萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

純粹幾何與非歐幾何

和爾蓋特 武咨著

鄭太朴譯

商務印書館發行

純粹幾何與非歐幾何

和爾蓋特　武咨著
鄭太朴譯

算學小叢書

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

純粹幾何與非歐幾何

和爾蓋特 武咨著

鄭太朴譯

發行兼印刷者　上海寶山路
商務印書館

發行所　上海及各埠
商務印書館

中華民國十九年十月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

PURE GEOMETRY, by T. F. HOLGATE
NON-EUCLIDEAN GEOMETRY, by F. S. WOODS
Translated by
CHÊNG T'AI P'O

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930

目　　次

近代純粹幾何學

Thomas F. Holgate 著

I. 引言

1. 在解析幾何學內，是將代數學上的方法用到幾何屬性及關係上去，以得到許多結論．籍有幾種慣例，將已知的關係用代數式表之，於是照代數規律演算一道，而所得結果則重復列之爲幾何命題．當用代數方法從事時，幾何概念竟可完全不要，而其結論則亦可與出發時的前提無多明白的關係看出．反之，純粹幾何學卽不然，當從事推理時，幾何概念永續不放開，而結論所由以達到的步驟，在在可自所設的條件尋得．

2. 純粹幾何學之來源很古，古昔時已樹立其基礎；有許多極重要關於三角之關係，直線形之關係，圓及球之屬性，面積，比例，幾何形之相等及相似等等的定理，那時已發見．古代幾何學者亦已研

究及圓錐截面及某數種高等曲線，其主要屬性曾為他們所發見，不過其所用方法瑣碎，其結果之大部分不能連貫.古代幾何學，可以歐几里得之書為其最清楚的代表，這書乃是將其時所有幾何學智識整理起來并加以系統的安排而成.於此書內，諸屬性及關係各自為敍述，對於同一類內諸形所有共同關係，殊不甚注意及之. 歐氏方法，向稱為初等幾何學之方法，其書之主體乃是初等幾何學範圍內所有事.

3. 古代幾何學者之方法，直至十六世紀之初學問復興時代，始有所更變，那時有幾個新概念用入，并應用舊時所熟知者，例如無限遠相距的元素，一線段之調和分割 (*harmonic division*)，連續性原理，幻交理論 (*theory of imaginary intersections*) 等等，於是斯學大以擴充了.此種幾何學研究之新活動，結果成了笛卡士 (*Descartes*) 之發明解析幾何學，於是幾二百餘年，純粹幾何的方法，於大部分研究上是被擯棄了. 但至十八世紀之末，學

者間又有發生純粹幾何學之興趣者，此由於蒙格(*Monge*) 之著作所引起者不少，而當十九世紀之前半紀，經由彭雪萊 (*Poncelet*)，司坦納(*Steiner*)，司道德 (*V. Staudt*)，查斯萊(*Chasles*)等諸學者之手，於是斯學臻於極高發展了.

4. 近代純粹幾何學與古代幾何學所相差者，其在所論主體的方面還不多，而大要則在於其所用方法及所得結果之普通性.材料多有爲舊者，但經用射影(*projection*) 原則及橫截線理論後，每有許多事實前此以爲不相關者，可證明其實爲一普通道理之不同的數面.此種普通化之趨向，乃是近代幾何學之主要特徵，而一方面雖或可說大部是受了解析的方法之影響所致，然此方向之進步，有些卻在解析方法發明以前，而近年來純粹幾何學對於解析的興味方面供獻亦很不少.

II. 幾何學中之簡單元素

5, 點，直線，平面，這些都是純粹幾何學上之簡

單的,未給以定義的元素.每個均可設想之爲有其存在性,與其他不相關者;一平面可不問及在其內的線與點而設想之;亦可想一線,不問及在其上的點或經此的平面,以及想一點,不問及經過此的線或平面.事實上,每個簡單元素可爲一基礎,於此上築有無限數的其他種之元素.

III. 二元性原理

6. 空間中之二元性 二點可設定一直線之同性,普通三點卽可決定一平面.然一方面亦二平面相交於一直線,而普通三平面祇有一點相共.設如三點處在一特殊相關的地位,卽在一直線上,則可有許多平面經過之.同此,設三平面在一特殊相關的地位,卽有一線相共,則卽有許多點在其上了.除了這些特例外,尙須一述以下數條:

$a1$. 三點決定一平面.

$a2$. 三平面決定一點.

$b1$. 二線有一點相共者決定一平面.

$b2$. 二線有一平面相共者決定一點。

$c1$. 一線與一點決定一平面。

$c2$. 一線與一平面決定一點。

這裏每取其二條，即可見有一種可以交換的關係在點與平面以及線與線之間。此卽是所謂二元的關係，照此，任何一種幾何形可生出一其他幾何形來，祇須將其一中之點易以其他中之平面，其一中之連二點的線易以其他中之由二平面相交所成的線。設如原形內三平面相遇於一點，則在二元的或倒的形內，三點在一平面內；或設如原形內四線在一平面內，則倒形內四線遇於一點。

7. 二元性舉例 一立方體有八頂點，六平面，十二邊，每邊均為二面之相交及連二頂點。故其倒形有八平面，六點(頂點)，十二邊，每邊均連二頂點并為二面之交。原形內每三面相遇於一頂點，亦每三邊相遇於頂點，而每面上有四邊。倒形內每三頂點在一面內，亦每三邊在一面內，而每四邊遇於一點。這倒形卽是一八面體。如是，立方體與八面體

可說是相倒的形.仿此,可知一四面體之倒形仍是一四面體,而十二面體之倒形則是二十面體.

8. 這一種原理,由之可自其他關於平面,線,點的定理上,推得一關於點,線,平面之定理,祇須互易便得,卽名爲二元性原理.彭雪萊曾多方使用此原理,但其成爲一獨立的原理,則自葛谷內(*Gergonne*)始.於近代幾何學上實占重要地位.其應用純粹於圖形的屬性方面,普通於含有度量的屬性方面不用之.

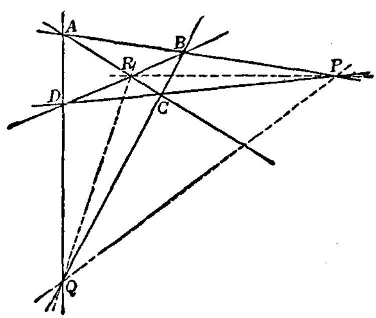
9. 平面內之二元性 如所論之形爲限於一單獨平面內者,卽所從事者爲平面幾何學,則二元性祇在點與線間,因平面幾何學上二點決定一線,二線決定一點.對於二倒的平面形中之一形內一線上之任何多少點,其他形中必有同多少的線經過一點,而設如三或多線相遇於一點,其他中卽有如許點同在一線上.

10. 下面的例,或足以說明平面內之相倒的形:

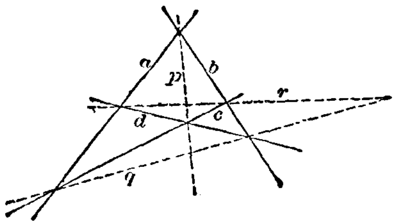
四個點(頂點) A, B, C, D, 其中沒有三個是同

線的，決定六條線(邊)，即，連每二頂點的線. AB 與 CD 二線可稱爲形中之相對的邊，AC 與 BD 及 AD 與 BC 均然.各對相對的邊，決定三點 P,Q,R (對角點)，即所謂對角三角之頂點.如此構成的形稱爲一完全四角形.

反之，四條線(邊) a,b,c,d，其中沒有三條相交於一點，決定六點(頂點)，即，每二邊之相交. ab 與 cd 點可稱爲形中相對的頂點，ac,bd 以及 ad, bc 均然.各對相對的點決定三線 p,q,r (對角線)，即所謂對角三角之邊.此形名爲一完全的四邊形.



如是，一完全四角形(上圖)有四頂點，六邊，及三對角點；一完全四邊形(下圖)有四邊，六頂點，



及三對角線.仿此,一完全五角形有五頂點,十邊,每四邊交於一頂點,蓋設如二邊相交,則可有十五點了.一完全五邊形則有五邊,十頂點,每四點在一邊上,設如祇有二點在一線上,則可有十五線了.

11. 下面的例,可由之以說明如何用二元性原理,可自一定理上推得他定理.左旁的定理是向已知道的,第四世紀時柏蒲士(*Pappus*)曾述之.右旁的定理,不甚知名,但如將點與線互易便得,或亦可獨立的敍述之.

設於一直線 p 上隨便亂取三點 A, C, E,又於一其他直線 q 上隨便亂

設如經過一點 P 隨便亂作三直線 a, c, e,又經過一點 Q 隨便亂作三直

取三點 B,D,F,而用直線 1,2,3,4,5,6將AB,BC, CD, DE, EF, FA連起來,則 1與4,2與5,3與6各對線之交點在一直線 r 上.

線 b,d,f, 其相交點 ab,bc,cd,de,ef,fa,以1,2,3,4,5,6 表之, 則 14,25,36三線經過一點R.

其他此項二元性的例,以後還將遇見.

IV. 連續性原理

12. 連續性原理首為開柏萊 (*Kepler*) 所假定,其後德亞九 (*Desargues*) 亦曾用之,照此, 則一特殊的形所能有的屬性,於此形任何改樣後,祇須改樣時所處條件與初作此形時同,仍能保持之.用此原理,則有許多幾何學上之用語必須擴充其意義,俾能將所謂幻的元素亦包括進去, 而藉其助以敍述普通的事實或定理, 為前此所必須有例外或限止者.幾何學者并不想將幻元素作出來,但承認其存在,以及承認此種原理,即,雖然因繼續的變樣,

一形之屬性曾證明者，或致由於失卻眞元素而成爲無意義，不過如將幻元素列入論之，仍能保持不失，

13. 幻交 爲說明起見，這裏可一敍，一經過P點的直線與一圓相交於二點.設如P點在圓內，則不問此線於P點如何旋轉，其二交點總是實有的.但設如P點在圓外，則此直線開初時固可實有二點與圓相交，然若將此線於P旋轉，則不起先二點合併爲一，終至不見而成爲幻了.就尋常慣例而言，這時候仍說此直線與圓相交，似無意義；然假定上仍視爲眞實，而幻交點於任何普遍定理上與眞交點同其重要.如是，一圓之弦或割線之段之積，當割線於一點旋轉時，總是常的，此定理於割線在一切位置時均有一釋解.

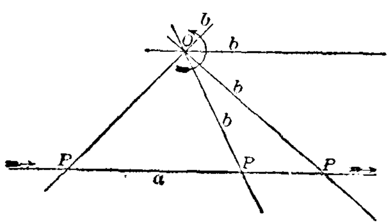
V. 無限遠點

14. 相距無限的元素 幾何學上用入無限相距的元素之觀念，實於普遍化之歷程方面大有幫助，

而近代的方法則主要在此歷程上．有許多例外的例，於前昔條件下須當特別論之者，用入此概念後卽可與一普遍的說法相適了．

15. 自下面的研究內，極易見到無限相距的元素．

設如一直線 b（下圖）經過一固定的點 O，與 a 線相交於一點 P；并設此線 b 照圖中之箭所示的那樣於 O 點旋轉，則可見 P 點在 a 上向右移動直至不見，於是又復忽然現出於極遠的左方，仍照以前之方向移動．



其假設是，這二線沒有一刻不相交着，P 點則繼續的一向在 a 線上移動，到極遠的右方而不見，經過一單獨的地位時復現於極左的方面，此地位蓋在平面內可達到的境地以外．換言之，假定在 a

線上有一點,并且祇有一點爲無限遠者,平面內之任何其他直線上,或,於此事實,有限區域內之任何直線上均然.并如是假定,此點使線連續,俾可以由一線之任何一點連續向右或左移動而至任何一他點.(附註:本篇所說,祇是關於所謂歐几里得幾何學者.至非歐几里得幾何學之假設,可閱篇 *III*.)

16. 如是,二個點將一直線分爲二段,一段上祇有有限的點,而在他段上則爲一無限遠的點;前者有時名爲內段,後者爲外段.由此可知在一直線上,祇用一點不能將一個點與他個點分隔開,必須要有二點纔行,此則恰如在環或圍繞曲線上了.

17. 如此假定一單獨的無限遠點在一線 a 上,等於假定經過一點 O 能作一直線,并且祇能作一直線,與一已知的線在有限區城內不相遇,但在一無限遠點則可相交.有此假定,乃能說任何一平面內之二直線可在某處相交,倘不在有限區域內,則即在無限遠點上.

定義 相交於無限遠點的線,名爲平行線.

18. 平行線自題 歐几里得之第十二自理,實在說當稱之爲一自題,乃是其據以證經過一已知的點有一條且祇有一條與一已知線相平行的線之出發點.因之,其假設實等於前此之假定直線上有一單獨的無限遠點.關於平行線問題上困難之大部,把幾何學者糾纏了許多世紀者,實緣於不知這所謂第十二自理乃是一假設而非自明之理.

19. 由一單獨的直線上之無限遠點,或同樣的可說,由一單獨的線經過一點而與一已知的線平行者,可推知一平面內一切無限遠點均在一直線上,而一平面內之任何二平行線,其相交點即在此線上;觀於下面便可明白.設如一線 p 於一點 P 旋轉,則此線之每點必作出一連續的軌道於平面內,此於無限遠點亦可假定其然.由此無限遠點所作軌道,自亦爲無限遠的,而此即包有平面內之一切無限遠點,且與一直線相交時,祇能在一點,因此,其本身亦是一直線.由此,可知任何二平行線於一

無限遠線相交，而此卽為此二線所共者.

VI. 根本定理

20. 於近代幾何學之發展上，各學者間所取著手研究的方法，頗有不同. 有的學者，如司坦納與查斯萊，將他們的根本觀念建築於某種度量的屬性上，而有的，如司道德及其後的雷 (*Reye*) 氏，與稍變其形式的克萊莫那 (*Cremona*) 氏等，則以純粹的位置關係為出發點，因而可不必要度量為其根本.

21. 透視三角形　由後者方法，則透視三角之定理，實為根本事實，此定理十七世紀之初德亞九已述之，然實則已前早已知道，或者歐几里得已知之了.

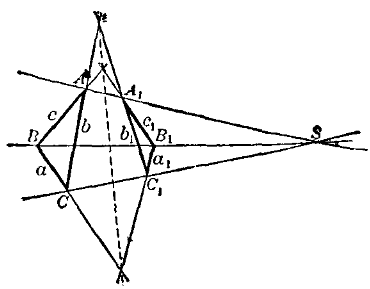
設如二三角形 ABC 與 $A_1B_1C_1$ 如是按置，AA_1, BB_1, CC_1 諸線相遇於一點 S，則相當的

設如二三角形 abc 與 $a_1b_1c_1$ 如是按置，俾各對相當的邊 a 與 a_1，b 與 b_1，c 與 c_1，其相交點在

諸對邊 c 與 c_1, b 與 b_1, a 與 a_1，其相交點在一直線上。

一直線 S 上，則連各相當頂點的線 AA_1, BB_1, CC_1 遇於一點。

設使此二三角形在不同的平面 p 與 p_1 內，則此定理之眞實極易明白。蓋 AA_1 與 BB_1 線相遇於 S，卽決定一平面，AB 與 A_1B_1 在內，這些線相交，然祇能於 p 及 p_1 之共的線上。仿此，可知 AC 與 A_1C_1, BC 與 B_1C_1 均然，相遇於此直線之點上。



設如三角形在同一平面內，則莫若將全形，卽所設的二三角形，連相當的頂點之線遇於一點 S 者，以及 p 與 p_1 相交的線，自某點 O，例如眼，射影出之較爲易見出此定理之眞，如是得一形有十線十

平面相交於O.每平面上有三線,經過每線有三平面.此射影之任何一平切面,其形爲有二三角形如是相按置者,連相當的頂點之線相交於一點,而各對相當的邊之相交點在一直線上.

將一形自一某中心點射影出,於是取其一平切面,以得一新圖形,此種方法,乃是近代幾何學上之極有用者.凡用此方法時不變的屬性,名爲射影屬性,頗不在少數.量積雖變,但如後面將見,其某種關係仍不變,相交的屬性,相觸,同線性及類此者均然.

22 透視四角形　反復應用透視三角形之定理,即可證實下面關於完全四角形之定理:

"設如二完全四角形如是按置着,其五對相當的邊之交點在一直線上,則其第六對之交點亦在此直線上."

倘記得一完全四角形之倒形,乃是一完全四邊形,爲四線及其六交點所成,則二元的定理即可如下:

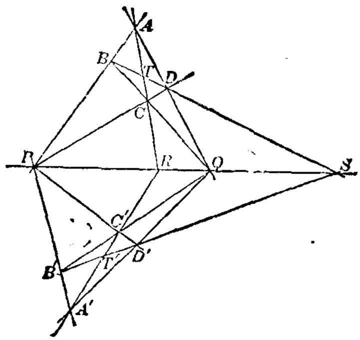
"設如二完全四邊形如是按置着,其五條連各對相當的點之線相遇於一點,則連第六對相當的點之線亦經過這點."

23. 調和點　設 $ABCD$ 爲一任何完全四角形(下圖),PQ 爲連二對角點之線,R 與 S 乃是第三對邊與 PQ 相交的點.試再作一完全四角形,其一對邊相交於 P,又一對邊相交於 Q,而一第五邊經過 R.設經過 P 點的二邊隨便作出,經過 R 的邊亦隨便作出交已作的二者於 A' 及 C',則此形已能成了,蓋 QA' 與 QC' 即可決定 D' 與 B'.

在這二四角形內,其一即是隨便作成者,有五對邊之相交點在 PQ 上,故其第六對 BD 與 $B'D'$ 亦必在 PQ 上相交.換言之,設如一直線之二點 P 與 Q 如是,一完全四角形之二對邊於此相交,而一第五邊經過此線上之一點 R,則其第六邊必然經過其上一點 S,而此點則爲前三點所決定.此線上這四點,名爲有調和關係者,或說 PQ 於 R 及 S 點被調和的分割了,而得一調和關係之純粹位置

上的定義.

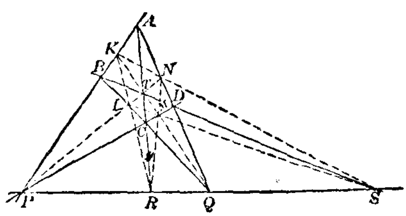
定義 一直線上之四點, 倘使其如是按置着, 有二點爲一完全四角形之二對邊之相交處, 而其餘的二點則爲其餘二邊所經過, 則此四點名爲調和點.



所須注意者, 上圖中不僅 $PQRS$ 爲調和點, 卽 $ATCR$ 與 $DTBS$ 亦均能滿足此項調和條件.

