1}{2(e^{2x}+1)}$

15. $\dfrac{1}{2}\left\{-\dfrac{1}{2(e^{2x}+1)^2}+\dfrac{1}{3(e^{2x}+1)^3}\right\}$ **16.** $-\dfrac{1}{2}\log(e^{-2x}+e^{-x}+1)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2e^{-x}+1}{\sqrt{3}}$

18. $\dfrac{1}{3}\left\{x+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\dfrac{\sqrt{2}+\tan x}{\sqrt{2}-\tan x}\right\}$

19. $\dfrac{b}{a^2+b^2}\log(a\cos x+b\sin x)+\dfrac{ax}{a^2+b^2}$

21. $a^2>1$ ナラバ $\dfrac{2}{\sqrt{a^4-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{a^2-1}{a^2+1}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$,

$a^2<1$ ナラバ $\dfrac{1}{\sqrt{1-a^4}}\log\dfrac{\sqrt{1-a^2}\tan\dfrac{x}{2}+\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1-a^2}\tan\dfrac{x}{2}-\sqrt{1+a^2}}$

22. $\dfrac{1}{10}\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}-\dfrac{3}{10}\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}\right)$

問題 18.

1. $3(x^2-y^2)+2(x^3-y^3)=c$ (c, 任意常數, 以下總テ同樣)

2. $ax^2y+cy+2=0$ **3.** $x^2y^a=ce^y$ **4.** $\sec x+\tan y=c$

5. $y-a\tan^{-1}\dfrac{x+y}{a}=c$ **6.** $\dfrac{xy^2}{x+2y}=c$ **7.** $y=x-1+ce^{-x}$

8. $2y=(x+1)^4+c(x+1)^2$ **9.** $xye^x=\dfrac{e^{2x}}{2}+c$ **10.** $y=x^2(ce^{\frac{1}{x}}+1)$

11. $y=2(\sin x-1)+ce^{-\sin x}$ **12.** $y^2e^{x^2}=c-2\cos x$

13. $ye^{\frac{x^2}{2}}\left\{c-\int e^{-\frac{x^2}{2}}f(x)dx\right\}=1$

14. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ (c_1, c_2, 任意常數, 以下總テ同樣)

15. $y=e^x(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$ **16.** $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\dfrac{\cos x-3\sin x}{10}$

17. $y=c_1\cos nx+c_2\sin nx+x\dfrac{-l\cos nx+k\sin nx}{2n}$

18. $y=e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\dfrac{\sqrt{23}}{2}x+c_2\sin\dfrac{\sqrt{23}}{2}x\right)+\dfrac{e^{nx}}{n^2-n+6}$

19. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}-xe^{2x}$ **20.** $y=(c_1+c_2x)e^x+\dfrac{e^{3x}}{8}(2x^2-4x+3)$

21. $y=(c_1+c_2x)e^x+\dfrac{1}{6}x^3e^x$ **24.** (i) $y^k=ce^x$ (ii) $y^2=2kx+c$

25. $xy=c$ **26.** $\log(y+\sqrt{y^2-k^2})=kx+c$ **27.** $x^2+y^2=cy$

28. 第 40 節 I 例 2 ノ記號ヲ用フレバ $v=k\dfrac{1-e^{-\frac{2g}{k}t}}{1+e^{-\frac{2g}{k}t}}$

29. $s=\dfrac{k^2}{2g}\log\left(1+\dfrac{v_0^2}{k^2}\right)$ **30.** $s=\dfrac{v_0}{k}\sin kt,\ v=v_0\cos kt$

31. $k_1^2-k_2>0$ ナラバ $s=c_1e^{-(k_1+\sqrt{k_1^2-k_2})t}+c_2e^{-(k_1-\sqrt{k_1^2-k_2})t}$, $k_1^2-k_2=0$ ナラバ $s=(c_1+c_2t)e^{-k_1t}$, $k_1^2-k_2<0$ ナラバ $s=e^{-k_1t}\left(c_1\cos\sqrt{k_2-k_1^2}\,t+c_2\sin\sqrt{k_2-k_1^2}\,t\right)$

第八章

問題 19.

