リタル實根ノ數ヲ定ムルコトヲ得レドモ。實根ノ總數ハ定ムルコト能ハザルモノナリ。

例　次ノ方程式ノ根ヲ吟味セヨ。

$$x^4-5x^3+9x^2-7x+2=0$$

[解]　先ヅ。すつるむ級數ヲ作ルニ

$$f(x)=x^4-5x^3+9x^2-7x+2$$

$$f_1(x)=4x^3-15x^2+18x-7$$

$$\begin{array}{r|rrrrr|l}
4x^3-15x^2+18x-7 & (x^4 & -5x^3 & +9x^2 & -7x & +2) & x \\
 & 4x^4 & -20x^3 & +36x^2 & -28x & +8 & -5 \\
 & 4x^4 & -15x^3 & +18x^2 & -7x & & \\
\hline
 & & (-5x^3 & +18x^2 & -21x & +8) & \\
 & & -20x^3 & +72x^2 & -84x & +32 & \\
 & & -20x^3 & +75x^2 & -90x & +35 & \\
\hline
 & & & -3x^2 & +6x & -3 &
\end{array}$$

$$\therefore\ f_2(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$$

$$\begin{array}{r|rrrr|l}
x^2-2x+1 & 4x^3 & -15x^2 & +18x & -7 & 4x-7 \\
 & 4x^3 & -8x^2 & +4x & & \\
\hline
 & & -7x^2 & +14x & -7 & \\
 & & -7x^2 & +14x & -7 & \\
\hline
\end{array}$$

ニシテ。$f(x)$ ト $f_1(x)$ トノ間ニ $(x-1)^2$ ナル最大公約數アリ。故ニ原方程式ハ $x=1$ ナル三重根ヲ有ス。又すつるむ級數ノ符號變化ヲ計算スレバ。

	f	f_1	f_2	符號變化	減少
$-\infty$	+	−	+	2	
					0
0	+	−	+	2	
					2
∞	+	+	+	0	

トナリ。此方程式ハ負根ヲ有スルコトナク二ツノ正ノ異根ヲ有スベシ。從ツテ殘ル正根ヲ求メンニ。

	f	f_1	f_2
0	+	−	+
1	0	0	0
2	0	+	+

ナルヲ以ツテ。$x=2$ ガ殘リ根ナルコトヲ知ル。

[注意](1)　すつるむ級數 $f_2(x), f_3(x), \dots\dots$ ヲ作ル場合ニ。$f_r(x)$ ニ至ツテ常ニ一定ノ符號ヲ有スルコト即チ $f_r(x)=0$ ノ根ガ總テ虛根ナルコトアリ。此ノ場合ハ是レヨリ以下ノ函數 $f_{r+1}(x), f_{r+2}(x), \dots\dots$ ニ起ル符號變化ノ數ハ。x ノ値ニヨリテ變ズルコトナシ。(若シ符號變化ノ數ニ增減アラバ。すつるむノ定理ニヨリ $f_r(x)=0$ ニ實根アルコトヽナル)從ツテすつるむ級數ノ計算ハ $f_r(x)$ ニ止メ其以下ハ計算スルニ及バズ。例ヘバ。$f_r(x)$ ガ二次式

ax^2+bx+c ニシテ且ツ $b^2-4ac<0$ ナルトキハ。$f_r(x)$ 即チ ax^2+bx+c ハ常ニ a ト同號ヲ有スベシ。故ニ $f_{r+1}(x)$ 及ビ $f_{r+2}(x)$ ハ之レヲ計算スルニ及バザルナリ。

例　次ノ方程式ノ根ヲ吟味セヨ。

$$2x^4-13x^2+10x-19=0$$

[解]　すつるむ級數ヲ作ルニ。

$$f(x)=2x^4-13x^2+10x-19$$

$$f_1(x)=8x^3-26x+10=2(4x^3-13x+5)$$

$$f_2(x)=13x^2-15x+38$$

然ルニ。

$$(-15)^2-4\times13\times38<0$$

ナルヲ以ツテ。$f_2(x)$ ハ常ニ一定ノ符號(此場合ハ+)ヲ有ス。故ニ $f_3(x)$, $f_4(x)$ ハ求ムルニ及バザルナリ。又符號變化ヲ見レバ

	f	f_1	f_2	符號變化	減少
$-\infty$	+	−	+	2	
					1
0	−	+	+	1	
					1
$+\infty$	+	+	+	0	

ニシテ。此方程式ハ二個ノ實根(一個ハ正根，一個ハ負根)ヲ有スルコトヲ知ル。

[注意] (2)　n 次ノ有理整方程式 $f(x)=0$ ノ根ガ總テ實數ナル爲メノ條件ハ。すつるむ級數ニ於テ $x=-\infty$ ナルトキノ符號變化ノ數ト $x=\infty$ ナルトキノ符號變化ノ數トノ差ガ。n ニ等シキコトナリ。而シテ之レガ爲メニハすつるむ級數ニ於ケル函數ハ $(n+1)$ 個 {勿論 $(n+1)$ 個ヨリ多クアルコトナシ} ナルガ故ニ。$x=-\infty$ ナルトキニ符號變化ノミ (+ − + − … 或ハ − + − + …) ニシテ。又 $x=+\infty$ ナルトキニ符號連續ノミ (+ + + . ……. 或ハ − − − ………) ナラザルベカラズ。

第十二章

數方程式ノ解法

54. 有理根ニ關スル定理。數方程式ノ根ニ有理數(整數及ビ分數)ナルモノアリ。又無理數ナルモノアリ。前者ハ之レヲ精密ニ求ムルコトヲ得レドモ。後者ニ至ツテハ必要ノ度ニ應ジテ其略近値ヲ求ムルニ止マル。本章ニ於テハ主トシテ後者ニ關スル略近値ヲ求ムル方法ヲ講究セントスルモノナレドモ。先ヅ前者ニ關スル二三ノ事項ヨリ始メントス。

[定理] 有理整方程式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$$

ノ第一係數ガ1ニシテ。其他ノ係數 $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots,$ p_n ガ總テ整數ナルトキハ。此方程式ハ整數ニアラザル有理根ヲ有スルコト能ハズ。

(證) 假リニ。此方程式ニ分數根 $\frac{a}{b}$ (既約分數)

アリトスレバ。$x=\frac{a}{b}$ ハ方程式ニ適合スベク

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n+p_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)+p_n=0$$

ナルベシ。之レニ b^{n-1} ヲ乘ズレバ。

$$\frac{a^n}{b}+p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}b+p_3a^{n-3}b^2+\ldots\ldots+p_{n-1}ab^{n-2}+p_nb^{n-1}=0$$

$$\frac{a^n}{b}=-(p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}b+\ldots\ldots+p_{n-1}ab^{n-2}+p_nb^{n-1})$$

此關係ヲ見ルニ。左邊ハ分數ニシテ右邊ハ整數ナリ。分數ガ整數ニ等シト云フ不合理ニ至ルベシ。故ニ原方程式ハ整數ニアラザル有理根ヲ有スルコト能ハズ。

此定理ヨリ考フルニ。總テ係數ガ有理數ナル數方程式 $f(x)=0$ ハ。方程式ノ變換(第29條)ニヨリ。第一係數ガ1ニシテ其他ノ總テノ係數ガ整數ナル方程式ニ化シ得ルガ故ニ。$f(x)=0$ ノ有理根ヲ求ムルコトハ。整數根ヲ求ムルコトニ歸シ得ラルベシ。

55. 整數根ヲ求ムルにうとんノ除數法。

係數 $p_0, p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ ガ總テ整數ナル方程式

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$$

ニ整數根hアリトスレバ。方程式ノ左邊ハ$x-h$ナル因數ヲ有スベク。從ツテ

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n$$
$$=(x-h)(q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1})$$
$$=q_0x^n+(q_1-hq_0)x^{n-1}+(q_2-hq_1)x^{n-2}+(q_3-hq_2)x^{n-3}$$
$$+\ldots\ldots+(q_{n-2}-hq_{n-3})x^2+(q_{n-1}+hq_{n-2})x-hq_{n-1}$$

兩邊ノ相當器ノ係數ヲ比較シテ次ノ諸關係ヲ得ベシ。

$$\left.\begin{aligned} p_0&=q_0\\ p_1&=q_1-hq_0\\ p_2&=q_2-hq_1\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ p_{n-2}&=q_{n-2}-hq_{n-3}\\ p_{n-1}&=q_{n-1}-hq_{n-2}\\ p_n&=-hq_{n-1}\end{aligned}\right\}\text{即チ}\quad\left.\begin{aligned} q_0&=p_0\\ q_1&=p_1+hq_0\\ q_2&=p_2+hq_1\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ q_{n-2}&=p_{n-2}+hq_{n-3}\\ q_{n-1}&=p_{n-1}+hq_{n-2}\\ -q_{n-1}&=\frac{p_n}{h}\end{aligned}\right\}$$

先ヅ。此等ノ關係ニ於ケル$p_0, p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$及$h$ガ整數ナルヲ以ツテ。$q_0, q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$ハ整數ナルコトヲ知リ得ベク。且ツ$p_n=-hq_{n-1}$ヨリ$h$ハ$p_n$ノ因數ナルコトヲ知リ得ベシ。

次ニ。$p_{n-1}-q_{n-1}=-hq_{n-2}$ニ$q_{n-1}=-\frac{p_n}{h}$ヲ置ケバ。

$$p_{n-1}+\frac{p_n}{h}=-hq_{n-2}$$

$$\therefore\quad -q_{n-2}=\frac{p_{n-1}+\frac{p_n}{h}}{h}$$

同樣ニ。

$$p_{n-2}-q_{n-2}=p_{n-2}+\frac{p_{n-1}+\frac{p_n}{h}}{h}=-hq_{n-3}$$

$$\therefore\quad -q_{n-3}=\frac{p_{n-2}+\frac{p_{n-1}+\frac{p_n}{h}}{h}}{h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

斯樣ニシテ最後ニ得ル商ハ $-q_0$ ニシテ。從ツテ$-p_0$ニ等シカルベシ。故ニp_nノ總テノ因數ニ就キ此演算ヲ行ヒ。每次ノ商ガ悉ク整數ニシテ。最終ニ得ル商ガ $-p_0$ ニ等シキトキハ。用ヰタルp_nノ因數ガ原方程式ノ整數根ナルベシ。又$p_0=1$ナルトキハ。斯樣ニシテ總テノ整數根ヲ求ムレバ。此等ハ原方程式ノ總テノ有理根ナルベシ。

尙又方程式ノ第一項ノ係數p_0ガ1ナラザルトキハ。方程式ノ變換(第29條)ニヨリ之レヲ第一項

ノ係數ガ1ナル方程式ニ化シ。而シテ後ニ上記ノ方法ヲ適用スレバ。總テノ有理根ヲ求メ得ラルベシ。

以上ノ方法ヲにうとんノ除數法(Newton's method of divisors)ト稱ス。

此方法ヲ實際ニ適用スルニハ。先ヅ$f(x)$ノ係數

$$\begin{array}{l|lllll} & p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots\cdots\cdots\cdots & p_0 \\ h & & \dfrac{p_n}{h} & \dfrac{-hq_{n-2}}{h} & \cdots\cdots\cdots\cdots & -q_0 \\ \hline & & -hq_{n-2} & -hq_{n-3} & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \end{array}$$

$p_0, p_1, p_2, \ldots\ldots, p_{n-2}, p_{n-1}, p_n$ノ順序ヲ全ク逆ニ排列シ。$\dfrac{p_n}{h}$ヲ$p_{n-1}$ノ下ニ書シ其和$-hq_{n-2}$ヲ求ム。次ニ$\dfrac{-hq_{n-2}}{h}$ヲ$p_{n-2}$ノ下ニ書シ其和$-hq_{n-3}$ヲ求ム。斯樣ニシテ終ニ$p_0$ノ處ニ至リ其和0トナレバ。$h$ハ方程式$f(x)=0$ノ整數根ナルコトヲ知ルベシ。

斯樣ニシテ例ヘバ一ツノ整數根hヲ求メ得タリトスレバ。次ノ整數根ヲ求メンニハ。

$$p_n, \quad p_{n-1}, \quad p_{n-2}, \quad \ldots\ldots, \quad p_0$$

ニ就キテ除數法ヲ行ハズトモ。第二行ナル

$$\frac{p_n}{h}, \quad \frac{-hq_{n-2}}{h}, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad -q_0$$

ノ各項ノ符號ヲ變ジタルモノ。即チ

$$q_{n-1}, \quad q_{n-2}, \quad \ldots\ldots, \quad q_0$$

ニ就キテ除數法ヲ行ヘバ可ナルベシ。之レ此等ハ$f(x)$ヲ$x-h$ニテ除シタル商ノ係數ナルガ故ナリ。

例(1)　次ノ方程式ヲ解ケ。

$$x^4+x^3-2x^2+4x-24=0$$

[解]　先ヅ。此方程式ノ整數根ヲ求ムルニ。

$$p_0=1, \quad p_1=1, \quad p_2=-2, \quad p_3=4, \quad p_4=-24$$

ニシテ。其整數根ハp_4即チ-24ノ因數ナルベシ。然ルニ此方程式ノ正根及ビ負根ノ上限ヲ求ムレバ。夫々3及ビ-4ヲ得ルヲ以ツテ(第42及44條參照)。整數根ハ

$$2, \quad 1, \quad -1, \quad -2, \quad -3$$

ノ中ナルベシ。故ニ除數法ヲ適用スレバ。

$$\begin{array}{l|rrrrr} & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ & -24 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & & -12 & -4 & -3 & -1 \\ \hline & & -8 & -6 & -2 & 0 \end{array} \qquad \therefore \ x=2$$

1及ビ-1ハ除數法ヲ行フヨリ。直接ニ方程式ニ代入シテ根ナルカ否カヲ檢スルヲ便トス。此場合ニハ何レモ根ニアラザルコトヲ見ルベシ。次

ニ −2 ニテ除數法ヲ行フニ。

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 12 & 4 & 3 & 1 \\
-2 & & -6 & 1 & -2 \\
\hline
 & & -2 & 4 &
\end{array}
$$

$\therefore$ −2 ハ根ニアラズ。

尙又 −3 ニテ除數法ヲ行ヘバ。

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 12 & 4 & 3 & 1 \\
-3 & & -4 & 0 & -1 \\
\hline
 & & 0 & 3 & 0
\end{array}
\qquad \therefore\ x=-3
$$

故ニ。方程式ハ 2 及ビ −3 ナル二ツノ整數根ヲ有ス。

殘リノ根ヲ見出サンニ。方程式ノ左邊ハ $(x-2)\times(x+3)$ 即チ x^2+x-6 ナル因數ヲ有スルヲ以ツテ。此式ニテ左邊ヲ除セバ。殘リノ因數トシテ x^2+4 ヲ得ベシ。故ニ殘リノ根ハ

$$x^2+4=0 \qquad \therefore\ x=\pm2\sqrt{-1}$$

ナルコトヲ知ル。依テ所要ノ根ハ

$$2, \qquad -3, \qquad \pm2\sqrt{-1}$$

ナリ。

例(2) 次ノ方程式ノ有理根ヲ求ム。

$$3x^4-23x^3+35x^2+31x-30=0$$

[解] 此方程式ヲ化シテ。

$$x^4-\frac{23}{3}x^3+\frac{35}{3}x^2+\frac{31}{3}x-10=0$$

コノ分數係數ヲ去ル爲メニ各根ヲ m 倍スレバ(第29條參照)。

$$x^4-\frac{23}{3}mx^3+\frac{35}{3}m^2x^2+\frac{31}{3}m^3x-10m^4=0$$

$m=3$ トスレバ。

$$x^4-23x^2+105x^2+279x-810=0$$

トナルヲ以ツテ。此方程式ニ除數法ヲ適用シテ整數根ヲ求メ。各根ノ $\frac{1}{3}$ ヲ取レバ所要ノ根ヲ得ベシ。然レドモ此場合ハ次ノ如ク直接ニ除數法ヲ行フヲ便トス。

先ヅ方程式

$$3x^4-23x^3+35x^2+31x-30=0$$

ノ正根及ビ負根ノ上限ヲ求ムレバ。夫々 8 及ビ −2 ヲ得ベシ。又此方程式ノ整數根ハ −30 ノ因數ナルヲ以ツテ。6, 5, 3, 2, 1, −1 ノ中ナルベシ。故ニ除數法ヲ適用スレバ。

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & -30 & 31 & 35 & -23 & 3 \\
6 & & -5 & & & \\
\hline
 & & 26 & & &
\end{array}
$$

$\frac{26}{6}$ ハ分數ナルガ故ニ。6 ハ此方程式ノ根ナラザ

ルコトヲ知ル。次ニ

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -30 & 31 & 35 & -23 & 3 \\ 5 & & -6 & 5 & 8 & -3 \\ \hline & & 25 & 40 & -15 & 0 \end{array}$$

$$\therefore\quad x=5$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -5 & -8 & 3 \\ 3 & & 2 & -1 & -3 \\ \hline & & -3 & -9 & 0 \end{array}$$

$$\therefore\quad x=3$$

$$\begin{array}{r|rrr} & -2 & 1 & 3 \\ 2 & & -1 & 0 \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