24. 設 AC 與 BD 邊之交點爲 T, PT 交 BC 於 L 交 AD 於 N, 而 QT 交 AB 於 K 交 CD 於 M, 則 KL 線必定經過 R, 因 $KBLT$ 爲一四角形, 其一對邊相交於 P, 又一對相交於 Q, 而其一第五

邊經過 S. 仿此，NM 經過 R，因 KN 與 LM 均經過 S.如是，$KLMN$ 乃是一完全四角形，有一對邊相交於 R，一對於 S，一第五邊過 P，而第六邊過 Q. 此稍變樣的圖形內之 R,S 二點，其所處地位與前圖內之 P,Q 完全相同，而這裏的 P,Q，則與前圖內之 R,S 等.如是，倘 PQ 段於 R,S 被調和分割，則 RS 段亦於 P,Q 被調和分割. P 與 Q 對於 R 與 S 而言，謂之調和共軛點，仿此，R 與 S 對於 P 與 Q 而言，亦是調和共軛點.



25. 這裏不難指出，倘使 P,Q 與 R,S 二對點為調和點，則必互相分開，倘使 P 與 Q 不動，R 則內的自 Q 向 P 移動，S 卽外的自 Q 向 P 移動.由此，故知設有二對點 R, S 與 R', S' 同爲 P,Q 所調和

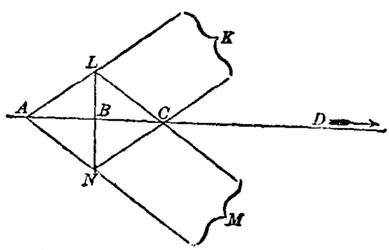
的分開，則R, S，與R', S'不能互相分開．反之，亦不難指出，倘能於一直線上選取二對點不互相分開，則可能找到一對點能將此二對均調和的分開．

26. 設如將一完全四角形 $ABCD$ 及其調和點 P, Q, R, S 自平面外之一點 O 射影出之，用平面取其一切面，平面即切此射影於一新的四角形 $A'\,B'\,C'\,D'$ 者，而此新四角形之二邊相交於一點 P'，二邊於 Q'，一第五邊過 R'，第六邊過 S'；則 $P'Q'R'S'$ 點，OP, OQ, OR, OS 射線之任何切面是調和的．所以倘將四調和點 P, Q, R, S 自一中心點 O 射影出之，則此四射線之任何切面 $P'Q'R'S'$ 是一組調和點．OP, OQ, OR, OS 射線本身亦名爲調和的．

VII. 度量的屬性

27. 以前所說一線上諸點之調和關係，乃是純就位置的觀點上言之，全未論及度量的問題．欲用入量於此，可假設此定理，卽，一平行方形之二對

角線互相平分．如是，則設 AC 為一平行方形 $ALCN$ 之一對角線，為一其他對角線 LN 平分於 B，并設將其相對的邊無限引長使之各於無限遠點 K 及 M 相交，則 $KLMN$ 卽可視為一完全四角形，有一對邊 KL 與 MN 相交於 A，又一對 KN 與 LM 相交於 C，一第五邊 LN 過 B，第六邊 KM，卽為無限遠線，交 AC 於無限遠點 D．這樣，AC 段卽為中點 B 及無限遠點 D 所調和分割了．



如是，可知任何一線段 PQ 必在一點 R 被平分，設如對於 P,Q 而言，R 之調和共軛點是在無限遠；或亦可云，一線段之中點，對於此段之兩極點而言，其調和共軛點乃是此線之無限遠點．

28. 設將一組調和點 $ABCD$ 自任何一點 O 用

OA, OB, OC, OD 諸射線射影之，而用一過 B 與 OD 平行的線取其一切面 $A'B'C'D'$，$A'B$ 卽與 BC' 等，因此四點爲調和點而 D' 則在無限遠.

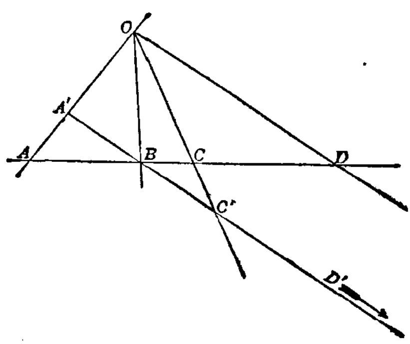
由於相似的三角，故知

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BA'}{DO}=\frac{BC'}{DO}=\frac{BC}{CD},$$

或變易諸段之次序，而注意其方向，

$$\frac{AB}{BC}=-\frac{AD}{DC}.$$

此卽是 AC 段於 B 被內的分割，於 D 被外的分割，其比相同，此種關係通常卽取之以爲調和點之定義者.又可注意，倘再另變易諸段之次序幷方向，則



$$\frac{AB}{BC}=-\frac{AD}{DC}\text{ 卽變作 }\frac{BA}{AD}=-\frac{BC}{CD},$$

從此可知不僅 AC 段於 B 及 D 被等比的分割，且 BD 段於 A,C 之被分割亦然，此則前已指明了.

29. 由此項調和點之屬性，卽不難敍明下面二者:

(1) $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AC}$，從此卽知幾何上之調和與代數上之調和級數實相同，以及

(2) $MB\cdot MD=MC^2$，這裏 M 爲 AC 段之中點.(註:乘號 $\times$ 亦可用一個點 $\cdot$ 爲之，如 $A\times B$ 亦可作 $A\cdot B$).

VIII. 橫錯比

30. 定義 設如一線段 PQ 爲任何二點 R 與 S 所分割，則可先取其比 $\frac{PR}{RQ}$ 與 $\frac{PS}{SQ}$，然後再取此二比之比，所得 $\frac{PR\cdot SQ}{PS\cdot RQ}$，名爲此四點之橫錯比.

31. 六橫錯比 同的四個點，可有六不同的橫錯

比，蓋 PQ, PR, PS 均可選之爲原段而其餘二點爲分割點，又取二比之比，其次序亦可不同．然四個點所有橫錯比不能多於六，或如 RS 段以 P, Q 爲分割點時不能得新橫錯比，此亦易見．試將 RS 爲原段而取其橫錯比，則得 $\frac{RP \cdot QS}{RQ \cdot PS}$，此則不過倒其段，實與前者無別．

四點之橫錯比中，其三爲其他三個之倒，因其成乃在取二比之比時倒其次序而已．因之，六橫錯比乃是 $\frac{PR \cdot SQ}{PS \cdot RQ}, \frac{PQ \cdot SR}{PS \cdot QR}, \frac{PQ \cdot RS}{PR \cdot QS}$ 及其三個倒數．此六橫錯比中所有數量，祇是 $PQ \cdot RS$, $PR \cdot SQ$, $PS \cdot QR$ 與其負數．

但是一直線上之任何四點 P, Q, R, S，很易看出 $PQ \cdot RS + PR \cdot SQ + PS \cdot QR = 0$，故由此即可推得

$$PQ \cdot SR = PS \cdot QR + PR \cdot SQ$$

或
$$\frac{PQ \cdot SR}{PS \cdot QR} = 1 - \frac{PR \cdot SQ}{PS \cdot RQ}.$$

幷可得
$$PQ \cdot RS = PR \cdot QS + PS \cdot RQ,$$

或　$$\frac{FQ\cdot RS}{PR\cdot QS}=1-\frac{PS\cdot RQ}{PR\cdot SQ}.$$

設橫錯比$\frac{PR\cdot SQ}{PS\cdot RQ}=k$, 則

$$\frac{PQ\cdot SR}{PS\cdot QR}=1-k;\quad 而\frac{PQ\cdot RS}{PR\cdot QS}=1-\frac{1}{k}.$$

緣此，設一直線上四點之橫錯比中有一等於k，則其餘五個卽爲

$$\frac{1}{k},\ 1-k,\ \frac{1}{1-k},\ 1-\frac{1}{k},\ \frac{k}{k-1}.$$

凡說及一橫錯比時，必須說明所說者是六個中之那一個，而若此比作某種次序，則此次序必須於討論中始終保持之.

32. 設$\frac{PQ\cdot RS}{PR\cdot QS}$爲已知四點之橫錯比，倘將其二點$P$與$S$，并其餘二點$Q$及$R$均互易之，則此比卽作$\frac{SR\cdot QP}{SQ\cdot RP}$，乃是倒了段，與原比無異. 或將任何二者幷其餘二者互易之，其比亦不變.故知

"四點之橫錯比作任何次序，倘將其二點幷其餘

二點均互易之，則此比不變.”

設如橫錯比 $\dfrac{PQ\cdot RS}{PR\cdot QS}=-1$，則 $\dfrac{PQ}{QS}=-\dfrac{PR}{RS}$，

或 PS 段於 Q 及 R 點等比的被分割，而此四點卽爲調和的.如此，則 P 與 S 必爲 Q 與 R 所分開.

33. 於一直線上取四點 A,B,C,D，自一中心點 O 射影之.設 p 爲自 O 至線的垂線之長，則 OAB 三角形之面積爲

$$\frac{1}{2}p\cdot AB=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin AOB,$$

而其他三角形之關係亦相似.因此，橫錯比 $\dfrac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}$ $=\dfrac{\sin AOB\cdot\sin COD}{\sin AOC\cdot\sin BOD}$，乃是一與 p 無關的數量，與線對 OA,OB,OC,OD 位置無關.由此，故

“設 A',B',C',D' 爲 A,B,C,D 點自任何一中心 O 之射影，則前組點之橫錯比等於後組點之相當的橫錯比；或說，四點之橫錯比於射影時不變.”

IX. 簡易幾何形

34. 一直線上之全組綫名爲一列點，經過一點的一組線，在同一平面內者，名爲一束射線．經過一線的一組平面，名爲一束平面．又，許多線經過一點，但不限於同在一平面內者，名爲一紮線，許多平面經過一點者名爲一紮平面．

在平面幾何學內，一列點與一束射線相爲例形，而在三度幾何學內，一列點與一束平面相倒，而一束射線自爲倒形．一紮射線與一紮平面各關與平面內之射線及點相倒．

X. 簡易形之相互關係

35. 二列點可以如是互相關係，對於一列之每一點，其他列上亦祇有一點與之相當．例如一束射線之二切面，卽如是相關，對於一列上之每點，其他列上有一點屬於同一射線者與之相當．仿此，二束射線倘爲同一列點之射影，亦如是相關．這些都是一對一相關之最簡單的例，但其他複雜的亦將遇見．

定義 設如二簡易形——列點，射線束，平面束——如是相關着，對於其一中之每一組調和元素，其他中有一組調和元素與之相當，則此二形稱爲射影的互相關係.

設如二形爲一級數之首與末，而此級數之每項爲適在其前者或後者之射影或切面，則卽能滿足此定義之條件而爲射影的相關者.

36. 由此定義已不難推知，二射影相關的形，其一中之任何一元素的聯列，其他中必有一與之相當者，而一形中之任何四點之横錯比等於其他形中之相當四點之横錯比.

37. 二射影相關的簡單形，其底同者——例如二射影的列點在一同直線上者——可有其一中之二元素與其他中之自己相當；設如多於二，則其一中之每一元素與其他中之自己相當，而此二形是同的.

相疊的形內可有二自己相當的元素，此於下可見之：設 $A, B, C, D, \cdots\cdots$，爲 u 列上之點，自 S_1 用

射線 $a_1,b_1,c_1,d_1\cdots\cdots$,射影之,又自 S_2 用射線 a_2, $b_2,c_2,d_2,\cdots\cdots$, 射影之。設 v 割射線 a_1,b_1,c_1,d_1, $\cdots\cdots$,於 $A_1,B_1,C_1,D_1,\cdots\cdots$,點,又割射線 a_2,b_2, $c_2,d_2,\cdots\cdots$, 於 $A_2,B_2,C_2,D_2,\cdots\cdots$,點. A_1,B_1, $C_1,D_1,\cdots\cdots$,與 $A_2,B_2,C_2,D_2\cdots\cdots$, 二列點均在 v 線上,乃是射影相關的,因其一中之任何一組調和點與其他中之一組調和點相當,而普通則相當的點均分開. S_1S_2 射線割 u 於 S 點,於 v 上決定二相當的點相合者. S_1 與 S_2 之射線卽射影 u 上與 v 相交之點者,決定二相合的相當點於 v 上. 如是,在二相疊的射影的形內,可有二自己相當的元素,不必一切元素均自己相當.

但要有三元素自己相當,則一切元素均自己相當.蓋如是則無定數點與其相當的點,卽三已知點中每點對於其餘二點之調和共軛點,相合,等等.

38. 今卽用此屬性於幾個簡單的例.

(1) 設如二射影的列點, $A_1,B_1,C_1,D_1,\cdots\cdots$

(2) 設如二射影射線束, a_1, b_1, c_1, $\cdots\cdots$ 以

在 u_1 線上，$A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots\cdots$ 在 u_2 線上，如是按置着，AA_1，BB_1，CC_1 或任何三射線經過一點 S，則一切連二相當點的射線經過 S，而二列之共點必自己相當。

蓋 S 爲二相疊射影射線束之中心，有三自己相當的射線，因之，一切射線均自己相當，而連任何點 P_1 至 S 的射線，必與連 P_2 至 S 者相合，或，P_1P_2 射線必經過 S。

定義 設如二射影列點如是按置着，諸連相當點的線均經過一點，

S_1 爲中心，及 $a_2, b_2, c_2, \cdots\cdots$ 以 S_2 爲中心，如是按置着，a_1a_2，b_1b_2，c_1c_2 交點，或任何如此的三交點在一直線 S 上，則一切相當的射點之交點，在 S 上，而二束之公射線必爲自己相當的。

蓋 S 爲二相疊射影列點之底，有三自己相當的點，因之，一切點是自己相當的，而任何一射線 p_1 與 S 之相交點，必與 p_2 與 S 之相交點相合，或，p_1 與 p_2 必於 S 相交。

定義 設如二束射線如是按置着，各對相當

則可說是彼此相透視的，或在透視位置內，而此則任何時祇須有三連相當點的線過一點便得。

射線之交點均在一直線上，則可說是彼此相透視的，或在透視位置內，而此則任何時祇須三相當射線之交點在一線上便得。

為簡便計，往往用符號$\barwedge$以表"為射影的"之意，并用符號$\doublebarwedge$表"為透視的"。所須注意者，互相透視的形亦必為射影的，但在一特殊相關的位置上。

(3) 二射影列點 A_1, B_1, C_1, ……在 u_1 線上及 A_2, B_2, C_2, ……在 u_2 線上，倘 u_1 與 u_2 之共點為自己相當的，則即透視相關。

蓋設 A_1A_2 與 B_1B_2 相交於 S，而此二列由此點射影之，則在二射影

(4) 二射影射線束 a_1, b_1, c_1……以 S_1 為中心及 a_2, b_2, e_2, ……以 S_2 為中心，倘二束之共射線 S_1S_2 自己相當，則即透視相關。

蓋設 S 為連 a_1a_2 與 b_1b_2 交點的線，用此取每一束之一切面，則此

射線束內，其中心爲 S 者，有三自己相當的射線，即，SAA_1，SBB_1，及 SK，這裏 K 乃是 u_1 與 u_2 之共點。因之，S 之一切射線爲自己相當的而此二列是透視的。

線上二射影列點內有三自己相當的點，即，a_1a_2，b_1b_2 及 S 割 S_1S_2 之點。因之，此二列之一切點爲自己相當的，或可說，二束之一切相當的各對射線於 S 上相交，而此二束是透視的。

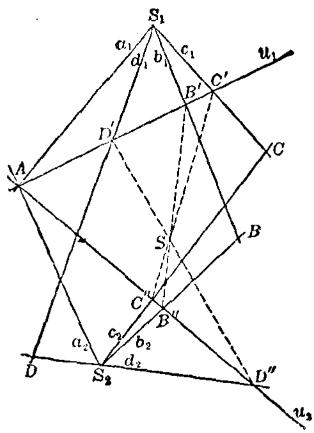
(5)二固定的直線 u_1 與 u_2 相交於 O，二固定的點 S_1 與 S_2 與 O 同線，一線 v 於一固定的點 V 旋轉，而交 u_1 及 u_2 於 A_1 及 A_2，則 S_1A_1 與 S_2A_2 相交之軌跡乃是過 O 的直線。

蓋 v 線於 V 旋轉時，即於 u_1 及 u_2 上作二透視列，其中 A_1 與 A_2 爲相當的點，而 O 則爲自己相當的點。S_1A_1 及 S_2A_2 束，因之即爲透視的，而其相當各對射線之交點的軌跡乃是一直線。O 所以爲軌跡之一點，由於 S_1O 與 S_2O 乃是 S_1 與 S_2 束中之相當的射線。

39. 相當元素之作法 由適纔所說，可見到二簡易形祇須有三相當元素，即一形中有三元素與他形中之三者相當，則此二形即可射影的相關.設 S_1 與 S_2 爲二束射線之中心，此二束射線在一同平面內，即須使之射影相關者. 第一束內之 a_1,b_1,c_1 射線與第二束內之 a_2,b_2,c_2 射線相當； 則現在的問題，即是在於自第二束內尋出一射線 d_2 與第一束內任何一射線 d_1 相當者.

設 a_1,a_2 相交於 A，b_1,b_2 相交於 B，c_1,c_2 於 C，而此三點在一直線 v 上，則二束即成爲透視的，任何一對相當的射線必交於 v 上。但設 A,B,C 不同在一線上，則必須求得一束射線，每已知的一束對之爲透視的，因而得一互相關係.

經過一交點 A，作二割線 u_1 與 u_2，而視 u_1 爲 S_1 束之切面，u_2 爲 S_2 束之切面.此二列點於是即爲射影相關的，且爲透視的，因 A 爲自己相當者.設 B',C' 與 B'',C'' 爲 b_1,c_1 與 b_2,c_2 被 u_1 與 u_2 相割之點，$B'B''$ 與 $C'C''$ 之交點，或 S，即是一束射

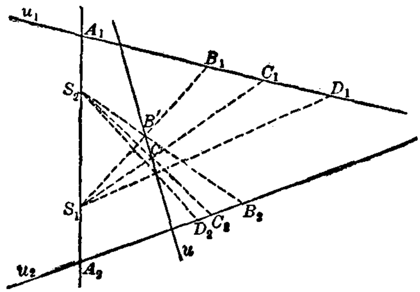


線之中心，u_1 與 u_2 均爲切面。因之，S_1 與 S 束爲透視的，因相當的射線於 u_1 上相交，而 S_2 與 S 亦爲透視的，因相當的射線交於 u_2 上。

設 d_1 爲 S_1 之任何一射線割 u_1 於 D'，SD' 射線割 u_2 於 D''，S_2 中之 d_2 亦於此點割之。如是，S_2 中之 d_2 與 S_1 中之任何 d_1 相當已決定，而相關亦完全了。

40. 反之，設 u_1 與 u_2 爲二列點在同平面內須使其射影的相關者，而第一列之 A_1,B_1,C_1 點與第二列之 A_2,B_2,C_2 點相當，則問題在於求得第二

列內之 D_2 點與第一列內任何點 D_1 相當者.