1. 1 **2.** $\dfrac{\pi}{4a}$ **3.** $\dfrac{1}{2}\log 5$ **4.** $\sqrt{2}-1$ **5.** $\sqrt{3}-1$

6. $1-\dfrac{\pi}{4}$ **7.** $\dfrac{\pi}{4}$ **8.** $\dfrac{\pi}{2}-1$ **9.** $\dfrac{4}{3}$ **10.** $\log(\sqrt{2}+1)$

11. $\dfrac{1}{2}\left(\log 3+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$ **12.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{1-e^2}}$ **13.** $\dfrac{1}{3}\log 2$

18. $2xf(x^2)-2f(2x)$ **19.** $f(x)-f(a)$ **20.** $k\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)$

問題 20.

1. $\dfrac{5}{32}\pi$ **2.** $\dfrac{7}{512}\pi$ **3.** $\dfrac{2^{n+1}}{n+1}\log 2-\dfrac{2^{n+1}-1}{(n+1)^2}$

4. $\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\log 2$ **5.** $\dfrac{\pi}{2}-1$ **6.** $\dfrac{\pi^2}{4}-2$ **7.** $\dfrac{\pi}{2}a^2$

8. $\dfrac{\pi}{4}a^2$ **9.** $\dfrac{\pi}{8}(\beta-\alpha)^2$ **10.** $\dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$

問題 21.

1. π **2.** $\dfrac{\pi}{2}$ **3.** π **4.** $\dfrac{5}{32}\pi a^6$ **5.** $\dfrac{2.4\ldots\ldots 2n}{3.5\ldots\ldots(2n+1)}a^{2n+1}$

6. $+\infty$ **7.** $\sin 1$ **8.** $\dfrac{\pi}{2ab(a+b)}$ **9.** $\dfrac{\pi}{2(a+b)}$

10. $+\infty$ **11.** $\dfrac{\pi}{2}$ **12.** $\dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ **13.** $\dfrac{2}{3}$

第 九 章

問題 22.

1. $\log(1+\sqrt{2})$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. -1 4. $\frac{1}{e}$ 5. $\frac{a^2}{12}$ 6. $\frac{1}{6}$

7. πab 8. $2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a^2$ 9. $\frac{4a^2}{5}$ 10. $(\pi-2)\frac{a^2}{2}$ 11. $2a^2$

12. $3\pi a^2$ 13. $\frac{\pi a^2}{2}$ 14. $3\pi a^2$ 15. $\frac{16}{35}$ 16. $\frac{16}{3}a^2$ 17. $\frac{\pi a^2}{4n}$

18. $\left(2-\frac{\pi}{2}\right)a^2$ 19. $\left(2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a^2,\ \left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a^2$ 20. $\frac{\pi a^2}{8}$

問題 23.

1. $\frac{\pi^2}{2}$ 2. $\frac{\pi}{30}$ 3. $\frac{\pi}{6}(10-3\pi)a^3$

4. $\frac{\pi}{2}(15-16\log 2)$ 5. $2\pi^2br^2$ 6. $\frac{abc}{6}$ 7. $\frac{8\pi abc}{5}$

8. πabc^2 9. $\frac{16}{3}a^3$ 10. $2\pi^2a^3$

問題 24.

1. $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}}-e^{-\frac{x_1}{a}}\right)$ 2. $\frac{1}{2}\left\{x_1\sqrt{1+x_1^2}+\log(x_1+\sqrt{1+x_1^2})\right\}$

3. $a\log\frac{a}{y_1}$ 4. $8a$ 7. $\frac{3\pi}{2}a$ 16. $(\sqrt{a^2+k^2})t_1$

17. $\frac{1}{2}\left(3x_1+2x_1^2+\frac{4}{3}x_1^3\right)$

問題 25.

1. $\pi(\pi-2)a^2$ 2. $\frac{8\pi}{3}\sqrt{p}\left\{(x_1+p)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right\}$ 3. $\frac{64}{3}\pi a^2$

4. $2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}\log\frac{1+e}{1-e}$ (e, 離心率) 5. $4\pi^2br$

6. $\frac{2}{\pi}a,\ \frac{a}{\sqrt{2}}$ 7. $\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$ 8. $\frac{4a}{\pi}$ 9. 短軸ノ $\frac{1}{2}$

第 十 章

問題 26.

