Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 1

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. Von welchen ebenen Figuren und räumlichen Gebilden kennen Sie den Flächeninhalt bzw. das Volumen?

Aufgabe 1.2. Was ist das Volumen (der Inhalt, das Maß) eines einzelnen Punktes im $\mathbb{R}^0$, im $\mathbb{R}^1$, im $\mathbb{R}^2$ u.s.w.?

Aufgabe 1.3. Es sei M eine Menge und $\mathcal{C}$ das Mengensystem auf M, das aus allen endlichen Teilmengen von M besteht. Zeige, dass $\mathcal{C}$ ein Mengen-Präring ist.

Aufgabe 1.4.*

Es sei M eine Menge und $\mathcal{C}$ das Mengensystem auf M, das aus allen endlichen Teilmengen von M und deren Komplementen besteht. Zeige, dass $\mathcal{C}$ eine Mengenalgebra ist.

Aufgabe 1.5. Zeige, dass eine Mengenalgebra insbesondere ein Mengen-Präring ist.

Aufgabe 1.6. Es sei M eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit dem Durchschnitt $\cap$ als Multiplikation und der symmetrischen Differenz

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

als Addition (mit welchen neutralen Elementen?) ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 1.7. Es sei M eine Menge und sei $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ ein Mengensystem. Zeige, dass $\mathcal{P}$ genau dann ein Mengen-Präring ist, wenn es die drei Bedingungen

(1) $\emptyset \in \mathcal{P}$.
(2) Mit $A, B \in \mathcal{P}$ ist auch $A \triangle B \in \mathcal{P}$.
(3) Mit $A, B \in \mathcal{P}$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{P}$

erfüllt.

AUFGABE 1.8. Es sei M eine Menge und $\mathcal{R}$ ein Mengensystem auf M. Zeige, dass $\mathcal{R}$ genau dann eine Mengenalgebra ist, wenn es ein Unterring des Potenzmengenringes $(\mathfrak{P}(M), \triangle, \cap)$ ist.

AUFGABE 1.9. Es sei M eine Menge und es bezeichne $A \triangle B$ die symmetrische Differenz für Mengen $A, B \subseteq M$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1)
$$A \setminus B = (A \triangle B) \cap A.$$

(2)
$$A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B).$$

AUFGABE 1.10. Es sei M eine Menge und es bezeichne $A \triangle B$ die symmetrische Differenz für Mengen $A, B \subseteq M$. Zeige, dass $A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n$ genau aus den Elementen besteht, die in einer ungeraden Anzahl der A_i enthalten sind.

AUFGABE 1.11. Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge M. Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten.

(1) Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}$.
(2) Mit $S, T \in \mathcal{A}$ gehört auch $T \setminus S$ zu $\mathcal{A}$.
(3) Für jede abzählbare Familie $T_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, ist auch
$$\bigcap_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}.$$

AUFGABE 1.12. Es sei $\mathcal{A}$ das Mengensystem auf $\mathbb{N}$, das aus allen Teilmengen $T \subseteq \mathbb{N}$ besteht, die durch einen mathematischen Ausdruck beschreibbar sind. Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra, aber keine σ-Algebra ist.

AUFGABE 1.13. Es sei A_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Teilmengen in einer Menge M mit
$$A_{n+1} \subseteq A_n$$
für alle n. Bestimme den Limes inferior und den Limes superior der Familie in diesem Fall.

Aufgabe 1.14.*

Es sei $\epsilon > 0$ fixiert und sei

$$A_q =]q - \epsilon, q + \epsilon[$$

die ϵ-Umgebung von q. Bestimme den Limes inferior und den Limes superior dieser (abzählbaren) Familie.

Aufgabe 1.15. Es seien

$$A_k = \{x \in [0,1[| \text{ die } k\text{-te Nachkommastelle von } x \text{ in der Dezimalentwicklung ist } 0\} .$$

Bestimme den Limes inferior und den Limes superior von dieser Mengenfolge.

Aufgabe 1.16. Es sei M eine Menge und sei $\mathcal{A}_j$, $j \in J$, eine beliebige Familie von σ-Algebren auf M. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$$

ebenfalls eine σ-Algebra auf M ist.

Aufgabe 1.17. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass das Mengensystem

$$N \cap T,\, T \in \mathcal{A}\,,$$

eine σ-Algebra auf N ist (man spricht von der *induzierten* σ-Algebra).

Aufgabe 1.18. Es sei M eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$ seien Mengensysteme. Dabei sei $\mathcal{E}'$ in der von $\mathcal{E}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ enthalten. Zeige

$$\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}').$$

Aufgabe 1.19. Es sei M eine endliche Menge mit einer geraden Anzahl. Es sei $\mathcal{G}$ das Mengensystem, das aus allen Teilmengen von M besteht, die eine gerade Anzahl besitzen. Zeige, dass $\mathcal{G}$ ein Dynkin-System ist und dass $\mathcal{G}$ im Allgemeinen nicht durchschnittsstabil ist.

Aufgabe 1.20.*

Es sei M eine Menge und $\mathcal{A}$ ein Mengensystem auf M. Zeige, dass $\mathcal{A}$ genau dann ein durchschnittsstabiles Dynkin-System ist, wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 1.21. Zeige, dass messbare Abbildungen zwischen Messräumen die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Die Hintereinanderschaltung von messbaren Abbildungen ist messbar.
(2) Jede konstante Abbildung ist messbar.
(3) Die Identität ist messbar.
(4) Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Algebren auf einer Menge M. Dann ist die Identität auf M genau dann $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbar, wenn $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ gilt.

Aufgabe 1.22. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und es sei $\mathbb{Z}$ mit der ganzen Potenzmenge als σ-Algebra versehen. Es sei $T \subseteq M$. Zeige, dass T genau dann messbar ist, wenn die Indikatorfunktion

$$e_T \colon M \longrightarrow \mathbb{Z}$$

messbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.23. (3 Punkte)

Es sei M eine Menge und $\mathcal{A}$ das Mengensystem auf M, das aus allen abzählbaren Teilmengen von M und deren Komplementen besteht. Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 1.24. (4 Punkte)

Es sei M eine n-elementige Menge und sei k ein Teiler von n. Zeige, dass die Menge der Teilmengen von M, deren Elementanzahl ein Vielfaches von k ist, ein Dynkin-System bilden, das bei $k \neq 1, n$ keine Mengen-Algebra ist.

Aufgabe 1.25. (4 Punkte)

Es seien M und N Mengen und es sei

$$F \colon M \longrightarrow N$$

eine Abbildung.

a) Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf M. Zeige, dass das Mengensystem

$$\left\{ T \subseteq N \mid F^{-1}(T) \in \mathcal{A} \right\}$$

eine σ-Algebra auf N ist.

b) Es sei $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf N. Zeige, dass das Mengensystem

$$\left\{ F^{-1}(T) \mid T \in \mathcal{B} \right\}$$

eine σ-Algebra auf M ist.

Aufgabe 1.26. (4 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und es sei $M = \biguplus_{i \in I} M_i$ eine Zerlegung von M in abzählbar viele messbare Teilmengen. Es sei

$$\varphi \colon M \longrightarrow N$$

eine Abbildung in einen weiteren Messraum $(N, \mathcal{B})$. Zeige, dass φ genau dann messbar ist, wenn sämtliche Einschränkungen

$$\varphi_i = \varphi|_{M_i} \colon M_i \longrightarrow N$$

messbar sind.

Abbildungsverzeichnis