設 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 諸射線經過一點 V, 二列即爲透視的,而二列上相當的各對點均在過 V 的射線上. 但設這些射線不於一點相交, 則必須求出一列點, 對此每已知的列爲透視的, 因而得一相關.

於一線上,如 A_1A_2, 選取二中心 S_1 及 S_2, 即自此射影 u_1 與 u_2. S_1 與 S_2 二束射線即爲射影的,且爲透視的,因 S_1S_2 爲自己相當的射線. 設 B' 爲 S_1B_1 與 S_2B_2 之交點, C' 爲 S_1C_1 與 S_2C_2 之交點, 則 S_1 與 S_2 之各對相當的射線即於 $B'C'$ 線或 u 上相交.

倘 D_1 爲 u_1 上之任何點，S_1D_1 交 $B'C'$ 於一點，同時此點亦卽是 S_2D_2 之交點．如是，u_2 之 D_2 點與 u_1 之任何一點 D_1 相當是決定了，而其相關乃卽完全．

這裏所須明白者，本節內所說乃是前節之例．

XI. 第二級曲線及射線束

41. 設如二射影的射線束在同平面內既非同心亦不爲透視的，則各對相當的射線之交點，至多祇有二點在一直線上．

蓋設如有三點，則一切均然，而此二束爲透視的了．

設如二射影的列點在一同平面內，既非相疊亦不爲透視的，則連各對相當的點之線，至多祇有二條經過一點．

蓋設有三條，則一切均然，而此二列爲透視的了．

42. 因二射影的形中其一所有相連的元素之連貫與其他一形中所有者每相當，故二射影束內相

當的射線之交點之軌跡是一連續的點之連貫，或說是一曲線,而連二射影列內相當點之線,其軌跡是一連續的射線之連貫,或說是一包線.

設如二射影的射線束為非透視的，所生出曲線卽如此,其上沒有二點以上在一直線內.如是的曲線名為一第二級曲線.設如二列點為非透視的,則所生出的包線卽如此，其射線之經過一點者不能多於二.如是的包線名第二級射線束.

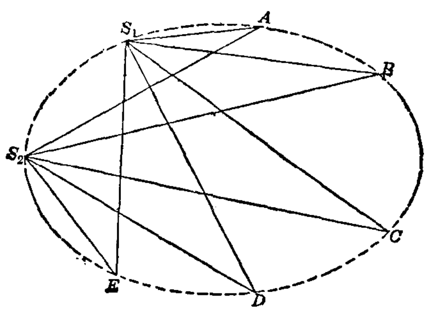
一第二級曲線由二射影的射線束，在同平面內而不是透視的者，所生出.	一第二級射線束由二射影的列點，在同平面內而不是透視的者，所生出.

43. 諸束之中心生出一第二級曲線者其自己亦為此曲線上之點,因 S_1 之 S_1S_2 射線遇其相當的射線於 S_2,而 S_2 之 S_2S_1 射線則遇其相當者於 S_1.這些相當的射線各祇有一點與曲線相共，卽，S_2 與 S_1，因一切其他經過此項中心的射線遇此曲線於 S_2 或 S_1 并其他處.這些射線,因之名為此曲線

上這些點方面之切線.

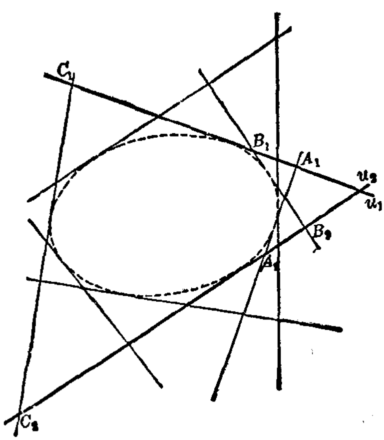
諸列點在其上的諸線生出一第二級射線束者，其自己亦爲束之射線，因每個連自己一點至其他中相當的一點，卽，二線之共點．經過一 u_1 上之點，此點卽與 u_2 上之點其在 u_1 上者相當，祇有束中之一射線，卽，u_1 自己，而經過 u_1 上之其他點有束中之二射線．此於 u_2 上之點，卽與 u_1 上點之在 u_2 上者相當的，亦是如此．這些點因而名爲二射線上之切點．

44. 如是，一第二級的曲線可由二已知的點 S_1 與 S_2 及三射線經過每一點相關於三射線經過其他點者，換言之，卽此曲線上之五點，所生出．由已



知的五點作出一第二級曲線的問題，於是乃成爲此問題，設如有二射影的束其三對射線已知，更決定其餘的各對的射線．

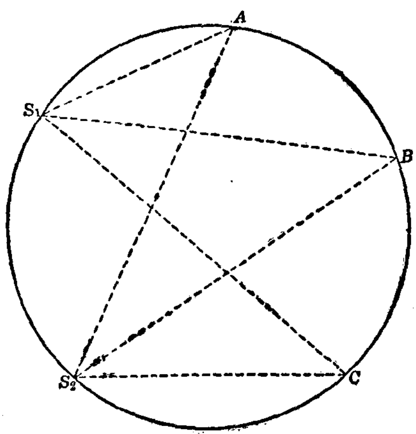
一第二級射線束則可由二已知的射線 u_1 與 u_2 及束內之五已知的射線生出之；換言之，由二射線及每線上三點相關於其他上三點者．由已知的五射線以作出一第二級射線束之問題，於是成爲此問題，即說二射影的列點內之已知的三對點，決定其餘相當的各對．



45. S_1 與 S_2 點，即生此曲線的束之中心，不是此曲線之特別的點，或此曲線隨便用其上其他二點爲中心均可生出，此則不難知了。至 u_1 與 u_2 亦然。知此，即得：

"一第二級曲線可用射影的射線束自其任何二點射影之，而一第二級射線束爲其在射影列點內之任何二射線所割。"

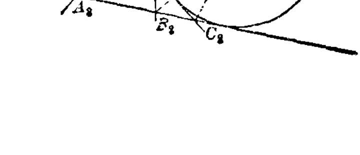
46. 圓乃是一第二級曲線，因設於其上選取二點 S_1 與 S_2 爲中心，而其他點 A, B, C, ……自此



射影之，則 AS_1B 角等於 AS_2B 角，等等，此二射線束 S_1 與 S_2 可相疊置，各對相當的射線均相合。因之，此二束為射影的，而圓上之點乃是各對相當射線之交點。

仿此，可知圓之切線成一第二級射線束。設 u_1 與 u_2 為圓之任何二切線，而其他切線割此二者於 A_1, A_2; B_1, B_2; ……, A_1OB_1 角等於 A_2OB_2 角，等等，u_1 與 u_2 列點即為二同的射線束，同以 O 為中心者，之切面。因之，此二列點是射影的，而此組切線即是一第二級射線束。

47. 由此種研究，可知每一圓錐切面是一第二級曲線，可照前說者生出之，并且一圓錐切面所有的一組切線，乃是一第二級射線束。反之，任何一

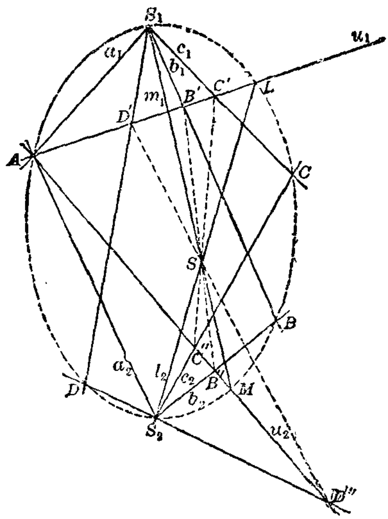


第二級的曲線是一圓錐切面，而任何一第二級射線束乃是一圓錐切面之一組切線.

48. 圓錐曲線之分類 設如將生出一圓錐曲線的二射影射線束之一，使其與其他同心而不變其射線之方向，則此二束或可有二射線與其相當的射線相合，或祇有這樣的一射線，或則全無，但設如相關的射線於心依相反的方向旋轉，則必可有二. 在束之原位置中，因之，可有二對相關的射線爲平行的，如是，則所生出的曲線乃是一雙曲線，有二點在無限遠；倘祇一對，則所生出者乃是一拋物線；若沒有相當的射線平行，則曲線是一橢圓. 倘使已知的五點，卽曲線由以生出者，其中四點成一四角形，而其餘一點在其中，則所生曲線必然是一雙曲線.

XII. Pascal 與 Brianchon 之定理

49. 前第 39 節中之圖，可如是推廣之以顯 S_1 中之 S_1S 射線割 u_2 於一點 M，此點卽在由二束



所決定的曲線上者．仿此，并可顯 S_2 中之 S_2S 射線割 u_1 於曲線上之 L 點．今 S_1, S_2, A, D, L 及 M 爲曲線上之任意點，而連此項點的線，作 S_1DS_2LAM 次序，成一內切於第二級曲線中之六角形，其每對相對的邊 S_1D 與 LA, DS_2 與 AM, S_2L 與 MS_1 之相交點必於一直線 $D'SD''$ 上．因之

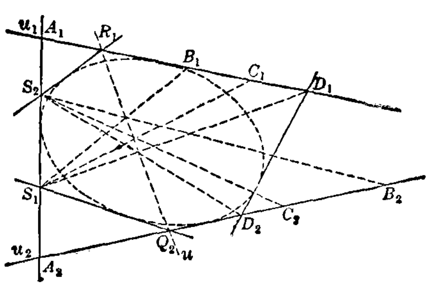
"切於一圓錐曲線內的六角形之三對相對的邊之交點，在一直線上．"

此卽是有名的巴斯卡定理 (*Pascal's theorem*)，於 1640 年發表，彼時巴氏還祇十六歲。

50. 反之，前第 40 節中之圖，則可推廣之以顯 S_2R_1 與 S_1Q_2 線，乃是由已知的列所決定的第二級射線束中之射線，R_1 與 Q_2 爲 $B'C'$ 或 u 線交 u_1 與 u_2 之點。今 $S_1S_2R_1D_1D_2Q_2$ 爲一六角形之頂點，其邊乃是第二級射線束中之任意射線，而連各對相對的頂點之線則必交於一點。因之，

"切於一圓錐曲線外的六角形，連其各對相對的頂點之線相交於一點。"

此卽是白良卿定理(*Brianchon's theorem*)，恰爲巴氏定理之例，然直至 1806 年時纔發見。



51. 由此二定理,卽得許多重要的結果.

(1) 設如巴氏定理中其內切六角形之二頂點相合,則其中間邊卽成此頂點之切線,而定理成爲:一切於圓錐曲線內之五角形,其二對不相接的邊之交點,及第五邊與其對面頂點之切線之交點是在一直線上.

(2) 設如白氏定理中其外切六角形有二邊相合,則其中間頂點卽成此邊之切點,而定理乃作:切於一圓錐曲線外之五角形,其連二對不相接頂點之線及連第五頂點至其對面邊之切點之線經過一點.

(3) 倘更將六角形約成爲一內切四邊形及二相對頂點之切線,則得:任何一切於圓錐曲線內之四邊形,其二對相對邊之交點及相對的頂點上切線之交點,是同線的:

(4) 倘更將六角形約爲一外切四邊形及切點在二相對邊上者,則得:任何一切於圓錐曲線外之四邊形,其連相對頂點及相對的邊上切點的線,相交於一點.

(5)倘爲內切三角形，巴氏定理卽作：圓錐曲線內切三角形，其各邊與對面頂點上切線之相交點在一直線上.

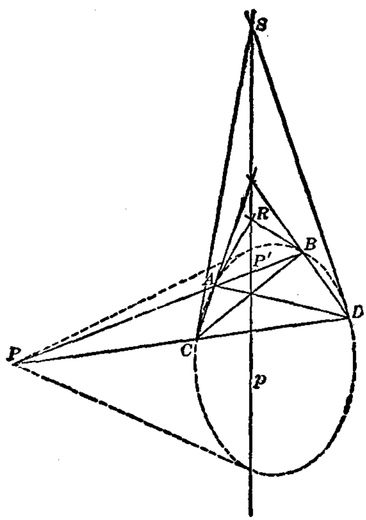
(6)倘爲外切三角形，白氏定理卽作：連切於一圓錐曲線外三角形之頂點至相對邊上之切點之諸線相交於一點.

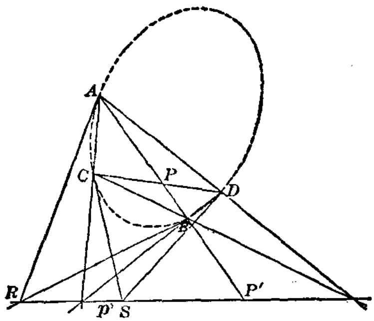
52. 有此巴氏定理，則倘有五已知點，或四已知點及其一點上的切線，或三點及其二點之切線，卽不難由此作出一圓錐曲線. 設有五已知點，爲 A，B，C，D，E，而有次序的連之，幷作一任意的線經 A 爲內切六角形之第六邊，則除第五邊及第六頂點此六角形已決定了. 這裏，AB 與 DE 爲六角形之相對邊，CD 與經 A 的任意線亦爲相對邊，其相交點卽決定巴氏線. BC 邊及 EF 邊，F 卽是過 A 的任意線上之點，亦交於巴氏線上，因此，F 點卽曲線上之任意點亦決定了.

仿此，有白氏定理，則於已知五切線，或四切線及其一切點，或三切線及其二切點，卽可作出一圓錐曲線之諸切線.

XIII. 極與極的理論

53. 一圓錐曲線平面內有一點 P，經過此點作二割線割此曲線於 A,B，及 C,D，(如下二圖)．設將這些點兩兩相連,以成一內切四角形 $ACBD$，則二對相對的邊 AC 與 BD，AD 與 BC，其交點在一線 p 上，A 與 B 二相對頂點及 C 與 D 二頂點上之切線亦相交於此線上(巴氏定理)．p 線對乎此圓錐曲線而言名為 P 點之極線,而 P 點則為 p 線之極點．





設如 PAB 割線割極線於 P'，則卽可見出 P，A，P'，B 點乃是調和的，因此，P' 對於 A，B 而言，爲 P 之調和共軛點，卽可以此求之. A 與 B 處之切線亦相交於極線上，故由一割線卽可求得極線上之二點. 由此可知極線之位置與第二割線無關，此卽是一點之極線與作之之法無關，因而與點及曲線有固定的關係.

54. 關於一圓錐曲線的一點 P，其所有極線上有：

(1) 連經過 P 點諸對割線割曲線之點的弦之交點.

(2) 經過 P 點諸割線割曲線之點上所有切線之交點.

(3) 一切被曲線與 P 所調和分開的點.

(4) 自 P 來的切線之切點.

55. 設有一已知的線 p, 而欲求其關於一已知圓錐曲線之極點,則可於線上選取二點 R 與 S,於此作切線交曲線於 A,B, 及 C,D. AB 與 CD 弦之交點 P 必為此線之極點,因其極線是經過 R 與 S 的.

56. 設如一點 P 在一圓錐曲線之內, 則其極線上之一切點均在曲線之外,因經過 P 的弦割曲線,而凡為曲線對 P 所調和分開的點,極線均經過之.設 P 在曲線以外, 則極線上之有幾點必在曲線之內,而極線必與曲線相割. 設 P 為曲線上之一點,則其極線卽為該點上之切線,反之,一切線之極點卽為切點.此則為前 53 節內作極線之極限的例.

這裏或可作為定義的偶一及之,卽,設使有一點,凡經過此點的諸直線均與一圍繞的曲線相割者,

則此點在此曲線之內，反之，設如經過此點可有直線不割此圍繞曲線於眞的點，則此點在曲線之外.

57. 共軛點及線 設如一點 Q 在一 P 點之極線上(對乎一圓錐曲線而言)，則 P 亦在 Q 點之極線上.

並設 P 在曲線以外，則 Q 可隨便在曲線之內或外，P 之極線爲一經 Q 之割線，其二割點上之切線相交於 Q 之極線上一點. 但其交點是 P，因之 P 是 Q 之極線上之一點. 設 P 在曲線之內，Q 卽必在其外，而 QP 必割曲線於一眞點. Q 與 P 是爲曲線所調和分開的，因 Q 在 P 之極線上，但同此理由，亦卽可知 P 必在 Q 之極線上. 又設 P 在曲線上，而 Q 爲其極線之一點，卽爲 P 點切線上之一點，則 Q 之極線自必過 P 了.

設如二點其每點互相在其他一點之極線上，則此二點名爲極共軛點；設如二線其每線互相經其他線之極點，則此二線名爲極共軛線. 如是，一點對於其極線上之諸點均爲共軛者，而一線對於經

過其極點之諸線亦均爲共軛者。

58. 中心與徑 前 53 節內之圖，設使其 P 點在無限遠，則諸經此的割線卽爲平行，而極線卽成爲許多相平行的弦之中心點之軌跡，每一中心點與 P 相調和的分開。此項圓錐曲線內平行弦中心點之軌跡是一直線——是平行弦之無限遠相交點之極線——名爲此曲線之徑。一圓錐曲線內任何二徑之交點，乃是一無限遠線之極點，名爲此曲線之中心。

橢圓之中心，在曲線以內，因該平面內之無限遠線完全在其外，而一切徑與曲線之割點乃是眞的。若爲抛物線，其無限遠線卽爲此曲線之切線，因而其心在曲線上之無限遠處，而一切徑均互相平行。雙曲線之無限遠線割此曲線於二眞點，因此，中心在曲線之外，而有幾條徑割曲線於眞點，有的則否。曲線之無限遠處的切線，名爲漸近線，經過中心，因而是徑。

XIV. 結尾

59. 在此短篇內，希望已將近代純粹幾何學之精神指出，足使讀者鼓勵繼續研究之興味．其應用於較初等的問題上，極有許多結果可得，而於孤獨的讀者亦并不大難．繼續這裏所指出的方法，不僅可完全的研究圓錐切面，并可研究圓錐切面間之互相關係，以及有許多高級曲線．關於一圓錐曲線之極點及極線，其理論將平面內之每一點與一線相關，每一線與一點相關，使二元性原理得一具體性，并使之能將一系統之點與線倒之以生出一定的一組線與點．倘自平面外一點射影之，則這裏所得結果，即可直應用至於第二級圓錐體及其平切面，并得許多有味的定理，不是僅僅爲射影，不多於平面形之類比．如研究及不同在一平面內之二射影相關的列點，或二射影的平面束其軸不相交者，則即得第二級之法面（*ruled surfaces*）．

非歐几里得幾何學

Frederick S. Woods 著

目　次

非歐几里得幾何學

Frederick S. Woods 著

I. 引言

1. 歐几里得之第五自題爲:"設如一直線落於二直線上,作出同旁之內角小於二直角,則倘將此二直線無定引長時,卽於內角小於二直角之旁相遇."

所謂"非歐几里得幾何學"者,卽是一幾何學系統,不採用此自題而建築成的.嚴格言之,或者任何一種幾何學其基礎與歐氏之基礎詳節上有異者,均可與以此名稱,不過慣例上使用則稍不同.