1. $2x\tan^{-1}\frac{y}{x}-y,\ x-2y\tan^{-1}\frac{x}{y}$ 2. $af'(ax+by),\ bf'(ax+by)$

問題 27.

1. $\frac{\partial u}{d\xi}=a_1\frac{\partial u}{\partial x}+a_2\frac{\partial u}{\partial y}+a_3\frac{\partial u}{\partial z}$, 等 6. $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$

問題 28.

2. $-\frac{x+a}{z+c},\ -\frac{y+b}{z+c},\ \frac{(y+b)^2-a^2-b^2-c^2}{(z+c)^3},\ \frac{(x+a)^2-a^2-b^2-c^2}{(z+c)^3},\ -\frac{(x+a)(y+b)}{(z+c)^3}$ 3. $\frac{lz-nx}{ny-mz},\ \frac{mx-ly}{ny-mz}$ 4. $\frac{l(z^2-axy)-n(x^2-ayz)}{n(y^2-azx)-m(z^2-axy)},\ \frac{m(x^2-ayz)-l(y^2-axz)}{n(y^2-azx)-m(z^2-axy)}$. 5. $-\frac{(x-1)(2y-t)+(y-2t)(x-2y)}{(t+y)(2y-t)+x-2y}$

6. $\dfrac{\phi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}}{\phi'(x)-\frac{\partial f}{\partial x}}$ 7. $-\frac{f_x\phi_y-\phi_x(f_y-1)}{f_z\phi_y-(\phi_z-1)(f_y-1)}$

問題 29.

3. $\frac{k^2}{a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2}$ 4. 直六面體ガ立方體トナルトキ

5. 前問ノ結果ト同ジ 8. 三角形ノ面積ヲ Δ, 三邊ヲ a, b, c トスレバ求ムル最小ハ $\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2}$

問題 30.

6. $\frac{F_z\phi_x-F_x\phi_z}{F_y\phi_z-F_z\phi_y},\ \frac{F_x\phi_y-F_y\phi_x}{F_y\phi_z-F_z\phi_y}$ 7. 問題 28 ノ第 6 問ト同ジ

8. 問題 28 ノ第 7 問ト同ジ

第 十 一 章

問題 31.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 5. $\frac{x^2}{2}+y^2=r^2$

7. $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2-2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+1=0$ 9. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$

問題 32.

1. $\dfrac{5^{\frac{3}{2}}}{6}$　　2. $\dfrac{2(x+p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}$　　3. $3(axy)^{\frac{1}{3}}$　　4. $\dfrac{1}{ab}(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)^{\frac{3}{2}}$

5. $\dfrac{\left\{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dy}{dt}}$　　10. $\dfrac{an}{2}$

第十二章

問題 33.

1. $\dfrac{\pi}{8}a^6$　　2. $\dfrac{1}{4}\pi ab(a^2+b^2)$　　3. $\dfrac{8}{15}$　　4. $\dfrac{1}{16}\pi^2a^2$

5. $\pi\left\{f(a^2) - f(0)\right\}$　　6. $\dfrac{\pi a^4(p+q)}{8pq}$　　7. 2π　　8. $\dfrac{3\pi}{8}$

9. $\dfrac{a}{5}$, $\dfrac{b}{5}$　　10. 0, $\dfrac{a}{4}$　　12. $\dfrac{\pi}{8}\left\{2f(a) - a^2f''(0) - 2af'(0) - 2f(0)\right\}$

15. $\dfrac{4}{15}\pi a^5$　　16. $\dfrac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2)$　　17. $\dfrac{8}{15}\pi^2a^5$

18. AN 上 A 點ヨリ $\dfrac{5}{6}$AN ナル距離ニアル點

19. AT 上 A′ヨリ $\dfrac{\mathrm{AT}}{2(10-3\pi)}$ ナル距離ニアル點

附錄第一

問題 1.