∴ 2 ハ根ナラズ

殘リノ根ヲ見出サンニ。方程式ノ左邊ヲ $(x-5)$ ト $(x-3)$ 即チ $x^2-8x+15$ ニテ除セバ商トシテ $3x^2+x-2$ ヲ得ベク。殘リノ根ハ

$$3x^2+x-2=0 \qquad (x+1)(3x-2)=0$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} x&=-1 \\ x&=\frac{2}{3} \end{aligned}\right\}$$

ナルベシ。故ニ所要ノ有理根ハ

$$5,\quad 3,\quad -1,\quad \frac{2}{3}$$

ナリ。

56. にうとんノ略近法。 數方程式ノ無理根ハ。必要ノ度ニ應ジテ其略近値ヲ求メ得ルコトヲ既ニ述ベタリ。にうとんノ略近法 (Newton's method of approximation) ハ即チ此目的ヲ達スル一ツノ方法ニシテ。數方程式ノ各實根(有理根及ビ無理根共)ヲ根ノ分割法ニヨリ他ノ根ヨリ分割シ。根ノ大略ノ値ノ範圍ヲ求メ。此法ヲ反覆適用シテ必要ノ程度マデ漸次ニ眞値ニ近キ略近値ヲ求ムルモノナリ。

今方程式 $f(x)=0$ ノ一根ガ $a+h$ ニシテ其 a ヲ求ムルコトヲ得タリトセバ。

$$f(a+h)=0$$

即チ

$$f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(a)+\ldots\ldots=0$$

h ノ絕對値ガ充分小ナルトキハ。$h^2, h^3, \ldots\ldots$ ハ h ニ比シテ絕對値ガ甚ダ小ナルヲ以ッテ。$h^2, h^3, \ldots$ ノ諸項ヲ省略スレバ。

$$f(a)+hf'(a)=0$$

$$hf'(a)=-f(a)$$

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$\therefore \quad a+h=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

トナルベシ。然レドモ斯樣ニシテ求メ得タル $a+h$ ノ値ハ尙根ノ眞値ニアラズ。故ニ斯樣ニシテ求メ得タル値ヲ b トシ。根ノ眞値ヲ $b+k$ トスレバ。

$$k=\text{根ノ眞値}-b$$

$$h=\text{根ノ眞値}-a$$

ニシテ。k ハ h ヨリ小ナリ。再ビ

$$f(b+k)=0$$

$$f(b)+kf'(b)+\frac{k^2}{\underline{|2}}f''(b)+\ldots\ldots=0$$

k ニ比シテ $k^2, k^3, \ldots\ldots$ ハ絕對値甚ダ小ナルヲ以ツテ。此等ヲ省略スレバ

$$f(b)+kf'(b)=0$$

$$kf'(b)=-f(b)$$

$$k=-\frac{f(b)}{f'(b)}$$

$$\therefore \quad b+k=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$$

斯樣ニシテ此方法ヲ反復適用スレバ。根ノ眞値ニ如何樣ニモ接近セル略近値ヲ得ラルヽナリ。

此方法ハ計算稍〻複雜ナリト雖モ。根ノ眞値ニ接近スルコト迅速ナレバ大ニ便利ナルコトアリ。

例　根ノ分割法ニヨリ。次ノ方程式ノ正根ガ2ト2.2トノ間ニアルコトヲ知ル。にうとんノ略近法ヲ二回適用シテ此正根ノ略近値ヲ計算セヨ。

$$x^3-2x-5=0$$

[解]　此正根ノ眞値ヲ $x=2.1+h$ トスレバ。h ハ正ナルカ或ハ負ナルカ。何レニシテモ 0.1 ヨリ小ナリ。にうとんノ略近法ヲ適用スレバ。

$$\left.\begin{aligned} a&=2.1\\ f(x)&=x^3-2x-5\\ f'(x)&=3x^2-2\end{aligned}\right\}$$

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}=\frac{f(2.1)}{f'(2.1)}=-\frac{(2.1)^3-2(2.1)-5}{3(2.1)^2-2}$$

$$=-\frac{0.061}{11.23}=-0.000543$$

$$a+h=2.1-0.000543=2.09457$$

次ニ。

$$b=2.09457$$

$$k=-\frac{f(b)}{f'(b)}=-\frac{f(2.09457)}{f'(2.09457)}$$

$$= -\frac{(2.09457)^3-2(2.09457)-5}{3(2.09457)^2-2}$$

$$= -0.00004852$$

$$b+h=2.09457-0.00004852=2.09452148$$

57. ほーなーノ數方程式解法。 數方程式ノ解法中最モ實用ニ適スルモノハほーなーノ法(Horner's method)ニシテ。有理根ニテモ無理根ニテモ總テ實根ハ此法ニヨリテ求ムルコトヲ得ベシ。

此法ノ原則ハ。先ヅ數方程式ノ實根ノ整數部ヲ見出シ。各根ヲ此整數部ダケ減少シテ第二方程式ヲ作ル。次ニ根ノ小數第一位ヲ求メンニハ。第二方程式ノ根ヲ10倍シテ其整數部ヲ見出シ。再ビ此整數部ダケヲ減少シテ第三方程式ヲ作ル。此ノ方法ヲ反覆適用シテ小數第二位,第三位,……ト順次ニ求メテ根ノ眞値ニ接近スルニアリ。次ニ例ニ就キ精細ニ之レヲ說カントス。

例 次ノ方程式ノ正根ヲ求ム。

$$2x^3-85x^2-85x-87=0$$

[解] 先ヅ根ノ分割法ニヨルカ或ハ視察ニヨリ正根ノ位置ヲ求ムレバ。此方程式ニハ40ト50

トノ間ニ一個ノ正根アルコトヲ知リ得ベシ。此根ヲ求ムル手續ヲ數段ニ分テバ。

(1) 各根ヲ40ダケ減少シテ第二方程式ヲ作ル。

40	2	−85	− 85	−87
		80	−200	−11400
		− 5	−285	(−11487)
		80	3000	
		75	(2715)	
		80		
	2	(155)		

$$\therefore\ 2x^3+155x^2+2715x-11487=0$$

(2) 此方程式ノ正根ノ位置ヲ求ムレバ3ト4トノ間ニアリ。故ニ各根ヲ3ダケ減少シテ第三方程式ヲ作ル。

3	2	155	2715	−11487
		6	483	9594
		161	3198	(− 1893)
		6	501	
		167	(3699)	
		6		
	2	(173)		

$$\therefore\ 2x^3+173x^2+3699x-1893=0$$

(3) 第三方程式ノ正根ハ小數以下ナルヲ以ッテ。小數第一位ヲ求ムル爲メニ根ヲ10倍スレバ

$$2x^3+173\times10x^2+3699\times10^2x-1893\times10^3=0$$

$$\therefore\quad 2x^3+1730x^2+369900x-1893000=0$$

ヲ得ベク。此方程式ノ正根ノ整數部ハ原方程式ノ正根ノ小數第一位ナリ。

終リノ方程式ノ正根ノ位置ヲ求ムレバ。5ト6トノ間ニアリ。故ニ各根ヲ5ダケ減少シテ第四方程式ヲ作ル。

	2	1730	369900	−1893000
5		10	8700	1893000
		1740	378600	(0)
		10	8750	
		1750	(387350)	
		10		
	2	(1760)		

$$\therefore\quad 2x^3+1760x^2+387350x=0$$

斯様ニシテ。小數以下所要ノ數字マデ計算スルコトヲ得ベシ。然ルニ此例ニテハ第四方程式ヲ見ルニ。

$$x(2x^2+1760x+387350)=0$$

$$\therefore\quad x=0$$

$$2x^2+1760x+387350=0$$

此終リノ二次方程式ノ二根ヲ α,β トスレバ。原方程式ノ三根ハ

$$43.5,\qquad 43.5+\alpha,\qquad 43.5+\beta$$

ニシテ。所要ノ正根ハ 43.5 ナリ。

以上ノ計算ヲ集メテ實際ノ演算式次ノ如シ。

	2	−85	−85	−87	(43.5
40		80	−200	−11400	
		−5	−285	(−11487)	
		80	3000	9594	
		75	(2715)	(−1893000)	
		80	483	1893000	
		(155)	3198	0	
3		6	501		
		161	(369900)		
		6	8700		
		167	378600		
		6			
5.		(1730)			
		10			
		1740			

58. 試除數法。 方程式ノ根ノ初メ若干個ノ數字ヲ見出スコトヲ得バ。次ノ若干個ノ數字ハ除法ニ依ツテ求ムルコトヲ得ベシ。既ニ第56條ニ於テ根 $a+h$ ノ a ヲ見出スコトヲ得バ。h ガ a ニ比シテ充分小ナルトキニ。h ハ

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

ナル除法ニ依ツテ求メ得ルコトヲ見タリ。而シテほニなニノ法ヲ適用シテ a ヲ見出シタル場合ハ。$f(a)$ ハ各變換方程式ノ最終係數ニシテ $f'(a)$ ハ

終リヨリ第二番目ニ當ル係數ナリ。何トナレバ方程式ニ $y=x-a$ 即チ $x=y+a$ ト置キタル各變換方程式 $f(y+a)=0$ ハ

$$f(a)+f'(a)y+\frac{f''(a)}{\underline{|2}}y^2+\ldots\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{\underline{|n-1}}y^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a)}{\underline{|n}}y^n=0$$

即チ

$$\frac{f^{(n)}(a)}{\underline{|n}}y^n+\frac{f^{(n-1)}(a)}{\underline{|n-1}}y^{n-1}+\ldots\ldots+\frac{f''(a)}{\underline{|2}}y^2+f'(a)y+f(a)=0$$

ナルガ故ナリ。此意味ヨリ各變換方程式ノ終リヨリ第二番目ニ當ル係數ヲ試除數 (Trial divisor) ト稱ス。前條ノ例ニ於テ例ヘバ。ほーなーノ法ニヨリ 43 ヲ見出シタリトスレバ。.5 ハ次ノ如ク除法ニテ求ムルコトヲ得ベシ。

$$a=43$$

$$f(a)=-1893$$

$$f'(a)=3699$$

$$\therefore\ h=-\frac{f(a)}{f'(a)}=-\frac{-1893}{3699}=\frac{1893}{3699}=.5\ \ldots\ldots$$

此法ハ h ガ a ニ比シテ其絶對値小ナレバ小ナル程。除法ニヨリテ多クノ數字ヲ正シク求ムルコトヲ得ベシ。故ニ實際ニ於テハ。成ルベク多クノ

數字ヲほーなーノ法ニテ見出シ。而シテ後ニ之レヲ適用スルヲ可トス。

例 次ノ方程式ノ 9 ト 10 トノ間ニアル根ヲ小數第三位迄正シク求メヨ。

$$x^4-3x^2+75x-10000=0$$

[解] 各根ヲ 9 ダケ減少スレバ。

	1	0	−3	75	−10000
9		9	81	702	6993
		9	78	777	(−3007)
		9	162	2160	
		18	240	(2937)	
		9	243		
		27	(483)		
		9			
	1	(36)			

各根ヲ 10 倍スレバ。

$$x^4+360x^3+48300x^2+2937000x-30070000=0$$

所要ノ根ノ位置ヲ求ムレバ。8 ト 9 トノ間ニアリ。故ニ各根ヲ 8 ダケ減少スレバ。

	1	360	48300	2937000	−30070000
8		8	2944	409952	26775616
		368	51244	3346952	(−3294384)
		8	3008	434016	
		376	54252	(3770968)	
		8	3072		
		384	(57324)		
		8			
	1	(392)			

次ニ試除數法ヲ行ヘバ。

$$-\frac{f(a)}{f'(a)}=\frac{3294384}{3770968}=8\ldots\ldots$$

試除數法ヲ行ヒテ得タル商ガ(此例ニテハ8)ガ或ハ過大ナラザルカヲ檢センニハ。此商ダケ減少演算ヲ行ヒ。最終ノ係數ガ此演算ニ於テ符號ヲ變ズルカ否カニ依ツテ判定スルコトヲ得ベク。若シ符號ヲ變ズレバ過大ナルモノナルヲ以ツテ尙小ナルモノヲ取ラザルベカラズ。此例ニ於テハ。

	1	3920	5732400	3770968000	−32943840000
8		8	31424	46110592	30536628736
		3928	5763824	3817078592	− 2417211264

最終ノ係數ハ符號ヲ變ゼザルヲ以ツテ。過大ニハアラザルナリ。依ツテ又各根ヲ10倍シタルモノヨリ8ヲ減少スレバ。

	1	3920	5732400	3770968000	−32943840000
8		8	31424	46110592	30536628736
		3928	5763824	3817078592	(−2417211264)
		8	31488	46362496	
		3936	5795312	(3863441088)	
		8	31552		
		3944	(5826864)		
		8			
	1	(3952)			

再ビ試除數法ヲ行ヘバ。

$$-\frac{f(a)}{f'(a)}=\frac{2417211264}{3863441088}=6.\ldots\ldots$$

之レ又前ト同樣ニ過大ニアラザルコトヲ知リ得ベシ。依ツテ所要ノ根ハ9.886ナリ。

以上ノ演算ヲ一式ニ集ムレバ次ノ如シ。

	1	0	−3	75	−10000	(9.886
9		9	81	702	6993	
		9	78	777	(−30070000)	
		9	162	2160	26775616	
		18	240	2937000	(−32943840000)	
		9	243	409952	30536628736	
		27	48300	3346952	−2417211264	
		9	2914	434016		
		360	51244	(3770968000)		
8		8	3008	46110592		
		368	54252	3817078592		
		8	3072	46362496		
		376	(5732400)	3863441088		
		8	31424			
		384	5763824			
		8	31488			
		(3920)	5795312			
8		8	31552			
		3928	5826864			
		8				
		3936				
		8				
		3944				
		8				
		3952				

59\. 接近セル根アル場合ニほーなー解法ノ適用。 甚ダ接近セル二根(若クハ以上)ヲ有スル數方程式ニほーなー解法ヲ適用センニハ。先ヅ二根ニ共通ナル整數部ダケヲ減少シ。次デ各根ヲ10倍スレバ此變換方程式ニハ0ト10トノ間ニ

二根アルコトトナルベシ。而シテ二根ノ位置ヲ分割ス。若シ分割シ得ザレバ再ビ共通ナル整數部ダケヲ減少シ。更ニ又各根ヲ10倍ス。斯樣ニシテ二根ガ分割セラルヽ迄此法ヲ適用シ。終ニ分割セラルヽニ至ラバ。各根ニ就キテ別々ニほーなー解法ヲ適用スルナリ。二根ガ分割セラレザル間ハ。試除法ヲ行フモ無効ナルコトヲ忘ルベカラズ。

例 次ノ方程式ハ1ト2トノ間ニ二根ヲ有ス。此等ヲ小數第五位マデ求メヨ。

$$x^3-7x+7=0$$

[解] 先ヅ二根ニ共通ナル整數部即チ1ヲ減少スレバ。

	1	0	−7	7
1		1	1	−6
		1	−6	(1)
		1	2	
		2	(−4)	
		1		
	1	(3)		

$$\therefore\ x^3+3x^2-4x+1=0$$

次ニ各根10倍スレバ。

$$x^3+30x^2-400x+1000=0$$

トナル。此方程式ハ0ト10トノ間ニ二根ヲ有スベク此等ノ位置ヲ定ムレバ。3ト4トノ間ニ一根又6ト7トノ間ニ一根アリ。故ニ此等ノ二根ニ就キテ別々ニほーなー解法ヲ適用スルコト次ノ如シ。

(i) 3ト4トノ間ニアル根ヲ求ムルコト。

	1	30	−400	1000	(356
3		3	99	−903	
		33	−301	(97000)	
		3	108	−86625	
		36	(−19300)	(10375000)	
		3	1975	−9048984	
		(390)	−17325	(1326016)	
5		5	2000		
		395	(−1532500)		
		5	24366		
		400	−1508164		
		5	24372		
		(4050)	(−1483792)		
6		6			
		4056			
		6			
		4062			
		6			
		(4068)			

以下試除法ニヨレバ。

$$\frac{1326016}{1483792}=.89\ldots\ldots$$

故ニ所要ノ根ハ1.35689ナリ。

(ii) 6 ト 7 トノ間ニアル根ヲ求ムルコト。

	1	30	−400	1000	(692
6		6	216	−1104	
		36	−184	(−104000)	
		6	252	100809	
		42	(6800)	(−3191000)	
		6	4401	3156888	
9		(480)	11201	(−34112)	
		9	4482		
		489	(1568300)		
		9	10144		
		498	1578444		
		9	10148		
		(5070)	(1588592)		
2		2			
		5072			
		2			
		5074			
		2			
		(5076)			