非歐几里得幾何學之概念,乃是經過了數百年不能證明歐氏此自題之失敗後所發生的.此種歷史,這裏未能述之,不過可簡單說的,卽是,一切想證明此自題的企圖均歸失敗.有幾個學者,尤其是薩及里(*Saccheri*, 1667－1733), 良伯(*Lambert*,

1728—77),萊根德(*Legendre*, 1752—1833),對於現在所認爲非歐几里得幾何學的方面，頗有些重要供獻,不過他們對於自己所獲結果,卻多未能得其眞意義.

最後,差不多相同時但卻互相獨立的,有一俄人陸白乞夫斯基 (*Lobachevsky*), 一匈牙利人波耳耶(*J. Bolyai*)及一德人高斯(*Gauss*)得此結果,知不特此平行自題不能證明，并且一幾何學之論理系統可不需此而建築成.高斯對於此方面之著作,祗自其與人通信之函稿中發見些，以及其遺稿中亦有些片段. 陸氏著作則於 1833 至 1855 年所發刊的幾篇文中見之,而波耳耶的,則在其父親的著作之附錄中,發刊於 1832—35.此三人所共的一幾何學系統,名之爲陸白乞夫斯基幾何學,因陸氏發達之最完備.

陸氏幾何學曾一時爲非歐几里得幾何學之僅有的一種.無何,1854年時有德國學者黎曼(*Riemann*)自微分算法的立足點上,研究出一種新的來,卽名

之爲黎曼幾何學.

一方面旣得三種幾何學,卽歐几里得者,陸白乞夫斯基者及黎曼者;他方面用以演成幾何學的方法,亦有三種.第一種是簡易的方法,與歐几里得所用者相仿,陸氏,波氏及高氏均用之.第二種是用卡萊(*Cayley*)之射影度量系統,德國學者克拉恩(*Klein*)多用之.其第三種卽是用微分算法者,爲黎曼所用.這裏開首用第一種方法,以後則略一及後者二種.

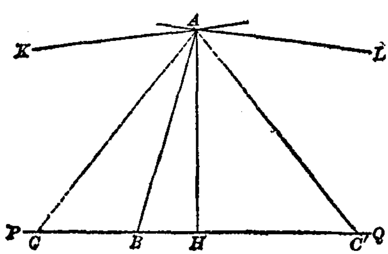
本篇內不欲深究此問題,卽,必須先設若何假設,然後可以用入平行自題,此項工作前第一篇中 *Veblen* 教授已及之,本篇內假定讀者已閱過該篇,因而自由引及其結果.不過本篇與第一篇是互相獨立的,讀者卽自歐氏原定義,普通觀念及自題入手亦無不可.

II. 平行線

2. 這裏假定歐氏的基本,但平行自題則除外

之,或採用 *Veblen* 的假設一至十二及十四;如是則歐氏書第一卷上之二十八命題 (*Veblen, VIII*) 均合理.今可更下一平行線之定義,較歐氏者尤爲普遍.

設 PQ (如圖)爲任何一直線,A 爲任何一點不在 PQ 上者.經過 A 有一組線與 PQ 相交者,因 PQ 上任何點均可與 A 相連起來.但亦可有經過 A 的其他線不與 PQ 相交者,此則頗易想到之事.倘有之,則可有線如 AL 與 AK 不與 PQ 相交而爲與 PQ 相遇的一組線之界限.如是的線即稱爲與 PQ 相平行者.



換言之: 設 AB 爲任何一經過 A 的線與 PQ 相交者. AL 線稱爲 A 點上 PQ 之平行線,倘

(1) AL 任何引長不與 PQ 相交，

(2) 任何經過 A 在 BAL 角口中的線與 PQ 相交。

這是很明白的，此定義祗論及 AL 與 PQ 線在 AB 之同一旁的部分。換言之，線之方向極關重要。以後普通都照所用字母之次序以指出平行線之方向；如是，我們可說 AL 與 PQ 平行，AK 與 QP 平行。

AB 可爲任何一經過 A 與 PQ 相交的線。不過尋常用與 PQ 垂直的 AH 線較爲便利。這樣便可見

$$\measuredangle HAK = \measuredangle HAL.$$

蓋設 $\measuredangle HAK$ 大於 $\measuredangle HAL$，則卽可作 AC 遇 QP 於 C，俾 $\measuredangle HAC = \measuredangle HAL$。今於 HQ 上取 C'，俾 $HC' = HC$，而連 A 與 C'。照歐氏書 I 4 (Veblen 定理三十二) HAC 與 HAC' 二三角形相合，因而

$$\measuredangle HAC' = HAC = \measuredangle HAL.$$

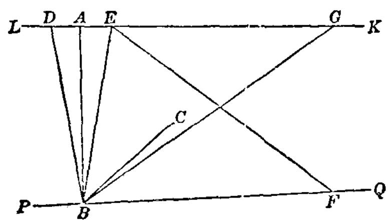
然這是不可能的，因 AL 與 HQ 相平行。由此可知 $\measuredangle HAK$ 不能大於 $\measuredangle HAL$。仿此，$\measuredangle HAL$ 亦不能大於 $\measuredangle HAK$。於是 $\measuredangle HAK = HAL$.

HAL 角名爲 AH 距離之平行角.

定義中之 A 點顯然爲無匹的. 然自後面之定理, 可知此則幷不重要.

3. 一直線於其一切點均保持平行屬性.

設 AK (如下圖) 於 A 點與 BQ 相平行, A_1 爲 AK 上之任何點, 這裏證明其 AK 於 A_1 點與 BQ 相平行.



將 A_1 與 B 相連, 作任何一線 A_1C 經過 A_1 在角口 BA_1K 內. 於 A_1C 上任取一點 D, 與 A 相連, 則 AD 線引長時必遇 BQ 於一點 F, 因 AK 與 BQ 是平行的. 因此, A_1C 必遇 BQ 於 B 與 F 間之一點 (*Veblen* 定理十七). 此卽是, 任何一經過 A_1 在角口 BA_1K 內之線與 BQ 相交, 但 A_1K 不交 BQ, 因

此與 BQ 平行.

倘 A_1 在 AK 之後面引伸上,此證仍可用,不過 D 亦須在 A_1C 之後面引伸上纔行.

今將證明平行屬性乃是交互的.

4. 設如一線對於一其他線平行, 則此其他線對此線亦平行.

設 LK (如 60 頁圖) 對 PQ 平行, 今欲證其 PQ 對 LK 平行. 自 A 作一線與 LK 垂直,則此垂直線必遇 PQ 於一點 B, 因 LK 對 PQ 平行. 經過 B 於 QBA 角口內作任何一線 BC;作 ABE 與 ABD 二三角形,俾

$$\measuredangle ABE=\measuredangle ABD<\frac{1}{2}\measuredangle QBC,$$

則 $BD=BE$ (歐氏書 I, 26), $\measuredangle BEK>\measuredangle BDK$ (同書 I,16). 因此,可於 BEK 角內作一線 EF, 俾 $\measuredangle BEF=\measuredangle BDK$, 而 EF 遇 BQ, 因 LK 平行 PQ. 今取 $DG=EF$, 幷作 BG, 則 BEF 與 DBG 二三角形相合,而

$$\measuredangle DBG=\measuredangle EBF.$$

但 $\measuredangle DBE < \measuredangle QBC$,

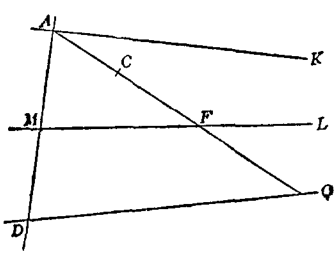
故 $\measuredangle EBG > \measuredangle EBC$.

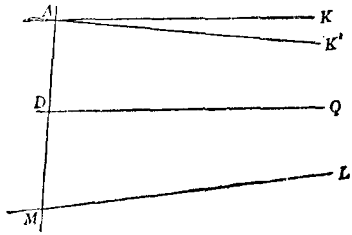
因此,BC 遇 LK 於 E 與 G 間之一點,但 BC 爲經過 B 角口 QBA 內之任何線,而 LK 與 BQ 不相遇,因此, BQ 對於 LK 平行.

5. 設如二線對一第三線爲平行，則此二線卽彼此平行.

今可照此第三線在二線之中間與否而別之爲二例.

設爲第一例 (如下圖), 可設 AK 與 DQ 幷對 ML 平行; 今欲證其 AK 對 DQ 平行.經過 A 於 DAK 角口內任作 AC 線,則此線遇 ML 於一點 F, 因 AK 對 ML 平行. CF 引長時亦必遇 DQ,





因 ML 與 DQ 是平行的．因此，任何線經過 A 於 DAK 角口內者遇 DQ，反之；AK 不能遇 DQ，因其不能遇 ML．故 AK 與 DQ 相平行．

倘爲第二例（上圖），設 AK 與 DQ 各與 ML 平行，今欲證其 AK 與 DQ 相平行．試作一經過 A 的線 AK' 與 DQ 相平行，按前例即知 AK' 與 ML 平行，因而與 AK 相合

III. 歐几里得之假設

6. 我們可用下面的假設以代易歐氏之自題五或 *Veblen* 之假設十三，至他們的其餘假設，則均存之．

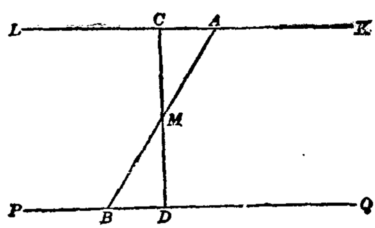
經過平面內任何一點，有一線，且祗有一線，與

一已知的線相平行.

有一平行線存在，此是歐氏書第一卷之第二十八題內所證明者(*Veblen, VIII*).至假定祇有一平行線存在，則等於假定(前第二節圖中之) AL 與 AK 二線乃是一直線.因而

$$\measuredangle HAL=\measuredangle HAK=\text{直角}.$$

今設 M 爲 AB 之中點(如圖)，作 MD 垂直 PQ 而交 AL 於 C，則如適纔所指出，$\measuredangle DCK$ 是一直角.AMC 與 BMD.二三角形相合，而 $\measuredangle CAB=\measuredangle ABD$.因之，



$$\measuredangle QBA+\measuredangle BAK=2\text{直角},$$

照我們平行線之定義,任何經過 A 的線在 BAK 內者與 PQ 相遇.因此，我們這假設等於歐氏之自

題五.而歐儿里得幾何學卽由此出.

IV. 陸白乞夫斯基之假設

7. 我們存歐儿里得幾何學之一切其他假設,但其自題五或 *Veblen* 之假設十三則用下面陸白乞夫斯基之假設代之.

經過平面內之任何一點,有二線與一已知的線平行.如此,則上面圖內

$$\measuredangle QBA+\measuredangle BAK<2\text{ 直角}.$$

蓋設 QBA 與 BAK 二角之和大於二直角,則可經過 A 於 BAK 角內作一線不遇 BQ 者 (歐氏書 I, 28). 但此卽與我們 AK 及 BQ 相平行之假設不合.反之,設二角之和等於二直角,則卽得歐氏假設.

8. 下面的諸定理,於以後之證極關重要.

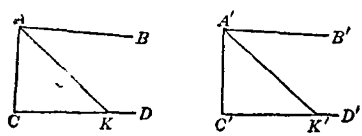
定理一 設 AB 與 CD 爲二平行線被一第三線 AC 所割,又 $A'B'$ 與 $C'D'$ 爲其他二平行線被一線 $A'C'$ 所割,而 $\measuredangle DCA=\measuredangle D'C'A'$,則

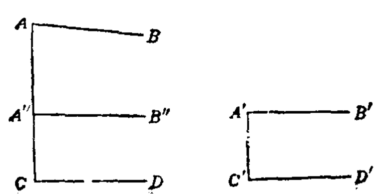
(1) 設 $A'C'=AC$，即$\measuredangle C'A'B'=\measuredangle CAB$，

(2) 設 $A'C'<AC$，即 $\measuredangle C'A'B'>\measuredangle CAB$，

(3) 設 $A'C'>AC$，即 $\measuredangle C'A'B'<\measuredangle CAB$.

試先論 $A'C'=AC$（如下上圖）. 設 $\measuredangle C'A'B'$ 小於 $\measuredangle CAB$，可作 AK 俾 $\measuredangle CAK=\measuredangle C'A'B'$. AK 遇 CD 於一點 K. 今於 $C'D'$ 取 K'，使 $C'K'=CK$; 并作 $A'K'$，則 ACK 與 $A'C'K'$ 二三角形相合（歐氏書 I, 4)，而 $\measuredangle C'A'K'$ 等於 $\measuredangle CAK$ 并等於 $\measuredangle C'A'B'$. 然這是不能的; 因 $A'B'$ 不遇 $C'D'$. 因此，$\measuredangle C'A'B'$ 不能小於 $\measuredangle CAB$.仿此，并知 $\measuredangle CAB$ 亦不能小於$\measuredangle C'A'B'$，故 $\measuredangle C'A'B'=\measuredangle CAB$.





試再論 $A'C'<AC$(如上下圖).於 CA 上取 CA'' 等於 $C'A'$, 作 $A''B''$ 與 CD 平行, 則 $\measuredangle CA''B''=\measuredangle C'A'B'$, 而 AB 與 $A''B''$ 平行 (第五節). 因此, 照第七節

$$\measuredangle B''A''A+\measuredangle A''AB<2\text{ 直角}.$$

但 $\measuredangle B''A''A+\measuredangle CA''B''=2$ 直角,

故 $\measuredangle A''AB<\measuredangle CA''B''$; 此卽是 $\measuredangle CAB<\measuredangle C'A'B'$.

至第三例 $A'C'>AC$ 則可仿第二例論之.

定理二 設 AB 與 CD 爲二平行線被一第三線 AC 所割,又設 $A'B'$ 與 $C'D'$ 爲其他二平行線被一線 $A'C'$ 所割,而 $\measuredangle CAB=\measuredangle C'A'B'$, $\measuredangle ACD=\measuredangle A'C'D'$, 則 $AC=A'C'$.

蓋無論假定 $AC<A'C'$ 或 $AC>A'C'$ 均違定理一.

設如定理一中 $\measuredangle DCA=\measuredangle D'C'A'=$ 直角,CAB 與 $C'A'B'$ 角卽爲 AC 與 $A'C'$ 距離之平行角 (第二節). 定理一於是包括以下者爲其特例:

定理三 平行角於固定的距離爲固定者，若距離增加則卽減小.

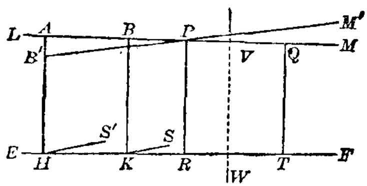
設命(前第二節圖中之) AH 距離爲 p，則照陸白乞夫斯基氏之記號法，HAL 平行角可以 $\pi(p)$ 表之.定理三卽確定 $\pi(p)$ 是 p 之減縮的函數.至 $\pi(p)$ 之確切的決定，當於33節中論之，這裏所可注意者，$\pi(p)$ 總是小於一直角的.換言之，

定理四 設如二線有一公共垂直線，則此二線旣不相交亦不平行.

此定理四之反面亦眞，今將明之.

9. 二直線旣不相交亦不平行者有一公共垂直線.

設 LM 與 EF (如下圖)爲二直線旣不相交亦不平行者，今欲明其有一公共垂線.於 LM 上任取二點 A 與 B，作 AH 及 BK 與 EF 垂直.倘 $AH=BK$，則 LM 與 EF 有一公共垂線，已如下可見.今設 $BK<AH$.作 KS 與 LM 平行.將直角 $\measuredangle FKB$ 置於直角 $\measuredangle FHA$ 上，則 K 落於 H 處，KF



取 HF 之方向,而 KB 取 HA 之方向. B 點落在 H 與 A 間之 B' 點上, BM 作 $B'M'$ 地位,而 KS 作 HS' 地位,與 $B'M'$ 平行.

因 $\measuredangle FKS=\measuredangle FHS'$, 故與 KS 平行(并與 LM 平行)經過 H 的線在角口 FHS' 內 (第七節).因之, HS' 交 LM, 而 $B'M'$ 亦交 LM 於一點 P (*Veblen*, 定理十七).

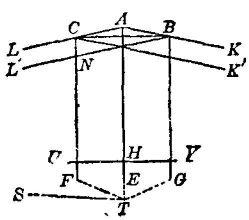
作 PR 與 EF 垂直.將直角 FHB' 置於直角 FKB 上,則 PR 線作 QT 位置, 這裏 $QT=PR$ 而與 EF 垂直.

今於 R 與 T 之中途取 W, 作 WV 與 EF 垂直,而將 TWV 於 WV 摺之,則 T 落於 R, TQ 與 RP 相合, $\measuredangle WVQ$ 與 $\measuredangle WVP$ 相合.因之, WV 即是所求的 EF 與 LM 之公垂線.

10. 任何一角，乃是屬於一定距離的一平行角.

設 KAE (如下圖) 爲已知的角 α. 今欲求一距離 p，α 對之爲平行角者.

作 $LAE=\alpha$，於 AK 及 AL 上取二點 B 與 C 俾 $AB=AC$. 將 B 與 C 相連，作 BL' 與 BL 平行，CK' 與 CK 平行. 幷作 CF 平分 $\measuredangle LCK'$ 及 BG 平分 $\measuredangle KBL'$. 這裏很明白，對於 AE 而言，此形是相稱的.



CF 與 BG 不能相交，蓋若相交於一點 T，則可作 TS 與 AL 及 BL' 平行，而因 $\measuredangle LCT=\measuredangle L'BT$，$CT=BT$，即可得 $\measuredangle STC=\measuredangle STB$ (第八節定理一)，此則不可能者.

CF 與 BG 亦不能平行，蓋不則因 $\measuredangle LCF=\measuredangle$

$L'BG$ 及 $\measuredangle CNL'=\measuredangle BNF$, 即得 $CN=NB$ (第八節定理二),而 $\measuredangle NCB=\measuredangle NBC=\measuredangle K'CB$, 此則不可能者.

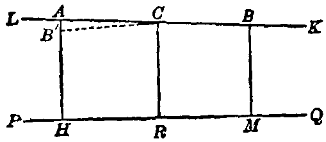
因 FC 與 BG 既不相交亦不平行, 即有一公垂線UV(第九節),又因此形爲相稱的,幷於 H 點與 AE 垂直.於是可確定 UV 與 AK 平行.

設 UV 不與 AK 平行, 則可自 U 與 V 點各作一線與 AK 及 CK' 平行.因 $CU=BV, \measuredangle UCK'=\measuredangle VBK$, 此二平行線將與 UV 作出相等的角(第八節定理一), 此則不可能者. 因此, KAE 角爲 AH 距離之平行角.

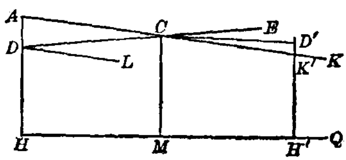
11. 二平行線繼續的互相接近, 其距離終至小於任何一指定的數量.

