應用力學

目 次

第一部 靜力學

第一章 概論

第二章 同平面同點力

由國家圖書館典藏
國家圖書館數位化

440.1
854

04085 3

第二部 動力學

第十二章 直線運動

第十三章 曲線運動及圓周運動

第十四章 移動,轉動及平面運動

第十五章 力,質量與加速度

第一部　靜力學

第一章　概論

1. 力學之基本概念　力學之基本概念爲質量，空間，時間，運動與力，此項概念在普通力學及物理學中多已論及，今所欲引伸者，厥爲運動與力之意義.

2. 運動　凡物體在空間位置上發生變化者稱爲**運動**. 一切運動均爲相對. 所謂物體之絕對運動，宇宙間實無此種現象，今日所能研究者，僅某一物體對於某一點之運動而已. 此一點，爲研究便利起見，卽暫稱之爲**定點**. 凡一物體對於某一定點而言，若其位置始終不變，則稱爲**靜止**. 例如火車行駛時吾人靜坐車中，對大地而言，固隨火車而成運動，但對車體則仍爲靜止. 故所認定之對象爲動爲靜，皆與本題無關. 吾人通常所稱動靜，概以地球爲標準，然地球在天空中固以極大速率不絕轉動，卽在宇宙間無絕對靜止之物體，其所謂靜止，僅相對於地球而言耳.

3. 力　凡使靜止物體運動，或使其變更運動狀態之作用，統稱爲**力**，或稱**外力**.

力有集中與分佈之分，視其作用之區域而定. 如作用之區域極微小，實可認爲一點者，則稱爲**集中力**，該點則稱爲**施力點**. 通過

此種施力點,沿力所作用方向而作之直線,則稱爲**力之作用線**.

如作用之區域爲一面積,則稱爲**分佈力**.通常分佈力均可假定爲一集中力,作用於該面積之中心.

嚴格言之,宇宙間所有之力,均屬分佈力,並無眞正集中力,所謂施力點,實爲一種理想之點,僅爲研究方便而已.蓋依幾何學之定義,所謂'點'者,其中絕對不含有任何面積之意義,而力學中之施力點,多少常佔有若干面積也.

4. 無向量與有向量　力學中所用數量,大別之可分爲二類:一爲**無向量**,一爲**有向量**,依其是否含有方向之意義而定.

有若干數量僅須舉其單位及大小,其意義卽可明瞭者,如長度,體積,質量,時間,密度,溫度,均稱爲無向量.

長度可用公分或公尺計算,亦可用吋或呎計算.在本書中採用市寸或市尺,簡稱寸或尺,以爲標準,間有採用吋時,亦於本題中特加說明.總之,長度所用單位極關重要,必須註明;其他各種無向量亦然.

體積可用立方公分,立方公尺,立方吋或立方呎計算.本書則用立方市寸或立方市尺,簡稱立方寸或立方尺.

質量所用單位爲公斤,公噸,或磅,噸,本書採用市斤,簡稱斤,有時偶亦採用磅.

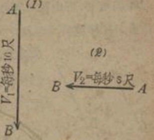
時間之單位爲秒,分或時.

此類數量可按相當比例尺,用不同長度之線表之,惟其方向則不拘定.

其他一類數量不特須知其大小,並須知其方向者,如速度,加速

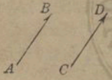
度，力，動量，均稱為有向量.

5. 矢量　有向量可以一定長度及一定方向之直線表之，並於線之一端，用矢頭表明其指向，此種直線稱為**矢量**. 如第1圖中之 AB，(1)表物體以每秒16尺之速度向下運動；(2)表物體以每秒 8 尺之速度向左運動. 此等表示運動之線 AB 即為矢量，而每秒16尺或每秒8尺則為有向量，矢頭在 B 端所以表示該物體係自 A 向 B 運動，或該力係取自 A 至 B 之方向作用. 如矢頭在 A 端，則其指向適相反. 又若有一矢量 CD，其大小，方向及指向均與 AB 相同，如第2圖，則



第1圖

$$CD=AB.$$

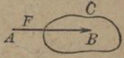


第2圖

矢量如專用以表力之作用線者，則又稱為力線，以資區別.

矢量有時並不須有固定位置，設有甲，乙兩質點，沿平行線依同一方向運動，若兩者於同一時間內行相等距離，則稱其速度相等，固不必問甲在乙先抑在乙後. 易言之，即速度有大小，有方向，但並無位置.

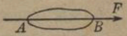
矢量有時並須有固定位置，設有力 F 取 AB 方向作用於某一物體上之 B 點，如第3圖，則吾人對於該力不特能認定其大小及方向，並知其所作用之點，其意義殆可完全明瞭，故力有大小，



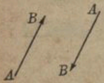
第3圖

有方向，並有位置；動量亦然.

當討論力之問題時，其所作用之點，何以極關重要，可由第4圖說明之. 今有一力 F 沿 AB 線取自 A 至 B 之方向，作用於某一軟性物體，若 A 爲固定點，B 爲作用點，卽施力點，則物體將受 F 力之牽引而伸長；又若 B 爲固定點，A 爲作用點，則物體將受 F 力之擠壓而縮短.



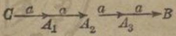
第4圖



第5圖

6. 矢量之正負號　矢量通常均用兩個字母表之，字母之次序卽示其方向. 如第5圖中之 AB，乃示其方向爲自 A 至 B，BA 則表爲自 B 至 A，亦卽兩者方向適爲相反. 倘不欲將字母顚倒，亦可用一負號置字母前，以表其方向相反. 如 BA 可寫爲 $-AB$.

7. 矢量之乘法　矢量若用一正數乘之，則其有向量亦同用該數相乘，且其方向不變. 如第6圖，

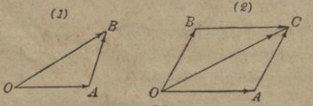


第6圖

$$OA_1+A_1A_2+A_2A_3+A_3B=4\,OA_1=OB,$$

$$a+a+a+a=4a.$$

8. 矢量之加法　若有一物體先自 O 移動至 A，再自 A 移動至

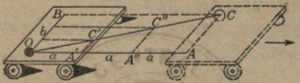


第7圖

B，則其結果與自 O 逕移至 B 相同，如第 7 圖中之(1).

若有一物體自 O 移動至 A，同時在此物體上另有一物體自 O 移動至 B，則後一物體移動之結果將等於自 O 至 C，如第 7 圖中之(2).

試再用圖解證明之. 設有平車以每秒等於 a 之速度沿 OA 向進行，如第 8 圖，同時在平車上有一鉛球，以每秒等於 b 之速度自 O 點



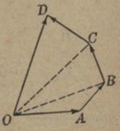
第 8 圖

沿 OB 向推動. 於是在第一秒之末，車上之 O 點將進行至 A' 點，第二秒之末將進行至 A'' 點. 然因球始終與車同行，同時又沿 OB 線推動，故在第一秒之末，球將進行至 C' 點，第二秒之末，將進行至 C'' 點. 用幾何學圖形說明，即球之實在矢量將為 $OACB$ 平行四邊形之對角線 OC. 因得定律如下：

凡求兩矢量之和，可將第二矢量之始端置於第一矢量之終端，再聯結第一矢量之始端與第二矢量之終端即得. 或

$$OA+AB=OB.\ (\text{第 7 圖})$$

同理，設有一羣矢量，欲求其和，可將每一矢量之始端接於前一矢量之終端，而後聯結第一矢量之始端與末一矢量之終端即得. 如第 9 圖，因



第 9 圖

$$OA+AB=OB;$$
$$OB+BC=OC;$$
$$OC+CD=OD;$$
$$\therefore\ OA+AB+BC+CD=OD.$$

此OD稱爲合成矢量.若OD之有向量等於零,易言之,卽O與D相疊合,則此一羣矢量將成一閉合多邊形.

9. **矢量之減法**　如第10圖,OA,OB爲兩矢量,聯結AB.倘將OA之方向顚倒,則依上述定律,可得

$$AO+OB=AB.$$

但　$$AO=-OA,$$

故　$$OB+(-OA)=AB,$$

或　$$OB-OA=AB.$$ 〔見圖(1)〕

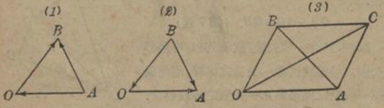
同理,若將OB之方向顚倒,則

$$BO+OA=BA.$$

但　$$BO=-OB,$$

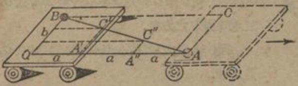
故　$$OA+(-OB)=BA,$$

或　$$OA-OB=BA.$$ 〔見圖(2)〕



第10圖

以上兩式之意義，學者或有未易明瞭，茲再用平車之例以說明之.如第11圖，設有平車以每秒等於a之速度沿OA向進行，同時在平



第11圖

車上有一鉛球以每秒等於b之速度，自B沿BO向推動.於是在第一秒之末，車上之O點將進行至A'點，第二秒之末將進行至A''點.然因球始終與車同行，同時又沿BO向推動，故在第一秒之末，球將進行至C'點，第二秒之末，將進行至C''點.用幾何學圖形說明，卽球之實在矢量將爲$OACB$平行四邊形之對角線BA.因得定律如下：

若有一點A沿OA向運動，同時另有一點B沿BO向運動，則

$$BA=OA-OB$$

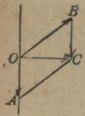
卽表示B點對於A點之相對運動.

綜合以上兩定律觀之，可見若OA,OB兩矢量爲平行四邊形之兩隣邊，則兩對角線OC及BA將各等於$OA+OB$及$OA-OB$〔見第10圖(5)〕.

茲試舉一例於下.

例題1. 今有一河寬1,000尺，水流速度爲每秒2尺.有人欲泅水過河，若其泅水速度爲每秒3尺，試求此人應取何方向泅去，方能直達河之對岸，並求所需之時間.

解　如第12圖，命O爲出發點，矢量OC爲直達對岸之方向，矢



第12圖

量 OA 爲水流之方向,並取 OA 長等於2個單位.以 A 爲圓心,等於3個單位之長爲半徑,作圓弧使交 OC 於 C.自 O 作 OB 矢量令平行於 AC,則 OB 卽爲泅水時應取之方向.

因按矢量之加法,矢量 OC 將爲 OA 與 OB 兩矢量之和.

由圖中量得 $\angle COB=42°$.

又用三角法,得 $\sin COB=\frac{BC}{BO}=\frac{2}{3}$,

故 $\angle COB=41°49'$.

OC 之長爲泅水者每秒所行之實在距離

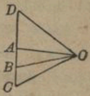
$=\sqrt{5}=2.236$尺,

$\therefore$ 所需之時間 $=\frac{1,000}{2.236}=447$秒.

習題

1. 今有 OA, OB 兩矢量,聯結 A, B. 於 AB 之延長線上取 C 點,使 $AC=2AB$; 又於 BA 之延長線上取 D 點,使 $BD=3BA$, 如第13圖. 試求 OC 及 OD 之表式.

答. $2OB-OA$ 及 $3OA-2OB$.



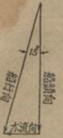
第13圖

2. 今有 A, B 兩列車同時自某一地點以同一方向沿平行路線上出發. A 之速度爲每時40里, B 之速度爲每時50里, 試求 A 對於 B 及 B 對於 A 之相對速度.

答. 每時 -10 里及每時 $+10$ 里.

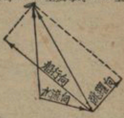
3．今有一船，向正南行駛，水流方向爲正西，兩小時後，船已行36里，其方向則爲西南 15°，如第 14 圖．試求船及水流之速度．

答．每時 17.39 里及每時 4.66 里．



第 14 圖

第 15 圖



第 16 圖

4．有人以每時 5 里之速度向正東步行時，適有風自正北方吹來．若其步行速度加倍，則風又轉向自東北方吹來，如第 15 圖．試求風之實在速度及方向．

答．每時 $3\sqrt{2}$ 或 4.242 里，風向西北．

5．今有一船以每時 16 里之速度向西北方行駛．一水手在船面上以每時 6 里之速度取與船身成垂直之方向跳躍，水流則以每時 7.2 里之速度對東南 15° 方向流動，如第 16 圖．試用圖解法求此水手對於水流之相對速度．

6．今有一列車以每時 50 里之速度向東北 20° 方向行進，另有一列車以每時 22.6 里之速度向正西方行進，又有一第三列車以每時 35.2 里之速度向正南方行進．試用圖解法求第一及第三列車對於第二列車之相對速度．

10．**剛體**　在力學中所討論之物體，大多假定爲一種剛體．所謂剛體，即無論受如何外力，其內部各質點間毫不發生相對運動，易言之，即其形狀及體積毫不發生變化之物體．剛體蓋有別於普通固

體者，即以外力猛加於普通固體上，不僅全體將發生運動，在其內部各質點間之相對位置亦將發生變化；即普通固體受力之作用後，其形狀及體積恆多少發生變化也.

惟宇宙間並無絕對剛體，各種物體皆依其所組成之物質及其他情況而具各各不同之剛性而已.

11. 慣性　運動之物體，常以同一速度成直線運動，是即物體之**慣性**. 故物體必受外力作用，然後其速度或其運動方向始能變更，由是知力之作用能反抗物體之慣性，並變更其運動.

運動物體之慣性，與其質量及速度有關係，同一質量之物體，速度愈大者慣性愈大；同一速度之物體，質量愈大者其慣性亦愈大.

12. 動量　物體質量與速度之相乘積，稱爲此物體之動量. 物體慣性之大小，即由其動量定之. 設有一物體，其質量爲 m，速度爲 v，則其動量爲 mv. 若此物體受外力作用，經 t 秒後其速度變爲 v'，則 t 秒後之動量變爲 mv'，而 t 秒間動量之變化爲 $mv-mv'$. 平均一秒間動量之變化將爲

$$\frac{m(v-v')}{t}.$$

然 $\frac{v-v'}{t}$ 等於加速度 a，故

$$\frac{m(v-v')}{t}=ma=f.$$

即力作用於物體時，其所生動量之變化等於作用力之大小.

13. 牛頓運動定律　自牛頓發見物體運動與構成運動之力之關係，創立三大定律以後，物理學之基礎於焉奠定. 玆再詳述於下：

第一定律　物體不受外力作用時,則靜止者繼續其靜止狀態,運動者繼續以同一速度向同一直線進行.

此定律又謂之慣性定律.

第二定律　物體受力之作用時,於力之方向上生一定加速度,與力之大小成正比例,與物體質量成反比例.

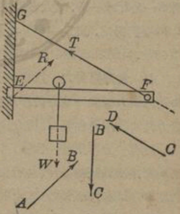
第三定律　凡物體受另一物體之作用時,必生一反作用,其大小相等而方向相反.

14. **力之特性**　綜合前述力之種種情形,可見當力作用於某一物體時,必須具備如下數種重要條件,然後其所生影響,方能完全表現.

(1)大小,　(2)方向,　(3)施力點,　(4)指向.

故力實爲一種有向量,其作用方向,實可用一矢量表之.矢量之長卽表力之大小,矢頭則表力之指向.此類矢量本書特專稱之爲力線,以示專表力之作用線,而與其他矢量有所區別.

力線通常多與力之作用線相疊合,但有時爲作圖便利,亦可作於任何位置,而平行於力之作用線.如第17圖,有一平臂EF,一端鉸釘於牆上,一端則用拉條GF懸弔之,臂上承有一載重W.於是在E端必生有反動力R,在拉條上必生有牽力T,此等力均可用矢



第17圖

量表之，如AB，CD及BC，其方向分別表反動力R，牽力T，及載重W作用之方向，其長度卽分別表此三力之大小.

15. 力之單位　設有某力推動某一物體，吾人雖能藉手臂筋肉感覺，約略辨別力之大小，但其確值終非筋肉感覺所能測知，故必須再藉助於某項器械. 通常所用之測力器械爲彈簧秤與槓桿，此項器械構造，前者係根據彈簧對於張力或壓力之抵抗，後者則根據槓桿原則. 秤上均附有某種單位，用爲測量標準.

因地心對於地面上物體之引力，每依兩者間距離不同而略有變化，故力之單位計分兩種，一爲**絕對單位**，一爲**重力單位**.

絕對單位，在公制中爲達因，卽質量一公分之物體，生一每秒每秒公分之加速度時所作用之力；在英制中爲磅達，卽質量一磅之物體，生一每秒每秒呎之加速度時所作用之力.

重力單位，係以地心引力對於某一選定物體所作用之力爲標準，稱爲一公斤或一磅. 過大者則用一公噸（=1,000公斤）或一噸（=2,240磅）計之. 質量一公分之重力約爲980達因，一磅之重力約爲32磅達. 此值在本書中，爲求適合習慣，並採用市斤，簡稱爲斤.

16. 合力與分力　設有多數之力同作用於一物體，可用適宜方法將此諸力聯成一單力仍作用於該物體，而其所生影響亦仍與原有諸力共同作用者相等，此種方法稱爲力之合成，此單力則稱爲**合力**.

設有一力作用於一物體，可用適宜方法將此作用力分成數力使仍共同作用於該物體，而其所生聯合影響亦仍與原有之力單獨作用者相等，此種方法稱爲力之分解，分得之數力則稱爲**分力**.

用力之分解法，任一力實可分解爲無數之力，但事實上，所分之

力每有定數,並分別指定其大小,或其方向.

17. 平衡力　二個或二個以上之力同作用於一物體,該物體並不發生運動時,此諸力稱爲互相平衡,此時諸力之合力爲零.

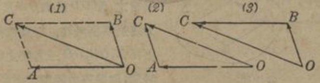
二力平衡時,此二力必須大小相等而方向相反.三力平衡時,其一力與他二力之合力,必須大小相等而方向相反.數力達到平衡時,其中任一力必須與其餘諸力之合力,大小相等而方向相反,此任一力則稱爲平衡力.

由上述定義,關於平衡力與合力之性質務須辨清.

18. 力之合成——力之平行四邊形法　設有二力同作用於一點,若用平行四邊形之兩鄰邊表此二力之大小及其方向,則經過施力點所作之對角線即表此合力之大小及其方向.

此爲有名之平行四邊形定律,其證明如下:

如第 18 圖 (1),命力線 OA, OB 表兩力之作用線,同作用於 O 點.聯成平行四邊形 $OBCA$.於是依前述矢量之加法原則,力線 OC 將爲 OA, OB 兩力線之和,即表該二力之合力.



第 18 圖

上圖兩力線均背施力點作用者,若兩者均向施力點作用,則所得結果亦同.

19. 力之三角形法　前節問題尙可用另一種方法求其結果,此

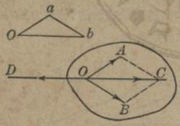
法稱爲力之三角形定律,卽

設命三角形之兩邊依次表二力之大小及其方向,則由第一邊始端至第二邊終端所作之第三邊,將表其合力之大小及方向.

此定律亦係根據矢量之加法原則而得.如第18圖,若將力線OB之始端置於力線OA之終端,如圖(2),則力線OC將爲OA與OB之合力.或將力線OA之始端置於力線OB之終端,如圖(3),結果亦得同樣力線OC.此種圖形稱爲**力之三角形**,又稱爲**力線圖**,在本書中頗居重要地位,學者應特加注意.

苟將上述(2),(3)兩三角形之兩OC線互相疊合,則可構成一平行四邊形$AOBC$,且與圖(1)之平行四邊形$AOBC$完全疊合.故解決力之合成問題,無論用平行四邊形法,或三角形法,所得結果恆同.

20. **力之平衡** 根據以上原則,可見凡兩力OA,OB同時牽引一物體,其結果物體將取OC之方向而運動.如第19圖,倘於此時在O點施一與OC大小相等而方向相反之力OD,則物體將成靜止.易言之,卽OD已與OA及OB兩力達於平衡狀態.在此種情形之下,OA,OB,OD三力線之和將等於零,卽此三力線將依循環次序,成爲三角形之三邊.因得力之平衡定律如下:



第19圖

設有三力同作用於一點,若能用三角形之三邊,依循環次序,分別表此三力大小及其方向,則此三力將成平衡.反之,設三力同作用於一點而成平衡,則其大小及方向可用一三角形之三邊,依循環次

原件缺頁

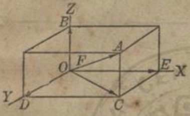
NATIONAL CENTRAL LIBRARY
國家圖書館

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY 國家圖書館

之分力，則任一分力之大小均等於原力大小及原力與該分力交角之餘弦之相乘積.

力學問題中常有涉及三度空間者，此類力之分解，最簡便方法莫如應用縱橫立三軸. 如第24圖，有力 F 作用於 O 點，今欲將其分為三個互成正交之分力. 命 OA 表該力，作 X-X，Y-Y 及 Z-Z 三軸. 於是在 $OCAB$ 垂直面內，OA 可分為 OB 及 OC 兩個互成正交之分力；又在 $ODCE$ 水平面內，OC 可分為 OD 及 OE 兩個互成正交之分力，故 OA 可分為 OB，OD 及 OE 三個互成正交之分力. 各分力與原力之關係有如下式：



第24圖

$$分力\ OB = F_z = F\cos\theta_z;$$

$$分力\ OD = F_y = F\cos\theta_y;$$

$$分力\ OE = F_x = F\cos\theta_x.$$

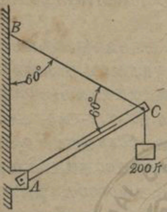
其中 θ_x，θ_y 及 θ_z 為原力與 X-X，Y-Y 及 Z-Z 軸之交角.

習　　題

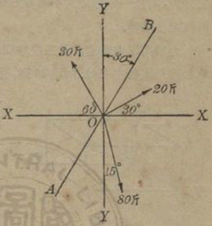
7．今有兩力，其大小各為7斤及3斤，同作用於一物體上. 後者係取水平方向向右作用，前者係取與水平成 $45°$ 之向向左上方作用. 試求其合力大小及方向.

答．大小 $=5.31$ 斤；方向，與3斤之力成 $111°25'$ 之交角.

8．試將第25圖中200斤之載重分成兩個分力：(a)一與 AC 平



第25圖



第26圖

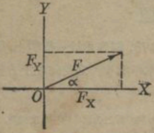
行，一與 AC 垂直；(b) 分別與 AC 及 BC 平行.

9. 今有30斤，20斤及 80 斤之三力同作用於一點，如第 26 圖. 試求諸力沿 AB 線上所分解之分力代數和，假設 OB 方向爲正.

答. -24.2 斤.

10. 在第 27 圖中，命 $F=200$ 斤，$\alpha=20°$. 試求 F_x 及 F_y.

答. $F_x=188$ 斤；$F_y=68.4$ 斤.



第27圖

11. 在前題中，設命 $F=150$ 斤，$\alpha=120°$，試再求 F_x 及 F_y.

答. $F_x=-75$ 斤；$F_y=130$ 斤.

12. 在第 28 圖中，試將 500 斤之力分解爲垂直及水平兩分力.

答. 447 斤；224 斤.

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY
R.O.C.
國家圖書館

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY
國家圖書館

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY
國家圖書館

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY
ROC

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY
國家圖書館

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY
國家圖書館

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY
國家圖書館

R 之方向則由代入下述任一方程式中求之:

$$\cos\alpha_r=\frac{\Sigma F_x}{R},\quad 或\quad \sin\alpha_r=\frac{\Sigma F_y}{R},$$

$$或\quad \tan\alpha_r=\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}.$$

式中 α_r 為 R 之作用線與 X 軸所交之銳角. 合力 R 所在之象限則依 ΣF_x 與 ΣF_y 在坐標軸上之方向而定.

在第 42 圖(c)中, 係以力之多邊形求此合力, 以示由代數法所得結果實與由圖解法求得者完全相同.

32. **代數法中平衡之條件** 設一組之力互成平衡, 則其合力必等於零, 已見前述. 再由上式觀之, 即見若

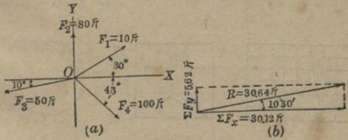
$$R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2}=0,$$

則 $$\Sigma F_x=0,\qquad 又\qquad \Sigma F_y=0.$$

因得代數法中平衡之條件如下:

凡一組同平面同點力成平衡時, 則分解於兩直角坐標軸上之分力之代數和必等於零.

例題 4. 今有 10 斤, 80 斤, 50 斤 及 100 斤諸力同作用於一點,



第43圖

如第 43 圖所示. 試求其合力之大小及方向.

解　每一力均分解爲 x 及 y 兩分力, $F_x=F\cos\alpha$, $F_y=F\sin\alpha$, 則其結果爲:

F	F_x	F_y
10	8.66	5
80	0	80
50	-49.24	-8.68
100	70.70	-70.70
	$\Sigma F_x=+30.12$	$\Sigma F_y=+5.62$

$$R=\sqrt{30.12^2+5.62^2}=\sqrt{938.8}=30.64\text{ 斤},$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}=\tan^{-1}\frac{5.62}{30.12}=10°30'.$$

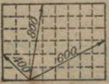
習　題

21. 試求第 44 圖中所示諸力之合力.

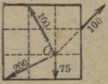
答. $R=1{,}395$ 斤, $\theta=74°$.

22. 第 45 圖示一物體爲四力所作用, 試求此四力之合力.

答. $R=185$ 斤, $\theta=164°40'$.



第 44 圖



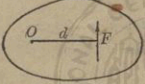
第 45 圖

第 46 圖

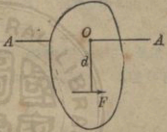
23. 第46圖示一物體爲四力所作用,試求此四力之合力.

答. $R=52.2$ 斤, $\theta=119°50'$.

33. 力矩 設有一力 F 作用於一物體,該物體係在 O 點固定者,如第47圖.於是由 F 力所生之影響,將使物體有繞 O 點轉動之傾向,此種轉動傾向,依 F 之大小及其作用線與 O 點之垂直距離 d 而定,其實值等於 F 與 d 之相乘積.此乘積數稱爲 F 力對於 O 點之**力矩**. O 點稱爲**力矩中心**, d 稱爲**力臂**.



第47圖



第48圖

若自某剛體之 O 點穿一軸 $A-A$,將此物體支持於 $A-A$ 軸上,如第48圖,並使可以自由轉動.今若在物體上施以 F 力,則物體將取反時針向繞 $A-A$ 軸轉動,此種轉動傾向,亦依 F 力之大小及其作用線與 $A-A$ 軸之垂直距離 d 而定,其實值等於 F 與 d 之相乘積. $A-A$ 軸稱爲**力矩軸**.

綜合上述兩種情形,可見 F 力對於力矩中心 O 之力矩,實與該力對於力矩軸 $A-A$ 之力矩相同.

34. 力矩之單位 設 F 以斤或磅計算, d 以寸,尺,或吋,呎計算,則力矩當以寸斤,尺斤,或吋磅,呎磅計算.

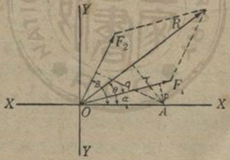
35. 力矩之正負號 凡轉動傾向係順時針向，則力矩之符號爲正；反之，符號爲負. 惟此僅屬一般慣例，亦有以順時針向之力矩爲負者，固未可厚非. 但無論依何種慣例，解决問題時必須始終認定一種，方不紊淆.

36. 力矩原理——瓦銳蘭氏學說 設 F_1, F_2 爲兩個同點力，R 爲其合力，A 爲其作用平面內之任一點，如第 49 圖.

作 $X-X, Y-Y$ 兩直角坐標軸，命 α, β 及 θ 各爲 F_1, F_2 及 R 交 X 軸之角. 由 A 作垂直於 F_1, F_2 及 R 諸線，並命此垂直距離各爲 p, q 及 r.

於是 $p=OA\sin\alpha,\quad q=OA\sin\beta,\quad r=OA\sin\theta.$

由第 31 節， $\Sigma F_y=F_1\sin\alpha+F_2\sin\beta=R\sin\theta.$



第 49 圖

各以 OA 乘之，得

$$F_1(OA\sin\alpha)+F_2(OA\sin\beta)=R(OA\sin\theta),$$

$$\therefore \quad F_1p \quad + \quad F_2q \quad = \quad Rr.$$

因得力矩之原理如下：

任何兩同點力對於其作用平面內任一點之力矩之代數和，卽等於其合力對於該點之力矩.

反之，若將 R 分解爲兩個分力 F_1 及 F_2，依同一原理，合力 R 之力矩等於其兩個分力 F_1 及 F_2 之力矩之代數和.

解決力學問題時，如將某一力先分解爲兩個分力，而求得其力矩之代數和，當較直接求得該力之力矩爲簡易.

上述原理對於兩個以上之同點力亦適用之，卽

凡一組同平面同點力對於該平面內任一點之力矩之代數和，卽等於其合力對於該點之力矩.

此原理爲瓦鋭蘭氏所建立，故又稱爲瓦鋭蘭氏學說.

37. 力矩法中平衡之條件 由此原理，因又得力矩法中平衡之條件如下：

凡一組同平面同點力成平衡時，則諸力對於任何垂直於作用平面之力矩軸之力矩，其代數和必等於零. 若以方程式表之，卽

$$\Sigma M = 0.$$

習題

24. 在第 44 圖中，試求各力對於長方形之上左角 O 之力矩.

答. 600 斤之力矩 $= -3,756$ 尺斤；
800 斤之力矩 $= -2,365$ 尺斤；
400 斤之力矩 $= +1,131$ 尺斤.

25. 在上題中，試求合力對於該點之力矩；並用上題中所得諸力矩之代數和加以覆核.

答. $-4,990$ 尺斤.

38. 問題之解法 關於一組同平面同點力成平衡時,其必須具備之種種條件,玆再綜述於下:

(1) 所有表諸力之多邊形必成閉合,或矢量和$=0$.

(2) $\Sigma F_x=0$.

(3) $\Sigma F_y=0$.

(4) $\Sigma M=0$.

大凡解決此種力學問題,其中必有若干力之大小及方向均爲已知,另有一二力之大小或方向爲未知,而爲所欲求得者.惟可以解決之問題,其未知元素僅能限於兩個,倘在兩個以上,則問題將成爲不確定,而無從索解.此兩未知元素不外下列數項之一:

(1) 任一力之大小及方向;

(2) 任一力之大小及他一力之方向;

(3) 任兩力之方向;

(4) 任兩力之大小.

概言之,設n爲作用於某一點之力數,欲詳述諸力如何作用之情形,必須知其$2n$個事實,即n個大小與n個方向.若僅知其$(2n-2)$個事實,問題之解決尙屬可能,如所知少於此數,則不能解決.

研究此等問題,第一步須作一略圖,稱爲位置圖,表明所有已知之力及其作用線,由圖中求得何力之大小或方向爲未知,而後決定該問題是否可解.其可解者,則就所有已知事實,按圖解法,或代數法,或力矩法,以求得所有未知之事實.玆再分別述明於下.

39. 兩個以上之力之平衡——圖解法 根據第30節所述,凡一組同平面同點力成平衡時,表諸力之多邊形必成閉合,易言之,即

多邊形中末一力線之終端必與第一力線之始端相疊合.故若一組之力作用於同一平面內之某一點而成平衡時,如其中僅有

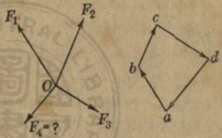
(1) 某力之大小及方向未知,或

(2) 某力之大小及另一力之方向未知,或

(3) 某兩力之方向未知,或

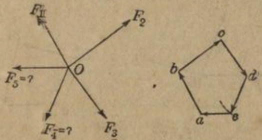
(4) 某兩力之大小未知,均可依下法解決之.

(1) 將所有已知諸力,按某一比例尺,順次以力線表之(如第50圖中之$abcd$),而後聯結末一力線之終端(如d),與第一力線之始端(如a),使成一閉合多邊形,則此閉合線(da)即示所求力之大小及方向,其大小可按同一比例尺量得之.



第50圖

(2) 將所有已知諸力,按某一比例尺,順次以力線表之(如第51圖中之$abcd$),而後自第一力線之始端作一線(ae),與已知方向未知大小之力(F_5)平行,再以



第51圖

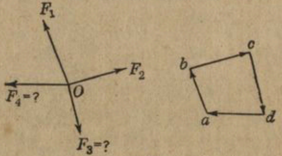
末一力線之終端(d)爲圓心，以他一未知元素(F_4)之大小爲半徑，作一圓弧，使與前一平行線相交於某點(e). 聯結此交點(e)與末一力線之終點(d)，則此兩閉合線即表所求之力.

(3) 將所有已知諸力，按某一比例尺，順次以力線表之(如第52圖中之 $abcd$)，而後分別以第一力線之始端及末一力線之終端爲圓

第52圖

心，以等於兩未知元素之大小爲半徑，作二圓弧，使相交於某點. 聯結此交點與兩圓心，則此兩閉合線即表所求力之方向.

(4) 將所有已知諸力，按某一比例尺，順次以力線表之(如第53圖中之 $abcd$)，而後自第一力線之始端及末一力線之終端，分別作兩



第53圖

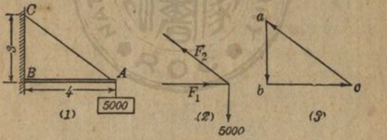
直線與兩未知元素平行，使完成一多邊形，則此兩閉合線即表所求兩力之大小.

如作用力僅有三個，則在此種特殊情况下，可依下述原則求其解答：

設有三個非平行之力同作用於一物體而成平衡，則此諸力必相遇於一共同點.

因若將其中任何二力結成一合力時，此合力之作用線必通過原有二作用線之交點. 今欲再加入一第三力，使與此合力成平衡(亦即與原有二力成平衡)，則此第三力必與合力之大小相等而方向相反，易言之，即第三力之作用線必通過原有二作用線之交點.

例題 5. 今有 AB, AC 兩牽桿，其一端 B, C 各固定於牆上，另一端 A 則懸有一 5,000 斤之載重(第 54 圖). 試求此兩桿內之應力.



第 54 圖

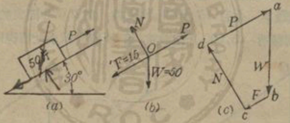
解 在本題中，共有三力同作用於 A 點而成平衡，即5,000斤之載重，及牽桿 AB, AC 之應力 F_1, F_2. 由圖形所示，可見牽桿 AC 之應力係屬張力，牽桿 AB 之應力則屬壓力；亦即 AC 桿在 A 點將發生一種牽力，而 AB 桿在 A 點將發生一種推力. 此二力之方向雖爲已

知，但其大小則均爲未知．故本題所欲解求者爲 F_1 與 F_2 二力之大小．

今因三力互成平衡，故可用力之三角形表其作用．如圖(3)，按某一比例尺，作力線 ab，使等於且平行於 5,000 斤之力．自 b 作平行於 F_1 之力線 bc，又自 a 作平行於 F_2 之力線 ac，交 bc 於 c．於是 bc 及 ca 可分別按同一比例尺，表 F_1 與 F_2 之大小．

由圖中量得 $bc=6,660$ 斤，$ca=8,330$ 斤．

例題 6． 有一方塊石，重 50 斤，置於與水平成 30° 傾角之斜面上，如第 55 圖 (a)．設斜面對於運動之摩擦力爲 15 斤，今欲將石塊以等速度向斜面上推動，則與斜面平行之推力 P 應爲若干？



第 55 圖

解 在本題中，作用於石塊之力，計有(1)石塊本身之重量 $W=50$ 斤，係垂直向下作用者；(2)斜面之反動力，此種反動力又可分解爲兩分力：一與斜面平行，卽斜面之摩擦力 $F=15$ 斤，係向下作用者，一與斜面成垂直，係向上作用者，其大小假定爲 N；(3)卽爲所求與斜面成平行之推力 P，見圖(b)．綜計以上諸力，所求者爲 P 與 N 之大小．

今因物體係向上成等速運動，故諸力係在平衡中，按圖解所示，

則表此諸力之力線應聯成一閉合多邊形.作力線 ab,按某一比例尺,使等於並平行於 W. 由 b 作力線 bc,使按同一比例尺,等於並平行於 F. 由 c 作力線 cd 平行於 N,又由 a 作力線 ad 平行於 P,使與 cd 相交於 d. 於是 cd 及 da 將分別表示 N 及 P 二力之大小.

由圖中量得　　$N=43.3$ 斤,　　$P=40$ 斤.

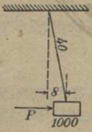
習　　題

26. 在例題 6 中,若欲將該石塊以等速度在斜面上向下推動,試求推力 P 之大小.

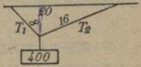
答. $P=10$ 斤.

27. 有一重 1,000 斤之物體,用 40 尺長之鋼繩懸之.今欲將該物體向外推動,使與由頂點所引之垂直線成 8 尺之距離,如第 56 圖.試求所需水平推力 P 之大小及鋼繩之張力.

答. 204 斤; 1,020 斤.



第56圖



第57圖

28. 有一重 400 斤物體用鋼繩兩根繫之,如第 57 圖.鋼繩一長 8 尺,一長 16 尺,兩端相距 20 尺.試求鋼繩之張力 T_1 及 T_2.

答. $T_1=390$ 斤; $T_2=273$ 斤.

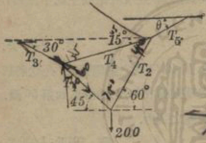
29．試求第 58 圖中所示各繩張力及 θ 角之值．

答．$T_1=103.5$ 斤；$T_2=146$ 斤；$T_3=127$ 斤；

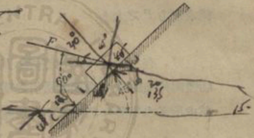
$T_4=98$ 斤；　$T_5=175$ 斤．$\theta=51°10'$．

30．有一重 200 斤之方形物體置於與水平成 45° 傾角之光滑面上，如第 59 圖（所謂光滑面，即對於物體之運動並不發生絲毫摩擦力之理想平面）．今若用力 F 取與斜面成 60° 角之方向，支持物體使不滑下，試求此 F 力之大小．

答．280 斤．



第 58 圖



第 59 圖

31．若上題中，F 力之大小等於 200 斤，欲使物體不滑下，則 F 之作用線與斜面所交之角應如何？

答．45°．

40．兩個以上之力之平衡——三角法　有若干問題，倘以力之多邊形表所有已知及未知之力，每發見此種三角或幾何關係比較簡單，則解法自以用三角法爲最適宜．例如在例題 5 中，因力之三角形 abc 與三角形 CBA 相似，故

$$ac : ab = CA : CB,$$

又

$$bc : ab = BA : CB.$$

但 CB, BA 與 CA 係成 3, 4, 5 之比.

$$\therefore \quad F_2 : 5,000 = 5 : 3,$$

$$F_2 = \frac{25,000}{3} = 8,333 \text{ 斤}.$$

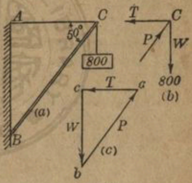
又

$$F_1 : 5,000 = 4 : 3,$$

$$F_1 = \frac{20,000}{3} = 6,667 \text{ 斤}.$$

試再舉數例以明之.

例題 7. 以一水平鋼繩 AC 繫一牽桿 BC, 如第 60 圖, 其 ACB 角等於 50°. 今若在 C 端懸一 800 斤重之物體, 則牽桿及鋼繩之應力應各爲若干?



第 60 圖

解 第 60 圖(b)示諸力作用之情形, 其中 W 爲載重, P 爲牽桿之推力, T 爲鋼繩之牽力.

作力之三角形 abc, 如圖(c). 因各力線分別與三角形 ABC 中各邊平行, 故

$$\angle cab = 50°, \quad \text{又} \quad \angle cba = 40°.$$

於是

$$\frac{T}{\sin 40°} = \frac{P}{\sin 90°} = \frac{W}{\sin 50°},$$

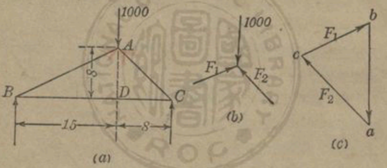
$$\frac{T}{0.643} = \frac{P}{1} = \frac{800}{0.766}.$$

$$\therefore\quad T=\frac{800\times0.643}{0.766}=671\text{ 斤};$$

$$P=\frac{800}{0.766}=1{,}044\text{ 斤}.$$

例題 8. 今有一三角形框架 ABC，如第 61 圖，在其 A 端受有 1,000 斤之載重，試求 AB 及 AC 兩部材之應力.

解 在本題中，共有三力同作用於 A 點而成平衡，卽 1,000 斤之垂直力，與 AB，AC 兩部材之應力 F_1，F_2，如圖(b)所示.



第61圖

作力線 ba，等於並平行於 1,000 斤之載重，自 a 作力線 ac 平行於 F_2，自 b 作力線 bc 平行於 F_1. 因三力係成平衡，於是 bac 三角形中三力線之方向，必依循環次序，卽 F_2 之方向應自 a 至 c，F_1 之方向應自 c 至 b，故 F_1 及 F_2 均為壓力.

又由圖示尺寸，算得

$$\angle BAD=61^\circ56',\quad \angle CAD=45^\circ.$$

$\therefore\quad \angle a=45^\circ,$

$\angle b=61^\circ 56',$

$\angle c=73^\circ 4'.$

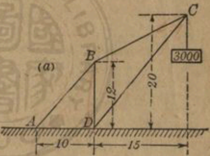
於是　　$1,000 : F_1=\sin c : \sin a,$

$F_1=739$ 斤(壓力).

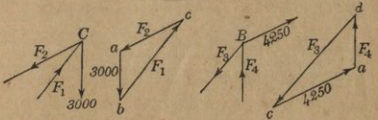
又　　$1,000 : F_2=\sin c : \sin b,$

$F_2=922$ 斤(壓力).

例題 9. 今用一起重機,如第 32 圖,舉起一 3,000 斤重之物體.試求機臂 CD,繫柱 BC,桅竿 BD 及繫柱 AB 之應力.



解 在本題中,僅有一力爲已知,其他四個力均爲未知,其情形似較前述諸題爲複雜.實則細加分析,解決並不困難.蓋在此種構架中,所有作用於 B, C, D 諸點之力均成平衡.故若就此



(b)　(c)　(d)　(e)

第 32 圖

諸點分別研究，將見作用於每一點上之力均有三個．例如作用於 C 點之三力中，如圖(b)，已知一力之方向及大小，及他二力之方向，則各未知元素，自可由此推求，現即以此點爲起始．

如圖(c)，命力線 ab 表 3,000 斤之力，ac 表 BC 之應力 F_2，bc 表 CD 之應力 F_1．聯成力之三角形 abc．由此三角形中，可見 CD 之應力爲壓力，BC 之應力爲張力．

又由圖示尺寸，算得 CD 等於 25 尺，BC 等於 17 尺．

於是由 abc，BDC 兩相似三角形，得

$$F_1 : 3,000 = 25 : 12,$$

$$\therefore\quad F_1 = 6,250 \text{ 斤}(CD \text{ 之應力}).$$

又 $$F_2 : 3,000 = 17 : 12,$$

$$\therefore\quad F_2 = 4,250 \text{ 斤}(BC \text{ 之應力}).$$

BC 之應力既經求得，則作用於 B 點之三力中，如圖(d)，已知一力之大小及方向，及他兩力之方向，仍用三角形法，如圖(e)，命 F_3 及 F_4 各表 AB 及 BD 之應力．由此三角形中，可見 AB 之應力爲張力，BD 之應力爲壓力．

又由圖中，算得

$$\angle ABD = 39°48',$$

$$\angle CBD = 118°4'.$$

於是在 cad 三角形中，

$$\angle d = 39°48',$$

$$\angle a = 118°4',$$

$$\angle c = 22°8'.$$

$\therefore \quad F_3 : 4,250 = \sin a : \sin d,$

$F_3 = 5,859$ 斤(AB 之應力).

又　$F_4 : 4,250 = \sin c : \sin d,$

$\therefore \quad F_4 = 2,502$ 斤(BD 之應力).

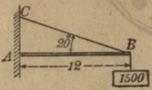
習　　題

32. 有一長 12 尺之水平桼桿 AB, 用一鋼繩 CB 繫之, 如第 63 圖, ABC 角等於 20°. 今若於桿之 B 端, 懸一 1,500 斤之重量, 桼桿本身重量不計, 試求此桼桿之壓力 P 及鋼繩之張力 T.

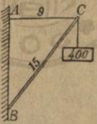
答. $P=4,120$ 斤; $T=4,385$ 斤.

33. 有一桼桿 BC, 長 15 尺, 用一 9 尺長之水平鋼繩 AC 繫之, 如第 64 圖. 今若在桿之 C 端懸一 400 斤重物體, 則桼桿及鋼繩之應力應各為若干?

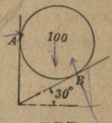
答. 500 斤及 300 斤.



第63圖



第64圖



第65圖

34. 以重 100 斤之圓筒置於一 60° 之槽中, 如第 65 圖. 試求圓筒與槽面之接觸點 A 及 B 之反動力, 假定此兩反動力係與接觸面互成垂直.

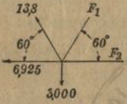
答. 57.7 斤及 115.5 斤.

35. 用20尺長鋼繩懸一3,000斤之物體. 今欲用一水平力將物體向外推動，使與由頂點所引之垂直線成4尺之距離. 試求此水平力之大小及鋼繩之張力.

答. 612斤; 3,050斤.

36. 一物體爲五個同點力所作用而成平衡，如第66圖. 試求 F_1 及 F_2 之大小與方向.

答. $F_1=10,283$ 斤，向內；$F_2=19,043$ 斤，向外.



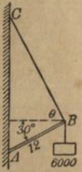
第66圖

37. 有一長12尺之牽桿 AB，用一鋼繩 CB 繫之，如第67圖，牽桿與水平之交角等於30°. 今若在 B 端懸一6,000斤重之物體，試求此鋼繩應與水平成何角度，方能使鋼繩之張力爲最小？又最小張力爲若干？若鋼繩改成水平，則其張力爲若干？

答. $\theta=60°$; 5,200斤. 10,400斤.

38. 在第33題中，設將400斤載重改爲400斤之牽力，可以在 ABC 垂直面內繞 C 點自由轉動者. 試證若此牽力之方向成垂直時，將使 BC 之壓力爲最大. 如欲使 AC 之張力爲一最大值，則牽力之方向如何？試求此最大張力及 BC 之相當壓力.

答. 垂直於 BC. $AC=500$ 斤; $BC=300$ 斤.



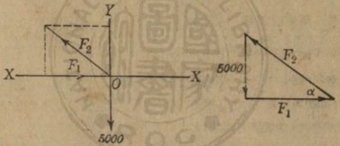
第67圖

41. 兩個以上之力之平衡——代數法 前已論及，凡一組同平面同點力，若 $\Sigma F_x=0$，又 $\Sigma F_y=0$，則其合力 R 亦必等於零，而此一組之力必成平衡.

反之，若一組同平面同點力係成平衡，則其合力 R 必等於零；因之，$\Sigma F_x=0$，又 $\Sigma F_y=0$.

在此種狀況下，可得兩個獨立方程式，由此可以求得兩個未知元素，然亦僅限於兩未知元素．關於此兩未知元素，大多爲其中任何兩力之大小，方向則爲已知；又若其中僅一力之大小及方向爲未知，亦可用同式求得．至若 X-X，Y-Y 兩軸之方向，可無需注意，且此兩軸可互相交成任何角度．

例如在例題 5 中，F_1，F_2 與 5,000 斤三力係成平衡，故 $\Sigma F_x=0$，又 $\Sigma F_y=0$.



第 68 圖

今　$\sin\alpha=\frac{3}{5}=0.6$，又 $\cos\alpha=\frac{4}{5}=0.8$．（第 68 圖）

$$\Sigma F_x=F_1-F_2\cos\alpha=F_1-0.8\,F_2=0;$$

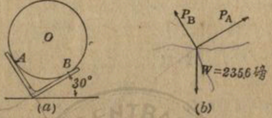
又　$$\Sigma F_y=F_2\sin\alpha-5,000=0.6\,F_2-5,000=0.$$

由後一式，得　$0.6F_2=5,000$，　$\therefore\ F_2=8,333$ 斤．

由前一式，得　$F_1=0.8\times 8,333=6,667$ 斤．

試再舉一例說明於下：

例題 10. 有直徑 1 呎之鑄鐵球置於 8 吋 × 8 吋之角鐵上，角鐵之一邊與水平成 30° 之角，如第 69 圖(a). 試求在 A,B 兩接觸點之壓力應各爲若干？



第 69 圖

解　鐵球之體積 $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times\pi\times\frac{1}{8}=0.5236$ 立方呎.

鐵球之重量 $=0.5236\times 450=235.6$ 磅.

第 69 圖(b) 示諸力作用之情形. 今因鐵球在角鐵內並無運動趨向，故角鐵對於鐵球之反動力，在 A,B 兩接觸點，必與其表面成垂直. 此種反動力在圖中特用 P_A 及 P_B 表之.

今若將此諸力各分成水平及垂直二分力，則在 $\Sigma F_H=0$ 及 $\Sigma F_V=0$ 兩式中，每式含有兩個未知數，須用二元一次方程式以求其解. (ΣF_H 表在縱橫兩坐標軸中，所有水平分力之代數和；ΣF_V 表所有垂直分力之代數和.)

但若將此諸力各分爲與 P_A 成垂直及平行之分力，則在 $\Sigma F_x=0$, 及 $\Sigma F_y=0$ 兩式中，每式僅含有一個未知數，此值可立即求得.

$$\Sigma F_x=P_A-W\sin 30^\circ=0,$$

$$\therefore\quad P_A=W\sin 30^\circ=235.6\times 0.5=117.8\ \text{磅}.$$

又 $$\Sigma F_y = P_B - W\cos 30° = 0,$$

$$\therefore\quad P_B = W\cos 30° = 204 \text{ 磅}.$$

習 題

39. 在例題 10 中，設將角鐵轉動，至 B 邊與水平成 15° 之角。試再求 A, B 兩接觸點之壓力.

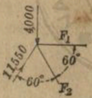
答. A = 61 磅; B = 227.5 磅.

40. 第 70 圖示一組之力係成平衡. 試求 F_1 及 F_2 二力.

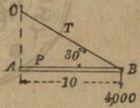
答. 9,240 斤, 壓力; 6,930 斤, 張力.

41. 有桿 AB 用鋼繩 CB 繫之，如第 71 圖，CBA 角等於 30°. 今在 B 端懸一重 4,000 斤之物體，試求其壓力 P 及張力 T.

答. P = 6,928 斤; T = 8,000 斤.



第 70 圖



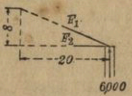
第 71 圖

42. 第 72 圖示一屋架之右端，支點之垂直反動力為 6,000 斤. 試求 F_1 及 F_2 之應力.

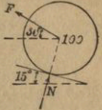
答. F_1 = 16,160 斤, 壓力;

F_2 = 15,000 斤, 張力.

43. 有一鐵輪重 100 斤，置於一傾斜 15° 之平面上，如第 73 圖. 今用一與水平成 30° 角之力 F 支持之，使成平衡，假定其反動力 N



第 72 圖



第 73 圖

係垂直於平面，試求 F 及 N 兩力之大小.

答. 26.8 斤; 89.7 斤.

42. 兩個以上之力之平衡——力矩法 凡一組同平面同點力成平衡時，其合力必等於零，因之，R 如以任何力臂相乘，其結果必仍等於零. 易言之，即 R 繞該作用面上任何點之力矩必等於零. 但合力 R 之力矩實等於該組力中各個力矩之代數和，今 R 之力矩既等於零，則各個力矩之代數和亦必等於零無疑.

由上推論，可知在此一組平衡力中，若僅有兩力之大小為未知元素，則可用力矩法以求得之. 首就任一未知力之作用線上，任擇一點為力矩中心（惟不可用該同點，否則各個力矩均等於零）. 於是此未知力繞該力矩中心之力矩將等於零，則在方程式 $\Sigma M_0=0$ 中，僅餘一個未知元素，自易解決.

其次，再用同法以求他一未知元素，惟此第二力矩中心仍須避免在通過前一力矩中心及該同點之直線上，否則所得方程式將與上述相似，問題仍無從解決. 關於此類力矩中心，倘所擇位置並不在任一未知力之作用線上，則力矩方程式必將含有兩個未知元素，而須再另求一獨立方程式. 玆舉一例於下.

例如在例題5中，設以 B 爲力矩中心，此 F_2 之力臂由圖中量得爲2.4尺.

F_1，F_2 與5,000斤諸力繞 B 點之力矩代數和爲

$$\Sigma M_B = F_1 \times 0 + 5{,}000 \times 4 - F_2 \times 2.4 = 0,$$

$$\therefore\quad F_2 = \frac{20{,}000}{2.4} = 8{,}333 \text{ 斤}.$$

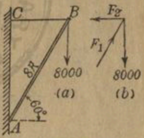
再以 C 爲力矩中心，於是諸力繞 C 點之力矩代數和爲

$$\Sigma M_C = 5{,}000 \times 4 - F_1 \times 3 - F_2 \times 0 = 0,$$

$$\therefore\quad F_1 = \frac{20{,}000}{3} = 6{,}667 \text{ 斤}.$$

試再舉一例於下:

例題11. 有鋼纜 CB 繫一桼桿 AB，如第74圖，鋼纜係成水平，桼桿則與水平成 60° 之角. 若在 B 端懸一8,000斤之物體，試求 AB 及 CB 之應力.



第74圖

解 諸力作用之情形如圖(b)所示.

CB 距離 $= 8 \times \sin 30^\circ$

$= 8 \times 0.5 = 4$ 尺;

AC 距離 $= 8 \times \sin 60^\circ$

$= 8 \times 0.866 = 6.93$ 尺.

又 C 與 AB 之垂直距離 $= 4 \times 0.866 = 3.46$ 尺.

今設以 A 爲力矩中心，此諸力繞 A 點之力矩代數和爲

$$\Sigma M_A = 8{,}000 \times 4 - F_1 \times 0 - F_2 \times 6.93 = 0,$$

$$\therefore\quad F_2 = \frac{32{,}000}{6.93} = 4{,}620 \text{ 斤}.$$

再以 C 爲力矩中心，於是

$$\Sigma M_C = 8,000\times 4 - F_1\times 3.46 - F_2\times 0 = 0,$$

$$\therefore\quad F_1 = \frac{32,000}{3.46} = 9,240\ 斤.$$

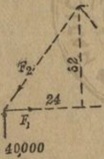
習 題

44. 在例題11中，若8,000斤之力係作用於 ABC 平面內與 AB 成 $45°$ 角之方向，試求 AB 及 BC 之應力。

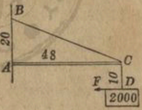
答. $AB=8,930$ 斤; $CB=6,530$ 斤.

45. 第75圖示某一橋架之左端第一節梁. 試計算 F_1 及 F_2 二應力.

答. $F_1=30,000$ 斤; $F_2=50,000$ 斤.



第75圖



第76圖

46. 設有一牽桿長48尺，一端懸一2,000斤之物體，如第76圖. 試求 AC 及 BC 之應力.

答. $AC=4,800$ 斤; $BC=5,200$ 斤.

47. 在第76圖中，倘在 D 點用一水平力 F 將該物體向左牽動1尺之水平距離，試求 F 力之大小，及 CD, AC 與 BC 之應力.

答. $F=872$ 斤; $CD=2,180$ 斤;
$AC=5,572$ 斤; $BC=5,200$ 斤.

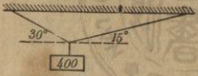
總習題

48. 用兩繩支持一重 400 斤之物體,一繩與水平成 30° 之角,另一與水平成 15° 之角,如第 77 圖.試求兩繩之張力.

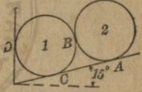
答. 546 斤; 490 斤.

49. 在第 78 圖中,1 號圓筒重 1,600 斤,2 號圓筒重 1,000 斤.試求 A,B,C 及 D 諸點之反動力.

答. $A=966$ 斤; $B=259$ 斤;
$C=1,724$ 斤; $D=398$ 斤.



第 77 圖



第 78 圖

50. 試求下列諸力合力之大小及方向:

$F_1=100$ 斤, $\alpha_1=30°$; $F_2=200$ 斤, $\alpha_2=90°$; $F_3=400$ 斤, $\alpha_3=180°$; $F_4=500$ 斤, $\alpha_4=255°$; $F_5=300$ 斤, $\alpha_5=315°$.

答. 501 斤, 242°35′.

51. 在第 49 題中,命 1 號圓筒之直徑爲 12 寸,2 號圓筒之直徑爲 18 寸.試求 A,B,C 及 D 諸點之反動力.

答. $A=913$ 斤; $B=264$ 斤;
$C=1,779$ 斤; $D=693$ 斤.

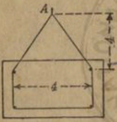
國立中央圖書館藏書

52. 一像框重 50 斤，四邊各釘一螺絲圈，今用一練索穿過各螺絲圈將像框懸於 A 處之掛鉤上，如第 79 圖. 試求此練索之張力及各螺絲圈上之合力.

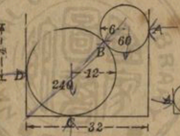
答. 28 斤. 上邊螺絲圈，12.85 斤，與水平成 13°20′ 角；
下邊螺絲圈，39.6 斤，與水平成 45° 角.

53. 第 80 圖示兩圓筒裝置在一方箱內. 試求 A, B, C 及 D 諸點之反動力.

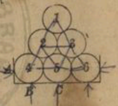
答. A－74.2 斤；B－95.5 斤；
C－300 斤；D－74.2 斤.



第 79 圖



第 80 圖



第 81 圖

54. 設以大小相等之六個圓筒堆成如第 81 圖之形狀，1, 2 及 3 號圓筒各重 800 斤，4, 5 及 6 號圓筒各重 1,000 斤. 試求 A, B 及 C 點之反動力.

答. A－462 斤；B－1,800 斤；C－1,800 斤.

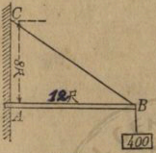
55. 用兩繩懸一 100 斤之物體，其一繩與水平成 60° 之角，已知其應力為 80 斤. 試求他一繩之應力，及其與水平所交之角.

答. 50.4 斤，27°30′.

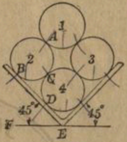
56. 今有 12 尺長之水平桿 AB，A 端鉸釘於牆上，B 端則用一

鋼繩 CB 繫之，如第 82 圖．若在 B 端懸一 400 斤之物體，試求鋼繩之張力及水平桿之壓力．

答．721 斤；600 斤．



第 82 圖



第 83 圖

57．在第 56 題中，若 400 斤之物體其方向係向外側，而與垂直線成 30° 之角，試再求此鋼繩之張力及水平桿之壓力．

答．625 斤；320 斤．

58．今以大小相等，各重 1,000 斤之四個圓筒，堆成如第 83 圖之形狀，試求 A, B, C 及 D 各點之壓力．

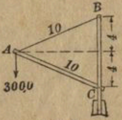
答．A－707 斤；B－1,414 斤；
C－707 斤；D－1,414 斤．

59．若將第 83 圖之角鐵向右移動，使 DEF 變成 70° 之角，試再求各點之壓力．

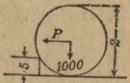
答．A－342 斤；B－684 斤；
C－940 斤；D－684 斤．

60．第 84 圖示一簡單起重機．試求 AB 及 AC 之應力．

答．AB－3,750 斤，張力；
AC－3,750 斤，壓力．



第84圖



第85圖

61. 假定在上題中 3,000 斤之物體可以轉動於通過 AC 之垂直面內，試求鋼繩 AB 內可以生成之最大應力，及牽桿 AC 內之相當應力.

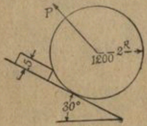
答. $AB=4{,}090$ 斤；$AC=2{,}780$ 斤.

62. 在第 81 圖中，若將 1,2 兩號圓筒移去，則 A, B 及 C 之反動力應各為若干?

答. $A=231$ 斤；$B=1{,}000$ 斤；$C=1{,}400$ 斤.

63. 直徑 2 尺之輪，上載1,000 斤重量，如第85圖所示. 今若於輪前置一 0.5 尺高之障礙物阻擋之，試求在輪軸上應施以若干水平力 P，方能使此輪越過障礙物向前行動? 設輪之直徑為 4 尺，則所需水平力 P 應為若干?

答. 1,732 斤. 882 斤.

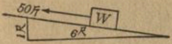


第86圖

64. 在第 86 圖中所示之輪前置有一 0.5 尺高之木塊，今若用力將輪拽過，試求此最小牽力 P 之大小及其方向.

答. $P=1{,}136$ 斤，$\theta=71°27'$

65. 在第 87 圖中，物體 W 置於 AB 光滑面上，受 50 斤之力所牽動. 若此牽力係與 AB 面平行，試求 W 之重量. 若牽力係成水平，試求其所能牽動之重量.



第 87 圖

答. 304 斤. 300 斤.

NATIONAL CENTRAL LIBRARY 國家圖書館 ROC

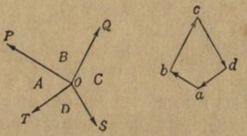
第三章　同平面平行力

43. 位置圖與力線圖——波氏記號法　解決力學問題，常有圖解一法可以應用．關於圖解法，不外兩種圖形之研究，卽位置圖與力線圖．在位置圖中，各線僅表明力之作用方向；而在力線圖中，各線則表明作用於位置圖中相當點之力之大小．

例如在例題 5 之第 54 圖中，圖（2）卽稱爲位置圖，示 F_1，F_2 及 5,000 斤之力共同作用於 A 點之情形，圖（3）則稱爲力線圖，圖中之 bc，ca 及 ab 諸力線係同按某一比例尺分別表此 F_1，F_2 及 5,000 斤之力之大小．

兩圖性質旣有不同，故記號方法亦應互異：在位置圖中，所有作用諸力常分別以 F_1，F_2，……，或 P_1，P_2，……，或 P，Q，R 等號稱之；在力線圖中，則分別以 ab，bc，……，mn 等號稱之．惟此種記號法，在簡單情形，作用力僅有三數個者，尙稱便利，但遇有數個以上之力，其情形複雜時，記號繁多，辨別頗屬不易．嗣由波氏發明一種簡單記號法，採取適宜之羅馬字母，通用於位置及力線二圖中，惟其意義則顯然有別．玆舉一例以明其大概．

設有 P，Q，S，T 四力同作用於一點 O 而成平衡，如第 88 圖．今不用 P，Q，S，T 四字表此四力，而用大寫羅馬字母置於力之作用線之兩側，易言之，卽在每兩作用線之空間各置一字母，其次序順時針



(a) 位置圖　　(b) 力綫圖

第88圖

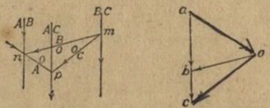
向.例如在 T,P 兩力之空間置一 A 字,P,Q 兩力之空間置一 B 字.於是凡表明 P 力時,不必稱之爲 P,而稱爲 AB;同理,Q 力爲 BC,餘仿此.

至在力線圖中,其與 AB 力平行之線,則用 ab 表之,以 a 爲首,b 爲尾,各置於兩端,以表該力之指向;其餘各線均仿此依次進行.

總之,波氏記號法在位置圖中,所有諸力皆用大寫羅馬字母依次表示;而在力線圖中,則用相應之小寫字母表示.

44. 兩個平行力之合力——圖解法　所謂平行力,即無論將各該力之作用線如何延長,始終不能相遇.根據此一定義,凡欲求兩個平行力之合力,在前所述力之平行四邊形法絕不可用,但若將其中任一力先分成兩個分力,再求此兩分力與他一平行力之合力,亦爲一種巧法.

如第 89 圖,命 AB,BC 表兩平行力(本節已應用波氏記號法).今先於 AB 作用線上之任一點 n,將 AB 力任意分解爲兩個分力 OA 及 OB,其中 OB 交 BC 作用線於 m.次作力線 ab 使等於並平行於



(a) 位置圖　　(b) 力線圖

第89圖

AB. 由 a 作 ao 力線平行 AO, 由 b 作 bo 力線平行 BO. 於是 ao 及 bo 將表 AO 及 BO 兩分力之大小. 再由 b 作力線 bc 使等於並平行於 BC. 聯結 oc. 則 oc 將表 ob 及 bc 兩力之合力.

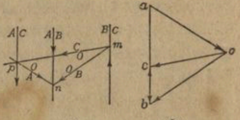
在位置圖中, 由 m 作 OC 與 oc 平行, 並使與 OA 相交於 p. 通過 p 點作 AC 線與 ac 平行, 於是 AC 將表所求合力之作用線, 其大小等於 ac. 因在力線圖中,

$$ac = ao + oc,$$

故在位置圖中, AC 應爲 AO 及 OC 之合力, 亦卽等於

$$(AB-OB)+(OB+BC)=AB+BC.$$

以上所述 AB, BC 兩平行力係屬同向, 其合力之作用線則恆在 AB 及 BC 兩作用線之間. 但若兩力係屬異向, 則其合力之作用線將在 AB 及 BC 兩作用線之外, 而靠近於較大力之一側, 如第 90 圖所示, 圖中合力 AC 之求法, 與前述者初無二致, 姑



(a)　　(b)

第90圖

不再贅.

設兩平行力之方向相反而大小相等,則在力線圖中之 c 點將與 a 點相疊合,而合力 ac 將等於零.於是 OC 線將與 OA 線平行,因之,oc 與 oa 兩力不能再聯結為一單力,其結果將成為一種力偶,詳情容於後節述之.

在第 89, 90 兩圖中, mnp 三角形均稱為連鎖多邊形,其中 OA, OB 諸邊稱為連鎖.至於力線圖中之多邊形則稱為力之多邊形,o 稱為極點, oa, ob,……等力線稱為射線.

習　題

66. 在第 89 圖中,若 AB 力等於 600 斤, BC 力等於 200 斤,兩作用線之距離為 1.8 尺,試求其合力之大小及位置.

答. 800 斤,與 AB 相距 0.45 尺.

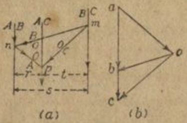
67. 在第 90 圖中,若 AB 力等於 800 斤, BC 力等於 500 斤,兩作用線之距離為 0.3 尺,試求其合力之大小及位置.

答. 300 斤,在 AB 之左邊相距 0.5 尺處.

45. 兩個平行力之合力——代數法　凡兩平行力之合力,其大小等於此兩力之代數和,其方向與此兩力平行,已見前述.今所欲論者,厥為此合力作用線之位置一問題.

命第 91 圖中之 AB 及 BC 表兩平行力之作用線,其距離為 s. 假定 AC 表合力之作用線,其與 AB 之距離 r,卽為本節所欲求得之元素.

按照前述力矩原理,合力 AC 對於 AB 線上任一點 n 之力矩將



第91圖

等於其兩個同點分力 AO 及 OC 對於 n 點之力矩代數和. 但因 AO 線通過 n 點, 故 AO 之力矩等於零, 因之

$$AC\text{ 之力矩}=OC\text{ 之力矩}.$$

又 OC 對於 n 點之力矩, 復等於其兩個同點分力 OB 及 BC 對於 n 點之力矩代數和. 但因 OB 線亦通過 n 點, 故 OB 之力矩亦等於零, 因之

$$OC\text{ 之力矩}=BC\text{ 之力矩},$$

或 $$AC\text{ 之力矩}=BC\text{ 之力矩},$$

即 $$AC\times r=BC\times s.$$

$$\therefore\quad r=\frac{BC\times s}{AC}.$$

此末一式即表合力與其中任一力之作用線之距離, 等於第二力對於第一力之作用線上任一點之力矩以合力除之.

習　題

68. 今有兩個向上之力各等於6,000斤及10,000斤, 作用於同一物體, 其作用線之距離等於4尺. 試求此合力之大小及位置.

答. $R=16,000$ 斤, 與 6,000 斤之力相距 2.5 尺.

69. 在一長5尺之平梁中間, 承受一 8,000 斤之載重, 又在距右端1尺處承受一 5,600 斤之載重. 試求合力之大小及位置.

答. $R=13,600$ 斤, 距右端 1.88 尺.

70. 在上題中，若 5,600 斤之力係向上作用，試求合力之大小及位置.