以下試除法ニ依レバ

$$\frac{34112}{1588592}=.02\ldots\ldots$$

故ニ所要ノ根ハ 1.69202 ナリ。

第 十 三 章

復 習 問 題

(1) 次ノ除法ノ商 Q 及ビ剰餘 R ヲ求ム。

(i) $(x^5+x^2-10x+113)\div(x+4)$

(ii) $(3x^4-5x^3+10x^2+11x-1)\div(x-3)$

答 (i) $Q=x^4-4x^3+16x^2-63x+242$

$R=-855$

(ii) $Q=3x^3+4x^2+22x+77$

$R=230$

(2) 次式ノ極大,極小ヲ求メ。且ツ曲線ヲ書ケ。

(i) $x(4-x)$

(ii) $2x^3-3x^2-36x+14$

答 (i) $x=2$ 極大値 4

(ii) $x=3$ 極小値 -67

$x=-2$ 極大値 58

(3) $-\frac{3}{2}, 3, \frac{1}{7}$ ヲ根トスル有理整方程式如何。

答 $14x^3-23x^2-60x+9=0$

(4) 一根ガ $-2+\sqrt{3}$ ナルコトヲ知ツテ。次ノ方程式ヲ解ケ。

$$x^4+2x^3-5x^2+6x+2=0$$

答 $-2\pm\sqrt{3},\ 1\pm\sqrt{-1}$

(5) 次ノ方程式ガ少クトモ二ツノ虚根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

$$x^6-3x^2-x+1=0$$

(6) p, q ガ正數ナルトキハ。方程式

$$x^3-px+q=0$$

ガ一ツノ負根ヲ有シ。他ノ二根ハ共ニ正根ナルカ若クハ虚根ナルコトヲ證明セヨ。

(7) 四根ガ二ツヾヽ相等シキコトヲ知ツテ。次ノ方程式ヲ解ケ。

$$x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$$

答 1, 1, −3, −3

(8) 二根ノ比ガ 3:2 ニ等シキコトヲ知ツテ。次ノ方程式ヲ解ケ。

$$x^3-9x^2+14x+24=0$$

答 6, 4, −1

(9) 方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ ノ二根ノ和ガ 0 ナルトキハ。$pq-r=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

(10) 方程式 $x^3-px^2+qx+r=0$ ノ三根ガ等比級數ヲナス爲メニ。必要ナル條件ヲ求ム。

答 $p^3r+q^3=0$

(11) 二ツノ方程式

$$\left.\begin{aligned}x^3+ax^2+bx+c=0\\x^3+a'x^2+b'x+c'=0\end{aligned}\right\}$$

ガ共通ナル二根ヲ有スルトキハ。此二根ヲ根トスル方程式ハ

$$x^2+\frac{b-b'}{a-a'}x+\frac{c-c'}{a-a'}=0$$

ニシテ。且ツ共通ナラザル根ハ夫々

$$\frac{-c(a-a')}{c-c'},\quad \frac{-c'(a-a')}{c-c'}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

(12) 方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ ノ三根ヲ α, β, γ トスレバ。

$$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma\alpha}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$

ノ値如何。

答 $\frac{pq}{r}-3$

(13) $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ ガ方程式 $x^3+px+q=0$ ノ根ナルトキハ。2α ガ方程式 $x^3+px+q=0$ ノ根ナルコトヲ證明セヨ。

(14) 方程式ノ變換ニヨリ。次ノ方程式ノ分數係數ヲ去レ。

$$x^4-\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{12}x^2-\frac{13}{900}=0$$

答 $x^4-25x^3+375x^2-11700=0$

(15) 次ノ方程式ノ根ノ 6 倍ヲ根トスル方程式如何。

$$6x^3-3x^2+4x-6=0$$

答 $x^3-3x^2+24x-216=0$

(16) 次ノ方程式ノ各根ヲ 2 ヅヽ増加セヨ。

$$3x^4+7x^3-15x^2+x-2=0$$

答 $3x^4-77x^3+720x^2-2876x+4058=0$

(17) 次ノ方程式ヲ變換シテ。x^2 ノ項ヲ次ク方程式ヲ作レ。

$$x^4-4x^3-18x^2-3x+2=0$$

答 $x^4+8x^3-111x-196=0$ 或ハ $x^4-8x^3+17x-8=0$

(18) 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$x^8-2x^6+3x^4-2x^2+1=0$$

答 $\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}$, $\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}$ 各二重根

(19) 次ノ方程式ガ相反方程式ナルコトヲ證シ。且ツ之レヲ解ケ。

$$4(x^2-x+1)^3-27x^2(x-1)^2=0$$

答 2, $\frac{1}{2}$, -1 各二重根

(20) 一般解法ヲ次ノ方程式ニ適用セヨ。

$$x^3-7x^2+19x-13=0$$

答 1, $3\pm2\sqrt{-1}$

(21) 次ノ方程式ノ複根ヲ求メヨ。

$$x^4-2x^3-11x^2+12x+36=0$$

答 -2, 3 各二重根

(22) 正根ノ上限ニ關スル二定理 (I) 及ビ (II) ヲ用キテ。次ノ方程式ノ正根ノ上限ヲ求メヨ。

$$x^8+20x^7+4x^6-11x^5-120x^4+13x-25=0$$

答 共ニ 6

(23) 次ノ方程式ノ實根ノ位置ヲ定メヨ。

$$x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0$$

答　-10 ト 10 トノ間以外實根ナシ
-10 ト -1 トノ間ニ　一實根
-1 ト 0 トノ間ニ　一實根
0 ト 1 トノ間ニ　實根ナシ
1 ト 10 トノ間ニ少クトモ一實根

(24) 次ノ方程式ノ實根ノ數及ビ位置ヲ求メヨ。

$$x^3-2x-5=0$$

答　2 ト 3 トノ間ニ唯一ノ實根

(25) 次ノ方程式ノ實根ノ數及ビ位置ヲ求メヨ。

$$x^4-2x^3-3x^2+10x-4=0$$

答　0 ト 1 トノ間ニ一實根
-3 ト -2 トノ間ニ一實根
其他二虛根

(26) 次ノ方程式ノ根ヲ吟味セヨ。

$$x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$$

答　二ツノ異根
$1,\ 2$
各二重根

(27) 次ノ方程式ノ整數根ヲ求ム。

$$x^4-2x^3-19x^2+68x-60=0$$

(28) 次ノ方程式ノ正根ヲ求ム。

$$4x^3-13x^2-31x-275=0$$

答　6.25

(29) 次ノ方程式ノ 4 ト 5 トノ間ニアル正根ヲ小數第四位迄計算セヨ。

$$x^3+x^2+x-100=0$$

答　4.2644

(30) 次ノ方程式ノ 4 ト 5 トノ間ニアル二根ヲ小數第三位迄計算セヨ。

$$x^4+8x^3-70x^2-144x+936=0$$

答　4.242
4.246

附　錄

[I] 一元二次式

1. 一元二次式ノ値。一元二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ。x ノ値ノ變化ニ從ツテ。又變化スルモノナルコト明ラカナリ。今此値ノ變化ニ關シテ二三ノ定理ヲ説明スベシ。但シ以下改メテ注意スルニアラザレバ。a, b, c ハ總ベテ實數ヲ表ハスモトスベシ。

[定理] (I) 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ガ相異ナル二ツノ實根ヲ有スルトキ。

(i) x ガ此等ノ二根ノ間ノ値ヲ取ルトキハ。一元二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ常ニ a ト異號ヲ有ス。

(ii) x ガ此等ノ二根ノ間以外ノ値ヲ取ルトキハ。一元二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ常ニ a ト同號ヲ有ス。

(證) 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ相異ナル二ツノ實根ヲ夫々 α, β トシ。且ツ $\alpha>\beta$ トスレバ。

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

ナルベシ。而シテ

(i) $\alpha>x>\beta$ ナルトキハ。

$$x-\alpha<0,\qquad x-\beta>0$$

$$\therefore\quad (x-\alpha)(x-\beta)<0$$

故ニ。

$$a>0 \text{ ナラバ } \quad a(x-\alpha)(x-\beta)<0$$

$$a<0 \text{ ナラバ } \quad a(x-\alpha)(x-\beta)>0$$

ニシテ。何レニシテモ一元二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ。a ト反對ノ符號ヲ有スルコトヲ知ル。

(ii) $x>\alpha$ ナルトキハ尙更 $x>\beta$ ナリ。故ニ

$$x-\alpha>0,\qquad x-\beta>0$$

$$\therefore\quad (x-\alpha)(x-\beta)>0$$

又 $x<\beta$ ナルトキハ尙更 $x<\alpha$ ナリ。故ニ

$$x-\alpha<0,\qquad x-\beta<0$$

$$\therefore\quad (x-\alpha)(x-\beta)>0$$

故ニ何レノ場合ニ於テモ。

$$a>0 \text{ ナラバ } \quad a(x-\alpha)(x-\beta)>0$$

$$a<0 \text{ ナラバ } \quad a(x-\alpha)(x-\beta)<0$$

ニシテ。一元二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ。a ト同ジ符號ヲ有スルコトヲ知ル。

[定理](II) 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ガ相等シキ二ツノ實根(等根)ヲ有スルトキ。x ノ實數値ニ關シテ一元二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ。常ニ a ト同號ヲ有ス。

(證) 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ相等シキ二ツノ實根ヲ α, α トスレバ

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$$

ナルベシ。而シテ x ガ實數ニシテ $x\neq\alpha$ ナルトキハ。$x-\alpha$ ハ正ニテモ又負ニテモ

$$(x-\alpha)^2>0$$

ナリ。故ニ

$$a>0 \text{ ナラバ } \quad a(x-\alpha)^2>0$$

$$a<0 \text{ ナラバ } \quad a(x-\alpha)^2\lessgtr 0$$

ニシテ。一元二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ。a ト同號ヲ有スルコトヲ知ル。

[定理](III) 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ガ虛根ヲ有スルトキ。x ノ實數値ニ關シテ一元二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ常ニ a ト同號ヲ有ス。

(證) 一元二次式 ax^2+bx+c ヲ化スレバ。

$$ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$$

而シテ方程式 $ax^2+bx+c=0$ ガ虚根ヲ有スルヲ以ツテ $b^2-4ac<0$ ナリ。且ツ $4a^2$ ハ a ガ正ニテモ負ニテモ常ニ正ナリ。故ニ

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0 \quad \text{即チ} \quad \frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$$

尚 $x+\frac{b}{2a}$ ハ正ニテモ負ニテモ。

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$$

$$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$$

此故ニ。

$a>0$ ナラバ $ax^2+bx+c>0$

$a<0$ ナラバ $ax^2+bx+c<0$

ニシテ。一元二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ a ト同號ヲ有スルコトヲ知ル。

以上ノ三定理ヲ合スレバ。次ノ如ク換言スルコトヲ得ベシ。

一元二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ。方程式 $ax^2+bx+c=0$ ガ相異ナル二ツノ實根ヲ有シ x ガ此等ノ二根ノ間ノ値ヲ取ル場合ヲ除ケバ。x ノ實數値ニ關シテ常ニ a ト同號ヲ有ス。

例　一元二次式 $x^2+px+\frac{p}{2}$ ガ。x ノ實數値ニ關シテ常ニ正ナル爲メニハ。p ノ値ノ範圍如何。

[解]　$$x^2+px+\frac{p}{2}=x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p}{2}$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{2p-p^2}{4}$$

而シテ $x+\frac{p}{2}$ ハ正ニテモ負ニテモ。x ノ實數値ニ關シテ常ニ。

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2>0$$

故ニ。初メノ二次式ガ x ノ實數値ニ關シテ常ニ正ナル爲メニハ。

$$\frac{2p-p^2}{4}>0$$

ナラザルベカラズ。即チ

$$2p-p^2>0$$

$$p(2-p)>0$$

從ツテ次ノ二ツノ場合ノ何レカナルベシ。

(i)	(ii)
$\left.\begin{array}{l} p>0 \\ 2-p>0 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} p<0 \\ 2-p<0 \end{array}\right\}$
即チ	即チ
$\left.\begin{array}{l} p>0 \\ 2>p \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} p<0 \\ 2<p \end{array}\right\}$
$\therefore\ 2>p>0$	斯様ナル p ノ値ナシ。

此故ニ。所要ノ p ノ値ノ範圍ハ $2>p>0$ ナリ。

[定理] (IV) $a>0$ ナルトキ x ノ實數値ニ關シテ一元二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ。$x=-\dfrac{b}{2a}$ ナルトキニ最小ナリ。又 $a<0$ ナルトキ x ノ實數値ニ關シテ一元二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ。$x=-\dfrac{b}{2a}$ ナルトキニ最大ナリ。

(證) 定理(III)ノ證明ト同樣ニシテ。

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+a\times\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac-b^2}{4a}+a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

ナリ。而シテ $a>0$ ナルトキハ。x ノ實數値ニ關シテ

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$$

ナルヲ以ツテ。$x+\dfrac{b}{2a}$ ガ 0 ニアラザレバ二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ常ニ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ヨリ大ナリ。故ニ

$$x+\frac{b}{2a}=0 \quad 即チ \quad x=-\frac{b}{2a}$$

ナルトキニ。二次式ノ値ハ最小ニシテ。其最小値ハ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ナリ。

次ニ。$a<0$ ナルトキハ。x ノ實數値ニ關シテ

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$$

ナルヲ以ツテ。$x+\dfrac{b}{2a}$ ガ 0 ニアラザレバ。二次式 ax^2+bx+c ノ値ハ常ニ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ヨリ小ナリ。故ニ

$$x+\frac{b}{2a}=0 \quad 即チ \quad x=-\frac{b}{2a}$$

ナルトキニ。二次式ノ値ハ最大ニシテ。其最大値ハ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ナリ。

例 $ax(x-b)-b(x-a)^2$ ノ最大値若クハ最小値ヲ求ム。但シ $a\neq b$ トス。

［解］ $ax(x-b)-b(x-a)^2=ax^2-abx-b(x^2-2ax+a^2)$

$$=(a-b)x^2+abx-a^2b$$

$$=(a-b)\left\{x^2+\frac{ab}{a-b}x-\frac{a^2b}{a-b}\right\}$$

$$=(a-b)\left\{x^2+\frac{ab}{a-b}x+\left(\frac{ab}{2(a-b)}\right)^2-\left(\frac{ab}{2(a-b)}\right)^2-\frac{a^2b}{a-b}\right\}$$

$$=(a-b)\left\{\left(x+\frac{ab}{2(a-b)}\right)^2-\frac{a^2b^2}{4(a-b)^2}-\frac{a^2b}{a-b}\right\}$$

$$=(a-b)\left\{\left(x+\frac{ab}{2(a-b)}\right)^2-\frac{a^2b^2+4a^2b(a-b)}{4(a-b)^2}\right\}$$

$$=(a-b)\left(x+\frac{ab}{2(a-b)}\right)^2-\frac{a^2b(b+4a-4b)}{4(a-b)}$$

$$=\frac{a^2b(3b-4a)}{4(a-b)}+(a-b)\left(x+\frac{ab}{2(a-b)}\right)^2$$

故ニ。$a-b>0$ 即チ $a>b$ ナルトキハ。

$$x+\frac{ab}{2(a-b)}=0,\qquad x=-\frac{ab}{2(a-b)}$$

ナルトキニ。初メノ二次式ハ最小ニシテ。最小値ハ $\frac{a^2b(3b-4a)}{4(a-b)}$ ナリ。

又 $a-b<0$ 即チ $a<b$ ナルトキハ。

$$x+\frac{ab}{2(a-b)}=0,\qquad x=-\frac{ab}{2(a-b)}$$

ナルトキニ。初メノ二次式ハ最大ニシテ。最大値ハ $\frac{a^2b(3b-4a)}{4(a-b)}$ ナリ。

2. 一元二次式ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽ條件。

一元二次式 ax^2+bx+c ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽ爲メニ必要ナル條件トシテ。次ノ定理アリ。

［定理］(I) 一元二次式 ax^2+bx+c ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽトキハ。b^2-4ac ハ完全平方數ナリ。

（證） ax^2+bx+c ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラレタリトシ。

$$ax^2+bx+c=(Lx+M)(L'x+M')$$
$$=LL'x^2+(LM'+L'M)x+MM'$$

トスレバ。兩邊ニ於ケル x ノ相當冪ノ係數ヲ比較シテ。

$$\left.\begin{aligned}a&=LL'\\ b&=LM'+L'M\\ c&=MM'\end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。故ニ

$$b^2-4ac=(\mathrm{LM'}+\mathrm{L'M})^2-4\mathrm{LL'MM'}$$
$$=\mathrm{L^2M'^2}+2\mathrm{LM'L'M}+\mathrm{L'^2M^2}-4\mathrm{LL'MM'}$$
$$=\mathrm{L^2M'^2}-2\mathrm{LM'L'M}+\mathrm{L'^2M^2}$$
$$=(\mathrm{LM'}-\mathrm{L'M})^2$$

即チ b^2-4ac ハ完全平方數ナルコトヲ知ル。

次ニ。一元二次式 ax^2+bx+c ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽ爲メニ充分ナル條件トシテ。次ノ定理アリ。

[定理] (II)　b^2-4ac ガ完全平方數ナルトキハ。一元二次式 ax^2+bx+c ハ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルベシ。

(證)　前條定理 (III) ノトキト同樣ニ。

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$
$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

然ルニ b^2-4ac ガ完全平方數ナルトキハ。$\sqrt{b^2-4ac}$ ハ有理數ナルベク。一元二次式 ax^2+bx+c ハ二ツノ有理因數ノ積ニ分解シ得ラレタルナリ。

以上二定理ヲ合スレバ。次ノ如ク換言スルコトヲ得ベシ。

一元二次式 ax^2+bx+c ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽ爲メニ。必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ。b^2-4ac ガ完全平方數ナルコトナリ。