設 LK 與 PQ (如下圖) 爲二平行線, A 與 B 爲 LK 上之二點, B 點對 A 在平行之方向. 自 A 與 B作 AH 與 BM 垂直於 PQ. 今欲證 $BM<AH$.

於 H 與 M 之中途取 R, 作 RC 線與 PQ 垂直. RCB 角小於一直角, 因其是一平行角. 所以 $\measuredangle$



$RCB < \measuredangle RCA$. 設將 $RMBC$ 四邊形於 RC 摺之，則 MB 卽作 HB' 位置；這裏 $MB = HB' < HA$. 因之，LK 與 PQ 繼續的互相接近.



欲證明定理之第二部，可設 AK 與 HQ（如上圖）爲任何二平行線，而 AH 爲自 A 至 HQ 之垂線. 設 ε 爲任何指定的數量，而於 AH 上取距離 $HD < \varepsilon$. 作 DL 與 HQ 及 AK 平行，則 HDL 角小於一直角. 因之，自 D 作出與 AH 垂直的線 DE 遇 AK 於一點 C. 自 C 作 CM 垂直 HQ. $\measuredangle MCD > \measuredangle MCK$，因 $\measuredangle MCK$ 爲 CM 距離之平行角，

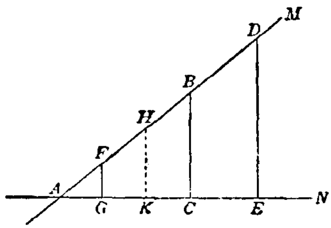
CD 與 MH 則既不相交亦不平行，因此二線有一公垂線（第八節）.

因之，設將 $MHCD$ 四邊形於 MC 摺之，卽作 $MH'D'C$ 位置，這裏 CK 在 CD' 與 MQ 之中間. 於是 CK 遇 $H'D'$ 於一點 K'，而 $H'K'<H'D'=HD$. 故 $H'K'<\varepsilon$.

12. 設如二線不平行，則充分引長時不岐散，而其距離終至大於任何指定的數量.

試先論二相交的直線 AM 與 AN（如下圖）. 設 B 與 D 爲 AM 上之二點，$AD>AB$，而 BC 及 DE 與 AN 相垂直. 今欲證 $DE>BC$.

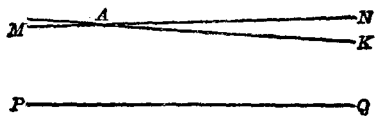
倘若能 $DE=BC$，則於 CE 之中點作一線與 AN 垂直時，此線亦必幷與 AM 垂直，此則不可能者，因 AM 與 AN 相交（第八節，定理四）. 又倘若能 $DE<BC$，則試取 AF 小於 DE 幷 AB，而作 FG 與 N 垂直，則 $FG<AF<DE$. 但 $BC>DE$，因此，於 G 與 C 間之一點 K，有一垂線 HK，能 $HK=DE$ 者. 然此亦不可能. 因之，$DE>BC$.



欲證明 ED 之長無有最高限度，可取 AH(如上圖)俾 $\measuredangle MAN$ 為 AH 之平行角，并作 HL 與 AM 垂直，如是則 AN 與 HL 相平行。設 a 為一數量不問其如何大，於 HL 上取 Q，俾 $HQ=2a$. 將 Q 與 A 相連，而自 A 與 H 間之一點 E 作一線與 AH 垂直，交 AQ 於 R. 這裏可將所取 E 務必與 H 接近，使 RE 與 HQ 之差極微，俾 $RE>a$. 但 RE 交 AN 於一點 D，因 AE 之平行角大於 $\measuredangle HAN$ (第八節定理三)．於是 $DE>RE>a$. 因 a 是一正數，故 DE 之長無限制。

今再一究二不相交的線 MN 與 PQ (如下圖)．於 MN 之任何點 A 作 AK 與 PQ 平行。因 AK 與 MN 相交，其距離可至大於任何一指定的數量，而

AK 與 PQ 之距離，則照前十一節，可至小於任何一數量．因此，AN 與 PQ 之距離終至大於任何一指定的數量．



AN 與 PQ 自然能一時互相接近，但終是歧散的．事實上，其至短之距離可以其共的垂線量之．

V. 黎曼之假設

13. 黎曼發見還有一種假設可用以代歐氏之第五自題：

經過平面內一點不能作一線與一已知的線平行．換言之，(第二節圖內) 以 A 爲頂點的一束線，其所有一切線均與 PQ 相交．

此種假設違歐氏書第一卷之命題二十八，因之，必須改變彼定理所基於其上之假設．命題二十八基於命題十六上，而此則轉基於默許的假設，以爲

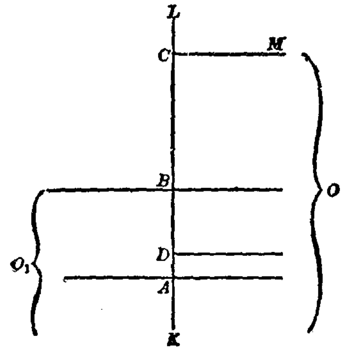
二直線不能包圍一空間．此項假設應用於經驗範圍內之客觀空間已能滿足．因此，我們可假定歐氏之假設，除了平行自題而外，於一充分限制的空間部分內是有效的，此卽是，於一空間部分內，在這裏不能作出一直線其長大於一固定的長 M 者．

對於前第一篇中 *Veblen* 之假設亦可如此，我們設一空間 $[S]$，於此內除假設二外，其餘一切均用之．又設 $[S_0]$ 爲 $[S]$ 中之一組點於此內幷可用假設二．如是，則 $[S_0]$ 內可得前 *Veblen* 所證明的一切定理，而 $[S]$ 內則得不基於假設二上之定理．關於相合的諸假設及定理使我們能比較 $[S_0]$ 內與 $[S_0]$ 外之幾何形狀．三角相合諸定理，固與三角形之位置無關者．

有此預備，乃可一究黎曼假設之結果．

14. 與同一直線垂直的一切線相遇於一點，此點與直線之距離爲常的．

設 LK（如下圖）爲任何一直線，A 與 B 爲其上之任何二點．照黎曼的假設，AO 與 BO，與 LK 相



垂直者,相遇於一點O.但可以想到,二垂直線或不止於一點相遇,故這裏明白假定,此二垂線於 AO 或 BO 段上沒有相共的點.并假定 ABO 三角形是在 $[S_0]$(見前節)區域內,故祇能作一直線自 O 至 AB 段上之任何點.因 $\measuredangle BAO=\measuredangle ABO$, 故照歐氏書 I, 6, $BO=AO$.

試作 $\measuredangle BOM=\measuredangle AOB$, 則照黎曼假設, OM 線遇 LK 於一點 C. BOC 三角有二角及一包入的邊與 AOB 三角之二角及一邊各關的相合,故

$\measuredangle BCO=\measuredangle ABO=$ 直角,而 $OC=OB=OA$.

反覆用此方法可證明設 P 爲 LK 上之一點,

而

$$AP=m\cdot AB,$$

這裏 m 是一正的整數，則 OP 與 LK 垂直於 P 點，而 $PO=AO$. 但 LK 上 P 點祇能作一垂線，因之，此垂線是經過 O 的。

今取一點 D，俾

$$AB=n\cdot AD,$$

這裏 n 是一正的整數，而作一線於 D 與 LK 垂直. 設如此垂線能與 BO 或 AO 於一點 O' 在 BO 或 AO 段上相交，則照適纔所說，BO 與 AO 亦必與 O' 相交，此卽違所假定者. 因此，此垂線過 O，而 $DO=AO$.

由此，故知設 P 爲 LK 上之任何點，俾

$$AP=\frac{m}{n}AB,$$

這裏 m 與 n 均爲正的整數，則 P 點 LK 之垂線經過 O，而 $PO=AO$. 又照所假定者祇有一直線自 P 至 O，故 PO 線與 LK 相垂直。

今設 P_1 爲一點，俾

$$AP_1=\lambda AB,$$

這裏 λ 爲一無理數.又取 P 俾 $AP=\frac{m}{n}AB$, 作 OP 與 OP_1,而使 $\frac{m}{n}$ 經過諸有理值(*rational values*)漸與 λ 逼近而以此爲極限.

$$\measuredangle AP_1O=lim\measuredangle APO,\ P_1O=limPO.$$

但 APO 總是直角, PO 總與 AO 相等,故

$$\measuredangle AP_1O=\text{直角},\text{而}P_1O=AO.$$

如是,此定理於 LK 線已經證明了.設 $L'K'$ 爲一其他線,則可於其上任取二點 A' 與 B',作 $A'O'$ 與 $B'O'$ 垂線,相交於 O'. 於 LK 上取 AB,使 $AB=A'B'$,則 ABO 與 $A'B'O'$ 二三角形相合,而 $A'O'=AO$. 由此可知 AO 距離與 LK 可獨立,或與線上 A 之地位亦無關.我們可設 $OA=\Delta$.

由此定理所得系,即是: 一切直線其長爲常的.蓋自適纔之證,很明白的,設如 P 爲 AB 上之任何點,

$$\frac{AP}{AB}=\frac{\measuredangle AOP}{\measuredangle AOB}.$$

今設$\measuredangle AOP=2\pi$，OA與OP卽相合，而AP成爲線之總長l.則

$$l=\frac{2\pi\cdot AB}{\measuredangle AOB}.$$

15. 一切線經過一點O者重復相遇於一點O_1其OO_1距離是常的.

設O（第四節圖）爲任何一點，OA爲經過O的任何一線.以$OA=\Delta$（見前節），作LK與AO垂直，又設OB爲任何一其他經過O的線交LK於B，則OB與LK垂直（見前節）.將AO引長至O_1，使$AO_1=AO$，幷作O_1B. AOB與AO_1B二三角形是相合的，因其一之二邊及所包一角與其他之二邊及所包一角各關相合.故

$$\measuredangle ABO_1=\measuredangle ABO=\text{直角},$$

而
$$O_1B=OB=OA.$$

因此OBO_1是一直線，而

$$OO_1=2\Delta.$$

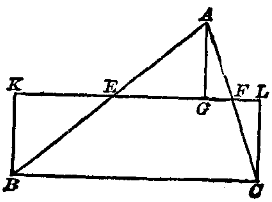
因一切線之長均是有限的（見前節），故任何一

線經過 O 者，過 O_1 重復回至 O. 但尋常別爲二例論之.

第一，O_1 可與 O 點相合. 如是則一直線之總長爲 2Δ，而任何二線祇能有一點相共. 其次，設 O_1 與 O 爲分開的，但 OO_1 諸線經 O_1 繼續重復相遇於 O. 一線之總長於是爲 4Δ，而二線相遇於二點. 這裏，黎曼幾何學卽同於球面上之幾何學了.

VI. 三角形角之和

16. 將任何一三角形 ABC（如下圖）試一論之. 取 AB 之中點 E, AC 之中點 F, 而作一直線 EF. 自 A, B, 及 C 作 AG, BK, 及 CL 諸線與 EF 垂直. AEG 與 EBK 二直角三角形中 $EA=EB$ 而



$\measuredangle GEA=\measuredangle BEK$. 因之，此二三角形是相合的，而

$$BK=AG, \measuredangle KBE=\measuredangle GAE.$$

仿此，可知 AGF 與 FLC 二直角三角形是相合的，而

$$AG=CL, \measuredangle FCL=\measuredangle GAF.$$

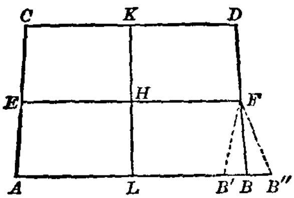
倘使我們下等積形的定義爲那種形可以分成爲部分而各對相合者，則 ABC 三角形卽與 $BCLK$ 四邊形等積．并且 ABC 三角形所有角之和等於 $BCLK$ 四邊形之 KBC 與 LCB 二角之和．

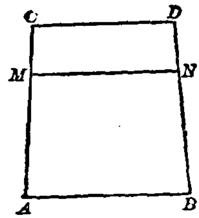
此四邊形 $BCLK$ 有二直角 L 與 K，及二等邊 KB 與 LC 與直角相接而互相對處．如是一形當名之爲一"二等邊二直角四邊形．"

如是則研究一三角形角之和及其面積，可約爲研究一等積的二等邊二直角四邊形．

17. 設 $ABCD$(如下左圖)爲一二等邊二直角四邊形，其 A 與 B 處爲直角．爲便利計，可稱 AB 爲其底，CD 爲其頂，C 與 D 爲其頂角，今取底之中

點 L 作 LK 線與底垂直，而於 LK 將 $LBDK$ 摺之，很明白的，D 點卽落於 C 上．因此，一二等邊二直角四邊形之頂角是相等的．LK 并於其中點 K 與 CD 垂直，而 $LBDK$ 四邊形有三直角．





今過 LK 之中點 H 作 EF 與 LK 垂直，將 $HFDK$ 於 HF 摺之，則 D 點落於 B'，B，或 B''，視 KD 小於，等於或大於 LB 而定，而這裏 $\measuredangle D$ 亦各關的大於，等於或小於 $\measuredangle B$．因之，

一二等邊二直角四邊形之每頂角，小於，等於或大於一直角，視此四邊形之頂大於，等於或小於其底而定．

18. 在歐几里得幾何學內，一二等邊二直角四邊形之每頂角等於一直角．

此爲歐氏幾何學中之極熟的命題，這裏無須再證之.但下面的定理,則須證之:

在陸白乞夫斯基及黎曼幾何學中，一二等邊二直角四邊形之一頂角不能等於一直角.

設 $ABCD$ (如上右圖) 爲一二等邊二直角四邊形,其 A 與 B 處爲直角.倘若能够,可假定 $\measuredangle C=\measuredangle D=$ 直角. 如是則 $CD=AB$ (見前節).於 AC 及 BD 上取 M 及 N,使 $CM=DN$, 并作 MN,則 $ABMN$ 爲二等邊二直角四邊形,其直角在 A 與 B. $MNDC$ 亦爲一二等邊二直角四邊形，其直角在 C 與 D.於是 MN 必與 AC 及 BD 相垂直,或照第十七節 MN 大於二等邊 AB 及 CD 中之一而小於其他,此卽不合理.

因 M 爲 A 與 C 間之任何點,看來 AC 與 BD 段是等遠的. 將 AC 與 BD 引長，而研究相合的段，看來 AC 與 BD 始終是等遠的，因此於陸氏及黎氏幾何學中不能 (第十一,十二,十三節)，故此定理已證明.

19. 一二等邊二直角四邊形之每一頂角，在陸氏幾何學中小於一直角，在黎曼幾何學中則大於一直角.

83頁左圖內 CK 線量 AC 與 LK 之距離於一點 C. 在陸氏幾何學內，設如 AC 有相當充分的長 $CK>AL$（見十二節）.因之，設如 CK 在一地位內小於 AL, 則至少必有一地位存在,於此 $CK=AL$. 此則不可能者（前節）.因之，CK 總是大於 AL, 而 C 角小於一直角(十七節).在黎曼幾何學內，AC 與 LK 終至相交.因之,設 AC 充分的長，$CK<AL$, 故 CK 總是小於 AL, 而 C 角大於一直角.

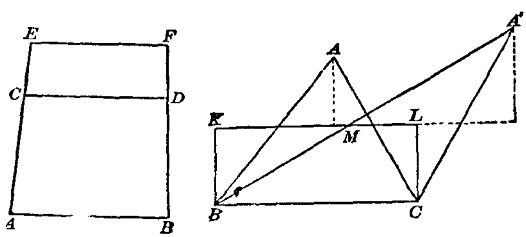
20. 在歐氏，陸氏，黎氏幾何學內,一三角形角之和各關的等於,小於,及大於二直角.

十六節內已見一三角形各角之和是等於一二等邊二直角四邊形之頂角之和. 故由前二節即得此定理.

VII. 面積

21. 照十六節內定義，設如二多角形能分成爲等多的三角形，各對均相合，則此二多角形是等積的.前幷已證明，一三角形是與一二等邊二直角四邊形等積，此四邊形之頂等於三角形之一邊，其每頂角等於三角形各角之和之半.

在陸氏或黎氏幾何學中，一二等邊二直角四邊形爲其頂及頂角所完全決定的，蓋設 $ABCD$ (如下左圖) 及 $ABEF$ 爲二如此的四邊形，其頂同爲



EF，其頂角同爲 E 與 F，則其底 CD 與 AB 必相合.不則 $ABCD$ 四邊形可有四直角，此則不可能者(十八節).因之得定理如下:

在陸氏及黎氏幾何學中有二三角形，設如其一之一邊及各角之和等於其他之一邊及各角之和，則此二三角形是等積的.

22. 我們可作出一三角形與一已知的三角形同面積，及角之和相等，但有一邊在一定的極廣的範圍內可任意假定之.

設 ABC (如上右圖) 爲一已知的三角形，$BCKL$ 爲如十六節內所作出之二等邊二直角四邊形. 又設 l 爲一已知的長，而用 $\frac{1}{2}l$ 作半徑 B 爲中心點作一圓弧割 KL 於 M. 將 B 與 M 相連，并引長之至於 A' 使 $MA'=BM$. 并將 A' 與 C 相連，則 $A'BC$ 即爲所求之三角形.

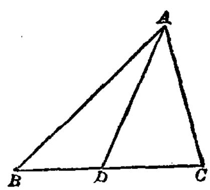
此種作法欲其能够，必須一則 $BM>BK$，即 $l>AB$ 而後可，又須，在黎氏幾何學中，l 小於常數 2Δ (十五節).

今設有二三角形，其角之和爲同者，則可取 l 大於每個之一邊，而用一角之和同及一邊等於 l 的等積者各代之，則此二新的三角形即等積(二十一

節).因此,

任何二三角形其角之和同者卽等積.

23. 試研究任何一三角形 ABC(如下圖),自 A 至底上任何一點 D 作一直線.今名此線爲縱線,而說此三角形是縱的被分割了.今設 s 爲 ABC 三角形各角之和,s_1 與 s_2 爲 ABD 及 ADC 二三角形各角之和,則得



$$s=s_1+s_2-2\text{ 直角}.$$

設如我們採取此種角之度量法,使一直角之度量爲$\frac{\pi}{2}$,則以前方程可寫作

$$\pi-s=(\pi-s_1)+(\pi-s_2),$$

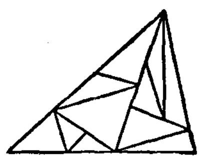
或
$$s-\pi=(s_1-\pi)+(s_2-\pi).$$

在陸氏幾何學中,$\pi-s$ 爲正的(二十節),名爲三角形之欠缺.在黎氏幾何學中則 $s-\pi$ 是正的,名

爲三角形之剩餘.因此,得定理

設將一三角形縱分之，則各部分欠缺或剩餘之總和,等於三角形之欠缺或剩餘.