1. 收斂　　2. 發散　　3. 收斂　　4. 收斂　　5. 收斂

6. 發散　　7. $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ ナラバ發散, $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ ナラバ收斂

8. $-1 \leqq x \leqq 1$ ナルトキ收斂, $|x| > 1$ ナルトキ發散

9. $-1 < x \leqq 1$ ナルトキ收斂, $x = -1$ 又ハ $|x| > 1$ ナルトキ發散

10. $|x| < 1$ ナルトキ收斂, $|x| > 1$ ナルトキ發散　　11. 前問ト同ジ

12. $-1 \leqq x < 1$ ナラバ收斂, $x = 1$ 又ハ $|x| > 1$ ナラバ發散

附錄第二

問題 2.

6. $\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

問題 3.

11. $x + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{x^7}{7} + \cdots\cdots \quad (|x|<1)$

12. $x - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1.2}{2.4}\cdot\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{x^7}{7} + \cdots\cdots \quad (|x|<1)$

13. $x - \left(1 + \dfrac{1}{3}\right)x^3 + \left(\mathrm{I} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}\right)x^5 - \cdots\cdots \quad (|x|<1)$

14. $2\left\{\dfrac{x^2}{2} - \left(1 + \dfrac{1}{3}\right)\dfrac{x^4}{4} + \left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}\right)\dfrac{x^6}{6} - \cdots\cdots\right\} \quad (|x|<1)$

15. $2\left\{\dfrac{x^2}{2} + \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{x^3}{3} + \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right)\dfrac{x^4}{4} + \cdots\cdots\right\} \quad (|x|<1)$

16. $\dfrac{x}{1} + \dfrac{2}{3}x^3 + \cdots\cdots + \dfrac{2.4\ldots\ldots(2n)}{3.5\ldots\ldots(2n+1)}\cdot x^{2n+1} + \cdots\cdots\Big\} \quad (|x|<1)$

17. $2\left\{\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x^4}{4} + \cdots\cdots + \dfrac{2.4\ldots\ldots(2n)}{3.5\ldots\ldots(2n+1)}\cdot\dfrac{x^{2n+2}}{2n+2} + \cdots\cdots\right\} \quad (|x|<1)$

問題 4.

5. $yz\mathrm{X} + zx\mathrm{Y} + xy\mathrm{Z} = 3a^3,\quad \dfrac{\mathrm{X}-x}{yz} = \dfrac{\mathrm{Y}-y}{zx} = \dfrac{\mathrm{Z}-z}{xy}$

6. $ax^{n-1}\mathrm{X} + by^{n-1}\mathrm{Y} + cz^{n-1}\mathrm{Z} = 1,\quad \dfrac{\mathrm{X}-x}{ax^{n-1}} = \dfrac{\mathrm{Y}-y}{by^{n-1}} = \dfrac{\mathrm{Z}-z}{cz^{n-1}}$

7. $\mathrm{Z} - z = 2\left\{px(\mathrm{X}-x) + qy(\mathrm{Y}-y)\right\},\quad \mathrm{Z} - z = -\dfrac{\mathrm{X}-x}{2px} = -\dfrac{\mathrm{Y}-y}{2qy}$

8. $\mathrm{Z} - z = (\mathrm{X}-x)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (\mathrm{Y}-y)\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad \mathrm{Z} - z = -\dfrac{\mathrm{X}-x}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = -\dfrac{\mathrm{Y}-y}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$

10. $\left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\dfrac{\partial \phi}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right)\Big/\sqrt{\left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\right)^2}$

附錄第三

問題 5.

6. $5\cosh^4 x \sinh x$　　7. $2\sinh x \cos x$　　8. $\dfrac{2\sinh x \sin x}{(\sinh x + \sin x)^2}$

9. $-\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$　　10. $-\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$　　11. $\dfrac{\sec x}{2}$

12. $\dfrac{1}{1-x^2}$　　13. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sinh 2x}{2} + x\right)$　　14. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sinh 2x}{2} - x\right)$

15. $\frac{1}{2}\tanh^2 x$ **16.** $\tanh x - \frac{\tanh^3 x}{3}$ **17.** $\sinh x + \frac{1}{3}\sinh^3 x$