3.　一元二次式ガ完全平方式ナル條件。

一元二次式 ax^2+bx+c ガ完全平方式ナル爲メニ必要ナル條件トシテ。次ノ定理アリ。

[定理] (I)　一元二次式 ax^2+bx+c ガ完全平方式ナルトキハ $b^2-4ac=0$ ナリ。

(證)　ax^2+bx+c ガ完全平方式ナルトキハ。其平方根ハ一次式ナルガ故ニ。

$$ax^2+bx+c=(\mathrm{L}x+\mathrm{M})^2$$
$$=\mathrm{L}^2x^2+2\mathrm{LM}x+\mathrm{M}^2$$

トシ。兩邊ニ於ケル x ノ相當羃ノ係數ヲ比較シテ。

$$\left.\begin{aligned}a&=L^2\\ b&=2LM\\ c&=M^2\end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。此故ニ

$$b^2-4ac=(2LM)^2-4L^2M^2$$
$$=4L^2M^2-4L^2M^2=0$$

ナリ。

例 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\left(\dfrac{lx+my}{n}\right)^2$ ガ完全平方式ナルトキハ。

$$a^2l^2+b^2m^2=n^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。但シ a, b, n ハ何レモ 0 ナラヌモノトス。

[解] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\left(\dfrac{lx+my}{n}\right)^2$

$$=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{l^2x^2}{n^2}+\frac{2lmxy}{n^2}+\frac{m^2y^2}{n^2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{l^2}{n^2}\right)x^2-\frac{2lm}{n^2}xy+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{m^2}{n^2}\right)y^2$$

然ルニ。本式ガ完全平方式ナルヲ以ッテ。

$$\left\{-\frac{2lm}{n^2}\right\}^2-4\left(\frac{1}{a^2}-\frac{l^2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{m^2}{n^2}\right)=0$$
$$\frac{4l^2m^2}{n^4}-4\times\frac{n^2-a^2l^2}{a^2n^2}\times\frac{n^2-b^2m^2}{b^2n^2}=0$$

$$\frac{l^2m^2}{n^4}-\frac{(n^2-a^2l^2)(n^2-b^2m^2)}{a^2b^2n^2}=0$$

$a\neq0,\ b\neq0,\ n\neq0$ ナルヲ以ッテ分母ヲ拂ヘバ。

$$a^2b^2l^2m^2-(n^2-a^2l^2)(n^2-b^2m^2)=0$$
$$a^2b^2l^2m^2-n^4+a^2l^2n^2+b^2m^2n^2-a^2b^2l^2m^2=0$$
$$-n^4+a^2l^2n^2+b^2m^2n^2=0$$
$$a^2l^2n^2+b^2m^2n^2=n^4$$
$$\therefore\quad a^2l^2+b^2m^2=n^2$$

次ニ。一元二次式 ax^2+bx+c ガ完全平方式ナル爲メニ充分ナル條件トシテ。次ノ定理アリ。

[定理] (II) $b^2-4ac=0$ ナルトキハ一元二次式 ax^2+bx+c ハ完全平方式ナリ。但シ $a>0$ ナリトス。

(證) 附錄第1條定理(III)ト同樣ニシテ。

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

故ニ $b^2-4ac=0$ ナルトキハ。

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

即チ完全平方式ナルコトヲ知ル。

以上二定理ヲ合セテ次ノ如ク換言スルコトヲ得ベシ。

$a>0$ ナル一元二次式 ax^2+bx+c ガ完全平方式ナル爲メニ。必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ。$b^2-4ac=0$ ナルコトナリ。

又。ax^2+bx+c ガ完全平方式ナルコトハ。方程式 $ax^2+bx+c=0$ ガ二重根(等根)ヲ有スルコトナルヲ以ツテ。此結果ハ次ノ如ク表ハスコトヲ得ベシ。

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ガ二重根(等根)ヲ有スル爲メニ。必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ。$b^2-4ac=0$ ナルコトナリ。

[II] 二元二次式

4. 二元二次式ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽ條件。

二元二次式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽ爲メニ。必要ナル條件トシテ次ノ定理アリ。

[定理](I) 二元二次式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽトキハ。

$$\left.\begin{array}{l} 2fgh-af^2-bg^2-ch^2+abc=0 \\ h^2-ab>0 \end{array}\right\}$$

ナリ。

(證) 此二元二次式ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラレタリトシ。

$$\begin{aligned} &ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c \\ &\qquad =(Lx+My+N)(L'x+M'y+N') \end{aligned}$$

ト置キテ右邊ヲ相乘スレバ。

$$\begin{aligned} &ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c \\ &\qquad =LL'x^2+(LM'+L'M)xy+MM'y^2 \\ &\qquad\qquad +(LN'+L'N)x+(MN'+M'N)y+NN' \end{aligned}$$

ヲ得ベク。兩邊ニ於ケル相當項ノ係數ヲ比較シテ。

$$\left.\begin{aligned} a &= LL' \\ 2h &= LM'+L'M \\ b &= MM' \\ 2g &= LN'+L'N \\ 2f &= MN'+M'N \\ c &= NN' \end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。故ニ

$$\begin{aligned} &2fgh-af^2-bg^2-ch^2+abc \\ &=2\times\frac{MN'+M'N}{2}\times\frac{LN'+L'N}{2}\times\frac{LM'+L'M}{2} \\ &\qquad -LL'\left(\frac{MN'+M'N}{2}\right)^2-MM'\left(\frac{LN'+L'N}{2}\right)^2 \\ &\qquad -NN'\left(\frac{LM'+L'M}{2}\right)^2+LL'MM'NN' \\ &=\tfrac{1}{4}\{(MN'+M'N)(LN'+L'N)(LM'+L'M) \\ &\qquad -LL'(MN'+M'N)^2-MM'(LN'+L'N)^2 \\ &\qquad -NN'(LM'+L'M)^2+4LL'MM'NN'\} \\ &=\tfrac{1}{4}\{L^2MM'N'^2+L^2M'^2NN'+LL'MM'NN' \\ &\qquad +LL'M'^2N^2+LL'M^2N'^2+LL'MM'NN' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+L'^2M^2NN'+L'^2MM'N^2-LL'M^2N'^2 \\ &-2LL'MM'NN'-LL'M'^2N^2-L^2MM'N'^2 \\ &-2LL'MM'NN'-L'^2MM'N^2-L^2M'^2NN' \\ &-2LL'MM'NN'-L'^2M^2NN'+4LL'MM'NN'\}=0 \end{aligned}$$

ニシテ。且ツ

$$\begin{aligned} 4h^2-4ab &=(LM'+L'M)^2-4LL'MM' \\ &=L^2M'^2+2LM'L'M+L'^2M^2-4LL'MM' \\ &=L^2M'^2-2LM'L'M+L'^2M^2 \\ &=(LM'-L'M)^2>0 \end{aligned}$$

即チ　$4(h^2-ab)>0$　　$\therefore\ h^2-ab>0$

次ニ二元二次式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽ爲メニ。充分ナル條件トシテ次ノ定理アリ。

[定理] (II)　$2fgh-af^2-bg^2-ch^2+abc=0$ 及ビ $h^2-ab>0$ ナルトキハ。二元二次式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ハ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルベシ。

(證)　此二元二次式ヲ x ノ降冪ニ列ベテ變化スレバ。

$$\begin{aligned} &ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c \\ &\quad=ax^2+2(hy+g)x+(by^2+2fy+c) \\ &\quad=a\left\{x^2+\frac{2(hy+g)}{a}x+\frac{by^2+2fy+c}{a}\right\} \end{aligned}$$

$$=a\left\{x^2+\frac{2(hy+g)}{a}x+\left(\frac{hy+g}{a}\right)^2-\left(\frac{hy+g}{a}\right)^2+\frac{by^2+2fy+c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{hy+g}{a}\right)^2-\frac{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}{a^2}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{hy+g}{a}\right)^2-\frac{(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)}{a^2}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{hy+g}{a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)}}{a}\right)^2\right\}$$

$$=a\left\{x+\frac{hy+g}{a}+\frac{\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)}}{a}\right\}\times$$

$$\left\{x+\frac{hy+g}{a}-\frac{\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)}}{a}\right\}$$

然ルニ。

$$2fgh-af^2-bg^2-ch^2+abc=0$$

$$2afgh-a^2f^2-abg^2-ach^2+a^2bc=0$$

$$-abg^2-ach^2+a^2bc=-2afgh+a^2f^2$$

$$g^2h^2-abg^2-ach^2+a^2bc=g^2h^2-2afgh+a^2f^2$$

$$g^2(h^2-ab)-ac(h^2-ab)=(gh-af)^2$$

$$(h^2-ab)(g^2-ac)=(gh-af)^2$$

$$\therefore\quad (gh-af)^2-(h^2-ab)(g^2-ac)=0$$

且ツ。$h^2-ab>0$ ナルガ故ニ。y ノ二次式

$$(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)$$

ハ完全平方式ナルコトヲ知ルベク。其平方根ハ

一次有理式ナルベシ。故ニ初メノ二元二次式ハ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽコト明ラカナリ。

以上二定理ヲ合セテ。次ノ如ク換言スルコトヲ得ベシ。

二元二次式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽ爲メニ。必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ。

$2fgh-af^2-bg^2-ch^2+abc=0$ 及ビ $h^2-ab>0$

ナルコトナリ。

例(1) 次ノ式ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽ爲メニハ。m ノ値如何。

$$3x^2+mxy+2y^2+5x-4y+1$$

[解] 此場合ニハ。

$$\left.\begin{array}{l}a=3\\2h=m\\b=2\\2g=5\\2f=-4\\c=1\end{array}\right\}\quad\text{即チ}\quad\left.\begin{array}{l}a=3\\h=\dfrac{m}{2}\\b=2\\g=\dfrac{5}{2}\\f=-2\\c=1\end{array}\right\}$$

故ニ。

$$2fgh-af^2-bg^2-ch^2+abc=0$$

ニ此等ノ値ヲ置ケバ。

$$2(-2)\times\frac{5}{2}\times\frac{m}{2}-3(-2)^2-2\left(\frac{5}{2}\right)^2-1\times\left(\frac{m}{2}\right)^2+3\times2\times1=0$$

$$-5m-12-\frac{25}{2}-\frac{m^2}{4}+6=0$$

$$-20m-24-50-m^2=0$$

$$m^2+20m+74=0$$

$$\therefore\quad m=-10\pm\sqrt{10^2-74}$$

$$=-10\pm\sqrt{26}$$

而シテ $m=-10+\sqrt{26}$ ヲ取レバ。

$$h^2-ab=\left(\frac{m}{2}\right)^2-3\times2=\tfrac{1}{4}\{m^2-24\}$$

$$=\tfrac{1}{4}\{(-10+\sqrt{26})^2-24\}=\tfrac{1}{4}\{100+26-20\sqrt{26}-24\}$$

$$=\tfrac{1}{4}\{102-20\sqrt{26}\}=\tfrac{1}{4}\{\sqrt{102^2}-\sqrt{20^2\times26}\}$$

$$=\tfrac{1}{4}\{\sqrt{10404}-\sqrt{10400}\}>0$$

又 $m=-10-\sqrt{26}$ ヲ取レバ。同様ニ

$$h^2-ab=\tfrac{1}{4}\{(-10-\sqrt{26})^2-24\}$$

$$=\tfrac{1}{4}\{102+20\sqrt{26}\}>0$$

故ニ所要ノ値ハ。

$$m=-10\pm\sqrt{26}\quad\text{答}$$

例(2) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\left.\begin{array}{l}5x^2-2xy+y^2+4x-2y+1=0\\4x^2-2xy+2y^2+5x-5y+3=0\end{array}\right\}$$

[解]

$$5x^2-2xy+y^2+4x-2y+1=0\quad\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

$$4x^2-2xy+2y^2+5x-5y+3=0\quad\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

トシ。先ツ(i)ガ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽカ否カヲ檢スルニ。(i)ニテハ

$$\left.\begin{array}{r}a=5\\2h=-2\\b=1\\2g=4\\2f=-2\\c=1\end{array}\right\}\text{即チ}\left\{\begin{array}{r}a=5\\h=-1\\b=1\\g=2\\f=-1\\c=1\end{array}\right.$$

$$2fgh-af^2-bg^2-ch^2+abc$$

$$=2(-1)\times2(-1)-5(-1)^2-1\times2^2-1\times(-1)^2+5\times1\times1$$

$$=4-5-4-1+5=-1\neq0$$

故ニ。(i)ハ二ツノ一次有理因數ニ分解スルコト能ハズ。次ニ(ii)ニ就キテ同様ニ檢スレバ。

(ii)ニテハ

$$\left.\begin{array}{r} a=4 \\ 2h=-2 \\ b=2 \\ 2g=5 \\ 2f=-5 \\ c=3 \end{array}\right\}\ \text{即チ}\ \left.\begin{array}{l} a=4 \\ h=-1 \\ b=2 \\ g=\dfrac{5}{2} \\ f=-\dfrac{5}{2} \\ c=3 \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} &2fgh-af^2-bg^2-ch^2+abc \\ &\quad=2\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)(-1)-4\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &\qquad\qquad\qquad -3(-1)^2+4\times2\times3 \\ &\quad=\frac{25}{2}-25-\frac{25}{2}-3+24=-4\neq0 \end{aligned}$$

故ニ。(ii) モ亦二ツノ一次有理因數ニ分解スルコト能ハズ。

次ニ (i) ヨリ (ii) ヲ減ジタル方程式

$$x^2-y^2-x+3y-2=0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \text{(iii)}$$

ニ就キテ同樣ニ檢スレバ。(iii) ニテハ

$$\left.\begin{array}{r} a=1 \\ 2h=0 \\ b=-1 \\ 2g=-1 \end{array}\right\}\ \text{即チ}\ \left.\begin{array}{l} a=1 \\ h=0 \\ b=-1 \\ g=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2f=3 \\ c=-2 \end{array}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} f=\dfrac{3}{2} \\ c=-2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} &2fgh-af^2-bg^2-ch^2+abc \\ &\quad=-af^2-bg^2+abc \\ &\quad=-1\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1\times(-1)(-2) \\ &\quad=-\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+2=0 \end{aligned}$$

故ニ。此 (iii) ハ二ツノ一次有理因數ニ分解シ得ラルヽコトヲ知リ得ベシ。即チ (iii) ヲ化シテ。

$$x^2-x-(y^2-3y+2)=0$$

$$x^2-x-(y-1)(y-2)=0$$

$$\{x+(y-2)\}\{x-(y-1)\}=0$$

$$(x+y-2)(x-y+1)=0$$

$$\therefore\ x+y-2=0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \text{(iv)}$$

$$x-y+1=0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \text{(v)}$$

依ツテ (iv) ト (i) 若クハ (ii) トヲ組合セテ解キ。

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1\pm\sqrt{-39}}{8} \\ y=\dfrac{15\mp\sqrt{-39}}{8} \end{array}\right\}$$

ナル二組ノ根ヲ得ベク。又 (v) ト (i) 若クハ (ii) トヲ組合セテ解キ。

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{4} \\ y&=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{4} \end{aligned}\right\}$$

ナル二組ノ根ヲ得ベシ。以上四組ハ即チ所要ノ根ナリ。

5. 二元二次式ガ完全平方式ナル條件。

二元二次式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ が完全平方式ナル爲メニ。必要ナル條件トシテ次ノ定理アリ。

[定理](I) 二元二次式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ガ完全平方式ナルトキハ。a, b, c ハ何レモ正ニシテ。h, g, f ハ何レモ正ナルカ若クハ其中一ツガ正ニシテ殘ル二ツガ負。且ツ

$$\left.\begin{aligned} h^2-ab&=0 \\ g^2-ac&=0 \\ f^2-bc&=0 \end{aligned}\right\}$$

ナリ

(證) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ガ完全平方式ナルトキハ。其平方根ハ x, y ニ關スル一次式ナルガ故ニ。

$$\begin{aligned} &ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c \\ &\quad=(Lx+My+N)^2 \\ &\quad=L^2x^2+M^2y^2+N^2+2LMxy+2LNx+2MNy \\ &\quad=L^2x^2+2LMxy+M^2y^2+2LNx+2MNy+N^2 \end{aligned}$$

トシ。兩邊ニ於ケル相當項ノ係數ヲ比較シテ。

$$\left.\begin{aligned} a&=L^2 \\ 2h&=2LM \\ b&=M^2 \\ 2g&=2LN \\ 2f&=2MN \\ c&=N^2 \end{aligned}\right\} \text{即チ} \left.\begin{aligned} a&=L^2 && \dots\text{(i)} \\ h&=LM && \dots\text{(ii)} \\ b&=M^2 && \dots\text{(iii)} \\ g&=LN && \dots\text{(iv)} \\ f&=MN && \dots\text{(v)} \\ c&=N^2 && \dots\text{(vi)} \end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。而シテ (i), (iii), (vi) ヨリ a, b, c ハ何レモ平方ナルガ故ニ。正ナルコトヲ知リ得ベシ。

次ニ (ii), (iv), (v) ヲ見レバ。L, M, N ガ何レモ正ニテモ負ニテモ此場合ハ h, g, h ガ何レモ正ニシテ。且ツ L, M, N ガ其中唯一ツガ正殘リ二ツガ負ニテモ。唯二ツガ正殘リ一ツガ負ニテモ。此場合ハ h, g, h ノ中唯一ツガ正殘リ二ツガ負ナルコト