倘將三角形屢屢用縱線分割之,例如下圖所示的那樣,此定理,很明白的,仍可用.希爾白(*Hilbert*)於其所著"幾何學之基本"(譯者按:此書聞已有中文譯本)一書內曾指出一三角形之任何分法可約爲縱的分割.因得更普遍的定理:



在陸氏與黎氏幾何學內，任何一三角形之欠缺或剩餘，等於將此三角形用任何方法分割後所得諸三角形之欠缺或剩餘之和.

24. 因等積的三角形可分爲等多諸三角形，各對相合者(二十一節)，又因相合的三角形其欠缺或剩餘相同,故任何二等積的三角形,其欠缺或剩餘同.反此的定理,已於二十二節中證明.

我們現在已經能用一三角形之欠缺或剩餘以爲其面積之度量，蓋面積度量之重要屬性，乃是，二三角形之面積同者，度量同，度量同者面積亦同，而一全之度量，乃是其部分之度量之和。因此，可說：

在陸氏幾何學內，一三角形之面積，等於一常數乘其欠缺。在黎氏幾何學內，一三角形之面積，等於一常數乘其剩餘。

至常數之值，則自然依於所用面積之單位。

多角形之面積，可分之爲三角形而求之。

VIII. 非歐几里得三角學

25. 尋常初等三角學中之三角函數諸定義於非歐几里得幾何學內自不能用，因這些定義多基於相似的三角形之屬性上，祇能於歐氏幾何學上爲可用者。

對此困難，陸氏作"極限面"以解除之，於此面上歐氏幾何學及三角學均有效，同時陸氏幾何學於

平面內有效.藉此面之助,陸氏得後面三十四節中之諸公式.

然此種方法於黎曼幾何學卽不能用.因此,我們可循一較普遍的方法,此方法并有此利益,完全在平面內演算.不過較之其他,則此方法已不能如那樣的簡易,所以這裏不得不述幾個結果而不附以證,以及其他證之極簡的大略.

我們自三角函數之純粹解析的諸定義入手.如是,e^x 用級數定之如下:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

而諸三角函數,則用以下諸方程定之:

$$sin x=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i},cos x=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2},tan x=\frac{1}{i}\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{e^{xi}+e^{-xi}},$$

這裏 $i=\sqrt{-1}$.這些函數於三角學上之一切公式均能遵循,而設 x 爲實數,則都是實的.

設 x 爲純粹幻數,則前面的方程引入雙曲線函數,此項函數用下面的方程定之:

$$-i \sin i x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sin h\, x,$$

$$\cos i x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cos h\, x,$$

$$-i \tan i x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\tan h\, x.$$

設 x 爲實的，雙曲線函數卽實，而爲此用的公式，如需要，已卽可自三角函數得之.

下面的 $\cos x$ 之屬性，於此極爲重要：

設 $\cos x<1$，x 是實的；設 $\cos x>1$，x 卽爲純粹幻的，除非或者有週期 2π 之倍數，卽時常可加上者.

設命 $\cos m x=f(x)$，$f(x)$ 卽能滿足此函數的方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

反之，設 $f(x)$ 爲 x 之連續的函數，滿足以前之方程者，則 $f(x)=\cos m x$，m 爲一常數，實或雜的.

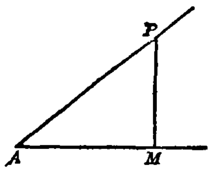
26. 一銳角之 $\sin$ 與 $\cos$ 可如下定之.其推廣至於任何大小之角，則卽可如尋常三角學上那樣爲之.

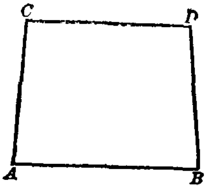
設 A (如下左圖)爲任何一銳角，MP 爲自一邊之一點 P 至他邊的一垂線，則可見當 AP 近於零時，$\frac{AM}{AP}$ 卽近一極限，而 $lim\ \frac{AM}{AP}$ 乃是 A 之連續的函數，能滿足前節內之函數方程者。因此，$lim\ \frac{AM}{AP}=\cos mA$。因 $AM<AP$，故 m 是實的，而設如採取角之度量法，使一直角之度量爲 $\frac{\pi}{2}$，則可使 $m=1$。如是，卽得

$$lim\frac{AM}{AP}=\cos A.$$

仿此，并得

$$lim\frac{MP}{AP}=\sin A.$$





27. 設 AC (如上右圖)爲任何一直線，其長爲 a。自 A 作 AB 垂直 AC，并給 AB 任何長。於 B 作 BD

垂直 AB,而使 $BD=AC$,并完成此二等邊二直角四邊形 $ABCD$. 於是卽可見當 AB 近零時,$\frac{CD}{AB}$ 卽近一極限,而此極限乃是 a 之連續的函數能滿足二十五節內之函數方程者.因之,

$$lim\frac{CD}{AB}=\cos ma.$$

在陸氏幾何學內,$CD>AB$, m 卽爲純粹幻的.這裏,可設 $m=\frac{i}{k}$, k 爲實的,卽得

$$lim\frac{CD}{AB}=\cos\frac{ia}{k}=\cosh\frac{a}{k}.$$

在黎氏幾何學內,$CD<AB, m$ 是實的.這裏,可設 $m=\frac{1}{k}$,而得

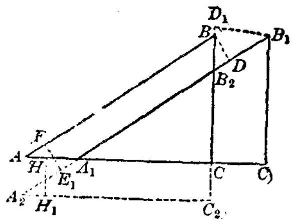
$$lim\frac{CD}{AB}=\cos\frac{a}{k}.$$

在此非歐氏幾何學內,有一顯著的屬性可見,卽距離的函數與角之函數相類.常數 k 依於所用距離之單位.

設如將此處的作法應用於歐氏幾何學上,則得

瑣屑的結果 $lim\frac{CD}{AB}=1$. 於此有可注意者，卽此種結果倘於以前之結果內設 $k=\infty$ 卽得.

28. 本節內將指出一方法，用此可得一關於直角三角形之邊的基本公式.



設 ABC (如上圖) 為一三角形，其 C 為直角，AB 邊等於 c, $AC=b$, $CB=a$. 於 AC 上取一短的距離 AA_1，并將 AC 引長至 C_1，使 $AA_1=CC_1$，而作 $A_1B_1C_1$ 三角與 ABC 相合. 設 B_2 為 A_1B_1 與 BC 之交點，將 B_1A_1 與 BC 引長，使 $A_1A_2=B_1B_2$, $CC_2=BB_2$，而作 $A_2B_2C_2$ 三角形與 ABC 微有差.

自 B_1 作 B_1D_1 與 BC 垂直，并自 B 作 BD 與 A_1B_1 垂直. 又作 HH_1 為 AC 與 A_2C_2 之公垂線，EE_1 為 AB 與 A_2B_2 之公垂線. EE_1 將 AA_1 平分，

而 HH_1 則經過 A_1A_2 中點之附近．如是，則當 AA_1 逼近於零爲其極限時，卽可見：

$$\lim \frac{BD}{EE_1} = \cos mc,$$

$$\lim \frac{B_1D_1}{CC_1} = \cos ma,$$

$$\lim \frac{CC_2}{HH_1} = \cos mb.$$

由前節之定義，已不難明白，此種關係，至少是逼近於眞的．由此，可得

$$\frac{\cos mc}{\cos ma \cos mb} = \lim \frac{BD}{EE_1} \cdot \frac{CC_1}{B_1D_1} \cdot \frac{HH_1}{CC_2}$$

$$= \lim \frac{BD}{EE_1} \cdot \frac{AA_1}{B_1D_1} \cdot \frac{HH_1}{BB_2}$$

$$= \lim \frac{BD}{BB_2} \cdot \frac{AA_1}{EE_1} \cdot \frac{HH_1}{A_1A_2} \cdot \frac{B_1B_2}{B_1D_1}.$$

而由上圖及二十六節之定義，可逼近的見

$$\sin B = \lim \frac{BD}{BB_2} = \lim \frac{B_1D_1}{B_1B_2},$$

$$\sin A = \lim \frac{HH_1}{A_1A_2} = \lim \frac{EE_1}{AA_1}.$$

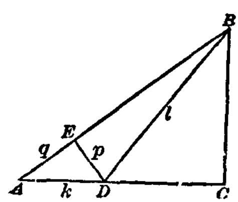
因此,得

$$\frac{\cos\ mc}{\cos\ ma\ \cos\ mb}=\sin\ B\cdot\frac{1}{\sin A}\cdot\sin A\cdot\frac{1}{\sin B},$$

或 $\cos\ mc=\cos\ ma\ \cos\ mb.$

29. 設 ABC(如下圖)爲一三角形,直角在 C,而 $AC=b$, $BC=a$, $AB=c$. 於 AC 上任取一點 D,作 BD,而使 DE 垂直 AB. 設 $BD=l$, $DE=p$, $AE=q$, $AD=k$,則照前節

$$\begin{aligned}\cos\ ml&=\cos\ ma\cos\ m(b-k)\\&=\cos\ mc\cos\ mk+\cos\ ma\sin\ mb\sin\ mk\\&=\cos\ mp\ \cos\ m(c-q)\\&=\cos\ mc\ \cos\ mk+\cos\ mp\ \sin\ mc\sin\ mq,\end{aligned}$$



因而 $\cos\ ma\ \sin\ mb\ \sin\ mk=\cos\ mp\ \sin\ mc\ \sin\ mq.$

用此項關係 $\cos\ mc=\cos\ ma\cos\ mb$, 及 $\cos\ mk=$

$\cos mp \cos mq$，即易得

$$\frac{\tan mb}{\tan mc}=\frac{\tan mq}{\tan mk}.$$

倘使 k 逼近零爲其極限，q 亦逼近零，則

$$\lim \frac{\tan mq}{\tan mk}=\lim \frac{q}{k}=\cos A,$$

因而 $$\frac{\tan mb}{\tan mc}=\cos A.$$

30. 由前節之結果，即得

$$\sin^2 A=\frac{\tan^2 mc-\tan^2 mb}{\tan^2 mc}$$

$$=\frac{\sin^2 mc-\tan^2 mb\cos^2 mc}{\sin^2 mc}$$

$$=\frac{1-(1+\tan^2 mb)\cos^2 mc}{\sin^2 mc}$$

$$=\frac{1-\dfrac{\cos^2 mc}{\cos^2 mb}}{\sin^2 mc}=\frac{1-\cos^2 ma}{\sin^2 mc}.$$

因 A 是銳角，故 $\sin A=\dfrac{\sin ma}{\sin mc}$.

仿此 $$\sin B=\frac{\sin mb}{\sin mc}.$$

由前節并這些結果,即得

$$\frac{\cos A}{\sin B}=\frac{\cos mc}{\cos mb}=\cos ma.$$

因之 $\cos A=\cos ma\sin B$. 仿此, $\cos B=\cos mb \sin A$.

31. 前三節內所得諸公式,於陸氏及黎氏幾何學均可用.於黎氏幾何學,可設 $m=\frac{1}{k}$,而將公式集之如下:

$$\cos\frac{c}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}$$

$$\sin\frac{a}{k}=\sin\frac{c}{k}\sin A$$

$$\tan\frac{a}{k}=\tan\frac{c}{k}\cos B$$

$$\cos A=\cos\frac{a}{k}\sin B$$

$$\sin\frac{b}{k}=\sin\frac{c}{k}\sin B$$

$$\tan\frac{b}{k}=\tan\frac{c}{k}\cos A$$

$$\cos B = \cos\frac{b}{k}\sin A.$$

32. 於陸氏幾何學,則可設 $m = \frac{i}{k}$,而用雙曲線函數代三角函數.即得

$$\cosh\frac{c}{k} = \cosh\frac{a}{k}\cosh\frac{b}{k}$$

$$\sinh\frac{a}{k} = \sinh\frac{c}{k}\sin A$$

$$\tanh\frac{a}{k} = \tanh\frac{c}{k}\cos B$$

$$\cos A = \cosh\frac{a}{k}\sin B$$

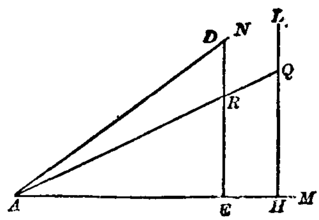
$$\sinh\frac{b}{k} = \sinh\frac{c}{k}\sin B$$

$$\tanh\frac{b}{k} = \tanh\frac{c}{k}\cos A$$

$$\cos B = \tanh\frac{b}{k}\sin A.$$

這裏有可注意者,倘這二節內之公式,作一極限的例,使 $k=\infty$,則即得歐氏三角學上之公式.

33. 前節內之公式，可用之以求得 x 距離的平行角之算式．設 BM（如下圖）與 CN 平行，而 BC 垂直 CN. $NCBM$ 形可視為一直角三角形 ABC 之極限，於此內 $BC=x$ 是常的，A 逼近於零而 B 逼近於 $\pi(x)$。



於是公式

$$\cos A = \cosh\frac{x}{k}\sin B$$

即成為

$$\sin\pi(x)=\frac{1}{\cosh\frac{x}{k}}=\frac{2}{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}},$$

故 $$\cos\pi(x)=\frac{e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}}=\tanh\frac{x}{k}.$$

而 $$\tan\frac{1}{2}\pi(x)=\frac{\sin\pi(x)}{1+\cos\pi(x)}=e^{-\frac{x}{k}}.$$

34. 設將前節內所得 $\cosh\frac{x}{k}$ 及 $\tanh\frac{x}{k}$ 之值代入三十二節內之公式中，并稍化之，則三十二節內之公式卽作下式：

$$\sin\pi(c)=\sin\pi(a)\sin\pi(b),$$

$$\tan\pi(c)=\tan\pi(a)\sin A$$

$$\cos\pi(a)=\cos\pi(c)\cos B$$

$$\sin B=\sin\pi(a)\cos A$$

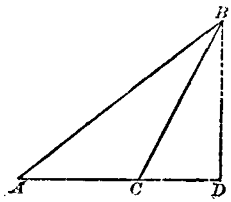
$$\tan\pi(c)=\tan\pi(b)\sin B$$

$$\cos\pi(b)=\cos\pi(c)\cos A$$

$$\sin A=\sin\pi(b)\cos B.$$

這些都是陸氏所獲得的公式，不過他作 $A=\pi(\alpha)$ $B=\pi(\beta)$，這裏 α 與 β 乃是與平行角 A 及 B 相當的距離．這些方程并不應用，不過寫出來俾得與陸氏自己著作相比較．

35. 以前的公式，都是關於直角三角形者．今將并求一關於斜三角形的．



設 ABC (如上圖) 爲任何一三角形，其三角爲 A, B, C，而對此的邊則爲 a, b, c. 作 BD 與 AC 垂直，幷設 $BD=h$, $AD=k$. 於是卽得

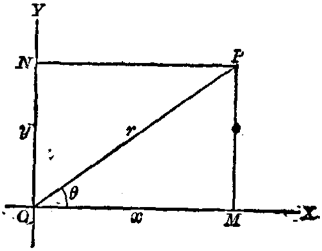
$$\begin{aligned}\cos ma &= \cos mh \cos m(k-b)\\ &= \cos mc \cos mb + \sin mb \sin mk \cos mh\\ &= \cos mc \cos mb + \sin mb \tan mk \cos mc\\ &= \cos mc \cos mb + \sin mb \sin mc \cot A.\end{aligned}$$

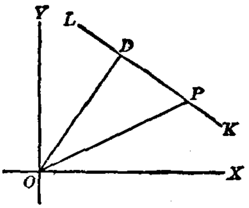
IX. 非歐几里得解析幾何學

36. 設 OX 及 OY (如下左圖) 爲二坐標軸，以直角相交，MP 與 NP 爲自任何一點 P 至 OX 及 OY 之垂線. 我們以 $OM=x$, $ON=y$ 爲 P 之坐標. 對於每一點 P，祇有一組坐標 (x, y) 與之相當，對於任何一組坐標，亦不能多於一點與之相當. 但

設如 x 與 y 爲隨意假定的，則在陸氏幾何學內，不必卽有點與之相當，因 M 與 N 處之二垂線可以平行或不相交.

若作 OP 線，則可取 $OP=r$，$\measuredangle XOP=\theta$ 爲 P 之極坐標.





在二組坐標之間，陸氏或黎氏幾何學內均有此項關係存在(二十九節)：

$$\tan mx = \tan mr \cos\theta,$$

$$\tan my = \tan mr \sin\theta,$$

$$\tan^2 mx + \tan^2 my = \tan^2 mr.$$

37. 一直線之方程可如下求之：

設 LK (如上右圖) 爲任何一直線，爲定數 (*parameter*) p 及 α 所決定者，這裏 p 乃是自起點

至直線所作垂線 OD 之長，α 爲 OD 與 OX 之正方向所作的角。設 $P(x, y)$ 爲 LK 上之任何一點，并作 OP. 則 OPD 三角內

$$OD=p,\ OP=r,\ \measuredangle POD=\theta-\alpha$$

這裏 (r, θ) 爲 P 之極坐標．故（二十九節）

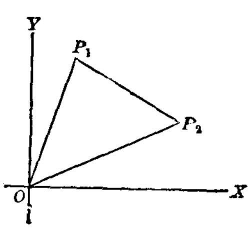
$$\tan mr \cos(\theta-\alpha)=\tan mp,$$

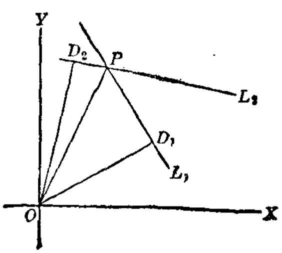
而照前節得所求之方程爲

$$\tan mx \cos\alpha+\tan my \sin\alpha= \tan mp.$$

38. 二點間之距離可如下求之：

設 $P_1(x_1\, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 爲任何二點（如下左圖）其極坐標爲 (r_1, θ_1) 與 (r_2, θ_2)．作 OP_1, OP_2 及 P_1P_2 則 OP_1P_2 三角形內：$OP_1=r_1, OP_2=r_2$，$\measuredangle P_2OP_1=\theta_1-\theta_2$．故照三十五節





$$\cos m\overline{P_1P_2} = \cos mr_1 \cos mr_2$$
$$+\sin mr_1 \sin mr_2 \cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$=\cos mr_1 \cos mr_2$$
$$[1+\tan mr_1 \tan mr_2 \cos(\theta_1-\theta_2)].$$

用三十六節內公式,此可約爲以下之式,卽係所求者:

$$\cos m\overline{P_1P_2} = \frac{1+\tan mx_1 \tan mx_2 + \tan my_1 \tan my_2}{\sqrt{1+\tan^2 mx_1+\tan^2 my_1}\sqrt{1+\tan^2 mx_2+\tan^2 my_2}}$$

39. 二線間之角可如下決定之:

設 PL_1 與 PL_2 (如上右圖)爲二直線相交於一點 P. 自 O 作 OD_1 與 OD_2 二垂線於 PL_1 及 PL_2 上,幷設 $OD_1=p_1$, $OD_2=p_2$, $\measuredangle XOD_1=\alpha_1$ $\measuredangle XOD_2=\alpha_2$. 作 OP,命 $OP=r$, $\measuredangle XOP=\theta$, $\measuredangle OPD_1=\beta_1$, $\measuredangle OPD_2=\beta_2$, 而 $\measuredangle L_1PL_2=\phi=\pi-(\beta_1+\beta_2)$.