18. $\frac{1}{2}(\sinh x \cos x + \cosh x \sin x)$ **19.** $\frac{1}{2}(\cosh x \sin x - \sinh x \cos x)$

20. $\sqrt{2}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ **21.** $\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} - \sinh^{-1} x)$

22. $\sinh^{-1} x - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **23.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}\left(\sqrt{2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$\frac{1}{2}(x$

'双' 物営. 英 放

和英獨對照術語表

第一章

微分學	Differential calculus	Differentialrechnung
積分學	Integral calculus	Integralrechnung
常數	Constant	Unveränderliche
變數	Variable	Veränderliche
函數	Function	Funktion
變域	Domain of variability	Variabilitätsbereich
定義域	Domain of definition	Definitionsbereich
自變數	Independent variable	Unabhängige Veränderliche
從屬變數	Dependent variable	Abhängige Veränderliche
一價函數	One valued function	Eindeutige Funktion
多價函數	Many valued function	Mehrdeutige Funktion
逆函數	Inverse function	Umgekehrte Funktion
ぐらふ	Graph	Graph
偶函數	Even function	Gerade Funktion
奇函數	Odd function	Ungerade Funktion
極限値	Limiting value	Grenzwert
收斂スル	to converge	konvergieren
無限大	Infinite	Unendlich gross
確定	Determinate	Bestimmt
不定	Indeterminate	Unbestimmt
連續	Continuous	Stetig
增分	Increment	Zunahme
區域	Interval	Intervall
不連續	Discontinuous	Unstetig
微分係數	Differential coefficient	Differentialkoeffizient
導函數	Derivative, Derived function	Ableitung

右方微分係數	Progressive D. C.	Rechte D. K.
左方微分係數	Regressive D. C.	Linke D. K.

第 二 章

微分スル	to differentiate	differentieren
合成函數	Composite function	Zusammengesetzte Funktion
三角函數	Trigonometrical function	Trigonometrische Funktion
逆三角函數	Inverse Trigonometrical function	Umgekehrte trigonometrische Funktion
指數函數	Exponential function	Exponentialfunktion
對數函數	Logarithmic function	Logarithmische Funktion
自然對數	Natural logarithm	Natürlicher Logarithmus
對數微分法	Logarithmic differentiation	Logarithmische Differentiation
媒介變數	Parameter	Parameter

第 三 章

切線	Tangent	Tangente
法線	Normal	Normale
增加ノ狀態	Increasing state	Zuwachsend
減少ノ狀態	Decreasing state	Abnehmend
增加函數	Increasing function	Zuwachsende Funktion
減少函數	Decreasing function	Abnehmende Funktion
單調函數	Monotonic function	Monotone Funktion
極大	Maximum	Maximum
極小	Minimum	Minimum
切線影	Subtangent	Subtangente
法線影	Subnormal	Subnormale
變化率	Rate of change	Änderungsverhältniss
平均值定理	Theorem of mean value	Mittelwertsatz

第 四 章

高次微分係數	Higher differential coefficient	Höhere Differentialkoeffizient

高次導函數	Higher derivative	Höhere Ableitung
微分	Differential	Differential

第 五 章

上方ニ凹	Concave upwards	Concav nach oben
下方ニ凸	Convex downwards	Convex nach unten
變曲點	Point of inflexion	Wendepunkt
不定形	Indeterminate form	Unbestimmte Form
無限小	Infinitesimal	Unendlichkleines
無限大	Infinity	Unendlichgrosses
高位ノ	of higher order	von höherer Ordnung
低位ノ	of lower order	von niederer Ordnung
同位ノ	of the same order	von derselben Ordnung
漸近線	Asymptote	Asymptote
結節點	Node	Knotenpunkt
尖點	Cusp	Spitze
孤立點	Isolated point	Isolierter Punkt
さいくろいど	Cycloid	Zykloide
とろこいど	Trochoid	Trokoide
えぴさいくろいど	Epicycloid	Epizykloide
はいぽさいくろいど	Hypocycloid	Hypozykloide