ヲ知リ得ベシ。

尙又 (i) ヨリ (vi) ニ至ル六關係ヨリ L, M, N ヲ消去スルニ。(ii), (iv), (v) ヲ二乘スレバ。

$$\left.\begin{aligned} h^2&=L^2M^2\\ g^2&=L^2N^2\\ f^2&=M^2N^2 \end{aligned}\right\}$$

此等ニ (i), (iii), (vi) ヨリ代用スレバ。

$$\left.\begin{aligned} h^2&=ab\\ g^2&=ac\\ f^2&=bc \end{aligned}\right\} \text{即チ} \left.\begin{aligned} h^2-ab&=0\\ g^2-ac&=0\\ f^2-bc&=0 \end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。

次ニ。二元二次式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ガ完全平方式ナル爲メニ充分ナル條件トシテ。次ノ定理アリ。

[定理] (II)　a, b, c ガ何レモ正ニシテ。h, g, f ハ何レモ正ナルカ若クハ其中唯一ツガ正ニシテ殘ル二ツガ負。且ツ

$$\left.\begin{aligned} h^2-ab&=0\\ g^2-ac&=0\\ f^2-bc&=0 \end{aligned}\right\}$$

ナルトキハ。二元二次式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ハ完全平方式ナリ。

(證) 前條定理(II)ト同様ニシテ。

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{hy+g}{a}\right)^2-\frac{(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)}{a^2}\right\}$$

然ルニ。

$$h^2-ab=0 \qquad \therefore\ h=\pm\sqrt{ab}$$
$$g^2-ac=0 \qquad \therefore\ g=\pm\sqrt{ac}$$
$$f^2-bc=0 \qquad \therefore\ f=\pm\sqrt{bc}$$

而シテ h, g, f ガ何レモ正ナルトキハ。

$$gh-af=\sqrt{ac}\sqrt{ab}-a\sqrt{bc}$$
$$=a\sqrt{bc}-a\sqrt{bc}=0$$

又 h, g, f ノ中唯一ツガ正殘ル二ツガ負ナル場合ヲ分チテ。

$$\left.\begin{aligned} h&>0\\ g&<0\\ f&<0 \end{aligned}\right\} \text{ナルトキ}\ gh-af=(-\sqrt{ac})\sqrt{ab}-a(-\sqrt{bc})=0$$

$$\left.\begin{aligned} h&<0\\ g&>0\\ f&<0 \end{aligned}\right\} \text{ナルトキ}\ gh-af=\sqrt{ac}(-\sqrt{ab})-a(-\sqrt{bc})=0$$

$$\left.\begin{array}{l} h<0 \\ g<0 \\ f>0 \end{array}\right\}$$ ナルトキ $gh-af=(-\sqrt{ac})(-\sqrt{ab})-a\sqrt{bc}=0$

此故ニ何レノ場合ニテモ。

$$(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)=0$$

ニシテ。從ツテ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=a\left\{\left(x+\frac{hy+g}{a}\right)^2\right\}$$
$$=a\left(x+\frac{hy+g}{a}\right)^2$$

ナリ。即チ二元二次式ガ完全平方式ナルコトヲ知リ得ベシ。

以上二定理ヲ合セテ次ノ如ク換言スルコトヲ得ベシ。

二元二次式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ガ完全平方式ナル爲メニ。必要ニシテ且シ充分ナル條件ハ。a, b, c ガ何レモ正ニシテ。h, g, f ハ何レモ正ナルカ若クハ其中唯一ツガ正ニシテ殘ル二ツガ負。且ツ

$$\left.\begin{array}{l} h^2-ab=0 \\ g^2-ac=0 \\ f^2-bc=0 \end{array}\right\}$$

ナルコトナリ。

例. 次ノ二元二次式ガ完全平方式ナル爲メニハ。l, m, n ノ値如何。

$$3x^2-4xy+ly^2+mx-5ny+2$$

[解] 此場合ニ。

$$\left.\begin{array}{r} a=3 \\ 2h=-4 \\ b=l \\ 2g=m \\ 2f=-5n \\ c=2 \end{array}\right\} \text{即チ} \left.\begin{array}{l} a=3 \\ h=-2 \\ b=l \\ g=\dfrac{m}{2} \\ f=-\dfrac{5n}{2} \\ c=2 \end{array}\right\}$$

故ニ。

$$h^2-ab=(-2)^2-3l=0$$
$$\therefore\ l=\frac{4}{3}$$

$$g^2-ac=\left(\frac{m}{2}\right)^2-3\times2=0$$
$$\frac{m^2}{4}-6=0 \qquad \therefore\ m=\pm2\sqrt{6}$$

$$f^2-bc=\left(-\frac{5n}{2}\right)^2-l\times2=0$$
$$\frac{25n^2}{4}-\frac{4}{3}\times2=0$$
$$75n^2-32=0 \qquad \therefore\ n\pm\frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

而シテ。hガ負ナルヲ以ツテg,fハ一ツガ正ニシテ一ツガ負ナラザルベカラズ。依ツテ所要ノ値ハ

$$\left.\begin{aligned} l&=\frac{4}{3}\\ m&=2\sqrt{6}\\ n&=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} l&=\frac{4}{3}\\ m&=-2\sqrt{6}\\ n&=-\frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}\right\}$$

ナル二組ナリ。

[III] 一元三次方程式ノ複根

6. 一元三次方程式ノ二重根　一元三次方程式ガ複根ヲ有スル場合ハ。二重根若クハ三重根ナルベシ。而シテ二重根ノ場合ニ次ノ定理アリ。

[定理]　一元三次方程式$x^3+px^2+qx+r=0$ガ二重根ヲ有スルトキハ。

$$p^2q^2-4(p^3r+q^3)+18pqr-27r^2=0$$

ナル關係アリ。

(證)　一元三次方程式$x^3+px^2+qx+r=0$ガ二重根αヲ有スルトキハ。

$$\begin{aligned} x^3+px^2+qx+r&=(x-\alpha)^2(x-\beta)\\ &=x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\alpha^2\beta \end{aligned}$$

ナルベシ。但シβハ此三次方程式ノ殘ル一根ヲ表ハスモノトス。而シテ兩邊ニ於ケル相當項ノ係數ヲ比較シテ。

$$\left.\begin{aligned} p&=-(2\alpha+\beta)\\ q&=\alpha^2+2\alpha\beta\\ r&=-\alpha^2\beta \end{aligned}\right\} \text{即チ} \left.\begin{aligned} 2\alpha+\beta&=-p \quad \ldots \text{(i)}\\ \alpha^2+2\alpha\beta&=q \quad \ldots \text{(ii)}\\ \alpha^2\beta&=-r \quad \ldots \text{(iii)} \end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。

次ニ。此等ノ三關係ヨリ α, β ヲ消去スルニ。(i) ヨリ

$$\beta=-(2\alpha+p) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(iv)}$$

之レヲ (ii) ニ置ケバ。

$$\alpha^2-2\alpha(2\alpha+p)=q$$

$$\therefore\ 3\alpha^2+2p\alpha+q=0 \quad \ldots \ldots \text{(v)}$$

又 (iv) ヲ (iii) ニ置ケバ。

$$-\alpha^2(2\alpha+p)=-r$$

$$\therefore\ 2\alpha^3+p\alpha^2-r=0 \quad \ldots \ldots \text{(vi)}$$

尙 (v)×2α ヨリ (vi)×3 ヲ減ズレバ。

$$6\alpha^3+4p\alpha^2+2q\alpha-(6\alpha^3+3p\alpha^2-3r)=0$$

$$\therefore\ p\alpha^2+2q\alpha+3r=0 \quad \ldots \ldots \text{(vii)}$$

而シテ。(v), (vii) ヲ α^2, α ニ關スル聯立方程式トシテ解ケバ。

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2&=\frac{6pr-2q^2}{6q-2p^2}\\ \alpha&=\frac{pq-9r}{6q-2p^2}\end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベク。從ッテ

$$\frac{6pr-2q^2}{6q-2p^2}=\left(\frac{pq-9r}{6q-2p^2}\right)^2$$

$$\therefore\ (6pr-2q^2)(6q-2p^2)=(pq-9r)^2$$

ヲ得ベシ。尙之レヲ化シテ

$$36pqr-12q^3-12p^3r+4p^2q^2$$
$$=p^2q^2-18pqr+81r^2$$
$$3p^2q^2-12(p^3r+q^3)+54pqr-81r^2=0$$
$$\therefore\ p^2q^2-4(p^3r+q^3)+18pqr-27r^2=0$$

或ハ又。此定理ハ第42條定理ニヨリ次ノ如ク證明スルコトヲ得ベシ。今

$$f(x)=x^3+px^2+qx+r$$

トスレバ。

$$f'(x)=3x^2+2px+q$$

故ニ三次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ ガ二重根 α ヲ有スルトキハ。α ハ二方程式

$$\left.\begin{aligned}x^3+px^2+qx+r&=0\\ 3x^2+2px+q&=0\end{aligned}\right\}$$

ノ共通根ナルベシ。依ッテ此等ノ二方程式ニ適合スルコトヲ知ル。卽チ

$$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0 \quad \ldots \ldots \ldots \text{(i)}$$

$$3\alpha^2+2p\alpha+q=0 \quad \ldots \ldots \ldots \text{(ii)}$$

ナル二關係ヨリ α ヲ消去スルニ。(i)×3 ヨリ (ii)×α ヲ減ズレバ。

$$3\alpha^3+3p\alpha^2+3q\alpha+3r-(3\alpha^3+2p\alpha^2+q\alpha)=0$$

$$\therefore\ p\alpha^2+2q\alpha+3r=0 \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \text{(iii)}$$

依ツテ (ii), (iii) ヨリ α ヲ消去スレバ。本定理ノ結果ヲ得ルコト明ラカナリ。

系 一元三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ガ二重根ヲ有スルトキハ。

$$b^2c^2-4(b^3d+ac^3)+18abcd-27a^2d^2=0$$

ナル關係アリ。

(證) 此方程式ヲ化シテ。

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

故ニ。本定理ノ關係ニ

$$p=\frac{b}{a},\quad q=\frac{c}{a},\quad r=\frac{d}{a}$$

ト置ケバ。

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{c}{a}\right)^2-4\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^3\left(\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}\right)^3\right\}+18\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{d}{a}\right)$$
$$-27\left(\frac{d}{a}\right)^2=0$$

$$\frac{b^2c^2}{a^4}-4\left(\frac{b^3d}{a^4}+\frac{c^3}{a^3}\right)+\frac{18bcd}{a^3}-\frac{27d^2}{a^2}=0$$

$$\therefore\ b^2c^2-4(b^3d+ac^3)+18abcd-27a^2d^2=0$$

ナル關係ヲ得ベシ。

例 次ノ三次方程式ガ二重根ヲ有スルトキハ。k ノ値如何。

$$x^3+3x^2-2x-\frac{k}{3}=0$$

[解] 此場合ニ

$$p=3,\quad q=-2,\quad r=-\frac{k}{3}$$

ヲ本定理ノ關係

$$p^2q^2-4(p^3r+q^3)+18pqr-27r^2=0$$

ニ置ケバ。

$$3^2(-2)^2-4\left\{3^3\left(-\frac{k}{3}\right)+(-2)^3\right\}+18\times3(-2)\left(-\frac{k}{3}\right)$$
$$-27\left(-\frac{k}{3}\right)^2=0$$

$$36-4(-9k-8)+36k-3k^2=0$$

$$3k^2-72k-68=0$$

$$\therefore\ k=\frac{36\pm\sqrt{36^2+3\times68}}{3}$$

$$=\frac{36\pm10\sqrt{15}}{3}\qquad \text{答}$$

7. 一元三次方程式ノ三重根 一元三次方程式ノ三重根ニ關シテ次ノ定理アリ。

[定理] 一元三次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ ガ三重根ヲ有スルトキハ。

$$p^2=3q \quad 及ビ \quad q^2=3pr$$

ナル關係アリ。

(證) 一元三次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ ガ三重根 α ヲ有スルトキハ。

$$x^3+px^2+qx+r=(x-\alpha)^3$$
$$=x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x-\alpha^3$$

ナルベシ。而シテ兩邊ニ於ケル相當項ノ係數ヲ比較シテ。

$$\left.\begin{aligned} p&=-3\alpha \\ q&=3\alpha^2 \\ r&=-\alpha^3 \end{aligned}\right\} \text{即チ} \quad \left.\begin{aligned} \alpha&=-\frac{p}{3} \\ \alpha^2&=\frac{q}{3} \\ \alpha^3&=-r \end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。依ツテ

$$\left.\begin{aligned} \left(-\frac{p}{3}\right)^2&=\frac{q}{3} \\ \left(\frac{q}{3}\right)^2&=\left(-\frac{p}{3}\right)(-r) \end{aligned}\right\}$$

即チ

$$\left.\begin{aligned} p^2&=3q \\ q^2&=3pr \end{aligned}\right\}$$

ナル關係アルコトヲ知ル。

系(1) 一元三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ガ三重根ヲ有スルトキハ。

$$b^2=3ac \quad 及ビ \quad c^2=3bd$$

ナル關係アリ。

(證) 此方程式ヲ化シテ。

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

故ニ。本定理ノ關係ニ

$$p=\frac{b}{a}, \quad q=\frac{c}{a}, \quad r=\frac{d}{a}$$

ト置ケバ。

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{b}{a}\right)^2&=3\left(\frac{c}{a}\right) \\ \left(\frac{c}{a}\right)^2&=3\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{a}\right) \end{aligned}\right\}$$

即チ

$$\left.\begin{aligned} b^2&=3ac \\ c^2&=3bd \end{aligned}\right\}$$

ナル關係ヲ得ベシ。

系(2) 一元三次式 ax^3+bx^2+cx+d ガ完全立方式ナルトキハ。

$$b^2=3ac \quad 及ビ \quad c^2=3bd$$

ナル關係アリ。

(證) 一元三次式 ax^3+bx^2+cx+d ガ完全立方式ナルトキハ。方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ハ三重根ヲ有スベシ。故ニ本系ヲ得ルナリ。

[IV] 一元四次方程式ノ複根

8. 一元四次方程式ノ二重根 一元四次方程式ガ複根ヲ有スル場合ヲ區別スレバ。

(i) 一ツノ二重根ヲ有スル場合。

(ii) 二ツノ二重根ヲ有スル場合。

(iii) 三重根ヲ有スル場合。

(iv) 四重根ヲ有スル場合。

ナル四通リナルベシ。而シテ二重根ニ關シテ次ノ二定理アリ。

[定理](I) 一元四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ガ一ツノ二重根ヲ有スルトキハ。

$$\{(2pq-12r)(3r^2-8qs)-(2qr-12ps)(pr-16s)\}$$
$$\times\{(3p^2-8q)(2qr-12ps)-(pr-16s)(2pq-12r)\}$$
$$=\{(pr-16s)^2-(3r^2-8qs)(3p^2-8q)\}^2$$

ナル關係アリ。

(證) 一元四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ガ一ツノ二重根 α ヲ有ストシ。

$$f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$$

トスレバ。

$$f'(x)=4x^3+3px^2+2qx+r$$

ナルベク。第24條定理ニヨリ α ハ二方程式

$$\left.\begin{aligned} x^4+px^3+qx^2+rx+s=0 \\ 4x^3+3px^2+2qx+r=0 \end{aligned}\right\}$$

ノ共通根ナルベシ。故ニ

$$\left.\begin{aligned} \alpha^4+p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s=0 \quad &\ldots\ (\mathrm{i}) \\ 4\alpha^3+3p\alpha^2+2q\alpha+r=0 \quad &\ldots\ (\mathrm{ii}) \end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。此等ノ二關係ヨリ α ヲ消去スルコト次ノ如シ。

(i)×4 $\quad 4\alpha^4+4p\alpha^3+4q\alpha^2+4r\alpha+4s=0$

(ii)×α $\quad 4\alpha^4+3p\alpha^3+2q\alpha^2+r\alpha=0$

(i)×4−(ii)α

$$\therefore\ p\alpha^3+2q\alpha^2+3r\alpha+4s=0 \quad \ldots\ \ldots\ (\mathrm{iii})$$

次ニ。

(ii)×p $\quad 4p\alpha^3+3p^2\alpha^2+2pq\alpha+pr=0$

(iii)×4 $\quad 4p\alpha^3+8q\alpha^2+12r\alpha+16s=0$

(ii)×p−(iii)×4

$$(3p^2-8q)\alpha^2+(2pq-12r)\alpha+(pr-16s)=0 \ \ldots\ (\mathrm{iv})$$

又

(iii)×r $\quad pr\alpha^3+2qr\alpha^2+3r^2\alpha+4rs=0$

(ii)×4s $\quad 16s\alpha^3+12ps\alpha^2+8qs+4rs=0$

(iii)$\times r-$(ii)$\times 4s$

$$(pr-16s)\alpha^3+(2qr-12ps)\alpha^2+(3r^2-8qs)\alpha=0$$

然ルニ $\alpha\neq0$ ナルガ故ニ。

$$(pr-16s)\alpha^2+(2qr-12ps)\alpha+(3r^2-8qs)=0 \quad \ldots \text{(v)}$$

ヲ得ベシ。而シテ (iv), (v) ヲ α^2, α ニ關スル聯立方程式トシテ解ケバ。

$$\alpha^2=\frac{(2pq-12r)(3r^2-8qs)-(2qr-12ps)(pr-16s)}{(3p^2-8q)(2qr-12ps)-(pr-16s)(2pq-12r)}$$

$$\alpha=\frac{(pr-16s)^2-(3r^2-8qs)(3p^2-8q)}{(3p^2-8q)(2qr-12ps)-(pr-16s)(2pq-12r)}$$