自 OPD_1 與 OPD_2 直角三角形,照三十節可得

$$\sin\beta_1=\frac{\sin mp_1}{\sin mr},\ \sin\beta_2=\frac{\sin mp_2}{\sin mr},$$

$$\cos\beta_1=\cos mp_1 \sin(\theta-\alpha_1),$$

$$\cos\beta_1=\cos mp_2\sin(\alpha_2-\theta)=-\cos mp_2\sin(\theta-\alpha_2),$$

故 $$\cos\phi=\cos mp_1\cos mp_2\sin(\theta-\alpha_1)\sin(\theta-\alpha_2)$$

$$+\frac{\sin mp_1\sin mp_2}{\sin^2 mr}(1)$$

但由三十七節

$$\cos(\theta-\alpha_1)\tan mr=\tan mp_1,$$

$$\cos(\theta-\alpha_2)\tan mr=\tan mp_2,$$

故 $$0=\cos mp_1\cos mp_2\cos(\theta-\alpha_1)\cos(\theta-\alpha)$$

$$-\frac{\sin mp_1\sin mp_2}{\tan^2 mr},$$

將此與(1)相加,即得

$$\cos\phi=\cos mp_1\cos mp_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\sin mp_1\sin mp_2$$

$$=\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_1\sin\alpha_2+\tan mp_1\tan mp_2}{\sqrt{1+\tan^2 mp_1}\ \sqrt{1+\tan^2 mp_2}}$$

乃是所求之角,用直線方程內之函數表出之.

40. 前四節內之公式於黎氏及陸氏幾何學均可用.將其分為二例論之,較為便利.

於黎氏幾何學內,$m=\frac{1}{k}$,我們用入新的坐標 ξ 與 η 以代 x 與 y,但這裏

$$\xi = k\tan\frac{x}{k},\quad \eta = k\tan\frac{y}{k}\cdots\cdots\cdots(1)$$

三十七節內之直線方程,即成為

$$\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha=k\tan\frac{p}{k},$$

或較廣的作

$$a\xi+b\eta+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

這裏 $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$

$$k\tan\frac{p}{k}=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

反之,任何一作(2)式之方程表一直線,因 α 與 p 可由(3)中推得.

方程 $\eta=c$

表一線與 OY 垂直,而與 OX 相交於一點其 $\xi=\infty$.但自(1),知倘若 $x=\dfrac{k\pi}{2}$,$\xi=\infty$.而由十四節,二線與同一線垂直者,相遇於 Δ 距離,故 $k=\dfrac{2\Delta}{\pi}$.此則用 Δ 以設定常數 k.

三十八節內距離之方程與三十九節內角之方程即成爲:

$$\cos\frac{P_1P_2}{k}=\frac{k^2+\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2}{\sqrt{k^2+\xi^2{}_1+\eta^2{}_1}\sqrt{k^2+\xi^2{}_2+\eta^2{}_2}}\cdots\cdots(4)$$

$$\cos\phi=\frac{k^2(a_1a_2+b_1b_2)+c_1c_2}{\sqrt{k^2(a^2{}_1+b^2{}_1)+c^2{}_1}\sqrt{k^2(a^2{}_2+b^2{}_2)+c^2{}_2}}\cdots(5)$$

(4)內設$\xi_1=\xi$, $\eta_1=\eta$, $\xi_2=\xi+d\xi$, $\eta_2=\eta+d\eta$, 則其右端成爲有二次極微量在內的式

$$1-\frac{1}{2}\,\frac{k^2(d\xi^2+d\eta^2)+(\eta d\xi-\xi d\eta)^2}{(k^2+\xi^2+\eta^2)^2},$$

而其左端,則設 $P_1P_2=ds$ 而展開之,得

$$1-\frac{1}{2}\,\frac{(ds)^2}{k^2}+\cdots$$

故 $$ds=\frac{k\sqrt{k^2(d\xi^2+d\eta^2)+(\eta d\xi-\xi d\eta)^2}}{k^2+\xi^2+\eta^2}\cdots(6)$$

(2)式即表任何曲線之一極小段的弧.

我們可將(6)換成極坐標,設

$$\xi=k\tan\frac{r}{k}\cos\theta,\quad \eta=k\tan\frac{r}{k}\sin\theta,$$

則即成

$$ds=\sqrt{dr^2+k^2\sin^2\frac{r}{k}d\theta^2}.$$

因此，$r=a$ 一圓之圓周 C 爲

$$C=k\sin\frac{a}{k}\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi k\sin\frac{a}{k}.$$

41. 於陸氏幾何學，我們可將三十六至三十九節內之公式，加以改變而用之，於此 $m=\frac{i}{k}$，我們可設

$$\xi=-ik\tan\frac{ix}{k}=k\tanh\frac{x}{k},$$

$$\eta=-ik\tan\frac{iy}{k}=k\tanh\frac{y}{k}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

三十七節之直線方程，於是成爲

$$\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha=k\tanh\frac{p}{k},$$

或

$$a\xi+b\eta+c=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

這裏 $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$k\tanh\frac{p}{k}=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

設 p 是實的，$tanh\frac{p}{k}<1$；故照(2)

$$c^2<k^2(a^2+b^2).$$

反之，設如 $c^2<k^2(a^2+b^2)$，方程 (2) 卽表一直線，而 α 與 p 則可由(3)決定之。

三十八節距離之方程，及三十九節角之方程各成爲：

$$cosh\frac{p_1p_2}{k}=\frac{k^2-\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2}{\sqrt{k^2-\xi^2{}_1-\eta^2{}_1}\sqrt{k^2-\xi^2{}_2-\eta^2{}_2}}\cdots(4)$$

$$cos\phi=\frac{k^2(a_1a_2+b_1b_2)-c_1c_2}{\sqrt{k^2(a^2{}_1+b^2{}_1)-c^2{}_1}\sqrt{k^2(a^2{}_2+b^2{}_2)-c^2{}_2}}(5)$$

倘於(4)內設 $\xi_1=\xi$，$\eta_1=\eta$，$\xi_2=\xi+d\xi$，$\eta_2=\eta+d\eta$，$P_1P_2=ds$，則成爲有二次極微量在內的方程

$$1+\frac{(ds)^2}{k^2}+\cdots=1+\frac{1}{2}$$

$$\frac{k^2(d\xi^2+d\eta^2)-(\eta d\xi-\xi d\eta)^2}{k^2-\xi^2-\eta^2}+\cdots$$

故任何一曲線之極小段弧，其方程爲

$$ds=\frac{k\sqrt{k^2(d\xi^2+d\eta^2)-(\eta d\xi-\xi d\eta)^2}}{k^2-\xi^2-\eta^2}.$$

倘爲極坐標,即作

$$ds=\sqrt{dr^2+k^2\sinh^2\frac{r}{k}d\theta^2}$$

故 $r=a$ 之圓周

$$C=k\sinh\frac{a}{k}\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi k\sinh\frac{a}{k}$$

$$=k\pi\left(e^{\frac{a}{k}}-e^{-\frac{a}{k}}\right).$$

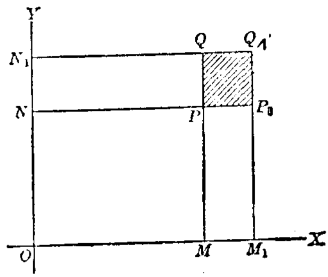
24. 今可完成前二十一至二十四節內面積之討論.角之單位可如是取之,使一直角之度量爲 $\frac{\pi}{2}$,而面積之單位則如是,倘 α,β,γ 爲 ABC 三角形之三個角,則於黎氏幾何學內

$$ABC\text{面積}=k^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi),$$

而於陸氏幾何學內

$$ABC\text{面積}=k^2(\pi-\alpha-\beta-\gamma).$$

今試研究黎氏平面內之三直角四邊形(如下圖),由 OX, OY 坐標軸及 MP $(\xi=c_1)$ NP $(\eta=c_2)$ 二線所成.



設命 $OMPN$ 之面積為 A，而 MPN 角為 ψ，則將 $OMPN$ 分成為二三角形計算之，可得

$$A=k^2\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right);\quad 故\ \sin\frac{A}{k^2}=-\cos\psi.$$

而照四十節

$$\sin\frac{A}{k^2}=\frac{c_1c_2}{\sqrt{k^2+c_1^2}\sqrt{k^2+c_2^2}}$$

$$=\frac{\xi\eta}{\sqrt{k^2+\xi^2}\sqrt{k^2+\eta^2}}\cdots\cdots\cdots(1)$$

這裏根號應取正者，因 $\frac{A}{k^2}<\frac{\pi}{2}$.

今將 ξ 增以 $d\xi$，與圖中之 MM_1 相當，則相當的面積之微分，$d_\xi A$，卽 MM_1P_1P，可於求 (1) 之微分

得之：

$$d_\xi A=\frac{k^3\eta d\xi}{(k^2+\xi^2)\sqrt{k^2+\xi^2+\eta^2}}\cdots\cdots\cdots(2)$$

圖中 PP_1QQ_1 所表者爲此面積之微分，由 η 之變化 $d\eta$ 所起者．今命之爲 dA，則用 η 求 (2) 之微分時，得

$$dA=\frac{k^3d\eta d\xi}{(k^2+\xi^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

同此的方法用於陸氏平面內，卽得此結果：

$$dA=\frac{k^3d\eta d\xi}{(k^2-\xi^2-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

方程 (3) 可用之以求黎氏幾何學內圓 $\xi^2+\eta^2=k^2tan^2\frac{a}{k}$ 之面積．我們得

$$A=4k^3\int_0^{k\,tan\frac{a}{k}}\int_0^{\sqrt{k^2tan^2\frac{a}{k}-\eta^2}}\frac{d\eta d\xi}{(k^2+\eta^2+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}=4\pi k^2sin^2\frac{a}{2k}.$$

(註：——此式內變數可先換之爲極坐標，然後

算之較爲便利.如是,

$$A=k^3\iint\frac{d\xi d\eta}{(k^2+\xi^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

卽作 $$A=\iint k\sin\frac{r}{k}\,dr d\theta)$$

仿此,陸氏幾何學內圓 $\xi^2+\eta^2=k^2\tanh^2\frac{a}{k}$ 之面積爲

$$A=4\pi k^2\sinh^2\frac{a}{2k}=\pi k^2\left(e^{\frac{a}{2k}}-e^{-\frac{a}{2k}}\right)^2$$

43. 三十二節內已見到,非歐氏三角學上之諸公式,可將歐氏三角學上之公式作爲極限的例 $k=\infty$ 包入.此於非歐氏解析幾何學方面亦然.我們可見,倘 $k=\infty$

$$\lim k\sin\frac{a}{k}=\lim k\tan\frac{a}{k}=\lim k\sinh\frac{a}{k}$$

$$=\lim k\tanh\frac{a}{k}=a,\text{以及}\ \lim k\cos\frac{a}{k}$$

$$=\lim k\cosh\frac{a}{k}=1.$$

黎氏或陸氏幾何學之坐標 (ξ,η) 於極限卽成爲

歐氏幾何學之坐標 (x, y)，而前三節之公式，或則化成全等式 $1=1$，或則化成相當的歐氏幾何學上之式.

例如四十節或四十一節內之方程(4)，初觀之似得 $1=1$，但設如展之爲方數 $\frac{1}{k^2}$ 而論其次數較低的諸項，卽易得

$$P_1P_2=\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2}.$$

又如該兩節內之方程(5)，可得

$$\cos\phi=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a^2{}_1+b^2{}_1}\ \sqrt{a^2{}_2+b^2{}_2}}.$$

由此可見倘 k 爲極大時，則實用上黎氏及陸氏幾何學與歐氏幾何學之差卽不易覺出了.因之，經驗上實無法識別，這三種幾何學中究竟那一種是物理的可認爲眞實者.

X. 陸氏幾何學在歐氏平面上之表象

44. 設 $P(\xi,\eta)$ 爲陸氏平面上之任何一點，其極坐標爲 (γ, θ)，γ 總是正的，則(三十六及四十一節)

$$\left.\begin{aligned}\xi&=k\tanh\frac{r}{k}\cos\theta\\ \eta&=k\tanh\frac{r}{k}\sin\theta\\ \xi^2+\eta^2&=k^2\tanh^2\frac{r}{k}<k^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

我們今可視 (ξ,η) 作歐氏平面上之尋常的笛卡氏坐標，卽是，一平面於其上假定歐氏幾何學爲通用者．則對於陸氏平面上之一點 P 歐氏平面上有一點 P' 與之相當，而 P' 在一圓 $\xi^2+\eta^2=k^2$ 之內，此圓卽名爲基本圓．

反之，設 (ξ,η) 爲歐氏平面上任何一點之坐標；解方程(1)，得

$$\cos\theta=\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},\quad \sin\theta=\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},$$

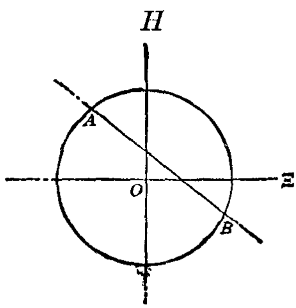
$$r=\frac{k}{2}\log\frac{k+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{k-\sqrt{\xi^2+\eta^2}}.$$

因之，θ 是不二的決定了；且總是實的，而 r 則雖不二的定了，但其爲實，無限，或幻，則須視 $\xi^2+\eta^2$

小於，等於或大於 k^2 而定.如是，我們得一種陸氏平面與歐氏平面間之關係，遵此則陸氏平面上一點與歐氏平面上基本圓內一點且祗一點相當，反此亦然．基本圓上之點與陸氏平面上之無限處點相當，至圓外之點，則陸氏平面上沒有與之相當者.

45. 設如歐氏平面上有一直線（如下圖），其方程爲

$$a\xi+b\eta+c=0,$$



則祇是 AB 上在基本圓內之一段，陸氏平面內有一線與之相當，A 與 B 點相當於陸氏平面內之無限處點.

從可知，除非 AB 線遇此基本圓於二實點，不則

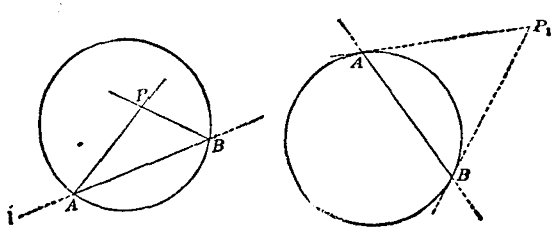
陸氏平面上不能有其相當者．但 $a\xi+b\eta+c=0$ 與 $\xi^2+\eta^2=k^2$ 相遇於二實點之範疇是

$$k^2(a^2+b^2)-c^2>0,$$

此則卽是前四十一節中之條件．

46. 相交的，不相交的及平行的線，其分別於我們所論的表象中極爲明白．蓋設 AB (如下左圖) 爲歐氏平面上之任何一線，P 爲任何點，則經過 P 交 AB 於基本圓內的線與陸氏平面上交 AB 的線相當，而經過 P 交 AB 於圓外的線與陸氏平面上不交 AB 的線相當．介乎此二種線之間，有 PA 與 PB 二線交 AB 於圓上，此則與陸氏平行線相當．

47. 二直線



$$a_1\xi+b_1\eta+c_1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$a_2\xi+b_2\eta+c_2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

於陸氏平面上是垂直的，設如(四十一節)

$$k^2(a_1a_2+b_1b_2)-c_1c_2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

此項條件之幾何上的意義，極易見到．試先注意設如 $P_1(\xi_1\ \eta_1)$ (如上右圖)為歐氏平面上之一點，則其關於基本圓之極線 AB 為

$$\xi_1\xi+\eta_1\eta-k^2=0.$$

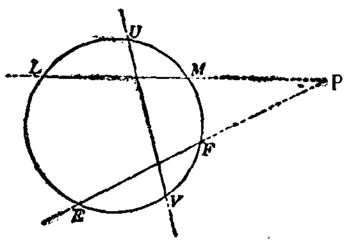
倘這裏 $\xi_1=-\dfrac{a_1k^2}{c_1}$, $\eta_1=-\dfrac{b_1k^2}{c_1}$，則卽是此線

$$a_1\xi+b_1\eta+c_1=0.$$

此卽是，$\left(-\dfrac{a_1k^2}{c_1},\ -\dfrac{b_1k^2}{c_1}\right)$點為(1)線之極點，而仿此，$\left(-\dfrac{a_2k^2}{c_2},\ -\dfrac{b_2k^2}{c_2}\right)$為(2)線之極點．方程(3)表明此種事實，(1)之極點在(2)上，而(2)之極點在(1)上．因得以下定理：

陸氏平面上二線，倘其歐氏平面上相當的線每一均經過其他的極點，則此二線卽相垂線．

此卽引至第九節所下命題“二不相交的線有一公垂直線”之簡證。蓋設 LM 與 EF（如下圖）爲這樣的二線，其歐氏平面上之交點 P 在基本圓之外，P 之極線 UV 經過此圓，故與 LM 及 EF 之公垂線相當。



48. 今試求陸氏距離方程（四十一節方程 4）在歐氏平面上之意義。爲便利起見，可設

$$P_1P_2=d,\quad k^2-\xi^2{}_1-\eta^2{}_1=f_{11},$$

$$k^2-\xi^2{}_2-\eta^2{}_2=f_{22},\quad k^2-\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2=f_{12}$$

如是，四十一節方程(4)卽成爲

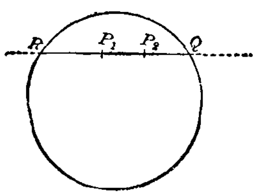
$$\frac{e^{\frac{d}{k}}+e^{-\frac{d}{k}}}{2}=\frac{f_{12}}{\sqrt{f_{11}}\sqrt{f_{22}}},$$

故 $$d=k\,log\frac{f_{12}\pm\sqrt{f^2{}_{12}-f_{11}f_{12}}}{\sqrt{f_{11}}\;\sqrt{f_{22}}}$$

$$=\pm\frac{k}{2}\,log\,\frac{f_{12}+\sqrt{f^2{}_{12}-f_{11}f_{22}}}{f_{12}-\sqrt{f^2{}_{12}-f_{11}f_{22}}}\quad(1)$$

今於歐氏平面上設 P_1 與 P_2 爲二點(如下圖)$(\xi_1,\ \eta_1)$, $(\xi_2,\ \eta_2)$, R 與 Q 爲 $P_1\,P_2$線與基本圓之相交點. 又設 $P\,(\xi,\ \eta)$ 爲P_1P_2 上之任何點, 俾

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda,$$



這裏 λ 爲歐氏距離, 則

$$\xi=\frac{\xi_1+\lambda\xi_2}{1+\lambda}\ ,\quad \eta=\frac{\eta_1+\lambda\eta_2}{1+\lambda}.$$

將此項值代入基本圓之方程 $\xi^2+\eta^2-k^2=0$ 內, 即可得與 Q 及 R 相當的 λ 之值; 即

$$\lambda_1=\frac{P_1Q}{QP_2}=\frac{f_{12}+\sqrt{f^2_{12}-f_{11}f_{22}}}{\sqrt{f_{22}}},$$

$$\lambda_2=\frac{P_1R}{RP_2}=\frac{f_{12}-\sqrt{f^2_{12}-f_{11}f_{22}}}{\sqrt{f_{22}}}.$$

方程(1)於是成爲

$$d=\pm\frac{k}{2}log\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\pm\frac{k}{2}log\ \frac{P_1Q}{QP_2}\cdot\frac{RP_2}{P_1R}.$$

二點間之陸氏距離,乃是 $\frac{k}{2}$ 乘此二點及經此的線與基本圓相交的二點之橫錯比之對數.