第 六 章

基函數	Primitive function	Primitive Funktion
不定積分	Indefinite integral	Unbestimmtes Integral
任意常數	Arbitrary constant	Willkürliche Konstante
積分スル	to integrate	integrieren
置換積分法	Integration by substitution	Integration durch Substitution
部分積分法	Integration by parts	Teilweise Integration
漸化式	Reduction formulae	Reduktionsformel

第 七 章

有理整函數	Rational integral function	Ganze rationale Funktion

有理函數	Rational function	Rationale Funktion
眞分數式	Proper fraction	Echter Bruch
部分分數	Partial fraction	Partialbruch
無理函數	Irrational function	Irrationale Funktion
重複點	Multiple point	Mehrfacher Punkt
初等函數	Elementary function	Elementare Funktion
超越函數	Transcendental function	Transzendente Funktion
微分方程式	Differential equation	Differentialgleichung
第一階ノ	of the first order	erster Ordnung
第二階ノ	of the second order	zweiter Ordnung
解	Solution	Lösung
一般解	General solution	Allgemeine Lösung
特別解	Particular solution	Partikulare Lösung
特異解	Singular solution	Singuläre Lösung
線狀微分方程式	Linear differential equation	Lineare Differentialgleichung
線狀＝獨立	Linearly independent	Linear unabhängig
補助方程式	Subsiduary equation	Hilfsgleichung

第八章

定積分	Definite integral	Bestimmtes Integral
下限，上限	Lower limit, Upper limit	Obere Grenze, Untere Grenze
限界	Limits	Grenzen
異常積分	Improper integral	Uneigentliches Integral
無限積分	Infinite integral	Unendliches Integral
常積分	Proper integral	Eigentliches Integral

第九章

面積	Area	Flächeninhalt
體積	Volume	Körperinhalt
曲線ノ長サ	Length of curve	Kurvenlänge
表面積	Surface area	Oberflächeninhalt

第十章

偏導函數	Partial derivative	Partielle Ableitung
領域	Domain	Gebiet

近傍	Vicinity	Umgebung
同次函數	Homogeneous function	Homogene Funktion
陰函數	Implicit function	Unentwickelte Funktion
陽函數	Explicit function	Entwickelte Funktion
條件附極大，極小	Conditional maxima, minima	Bedingte Maxima, Minima
全微分	Total differential	Totales Differential
方向微分係數	Directional derivative	D. K. nach der Richtung

第十一章

包曲線	Envelope	Einhüllende Kurve
元	Parameter	Parameter
隣接曲線	Consecutive curve	Konsekutive Kurve
被包曲線	Curve enveloped by	Eingehüllten
曲率	Curvature	Krümmung
曲率半徑	Radius of curvature	Krümmungsradius
切觸	Contact	Berührung
切觸曲線	Osculating curve	Oskulationskurve
切觸圓	Osculating circle	Oskulationskreis
曲率圓	Circle of curvature	Krümmungskreis
曲率中心	Center of curvature	Krümmungsmittelpunkt
縮閉線	Evolute	Evolute
伸開線	Involute	Evolvente

第十二章

二重積分	Double integral	Doppelingral
二回積分	Repeated Integral	Iteriertes Integral
重複積分	Multiple integral	Mehrfaches Integral

附錄第一

無限級數	Infinite series	Unendliche Reihe
收斂級數	Convergent series	Konvergente Reihe
發散級數	Divergent series	Divergente Reihe
振動級數	Oscillating series	Oszillierende Reihe
正項級數	Positive series	Reihe mit positiven Gliedern
交項級數	Alternate series	Alternierende Reihe
絕對值級數	Series of absolute values	Reihe der absoluten Werten
絕對收斂	Absolutely convergent	Unbedingt konvergent
條件附收斂	Conditionally convergent	Bedingt konvergent
羃級數	Power series	Potenzreihe
有界	Bounded	Begrenzt
對數級數	Logarithmic series	Logarithmische Reihe
收斂半徑	Radius of convergence	Konvergenzradius
二項級數	Binomial series	Binomische Reihe

附錄第二

展開	Expansion	Entwickelung
剩餘	Remainder	Rest
二項定理	Binomial theorem	Binomischer Lehrsatz
切平面	Tangent plane	Tangentialebene