答. $R=2,400$ 斤，向下作用，在梁左端之左邊，相距 0.79 尺.

46. 力矩原則——兩個平行力 在第 92 圖中，設 D 為作用面內之任一點，與其中任一力之作用線 AB 之距離為 u. 於是

因 $$AC=AB+BC,$$

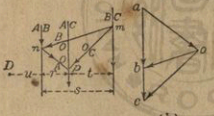
兩邊同乘以距離 u，得

$$AC\times u=AB\times u+BC\times u.$$

再與上節之方程式 $AC\times r=BC\times s$ 合併，得

$$AC(u+r)=AB\times u+BC(u+s).$$

今 $AB\times u$ 一量，乃其中一力 AB 對於 D 點之力矩，$BC(u+s)$ 乃其另一力 BC 對於 D 點之力矩，$AC(u+r)$ 則為其合力 AC 對於 D 點之力矩. 根據此式，因得兩個平行力之力矩原則如下：



(a)　(b)

第 92 圖

凡兩個平行力對於其作用面內任一點之力矩代數和，等於其合力對於該點之力矩.

再者，若 D 點係在合力之作用線 AC 上，則此 u 值將等於 $(-r)$，上式變為

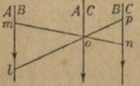
$$AB\times r-BC\times t=0,$$

$$\therefore\ \frac{t}{r}=\frac{AB}{BC}.$$

根據此式，又得一原則如下：

合力與原有兩力之垂直距離實與各該力之大小成反比例.

47. **反比例法** 命 AB 及 BC 為兩個平行力，如第 93 圖. 任作一直線使分別交 AB 及 BC 兩作用線於 m 及 n 點. 在 AB 作用線上自 m 取 ml 長度，按某一比例尺使等於 BC 力之大小. 又在 BC 作用線上自 n 取 np 長度，按同一比例尺使等於 AB 力之大小. 聯結 lp，並交 mn 於 o. 通過 o 作一平行於 AB 之直線 AC. 於是 AC 將為所求合力之作用線.



第 93 圖

因按幾何學原理，mol，nop 應為兩相似三角形，故

$$ml : np : : om : on,$$

或

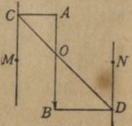
$$BC : AB : : om : on.$$

由是依前述力矩原則，合力 AC 應通過 o 點.

倘兩平行力之方向相反，則 ml 及 np 兩力線應分別自 mn 基線上之 m 及 n 兩點取同一方向作之. 於是基線 mn 與兩點之聯結線 lp 將相交於兩作用線之外，而鄰近於較大力之一側.

此種求兩平行力之合力法卽稱為反比例法.

應用此法，又可將某一力分解為兩個平行分力，使分別作用於某兩固定之點.



第 94 圖

如第 94 圖，命 AB 為已知力，今欲將其分解為兩個平行分力，使分別作用於 M 及

N 兩定點.

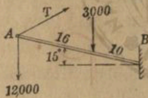
過二定點作 CM 及 DN 兩線,使與 AB 平行. 自 A 任作一線 AC, 交 CM 於任一點 C. 又自 B 作 AC 之平行線 BD, 交 DN 於 D. 聯結 CD, 交 AB 於 O. 則矢量 AO 卽表作用於 N 點之分力, 而矢量 OB 卽表作用於 M 點之分力.

習　　題

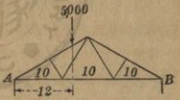
71. 在第 92 圖中,若 AB 及 BC 係取相反方向,試證 $\frac{t}{r}=\frac{AB}{BC}$ 一式仍能適用.

72. 應用本節所述之反比例法求第 95 圖中所示兩個垂直力之合力.

答. $R=15,000$斤,並與 AB 交於距 A 點 3.2 尺之處.



第 95 圖



第 96 圖

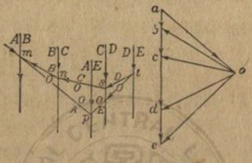
73. 試將第 96 圖中所示之力分解爲兩個平行分力, 分別作用於 A, B 兩端.

答. 在 A 端爲 3,000 斤;在 B 端爲 2,000 斤.

74. 試將第 95 圖中所示 3,000 斤之力分解爲兩個平行分力,分別作用於 A, B 兩端.

答. 在 A 端爲 1,153 斤;在 B 端爲 1,847 斤.

48. 兩個以上平行力之合力——圖解法 第44節中所述之圖解法,仍可加以引伸,使適用於兩個以上之平行力.如第97圖,設有 AB, BC, CD 及 DE 四個平行力同作用於一物體,今欲求其合力.



(a) (b)

第97圖

求法:先作 ab, bc, cd 及 de 諸力線.次將 ab 分解爲兩個分力 ao 及 ob.自 AB 作用線上之任一點 m,作 AO 及 OB 兩線,使 OB 交 BC 於 n.

復次將 ob 及 bc 兩力合成爲 oc 一力,並由 n 點作 OC 線平行於 oc,交 CD 於 s.同樣,將 oc 及 cd 兩力合成爲 od 一力;將 od 及 de 兩力合成爲 oe 一力.於是力線圖中所存留者僅有 ao 及 oe 兩力.今卽將此兩力合成爲一最後之合力 ae.

在位置圖中,再由 s 作 OD 平行於 od,並交 DE 於 t;由 t 作 OE 平行於 oe,並交 OA 於 p.通過 p 作 ae 之平行線 AE,則 AE 線卽爲所求合力之作用線,其大小等於 ae.故凡用圖解法以求兩個以上平行力之合力,其步驟略分如下:

（一）作一位置圖.

（二）作一力線圖.

（三）在力線圖中，任擇一極點 o，作 oa，ob，……等射線，求得諸力之合力.

（四）在位置圖中，作一連鎖多邊形，使各連鎖分別與相應射線平行.

（五）由第一連鎖與末一連鎖之交點，可決定所求合力之位置.

若係採用波氏記號，則連鎖多邊形中各連鎖之記號，將與相應射線之記號完全相同. 例如連鎖 OB 係與射線 ob 平行，其位置則在 AB 與 BC 兩線間，亦即在'B'之空間內. 此爲最重要之關鍵，學者倘能認定各連鎖所記之號，即於所指之空間內作之，絕無錯誤.

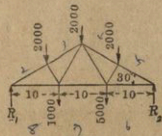
習　　題

75. 試將第 98 圖中所示五個平行力結合爲一合力.

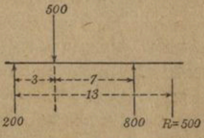
答. $R=12,000$ 斤，距左端 16.67 尺.

76. 試求第 99 圖中所示諸力之合力.

答. $R=500$ 斤，向上；距 200 斤之力 13 尺，向右.



第98圖



第99圖

49. 兩個以上平行力之合力——代數法　凡有兩個以上之平行力同作用於一物體，無論其爲相同或不相同，其合力之大小必等於此諸力之代數和，其方向必與此諸力相平行，並向力量較大之一面作用，此爲極明顯之事實，已無須再加解證．惟合力作用之位置如何，則必須加以測算．圖解法固爲解題捷徑，而代數法亦爲世人所常用者．

關於代數法之推理，多根據前述力矩原則．蓋凡兩個平行力對於其作用面內任一點之力矩代數和，既係等於其合力對於該點之力矩，則推而至於三個平行力，亦依同理先將其中任兩力按此原則求其合力，再將此合力與第三力仍按同一原則繼續結合．依次四個，五個平行力亦然．由是得一般力矩原則如下：

不論若干個同平面平行力，其對於該平面內任一點之力矩代數和，必等於其合力對於該點之力矩．

設 r 爲合力 R 與力矩中心 O 之力臂，又 $d_1, d_2, d_3, \cdots\cdots$ 各爲 F_1，$F_2, F_3, \cdots\cdots$ 與該點之力臂，則

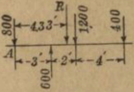
$$F_1d_1+F_2d_2+F_3d_3+\cdots\cdots=Rr,$$

$$\therefore\ r=\frac{F_1d_1+F_2d_2+F_3d_3+\cdots\cdots}{R}=\frac{\Sigma Fd}{R}.$$

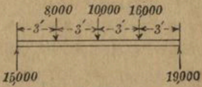
例題 12.　試求第 100 圖中所示之四個平行力，其合力之大小，方向及位置．

解　諸力之總和 $=800+1,200+400-600=1,800$ 斤，向下．

設以 800 斤之力之作用線上任一點 A 爲原點，a 爲由 A 點至合力作用線間之距離．



第100圖



第101圖

於是　$1,800 \times a = 1,200 \times 5 + 400 \times 9 - 600 \times 3,$

$\therefore \quad a = 4.33$ 尺,在 A 點之右面.

習　題

77. 試將第101圖中所示三個向下作用之平行力,合成爲一合力,並求其作用線之位置.

答. 距左端3.7尺.

78. 試將第101圖中所示兩個向上作用之平行力,合成爲一合力,並求其作用線之位置.

79. 若將第100圖中所示1,200斤之力之方向倒轉,試再求合力之大小,方向及位置.

答. $R=600$ 斤,向上,在 A 點之右面7尺.

50. 平行力之平衡——圖解法　在第48節之力線圖中,設其最末一點與最初一點適相疊合,易言之,即力線圖成一閉合形,則其合力必等於零.在此種情形下,位置圖中之連鎖多邊形可得兩種結果:若其最末一連鎖與最初一連鎖互成平行,則其合力將成爲一矮力偶,詳情俟於第52節中敍述;又若其最末一連鎖與最初一連鎖適相疊合,亦即連鎖多邊形爲一閉合形,則其合力之力矩亦必等於零,

而此一組平行力適成平衡.

根據後一結果,可得平行力之平衡原則如下:

設有一組同平面平行力,其力線圖爲一閉合形,其位置圖中之連鎖多邊形亦爲一閉合形,則此一組之力必成平衡.

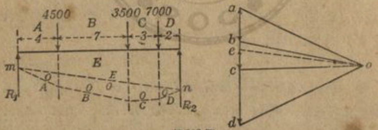
反之,若有一組同平面平行力適成平衡,則其力線圖必成閉合,其位置圖中之連鎖多邊形亦必成閉合.

故在一組同平面平行力中,如共有兩個未知元素,卽可應用上述平衡原則解之.

茲示一例於次:

例題 13. 有一平梁爲三個平行力所作用,如第 102 圖,試求其兩端反動力 R_1 及 R_2 之大小.

解 先按某一比例尺作 $abcd$ 力線圖,如圖(2).因此一組之力係成平衡,故反動力 R_1 必等於 de,反動力 R_2 必等於 ea,a 必爲一閉合點,但 e 點之位置尙不得而知.



第 102 圖

今任擇一極點 o,聯結 oa, ob, oc, od.復在位置圖中之任一作用線上任取一點,例如 R_1 作用線上之 m 點,於空間 A 內作 OA 線與射線 oa 平行.自 OA 與 AB 之交點,在空間 B 內作 OB 與 ob 平行.

同法，在空間 C, D 內，分別作 OC, OD 各與 oc, od 平行，並使 OD 交 R_2 於 n. 因此一組之力係成平衡，此所作連鎖多邊形必成閉合. 故聯結 m 與 n 之線必為一閉合線.

次在力線圖中由 o 作 OE 之平行線 oe，於是 e 點可以求定. 由圖中量得力線 $de=9,660$ 斤，力線 $ea=5,340$ 斤.

習　題

80. 若將上例題中 7,000 斤之力移去，試求反動力 R_1 與 R_2 之大小.

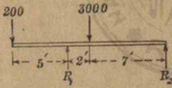
答. $R_1=4,470$ 斤；$R_2=3,530$ 斤.

81. 有一 18 尺長之梁，兩端平支. 今若於距左端 4 尺處承受一 3,000 斤之載重，又於距右端 3 尺處承受一 1,000 斤之載重，試求其兩端之反動力.

答. $R_1=2,500$ 斤；$R_2=1,500$ 斤.

82. 試求第 103 圖中所示外伸梁之反動力.

答. $R_1=2,645$ 斤；$R_2=555$ 斤



第 103 圖

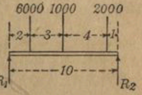
51. **平行力之平衡——代數法**　設有一組同平面平行力，其代數和等於零（即 $\Sigma F=0$），則其合力必等於零，而此一組之力將不致發生任何移動. 再者，若其對於作用面上任何點之力矩代數和亦等於零（即 $\Sigma M=0$），則其合力之力矩亦必等於零，而此一組之力將不致發生任何轉動. 因之，諸力必成平衡.

反之，若有一組同平面平行力適成平衡，則其合力必等於零（即

$R=0$),又對於任何軸之力矩亦必等於零(即 $\Sigma M=0$).

故在一組適成平衡之同平面平行力中,如除有兩個未知元素外,其餘均為已知,皆可用上述原則求其解答.

例題 14. 有一10尺長之梁,兩端平支,上承三個載重,其大小及位置如第104圖所示. 試求其兩端之反動力 R_1 及 R_2. 梁之本身重量可略去不計.



第104圖

解　因梁係在平衡狀態之中,故 $\Sigma F=0$,即

$$6{,}000+1{,}000+2{,}000-(R_1+R_2)=0. \qquad (1)$$

又 $\Sigma M=0$. 設以 R_1 作用線上之任一點為力矩中心,求各力之力矩代數和,得

$$6{,}000\times 2+1{,}000\times 5+2{,}000\times 9-R_2\times 10=0,$$

$$\therefore\ R_2=3{,}500\text{ 斤}.$$

將 R_2 之值代入(1)式,得

$$R_1=5{,}500\text{ 斤}.$$

欲覆證所求 R_1 之值有無錯誤,可另取 R_2 作用線上之任一點為力矩中心,求各力之力矩代數和,得

$$2{,}000\times 1+1{,}000\times 5+6{,}000\times 8-R_1\times 10=0,$$

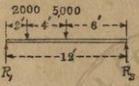
$$\therefore\ R_1=5{,}500\text{ 斤}.$$

若梁上載重係成對稱,則無須成立任何方程式,R_1 與 R_2 之值可由總載重中直接計算. 蓋每一反動力皆等於總載重之一半.

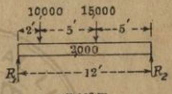
習　　題

83. 試求第105圖中所示平梁之兩端反動力 R_1 與 R_2（梁之重量略去不計）.

答. $R_1=4,170$ 斤；$R_2=2,830$ 斤.



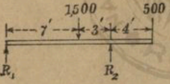
第105圖



第106圖

84. 已知梁之重量等於2,000斤，並假定係作用於其中點，如第106圖. 試求此平梁之兩端反動力 R_1 與 R_2.

答. $R_1=15,580$ 斤；$R_2=11,420$ 斤.

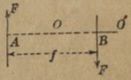


第107圖

85. 試求第107圖中所示外伸梁之兩端反動力 R_1 與 R_2.

答. $R_1=250$ 斤；$R_2=1,750$ 斤.

52. **力偶** 凡兩大小相等而方向相反之平行力，作用於同一物體上不同之點，是爲**力偶**. 力偶不能使物體移動，但可使其迴轉. 例如第108圖中之力偶 F, F 作用於物體上之 A, B 兩點，則物體將繞 AB 之中心點 O 取順時針向而迴轉. 此 F, F 間之垂直距離 AB 稱爲**力偶臂**，其任一



第108圖

力之大小與力偶臂之相乘積，則稱為力偶矩.或

$$力偶矩=F\times f.$$

力偶矩之單位為尺斤，寸斤，或呎磅，吋磅等，蓋依力偶臂之單位為尺，寸，或呎，吋，及力之單位為斤或磅而定，與力矩同.

至於力偶矩之符號，則依迴轉之趨向而定：凡順時針向迴轉之力偶，其符號通常均假定為正；反時針向迴轉之力偶，其符號均假定為負.

此種力偶矩，實際即其兩個分力對於作用面上任何點之力矩代數和.茲再由下法證明之.如第108圖，設以 O 為力矩中心，此 F,F 二力對於 O 點之力矩代數和等於

$$F\times OA+F\times OB=F\times AB=F\times f.$$

設另以 O' 為力矩中心，則 F,F 二力對於 O' 點之力矩代數和等於

$$F\times O'A-F\times O'B=F\times AB=F\times f.$$

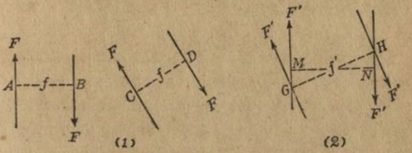
總之，無論在作用面上取任何力矩中心，力偶 F,F 對於此中心之力矩常相同.蓋其實值既等於 $F\times f$，而力矩中心又無論在任何位置，F 及 f 之值始終未變，故 $F\times f$ 之積亦始終不變.

因此，力偶既為兩個大小相等而方向相反之力，故其合力實等於零，而力偶之惟一影響即其力矩.

根據此一原則，又可引伸為下列數原則：

一、力偶可以在其作用面內任意移動至任何位置，或迴轉至任何角度，其力矩不變.

例如第109圖之(1)，力偶先作用於 AB 位置，其力矩等於 $F\times f$；



第100圖

若將其移動至 CD 位置，其力矩仍等於 $F\times f$. 又如同圖之(2)，力偶先作用於 GH 位置，其力矩等於 $F'\times f'$；若迴轉至 MN 位置，其力矩仍等於 $F'\times f'$.

二、任一力偶可以在同一作用面內任意用他一力矩相等之力偶代替之.

例如有一12斤之力偶，其力偶臂為1尺，作用於一物體. 若在此同一作用面內，取同向用一6斤之力偶，其力偶臂為2尺；或用一4斤之力偶，其力偶臂為3尺；或用一3斤之力偶，其力偶臂為4尺代替之，其對於該物體所生之迴轉影響完全相等.

三、力偶絕不能用一單力平衡之.

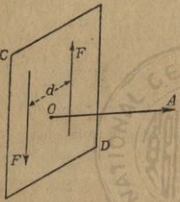
因力偶之合力既等於零，則力偶與任何他一力之合力絕不能再等於零.

四、力偶可任意移至與原作用面平行之任何平面內，不改變其影響.

因力偶對於其作用面內任何點 O 之力矩，與其對於通過此點，垂直於原作用面之軸線之力矩實相同，故作用面在此垂直軸上之地

位無論如何，並無關於力偶之影響．例如用一對管搬鉗將汽管旋入於一套筒內，無論此對管搬鉗係作用於汽管上何處，所生影響均同．

53. 力偶之矢量表示法 力偶有三種特性，對其外表影響頗有關係，即力偶矩之大小，力偶迴轉之方向及作用面之方向．故力偶可以用矢量表之．如第110圖，於 CD 作用面上作一垂直線 OA．其長即按某一比例尺表其力偶矩之大小，其方向即表該作用面之方向．矢量上之矢頭，則示若自矢頭一端向作用面觀察，將見該力偶係取反時針向而迴轉．

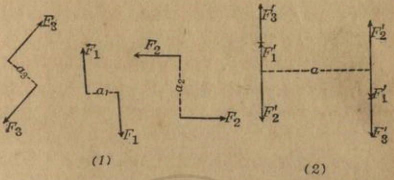


第110圖

凡力偶矩對於任何垂直於作用面之軸線，其值常相同，前已論及．故矢量之位置如何並無關係，易言之，令垂直於 O 點固可，垂直於 C 點或 D 點，以至垂直於其他任一點均無不可．

因之，設有一組力偶作用於同一平面上．若欲求其合力，可先用矢量分別表此各個力偶，再將此等矢量相加，得其總和，即為所求之合力．

54. 一組同平面力偶之合力 上述一組力偶作用於同一平面上，其合力可由求各矢量總和求得；或用下法求之亦可．如第111圖，F_1, F_1; F_2, F_2; F_3, F_3 表三個同平面之力偶，其力偶矩分別為 F_1a_1, F_2a_2, F_3a_3．茲再根據前述原則，將各個力偶分別以力偶矩相等之力偶代替之．命



第111圖

$$F_1'a=F_1a_1,\quad F_2'a=F_2a_2,\quad F_3'a=F_3a_3.$$

其中力偶 F_1', F_2', F_3' 雖各有不同，但力偶臂則均等於 a，如圖(2)．於是此一組力偶之合力將合為一個力偶，其大小將等於 F_1', F_2', F_3' 三力之代數和，或

$$F_1'-F_2'+F_3',$$

其力偶臂則等於 a. 此合力之力矩等於

$$(F_1'-F_2'+F_3')a=F_1'a-F_2'a+F_3'a$$

$$=F_1a_1-F_2a_2+F_3a_3=\Sigma Fa.$$

即一組同平面力偶之合力仍為一力偶，其力矩等於各個力偶矩之代數和.

由上觀之，可見若此一組力偶係成平衡，則其合力必等於零．因之，凡一組力偶作用於同一平面上而成平衡時，其力矩之代數和等於零.

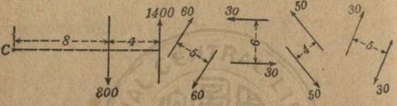
習　題

86．試計算第 112 圖中所示兩力對於 C 點之力矩.

答．$-10,400$ 尺斤.

87．試求第 113 圖中所示諸力偶之合力矩.

答．$Fa=+120$.

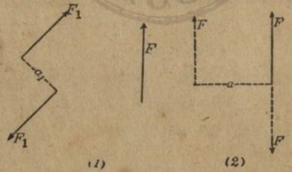


第 112 圖　　第 113 圖　　第 114 圖

88．試求第 114 圖所示諸力偶之合力矩.

答．$Fa=-50$.

55．一單力及一力偶之合力　設第 115 圖中之 F 表任一單力，F_1,F_1 表作用於同一平面上之任一力偶，其力偶矩等於 F_1a_1. 據前述



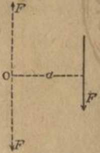
第 115 圖

原則，可將力偶矩 F_1a_1 用另一相等之力偶矩 Fa 代替之，使此 F 力之值等於原力 F，其力偶臂即等於 a. 至於此力偶之位置則係將其中任一力置於與原力 F 相反之方向，如圖所示，俾兩者互相平衡. 於是此一力偶與原力 F 之合力將爲一單力等於並平行於原力 F，其距離則等於相等力偶 Fa 之力臂 a. 因

$$Fa=F_1a_1, \qquad \therefore \quad a=\frac{F_1a_1}{F}.$$

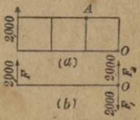
若 F_1a_1 爲正值，則所求合力將在原力 F 之左；如 F_1a_1 爲負值，則合力將在原力 F 之右.

56. 分解一單力爲一相等之平行力及一力偶　本節所論，適與上節所述者相反. 如第116圖，設 F 爲已知之單力. 今自任一點 O 引進兩個相等而相反之力 F, F，使其各等於並平行於原力 F. 由是可得一個單力，等於並平行於原力；及一力偶，其力矩將等於原力對於 O 點之力矩.



第116圖

例題 15.　試將第117圖(a)中所示之力分解爲一單力作用於 O 及一力偶. 已知圖中之矩形爲3尺寬1尺高.



第117圖

解　通過 O，如第117圖(b)，引進兩個相等而相反之力 F_1, F_2 使等於並平行於原力 F ($F=2,000$ 斤)，而 F_2 與 F 同向. 因 F_1 與 F_2 互成平衡，故此一組之力 F, F_1 及 F_2 仍與原力 F 相等.

今若使 F_1 與 F 相配成一力偶，則其力矩等於

$$+2,000\times3=6,000\text{ 尺斤}.$$

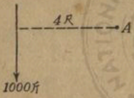
其餘一力 F_2 則與 F 相等，並取同向作用於 O.

故所求之單力作用於 O 為 $F_2=2,000$ 斤，力偶為 F, F_1，其力矩 $=6,000$ 尺斤.

習 題

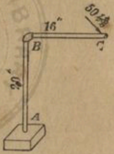
89. 試將第118圖中所示1,000斤之力分解為一單力作用於 A 及一力偶.

答. 力偶矩 $=-4,000$ 尺斤.



第118圖

90. 第119圖中之 ABC 示一汽管. 今若於 C 點用一50磅之力將汽管扭動，試將此力分解為一單力作用於 B 及一力偶，俾能求得 AB 上之扭力及在 A 點之彎力.



第119圖

答. 扭力 $=800$ 吋磅; 彎力 $=1,000$ 吋磅.

總 習 題

91. 有一單梁長12尺，重40斤，在梁之一端承受一100斤之

載重. 今使此梁平衡於其中點, 特加入一 125 斤之力, 試求該力應置於何處?

答. 距梁之另一端 1.2 尺.

92. 今有一 100 斤之力 P 垂直向下作用於某一物體. 在此物體上 P 之左邊 8 寸處, 又有一 60 斤之力 Q 垂直向上作用. 試求合力之大小及位置.

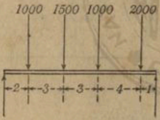
答. 40 斤, 向下, 在 P 之右邊 12 寸.

93. 試求第 120 圖所示諸平行力之合力.

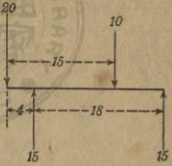
答. $R=5,500$ 斤, 向下, 距左端 7.54 尺.

94. 試求第 121 圖中所示諸平行力之合力.

答. R 為一力偶, 其力偶矩等於 240 尺斤.



第 120 圖



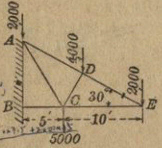
第 121 圖

95. 試求第 122 圖中所示跨梁上諸載重之合力.

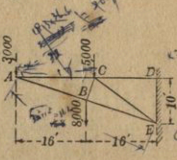
答. $R=13,000$, 距 AB 5.54 尺.

96. 在第 123 圖中, B 為 AE 之中點, 又 BC 垂直於 AB. 試求作用於 A, B 及 C 三點之平行力之合力.

答. $R=16,000$, 距 A 點 13.49 尺.



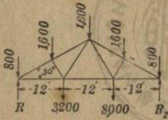
第 122 圖



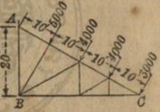
第 123 圖

97. 試求第 124 圖中所示桁架上諸載重之合力 R 及兩端之反動力 R_1 及 R_2.

答. $R=17,600$, 距 R_1 19.64 尺. $R_1=8,000$; $R_2=9,600$.



第 124 圖



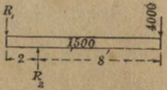
第 125 圖

98. 試求第 125 圖中所示桁架上諸載重之合力.

答. $R=16,000$, 距 A 點 23.125 尺.

99. 有一單梁長10尺,重1,500斤.在梁之右端承受一4,000斤之載重,如第126圖.試求左端之反動力 R_1 及距左端 2 尺處之反動力 R_2.

答. $R_1=18,250$ 斤; $R_2=23,750$ 斤.



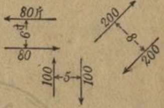
第 126 圖

100. 有一10尺長之桿，一端鉸釘牆上，另一端則置於一光滑地板上，地板與鉸釘處相距6尺. 今在桿之中點載一200斤重之物體，則兩端之反動力將各爲若干？(注意：凡光滑面只生垂直反動力.)

答. 各爲100斤.

101. 試將第127圖中所示三個力偶結合爲一個合力偶，並用矢量以表明之.

答. 合力偶＝－1,620寸斤.



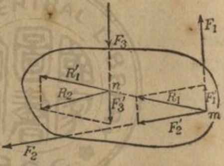
第127圖

102. 若於第127圖中加入一力偶使與原組力偶互成平衡，並使其作用線與100斤之力相疊合，試求此平衡力之大小及方向.

答. 大小＝324斤.

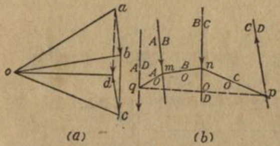
第四章　同平面非同點力

57. 一組非同點力之合力——圖解法　設$F_1, F_2, F_3, \cdots\cdots$等爲一組非同點力，如第128圖，今欲求諸力之合力．其求法可將F_1, F_2兩力之作用線引長交於m，在其延長線上自m點截取F_1', F_2'使分別等於F_1, F_2，由平行四邊形法求其合力R_1．再將R_1之作用線引長使交F_3力之作用線於n，作F_3', R_1'使分別等於F_3, R_1，求得其合力R_2．於是R_2即爲F_1, F_2, F_3三力之合力．同理，對於$F_4, F_5, \cdots\cdots$等力，均可順次依此作圖．



第128圖

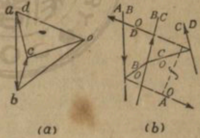
但若所述諸力，其作用線之方向趨近平行，則其交點勢必甚遠，自不易在紙面上求得，類此情形，可先將其中任一力分解爲兩個分力，再按前述之方法合成．如第129圖(a)，設AB, BC, CD爲三個趨近於平行之力，各沿所示之方向作用．今於AB線上任取一點m，將AB力分解爲任何兩個分力AO, OB，各沿mq及mn之方向作用．次求OB, BC兩力之合力OC（其大小等於力線圖中之oc，方向即位



第129圖

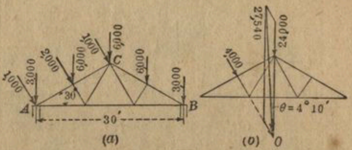
置圖中所示之 np). 再求 OC, CD 之合力 OD (其大小等於 od, 方向爲 qp). 命合力 OD 交分力 AO 之作用線於 q, 通過 q 作 ad 之平行線. 於是該線卽爲所求合力之作用線, 其大小等於 ad.

在此問題中, 若力線圖成一閉合形, 而位置圖中之連鎖多邊形並不閉合, 則其合力將爲一種力偶. 如在第130圖(a)中, 假定力線 ab, bc, cd 成一閉合形, 亦卽 d 點與 a 點相叠合. 自任一點 o 聯結 oa, ob, oc, od, 並在位置圖中作相應連鎖線 OA, OB, OC, OD. 由圖中觀之, 可見 OA 與 OD 雖互成平行, 但並不在同一直線上, 因此, 該一組之力乃變爲兩個相等而平行之力 AO 及 OD, 互相作用於 f 距離處.



第130圖

例題 16. 有一芬克桁架, 如第131圖(a)所示, 爲兩種力所作用: 一爲桁架上所載靜重之垂直力, 一爲垂直於人字梁 AC 代表風



第131圖

壓之力. 試求此二力之合力.

解　由圖中所示, 可見所有垂直諸力均與桁架中線成對稱, 卽此五個垂直力之合力 24,000 斤, 垂直作用於桁架中點. 又三個風壓力之合力 4,000 斤, 係取中間 2,000 斤風壓力所作用之方向作用, 亦殊顯然.

此兩合力均已於圖(b)中分別表明之. 今將此兩合力引長使相交於 O. 作平行四邊形, 其對角線量得爲 27,540, 是卽所求之合力. 此合力與垂直線所作之角 θ, 量得爲 $4°10'$.

習　題

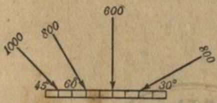
103. 有一長 9 尺之平梁, 爲四力所作用, 如第 132 圖. 試求諸力之合力.

答. $R=2,450$ 斤, 作用於距平梁之左支點 3.6 尺處, 與平梁之交角爲 $80°$.

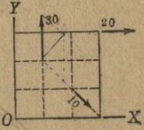
104. 有三力作用於一方形物體上, 如第 133 圖. 試求此諸力之

合力(圖中每一方格代表一尺).

答. $R=35.5$ 斤,作用於與 OX 邊成 $40°26'$ 之方向,與 O 點相距 1.33 尺.



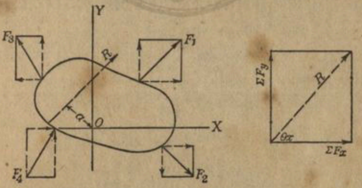
第 132 圖



第 133 圖

58. 一組非同點力之合力——代數法 凡一組非同點力作用於同一平面上時，其合力倘不為一單力卽係一力偶，此於圖解法中業已論及.若其合力為一單力,其代數解法如下:

設在第134圖(a)中,有 F_1, F_2, F_3, F_4 諸力同作用於一物體.作 X-X, Y-Y 兩直角坐標軸,將此諸力各分解為兩個分力,一與 X 軸



第 134 圖

平行，一與 Y 軸平行.

按第31節，所有與 X 軸平行諸分力之代數和爲 ΣF_x，又所有與 Y 軸平行諸分力之代數和爲 ΣF_y. 於是此 ΣF_x 與 ΣF_y 之合力，亦卽 F_1, F_2, F_3 及 F_4 之合力，爲

$$R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2},$$

而 R 之方向爲

$$\tan\theta_x=\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x},$$

式中 θ_x 爲 R 之作用線與 X 軸所交之銳角.

至於求合力 R 作用線之位置，第36節之力矩原理，仍可應用. 卽

任一組同平面非同點力對於該平面內任一點之力矩代數和，等於其合力對於該點之力矩.

此原理又可用下式表之：

$$Rd=\Sigma M_0,$$

式中 d 爲力矩中心 O 至合力 R 作用線之力臂，ΣM_0 則爲諸力對於力矩中心 O 之力矩代數和.

綜合上述情形，凡求一組同平面非同點力之合力，若此合力係一單力，則可由下列三式求之：

$$R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2},$$

$$\tan\theta_x=\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x},$$

$$Rd=\Sigma M_0.$$

在此諸式中，若 ΣF_x 與 ΣF_y 均等於零，則合力 R 將非一單力而係

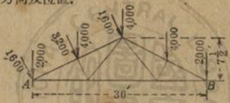
一力偶，其力矩等於所有各力之力矩代數和，卽

$$C=\Sigma M.$$

關於此等力偶之重心在平面上之位置如何，則非本題所須計及，此因力偶對於其作用面上任何點，其力矩並不變更.

又在此諸式中，設 ΣF_x 與 ΣF_y 旣均等於零，同時 ΣM 亦等於零，則所求之合力亦必爲零，易言之，卽此一組之力將成平衡.

例題 17. 有一芬克桁架，其載重情形如第 135 圖所示. 試求其合力之大小，方向及位置.



第 135 圖

解 所有靜重之水平分力均等於零，而風壓之水平分力依次爲 716, 1,432 及 716 斤. 於是

$$\Sigma F_x=2,864 \text{ 斤}.$$

所有風壓之垂直分力依次爲 1,432, 2,864 及 1,432斤. 又靜重之垂直分力卽等於 2,000, 4,000, 4,000, 4,000 及 2,000 斤. 於是

$$\Sigma F_y=21,728 \text{ 斤}.$$

$$R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2}=21,920 \text{ 斤}.$$

其與 X 軸之交角 θ 爲

$$\tan\theta=\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}=\frac{21,728}{2,864}=7.587,$$

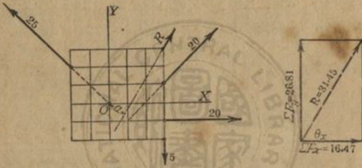
$$\therefore\quad \theta=82^\circ\, 30'.$$

至欲求此合力之位置，可以桁架左端之 A 點爲力矩中心，命 d 爲由 A 至合力 R 之力臂，得

$$21,920d=16,000\times 15+6,400\times 8.385,$$

$$\therefore\ d=13.4\text{ 尺}.$$

例題 18. 有20, 25, 5及20斤諸力同作用於一物體上，如第136圖．若圖中每一方格表一方尺，試求其合力之大小，方向及位置．



第136圖

解 此題所求答案，可依下式排列之(每一力均分解爲 x 及 y 兩分力：$F_x=F\cos\theta_x$，$F_y=F\sin\theta_x$)：

F	θ_x	$F_x=F\cos\theta_x$	$F_y=F\sin\theta_x$	M_0
20	45°	14.14	14.14	28.28
25	135°	−17.67	17.67	0.00
5	270°	0.00	−5.00	−15.00
20	0°	20.00	0.00	20.00
		$\Sigma F_x=16.47$ 斤	$\Sigma F_y=26.81$ 斤	$\Sigma M_0=33.28$ 尺斤

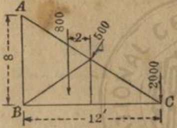
於是 $R=\sqrt{16.47^2+26.81^2}=31.45$ 斤，

$$\theta_x=\tan^{-1}\left(\frac{26.81}{16.47}\right)=58^\circ 25',$$

$$d=\frac{33.28}{31.45}=1.06 \text{ 尺}.$$

習　　題

105．試求第 137 圖中所示三力之合力，並求對 A 點之力臂 d.



第 137 圖

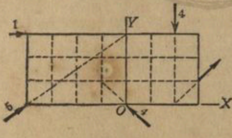
答．$R=3,228$ 斤，$\theta_x=85^\circ 05'$（與 X 軸相交），$d=9.54$ 尺.

106．試用代數法求第138圖中所示諸力之合力.

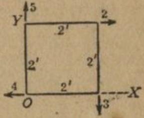
答．$R=5.83$ 斤，$\theta_x=42^\circ 40'$，$d=3.22$ 尺.

107．試求第 139 圖中所示諸力之合力.

答．$R=2.83$ 斤，$\theta_x=135^\circ$，$d=3.53$ 尺.



第 138 圖



第 139 圖

108．有一組同平面力，其大小各爲 20, 15, 10 及 15 斤，並知其

作用線上某一點之坐標(x,y)各爲$(0,2)$,$(0,2)$,$(4,2)$及$(6,2)$尺,與X軸所交之角各爲$0°$,$45°$,$90°$及$135°$.依表式排列如下:

$F=20$	15	10	15
$x,y=0,2$	0,2	4,2	6,2
$\theta_x=0°$	$45°$	$90°$	$135°$

試求諸力之合力.

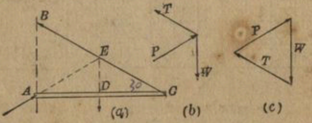
答. $R=37.1$斤, $\theta_x=57°20'$, $d=1.71$尺

59. 同平面非同點力之平衡——圖解法 設有一組同平面非同點力,其力之多邊形係成閉合,則其合力R必等於零.又若其連鎖多邊形亦成閉合,則力矩M亦等於零,而此一組之力將成平衡.

反之,若有一組同平面非同點力適成平衡,則其力之多邊形必成閉合,其連鎖多邊形亦必成閉合.

在此種平衡狀態下,依據力之多邊形成閉合之一條件,可以解$\Sigma F_x=0$及$\Sigma F_y=0$兩式.又依據連鎖多邊形亦成閉合之一條件,復可解$\Sigma M=0$一式.故此一組之力,如其中未知元素並未超越三個,即可用圖解法解之.茲舉例於下:

例題 19. 有一單梁AC長30尺,重1,200斤,如第149圖.今



第140圖

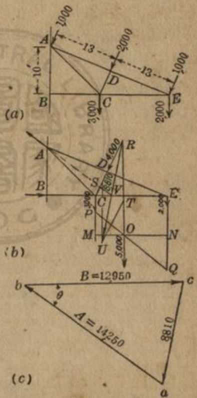
在 C 端用一鋼索 BC 懸之，使成水平位置．已知 BC 與 AC 所交之角為 30°．試求鋼索 BC 之張力及 A 端鉸軸反動力之大小及方向．

解　依題意所示，此單梁係在三個力之作用下而成平衡，即：一為單梁本身之重量，係經其重心 D 垂直向下作用者，一為鋼索 BC 之張力，一為 A 端鉸軸之反動力．今反向延長單梁重量之作用線交 BC 於 E，又按前述原則，A 端鉸軸反動力之作用線，亦必交此兩作用線於 E．因之，此作用線之方向可立即求得，即與 AC 亦成 30° 之角．

作力線 W 使等於 1,200 斤並成垂直．再作力線 T 使與 CB 平行，及力線 P 使與 AE 平行．於是得一閉合力之多邊形，而鋼索之張力及鉸軸之反動力均可於此多邊形中量得，即各等於 1,200 斤．

例題 20．　有一肱梁承受如第 141 圖所示之靜重及風壓等作用力．假定梁之 A, B 兩端係用栓釘聯接，試求其 A, B 兩端之反動力．

解　先作基線 MN，如圖(b)．將靜重 3,000 斤及 2,000 斤之作用線分別延長，使各交 MN 於 M



第 141 圖

及 N 兩點. 取 MP 等於 2,000 斤, NQ 等於 3,000 斤. 聯結 PQ 使交 MN 於 O. 通過 O 作垂線, 則此線卽爲靜重 2,000 斤及 3,000 斤之合力作用線. 又依風壓之對稱形勢, 其合力 4,000 斤必作用於中點 D. 此風壓合力與靜重合力將相交於 R. 次作 RS 使等於 4,000 斤, RT 等於 5,000 斤, 聯成平行四邊形, 求得合力 RU 等於 8,810 斤.

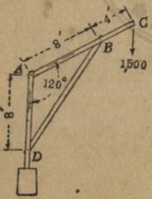
如是, 此兩靜重與三風壓之五個已知力已聯合爲一合力 RU, 並與 B 端反動力之作用線 BE 相交於 V. 因之, A 端反動力之作用線亦必通過 V 點無疑. 今卽依據此推理作力線圖.

作 ca 線平行 RU 並等於 8,810 斤, 如圖(c). 次作 bc 線平行 BE, 作 ab 線平行 VA 並交 bc 於 b. 於是量得 ab 等於 14,250 斤, bc 等於 12,950 斤, 此二值卽爲所求 A, B 兩端之反動力.

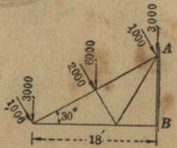
習　　題

109. 今有一起重架如第 142 圖, 試求臂木 BD 之壓力, 及在 A 端栓釘反動力之大小及方向.

答. 3,900 斤; 2,700 斤, 其方向與水平成 43°50′.



第 142 圖

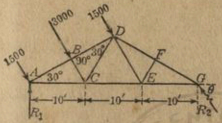


第 143 圖

110. 試求第 143 圖所示之肱梁 A, B 兩端之反動力.

答. 19,800 斤,其方向與水平成 51°20′; 14,390 斤.

111. 有一芬克桁架如第 144 圖,其 AD 一面承受垂直之風壓.桁架之左端係安置於一光滑板上,右端則用栓釘聯結.試求其兩端之反動力 R_1 及 R_2.(因左端係安置於光滑板上,故其反動力係成垂直.)



第 144 圖

答. $R_1=3,460$ 斤;

$R_2=3,460$ 斤, $\theta=30°$.

60. 同平面非同點力之平衡——代數法 設有一組同平面非同點力,其合力 R 等於零,又對於該平面上任一點之力矩亦等於零,則聯合此一組之力所生之影響必等於零,而此一組之力將成平衡.

反之,若有一組同平面非同點力係成平衡,則其合力 R 等於零,又對於該平面上任一點之力矩亦等於零.即

$$\Sigma F_x=0, \qquad \Sigma F_y=0, \qquad \Sigma M=0. \qquad (甲)$$

由上三式,可以求得此一組之力中三個未知元素.此三未知元素,在一般情形中,大多為力之大小,而其方向則均為已知.但有時亦可為二力之大小及此二力中一力之方向.

除此(甲)組平衡方程式為解題時所常用者外,另有兩組方程式有時亦可採用,其一為

$$\Sigma F_x=0, \qquad \Sigma M_A=0, \qquad \Sigma M_B=0, \qquad (乙)$$

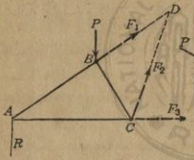
式中 A, B 為在該平面上之任何兩點,惟 AB 線不得垂直於 X 軸;又

其一爲

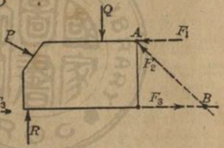
$$\Sigma M_A=0, \qquad \Sigma M_B=0, \qquad \Sigma M_C=0, \qquad \text{(丙)}$$

式中 A,B,C 爲在該平面上之任何三點，惟不得在同一直線上．玆分別說明於下：

如在第145圖中，ABC 示某屋架之一部分，有 P,R,F_1,F_2 及 F_3 等五力作用而成平衡，已知其中 P 及 R 二力，其他三力之大小爲未知．今先選取 F_2 與 F_3 兩力之交點 C 爲力矩中心，於是 F_2 及 F_3 對於 C 點之力矩必等於零．應用平衡方程式 $\Sigma M_C=0$，可求得 F_1 之大小．同理，如選取 D 爲力矩中心，則依方程式 $\Sigma M_D=0$，可求得 F_3 之



第145圖



第146圖

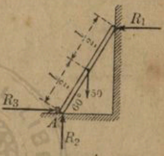
大小．次選取 A 爲力矩中心，再依方程式 $\Sigma M_A=0$，又可求得 F_2 之大小．

又如第146圖中，有一物體爲 P,Q,R,F_1,F_2 及 F_3 等六力作用而成平衡，其中除 F_1,F_2 及 F_3 三力之大小爲未知外，其餘均爲已知．又 F_1 與 F_3 係成平行．今先選取 B 爲力矩中心，於是 F_1 可由方程式 $\Sigma M_B=0$ 中求得．同理，選取 A 爲力矩中心，由方程式 $\Sigma M_A=0$，

可求得 F_3. 次再作一 Y-Y 軸使垂直於 F_1 及 F_3 之作用線，則由方程式 $\Sigma F_y=0$ 可求得 F_2.

總之，學者遇有此種問題時，須隨機應變，不可拘泥一定成例；苟能善於選擇力矩中心，則問題之解決自可事半功倍.

例題 21. 有一木梯，其上端依一光滑直牆，下端置於一光滑地板上，如第 147 圖，並在梯腳 A 處用一抵擋物以阻其滑溜. 若木梯重 50 斤，且其截面爲均等者，試求直牆，地板及抵擋物對於木梯之反動力.



第 147 圖

解 第一，因木梯之截面爲均等，故其重量可假定係作用於其中點. 第二，因直牆及地板均係光滑面，故在該面上之反動力均各與該面成垂直. 今命木梯之長等於 l，則

(1) 先以 A 爲力矩中心，得

$$\Sigma M_A=R_1\times l\sin 60^\circ-50\times\frac{l}{2}\cos 60^\circ=0,$$

$$\therefore\quad R_1=\frac{50}{2}\cot 60^\circ=14.42\text{ 斤}.$$

(2) 次依方程式 $\Sigma F_x=0$, 得

$$\Sigma F_x=R_3-R_1=0,$$

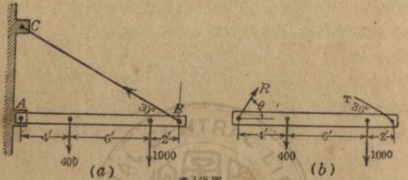
$$\therefore\quad R_3=R_1=14.42\text{ 斤}.$$

(3) 再依方程式 $\Sigma F_y=0$, 得

$$\Sigma F_y=R_2-50=0,$$

$$\therefore\quad R_2=50\text{ 斤}.$$

例題 22. 有一平梁 AB, 其 A 端栓釘於牆上, B 端係用一鐵棍 BC 栓釘於牆上之 C 點, 如第 148 圖. 茲假定平梁本身之重量不計, 試求鐵棍之張力 T 及在 A 端栓釘之反動力 R.



第 148 圖

解 先將作用於 AB 梁上之諸力分析如圖(b). 在此一組之力中共有 T, R 及 θ 等三未知元素. 茲應用(甲)組平衡方程式, 得

$$\Sigma M_A = T\times 12\sin 30^\circ - 1,000\times 10 - 400\times 4 = 0,$$

$$\therefore\quad T = 1,930 \text{ 斤}.$$

$$\Sigma F_x = R\cos\theta - T\cos 30^\circ = 0,$$

$$\therefore\quad R\cos\theta = T\cos 30^\circ = 1,670. \qquad (1)$$

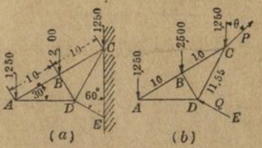
$$\Sigma F_y = R\sin\theta + T\sin 30^\circ - 400 - 1,000 = 0,$$

$$\therefore\quad R\sin\theta = 1,400 - T\sin 30^\circ = 435. \qquad (2)$$

解(1),(2)兩式, 得

$$R = 1,730 \text{ 斤};\quad \theta = 14^\circ 35'.$$

例題 23. 有一肱架, 其載重情形如第 149 圖所示. 試求 C, E 兩端之反動力.



第149圖

解　命 P,Q 分別表 C,E 兩端之反動力.今因其一反動力 Q 之作用線適與 ED 部材相疊合，故其方向爲已知；惟反動力 P 之大小及方向則均爲未知.

由圖(a)，可見作用於此桁架上者，共有三個靜重力及兩個反動力，今以圖(b)表之.此一組之力既成平衡，若以 C 爲力矩中心，則

$$\Sigma M_C=1,250\times 17.32+2,500\times 8.66-Q\times 11.55=0,$$

$$\therefore\quad Q=3,750\text{ 斤}.$$

$$\Sigma F_x=P\sin\theta-3,750\times 0.866=0,$$

或
$$P\sin\theta=3,250. \tag{1}$$

又
$$\Sigma F_y=P\cos\theta-5,000+3,750\times 0.5=0,$$

或
$$P\cos\theta=3,125. \tag{2}$$

以(2)除(1)，得

$$\tan\theta=1.04,\qquad \therefore\quad \theta=46°08'.$$

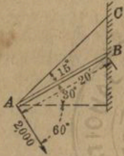
$$P=\frac{3,250}{\sin\theta}=4,510\text{ 斤}.$$

習　　題

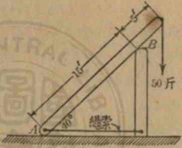
112. 有一重600斤之吊桿AB,在A端承受一2,000斤之重量,如第150圖.試求AC之張力及在B端之反動力.

答. 8,740斤; 8,130斤,與水平交成28° 10′.

113. 一鐵桿之上端支於一光滑直柱上,下端則置於光滑地面



第150圖



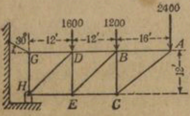
第151圖

上,如第151圖,並用繩索繫其足以免滑溜.若鐵桿重量不計,試求A端地面之反動力,B端直柱之反動力及繩索之張力.

答. 10.9斤; 51.1斤; 32.8斤.

114. 有一肱架,如第152圖所示.試求G端之反動力及H端反動力之水平與垂直二分力.

答. 13,850斤;12,000斤; -1,730斤

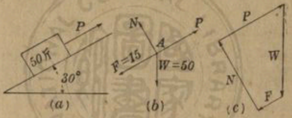


第152圖

61. 自由體圖　應用自由體圖,乃分析力學問題,尤其在桁架之研究中,所最常見之一法.所謂'自由體'者,乃係一組之力同作用

於一物體，爲求便於分析，特選取該物體之全部或一部使其與周圍之環境分離，而後就此全部或一部中，將所有作用之力，一一加以分析，藉以求得其總結果．此種自由體通常皆以圖形表示，故稱爲自由體圖．

例如第153圖(a)示一30°之斜面，其上有50斤之重量用動力P向上牽引．於是作用於此斜面上之力共有四個，爲：(a) 50斤之重量W，(b)動力P，(c)斜面與重量間之摩擦力F，及(d)對斜面之法線力N．茲爲分析方便計，可先將以上四力繪成一自由體圖，如圖(b)，

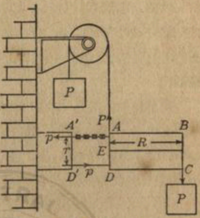


第153圖

其中A即表重量與斜面之接觸點．再依據自由體圖繪成一力之多邊形，如圖(c)，由此可求得所有未知之力．

62. **彎曲力矩，切力及應力之解釋**　如第154圖，有一肱梁，一端插定牆內，另一端懸一重量P．設將梁之中間部分$A'D'DA$取去，使$ABCD$部分與插定之一部分完全脫離．今欲使此$ABCD$部分仍成平衡狀態，並保持在$A'D'DA$部分未經移去前之同一位置，可於牆上釘一滑輪，將吊繩一端繫住AD，另一端則繫一相等之重量P．於是，在研究此外加之力P對於梁之影響時，先考驗原有重量P對於梁之影響如何．

假定梁之本身並無重量，則原有重量 P 對於該梁之第一影響，必使 $ABCD$ 部分向下墜落. 當 $ABCD$ 部分未經與插定之部分脫離以前，此種向下運動尚能爲 AD 截面上實質所抵抗，但旣經脫離以後，如仍欲維持此種原狀，亦即抵抗其向下墜落趨向，則必須於該點上加入一種相等而相反之外力以平衡之. 此外加之力，即爲圖示之 P 力. 此種 P 力，無論其爲虛擬或眞實者，皆能與原有重量 P 合成一力偶，其力矩爲 $P\times R$，而其迴轉趨勢則爲順時針向.



第 154 圖

此種力偶卽爲構成在 AD 截面上之彎曲力矩. 故

梁內任何截面之彎曲力矩，等於在該截面左方或右方諸外力之之力矩代數和.

試再就此種迴轉趨勢討論之. 凡欲抵消此種趨勢，惟有加入一大小相等而方向相反之力偶，前已說明. 今假定 $ABCD$ 開始繞 E 點轉動，由其所生影響之一，必使距離 DD' 縮短，AA' 伸長. 爲消除此種影響，特在 DD' 處用一支木，並在 AA' 處繫一鏈索. 如是，作用於鏈索上之力將爲一種牽力或張力，而在支木上者將爲一種推力或壓力. 此兩種力同作用於 AD 截面上，亦成一力偶，設其力偶臂爲 r，則其力矩爲 $p\times r$，是稱爲阻力矩，其値等於 $P\times R$，但其迴轉趨勢則爲

反時針向.故以上兩種力偶 $p\times r$ 與 $P\times R$ 適成平衡.

此種構成力偶 $p\times r$ 之牽力及推力，在原梁上乃分別爲內部纖維之張應力及壓應力所代表，而施於 AD 截面之向上力則爲該截面之阻切力所代表.是以，凡施任何力 P 於梁上，其所生影響有二：其一，在任何截面 AD 上將引進一種彎曲力矩 $P\times R$，爲物質纖維內之阻力矩 $p\times r$ 所抵消；其二，將引進一種垂直切力，爲該截面之阻切力所抵消.

垂直切力(簡稱切力)旣等於阻切力，故

梁內任何截面之切力，等於在該截面左方或右方諸外力之代數和.

63. 桁架內部應力之分析——代數法 由前節所述情形，可見當桁架承受外力之作用時，將發生一種彎曲力矩及一種切力，而桁架本身則於兩端支點上同生向上之反動力以支持之，其內部則生應力以事抵抗.此內部應力之分析，本書將於下列數節中詳加論述.

吾人分析桁架內部之應力，首須注意以下數項假定：

(1) 諸桁架之各部材在同一平面上，所有作用於桁架上之外力及其內部應力，亦均在同一平面上，則按一組同平面非同點力解之.

(2) 諸桁架之各部材均在其兩端之接縫處，用光滑栓釘聯結.

(3) 諸桁架之載重均僅作用於栓釘處，亦即各部材之兩端.

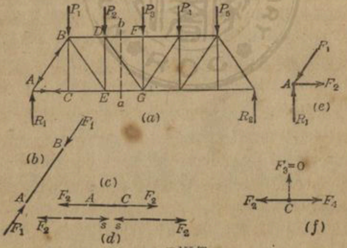
(4) 諸桁架各部材本身之重量均略而不計，蓋此等重量與所承受之載重相較甚爲微小.

依據以上假定，可知凡作用於桁架任一部材之力均集中於各該部材之兩端，且因各該部材受此等力之作用而適成平衡；則在此兩

端之力必在同一直線上，其大小相等而方向相反．因之，此等力之作用線必與各該部材之軸線適相叠合．故各部材之內部應力必爲一直接張應力或壓應力．

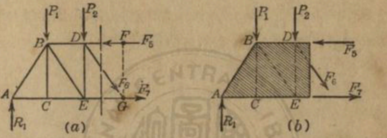
64. **截取法** 凡計算桁架之內部應力，以用截取法最爲迅捷準確．所謂截取法，係假想將桁架任一部材截分爲二，任取一部分作爲自由體，在此自由體中，使所有被截各部材之內部應力及作用於此部分桁架上之各外力，聯合成一平衡狀態．再依前述方法，就所有已知之外力，求各未知之內部應力．但在每一被截部材中，此未知元素不能超過三個，亦卽未知應力之部材不能超過三個；否則卽成爲不易解決之問題．

如在第 155 圖中，設以虛線 ab 截取桁架之左面部分加以分析．此部分桁架，共受六個力之作用而成平衡，卽 R_1, P_1, P_2（均爲已知）



第 155 圖

及 DF, DG 與 EG 三部材之內部應力（均為未知），如第 156 圖(a)。今因 DF 及 EG 兩部材之應力均成水平，並無垂直分力，於是由方程式 $\Sigma F_y=0$，可求得 DG 部材之應力 F_6. 次以 G 為力矩中心，則由方程式 $\Sigma M_G=0$，可求得 DF 部材之應力 F_5. 同理，以 D 為力矩中心，則由方程式 $\Sigma M_D=0$，又可求得 EG 部材之應力 F_7.



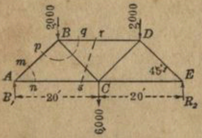
第 156 圖

惟在此有應注意者，即關於 F_5, F_6 與 F_7 諸力，若就桁架全部在平衡狀態下而言，固屬 DF, DG 與 EG 諸部材之內部應力，但若就被截後之左面部分桁架而言，此 F_5, F_6 與 F_7 應屬於外力，與其他各外力應等量齊觀。蓋當研究此部分桁架之平衡時，僅有作用於此部分之外力必須計入，至未被截之各部材，其內部應力對於 F_5, F_6 與 F_7 將毫不發生影響也。試以影線將桁架未被截之部分塗沒使成一塊狀體，如第 156 圖(b)，則上述意義自將更見明瞭。

例題 24. 試求第 157 圖中所示橋架各部材之內部應力.

解　因橋架本身原係對稱，其載重亦成對稱，故兩端反動力應各等於總載重之一半，即

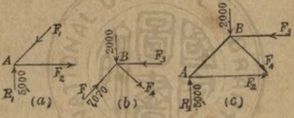
$$R_1=R_2=\frac{10,000}{2}=5,000\text{ 斤}.$$



第157圖

第一步，先就桁架之 mn 處截之，取其左面部分，如第158圖(a)，作爲自由體．命 F_1 及 F_2 各表 AB 及 AC 兩部材之內部應力．此 F_1, F_2 二力在自由體中已成爲兩個外力，與 R_1 同作用於 A 點而成平衡．因之，在此自由體中，可得

$$\Sigma F_y=0, \quad \Sigma F_x=0.$$



第158圖

由方程式 $\Sigma F_y=0$，得

$$5,000-F_1\sin 45°=0,$$

$$\therefore \quad F_1=7,070\text{ 斤，壓應力.}$$

又由方程式 $\Sigma F_x=0$，得

$$F_2-7,070\cos 45°=0,$$

$$\therefore \quad F_2=5,000\text{ 斤，張應力.}$$

第二步，再就桁架之 pq 處截之，取其左上部分，如圖(b)，作爲自由體．在此自由體中，共有四力同作用於 B 點，其中有二力爲已知，即載重2,000斤與 AB 內之應力 F_1．因在 AB 部材內作用於 B 點之

應力 F_1 與作用於 A 點之應力 F_1，其大小必相等而方向適相反，故亦應等於 7,070 斤. 其餘 BC 及 BD 兩部材之內部應力 F_3 及 F_4 則爲未知. 以上四力適成平衡，於是由方程式 $\Sigma F_y=0$，得

$$7,070\sin 45^\circ-2,000-F_4\sin 45^\circ=0,$$

$$\therefore\ F_4=4,240 \text{ 斤，張應力.}$$

又由方程式 $\Sigma F_x=0$，得

$$7,070\cos 45^\circ+4,240\cos 45^\circ-F_3=0,$$

$$\therefore\ F_3=8,000 \text{ 斤，壓應力.}$$

其餘右半面桁架之各部材，因與左半面相應各部材適成對稱，且各載重亦成對稱，故其相應各內部應力亦應彼此相等，而無需再求.

但若僅欲求得桁架內任一部材之應力，例如 BD 之應力，則較簡捷之法，莫如從桁架之 rs 處截取其左面部分作爲自由體，如圖(c). 在此自由體中，共有 F_3, F_4 及 F_2 三個未知之力，但並非同點. 在此種情形下，須用 $\Sigma M=0$ 之方程式以解之.

設以 C 爲力矩中心，由方程式 $\Sigma M_C=0$，得

$$F_3\times 10-5,000\times 20+2,000\times 10=0,$$

$$\therefore\ F_3=8,000 \text{ 斤，壓應力.}$$

若更欲求 F_2 及 F_4 兩應力，則由方程式 $\Sigma F_y=0$，得

$$F_4\sin 45^\circ+2,000-5,000=0,$$

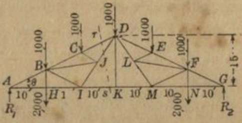
$$\therefore\ F_4=4,240 \text{ 斤.}$$

又以 B 爲力矩中心，由方程式 $\Sigma M_B=0$，得

$$F_2\times 10-5,000\times 10=0,$$

$$\therefore\ F_2=5,000 \text{ 斤.}$$

例題 25. 有一桁架如第 159 圖，其中 J 點適在 I,D 兩點之中央. 試求各部材之應力.



第 159 圖

解　因桁架及其載重均成對稱，故其兩端反動力將各等於總載重之一半，即

$$R_1=R_2=45{,}000 \text{ 斤}.$$

依圖測得 BH 等於 5 尺，故 AB 應等於 $\sqrt{10^2+5^2}=11.18$ 尺；

$\sin\theta=\dfrac{5}{11.18}=0.447$, $\cos\theta=\dfrac{10}{11.18}=0.894$.

茲先截取接縫 A 為自由體，如第 160 圖(a). 由方程式 $\Sigma F_y=0$, 得

$$0.447AB-4{,}500=0,$$

$$\therefore\quad AB=10{,}060 \text{ 斤, 壓應力}.$$

又由方程式 $\Sigma F_x=0$, 得

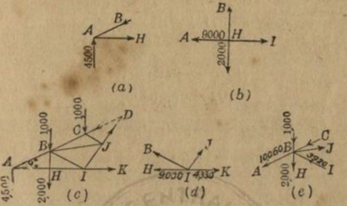
$$AH-10{,}060\times0.894=0,$$

$$\therefore\quad AH=9{,}000 \text{ 斤, 張應力}.$$

次截取接縫 H 為自由體，如圖(b). 由方程式 $\Sigma F_x=0$, 得

$$HI-AH=0,$$

$$HI=9{,}000 \text{ 斤, 張應力}.$$



第160圖

又由方程式 $\Sigma F_y=0$，得

$$HB-2,000=0,$$

$$\therefore\ HB=2,000\text{ 斤，張應力.}$$

至此，倘再依次截取，則當輪至接縫 B 或 I，惟在此兩點上均有三個未知之同點力，故實無法解決。但若先將此桁架於 rs 處截取其左半面，則問題自易迎刃而解。圖(c)示該自由體圖。今以 D 爲力矩中心，由方程式 $\Sigma M_D=0$，得

$$15\,IK+1,000\times10+3,000\times20-4,500\times30=0,$$

$$\therefore\ IK=4,330\text{斤，張應力.}$$

既已求得 IK 之應力，則在接縫 I 之未知力即減至兩個，其自由體圖如圖(d)。圖中 HIB 角等於 θ，又 $\sin JIK=0.833$，$\cos JIK=0.555$。今假定 IB 及 IJ 之應力均爲張應力，由方程式 $\Sigma F_y=0$，得

$$0.447IB+0.833IJ=0;$$

又由方程式 $\Sigma F_x=0$,得

$$9,000+0.894IB-0.555IJ-4,330=0.$$

由上兩式,得

$$IB=-3,920\text{ 斤};$$

$$IJ=+2,100\text{ 斤}.$$

式中 IJ 爲正號,表該力確屬張應力;IB 爲負號,則表以上假定錯誤,而應屬壓應力.

次再就接縫 B 而言,此時作用於該點之未知力已減至兩個,即 BC 與 BJ,如圖(e).依一般原則,當普通桁架承受垂直載重時,其上桁皆屬壓應力,亦即 BC 應力之方向可以預知.至於 BJ 則姑假定爲張應力.由方程式 $\Sigma F_x=0$,得

$$10,060\times0.894+0.988JB-3,920\times0.894-0.894BC=0;$$

又由方程式 $\Sigma F_y=0$,得

$$3,000+0.447BC-10,060\times0.447-3,920\times0.447-0.164JB=0.$$

由上兩式,得

$$JB=1,550\text{ 斤, 張應力};$$

$$BC=7,850\text{ 斤, 壓應力}.$$

依同法,分別取 C, J 兩接縫爲自由體,可得

$$CD=6,730\text{ 斤, 壓應力};$$

$$CJ=1,420\text{ 斤, 壓應力};$$

$$JD=3,000\text{ 斤, 張應力}.$$

因桁架係成對稱,其右面各部材之應力可由左面相應各部材求得.

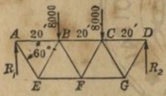
習　題

115. 有一桁架如第161圖,試求各部材之應力.

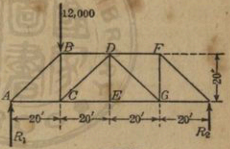
答. $AB=4,620$ 斤,壓應力;$AE=EF=9,240$ 斤,張應力;
$EB=9,240$ 斤,壓應力;$BF=0$;$BC=9,240$ 斤,壓應力.

116. 在第161圖中,若將 B 點載重易為4,000斤,試再求各部材之應力.

答. $AB=3,980$ 斤壓;$AE=EF=3,160$ 斤張;$EB=6,160$ 斤壓;
$BC=6,930$ 斤壓;$BF=1,540$ 斤張;$CF=1,540$ 斤壓;
$FG=GD=7,700$ 斤張;$CG=7,700$ 斤壓;$CD=3,850$ 斤壓.



第161圖



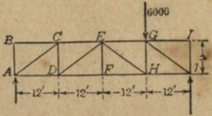
第162圖

117. 有一哈愛桁架如第162圖,試求 AB, BC 及 CD 各部材之應力.

答. $AB=12,700$ 斤壓;$BC=3,000$ 斤壓;$BD=9,000$ 斤壓.

118. 有一哈愛桁架如第163圖,試求 CE, DE 及 DF 各部材之應力.

答. $CE=2,000$ 斤壓;$DE=2,[illegible]00$ 斤壓;$DF=4,000$ 斤張

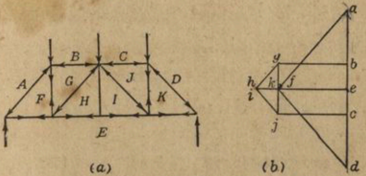


第 163 圖

65. 桁架內部應力之分析——圖解法　分析桁架之內部應力，用圖解法實較代數法簡便迅速．在圖解法中，首須求得兩端之反動力．若載重與反動力互成平行，可用第 50 節所述之方法（平行力之平衡——圖解法）；反之，若非平行，則用第 59 節所述之方法（同平面非同點力之平衡——圖解法）．此反動力求得後，卽將桁架各接縫依次截爲自由體，按比例尺作力之多邊形．因各自由體皆成平衡，故各個力之多邊形應皆成閉合；同時，凡其中未知力並未超過兩個者，卽可依次求解．

但若於任一接縫處，其未知力共有三個時，此問題一時殊不易解決，如此，則惟有更就其他接縫設法先求得其中任一力，使未知力減至兩個，再依各接縫之次序逐漸進行．苟桁架之結構複雜，部材衆多，載重緊密，所有已知諸力不便由一次聯結以求得其合力時，亦可將其分成幾個部分分別求其合力，此幾個合力之總和卽爲所求之實在合力．波氏記號在此種圖解法中最宜採用．至各部材之爲張應力抑爲壓應力，皆由力線圖中各力線之方向表之．茲且舉例於下：

如第 164 圖之哈愛桁架，其上載重假定均屬相等，則其兩端之反動力各等於總載重之半．按適當比例尺作 ab, bc, cd 等力線，使分



第164圖

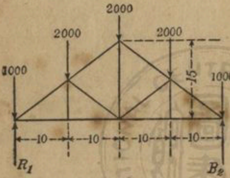
别等於 AB, BC, CD 各載重. 平分 ad 於 e, 於是 de 及 ea 各表 DE 及 EA 兩反動力之大小. 第二步, 依各接縫之循環次序, 最先應爲桁架之左端接縫. 在該點上共有三力, 一爲左端反動力 EA, 其大小及方向均爲已知, 其餘二力爲 AF 及 FE, 其方向已知, 大小則均爲未知. 茲因此三力係成平衡, 故其力之三角形必成閉合. 由 a 作一線與 AF 平行, 又由 e 作一線與 EF 平行, 使相交於 f. 由是, 此 af 及 fe 即各表 AF 及 FE 兩應力之大小. 又按 eaf 之次序, 知力線 af 方向係自上向下, 此表 AF 部材之應力當爲壓應力; 而 fe 方向係自左向右, 此即表 FE 部材之應力當爲張應力.