ヲ得ベク。從ツテ

$$\frac{(2pq-12r)(3r^2-8qs)-(2qr-12ps)(pr-16s)}{(3p^2-8q)(2qr-12ps)-(pr-16s)(2pq-12r)}$$

$$=\left\{\frac{(pr-16s)^2-(3r^2-8qs)(3p^2-8q)}{(3p^2-8q)(2qr-12ps)-(pr-16s)(2pq-12r)}\right\}^2$$

$$\therefore\ \{(2pq-12r)(3r^2-8qs)-(2qr-12ps)(pr-16s)\}$$
$$\times\{(3p^2-8q)(2qr-12ps)-(pr-16s)(2pq-12r)\}$$
$$=\{(pr-16s)^2-(3r^2-8qs)(3p^2-8q)\}^2$$

ヲ得ベシ。

[定理](II) 一元四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ガ二ツノ二重根ヲ有スルトキハ。

$$p(4q-p^2)=8r \quad 及ビ \quad (4q-p^2)^2=64s$$

ナル關係アリ。

(證) 一元四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ガ二ツノ二重根 α, β ヲ有スルトキハ。

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$
$$=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}^2$$

而シテ

$$-(\alpha+\beta)=\mathrm{L}, \quad \alpha\beta=\mathrm{M}$$

ト置ケバ。

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=(x^2+\mathrm{L}x+\mathrm{M})^2$$
$$=x^4+\mathrm{L}^2x^2+\mathrm{M}^2+2\mathrm{L}x^3+2\mathrm{M}x^2+2\mathrm{LM}x$$
$$=x^4+2\mathrm{L}x^3+(\mathrm{L}^2+2\mathrm{M})x^2+2\mathrm{LM}x+\mathrm{M}^2$$

ヲ得ベク。兩邊ニ於ケル x ノ相當項ノ係數ヲ比較シテ。

$$\left.\begin{array}{ll} p=2\mathrm{L} & \ldots \text{(i)} \\ q=\mathrm{L}^2+2\mathrm{M} & \ldots \text{(ii)} \\ r=2\mathrm{LM} & \ldots \text{(iii)} \\ s=\mathrm{M}^2 & \ldots \text{(iv)} \end{array}\right\}$$

ヲ得ベシ。此等ノ四關係ヨリ L, M ヲ消去スルニ。

(i) ヨリ。 $\mathrm{L}=\dfrac{p}{2}$

從ッテ (ii) ヨリ。

$$2\mathrm{M}=q-\mathrm{L}^2=q-\frac{p^2}{4}$$

$$\therefore\quad \mathrm{M}=\frac{1}{2}\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$$

此等ノ L, M ヲ (iii) 及ビ (iv) ニ置ケバ。夫々

$$\left.\begin{aligned} r&=2\mathrm{LM}\\ &=2\times\frac{p}{2}\times\frac{1}{2}\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\\ &\qquad\therefore\quad 8r=p(4q-p^2)\\ s&=\mathrm{M}^2=\frac{1}{4}\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^2\\ &=\frac{1}{64}(4q-p^2)^2\\ &\qquad\therefore\quad 64s=(4q-p^2)^2 \end{aligned}\right\}$$

ナル二關係ヲ得ベシ。

系 (1) 一元四次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ ガ二ツノ二重根ヲ有スルトキハ。

$$\left.\begin{aligned} 4abc-b^3&=8a^2d\\ (4ac-b^2)^2&=64a^3e \end{aligned}\right\}$$

ナル關係アリ。

(證) 此方程式ヲ化シテ。

$$x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}=0$$

故ニ本定理ノ關係ニ。

$$p=\frac{b}{a},\quad q=\frac{c}{a},\quad r=\frac{d}{a},\quad s=\frac{e}{a}$$

ト置ケバ。

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{b}{a}\right)\left\{4\left(\frac{c}{a}\right)-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}&=8\left(\frac{d}{a}\right)\\ b\left\{4\left(\frac{c}{a}\right)-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}^2&=64\left(\frac{e}{a}\right) \end{aligned}\right\}$$

即チ

$$\left.\begin{aligned} 4abc-b^3&=8a^2d\\ (4ac-b^2)^2&=64a^3e \end{aligned}\right\}$$

ナル關係ヲ得ベシ。

系 (2) 一元四次式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ガ完全平方式ナルトキハ。

$$\left.\begin{aligned} 4abc-b^3&=8a^2d\\ (4ac-b^2)^2&=64a^3c \end{aligned}\right\}$$

ナル關係アリ。

(證) 一元四次式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ガ完全平方式ナルトキハ。

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=(\mathrm{L}x^2+\mathrm{M}x+\mathrm{N})^2$$

從ッテ方程式

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

ハ化シテ。

$$(Lx^2+Mx+N)^2=0$$

ナル形式トナスコトヲ得ベク。故ニ二ツノ二重根ヲ有スベシ。即チ本系ヲ得ルナリ。

例 次ノ方程式ガ二ツノ二重根ヲ有スルトキハ。A, B ノ値及ビ此等ノ根如何。

$$x^4+3x^3+Ax^2+Bx+\frac{1}{4}=0$$

[解] 本定理ノ關係

$$\left.\begin{array}{l} p(4q-p^2)=8r \\ (4q-p^2)^2=64s \end{array}\right\}$$

ニ。$p=3$, $q=A$, $r=B$, $s=\frac{1}{4}$ ト置ケバ。夫々

$$3(4A-9)=8B \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \text{(i)}$$

$$(4A-9)^2=64\times\frac{1}{4} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \text{(ii)}$$

ヲ得ベシ。而シテ (ii) ヨリ

$$4A-9=\pm\sqrt{16}=\pm4$$

$$A=\frac{9\pm4}{4}$$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{l} A=\dfrac{9+4}{4}=\dfrac{13}{4} \\ A=\dfrac{9-4}{4}=\dfrac{5}{4} \end{array}\right\}$$

又 $A=\frac{13}{4}$ ヲ取レバ。(i) ヨリ

$$8B=3(13-9)=12 \qquad \therefore\ B=\frac{3}{2}.$$

$A=\frac{5}{4}$ ヲ取レバ。(i) ヨリ

$$8B=3(5-9)=-12 \qquad \therefore\ B=-\frac{3}{2}$$

故ニ A, B ノ値トシテ。

$$\left.\begin{array}{l} A=\dfrac{13}{4} \\ B=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} A=\dfrac{5}{4} \\ B=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$$

ナル二組ヲ得ベシ。

次ニ $A=\frac{13}{4}$, $B=\frac{3}{2}$ ヲ取レバ初メノ方程式ハ

$$x^4+3x^3+\frac{13}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=0$$

$$\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$(2x^2+3x+1)^2=0$$

$$(x+1)^2(2x+1)^2=0$$

$$\therefore\ x=-1,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$$

ナリ。又 $A=\frac{5}{4}$, $B=-\frac{3}{2}$ ヲ取レバ。初メノ方程式ハ

$$x^4+3x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=0$$

$$\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$(2x^2+3x-1)^2=0$$

$$2x^2+3x-1=0 \qquad x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

$$2x^2+3x-1=0 \qquad x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

$$\therefore\quad x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4},\ \frac{-3+\sqrt{17}}{4},\ \frac{-3-\sqrt{17}}{4},\ \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$$

ナリ。

9.　一元四次方程式ノ三重根　一元四次方程式ノ三重根ニ關シテ。次ノ定理アリ。

[定理]　一元四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ガ三重根ヲ有スルトキハ。

$$\left.\begin{array}{l}2(9pq-4q^2)^2=9(pq-6r)(pq^2+2qr-3p^2)\\3(6ps-qr)^2=(pr-16s)(pqr+8qs-9p^2s)\end{array}\right\}$$

ナル關係アリ。

(證)　一元四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ガ三重根 α ヲ有スルトキハ。

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=(x-\alpha)^3(x-\beta)$$

$$=x^4-(3\alpha+\beta)x^3+3(\alpha^2+\alpha\beta)-(\alpha^3+3\alpha^2\beta)x+\alpha^3\beta$$

ナルベシ。但シ β ハ此四次方程式ノ殘ル一根ヲ表ハスモノトス。而シテ兩邊ニ於ケル相當項ノ係數ヲ比較シテ。

$$\left.\begin{array}{l}p=-(3\alpha+\beta)\\q=3(\alpha^2+\alpha\beta)\\r=-(\alpha^3+3\alpha^2\beta)\\s=\alpha^3\beta\end{array}\right\}\ \text{即チ}\ \left.\begin{array}{rl}3\alpha+\beta=-p & \dots\ \text{(i)}\\\alpha^2+\alpha\beta=\frac{q}{3} & \dots\ \text{(ii)}\\\alpha^3+3\alpha^2\beta=-r & \dots\ \text{(iii)}\\\alpha^3\beta=s & \dots\ \text{(iv)}\end{array}\right\}$$

ヲ得ベシ。

次ニ。此等ノ四關係ヨリ α,β ヲ消去スルニ。(i) ヨリ。

$$\beta=-(3\alpha+p)\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \text{(v)}$$

之レヲ (ii) ニ代用スレバ。

$$\alpha^2-\alpha(3\alpha+p)=\frac{q}{3}$$

$$-2\alpha^2-p\alpha=\frac{q}{3}$$

$$\therefore\quad 6\alpha^2+3p\alpha+q=0\ \dots\ \dots\ \text{(vi)}$$

又 (v) ヨリ (iii) ニ代用スレバ。

$$\alpha^3-3\alpha^2(3\alpha+p)=-r$$

$$-8\alpha^3-3p\alpha^2+r=0$$

$$\therefore\quad 8\alpha^3+3p\alpha^2-r=0\ \dots\ \dots\ \text{(vii)}$$

尙又。(v) ヨリ (iv) ニ代用スレバ。

$$-\alpha^3(3\alpha+p)=s$$

$$\therefore\quad 3\alpha^4+p\alpha^3+s=0 \quad \ldots\ldots(\text{viii})$$

ヲ得ベシ。次ニ (vi), (vii), (viii) ヨリ α ヲ消去スルニ。(vii)$\times q+$(vi)$\times r$ ヲ作レバ。

$$8q\alpha^3+3pq\alpha^2-qr+(6r\alpha^2+3pr\alpha+qr)=0$$

$$8q\alpha^3+(3pq+6r)\alpha^2+3pr\alpha=0$$

$\alpha \neq 0$ ナルヲ以ツテ。

$$\therefore\quad 8q\alpha^2+(3pq+6r)\alpha+3pr=0 \quad \ldots\ (\text{ix})$$

ヲ得ベク。又 (viii)$\times r+$(vii)$\times s$ ヲ作レバ。

$$3r\alpha^4+pr\alpha^3+rs+(8s\alpha^3+3ps\alpha^2-rs)=0$$

$$3r\alpha^4+(pr+8s)\alpha^3+3ps\alpha^2=0$$

$$\therefore\quad 3r\alpha^2+(pr+8s)\alpha+3ps=0 \quad \ldots\ (\text{x})$$

ヲ得ベシ。而シテ (vi), (ix) ヨリ α ヲ消去スレバ。容易ニ

$$\left\{\frac{9pq-4q^2}{3(pq-6r)}\right\}^2=\frac{pq^2+2qr-3p^2}{2(pq-6r)}$$

$$\therefore\quad 2(9pq-4q^2)^2=9(pq-6r)(pq^2+2qr-3p^2)$$

ヲ得ベシ。又 (vi), (x) ヨリ α ヲ消去スレバ。

$$\left\{\frac{6ps-qr}{pr-16s}\right\}^2=\frac{pqr+8qs-9p^2s}{3(pr-16s)}$$

$$\therefore\quad 3(6ps-qr)^2=(pr-16s)(pqr+8qs-9p^2s)$$

ナル關係ヲ得ベシ。

或ハ又此定理ハ。第24條定理ニヨリ次ノ如ク證明スルコトヲ得ベシ。今

$$f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$$

トスレバ。

$$f'(x)=4x^3+3px^2+2qx+r$$

$$f''(x)=12x^2+6px+2q$$

故ニ。四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ガ三重根 α ヲ有スルトキハ。α ハ三方程式

$$\left.\begin{array}{r} x^4+px^3+qx^2+rx+s=0 \\ 4x^3+3px^2+2qx+r=0 \\ 12x^2+6px+2q=0 \end{array}\right\}$$

ノ共通根ナルベシ。依ツテ

$$\left.\begin{array}{r} \alpha^4+p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s=0 \\ 4\alpha^3+3p\alpha^2+2q\alpha+r=0 \\ 12\alpha^2+6p\alpha+2q=0 \end{array}\right\}$$

ヨリ α ヲ消去スレバ。容易ニ本定理ノ二關係ヲ得ラルベシ。

10. 一元四次方程式ノ四重根。 一元四次方程式ノ四重根ニ關シテ次ノ定理アリ。

［定理］ 一元四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ガ四重根ヲ有スルトキハ。

$$\left.\begin{aligned}3p^2&=8q\\ p^3&=16r\\ p^4&=256s\end{aligned}\right\}$$

ナル關係アリ。

（證） 一元四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ガ四重根 α ヲ有スルトキハ。

$$\begin{aligned}x^4+px^3+qx^2+rx+s&=(x-\alpha)^4\\ &=x^4-4\alpha x^3+6\alpha^2x^2-4\alpha^3x+\alpha^4\end{aligned}$$

ナルベシ。故ニ兩邊ニ於ケル相當項ノ係數ヲ比較シテ。

$$\left.\begin{aligned}p&=-4\alpha &&\dots\text{(i)}\\ q&=6\alpha^2 &&\dots\text{(ii)}\\ r&=-4\alpha^3 &&\dots\text{(iii)}\\ s&=\alpha^4 &&\dots\text{(iv)}\end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。而シテ (i) ヨリ

$$\alpha=-\frac{p}{4}$$

之レヲ (ii), (iii), (iv) ニ代用スレバ。

$$\left.\begin{aligned}q&=6\left(-\frac{p}{4}\right)^2 &\therefore\quad 8q&=3p^2\\ r&=-4\left(-\frac{p}{4}\right)^3 &\therefore\quad 16r&=p^3\\ s&=\left(-\frac{p}{4}\right)^4 &\therefore\quad 256s&=p^4\end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。

系　一元四次式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ガ完全四乘式ナルトキハ。

$$\left.\begin{aligned}3b^2&=8ac\\ b^3&=16a^2d\\ b^4&=256a^3e\end{aligned}\right\}$$

ナル關係アリ。

（證） 一元四次式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ガ完全四乘式ナルトキハ。方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ ハ四乘根ヲ有スベシ。而シテ此方程式ヲ化シテ

$$x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}=0$$

故ニ本定理ノ關係ニ。

$$p=\frac{b}{a},\quad q=\frac{c}{a},\quad r=\frac{d}{a},\quad s=\frac{e}{a}$$

ト置ケバ。

[定理] 一元四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ガ四重根ヲ有スルトキハ。

$$\left.\begin{aligned}3p^2&=8q\\p^3&=16r\\p^4&=256s\end{aligned}\right\}$$

ナル關係アリ。

(證) 一元四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ガ四重根 α ヲ有スルトキハ。

$$\begin{aligned}x^4+px^3+qx^2+rx+s&=(x-\alpha)^4\\&=x^4-4\alpha x^3+6\alpha^2x^2-4\alpha^3x+\alpha^4\end{aligned}$$

ナルベシ。故ニ兩邊ニ於ケル相當項ノ係數ヲ比較シテ。

$$\left.\begin{aligned}p&=-4\alpha && \dots\ (\mathrm{i})\\q&=6\alpha^2 && \dots\ (\mathrm{ii})\\r&=-4\alpha^3 && \dots\ (\mathrm{iii})\\s&=\alpha^4 && \dots\ (\mathrm{iv})\end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。而シテ (i) ヨリ

$$\alpha=-\frac{p}{4}$$

之レヲ (ii), (iii), (iv) ニ代用スレバ。

$$\left.\begin{aligned}q&=6\left(-\frac{p}{4}\right)^2 && \therefore\quad 8q=3p^2\\r&=-4\left(-\frac{p}{4}\right)^3 && \therefore\quad 16r=p^3\\s&=\left(-\frac{p}{4}\right)^4 && \therefore\quad 256s=p^4\end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。

系 一元四次式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ガ完全四乘式ナルトキハ。

$$\left.\begin{aligned}3b^2&=8ac\\b^3&=16a^2d\\b^4&=256a^3e\end{aligned}\right\}$$