附錄第三

雙曲線函數	Hyperbolic function	Hyperbolische Funktion
雙曲正弦	Hyperbolic sine	Hyperbolischer Sinus
雙曲餘弦	Hyperbolic cosine	Hyperbolischer Consinus
雙曲正切	Hyperbolic tangent	Hyperbolische Tangente
雙曲餘切	Hyperbolic cotangent	Hyperbolische Cotangente
雙曲正割	Hyperbolic secant	Hyperbolische Secante
雙曲餘割	Hyperbolic cosecant	Hyperbolische Cosecante
逆雙曲線函數	Inverse hyperbolic function	Umgekehrte hyperbolische Funktion

索引

ア行

一値函數, 3.
一般解, 156.
異常積分, 188.
第一種ノ——, 192. 第二種ノ——, 195.
陰函數, 246, 250, 255.
えぴさいくろいど, 122.
Euler, 245.

カ行

函數, 2, 227.
——ノ連續, 11, 229. ——ノ不連續, 15. ——ノ極限值, 7, 94, 229. ——ノぐらふ, 5. ——ノ極大, 極小, 58, 91, 253, 255, 257. ——ノ平均值, 224. 一值——, 多值——, 3. 偶——, 奇——, 6. 逆——, 4, 29. 導——, 18. 合成——, 28, 237. 三角——, 33. 逆三角——, 36. 指數——, 40. 對數——, 42. 基——, 123. 有理整——, 142. 有理——, 142. 無理——, 149. 初等——, 154. 初等超越——, 154. 減少——, 57. 增加——, 56. 單調——, 57. 陰——, 246. 陽——, 247. 雙曲線——, 342. 逆雙曲線——, 344.
角速度, 角加速度, 67.
確定極限, 9.
加速度, 67.
下方＝凸, 89.
下方＝凹, 90.
解(微分方程式ノ), 156.
廻轉曲面ノ表面積, 219.
奇函數, 6.
基函數, 123.
級數, 301.
——ノ和, 301. 正項——, 303. 交項——, 310. 一般——, 311. 絕對值——, 311. 羃——, 314.
極限值, 7, 94, 198, 229.
——＝關スル定理, 10.
極大, 極小, 58, 91, 253, 255, 257.
曲線,
——ノ切線, 53. ——ノ法線, 54. ——ノ凹凸, 89. ——ノ漸近線, 110. ——ノ概形, 116. ——ノ長サ, 211. ——ノ孤ノ微分, 214. ——ノ曲率, 274. ——ノ曲率半徑, 274. ——ノ切觸, 276.
曲面,
——ノ切線, 切平面, 法線, 338.
曲率, 274.

——半徑, 274. ——圓, 281. ——中心, 281.
逆函數, 4, 29.
逆三角函數, 36.
逆雙曲線函數, 344.
逆雙曲,
——正弦, —— 餘弦, ——正切, ——餘切, 344.
區域, 12.
ぐらふ, 5.
偶函數, 6.
結節點, 117.
元, 267.
減少ノ狀態, 56.
減少函數, 57.
孤立點, 121.
高次導函數, 76, 233.
交項級數, 310.
Cauchy, 322.
合成函數, 28, 237.

サ 行

三角函數, 33.
さいくろいど, 122.
收斂スル, 7, 229, 301.
收斂級數, 301.
收斂半徑, 315.
指數函數, 40.
指數級數, 309.
自然對數, 48.
振動級數, 301.
伸開線, 282.
縮閉線, 282.
初等函數, 154.
初等超越函數, 154.
自變數, 3, 228.
從屬變數, 3, 228.
上方＝凹, 89.
下方＝凸, 90.
常數, 1.
任意——, 124.
常積分, 189.
剩餘 (Taylor 定理ノ), 322.
切線, 53, 338.
——影, 63. ——ノ長サ, 63.
切平面, 338.
切觸, 276.
——曲線, 279. ——圓, 279.
積分, 123, 142, 169, 188.
——スル, 125.
正項級數, 303.
線狀微分方程式, 159, 160.
線狀＝獨立, 161.
尖點, 118.
漸近線, 110.
漸化式, 139.