第三步, 應爲桁架左上角之一接縫. 在此接縫上共有四力, 二力爲已知, 即 FA 與 AB, 其餘二力 BG 及 GF, 其方向已知, 大小則均爲未知. 又於力線圖中, ab 及 fa 兩力線業已求得, 自 b 及 f 兩點分別作兩力線與 BG 及 FG 平行, 使相交於 g. 由是, 此 bg 及 gf 兩力線即各表 BG 及 GF 兩應力之大小, 而其次序則表 BG 當爲壓應力, GF 當爲張應力. 依同法, 其餘各接縫均可順次解決, 最後可得一完全力

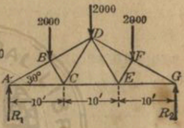
線圖如圖(b). 圖中任一力線之長，皆按相當比例尺，表此桁架上相應部材之應力.

習題

119. 試用圖解法求第165圖中各部材之應力.



第165圖



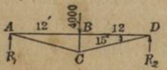
第166圖

120. 試用圖解法求第166圖中各部材之應力.

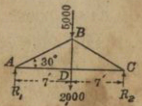
總習題

121. 試求第167圖所示桁架中 AB, AC 及 BC 各部材之應力.

答. AB−7,470 斤壓; AC−7,730 斤張; BC−4,000 斤壓.



第167圖



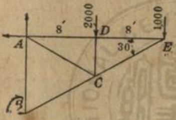
第168圖

122. 試求第168圖所示桁架中各部材之應力.

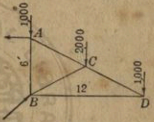
答. AB－7,000 斤壓; AD－6,000 斤張; BD－2,000 斤張.

123. 第169圖示一桁架,其B點之反動力係成水平,A點之反動力則兼有水平及垂直.試求此等反動力之大小及桁架各部材之應力.

答. B－3,460 斤; A_H－3,460 斤; A_V－3,000 斤. AB－2,000 斤張; AD－1,730 斤張; AC－2,000 斤張; BC－4,000 斤壓; DC－2,000 斤壓; DE－1,730 斤壓; CE－2,000 斤壓.



第169圖



第170圖

124. 有一肱架如第170圖,已知在A點之反動力係成水平.試求其A,B兩端之反動力及桁架各部材之應力.

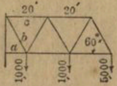
答. A－4,000 斤; B－5,656斤,與水平成45°. AB－3,000 斤壓; AC－4,472 斤張; BC－2,236 斤壓; CD－2,236 斤張; BD－2,000 斤壓.

125. 試求第171圖所示桁架中 a,b 及 c 各部材之應力.

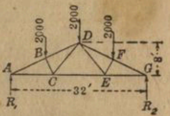
答. a－16,740 斤壓; b－8,080 斤張; c－12,700 斤張.

126. 試求第172圖所示桁架中各部材之應力.

答. AB－6,710 斤壓; AC－6,000 斤張; BC－1,790 斤壓; BD－5,815 斤壓; CD－2,000 斤張; CE－4,000 斤張.



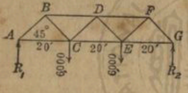
第171圖



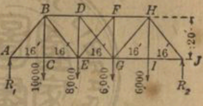
第172圖

127. 試求第173圖所示桁架中各部材之應力.

答. AB−8,481 斤壓; AC−6,000 斤張; BC−8,481 斤張; BD−12,000 斤壓; CE−12,000 斤張; CD−0.



第173圖



第174圖

128. 在第173圖中,若於 B 點另加一 3,000 斤之載重,試求 BD 部材之應力.

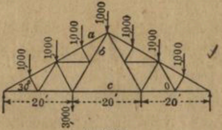
答. 14,000 斤壓.

129. 在第174圖之桁架中,試求 AB, AC, BD 及 BE 各部材之應力.

答 AB−21,000 斤壓; AC−13,120 斤張; BD−18,240 斤壓; BE−8,190 斤張.

130. 試求第175圖所示桁架中 a, b 及 c 各部材之應力.

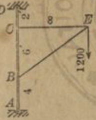
答. a−9,600 斤壓; b−5,050 斤張; c−5,200 斤張.



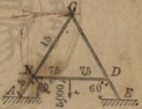
第175圖

131. 有一起重架如第176圖,試求 CE 及 BE 兩部材之應力及 A,D 兩點之反動力.

答. $CE=1,600$ 斤張; $BE=2,000$ 斤壓.
$A=1,440$ 斤, 與水平成 $56°20'$; $D=800$ 斤.



第176圖



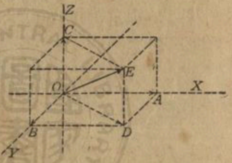
第177圖

132. 有一A字形框架如第177圖,其 A 端係支持於光滑地板上, E 端則用栓釘聯結. 試求 A,E 兩端之反動力及 B,C,D 各接縫栓釘壓力之水平與垂直分力.

答. $A=E=2,500$ 斤. $B_V=D_V=2,500$ 斤;
$B_H=C_H=D_H=481$ 斤; $C_V=0$.

第五章　非同平面同點力

66. 分解任一力爲三個互成正交之分力　設$OE=F$表所有之力，又OX，OY及OZ爲三個互成正交之坐標軸，其原點O卽爲F力之作用線上任一點(第178圖).



第178圖

玆先通過OZ及OE兩線作一平面，於此平面上將F力分解爲兩個分力：一卽沿Z軸上，得OC；一則垂直Z軸，得OD. 次於OX，OY平面上將OD一分力更分解爲兩個分力：一沿X軸上，得OA；一沿Y軸上，得OB. 於是$\overline{OE}^2=\overline{OC}^2+\overline{OD}^2=\overline{OC}^2+\overline{OB}^2+\overline{OA}^2$.

設命$\angle XOE=\alpha$, $\angle YOE=\beta$, $\angle ZOE=\gamma$,

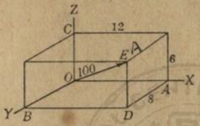
則
$$F_x=OA=F\cos\alpha,\quad F_y=OB=F\cos\beta,$$
$$F_z=OC=F\cos\gamma.$$

反之，若OA, OB及OC表三個互成正交之分力同作用於O點，則其合力將爲

$$F=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2}.$$

又　　$\cos\alpha=\frac{OA}{F}$,　$\cos\beta=\frac{OB}{F}$,　$\cos\gamma=\frac{OC}{F}$.

例題 26.　第179圖示一100斤之力作用於立方形之對角線OE上.已知立方形之邊長各爲12尺,8尺及6尺.試將該力沿立方形之各邊分解爲三個互成正交之分力.



第179圖

解　$OE=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2}$

$=\sqrt{12^2+8^2+6^2}$

$=\sqrt{244}=15.62$ 尺.

$\angle\alpha=\angle EOA$,　　$\cos EOA=\frac{12}{15.62}$,

$\therefore\ F_x=100\times\frac{12}{15.62}=76.8$ 斤.

$\angle\beta=\angle EOB$,　　$\cos EOB=\frac{8}{15.62}$,

$\therefore\ F_y=100\times\frac{8}{15.62}=51.2$ 斤.

$\angle\gamma=\angle EOC$,　　$\cos EOC=\frac{6}{15.62}$,

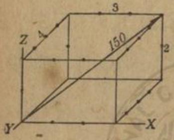
$\therefore\ F_z=100\times\frac{6}{15.62}=38.4$ 斤.

若上述之力係作用於相反方向,則所有三個分力,大小雖仍相同,但其符號同爲負.若該力係作用於立方形之其他對角線上,則三個分力將有正有負.

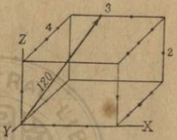
習　題

133. 在第180圖中，試將150斤之力分解爲三個互成正交之分力.

答. $F_x=83.5$ 斤；$F_y=-111.4$ 斤；$F_z=55.7$ 斤.



第180圖



第181圖

134. 在第181圖中，試將120斤之力分解爲三個互成正交之分力，並計算 α,β 及 γ 等角之值.

答. $F_x=26.2$ 斤；$F_y=-104.7$ 斤；$F_z=52.4$ 斤.

$\alpha=77°25'$；$\beta=150°50'$；$\gamma=54°10'$.

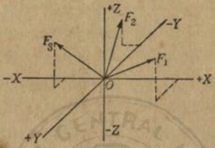
67. 一組非同平面同點力之合力　設有一組非同平面之力作用於一共同點 O，若欲求其合力，最簡捷之法，莫如先將諸力各分解爲 x, y 及 z 三個分力. 次將所有 x 分力相加，求其代數和 ΣF_x；同理，將所有 y 分力及 z 分力分別相加，求其代數和 ΣF_y 及 ΣF_z，由此再求其合力.

如第182圖，命 F_1,F_2,F_3 爲所有之力，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 及 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 爲此諸力分別與 OX, OY 及 OZ 三軸之交角. 於是

$$\Sigma F_x = F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2 - F_3\cos\alpha_3,$$

$$\Sigma F_y = F_1\cos\beta_1 - F_2\cos\beta_2 + F_3\cos\beta_3,$$

$$\Sigma F_z = F_1\cos\gamma_1 + F_2\cos\gamma_2 + F_3\cos\gamma_3.$$



第182圖

而 F_1, F_2 及 F_3 之合力將等於

$$R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2+(\Sigma F_z)^2}.$$

又若 α_r, β_r 及 γ_r 爲此合力分別與 OX, OY 及 OZ 三軸之交角，則

$$\cos\alpha_r=\frac{\Sigma F_x}{R},\quad \cos\beta_r=\frac{\Sigma F_y}{R},\quad \cos\gamma_r=\frac{\Sigma F_z}{R}.$$

至欲定此合力作用線所在之象限爲何，則須先求得 ΣF_x, ΣF_y 及 ΣF_z 之值爲正爲負，而後將此各值於相當軸上沿相當方向分別註明之.

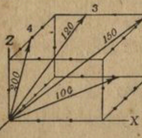
習　　題

135. 試求第183圖中100斤及200斤兩力之合力.

答. $R=274$ 斤; $\alpha=80°35'$, $\beta=147°10'$, $\gamma=59°$.

136. 試求第183圖中四力之合力.

答. $R=535$ 斤; $\alpha=73°10'$, $\beta=146°40'$, $\gamma=62°10'$.



第183圖

68. 力對於任一線之力矩 前已論及，設有一力 F 作用於某一物體，今於該物體上之任一點 O 通過一垂直力矩軸 A-A，則物體將生環繞該軸線轉動之傾向，而 F 力對於 A-A 軸之力矩，卽等於 F 之大小及其作用線與軸線之垂直距離之相乘積. 但若軸線並非與力之作用線成垂直，而係(1)與之平行，或(2)與之相交，則其力矩均等於零. 蓋力之作用線若與軸線平行，則該力實無將物體繞此軸線轉動之傾向，故其力矩必等於零. 又若力之作用線與軸線相交，則力臂將等於零，故其力矩亦等於零.

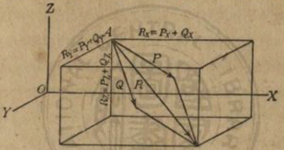
倘力矩軸與力之作用線既非相交，亦不平行，但又不與其作用面成垂直時，則可將該力分解爲兩個互成正交之分力，一與軸線成平行，一與成垂直. 依前述原則，凡與軸線平行之分力對於此軸線之力矩等於零，其與軸線成垂直之分力對於此軸線之力矩等於該分力之大小及其力臂之相乘積. 因之，原力對於軸線之力矩卽等於垂直分力對於該軸線之力矩.

又一方法，係將該力分解爲三個互成正交之力，其一與軸線平行，故對此軸線並無力矩可言. 於是其他二分力之力矩和卽等於該力之力矩.

至於力矩記號應爲正爲負，須視該力對於軸線繞轉之方向而定. 如自軸線之正端視之，其繞轉方向係反時針向者，記號爲正；順時針向者，記號爲負.

69. 非同平面同點力之力矩原則 兩個同點力對於在同一平面內任一點之力矩和卽等於其合力對於該點之力矩,上節略已討論.本節中更就此種原則加以闡明,其性質不特適用於平面內之任何點,並可適用於空間內之任何軸.

如在第 184 圖中,命 P 及 Q 為兩個作用於 A 點之同點力,R 為其合力.又命 X-X,Y-Y 及 Z-Z 為三個直角坐標軸.此 P,Q 兩力及其合力 R 均可在 A 點各分解為 x, y, z 三個分力.今因 R 為 P 與 Q



第 184 圖

之合力,故 $R_x=P_x+Q_x$; $R_y=P_y+Q_y$; $R_z=P_z+Q_z$. 於是 R 對於 X 軸之力矩將為

$$M_x=R_y\times z+R_z\times y=(P_y+Q_y)z+(P_z+Q_z)y.$$

蓋因 P_x 與 Q_x 對於 X 軸均無力矩可言,故 M_x 乃得如上之結果.

同理,得

$$M_y=R_x\times z-R_z\times x=(P_x+Q_x)z-(P_z+Q_z)x;$$

及 $$M_z=-R_x\times y-R_y\times x=-(P_x+Q_x)y-(P_y+Q_y)x.$$

如更有其他力加入,上述原則仍可適用.故

無論若干個非同平面同點力對於空間內任何軸之力矩代數和

即等於其合力對於該軸之力矩.

70. 一組非同平面同點力之平衡——代數法　由上述觀之,可見設有一組非同平面同點力,其合力 $R=0$,則 $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$ 及 $\Sigma F_z=0$,而此一組之力適成平衡.

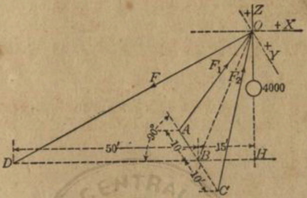
反之,若有一組非同平面同點力適成平衡,則無論將諸力沿任何軸上分解,其分力之代數和必等於零.

依此原則可得三個獨立方程式,即 $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$ 及 $\Sigma F_z=0$. 若在此等方程式中,所有未知元素不超過三個,則可用代數法解之. 此三個未知元素通常多為力之大小,其方向則均為已知.

今若將此等非同平面同點之平衡力投射於任一平面上,則其射影亦必將組成一種同平面同點之平衡力. 惟在此種投射面中,此一組之平衡力僅能成立兩個獨立方程式,故選擇第一個投射面時,務須使其中有兩個未知元素之射影合而為一,方能求解.

若有一組非同平面同點力係在平衡狀態下,則所有諸力對於空間內任一軸之力矩代數和亦必將等於零. 在此種情形,倘任取一線使與其中之兩個未知力相交,並即令為力矩之第一軸,則結果所得方程式僅含一個未知元素,自易解決之. 同樣,倘欲再求第二個力矩方程式,又可再取任一線使與其餘任二未知力相交,並令為力矩之第二軸,則由所得方程式,將可求得第二個未知力. 如是所餘留者僅有一個未知力,可再任取一線為其力矩之第三軸. 玆舉例於下.

例題 27.　有一三脚起重架,如第 185 圖,其支木 OA 及 OC 之長均為 40 尺. 若在 O 點懸一 4,000 斤之重量,試求背柱 OD 及支木 OA, OC 之應力.



第185圖

解　先通過 O 作 OX, OY, OZ 三個互成正交之軸，將所述之力沿此三軸各分解爲三個分力，而後應用平衡原則以求之.

在計算之前，須先求得以下數種尺寸，卽

$$BO=\sqrt{40^2-10^2}=\sqrt{1,500}=38.7\text{ 尺};$$

$$OH=\sqrt{1,500-15^2}=\sqrt{1,275}=35.7\text{ 尺};$$

$$OD=\sqrt{65^2+1,275}=\sqrt{5,500}=74.2\text{ 尺}.$$

玆假定 OZ 軸係與 OH 相疊合；OX 軸與 DH 平行；又 OY 軸與 AC 平行.

又假定所有未知諸力 F, F_1 及 F_2 皆如圖示之方向.

於是 4,000 斤重量沿 OZ 之分力 $=-4,000$; 沿 OX 之分力 $=0$; 沿 OY 之分力 $=0$. 故

F 之分力（沿 OZ 者）$=-F\frac{OH}{OD}=-F\frac{35.7}{74.2}=-0.48F$,

（沿 OX 者）$=-F\frac{DH}{OD}=-F\frac{65}{74.2}=-0.88F$;

（沿 OY 者）$=0$.

F_1 之分力（沿 OY 者）$=F_1\frac{AB}{AO}=F_1\frac{10}{40}=0.25F_1$;

（沿 BO 者）$=F_1\frac{BO}{AO}=F_1\frac{38.7}{40}=0.97F_1$;

（沿 OX 者）$=F_1\frac{BO}{AO}\times\frac{BH}{OB}=F_1\frac{15}{40}=0.38F_1$;

（沿 OZ 者）$=F_1\frac{BO}{AO}\times\frac{OH}{OB}=F_1\frac{35.7}{40}=0.89F_1$.

F_2 沿 OY 之分力 $=-0.25F_2$; 沿 OX 之分力 $=0.38F_2$; 沿 OZ 之分力 $=0.89F_2$.

$$\therefore\quad \Sigma F_x=-0.88F+0.38F_1+0.38F_2=0;$$

$$\Sigma F_y=0.25F_1-0.25F_2=0;$$

$$\Sigma F_z=-0.48F+0.89F_1+0.89F_2-4{,}000=0.$$

由上三式，得

$F=2{,}500$ 斤（張應力），

$F_1=2{,}900$ 斤（壓應力），

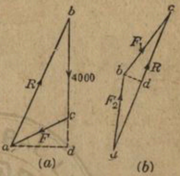
$F_2=2{,}900$ 斤（壓應力）.

此 F, F_1 及 F_2 諸值均為正數，乃表前所假定各力之方向均屬正確.

在此題中，尚有一更簡單迅捷求法，再述之於下. 按作用於 O 點之四力 F, F_1, F_2 與 4,000 斤係成平衡，故可先將此四力分為兩對，

其中一對之合力必與另一對之合力互成平衡，又因合力與其原有之兩力必在同一平面上，故上述兩合力之作用線必卽爲含有上述兩對力之二平面相交之線.玆爲便利起見，卽將 F 與4,000斤合爲一對，F_1 與 F_2 合爲另一對，此兩對合力必互相平衡，而其作用線卽在 BO 上.

命 R 表 F_1 及 F_2 之合力，則4,000斤，F 及 R 三力將互成平衡.作力之三角形 abc，如第186圖(a).由 abd 與 BOH 及 acd 與 DOH 兩對相似三角形，求得 abc 各邊之長爲



第186圖

$$ab=38.7;\quad bc=27.5;\quad ac=17.1.$$

於是
$$\frac{F}{4{,}000}=\frac{17.1}{27.5},$$

$$\therefore\quad F=2{,}500\text{ 斤 (張應力)}.$$

又
$$\frac{R}{4{,}000}=\frac{38.7}{27.5},$$

$$\therefore\quad R=5{,}630\text{ 斤}.$$

再分解 R 爲 F_1 與 F_2 兩個分力.作力之三角形，如圖(b).當作此力之三角形時，乃想像此含 F_1 與 F_2 兩力之平面 AOC 已轉至書面位置.次分 abc 爲兩個正三角形，如圖所示，並由 AOB 與 BOC 兩相似三角形，按比例尺求此 abc 各邊之長，得

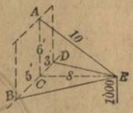
$$ab=bc=40;\qquad ac=2\times 38.7=77.4.$$

於是
$$\frac{F_1}{5{,}630}=\frac{40}{7.4},$$

$$F_1=2{,}900\text{斤(壓應力)};$$

又
$$F_2=2{,}900\text{斤(壓應力)}.$$

例題 28. 有一托架如第 187 圖所示，在 E 點懸有一 1,000 斤之重量. 試求 AE, DE 及 BE 各部材之應力.



第 187 圖

解 先以 DB 線爲力矩之第一軸，由方程式 $\Sigma M=0$，得

$$1{,}000\times 8-AE\times\frac{6\times 8}{10}=0,$$

$$\therefore\quad AE=1{,}667\text{斤}.$$

次以通過 B 點之垂直線爲力矩之第二軸，由方程式 $\Sigma M=0$，得

$$1{,}667\times 0.8\times 5-DE\times 8\times\frac{8}{8.54}=0,$$

$$(DE\text{ 之長}=\sqrt{3^2+8^2}=8.54.)$$

$$\therefore\quad DE=890\text{斤};$$

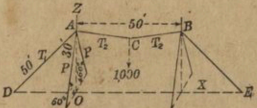
及由方程式 $\Sigma F_z=0$，得

$$\frac{5}{9.42}BE-\frac{3}{8.54}\times 890=0,$$

$$\therefore\quad BE=590\text{斤}.$$

例題 29. 有一高架索如第 188 圖. 在鐵索 AB 之中央懸有一 1,000 斤之重量，致鐵索下墜 4 尺. 試求 T_1, T_2 及 P 之應力.

解 先以鐵索 AB 及 1,000 斤之重量，作爲自由體. 於是應力 T_2



第188圖

與1,000斤重量將成爲一組同平面同點力.因 C 點下墜4尺,故 AC 之長$=25.32$尺.

由方程式 $\Sigma F_z=0$,得

$$2T_2\times\frac{4}{25.32}=1,000,$$

$$\therefore\quad T_2=3,165\text{ 斤}.$$

$$AO\text{ 之長}=30\sin 60^\circ=25.98\text{ 尺};$$

$$OD\text{ 之長}=\sqrt{50^2-25.98^2}=42.7\text{ 尺}.$$

作用於 A 點之四力結爲一組非同平面同點力,而成平衡狀態.於是由方程式 $\Sigma F_x=0$,得

$$3,165\times\frac{25}{25.32}-\frac{42.7}{50}\times T_1=0,$$

$$\therefore\quad T_1=3,660\text{ 斤}.$$

又因高架中之兩腳係對稱形,故其應力亦應相等.由方程式 $\Sigma F_z=0$,得

$$3,660\times\frac{25.98}{50}+3,165\times\frac{4}{25.32}-2P\times 0.866=0,$$

$$\therefore\quad P=1,388\text{ 斤}.$$

習 題

137. 有一三腳架置於一水平地板上,其三腳各長 6 尺,各個支點之距離均等於 4 尺. 今在架頂懸一 100 斤之重量,試求各腳之應力.

答. 36.2 斤.

138. 在第 137 題中,若將其中任一腳自原支點向外移出 1 尺,試再求各腳之應力.

答. 44.4 斤; 33.6 斤; 33.6 斤.

139. 在第 188 圖之高架索中,若將載重向左移動,使其與 A 點之水平距離爲 10 尺,並假定下墜 3 尺,試求 AC, BC, AD 及 P 之應力.

答. AC=2,790 斤; BC=2,680 斤;

AD=3,125 斤; P=1,400 斤.

140. 在第 187 圖之托架中,若將 CD 之長易爲 5 尺,並使 1,000 斤之作用線與 CE 線在同一垂直面上,並與 CE 成 60° 之交角,試求 AE, BE 及 DE 之應力.

答. AE=1,443 斤; BE=DE=975 斤.

71. 一組非同平面同點力之平衡——圖解法 設有一組非同平面同點力,其力之多邊形係成閉合,則其合力必等於零,而此一組之力將成平衡.

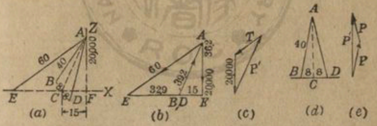
反之,若有一組非同平面同點力成平衡,則其力之多邊形必成閉合.

在此種平衡狀態下，依據力之多邊形必成閉合之條件，可共得三個獨立方程式，卽 $\Sigma F_x=0, \Sigma F_y=0$ 與 $\Sigma F_z=0$. 由此三式，所有未知元素最多不能超過三個，否則問題不能求解，而此三個未知元素通常多為力之大小，其方向則均爲已知.

再者，在此三度空間內，若力之多邊形係成閉合，則其投射於任何平面上之射影亦必成閉合，自無疑義.

故用圖解法求一組非同平面同點力之平衡問題，皆可根據上述情形，由力之多邊形投射於任何平面上之射影，以求此未知元素. 但若依據同平面同點力之平衡原則，在任一力之多邊形射影中，其未知元素不可超過兩個，否則問題又將無法求解. 是以在選擇第一平面時，務須注意者，卽應使其中兩個未知元素之射影合而爲一.

例題 30. 有一三腳起重架，如第189圖所示，頂端載有 20,000 斤之重量. 試求 AE 及 AB 之應力.



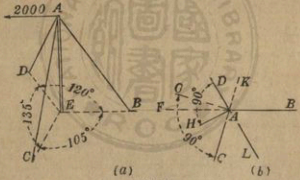
第 89 圖

解 先取垂直面 AEF 作爲第一投射面，如圖 (b)，其中 AB 與 AD 兩力所投射之射影互相疊合. 在此平面內，因所有諸力作用於 A 點適成平衡，故其力之多邊形必成閉合. 圖(c)卽示此閉合多邊形. 以力線 T 表 AE 之應力，按比例尺量之得 15,120 斤. 力線 P' 表 BA

與 DA 兩應力共同射影之合值，量之得 31,500 斤.

次由合值 P' 再求 BA 與 DA 兩應力之本值，可通過 ABD 取一平面如圖(d). 此力線 P' 即沿 CA 向作用，亦即等於 BA 與 DA 兩應力之合力. 另作一力線 P' 如圖(e)，使與 CA 平行，自該線之始端作一線平行 AB，其終端作一線平行 AD. 由此兩線之交點可決定力線 P 之長，亦即 BA 與 DA 兩應力之大小. 由圖中量之，此兩應力各得 16,100 斤.

例題 31. 第 190 圖(a)示一高 40 尺之桅竿，用長 50 尺之鋼繩三根固定於地面上. 在竿頂有一 2,000 斤之水平拉力可以繞轉 360°. 試求當拉力繞轉時，鋼繩 AB 之最大張應力及桅竿之相當壓應力.

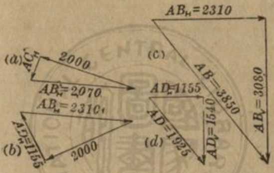


第 190 圖

解 第190圖(b)示各力作用於 A 點上之水平射影. 當拉力在 AK 與 AF 間之任一位置時，AB 與 AC 兩鋼繩有作用發生，而鋼繩 AD 則否. 又當拉力之作用線垂直於 AC 射影，即在 AG 之位置時，AB 之應力為最大，此際 AB 與 AC 之水平分力如第 191 圖(a)所示. 圖中 2,000 斤之力線係與 AG 平行，AB_H 及 AC_H 兩力線則分別平行

於 AB 及 AC 之水平射影．由此量得 $AB_H=2,070$ 斤．

其次，當拉力轉至 AF 與 AL 間之任一位置時，AD 鋼繩有作用發生，而鋼繩 AC 則否．於是當拉力之作用線垂直於 AD 射影，卽在 AH 之位置時，AB 應力爲另一最大值，其圖解法如圖(b)所示，得 AB 之水平分力爲 2,310 斤．由(a)，(b)兩圖相較，AB 應力之最大水平分力實在後一位置，故應取 $AB=2,310$ 斤．



第191圖

既已知 AB_H 之大小及 AB 之方向，因得力之三角形如圖 (c)，由此量得 AB 之最大應力爲 3,850 斤．又其垂直分力 AB_V 爲 3,080 斤．圖(d)所示爲 AD 之應力圖，其垂直分力 AD_V 等於 1,540 斤．又桅竿之壓應力必須與 AB 及 AD 兩垂直分力相平衡，因得

$$EA \text{ 之壓應力}=3,080+1,540=4,620 \text{ 斤}.$$

習　　題

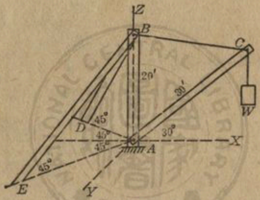
141．在第 189 圖中，若將背柱 AE 之長易爲 80 尺，試求 AE，AB 及 AD 之應力．

答. $AE=11,800$ 斤張; $AB=AD=14,000$ 斤壓.

142. 在第189圖中,若使20,000斤之力線與地面之交點在距 F 之右面10尺處,試再求 AE,AB 及 AD 之應力.

答. $AE=24,000$ 斤張; $AB=AD=18,700$ 斤壓.

143. 有一起重架如第192圖,AC 係在 XZ 平面內,其與水平之交角等於30°. BD 與 BE 係各在與 XZ 平面交成45°之垂直平面



第192圖

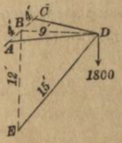
內,其與水平之交角各爲45°. 若 C 點所載重量使 BC 部材發生5,000斤之張應力,試求 AC,BD 及 BE 各部材之應力.

答. $AC=5,670$ 斤; $BE=BD=4,910$ 斤.

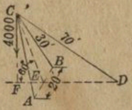
總　習　題

145　有一托架如第193圖所示,其 D 點懸有一 1,800 斤之重量,試求 AD 及 DE 兩部材之應力.

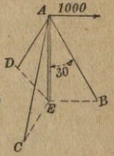
答　$AD=740$ 斤; $DE=2,250$ 斤.



第193圖



第194圖



第195圖

145. 在上題中,若1,800斤之作用線係與 DE 在同一垂直平面上,並向右下方作用,與 DE 交成 60° 之角,試再求 AD 與 DE 之應力.

答. $AD=1,066$ 斤; $DE=2,070$ 斤.

146. 有一三腳起重架如第194圖所示. 試求 AC 與 DC 之應力.

答. $AC=3,130$ 斤; $DC=3,150$ 斤.

147. 在第194圖中,若4,000斤之力係向左取水平方向作用,試再求 AC 與 DC 之應力.

答. $AC=1,170$ 斤; $DC=5,450$ 斤.

148. 在水平地面上置一三腳架,其 AB, AC 及 AD 三腳各長30尺, BC 距離24尺, CD 距離30尺, DB 距離26尺. 若於 A 點懸一1,000斤之重量,試用圖解法求各腳之應力.

答. $AB=260$ 斤; $AC=440$ 斤; $AD=465$ 斤.

149. 第195圖示一桅竿,高50尺,用三根等距離之鋼繩緊繫之,並各與桅竿交成 30° 之角. 今有一1,000斤之拉力取水平方向作

用於 A 點,並可繞 A 轉動.若拉力之作用線係平分 BEC 角,又假定所有鋼繩並不受任何壓力,試求各鋼繩之張應力及桅竿之壓應力.

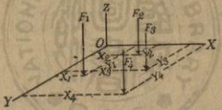
答. $AD=2,000$ 斤; $AB=AC=0$; $AE=1,732$ 斤.

NATIONAL CENTRAL LIBRARY 國家圖書館 ROC

第六章　非同平面平行力

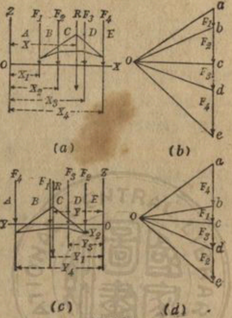
72. 一組非同平面平行力之合力——圖解法　凡一組非同平面平行力，無論作用力數之多寡，其合力之大小皆等於此一組之力之代數和，其方向亦可由此代數和求得. 至於合力之位置則用圖解法求之如下.

取兩個平面同平行於此一組之力，並互成正交. 次將所有各力分別投射於此兩平面上，再分別求此兩組射影之合力. 於是由此兩合力之位置，即可決定所求合力之位置. 試舉例說明之:



第 196 圖

設有 F_1, F_2, F_3 及 F_4 四力，如第 196 圖，均與 Z 軸平行且皆垂直向下作用. 於是，其合力 R 等於 $F_1+F_2+F_3+F_4$，其方向亦爲向下. 第 197 圖 (a) 示此一組之力投射於 XZ 平面上之射影. 由第 48 節之方法作一連鎖多邊形，求得其合力 R 之位置與 Z 軸之距離爲 x. 同理，又將此一組之力投射於 YZ 平面上，如圖 (c)，並求得其合力之



第197圖

位置與 Z 軸之距離爲 y. 故此合力 R 在空間之位置與 YZ 平面之距離應爲 x, 與 XZ 平面之距離應爲 y.

習　　題

150. 有一立方形體,每邊各長 3 尺,在其四角上依次有10 斤, 20 斤, 25 斤及 15 斤等四力同向下作用. 試用圖解法求此四力之合力.

答. $R=70$ 斤, 與 20 斤—25 斤平面相距 1.07 尺,

與 15 斤—25 斤平面相距 1.29 尺.

151. 在上題中，若 10 斤之力改爲向上作用，試再求其合力.

答. $R=50$ 斤，與 20 斤—25 斤平面相距 .3 尺，

與 15 斤—25 斤平面相距 0.6 尺.

73. 一組非同平面平行力之合力——代數法 凡一組非同平面平行力，無論作用力數之多寡，其合力之大小及方向均可由其代數和求得之. 至於合力之位置則可求之如下:

在第 197 圖(a)所示 XZ 平面之射影中，依據第 49 節之力矩原則，其合力 R 與 Z 軸之距離 x，可由下式得之:

$$x=\frac{F_1x_1+F_2x_2+F_3x_3+F_4x_4+\cdots\cdots}{R}=\frac{\Sigma Fx}{R}.$$

又據射影原則，此合力 R 之射影與 Z 軸之距離 x，亦卽等於 R 在空間內與 YZ 平面之距離. 同理，可求得距離 y 爲

$$y=\frac{F_1y_1+F_2y_2+F_3y_3+F_4y_4+\cdots\cdots}{R}=\frac{\Sigma Fy}{R}.$$

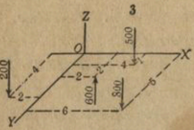
此合力 R 之射影與 Z 軸之距離 y，亦卽等於 R 在空間內與 XZ 平面之距離. 於是可得一般平行力之力矩原則如下:

一組平行力對於任一軸之力矩代數和，卽等於其合力對於該軸之力矩.

至若一組平行力之合力雖等於零，但此一組之力對於任一軸之力矩並不等於零，則其結果可構成一如第 52 節所述之力偶.

習　　題

152. 試求第 198 圖所示一組平行力之合力.



第198圖

答. $R=900$ 斤,向下; $x=5.78$ 尺, $y=4.56$ 尺.

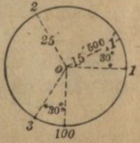
153. 在第198圖中,若600斤之力改爲向下作用,試求其合力之大小及位置.

答. $R=2,100$ 斤; $x=3.62$ 尺, $y=3.10$ 尺.

74. 非同平面平行力之平衡——圖解法 設有一組非同平面平行力互成平衡,則其投射於任何平面上之射影,亦必形成一組平衡之平行力.

但在同一平面內,一組平行力互成平衡時,僅能成立兩個平衡方程式,由此以求得兩個未知元素.故在上述情形,其未知元素即不能超過兩個.若果遇有三個時,則必須選擇第一投射平面,使其中兩個未知元素之射影互相疊合,先由此平面內求得第三個未知元素,其餘兩個再由第二投射平面內依次求之.

例題 32. 有一三腿圓桌如第199圖,桌面直徑爲5尺,各桌腿之交角均等.今若在桌邊之一點懸一100斤之重量,又在距桌邊1尺處亦懸一500斤之重量,試求此桌腿之反動力 R_1, R_2 與 R_3 之大小.

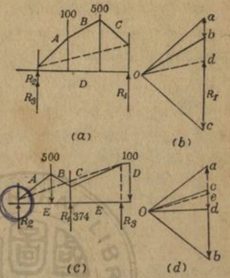


第199圖

解 在此問題中共有三個未知元素,但若作一垂直平面與1-O平行,則 R_2, R_3 兩反動力投射於此平面上之射影必互相疊合,

如第 200 圖(a). 至 R_1 之大小(卽力線 cd), 由力線圖中量之得 374 斤. 又力線 da 表 R_2+R_3, 量之得 226 斤.

次通過 R_2-R_3 作一垂直平面, 並將所有平行力投射其上, 得圖(c). 因 R_1 業已求得, 故所餘留者僅爲 R_2 與 R_3 兩個未知元素. 再由力線圖卽圖(d)中, 量之得 R_3 (卽力線 de) 爲 84 斤, 及 R_2 (卽力線 ea) 爲 142 斤.



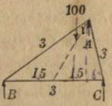
第 200 圖

75. 非同平面平行力之平衡——代數法 設有一組非同平面平行力, 其合力 R 等於零, 同時其對於任一軸之力矩 M 亦等於零, 則此一組之力係成平衡.

反之, 若一組非同平面平行力成平衡, 則其合力必等於零, 又其對於任一軸之力矩亦等於零.

按在此種情形下, 僅有三個獨立方程式: 一爲力之代數和, 其餘兩者均爲力矩之代數和, 故每一問題不能有三個以上之未知元素. 此三個未知元素大都爲力之大小, 其方向則均爲已知.

例題 33. 有一水平等邊三角板 ABC, 每邊長 3 尺, 在三頂點各有反動力支持之. 今若於頂點 A 之中線上並距頂點 1 尺處施一 100 斤之力, 如第 201 圖, 試求其三個反動力之大小.



第201圖

解 此等邊三角形之高爲2.6尺，則自BC邊至施力點之距離爲1.6尺．今以BC爲力矩軸，由方程式$\Sigma M=0$，得

$$100\times 1.6=2.6A,$$

$$\therefore \quad \text{反動力}\ A=61.5\ \text{斤}.$$

又B與C係成對稱，故反動力B＝反動力C．於是由方程式$\Sigma F=0$，得

$$B+C+61.5=100,$$

$$\therefore \quad B+C=38.5, \quad B=C=19.25\ \text{斤}.$$

總 習 題

154. 有一水平方形板，上載三個重量，其大小及位置如下：一重10斤，其坐標爲(3尺，4尺)；一重20斤，其坐標爲(1尺，5尺)；一重50斤，其坐標爲(2尺，1尺)．試求其合力之大小及位置．

答．80斤，坐標爲(1.875尺，2.375尺)．

155. 若將上題中之板支持於A,B,C三點，此三點之坐標各爲(1尺，0尺)，(0尺，4尺)，(4尺，2尺)，試求三反動力之大小．

答．A＝15.7斤；B＝30.7斤；C＝33.6斤．

156. 有每邊各長5尺之水平等邊三角板ABC．今在AB,BC,CA各邊之中點分別載有30斤，40斤，90斤之重量．試求其合力之位置．

答．距AB 1.76尺；距BC 1.32尺．

157. 若上題之水平板支持於A,B,C三頂點，試求三反動力之

大小.

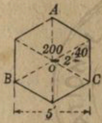
答. $A-60$ 斤; $B-35$ 斤; $C-65$ 斤.

158. 若第 157 題中水平板之 A 點反動力向 B 點之方向移近 1 尺,試再求三力之大小.

答. $A-75$ 斤; $B-20$ 斤; $C-65$ 斤.

159. 有一等邊六角形板支持於 A, B, C 三點, 板上載有 40 斤及 200 斤兩個重量,如第 202 圖所示. 試求三反動力之大小.

答. $A-80$ 斤; $B-64$ 斤; $C-95$ 斤.



第202圖

第203圖

160. 若在第 202 圖中六角形板之 BO 線上, 距 B 點 1 尺處再加一 300 斤之重量,試求 A, B, C 三點之反動力.

答. $A-114.5$ 斤; $B-295$ 斤; $C-130.5$ 斤.

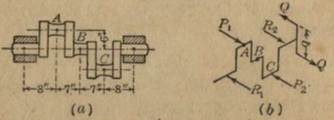
161. 第 203 圖示一直徑 6 尺之圓桌面, 支持於 A, B, C 三點, 桌上載有 300 斤及 400 斤之重量,其施力點如圖所示. 試求 A, B, C 三反動力之大小.

答. $A-192$ 斤; $B-348$ 斤; $C-160$ 斤.

162. 有一水平三角形板 ABC, 已知 AB 邊 $=8$ 尺, BC 邊 $=6$ 尺, CA 邊 $=10$ 尺. 若此水平板係支持於三頂點, 並於距 AB 邊及

BC 邊各1尺處載一100斤之重量，試求 A, B, C 三反動力之大小.

答. $A=12.5$ 斤; $B=70.83$ 斤; $C=16.67$ 斤.



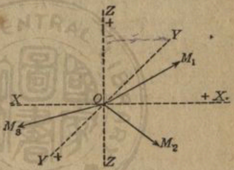
第204圖

163. 有一發動機之曲柄軸，如第204圖所示，其曲柄銷壓力 P_1 及 P_2 各為6,000磅及4,800磅. 試求其承面壓力 R_1 與 R_2 及使此軸成平衡時所需之阻力矩 Qq.

答. $R_1=3,120$ 磅; $R_2=1,920$ 磅. $Qq=64,800$ 吋磅.

第七章　非同平面非同點非平行力

76. 一組力偶之合成　命矢量 M_1, M_2, M_3 表一組在不同平面內之力偶（見第53節力偶之矢量表示法），如第205圖．此種力偶即可按第66節所述方法各分解爲三個分力，而以 X–X, Y–Y 及 Z–Z 三軸爲其力矩軸求每組分力之代數和．於是，此原有之 M_1, M_2, M_3 等一組力偶各化爲三個分力偶，ΣM_x, ΣM_y 及 ΣM_z，分別繞轉於 X–X, Y–Y 及 Z–Z 三軸．



第205圖

此一組分力偶復可按第67節所述方法(一組非同平面同點力之合力)，求得其合力偶之大小爲

$$M=\sqrt{(\Sigma M_x)^2+(\Sigma M_y)^2+(\Sigma M_z)^2}.$$

若命 α_m β_m, γ_m 分別表此合力偶之力矩軸與 X–X, Y–Y 及 Z–Z 三軸之交角，則

$$\cos\alpha_m=\frac{\Sigma M_x}{M},\quad \cos\beta_m=\frac{\Sigma M_y}{M},\quad \cos\gamma_m=\frac{\Sigma M_z}{M}.$$

77. 一組非同平面非同點非平行力之合力 欲解決此類問題，先須明瞭下列兩個原則:卽

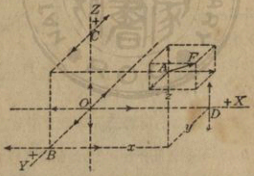
(一) 任一力在其本身作用線上任何便利之點，均可分解爲 x, y, z 三個分力(見第 66 節分解任一力爲三個互成正交之分力).

(二) 此等分力在 XY, XZ, YZ 三個平面內可以分別用一相等之力及一力偶代替之(見第 56 節分解一單力爲一相等之力及一力偶).

依據上述兩原則，又可另得一原則:卽

一組非同平面非同點非平行力，可化爲一個單力作用於任何選定之點及一力偶. 玆再詳釋於下:

命 F, F_1, F_2, …… 爲一組非同平面非同點非平行力. 作 X-X, Y-Y 及 Z-Z 三個直角坐標軸. 命 AF 爲 F 力之作用線. 通過此線上



第 206 圖

任一點 A 作三互成正交之線，各與 X-X, Y-Y 及 Z-Z 三軸平行，如第 206 圖. A 點之坐標設爲 (x, y, z)，又命 AF 線與此三線之交角各爲 α, β 及 γ.

次將 F 力分解為三個分力 $F\cos\alpha, F\cos\beta, F\cos\gamma$，各平行於 $X-X, Y-Y, Z-Z$ 三軸.

復次將此等分力各分解為一相等而平行之力，同作用於 O 點，及兩個力偶，如圖所示.

如是，則此 F 一力即將分別沿 $X-X$, $Y-Y$, $Z-Z$ 三軸上分解為三個分力 $F\cos\alpha$, $F\cos\beta$, $F\cos\gamma$，並同作用於 O，及三對分力偶 $M_x=yF\cos\gamma-zF\cos\beta$, $M_y=zF\cos\alpha-xF\cos\gamma$, $M_z=xF\cos\beta-yF\cos\alpha$，各自繞轉於 $X-X, Y-Y, Z-Z$ 三軸.

依同法，更將 $F_1, F_2, \cdots\cdots$ 等力分別沿 $X-X$, $Y-Y$, $Z-Z$ 三軸上分解為一組之分力及一組繞轉於 $X-X, Y-Y, Z-Z$ 三軸之分力偶. 此等分力及分力偶，即可按前述方法將其分別相加，而求其代數和.

命 $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z$ 各為 $X-X, Y-Y, Z-Z$ 三軸上分力之代數和，又 $\Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z$ 各為繞轉於 $X-X, Y-Y, Z-Z$ 三軸之分力偶之代數和. 於是所有作用於 O 點諸分力之合力為

$$R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2+(\Sigma F_z)^2};$$

又 $$\cos\alpha_r=\frac{\Sigma F_x}{R},\quad \cos\beta_r=\frac{\Sigma F_y}{R},\quad \cos\gamma_r=\frac{\Sigma F_z}{R}.$$

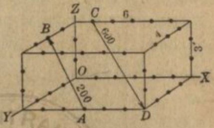
所有分力偶之合力為

$$M=\sqrt{(\Sigma M_x)^2+(\Sigma M_y)^2+(\Sigma M_z)^2};$$

又 $$\cos\alpha_m=\frac{\Sigma M_x}{M},\quad \cos\beta_m=\frac{\Sigma M_y}{M},\quad \cos\gamma_m=\frac{\Sigma M_z}{M}.$$

如此，凡任一組非同平面非同點非平行力，皆可化爲一單力 R，作用於 O 點，及一單力偶 M，其力矩軸即以通過 O 點之矢量表之.

例題 34. 試將第207圖所示諸力結合成一作用於O點之力及一力偶.



第 207 圖

解 先將200斤之力就其作用線上之A點分解爲三個互成正交之分力，並以作用線 AB 爲對角線；作一正長方體，其 x, y, z 三邊各等於 3, 2 ,3 尺. 於是對角線之長爲$AB=\sqrt{9+4+9}=4.69$ 尺.

$$F_x=-200\times\frac{3}{4.69}=-128 \text{ 斤},$$

$$F_y=-200\times\frac{2}{4.69}=-85.3 \text{ 斤},$$

$$F_z=200\times\frac{3}{4.69}=128 \text{ 斤}.$$

若此等作用於A點之分力皆易爲作用於O點上相等之力及力偶，則此等力偶爲

$$M_x=-128\times4=-512 \text{ 尺斤},$$
$$M_y=128\times3=384 \text{ 尺斤},$$
$$M_z=85.3\times3-128\times4=-256 \text{ 尺斤}.$$

次將600斤之力就其作用線上之 C 點分解爲三個互成正交之

分力，並以作用線 CD 爲對角線，作一正長方體，其 x，y，z 三邊各等於 5，4，3 尺．於是對角線之長爲

$$CD=\sqrt{25+16+9}=7.07\text{ 尺}.$$

$$F_x=600\times\frac{5}{7.07}=424.2\text{ 斤},$$

$$F_y=600\times\frac{4}{7.07}=339.4\text{ 斤},$$

$$F_z=-600\times\frac{3}{7.07}=-254.5\text{ 斤}.$$

若此等作用於 C 點之分力皆易爲作用於 O 點上相等之力及力偶，則此等力偶爲

$$M_x=339.4\times3=1,018.2\text{ 尺斤},$$

$$M_y=-424.2\times3-254.5\times1=-1,528.1\text{ 尺斤},$$

$$M_z=-339.4\times1=-339.4\text{ 尺斤}.$$

以上兩組分力可結合之如下：

$$\Sigma F_x=-128+424.2=296.2\text{ 斤},$$

$$\Sigma F_y=-85.3+339.4=254.1\text{ 斤},$$

$$\Sigma F_z=128-254.5=-126.5\text{ 斤}.$$

其合力爲

$$R=\sqrt{168,305}=410.3\text{ 斤};$$

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{296.2}{410.3}\right)=43°50',$$

$$\beta=\cos^{-1}\left(\frac{254.1}{410.3}\right)=51°40',$$

$$\gamma=\cos^{-1}\left(\frac{-126.5}{410.3}\right)=107°55'.$$

同理，以上兩組力偶亦可結合為：

$$\Sigma M_x = -512 + 1,018.2 = 506.2 \text{ 尺斤},$$

$$\Sigma M_y = 384 - 1,528.1 = -1,144.1 \text{ 尺斤},$$

$$\Sigma M_z = -256 - 339.4 = -595.4 \text{ 尺斤}.$$

其合力偶為

$$M = \sqrt{1,919,740} = 1,386 \text{ 尺斤};$$

$$\alpha_1 = \cos^{-1}\left(\frac{506.2}{1,386}\right) = 63°30',$$

$$\beta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{-1,144.1}{1,386}\right) = 145°40',$$

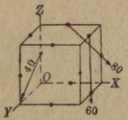
$$\gamma_1 = \cos^{-1}\left(\frac{-595.4}{1,386}\right) = 115°30'.$$

習　題

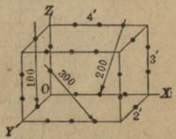
164. 試將第 208 圖所示諸力結合為一作用於 O 點之力及一力偶. 已知此立方體之各邊均等於 2 尺.

答. $R = 150$ 斤；　$\alpha = 67°50'$，$\beta = 76°12'$，　$\gamma = 153°40'$.

$M = 305$ 尺斤：$\alpha_1 = 71°40'$，$\beta_1 = 161°40'$，$\gamma_1 = 90°00'$.



第 208 圖



第 209 圖

165. 試將第209圖所示諸力結合爲一作用於 O 點之力及一力偶.

答. $R=441$ 斤；　$\alpha=66°20'$，$\beta=68°45'$，$\gamma=147°10'$.

$M=672$ 尺斤；$\alpha_1=67°15'$，$\beta_1=157°15'$，$\gamma_1=90°00'$.

78. 一組非同平面非同點非平行力之平衡——代數法　設有一組非同平面非同點非平行力，其通過任一點之合力 R 等於零，又其相應之合力偶 M 亦等於零，即其所生之影響亦等於零，則此一組之力係成平衡.

反之，若有一組非同平面非同點非平行力係成平衡，則其合力 R 必等於零，又其合力偶 M 亦等於零.

若　$R=0$，則 $\Sigma F_x=0$，$\Sigma F_y=0$，$\Sigma F_z=0$.

又若　$M=0$，則 $\Sigma M_x=0$，$\Sigma M_y=0$，$\Sigma M_z=0$.

以上六個平衡方程式又可結合爲下列三組：

$$\Sigma F_x=0,\quad \Sigma F_y=0,\quad \Sigma M_z=0.$$

$$\Sigma F_x=0,\quad \Sigma F_z=0,\quad \Sigma M_y=0.$$

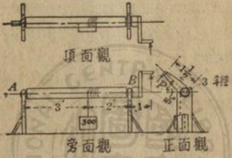
$$\Sigma F_y=0,\quad \Sigma F_z=0,\quad \Sigma M_x=0.$$

由上觀之，可見第一組方程式係爲在 XY 平面內一組同點力成平衡所必需之條件；第二組方程式係爲在 XZ 平面內一組同點力成平衡所必需之條件；及第三組方程式係爲在 YZ 平面內一組同點力成平衡所必需之條件. 又 ΣF_x 與 ΣF_y 爲此一組之力在 XY 平面上之射影之 x 與 y 兩分力，而 ΣM_z 則爲此等力在該平面上之力矩.

因之，設有一組非同平面非同點非平行力係成平衡，則此等力在任一平面上之射影亦將結爲一組平衡之力.

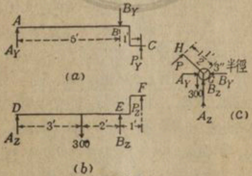
依據上述諸原則，若在任一組平衡之力中，其未知元素並未超過可以應用之方程式個數，則問題自易求解.

例題 35. 第 210 圖示一簡單手搖絞車之三面觀. 若 A 與 B 為轆轤兩端支點之反動力，P 為手搖轆轤之絞力，試求如圖示之位置時 P, A 與 B 三力之大小.



第 210 圖

解 先將絞車頂面觀之射影投射於 XY 平面上，得第 211 圖(a). 次將絞車正面觀之射影投射於 XZ 平面上，得圖(b). 再將絞車旁面觀之射影投射於 YZ 平面上，得圖(c). 在此諸射影中，所有 A 力均



第 211 圖

易爲水平及垂直分力 A_y 及 A_z，所有 B 力均易爲水平及垂直分力 B_y 及 B_z. 於是應用方程式 $\Sigma M_G=0$ 於圖(c)，得

$$P\times 18=300\times 3,$$

$$\therefore\quad P=50\text{ 磅}.$$

今在圖(c)射影中，除上値外，其餘四個力均爲未知，故實無法解決. 但在圖(a)射影中，旣已知 P. 則

$$P_y=P\cos 45^\circ=35.35\text{ 磅}.$$

由方程式 $\Sigma M_A=0$，得

$$35.35\times 6=B_y\times 5,$$

$$\therefore\quad B_y=42.42\text{ 磅}.$$

又由方程式 $\Sigma M_B=0$，得

$$35.35\times 1=A_y\times 5,$$

$$\therefore\quad A_y=7.07\text{ 磅}.$$

在圖(b)中，　$P_z=P\sin 45^\circ=35.35\text{ 磅}.$

由方程式 $\Sigma M_D=0$，得

$$35.35\times 6+B_z\times 5=300\times 3,$$

$$\therefore\quad B_z=137.6\text{ 磅}.$$

又由方程式 $\Sigma M_E=0$，得

$$35.35\times 1+300\times 2=A_z\times 5,$$

$$\therefore\quad A_z=127.1\text{ 磅}.$$

反動力 $A=\sqrt{A_y^2+A_z^2}=\sqrt{7.07^2+127.1^2}=127.5$ 磅,

國立中央圖書館藏書

其與垂直線之交角 θ_A 為

$$\theta_A=\tan^{-1}\left(\frac{7.07}{127.1}\right)=\tan^{-1}0.0555=3°10'.$$

同理，　$B=\sqrt{42.42^2+137.6^2}=144$ 磅，

$$\theta_B=\tan^{-1}\left(\frac{42.42}{137.6}\right)=\tan^{-1}0.308=17°06'.$$

習　題

166. 在例題 35 中，如(1)手柄係在水平位置；(2)手柄係在垂直位置，試各求其 P 力及轆轤反動力之水平及垂直分力.

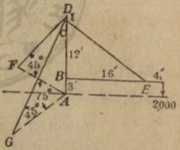
答. (1) $P=50$ 斤. $A_y=0$;　$A_x=130$ 斤. $B_y=0$;　$B_x=120$ 斤.

(2) $P=50$ 斤. $A_y=10$ 斤; $A_x=120$ 斤. $B_y=60$ 斤; $B_x=180$ 斤.

167. 第 212 圖示一起重機. 當機臂 CE, BE 之平面平分 GAF 角時，試求 CE, DF 及 DG 諸部材之應力.

答. $CE=4,170$ 斤;

$DF=DG=2,225$ 斤.



第 212 圖

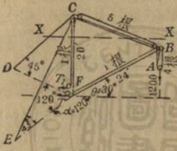
168. 在第 212 圖中，若將機臂 BE 繞主竿 AD 轉動，試求 BE 應轉至何位置方可使 DF 部材獲得最大之張應力，並求此最大張應力及 DG 部材之應力.

答. $DF=3,660$ 斤; $DG=950$ 斤.

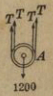
79. 一組非同平面非同點非平行力之平衡——圖解法　在前

節業已證明，若一組非同平面非同點非平行力係成平衡，則此一組之力投射於任何平面上之射影必結成一組同平面之平衡力.故依前述一組同平面平衡力之解法，在任一問題中如其所有未知之力並未超過所有獨立方程式之個數時，皆可分別求解.

例題 36. 有一起重機，其大小，位置及載重均如第 213 圖所示.試求因 1,200 斤之載重所引起之各部外反動力.



第 213 圖



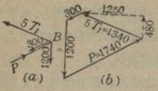
第 214 圖

解 倘就起重機之全部言之，其所有外部之力應結成一組非同平面非同點非平行力；但若將該機各部逐次取作自由體，則亦必順次結成一組同平面或非同平面同點力.是以先取 A 點之滑輪爲一自由體，如第 214 圖.若鋼繩之摩擦力不計，則在任一鋼繩內各部之張力均應相等.由方程式 $\Sigma F_z=0$，得

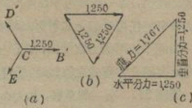
$$4T=1,200 \text{ 斤},$$

$$\therefore \quad T=300 \text{ 斤}.$$

次取栓釘 B 爲一自由體，如第 215 圖(a)，有 1,200 斤，T_1 及 P 三力同作用於該點，其中 T_1 及 P 均爲未知.圖(b)示其圖解法，由圖量之得 $T_1=268$ 斤，$P=1,740$ 斤.



第215圖



第216圖

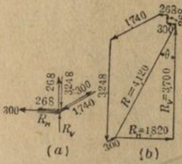
復次取一水平面 $X-X$ 將該機截斷，取其上面一部分作爲自由體而觀察之，如第 216 圖(a). 其作用於此自由體上者雖爲一組同點而非同平面之力，但若將此組力投射於 $X-X$ 水平面上時，其射影卽結成一組在平衡狀態中之同平面同點力，而此問題可以解決. 由第 215 圖(b)，$5T_1$ 之水平分力爲 1,250 斤. 又由第 216 圖(a)及(b)，CD 及 CE 兩應力之水平分力各爲 1,250 斤，故如第 216 圖(c)所示之 CD 及 CE 兩應力，應各爲 1,767 斤.

至於主竿 CF 內之壓應力，可仍就被 $X-X$ 平面所截上面一部分之自由體以求其各垂直分力. 設命主竿 CF 之壓應力爲 V. 由第 215 圖(b)，CB 之垂直分應力爲 480 斤. 又由第 216 圖(c)，CD 之垂直分應力爲 1,250 斤，及 CE 之垂直分應力亦爲 1,250 斤. 於是由方程式 $\Sigma F_z=0$，得

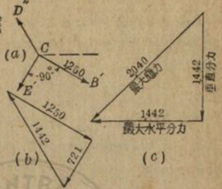
$$V-1,250-1,250-268-480=0,$$

$$\therefore\quad V=3,248\text{ 斤}.$$

再取 F 處之活節爲自由體，如第 217 圖所示，其中圖(a)示其自由體圖，圖(b)示其力線圖. 由此得 $R_H=1,820$ 斤，$R_V=3,700$ 斤；故得 $R=4,120$ 斤，其與垂直線之交角 $\theta=26°10'$.



第217圖



第218圖

若臂柱 BF 係繞主竿 CF 轉動，則在 CD, CE 兩支腳之應力亦必隨之變更. 設此臂柱係向 CE 方向繞轉，則在 CE 之應力減小，而 CD 之應力增大. 第218圖(a)示此起重機在 X–X 平面以上之一部分投射於水平面上之射影，至通過臂柱之垂直平面與通過 EC 之垂直平面則交成 $90°$ 之角. 由圖(b)中觀之，當臂柱在此種位置時，可使 CD 之水平分力爲最大，蓋矢量 CB' 之大小爲一常數，而 CE' 及 CD' 之方向又同係固定. 第218圖(c)乃示 CD 之應力求法.

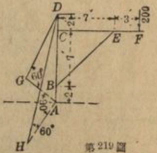
當臂柱轉至與 CD' 在同一直線上時，CD' 之水平分力僅有1,250斤，而 CE 之應力則變爲零.

當臂柱轉至與 CE 相接近時，CE 之應力變爲壓應力；而 CD 之應力則逐漸變小，直至臂柱與 CE 在同一平面上時，CD 之應力等於零.

習　題

169. 有一起重機如第219圖所示，試求其撐臂 BE 之應力. 又當臂柱繞主竿轉動時，試求其支脚 DH 及 DG 之最大張應力及壓應力.

答 $BE=1,318$ 斤；DH 及 DG 之最大張應力及壓應力 $=1,455$ 斤.



第219圖

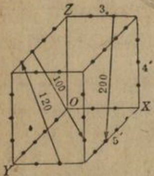
總 習 題

170. 試將第 220 圖所示之 100 斤及 200 斤之力化為一單力及一力偶.

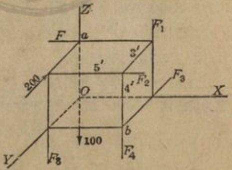
答. $R=292$ 斤； $\alpha=69°15'$, $\beta=56°40'$, $\gamma=139°10'$

$M=1,108$ 尺斤；$\alpha_1=41°15'$, $\beta_1=131°05'$, $\gamma_1=92°15'$.

171. 試再將第 220 圖中所有三力化為三個互成正交之力及三個互成正交之力偶.



第220圖



第221圖

答. $R_x=50.8$ 斤; $R_y=134.1$ 斤; $R_z=-116.3$ 斤.

$M_x=310$ 尺斤; $M_y=-518$ 尺斤; $M_z=-252$ 尺斤.

172. 有100斤, 200斤, F, F_1, F_2, F_3, F_4 及 F_5 八力同作用於一正方墻之各稜角而成平衡, 如第221圖, 其諸力之作用線分別平行於正方墻之各邊. 試求此諸未知力之大小.

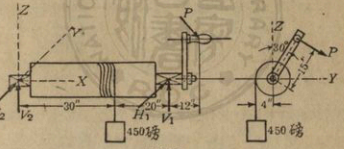
答. $F=-333$ 斤; $F_1=367$ 斤; $F_2=333$ 斤;

$F_3=200$ 斤; $F_4=-367$ 斤; $F_5=100$ 斤.

173. 第222圖示一手搖絞車舉一450磅之重量. 若手柄係與垂直線成30°之角, 試求 P 及轆轤兩端支點反動力之大小.

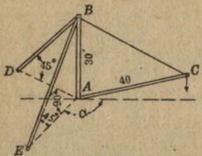
答. $P=120$ 磅. $A_y=-128.8$ 磅; $A_z=344.4$ 磅.

$B_y=24.9$ 磅; $B_z=165.6$ 磅.



第222圖

174. 有一起重機如第223圖所示, 其機臂 AC 能在垂直面內, 自水平轉至與垂直線成20°角間之位置上. 試求 BC 之應力為最大值時機臂之位置. 又當機臂在垂直面內如此位置時, 試求其水平角 α 應轉至何處方能使 BE 之壓應力為最大值. 若 C 點之載重為2,400斤, 試求 BC, AC, BE 及 BA 之最大應力.

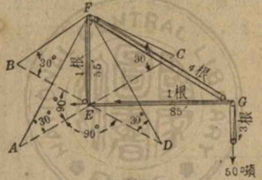


第223圖

答. $BC=4,000$斤; $AC=3,200$斤;

$BE=4,525$斤; $BA=6,920$斤.

175. 在第224圖所示起重機中,其四根緊支鋼繩與地面之交角均爲30°,主竿高55呎,機臂長 85 呎.當機臂在水平位置,並舉起 50 噸之



第224圖

重量時,試求鋼繩 FG (共有四根),鋼繩 EG 及 機臂 EG 之應力.

答. 鋼繩 FG 每一根內之應力$=46,000$磅;

鋼繩 $EG=33,330$磅; 機臂 $EG=187,880$磅.

第八章　分佈力

80. 分佈力之種類　在以前數章中所論各力，無論其爲同點或不同點，平行或不平行，在同一平面上或不在同一平面上，其施力點均係集中於數點，此種力吾人統稱之爲**集中力**. 本章所欲研究者則爲分佈力，其施力之處係分佈於一線上，或一面積上，或一體積上. 蓋宇宙間所有之力，如嚴格言之，並無眞正集中力，所謂集中力，實爲分佈力之一種，而作用於極其微小之面積上. 明乎此，則本章所述之分佈力，自仍可由以前各種原理及方程式，以爲解決途徑.

分佈力依其分佈情形可分爲三種:

(1) 力之分佈於一線上者.

(2) 力之分佈於一面積上者.

(3) 力之分佈於一體積上者.

關於前二類情形，在本書中，線僅限於直線，及面積僅限於平面.

81. 分佈力之强度　分佈力如係分佈於一線上者，則在此線上任一點之力之强度，應即指作用於該點單位長度上之力之大小而言，命 P 表作用於全線之分佈力，p 表分佈力之强度. L 表該線之總長. 於是，若此種力係平均分佈於全線上者，則分佈力之强度爲

$$p=\frac{P}{L}.$$

若並非平均分佈者，則可按微積分學中之公式，分佈力之強度爲

$$p=\frac{dP}{dL}.$$

分佈力如係分佈於一面積上者，則在此面積上任一點之力之強度，應即指作用於該點單位面積上之力之大小而言．命 P 表作用於全部面積之分佈力，p 表分佈力之強度，A 表全面積．於是，若此種力係平均分佈於全面積上者，則強度爲

$$p=\frac{P}{A}.$$

若並非平均分佈者，則在任一點之強度爲

$$p=\frac{dP}{dA}.$$

同理，若有分佈力 P 作用於一體積 V，此種力如係平均分佈於全體積上者，則強度爲

$$p=\frac{P}{V}.$$

若並非平均分佈者，則在任一點之強度爲

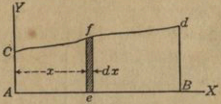
$$p=\frac{dP}{dV}.$$

82. 分佈力之合力

（一）分佈於一線上者　前已言及，集中力實爲分佈力之一種，而作用於極其微小之面積上．同時亦可謂分佈力爲無數微眇之集中力所集成，此種集中力之方向恆成平行．故本節所欲研究之問題，卽

爲解決此一組平行力.

如第 225 圖，假定曲線 Cd 與直線 AB 間所圍之面積爲表某一分佈力垂直作用於 AB 線上之情形. 因其並非平均分佈於 AB 線上，



第 225 圖

故在任一點 e 之強度 p，姑以極微渺之面積 ef 表之. 又假定 $X-X$，$Y-Y$ 兩軸如圖所示. 於是作用於 e 點之力，對於直線上 dx 之長度，其大小爲 pdx，而全部分佈力卽爲無數之類此元力所集成，其方向互相平行，其位置則在同一平面上. 因之，其合力爲

$$R=\Sigma F=\int pdx.$$

若 x_r 等於合力之作用線與 A 之距離，則其對於 A 點之力矩爲

$$Rx_r=\Sigma Fx=\int pxdx.$$

又

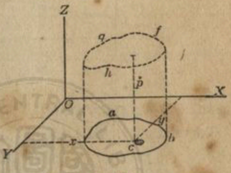
$$x_r=\frac{\int pxdx}{\int pdx}.$$

若 $p=\phi(x)$，則 R 與 x 可由積分法求之；否則可將 AB 線分成若干微小之有限長度，並假定此分佈力卽爲作用於此等有限長度上之若干平行力，然後用求「兩個以上平行力之合力」方法以求其合力. 此種解法雖僅屬近似，但用以解決若干工程問題，其結果尙能精確足用. 更有進者，倘 $ACdB$ 平面能按正確適宜之比例尺描繪，則其

面積適等於此合力之大小.

(二) 分佈於一面積上者　假定此分佈力係垂直分佈於 abc 面積上，如第 226 圖所示，並假定其在任一點 e 之強度 p，卽以面積 abc 與面積 fgh 間之垂直長度表之.