ナル關係アリ。

(證) 一元四次式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ガ完全四乘式ナルトキハ。方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ ハ四乘根ヲ有スベシ。而シテ此方程式ヲ化シテ

$$x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}=0$$

故ニ本定理ノ關係ニ。

$$p=\frac{b}{a},\quad q=\frac{c}{a},\quad r=\frac{d}{a},\quad s=\frac{e}{a}$$

ト置ケバ。

$$\left.\begin{aligned}3\left(\frac{b}{a}\right)^2&=8\left(\frac{c}{a}\right)\\ \left(\frac{b}{a}\right)^3&=16\left(\frac{d}{a}\right)\\ \left(\frac{b}{a}\right)^4&=256\left(\frac{e}{a}\right)\end{aligned}\right\}$$

即チ

$$\left.\begin{aligned}3b^2&=8ac\\ b^3&=16a^2d\\ b^4&=256a^3e\end{aligned}\right\}$$

ナル關係ヲ得ベシ。

例 次ノ一元四次式ガ完全四乘式ナルトキハ。A, B, C ノ値如何。

$$x^4-2x^3+3\mathrm{A}x^2-4\mathrm{B}x+5\mathrm{C}$$

［解］ 本定理ノ關係

$$\left.\begin{aligned}3p^2&=8q\\ p^3&=16r\\ p^4&=256s\end{aligned}\right\}$$

ニ。$p=-2,\ q=3\mathrm{A},\ r=-4\mathrm{B},\ s=5\mathrm{C}$ ト置ケバ。

$$\left.\begin{aligned}3(-2)^2&=8\times3\mathrm{A}\\ (-2)^3&=16(-4\mathrm{B})\\ (-2)^4&=256\times5\mathrm{C}\end{aligned}\right\}\ \text{即チ}\ \left.\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{1}{2}\\ \mathrm{B}&=\frac{1}{8}\\ \mathrm{C}&=\frac{1}{80}\end{aligned}\right\}\ \text{答}$$

ヲ得ベシ。

[V] 二ツノ一元方程式ノ共通根

11. 二ツノ一元二次方程式ノ共通根。 二ツノ一元二次方程式ガ共通根ヲ有スル場合ニ關シテ。次ノ定理アリ。

［定理］(I) 二ツノ一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{及ビ} \quad a'x^2+b'x+c'=0$$

ガ共通ナル一根ヲ有スルトキハ。

$$(ca'-c'a)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$$

ナル關係アリ。

(證) 二ツノ一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{及ビ} \quad a'x^2+b'x+c'=0$$

ガ共通ナル唯一根 α ヲ有スルコトハ。二ツノ一元二次式

$$ax^2+bx+c \quad \text{及ビ} \quad a'x^2+b'x+c'$$

ガ一次ノ通因數 $(x-\alpha)$ ヲ有スルコトナリ。而シテ

$$\mathrm{P}=ax^2+bx+c$$

$$\mathrm{Q}=a'x^2+b'x+c'$$

トスレバ。$x-\alpha$ ハ

$$a'\mathrm{P}-a\mathrm{Q}=aa'x^2+a'bx+ca'-(aa'x^2+ab'x+c'a)$$

$$=(a'b-ab')x-(c'a-ca')$$

$$=(a'b-ab')\left\{x-\frac{c'a-ca'}{a'b-ab'}\right\}$$

$$=(a'b-ab')\left\{x-\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right\}$$

ノ因數ナルベシ。但シ $ab'-a'b\neq0$ {定理(II)參照}

故ニ

$$x-\alpha=x-\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(\mathrm{i})$$

又 $x-\alpha$ ハ

$$c'\mathrm{P}-c\mathrm{Q}=c'ax^2+bc'x+cc'-(ca'x^2+b'cx+cc')$$

$$=(c'a-ca')x^2-(b'c-bc')x$$

$$=(c'a-ca')x\left\{x-\frac{b'c-bc'}{c'a-ca'}\right\}$$

$$=(c'a-ca')x\left\{x-\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}\right\}$$

ノ因數ナルベシ。但シ $ca'-c'a\neq0$ {定理(II)參照}

故ニ

$$x-\alpha=x-\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(\mathrm{ii})$$

ヲ得ベク。(i) 及ビ (ii) ヲ比較シテ

$$\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}=\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}$$

$$\therefore\quad (ca'-c'a)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$$

ヲ得ベシ。

例　二ツノ方程式

$$x^2+ax+bc=0$$

$$x^2+bx+ca=0$$

ガ共通ナル一根ヲ有スルトキハ。其他ノ二根ハ方程式 $x^2+cx+ab=0$ ノ根ナルコトヲ證明セヨ。

[解]　二ツノ方程式

$$x^2+ax+bc=0\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(\mathrm{i})$$

$$x^2+bx+ca=0\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(\mathrm{ii})$$

ガ共通ナル一根ヲ有スルトキハ。本定理ニヨリ

$$(bc\times1-ca\times1)^2=(1\times b-1\times a)(a\times ca-b\times bc)$$

$$c^2(b-a)^2=(b-a)c(a^2-b^2)$$

$$c^2(b-a)^2+c(b-a)^2(b+a)=0$$

$$c^2(b-a)^2(c+b+a)=0$$

然ルニ。 $c(b-a)^2(c+b+a)=0$

$c\neq0,\ b\neq a$

$$\therefore\quad a+b+c=0$$

故ニ (i) ハ

$$x^2-(b+c)x+bc=0$$

$$(x-b)(x-c)=0 \qquad \therefore\ \left.\begin{array}{l}x=b\\x=c\end{array}\right\}$$

(ii) ハ

$$x^2-(c+a)x+ca=0$$

$$(x-c)(x-a)=0 \qquad \therefore\ \left.\begin{array}{l}x=c\\x=a\end{array}\right\}$$

且ツ方程式

$$x^2+cx+ab=0 \qquad \dots\ \dots\ \dots\ \text{(iii)}$$

ハ化シテ。

$$x^2-(a+b)x+ab=0$$

$$(x-a)(x-b)=0 \qquad \therefore\ \left.\begin{array}{l}x=a\\x=b\end{array}\right\}$$

即チ (i), (ii) ニ共通ナラザル二根 $x=a,\ x=b$ ハ方程式 (iii) ノ根ナルコトヲ知ル。

[定理](II) 二ツノ一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad 及ビ \quad a'x^2+b'x+c'=0$$

ガ共通ナル二根ヲ有スルトキハ。

$$\left.\begin{array}{l}ab'-a'b=0\\ca'-c'a=0\end{array}\right\}$$

即チ $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

ナリ。

(證) 此ノ二方程式ヲ化スレバ。夫々

$$\left.\begin{array}{l}x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0\\x^2+\dfrac{b'}{a'}x+\dfrac{c'}{a'}=0\end{array}\right\}$$

然ルニ此等ガ共通二根ヲ有スルヲ以ツテ。全一方程式ナルベク。相當項ノ係數ヲ比較シテ。

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{b}{a}=\dfrac{b'}{a'}\\\dfrac{c}{a}=\dfrac{c'}{a'}\end{array}\right\} \quad 即チ \quad \left.\begin{array}{l}ab'=a'b\\ca'=c'a\end{array}\right\}$$

ヲ得ベシ。故ニ

$$\left.\begin{array}{l}ab'-a'b=0\\ca'-c'a=0\end{array}\right\}$$

即チ $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

ナリ。

12. 一元三次方程式ト一元二次方程式トノ共通根。一元三次方程式ト一元二次方程式トガ共通根ヲ有スル場合ニ關シテ。次ノ定理アリ。

[定理](I) 一元三次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ ト一元二次方程式 $x^2+p'x+q'=0$ トガ共通ナル一根ヲ有スルトキハ。

$$(r-pq'+p'q')^2=(pp'-p'^2-q+q')(qq'-q'^2-p'r)$$

ナル關係アリ。

(證) 二ツノ方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$

$$x^2+p'x+q'=0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{(ii)}$$

ガ共通ナル唯一根 α ヲ有スルコトハ。二式

$$x^3+px^2+qx+r$$

$$x^2+p'x+q'$$

ガ一次ノ通因數 $(x-\alpha)$ ヲ有スルコトナリ。而シテ

$$\mathrm{P}=x^3+px^2+qx+r$$

$$\mathrm{Q}=x^2+p'x+q'$$

トスレバ。$(x-\alpha)$ ハ

$$\mathrm{P}-x\mathrm{Q}=x^3+px^2+qx+r-(x^3+p'x^2+q'x)$$

$$=(p-p')x^2+(q-q')x+r$$

ノ因數ナルベシ。即チ二ツノ一元二次式

$$(p-p')x^2+(q-q')x+r \quad 及ビ \quad x^2+p'x+q'$$

ガ一次ノ通因數 $(x-\alpha)$ ヲ有スルコトヽナルベシ。故ニ前條ノ定理ニヨリ

$$\{r\times 1-q'(p-p')\}^2=\{(p-p')p'-1\times(q-q')\}\{(q-q')q'-p'r\}$$

$$\therefore \quad (r-pq'+p'q')^2=(pp'-p'^2-q+q')(qq'-q'^2-p'r)$$

ヲ得ベシ。

系 一元三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ト一元二次方程式 $a'x^2+b'x+c'=0$ トガ共通ナル一根ヲ有スルトキハ。

$$(a'^2d-a'bc'+ab'c')^2$$

$$=(a'bb'-ab'^2-a'^2c+aa'c)(a'cc'-ac'^2-a'b'd)$$

ナル關係アリ。

(證) 此等ノ方程式ヲ化シテ。夫々

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b'}{a'}x+\frac{c'}{a'}=0$$

故ニ本定理ノ關係ニ。

$$p=\frac{b}{a}, \quad q=\frac{c}{a}, \quad r=\frac{d}{a}$$

$$p'=\frac{b'}{a'},\quad q'=\frac{c'}{a'}$$

ト置ケバ。

$$\left\{\frac{d}{a}-\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c'}{a'}\right)+\left(\frac{b'}{a'}\right)\left(\frac{c'}{a'}\right)\right\}^2$$

$$=\left\{\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b'}{a'}\right)-\left(\frac{b'}{a'}\right)^2-\frac{c}{a}+\frac{c'}{a'}\right\}$$

$$\times\left\{\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c'}{a'}\right)-\left(\frac{c'}{a'}\right)^2-\left(\frac{b'}{a'}\right)\left(\frac{d}{a}\right)\right\}$$

$a^2a'^4$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂ヘバ。

$$(a'^2d-a'bc'+ab'c')^2$$

$$=(a'bb'-ab'^2-a'^2c+aa'c')(a'cc'-ac'^2-a'b'd)$$

ヲ得ベシ。

例　二ツノ方程式

$$lx^3-mx+n=0 \quad 及ビ \quad kx^2-mx+n=0$$

ガ共通ナル一根ヲ有スルトキハ。

$$k^3+l^2n=klm$$

ナルコトヲ證明セヨ。

[解]　此等ノ方程式ヲ化シテ。

$$lx^3+0x^2+(-m)x+n=0$$

$$kx^2+(-m)x+n=0$$

故ニ本系ノ關係ニ。

$$a=l,\quad b=o,\quad c=-m,\quad d=n$$

$$a'=k,\quad b'=-m,\quad c'=n$$

ト置ケバ。

$$\{k^2n-k\times o\times n+l(-m)n\}^2$$

$$=\{k\times o\times(-m)-l(-m)^2-k^2(-m)+lkn\}$$

$$\times\{k(-m)n-ln^2-k(-m)n\}$$

$$n^2(k^2-lm)^2=(-lm^2+k^2m+lkn)(-ln^2)$$

$$(k^2-lm)^2=l^2m^2-k^2lm-kl^2n$$

$$k^4-2k^2lm=-k^2lm-kl^2n$$

$$k^4+kl^2n=k^2lm$$

$$\therefore\quad k^3+l^2n=klm$$

[定理](II)　一元三次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ ト一元二次方程式 $x^2+p'x+q'=0$ トガ共通ナル二根ヲ有スルトキハ。

$$\left.\begin{aligned}(p-p')p'&=q-q'\\(p-p')q'&=r\end{aligned}\right\}$$

ナル關係アリ。

(證)　二ツノ方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

$$x^2+p'x+q'=0$$

ガ共通ナル二根ヲ有スルコトハ。x^3+px^2+qx+r ガ $x^2+p'x+q'$ ナル因數ヲ有スルコトナリ。故ニ

$$x^3+px^2+qx+r=(x+\mathrm{L})(x^2+p'x+q')$$
$$=x^3+(\mathrm{L}+p')x^2+(\mathrm{L}p'+q')x+\mathrm{L}q'$$

トシ。兩邊ニ於ケル相當項ヲ比較シテ

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{L}+p'=p & \ldots\ (\mathrm{i}) \\ \mathrm{L}p'+q'=q & \ldots\ (\mathrm{ii}) \\ \mathrm{L}q'=r & \ldots\ (\mathrm{iii}) \end{array}\right\}$$

ヲ得ベシ。而シテ (i) ヨリ

$$\mathrm{L}=p-p'$$

之レヲ (ii) 及ビ (iii) ニ代用スレバ。

$$\left.\begin{array}{l} (p-p')p'=q-q' \\ (p-p')q'=r \end{array}\right\}$$

ヲ得ベシ。

系 一元三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ト一元二次方程式 $a'x^2+b'x+c'=0$ トガ共通ナル二根ヲ有スルトキハ。

$$\left.\begin{array}{l} (a'b-ab')b'=(ca'-c'a)a' \\ (a'b-ab')c'=a'^2d \end{array}\right\}$$

ナル關係アリ。

(證) 此等ノ方程式ヲ化シテ。

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$
$$x^2+\frac{b'}{a'}x+\frac{c'}{a'}=0$$

故ニ本定理ノ關係ニ。

$$p=\frac{b}{a},\quad q=\frac{c}{a},\quad r=\frac{d}{a}$$
$$p'=\frac{b'}{a'},\quad q'=\frac{c'}{a'}$$

ト置ケバ。

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)\left(\frac{b'}{a'}\right)=\frac{c}{a}-\frac{c'}{a'} \\ \left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)\left(\frac{c'}{a'}\right)=\frac{d}{a} \end{array}\right\}$$

即チ

$$\left.\begin{array}{l} (a'b-ab')b'=(ca'-c'a)a' \\ (a'b-ab')c'=a'^2d \end{array}\right\}$$

ヲ得ベシ。

例 一元三次式 $x^3+8x^2+5x-\mathrm{P}$ ガ一元二次式 $x^2+3x-\mathrm{Q}$ ニテ整除シ得ラルヽトキハ。P 及ビ Q ノ値如何。

[解] $x^3+8x^2+5x-\mathrm{P}$ ガ $x^2+3x-\mathrm{Q}$ ニテ整除シ得ラルヽコトハ。二方程式

$$\left.\begin{array}{r} x^3+8x^2+5x-\mathrm{P}=0 \\ x^2+3x-\mathrm{Q}=0 \end{array}\right\}$$

ガ共通ナル二根ヲ有スルコトナリ。故ニ本定理ノ關係ニ。

$$p=8,\quad q=5,\quad r=-\mathrm{P}$$

$$p'=3,\quad q'=-\mathrm{Q}$$

ト置ケバ。

$$(8-3)\times 3=5-(-\mathrm{Q})\quad \dots\quad \dots\quad \dots\quad (\mathrm{i})$$

$$(8-3)\times(-\mathrm{Q})=(-\mathrm{P})\quad \dots\quad \dots\quad \dots\quad (\mathrm{ii})$$

ヲ得ベク。(i) ヨリ

$$15=5+\mathrm{Q}\qquad \therefore\ \mathrm{Q}=10$$

之レヲ (ii) ニ置ケバ。

$$\mathrm{P}=(8-3)\times 10=50$$

ヲ得ベシ。

13.　二ツノ一元三次方程式ノ共通根。

二ツノ一元三次方程式ガ共通根ヲ有スル場合ニ關シテ次ノ定理アリ。

[定理](I)　二ツノ一元三次方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

$$x^3+p'x^2+q'x+r'=0$$

ガ共通ナル一根ヲ有スルトキハ。

$$\{(r-r')^2+(p-p')(qr'-q'r)\}^2$$

$$=\{(p-p')(pr'-p'r)+(q-q')(r-r')\}$$

$$\times\{(q-q')(qr'-q'r)-(pr'-p'r)(r-r')\}$$

ナル關係アリ。

(證)　二ツノ一元三次方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

$$x^3+p'x+q'x+r'=0$$

ガ共通ナル一根 α ヲ有スルコトハ。二式

$$x^3+px^2+qx+r$$

$$x^3+p'x^2+q'x+r'$$

ガ一次ノ通因數 $(x-\alpha)$ ヲ有スルコトナリ。而シテ

$$\mathrm{P}=x^3+px^2+qx+r$$

$$\mathrm{Q}=x^3+p'x^2+q'x+r'$$

トスレバ。$(x-\alpha)$ ハ

$$\mathrm{P}-\mathrm{Q}=(p-p')x^2+(q-q')x+(r-r')\quad \dots\quad (\mathrm{i})$$

ノ因數ナルベク。又 $(x-\alpha)$ ハ

$$r'\mathrm{P}-r\mathrm{Q}=r'x^3+pr'x^2+qr'x+rr'-(rx^3+p'rx^2+q'rx+rr')$$

$$=(r'-r)x^3+(pr'-p'r)x^2+(qr'-q'r)x$$

$$=x\{(r'-r)x^2+(pr'-p'r)x+(qr'-q'r)\}$$

ノ因數ナルベシ。而シテ x ハ P 及ビ Q ノ因數ナラザルコト明ラカナルヲ以ツテ。$(x-\alpha)$ ハ

$$(r'-r)x^2+(pr'-p'r)x+(qr'-q'r) \qquad \ldots \text{(ii)}$$

ノ因數ナルベク。(i) 及ビ (ii) ハ $(x-\alpha)$ ナル通因數ヲ有スルコトヽナルガ。故ニ附錄第11條定理(I)ニヨリ

$$\{(r-r')(r'-r)-(qr'-q'r)(p-p')\}^2$$
$$=\{(p-p')(pr'-p'r)-(r'-r)(q-q')\}$$
$$\times\{(q-q')(qr'-q'r)-(pr'-p'r)(r-r')\}$$

