Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 24

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 24.1. Ordne die folgenden rationalen Zahlen gemäß ihrer Größe.

$$2,\ \left(\frac{5}{3}\right)^2,\ 4,\ 5-\frac{11}{12},\ 3+\frac{11}{10},\ \frac{7}{3}\cdot\frac{5}{3},\ \frac{21}{12}+\frac{19}{9},\ \frac{407}{100},\ 3,\ \frac{15}{4}\,.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 24.2.*

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist:

$$p=\frac{573}{-1234} \text{ und } q=\frac{-2007}{4322}\,.$$

Aufgabe 24.3. Man gebe fünf rationale Zahlen an, die (echt) zwischen $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{8}$ liegen.

Aufgabe 24.4. Warum braucht man in der Definition 24.1 die Bedingung, dass beide Nenner positiv sind?

Das folgende Konzept reicht historisch weiter zurück als das der rationalen Zahlen.

Zwei Strecken s und t heißen *kommensurabel*, wenn es eine Strecke g mit der Eigenschaft gibt, dass beide Strecken ganzzahlige Vielfache von g sind.

Aufgabe 24.5. Zeige, dass zwei Strecken a und b genau dann kommensurabel sind, wenn es eine Strecke v mit der Eigenschaft gibt, dass v von beiden Strecken ein ganzzahliges Vielfaches ist.

Aufgabe 24.6. Es sei $a\neq 0$ ein rationale Zahl auf dem Zahlenstrahl. Zeige, dass a zu einem weiteren Punkt $b\neq 0$ genau dann kommensurabel ist, wenn b ebenfalls rational ist.

AUFGABE 24.7.*

Unterteile die Strecke von $\frac{2}{7}$ nach $\frac{3}{4}$ rechnerisch in drei gleichlange Strecken.

AUFGABE 24.8.*

Es stehen zwei Gläser auf einem Tisch, wobei das eine mit Rotwein und das andere mit Weißwein gefüllt ist, und zwar gleichermaßen. Nun wird ein kleineres leeres Glas (ein Fingerhut oder ein Schnapsglas) in das Rotweinglas voll eingetaucht und der Inhalt in das Weißweinglas überführt und dort gleichmäßig vermischt (insbesondere gibt es Platz für diese Hinzugabe). Danach wird das kleinere Glas in das Weißweinglas voll eingetaucht und der Inhalt in das Rotweinglas überführt. Befindet sich zum Schluss im Rotweinglas mehr Rotwein als im Weißweinglas Weißwein?

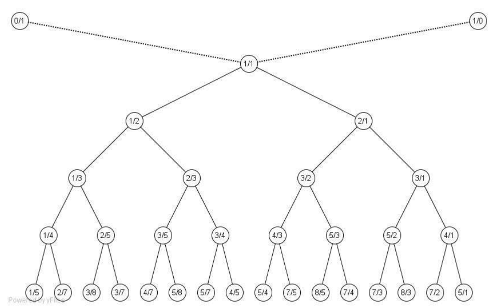
AUFGABE 24.9.*

Eine Bahncard 25, mit der man ein Jahr lang 25 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 62 Euro und eine Bahncard 50, mit der man ein Jahr lang 50 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 255 Euro. Für welchen Jahresgesamtnormalpreis ist keine Bahncard, die Bahncard 25 oder die Bahncard 50 die günstigste Option?

AUFGABE 24.10.*

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?



Im Stern-Brocot-Baum ergeben sich die gekürzten positiven Brüche, indem man zwei je in der x-Richtung benachbarte Brüche „falsch“ addiert, nämlich $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ rechnet, und in die nächste Zeile dazwischen platziert. An der Links-Rechtsausrichtung kann man die Größenverhältnisse ablesen.

Aufgabe 24.11. Gabi Hochster hat die Addition und die Multiplikation der rationalen Zahlen verstanden und möchte jetzt die Operation verstehen, bei der man

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{a+c}{b+d}$$

setzt. Sie beschränkt sich auf positive a, b, c, d. Überprüfe ihre Behauptungen:

(1) Bei
$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$$
gilt
$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$
Dies kann man algebraisch und geometrisch beweisen.