在含有面積 abc 之平面上作 OX, OY 兩直角坐標軸，並命 e 點之坐標爲 (x,y). 則在 e 點作用於一徵面積 dA 之力，其大小爲 pdA，而其全部分佈力卽爲無數之類此元力所集成，其方向互相平行，但位置則並不在同一平面上. 因之，其合力可按第 73 節所述求「一組非同平面平行力之合力」方法以求之，卽



第 226 圖

$$R = \Sigma F = \int pdA.$$

又若 x_r 及 y_r 表合力作用線之坐標，則其對於 OY 軸之力矩爲

$$Rx_r = \int pxdA.$$

又對於 OX 軸之力矩爲

$$Ry_r = \int pydA.$$

於是
$$x_r = \frac{\int pxdA}{\int pdA}; \quad y_r = \frac{\int pydA}{\int pdA}.$$

若$p=\phi(x,y)$，則R，x_r與y_r可由積分法求之；否則可將面積abc分成若干微小之有限面積，並假定此分佈力卽爲作用於此等有限面積上之若干非同平面平行力，然後按第73節所述求法求其合力．此仍爲一種近似求法．再者，倘此壔$abcfgh$能按適宜之比例尺描繪，則其體積適等於此合力R之大小．

（三）分佈於一體積上者　先就該體積作OX，OY及OZ三個直角坐標軸，並使分佈力之作用線與OZ軸平行．在此體積內，任取一點e，設其坐標爲(x,y,z)．命p表此分佈力作用於該點之強度．則在e點作用於一微體積dV之力，其大小爲pdV．由此，再就全部體積觀之，可得一組與例（二）相似之元力，並用與例（二）同一方法，得

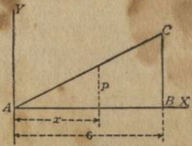
$$R=\int pdV.$$

$$x_r=\frac{\int pxdV}{\int pdV};\quad y_r=\frac{\int pydV}{\int pdV},$$

其中x_r及y_r爲合力R之作用線上任一點之坐標．

若$p=\phi(x,y,z)$，則R，x_r與y_r可用積分法求之；否則可用與例（二）相同之近似法．

例題37．今有分佈力垂直作用於直棍AB上，如第227圖，其在任一點之強度係以AC直線之縱標表之．若在B點之強度爲



第227圖

每寸 10 斤，試求其合力.

解　以 A 爲原點，並以 AB 線爲 X-X 軸，則在直棍上任一點之強度 p 爲

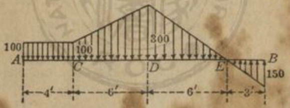
$$p=\frac{x\times CB}{AB}=\frac{10}{60}x=\frac{x}{6}.$$

$$R=\int p dx=\int_0^{60}\frac{x dx}{6}=300 \text{ 斤}.$$

又　$$Rx_r=\int px dx=\int_0^{60}\frac{x^2 dx}{6}=12,000 \text{ 寸斤}.$$

$$\therefore\quad x_r=40 \text{ 寸}.$$

例題 38.　今有分佈力沿 AB 直線作用，其情形如第 228 圖所示. 在 A,C,D,E 及 B 諸點之強度各爲每尺 100, 100, 300, 0 及 150 斤. 試求其合力.



第228圖

解　由圖中所示，可見作用於 AD 部分之力可分爲一每尺 100 斤之等佈力，其合力將爲1,000 斤，而作用於距 A 點 5 尺之處；及一等變力，其強度爲自 C 點之每尺 0 斤至 D 點之每尺 200 斤，其合力將爲 600 斤，而作用於距 A 點 8 尺之處. 至其作用於 DE 部分之力亦爲一等變之分佈力，其合力將爲 900 斤，而作用於距 A 點 12 尺之處. 又作用於 EB 部分之力亦爲一等變之分佈力，其合力將爲 225

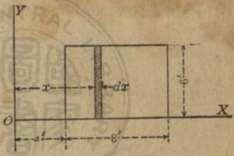
斤，而作用於距 A 點 18 尺之處. 此最末一力之作用方向爲向上；其餘各合力之作用方向則均向下. 於是原有分佈力，乃分成一組平行力，其合力爲

$$R=\Sigma F=1,000+600+900-225=2,275\text{ 斤(向下作用)},$$

$$Rx_r=1,000\times5+600\times8+900\times12-225\times18=16,550\text{ 尺斤}.$$

$$\therefore\quad x_r=7.27\text{ 尺}.$$

例題 39. 有一等變之分佈力作用於一矩形面積上，如第229圖，其上任一點之強度爲 $p=$ 每平方尺 $40x$ 斤，其中 x 爲該點與 OY 軸之距離，而 OY 軸係平行於矩形之一邊並相距 4 尺. 試求其合力.



第 229 圖

解　先取一極微小之面積，其寬爲 dx，並平行於 OY. 則其面積 dA 爲

$$dA=6dx.$$

因在此極微小之面積上，其各點之強度可假定爲均一者，故

$$pdA=40xdA=240xdx.$$

以此代入 $R=\int pdA$ 及 $Rx_r=\int pxdA$ 兩式中，因得

$$R=240\int_4^{12}xdx=15,360\text{ 斤},$$

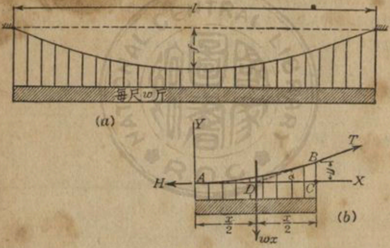
$$Rx_r=240\int_4^{12}x^2dx=133,120\text{ 尺斤}.$$

$$\therefore\quad x_r=8.67\text{ 尺}.$$

又因每一微小面積上之合力均係作用於其中心點，故對OY軸而言，得

$$y_r = 3 \text{ 尺}.$$

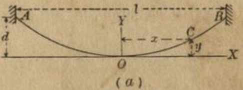
83. 懸鏈線 設有一柔索自兩點懸空吊起，索下沿水平方向載有均佈之荷重，如第230圖。至拴吊柔索之兩點，則假定係在同一水平面上。於是此種吊索因中部之向下沉墜，將形成一種曲線，且必為一拋物線形，特稱之為懸鏈線。舉凡吊索，吊橋，電纜等皆屬之。

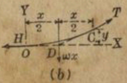


第230圖

古人於水流湍急，越渡維艱之河道，或遇有懸崖絕壁，下臨深淵，橫渡不易者，每以竹纜或鐵索編為吊橋，以利交通，此種吊橋即本節敍述之懸鏈線一絕好實例。至若通訊用之電話電報線，高架於兩電桿間，則為本節所述之又一實例。

關於吊索下垂必為一拋物線形，茲再用圖說明之。命AOB表此





第231圖

種柔索(第231圖),l 表其跨度,f 表下垂度,w 表其每一單位水平距離之荷重.就柔索最低之點 O 作 OX, OY 兩直角坐標軸,如圖所示,並取 OC 部分作爲自由體,於是 OC 部分之荷重爲 wx,而作用於距 C 點 $\frac{x}{2}$ 之處.

命 H 表 O 點之張力,T 表在任一點 C 之張力.則在 OC 部分自由體上將有三力作用而適成平衡,即 H, T 與 wx.此三力之作用線必相交於 D 點.因之,在此一組平衡力中,如以 C 爲力矩中心,由方程式 $\Sigma M_C=0$,得

$$Hy=\frac{wx^2}{2},\quad \text{或}\quad x^2=\frac{2H}{w}y. \tag{1}$$

此即一種拋物線之方程式.

又由平衡方程式 $\Sigma F_x=0$ 及 $\Sigma F_y=0$,得

$$\Sigma F_x=T\cos\alpha-H=0,$$

及

$$\Sigma F_y=T\sin\alpha-wx=0.$$

$$\therefore\quad T\cos\alpha=H,\quad \text{或}\quad T^2\cos^2\alpha=H^2,$$

$$T\sin\alpha=wx,\quad \text{或}\quad T^2\sin^2\alpha=w^2x^2.$$

兩式相加,得

$$T^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=H^2+w^2x^2.$$

於是 $$T=\sqrt{H^2+w^2x^2}. \qquad (2)$$

此種張力在兩端支點 A 或 B 乃爲一最大值.

由(1),(2)兩式,得柔索之下垂度爲

$$f=\frac{wl^2}{8H}. = y(l) \qquad (3)$$

又 $$T=\sqrt{\frac{w^2l^4}{64f^2}+\frac{w^2l^2}{4}}=\frac{1}{2}wl\sqrt{1+\frac{l^2}{16f^2}}. \qquad (4)$$

至於柔索之長 s, 則可由下式求之,卽

$$s=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx.$$

由方程式(1)求其微分,得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{wx}{H}.$$

因之, $$s=2\int_0^{\frac{l}{2}}\sqrt{1+\frac{w^2x^2}{H^2}}dx.$$

將方程式(3)中 H 之值代入上式,則得

$$s=2\int_0^{\frac{l}{2}}\sqrt{1+\frac{64f^2x^2}{l^4}}dx.$$

由上列積分式所得 s 之值,含有一對數函數在內,其算式之複雜,實不便於應用.故常將上式展爲一種級數,取其前面兩三項,其後諸項則以數值過微,槪不計入.於是前述方程式乃化爲

$$s=l\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{f}{l}\right)^2-\frac{32}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^4+\cdots\cdots\right]. \qquad (5)$$

例題 40. 有一鋼索吊橋,其跨度爲 800 尺,下垂度爲 50 尺.

今若鋼索之水平荷重爲每尺 1,000 斤,試求鋼索兩端及中心之張力,並求鋼索之長.

解　由方程式(3)及(4),得

$$H=\frac{1.000\times 800^2}{8\times 50}=1,600,000\text{ 斤}.$$

又

$$T=\frac{1}{2}\times 1,000\times 800\sqrt{1+\frac{800^2}{16\times 50^2}}=1,650,000\text{ 斤}.$$

至鋼索之長則可由方程式(5)求之,即

$$s=800\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{50}{800}\right)^2-\frac{32}{5}\left(\frac{50}{800}\right)^4\right]=808.24\text{ 尺}.$$

習　　題

176. 有一吊橋,其跨度爲 800 尺,下垂度爲 50 尺,載有每尺 600 斤之水平荷重. 試求鋼索兩端之張力及其長度.

答. $T=980,600$ 斤; $s=808.25$ 尺.

177. 有一吊索,其跨度爲 80 尺,載有每尺 0.8 斤之水平荷重. 若其中點張力爲 1,000 斤,試求吊索之下垂度.

答. 0.64 尺.

178. 一電報線,其重量爲每尺 0.1 斤,懸於兩電桿間. 若電桿間之距離爲 150 尺,電線兩端之張力爲 500 斤,試求電線之下垂度及其長度(假定電線之重量係沿水平向均勻分佈者).

答. $f=0.56$ 尺; $s=150.01$ 尺.

179. 有一長 100 尺之柔索懸於兩點間,載有沿水平向均佈之荷重. 若兩點間之距離爲 80 尺,試求柔索中點之下垂度.

答. 23.54 尺.

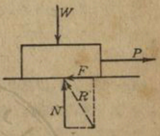
第九章　摩擦

84　摩擦之定義　設將一物體置於另一物體上，則在其兩接觸面間卽有兩力之作用發生：其一爲上面物體之重量，另一爲下面物體之垂直壓力．倘於上面物體施以一水平力，使該物體發生運動，或雖未運動而有致成運動之趨向，則在此兩接觸面間更將發生一種阻力，吾人稱之爲摩擦．凡一種物體，無論其表面如何光滑，若在顯微鏡下觀察之，將立見其中凸凹不平之處甚多，此種凸凹不平之表面，卽爲發生摩擦之原因．

按摩擦在機械工程中，實爲一極關重要問題．蓋有之固多阻礙，無此亦殊不妥．例如當機械轉動時，其四周接觸部分常生摩擦以阻礙其行動，故須加入潤滑油料，俾減少摩擦力量，且所使用之馬力，亦將因摩擦而加多．反之，有若干事態，亦正利用摩擦，方能使其安定若素者，如行步之當地面與步履間存有摩擦，乃不致傾跌．冬季着皮鞋履行冰上，舉步維艱，卽因冰與皮鞋間之摩擦減少．又如汽車或火車下駛陡坡，必藉氣閘發生摩擦力量，使車輪不向下滑動，以策安全．

大凡兩接觸面質愈堅硬而面愈光滑者，其表面之摩擦可愈見減少，但絕不能減至於零；若摩擦等於零，則此種接觸面將爲一最合理想之光滑面，惟在宇宙間實絕無此物．

摩擦分靜與動二種：在兩物體間發生一種阻力，阻止此物體對他一物體之相對運動者，此種阻力稱為靜摩擦．當兩物體成相對運動時，其接觸面間所發生之阻力則稱為動摩擦．至於靜摩擦之發生，又恆與兩物體間其他之力互成平衡，茲以圖說明之．設有一物體置於一水平面上，如第 232 圖．命 W 表物體重量，P 表加於此物體之水平力，N 表水平面之正壓力，F 表水平面之摩擦力，其方向係與水平面平行，R 則表水平面之總反動力．若 P 之力量輕微，並不足以使物體向前運動，則 W, N, P 及 F 諸力將互成平衡，易言之，即 F 等於 P，此時之 F 稱為**靜摩擦力**．倘將 P 力逐漸加大，則其摩擦亦必依同一比率而逐漸加增，方能維持物體於平衡狀態．但 F 力並不能如 P 力可以無限加大，故此種平衡狀態終必至於破裂．即當 F 力增至某種極限，使平衡狀態不能再行維持時，此極限之值，即稱為**極限摩擦力**．過此極限以後，則物體將開始運動，而摩擦即形減低，此時之 F 則稱為**動摩擦力**．



第 232 圖

85．**摩擦係數**　前曾言及，物體面愈光滑者其摩擦愈小；反之，愈粗糙則摩擦愈大．故當兩物體互相接觸時，欲知其摩擦力量如何，首須明瞭此兩物體之本質，其次為兩物體之接觸情狀．蓋金屬物體對其他質類與木質物體對其他質類，發生摩擦之力量固有不同，即金屬或木質對其同質之物體，其發生摩擦之力量亦各不相同．又如物體平放或斜放時之情形固亦有異，而接觸面傾角之不同，亦足發

生相異之摩擦.故為便利研究計,特採用一種實驗常數,稱之為摩擦係數.

關於摩擦係數亦有靜與動之分.所謂靜摩擦係數,即接觸面間極限摩擦力對其相應正壓力之比率.若命 F' 表極限摩擦力,μ 表靜摩擦係數,則依上述定義,得

$$\mu=\frac{F'}{N}, \quad 或 \quad F'=\mu N.$$

在此應加注意者,即上式中之 F',乃兩接觸面間所能發展之最大摩擦力量,亦即最大摩擦力等於 μN.

此種摩擦係數純由實驗求得,蓋兩物體之本質及其接觸情形,對於摩擦在在發生影響,前已詳為說明.茲據實驗之結果,將最普通數種物體之靜摩擦係數列表於下:

靜摩擦係數

金屬對金屬	0.15 至 0.50
金屬對木材	0.20 至 0.60
金屬對皮革	0.30 至 0.60
金屬對石料	0.30 至 0.70
木材對木材	0.25 至 0.50
木材對皮革	0.25 至 0.50
石料對石料	0.40 至 0.65
土對土	0.25 至 1.00

至若兩個物體成相對運動時,其由此而生之摩擦力與相應正壓力之比率,則稱為動摩擦係數.動摩擦係數所受環境影響,遠較靜摩

擦係數爲多，故其值亦較難算得．就一般情形論之，動摩擦係數較靜摩擦係數之值約小百分之二十至四十．

86．摩擦角 在第233圖中正壓力 N 與摩擦力 F 可以結合爲總反動力 R，此總反動力 R 當物體適正開始迫近運動時與正壓力之交角，卽稱爲靜摩擦角，通常均以 ϕ 表之．

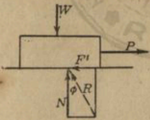
今因 R 之兩個分力 N 及 F'，與接觸面一成垂直，一相平行，如第233圖，故

$$\tan\phi=\frac{F'}{N}.$$

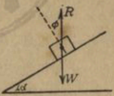
但 $\frac{F'}{N}$ 之比率，卽爲靜摩擦係數 μ，因此，乃得一極重要之關係如下：

$$\mu=\tan\phi.$$

易言之，卽靜摩擦係數等於靜摩擦角之正切．



第233圖



第234圖

又若兩個物體已成相對運動時，其總反動力與正壓力之交角可稱爲動摩擦角．動摩擦角之值略小於靜摩擦角，蓋在運動以後，此動摩擦力已較小於極限摩擦．至於 $\mu=\tan\phi$ 之關係則並無變化，亦因動摩擦係數恆較靜摩擦係數稍小．此種摩擦角在用圖解法解決問題

時尤爲有用，學者於此應加注意.

87. 靜止角 設一物體置於一斜面上，如第 234 圖所示，除其本身重量及斜面之反動力外，並不受有其他外力之作用. 則此斜面如欲維持物體成靜止狀態，其與水平面之交角必有一定限度，超過此一限度，則物體將自然向下滑動. 當物體適正開始欲向下滑動時，斜面與水平面所交之角卽稱爲**靜止角**，通常多以 α 表之.

在第 234 圖中，因物體係受本身重量 W 及斜面上反動力 R 之作用而成平衡，故 W 與 R 兩力必須相等而反向，並在同一直線上，亦卽 R 之作用線必成垂直. 更有進者，因 R 與此斜面之法線之交角卽摩擦角 ϕ，但由圖中觀之 α 適等於 ϕ，故靜止角亦卽等於摩擦角. 靜止角易由實驗求得，於是摩擦係數實可由下式求之:

$$\mu=\tan\phi=\tan\alpha.$$

88. 摩擦定律 根據實驗結果，除可求得上述之摩擦係數及靜止角外，倘有下列諸定律，稱爲摩擦定律者，亦殊有敍述價值，茲分舉於次:

(一) 摩擦力與正壓力成正比例.

(二) 摩擦係數與接觸面面積之大小無關.

(三) 靜摩擦通常均略大於動摩擦.

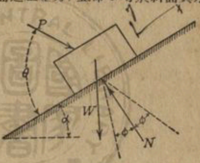
(四) 動摩擦與兩物體運動時之相對速度無關.

(五) 溫度變化對於摩擦之影響極微.

凡此諸定律均爲歷經諸科學家先後就乾燥體行多次實驗所得結論. 更有加潤滑劑於接觸面間行多次實驗者，因知潤滑面之摩擦情形較諸乾燥面大相逈異. 蓋物體之有摩擦，乃起於表面之凸凹不平，加潤

滑劑其上，卽爲塡塞表面孔隙，使其趨於平滑．此潤滑後之接觸面，其本質對於摩擦已不能發生若何影響，而所謂摩擦，實發生於潤滑劑間，嚴格言之，此兩物體已不能再直接互相接觸．復因潤滑劑皆屬液體，易受溫度變化之影響，故溫度變更，摩擦自亦隨之不同．此外倘再就此施以極大之正壓力，則分佈於接觸面間之潤滑劑亦可擠出，因而使摩擦係數之値增加．

89．斜面上之物體　設有一物體置於一斜面上，如第235圖所示．其中 W 表物體重量，N 表斜面之正壓力，並命 α 等於斜面與水平面之交角，F 等於摩擦力，R 等於 F 與 N 之合力．倘在此物體上施以外力 P，並假定 P，N 及 W 皆在同一平面內，則有兩種情形可以發生，卽



第235圖

(a) 所施之力尙不足以致成物體之運動；

(b) 所施之力將使物體向上或向下滑動．

茲再分別述之於下：

(a) 在此種情形中，因 R，P 與 W 三力適成平衡，故其力之作用線必將通過一共同點．又若物體受 P 力之作用並不致成運動，則 R 與 N 之交角將小於 ϕ；但若 P 力使物體已迫近運動，則 R 與 N 之交角將適等於 ϕ．今將以上諸力各分解爲兩個分力，令一與斜面垂直，一與斜面平行，並取 X 軸與斜面平行，Y 軸與斜面垂直．依平衡原則，當物體適正開始向上運動時，將得

$$\Sigma F_x = P\cos\theta - W\sin\alpha - F = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma F_y = -P\sin\theta - W\cos\alpha + N = 0, \tag{2}$$

又
$$F = N\tan\phi = \mu N, \tag{3}$$

其中 θ 爲 P 與斜面之交角.

由以上三式消去 N 並解出 P, 得

$$P = \frac{W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\theta - \mu\sin\theta}. \tag{4}$$

設物體並非向上運動，而係適正開始向下滑動，則摩擦力應取與上述相反之方向作用，即在(1)式中之 F 將爲一正號而非一負號.

若以 $\tan\phi$ 代 μ, 則(4)式將爲

$$P = W\frac{\sin(\alpha+\phi)}{\cos(\theta+\phi)};$$

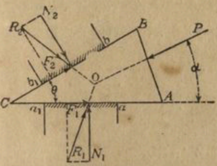
若 P 力與斜面平行, 即 $\theta = 0$, 則

$$P = W\frac{\sin(\alpha+\phi)}{\cos\phi}.$$

(b) 在此種情形中, 若物體係向上運動, 則上述之(1), (2), (3)三式仍可適用. 若物體係向下運動, 則(1)式中之 F 將爲一正號.

90. 劈 設於兩個面積間插入一劈, 並以 P 力推之使此劈有致成向前滑動之趨向, 則此種推力 P 之大小究應如何, 即爲本節研究之主題.

如第 236 圖, 設 ABC 爲一劈, 插在 aa_1, bb_1 兩面積之間. 命 α 爲 P 力與 CA 邊之交角, f_1 = 在 aa_1 面積上之摩擦係數, F_1 = 摩擦力, N_1 = 正壓力, R_1 = 總反動力. 又 f_2 = 在 bb_1 面積上之摩擦係數, F_2 = 摩擦力, N_2 = 正壓力, R_2 = 總反動力. 命 ACB 角 $= \theta$.



第236圖

試取劈作爲一自由體.因作用於該劈上之力共有三個,即R_1,R_2與P,且係在同一平面內適成平衡,故其力之作用線必通過一共同點.

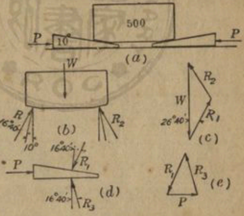
次將此諸力各分解爲兩個分力,分別與AC成垂直及平行.依平衡方程式,得

$$-P\cos\alpha+F_1+F_2\cos\theta+N_2\sin\theta=0, \tag{1}$$

$$-P\sin\alpha+N_1+F_2\sin\theta-N_2\cos\theta=0. \tag{2}$$

又
$$F_1=f_1N_1,\quad F_2=f_2N_2. \tag{3}$$

如已知N_1, N_2, f_1及f_2等之值,則由上述諸式可求得P之值.



第237圖

例題41. 有一物體重500斤,置於兩個劈上,而此兩劈又同置於一水平面上,如第237圖所示.若劈之角爲10°,又摩擦係數爲0.3,試求兩劈上究應施以若干推力,方能使其在該物體下向中心滑動.

解　摩擦角$\phi=\tan^{-1}0.3=16°40'$.故當此劈正迫近向中心滑

動時,總反動力 R_1 及 R_2 與其正壓力之交角均各等於 16°40′,其與垂直線之交角將等於 16°40′+10°=26°40′. 今先以 500 斤之物體作為自由體,如圖(b),由方程式 $\Sigma F_x=0$,得

$$R_1 \sin 26°40' = R_2 \sin 26°40',$$

$$\therefore \quad R_1 = R_2.$$

又由方程式 $\Sigma F_y=0$,得

$$2R_1 \cos 26°40' = 500,$$

$$\therefore \quad R_1 = 280 \text{ 斤}.$$

次以左劈作為自由體,如圖(c),由方程式 $\Sigma F_y=0$,得

$$280 \cos 26°40' = R_3 \cos 16°40',$$

$$\therefore \quad R_3 = 261 \text{ 斤}.$$

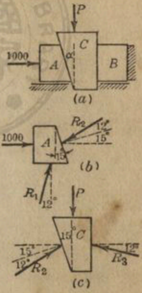
又由方程式 $\Sigma F_x=0$,得

$$P = 280 \sin 26°40' + 261 \sin 16°40',$$

$$\therefore \quad P = 126 + 75 = 201 \text{ 斤}.$$

例題 42. 第 238 圖示一種栓接,其中 α 角等於 15°,又所有接觸面間之摩擦角皆等於 12°. 今於部分 A 上施以 1,000 斤之水平力,試求此栓接 C 上之垂直力 P 應為若干,方足以克制之.

解 先取部分 A 作為一自由體,如圖(b). 今作用於該部分上之力共有三個:一為 1,000 斤之水平力;一為下面之總反動力 R_1;一為栓接之總反動力 R_2,此三力互成



第 238 圖

平衡.由平衡方程式,得

$$\Sigma F_x = 1,000 + R_1 \sin 12^\circ - R_2 \cos 27^\circ = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma F_y = R_1 \cos 12^\circ - R_2 \sin 27^\circ = 0; \tag{2}$$

由(1),(2)兩式,得

$$R_2 = \frac{1,000 \cos 12^\circ}{\cos 39^\circ}. \tag{3}$$

次取栓接作爲一自由體,如圖(c).今作用於該部分上之力亦有三個:一爲部分 A 之總反動力 R_2;一爲部分 B 之總反動力 R_3;一爲栓接上之垂直力 P,此三力亦互成平衡.由平衡方程式,得

$$\Sigma F_x = R_2 \cos 27^\circ - R_3 \cos 12^\circ = 0, \tag{4}$$

$$\Sigma F_y = R_2 \sin 27^\circ + R_3 \sin 12^\circ - P = 0; \tag{5}$$

由(4),(5)兩式,得

$$R_2 = \frac{P \cos 12^\circ}{\sin 39^\circ}. \tag{6}$$

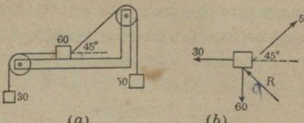
於是由(3),(6)兩式,得

$$\frac{P \cos 12^\circ}{\sin 39^\circ} = \frac{1,000 \cos 12^\circ}{\cos 39^\circ},$$

$$\therefore \quad P = 1,000 \tan 39^\circ = 810 \text{ 斤}.$$

例題 43. 有一物體重60斤,置於一水平面上,兩端各繫以繩,繩端分別懸以 30 斤及 50 斤,並各通過一滑輪上,如第 239 圖所示.茲假定滑輪毫無摩擦發生,試求此物體正當迫近運動時,其與水平面之摩擦係數應爲若干?

解 因兩滑輪既毫無摩擦發生,故 30 斤及 50 斤之力可分別直



第 239 圖

接移轉於兩繩之上. 今取 60 斤物體作爲自由體, 如圖(b). 則作用於該物體上之力共有四個: 一爲左繩之水平力 30 斤; 一爲右繩與水平成 45° 角之 50 斤之力; 一爲物體本身重量60斤; 一爲水平面與垂直線成 ϕ 角之總反動力 R, 此四力互成平衡. 依平衡方程式, 得

$$\Sigma F_x = 50\cos 45° - 30 - R\sin\phi = 0, \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 60 - 50\sin 45° - R\cos\phi = 0; \qquad (2)$$

由(1), (2)兩式, 得

$$\frac{R\sin\phi}{R\cos\phi} = \frac{30 - 50\cos 45°}{50\sin 45° - 60} = 0.217.$$

$$\therefore \quad \mu = \tan\phi = 0.217.$$

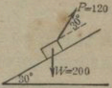
例題 44. 有重 200 斤之物體置於一 30° 之斜面上, 並受一 120 斤之力之作用, 如第 240 圖所示. 試求物體與斜面間之摩擦力.

解 如第 89 節所述,

$$\Sigma F_x = F - P\cos 30° + W\sin 30° = 0,$$

$$\therefore \quad F = 120\cos 30° - 200\sin 30°$$

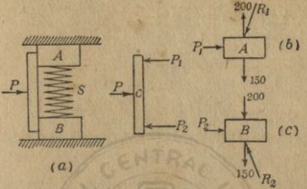
$$= 103.92 - 100 = 3.92 \text{ 斤}.$$



第 240 圖

例題 45. 在第 241 圖中, A, B 兩體各

重150斤，彈簧S對兩體之彈力爲200斤．若所有上下接觸面之摩擦係數均等於0.2，試求欲使兩體開始向右運動時所需P力之大小．



第241圖

解　先取A作爲自由體，如圖(b)．今作用於其上諸力計有本身重量150斤，彈簧之向上彈力200斤，頂面之總反動力R_1，及P對A體之推力P_1．依平衡方程式，得

$$\Sigma F_y = 200 - 150 - R_1 \cos 11°19' = 0,$$

$$\therefore \quad R_1 = 51 \text{ 斤}.$$

又

$$\Sigma F_x = P_1 - R_1 \sin 11°19' = 0,$$

$$\therefore \quad P_1 = 10 \text{ 斤}.$$

次取B作爲自由體，如圖(c)．今作用於其上諸力計有本身重量150斤，彈簧之向下彈力200斤，底面之總反動力R_2，及P對B體之推力P_2．依平衡方程式，得

$$\Sigma F_y = 200 + 150 - R_2 \cos 11°19' = 0,$$

$$\therefore \quad R_2 = 357 \text{ 斤}.$$

又　　　$\Sigma F_x = P_2 - R_2 \sin 11°19' = 0,$

$$\therefore \quad P_2 = 70 \text{ 斤}.$$

復次取 C 爲自由體，如圖(d). 今作用於其上諸力計有 A 體之反動力 10 斤，B 體之反動力 70 斤及 P 力. 由圖中觀之，可見:

$$P = 10 + 70 = 80 \text{ 斤}.$$

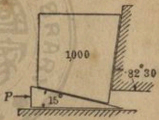
習　　題

180. 在第 237 圖中，如欲使兩劈向外滑動，試求所需之水平力 P，P 應各爲幾何?

答. 104.1 斤，其作用方向與例題 41 相反.

181. 在第 242 圖中，設欲使在 1,000 斤物體下之劈開始向右滑動，試求所需水平力 P 之大小. 已知摩擦係數 $=0.25$.

答. $P=850$ 斤



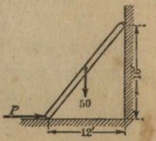
第 242 圖

182. 在上題中，若使劈向左滑動，試更求所需水平力之大小.

答. $P=230$ 斤，其方向係向左.

183. 第 243 圖中之梯重 50 斤，梯與直牆之摩擦係數爲 0.25，梯與地板之摩擦係數爲 0.5. 今欲使梯開始向右運動，試求所需 P 力之大小.

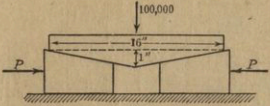
答. $P=51$ 斤.



第 243 圖

184. 在兩劈上置一重 100,000 磅之物體，如第 244 圖. 若所有接觸面之摩擦係數均爲 0.2，試求欲將物體昇起時所需之 P 力.

答. $P=26,667$ 磅.



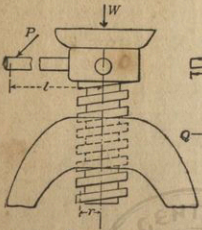
第 244 圖

185. 有一重 100 斤之物體置於一 45° 之斜面上. 今若於物體上施以 50 斤之水平力，適足阻止其不致向下滑動，試求物體與斜面間之摩擦係數.

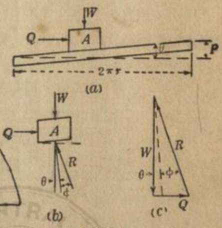
答. $\mu=\frac{1}{3}$.

91. 螺旋摩擦　螺旋在機械工程中可認爲一絕大發明，與絕大成功，小之如螺絲釘，大之如起重螺旋，均係利用螺旋原理製成. 按螺旋實爲一種環繞於圓筒上之斜面，故研究螺旋應先討論其斜面. 螺旋有方形及三角形之分，本書所論者僅屬方形一種.

第 245 圖示一種起重螺旋，其螺紋爲方形. 命 r 表螺紋之平均半徑，l 爲槓桿臂之長，P 爲作用於槓桿臂端之水平力卽藉以轉動起重螺旋者. 使用時將頂面密接於重物下方，轉動槓桿臂，令螺旋上昇或下降，於是重物亦卽隨之起落. 當螺旋上下昇降時，重物之力卽垂直向下作用於起重螺旋上. 此種垂直壓力 W 依據實際情形固係分佈於所有螺旋之周圍及全部螺紋上者，惟亦可簡單視爲僅作用於其一



第245圖



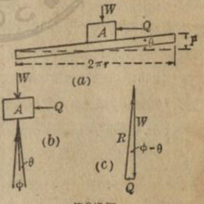
第246圖

節之螺紋上，如第246圖(a). 玆試將螺紋放大，並假定其卽爲一斜面.

圖(b)示 A 爲一自由體，共有三力作用其上：一爲 W 垂直向下；一爲螺紋平均半徑上之水平壓力 Q，其值等於 $\frac{Pl}{r}$，向右取水平向推動使螺旋上昇；一爲斜面對 A 之反動力，作用於與斜面之正壓力成摩擦角 ϕ' 之方向. 命 p 爲螺距，θ 爲斜面之傾角，則

$$\theta=\tan^{-1}\frac{p}{2\pi r}.$$

當 P 力推動起重螺旋，使其適將開始上昇時，W, Q 及 R 三力互成平衡，因之



第247圖

$$\Sigma F_y = W - R\cos(\phi'+\theta) = 0,$$

$$\therefore \quad R = W/\cos(\phi'+\theta).$$

又

$$\Sigma F_x = Q - R\sin(\phi'+\theta) = 0,$$

$$\therefore \quad Q = R\sin(\phi'+\theta) = W\tan(\phi'+\theta).$$

但

$$Q = \frac{Pl}{r}, \qquad \therefore \quad P = \frac{Wr}{l}\tan(\phi'+\theta).$$

若起重螺旋係向下降落，則斜面上之摩擦適將相反，其反動力 R 之方向亦將移向左側，如第247圖所示. 故

$$Q = W\tan(\phi'-\theta), \quad P = \frac{Wr}{l}\tan(\phi'-\theta).$$

習　題

186. 有一起重螺旋，其螺紋之平均直徑爲 1.8 寸，螺距爲 0.4 寸，陰陽螺旋間之摩擦係數爲 0.12. 槓桿臂長 18 寸. 試求欲起 5,000 斤重所需 P 力之大小. 又欲落此重物所需之 P 力如何?

答. 48.1 斤. 12.4 斤.

187. 有一起重螺旋，其螺距爲 0.5 寸，螺紋之平均半徑爲 1.5 寸，又槓桿臂長 24 寸. 若 $\mu = 0.08$, 試求欲起 6,000 斤重所需 P 力之大小. 又若動摩擦係數 $\mu' = 0.075$, 則欲使起重螺旋繼續轉動所需之 P 力又將如何?

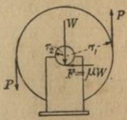
答. 50 斤. 48.1 斤.

188. 在前題中，若使起重螺旋向下降落，則所需之 P 力若干?

答. 10.1 斤

92. 輪軸摩擦

(一) 設有一輪，其半徑爲 r_1，緊附於一圓軸上，其半徑爲 r_2，如第 248 圖．輪與軸之合重爲 W．此圓軸托以軸承，其靜摩擦係數爲 μ．今若於輪周施以力偶 P, P，使輪取反時針向而轉動，此偶力之大小，卽爲本節研究之主題．



第 248 圖

當輪正在開始轉動時，其軸承之摩擦力爲

$$F=\mu W.$$

又此時輪仍迄在平衡狀態中，由 $\Sigma M_0=0$，得

$$2Pr_1-\mu Wr_2=0,$$

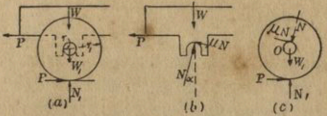
$$\therefore \quad P=\frac{\mu Wr_2}{2r_1}.$$

設輪係以等速率轉動，則 μ' 將爲動摩擦係數，而力偶則爲

$$P=\frac{\mu' Wr_2}{2r_1}.$$

(二) 第 249 圖示一車輪，其重量爲 W_1，置於水平軌道上，輪軸上承有車盤，載重 W．於是輪與車盤之合重爲 W_1+W，垂直作用於軌道上，此軌道之反動力爲 N_1，與 W_1+W 之大小相等而反向．苟對車盤施以牽力 P，使之開始向前運動，則在軌道上亦必發生一相等而反向之摩擦力 P 與之對抗．

茲先取車盤爲自由體，如圖(b)．因作用於軸承上之力共有兩個：一爲與垂直線成 α 角之正壓力 N；一爲摩擦力 μN．由平衡方程式



第 249 圖

$\Sigma F_x=0$ 與 $\Sigma F_y=0$，得

$$P-N\sin\alpha+\mu N\cos\alpha=0, \tag{1}$$

又

$$W-N\cos\alpha-\mu N\sin\alpha=0. \tag{2}$$

兩式平方後相加，消去 $\cos\alpha$ 與 $\sin\alpha$，得

$$P^2+W^2=N^2(1+\mu^2). \tag{3}$$

次取車輪爲自由體，由方程式 $\Sigma M_0=0$，得

$$Pr_1-\mu Nr_2=0, \quad \therefore \quad P=\frac{\mu Nr_2}{r_1}. \tag{4}$$

由(3)，(4)兩式，得

$$P=\frac{\mu Wr_2}{\sqrt{r_1^2+(\mu r_1)^2-(\mu r_2)^2}}.$$

習　　題

189. 在第 249 圖中，命 $W=1{,}000$ 斤，$r_2=2$ 寸，$r_1=20$ 寸，又 $\mu=0.25$. 試求欲使車輪開始運動之 P 力.

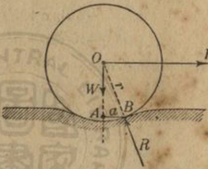
答. 24.25 斤.

190. 有一貨車重 80,000 斤，車輪半徑爲 33 寸，軸半徑爲 4 寸. 若 $\mu=0.1$，試求欲使貨車在水平軌道上由靜止開始向前運動時，所

需之牽力應爲若干?

答. 955 斤.

93. 滾動摩擦 大凡圓形剛體,如車輪或滾筒等,在一平面上滾動時,倘該體爲一理想中之完全圓形,而接觸面又爲一理想中之完全平面,則兩者間之接觸部分將僅爲一線;否則,其接觸部分將爲一面積而非一線.例如軌道在車輪壓力下,通常多生成一種變形,如第 250 圖所示.由於此種變形,當車輪開始向前運動時,軌道即發生一種反動力,是爲滾動摩擦.茲述之如下:



第 250 圖

在此圖中,命車輪之載重爲 W, P 爲使輪心以等速率向前運動之水平力.今因在車輪下之軌面發生變形,故在車輪與軌面間之壓力係分佈於其接觸面積上.如圖所示,此軌面對於車輪之總反動力,將通過該面積上之某點 B.又因車輪係以等速率運動,故作用於其上之三力 W, P 及 R 互成平衡,而 R 之作用線必通過輪心 O.以 B 爲力矩中心,由方程式 $\Sigma M_B=0$,得

$$W\times AB-P\times OA=0, \quad \therefore \quad P=\frac{W\times a}{OA}.$$

但軌面低降之變形通常極小,即 OA 與車輪之半徑 r 幾近於相等,故上式又可寫爲

$$P=\frac{Wa}{r}.$$

其中距離 a 恆稱爲滾動摩擦係數; 總反動力 R 之水平分力即滾動摩擦,其值適等於 P. 惟此處 a 值係表一種線性量之距離,並非一純數值,自亦不能認作一種真正係數,學者應特加注意. 至於 a 之値,通常多以寸表之.

習題

191. 設某貨車之滾動摩擦力爲每千斤等於 $\frac{1}{2}$ 斤,車輪之直徑爲 32 寸,試求其滾動摩擦係數 a 之值.

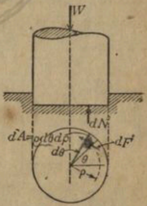
答. 0.008 寸.

192. 若某貨車之車輪直徑爲 54 寸,滾動摩擦係數爲 0.2 寸,試求其滾動摩擦力.

答. 每千斤等於 7.4 斤.

94. 樞軸摩擦 樞軸有尖頭與平頭之分,本書討論範圍,僅屬平頭一種. 平頭樞軸又分(a)實心;(b)空心. 玆分別述之於下:

(a) 實心平頭樞軸——如第 251 圖,命 W 表樞軸之總重, r 爲樞軸之半徑, A 爲其截面面積. 當樞軸轉動時,平頭與軸承部分之間將發生摩擦,對於樞軸乃生成一種摩擦力矩. 此摩擦力矩今命之爲 M_F, 即爲本節研究之題材.



第251圖

凡求摩擦力矩 M_F, 須先作兩種假定: 即(1)平頭與軸承面間之摩擦係數 μ 應爲一常數; (2)樞軸對於軸承面所生之壓力

應爲均勻分佈力. 依此兩種假定，則 M_P 即易於求解. 今於樞軸之截面上，取一極微小之面積 dA，其與力矩中心之距離爲 ρ，$d\theta$ 爲其所含之弧角. 又命 p 爲正壓力之強度. 於是此微小之面積 dA 將等於 $\rho d\theta d\rho$，施於 dA 上之正壓力爲 $p\rho d\theta d\rho$. 因之，在 dA 上之摩擦力爲 $\mu p\rho d\theta d\rho$. 此摩擦力當樞軸轉動時，對於力矩中心將發生一種摩擦力矩，等於

$$dM=\mu p\rho^2 d\theta d\rho=\mu\frac{W}{\pi r^2}\rho^2 d\theta d\rho.$$

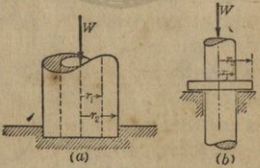
至對於樞軸全部截面所生之摩擦力矩，由上述假定，應爲所有此種微小摩擦力矩 dM 之代數和，即

$$M_P=\frac{\mu W}{\pi r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho^2 d\theta d\rho. \qquad (1)$$

求其積分，得

$$M_P=\frac{2}{3}\mu Wr.$$

(b) 空心平頭樞軸——命 r_2 表樞軸外圈之半徑，r_1 爲內圈之半徑，如第 252 圖. 則此樞軸全部截面之面積爲 $\pi(r_2^2-r_1^2)$.



第252圖

又　$$p=\frac{W}{\pi(r_2^2-r_1^2)}.$$

由式(1),得

$$M_F=\frac{\mu W}{\pi(r_2^2-r_1^2)}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\rho^2 d\theta d\rho$$

$$=\frac{\mu W}{\pi(r_2^2-r_1^2)}\times\frac{2\pi(r_2^3-r_1^3)}{3}=\frac{2}{3}\mu W\frac{(r_2^3-r_1^3)}{r_2^2-r_1^2}.$$

習　題

193. 有一樞軸,其外圈及內圈半徑各爲4.5寸及3.5寸,其上受有6,000斤之壓力.已知摩擦係數爲0.025,試求樞軸上之摩擦力矩.

答. $M_F=303$寸斤.

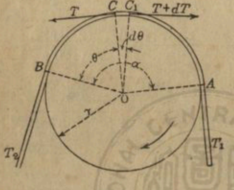
194. 有一水輪機,其直軸及旋轉部分之總重爲100,000斤,軸之直徑爲10寸.設其摩擦係數爲0.015,並假定直軸之軸承爲一平頭,試求摩擦力矩.

答. $M_F=5,000$寸斤.

95. **帶摩擦**　帶摩擦對於功率之傳送頗關重要,蓋功率藉此帶自一滑輪傳送至另一滑輪時,作用於帶與滑輪間之力卽爲其接觸面間之摩擦力.利用此種摩擦力,使主動滑輪轉動此帶,亦卽利用此種摩擦力使此帶再轉動被動滑輪.帶之裝置應緊套於滑輪上,俾可發生一種初牽力,令帶與滑輪間發生充分之摩擦.此初牽力當滑輪在靜止時兩邊必相等,迨主動滑輪轉動以後,則此帶在滑輪一邊所謂緊邊之張力,將較其在另一邊所謂鬆邊之張力爲大.此兩邊張力之

差，即爲帶與滑輪間之總摩擦力．通常求兩張力之差，多用下法：

命 T_1 及 T_2 表帶緊鬆兩邊之張力，其中 $T_1>T_2$．r 爲滑輪之半徑．又命 α 等於滑輪上兩接觸點 A,B 間所含之弧，如第 253 圖．p 等於在滑輪面上任一點 C，其每一單位圓弧長度之正壓力．則在微弧 CC_1 上之正壓力將等於 $prd\theta$，其中 $d\theta$ 爲圓弧 CC_1 所含之角．



第 253 圖

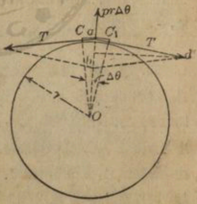
倘此帶適正在滑動點，又 μ 等於帶與滑輪間之摩擦係數，則在圓弧 CC_1 上之摩擦力將等於 $\mu prd\theta$．

若命 T 等於在此種情形下之 C 點之張力，則在 C_1 點之張力將爲 $T+dT$，其中

$$dT=\mu prd\theta. \quad (1)$$

在求得上式積分值之前，應先求得 p 之值．

試取帶之一極小部分 CC_1 作爲自由體，如第 254 圖．則作用於此自由體上之力將爲帶之兩張力 T,T，分別平行於 C,C_1 兩點之切線，及帶與滑輪間之正壓力，等於 $pr\Delta\theta$．



第 254 圖

當滑輪在靜止中或以等速率轉動時，此諸力互成平衡. 因之，由圖中所作力之平行四邊形，得

$$\frac{pr\Delta\theta}{2}=T\ \sin\frac{\Delta\theta}{2};$$

於是

$$p=\frac{T\ 2\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{r\Delta\theta}.$$

當 C, C_1 兩點漸相切近時，$\Delta\theta$ 之值逐漸減小，而 $\frac{\Delta\theta}{2}$ 之值與 $\sin\frac{\Delta\theta}{2}$ 之值極相趨近，上式變為

$$p=\frac{T}{r}. \tag{2}$$

再將 p 值代入(1)式，得

$$\frac{dT}{T}=\mu d\theta.$$

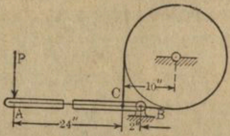
求兩邊之積分，一邊自 $T=T_2$ 至 $T=T_1$，另一邊則自 $\theta=0$ 至 $\theta=\alpha$，得

$$\int_{T_2}^{T_1}\frac{dT}{T}=\int_0^\alpha \mu d\theta, \quad 或 \quad \log_e\frac{T_1}{T_2}=\mu\alpha.$$

$$\therefore \quad \frac{T_1}{T_2}=e^{\mu\alpha}, \qquad \log\frac{T_1}{T_2}=\mu\alpha \tag{3}$$

式中 e = 納氏對數之底 $=2.718+\cdots\cdots$.

例題 45. 今有一制動輪如第 255 圖所示，其中 P 力等於 100 磅，帶之接觸角 α 等於 $270°\left(\frac{3\pi}{2}\text{ 弳}\right)$，帶與制動輪間之摩擦係數等於 0.2. 若制動輪係取反時針向轉動，試求帶上之張力及所生之摩



第255圖

擦力矩.

解 因制動桿 ACB 係在平衡中，故可用方程式 $\Sigma M_B=0$ 以求帶在 C 點之張力 T_2，即

$$\Sigma M_B=100\times 26-T_2\times 2=0,$$

$$\therefore\quad T_2=1,300\text{ 磅}.$$

已知 T_2，則張力 T_1 可由帶摩擦方程式求之，即

$$T_1=T_2\times e^{\mu\alpha}=1,300\times 2.718^{0.3\times\frac{3}{3}\pi}$$

$$\log T_1=\log 1,300+0.3\pi\log 2.718$$

$$=3.114+0.942\times 0.434=3.522,$$

$$\therefore\quad T_1=3,330\text{ 磅}.$$

摩擦力矩 $=(T_1-T_2)\times 10=2,030\times 10=20,300$ 吋磅.

例題 46. 用繩懸一重2,000斤之物體，繩繞鼓輪共計 $1\frac{1}{2}$ 轉. 若繩與鼓輪間之摩擦係數等於0.3，試求繩之另一端應施以若干之力，方足使物體懸空不動.

解 繩繞鼓輪 $1\frac{1}{2}$ 轉，則 α 等於 $1\frac{1}{2}\times 2\pi=3\pi$. 又物體旣被懸空不動，則作用於鼓輪上之諸力必成平衡. 於是由帶摩擦方程式，得

$$\frac{T_1}{T_2}=e^{\mu\alpha},\ \text{即}\ \frac{2,000}{T_2}=2.718^{0.3\times3\pi},$$

$$\therefore\quad T_2=\frac{2,000}{2.718^{0.9\pi}}.$$

$$\log T_2=\log 2,000-0.9\pi\log 2.718$$
$$=3.301-2.826\times0.434=2.075,$$
$$\therefore\quad T_2=119\text{ 斤}.$$

習　題

195. 河中有一船,用繩繫於絞盤上使成靜止.若船所生之力等於 4,000 斤,而繩之另一端所生之拉力等於 [illegible]0 斤,並假定 μ 等於 0.25,試求繩應在絞盤上繞繫幾轉?

答. 2.35 轉.

196. 有一帶緊套在兩個直徑相等之滑輪上,其摩擦係數等於 0.5.若帶在鬆邊之張力等於 100 斤,試求在滑動開始前緊邊之張力應爲幾何?

答. 481 斤

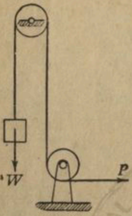
197. 有一手搖絞車,其轆轤上共繞有 $2\frac{1}{2}$ 轉之繩.繩與轆轤間之摩擦係數等於 0.4.若所絞之重爲 10,000 斤,試求繩之另一端應施以若干力,方足使物體不致滑墜?

答. 18.7 斤.

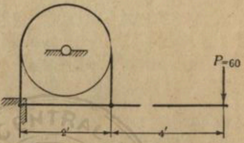
198. 有一重 W 爲 2,000 斤之物體,用鋼繩穿過兩個定滑輪將其懸起,如第 256 圖所示.若鋼繩與滑輪間之摩擦係數等於 0.3,試

求在繩之另一端所施之力 P 應爲若干，方足使物體懸空不動？

答. 485 斤



第256圖



第257圖

199. 第257圖示一制動輪，其與帶之摩擦係數等於 0.2，又此帶在制動輪上之接觸角等於 180°. 試求當制動輪(a)取順時針向轉動時之摩擦力矩；(b)取反時針向轉動時之摩擦力矩.

答. (a) 157 尺斤；(b) 84 尺斤.

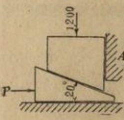
總 習 題

200. 今有一 20° 角之劈置於一 1,200 重之物體下，如第258圖所示. 若所有各接觸面之摩擦角均等於 12°，試求使該劈開始向右運動時所需之 P 力.

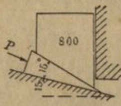
答. 1,159 斤.

201. 在上題中，如使該劈向左取等速運動，試再求其所需 P 力之大小.

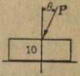
答. −84 斤.



第258圖



第259圖



第260圖

202．在第259圖中，若所有各接觸面之摩擦係數均等於$\frac{1}{3}$，試求使該劈向右運動時所需之P力．假定P力之作用線平分劈之頂角．

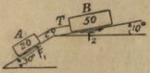
答．1,684 斤．

203．在第260圖中，若所示物體之摩擦係數等於0.3，又$\theta=25°$，試求使此物體開始運動時所需之壓力P．

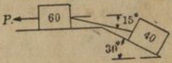
答．19.9 斤．

204．在第261圖中，A為一20斤之物體在一30°斜面上，又B為一50斤之物體在一10°斜面上．兩物體係用一繩聯繫，並通過一毫無摩擦之滑輪上．若此兩物體與斜面間之摩擦係數皆等於0.3，則此一組物體是否將向下滑動？並求F_1，F_2與T．

答．$F_1=5.196$ 斤；$F_2=13.487$ 斤；$T=4.804$ 斤．



第261圖



第262圖

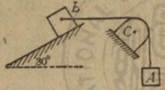
205．有重40斤之物體置於一30°斜面上，另有重60斤之物體置於一較高之水平面上，中間用繩聯繫，如第262圖所示．繩與水平

之交角等於 15°. 若摩擦角 = 20°, 試求使物體開始向右運動時所需之 P 力.

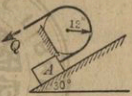
答. 61.6 斤.

206. 在第 263 圖中, 物體 B 與斜面間之摩擦係數等於 0.5, 繩與固定鼓輪 C 間之摩擦係數等於 $\frac{1}{\pi}$. 繩在 B, C 間係成水平. B 之重量爲 100 斤. 試求使物體 B 開始沿斜面向上行動時所需 A 之最小重量.

答. 249 斤.



第 263



第 264 圖

207. 今有一梯長 20 尺, 重 50 斤, 一端靠於直牆, 一端置水平地板上. 若梯與直牆之交角等於 15°, 又梯與地板及直牆間之摩擦係數皆等於 0.6, 試求使梯脚向外滑動時所需之水平力若干? 又使梯脚向內滑動時所需之水平力若干?

答. 22.2 斤; 40.8 斤.

208. 在上題中, 如將梯脚向外移動, 試求當梯脚開始滑動時, 梯與直牆之最大交角.

答. 62°.

209. 今有一繩繞於絞車之轆轤上共計 $2\frac{1}{2}$ 轉. 若於繩之一端施

以40斤之拉力,方足使其不致滑動,試求繩之另一端所懸重量若干?已知繩與鼓輪間之摩擦係數等於0.4.

答. 21,420斤.

210. 有一樞軸,其外圈半徑4寸,內圈半徑2寸,其上載有5,000斤之壓力.若摩擦係數等於0.05,試求摩擦力矩.

答. 778寸斤.

211. 在第264圖中,帶之一端繫一重200磅之物體 A 置於一30°斜面上,另一端則施以 Q 力.若帶與滑輪間之摩擦係數等於 $\frac{1}{\pi}$,物體 A 與斜面間之摩擦係數等於0.2,試求使物體 A (a)開始向上運動及(b)開始向下運動時所需之 Q 力各若干?

答. (a)335磅; (b)24.1磅.

NATIONAL CENTRAL LIBRARY ROC 國家圖書館

第十章　重心

96. 釋義　凡一組平行力作用於同一物體，則所有各力對於任一點之力矩代數和等於其合力對於此同點之力矩.如以方程式表之，即

$$\Sigma(Fx)=\Sigma F\times\bar{x}=R\bar{x}.$$

此式在前數章中業經一再引用，其原理亦已一再說明.由此式求得 $\Sigma(Fx)$ 後，即可求 $\bar{x}$，易言之，即合力作用線之位置可以由此決定.

同理，一個體積，質體，面積或一條線對於任一軸或任一平面之力矩即等於該體積，質體，面積或線與該軸或平面之某一距離 $\bar{x}$（或 $\bar{y}$，……）之相乘積.故若將此體積，質體，面積或線更分成若干極微小之部分，則此乘積即等於所有各個微小部分之力矩代數和.如以方程式表之，應爲：

$$\Sigma(vx)=\Sigma v\cdot\bar{x}=V\bar{x},\quad 或\ \int x\,dV=\int dV\cdot\bar{x}=V\bar{x};$$

$$\Sigma(mx)=\Sigma m\cdot\bar{x}=M\bar{x},\quad 或\ \int x\,dM=\int dM\cdot\bar{x}=M\bar{x};$$

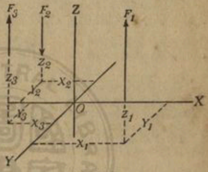
$$\Sigma(ax)=\Sigma a\cdot\bar{x}=A\bar{x},\quad 或\ \int x\,dA=\int dA\cdot\bar{x}=A\bar{x};$$

$$\Sigma(lx)=\Sigma l\cdot\bar{x}=L\bar{x},\quad 或\ \int x\,dL=\int dL\cdot\bar{x}=L\bar{x}.$$

式中距離 $\bar{x}$（或 $\bar{y}$，……）即稱爲**重心距離**.此重心距離之兩端，一在其所指對象軸或平面上，是爲力矩中心；一即在該體積，質體，面積或

線之內，稱爲該體積，質體，面積或線之重心*. 故所謂重心者，可假定爲某一體積，質體，面積或線之凝結點，此一凝結點對於任一軸或平面之力矩，即與原有整個體積，質體，面積或線對於同一軸或平面之力矩相等.

97. 一組平行力之重心 命 F_1, F_2, F_3 表一組非同平面平行力，如第 265 圖，並作直角坐標軸 OX, OY 及 OZ. 選取 OZ 軸使與諸力平行. 命諸力作用線之坐標分別爲 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). 於是若命 R 表此一組之力之合力，及 (x_0, y_0) 表此合力對於 X 及 Y 兩平面之坐標，則



第 265 圖

$$R = \Sigma F, \quad x_0 = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F}, \quad y_0 = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F}.$$

今假想將此一組之力轉動至與 OX 軸平行，其各作用點則始終不變. 於是，若命 (y_0, z_0) 表此合力 R 對於 Y 及 Z 兩平面之坐標，則

$$R = \Sigma F, \quad y_0 = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F}, \quad z_0 = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma F}.$$

若再將此一組之力轉至與 OY 軸平行，其各作用點亦始終不變，則

---

* 【註】若物體厚薄粗細一致且爲均質者，則其重心與質量中心相疊合，其重心距離又或稱爲質心距離. 關於質量等問題容詳於第十五章.

$$R=\Sigma F,\quad x_0=\frac{\Sigma Fx}{\Sigma F},\quad z_0=\frac{\Sigma Fz}{\Sigma F}.$$

因之,此一組之力必有一重心爲其合力所通過之點,其坐標爲

$$x_0=\frac{\Sigma Fx}{\Sigma F},\quad y_0=\frac{\Sigma Fy}{\Sigma F},\quad z_0=\frac{\Sigma Fz}{\Sigma F}.$$

在上式中,若 $\Sigma F=0$,則 x_0, y_0, z_0 將成爲無限值,而此一組之力將成爲無重心之狀態;易言之,即若 $\Sigma F=0$,則合力將爲一力偶也.

習題

212. 今有一組平行力,其大小各爲10斤,24斤,30斤及36斤,又此諸力在 XY 平面上之作用點各爲(2寸,3寸),(4寸,1寸),(3寸,4寸)及(0寸,0寸).若所有平行力均係同向,試求其重心所在.

答. (2.03寸,1.74寸).

213. 在上題中,若第一力之方向與其餘諸力之方向相反,試再求其重心所在.

答. (2.075寸,1.425寸).

93. 一個物體之重心　宇宙間一切物體皆受有萬有引力之作用,此在物理學中固已詳論.當地心吸引某一物體時,對於構成該物體之各個質點皆發生作用,而此種吸引力之作用線並皆成平行,亦即與地心皆成垂直.關於此等平行力之合力,則稱爲該物體之重力或重量,無論該物體轉至如何位置,此合力之作用線,必通過一固定之點,此一定點即爲該物體之重心.

設命 w 爲該物體每一單位體積之重,dV 爲該物體中任一微小部分之體積,則地心對於此微小部分之引力等於 wdV.將此值代入上

節各式中，即得

$$W=\int wdV,\quad x_0=\frac{\int wxdV}{\int wdV},$$

$$y_0=\frac{\int wydV}{\int wdV},\quad z_0=\frac{\int wzdV}{\int wdV}.$$

式中 W 表物體之總重，(x_0, y_0, z_0) 表其重心之坐標．如將上式移項，則得

$$\int wxdV=x_0W,\quad \int wydV=y_0W,\quad \int wzdV=z_0W.$$

此三式稱為該物體對於 X，Y 及 Z 三個平面之重量力矩．

99．一羣物體之重心　設有一羣物體，其重量各為 W_1, W_2, W_3，……，其重心之坐標各為 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，(x_3, y_3, z_3)，……；又命此一羣物體之總重為 W，其重心之坐標為 (x_0, y_0, z_0)．則

$$W=W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots.$$

所有各個物體對於 X 平面之重量力矩代數和將為

$$W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3+\cdots\cdots=\Sigma Wx,$$

或

$$\Sigma Wx=Wx_0;$$

同理，各個物體對於 Y 及 Z 兩平面之重量力矩代數和將各為

$$\Sigma Wy=Wy_0,\qquad \Sigma Wz=Wz_0.$$

故

$$x_0=\frac{\Sigma Wx}{W},\quad y_0=\frac{\Sigma Wy}{W},\quad z_0=\frac{\Sigma Wz}{W}.$$

100．對稱平面及對稱軸　設有一幾何形體，無論其為一體積，

面積或線，對於任一平面係成對稱，則其重心必在此平面內.

若有兩個或兩個以上之對稱平面相交於一直線，則此直線卽稱爲對稱軸，軸內卽爲其重心所在.

若有三個或三個以上之對稱平面相交於一點，則此點卽係重心.

故凡多數幾何形體，若其全部質量均勻，則其質量中心或重心，皆可根據上述情形直接求得. 玆舉數例於下:

(1) 一條直線之重心卽在其中點.

(2) 一個圓弧之重心卽在平分該圓弧之半徑上.

(3) 一個圓或其圓周之重心卽其圓心.

(4) 一個橢圓或其圓周之重心卽其中心.

(5) 一個等腰三角形之重心卽在平分其兩等腰交角之中線上.

(6) 一個矩形或其周界之重心卽在平分其對邊之兩直線之交點，亦卽在兩對角線之交點.

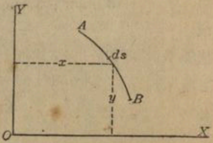
(7) 一個球體或其球面之重心卽其球心.

(8) 一個橢圓體或其表面之重心卽其中心.

(9) 一個正圓錐體之重心卽在其軸線上.

(10) 一個正稜柱體之重心卽在平行其底面軸線之中點.

(11) 一個圓柱體或其表面之重心卽在其軸線之中點.



第206圖

101. 一條線之重心　設此線爲一直線，則其重心卽在

此直線之中點. 若為一平曲線如第266圖之AB,可用下法求其重心.

在AB之平面內作OX,OY兩直角坐標軸. 將AB等分為無數極微小之線段,命dL表其中一個. 則該線對於OY及OX兩軸之力矩將分別等於

$$x_0L=\int xdL,\qquad 又\quad y_0L=\int ydL.$$

$$\therefore\quad x_0=\frac{\int xdL}{L},\quad 又\quad y_0=\frac{\int ydL}{L}.$$

若該線並非一平曲線,則其重心應有三個坐標,即

$$x_0=\frac{\int xdL}{L},\quad y_0=\frac{\int ydL}{L},\quad z_0=\frac{\int zdL}{L}.$$

102. **一羣線之重心**　設所有各線皆在同一平面內,命L_1,L_2,L_3,……分別表各線之長,又(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),……分別表此各線重心之坐標. 則各線對於OY軸之力矩代數和將等於

$$L_1x_1+L_2x_2+L_3x_3+\cdots\cdots=\Sigma Lx.$$

又對於OX軸之力矩代數和將等於

$$L_1y_1+L_2y_2+L_3y_3+\cdots\cdots=\Sigma Ly.$$

命L表此各線長之總和,由是得

$$x_0=\frac{\Sigma Lx}{L},\quad 又\quad y_0=\frac{\Sigma Ly}{L}.$$

若此一羣線並不在同一平面內,則其重心應有三個坐標,即

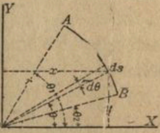
$$x_0=\frac{\Sigma Lx}{L},\quad y_0=\frac{\Sigma Ly}{L},\quad 又\quad z_0=\frac{\Sigma Lz}{L}.$$

例題 47.　試求第 267 圖所示圓弧 AB 之重心.

解　命 r 爲圓弧之半徑，AB 之圓心 O 即爲 OX，OY 兩軸之原點. θ_1 及 θ_2 爲 OA 及 OB 與 OX 之交角. 則

$$L=r(\theta_1-\theta_2),\quad dL=rd\theta,$$

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta.$$



第 267 圖

由方程式　$$x_0=\frac{\int x dL}{L},\quad y_0=\frac{\int y dL}{L},$$

得　$$x_0=\frac{\int_{\theta_2}^{\theta_1} r^2\cos\theta d\theta}{r(\theta_1-\theta_2)}=\frac{r(\sin\theta_1-\sin\theta_2)}{\theta_1-\theta_2}.$$

又　$$y_0=\frac{\int_{\theta_2}^{\theta_1} r^2\sin\theta d\theta}{r(\theta_1-\theta_2)}=\frac{r(\cos\theta_2-\cos\theta_1)}{\theta_1-\theta_2}.$$

如 $\theta_2=0$，則上式化爲

$$x_0=\frac{r\sin\theta_1}{\theta_1},\quad y_0=\frac{r(1-\cos\theta_1)}{\theta_1}.$$

如 $\theta_1=90^\circ$ 或 $\frac{\pi}{2}$，$\theta_2=0$，則上式化爲

$$x_0=y_0=\frac{2r}{\pi}=0.637r.$$

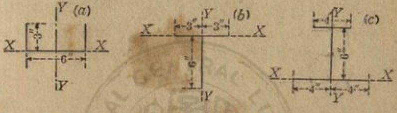
習　題

214. 試證半圓形之重心即在平分此圓弧之半徑上，其與圓心

之距離等於$\frac{2r}{\pi}$.

215. 試求第 268 圖(a),(b)(c)中所示各截面之重心.

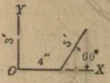
答. (a) $x_0=0$, $y_0=0.75$ 吋. (b) $x_0=0$, $y_0=-1.5$ 吋.
(c) $x_0=0$, $y_0=2.44$ 吋.



第 268 圖

216. 有一 12 吋長之鐵絲彎成如第 269 圖所示之形,試求其重心.

答. $x_0=0.85$ 吋, $y_0=1.28$ 吋.



第 269 圖

第 270 圖

103. 一個面積之重心　設 abc 表一幾何面積,如第 270 圖.在同一平面內作 OX, OY 兩直角坐標軸.命 dA 表此 abc 內之微面積,其坐標爲(x, y).則該面積對 OY, OX 兩軸之力矩將分別等於

$$x_0A=\int x\,dA,\qquad \text{又}\quad y_0A=\int y\,dA.$$

$$\therefore\quad x_0=\frac{\int x\,dA}{A},\quad \text{又}\quad y_0=\frac{\int y\,dA}{A}.$$

104. 一羣面積之重心 依上述同一原則，設有任一羣在同一平面內之面積，並命 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 分別表各面積之大小，(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，$\cdots\cdots$ 表各該面積重心之坐標．則各面積對於 OY 軸之力矩代數和將等於

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+\cdots\cdots=\Sigma Ax.$$

又對於 OX 軸之力矩代數和將等於

$$A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3+\cdots\cdots=\Sigma Ay.$$

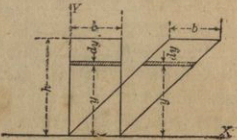
命 A 表各面積之總和，由是得

$$x_0=\frac{\Sigma Ax}{A},\qquad \text{又}\quad y_0=\frac{\Sigma Ay}{A}.$$

若此一羣面積並不在同一平面內，則其重心應有三個坐標，即

$$x_0=\frac{\Sigma Ax}{A},\quad y_0=\frac{\Sigma Ay}{A},\quad \text{又}\quad z_0=\frac{\Sigma Az}{A}.$$

例題 48. 求證一矩形或平行四邊形之重心，其與底邊之垂直距離等於其高之半．



第271圖

解 命 h 及 b 各表此矩形或平行四邊形之高及

底，如第271圖．命OX軸與其底邊相疊合．今取一平行於OX之窄條狀微面積dA，其寬為dy．於是

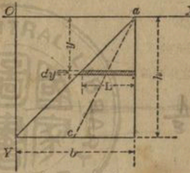
$$dA=bdy.$$

$$\therefore\quad y_0=\frac{\int ydA}{A}=\frac{b\int_0^h ydy}{A}=\frac{h}{2}.$$

以上證解對於矩形及平行四邊形均可適用．

例題49． 試求任一三角形之重心．

解 命b及h各表三角形之底及高，如第272圖．通過頂點a作OX軸並與底邊平行．任取一窄條狀微面積，其寬假定等於L，其與OX軸之距離等於y，並與之平行．於是



第272圖

$$dA=Ldy.$$

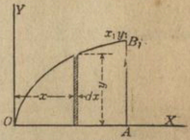
但 $$L:y=b:h,$$

故 $$dA=\frac{b}{h}ydy.$$

$$\therefore\quad y_0=\frac{\int ydA}{A}=\frac{\frac{b}{h}\int_0^h y^2dy}{\frac{bh}{2}}=\frac{2}{3}h.$$

是以任一三角形之重心與其底邊之垂直距離應等於$\frac{h}{3}$．又因每一窄條之重心皆在其中心點，故三角形之重心應即在其中線ac上，與

底邊相距$\frac{h}{3}$之點.