即チ

$$\{(r-r')^2+(p-p')(qr'-q'r)\}^2$$
$$=\{(p-p')(pr'-p'r)+(q-q')(r-r')\}$$
$$\times\{(q-q')(qr'-q'r)-(pr'-p'r)(r-r')\}$$

ヲ得ベシ。

系　二ツノ一元三次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$
$$a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0$$

ガ共通ナル一根ヲ有スルトキハ。

$$\{(a'd-ad')^2+(a'b-ab')(cd'-c'd)\}^2$$
$$=\{(a'b-ab')(bd'-b'd)+(a'c-ac')(a'd-ad')\}$$

$$\times\{(a'c-ac')(cd'-c'd)-(bd'-b'd)(a'd-ad')\}$$

ナル關係アリ。

(證)　此等ノ方程式ヲ化シテ。夫々。

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

$$x^3+\frac{b'}{a'}x^2+\frac{c'}{a'}x+\frac{d'}{a'}=0$$

故ニ本定理ノ關係ニ。

$$p=\frac{b}{a},\quad q=\frac{c}{a},\quad r=\frac{d}{a}$$

$$p'=\frac{b'}{a'},\quad q'=\frac{c'}{a'},\quad r'=\frac{d'}{a'}$$

ト置ケバ。

$$\left\{\left(\frac{d}{a}-\frac{d'}{a'}\right)^2+\left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)\left(\frac{c}{a}\times\frac{d'}{a'}-\frac{c'}{a'}\times\frac{d}{a}\right)\right\}^2$$

$$=\left\{\left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)\left(\frac{b}{a}\times\frac{d'}{a'}-\frac{b'}{a'}\times\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{c'}{a'}\right)\left(\frac{d}{a}-\frac{d'}{a'}\right)\right\}$$

$$\times\left\{\left(\frac{c}{a}-\frac{c'}{a'}\right)\left(\frac{c}{a}\times\frac{d'}{a'}-\frac{c'}{a'}\times\frac{d}{a}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{b}{a}\times\frac{d'}{a'}-\frac{b'}{a'}\times\frac{d}{a}\right)\left(\frac{d}{a}-\frac{d'}{a'}\right)\right\}$$

即チ

$$\{(a'd-ad')^2+(a'b-ab')(cd'-c'd)\}^2=$$

$$\{(a'b-ab')(bd'-b'd)+(a'c-ac')(a'd-ad')\}$$
$$\times\{(a'c-ac')(cd'-c'd)-(bd'-b'd)(a'd-ad')\}$$

ヲ得ベシ。

例 二ツノ方程式

$$x^3+mx^2+nx+1=0$$
$$x^3+nx^2+mx+1=0$$

ガ共通ナル一根ヲ有スルトキハ。

$$m+n=-2$$

ナルコトヲ證明セヨ。但シ $m \neq n$ トス。

[解] 此等ノ二方程式ガ共通ナル一根 α ヲ有スルコトハ。二式

$$\mathrm{P}=x^3+mx^2+nx+1$$
$$\mathrm{Q}=x^3+nx^2+mx+1$$

ガ一次ノ通因數 $(x-\alpha)$ ヲ有スルコトナリ。故ニ $(x-\alpha)$ ハ

$$\mathrm{P}-\mathrm{Q}=(m-n)x^2+(n-m)x$$
$$=(m-n)x(x-1)$$

ノ因數ナルベシ。然ルニ x ハ P 及ビ Q ノ因數ナラザルコト明ラカナルヲ以ツテ。

$$\therefore\quad x-\alpha=x-1$$

$$\alpha=1$$

ナルコトヲ知リ得ベシ。此故ニ $x=1$ ハ初メノ二方程式ノ共通根ニシテ此等ノ方程式ニ適合スベシ。即チ

$$1^3+m\times1^2+n\times1+1=0$$
$$1^3+n\times1^2+m\times1+1=0$$

何レニシテモ $m+n=-2$ ナリ。

[定理](II) 二ツノ一元三次方程式

$$\left.\begin{aligned}x^3+px^2+qx+r=0\\x^3+p'x^2+q'x+r'=0\end{aligned}\right\}$$

ガ共通ナル二根ヲ有スルトキハ。

$$\left.\begin{aligned}(q-q')(r-r')=(p-p')(p'r-pr')\\(r-r')^2=(p-p')(q'r-qr')\end{aligned}\right\}$$

ナル關係アリ。

(證) 二ツノ一元三次方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0$$
$$x^3+p'x^2+q'x+r'=0$$

ガ共通ナル二根ヲ有スルコトハ。二式

$$x^3+px^2+qx+r$$
$$x^3+p'x^2+q'x+r'$$

ガ二次ノ通因數ヲ有スルコトナリ。而シテ

$$P=x^3+px^2+qx+r$$

$$Q=x^3+p'x^2+q'x+r'$$

トシ此通因數ヲ F トスレバ。F ハ

$$P-Q=(p-p')x^2+(q-q')x+r-r'$$

$$=(p-p')\left\{x^2+\frac{q-q'}{p-p'}x+\frac{r-r'}{p-p'}\right\}$$

ノ因數ナルベシ。

$$\therefore\quad F=x^2+\frac{q-q'}{p-p'}x+\frac{r-r'}{p-p'}\qquad\cdots\ \cdots\ \text{(i)}$$

又 F ハ

$$r'P-rQ=r'x^3+pr'x^2+qr'x+rr'-(rx^3+p'rx^2+q'rx+rr')$$

$$=(r'-r)x^3+(pr'-p'r)x^2+(qr'-q'r)x$$

$$=(r'-r)x\left\{x^2+\frac{pr'-p'r}{r'-r}x+\frac{qr'-q'r}{r'-r}\right\}$$

ノ因數ナルベク。x ハ P 及ビ Q ノ因數ナラザルコト明ラカナルヲ以ツテ。

$$F=x^2+\frac{p'r-pr'}{r-r'}x+\frac{q'r-qr'}{r-r'}\qquad\cdots\ \cdots\ \text{(ii)}$$

ナルコトヲ知リ得ベシ。故ニ (i), (ii) ノ相當項ノ係數ヲ比較シテ次ノ關係ヲ得ベシ。

$$\left.\begin{aligned}\frac{q-q'}{p-p'}&=\frac{p'r-pr'}{r-r'}\\ \frac{r-r'}{p-p'}&=\frac{q'r-qr'}{r-r'}\end{aligned}\right\}$$

即チ

$$\left.\begin{aligned}(q-q')(r-r')&=(p-p')(p'r-pr')\\ (r-r')^2&=(p-p')(q'r-qr')\end{aligned}\right\}$$

系　二ツノ一元三次方程式

$$\left.\begin{aligned}ax^3+bx^2+cx+d&=0\\ a'x^3+b'x^2+c'x+d'&=0\end{aligned}\right\}$$

ガ共通ナル二根ヲ有スルトキハ。

$$\left.\begin{aligned}(a'c-ac')(a'd-ad')&=(a'b-ab')(b'd-b'd)\\ (a'd-ad')^2&=(a'b-ab')(c'd-cd')\end{aligned}\right\}$$

ナル關係アリ。

(證)　此等ノ方程式ヲ化シテ。夫々。

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

$$x^3+\frac{b'}{a'}x^2+\frac{c'}{a'}x+\frac{d'}{a'}=0$$

故ニ本定理ノ關係ニ。

$$p=\frac{b}{a},\quad q=\frac{c}{a},\quad r=\frac{d}{a}$$

$$p'=\frac{b'}{a'},\quad q'=\frac{c'}{a'},\quad r'=\frac{d'}{a'}$$

ト置ケバ。

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{c}{a}-\frac{c'}{a'}\right)\left(\frac{d}{a}-\frac{d'}{a'}\right)&=\left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)\left(\frac{b'}{a'}\times\frac{d}{a}-\frac{b}{a}\times\frac{d'}{a'}\right)\\ \left(\frac{d}{a}-\frac{d'}{a'}\right)^2&=\left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)\left(\frac{c'}{a'}\times\frac{d}{a}-\frac{c}{a}\times\frac{d'}{a'}\right)\end{aligned}\right\}$$

即チ

$$\left.\begin{aligned}(a'c-ac')(a'd-ad')&=(a'b-ab')(b'd-bd')\\ (a'd-ad')^2&=(a'b-ab')(c'd-cd')\end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。

例 二ツノ方程式

$$px^3+qx^2+rx+s=0$$

$$sx^3+rx^2+qx+p=0$$

ガ共通ナル二根ヲ有スルトキハ。

$$p^2-s^2=pr-qs$$

ナルコトヲ證明セヨ。但シ $pq\neq rs$ トス。

[解] 本系ノ關係ニ

$$a=p,\quad b=q,\quad c=r,\quad d=s$$

$$a'=s,\quad b'=r,\quad c'=q,\quad d'=p$$

ト置ケバ。

$$\left.\begin{aligned}(sr-pq)(s^2-p^2)&=(sq-pr)(rs-qp)\quad\ldots\text{(i)}\\ (s^2-p^2)^2&=(sq-pr)(qs-pr)\quad\ldots\text{(ii)}\end{aligned}\right\}$$

ヲ得ベシ。然ルニ

$$pq\neq rs\qquad pq-rs\neq 0$$

故ニ。(i) ヨリ

$$s^2-p^2=qs-pr$$

$$\therefore\quad p^2-s^2=pr-qs$$

ヲ得ベシ。而シテ此關係ハ (ii) ヲモ成立セシムルコト明ラカナリ。

[定理] (III) 二ツノ一元三次方程式

$$\left.\begin{aligned}ax^3+bx^2+cx+d&=0\\ a'x^3+b'x^2+c'x+d'&=0\end{aligned}\right\}$$

ガ共通ナル三根ヲ有スルトキハ。

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$$

ナル關係アリ。

(證) 此等ノ方程式ヲ化シテ。

$$\left.\begin{aligned}x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}&=0\\ x^3+\frac{b'}{a'}x^2+\frac{c'}{a'}x+\frac{d'}{a'}&=0\end{aligned}\right\}$$

而シテ共通ナル三根ヲ有スルコトハ。二方程式ガ全一ナル方程式ノコトナリ。故ニ相當項ノ係數ヲ比較シテ

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{b}{a}=\dfrac{b'}{a'}\\[2ex]\dfrac{c}{a}=\dfrac{c'}{a'}\\[2ex]\dfrac{d}{a}=\dfrac{d'}{a'}\end{array}\right\}\text{ 即チ }\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\\[2ex]\dfrac{a}{a'}=\dfrac{c}{c'}\\[2ex]\dfrac{a}{a'}=\dfrac{d}{d'}\end{array}\right\}$$

ヲ得ベシ。故ニ

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$$

ナリ。

【終】

明治四十三年九月五日印刷
明治四十三年九月八日發行

定價金八拾錢

受驗準備 高等數學 方程式論

著作權所有

奥付

著者　松村定次郎
東京市日本橋區本町三丁目八番地

發行者　大橋新太郎
東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

印刷者　飯田三千太郎
東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

印刷所　株式會社秀英舍第一工場

發行所　（東京市日本橋區本町三丁目）博文館
振替貯金口座東京二四〇番
販賣部用電話本局二六二〇番

理學士 松村定次郎君著述數學書類

新撰微分積分學

郵稅各金八錢
特製正價金五拾五錢
並製正價金四拾錢
全一冊菊判美本三百十四頁

微分積分學は數學物理學の泰斗として有名なる英人ニウトンの發明に係り爾來諸大家の研究は燦然たる光を放たしむるに至り解析幾何學力學と並び近世の三大進歩の一と稱せらる然れども其理論の深遠なる應用の弘大なる能く初學者をして會得せしむるの良書なきは豈に我學界の遺憾ならずや本書は理科大學にありて數學專攻の士松村理學士の歐米に於ける嶄新なる諸大家の說を基礎として其煩を省き其要を拔き微積分學の眞髓を摘萃して能く短時日に其大意を了解せしむる樣著述せられたるものにして實に近來稀有の良書なり

新撰解析幾何學

郵稅各金八錢
特製正價金五拾五錢
並製正價金四拾錢
全一冊菊判美本紙數三百頁

解析幾何學は幾何學と解析學との連鎖にして現時一般の趨勢は解析學の應用進歩と共に幾何學の發達を來せる事實に大なりとす斯學は單に幾何の研究に必要なるのみならず延て解析學の研究に資する所大なり此書は極めて入り易き方法を以て明確に論述したるものなり

● 立體幾何學 平面三角法 難問解義　紙數三百二十二頁 全一冊四六判　郵稅金六錢 正價金五拾五錢

● 平面幾何學難問解義　紙數二百四十六頁 全一冊四六判　郵稅金六錢 正價金七拾五錢

● 代數學難問解義　紙數四百三十二頁 全一冊四六判　郵稅金八錢 正價金六拾錢

● 算術難問解義　紙數百九十頁 全一冊四六判　郵稅金六錢 正價金參拾八錢

―(博文館發行)―

本書は歴史的に在來の三角法より筆を起し平面、球面三角法の如きは其一應用として列記せるも必要なる公式の誘導に止め成るべく理論の本道を離れざらん事を勉め應用としては進んで高等諸學科に必用なる諸公式を誘導し理論としては圓函數の解析的定義となり轉々して函數の微分方程式定義に達せんことを務めたり

新撰三角法

郵稅各金八錢
特製正價金五拾五錢
並製正價金四拾錢
全一冊菊判紙數三百八十頁

理學士 藤田外次郎君著

近世幾何學

全一册菊判美本三百廿四頁
並製正價金四拾錢
特製正價金五拾五錢
郵稅各金八錢

本書は斯學に造詣深き藤田理學士の著述に係り中心射影法より説き起して、幾何學原形及相對の定理に論究し、二次曲線論に遷り、其曲線の性質を詳論したるものにして、且つ各章、附するに適當の例を以てしたれば、一讀直ちに幾何學の定理を知るを得ると共に、また其運用に熟するを得べく、斯道近來の好著之に遊ぶもの丶一讀を缺くべからざるものなり、即ち之を江湖に薦む。

內容

發兌元 東京本町 博文館

東京帝國大學教授 理學士 林鶴一君著

新撰幾何學

全一册菊判美本紙數三百頁
並製正價金四拾錢
特製正價金五拾五錢
郵稅各金八錢

從來我國に於ける幾何學の著譯幾多なりと雖も悉く皆ユークリッドが作れるものに從ひ未だ一の非ユークリッド幾何學を説きたる者あらざりしは、識者の夙に遺憾としたる所なりき、是を以て本書は先づ筆をユークリッドが幾何學に起して、以て其狀貌を知らしめたる後更にユークリッドが第十三公理を否認せる非ユークリッド幾何學に入り説述殆んど微を極む蓋し幾何學の新智識を得んと欲すろの士は一本を備へざるべからず

東京帝國大學教授 理學博士 高木貞治君著

新撰代數學

全一册菊判美本紙數三百頁
並製正價金四拾錢
特製正價金五拾五錢
郵稅各金八錢

代數學に於ける研究の主眼たる數の値に關係する者にあらずして導ろ數の算法に在りとす、本書は整數の觀念並に四則算法を支配する根原的法則を叙して讀者の記憶を新にし以て新研究の地を成さんことを企圖す即ち筆を代數學の原則に起して有數函數方程式の根、整函數の有理分解、多元整函數、對稱式論、デデルミナント、二次式論及び三次及四次方程式解方に擱筆す立論證明の精緻確實なる洵に頃書中の一頭地を拔くもの實に數學家の要書也。

發兌元 東京本町 博文館

38-385

出野逸治君解
竹貫登代多君著

●算術問題解法指南

紙數五百廿頁
全二冊四六判

小包料金八錢
正價五拾八錢

三田頭信君著

●實用 數學一萬題

紙數五百十頁
全一冊四六判

郵税金八錢
正價金四拾錢

鑑別して本書の眞價を知れ。

本書は題名の如く最近十ヶ年間各官立學校入學試驗に於ける算術問題の詳解なり、本書の特色は第一順序を正したるにあり、第二種類毎に模範問題を附したるにあり、第三解義の懇切なるにあり、其他數へ來れば多々あらん。故に學生に取りては便利至極の書也。世間類似のもの多し、乞ふ嚴に

十年間 最近 入學試驗 官立學校 算術問題詳解

數學世界主筆
攻玉社中學校教諭
日本中學校教諭
竹貫登代多君著

正價金六拾錢
郵税金六錢
紙數三百四十頁
全一冊四六判上製

東京本町 博文館 發兌元

方程式論

松村　定次郎／著