(2) Die Verknüpfung ist für rationale Zahlen nicht wohldefiniert.

(3) Wenn man für rationale Zahlen stets ihre teilerfremde Darstellung nimmt, so ist die Verknüpfung wohldefiniert.

(4) Die Verknüpfung ist kommutativ.

(5) Die Verknüpfung ist nicht assoziativ.

Aufgabe 24.12.*

Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} positiv ist.

Man folgere daraus, dass die positiven Elemente in einem angeordneten Körper bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden.

Aufgabe 24.13. Es sei K ein angeordneter Körper und $x < 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} negativ ist.

Aufgabe 24.14. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \geq 1$. Zeige, dass für das inverse Element $x^{-1} \leq 1$ gilt.

Aufgabe 24.15. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y > 0$. Zeige, dass für die inversen Elemente $x^{-1} < y^{-1}$ gilt.

Aufgabe 24.16. Es sei K ein angeordneter Körper und seien x, y positive Elemente. Zeige, dass $x \geq y$ zu $\frac{x}{y} \geq 1$ äquivalent ist.

Aufgabe 24.17.*

Es sei K ein angeordneter Körper und $b \in K$, $b > 1$. Zeige, dass es dann Elemente $c, d > 1$ mit $b = cd$ gibt.

Aufgabe 24.18.*

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

Aufgabe 24.19. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die in Aufgabe 23.31 eingeführte Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow K,\ n \longmapsto n_K,$$

injektiv ist.

Aufgabe 24.20. Zeige die Abschätzung

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

für $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 24.21.*

Bestimme die ganzzahligen Lösungen $x \neq 0$ der Ungleichung

$$\frac{\frac{3}{x}}{\frac{-7}{4}} > -1.$$

Aufgabe 24.22. Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion

$$K \longrightarrow K,\ x \longmapsto |x|,$$

in einem angeordneten Körper (dabei seien x, y beliebige Elemente in K).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

Aufgabe 24.23. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für $x, y \in K$ die Identität

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}\,(x + y + |x - y|)$$

gilt.

Aufgabe 24.24. Es sei K ein angeordneter Körper. Man untersuche die Verknüpfung

$$K \times K \longrightarrow K,\ (x,y) \longmapsto \min(x,y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

Aufgabe 24.25. Bestimme die Intervalle in einem angeordneten Körper K, die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen sind.

a) $|4x-3| < |2x-3|$.

b) $\left|\frac{x-2}{3x-1}\right| \leq 1$.

Aufgabe 24.26. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für jedes $x > 0$ die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ erfüllt ist. Für welche x gilt Gleichheit?

Aufgabe 24.27. Zeige die Abschätzung

$$2n^n \leq (n+1)^n$$

für $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.28. (3 Punkte)

Zeige, dass die Größergleichrelation auf den rationalen Zahlen eine totale Ordnung ist.

Aufgabe 24.29. (2 Punkte)

Zeige die Abschätzung

$$\binom{d+n}{n} \geq \left(\frac{d}{n}\right)^n.$$

Aufgabe 24.30. (4 (1+3) Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Betrachte die in Aufgabe 23.31 konstruierte Zuordnung $\mathbb{Z} \rightarrow K$.

a) Zeige, dass diese Zuordnung injektiv ist.

b) Zeige, dass man diese Zuordnung zu einer Zuordnung $\mathbb{Q} \subseteq K$ fortsetzen kann, und zwar derart, dass die Verknüpfungen in $\mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen in K übereinstimmen und die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ mit der Ordnung auf K übereinstimmt.

Aufgabe 24.31. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ Elemente. Zeige, dass dann

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

gilt.

Aufgabe 24.32. (3 Punkte)

Ergänze den Stern-Brocot-Baum um eine weitere Zeile.

Abbildungsverzeichnis