第273圖

例題 50. 在第273圖中，OB示一拋物線形之一半，其主軸與OX相疊合，又頂點與原點O相疊合. 已知AB線與OY軸平行，B點之坐標爲(x_1, y_1)，試求由拋物線OB，坐標軸OX及直線AB所包面積AOB之重心.

解 拋物線之主軸如與OX相疊合，又頂點與O相疊合，則其方程式將爲$y^2=cx$. 今取一窄條狀微面積dA與OY平行，並命其與OY之距離等於x. 命dx爲此窄條之寬. 則

$$dA=ydx,$$

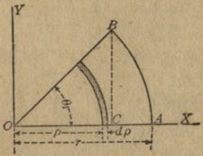
$$x_0=\frac{\int xdA}{\int dA}=\frac{\int_0^{x_1} xydx}{\int_0^{x_1} ydx}=\frac{c^{\frac{1}{2}}\int_0^{x_1} x^{\frac{3}{2}}dx}{c^{\frac{1}{2}}\int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}}dx}=\frac{3}{5}x_1.$$

同理，
$$y_0=\frac{\int ydA}{\int dA}=\frac{\int_0^{x_1}\frac{y}{2}ydx}{\int_0^{x_1} ydx}=\frac{\frac{c}{2}\int_0^{x_1} xdx}{c\int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}}dx}$$

$$=\frac{3}{8}c^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}y_1.$$

例題 51. 試求第274圖所示扇形面積AOB之重心.

解 本題之扇形面積，可視作同以O爲圓心之若干弧形窄條，較易求解. 今取任一極窄條爲微面積，命其半徑等於ρ，寬等於$d\rho$. 則



第274圖

其面積將等於

$$dA=\theta_1\rho d\rho.$$

又其重心與 OX, OY 兩軸之距離將各為 $\dfrac{\rho(1-\cos\theta_1)}{\theta_1}$ 及 $\dfrac{\rho\sin\theta_1}{\theta_1}$.

於是

$$x_0=\frac{\int x dA}{\int dA}=\frac{\sin\theta_1\int_0^r\rho^2d\rho}{\theta_1\int_0^r\rho d\rho}=\frac{2}{3}r\frac{\sin\theta_1}{\theta_1},\qquad \theta=\frac{\rho}{r}$$

$$y_0=\frac{\int y dA}{\int dA}=\frac{(1-\cos\theta_1)\int_0^r\rho^2d\rho}{\theta_1\int_0^r\rho d\rho}=\frac{2}{3}r\frac{1-\cos\theta_1}{\theta_1}.$$

依上式，若 $\theta_1=90°$，卽四分之一圓形(或一象限)面積之重心為

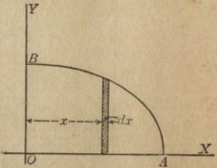
$$x_0=y_0=\frac{4r}{3\pi}.$$

若 $\theta_1=180°$，卽半圓形面積之重心為

$$x_0=0,\qquad y_0=\frac{4r}{3\pi}.$$

例題52. 設AOB表四分之一橢圓形面積，如第275圖，其長軸為$OA=a$，短軸為$OB=b$. 試求其重心.

解 橢圓形之方程式為$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 今取一窄條狀微面積$dA$，與$OY$軸平行，其寬為$dx$，則



第275圖

$$dA=ydx=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

於是

$$x_0=\frac{\int xdA}{\int dA}=\frac{\frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx}$$

$$=\frac{\left[-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a}{\left[\frac{1}{2}x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a}=\frac{4a}{3\pi}.$$

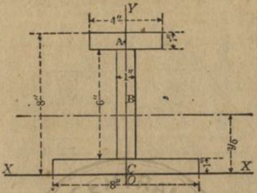
同理，可以證明 $$y_0=\frac{4b}{3\pi}.$$

至於被Y-Y軸所包之半橢圓形面積，其重心將為

$$x_0=\frac{4a}{3\pi},\quad y_0=0.$$

例題53. 試求第276圖所示I字形截面面積之重心.

解 先將此截面分成三個矩形A，B及C，其尺寸均已註明於圖



第276圖

中.則此諸面積之重心可依第104節之原則求之.

取 OX 爲力矩軸,求諸面積對於 OX 之力矩代數和,得

$$8\times1\times\tfrac{1}{2}+6\times1\times4+4\times1\times7\tfrac{1}{2}=58.$$

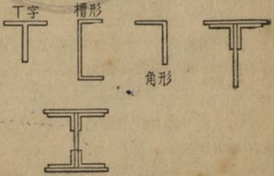
又其面積之總和 $=8\times1+6\times1+4\times1=18.$

於是 $$y_0=\frac{\Sigma Ay}{A}=\frac{58}{18}=3.22\text{ 吋}.$$

因此種截面係成對稱,故其重心必在對稱軸上,即

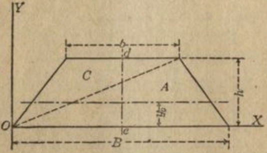
$$x_0=0.$$

上法亦能應用於第277圖所示之各種截面形.



第277圖

例題 54. 試求第278圖所示梯形面積之重心.



第278圖

解 命梯形之下底等於 B, 上底等於 b, 高等於 h. 將此面積分爲兩個三角形 A 及 C. 則 A 及 C 之重心與 OX 軸之距離將各爲

$$\frac{h}{3} \text{ 及 } \frac{2h}{3}.$$

$$\therefore \quad y_0=\frac{\Sigma Ay}{A}=\frac{\frac{Bh}{2}\times\frac{h}{3}+\frac{bh}{2}\times\frac{2h}{3}}{(B+b)\frac{h}{2}}=\frac{h}{3}\,\frac{B+2b}{B+b}.$$

習　　題

217. 今有半個拋物線形,其底等於 b,高等於 a. 若拋物線之方程式爲 $y^2=4mx$,試求該面積之重心.

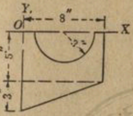
答. $x_0=\frac{3}{5}a$, $y_0=\frac{3}{8}b$.

218. 有一面積係由拋物線 $y^2=4mx$, 直線 $y=b$ 及 OY 軸所圍成,試求其重心.

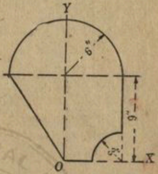
答. $x_0=\frac{3}{10}a$, $y_0=\frac{3}{4}b$.

219. 試求第 279 圖所示面積之重心.

答. $x_0=3.58$ 吋, $y_0=-4.07$ 吋.



第 279 圖



第 280 圖

220. 試求第 280 圖所示面積之重心.

答. $x_0=0.57$ 吋, $y_0=8.04$ 吋.

221. 試求以橢圓形 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, 直線 $x=5$ 及直線 $y=4$ 所圍面積之重心.

答. $x_0=3.88$, $y_0=3.11$.

222. 試求第 281 圖所示 T 形截面之重心.

答. $x_0=0$, $y_0=3$ 吋.

223. 試求第 282 圖所示影線部分面積之重心.

答. $x_0=0$, $y_0=2.92$ 吋.

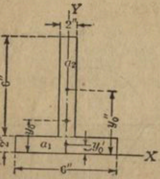
224. 試求第 283 圖所示面積之重心.

答. $x_0=y_0=3.44$ 吋.

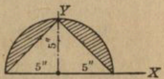
225. 試求第 284 圖所示截面之重心.

答. $x_0=2.60$ 吋, $y_0=5.15$ 吋.

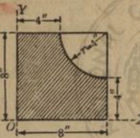
226. 有一由曲線 $y^2=4x-8$, 直線 $y=4$ 及 OX, OY 兩軸所圍之



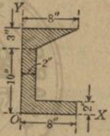
第281圖



第282圖



第283圖



第284圖

面積,試求其重心.

答. $x_0=1.88$, $y_0=2.40$.

105. 巴勃氏原理

(一) 設一平曲線與一直線皆在同一平面內,但不相交.今若使此平曲線繞直線旋轉,則由此所生之表面面積將等於該迴轉曲線之長與其重心所經路線之相乘積.

證　假定此平曲線係在 Z 平面內.命 L 等於其長,x_0 等於其重心與 OY 軸之距離,並於此曲線上任取一極微小之長度 ds,其與 OY

之距離等於 x. 於是若使此平曲線繞 OY 軸轉動，則 ds 將產生一極微小之表面積，等於

$$2\pi x ds;$$

而平曲線全長所產生之表面面積將等於

$$A=2\pi\int x ds.$$

但
$$\int x ds=x_0 L,$$

$$\therefore\quad A=2\pi x_0 L.$$

若此平曲線繞 OY 軸僅轉動 θ 角，而未及一週時，則由此所生之面積將等於

$$A_1=\theta x_0 L.$$

（二）設一平面積與一直線皆在同一平面內，但不相交. 今若使此平面積繞直線旋轉，則由此所生之立體體積將等於該迴轉面之面積與其重心所經路線之相乘積.

證　假定此平面積係在 Z 平面內. 命 A 等於其面積之大小，x_0 等於其重心與 OY 軸之距離，並於此面積上任取一極微小之面積 dA. 於是若使此平面積繞 OY 軸轉動，則 dA 將產生一極微小之立體積，等於

$$2\pi x dA;$$

而平面積全部所產生之立體體積將等於

$$V=2\pi\int x dA.$$

但
$$\int x dA=x_0 A,$$

$$\therefore\quad V=2\pi x_0 A.$$

若此平面積繞 OY 軸僅轉動 θ 角，而未及一週時，則由此所生之體積將等於

$$V=\theta x A.$$

106. 一個體積或一羣體積之重心 關於'一羣物體之重心'已於第 99 節中詳予討論；至若一個或一羣之均質體積，其重心亦可依該節所述方法求之. 卽

若命 $V_1, V_2, V_3, \cdots\cdots$ 表各不同之體積，又 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), $\cdots\cdots$ 表各該體積之重心坐標，並命 V 表其總體積. 則

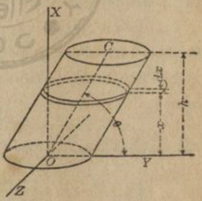
$$V=V_1+V_2+V_3+\cdots\cdots,$$

又 $$x_0V=V_1x_1+V_2x_2+V_3x_3+\cdots\cdots=\Sigma Vx.$$

故 $$x_0=\frac{\Sigma Vx}{V};\ \text{同理,}\ y_0=\frac{\Sigma Vy}{V},\ z_0=\frac{\Sigma Vz}{V}.$$

例題 55. 今有一均質之圓柱或稜柱體，其上下兩邊係成平行. 試求其重心與底邊之垂直距離.

解 命 $h=$ 該形體之高，$A=$ 其底邊之面積，如第 285 圖. 通過底邊之重心 O 作垂直坐標軸 OX. 假定將該形體分成若干薄片狀微體積同垂直於 OX 軸，其厚皆等於 dx. 於是 $dV=Adx$，而其重心之坐標將爲



第 285 圖

$$x_1=\frac{\int xdV}{\int dV}=\frac{A\int^h xdx}{A\int_0^h dx}=\frac{h}{2}.$$

因每一微體積之重心皆將在該形體之中心軸 OC 上，故該形體全體積之重心亦將在此軸線上.

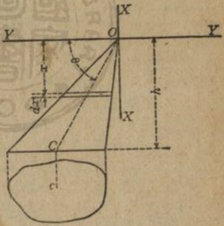
若中心軸 OC 與底邊之交角等於 θ，則所求重心與 O 點之距離將等於

$$\frac{x_1}{\sin\theta}=\frac{h}{2\sin\theta}.$$

例題 56. 試求圓錐或稜錐體之重心與其底邊之垂直距離.

解　命 h = 圓錐或稜錐體之高，C 為底邊之重心，A = 底邊之面積，如第 286 圖.

通過頂點 O 作 OX, OY, OZ 三坐標軸，並使 OX 垂直於其底邊. 茲假定將該形體分成若干薄片狀微體積同垂直於 OX 軸；其厚皆等於 dx.



第 283 圖

於是，若命 a = 其中任一薄片之面積，則此薄片之體積將等於

$$dV=adx.$$

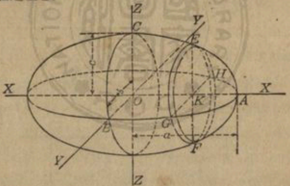
但　$$\frac{a}{A}=\frac{x^2}{h^2},\qquad 故\quad dV=\frac{A}{h^2}x^2dx.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{\int x dV}{\int dV}=\frac{\frac{A}{h^2}\int_0^h x^3dx}{\frac{A}{h^2}\int_0^h x^2dx}=\frac{3}{4}h.$$

$$V=\frac{A}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{Ah}{3}.$$

因每一微體積之重心皆在 OC 線上，故該形體全體積之重心亦必在此線上，其與底邊之垂直距離將等於 $\frac{h}{4}$。若 OC 線與底邊之交角等於 θ，則所求重心與 C 點之距離將等於 $\frac{h}{4\sin\theta}$.

例題 57. 有一橢圓體如第 287 圖所示，試求在 YZ 平面之右面半橢圓體之重心.



第 287 圖

解 橢圓體之方程式為

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (1)$$

式中 $2a, 2b, 2c$ 各為長軸，中軸及短軸.

茲假定將該形體分爲若干薄片狀微體積同與 OX 軸成垂直，並命 $GEHF$ 表其中之一片，其厚爲 dx，其與軸心之距離等於 x. $GEHF$ 之截面將仍爲一橢圓，其長軸及短軸各爲 EF 及 GH，而可由 $y=0$，$z=0$ 代入上式求之.

在(1)式中，當 $y=0$，　　$z=EK=\dfrac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

又當　　$z=0$，　　$y=GK=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

故 $GEHF$ 之截面積將等於

$$\pi(GK\times EK)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2),$$

而此一薄片之體積將等於

$$dV=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)dx.$$

於是

$$x_0=\frac{\int x dV}{\int dV}=\frac{\dfrac{\pi bc}{a^2}\displaystyle\int_0^a(a^2x-x^3)dx}{\dfrac{\pi bc}{a^2}\displaystyle\int_0^a(a^2-x^2)dx}=\frac{3}{8}a, \qquad (2)$$

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{2}{3}\pi abc. \qquad (3)$$

因每一微體積之重心皆在 OX 軸上，故該形體之重心亦應在 OX 軸上. 於是

$$y_0=0,\ z_0=0.$$

例題 58.　已知球體之半徑等於 r，試求半球體之重心.

解　依上題橢圓體之例，若命 $a=b=c=r$，則

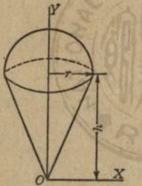
$$x_0=\frac{3}{8}r,\quad y_0=0,\quad z_0=0.$$

又
$$V=\frac{2}{3}\pi abc=\frac{2}{3}\pi r^3.$$

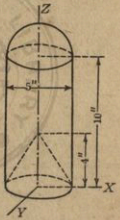
習 題

227. 有一圓錐及半球之均質結合體，如第 288 圖所示. 已知 r 及 h 之値各等於 6 寸及 18 寸，試求該形體之重心.

答. $x_0=0$, $y_0=16.2$ 寸.



第 288 圖



第 289 圖

228. 有一均質正圓錐墩，其上下兩邊之半徑各爲 r_1 及 r_2，高爲 a. 試求該形體重心與底邊之距離.

答. $y_0=\frac{a}{4}\cdot\frac{r_2^2+2r_1r_2+3r_1^2}{r_2^2+r_1r_2+r_1^2}$.

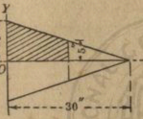
229. 有一正圓柱及半球之均質結合體，自其底部挖去一正圓

錐體，如第 289 圖所示. 試求該形體之重心.

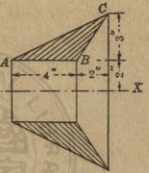
答. $x_0=6.45$ 吋.

230. 有一均質正圓錐墩，其各部尺寸如第 290 圖所示. 試求其重心.

答. $x_0=5.9$ 吋.



第 290 圖



第 291 圖

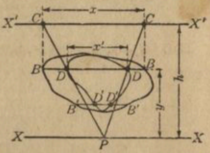
231. 有一三角形面積 ABC 繞 OX 軸轉動，生一空心圓錐墩，其各部尺寸如第 291 圖所示. 試求該形體之表面面積.

答. 277 平方吋.

107. **求重心之圖解法**　凡遇有形狀不規則之曲面，未可用方程式以表之者，在此種情形中，雖其重心不能用積分法求得，但可採用圖解法，玆示如下：

如第 292 圖，命 $BB'B'B$ 表一不規則之曲面. 今欲求其重心，可於任一便利之距離 h 處，作兩平行線 X-X 及 X'-X'. 再作 BB 線平行於 XX，並將 B,B 兩點之射影投射於 X'-X' 線上，得 C,C 兩點. 就 X-X 線上取任一點 P. 聯結 P 與 C,C 兩點. 設 CP,CP 兩線交 BB

線於 D, D 兩點. 同理, 更將 B', B', B'', B'' 等點之射影投射於 $X'-X'$ 線上, 得 D', D', D'', D'' 等點. 聯結此等 $D, D, D', D', D'', D'', \cdots\cdots$ 諸點成另一不規則之曲面, 並以 A' 表其面積. 又命原有曲面之面積爲 A, 於是該面積之重心與 $X-X$ 線之距離將等於



第 292 圖

$$y_0=\frac{A'}{A}h.$$

因若以 x' 及 x 各表 DD 及 CC 之長, 則由 PDD 及 PCC 兩相似三角形, 將得下列之關係:

$$\frac{x}{h}=\frac{x'}{y}, \quad \text{或} \quad xy=x'h.$$

又 $$y_0=\frac{\int ydA}{A}=\frac{\int yxdy}{A}=\frac{h\int x'dy}{A}=\frac{h\int dA'}{A},$$

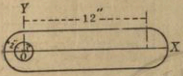
$$\therefore \quad y_0=\frac{hA'}{A}.$$

面積 A 及 A' 可用求積儀或其他適宜方法求之, 由是, 卽可用上式求其重心距離 y_0. 同理, 若取任兩平行線 $Y-Y$ 及 $Y'-Y'$, 並依此種投影法求得另一曲面, 則原有曲面之重心與 $Y-Y$ 軸之距離亦可由此算得.

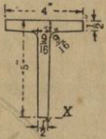
總　習　題

232. 試求第 293 圖所示面積之重心.

答. $x_0=6.34$ 吋, $y_0=0$.



第 293 圖



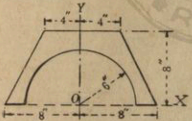
第 294 圖

233. 試求第 294 圖所示 T 形面積之重心.

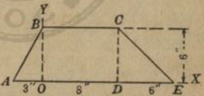
答. $x_0=0$, $y_0=3.42$ 吋.

234. 試求第 295 圖所示面積之重心.

答. $y_0=5$ 吋.



第 295 圖



第 296 圖

235. 有一梯形鐵鈑,其尺寸如第 296 圖所示. 試求其重心.

答. $x_0=4.84$ 吋, $y_0=2.64$ 吋.

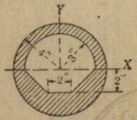
236. 如將上題中之 ABO 及 CDE 兩個三角形部分均向前彎成

90°，試再求其重心.

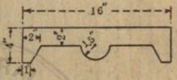
答. $x_0=4.48$ 吋，$y_0=3.12$ 吋，$z_0=0.6$ 吋

237. 試求第 297 圖所示面積之重心.

答. $y_0=0.403$ 吋.



第 297 圖



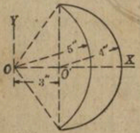
第 298 圖

238. 有直徑 12 呎之飛輪，其邊緣之截面如第 298 圖所示. 試求此邊緣之體積.

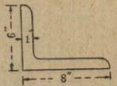
答. 18,430 立方吋.

239. 有一月牙形面積，如第 299 圖所示. 試求其重心.

答. $x_0=5.38$ 吋.



第 299 圖



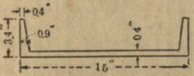
第 300 圖

240. 有一角形面積，其尺寸如第 300 圖所示. 試求其重心.

答. $x_0=2.65$ 吋，$y_0=1.65$ 吋.

241. 試求第301圖所示槽形面積之重心.

答. 0.794 吋.



第301圖

第302圖

242. 設有兩個如第301圖所示之槽形鐵,用鉚釘結成如第302圖所示之形,試求其重心.

答. $y_0=11.647$ 吋.

NATIONAL CENTRAL LIBRARY 國家圖書館 ROC

第十一章　慣性矩(又稱複力矩)

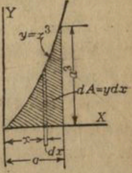
108. 初力矩與複力矩之別　關於力矩定義已見本書第33節，玆再略加說明，卽，凡一力 F 作用於某一物體，該物體若係固定於一點或一軸者，則 F 力對於該點或軸之力矩將等於 Fd. 今若易此 F 力爲一線，一面積，或一體積，則其對於任一軸或任一平面之力矩將分別等於

$$\int x dL = Lx_0,\quad \int x dA = Ax_0,\quad 或\quad \int x dV = Vx_0.$$

此類 Fd, $Lx_0\left(=\int x dL\right)$, $Ax_0\left(=\int x dA\right)$, $Vx_0\left(=\int x dV\right)$ 諸式，前曾統簡稱爲力矩，但嚴格言之，實應稱之爲**初力矩**，以示有別於本章所述之**複力矩**或**慣性矩** $\int x^2 dA$, $\int x^2 dM$. 蓋在初力矩中，所有力臂 d 或重心距離 x_0 僅爲一次乘冪，而在複力矩中，x 已進入二次乘冪. 至於二者應用方面，在普通力學中初力矩佔有最重要地位，因一切力之分析大都依據此種力矩原則演釋而得，而在材料力學及其他工程學中，則以複力矩極關重要，應用頗廣.

玆將面積之初力矩求法，示例於下：

例題 59.　設一面積爲曲線 $y=x^3$, X 軸及直線 $x=a$ 所圍成，試求其對於 Y 軸之力矩. 若 $a=2$ 寸，試求此力矩之數値(第303圖).



第 303 圖

解　假定將該面積分成若干窄條狀微面積同與 Y 軸平行，其寬等於 dx，則 $dA=ydx$. 於是該面積對於 Y 軸之力矩將為

$$M=\int xdA=\int_0^a xydx$$

$$=\int_0^a x^4dx=\frac{1}{5}a^5.$$

當 $a=2$ 寸，則 $M=\frac{32}{5}=6\frac{2}{5}$ 寸^3.

例題 60.　有一三角形，其底等於 b，高等於 h. 試求該面積對於底邊之力矩.

解　假定將該面積分成若干同與底邊平行之微面積，其寬等於 dy，則 $dA=bdy$. 由是該面積對於底邊之力矩將為

$$M=\int ydA=b\int_0^h ydy=\tfrac{1}{2}bh^2.$$

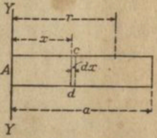
109.　複力矩或慣性矩之定義　複力矩又稱慣性矩，其公式為 $\int x^2dA$，式中 dA 表全面積 A 中任一極微小之面積，其與對象軸之距離等於 x，此對象軸則稱為慣性軸. 所有此等微面積之總和即等於原面積 A. 故若以文字表之，則

任一面積對於任一軸之慣性矩，即等於每一微面積及其與慣性軸距離之平方相乘積之總和.

似此定義，學者或尚未能充分明瞭，茲特再詳釋於次：

如第 304 圖，命 AB 表一矩形之面積，並將其分成若干窄條狀微面積 cd，其寬等於 dx. 假定將此面積繞 Y–Y 軸轉動，則由此等窄

條之慣性所生阻力將與其對 Y-Y 軸之距離 x 成正比例．於是此任一窄條之阻力強度將與 x 距離及其面積 dA 成正比例．故該窄條對於轉動所生之阻力，在一單位距離者，將等於 $dA\times 1$，在 x 距離者將等於 $dA\times x$，而此種阻力對於 Y–Y 軸之力矩將等於

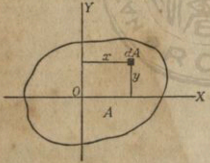


第 304 圖

$$(dA\times x)(x)=dA\,x^2,$$

今知面積 AB 既為全部窄條如 cd 等之集合，則所有此等窄條之阻力對於 Y–Y 軸之力矩總和，亦即面積 AB 對於 Y–Y 軸之慣性矩將等於 $\Sigma x^2 dA$.

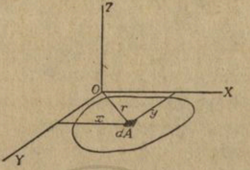
110．直角慣性矩與極慣性矩 慣性軸之位置，可與面積在同一平面內或與之互成垂直．其與面積在同一平面內者，所得之慣性矩，稱為**直角慣性矩**或簡稱為慣性矩，通常多以 I 表之(第 305 圖)．若對象軸係直角坐標軸 X-X，則於 I 之下旁加一'x'；Y–Y 軸，加一'y'以示區別，即



第 305 圖

$$I_x=\int y^2dA,\ \text{及}\ I_y=\int x^2dA.$$

若慣性軸與面積所在之平面互成垂直，則所得之慣性矩稱為極



第306圖

慣性矩，通常多以 J 表之（第306圖），即

$$J=\int r\,dA.$$

但自圖中觀之，將見

$$\int r\,dA=\int(x^2+y^2)\,dA=\int x^2dA+\int y^2dA,$$

$$\therefore\quad J=I_y+I_x.$$

由此方程式，因又得下一關係：

一個面積對於任一極軸之慣性矩，等於該面積對在同一平面內交於已知極軸之任二直角坐標軸之慣性矩之總和.

111. 面積之環動半徑　因一個面積之慣性矩爲一含有長度至四次乘冪之數量，故慣性矩之方程式實可改爲一總面積 A 與某一距離 k 之平方之相乘積，即

$$I_y=\int x^2dA=k^2A.$$

此距離 k 稱爲該面積之環動半徑.是以其定義又可解釋爲某一假定

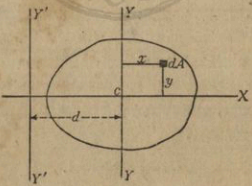
點與其慣性軸之距離，此假定點係假想當一個面積集中於該點時所得之慣性矩，將與原面積之慣性矩相等．惟此假定點與面積之重心並不疊合，故環動半徑與重心距離亦迥然有別，因之，慣性矩 k^2A 與 Ax_0^2 自亦不同，學者於此應加注意．

112. 慣性矩之單位 一個面積之慣性矩實含有長度至四次乘冪，已見上節，故若以寸爲其長度單位，則結果應按寸^{4}計；公分或吋，即按(公分)^{4}或吋^{4}計．

又在公式 $\int x^2dA$ 中，無論 x 值爲正或負，x^2 恆爲一正量，又 dA 亦爲一正量，是以 x^2 與 dA 之相乘積，亦即慣性矩，將恆爲正量．此則與初力矩不同者，蓋初力矩可以爲正，爲負，甚或爲零．

113. 對於平行軸間面積之慣性矩之關係 設已知一個面積對於在同一平面內某一重心軸之慣性矩，則對於任一平行軸之慣性矩可依下法求之．

如第 307 圖，命 C 表某一面積之重心．通過 C 作重心軸 Y-Y，並



第 307 圖

命 $Y'-Y'$ 為任一與 Y-Y 平行之軸，兩軸間之距離等於 d. 又該面積對於 Y-Y 軸之慣性矩以 I_0 表之. 對於 $Y'-Y'$ 軸則以 I 表之. 由是，依慣性矩之定義，得

$$I=\int(x+d)^2dA=\int x^2dA+2d\int xdA+d^2\int dA.$$

因 $$\int xdA=Ax_0=0,\quad \therefore\quad I=I_0+Ad^2.$$

由此結果，因得下述原理為：

一個面積對在同一平面內任一軸之慣性矩，等於該面積對於一平行重心軸之慣性矩加該面積與兩平行軸間距離之平方之相乘積.

此一原理簡稱為平行軸原理.

再者，若將上述之 I 及 I_0 各易以 Ak^2 及 Ak_0^2，則上式變為

$$Ak^2=Ak_0^2+Ad^2.$$

兩邊各消去 A，因得

$$k^2=k_0^2+d^2.$$

此式即表對於兩平行軸間面積之環動半徑所發生之關係.

114. 若干簡單圖形之慣性矩　在慣性矩方程式 $I=\int x^2dA$ 中，dA 係假定為一窄條狀微面積，與慣性軸平行，其寬為 dx，其與慣性軸之距離為 x. 至於在此微面積內所有各點與慣性軸之距離則均相等. 依此方程式，用積分法演算，即能求得若干圖形之慣性矩. 演算時，倘 dA 為 dx 與 dy 之積，則須求兩次積分. 如該面積之一邊為一定值，他一邊為 dx 或 dy，則僅求一次積分即可. 但為求演算便捷計，自應盡力減少積分之次數. 茲舉數例於次以明之：

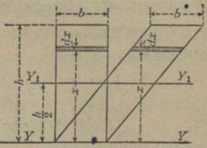
例題 61.　有一矩形或平行四邊形，其底等於 b，高等於 h. 試求

該面積對於以下各軸之惰性矩：

（1）通過底邊之軸.

（2）通過重心與底邊平行之軸.

解　假定此矩形或平行四邊形已分成若干與底邊平行之微面積，其寬爲 dx，如第 308 圖. 於是 $dA=bdx$.



第 308 圖

命　$I=$ 該面積對於通過底邊之 Y-Y 軸之惰性矩，

$I_0=$ 該面積對於通過重心並與 Y-Y 軸平行之 Y_1-Y_1 軸之惰性矩.

由 $I=\int x^2 dA$ 公式，因得

$$I=b\int_0^h x^2dx=\frac{bh^3}{3};$$

又
$$I_0=b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2dx=\frac{bh^3}{12}.$$

用第 113 節所述之關係，亦可由 I_0 求得 I 如下：

$$I=I_0+\left(\frac{h}{2}\right)^2A=\frac{bh^3}{12}+\frac{h^2}{4}\times bh=\frac{bh^3}{3}.$$

又此矩形對於重心之極惰性矩等於

$$J=I_x+I_y=\frac{bh^3}{12}+\frac{b^3h}{12}=\frac{bh}{12}(h^2+b^2).$$

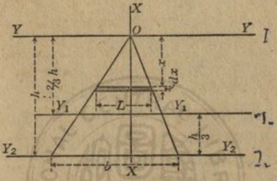
例題 62.　有一三角形，其底等於 b，高等於 h. 試求該面積對於

下列各軸之慣性矩.

(1) 通過頂點與底邊平行之軸;

(2) 通過重心與底邊平行之軸;

(3) 通過底邊之軸.



第309圖

解 通過頂點 O 作直角坐標軸 $X-X$, $Y-Y$. 命 $X-X$ 與底邊成垂直,如第309圖;並命 Y_1-Y_1 為通過重心與底邊平行之軸, Y_2-Y_2 為通過底邊之軸.

命 $I=$ 對於 $Y-Y$ 軸之慣性矩,

$I_0=$ 對於 Y_1-Y_1 軸之慣性矩,

$I_2=$ 對於 Y_2-Y_2 軸之慣性矩.

假定該面積係分成若干同與底邊平行之微面積,其寬為 dx, 長為 L, 則

$$dA=Ldx=\frac{b}{h}xdx.$$

故該面積之慣性矩對於

(1) 通過頂點之 $Y-Y$ 軸爲

$$I=\int x^2dA=\frac{b}{h}\int_0^h x^3dx=\frac{bh^3}{4};$$

(2) 通過重心之 Y_1-Y_1 軸，由方程式 $I=I_0+x_0^2A$，得

$$I_0=\frac{bh^3}{4}-\frac{4}{9}h^2\times\frac{bh}{2}=\frac{bh^3}{36};$$

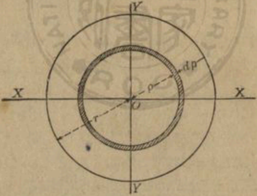
(3) 通過底邊之 Y_2-Y_2 軸，由方程式 $I=I_0+x_0^2A$，得

$$I_2=\frac{bh^3}{36}+\frac{h^2}{9}\times\frac{bh}{2}=\frac{bh^3}{12}.$$

例題 83. 有一圓形，其半徑等於 r，試求

(1) 該面積對於圓心之極慣性矩；

(2) 該面積對於直徑之慣性矩.



第 310 圖

解 通過圓心作 $X-X$，$Y-Y$ 兩直角坐標軸，如第 310 圖. (1) 假定該圓形係分成若干極薄之同心圓環，其寬等於 $d\rho$，並命其中任一圓環之半徑爲 ρ. 則該圓環之面積將等於

$$dA=2\pi\rho d\rho.$$

又因在此圓環中所有各點與圓心之距離均相等，故該圓環對於O點之慣性矩將為

$$r^2 dA=2\pi\rho^3 d\rho,$$

卽該圓形之極慣性矩將等於

$$J=\int r^2 dA=\int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho=\frac{\pi r^4}{2}. \tag{1}$$

又由方程式(1)可得扇形面積之極慣性矩等於

$$J=\int_0^r \theta\rho^3 d\rho=\frac{\theta r^4}{4},$$

式中θ為扇形之圓心角.

若　$\theta=90^\circ$,　則　$J=\dfrac{\pi r^4}{8}$;

若　$\theta=180^\circ$,　則　$J=\dfrac{\pi r^4}{4}$.

(2) 該面積對於直徑之慣性矩，可由方程式$J=I_x+I_y$求得. 因圓形對於所有直徑之慣性矩均相等，故

$$I_x=I_y=\frac{J}{2}=\frac{\pi r^4}{4}.$$

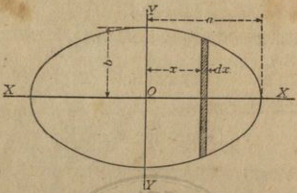
同理，扇形之慣性矩等於

$$I_x=I_y=\frac{\theta r^4}{8}.$$

例題 64. 有一橢圓形，其長軸及短軸各為$2a$及$2b$. 試求

(1) 該面積對於長軸及短軸之慣性矩;

(2) 該面積對於圓心之極慣性矩.



第311圖

解 命 $X-X$ 及 $Y-Y$ 爲兩個各與長短軸相疊合之直角坐標軸，如第 311 圖. 則此橢圓形之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

假定將該面積分成若干與 $Y-Y$ 軸平行之窄條狀微面積，則每一微面積將等於

$$dA=2y\,dx=\frac{2b}{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx.$$

而橢圓形對於 $Y-Y$ 軸之慣性矩將爲

$$I_y=\int x^2dA=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}x^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{2b}{a}\left[\frac{x}{8}(2x^2-a^2)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{a^4}{8}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a}=\frac{\pi a^3b}{4}.$$

同理，可求得對於 $X-X$ 軸之慣性矩爲

$$I_x=\frac{\pi ab^3}{4}.$$

當 $a=b$ 時, I_x 及 I_y 卽同化爲圓形之慣性矩方程式.

又橢圓形對於中心之極慣性矩應爲

$$J=I_x+I_y=\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2).$$

玆再將以上諸題中所得各簡單圖形之慣性矩公式綜合於下:

$\frac{bh^3}{12}=\frac{Ah^2}{12}$(矩形或平行四邊形,慣性軸通過重心).

$\frac{bh^3}{3}=\frac{Ah^2}{3}$(矩形或平行四邊形,慣性軸通過底邊).

$\frac{bh^3}{36}=\frac{Ah^2}{18}$(三角形,慣性軸通過重心).

$\frac{bh^3}{12}=\frac{Ah^2}{6}$(三角形,慣性軸通過底邊).

$\frac{bh^3}{4}=\frac{Ah^2}{2}$(三角形,慣性軸通過頂點).

$\frac{\pi r^4}{4}=\frac{Ar^2}{4}$(圓形,以直徑爲慣性軸).

$\frac{\pi a^3b}{4}=\frac{Aa^2}{4}$(橢圓形,以短軸爲慣性軸).

$\frac{\pi ab^3}{4}=\frac{Ab^2}{4}$(橢圓形,以長軸爲慣性軸).

又對於重心之極慣性矩如下:

$\frac{\pi r^4}{2}=\frac{Ar^2}{2}$(圓形).

$$\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)=\frac{A}{4}(a^2+b^2)\text{(橢圓形)}.$$

$$\frac{bh}{12}(b^2+h^2)=\frac{A}{12}(b^2+h^2)\text{(矩形)}.$$

上列諸式中特將面積 A 標明者，皆為便於求得環動半徑之故，蓋環動半徑之方程式為 $k^2=\frac{I}{A}$，已知 I 及 A，即可求得 k 之值.

習 題

243. 有一三角形，其底為 8 寸，高為 10 寸. 試求該面積對於底邊之慣性矩.

答. $\frac{2,000}{3}$ 寸^4.

244. 有一圓形，其直徑為 8 寸. 試求該面積對於直徑之慣性矩.

答. 201 寸^4.

245. 試求第 303 圖之面積對於 Y 軸之慣性矩.

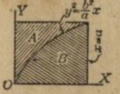
答. $I_y=\frac{1}{6}a^5$.

246. 在例題 63 中，若 X 軸係與圓形相切，試求該面積對於 X 軸之慣性矩.

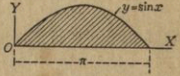
答. $I_x=\frac{5}{4}\pi r^4$.

247. 今若用一曲線 $y^2=\frac{b^2}{a}x$ 分一矩形為兩個面積 A 及 B，如第 312 圖所示. 試求各該面積對於 X 軸之慣性矩.

答. $I_x=\frac{1}{5}ab^3$; $I_x=\frac{2}{15}ab^3$.



第312圖



第313圖

248. 試求第313圖中所示影線部分之面積對於 X 及 Y 軸之慣性矩.

答. $I_x=0.444$; $I_y=5.86$.

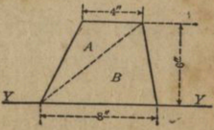
115. 結合面積之慣性矩　慣性矩恆爲一正數，前已言及.故若有一結合面積係由若干簡單圖形如三角形，矩形或圓形等之結合體，其各個之慣性矩又均可依前述方法逐一求得時，則此結合面積之慣性矩將等於此各個簡單圖形面積之慣性矩之總和.

同理，在一結合面積中，欲求某一部分面積之慣性矩，祇須自該結合面積之慣性矩中減去其餘諸部分面積之慣性矩之和卽得.玆示例於下：

例題 65.　試求第314圖所示梯形面積對於其底邊之慣性矩.

解　將該面積先分成兩個三角形 A 及 B，則面積 A 對於 Y-Y 軸之慣性矩將等於

$$\frac{bh^3}{4}=\frac{4\times6^3}{4}=216.$$



第314圖

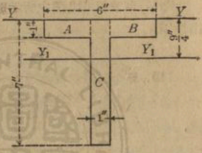
又面積 B 對於 Y-Y 軸之慣性矩將等於

$$\frac{bh^3}{12}=\frac{8\times 6^3}{12}=144.$$

故梯形面積對於 Y–Y 軸之慣性矩等於

$$I_y=216+144=360 \text{ 吋}^4.$$

例題 66. 有一T形截面，其尺寸如第315圖所示. 試求該面積(1)對於頂邊之慣性矩及(2)對於平行頂邊之重心軸之慣性矩.



第315圖

解 (1) 命 Y–Y 為通過頂邊之軸. 將該截面分成三個矩形 A, B 及 C, 如圖所示. 則 A 與 B 對於 Y–Y 軸之連合慣性矩將等於

$$\frac{bh^3}{3}=\frac{5\times 1^3}{3}=\frac{5}{3}.$$

又 C 對於 Y–Y 軸之慣性矩將等於

$$\frac{bh^3}{3}=\frac{1\times 7^3}{3}=\frac{343}{3}.$$

故全部面積對於 Y–Y 軸之慣性矩等於

$$I_y=\frac{5}{3}+\frac{343}{3}=116 \text{ 吋}^4.$$

(2) 重心與 Y–Y 軸之距離等於

$$x_0=\frac{\Sigma Ax}{A}=\frac{5\times 0.5+7\times 3.5}{5+7}=2.25 \text{ 吋}.$$

命 Y_1-Y_1 爲通過重心與 $Y-Y$ 平行之軸，由方程式 $I=I_0+x_0^2A$，將得

$$116=I_0+12\times 2.25^2.$$

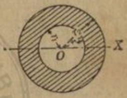
故全部面積對於 Y_1-Y_1 軸之慣性矩等於

$$I_0=55.25\text{ 吋}^4.$$

例題 67. 試求第 316 圖所示空心圓輪對於直徑之慣性矩.

解　以 r_2 爲半徑之圓形對於直徑之慣性矩等於 $\frac{1}{4}\pi r_2^4$.

以 r_1 爲半徑之圓形對於直徑之慣性矩等於 $\frac{1}{4}\pi r_1^4$.



第 316 圖

故空心圓輪對於直徑之慣性矩等於

$$I_0=\frac{1}{4}\pi r_2^4-\frac{1}{4}\pi r_1^4=\frac{1}{4}\pi(r_2^4-r_1^4).$$

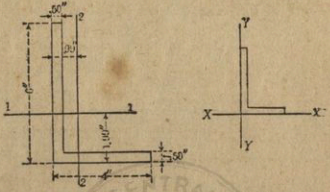
例題 68. 試求第 317 圖(a)所示角形截面對於 1-1 及 2-2 兩重心軸之慣性矩.

解　第一步，先求該截面之重心. 將該截面分爲兩個矩形，則此兩矩形對於 $X-X$ 軸之力矩，如圖(b)，得

$$y_0=\frac{\Sigma Ay}{A}=\frac{3.5\times0.5\times0.25+6\times0.5\times3}{3.5\times0.5+6\times0.5}=1.99\text{ 吋}.$$

次求此兩矩形對於 $Y-Y$ 軸之力矩，得

$$x_0=\frac{\Sigma Ax}{A}=\frac{5.5\times0.5\times0.25+4\times0.5\times2}{5.5\times0.5+4\times0.5}=0.99\text{ 吋}.$$



(a)　　　　　　　　(b)

第317圖

第二步，求該截面對於 X-X 軸之慣性矩，得

$$I_x=\frac{3.5\times0.5^3}{3}+\frac{0.5\times6^3}{3}=36.15.$$

於是由方程式 $I_x=I_0+y_0^2A$，得

$$36.15=I_0+1.99^2\times4.75.$$

故該截面對於 1-1 軸之慣性矩等於

$$I_0=36.15-18.81=17.34\ 吋^4.$$

第三步，求該截面對於 Y-Y 軸之慣性矩，得

$$I_y=\frac{5.5\times0.5^3}{3}+\frac{0.5\times4^3}{3}=10.89.$$

故該截面對於 2-2 軸之慣性矩等於

$$I_0=I_y-x_0^2A=10.89-0.99^2\times4.75$$

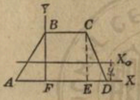
$$=6.24\ 吋^4.$$

習　題

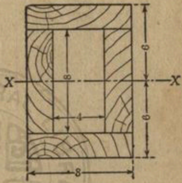
249. 在第318圖中，命 $BC=5$ 寸，$BF=6$ 寸，$AF=4$ 寸，又 $ED=3$ 寸. 試求該梯形(1)對於底邊 AD 之慣性矩;(2)對於平行 AD 之重心軸之慣性矩.($y_0=2.588$ 寸.)

答. (1) 486 寸^4;

(2) 144.35 寸^4.



第318圖



第319圖

250. 試求第297圖所示影線部分之面積對於 X 軸之慣性矩.

答. 161.32寸^4.

251. 有一木柱係以四條2寸×8寸之方木所釘成，其截面如第319圖所示. 試求該截面對於重心軸 $X-X$ 之慣性矩.

答. 981寸^4.

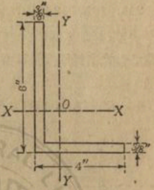
252. 第320圖示一I字形截面. 試求其對於重心軸 $X-X$ 及 $Y-Y$ 之慣性矩.

答. $I_x=84.9$ 吋^4; $I_y=5.16$ 吋^4.

253. 試求第321圖所示角形截面對於 $X-X$ 及 $Y-Y$ 軸之慣性矩.

答. $I_x=13.47$ 吋^4; $I_y=4.90$ 吋^4.

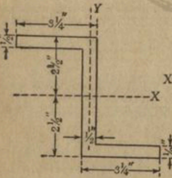
第320圖



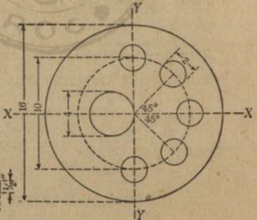
第321圖

254. 第322圖示一$3\frac{1''}{4}\times 5''$之Z形截面. 試求其對於重心軸 X-X 及 Y-Y 之慣性矩.

答. $I_x=19.2$ 吋^4; $I_y=9.04$ 吋^4.



第322圖

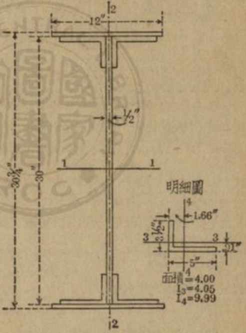


第323圖

255. 第 323 圖示一直徑 16 吋之圓板，其中共鑽成直徑 2 吋之圓洞五個及 4 吋之圓洞一個，如圖所示. 試求此諸洞之總面積對於 X-X 及 Y-Y 軸之慣性矩.

答. $I_x=252$ 吋^4；$I_y=224$ 吋^4.

116. 建築截面之慣性矩 在若干規模較大之房屋或橋梁建築中，其各部材之構造，大多係結合數種形狀不同之材料，如角形，I 字形，或槽形等等，鉚拼而成. 故欲計算各部材之應力，首須明悉各該截面對於重心軸之慣性矩. 英美各大鋼鐵廠多預將有關此種截面之種種性質詳細測算，分類彙列，編印手册，以供工程師，建建師等之參攷. 關於計算應力，固可利用此種手册檢查各項數值，惟其計算方法則實不可不知. 茲將此種截面之慣性矩計算法分述於下:



第 324 圖

例題 69. 第324圖示一種I字鐵梁之截面，其腹鈑之尺寸爲 $30''\times\frac{1''}{2}$，上下兩凸緣鈑各爲 $12''\times\frac{3''}{8}$，四個角

鐵各爲 $5''\times 3\frac{1''}{2}\times\frac{1''}{2}$，其 $5''$ 之一邊係平置者. 設已求得角鐵截面對於其重心軸 3-3 及 4-4 之惰性矩，如明細圖所示，試求該 I 字梁對於重心軸 1-1 之惰性矩.

解　先求腹鈑對於 1-1 軸之惰性矩，得

$$I=2\times\frac{0.5\times 15^3}{3}=1,125.$$

次求上下兩凸緣鈑對於 1-1 軸之惰性矩，得

$$I=2\left[\frac{12\times 0.375^3}{3}+15^2\times 12\times 0.375\right]=2,025.4.$$

又次求四個角鐵對於 1-1 軸之惰性矩，得

$$I=4\left[4.05+4.00\times 14.09^2\right]=3,192.6.$$

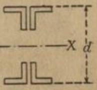
因該 I 字梁對於 1-1 軸之惰性矩等於此諸惰性矩之和，故

$$I_1=1,125+2,025.4+3,192.6=6,343\ 吋^4.$$

習　　題

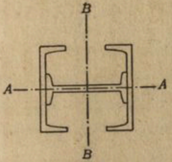
256. 第 325 圖示一種四個角鐵之結構方式. 角鐵之尺寸均爲 $6''\times 6''\times\frac{1''}{2}$. $d=60\frac{1''}{2}$. 每一角鐵之面積 $=5.75$ 吋^2. 試求該截面對於 X-X 軸之惰性矩.

答. 18,853 吋^4.

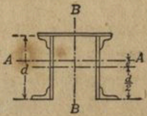


第325圖

257. 第 326 圖示一種鐵柱之截面，係由一個 I 字鐵及兩個槽鐵所構成. 今已知：I 字鐵對於 A-A 軸之惰性矩 $=2.67$ 吋^4；槽



第326圖



第327圖

鐵對於 A-A 軸之慣性矩 $=13.0$ 吋^4. 試求該截面對於 A-A 軸之慣性矩.

答. 28.67 吋^4.

258. 第327圖示一種鋼橋上弦之截面,係由三個鋼鈑及四個角鋼所構成,其上凸緣鈑之尺寸為 $17''\times\frac{3''}{8}$,腹鈑各為 $15''\times\frac{5''}{16}$,上部兩角鋼各為 $3''\times3''\times\frac{5''}{16}$,下部兩角鋼各為 $4''\times3''\times\frac{9''}{16}$. $d=15''$. e 表截面重心軸之偏心距離 $=0.91''$. 試求該截面對於重心軸 A-A 之慣性矩.

答. 1,016 吋^4.

117. **慣性積**　當一個面積繞軸轉動時,對於該軸勢將發生一種反動力,是即該面積之慣性,其大小等於 $\int xdA$, 已見前述. 此種慣性對於任何一軸皆然. 故該面積對於兩直角坐標軸 X-X 及 Y-Y 若同時作用時, 則其慣性將等於對各該軸之慣性之相乘積, 以式表之即等於 $\int xydA$. 此式通常稱為慣性積, 其意蓋謂某一面積對於兩

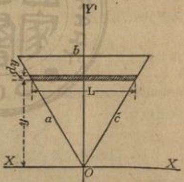
直角坐標軸之慣性相乘之積，本書另以 P_{xy} 表之，即

$$P_{xy}=\int xy\,dA.$$

慣性積猶如慣性矩，亦含有長度至四次乘冪，惟其記號則不似慣性矩之始終爲一正數，此因 x 或 y 之值可以爲正，爲負，亦可以爲零，故 x 與 y 之相乘積，亦即慣性積，可以爲正，爲負，亦可以爲零。

118. 對於對稱軸之慣性積 設兩個直角坐標軸中之一係屬對稱軸，則慣性積將等於零。此一事實可由下圖證明之。

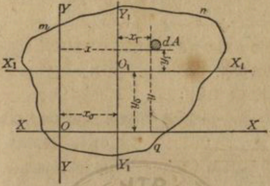
茲假定第 328 圖所示之面積 abc 對於 $Y-Y$ 軸係成對稱。將該面積分成若干窄條狀微面積同與 $X-X$ 軸平行，由是任一微面積將等於 $dA=Ldy$。但因 $Y-Y$ 係一對稱軸，故必通過此微面積之重心，而任何面積對於重心軸之力矩應等於零，易言之，即 $xdA=0$。因之，該微面積對於兩軸之慣性積應等於零，或 $xydA=0$；同時，此全部面積之慣性積亦必等於零，或 $P_{xy}=\int xydA=0$。



第 328 圖

119. 對於平行軸間慣性積之關係 倘一個面積對於一對直角重心軸之慣性積業已求得，則其對於其他任一對平行軸之慣性積亦可依下法求之。

在第 329 圖中，命 X_1-X_1 及 Y_1-Y_1 爲面積 mnq 之一對直角重心



第 329 圖

軸, X-X 及 Y-Y 爲另一對平行軸.

命 $P_{x_1y_1}=\int x_1y_1dA$ 等於面積 mnq 對於 X_1-X_1 及 Y_1-Y_1 兩軸之慣性積.

又 $P_{xy}=\int xy\,dA$ 等於面積 mnq 對於 X-X 及 Y-Y 兩軸之慣性積.

因 $x=x_0+x_1$, $y=y_0+y_1$,

$$\therefore\quad P_{xy}=\int xy\,dA=\int(x_0+x_1)(y_0+y_1)dA$$

$$=\int(x_0y_0+x_1y_0+x_0y_1+x_1y_1)dA$$

$$=\int x_0y_0dA+\int x_1y_0dA+\int x_0y_1dA+\int x_1y_1dA$$

$$=x_0y_0\int dA+y_0\int x_1dA+x_0\int y_1dA+\int x_1y_1dA.$$

國立中央圖書館藏書
國立中央圖書館藏書

但 X_1-X_1 及 Y_1-Y_1 旣係通過面積之重心,故慣性 $\int x_1dA$ 及 $\int y_1dA$ 應

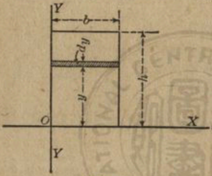
等於零.

$$\therefore \quad P_{xy}=x_0y_0A+P_{x_1y_1}.$$

在上式中,x_0 與 y_0 兩數可以爲正,亦可以爲負,故其乘積 x_0y_0A 亦可以爲正,或爲負.

茲再舉數例說明於下:

例題 70. 有一矩形如第 330 圖所示,其底爲 b,高爲 h. OX 及 OY 爲一對直角坐標軸,與矩形之兩邊相疊合.試求其對於兩軸之慣性積.



第 330 圖

解 將矩形分成若干窄條狀微面積同與 OX 平行,則每一微面積等於 $dA=bdy$. 慣性 $xdA=\frac{b}{2}bdy=\frac{b^2}{2}dy$.

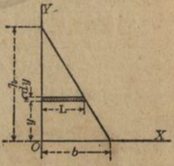
慣性積 $xydA=\frac{b^2}{2}ydy$.

故全部面積對於 OX 及 OY 兩軸之慣性積將等於

$$P_{xy}=\int xydA=\frac{b^2}{2}\int_0^h ydy$$

$$=\frac{b^2h^2}{4}.$$

例題 71. 第 331 圖示一正三角形,其底爲 b,高爲 h. OX 及 OY 爲一對直角坐標軸,與三角形之兩



第 331 圖

邊相疊合．試求其(1)對於兩軸之慣性積；(2)對於與 OX 及 OY 平行之一對重心軸之慣性積．

解　(1) 將三角形分成若干同與 OX 平行之窄條狀微面積，則此每一微面積將等於

$$dA=Ldy=\frac{b}{h}(h-y)dy.$$

$$\text{慣性}\ \overset{2}{x}dA=\frac{b^2}{2h^2}(h-y)^2dy.$$

故全部面積對於 OX 及 OY 兩軸之慣性積等於

$$P_{xy}=\int xydA=\frac{b^2}{2h^2}\int_0^h(h^2y-2hy^2+y^3)dy=\frac{b^2h^2}{24}.$$

(2) 由方程式 $P_{xy}=x_0y_0A+P_{x_1y_1}$，得該三角形對於與 OX 及 OY 平行之重心軸之慣性積等於

$$P_{x_1y_1}=\frac{b^2h^2}{24}-\frac{b}{3}\times\frac{h}{3}\times\frac{bh}{2}=-\frac{b^2h^2}{72}.$$

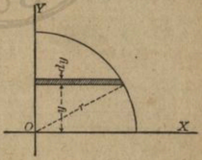
例題 72．　試求第 332 圖所示四分之一圓形對於 OX 及 OY 兩軸之慣性積．

解　將該面積分成若干同與 OX 平行之窄條狀微面積，則此每一微面積將等於

$$dA=(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}dy.$$

$$\text{慣性}\ xdA=\tfrac{1}{2}(r^2-y^2)dy.$$

$$\text{慣性積}\ xydA=\tfrac{1}{2}(r^2-y^2)ydy.$$

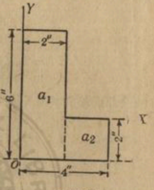


第 332 圖

故全部面積對於 OX 及 OY 兩軸之惰性積等於

$$P_{xy}=\int xydA=\frac{1}{2}\int_0^r(r^2y-y^3)dy=\frac{r^4}{8}.$$

例題 73. 試求第 333 圖所示面積對於 OX 及 OY 兩軸之惰性積.



第 333 圖

解 由方程式 $P_{xy}=P_{x_1y_1}+x_0y_0A$, 得面積 a_1 之惰性積等於

$$P_{xy}=0+12\times1\times3=36 \text{ 吋}^4;$$

及面積 a_2 之惰性積等於

$$P_{xy}=0+4\times3\times1=12 \text{ 吋}^4.$$

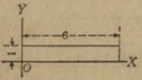
故全部面積之惰性積等於

$$P_{xy}=36+12=48 \text{ 吋}^4.$$

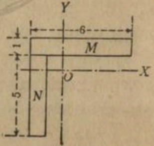
習 題

259. 有一矩形, 長 6 寸, 寬 1 寸, 如第 334 圖. 試求該面積對於 X-X 及 Y-Y 兩軸之惰性積.

答. 9 寸^4.



第 334 圖



第 335 圖

260. 有一 6 寸 × 6 寸 × 1 寸之角形截面, 如第 335 圖. 試先求與

兩邊平行之重心軸 OX 及 OY，再求該截面對於兩重心軸之慣性積.

答. $P_{xy}=20.44$ 吋^4.

261. 有一由拋物線 $y^2=ax$，直線 $x=b$ 及 $X-X$ 軸所圍成之面積.試求該面積對於兩直角坐標軸之慣性積.

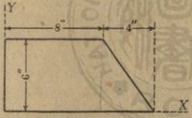
答. $\frac{1}{6}ab^3$.

262. 有一三角形面積係由直線 $y=\frac{h}{b}x$，直線 $x=b$ 及 $X-X$ 軸所圍成.試求該面積對於兩直角坐標軸之慣性積.

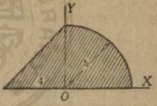
答. $\frac{1}{8}h^2b^2$.

263. 試求第 336 圖所示面積對於 $X-X$ 及 $Y-Y$ 軸之慣性積.

答. 312 吋^4.



第 336 圖



第 337 圖

264. 試求第 337 圖所示面積對於 $X-X$ 及 $Y-Y$ 軸之慣性積.

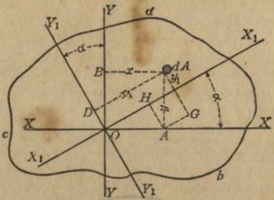
答. 21.3 吋^4.

120. 對於斜軸之慣性矩　在第 338 圖中，設命 $X-X$ 及 $Y-Y$ 為一對直角坐標軸，則面積 abc 對於該兩軸之慣性矩為

$$I_x=\int y^2dA \text{ 及 } I_y=\int x^2dA;$$

其慣性積為

$$P_{xy}=\int xydA.$$



第 338 圖

又設 X_1-X_1 及 Y_1-Y_1 爲另一對直角坐標軸，其與前一對坐標軸之傾角等於 α，則面積 abc 對於此兩軸之慣性矩將爲

$$I_{x_1}=\int y_1^2 dA, \tag{1}$$

及

$$I_{y_1}=\int x_1^2 dA. \tag{2}$$

其慣性積爲

$$P_{x_1y_1}=\int x_1 y_1 dA.$$

但由圖中觀之，將見

$$x_1=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \text{ 又 } y_1=y\cos\alpha-x\sin\alpha.$$

於是

$$x_1^2=(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2$$
$$=x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\alpha+2xy\cos\alpha\sin\alpha,$$
$$y_1^2=(y\cos\alpha-x\sin\alpha)^2$$
$$=y^2\cos^2\alpha+x^2\sin^2\alpha-2xy\cos\alpha\sin\alpha.$$

代入(1)，(2)兩式，得

$$I_{x_1}=\sin^2\alpha\int x^2 dA+\cos^2\alpha\int y^2 dA-2\cos\alpha\sin\alpha\int xy dA$$

$$=I_y\sin^2\alpha+I_x\cos^2\alpha-2P_{xy}\cos\alpha\sin\alpha, \quad (3)$$

$$I_{y_1}=\cos^2\alpha\int x^2dA+\sin^2\alpha\int y^2dA+2\cos\alpha\sin\alpha\int xydA$$

$$=I_y\cos^2\alpha+I_x\sin^2\alpha+2P_{xy}\cos\alpha\sin\alpha. \quad (4)$$

又由三角學,得

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

及

$$2\cos\alpha\sin\alpha=\sin 2\alpha.$$

再代入(3),(4)兩式,得

$$I_{x_1}=\frac{I_x+I_y}{2}+\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\alpha-\sin 2\alpha\,P_{xy}, \quad (5)$$

又

$$I_{y_1}=\frac{I_x+I_y}{2}-\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\,P_{xy}. \quad (6)$$

將此兩式相加,得

$$I_{x_1}+I_{y_1}=I_x+I_y.$$

故若已知一個面積對於某一對直角坐標軸之慣性矩,則其對於在同一平面內並通過同一交點之任一對斜軸之慣性矩均可依上式求得.

121. 最大及最小慣性矩　按方程式 $I_{x_1}=\frac{I_x+I_y}{2}+\frac{I_x-I_y}{2}\cdot\cos 2\alpha-\sin 2\alpha\,P_{xy}$ 中,α 實爲一變數.當 α 之值變更時,I_{x_1} 之值亦必隨之而異.故欲知 α 之角度應爲若干,即能使 I_{x_1} 之值成爲一最大或最小數,此一問題,可用微分法求之.

求方程式(5)兩邊之微分,得

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha}=(I_y-I_x)\sin 2\alpha-2P_{xy}\cos 2\alpha. \quad (7)$$

當 I_{x_1} 之值爲一最大或最小數時，$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha}$ 應等於零. 於是由方程式(7)，得

$$(I_y - I_x)\sin 2\alpha - 2P_{xy}\cos 2\alpha = 0,$$

或

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x},$$

即

$$\tan 2\alpha = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x}. \tag{8}$$

在上式中，2α 之值將有兩個，並相差180°，易言之，即 α 之值將有兩個，並相差 90°，其中 α 之一值將使 I_{x_1} 爲一最大數，另一值則使 I_{x_1} 爲一最小數.

凡 I_{x_1} 爲一最大值或最小值時，均稱爲**主慣性矩**，與此相應之慣性軸則稱爲**主軸**.

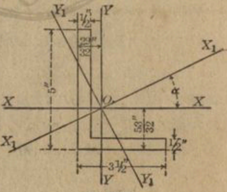
前言 X-X 或 Y-Y 軸若係一對稱軸，則 $P_{xy}=0$，故由方程式(8)得 $\tan 2\alpha = 0$，即 $2\alpha = 0°$ 或 180°，而 $\alpha = 0°$ 或 90°. 是以 X-X 及 Y-Y 應爲主軸.

例題 74. 試求第339圖所示角形截面對於通過重心之主軸之慣性矩. 已知

$I_x = 10.00$ 吋^4,

$I_y = 4.05$ 吋^4,

$P_{xy} = -3.69$ 吋^4.



第339圖

解 $\tan 2\alpha = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{-7.38}{-5.95} = 1.240,$

$\therefore\ 2\alpha = 51°7'$ 或 $231°7'$,

$\alpha = 25°34'$, 或 $115°34'$.

由方程式 $I_{x_1} = I_y \sin^2\alpha + I_x \cos^2\alpha - 2P_{xy}\cos\alpha\sin\alpha,$

得 $I_{x_1} = 4.05\sin^2(25°34') + 10.00\cos^2(25°34')$

$+7.38(\cos 25°34')(\sin 25°34') = 11.77$ 吋^4(最大).

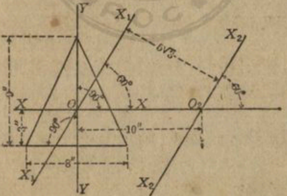
又由方程式 $I_{y_1} = I_y\cos^2\alpha + I_x\sin^2\alpha + 2P_{xy}\cos\alpha\sin\alpha,$

得 $I_{y_1} = 4.05\cos^2(25°34') + 10.00\sin^2(25°34')$

$-7.38(\cos 25°34')(\sin 25°34') = 2.29$ 吋^4(最小).

例題 75. 第 340 圖示一等腰三角形. 經過重心 O 作主軸 X-X 及 Y-Y. 作 X_2-X_2 軸使與 X-X 成 60° 之角, 並與之交於距重心 10 吋之處. 試求該三角形對於 X_2-X_2 軸之慣性矩.

解 通過重心 O 作 X_1-X_1 軸與 X_2-X_2 平行. 則該三角形對於



第 340 圖

X_1-X_1 軸之慣性矩可由下式得之:

$$I_{x_1}=I_y\sin^2\alpha+I_x\cos^2\alpha.$$

在本題中,$\alpha=60°$, $I_x=162$, $I_y=96$. 將諸值代入上式,得

$$I_{x_1}=96\times\frac{3}{4}+162\times\frac{1}{4}=112.5\text{ 吋}^4.$$

於是 $$I_{x_2}=I_{x_1}+x_0^2A$$

$$=112.5+36\times(5\sqrt{3})^2=2,812.5\text{ 吋}^4.$$

習　題

265. 有一角形截面,其尺寸為 $4''\times3''\times\frac{1''}{2}$. 試求其對於重心軸之最大及最小慣性矩.

答. 6.14 吋^4(最大); 1.33 吋^4(最小).

266. 有一角形截面,其尺寸為 $6''\times6''\times\frac{1''}{2}$. 試求其對於重心軸之最大及最小慣性矩.

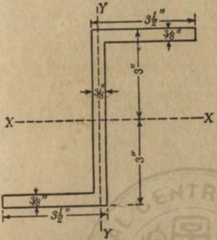
答. 31.75 吋^4(最大); 8.07 吋^4(最小).

267. 第 341 圖示一 Z 形截面,已知 $I_x=25.32$ 吋^4, $I_y=9.11$ 吋^4. 試求其最大及最小慣性矩.

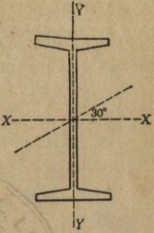
答. 31.3 吋^4(最大); 3.09 吋^4(最小).

268. 第 342 圖示一標準 10 吋, 25 磅之 I 字梁, 已知 $I_x=122.1$ 吋^4, $I_y=6.89$ 吋^4, 又 $A=7.37$ 吋^2. 試求其對於與 X-X 軸交成 30° 角之直線之慣性矩.

答. 93.3 吋^4.



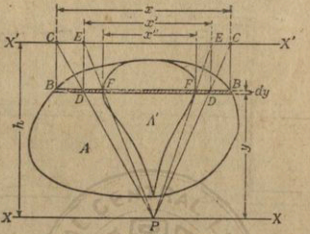
第 341 圖



第 342 圖

122. 用圖解法求慣性矩　解決慣性矩問題時，每遇有該面積係由一不規則之曲線所圍成，其形式頗爲複雜，迥非用普通代數方程式所可表示者，若欲求其慣性矩，自當以用圖解法最爲迅捷. 茲述其法如下：

第 343 圖示一不規則曲線所形成之面積，命之爲 A，今欲求該面積對於任一軸 $X-X$ 之慣性矩. 作任一軸 $X'-X'$ 與 $X-X$ 軸平行，其距離等於 h. 又作任一弦 BB，並將 B,B 兩點之射影投射於 $X'-X'$ 軸上，得 C,C 兩點. 於 $X-X$ 軸上取任一點 P. 聯結 P 及 C,C 使交 BB 於 D,D. 再將 D,D 兩點之射影投射於 $X'-X'$ 軸上，得 E,E 兩點. 聯結 P 及 E,E 使交 BB 於 F,F. 同理，可就該面積上作若干與 BB 平行之弦，並依同法求得若干與 F,F 相似之點，然後將此等點聯結成一曲線，並命其面積爲 A'.



第343圖

命 BB 之長爲 x, DD 爲 x', FF 爲 x'',則由 PFF 及 PEE 兩相似三角形,得

$$\frac{x''}{y}=\frac{x'}{h};\tag{1}$$

又由 PDD 及 PCC 兩相似三角形,得

$$\frac{x'}{y}=\frac{x}{h}.\tag{2}$$

由(1)及(2),得

$$xy^2=h^2x''.$$

於是面積 A 對於 X-X 軸之慣性矩,應爲

$$I=\int y^2dA=\int y^2xdy=h^2\int x''dy=h^2A'.$$

此面積 A' 可用求積儀或其他方法求之.

123. 實體之慣性矩 以上各節所述之慣性矩均專限於面積,

此後將再就一般質體討論之.

