Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 1

Übungsaufgaben[1]

Aufgabe 1.1.*

Wie viele Pässe haben Sie gezählt?

Aufgabe 1.2.*

(1) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in genau drei Punkten schneiden.
(2) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich in keinem Punkt schneiden.
(3) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich in einem Punkt schneiden.
(4) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in sechs Punkten schneiden.

Aufgabe 1.3.*

Skizziere möglichst viele wesentlich verschiedene Konfigurationen von fünf Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in vier Schnittpunkten treffen.

Aufgabe 1.4.*

Skizziere sieben Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in acht Punkten schneiden.

Aufgabe 1.5.*

(1) Skizziere vier Geraden im Raum mit der Eigenschaft, dass es insgesamt zwei Schnittpunkte gibt.
(2) Skizziere vier Geraden in der Ebene mit der Eigenschaft, dass es insgesamt drei Schnittpunkte gibt.
(3) Zeige, dass es in der Ebene nicht vier Geraden geben kann, die insgesamt zwei Schnittpunkte besitzen.

[1]Eine Aufgabe mit Stern bedeutet, dass es dazu eine Lösung gibt, die über einen Link zu erreichen ist. Man soll natürlich versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Aufgabe 1.6. Für $k = 1, \ldots, 8$ sei

$$a_k = 2^k - 5k.$$

Berechne

$$\sum_{k=1}^{8} a_k \, .$$

Aufgabe 1.7. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei

$$a_k = \frac{k}{2k+1}.$$

Berechne

$$\sum_{k=0}^{5} a_k \, .$$

Aufgabe 1.8.*

Wir betrachten die Wertetabelle

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	2	5	4	-1	3	5	-2	2

(1) Berechne $a_2 + a_5$.
(2) Berechne $\sum_{k=3}^{6} a_k$.
(3) Berechne $\prod_{i=0}^{3} a_{2i+1}$.
(4) Berechne $\sum_{i=4}^{5} a_i^2$.

Aufgabe 1.9. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \, ,$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \, ,$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \, .$$

Aufgabe 1.10.*

Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

(Man denke auch an die verschiedenen Möglichkeiten, ein quadratisches Gitter abzuzählen).

Aufgabe 1.11.*

Zeige mittels vollständiger Induktion für $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \;=\; \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ bei } n \text{ gerade}, \\ -\frac{n+1}{2} \text{ bei } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Aufgabe 1.12.*

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 \;=\; (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 1.13. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \;\geq\; n^2$$

gilt.

Aufgabe 1.14.*

Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Aufgabe 1.15.*

Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in eine Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

Aufgabe 1.16. In der folgenden Argumentation wird durch Induktion bewiesen, dass alle Pferde die gleiche Farbe haben. „Es sei $A(n)$ die Aussage, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Induktionsanfang: Wenn nur ein Pferd da ist, so hat dieses eine bestimmte Farbe und die Aussage ist richtig. Für den Induktionsschritt sei vorausgesetzt, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Es seien jetzt $n+1$ Pferde gegeben. Wenn man eines herausnimmt, so weiß man nach der Induktionsvoraussetzung, dass die verbleibenden n Pferde untereinander die gleiche Farbe haben. Nimmt man ein anderes Pferd heraus, so haben die jetzt verbleibenden Pferde wiederum untereinander die gleiche Farbe. Also haben all diese $n+1$ Pferde überhaupt die gleiche Farbe". Analysiere diese Argumentation.

Aufgabe 1.17. Eine natürliche Zahl heißt *besonders*, wenn sie eine für sie spezifische, benennbare Eigenschaft erfüllt. Die 0 ist als neutrales Element der Addition und die 1 ist als neutrales Element der Multiplikation besonders. Die 2 ist die erste Primzahl, die 3 ist die kleinste ungerade Primzahl, die 4 ist die erste echte Quadratzahl, die 5 ist die Anzahl der Finger einer Hand, die 6 ist die kleinste aus verschiedenen Faktoren zusammengesetzte Zahl, die 7 ist die Anzahl der Zwerge im Märchen, u.s.w., diese Zahlen sind also alle besonders. Gibt es eine Zahl, die nicht besonders ist? Gibt es eine kleinste Zahl, die nicht besonders ist?

Aufgabe 1.18.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 2xe^{3x}.$$

Zeige durch Induktion, dass die n-te Ableitung ($n \geq 1$) von f gleich

$$f^{(n)}(x) \;=\; \left(3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n\right)e^{3x}$$

ist.

Aufgabe 1.19. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m+1)\prod_{i=1}^{m}(2i-1)^2 \;=\; \prod_{k=1}^{m}(4k^2-1).$$

Aufgabe 1.20. Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ ($a, b \in \mathbb{N}_+$) mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von

Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

Aufgabe 1.21.*

Die offizielle Berechtigung für die Klausurteilnahme werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Professor Knopfloch sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

Aufgabe 1.22.*

Zeige, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $25n^2 - 17$ ein Vielfaches von 8 ist.

Aufgabe 1.23. Es seien $q, d, s \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 1$ und $n = qd + s$. Zeige, dass der Rest von n bei Division durch d gleich dem Rest von s bei Division durch d ist.

Aufgabe 1.24. Sei d eine positive natürliche Zahl. Es seien a, b natürliche Zahlen und es seien r bzw. s die Reste von a bzw. b bei Division durch d. Zeige, dass der Rest von $a+b$ bei Division durch d gleich dem Rest von $r+s$ bei Division durch d ist. Formuliere und beweise die entsprechende Aussage für die Multiplikation.

Bei der folgenden Aufgabe denke man etwa an $a = 10$.

Aufgabe 1.25. Es seien $a, d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$. Zeige, dass bei Division mit Rest durch d aller Potenzen von a (also $a^0, a^1, a^2, \ldots$) schließlich eine Periodizität eintreten muss. Es gibt also $i < j$ derart, dass sich die Reste von $a^i, a^{i+1}, a^{i+2}, \ldots, a^{j-2}, a^{j-1}$ bei den folgenden Potenzen periodisch (oder „zyklisch“) wiederholen (insbesondere besitzen also a^i und a^j den gleichen Rest). Zeige ebenfalls, dass diese Periodizität nicht bei $a^0 = 1$ anfangen muss.

Aufgabe 1.26. Betrachte im Zehnersystem die Zahl

$$473\,.$$

Wie sieht diese Zahl im Dualsystem aus?

Aufgabe 1.27. Betrachte im 15er System mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 8, 9, A$, B, C, D, E die Zahl

$$5E6BB\,.$$

Wie sieht diese Zahl im Zehnersystem aus?

Aufgabe 1.28. Begründe die Eindeutigkeit der Ziffernentwicklung im Zehnersystem mit Hilfe der Eindeutigkeit bei der Division mit Rest.

Aufgabe 1.29. Begründe, ohne auf Gewohnheiten zu verweisen, warum das *schriftliche Addieren* (von natürlichen Zahlen im Zehnersystem) korrekt ist, also wirklich die Summe der vorgegebenen Zahlen berechnet.

Aufgabe 1.30. Begründe, ohne auf Gewohnheiten zu verweisen, warum das *schriftliche Multiplizieren* (von natürlichen Zahlen im Zehnersystem) korrekt ist, also wirklich das Produkt der vorgegebenen Zahlen berechnet.

Abbildungsverzeichnis