49. 陸氏角之度量,亦可給以相類的定義.爲便利計,可設 $k^2(a^2_1+b^2_1)-c^2_1=u_{11}$,$k^2(a^2_2+b^2_2)-c^2_2=u_{22}$,$k^2(a_1a_2+b_1b_2)-c_1c_2=u_{12}$. 則由四十一節方程(5),得

$$\phi=\pm\frac{i}{2}log\ \frac{u_{12}+\sqrt{u^2_{12}-u_{11}u_{22}}}{u_{12}-\sqrt{u^2_{12}-u_{11}u_{22}}}.$$

今試一論 AL_1 與 AL_2 (如下圖)二線,其方程爲

$$a_1\xi+b_1\eta+c_1=0,\ \ a_2\xi+b_2\eta+c_2=0,$$

任何一線經過其交點 A 者,其方程爲

$$(a_1+\lambda a_2)\xi+(b_1+\lambda b_2)\eta+(c_1+\lambda c_2)=0,$$

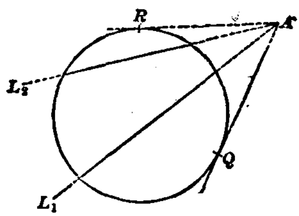
但設 $k^2(a_1+\lambda a_2)^2+k^2(b_1+\lambda b_2)^2-(c_1+\lambda c_2)^2=0$,

亦卽是,設 λ 之値爲以下二者之一:

$$\lambda_1=\frac{u_{12}+\sqrt{u^2_{12}-u_{11}u_{22}}}{\sqrt{u_{22}}},$$

$$\lambda_2=\frac{u_{12}-\sqrt{u^2_{12}-u_{11}u_{22}}}{\sqrt{u_{22}}},$$

則此線卽爲 AR 與 AQ 切線中之一.



故 $$\phi=\pm\frac{i}{2}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

但 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 爲 AL_1, AL_2, AR, AQ 四線之橫錯比. 設如 A 爲基本圓以外之點, λ_1 與 λ_2 卽爲實的,而 ϕ 是幻的.設 A 在圓上, $\lambda_1=\lambda_2$, 而 $\phi=0$. 若 A 在圓內, λ_1 與 λ_2 卽爲共軛幻的,而 ϕ 則實.

二線間之陸氏角度，乃是$\frac{i}{2}$乘此二線及由此二線之交點所作至基本圓之二切線之橫錯比之對數.

50. 用歐氏平面上之表象以研究陸氏平面上之圓，可引至極有味的結果.倘設四十一節內方程(4)中之$(\xi_1,\ \eta_1)$爲圓心之固定的坐標，而設$\xi_2=\xi$，$\eta_2=\eta$爲圓上任何點之變動的坐標，則卽得一圓之普通的方程，其形式作

$$(\xi_1\xi+\eta_1\eta-k^2)^2=c(\xi^2+\eta^2-k^2)\cdots\cdots\cdots(1)$$

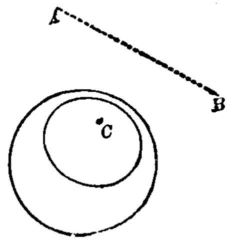
這裏c是一常數.

這方程是歐氏平面上之一圓錐曲線.坐標之能滿足此方程及基本圓$\xi^2+\eta^2-k^2=0$者，幷亦滿足此方程

$$\xi_1\xi+\eta_1\eta-k^2=0,$$

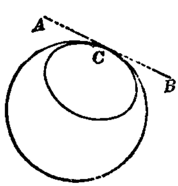
而此則爲$(\xi_1,\ \eta_1)$之極線之方程.因此方程之左端$\xi_1\xi+\eta_1\eta-k^2$於方程(1)中作二次方見出，故知方程(1)乃是一圓錐曲線，爲基本圓之切線者，其切點則卽是$(\xi_1,\ \eta_1)$之極線割基本圓處.於是可因

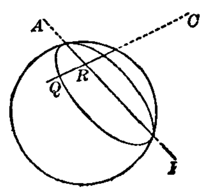
(ξ_1, η_1)在圓外,圓上或圓內而別爲三例論之.



(1) 設 $C(\xi_1, \eta_1)$ 在基本圓之內, 則其 AB 極線不能割圓於實點,故圓錐曲線 (1) 完全在圓內(如上圖).此則與陸氏平面上之尋常的圓相當.

(2) 設$C(\xi_1, \eta_1)$在圓上,則其極線卽爲圓上(ξ_1, η_1)點之切線.於是圓錐曲線(1)切此圓於此點(如下左圖).而在陸氏平面上,則與一曲線相當,此曲線與一心在無限處,半徑無限的圓逼近,名爲極限





曲線.倘執其一無限的半徑而旋轉之,則所生出的面為二十五節內所說過的極限面.

(3) 如 $C(\xi_1, \eta_1)$ 在基本圓外,則其極線割此圓於二點 A 及 B (如上右圖).圓錐曲線 (1) 於是為基本圓之切線,在陸氏平面上與一幻心幻半徑的實圓相當.直線 AB 乃是這樣的圓之特例.

作任何一經過 C 的線 CR,交 AB 於 Q,此於陸氏平面上表象一線與 AB 垂直(四十七節).但在陸氏度量中,CR 與 CQ 不問 Q 在 AB 上何處是常的,故 QR 是常的.此即是 Q 之軌迹其一切點與一直線 AB 等遠.此曲線有時名為假環線(*hypocycle*).

51. 黎氏幾何學自亦可用坐標 (ξ, η) 於歐氏平面上表象之.但這裏基本圓之方程為

$$\xi^2+\eta^2+k^2=0$$

而是幻的,故其幾何的屬性不能以眼見之.

XI 射影與非歐几里得幾何學之關係

52. 於四十八及四十九節內,已得一種度量系

統之一特例，此系統首為卡萊所作出，而克拉恩則認為引至非歐氏幾何學者．其普通原理可即一述之．

於一歐氏幾何學通用的平面上取 $x_1:x_2:x_3$ 為均整的 (*homogeneous*) 點坐標，而假定一基本的圓錐曲線，其方程作

$$a_{11}x^2{}_1+a_{22}x^2{}_2+a_{33}x^2{}_3+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2$$

$a_{31}x_3x_1=0$ 或簡寫作

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k=0\ (a_{ik}=a_{ki}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

此圓錐曲線之切線的方程，則為

$$\Sigma A_{ik}\alpha_i\alpha_k=0\ \ (A_{ik}=A_{ki}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

此即是，方程 (2) 乃是一直線 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=0$ 為圓錐曲線 (1) 之切線之條件，為便利計，可設

$$f_{xx}=\Sigma a_{ik}x_ix_k,\quad f_{yy}=\Sigma a_{ik}y_iy_k,\quad f_{xy}=\Sigma a_{ik}x_iy_k$$

以及

$$u_{\alpha\alpha}=\Sigma A_{ik}\alpha_i\alpha_k,\ u_{\beta\beta}=\Sigma A_{ik}\beta_i\beta_k,\ u_{\alpha\beta}=\Sigma A_{ik}\alpha_i\beta_k$$

設 P_1 與 P_2 為平面上之二點，Q 與 R 為 P_1P_2 線交基本圓錐曲線之點，$[P_1P_2QR]$ 為 P_1P_2QR

四點之橫錯比，則卡萊氏之射影的 P_1P_2 距離之度量爲以下的方程所定

$$P_1P_2 = M\,log\,[P_1P_2QR],$$

這 M 乃是一常數。

仿此，設 AL_1 與 AL_2 爲二線相交於 A，AR 與 AQ 爲由 A 至基本曲線之二切線，而 $[L_1L_2QR]$ 爲此四線之橫錯比，則 AL_1 與 AL_2 間角 ϕ 之卡氏射影度量可用方程

$$\phi = M_1\,log\,[L_1L_2QR]$$

定之；這裏 M_1 是一常數。

這些度量之解析的算式，如四十八及四十九節求之。

設 $x_1:x_2:x_3$ 爲 P_1 之坐標，$y_1:y_2:y_3$ 爲 P_2 之坐標，而 λ_1, λ_2 爲

$$f_{xx} + 2\lambda f_{xy} = \lambda^2 f_{yy} = 0$$

之根，則
$$\left.\begin{aligned}P_1P_2&=M\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\\&=M\log\frac{f_{xy}+\sqrt{f^2{}_{xy}-f_{xx}f_{yy}}}{f_{xy}-\sqrt{f^2{}_{xy}-f_{xx}f_{yy}}}\\&=2M\log\frac{f_{xy}+\sqrt{f^2{}_{xy}-f_{xx}f_{yy}}}{\sqrt{f_{xx}}\ \sqrt{f_{yy}}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

稍一演算，可由此得

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{P_1P_2}{2M}}+e^{-\frac{P_1P_2}{2M}}\right)=\frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx}}\sqrt{f_{yy}}}\cdots\cdots\cdots(4)$$

又設 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=0$ 爲 AL_1 之方程，$\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3=0$ 爲 AL_2 之方程，而 μ_1，μ_2 爲

$$u_{\alpha\alpha}+2\mu u_{\alpha\beta}+\mu^2u_{\beta\beta}=0$$

之根，則
$$\left.\begin{aligned}\phi&=M_1\log\frac{\mu_1}{\mu_2}\\&=M_1\log\frac{u_{\alpha\beta}+\sqrt{u^2{}_{\alpha\beta}-u_{\alpha\alpha}\,u_{\beta\beta}}}{u_{\alpha\beta}-\sqrt{u^2{}_{\alpha\beta}-u_{\alpha\alpha}\,u_{\beta\beta}}}\\&=2M_1\log\frac{u_{\alpha\beta}+\sqrt{u^2{}_{\alpha\beta}-u_{\alpha\alpha}\,u_{\beta\beta}}}{\sqrt{u_{\alpha\alpha}}\ \sqrt{u_{\beta\beta}}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

而 $$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\phi}{2M_1}}+e^{-\frac{\phi}{2M_1}}\right)=\frac{u_{\alpha\beta}}{\sqrt{u_{\alpha\alpha}}\ \sqrt{u_{\beta\beta}}}\cdots(6)$$

今將照此基本圓錐曲線之性質,別爲三例論之.

53. 第一例.設此基本圓錐曲線是實的,不退化的,卽是一橢圓,雙曲線或拋物線.於此,倘 P_1, P_2 在曲線之內,$[P_1P_2QR]$ 卽爲實且正的.故 P_1P_2 既實,則 M 必爲一實的常數,例如 $\frac{k}{2}$.倘 A 在曲線之內,AR 與 AQ 切線卽幻,而 μ_1 與 μ_2 爲共軛幻的.試設 $\mu_1=\rho e^{\theta i}$, 則 $\mu_2=\rho e^{-\theta i}$,而 $log\frac{\mu_1}{\mu_2}=2\theta i.$ 故如 ϕ 爲實,則 M_1 必純粹幻而後可.若 AL_1 與 AL_2 相合,卽得

$$\phi=M_1\,log\,1=0 \text{ 或 } 2M_1u\pi i,$$

這裏 n 是一整數.要是我們以直角之度量爲 $\frac{\pi}{2}$,

則必須使 $M_1=\frac{i}{2}$.

如是,所得方程與四十八及四十九節中者無異,不過與一普通圓錐曲線而不是與一圓相關而已.

陸氏幾何學於此基礎上已不難建設起來.

54. 第二例.設此基本曲線是幻的,卽是,設 x_1: x_2 : x_3 沒有實的值能滿足五十二節中之方程 (1) 者.於是 λ_1 與 λ_2 卽爲共軛幻的, μ_1 與 μ_2 亦然.因此,必須使 M 與 M_1 爲純粹幻的,纔能得實的距離與角.如前節,我們設 $M_1=\frac{i}{2}$,并將設 $M=\frac{ik}{2}$.

於是自五十二節之方程(4)與(6)得

$$\cos\frac{P_1P_2}{k}=\frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx}}\sqrt{f_{yy}}},$$

$$\cos\phi=\frac{u_{\alpha\beta}}{\sqrt{u_{\alpha\alpha}}\sqrt{u_{\alpha\beta}}},$$

此則與黎曼幾何學者相類(四十節).

因 $\cos\frac{P_1P_2}{k}$ 不能無限,故一切直線之長,均是有限的. 二直線總是相交的, 因二線之方程總有一解,不能表一無限處之點者.

黎氏幾何學於此基礎上卽已易建設起來.

55. 第三例.設此基本曲線是退化的,此則或是

五十二節方程(1)所表者爲二直線,或是其切線的方程(2)所表者爲二點.後者較可注意,尤其是倘使切線的方程作

$$\alpha^2{}_1+\alpha^2{}_2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

此方程凡經過 $x_1:x_2:x_3=1:\pm i:0$ 二點中之一的直線,其係數均能滿足之.設 $x_3=0$ 表無限處之線,這些點即是無限處之圓點.經過此平面之每點有二直線滿足方程(1)者,即是"極小線."

角之方程易得到.事實上,倘使 $M_1=\frac{i}{2}$,即可自五十二節方程(6)得之:

$$\cos\phi=\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha^2{}_1+\alpha^2{}_2}\ \sqrt{\beta^2{}_1+\beta^2{}_2}}.$$

然此即是歐氏幾何學上二直線

$$\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3=0,\ \beta_1x+\beta_2y+\beta_3=0,$$

間角之公式,這裏我們設了 $x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$.

因之:歐氏幾何學上二線間之角,等於 $\frac{i}{2}$ 乘此二線及由其交點所作二極小線之橫錯比之對數.

自五十二節之普通公式，以求得歐氏距離公式，不甚易易，但可如下得之：

今取以下之方程代方程(1)

$$\alpha^2{}_1+\alpha^2{}_2+\varepsilon\alpha^2{}_3=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(這裏倘 $\varepsilon=0$ 則卽成爲方程 1)．其相當的點方程爲

$$\varepsilon(x^2{}_1+x^2{}_2)+x^2{}_3=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由五十二節方程 (4)，倘設 $M=\frac{k}{2}$，則得

$$\cosh\frac{P_1P_2}{k}=\frac{\varepsilon(x_1y_1+x_2y_2)+x_3y_3}{\sqrt{\varepsilon(x^2{}_1+x^2{}_2)+x^2{}_3}\sqrt{\varepsilon(y^2{}_1+y^2{}_2)+y^2{}_3}}.$$

今欲指出，當 $\varepsilon=0$, $k=\infty$ 時，其極限卽爲歐氏幾何學上之公式．爲此，可用 $\cosh\frac{P_1P_2}{k}$ 之近似值 $1+\left(\frac{P_1P_2}{k}\right)^2$ 代入，而計算 P_1P_2，其結果爲

$$P_1P_2=ik\sqrt{\varepsilon}$$

$$\frac{\sqrt{(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_2y_3-x_3y_2)^2+\varepsilon(x_2y_1-x_1y_2)^2}}{\sqrt{\varepsilon(x^2{}_1+x^2{}_2)+x^2{}_3}\ \sqrt{\varepsilon(y^2{}_1+y^2{}_2)+y^2{}_3}}.$$

今設 $\varepsilon=0$ 而 $k=\infty$，使 $ik\sqrt{\varepsilon}=1$，則其極限得

$$P_1P_2=\frac{\sqrt{(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_2y_3-x_3y_2)^2}}{\sqrt{x^2_3}\quad\sqrt{y^2_3}}$$

最後,倘用不均整的坐標,使

$$x=\frac{x_1}{x_3},y=\frac{x_2}{x_3},\ x'=\frac{y_1}{y_3},\ y'=\frac{y_2}{y_3},$$

則得尋常的笛卡氏公式

$$P_1P_2=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

因此:歐氏的距離度量乃是卡萊氏射影度量之極限的例.

XII. 弧之極小段

56. 於四十,四十一兩節內,已知在黎氏及陸氏幾何學上,一極小段弧 ds, 乃是所用坐標之微分之均整的二次函數之根.歐氏幾何學上亦是如此,在直角坐標內,

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

反之,用黎氏所創的方法,我們可問凡極小段弧如是表出之者,這幾種幾何學是不是已盡之矣.較

正確的,此問題可如是提出:設平面上一點可用二坐標 x_1 與 x_2 定之,而二無限相近的點 (x_1, x_2) 與 (x_1+dx_1, x_2+dx_2) 間之距離可用以下形式的方程表之

$$ds=\sqrt{a_{11}dx^2{}_1+2a_{12}dx_1dx_2+a_{22}dx^2{}_2}$$

這裏 a_{11}, a_{12}, a_{22} 爲 x_1 與 x_2 之函數,則須討論其結果所生出的幾何學.

這裏不能將此問題較詳的論之,我們可簡單的說,直線則定爲二點間至短之距離,其方程乃是 x_1 與 x_2 間之關係,使

$$s=\int\sqrt{a_{11}dx^2{}_1+2a_{12}dx_1dx_2+a_{22}dx^2{}_2}$$

於常數的限度間取極小值者.

最後,得此結果,我們可用極坐標 (r, θ) 以代 (x_1, x_2),則 ds 作以下諸式之一:

$$ds=\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2},$$

$$ds=\sqrt{dr^2+k^2sin^2\frac{r}{k}d\theta^2} \quad (k\ 爲常數)$$

$$ds=\sqrt{dr^2+k^2sinh^2\frac{r}{k}d\theta^2}$$

然這是歐氏,黎氏,陸氏三種幾何學上之式,故得此極可注意的結果,卽,不能再有新的其他一種幾何學自新的觀點上產生出來。不過此項說法須有一些修改.目前的討論,因出發於無限小,而用微分算法,故祇能及於平面之有限的一部分.關於直線無定的引長後之屬性,如平行假設中所有的,未有假定.事實上,一種幾何學於有限的一部分平面內與歐氏,黎氏或陸氏幾何學相融洽者,如推而研究及其全部平面,則或可得新的特徵。關於此問題,這裏不能論及了.