凡分析一個物體,可先假定該物體係由一羣同質之質點以均勻狀態組成,並設此等質點之質量各等於 m_1, m_2, m_3, ……,其與任一軸之距離各等於 r_1, r_2, r_3,……. 則此諸質點對於該軸之慣性矩將分別等於 $m_1r_1^2$, $m_2r_2^2$, $m_3r_3^2$, ……,而此一羣質點對於該軸之慣性矩,應爲所有各質點之慣性矩之總和,卽

$$I=m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2+\cdots=\Sigma mr^2.$$

惟此一羣質點旣結合而成一物體,則該物體之慣性矩將等於

$$I=\int r^2dM,$$

式中 dM 卽表任一質點之質量. 因得定義如下:

一個物體對於任一軸之慣性矩,卽等於每一質點之質量及其與該軸距離之平方相乘積之總和.

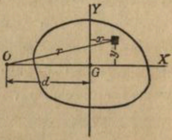
124. 質體之環動半徑　求某一物體之慣性矩,有時爲計算便利,亦可以該物體之質量與某一距離之平方相乘積表之,卽

$$I=Mk^2,\ \text{或}\ k=\sqrt{\frac{I}{M}},$$

式中 M 爲全物體之質量;k 爲某一距離,卽所謂質體之環動半徑,其意義蓋謂如將該物體假定集中於某一點時,其所得之慣性矩應與原物體之慣性矩相等,由此假定點至慣性軸之距離稱爲該物體之環動半徑.

125. 平行軸間質體之慣性矩　當一個物體對於通過其質心之軸之慣性矩爲已知時,則其對於任一平行軸之慣性矩又可依下法求之:

命第344圖示該物體之截面，G 爲其質心．通過 G 作一軸使與此截面成垂直，並稱之爲質心軸．命物體對於此質心軸之惯性矩爲 $\bar{I}$．作 X–X 及 Y–Y 兩直角坐標軸，並於 X–X 上任一點 O 作一軸與質心軸平行．O 與 G 之距離命爲 d，又命物體對於此平行軸之惯性矩爲 I．於是



第344圖

$$I=\int r^2 dM=\int[(x+d)^2+y^2]\,dM$$

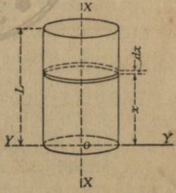
$$=\int(x^2+y^2)\,dM+d^2\int dM+2d\int x\,dM.$$

但 $$\int(x^2+y^2)\,dM=\bar{I},$$

又 $$\int x\,dM=M\bar{x}=0.$$

故 $$I=\bar{I}+Md^2.$$

即一物體對於任一軸之惯性矩等於該物體對於平行質心軸之惯性矩加該質體與兩平行軸間距離之平方之相乘積．



第345圖

例題 76. 試求第 345 圖所示正圓柱體對於其幾何軸之惯性矩．

解 命 X–X 表圓柱之幾何軸．r = 底面半徑．L = 柱高．m = 每一單位

體積之質量．M＝總質量．於是

$$M=m\pi r^2L.$$

假定將此圓柱分成若干薄片同與$X-X$軸成垂直，其厚等於dx，則每一薄片對於$X-X$軸之慣性矩等於

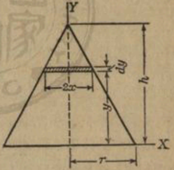
$$m\pi r^2dx\times\frac{r^2}{2}=m\frac{\pi r^4}{2}dx.$$

故圓柱對於$X-X$軸之慣性矩應爲

$$I_x=m\frac{\pi r^4}{2}\int_0^L dx=m\frac{\pi r^4}{2}L=M\frac{r^2}{2}.$$

例題 77. 試求正圓錐體對於其幾何軸之慣性矩．

解 命第346圖示在$X-Y$平面內圓錐之截面，$Y-Y$表圓錐之幾何軸．命m＝每一單位體積之質量，M＝總質量．假定將此圓錐分成若干薄圓片與底面平行，其高等於dy，半徑等於x．則此等薄片將成爲若干圓柱，其體積各等於πx^2dy，其質量等於$m\pi x^2dy$，其對於$Y-Y$軸之慣性矩等於$\frac{1}{2}m\pi x^4dy$．於是此圓錐體對於$Y-Y$軸之慣性矩應爲



第34圖

$$I_y=\frac{1}{2}m\pi\int_0^h x^4dy.$$

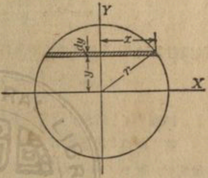
但由圖中觀之，x與y之關係可由兩相似三角形求得，即

$$\frac{h}{r}=\frac{h-y}{x},\quad 或\quad x=\frac{r}{h}(h-y).$$

因之，
$$I_y=\frac{1}{2}m\pi\frac{r^4}{h^4}\int_0^h(h-y)^4dy=\frac{1}{10}m\pi hr^4$$
$$=\frac{3}{10}\left(\frac{1}{3}m\pi hr^2\right)r^2=\frac{3}{10}Mr^2.$$

例題 78. 試求球體對於其直徑之慣性矩.

解 命第 347 圖示在 X-Y 平面內球體之截面. 假定將此球體分成若干與 X-Z 平面平行之薄圓片，其厚等於 dy，半徑等於 x. 則此等薄片可視作若干圓柱，其體積各等於 πx^2dy，其質量等於 $m\pi x^2dy$. 於是每一薄片對於 Y-Y 軸之慣性矩等於 $\frac{1}{2}m\pi x^4dy$，而全球體對於 Y-Y 軸之慣性矩等於

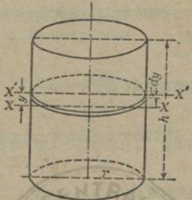


第 347 圖

$$I=\frac{1}{2}m\pi\int_{-r}^{+r}x^4dy=\frac{1}{2}m\pi\int_{-r}^{+r}(r^2-y^2)^2dy$$
$$=\frac{8}{15}m\pi r^5=\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}m\pi r^3\right)r^2=\frac{2}{5}Mr^2.$$

例題 79. 試求正圓柱體對於與底面平行之重心軸之慣性矩.

解 如第 348 圖，命 X-X 表與底面平行之重心軸，並命圓柱底面之半徑為 r，高為 h. 假定將此圓柱分成若干與底面平行之薄圓片，其厚等於 dy. 試取其中之任一薄片 A，並命 X'-X' 為其重心軸. 則此薄片 A 對於 X'-X' 軸之慣性矩將等於 $\frac{1}{4}dMr^2$，對於 X-X 軸之慣性性矩將等於



第318圖

$$\frac{1}{4}dMr^2+dMy^2=\frac{1}{4}m\pi r^4dy+m\pi r^2y^2dy.$$

故全圓柱對於 X-X 軸之慣性矩應爲

$$I_x=\frac{1}{4}m\pi r^4\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}dy+m\pi r^2\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}y^2dy$$

$$=\frac{1}{4}m\pi r^4h+\frac{1}{12}m\pi r^2h^3=M\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right).$$

習　　　題

269. 有一長方體，其三邊各爲 a, b 及 c. 試求其對於與 c 邊平行之幾何軸之慣性矩.

答. $\frac{M}{12}(a^2+b^2)$.

270. 有一橢圓形柱體，其長軸及短軸各爲 $2a$ 及 $2b$. 試求其對於 X-X 軸之慣性矩.

答. $\frac{M}{4}(a^2+b^2)$.

271. 有一空心正圓柱體，其內外兩半徑各為r_1及r_2. 試求其對於幾何軸之慣性矩.

答. $\frac{M}{2}(r_1{}^2+r_2{}^2)$.

272. 試求球體對於其切線之慣性矩.

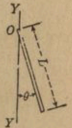
答. $\frac{7}{5}Mr^2$.

273. 試求正圓柱體對於其底面直徑之慣性矩.

答. $\frac{3}{5}M\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{6}\right)$.

274. 有一圓棍如第349圖所示，其長為L. 通過圓棍之一端O作一Y-Y軸，與圓棍之傾角為θ. 試求此圓棍對於Y-Y軸之慣性矩.

答. $\frac{1}{3}ML^2\sin^2\theta$.

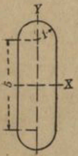


第349圖

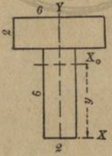
總　習　題

275. 試求第350圖所示面積對於X-X及Y-Y軸之慣性矩.

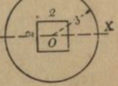
答. 47.95寸^4; 4.12寸^4.



第350圖



第351圖



第352圖

276. 試求第 351 圖所示面積之重心軸 X_0-X_0. 再求該面積對於 $X-X, Y-Y$ 及 X_0-X_0 各軸之慣性矩.

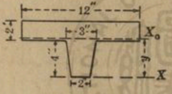
答. 5寸. 726寸^4; 40寸^4; 135寸^4.

277. 試求第 352 圖所示面積對於 $X-X$ 軸之慣性矩及其環動半徑.

答. 62.31寸^4; 1.5寸.

278. 試求第 353 圖所示面積中之 y_0, 並求該面積對於 X_0-X_0 軸之慣性矩.

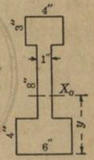
答. $y_0=4.15$ 吋; $I_{x_0}=79.24$ 吋^4.



第353圖

279. 試求第354圖所示面積之重心, 並求其對於重心軸 X_0-X_0 之慣性矩.

答. $y_0=$?.27 吋; $I_{x_0}=1,172.4$ 吋^4.



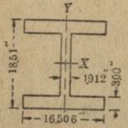
第354圖

280. 試求第 355 圖所示H字形截面對於 $X-X$ 及 $Y-Y$ 軸之慣性矩.

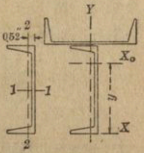
答. 6,410.1 吋^4; 2,200.7 吋^4.

281. 第 356 圖示一由兩個 6吋, 8.2 磅槽鐵結合之截面. 已知各槽鐵之 $I_{x-x}=13.0$ 吋^4, $I_{y-y}=0.7$ 吋^4. 面積 $=2.39$ 吋^2. 試求此結合面積之重心及其對於 $X-X$ 及 $Y-Y$ 軸之慣性矩.

答. 4.76吋. 28.5吋^4; 13.7吋^4.



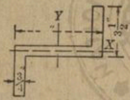
第355圖



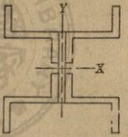
第356圖

282. 有一對稱Z字形截面，其尺寸如第357圖所示．試求其對於 $X-X$ 及 $Y-Y$ 軸之慣性矩．

答． 15.44 吋^4; 42.12 吋^4.



第357圖

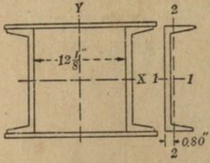


第358圖

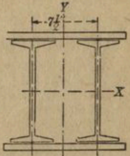
283. 若將四個如第282題所示之Z字形結合成如第358圖所示之截面，其腹鈑之尺寸為 $8''\times\frac{3''}{4}$. 試求該截面對於 $X-X$ 及 $Y-Y$ 軸之慣性矩．

答． 547.37 吋^4; 561.95 吋^4.

284. 第359圖示一截面，其腹部為兩個15吋，50磅之槽鐵．上下兩面為 $20''\times\frac{3''}{4}$之鋼鈑．已知各槽鐵之 $I_{1-1}=402.7$ 吋^4, I_{2-2}



第359圖



第360圖

$=11.22$ 吋^4，面積$=14.71$ 吋^2. 試求此結合面積對於 $X-X$ 及 $Y-Y$ 軸之慣性矩.

答. 2,637.5 吋^4, 2,407.9 吋^4.

285. 第 360 圖所示截面為兩個 12 吋, 31.8 磅之 I 字形梁及兩個 $14''\times 1''$ 之鋼鈑所結合而成. 已知一個 I 字梁之 $I_x=215.8$ 吋^4. 試求此結合面積對於 $X-X$ 及 $Y-Y$ 軸之慣性矩.

答. 1,616.9 吋^4; 736.8 吋^4.

NATIONAL CENTRAL LIBRARY ROC

NATIONAL CENTRAL LIBRARY
國家圖書館
ROC

第二部　動力學

第十二章　直線運動

126. 運動之釋義　運動之意義，前於本書第一章中已略申說．所謂運動及靜止云者，均係對某一點而言，凡物體對某一點之位置發生變化者稱爲運動，此一點爲便於硏究，特暫稱爲定點．當物體對某一定點言，其位置始終不變者則稱爲靜止．通常所謂動靜，概以地球爲標準，專就地球表面之某一定點而言．然地球在天空中固以極大速率不絕轉動，故宇宙間實無絕對靜止之物體，其所謂靜止係對地球之表面而言，而此一定點自亦爲一相對的動或靜之概念，且有時間之原素存於其間．

凡物體在某一時間內對某一定點之位置所生之總變化，簡稱之爲位移．

牛頓爵士嘗語吾人曰：

> "物體不受外力作用時，則靜止者繼續其靜止狀態，運動者繼續以同一速度向同一直線進行．"

是卽牛頓第一運動定律，又稱爲慣性定律．由此定律，可見物體必受外力之作用，方能變易其靜止位置，或變易其運動之速度或方向．

通常硏究物體之運動，恆先假定此物體已凝聚爲一質點，而由

此質點發生運動，故所謂物體之運動者，實即爲質點之運動，學者於此應首加注意.

127. 運動之分類 凡物體自某一位置移至另一位置時，輒概括之稱爲運動，實則運動含有距離與方向兩個條件.

如物體運動係向一直線進行者，其距離雖生變化，而方向不變，是稱爲**直線運動**.

如物體運動係向一曲線（無論其爲有規則或不規則者）進行者，其距離與方向均生變化，是稱爲**曲線運動**.

如物體運動係繞一圓周進行者，其方向雖生變化，而物體對於圓心之距離不變，此種運動稱爲**圓周運動**，或簡稱爲**轉動**.

如運動之物體在相等之時間內（無論此時間如何短暫）進行相等距離，此種運動稱爲**等速運動**. 倘在相等時間內所進行之距離並不相等，則稱爲**變速運動**.

直線，曲線及圓周等三種運動，本書當逐一詳予討論.

128. 速度 物體之運動有緩速不同，就其運動方向測算其每一單位時間內所經過之距離，亦即其在單位時間內所生之位移率，稱爲**速度**.

若在直線運動中，物體以相等之時間行經相等之距離者，其速度稱爲**等速度**，以式表之，即

$$v=\frac{s}{t}, \quad 或 \quad s=vt,$$

式中 v 爲等速度，s 爲所行距離，t 爲所經時間. 物體以等速度運動者即稱爲等速運動.

反之，若物體在相等時間內所行經之距離並不相等，則其速度稱爲變速度. 在此種情形中，距離 s 與時間 t 之比率僅爲一種平均速度，並非在任一時間內之速度. 至欲求某一瞬時速度，可用下列微分方程式

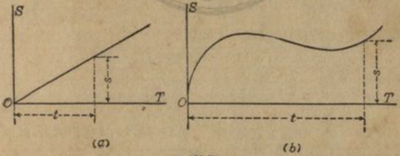
$$v=\frac{ds}{dt}.$$

凡物體以變速度運動者，卽稱爲變速運動.

至若物體在曲線運動中，雖於相等時間內行經相等距離，但因運動之方向時刻變換，故仍爲變速度.

按速度旣兼含有大小與方向兩個條件，故應屬於一種有向量，通常可以一直線表之：此直線之長卽表速度之大小，其方向卽表速度之方向.

玆將位移，時間與速度三者以圖示其關係. 如第 361 圖，以位移爲縱標，時間爲橫標，則在此直線或曲線上任一點之斜度均表其在該點之速度. 圖(a)係示等速運動，圖(b)則示變速運動.



第 361 圖

速度旣爲一種有向量，故可依力之分解法將任一速度分爲兩個

分速度；同時亦可依力之合成法，將兩個速度合爲一個合速度，其方法俟以後分述之.

129. **速率** 對於物體之運動，吾人每易將速度與速率二者，互相誤用，混淆不清，實則二者意義頗有區別. 蓋速度爲有向量，含有大小與方向，而速率則爲一種無向量，僅表物體運動之時率，並無方向之意義，易言之，速率乃速度之大小而已. 例如有二各向東西行之汽車，雖於同一時間內進行相等之距離，但因其方向不同，祇能謂其速率相等，絕不能謂爲速度相等.

130. **速度與速率之單位** 速度與速率之單位，在公制中係以每秒若干公分(簡稱爲公分/秒)，或每時若干公里(簡稱爲公里/時)表之；在英制中，則以每秒若干呎或每時若干哩(簡稱爲呎/秒或哩/時)表之.

例題 80. 有一物體依方程式 $s=6t^2+4$ (公尺)向一直線運動，試求其在 5 秒後之速度.

解 $$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(6t^2+4)=12t.$$

故當 $t=5$ 秒時，該物體之速度爲

$$v=12\times5=60\text{ 公尺/秒}.$$

習 題

286. 若某物體之運動方程式爲 $s=16.1t^2$，s 係以呎計，試求4秒後之位移若干?

答. 257.6呎

287. 試化每時100公里之速度爲每秒若干公尺.

答. 27.78公尺/秒.

288. 試化每時60哩之速度爲每秒若干呎.

答. 88呎/秒.

289. 有人於10秒鐘內跑100公尺,試求其平均速度以公里/時計.

答. 36公里/時.

290. 有一物體依方程式$s=16.1t^2$(呎)向一直線運動.試求其在第四秒後之速度,並求其在第四秒間之平均速度.

答. 128.8呎/秒; 112.7呎/秒.

131. **加速度**　物體之運動,事實上未必均能以等速度進行,如其速度生有變化,則在單位時間內之速度變率稱爲加速度.在等速運動中,加速度將爲零.

設速度在相等時間內生相等之速度變化,則加速度之值爲一常數,稱爲等加速度;反之,若在相等時間內所生之變化不等,則稱爲變加速度.又速度之變化如係增加,稱爲正加速度;否則稱爲負加速度.

在等加速運動中,若命v_0爲初速度,v爲末速度,t爲所行時間,a爲加速度,則得加速度之公式如下:

$$a=\frac{v-v_0}{t}.$$

若$v_0=0$,則

$$a=\frac{v}{t}.$$

在變加速運動中,欲求加速度之值,須以速度之瞬時變化爲準.

若命 dv 爲速度在某一瞬時 dt 之變化，則

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

如就 $v=\frac{ds}{dt}$ 及 $a=\frac{dv}{dt}$ 兩式中消去 dt，將得如次之重要關係：

$$vdv=ads.$$

設將上列微分式 $a=\frac{dv}{dt}$ 按兩個適當之極限求其積分，可得一以時間爲條件之速度方程式. 設再將微分式 $v=\frac{ds}{dt}$ 按兩個適當之極限求其積分，又可得一以時間爲條件之距離方程式. 玆分別述之如下.

(1) $$a=\frac{dv}{dt},\quad 或\quad dv=adt.$$

命 v_0 爲初速度，由是，若 a 爲一常數，求其兩邊之積分，

$$\int_{v_0}^{v}dv=a\int_0^t dt,$$

$$v-v_0=at,$$

或

$$v=v_0+at. \tag{I}$$

(2) $$v=\frac{ds}{dt},\quad 或\quad ds=vdt=v_0dt+atdt.$$

求其兩邊之積分，

$$\int_0^s ds=v_0\int_0^t dt+a\int_0^t tdt,$$

或

$$s=v_0t+\tfrac{1}{2}at^2. \tag{II}$$

至方程式 $vdv=ads$ 亦可按同法求其積分.

$$\int_{v_0}^{v} v dv = a\int_0^s ds,$$

$$\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=as,$$

或
$$v^2=v_0^2+2as. \tag{III}$$

若 $v_0=0$,則

$$v^2=2as.$$

以上(I),(II)及(III)三式亦可用簡單代數法求之如下.

假定物體在某一單位時間內增加 a 單位之速度,則於 t 單位時間內將增加 at 單位之速度.因之,其末速度 v 將為初速度 v_0 與此增加速度 at 之和,即

$$v=v_0+at.$$

至於在 t 單位時間內之平均速度,應為初速度與末速度之平均值,即

$$\frac{v+v_0}{2}=\frac{v_0+v_0+at}{2}=v_0+\frac{1}{2}at. \tag{1}$$

其所行之距離應為此平均速度與時間之相乘積,即

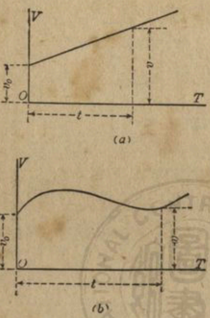
$$s=\frac{v+v_0}{2}\times t=v_0t+\frac{1}{2}at^2. \tag{2}$$

若將(1),(2)兩式內之 t 消去,即得

$$v^2=v_0^2+2as. \tag{3}$$

加速度亦猶如速度,同為一種有向量,可用一直線表之.如第362圖,若以任一時間之速度為縱標,相應之時間為橫標,則在該點之斜度即表其當時之加速度.圖(a)係示等加速運動,圖(b)則示變加速運動.

132. 加速度之單位



第 362 圖

設有汽車於 4 秒鐘內自每秒 0 公尺之速度增加至每秒 20 公尺之速度，則該車在每秒間所生速度變化應爲每秒 5 公尺，亦卽加速度等於每秒每秒 5 公尺．故加速度之單位，在公制中，爲每秒每秒若干公尺(公尺/秒^2)；在英制中，爲每秒每秒若干呎(呎/秒^2)．

此種速度若係逐漸增加，則其加速度應視作正(+)；否則應視作負(−)．

習　題

291．某汽車之速度於 5 秒鐘內自每時 4 公里增加至每時 40 公里．試求其平均加速度等於每秒每秒若干公尺？

答．每秒每秒 2 公尺．

292．若在某一物體之運動中，$s=2t^2$，s 係以公尺計，t 以秒計，試求在 3 秒後，該物體之加速度應等於若干？

答．36 公尺/秒^2．

293．一列車正以每秒 50 公尺之速率進行，前面忽遇障礙，司機

乃急拉制動器，使列車於120公尺之距離處完全停止．試求其平均加速度．

答．-10.42 公尺/秒^2．

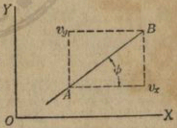
294．有一運動之物體，其初速度為每秒 20 公尺，加速度為每秒每秒 6 公尺．試求其在 4 秒後之速度，在 5 秒後之速度．又在第 5 秒間所行之距離若干？

答．每秒 44 公尺；每秒 50 公尺．47 公尺．

295．一列車自某站出發，以等加速度向前進行，於 5 分鐘內達到每時 60 哩之速率．於是即以此均等速率繼續駛行若干分鐘，及將近第二站時，司機乃用制動器，令列車復以等減速度於 4 秒鐘內完全停止．若所行之總距離為 10 哩，試求其總時間．

答．$t=14.5$ 分鐘．

133．速度之分解及合成　速度與加速度均為一種有向量，故可依力之分解與合成法求得分速度及合速度．玆分別說明之．



第363圖

如第363圖，設有一物體沿 AB 之方向運動，命其在 A 點之速度為 v．作 $X\text{-}X$，$Y\text{-}Y$ 兩直角坐標軸．將 v 分解為兩個與 $X\text{-}X$ 及 $Y\text{-}Y$ 平行之分速度 v_x 及 v_y．又命 ϕ 為 v 之矢量 AB 與 $X\text{-}X$ 軸之交角．則

$$v_x=v\cos\phi,$$

$$v_y=v\sin\phi.$$

但 $$v=\frac{ds}{dt},\quad \cos\phi=\frac{dx}{ds},\quad \sin\phi=\frac{dy}{ds}.$$

$$\therefore\quad v_x=\frac{ds}{dt}\times\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt},$$

$$v_y=\frac{ds}{dt}\times\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dt}.$$

故若任一點 A 之 x 及 y 兩坐標係以含 t 之方程式表示者，即可用微分法求其分速度 v_x 及 v_y.

反之，若已知 v_x 及 v_y 兩速度，則其合速度應等於

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

134. 自由落體 凡物體在地球上空未受有任何外力之支持時，必將自由墜落於地面上，此顯然由於地心引力將其吸引所致. 此種引力，當物體密接地面時，可假定為一常數；故若將空氣對於落體之阻力略去不論，則因此種引力所生之加速度亦可假定為一常數. 據實驗所得，自由落體之加速度實為每秒每秒980公分(公制)，或每秒每秒 32.2 呎(英制)，通常以 g 表此種數量. 若按市尺計，應為每秒每秒 29.4 尺.

今若將第 131 節(I),(II),(III)三式中之 a 均易為 g，則得自由落體之方程式如下：

$$v=v_0+gt,\tag{1}$$

$$h=v_0t+\tfrac{1}{2}gt^2,\tag{2}$$

$$v^2=v_0^2+2gh.\tag{3}$$

在此等公式中，所有向下之位移，速度及加速度均假定為正值. 若物

體係自靜止狀態向下墜落，則 $v_0=0$，而 $v^2=2gh$，或 $v=\sqrt{2gh}$.

又若將一物體垂直向上拋擲，則 v_0 爲一負值，該物體將於 $t=\frac{v_0}{g}$ 秒鐘內昇至 $h=-\frac{v_0^2}{2g}$ 之高度而停止；然後復由此停止點開始向下墜落，及達到原出發點時，其速度仍爲 v_0. 倘中途無其他阻礙，並將以此 v_0 爲假定初速度，繼續向下墜落.

例例 81. 有球以每秒30尺之速度向上投射，一秒鐘後另有一球以每秒100尺之速度同樣向上投射.試求兩球相遇之時間及地點.

解 命 s_1, s_2 各爲第一球及第二球自出發點至相遇點之距離，t_1, t_2 各爲第一球及第二球自出發至相遇之時間，v_1, v_2 各爲第一球及第二球之初速度. 則

$$t_2=t_1-1.$$

此兩球之初速度均爲負數. 在 t_1 秒後第一球所行距離應爲

$$s_1=v_1t_1+\tfrac{1}{2}gt_1^2=-30t_1+14.7t_1^2.$$

同時第二球所行距離〔該球僅行 (t_1-1) 秒之時間〕應爲

$$s_2=v_2t_2+\tfrac{1}{2}gt_2^2=-100(t_1-1)+14.7(t_1-1)^2.$$

當兩球相遇時，

$$s_1=s_2,$$

故 $$-30t_1+14.7t_1^2=-100(t_1-1)+14.7(t_1-1)^2,$$

$$\therefore\ t_1=1.154\ 秒.$$

$$s_1=s_2=15\ 尺.$$

但由方程式 $t=\frac{v_0}{g}$，求得第一球自出發點達到頂點之時間僅須 $\frac{30}{29.4}=1.02$ 秒. 今相遇之時間爲 1.154 秒，可見此時第一球已在向下墜落之途中.

習題

296. 設一物體自靜止中向下自由降落，試求在 1.4 秒後其速度應為若干？又其降落距離若干？

答. 41.25 尺/秒. 28.88 尺.

297. 今於塔頂以每秒 11 尺之速度向上拋一鐵球，試求此球落至出發點以下 5.5 尺之處所需之時間. 又求出發 2 秒鐘後鐵球之位置及其速度.

答. 1.09 秒. 塔頂以下 36.88 尺; 47.94 尺/秒.

298. 在某一橋梁工程中，基樁係用墜錘打入. 試求樁錘應拉至若何高度方能使落下後獲得每秒 80 尺之速度？

答. 109 尺.

299. 有一昇降機自距地面 80 尺之高處以每秒 25 尺之速度向下降落，同時有一物體自機內滾出. 試求該物體落至地面時之速度及所需之時間.

答. 73 尺/秒; 1.33 秒.

300. 投石於井，2 秒鐘後聞得石擊水面之聲. 設音速等於每秒 1,000 尺，試求水面距井面若干尺？

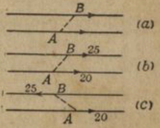
答. 55.45 尺.

301. 一汽球以每秒 4 尺之速度自地面向上昇起，當其昇至某一高度時，乃將球內沙袋投下. 若沙袋達到地面之時間共計 6 秒，試求汽球當時之高度.

答. 505 尺.

135. 相對運動 吾人所謂靜止與運動，實爲一相對名詞；在宇宙間，一切運動之實例，絕難判定其何者屬於絕對，而所習知之各種運動，嚴格言之，實皆爲一種相對. 雖則通常所稱物體之運動，係指其對地球面上之某一定點發生位移變化而言，但地球在天空中乃以極大速率不絕轉動，故向認作對象之某一定點，實際上亦隨之不絕轉動，並非絕對靜止，特爲便利研究，姑假定之爲靜止而已. 由此假定，於是運動物體對此靜止之定點而言，乃稱爲絕對運動，而此種運動之速度，則稱爲絕對速度. 至若某一物體已正在運動中，同時另有一物體亦正發生運動，則後者對於前者，可稱爲相對運動，其速度卽稱爲相對速度.

例如有一列車以每時 40 公里之速度向北行駛，此每時 40 公里卽爲該列車之絕對速度. 倘同時在平行軌道上有兩列車行駛，命 A，B 各爲甲，乙兩列車中之乘客，若兩車係以同速同向進行，則甲車中之 A 將始終不覺乙車亦在行駛，在乙車中之 B 亦同此感覺. 易言之，卽 AB 直線之大小及方向將始終不變，亦卽 B 與 A 之相對速度將等於零〔見第 364 圖 (a)〕. 其次，若兩車雖取同向進行，但甲，乙兩車之絕對速度各爲每時 20 公里及 25 公里，則 A，B 兩點之距離每時將相差 5 公里，卽 A 與 B 之相對速度等於每時 5 公里〔見圖(b)〕.



第 364 圖

再次，若兩車係取反向進行，其速度仍爲 20 及 25 公里，則 A，B 兩點之距離每時應相差 45 公里，卽 A 與 B 之

相對速度等於每時 45 公里〔見圖(c)〕. 茲更舉一例說明之.

如第 8 圖,平車以每秒等於 a 之速度沿 OA 向行駛,同時車上鉛球以每秒等於 b 之速度自 O 點沿 OB 向推動. 當第一秒之末,車上之 O 點進行至 A', 第二秒之末進行至 A''. 然因該球始終與車同行,並同時沿 OB 線推動,故在第一秒之末鉛球進行至 C', 第二秒之末進行至 C''. 此矢量 OC 卽表 OA, OB 兩運動之結果,亦卽表鉛球對於 O 點原地位之絕對位移. 至於 OC', $C'C''$, $C''C$ 皆表鉛球之絕對速度; 其矢量 OB 則表鉛球對平車上 O 點之相對位移.

根據此種實例,可得一原則如下:

任一物體之絕對位移(或速度)加另一物體對於第一物體之相對位移(或速度)等於第二物體之絕對位移(或速度). 如以公式表之,卽

$$A\text{ 之絕對位移(或速度)} + B\text{ 對 }A\text{ 之相對位移(或速度)}$$
$$= B\text{ 之絕對位移(或速度)}.$$

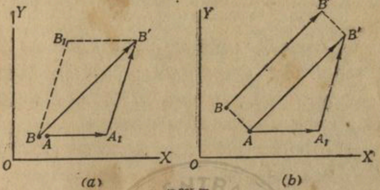
在此公式中,無論 A, B 兩物體係自同一地點或不同地點出發,其結果均相等. 如第 365 圖之(a)係示 A 與 B 自同一地點出發,(b)則示 A 與 B 自不同地點出發;其中 AA_1 表 A 之絕對位移, BB_1 或 A_1B' 表 B 對 A 之相對位移, BB' 表 B 之絕對位移.

由圖中觀之,可見

$$AA_1 + A_1B' = BB'.$$

同理,依矢量之減法,得

$$B\text{ 對 }A\text{ 之相對位移(或速度)}$$
$$= B\text{ 之絕對位移(或速度)} - A\text{ 之絕對位移(或速度)}.$$



第365圖

即 $$A_1B' = BB' - AA_1.$$

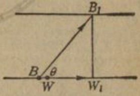
例題 82. 某河之流速爲每時4里，河寬1里，河之兩岸係成平行. 今有一汽船以每時 6 里之速度（相對於水流）自一岸向對岸駛去，船身始終與水流成垂直. 試求此汽船到達對岸時之絕對位移.

解 如第 366 圖，命 B 表汽船，W 表當汽船開動時在船身下之水流. 依上述原則，

汽船之絕對位移＝水流之絕對位移

＋汽船對水流之相對位移.

今當汽船在行駛期間，



第366圖

水流之絕對位移$=WW_1=\frac{2}{3}$里.

汽船到達對岸後對水流之相對位移$=W_1B_1=1$里.

故 汽船之絕對位移$=BB_1=WW_1+W_1B_1$

$$=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+1^2}=1.2\text{ 里}.$$

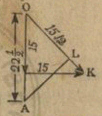
又
$$\tan\theta=\frac{W_1B_1}{WW_1}=\frac{3}{2},$$

$$\therefore\quad \theta=56^\circ 20'.$$

例題 83. 今有一船以每時15里之速度向東行駛，於正午通過某一定點，另有一船以同一速度向北行駛，於午后一時三十分通過該點．試求兩船距離最近之時間及當時之距離．

解 命第367圖中之O表該定點，A為第二船在正午之位置．故

$OA=1\frac{1}{2}\times 15=22\frac{1}{2}$ 里．



第 367 圖

今欲求第一船對於第二船之相對速度，須先假定第二船係以相等而相反之速度向南行駛．於是結合第一船與第二船之速度得 $15\sqrt{2}$，其方向為東南，如圖所示之OK，是為兩船之相對速度．

次作AL垂直於OK，則AL將為所求之最短距離．

$$AL=OA\sin AOL=22\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{45}{4}\sqrt{2}=15.9\text{ 里}.$$

至所求之時間應等於

$$\frac{OL}{15\sqrt{2}}=\frac{22\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{15\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\text{小時},$$

即午后零時四十五分．

習 題

302. 某人以每時4里之速度向東行走，似有風自正北吹來，但

若其步行速度加快一倍，則風又似轉自東北吹來．試求眞正之風向及風速．

答．風向東南；風速＝每時 $4\sqrt{2}$ 里．

303．今有 A，B 兩點相距 20 尺，某甲於 3 秒鐘內自 A 步行至 B，同時又有某乙以等於 $\frac{3}{4}$ 甲之速度自 A 取與 AB 垂直方向步行．試求甲，乙兩人相對速度之大小及方向．

答．每秒 $8\frac{1}{3}$ 尺，與 BA 成 $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$（$=36°52'$）之角．

304．有兩列車分別以每時 20 及 30 公里之速度相向行駛於平行軌道上．若車長各爲 200 公尺，試求兩車自車頭相交至車尾相錯之時間．

答．$28\frac{4}{5}$ 秒．

305．某船以每時 $15\sqrt{2}$ 里之速度向南行駛，同時另有一船以每時 15 里之速度向東南行駛．試求第一船上乘客所見第二船之速度及其方向．

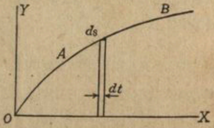
答．每時 15 里，方向東北．

306．有船以每時 10 里之速度向東北行駛，船上乘客覺有風自北來，其速度爲每時 $10\sqrt{2}$ 里．試求風之實在速度及方向．

答．每時 10 里，方向西北．

136．**運動曲線圖**　研究物體之運動問題，有時可藉助於一種曲線圖以示位移（s），時間（t），速度或速率（v），及加速度（a）之關係．設已知其中任何兩數之值，則由此種曲線圖即可求得其他各數之值，其法殊爲便利．尤其對於不易運用數學方式求解之問題更有價値．

法取兩直角坐標軸，如第368圖，其縱橫兩坐標即分別表此 s 與 t 之值. 聯結已求得之各點使成一曲線，如 OAB，此種曲線稱爲位移一時間曲線. 今試於圖上取一瞬息之時間 dt，並命在此瞬



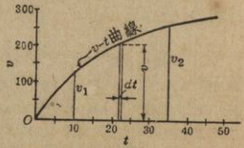
第368圖

時之位移爲 ds，則此曲線之斜度即表 ds 與 dt 之比率. 但因 $v=\frac{ds}{dt}$，故在 $(s\text{-}t)$ 曲線中，任一點之斜度均將表當時物體運動之速率(按適當比例尺及單位推算).

同理，若所作曲線係示 v 與 t 之關係者，稱爲速率一時間曲線，凡在曲線上任一點之斜度均表 $\frac{dv}{dt}$ 之比率. 但因 $a=\frac{dv}{dt}$，故在 $(v\text{-}t)$ 曲線中，任一點之斜度均將表當時物體運動之加速度. 又 $(a\text{-}t)$ 曲線稱爲加速度一時間曲線.

以上所述者係自 $(s\text{-}t)$ 曲線或 $(v\text{-}t)$ 曲線之斜度以求 v 或 a 之值；反之，又可由 $(v\text{-}t)$ 曲線或 $(a\text{-}t)$ 曲線之面積以求 s 或 v 之值.

如第369圖，命 OAB 表一 $(v\text{-}t)$ 曲線. 任取前後兩時間 t_1 及 t_2，並命 v_1 及 v_2 各爲前後兩相應速



第369圖

度. 則在 v_1 與 v_2 兩縱標間所包含之面積應等於

$$A_1=\int_{t_1}^{t_2}vdt.$$

但因 $$v=\frac{ds}{dt}, \quad \therefore \quad vdt=ds.$$

$$\int_{t_1}^{t_2}vdt=\int_{s_1}^{s_2}ds=\Delta s,$$

式中 Δs 為在 t_2-t_1 時間內之位移. 故在 $(v\text{-}t)$ 曲線中, 若運動之速率於 t_2-t_1 時間內自 v_1 變至 v_2, 則在此時間內曲線所包含之面積即表其位移 s 之值 (按適當比例尺及單位推算).

同理, 在 $(a\text{-}t)$ 曲線中, 若 a_1 及 a_2 各表運動之前後兩加速度, 則在 a_1 與 a_2 兩縱標間所包含之面積應等於

$$A_2=\int_{t_1}^{t_2}adt.$$

但因 $$a=\frac{dv}{dt}, \quad \therefore \quad adt=dv.$$

$$\int_{t_1}^{t_2}adt=\int_{v_1}^{v_2}dv=\Delta v.$$

故在 $(a\text{-}t)$ 曲線中, 若運動之加速度於 t_2-t_1 時間內自 a_1 變至 a_2, 則在此時間內曲線所包含之面積即表其速率 v 之值.

總 習 題

307. 有一物體依方程式 $v=t^3+4t^2+2$ 沿一直線運動. 今設當

$t=2$ 秒時，$s=4$ 尺，試求當 $t=3$ 秒時，s 等於若干尺？

答. 47.58 尺.

308. 有一物體依方程式 $s=3t^2+2t+t^{-1}$ 向一直線運動. 試求當 $t=2$ 秒時，物體之速度等於若干尺？

答. 每秒 13.75 尺.

309. 列車自某站出發後以等加速度向前進行，於 5 分鐘內達到每時 60 里之速率. 依此速率進行若干距離後，復使用制動器，使列車於 4 分鐘內以等速遞減，以迄停止. 若所行之總距離為 10 里，試求其總時間.

答. 14.5 分.

310. 一石子以每秒 100 呎之速度自地面垂直向上投射，4 秒鐘後復有一石子以每秒 50 呎之速度垂直向上投射. 試求此兩石將遇於何處？

答. 距地面 37.6 呎之處.

311. 某礦井深 160 呎，井內有一升降機以每秒 12 呎之等速度向上昇起，當其離井底 4 呎時，適有一球自井面自由落下. 試求該機與球相遇之時間，地點及其相對速度.

答. 2.76 秒；距井底 37.15 呎；每秒 100.95 呎.

312. 自 250 呎高之塔頂向下投一鐵球，同時另有一球以每秒 100 呎之速度自地面向上投射. 試求此兩球相遇之地點，並證明兩球之相對速度始終為每秒 100 呎.

答. 距地面 149.375 呎.

313. 某河流速為每時 6 里，向南. 河中行駛一船，其對於水流

之相對速度為每時 15 里，向西．若同時岸上有一車亦正以每時 30 里之速度向北行駛，試求車與船之相對速度．

答．每時 39 里，方向為 $\cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$ (=67°23′) 東北．

314．有人在雨中行路，若其步行速度為每時 2 里時，則覺雨點係自天空垂直打來；若其步行速度增倍，則覺雨點係自後取 45° 角之方向打來．試求雨點之實在速度及方向．

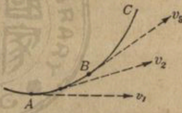
答．每時 $2\sqrt{2}$ 里，迎面取 45° 之角打來．

NATIONAL CENTRAL LIBRARY 國家圖書館 ROC

第十三章　曲線運動及圓周運動

137. 曲線運動中之速度　運動乃物體對於空間某一定點之位置發生變化，其在每一單位時間內之變率卽其速度．且速度爲一種有向量，含有大小及方向兩個條件，凡此種種具見前章．故在直線運動中，若於相等時間內行相等之距離者爲等速度．但在曲線運動中，因運動之方向時刻變化，雖於相等時間內行相等之距離，仍不得稱爲等速度．

例如在第370圖中，有物體沿 ABC 曲線而運動，則在此路線中之任一點 A 或 B，其速度之方向均將在該點之切線上（如圖中矢線所示）．故速度之方向實時刻在變化中，因之，其大小亦隨之時刻變換（如圖中之 v_1，v_2 及 v_3）．今倘欲求該物體在任一點之速度近似值，可



第370圖

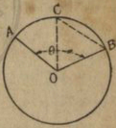
就該點附近（該點亦包括在內）取一極爲微小之部分，如弧線 AB，此 AB 上之平均速度，卽該物體在曲線運動中之速度近似值．

命弧線 AB 爲該物體於 Δt 時間內所行之距離，則矢量 AB 應爲該物體於 Δt 時間內之位移．於是比率 $\frac{AB}{\Delta t}$ 卽爲該物體在 A，B 兩點間之平均速度．設 Δt 逐漸減小，經 dt 而趨近於零，並以零爲其極

限，則 B 點亦將逐漸與 A 點相切近，並以 A 點爲其極限．因此，矢量 AB 自亦必逐漸與 A 點之切線相切近，同時矢量 AB 之極限方向將與 A 點之切線方向相疊合．故在 A 點之速度之方向應即以 A 點切線之方向表之．又當 B 點逐漸切近 A 點時，矢量 AB 逐漸等於弧線 AB．若命物體於 dt 時間內所經 AB 之長等於 ds，則 $\frac{ds}{dt}$ 將爲在 A 點之瞬時速度之大小，或視爲在 A 點之速率．

138．角移　設有一物體沿某一曲線進行，而此曲線之半徑 r 乃爲一常數，則此種運動卽成爲圓周運動或稱轉動．在圓周運動中，物體自某一點 A 行至另一點 B，此 A，B，兩點所交之弧角 θ 稱爲該物體之角移．

角移之單位爲弳(或弧度)．所謂弳者，蓋指弧長等於半徑之圓弧所對之中心角．例如第 371 圖，圓弧 CB 之長等於半徑 r，則 COB 角卽爲一弳．一個圓周應等於 2π 弳，卽



第 371 圖

$$2\pi\text{ 弳}=360^\circ,$$

$$1\text{ 弳}=\frac{360}{2\pi}=57^\circ.3.$$

在此圖中，命圓弧 ACB 之長等於 s．茲因任一圓弧均與其所對之中心角成正比例，故

$$\theta=\frac{s}{r},\quad\text{或}\quad s=r\theta.$$

通常以順時針向之角移爲正，反時針向爲負．

139．角速度　角速度爲角移在每一單位時間內之變率．若物

體在相等時間內成相等之角移,則其角速度稱爲等角速度.命 ω 表每秒逕之等角速度.由是,若 θ 表在 t 秒鐘內之角移,則此等角速度爲

$$\omega=\frac{\theta}{t}.$$

設物體在相等時間內所成之角移並不相等,則其角速度稱爲變角速度.關於此種速度求法,祇須求其在極短暫時間 Δt 內之平均角速度,

即
$$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

當 Δt 之極限趨近於零時,其瞬時角速度將爲

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}.$$

角速度之單位通常用'每分若干轉'(或 r. p. m.),遇有此種單位時應即化爲'每秒若干逕',如

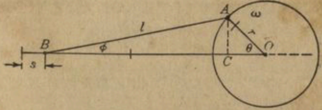
$$\text{每分 } 1 \text{ 轉}=\text{每秒 }\frac{1}{60}\text{ 轉}=\text{每秒 }\frac{2\pi}{60}\text{ 逕}.$$

角速度亦猶如角移,惟自有其符號,恆以反時針向者爲正,順時針向者爲負.

因角速度兼含有大小及方向,爲一種有向量,可以矢量表之.故角速度可以合成,亦可以分解.

例題 84. 有一蒸汽機如第372圖,其曲柄 OA 之長爲 r,連桿 BA 之長爲 l.若曲柄正以等角速度 ω 轉動,試依 r, l, ω 及曲柄與水平之交角 θ 諸數求十字頭 B 之速度.

解 命 s 爲十字頭當曲柄自水平位置轉至 θ 角時之位移.由圖中所示,可見



第372圖

$$s=l+r-l\cos\phi-r\cos\theta. \tag{1}$$

但 $$AC=l\sin\phi=r\sin\theta.$$

又 $$l\cos\phi=\sqrt{l^2-l^2\sin^2\phi}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta}.$$

展開上式，並取其首二項，得

$$l\cos\phi=l-\frac{r^2}{2l}\sin^2\theta.$$

因 $\frac{r}{l}$ 之值過小，故以下諸項均可棄去．於是(1)式化為

$$s=r-r\cos\theta+\frac{r^2}{2l}\sin^2\theta.$$

因之， $$v=\frac{ds}{dt}=r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}+\frac{r^2}{l}\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

又 $$\theta=\omega t,\quad \therefore\ \frac{d\theta}{dt}=\omega.$$

故 $$v=r\omega\left(\sin\theta+\frac{r}{l}\sin\theta\cos\theta\right).$$

習　　題

315．有一滑輪每分轉動120次，試求其每秒若干弳之角速度．

答．每秒12.57弳．

316. 有兩摩擦輪,其直徑小輪爲2.5寸,大輪爲2尺.若小輪之轉動速度爲每分 30 次,試求大輪之角速度.

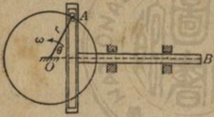
答. 每秒 0.3927 弳.

317. 有一物體依方程式 $s=6t^3+t^2$ 運動於半徑 6 尺之圓周上.試求 $t=3$ 秒時該物體之角速度.

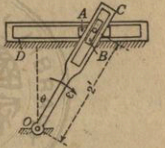
答. 每秒 28 弳.

318. 在第 373 圖中,曲柄 OA 以等角速度 ω 繞 O 點轉動.試依 r,θ 及 ω 諸數求十字頭 B 之線速度.

答. $r\omega\cos\theta$.



第373圖



第374圖

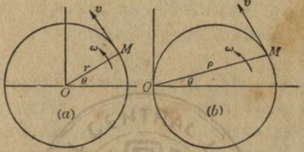
319. 有用栓聯結之 A,B 兩滑片,如第 374 圖.當曲柄 OC 繞 O 點擺動時,滑片 B 卽上下滑動於凹槽 C 內,同時滑片 A 往復滑動於凹槽 D 內.試求當 OC 在 $\theta=30°$ 及角速度 $\omega=$ 每秒 20 弳之位置時,滑片 A 之線速度.

答. 每秒 46.2 尺.

140. 線速度與角速度之關係　設有一物體 M 運動於半徑爲 r 之圓周上,如第 375 圖(a);又命 v 爲該物體在任一瞬時之線速度,ω 爲其同時對於圓心之角速度.則依前述定義,得

$$v=\frac{ds}{dt}, \quad 又 \quad \omega=\frac{d\theta}{dt}.$$

但物體在 dt 時間內所行之距離 ds 又可按下式求之，即



第375圖

$$ds=rd\theta,$$

$$\therefore \quad v=\frac{ds}{dt}=\frac{rd\theta}{dt}=r\omega.$$

故圓周運動中之物體，在任一瞬時之線速度，恆等於該物體對於圓心之角速度與半徑之相乘積.

又設該物體所運行之路徑並非一圓周，而係一任何曲線. 若 r 即爲物體在任何位置時之曲率半徑，ω 爲當時物體對於曲率中心之角速度，則 $v=r\omega$ 一式仍可適用.

習　題

320. 在第 315 題中，若滑輪之直徑爲 4 尺，試求其線速度.

答. 每秒 25.14 尺.

321. 試求第 316 題中大輪之線速度.

答. 每秒 0.3927 尺.

322. 有一直徑6尺之飛輪以每分120轉之速度轉動,試求其圓周上任一點之線速度.

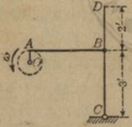
答. 每秒37.71尺.

323. 有一4尺長之圓棍以其一端爲中心,轉動於一平面內.若圓棍中點之線速度爲每秒60尺,試求圓棍之角速度.

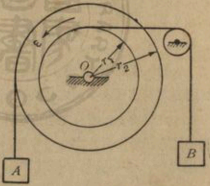
答. 每分286.5轉.

324. 一圓棍 CD(第376圖)聯結於一連桿 AB 上,當曲柄 OA 及連桿 AB 同繞 O 點轉動時,圓棍亦隨之繞 C 點擺動. OA 之長爲0.5尺.又當 AB 垂直於 OA 及 CD 卽圖示之位置時,若曲柄之角速度 ω 爲每分90轉,試求圓棍 CD 之角速度及 D 之線速度.

答. ω=每分15轉,
v=每秒7.85尺.



第376圖

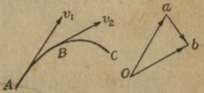


第377圖

325. 第377圖示一剛體,上有大小兩圓盤,其半徑各爲 r_2 及 r_1. 盤上各懸有物體 A 及 B,當圓盤繞盤心 O 轉動時, A, B 兩體將一下一上.若圓盤轉動之等角速度 ω 爲每分80轉,試求 A, B 兩體之速度.

答. A=25.14尺/秒, B=16.76尺/秒.

141. 曲線運動中之加速度 加速度為在單位時間內速度之變率。在曲線運動中，因速度之方向時刻變化，故其大小乃亦隨之時刻不同。如第 378 圖，設命物體於 Δt 時間內沿曲線 ABC 自 A 運動至 B，又命 v_1, v_2 分別為在 A, B 兩點之瞬時速度。若自任一點 o 作矢量 oa 及 ob 各等於並平行於 v_1 及 v_2，則矢量 ab 即表速度之總變化。而 $\frac{ab}{\Delta t}$ 即為 A, B 兩點間速度之平均變率，或**平均加速度**。若 Δt 變為 dt，則此平均加速度即為在 A 點之**瞬間加速度**。



第 378 圖

142. 角加速度 角加速度為角速度在每一單位時間內之變率。若角速度為一常數，此角加速度等於零。若角速度在等時等距內生相等之變化，此角加速度將為一常數，稱為**等角加速度**。若角加速度在等時等距內生不等之變化，此角加速度將為一變數，稱為**變角加速度**。

今設角加速度為一常數，欲求其值，可以總時間 t 除角速度之總變化得之。命 α 表角加速度，ω 表角速度之總變化，即

$$\alpha=\frac{\omega}{t}.$$

又設角加速度為一變數，則其在任一瞬時之值可由下式求之：

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}.$$

又因

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}.$$

二式合併，即得
$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

又由方程式
$$\omega=\frac{d\theta}{dt}\quad 及\quad \alpha=\frac{d\omega}{dt},$$

得
$$dt=\frac{d\theta}{\omega}=\frac{d\omega}{\alpha},$$

$$\therefore\quad \omega d\omega=\alpha d\theta.$$

角加速度之單位爲每秒每秒若干弳.

角加速度猶如角速度，亦爲一種有向量，故可用矢量表之，且亦有其符號. 凡反時針向者均爲正，反之則均爲負.

習　題

326. 有一物體依方程式 $\theta=3t^2+2t$ 運動於某一圓周上，式中 θ 及 t 係分別以弳及秒計. 試求該物體在 4 秒末之角速度及角加速度.

答　ω—每秒 26 弳. α—每秒每秒 6 弳.

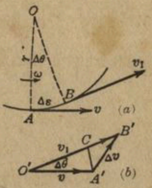
327. 若第 316 題中之兩摩擦輪，其轉動之速度於 $\frac{1}{2}$ 秒內以等角加速度自靜止增至每分 30 轉，試求小輪之角加速度.

答. 每秒每秒 6.28 弳.

143. 切線加速度與法線加速度　設一物體以變速度運動於曲線 AB 上，如第 379 圖所示. 今欲由方程式 $a=\frac{dv}{dt}$ 以求該物體在曲線上任一點 A 之線加速度之大小及方向，最簡捷之法莫如將 a 先分解爲兩個分加速度，而後再求其合值. 其法如下：

命物體由 A 運動至 B 之時間等於 Δt，其在 A 及 B 兩點之速度

各為 v 及 v_1. 又命在 A 點之曲率半徑為 r, 及該物體對於曲率中心 O 之角移為 $\Delta\theta$. 今作矢量 $O'A'$ 及 $O'B'$ 分別表速度 v 及 v_1 之大小及方向, 聯結 $A'B'$. 於是速度之變化 Δv 卽由此矢量 $A'B'$ 表之, 其意蓋謂在 A 點之速度 v, 如加入速度 $A'B'$ (或 Δv), 則可得在 B 點之速度 v_1. 故在 Δt 瞬時內之平均加速度(或速度之平均變率)為 $\frac{A'B'}{\Delta t}$. 設當 Δt 逐漸趨近於 dt 時, 則此式之極限卽為該物體在 A 點之瞬時加速度.



第379圖

故在第379圖(b)中, 若取 $O'C$ 等於 $O'A'$ (或 v), 則矢量 $A'B'$ 亦可謂為 $A'C$ 及 CB' 兩矢量之和. 因之, 加速度 $\frac{A'B'}{dt}$ 可以分解為兩個分加速度 $\frac{A'C}{dt}$ 及 $\frac{CB'}{dt}$, 其中 $\frac{A'C}{dt}$ 稱為**法線加速度**(因當 Δt 趨近於零時, $\Delta\theta$ 亦趨近於零, 而 $O'A'C$ 角將趨近於 $90°$, 是以 $A'C$ 之極限將為 $O'A'$ 之法線), 並以 a_n 表之. 又 $\frac{CB'}{dt}$ 稱為**切線加速度**(因矢量 CB' 係在矢量 $O'B'$ 上, 當 $\Delta\theta$ 趨近於零時, $O'B'$ 將逐漸與 $O'A'$ 相疊合, 是以 CB' 將與 A 點之速度 v 之方向相平行), 並以 a_t 表之. 至於 a_n 及 a_t 之大小可依下法求之:

因在曲線中 A 與 B 為兩相連續之點, 故

$$CB' = v_1 - v = dv.$$

因之，
$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.\tag{1}$$

上式亦即為在 A 點之速度變率. 又當 $\Delta\theta$ 趨近於零時，

$$A'C=v\Delta\theta=vd\theta,$$

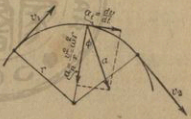
$$\therefore\quad \frac{A'C}{dt}=\frac{vd\theta}{dt}.$$

又
$$d\theta=\frac{ds}{r},\quad v=\frac{ds}{dt},$$

故
$$a_n=\frac{A'C}{dt}=\frac{vd\theta}{dt}=\frac{v}{r}\frac{ds}{dt}=\frac{v^2}{r},$$

即
$$a_n=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r\ (\text{因 } v=\omega r).\tag{2}$$

上列(1)，(2)兩式極關重要，學者尤應切記，以資引用. 前已說明，凡物體以變速度運動於曲線上時，其總加速度之矢量，應等於切線加速度及法線加速度兩分矢量之和（見第380圖）. 倘切線加速度 a_t 及法線加速度 a_n 為已知，其總加速度 a 即等於



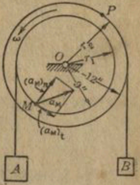
第380圖

$$a=\sqrt{a_n^2+a_t},\qquad \text{又}\qquad \tan\phi=\frac{a_t}{a_n}.$$

式中 ϕ 為總加速度矢量與法線之交角.

例題 85.　設有大小兩滑輪結成如第 381 圖所示之形式. 此二輪同繞轉於軸心 O，並各懸有 A，B 兩個重量. 當滑輪轉動時，重量 A 向下鬆落，重量 B 向上弔起. 若 M 與 P 兩點之角速度於 2 秒內以等

加速度自每分 10 轉增至每分 60 轉，試求(a) M 與 P 在此 2 秒內任何時間之切線加速度；(b) A 與 B 之加速度；(c)於此 2 秒期間內 M 在開始時及 P 在終了時之總加速度.



第 281 圖

解 (a) M 點之速度係以相等之變化，於 2 秒內，自 $v_1=\omega_1 r_1=\dfrac{10\times 2\pi}{60}\times\dfrac{9}{12}=\dfrac{\pi}{4}$ 呎/秒變為 $v_2=\omega_2 r_1=\dfrac{3}{2}\pi$ 呎/秒. 故 M 之切線加速度為

$$(a_M)_t=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{4}\pi}{2}=\frac{5}{8}\pi=1.96\text{ 呎/秒}^2.$$

又 P 點之速度，於 2 秒內，係自 $\dfrac{\pi}{3}$ 呎/秒變為 2π 呎/秒. 故

$$(a_P)_t=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{2\pi-\frac{1}{3}\pi}{2}=\frac{5}{6}\pi=2.62\text{ 呎/秒}^2.$$

(b) 在小滑輪圓周上任一點，其速度之大小與 A 點之速度發生同樣變化，故 M 之切線加速度應與 A 點之加速度同其大小. 因之，

$$a_A=(a_M)_t=1.96\text{ 呎/秒}^2.$$

同理，

$$a_B=(a_P)_t=2.62\text{ 呎/秒}^2.$$

(c) 於 2 秒期間內，M 點在開始時之法線加速度為

$$(a_M)_n=\omega_1^2 r_1=\left(\frac{10\times 2\pi}{60}\right)^2\times\frac{9}{12}=0.82\text{ 呎/秒}^2.$$

又 P 點在終了時之法線加速度為

$$(a_P)_n=\omega_2^2 r_2=\left(\frac{60\times 2\pi}{60}\right)^2\times\frac{12}{12}=39.4\text{ 呎/秒}^2.$$

故 M 之總加速度應爲

$$a_M=\sqrt{1.96^2+0.82^2}=2.12\ \text{呎/秒}^2.$$

又 P 點之總加速度爲

$$a_P=\sqrt{2.62^2+39.4^2}=39.5\ \text{呎/秒}^2.$$

(圖中僅將 M 之加速度表明).

習　　題

328. 有一直徑8尺之飛輪以等角加速度轉動,於4秒內其角速度自每分100轉降至每分40轉. 試求在此時間內輪緣上任一點之切線加速度,及在4秒終了時輪緣上任一點之總加速度.

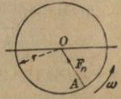
答. $a_t=6.28$ 尺/秒^2, $a=70.5$ 尺/秒^2.

329. 有一物體依方程式 $s=t^3+2t^2$ 運動於一圓周上,s 係以尺計,t 以秒計. 在此運動中,已知 t 爲2秒時,該物體之加速度爲$16\sqrt{2}$尺/秒^2,試求圓周之半徑.

答. 25尺.

144. 等速圓周運動　凡任一物體 A,若在半徑 r 之圓周上以等速度運動,如第382圖,則(1)其角速度 ω 將爲一常數;(2)角加速度 α 將等於零;(3)切線加速度 a_t 將等於零;(4)法線加速度 a_n 將等於 $r\omega^2$. 又該物體迴轉一週所需之時間則稱爲週期,等於其角速度除該圓一週之弳數,即

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$



第382圖

習　　題

330. 有一2尺長之繩，一端繫一物體．今若持緊其另一端，使物體以每秒3轉之速度，運動於一光滑之水平面上，試求該物體之加速度．

答．710.6尺/秒^2．

145. 等角加速度 依照前述之定義，得

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt},\quad 或\quad d\omega=\alpha dt. \tag{1}$$

又
$$\omega=\frac{d\theta}{dt},\quad 或\quad d\theta=\omega dt. \tag{2}$$

若加速度爲一常數，命ω_0表初速度，ω表t秒後之速度，則由(1)式，得

$$\int_{\omega_0}^{\omega}d\omega=\alpha\int_0^t dt,$$

$$\omega-\omega_0=\alpha t,\quad 或\quad \omega=\omega_0+\alpha t. \tag{3}$$

又由(2)式，得

$$d\theta=\omega_0 dt+\alpha t dt,$$

$$\therefore\quad \int_0^\theta d\theta=\omega_0\int_0^t dt+\alpha\int_0^t t dt,$$

$$\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2. \tag{4}$$

又由第142節，得

$$\omega d\omega=\alpha d\theta,$$

$$\therefore\quad \int_{\omega_0}^{\omega}\omega d\omega=\alpha\int_0^\theta d\theta,$$

$$\frac{\omega^2}{2}-\frac{\omega_0^2}{2}=\alpha\theta,\quad 或\quad \omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta. \tag{5}$$

凡此諸式在工程問題中應用頗廣，學者須特加注意.

習　題

331．有一滑輪以每分200轉之速度轉動．今若藉摩擦作用使滑輪於3分鐘內完全停止，試求其角加速度及其在此期間內之總轉數.

答．0.1164弳/秒²；200轉.

232．有一飛輪於$\frac{3}{4}$分鐘內自靜止發動至每分1,800轉之速度，試求其平均角加速度 α 及所需之轉數；並求在15秒末之角速度.

答．4.189弳/秒²；675轉．62.832弳/秒.

333．若上題中之飛輪直徑為1尺，試求輪緣上任一點之切線加速度；並求在達到最大速度時輪緣上任一點之切線速度及法線加速度.

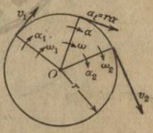
答．2.094尺/秒²．94.248尺/秒；1,777.25尺/秒².

146．線加速度與角加速度之關係　在第383圖中，設一物體以變速度運動於半徑r之圓周上，由第143節，其切線加速度之方程式應為

$$a_t=\frac{dv}{dt}.$$

但　　$$v=r\omega.$$

故　　$$a_t=\frac{d}{dt}(r\omega)=r\frac{d\omega}{dt}.$$



第383圖

惟$\frac{d\omega}{dt}$係等於當時該物體之角加速度 α，因之

$$a_t=r\alpha.$$

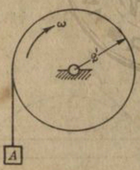
故圓周運動中之物體，在任一瞬時之切線加速度，恆等於該物體對於圓心之角加速度與半徑之相乘積.

又設該物體所運行之路線並非一圓周，而係任一曲線，若 r 即為此物體在任何位置時之曲率半徑，α 為當時物體對於曲率中心之角加速度，則 $a_t=r\alpha$ 一式仍可適用. 至於法線加速度 $r\omega^2$ 則有異於切線加速度，其與角加速度並不發生關係，僅與當時之角速度有關而已.

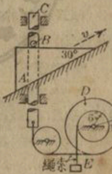
習　題

334. 當第384圖之鼓輪在順時針向轉動時，輪下所繫之重量 A 即以減速向上捲起. 若其所減之速率為每秒20尺/秒，試求輪緣上任一點之角加速度.

答. -10 弳/秒^2.



第384圖



第385圖

335. 在第385圖中，若 A 之速度在某一時間為4吋/秒，並以5吋/秒^2 之等加速度向上運動，試求 C 之線加速度，鼓輪 D 之角加

速度及 E 之線加速度.

答. $a_C=2.5$ 吋/秒^2; $\alpha=0.208$ 弳/秒^2; $a_E=0.104$ 呎/秒^2.

336. 有一滑輪,其輪緣上任一點之總加速度,在某一時間爲 40 尺/秒^2,其方向則與聯結該點之半徑成 20° 之角.若滑輪半徑爲 1.5 尺,試求當時該點之角速度及角加速度.

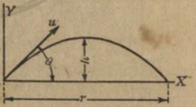
答. $\omega=5.01$ 弳/秒; $\alpha=9.12$ 弳/秒^2.

147. 拋體運動 凡向外拋射物體,例如由鎗膛中放射子彈,或由小孔中迸流水滴,其所行經之路線必爲一拋物線形,此種運動稱爲拋體運動.當物體被拋射時,其始必受有一初速度,及其既被射出後,乃受空氣阻力及地心引力等作用之影響,其所行經之路線逐漸降落,終至停止地面爲止.但空氣對於形式不同之拋射體能發生多種不同之阻力,故欲歸納此等阻力倜爲一般概說,殊不可能,因之對於此類問題,每將空氣阻力置而不論.

如第386圖,設拋射體之初速度等於 u,其仰角爲 θ.今將 u 分解爲水平及垂直兩分速度

$$u_x=u\cos\theta$$

及 $$u_y=u\sin\theta.$$



第385圖

拋射體被射出之後,若空氣阻力置而不論,則該物體並未受有任何水平力之作用,故其水平分速度在其射程中並不發生任何變化,即水平分加速度 a_x 等於零.命 v 表拋射體在時距 t 後之速度,則得

$$a_x=\frac{v_x-u_x}{t}=0,$$

或
$$v_x=u_x=u\cos\theta. \tag{1}$$

又於時距 t 內所行之水平距離等於

$$x=ut\cos\theta. \tag{2}$$

至在垂直方向，其作用於拋射體之力僅爲本身之重量，故其運動與自由落體相同. 於是

$$a_y=\frac{v_y-u_y}{t}=-g,$$

或
$$v_y=u_y-gt=u\sin\theta-gt. \tag{3}$$

又於時距 t 內所行之垂直距離 y 等於平均速度與時距之相乘積，卽

$$y=\frac{u\sin\theta+(u\sin\theta-gt)}{2}\cdot t$$

$$=u\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2. \tag{4}$$

消去 (3), (4) 兩式之 t, 則得

$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}. \tag{5}$$

此爲一種以垂直線爲主軸之拋物線方程式.

根據上列諸式，又可求拋射體之'飛射之時間','射程','達到最大高度之時間'及'最大高度'等問題. 玆分別述之於下：

(1) 飛射之時間. 因拋射體到達 X-X 軸時, y 等於零, 故飛射之時間 t_r 可由方程式(4)求之，卽

$$u\sin\theta\, t_r-\frac{1}{2}gt_r^2=0,$$

$$t_r=\frac{2u\sin\theta}{g}. \tag{6}$$

(2) 射程．在方程式(2)中，當 $t=t_r$ 時，其射程 r 等於 x 之值．故

$$r=u\cos\theta\, t_r=\frac{2u^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{u^2\sin 2\theta}{g}. \tag{7}$$

(3) 達到最大高度之時間．當拋射體達到最大高度時，$v_y=0$．故達到最大高度所需之時間 t_h，可由方程式(3)求之，即

$$u\sin\theta-gt_h=0,$$

$$t_h=\frac{u\sin\theta}{g}. \tag{8}$$

(4) 最大高度．當 $t=t_h$ 時，方程式(4)中之 y 等於最大高度，即

$$h=u\sin\theta\, t_h-\frac{1}{2}gt_h^2=\frac{u^2\sin^2\theta}{2g}. \tag{9}$$

例題86．鎗彈以每秒200呎之速度自鎗膛中放出，其放射方向與水平成 30° 之角．試求其(1)最大高度，(2)落至原水平之時間，(3)射程及(4)射出2秒後之速度．

解 (1) 垂直分速度 $=u\sin\theta=200\sin 30^\circ=100$ 呎/秒．

水平分速度 $=u\cos\theta=200\cos 30^\circ=173.2$ 呎/秒．

由方程式(9)，得最大高度

$$h=\frac{(u\sin\theta)^2}{2g}=\frac{100^2}{2\times 32.2}=155.3\text{ 呎}.$$

(2) 鎗彈向上放射，其每秒所失之垂直分速度為 32.2 呎/秒．故其垂直分速度在

$$t_1=\frac{100}{32.2}=3.106 \text{秒}$$

後將等於零.

