Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2023/24**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 10

Übungsaufgaben

Aufgabe 10.1. Zeige, dass eine lineare Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto ax,$$

stetig ist.

Aufgabe 10.2. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) f ist stetig in a.
(2) Zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}_+$ derart, dass aus

$$|x-a| \leq \frac{1}{m}$$

die Abschätzung

$$|f(x)-f(a)| \leq \frac{1}{n}$$

folgt.
(3) Zu jedem $s \in \mathbb{N}$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ derart, dass aus

$$|x-a| \leq \frac{1}{10^r}$$

die Abschätzung

$$|f(x)-f(a)| \leq \frac{1}{10^s}$$

folgt.

Aufgabe 10.3. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|,$$

stetig ist.

Aufgabe 10.4. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, x \longmapsto \sqrt{x},$$

stetig ist.

Aufgabe 10.5. Bauer Ernst möchte ein quadratisches Melonenfeld anlegen. Das Feld sollte 100 Quadratmeter groß sein, er findet aber jede Größe zwischen 99 und 101 Quadratmetern noch akzeptabel. Welcher Fehler ist ungefähr für die Seitenlänge erlaubt, damit das entstehende Quadrat innerhalb der vorgegebenen Toleranz liegt?

Aufgabe 10.6.*

Es sei

$$f(x) = 2x^3 - 4x + 5.$$

Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Beziehung gilt: Wenn

$$|x-3| \leq \frac{1}{800},$$

dann ist

$$|f(x) - f(3)| \leq \frac{1}{10}.$$

Aufgabe 10.7. Bestimme für die Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 6$$

im Punkt $a = 1$ für $\epsilon = \frac{1}{10}$ ein explizites $\delta > 0$ derart, dass aus

$$d(x,a) \leq \delta$$

die Abschätzung

$$d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

folgt.

Aufgabe 10.8. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in T$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ für alle $y \in T$ aus einem nichtleeren offenen Intervall $]x-\delta, x+\delta[$ gilt.

Aufgabe 10.9.*

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit

$$f(a) > g(a).$$

Zeige, dass es ein $\delta > 0$ derart gibt, dass

$$f(x) > g(x)$$

für alle $x \in [a-\delta, a+\delta]$ gilt.

Aufgabe 10.10.*

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Funktion f ist durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$ eindeutig festgelegt.
(2) Der Funktionswert $f(a)$ ist durch die Funktionswerte $f(x)$, $x \neq a$, festgelegt.
(3) Wenn für alle $x < a$ die Abschätzung

$$f(x) \leq c$$

gilt, so gilt auch

$$f(a) \leq c.$$

Aufgabe 10.11. Es seien $a < b < c$ reelle Zahlen und es seien

$$g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h\colon [b, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $g(b) = h(b)$. Zeige, dass dann die Funktion

$$f\colon [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(t) = g(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } f(t) = h(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 10.12. Es sei

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f gibt.

Aufgabe 10.13. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Teilmenge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f stetig ist.

Aufgabe 10.14. Zeige, dass es eine stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass f auf jedem Intervall der Form $[0, \delta]$ mit $\delta > 0$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt.

Ist eine solche Funktion „zeichenbar“? Siehe auch Aufgabe 16.24.

Aufgabe 10.15. Berechne den Grenzwert der Folge

$$x_n = 5\left(\frac{2n+1}{n}\right)^3 - 4\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3$$

für $n \to \infty$.

Aufgabe 10.16.*

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt stetig ist.

Aufgabe 10.17. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt{\frac{7n^2-4}{3n^2-5n+2}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 10.18. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$$

definiert. Zeige, dass diese Folge konvergiert und berechne den Grenzwert.

Aufgabe 10.19. Beweise direkt die Rechenregeln aus Lemma 10.6 (ohne Bezug auf das Folgenkriterium).

Aufgabe 10.20. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{2x^7 - 3x\,|6x^3 - 11|}{|3x-5| + |4x^3 - 5x + 1|},$$

stetig ist.

Aufgabe 10.21. Man gebe ein Beispiel für eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine absolut konvergente reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ derart, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f(a_k)$ nicht konvergiert.

AUFGABE 10.22.*

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und seien $f, g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dabei seien g und h stetig im Punkt a, es gelte $g(a) = f(a) = h(a)$ und es gelte $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass auch f in a stetig ist.

AUFGABE 10.23. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x-1}{x^2-1}$$

im Punkt $a = 1$.

AUFGABE 10.24. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Es sei $f \colon T \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Es ist
$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$
(2) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, konvergiert auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b.

Tipp: Dies wird ähnlich wie das Folgenkriterium für die Stetigkeit bewiesen.

AUFGABE 10.25. Es sei

$$T = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

die Menge der Stammbrüche und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Es sei $b \in \mathbb{R}$ und $D = T \cup \{0\}$. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Die Folge konvergiert gegen b.
(2) Die Funktion
$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$
mit
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$$
besitzt den Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x) = b$.
(3) Die Funktion
$$\tilde{f} \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$
mit
$$\tilde{f}\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$$
und $\tilde{f}(0) = b$ ist stetig.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.26. (3 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

im Punkt $a = 3$ für $\epsilon = \frac{1}{100}$ ein explizites $\delta > 0$ derart, dass aus

$$d(x, a) \leq \delta$$

die Abschätzung

$$d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

folgt.

Aufgabe 10.27. (2 Punkte)

Bestimme, für welche Punkte $x \in \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \leq -1\,, \\ x^2 \text{ für } -1 < x < 2\,, \\ -2x + 7 \text{ für } x \geq 2\,, \end{cases}$$

definierte Funktion stetig ist.

Aufgabe 10.28. (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 10.29. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$b_n = 2a_n^4 - 6a_n^3 + a_n^2 - 5a_n + 3$$

definierten Folge, wobei

$$a_n = \frac{3n^3 - 5n^2 + 7}{4n^3 + 2n - 1}$$

ist.

Aufgabe 10.30. (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x + 3}$$

im Punkt $a = -1$.

Abbildungsverzeichnis