全微分, 259.
絕對値級數, 311.
絕對收斂, 312
速度, 67.
雙曲線函數, 342.
雙曲,
——正弦, ——餘弦, ——正切, ——餘切, 341. ——正割, ——餘割, 342.
增分, 12.
增加ノ狀態, 56.
增加函數, 56.

タ 行

多値函數, 3.
對數函數, 42, 48.
對數,
自然——, Napier——, 48.
對數微分法, 50.
對數級數, 315.
單調函數, 57.
單一積分, 288.
體積, 207.
置換積分法, 130, 181.
重複點, 270.
重複積分, 287.
定義域, 2, 228.
定積分, 169.
——ノ下限, 上限, 169. ——ノ限界 170.
展開, 327, 331.
Taylor
——定理, 322, 335. ——ノ展開式, 327.
條件附極大, 極小, 257.
條件附收斂, 312.
とろこいど, 122.
特別解, 156.
特異解, 157.
導函數, 18.
高次ノ——, 78. 偏——, 232.
同次函數, 244.

ナ 行

Napier, 48.
長サ (曲線ノ), 211.
二重積分, 287.
二回積分, 293.
二項級數, 316.
二項定理, 331.
任意常數, 124.

ハ 行

はいぽさいくろいど, 122.
發散級數, 301.
媒介變數, 50.

被包曲線,　270.
微分,　82, 214, 260.
　—— スル, 24.
微分係數,　17.
　右方 ——, 左方 ——, 20.　高次 ——, 77.
　偏 ——, 231.　方向 ——, 266.
微分方程式,　156.
　第一階 ——, 第二階 ——, 156. —— ノ解, 156. —— ノ一般解, 特別解, 156. —— ノ特異解, 157.
表面積,　222.
不定極限,　9.
不定形,　94.
不定積分,　123.
不連續,　15.
部分積分法,　135, 184.
部分分數,　144.
變數,　1, 228.
　自 ——, 3.　從屬 ——3.
變域,　2, 228.
變化率,　66.
變曲點,　90.
偏微分係數,　231.
偏導函數,　232.
　高次 ——, 233.
平面積,　200.
平均値（函數ノ),　224.
平均値定理,　72, 176, 323.
羃級數,　314.
法線,　54, 338.
　—— 影, 63.　—— ノ長サ, 63.
方向微分係數,　266.
包曲線,　267.
補助方程式,　161.

マ　行

Maclaurin ノ展開式,　327.
無限大,　8, 104.
　高位ノ ——,　低位ノ ——,　同位ノ ——, 104.
無限小,　99.
　高位ノ ——,　低位ノ ——,　同位ノ ——, 100.
無理函數,　149.
無限積分,　189.
無限級數,　301.
面積,　200, 204.

ヤ　行

有理整函數, 有理函數,　142.
有界,　314.
陽函數,　247.

ラ　行

Lagrange,　322.
Leibnitz,　80.
隣接曲線,　268.
領域,　228.
連續,　11, 229.
　—— 變域, 228.　右方ニ ——, 左方ニ ——11.　區域內ニ於テ ——, 12.　領域內ニ於テ ——, 229.　近傍ニ於テ ——, 230.
Rolle ノ定理,　70.

著作者		渡邊孫一郎
發行者	東京市麴町區中六番町五十四番地	野口健吉
印刷者	東京市牛込區市谷加賀町一ノ十二	秋葉信

不許複本

發行元ノ印　　著作者ノ印

初等微分積分學

正價　金參圓也

發行元	東京市麴町區中六番町五四 電話九段 { 二〇一〇番 一〇一五番 振替口座東京百七番	合名會社 裳華房
印刷所	東京市牛込區市谷加賀町	大日本印刷株式會社
製本所	東京市神田區表猿樂町三番地	板倉製本所

昭和五年十一月廿日初版印刷　　昭和五年十一月廿五日初版發行
昭和六年一月五日修正再版發行　　昭和七年一月廿五日修正三版發行
昭和七年九月廿五日修正四版發行　　昭和九年一月廿日修正五版發行
昭和九年四月五日修正六版發行　　昭和十年三月五日修正七版發行

昭和十年九月十日增訂改版第八版印刷
昭和十年九月十五日增訂改版第八版發行