鎗彈由最高點向下降落，回至原水平之時間，與其自出發點達到最高點之時間相同. 故自出發至降落原水平之時間等於

$$2\times 3.106=6.212 \text{秒}.$$

(3) 射程等於

$$x=173.2\times 6.212=1,075.9 \text{呎}.$$

(4) 在2秒後垂直分速度已減少

$$2\times 32.2 \text{呎/秒},$$

即 $$v_y=100-64.4=35.6 \text{呎/秒}.$$

至水平分速度並無變化. 故其合速度等於

$$v=\sqrt{35.6^2+173.2^2}=176.8 \text{呎/秒}.$$

其與水平之交角等於

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{35.6}{173.2}\right)=11°37'.$$

例題 87. 今自高 200 呎之塔頂，以每秒 80 呎之速度，向下拋擲石子，其俯角爲45°. 試求石子觸地之處距塔基若干呎及其所需之時間?

解 石子之水平分速度爲 $u\cos\theta=56.56$呎/秒，其開始向下之垂直分速度與水平分速度同. 又在 t 秒後之垂直分速度爲 $56.56+32.2t$. 故其平均垂直分速度等於

$$56.56+16.1t.$$

降落之距離等於

$$y=56.56t+16.1t^2.$$

但 $$y=200\text{ 呎},$$

$$\therefore\quad 56.56t+16.1t^2=200,$$

$$t=2.18\text{ 秒}.$$

在2.18秒時間內,石子所行之水平距離等於

$$56.56\times 2.18=123.3\text{ 呎}.$$

習題

337. 設取仰角 40° 之方向放射子彈,其初速度為每秒400呎.試求其最大高度及射程.

答. 1,027呎; 4,893呎.

338. 今有子彈以仰角 60° 之方向射出,其速度為2,000呎/秒.試求其射程.

答. 108,000呎.

148. 簡諧運動 簡諧運動為一種直線振動,在此運動中,加速度之變化係與該物體對某一定點之位移成比例,而方向相反.若命 a 表加速度,s 表對定點 O 之位移,又 K 為一常數,則在簡諧運動中,

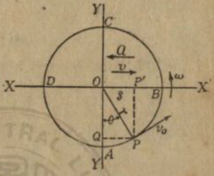
$$a=\frac{d^2s}{dt^2}=-Ks,$$

式中負號係表加速度與位移之方向適相反,即 s 與 a 二值之正負,互為更迭.

簡諧運動在一般機械中,實例甚多.試執彈簧之一端,在他端繫

一重量，此重量必上下反復振動，是即簡諧運動之一例. 當蒸汽機開動時，其十字頭沿一定直線往復運動，此又其一例.

關於簡諧運動之研究，最簡之法莫如藉助於輔助圓，如第387圖，P 爲某物體以等角速度 ω 取反時針向運動於半徑 r 之圓周上. 自圓心 O，作直角坐標軸 $X-X$ 及 $Y-Y$. 將 P 點之射影投射於 $X-X$ 軸上，得 P'. 於是當 P 點繞圓周轉動時，P' 點亦必沿 $X-X$ 軸往復運動，即(1) P 點由 A 至 B 時，



第387圖

P' 點由 O 向右移至 B，與 P 在 B 點相疊合. (2) P 點由 B 至 C 時，P' 點又由 B 返至 O. (3) P 點由 C 至 D 時，P' 點由 O 向左移至 D，與 P 在 D 點相疊合. (4) 最後，P 點由 D 至 A 時，P' 點又由 D 返至 O. 如此，當 P 點繞圓周轉動一週時，P' 點即沿 $X-X$ 線往復運動一次. 同時如將 P 點之射影投射於 $Y-Y$ 軸上，如 Q，則當 P 點繞圓周轉動時，Q 點在 $Y-Y$ 線上運動所得之結果亦與 P' 同. 此種 P' 或 Q 之運動，即稱爲簡諧運動，其中 P 點則稱爲輔助點，$ABCD$ 圓稱爲輔助圓，O 爲簡諧運動之中心. 凡 P 每繞輔助圓一週之時間，即 P' 在 $X-X$ 上或 Q 在 $Y-Y$ 上往復一次之時間，稱爲週期. P 於單位時間內繞輔助圓迴轉之次數，亦即 P' 在 $X-X$ 上或 Q 在 $Y-Y$ 上往復之次數，稱爲頻率. P' 或 Q 至中心 O 之距離 OP' 或 OQ 稱爲位移，通常係以 OX 或 OY 之方向爲正，OX' 或 OY' 之方向爲負. 輔助圓之半徑，

體在相等時間內成相等之角移,則其角速度稱爲等角速度.命 ω 表每秒弳之等角速度.由是,若 θ 表在 t 秒鐘內之角移,則此等角速度爲

$$\omega=\frac{\theta}{t}.$$

設物體在相等時間內所成之角移並不相等,則其角速度稱爲變角速度.關於此種速度求法,祇須求其在極短暫時間 Δt 內之平均角速度,即

$$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

當 Δt 之極限趨近於零時,其瞬時角速度將爲

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}.$$

角速度之單位通常用'每分若干轉'(或 r. p. m.),遇有此種單位時應即化爲'每秒若干弳',如

$$\text{每分 } 1 \text{ 轉}=\text{每秒 } \frac{1}{60} \text{ 轉}=\text{每秒 } \frac{2\pi}{60} \text{ 弳}.$$

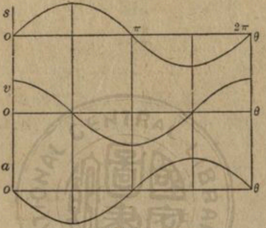
角速度亦猶如角移,惟自有其符號,恆以反時針向者爲正,順時針向者爲負.

因角速度兼含有大小及方向,爲一種有向量,可以矢量表之.故角速度可以合成,亦可以分解.

例題 84. 有一蒸汽機如第372圖,其曲柄 OA 之長爲 r,連桿 BA 之長爲 l.若曲柄正以等角速度 ω 轉動,試依 r, l, ω 及曲柄與水平之交角 θ 諸數求十字頭 B 之速度.

解 命 s 爲十字頭當曲柄自水平位置轉至 θ 角時之位移.由圖中所示,可見

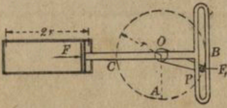
在簡諧運動中，所有 s, v 或 a 與 θ 或 t 之關係，均可用曲線表之。因 P 繞轉輔助圓一週應為 2π 徑，今取縱橫兩軸，如第 389 圖所示。於橫軸上取 2π 為一單位而等分之，在此諸分點上，各作與位移或速



第 389 圖

度相應之縱線。聯結此諸縱線之頂點，得一波狀曲線，是卽有名之正弦或餘弦曲線。在此等曲線中，自橫軸至曲線最高點或最低點之垂直距離，卽為 P' 或 Q 之最大變化，亦卽為振幅 r。

例題 88. 在第 390 圖所示之機械中，命 $r=1$ 尺，又曲柄銷之



第 390 圖

轉動數為每分 120 轉. 試求 ω, T, v_0 及活塞之最大加速度.

解　每分 120 轉＝每秒 2 轉＝4π 弳/秒.

$$\omega = 4\pi = 12.57 \text{ 弳/秒}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2} \text{秒}.$$

$$v_0 = r\omega = 12.57 \text{ 尺/秒}.$$

$$\text{最大之 } a = -\omega^2 r = -158 \text{ 尺/秒}^2.$$

例題 89. 有一成簡諧運動之物體, 當其距中心 4 吋時, 其速率為 90 吋/秒, 當其距中心 6 吋時, 其速率為 80 吋/秒. 試求此運動之週期及振幅, 並求該物體之最大速度及最大加速度.

解　由第 387 圖所示, 將見

$$v = r\omega\cos\theta = \omega \times OQ = \omega\sqrt{r^2 - s^2},$$

即 $$90 = \omega\sqrt{r^2 - 16}. \qquad (1)$$

又 $$80 = \omega\sqrt{r^2 - 36}. \qquad (2)$$

以(2)除(1), 得 $$\frac{9}{8} = \frac{\sqrt{r^2 - 16}}{\sqrt{r^2 - 36}},$$

$$81(r^2 - 36) = 64(r^2 - 16),$$

$$\therefore \quad r = 10.56 \text{ 吋}.$$

將 r 之值代入(2)式, 得

$$\omega = 9.22 \text{ 弳/秒}.$$

又 $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{9.22} = 0.68 \text{ 秒}.$$

當 $s = 0$ 時, 速度為最大, 故最大速度之值應為

$$v=\omega r=9.22\times10.56=97.5\text{ 吋/秒}.$$

當 θ 為最大時，加速度亦為最大，故最大加速度之值應為

$$a=\omega^2 r=(9.22)^2\times10.56=897\text{ 吋/秒}^2.$$

習　題

339. 在例題 88 中，若命曲柄與垂直線 OA 所作之角 POA 等於 $60°$，試再求活塞之速度及加速度.

答. 6.28 呎/秒; 136.83 呎/秒^2.

340. 有一成簡諧運動之物體，其最大速度為 10尺/秒，週期為 $\frac{1}{3}$ 秒. 試求此運動之振幅及最大加速度.

答. $r=0.53$ 尺; $a=188$ 尺/秒^2.

總　習　題

341. 米卡多式機車之主動輪直徑為 60 吋，曲柄之長為 15 吋. 若列車之速率為每時 30 哩，試求十字頭及活塞相對於汽缸座之最大速度及最大加速度，假定十字頭係成簡諧運動者.

答. $v=22$ 呎/秒; $a=387$ 呎/秒^2.

342. 有一物體依 $x=\dfrac{t^2}{4}$ 之定律運動於拋物線 $y^2=x$ 上. 若 x 及 y 均以尺計，又 t 以秒計，試求該物體在 2 秒末之速度.

答. $v=1.12$尺/秒, $\theta_x=26°34'$.

343. 在第318題中，試依 r,θ,ω 諸數求 B 之加速度. 若 $r=2$尺，$\omega=4$ 弳/秒，又 $\theta=60°$，試求 a 之值.

答. $a=-r\omega^2\cos\theta$.

344. 在第 319 題中，當 $\theta=30^\circ$ 時，試求滑片 A 之線加速度.

答. $a=1,037$ 呎/秒^2.

345. 今自 400 呎高之山頂放射砲彈，砲管之仰角為 30°，砲彈之速度為768呎/秒.試求砲彈落於與山脚同一水平之地面上時之射程.

答. $r=16,530$ 呎.

346. 一鎗靶置於遠 1,000 呎，高 300 呎之處.若彈以每秒 800 呎之速度向鎗靶射擊，試求鎗之仰角.

答. $18^\circ 08'$.

NATIONAL CENTRAL LIBRARY 國家圖書館 ROC

第十四章　移動,轉動及平面運動

149. 質點運動與剛體運動之區別　以上兩章所述關於運動之問題,均先假定此物體業已凝聚爲一極小之質點,故所有物體之運動實卽爲此質點之運動.此在一般問題中,因物體本身之體積與其運動範圍相較頗爲微小,當不致引起若何出入,惟在若干工程問題中,吾人已不能作此假定,視其爲一質點之運動,並須顧及該物體本身各部間之相互運動關係,是則必須認之爲一種剛體,然後對其各部之運動方能作精詳研究.本章所論卽就若干日常習見之剛體運動予以分析,以求其位移,速度及加速度等種種關係,玆分別爲移動,轉動及平面運動諸項討論於次.

150. 剛體之移動　凡在剛體運動中,若聯結任何兩質點之直線,其方向始終不生變化,易言之,卽此剛體中之所有每一直線均與其初方向始終平行者,此種運動稱爲剛體之移動.此剛體中所有各質點既同沿平行路線進行,則在任一時間內均應獲得相同之速度及加速度.倘某剛體係運行於一曲線路徑,例如機車主動輪上平行連桿之運行路徑,此種運動稱爲曲線移動;反之,若係運行於直線路徑者,則稱爲直線移動.無論在直線或曲線移動中,所有各質點於任一時距均得相同之位移,並於任何時間內均得相同之速度及加速度,故欲求剛體之位移,速度及加速度,皆可引用第十二章所述求任一

質點之位移，速度及加速度之方法解之．

151. 剛體之轉動　又凡剛體運動中，若在此剛體內（或剛體外）用一直線爲固定軸，此剛體中之所有各質點，除在直線上者，其餘均繞該軸成一圓周運動，此種運動稱爲剛體之轉動，或稱純轉動，以示有別於下述之平面運動，蓋在平面運動中，並無一直線可認爲固定者．此固定軸稱爲轉動軸，而剛體之質心所運行之平面即稱爲運動平面．轉動軸與運動平面之交點，則稱爲轉動中心．

惟剛體之轉動又與其移動有別，蓋剛體移動時其中任一質點之線位移，線速度及線加速度絕不足以說明剛體全部之運動，卽因所有各質點並未發生同一之線運動，而轉動時對於轉動軸之角移，角速度及角加速度，所有各質點均相同，故剛體之運動，可以其中任一質點之角運動說明之．因此，前章所述關於質點在圓曲線上所有角運動之方程式，均可適用於剛體之轉動，並可適用於剛體中之各質點．至求剛體中每一質點之線位移，線速度及線加速度，則須依第十二章中各法解之．

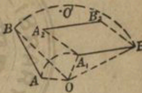
152. 平面運動　凡剛體運動，若所有各質點對某一固定平面之距離始終不變者，則此種運動稱爲剛體之平面運動．蒸汽機連桿之運動，卽爲平面運動之一實例；機車輪行駛於直線軌道上，爲其又一例．此剛體之質心所運行之平面稱爲運動平面．由此可見純轉動實卽平面運動之一特例，但移動則情形不一，有時屬於平面運動，有時則否．

關於剛體之平面運動，無論在任何時間，均可假定爲兩項運動之結合：一爲該物體對通過運動平面內任一點 O 之軸線之純轉動，

其中各質點之角速度 ω 及角加速度 α，均與物體本身當時所得者相同；一爲該物體之移動，其中各質點之線速度及線加速度，均與 O 點當時所得者相同．此處之 O 點稱爲基點．

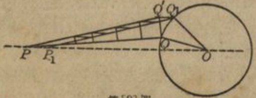
再簡言之，即凡剛體中之各質點，除基點外，均得兩項運動；其一爲繞基點之轉動；又一爲與基點相同之移動．根據此種分析，則剛體中任一點之位移，速度及加速度皆可分別求得．茲分舉一二圖例說明於下：

如第 391 圖，命 AB 爲在運動平面內連結剛體上任兩點 A 及 B 之直線，並命 A_2B_2 爲經過平面運動後 AB 之位置．取任一點 O 爲基點．則自 AB 至 A_2B_2 之位移，可假定係先自 AB 繞 O 點轉動，至與 A_2B_2 平行之 A_1B_1 位置，再自 A_1B_1 移動至 A_2B_2．



第 391 圖

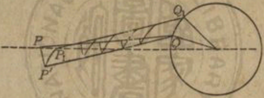
又如第 392 圖，示一蒸汽機之連桿．命 P 爲十字頭之位置，Q 爲曲柄銷．當曲柄由 OQ 位置轉動至 OQ_1 時，連桿即由 PQ 運動至 P_1Q_1．此種位置之變化，可假定係經兩次完成：最初以 P 爲軸心，轉動連桿 PQ，直至平行於其新位置(即 PQ')，然後移動連桿 PQ' 至其新位置 P_1Q_1．按照此一分析，則十字頭 P 乃



第 392 圖

循其實際路徑運行至 P_1，在連桿上之其餘各點，雖均獲得與 P 相同之位移，然並未依其實際路徑。例如 Q 點乃沿 $QQ'Q_1$ 之路徑，而非沿 QQ_1 之實際圓弧路徑。今設使此種位置之變化漸次減小，則 $QQ'Q_1$ 路徑亦將漸次趨近於 QQ_1 圓弧路徑。最後，當兩種運動同時發生時（指蒸汽機之實際運動而言），此連桿上之每一點均將受連續之聯合轉動及移動，而循其實際路徑進行。

根據上法，因 P 點係運行於直線路徑，故連桿得取直線之移動。倘取另一點 Q 為基點，則由 PQ 至 P_1Q_1 位置之變化，又可成為：(1) 將連桿 PQ 繞 Q 點轉動至 $P'Q$，如第 393 圖，及(2)將連桿 $P'Q$ 以曲



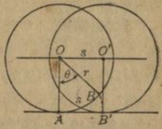
第 393 圖

線移動至其新位置 P_1Q_1。在此一曲線移動中，連桿上所有各點運行之路徑均與 Q 點相同。依此分析，十字頭 P 所行之路徑將為 $PP'P_1$，而非其實際路徑 PP_1。但若使位置之變化漸次減小，則 $PP'P_1$ 路徑亦將漸次趨近於 PP_1 實際路徑。最後，當兩種運動同時發生時，該物體上之各點均將依其實際路徑進行。同理，吾人倘任取連桿上之某一點為基點，所得結果仍然相同，故其他任何物體之平面運動皆可依此原則解釋之。

例題 90. 有半徑 r 之圓盤滾動於一平直軌道上，如第 394 圖。若 v_0 及 a_0 表盤心 O 之線速度及線加速度，又 ω 及 α 表圓盤之角速

度及角加速度,試證

$$v_0=r\omega,\ \text{及}\ a_0=r\alpha.$$



第394圖

解　當盤心自 O 移動至 O' 時,圓盤之相應角移爲半徑 OB 自原位置 OB 轉動至新位置 OB' 所行之角 θ. 命盤心之線位移 OO' 等於 s,於是由圖所示,可得

$$s=AB'=\text{圓弧}\ AB=r\theta.$$

所以

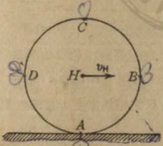
$$v_0=\frac{ds}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}=r\omega.$$

又

$$a_0=\frac{d^2s}{dt^2}=r\frac{d^2\theta}{dt^2}=r\alpha.$$

習　題

347. 第395圖示一直徑4呎之圓輪,向右滾動於一平直軌道上,假定並不發生任何滑溜. 若在某一時間,輪心之速度爲4呎/秒,其加速度爲6呎/秒²,試求 A, B 兩點之速度及加速度.



第395圖

答. $v_A=0$; $a_A=8$ 呎/秒².
$v_B=5.66$ 呎/秒;
$a_B=6.32$ 呎/秒².

153. 在平面運動中速度之分解　任一物體之絕對速度加另一物體對於第一物體之相對速度,等於此第二物體之絕對速度. 若以

公式表之,即為

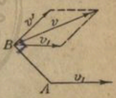
A之絕對速度$+B$對A之相對速度$=B$之絕對速度,

或 $$v_A+v_{\frac{B}{A}}=v_B,$$

式中v_A表A之絕對速度,$v_{\frac{B}{A}}$表B對A之相對速度,v_B表B之絕對速度.

此為第135節所述相對運動中最重要之原則.在平面運動中,欲求剛體上任一點之速度,均可依此原則先指定剛體上某一特別之點為其運動對象,再求該點對此指定點之相對速度及指定點之絕對速度,而後用圖解法求此兩矢量之和,即得該點之絕對速度.

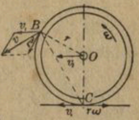
如第396圖,命B為剛體上之任一點,A為指定之對象點.又命v_1為A之絕對速度,v'為B對A之相對速度.因A與B均為剛體上之固定點,是以其距離始終為一固定值,亦即兩者之間實無相對速度可言.易言之,此兩者間之任一點對其他一點之相對速度,必正交於聯結此兩點之直線上(惟此種情形對於下節之相對加速度不能適用,蓋加速度乃由切線及法線兩分加速度所合成,而法線加速度即在此聯結兩點之直線上).故B對A僅有之相對速度為其切線速度$r\omega$,其中r等於AB之長,ω為其角速度.於是依上一原則,B之絕對速度v應為v_1與v'之矢量和.



第396圖

反之,剛體上任一點之絕對速度亦可分解為兩個分速度,其一等於並平行於該物體上任一對象點之絕對速度;又一則正交於此聯結兩點之直線.

茲舉一例說明其概要. 如第 397 圖, 設一車輪向左滾動於一水平面上. 當其自由滾動時, 命輪心 O 之速度爲 v_1, 其角速度爲 ω, 輪緣上任一點, 例如 B, 對輪心之相對速度爲 $r\omega = v_1$. 則 B 點之絕對速度, 應爲 B 對 O 之相對速度及 O 之絕對速度兩者之矢量和, 即 $v = v_1 + r\omega$.



第 397 圖

同理, 就當時輪緣之最低點 C 而言, 其絕對速度亦爲 C 對 O 之相對速度 $r\omega$ 及 O 之絕對速度 v_1 兩者之矢量和, 但因 $r\omega$ 與 v_1 兩者之大小相等而方向相反, 故 C 之絕對速度應等於零.

求解此類圓輪之滾動問題, 如取 C 爲其對象點, 似較簡單. 蓋 C 之絕對速度等於零, 故輪緣上任一點之絕對速度即等於該點對 C 點之相對速度, 或 $v_B = r_B\omega$, 此 r_B 爲 B, C 兩點之距離.

習 題

348. 在第 396 圖中, 設 v_1 等於 20 呎/秒, 其方向爲沿水平向右. r 等於 3 呎. ω 等於 5 弳/秒, 順時針向. 又 AB 與水平之交角爲 45°. 試求 B 之絕對速度.

答. 32.59 呎/秒, 與水平成 19°07′.

349. 有一直徑 1 呎之圓筒, 以每秒 10 呎之等速度向右滾動於一水平面上. 試取筒心爲對象點, 求圓筒前邊 B 點之絕對速度. 已知 B 點之位置與通過筒心之水平線成 45° 之角.

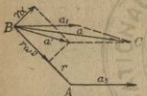
答. 18.45 呎/秒, 與水平成 22°30′.

154. 在平面運動中加速度之分解　前述相對運動中之一原則，對於速度固有其重要性，對於加速度亦莫不然．即凡任一物體之絕對加速度加另一物體對於第一物體之相對加速度，等於此第二物體之絕對加速度．若以公式表之，即為

A 之絕對加速度＋B 對 A 之相對加速度＝B 之絕對加速度，

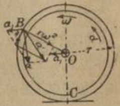
或
$$a_A + a_{\underset{A}{B}} = a_B,$$
式中 a_A 表 A 之絕對加速度，$a_{\underset{A}{B}}$ 表 B 對 A 之相對加速度，a_B 表 B 之絕對加速度．

如第 398 圖，命 B 為剛體上之任一點，A 為指定之對象點，其絕對加速度為 a_1．又命 $AB=r$，其角速度及角加速度分別為 ω 及 α．茲將 B 對 A 之相對加速度分解為切線及法線兩分加速度．此切線分加速度應為 $r\alpha$，法線分加速度應為 $r\omega^2$．再聯合此兩分加速度，即得其相對加速度 a'，如圖所示．最後將 a' 與 a_1 兩矢量相加，又得矢量 $BC=a$，是即 B 點之絕對加速度．



第 398 圖

反之，剛體上任一點之絕對加速度亦可分解為三個分加速度，其一等於並平行於該物體上任一對象點之絕對加速度；又一等於 $r\omega^2$，作用於聯結此兩點之直線上；又一等於 $r\alpha$，並正交於該直線．



第 399 圖

茲仍舉上例以說明之．如第 399 圖，設該車輪向左滾動於一水平面上．命輪心 O 之加速度為 a_1，角加速度為 α，角速度為 ω．當其自由

滾動時,輪緣上任一點,例如B,對輪心之切線分加速度應爲$r\alpha=a_1$.又其法線分加速度應爲$r\omega^2$.此兩矢量聯合爲一矢量a',卽B對O之相對加速度.a'與a_1兩矢量再聯合爲一矢量a,卽B點之絕對加速度.

習　題

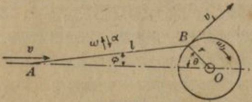
350. 在第398圖中,a_1等於50呎/秒^2,方向爲沿水平向右.AB長3呎,並與水平成45°之角.ω等於5弳/秒,順時針向.α等於20弳/秒^2,順時針向.試求B點之絕對加速度.

答. $a=145.83$呎/秒^2,在水平下4°10′.

351. 仍用第349題中之筒心爲對象點,試求B點之絕對加速度.

答. $a=200$呎/秒^2,向筒心.

155. 蒸汽機連桿運動之圖解法 若利用前述相對速度及相對加速度之原則,以解決蒸汽機連桿運動問題,尤爲簡捷適宜.如第400圖,命A爲連桿之十字頭,其速度爲v,加速度爲a,此兩數亦卽與活塞之速度及加速度相同.AB爲連桿,其長爲l;B爲曲柄銷,其切線速度爲v_1;BO爲曲柄,其長爲r;O爲飛輪之轉動中心.今假定飛輪

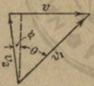


第400圖

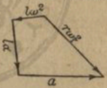
本身之重足使 B 點以等角速度 ω_1 轉動. 當 B 點逐漸轉至飛輪之頂點時, 連桿與 AO 線間之交角 ϕ 亦必隨之而漸增至最大值. 過此以後, 則 ϕ 之值又逐漸減小, 以至變爲一負值.

此連桿之運動實爲以變角速度 ω 繞 A 點之週期轉動, 及同時沿 AO 線之週期移動所合成. B 點之絕對速度爲 $v_1=r\omega_1$, 正交於 OB. 由相對速度原則, 此一速度等於 A 之絕對速度及 B 對 A 之相對速度兩者之矢量和. 命 B 對 A 之相對速度爲 v_2. 今因 A 與 B 係固定聯結, 故 v_2 之方向應正交於 AB. 又 A 點之絕對速度 v, 則係沿水平向.

根據上述各種情形, 可作一矢量圖, 如第 401 圖所示, 求得 v_2 與 v 之值. 因 B 對 A 之運動爲一種週期之轉動, 又其半徑等於 l, 故 $v_2=l\omega$, 或 $\omega=\dfrac{v_2}{l}$. 因此, A 之線速度及連桿對於 A 之角速度既可完全決定, 則此連桿上任一點之絕對速度均可依此原則求得.



第 401 圖



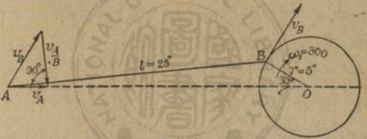
第 402 圖

至欲求其加速度, 可作如第 402 圖所示之矢量圖. 蓋 B 點係以等角速度 ω_1 轉動於半徑爲 r 之圓周上, 且其唯一加速度應爲 $r\omega_1^2$, 趨向於圓心 O, 故可先於圖上以適當比例尺繪出其圖形. 此一矢量卽爲 B 對 A 之相對加速度及 A 之絕對加速度兩者矢量之和. 其次, B 對 A 之相對加速度又可分解爲兩個分加速度, 其一爲法線分加速度 $l\omega^2$, 其方向及大小均爲已知; 又一爲切線分加速度 $l\alpha$, 僅知其方

向為正交於連桿．於是依次作 $l\omega^2$ 及 $l\alpha$ 兩矢量．最後，因 A 點之絕對加速度 a 係取水平向，即其方向為已知．作矢量 a，以完成此多邊形．由此圖中可以完全求得 a 與 α 之值，故連桿上任一點之絕對加速度均可依此法求得．

例題 91． 有一 50 馬力之蒸汽機，汽缸直徑為 10 吋，衝程亦為 10 吋．機器以 ω_1 = 每分 300 轉之等速率運動．連桿與曲柄之長度比為 5．試求當曲柄在 $30°$ 之角時連桿十字頭之加速度．

解　如第 403 圖，命 AB 之長為 25 吋，OB 或 r 為 5 吋．A 之絕對速度可由下式求之：



第 403 圖

$$v_A = v_{\frac{A}{B}} + v_B.$$

在此式中，共含有六個元素，三者屬於大小，三者屬於方向，其中必有四個為已知，其餘兩個方能應用上式求得．

茲先就 B 點言之，其速度之方向係正交於 OB，而大小等於

$$v_B = \omega_1 r = \left(\frac{300\times 2\pi}{60}\right)\times\frac{5}{12} = 13.1\text{呎/秒}.$$

其次，$v_{\frac{A}{B}}$ 之方向係正交於此聯結 A, B 兩點之直線上，其大小為未知．又 v_A 之方向為水平，其大小亦為未知．

於是，自 A 點以適當比例尺，沿適當方向，作矢量 v_B. 次由 v_B 之終端作一線正交於連桿，並交於通過 A 點之水平線上. 聯結 A 及此交點，是卽爲 v_A. 故 $v_{\frac{A}{B}}$ 及 v_A 之大小均可自圖中量得，計

$$v_{\frac{A}{B}}=11.4\text{呎/秒}, \quad \text{又} \ v_A=7.7\text{呎/秒}.$$

至於 A 之加速度可由下式求之：

$$a_A=a_{\frac{A}{B}}+a_B.$$

爲便利起見，可用切線及法線分加速度代替 $a_{\frac{A}{B}}$，卽

$$a_A=\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_t+\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_n+a_B.$$

在此式中，共含有八個元素，四者屬於大小，四者屬於方向，其中必有六個爲已知，其餘兩個方能應用上式求得.

玆先就 a_B 言之，其方向係自 B 向 O，而大小爲

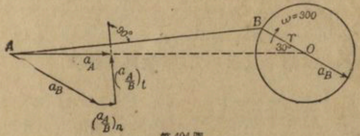
$$a_B=\omega_1^2 r=\left(\frac{300\times 2\pi}{60}\right)^2\times\frac{5}{12}=412\text{呎/秒}^2.$$

其次，a_A 之方向係平行於 AO（因 v_A 僅發生大小之變化），故爲已知. 又 $\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_n$ 之方向係自 A 向 B，其大小爲

$$\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_n=\frac{\left(v_{\frac{A}{B}}\right)^2}{AB}=\frac{(11.4)^2}{\frac{25}{12}}=62.4\text{呎/秒}^2.$$

$\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_t$ 之方向係正交於 AB，其大小爲未知. 由此，故未知元素僅有兩個，卽 a_A 與 $\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_t$ 之大小是.

在第 404 圖中，自 A 點起，作矢量 a_B 及 $\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_n$（兩者之大小及方向均爲已知）. 再自 $\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_n$ 矢量之終端作一線正交於 AB，以表 $\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_t$



第404圖

之方向,使與AO線(表a_A之方向)相交.於是$\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_t$及$a_A$之大小可由圖中量得,計

$$\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_t = 200\ \text{呎/秒}^2,\quad \text{又}\ a_A = 404\ \text{呎/秒}^2.$$

習　題

352. 有一蒸汽機,其曲柄長1呎,連桿長6呎.若$\omega_1 = 20$弳/秒,試求當(1) $\theta = 0°$;(2) $\theta = 30°$時連桿十字頭之速度及加速度.

答. (1) $v = 0$; $a = 467$ 呎/秒^2.

(2) $v = 11.46$ 呎/秒; $a = 380$ 呎/秒^2.

353. 在上題中,若(1) $\theta = 90°$; (2) $\theta = 180°$,試更求連桿十字頭之速度及加速度.

答. (1) $v = 20$ 呎/秒; $a = -68$ 呎/秒^2.

(2) $v = 0$; $a = 333\frac{1}{3}$ 呎/秒^2.

第十五章　力,質量與加速度

156. 力與運動之關係　按物體所以發生運動,皆有其原因在.大凡每一物體必受有力之作用,無論其爲內力或外力,倘所作用之力爲一單力,或雖有兩個以上之力而又不能達於平衡時,則運動立卽發生.

雖然,運動係發生於不平衡之力,惟物體本身之性質對於運動亦有關係.例如不同之力作用於同一物體,固將發生不同之影響,但同一不平衡之力作用於各種不同之物體,亦必將發生各種不同之運動.

一組之力作用於一物體而不能成平衡時,則其結果必得一單獨之合力或一力偶.此種情形已於靜力學中一再論及.故運動不外受有兩種力之作用:一爲單力;一爲力偶.若作用力爲一單力,其影響於運動者爲(1)力之大小,(2)作用線之位置(卽方向與施力點),及(3)指向.若爲一力偶,則其影響於運動者爲(1)力偶矩,(2)指向,及(3)力偶平面之方向.

157. 質量與運動之關係　當物體未受有外力之作用時,其靜止者繼續其靜止狀態,運動者繼續以同一速度向同一直線進行,是卽物體之慣性.反之,受有外力作用時,其本身必發生一種阻力以抵抗之,倘一旦抵抗不足,則靜止或運動狀態遂立卽發生變易,是乃外

力戰勝慣性之故．各種物體所含之慣性各不相同，故其抵抗外力之程度亦隨之而異．

物體慣性之度量，亦卽此物體對於在某一變率之加速度運動時之阻力，稱爲該物體之質量．質量之大小依下法求之：

命物體受某一單力 F_1 所作用而發生運動，其加速度等於 a_1．同樣，更有 F_2，F_3 等力輪流作用於該物體，生 a_2，a_3 等不同之加速度．於是由實驗，得

$$\frac{F_1}{a_1}=\frac{F_2}{a_2}=\frac{F_3}{a_3}=\cdots\cdots=\text{一常數，命之爲}\ C.$$

或，任何力 F 作用於物體而生加速度 a，得一般之公式爲

$$\frac{F}{a}=C. \tag{1}$$

今因在加速度等於 a 之情形中，F 力之大小應與物體之質量成正比例，故 $C=KM$，其中 K 爲一常數，M 爲物體之質量．於是(1)式變爲

$$\frac{F}{a}=KM. \tag{2}$$

至若物體受地心引力之作用，任其自由墜落，則 F 力應變爲物體本身之重量 W，加速度 a 應變爲 g［980 公分/秒^2（公制），29.4 尺/秒^2（市制），32.2 呎/秒^2（英制）］．因得

$$\frac{F}{a}=\frac{W}{g}=KM.$$

在力學中，吾人所採用 W，g 與 M 之單位係令常數 K 等於 1（詳見下節），故物體之質量等於

$$M=\frac{F}{a}, \quad 或 \quad M=\frac{W}{g}.$$

158. 力,質量與加速度之相互關係 牛頓之運動定律,乃後世研究運動問題者所奉爲圭臬,其中第二定律尤屬重要:

物體受力之作用時,於力之方向上生一定加速度,與力之大小成正比例,與物體質量成反比例.

由此推演得下一結論:

凡物體以加速度向同一直線進行時,其合力必作用於運動之直線上,並等於質量與加速度之相乘積.

如以公式表之,即

$$F=KMa.$$

在此式中,吾人特再採用一種單位,稱爲動力單位,使 K 之値等於 1. 所謂動力單位者,即一單位之力作用於一單位之質量,發生一單位之加速度. 此一單位中又有絕對單位及重力單位之分,已於第 15 節中論及,茲不再贅.

又在上式 $F=Ma$ 中,M 乃一數量,而 F 與 a 則均爲有向量. 此外,倘將 F 力分解爲 F_1 與 F_2 兩個分力,同時並將加速度 a 分解爲兩個相應之分加速度 a_1 與 a_2,分別與 F_1 及 F_2 平行,則得

$$F_1=Ma_1, \quad 又 \quad F_2=Ma_2.$$

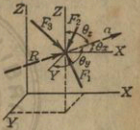
若此兩個分力係直角坐標軸分力 F_x 與 F_y,則

$$F_x=Ma_x, \quad 又 \quad F_y=Ma_y.$$

159. 運動方程式 關於運動問題之討論,不外研究當力作用於物體時所發生之運動狀態如何而已. 故在某一問題中,首須成立

一種運動方程式，使能表明其運動狀態，其中大致包含如下之三項，即(1)作用於物體上諸力之合力(一單力或一力偶)；(2)物體本身之動力性(質量，慣性矩等等)；及(3)所生運動之變化，即加速度(由距離，時間及速度求之)．因此，每一問題，倘已知其中之兩項，即可由此類運動方程式求其第三項．

有時爲便利測算，或將合力分解爲 x, y 及 z 三個分力，分別求其解答．如第 405 圖之一物體，其質量等於 M，爲一組之力 F_1, F_2, F_3，……所作用而生 a 之加速度．試求一運動方程式，以表明作用於該物體之力，該物體之質量及所生加速度之關係．



第 405 圖

命 R 表此諸力之合力，並命 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 爲 R 與 X-X, Y-Y, Z-Z 各軸之交角．則由牛頓第二定律，得 $R = Ma$．兩邊各乘以 $\cos\theta_x$，得

$$R\cos\theta_x = Ma\cos\theta_x,$$

或

$$R_x = Ma_x.$$

但 R_x 可由方程式 $R_x = \Sigma F_x$ 中之 ΣF_x 代之，因得

$$\Sigma F_x = Ma_x.$$

同理，可得 $\Sigma F_y = Ma_y$． 又 $\Sigma F_z = Ma_z$．

例題 92． 有一 100 斤之物體置於光滑水平面上，用一 10 斤之水平力推之．試求該物體在 5 秒末之速度及其所行之距離．

解

$$F = Ma = \frac{W}{g}a.$$

$$10 = \frac{100}{29.4}a, \quad a = 2.94\ \text{尺/秒}^2.$$

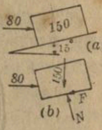
因所施之力爲一常數，故該物體應以等加速度進行．又因該物體係自靜止開始運動，故運動方程式爲

$$v=at, \quad 又 \quad s=\frac{1}{2}at^2.$$

$$v=2.94\times5=14.7\ 尺/秒.$$

$$s=\frac{1}{2}\times2.94\times25=36.75\ 尺.$$

例題 93．有一重 150 斤之物體置於一傾角 15° 之斜面上，如第 406 圖(a)所示．今用一 80 斤之水平力推之使向上運動，若摩擦係數 $f=0.1$，試求該物體之加速度．



第 406 圖

解 作自由體圖如圖(b)．由圖所示，諸力作用於物體者共有四：物體本身之重量 150 斤，水平力 80 斤，斜面之垂直反動力 N 及其摩擦阻力 F．

因該物體沿垂直於斜面之方向而成平衡，故其垂直反動力 N 可由下式求之：

$$N=150\cos 15^\circ+80\sin 15^\circ=165.6\ 斤.$$

$$F=fN=16.56\ 斤.$$

又平行於斜面之諸分力和爲

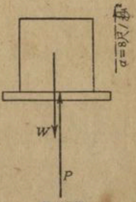
$$\Sigma F=80\cos 15^\circ-150\sin 15^\circ-16.56=21.84\ 斤.$$

但

$$\Sigma F=Ma=\frac{W}{g}a,$$

$$21.84=\frac{150}{29.4}a, \quad \therefore\ a=4.28\ 尺/秒^2.$$

例題 94. 有一重14.7斤之木箱，置於昇降機中. 若昇降機以 8 尺/秒² 之加速度向上昇起，試求此木箱對於機臺之壓力.



第407圖

解 作一自由體圖如第 407 圖所示. 今作用於木箱之力有二：一爲木箱之向下重量 W，一爲機臺對木箱之向上壓力 P. 在此兩力之作用下，木箱乃得以 8 尺/秒² 之加速度隨昇降機而上昇. 於是由方程式 $\Sigma F_y = Ma_y$，得

$$P-W=\frac{W}{g}a_y, \quad \text{或} \quad P-14.7=\frac{14.7}{29.4}\times 8,$$

$$\therefore \ P=18.7\text{斤}.$$

習　題

354. 設以一 8 斤之水平力作用於一 200 斤之物體上，試求 10 秒後之速度及所行之距離.

答. 11.76 尺/秒; 58.8尺.

355. 有一重 1,600 斤之昇降機，以等加速度向上昇起，於 2 秒內達到 16 尺/秒之速度. 試求昇降機懸索之張力.

答. 2,035 斤.

356. 有一 10 斤之物體置於一傾角 30° 之斜面上，使其自由滑下. 若斜面之摩擦係數 $f=0.4$，則在第三秒末該物體將滑下若干遠? 又欲使物體滑下 40 尺，需時若干秒?

答. 11.32 尺. 4.2 秒.

357. 有一重400斤之汽球,其上昇加速度爲2尺/秒^2,中途忽遇水平風壓襲來,以致汽球被吹向與垂直線成30°之方向進行.試求汽球之水平分加速度及水平風壓.

答. 1.15尺/秒^2; 15.7斤.

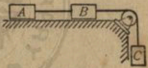
358. 一人體重150斤立於重2,000斤之昇降機內.若鋼繩之張力爲2,700斤,試求昇降機之上昇加速度及此人對於機臺之壓力.

答. 7.52尺/秒^2; 188斤.

359. 某人立於地上,其力足以舉起150斤之重,及再立於昇降機內下降時,則力足以舉200斤之重.試求昇降機之加速度.又若昇降機以同一加速度上昇時,此人應能舉重若干?

答. 7.35尺/秒^2. 120斤.

360. 在第408圖中,A,B及C各重10斤,20斤及30斤.聯結B與C之線繩係通過一無重量無摩擦之滑輪上.若A及B與平面間之摩擦係數等於0.2,試求A與B之加速度及其間線繩之張力.



第408圖

答. 11.73尺/秒^2; 6斤.

160. **有效力** 凡一物體實由無數極其微小之質點集合而成.倘將此種質點視作一單獨之自由體,則在此物體上,必受有一羣之力所作用,其中若干屬於外力,若干則屬於內力.此等力之合力,即稱爲該質點之有效力,亦即構成質點運動之主因,其大小等於$m\cdot a$,此處m爲該質點之質量,a爲其加速度.

上述理論,固在闡明一單獨之質點,然對於一羣質點,仍可成立.

故若一物體內所有諸質點均假定爲自由體時，此一羣質點因受有效力之作用而生成運動，其結果必與物體本身所生成之實際運動相同．此等有效力之合力，卽稱爲該物體之合有效力．

惟在一個剛體之內，所有各質點間之內力係成相等而相反之關係，其結果將互相抵消．故對於剛體全部而言，其內力之總和實等於零．於是剛體內所有各質點之合有效力必等於所有諸外力之合力．設命 R 表所有諸外力之合力，則

$$R=\int ma.$$

達蘭貝耳氏根據上述理論，成立一原則如下：

若將所有各質點之有效力方向反轉，並加入於所有諸外力中，使同作用於物體，則其結果不需變更任何外力，而自能使物體成爲平衡．

是卽達蘭貝耳原則，可適用於剛體及非剛體，惟對於求剛體運動之結果最有效用．

不過此種有效力實爲一假想之力，爲便於問題之易獲解決，乃有此種假設，此學者所須切記者．

161．質心運動 有效力之應用，主要目的在解決移動，轉動及平面運動等三大問題．惟此三大問題，在討論之先，對於質心之運動應先加以詳釋．

設有一羣質點，其質量分別命之爲 $m', m'', m''', \cdots\cdots$，等等，其坐標分別爲 (x', y', z')，(x'', y'', z'')，(x''', y''', z''')，等等．於是依靜力學中一羣物體之重心求法，此一羣質點之質心 $\bar{x}$，可由下式求之：

$$m'x'+m''x''+m'''x'''+\cdots\cdots=M\bar{x}. \tag{1}$$

但因此等質點受力之作用乃生成某項運動，其 x 坐標將隨時間而變化，故若將上式依時間 t 之變値而求其兩次微分，則得

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2}+m''\frac{d^2x''}{dt^2}+m'''\frac{d^2x'''}{dt^2}+\cdots\cdots=M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2},$$

或 $$m'a_x'+m''a_x''+m'''a_x'''+\cdots\cdots=M\bar{a}_x. \tag{2}$$

上式之左面各項，乃表所有作用於此等質點上各力之 x 分力之和，包括內力及外力．今命 $(\Sigma F_x)_{外}$ 表所有 X 軸上外分力之和，又 $(\Sigma F_x)_{內}$ 表所有 X 軸上內分力之和，則(2)式爲

$$(\Sigma F_x)_{外}+(\Sigma F_x)_{內}=M\bar{a}_x. \tag{3}$$

但前已言及，所有質點之內力和實等於零，故 $(\Sigma F_x)_{內}=0$．由是若命 F 表諸外力，則由(3)式，得

$$\Sigma F_x=M\bar{a}_x.$$

同理，可以求得 Y 及 Z 軸上之方程式爲

$$\Sigma F_y=M\bar{a}_y,\quad 又\quad \Sigma F_z=M\bar{a}_z.$$

在上述三式中，如將所有 X, Y 及 Z 軸上之合力 ΣF_x, ΣF_y 及 ΣF_z 依第七章所述方法求其總合力，則此三式可結合爲一單獨方程式

$$R=M\bar{a}, \tag{4}$$

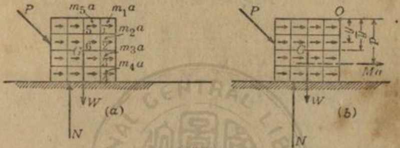
式中 M 爲此一羣質點之總質量，$\bar{a}$ 爲其質心之加速度．

此種方程式對於動力學中一般問題之解決爲助頗多，實關重要．玆特根據(4)式立一原則於下：

若有一組不平衡之外力同作用於一物體(無論其爲剛體與否)，則此一組之力之合力，其大小等於該物體之質量與其質心之加速度之相乘積，其方向與質心之加速度相同．

惟此種合力之作用線通常並不一定通過物體之質心，此應特加注意.

162. **剛體之移動** 第409圖(a)示一物體受有P，W，N諸外力之作用而成向右之移動. 茲假定該物體對於運動之平面係成對稱，



第409圖

又所有各力之作用線均在此運動平面內. 爲便利研究，並假定該物體係由多數極小立方形之質點所組成. 於是欲求此項運動方程式，得依下述步驟解之:

(1) 任一質點之加速度——因物體係成移動，故所有質點均得同一之加速度a.

(2) 任一質點之有效力——依第160節，如有一羣之力作用於任一質點，則其合力之大小等於ma，其方向與其加速度a相同. 此種合力亦即爲該質點之有效力，故在第409圖(a)中，各有效力m_1a，m_2a，……乃結成一組平行力.

(3) 有效力之合力——有效力之合力，或稱合有效力，應爲一個單力，其大小應等於

$$\Sigma ma = a\Sigma m = Ma,$$

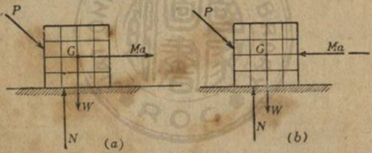
式中 M 爲物體之總質量，合力之方向亦與加速度 a 相同．又合力之作用線可用力矩原則求之如下：

如第409圖(b)，命 y 爲自任一點 O 至任一有效力 ma 之距離，又 p 爲自 O 至合有效力之距離，則得

$$Ma\cdot p=\Sigma(ma\cdot y)=a\Sigma my,$$

或
$$p=\frac{\Sigma my}{M}=\frac{M\bar{y}}{M}=\bar{y},$$

式中 $\bar{y}$ 爲自 O 至質心 G 之垂直距離．由此可見合有效力應通過物體之質心 G，如第410圖(a)所示，並非如第409圖(b)所示之位置，極爲顯然．



第410圖

綜上所論，倘一剛體成移動式之運動，則其合有效力當爲一大小等於 Ma，通過物體之質心，並與加速度 a 有同一方向之力．

(4) 有效力與外力之關係——依達蘭貝耳原則，所有外力之合力實與有效力之合力相同．是以所有外力之合力(設命爲 R)，亦爲一大小等於 Ma，通過物體之質心，並與加速度 a 有同一方向之力．此諸外力之合力既通過質心 G，故其對於質心 G 之力矩(亦即所有

外力對於質心之力矩和）等於零．如用方程式表之，則為 $\Sigma\overline{T}=0$，式中 $\overline{T}$ 表任一外力對於質心 G 之力矩．此所有外力之合力可由以下兩方程式定之：

$$\left.\begin{array}{l} R=Ma \\ \Sigma\overline{T}=0 \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

今若於運動平面內取 X-X 及 Y-Y 兩直角坐標軸，同時將上式 $R=Ma$ 中之每邊各分解為 x 及 y 兩分力，即 $R_x=Ma_x$ 及 $R_y=Ma_y$．但 R_x 又為所有各外力在 X 軸上分力之和，即 $R_x=\Sigma F_x$，因之，$\Sigma F_x=Ma_x$．同理，$\Sigma F_y=Ma_y$．故(1)式中之第一方程式又可易為兩個方程式，而(1)式為

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x=Ma_x \\ \Sigma F_y=Ma_y \\ \Sigma\overline{T}=0 \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

由此運動方程式，可以充分表明所有作用於物體之外力與物體之質量及其加速度之關係矣．

(5) 反有效力或慣性力——凡有效力之合力 Ma 實與所有諸外力之合力相同，故若有一大小等於 Ma，並與 Ma 同一作用線，而方向相反之力，加入於實在諸外力($P, W, N, \cdots\cdots$)中，如第410圖(b)所示，則此一組之力將使物體適成平衡．由是靜力學中所有諸平衡方程式在此皆可應用，

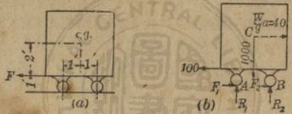
$$\Sigma F_x=0, \quad \Sigma F_y=0, \quad \Sigma M=0.$$

此一新加(虛設)之力即稱為反有效力，以示與有效力之方向相反，或稱為慣性力，意即該力加入後將使物體適成平衡，不再生成運

動.故在動力學中引進此種反有效力以後,則凡動力學中之問題,均可利用靜力學中問題之解法以求之.茲舉數例說明於下:

例題 95. 有一保險櫃,其重量及尺寸如第 411 圖 (a) 所示,用一 100 斤之力拖之使行於水平軌道上,實則一 60 斤之力已足使此櫃以等速度運行.試求在 A, B 兩點之垂直反動力.

解 第 411 圖 (b) 示一自由體圖.所有作用於該櫃上之外力,連同續加入之反有效力 $\frac{W}{g}a$,均作用於櫃之重心,已分別表明於圖中.



第 411 圖

此一自由體遂因反有效力之加入而成平衡.

因 60 斤之力既足使該櫃以等速度運行,故

$$F_1+F_2=60, \quad 又 \quad \Sigma F_x=\frac{W}{g}a,$$

或 $$100-60=\frac{W}{g}a=40.$$

由方程式 $\Sigma M_A=0$,得

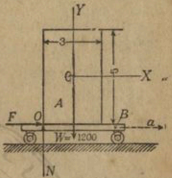
$$100\times1-\underline{40\times3}-1,000\times1+R_2\times2=0,$$

$$\therefore \quad R_2=510 \text{ 斤}.$$

又由方程式 $\Sigma F_y=0$,得

$$R_1+R_2=1,000, \quad \therefore \quad R_1=490 \text{ 斤}.$$

例題 96. 有一 3 尺×3 尺×5 尺之鐵櫃 A, 重 1,200 斤, 置於板車 B 上, 如第 412 圖. 今用力推之使得一加速度 a 向前駛行. 若鐵櫃與板車間之摩擦力適足阻止鐵櫃不致滑動, 試求板車之加速度可以加大至若干, 仍不致使鐵櫃傾倒.



第 412 圖

解 (第一法) 鐵櫃受本身重量 W 及板車反動力 R 之作用生成移動. 當鐵櫃適屆傾倒點時, 板車之反動力 R 恰作用於 O. 爲便於研究, 特將 R 分解爲正壓力 N 及摩擦力 F, 如圖中所示. 於是對於鐵櫃之運動方程式爲

$$\Sigma F_x = Ma_x, \tag{1}$$

$$\Sigma F_y = Ma_y, \tag{2}$$

$$\Sigma T = 0. \tag{3}$$

茲特取 X 軸與加速度 a 之方向相同, 則

$$a_x = a, \quad 又 \quad a_y = 0.$$

由(1)式, $$F = \frac{1,200}{(29.4)} a. \tag{4}$$

由(2)式, $$N - 1,200 = 0, \quad \therefore \quad N = 1,200 \text{ 斤}.$$

由(3)式, $$\frac{5}{2}F - \frac{3}{2}N = 0, \quad \therefore \quad F = 720 \text{ 斤}.$$

於是由(4)式, $$a = 17.64 \text{ 尺/秒}^2.$$

(第二法) 倘假定反有效力已加入於諸力中, 則鐵櫃適成平衡.

於是本題可用平衡方程式求之如下：

鐵櫃 A 之反有效力爲

$$Ma=\frac{1,200}{29.4}a,$$

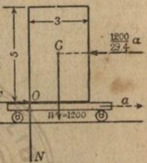
其方向與加速度 a 相反，作用線通過質心 G，如第 413 圖所示．由平衡方程式 $\Sigma F_x=0$，得

$$\Sigma F_x=F-\frac{1,200}{29.4}a=0.$$

又由 $\Sigma F_y=0$，得

$$\Sigma F_y=N-1,200=0.$$

又由 $\Sigma M_0=0$，得



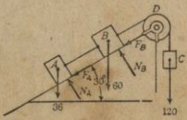
第 413 圖

$$\Sigma M_0=\frac{1,200}{29.4}a\times\frac{5}{2}-1,200\times\frac{3}{2}=0.$$

故由運動方程式與用平衡方程式二者之結果相同．

惟在此兩種方法中，所不同者卽在平衡方程式中，$\Sigma M_0=0$ 之力矩中心 O 可爲作用平面內之任一點，而在運動方程式中，$\Sigma \overline{T}=0$ 之力矩中心必用物體之質心，此不可不知也．

例題 97．有 A,B,C 三個物體，用線繩聯結如第 414 圖，使三者以同一加速度運動．滑輪 D 係假定爲無重量，無摩擦．物體 A 重 36 斤，B 重 60 斤，C 重 120 斤．A 及 B 對斜面之動摩擦



第 414 圖

係數為$\frac{1}{4}$及$\frac{1}{5}$.試求(1)物體之加速度,(2)A與B間線繩之張力T_1,及(3)B與C間線繩之張力T_2.

解　每一物體均成移動式之運動,故上述之運動方程式均可適用,即

$$\Sigma F_x = Ma_x, \tag{1}$$

$$\Sigma F_y = Ma_y, \tag{2}$$

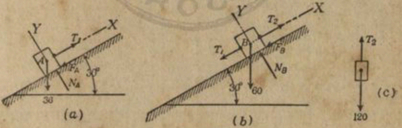
$$\Sigma \overline{T} = 0. \tag{3}$$

此外尚有含A及B對斜面之動摩擦係數關係之兩個方程式如下:

$$F_A = \frac{1}{4}N_A, \tag{4}$$

$$F_B = \frac{1}{5}N_B. \tag{5}$$

茲先取A為一自由體,如第415圖(a)所示.作用於A之力計共有$W(=36$斤$)$,T_1,N_A及F_A等四力.由運動方程式,得



第415圖

$$T_1 - 36\sin 30^\circ - F_A = \frac{36}{29.4}a_x, \tag{6}$$

$$N_A - 36\cos 30^\circ = 0. \tag{7}$$

解(4)及(7)，求得 F_A 之值，代入(6)式中，得

$$T_1-36\sin 30^\circ-\frac{1}{4}\times 36\cos 30^\circ=\frac{36}{29.4}a_x. \qquad (I)$$

同理，取 B 為一自由體，如圖(b). 由運動方程式，得

$$T_2-T_1-F_B-60\sin 30^\circ=\frac{60}{29.4}a_x, \qquad (8)$$

$$N_B-60\cos 30^\circ=0. \qquad (9)$$

解(5)及(9)，求得 F_B 之值，代入(8)式中，得

$$T_2-T_1-\frac{1}{5}\times 60\cos 30^\circ-60\sin 30^\circ=\frac{60}{29.4}a_x. \qquad (II)$$

最後，更取 C 為一自由體，如圖(c). 由運動方程式，得

$$120-T_2=\frac{120}{29.4}a_x. \qquad (III)$$

在(I)，(II)，(III)三式中，共含有三個未知元素 T_1，T_2 及 a_x，或 a（因在本題中特取 X 軸與總加速度 a 之方向相同）. 解之，得

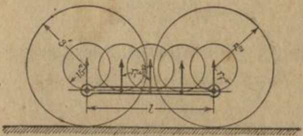
$$T_1=34.76\text{ 斤},\ T_2=90.1\text{ 斤},\ a=a_x=7.35\text{ 尺/秒}^2.$$

例題98. 第416圖示一機車之兩主動輪，其平行連桿重400磅. 曲柄長度 r_1 為15吋. 主動輪半徑 r_2 為3呎. 若機車之速率為每時50哩，試求當連桿在最低位置時，其兩銷之反動力各為若干?

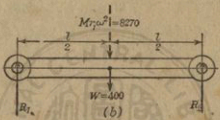
解 連桿之每一質點，無論在任何時間，恆得相同之加速度. 當連桿在其最低位置時，其每一質點之加速度，對於機座而言，方向係垂直向上，大小等於 $\omega^2 r_1$. 至於角速度 ω，則為

$$\omega=\frac{v}{r_2}=\frac{5,280\times 50}{60\times 60}\times\frac{1}{3}=24.44\text{ 弳/秒}.$$

連桿之合有效力將通過質心，其大小等於



(a)



(b)

第416圖

$$Ma=M\omega^2 r_1=\frac{400}{32.2}\times(24.44)^2\times\frac{15}{12}=9,270\text{ 磅.}$$

倘將此合有效力之方向反轉，並假定與其他外力同作用於連桿，如第416圖(b)所示，則此等力必適成平衡.

又由自由體圖，可見此等力乃形成一組平行之力. 依靜力學中一組同平面平行力之平衡方程式

$$\Sigma F=0 \qquad (1) \qquad\qquad \Sigma M=0 \qquad (2)$$

用(1)式，得 $R_1+R_2-9,270-400=0;$

用(2)式，得 $R_1\times l-(9,270+400)\times\frac{l}{2}=0.$

解之，得

$$R_1=R_2=4,835\text{ 磅.}$$

國立中央圖書館藏書

習題

361．在例題 95 中，設將 100 斤之拖力移去，並使摩擦力 F_1 及 F_2 仍維持原狀，如此則保險櫃漸成靜止．試求靜止時之 R_1 及 R_2．

答．$R_1=590$ 斤；$R_2=410$ 斤．

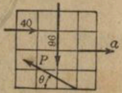
362．有一卡車重 4,000 斤，前後兩輪軸相距 10 尺．車之重心高出地面 3 尺，並適在兩輪軸之中間．當卡車正以每秒 40 尺之速率行駛時，忽踏動剎車，使於 4 秒鐘內完全停止．試求前後兩輪上之正壓力．

答．$R_1=2,408$ 斤；$R_2=1,592$ 斤．

√ 363．在例題 96 中，若板車之加速度為 10 尺/秒²，試求其正壓力 N 之作用線位置．

答．距左邊 0.65 尺．

364．第 417 圖示一均質立方形體，重 96 斤，受圖中所示諸力之作用而成向右之移動．若諸力均在同一運動平面內，試求 P，θ 及 a 之值．



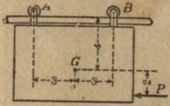
第 417 圖

答．$\theta=73°45'$；$P=100$ 斤；$a=3.67$ 尺/秒²．

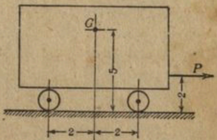
365．第 418 圖所示活動鐵門重 160 斤，若用一 60 斤之 P 力推之使向左移動，試求此鐵門之加速度及 A，B 兩點之反動力．假定滑輪之摩擦力不計．

答．$a=11.02$ 尺/秒²，$R_A=60$ 斤，$R_B=100$ 斤．

366．有一車輛重 600 斤，其全部重心距軌頂 5 尺，如第 419 圖



第418圖

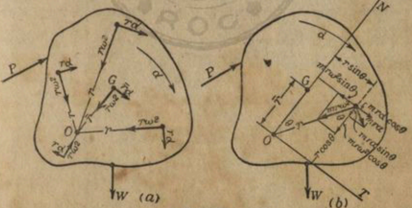


第419圖

所示．今若用力 P 推之使向右運動，試求欲使右輪之反動力等於零，則 P 力之大小應等於若干？又該車輛之加速度等於若干？假定車輪與鋼軌之摩擦力甚小，無須計入．

答．$P=400$ 斤；$a=19.6$ 尺/秒^2.

163．剛體之轉動　第 420 圖 (a) 示一物體受有一組不平衡之力 P，W，……所作用而成環繞定軸 O 之轉動．假定該物體對於運動之平面係成對稱，又所有各力之作用線均在運動之平面內．於是，當



第420圖

該物體繞軸轉動時，所有各質點在任何時間均得同一之角速度 ω 及角加速度 α；至於其線速度 v 及線加速度 a，則與各質點至轉動軸之距離 r 成比例．茲將求此項運動方程式之步驟詳述於下：

(1) 任一質點之加速度——每一質點均運動於半徑 r 之圓曲線上，故其線加速度均可分解爲切線及法線兩分加速度，其大小將分別等於 $r\alpha$ 及 $r\omega^2$，如第 420 圖(a)所示．

(2) 任一質點之有效力——任一質點之有效力均可分解爲切線及法線兩分力，其大小將分別等於 $mr\alpha$ 及 $mr\omega^2$．但因該物體係假定對於運動之平面成爲對稱，故所有此種有效分力均可假定爲作用於同一之運動平面內．

(3) 合有效力——各質點之有效分力倘已求得，則對於全部物體之合有效力，其求法爲：

由第 57 節，凡一組同平面非同點力之合力，若非爲一單力卽係一力偶．故無論在何種情形中，所有各有效分力均可再度分解爲平行於兩個直角坐標軸之分力，而後再分別求得此兩組平行分力之總和，並求得其對於運動平面內任一點之力矩和．如第 420 圖(b)，通過轉動中心 O 作 ON，OT 兩直角坐標軸，同時命 ON 軸通過物體之質心 G．命 θ 爲任一質點之半徑 r 與 ON 軸之交角．於是

所有 ON 軸上有效分力之代數和

$$
\begin{aligned}
&=\Sigma(-mr\omega^2\cos\theta-mr\alpha\sin\theta)\\
&=-\omega^2\Sigma mr\cos\theta-\alpha\Sigma mr\sin\theta\\
&=-M\bar{r}\omega^2-0.
\end{aligned}
$$

在上式中 $\Sigma mr\cos\theta$ 表該物體對於 OT 軸之力矩，故可以 $M\bar{r}$ 代之．

又 $\Sigma mr\sin\theta$ 表該物體對於 ON 軸之力矩，但因 ON 軸通過物體之質心，故應等於零．至於式中之負號，所以表 $M\bar{r}\omega^2$ 之方向係自質心 G 向軸心 O 作用．同理，

所有 OT 軸上有效分力之代數和

$$=\Sigma(mr\alpha\cos\theta-mr\omega^2\sin\theta)$$

$$=\alpha\Sigma mr\cos\theta-\omega^2\Sigma mr\sin\theta$$

$$=M\bar{r}\alpha-0.$$

又任一質點之有效力對於轉動中心 O 之力矩，等於其切線分力對於此中心 O 之力矩，即 $mr\alpha\cdot r$，蓋因其法線分力 $mr\omega^2$ 同通過 O，故應等於零．於是

所有有效力對於轉動軸之力矩代數和

$$=\Sigma(mr\alpha\cdot r)=\alpha\Sigma mr^2=I_0\alpha,$$

式中 I_0 表物體對於轉動軸之慣性矩．

一組之力，無論在任何方向，其分力之代數和即等於其合力在同一方向之分力，又其對於任一點之力矩代數和，即等於其合力對於此同點之力矩．故一個剛體繞一定軸轉動時，若該軸並非通過剛體之質心（因如是，則 $\bar{r}$ 不為零），則其合有效力為一單力，其

平行於 ON 軸之分力 $=M\bar{r}\omega^2$；

平行於 OT 軸之分力 $=M\bar{r}\alpha$；

對於轉動中心之力矩 $=I_0\alpha$.

若該定軸適通過剛體之質心（因如是，則 $\bar{r}=0$），則其合有效力為一力偶，其力矩等於 $I_0\alpha$，或 $\bar{I}\alpha$，蓋當 O 與質心相疊合時 $I_0=\bar{I}$ 之故．

(4) 有效力與外力之關係——依達蘭貝耳原則，所有外力之合

力恆等於諸有效力之合力.故當物體繞軸轉動時,若該軸並非通過質心,則所有外力之合力爲一單力(命爲 R),其在 ON 及 OT 兩坐標軸上之分力,及其對於中心 O 之力矩,應與上述諸有效力之合力所得結果相同,即 $R_n=-M\bar{r}\omega^2$, $R_t=M\bar{r}\alpha$, 及 R 對於 O 之力矩 $=I_0\alpha$. 惟所有外力之合力亦可用外力之代數和表之,即 $R_n=\Sigma F_n$, $R_t=\Sigma F_t$, 及合力對於 O 之力矩 $=\Sigma T_0$.

故一個剛體繞一定軸轉動時,設該軸並不通過物體之質心,則此剛體之運動方程式爲

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_n&=-M\bar{r}\omega^2\\ \Sigma F_t&=M\bar{r}\alpha\\ \Sigma T_0&=I_0\alpha\end{aligned}\right\},\qquad(1)$$

式中 $\bar{r}^2\omega$ 及 $\bar{r}\alpha$ 各爲該物體質心之法線及切線加速度,故前二式又可書爲 $\Sigma F_n=M\bar{a}_n$, $\Sigma F_t=M\bar{a}_t$.

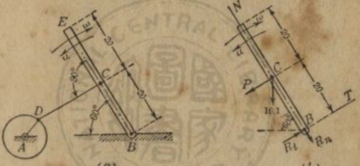
又設此定軸係通過物體之質心,即 O 與 G 相疊合,則因 $\bar{r}$ 等於零,(1)式中之 ΣF_n 及 ΣF_t 亦同等於零,而 ON 及 OT 將成爲一對方向無定之直角坐標軸. 在此種情形下,此運動平面內之任何兩個直角坐標軸均可採用. 茲任取其中一對坐標軸命之爲 $X-X$ 及 $Y-Y$,於是上式變爲

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x&=0\\ \Sigma F_y&=0\\ \Sigma\bar{T}&=\bar{I}\alpha\end{aligned}\right\},\qquad(2)$$

式中 $\Sigma\bar{T}$ 爲所有外力對於轉動軸之力矩代數和, $\bar{I}$ 爲物體對於轉動軸之慣性矩.

由(2)式可見當物體繞軸轉動時，若該軸通過物體之質心，則所有外力之合力爲一力偶，其力矩等於 $\bar{I}\alpha$.

例題 99. 在第421圖中，AD 爲一曲柄，DC 爲一連桿，BCE 爲一圓棍，其中 B,C,D 各點均用光銷聯結之. 圓棍之上下粗細一律，重 16.1 磅. 圓棍因曲柄之轉動乃成左右之擺動，當在如圖示之位置時，其角速度 ω 爲每分60轉，角加速度爲40弳/秒². 試求連桿DC在C點所生之動力 P 及光銷 B 對圓棍 BE 所生之反動力 R.



第421圖

解 因圓棍係繞 B 點轉動，其運動方程式爲

$$\Sigma F_n = -M\bar{r}\omega^2, \tag{1}$$

$$\Sigma F_t = M\bar{r}\alpha, \tag{2}$$

$$\Sigma T_B = I_B\alpha. \tag{3}$$

試取圓棍爲一自由體，如圖(b). 於是由(1)式，得

$$-R_n - 16.1\cos 30^\circ = -\frac{16.1}{32.2}\times\frac{20}{12}\times\left(\frac{60\times 2\pi}{60}\right)^2. \tag{4}$$

由(2)式，得

$$-P+R_t-16.1\sin 30^\circ=-\frac{16.1}{32.2}\times\frac{20}{12}\times 40. \quad (5)$$

由(3)式,得

$$(16.1\cos 60^\circ+P)\frac{20}{12}=I_B\alpha=\frac{1}{3}\times\frac{16.1}{32.2}\left(\frac{40}{12}\right)^2\times 40. \quad (6)$$

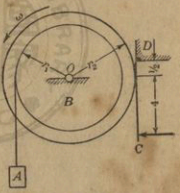
解(4)式,得　$R_n=18.9$ 磅.

解(6)式,得　$P=36.4$ 磅.

將P之值代入(5)式,解R_t,得$R_t=11.1$磅.

