Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück WS 2021/2022

Analysis I

Arbeitsblatt 15

Übungsaufgaben

Aufgabe 15.1. Man mache sich klar, dass die Partialsummen des Cauchy-Produkts von zwei Reihen nicht das Produkt der Partialsummen der beiden Reihen sind.

Aufgabe 15.2. Berechne die ersten fünf Glieder des Cauchy-Produkts der beiden konvergenten Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} .$$

Aufgabe 15.3. Es seien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

zwei absolut konvergente Potenzreihen in $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ mit } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

gegeben ist.

Aufgabe 15.4. Es sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Bestimme (in Abhängigkeit von z) die Summen der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} .$$

Aufgabe 15.5. Es sei
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen z^0, z^1, z^2, z^3, z^4 in der dritten Potenz
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^3 .$$

Aufgabe 15.6.*

Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

Aufgabe 15.7.*

Zu Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ komplexer Zahlen nennen wir die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \text{ mit } d_k = \sum_{j=0}^{k} a_k b_j + \sum_{i=0}^{k-1} a_i b_k$$
das „Quadratrandprodukt“ der beiden Reihen.

(1) Zeige, dass jedes Produkt $a_i b_j$ genau zu einem d_k beiträgt.
(2) Die beiden Reihen seien konvergent. Zeige, dass auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ konvergent ist, und dass deren Summe gleich dem Produkt der beiden Reihen ist.
(3)

Aufgabe 15.8. Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Funktion
$$\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp x,$$
nicht nach oben beschränkt ist und dass 0 das Infimum (aber nicht das Minimum) der Bildmenge ist.[1]

Aufgabe 15.9. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe mit $c_k \in \mathbb{C}$. Zeige, dass die durch die Reihenglieder
$$a_n := c_{2n} + c_{2n+1}$$
definierte Reihe ebenfalls und zwar gegen die gleiche Summe konvergiert.

[1] Aus der Stetigkeit, die wir aber noch nicht bewiesen haben, folgt daraus, dass $\mathbb{R}_+$ das Bild der reellen Exponentialfunktion ist.

Aufgabe 15.10. Bestimme die Koeffizienten bis zu z^6 in der Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ aus der Sinusreihe und der Kosinusreihe.

Aufgabe 15.11.*

Zeige, dass die Sinusfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin z,$$

nur reelle Nullstellen besitzt.

Aufgabe 15.12. Zeige, dass die Kosinusfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \cos z,$$

nur reelle Nullstellen besitzt.

Die nächsten Aufgaben verwenden die Definition einer *periodischen Funktion.*

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch* mit *Periode* $L > 0$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(x+L)$$

gilt.

Aufgabe 15.13. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion und

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine beliebige Funktion.

a) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ wieder periodisch ist.

b) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $f \circ g$ nicht periodisch sein muss.

Aufgabe 15.14. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige periodische Funktion. Zeige, dass f beschränkt ist.

Aufgabe 15.15.*

Es seien

$$f_1, f_2\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

periodische Funktionen mit den Periodenlängen L_1 bzw. L_2. Der Quotient L_1/L_2 sei eine rationale Zahl. Zeige, dass auch $f_1 + f_2$ eine periodische Funktion ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.16. (4 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen $z^0, z^1, z^2, z^3, z^4, z^5$ in der vierten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^4 .$$

Aufgabe 15.17. (4 Punkte)

Für $N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ sei

$$R_{N+1}(z) = \exp z - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

das *Restglied* der Exponentialreihe. Zeige, dass für $|z| \leq 1 + \frac{1}{2}N$ die *Restgliedabschätzung*

$$|R_{N+1}(z)| \leq \frac{2}{(N+1)!} |z|^{N+1}$$

gilt.

Aufgabe 15.18. (3 Punkte)

Berechne von Hand die ersten vier Nachkommastellen im Zehnersystem von

$$\exp 1 .$$

Aufgabe 15.19. (4 Punkte)

Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Exponentialfunktion die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Folge

$$\left(\frac{\exp n}{n^d} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.[2]

Aufgabe 15.20. (3 Punkte)

Beweise das Additionstheorem für den Sinus, also die Gleichheit

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

für $z, w \in \mathbb{C}$.

[2] Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion *schneller wächst* als jede Polynomfunktion.

Aufgabe 15.21. (3 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige periodische Funktion. Zeige, dass f gleichmäßig stetig ist.

Abbildungsverzeichnis