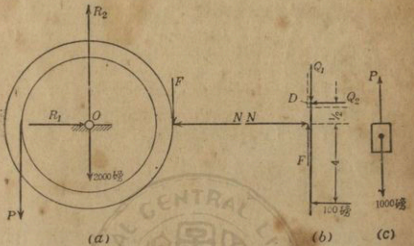
故　$R=\sqrt{18.9^2+11.1^2}=21.9$ 磅.

例題 100. 在第422圖中,B爲一鼓輪,輪緣繫一繩索,下懸物體A. CD爲一制動器,用以節制物體A之下降速度者. 鼓輪之半徑r_1爲6呎,制動輪之半徑r_2爲7呎. 轉動體(鼓輪及制動輪)對於定軸O之環動半徑k_0爲4呎. 轉動體重2,000磅. 物體A重1,000磅. 制動器摩擦係數爲$\frac{1}{4}$. 若對於輪軸之摩擦不計,並假定作用於C點之力爲100磅,試求物體A之加速度a,繩索之張力P,輪軸之水平及垂直反動力R_1及R_2. 又設此繩索既極柔軟且無重量.



第422圖

解　本題中應研究者共有三部分,即(1)在平衡中之制動器CD. (2)成轉動之鼓輪及制動輪,(3)成移動之物體A. 今作第423圖,示



第423圖

其每一部分之自由體.

(1) 制動器 CD 係為一組同平面非同點力所作用而成平衡，其平衡方程式為

$$\Sigma F_x=0 \quad (1) \quad \Sigma F_y=0 \quad (2) \quad \Sigma M_D=0 \quad (3)$$

其中僅(3)式與本題有關，其他二式中之諸力均無關重要.

(2) 對於鼓輪及制動輪之運動方程式為

$$\Sigma F_x=0 \quad (4) \quad \Sigma F_y=0 \quad (5) \quad \Sigma \overline{T}=\overline{I}\alpha \quad (6)$$

此外尚有一關於摩擦係數之方程式，即

$$F=\mu N. \tag{7}$$

(3) 對於物體 A 僅有一個運動方程式可以利用，即

$$\Sigma F_y=Ma_y. \tag{8}$$

再者，因物體 A 之總加速度係在 Y 軸之方向，又因其大小與鼓輪緣

上任一點之切線加速度 a_t 相同，故

$$a_y=a=a_t=r_1\alpha. \tag{9}$$

於是由(3)式，得

$$100\times4.5-0.5N=0,\quad \therefore\quad N=900\text{ 磅}.$$

由(7)式，得

$$F=\tfrac{1}{4}\times900=225\text{ 磅}.$$

由(4)式，得

$$R_1-N=0,\quad \therefore\quad R_1=N=900\text{ 磅}.$$

由(6)式，得

$$6P-225\times7=\frac{2,000}{32.2}\times4^2\times\alpha. \tag{10}$$

由(8)式，得

$$1,000-P=\frac{1,000}{32.2}\times a_y. \tag{11}$$

將(9)式中之 $\frac{a}{r_1}$ 代(10)式中之 α，並將(9)式中之 a 代(11)式中之 a_y，得

$$6P-225\times7=\frac{2,000}{32.2}\times16\times\frac{a}{6},$$

及
$$1,000-P=\frac{1,000}{32.2}a.$$

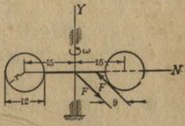
解上兩式，得

$$a=12.54\text{ 呎/秒}^2,\quad P=609\text{ 磅}.$$

又由(2)式，得

$$R_2-P-225-2,000=0,\qquad \therefore\quad R_2=2,834\text{ 磅}.$$

例題 101. 兩個直徑12吋之圓球，各重64.4磅. 用一極輕細之硬棍聯結之，並於棍之中央通過一垂直軸，如第424圖所示. 今於距轉動軸9吋之點，用力F推動硬棍，使兩球轉動於水平面內，其角速度於4秒內自靜止達到每分30轉，試求F力之大小.



第424圖

解　因圓球係繞通過質心之軸而轉動，故其運動方程式應爲

$$\Sigma F_x=0 \quad (1) \qquad \Sigma F_y=0 \quad (2) \qquad \Sigma \bar{T}=\bar{I}\alpha \quad (3)$$

又當F力作用於硬棍上時，轉動軸亦將生一相反而相等之反動力F，兩者結成一力偶. 設命此種力偶之力矩爲C，則由(3)式，得

$$\Sigma \bar{T}=C=\bar{I}\alpha=2\left(\frac{2}{5}Mr^2+M\bar{a}^2\right)\alpha$$

$$=2\left[\frac{2}{5}\times\frac{64.4}{32.2}\times\left(\frac{6}{12}\right)^2+\frac{64.4}{32.2}\times\left(\frac{15}{12}\right)^2\right]\alpha$$

$$=6.65\alpha.$$

但　$$\alpha=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\frac{30\times 2\pi}{60\times 4}=0.785\text{ 弳/秒}^2.$$

故　$$C=6.65\times 0.785=5.23\text{ 呎磅}.$$

但　$$C=F\times\frac{9}{12},\qquad \therefore\quad F=5.23\times\frac{12}{9}=6.97\text{ 磅}.$$

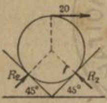
習題

367. 有一直徑 2 尺之球，重 500 斤，正以每分 300 轉之角速度繞轉於通過球心之軸．今若於球面施以切線力，使球於 5 秒內停止轉動，轉動軸之摩擦力不計，試求此切線力之大小．

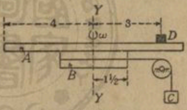
答．42.7 斤．

368. 一均質圓柱重 58.8 斤，半徑 2 尺，置於兩相交之光面間，如第 425 圖所示．倘以 20 斤之力作用於垂直此圓柱軸線之方向，試求此圓柱之角加速度及光面對於圓柱之反動力 R_1 與 R_2．

答．$\alpha=10$ 弳/秒²；$R_1=28.1$ 斤，$R_2=56.4$ 斤．



第 425 圖



第 426 圖

369. 第 426 圖之 A 為一圓盤，上載重量 D．盤下聯一鼓輪 B，上繞一柔索．柔索通過一無重量無摩擦之滑輪，下懸重量 C．A, B, C 及 D 各重 128.8 磅，32.2 磅，16.1 磅及 8.05 磅．圓盤及鼓輪受重量 C 之向下作用乃繞 Y-Y 軸轉動．試求自靜止開始 4 秒後，(a) 圓盤之角加速度；(b) D 之切線加速度；及 (c) D 之法線加速度．

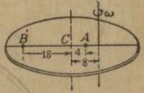
答．(a) 0.362 弳/秒²；(b) 1.99 呎/秒²；(c) 21.1 呎/秒²．

370. 有一粗細一律之圓棍長 4 呎，重 10 磅，於頂端通過一水平軸，使圓棍繞軸成形若單擺之擺動．設當圓棍擺至與其最低垂直

位置成 45° 之角時,其底端之速度為 4 呎/秒,試求在此位置時圓棍頂端之水平及垂直分反動力.

答. $R_x=4.19$ 磅; $R_y=6.69$ 磅.

371. 第 427 圖示一圓盤,重 24 磅,直徑 4 呎.盤上固結兩個重量於 A,B 兩點,各重 12 磅及 4 磅.今於與盤心 C 相距 8 吋之處通過一垂直軸,使圓盤以每分 90 轉之角速度繞軸轉動,試求該軸對於圓盤所生之水平反動力.又若於 4 秒內將角速度平均增至每分120轉,試求施於圓盤之轉動力矩應為若干?



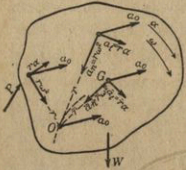
第 427 圖

答. $R=79.0$ 磅. $T=1.92$ 呎磅.

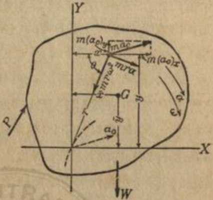
164. 平面運動　第428圖示一物體受一組不平衡之力 $P, W, \cdots\cdots$ 所作用而成平面運動.茲假定該物體對於運動之平面係成對稱,又所有各力之作用線均在此運動之平面內,並命該物體在任何瞬時之角速度為 ω,及角加速度為 α.今因該物體乃一剛體,故所有各質點對於垂直於此運動平面之任一軸應得同一角速度 ω,及同一角加速度 α.至於各質點之線速度及線加速度則當視各個在該物體內之位置而異.

關於此類運動方程式之求法,茲分項詳述於下:

(2) 任一質點之加速度——一個剛體之平面運動,無論在任何瞬時,均可假定為兩種運動之結合,其一為該物體對通過運動平面內任一點 O 之軸線之純轉動,此中各質點之角速度 ω 及角加速度 α 均與物體本身當時所得者相同;又一為該物體之移動,此中各質點



第428圖



第429圖

之線速度及線加速度均與 O 點當時所得者相同，凡此已見前述．故在剛體之平面運動中，任一質點之運動皆可分解為兩個分運動：(1) 繞 O 點之轉動；(2)與 O 點相同之移動．於是任一質點（假定其與 O 點之距離為 r），由於繞 O 點轉動之加速度，可以分解為兩個分加速度：一為法線分加速度 $a_n=r\omega^2$；一為切線分加速度 $a_t=r\alpha$．又由於移動之加速度為 a_0，此與 O 之加速度相同．第428圖即示在某一剛體運動中若干質點之分加速度．

(2) 任一質點之有效力 —— 任一質點之分有效力皆可依其分加速度分別計算之．例如在第429圖中，試取任一質點，命其質量為 m，則其分有效力可分為在 a_t 方向之 $ma_t=mr\alpha$；在 a_n 方向之 $ma_n=mr\omega^2$；及在 a_0 方向之 ma_0．為便利起見，ma_0 又可分解為 x 及 y 兩分力 $(ma_0)_x$ 及 $(ma_0)_y$，如圖所示．因剛體係假定與運動平面成對稱，故此一組之分有效力亦可假定係在同一平面內．

(3) 有效力之合力——既已求得各質點之分有效力，則對於全

部物體之合有效力卽可依下法求之．根據第 57 節，凡一組同平面非同點力之合力，若非爲一單力卽係一力偶．故無論在何種情形中，所有各分有效力均可再分解爲兩個平行於一對直角坐標軸之分力，而後再分別求此兩組平行力之總和，並求其對於運動平面內任一點之力矩和．例如在第 429 圖中，命此一對直角坐標軸卽爲 X 及 Y 兩軸，其中心爲 O．於是

所有 X 軸上分有效力之代數和

$$=\Sigma m(a_0)_x+\Sigma mr\alpha\sin\theta-\Sigma m\omega^2r\cos\theta$$

$$=(a_0)_x\Sigma m+\alpha\Sigma my-\omega^2\Sigma mx$$

$$=M(a_0)_x+M\bar{y}\alpha-M\bar{x}\omega^2.$$

所有 Y 軸上分有效力之代數和

$$=\Sigma m(a_0)_y-\Sigma mr\alpha\cos\theta-\Sigma m\omega^2r\sin\theta$$

$$=(a_0)_y\Sigma m-\alpha\Sigma mx-\omega^2\Sigma my$$

$$=M(a_0)_y-M\bar{x}\alpha-M\bar{y}\omega^2.$$

所有分有效力對於 O 點之力矩代數和

$$=\Sigma mr\alpha\cdot r+\Sigma m(a_0)_xy-\Sigma m(a_0)_yx$$

$$=\alpha\Sigma mr^2+(a_0)_x\Sigma my-(a_0)_y\Sigma mx$$

$$=I_0\alpha+M\bar{y}(a_0)_x-M\bar{x}(a_0)_y.$$

但所有 X 軸上分有效力之代數和等於其合有效力在 X 軸上之分力；同理，對於 Y 軸上之分力亦然．再者，所有分有效力對於 O 點之力矩代數和，亦卽等於其合有效力對於 O 點之力矩．綜合上述各情形，因得

合有效力在 X 軸上之分力

$$=M(a_0)_x+M\bar{y}\alpha-M\bar{x}\omega^2.$$

合有效力在 Y 軸上之分力

$$=M(a_0)_y-M\bar{x}\alpha-M\bar{y}\omega^2.$$

合有效力對於 O 點之力矩

$$=I_0\alpha+M\bar{y}(a_0)_x-M\bar{x}(a_0)_y.$$

以上各式均表合有效力恆爲一單力，惟有在轉動軸通過物體之質心時，此種運動乃成爲純轉動，而合有效力始爲一力偶.

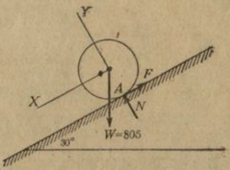
(4) 有效力與外力之關係——依達蘭貝耳原則，所有外力之合力恆與有效力之合力相同，故所有外力之合力亦應爲一單力（命爲 R），其在 X 及 Y 軸上之分力，及其對於 O 之力矩，均與上述有效力之合力所得結果相同. 但合力 R 在 X 及 Y 軸上之分力，及其對於 O 之力矩，亦可由下式表之，即 $R_x=\Sigma F_x$，$R_y=\Sigma F_y$，及 R 對於 O 之力矩 $=\Sigma T_0$，式中 F 係表各外力，T_0 係表各外力對於 O 之力矩. 故一個剛體作平面運動時，其有效力與外力之關係爲

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x&=M(a_0)_x+M\bar{y}\alpha-M\bar{x}\omega^2\\ \Sigma F_y&=M(a_0)_y-M\bar{x}\alpha-M\bar{y}\omega^2\\ \Sigma T_0&=I_0\alpha+M\bar{y}(a_0)_x-M\bar{x}(a_0)_y\end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

按轉動軸之軸心 O 可爲運動平面內之任一點，故若使轉動軸通過物體之質心，即 O 與 G 相疊合時，則在上式中，$\bar{x}$ 與 $\bar{y}$ 均等於零；a_0 變爲 $\bar{a}$；I_0 變爲 $\bar{I}$；又 ΣT_0 變爲 $\Sigma\bar{T}$. 因之，(1) 式變爲

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x&=M\bar{a}_x\\ \Sigma F_y&=M\bar{a}_y\\ \Sigma\bar{T}&=\bar{I}\alpha\end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

例題 102. 有一均質圓柱，直徑3呎，重805磅，自一 30° 之斜面上向下滾動，如第 430 圖. 該柱質心之初速度爲 $v_0 = 50$ 呎/秒. 假定斜面並非光滑，故圓柱滾動時不致滑下. 試求 (1) 質心之加速度，(2) 摩擦力之大小，及 (3) 質心在 10 秒末之速度 v.



第 430 圖

解　已知圓柱受 F, N 及 W 諸力之作用而成平面運動，如圖所示. 命 X–X 及 Y–Y 兩軸分別平行及垂直於斜面. 於是運動方程式爲

$$\Sigma F_x = M\bar{a}_x, \tag{1}$$

$$\Sigma F_y = M\bar{a}_y, \tag{2}$$

$$\Sigma \overline{T} = \bar{I}\alpha. \tag{3}$$

由 (1) 式，得

$$805 \sin 30^\circ - F = \frac{805}{32.2}\bar{a}_x. \tag{4}$$

由 (2) 式，得

$$-805 \cos 30^\circ + N = 0, \quad 因 \quad \bar{a}_y = 0. \tag{5}$$

由 (3) 式，得

$$\frac{3}{2}F = \frac{1}{2} \times \frac{805}{32.2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \alpha. \tag{6}$$

以上三式共含有四個未知元素，必須另求一方程式，方能解此.

問題.

因 X 軸通過質心,故

$$\bar{a}_x=\bar{a}=r\alpha=\frac{3}{2}\alpha. \tag{7}$$

將(7)式之 α 值代入(6)式,得

$$F=\frac{25}{2}\bar{a}.$$

再將此 F 之值代入(4)式,得

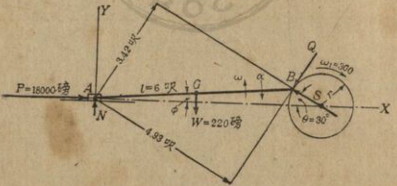
$$\bar{a}_x=\bar{a}=10.73\text{ 呎/秒}^2.$$

$$\therefore\quad F=\frac{25}{2}\times 10.73=134.1\text{ 磅}.$$

又因質心係以等加速度作直線運動,故

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\bar{a}t=50+10.73\times 10=157.3\text{ 呎/秒}.$$

例題 103. 在第 431 圖中,蒸汽機連桿長 6 呎,重 220 磅,曲柄長 1 呎,其轉動速率為 $\omega_1=$ 每分鐘 300 轉. 連桿十字頭之壓力 P,當



第 431 圖

$\theta=30$ 時,爲 18,000 磅. 假定連桿之截面爲一常數,試求此曲柄銷之切線壓力 Q,曲柄之壓力 S,及導板之垂直壓力 N (摩擦不計).

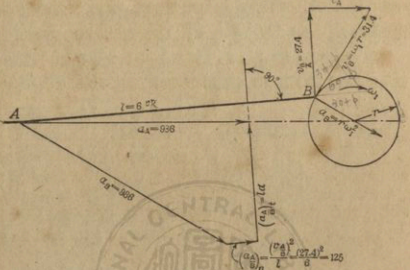
解 因連桿係成平面運動,故可用第164節之方程式(1)或(2). 玆用(1)式,並取十字頭 A 爲基點. 命 X 及 Y 兩軸分別取水平及垂直之位置.

於是
$$\Sigma F_x=M(a_A)_x+M\bar{y}\alpha-M\bar{x}\omega^2, \tag{1}$$
$$\Sigma F_y=M(a_A)_y-M\bar{x}\alpha-M\bar{y}\omega^2, \tag{2}$$
$$\Sigma T_A=I_A\alpha+M\bar{y}(a_A)_x-M\bar{x}(a_A)_y. \tag{3}$$

式中
$$(a_A)_y=0, \qquad (a_A)_x=a_A,$$
$$M=\frac{220}{32.2}=6.84, \quad I_A=\frac{1}{3}Ml^2=82.$$

再者,
$$l\sin\phi=r\sin\theta, \quad \text{或} \quad \sin\phi=\frac{1}{6}\sin 30^\circ=\frac{1}{12}.$$
$$\therefore \quad \phi=4^\circ 47'.$$
$$\cos\phi=0.9965, \qquad \bar{x}=3\cos\phi=2.99\ \text{呎}.$$
$$\sin\phi=0.0833, \qquad \bar{y}=3\sin\phi=0.25\ \text{呎}.$$

a_A,ω 及 α 可用第 155 節之圖解法求之. 如第 432 圖,
$$v_B=v_{\frac{B}{A}}+v_A. \tag{4}$$
$$a_A=a_{\frac{A}{B}}+a_B=\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_n+\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_t+a_B$$
$$=\frac{\left(v_{\frac{A}{B}}\right)^2}{l}+\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_t+\omega_1^2 r$$
$$=\frac{(27.4)^2}{6}+\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_t+\left(\frac{300\times 2\pi}{60}\right)^2. \tag{5}$$



第432圖

v_A，$v_{\frac{A}{B}}=-v_{\frac{B}{A}}$，$\left(a_{\frac{A}{B}}\right)_t=-\left(a_{\frac{B}{A}}\right)_t$ 及 a_A 諸値，均可由圖中量得，計

$$v_A=18\text{ 呎/秒},\qquad v_{\frac{B}{A}}=27.4\text{ 呎/秒},$$

$$\left(a_{\frac{B}{A}}\right)_t=492\text{ 呎/秒}^2,\qquad a_A=936\text{ 呎/秒}^2.$$

但　　$v_{\frac{B}{A}}=\omega l$，　又　$\left(a_{\frac{B}{A}}\right)_t=\alpha l$.

故　　$\omega=\frac{27.4}{6}=4.56$ 弳/秒，　又　$\alpha=\frac{492}{6}=82$ 弳/秒^2.

由(1)式，　$18,000-S\cos 30°-Q\cos 60°$

$$=6.84(936+0.25\times 82-2.99\times 4.56^2).$$

由(2)式，　$N+S\sin 30°-Q\sin 60°-220$

$$=6.84(0-2.99\times 82-0.25\times 4.56^2).$$

由(3)式，　$-3.42S+4.93Q+2.99\times 220$

$$=82\times 82+6.84\times 0.25\times 936.$$

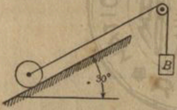
解以上三式，得

$$Q=7,950\text{ 磅},\quad S=9,150\text{ 磅},\quad N=795\text{ 磅}.$$

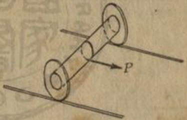
習　　題

372. 有一實心球，半徑為 8 吋，重 161 磅. 今於球心通過一軸，用一柔索牽之使滾動於一粗糙斜面上，如第 433 圖. 柔索通過一光滑木釘，其另一端繫有一重 100 磅之物體 B. 試求物體 B 之加速度及柔索之張力.

答. $a=1.93$ 呎/秒^2. $T=94.1$ 磅.



第 433 圖



第 434 圖

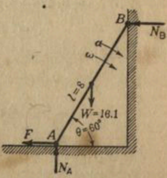
373. 第434圖示兩個實心輪盤及一輪軸，輪軸中央繞一柔索S. 輪盤各重 20 磅，直徑 2 呎. 輪軸重 40 磅，直徑 6 吋. 今於柔索上施以8磅之力P，使與輪盤之運動平面平行並與輪軸之底面相切，試求此輪盤中軸之加速度.

答. 1.91 呎/秒^2.

374. 有一粗細一律之圓棍AB，長 8 呎，重 16.1 磅，上端 B 靠

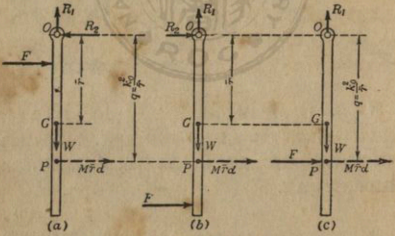
於光牆，下端 A 置於光地上. 今於 A 端施以大小不定之水平力 F，使圓棍向左運動. 當圓棍在如第 435 圖所示位置時 ($\theta=60°$)，其角加速度 $\alpha=3$ 弳/秒^2，角速度 $\omega=2$ 弳/秒. 試求 F, N_A 及 N_B 之值.

答. $F=-0.03$ 磅; $N_A=6.17$ 磅; $N_B=1.22$ 磅.



第 435 圖

165. 打擊中心 第 436 圖示一圓棍，其重量為 W，當其突然受水平力 F 之打擊時，即繞水平軸 O 自由擺動. 此水平力 F 係一不定數，但無論其大小及其施力點之位置如何，依 $\Sigma T=I\alpha$ 之方程式，皆得 $F=\frac{I\alpha}{d}$，式中 d 為 F 力之作用線與轉動軸之距離.



第 436 圖

命 R_1 及 R_2 爲轉動軸因受 F 力作用而生之法線及切線分反動力．由第163節之原則，所有切線分有效力之合力等於 $M\bar{r}\alpha$，此合力之力矩必等於所有切線分有效力之力矩代數和．若命 q 爲合力 $M\bar{r}\alpha$ 與轉動軸 O 之距離，則

$$\Sigma M\bar{r}\alpha q = I\alpha = Mk^2\alpha,$$

即

$$q = \frac{k^2}{\bar{r}},$$

式中 k 爲該物體對轉動軸之環動半徑，$\bar{r}$ 爲自轉動軸至物體質心之距離．

設使 F 力之作用線卽與合力 $M\bar{r}\alpha$ 在同一直線上，並將 $M\bar{r}\alpha$ 之作用方向反轉，則此一組之力適成平衡，而 R_2 等於零，如圖(c)．此合有效力 $M\bar{r}\alpha$ 所通過之點 P 卽稱爲打擊中心．蓋若於打擊中心施以突擊力時，在其轉動軸上並不發生任何切線分反動力．倘 F 力之作用線係在打擊中心之上方，如圖(a)，則轉動軸上切線分反動力 R_2 必向左作用，F 力愈近轉動軸，R_2 之值愈大；反之，如 F 力之作用線係在打擊中心之下方，如圖(b)，則 R_2 卽向右作用．

習　　題

375．一細圓棍長3呎，於其一端通過一水平軸，使在圓軸上自由懸垂．今若於圓棍之中點突施以100磅之水平力，試求轉動軸上水平反動力之大小．

答．$R_2=25$ 磅．

376．在上題中，欲使水平反動力等於零，試求施力點與轉動軸

之距離.

答. 2呎.

186. **切線力及偏向力** 凡物體所以運動於曲線之中者，必因受力之作用，而後乃成曲線運動. 蓋由牛頓第一運動定律，倘物體不受外力作用時，則運動者繼續以同一速度向同一直線進行. 故必以力作用於物體上，始足使其不得再沿直線進行. 此等力不論爲一單力，或爲一組之力，均依其力之大小及作用方向，而產生各種不同之曲線運動.

在此類運動中，所有合力之作用線應與其合加速度之方向相同. 在第143節中，曾將合加速度分解爲切線及法線兩分加速度，並分別詳加討論，則此種合力自亦可依同法分解爲兩個分力，其一係作用於切線之方向，其大小爲

$$F_t = Ma_t; \tag{1}$$

另一係作用於法線之方向，其大小爲

$$F_n = Ma_n. \tag{2}$$

今若將第143節中 a_t 及 a_n 之值代入上式，則得

$$F_t = Ma_t = M\frac{dv}{dt} = M\frac{d^2s}{dt^2}, \tag{3}$$

$$F_n = Ma_n = M\frac{v^2}{r} = \frac{M}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{4}$$

分力 F_t 對於所作用之物體僅能產生速率之變化，稱之爲**切線力**，而分力 F_n 則僅能產生方向之變化，稱之爲**偏向力**，此兩分力之合力等於

$$F=\sqrt{F_n^2+F_t^2}=M\sqrt{\frac{1}{r^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^4+\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}. \qquad (5)$$

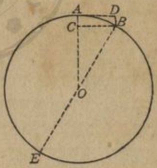
由方程式(4)，設已知偏向力及速度之大小，即可求得曲線之半徑 r，爲

$$r=\frac{Mv^2}{F_n}. \qquad (6)$$

在式(5)中，若 $F_t=0$，則該物體將以等速率運動於曲線之中，其半徑到處均與 F_n 成反比例；又若 F_n 亦等於一常數，則此曲線爲一圓形.

167. 向心力及離心力　當物體運動於一圓曲線上時，其偏向力 F_n 恆向圓心作用，此種力通常稱爲**向心力**，以示與偏向力有別，惟其大小則與方程式(4)所得者相同.

向心力又可由另一法求之如下. 如第437圖，命物體以等速率 v 運動於半徑 r 之圓曲線 ABE 上. 又命 A 爲此路線中之任一點；圓弧 AB 爲物體在 t 秒內運行之距離，其長將等於 vt. 此種運動可視爲係由兩個分運動所合成：一沿切線之方向，等於 AD；一取與 AO 平行之方向，等於 $DB=AC$. 命 $AC=s$.



第437圖

今因　　$\angle AOB=\frac{vt}{r}$,

又　　$DB=AC=AO-CO=r-r\cos\frac{vt}{r}$,

$$\therefore\quad s=r-r\cos\frac{vt}{r}.$$

故在 B 點取與 AO 平行之方向之加速度等於

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{v^2}{r}\cos\frac{vt}{r}.$$

當 $t=0$ 時，$\quad\cos\frac{vt}{r}=1$，及 $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{v^2}{r}=a_n$.

因之，物體運動於圓曲線上時，其向心力將等於

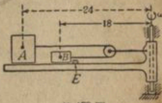
$$F_n=Ma_n=\frac{Mv^2}{r}=M\omega^2r.$$

又依牛頓第三運動定律，有作用必有反作用，故在每一曲線運動中，同時必自曲線之中心生一相等而相反之力，以對抗上述之向心力，此種對抗力稱爲離心力.

習 題

377. 在一懸架上置 A, B 兩物體，其重量各爲 48 及 32 磅，如第 438 圖. 若懸架以每分 40 轉之等角速度繞垂直軸轉動，試求制楔 E 對於 B 之壓力. 假定 A, B 與懸架間之摩擦力不計.

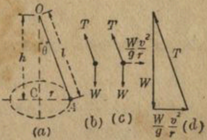
答. $R_E=26.1$ 磅.



第 438 圖

168. 錐動擺 第 439 圖示一種錐動擺，其中 A 爲一小擺錘，用線繩 OA 自 O 端繫之，使其繞轉於水平面內. O 點稱爲軸心，C 點爲擺錘 A 之轉動中心. 若 OA 與垂直軸 OC 之交角 θ 爲一常數，則轉動

之速率亦為一常數，而 $a_t=\frac{dv}{dt}=0$. 因之，切線力 $F_t=Ma_t=0$. 若此轉動之物體多少受有空氣之阻力，則必須加入一微小之正力，以抵消此空氣阻力，庶可維持其等速度運動.



第 439 圖

試更通過線繩 OA 作一垂直面而研究之，即見作用於擺錘 A 之力共有兩個：一爲本身重量 W；又一爲線繩之張力 T，如圖(b)所示. 擺錘在此兩力之作用下，乃得一加速度 $a_n=\frac{v^2}{r}$，趨向於中心 C.

倘再就圖(b)之自由體中，另加入一反有效力 $\frac{W}{g}\ \frac{v^2}{r}$，則物體 A 將受三力之作用而成平衡，如是所有靜力學中之平衡方程式於此均可適用.

以 O 爲力矩中心，則對於 O 之力矩方程式爲

$$\frac{W}{g}\ \frac{v^2}{r}\times h-Wr=0.$$

$$v=r\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

由此式可以求得速率 v 之值，使擺錘恆能保持與垂直軸成常角 θ.

至欲求張力 T 之值，可作一力之三角形，如圖(d)所示. 於是

$$T=\sqrt{W^2+\left(\frac{W}{g}\ \frac{v^2}{r}\right)^2}.$$

又擺錘之每秒轉動數等於

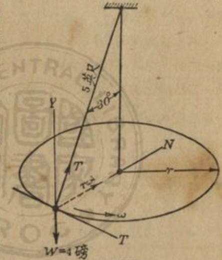
$$n=\frac{v}{2\pi r}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

此 n 之值若逐漸減小,則 h 之值卽逐漸加大,直至 $\theta=0$ 時 $h=l$. 於是

$$n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

例題 104. 有一重4磅之鉛球繫於5呎長線繩之一端. 今若握繩之另一端而旋轉之,使成一錐動擺,如第440圖,繩與垂直線成30°之傾角,又角速度 ω 爲一常數,試求繩之張力 T 及鉛球之線速度 v.

解 鉛球在水平面內受 T 與 W 之影響而成一圓周運動,因之,其加速度應爲 $r\omega^2$ 或 $\frac{v^2}{r}$,其方向係趨向圓心,如圖中之矢線所示. 於是運動方程式爲



第440圖

$$\Sigma F_n=Ma_n=\frac{W}{g}r\omega^2=\frac{W}{g}\frac{v^2}{r}, \tag{1}$$

$$\Sigma F_t=Ma_t=\frac{W}{g}r\alpha=0, \tag{2}$$

$$\Sigma F_y=Ma_y=0, \quad 因 \quad a_y=0. \tag{3}$$

由(1)式, $$T\cos 60^\circ=\frac{4}{32.2}\times\frac{v^2}{5\sin 30^\circ}. \tag{4}$$

由(3)式, $$T\cos 30^\circ-4=0, \quad \therefore \quad T=4.62\text{磅}. \tag{5}$$

將(5)式中 T 之值代入(4)式,得

$$4.62\cos 60^\circ=\frac{4}{32.2}\times\frac{v^2}{5\sin 30^\circ}.$$

因之,

$$v^2=\frac{4.62\times0.5\times32.2\times5\times0.5}{4}=46.3.$$

$$\therefore\ v=6.8\text{呎/秒}.$$

習　題

378. 一重4斤之物體 A,用一長2尺之線繩繫之,如第441圖.今若將繩之另一端繫於通過 O 點之水平軸,使其轉動於垂直面內,當 $\theta=30^\circ$ 時,繩之張力等於6斤,試求 A 之速度.

答. 6.11尺/秒.

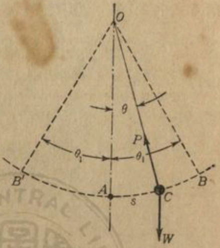
第441圖

379. 有一鉛球重5磅,用繩繫之使繞轉於水平面內.若鉛球重心與軸心之距離爲4呎,又繩與垂直軸之交角恆爲30°,試求切線速度,每秒之轉動數及繩之張力.

答. 6.1呎/秒; 0.485轉/秒; 5.77磅.

169. 單擺　單擺爲一單質點,繫於一無重量無伸縮性之絲上,因受重力及絲之牽力之影響,而擺動於一垂直圓弧內.此種構造固屬理想,且不易在普通物理器械中求得,但苟用輕絲一根懸一極小之鉛錘而擺動之,則理想之單擺動作或可望其近似.

單擺運動之研究,即在求其擺動之週期.如第442圖,命 C 表一極小物體,用輕絲 OC 自 O 點懸之,使如單擺往復運動於圓弧 BB''



第 442 圖

內．又命半徑 OC 之長等於 l，並假定自 A 沿圓弧向 B 之距離爲正．

今因在運動方向內僅有之力爲 $-W\sin\theta$，於是由前述 $F_t=Ma_t$ 一式，得

$$-W\sin\theta=\frac{W}{g}a_t,$$

卽 $$a_t=-g\sin\theta.$$

但 $v=\dfrac{ds}{dt}$，又 $a=\dfrac{dv}{dt}$．

$$\therefore\quad vdv=a_t ds=-g\sin\theta\,ds.$$

復因 $$ds=ld\theta,$$

故 $$vdv=-lg\sin\theta\,d\theta.$$

欲求此式積分，因 t 與 θ 間引起一極複雜之關係，似不易解，然通常在此種擺動中，其角度甚小，卽取一近似值，其結果亦不致發生若何誤差．因若 θ 之值甚小時，可假定 $\sin\theta=\theta$，今以此值代入上式，

得 $$vdv=-lg\theta d\theta.$$

求其積分，得 $$v^2=-lg\theta^2+C.$$

當 $\theta=\theta_1$ 時，$v=0$，於是常數 $C=lg\theta_1^2$．

因之， $$v^2=lg(\theta_1^2-\theta^2),\quad v=\sqrt{lg}\sqrt{\theta_1^2-\theta^2}.$$

但 $$v=\frac{ds}{dt}=\frac{ld\theta}{dt},$$

$$\therefore\quad \frac{l d\theta}{dt}=\sqrt{lg}\sqrt{\theta_1^2-\theta^2},$$

或
$$\frac{d\theta}{\sqrt{\theta_1^2-\theta^2}}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt.$$

時間 t 之計算，若係自擺錘在 A 點之位置時起始，以向右運動爲正，則求上式之積分，得

$$\int_0^t dt=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_\theta^{\theta_1}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta_1^2-\theta^2}},$$

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\sin^{-1}\frac{\theta}{\theta_1}.$$

欲求擺錘自 A 運動至 B 所需之時間，命 $\theta=\theta_1$，則

$$t_B=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

欲求擺錘自 A 向右運動至 B 再返至 A 所需之時間，命 $\theta=0$，則

$$t_A=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

同理，擺錘自 A 向左運動至 B' 再返至 A 所需之時間應仍爲 $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. 故單擺之週期爲

$$P=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

由上式可見週期 P 並無關於 θ 之値，即當 θ 之値甚小時，擺動之週期實與振幅無關。又因 $a_t=-g\sin\theta=-g\theta$，但 $\theta=\frac{s}{l}$，$\therefore a_t=-g\frac{s}{l}$. 即若振幅甚小時，加速度 a_t 與位移 s 成正比例，故此種擺動實爲一簡諧運動.

習　　題

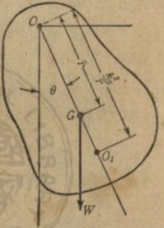
380. 若單擺之週期爲$\frac{1}{2}$秒；1秒；2秒．試求其長l.

答．0.204呎；0.815呎；3.28呎．

381. 有一單擺長4呎，擺動之角爲60°（即$\theta_1=30°$），試求其週期．

答．2.21秒．

170. 複擺　一個物體因受重力及其支軸之反動力之影響，而繞一水平軸自由擺動者，稱爲複擺．



第443圖

命第443圖示一複擺之截面，O爲水平軸通過之點，G爲其重心．又命I_0爲複擺對於轉動軸之慣性矩，k_0爲其環動半徑，$\bar{r}$爲自轉動軸至重心之距離，α爲其角加速度．則對於複擺繞O擺動之運動方程式爲

$$\Sigma T_0 = I_0\alpha,$$

或

$$-W\bar{r}\sin\theta = I_0\alpha = \frac{W}{g}k_0^2\alpha,$$

因之，

$$\alpha = -\frac{g\bar{r}}{k_0^2}\sin\theta. \tag{1}$$

又依前節所述，單擺之切線加速度爲

$$a_t = -g\sin\theta.$$

但

$$a_t = l\alpha,$$

因之，
$$\alpha=\frac{a_t}{l}=-\frac{g}{l}\sin\theta. \qquad (2)$$

綜合以上諸式，可見倘使單擺之長 l 適等於 $\frac{k_0^2}{r}$，則其角運動亦將適與複擺相同，易言之，卽單擺擺動之時間亦將與複擺相同，其中 $\frac{k_0^2}{r}$ 卽稱爲**複擺之長**，O_1 點稱爲**振動中心**.故若振幅甚小時，複擺之週期應爲

$$P=2\pi\sqrt{\frac{k_0^2}{gr}}.$$

振動中心 O_1 與轉動中心 O 可以互相變換而不致影響於複擺之週期.今設將複擺倒轉，使懸於 O_1 點，其結果仍屬相同，是卽其明證也.

習　　題

382. 有一粗細一律之圓棍，長 4 呎，於其一端通過一水平軸，使成複擺式之擺動.試求其擺動之週期.

答. 1.8 秒.

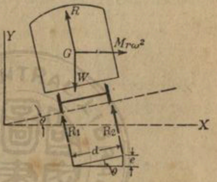
383. 有一 1 吋見方之鐵條，於其一端通過一水平軸，使成複擺式之擺動.若其週期爲 1 秒，試求此鐵條之長.

答. 1.255 呎.

171. **外軌之超高**　當列車行駛於鐵路曲線上時，若內外兩軌係在同一水平，則車輪對於曲線外軌之垂直壓力，將較重於內軌.此列車之速率愈增加，此種外軌之垂直壓力亦將隨之增加，直至達於某一限度，其時外軌之垂直壓力已等於車輛之重量，而內軌之垂直壓力則等於零，於是車輛勢將發生向外傾翻之危險.

爲使列車在曲線上增至可能速率而不致有向外傾翻之危險，一般習慣特將外軌擡起使較高於內軌，是稱爲外軌之超高，其目的在使內外兩軌之垂直壓力均勻，無倚輕倚重之弊. 此種外軌之超高乃依列車之速率而定. 如規定列車之速率較高，則外軌之超高亦加大.

如第 444 圖，命外軌之超高等於 e，R_1 及 R_2 爲內外兩軌之垂直反動力，在此種情形下，R_1 與 R_2 相等，其合力 R 之作用線通過車輛之重心 G. 又命 W 爲車輛之重量，r 爲曲線之半徑，v 爲列車之速率. 今因列車之重心係行駛於一水平面內，故其反有效力 $\frac{W}{g}\frac{v^2}{r}$ 亦必在此水平面內，其作用線則通過重心 G 而向外側. 此種作用於車輛上之反有效力，與 W 及 R 兩外力適成一平衡之同點力. 於是依平衡方程式，得



第 444 圖

$$\Sigma F_x=0, \quad 或 \quad R\sin\theta=\frac{W}{g}\frac{v^2}{r}; \tag{1}$$

$$\Sigma F_y=0, \quad 或 \quad R\cos\theta=W, \tag{2}$$

式中 θ 爲合力 R 與垂直線之交角. 以(2)除(1)，得

$$\tan\theta=\frac{v^2}{gr}.$$

若命 d 爲軌距（通常等於 1.435 公尺），則

$$e=d\sin\theta.$$

當角度甚小時，其正弦及正切之值漸近於相等，故

$$e=\frac{dv^2}{gr}\text{（近似），　或　}e=0.009864Dv^2.$$

下列之'曲線上外軌之超高'表卽係根據上述公式計算而得，已爲我國各鐵路所普徧採用，茲特附入本節內以便檢查。

曲線上外軌之超高（以公厘計）

曲線之度數（二十公尺弦）	速度（以每小時若干公里計）															
	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
½	1	2	3	4	6	8	10	12	15	18	21	24	28	32	36	40
1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	48	56	63	71	80
1½	3	6	9	13	18	24	30	37	45	53	62	73	83	95	107	120
2	4	8	12	18	24	32	40	49	60	71	83	97	111	126	143	160
2½	6	10	15	22	30	39	50	62	75	89	104	121	139			
3	7	12	19	27	36	47	60	74	90	107	125	145				
3½	8	14	22	31	42	55	70	83	104	124	146					
4	9	16	25	36	48	63	80	99	119	142						
4½	10	18	28	40	54	71	90	111	134							
5	11	20	31	44	60	79	100	123								
5½	12	22	34	49	67	87	110	136								
6	13	24	37	53	73	95	120									
6½	14	26	40	58	79	102	130									
7	16	28	43	62	85	110										

惟在任何鐵路上開行之列車皆有快慢不同,故車輛經過曲線時,其速率殊不能一致,欲求一適宜之超高,以適合各項列車之各種速率,實不可能.依一般習慣,此種超高之計算恆以列車之最大速率爲準則.如是則速率較小之列車經行時,其輪摺與外軌間之壓力因之減少,於事實尚無妨礙.

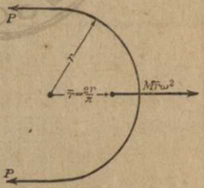
例題 105. 在曲度等於 $2°$ 之曲線上(半徑 $r=572.99$ 公尺),若列車之速率爲每時 30 公里,試求外軌之超高應等於若干?

解 $$e=0.009864Dv^2$$

$$=0.009864\times2\times30^2=18 \text{ 公厘}.$$

172. 飛輪之張應力 飛輪以高速度轉動時,其輪緣上所生之應力頗爲可觀.同樣,如飛輪上裝置皮帶,則皮帶上亦將爲同一原因,而生類似之應力.此種應力頗關重要,實有一述之價值.

設命飛輪轉動之角速度爲 ω,又對於輪輻之張力不計,則輪緣上之張應力(通稱爲周牽力)可依下法求之.第445圖示飛輪之半個輪緣,當飛輪轉動時,每半個輪緣常欲與其他一半脫離,其所以未分離者,純賴輪緣上所生之張應力 P, P 有以維繫之.對於圖中之半個輪緣,其法線有效力爲 $M\bar{r}\omega^2$,並作用於輪緣之質心.又因此種有效力係與作用於輪緣上之張應力 P, P 適成平衡,故依平衡方程式,得



第 445 圖

$$2P=M\bar{r}\omega^2=\frac{W}{g}\bar{r}\omega^2,$$

式中 W 為半個輪緣之重量。今若輪緣之厚較其平均半徑相差極其微小，則輪緣之質心即可視為與半圓弧之重心相疊合。因之，$\bar{r}=\dfrac{2r}{\pi}$.

於是
$$P=\frac{1}{2}\frac{W}{g}\times\frac{2r}{\pi}\omega^2=\frac{Wr\omega^2}{g\pi}.$$

命輪緣之截面面積為 a，此截面每一單位面積上之應力為 s，又輪緣每一單位體積之重量為 w。則

$$s=\frac{P}{a},\quad 又\quad w=\frac{W}{\pi r a}.$$

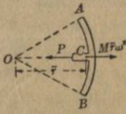
於是
$$s=\frac{W}{g}\times\frac{r}{\pi}\times\frac{\omega^2}{a}=\frac{\pi raw}{g}\times\frac{r}{\pi}\times\frac{\omega^2}{a}=\frac{wr^2\omega^2}{g}.$$

若將上式之 ω 易以 $\frac{v}{r}$，則得

$$s=\frac{wv^2}{g}.$$

s 之單位普通多為每平方尺若干斤，或每平方呎若干磅計算。由上式，可見倘輪骨之張力不計，則輪緣之應力強度當與輪緣之線速度之平方成正比例。

反之，倘飛輪輪緣之張力不計，則輪骨因轉動而生之張應力可以測算如下。在第446圖中，命 AB 為一根輪骨上所含輪緣之一部分，其重量為 W，又命 $\bar{r}$ 為自 O 點至其重心之距離，則因轉動而生之張應力為



第416圖

$$P=\frac{W}{g}\bar{r}\omega^2,$$

其單位應力為

$$s=\frac{P}{a}.$$

習 題

384. 有一鑄鐵飛輪,其直徑 12 呎,輪緣厚 2 吋,寬 12 吋.若飛輪以每分 200 轉之速度轉動,試求輪緣之張應力(不計輪骨之張力).

答. 1,490 磅/吋^2.

385. 有一鑄鐵飛輪,正以每分 6,000 呎之線速度轉動,試求輪緣之張應力,若輪骨之張力無須計入,又假定鑄鐵之重量為 450 磅/立方呎.

答. 970 磅/吋^2.

173. 同平面轉動體之平衡 凡物體繞軸轉動時,倘該軸並非通過物體之重心,則在此轉動軸上勢將發生一極關重要之動載荷.此動載荷之方向時有變化,其速度愈大者動載荷亦隨之而增大,結果對於物體本身即發生有害之震動.再者,倘轉動軸雖通過物體之重心,但通過軸線之平面並不能將物體分成為對稱之兩部分,則轉動軸上仍將發生一種動力偶.

為補救此項缺點,每採用一種平衡法,即在轉動之部分上加入若干質體,使全部物體所生之有效力適得平衡,不致再於轉動軸上發生任何動載荷.至於因重力及其他平均壓力而生之靜載荷,無論物體係在運動或靜止,則均始終不變.

本書以下所述之平衡法，專就等速率之轉動而言，並分為(1)一單獨轉動體，2)兩個同平面轉動體，(3)一羣同平面轉動體，及(4)一羣非同平面轉動體等四種。

(1) 一單獨轉動體——第447圖(a)示一軸正以角速度ω轉動，軸上並載有一質量為M_1之單獨體，其重心與軸心之距離等於r_1。當

第447圖

該質體隨軸轉動時，將發生大小等於$M_1r_1\omega^2$之離心力。轉動軸受此種力之作用，先傳至軸承，更由軸承傳至機器座架。但若在轉動軸上相對於M_1之另一側加入一質體M_2以平衡之，如圖(b)，則此軸承上之動載荷當可消除。今命M_2之重心至軸心之距離為r_2，其長將使

$$M_1r_1\omega^2=M_2r_2\omega^2,$$

或

$$\frac{W_1}{g}r_1\omega^2=\frac{W_2}{g}r_2\omega^2.$$

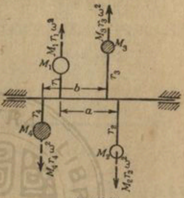
消去兩邊之公因數$\frac{\omega^2}{g}$，則得

$$W_1r_1=W_2r_2.$$

故若規定M_2之大小，即可算定r_2之長，或規定r_2之長，亦可算定M_2之大小。

此為動平衡之條件，但由第 447 圖(b)，亦卽為靜平衡之條件.

(2) 兩個同平面轉動體——設於一轉動軸上載有兩個質體 M_1 及 M_2，此二質體係在不同轉動平面內，但在同一軸線平面內(卽通過軸線之平面)，如第 448 圖所示. 當該軸轉動時，此 M_1, M_2 兩質體勢將發生兩個離心力 $M_1r_1\omega^2$ 及 $M_2r_2\omega^2$. 若此兩力相等，則將成一力偶. 轉動軸旣受有此種不平衡之離心力偶之作用，則在軸承上亦必發生一相等之力偶以相抗衡. 為消除此等動載荷，必須於同一軸線平面內引入兩個質體 M_3 及 M_4，其大小須使此離心力偶 $M_3r_3\omega^2b$ 或 $M_4r_4\omega^2b$ 適與 M_1 及 M_2 之離心力偶相等而相反. 卽



第 448 圖

$$M_1r_1\omega^2a = M_3r_3\omega^2b,$$

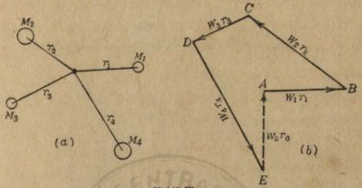
或

$$M_2r_2\omega^2a = M_4r_4\omega^2b.$$

與第(1)例同，消去兩邊之公因數 $\frac{\omega^2}{g}$，則得

$$W_1r_1a = W_3r_3b, \quad \text{又} \quad W_2r_2a = W_4r_4b.$$

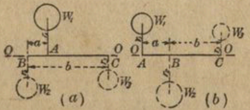
(3) 一羣同平面轉動體——設有一羣質體 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots$ 在垂直於軸線之同一平面內，則當該軸轉動時，卽受有一羣離心力之作用，其大小各為 $M_1r_1\omega^2, M_2r_2\omega^2, M_3r_3\omega^2, \cdots\cdots$. 此等離心力成為一組同點力，如第 449 圖(a)所示. 此一組之同點力如能互成平衡，則其



第449圖

力之多邊形必成閉合，易言之，如將表$M_1r_1\omega^2$, $M_2r_2\omega^2$, $M_3r_3\omega^2$, ……之力線，依其適當之方向及次序，分別作於圖上，應即成一閉合多邊形。又因$Mr\omega^2$可作爲$\frac{W}{g}r\omega^2$，但$\frac{\omega^2}{g}$係一公因數，故力之多邊形又可以W_1r_1,W_2r_2,W_3r_3,……諸乘積爲矢量。倘此W_1r_1,W_2r_2,W_3r_3及W_4r_4等乘積在圖上不能成一閉合多邊形，如圖(b)，則此一組之力顯見並不互成平衡。今欲平衡此一組之力，必須另加入一質體M_0，令其與轉動軸之距離等於r_0，此M_0r_0之積可由力之多邊形中閉合線EA之大小及方向表之。求得EA後，若再假定r_0爲一任意值，則M_0之值卽可算得。在EA隙間，如加入兩三矢量使成閉合，均無不可。惟於同一平面內應同時加入兩三個質體，始足使其平衡。

174. 非同平面轉動體之平衡　在第450圖(a)或(b)中，命OO爲轉動軸，M_1爲轉動體。今於OO軸上任擇兩點B,C，通過B,C各作一平面垂直於OO，並於兩平面內各引入一平衡之質體M_2及M_3。倘此M_1能爲M_2與M_3兩質體所平衡，則此三個質體必同在含OO軸



第 450 圖

線之平面內.又所有對於此平面內任一點之法線有效力之力矩和亦必等於零.

由方程式 $\Sigma M_B=0$,得

$$\frac{W_3}{g}r_3\omega^2 b=\frac{W_1}{g}r_1\omega^2 a,$$

或
$$W_3 r_3 b=W_1 r_1 a.$$

又在圖(a)中,由方程式 $\Sigma M_C=0$,得

$$W_2 r_2 b=W_1 r_1 (b-a),$$

或在圖(b)中,由同式,得

$$W_2 r_2 b=W_1 r_1 (b+a).$$

由以上諸式,可求得兩個未知數 $W_2 r_2$ 及 $W_3 r_3$.

同理,如在轉動軸上倘有其他質體 $M'_1, M''_1, \cdots\cdots$,但與 M_1 並不在同一垂直平面內,依上述方法,於通過 B, C 兩點之垂直平面內,分別引入 $M'_2, M''_2, \cdots\cdots$ 及 $M'_3, M''_3, \cdots\cdots$ 等質體,使 M'_2, M'_3 兩質體與 M'_1 相平衡;M''_2, M''_3 兩質體與 M''_1 相平衡;…….於是因 $M_2, M'_2, M''_2, \cdots\cdots$ 等質體既在同一平面內,即可用一單獨之質體以代之.又 $M_3, M'_3, M''_3 \cdots\cdots$ 等質體亦復在同一平面內,自亦又可用一單獨之質體以代之.因之,此兩個未知之質體實不難求得.

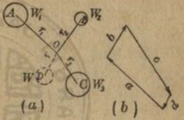
習　　題

386. 有一球體重 40 磅，置於與轉動軸相距 10 吋之處．今欲用另一重 60 磅之球體以平衡之，試求其與轉動軸之距離應為若干？

答．$6\frac{2}{3}$ 吋．

387. 在第 451 圖中，$W_1=10$ 磅，$W_2=5$ 磅，$W_3=20$ 磅．$r_1=24$ 吋，$r_2=20$ 吋，$r_3=16$ 吋．AOB 角＝$45°$，BOC 角＝$90°$．若 r 為 12 吋，試求 W 之重量應為若干始足以平衡此一組之力？又 DOA 角應為若干？

答．$W=25.7$ 磅；$\angle DOA=105°50'$．



第 451 圖

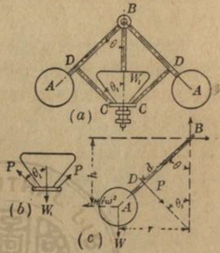
388. 有一 6 呎長之軸，上載一直徑 2 呎之鋼圓盤，厚 4 吋，與左端軸承之距離 2 呎．圓盤心並不與軸心相疊合，而成 4 吋之偏向(即偏心 4 吋)．今欲於與兩端軸承相距 6 吋之垂直平面內各加入一平衡之物體，其與軸線之距離均為 1 呎，試求此兩物體各重若干？

答．在左面者重 119.7 磅；在右面者重 51.3 磅．

175. 調速器　調速器為蒸汽機，煤氣機或水力渦輪中之重要機械，專用以調節蒸汽，煤氣或水量之供給者．倘此等供給能始終保持常態，則所生之動力自亦大小適宜．蓋當機器開動，調速器亦隨之轉動；苟一旦荷重減輕，以致機器之速率加大時，此調速器之速率亦同時加大．於是藉該器上適宜構造之助，可令蒸汽或煤氣之壓力降低，或水流之流量減少，終至使機器之速率回復原狀．

按調速器之構造計有多種，本書僅舉其所謂錐動擺式調速器者加以論述．如第452圖(a)，A, A 爲兩個小球，分裝於支臂 BA 之一端，中間爲一重錘 W_1 支於軸環 CC 上．茲先取重錘 W_1 爲一自由體，如圖(b)，並假定調速器正以等速度轉動．於是此自由體因係在靜平衡狀態下，故由方程式 $\Sigma F_y=0$，得

$$P=\frac{W_1}{2\cos\theta_1}.$$



第452圖

次取小球 A 及其支臂 BA 爲一自由體，如圖(c)．作用於該自由體上之力有三：即小球重量 W，支臂之張力 P，及在 B 點之軸銷反動力．今若於此諸力中，另加入一方向相反之有效力 $M\bar{r}\omega^2$，則該自由體卽成靜平衡狀態．嚴格言之，此反有效力 $M\bar{r}\omega^2$ 實應作用於小球及支臂之振動中心，而支臂之重量並須計及．但若支臂之重量不計，並設反有效力 $M\bar{r}\omega^2$ 係作用於小球之重心，則其所生誤差亦極微小，可以不必顧慮．於是由方程式 $\Sigma M_B=0$，得

$$Pd+W\bar{r}=M\bar{r}\omega^2h.$$

習　　題

389. 在第452圖中，命 $BD=12$ 吋，$DA=4$ 吋，$W=20$ 磅，$W_1=$

100磅．又在其最低位置時，$\theta=\theta_1=45^\circ$．試求調速器應在如何速率時方開始作用？

答．每分 122 轉．

390．若在前題中，調速器之重錘 W_1 下裝一彈簧，能負荷 W_1 重量之半．試求當在最低位置時，調速器之速率應達到如何程度方開始作用？

答．每分 94.5 轉．

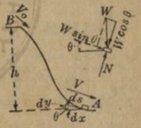
391．在第 452 圖中，若 CC 之距離為 3 吋，試求欲使 θ 角 $=60^\circ$，調速器之速率應為若干？

答．每分 170 轉．

176．垂曲線中物體之運動 在第 453 圖中，命 A 為一重量等於 W 之物體，因受重力及光滑垂曲線上正反動力之影響，自 B 沿垂曲線向下運動．設空氣之阻力不計，則作用於運動方向之力僅為 $W\sin\theta$（假定向下之方向為正）．於是

$$F=Ma_t,$$

$$\therefore\quad a_t=\frac{F}{M}=g\sin\theta.$$



第453圖

又
$$vdv=ads,$$
$$vdv=g\sin\theta ds.$$
但
$$\sin\theta ds=dy.$$
故
$$vdv=gdy.$$

若 v_0 為在 B 點之速度，則

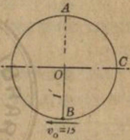
$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = g\int_0^h dy,$$

$$v^2 - v_0^2 = 2gh.$$

由此可見若該物體係受重力之影響，而沿一毫無摩擦之路線運動，則其速度之變化應與自由落體相同.

若 h 為一負數(即向上運動)，物體之速度則成漸減.

例題 106. 有一 2 磅重之物體 B，用 1 呎長之繩繫之，使轉動於一垂直圓曲線中，如第 454 圖. 設在最低點 B 時，其速度為 15 呎/秒，試求其在最高點 A 時之速度，並求在該點之繩上張力 T. 又物體在 A 點時，其最小速度應為若干，始足使其繼續沿圓曲線進行?



第 454 圖

解 $v_A^2 = v_B^2 - 2gh = 225 - 128.8 = 96.2$,

$v_A = 9.81$ 呎/秒.

當該物體在 A 點時，所有作用其上之力為其本身重量及繩之張力，兩者均係向下. 兩力作用之結果乃生法線加速度

$$a_n = \frac{v^2}{r} = 96.2 \text{ 呎/秒}^2.$$

由方程式 $F = \frac{W}{g}a$，得

$$T + 2 = \frac{2}{32.2} \times 96.2,$$

$$\therefore\ T = 3.98 \text{ 磅}.$$

因繩不能發生壓應力，故 T 之最小值應等於零. 當 $T=0$ 時，由方程

式 $F' = \frac{W}{g}\,\frac{v^2}{r}$，得

$$2 = \frac{2}{32.2} \times \frac{v^2}{1},$$

$$\therefore\quad v = 5.67\ \text{呎/秒}.$$

此為該物體欲繼續沿圓曲線進行所必須之最小速度.

習　　題

392. 有一10磅重之物體，用4呎長之繩繫之，使轉動於垂直圓曲線中．試求其在最低點時之最小速度應為若干，始足使其繼續向前進行至最高點？並求物體在最低點時繩之張力，及物體在與最高點相距 $60°$ 時繩之張力.

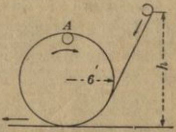
答．25.38呎/秒．60磅；15磅.

393. 若在第454圖中，物體係於 C 點自靜止出發，則當其通過 $45°$ 之點時速度應為若干？在最低點時其速度應為若干？

答．6.75呎/秒；8.03呎/秒.

394. 某自行車繞垂直圓曲線作翻筋斗運動．若自出發點至最低點之高度 h 為20呎，如第455圖，又車重500磅，並假定所有阻力概不計入，試求自行車通過 A 點時軌道對於車之向下壓力.

答．833磅.

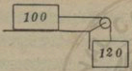


第455圖

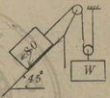
總 習 題

395．兩個物體，一重100磅，一重120磅，用柔索聯結，如第456圖．假定柔索及滑輪均係無重量無摩擦，並假定平面與物體間之摩擦係數 $f=0.8$．試求柔索之張力及物體自靜止運行 6 呎所需之時間．

答．98.2磅；1.43秒．



第456圖



第457圖

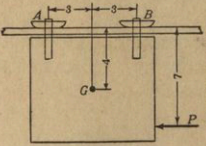
396．在第457圖中，欲使80磅之物體以10呎/秒^{2}之加速度沿斜面向上運動，試求 W 之重量及繩之張力應各為若干？假定物體與斜面間之摩擦係數等於0.6．

答．$W=273$磅；$T=115.32$磅．

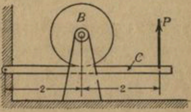
397．第458圖示一重300磅之鐵門，頂上裝有 A，B 兩滑腳懸於一軌道上，可以來往滑動．若鐵腳與軌道間之摩擦係數為 $\frac{1}{4}$，試求欲使鐵門之加速度等於4呎/秒^{2}所需之推力 P 應為若干？並求鐵腳在軌道上之正反動力？

答．$P=112$磅；$R_A=43.9$磅；$R_B=256$磅．

398．在第459圖中，B 為一實心圓筒，半徑10吋，重2,000磅，正以 $\omega=$ 每分120轉之角速度轉動．今若使用制動器 C，使圓筒之角



第458圖

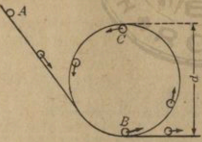


第459圖

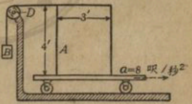
速度於3秒內減至每分30轉，試求P力之大小．假定制動器之摩擦係數爲0.2.

答．203磅.

399．在翻筋斗運動中(第460圖)，若軌道之摩擦力不計，試證當車在頂點C時，欲使其不致離開軌道，其最小速度應爲$\sqrt{\frac{gd}{2}}$.



第460圖



第461圖

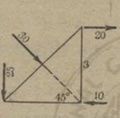
400．有一$3' \times 2' \times 4'$之物體A，重1,000磅，置於一平車上，如第461圖，假定物體在車上並不滑溜．今若使平車以8呎/秒^{2}之加速度向前進行，試求B之最大重量應爲若干方不使A傾倒？滑輪D

係假定為無重量無摩擦者.

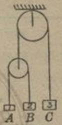
答. 201 磅.

401. 有一均質立方體之一半，受四力作用，如第 462 圖所示. 該形體本身重 40 磅，所有各力均在同一對稱平面內. 試證各力作用於該形體時將使其移動，並求其加速度之大小.

答. $a=73.8$ 呎/秒^2.



第 462 圖



第 463 圖

402. 今有 A, B 及 C 三個物體，各重 1 磅，2 磅及 3 磅，如第 463 圖. 若將該物體等支持於如圖示之位置，而後立即釋放，試求在 2 秒後各該物體之速度.

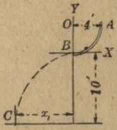
答. $v_1=26.52$ 呎/秒向上; $v_2=18.91$ 呎/秒向下; $v_3=3.79$ 呎/秒向下.

403. 有一 10 磅重之物體，用一 2 呎長之繩繫之，使繞轉於與垂直軸成 50° 之角，有如錐動擺. 試求該物體轉動之速率及繩之張力.

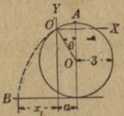
答. 7.67 呎/秒; 15.55 磅.

404. 有一小球，自 A 點沿四分之一之垂直圓曲線自由滑下達於 C 點，如第 464 圖. 試求距離 x_1，路線 BC 之方程式及在 C 點之速度.

答. 12.65 呎; $y=-0.0326x^2$; 30.03 呎/秒.



第464圖



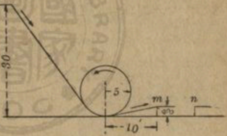
第465圖

405. 有一物體在直徑 6 呎之圓筒頂上 A 點，如第 465 圖。若該物體自靜止中開始向左滑至 O' 點，而後離開圓筒落至地面，假設物體與圓筒間不生摩擦，試求角 θ，距離 a 及 x_1。

答. $\theta=48°11'$; $a=2.236$ 呎; $x_1=2.155$ 呎.

406. 自行車自30呎之高處向右作翻筋斗運動，如第 466 圖，該求車在圈頂之速度。若人與車共重300磅，試求對於圈頂之壓力應爲若干？

答. 35.85 呎/秒. 2,100 磅.



第466圖

407. 有一直徑 2 吋，長 6 呎之鋼棍，於其一端通過一水平軸下垂。今以此棍爲一振幅甚小之單擺，試求其擺動之週期及振動中心。

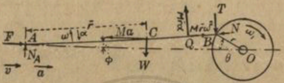
答. 2.216 秒; 4.00058 呎.

408. 若將前題中之圓棍先舉至水平位置，而後釋放，試求在釋放時之法線及切線分反動力。

答. $R_n=0$; $R_t=16.018$ 磅.

409. 在第467圖中,若$r=1$呎,$l=6$呎,$\bar{r}=3.8$呎,$W=200$磅,$P=10,000$磅,$\omega_1=30$弳/秒,$\theta=30°$,$I_A=120$,試求導板之正壓力N,及曲柄銷上垂直及平行於連桿之兩分反動力R_T與R_N.

答. $N=477$磅;$R_T=1,627$磅;$R_N=5,150$磅.



第467圖

410. 有一實心圓筒直徑4呎,重1,000磅,置於水平面上.今若在筒心用一100磅之水平力推之使向前自由滾動,試求水平面之摩擦力F及加速度a與α.

答. $F=33.33$磅;$a=2.147$呎/秒^2;

$\alpha=1.073$弳/秒^2.

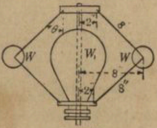
411. 有一實心球直徑2呎,重100磅,沿一30°之斜面向下自由滾動,已知斜面長10呎.試求該球達到底端之線加速度及摩擦力F之大小.

答. 15.16呎/秒^2;14.3磅.

412. 在第468圖所示調速器中,$W_1=50$磅,$W=10$磅.試求欲使此調速器保持如圖示之位置時,其速率應爲若干?每一支臂之張力等於若干?

答. 每分173轉.下面支臂之張力$=37.8$磅;

上面支臂之張力$=32.9$磅.

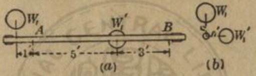


第468圖

413. 有一實心均質圓筒自由滾動於與水平成 β 角之斜面上. 試證 f 之最小值等於 $\frac{1}{3}\tan\beta$.

414. 在第 469 圖中，(a)示一轉動軸之旁面觀，(b)示其前面觀. 軸上裝有 W_1 及 W_1' 兩個重量. 若 $W_1=100$ 磅，$r_1=18$ 吋，$W_1'=50$ 磅，又 $r_1'=15$ 吋，今欲在 A, B 兩點半徑等於 12 吋之處各加入一重量以平衡之，試求兩重量之大小及兩半徑與水平面之交角.

答. $W_A=170$ 磅，$\theta_A=262°5'$; $W_B=43.1$ 磅，$\theta_B=154°10'$



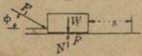
第 469 圖

第十六章　功,功率與能

177. 概論　前章所述之力,質量與加速度等之關係,均係根據牛頓運動定律演繹而得,此三者乃物體所以致成運動之必要因素.但加速度又含有速度,距離及時間三個元素,故在牛頓運動定律中實已含有六個元素,卽力,質量,加速度,速度,距離與時間.惟在一般工程問題中,尙有若干其他數量須常用及者,例如功(亦稱工作),功率,能,衝量,動量,衝擊等是.而此六者又均不外上述六元素之結合,例如力與距離結合而成功;力,距離與時間結合而成功率;質量與速度結合而成能與動量;力與時間結合而成衝量與衝擊.凡此諸項,本書將於以下各節依次分論之.

178. 功之定義　凡力作用於物體而使其沿作用之方向發生位移時,謂之對該物體作功,或稱**工作**.其成績卽以此作用力與其施力點運行距離之相乘積表之.

如第470圖,有 F_1, W, N 及 F 四力同作用於一物體,而使其沿水平面向右運動.W 與 N 兩力係沿垂直向作用,對於沿水平向之運動不生影響,故與功無關.至於 F_1 與 F 兩力作用於物體上,則使其運行 s 之距離,此時 F_1 之施力點亦運行 $s\cos\phi$ 之距離.故 F_1 所作之功實等於



第470圖

$$F_1 \times s \cos\phi$$

$F_1 \times s \cos\phi$，又可書爲 $F_1 \cos\phi \times s$. $F_1 \cos\phi$ 一值爲 F_1 沿其施力點運動方向之分力，故功之解釋亦可謂爲等於該力沿其施力點運動方向之分力與其施力點運動距離之相乘積. 此 $F_1 \cos\phi$ 分力卽稱爲功分力. 至於 F_1 之另一分力 $F_1 \sin\phi$，則並未作任何功.

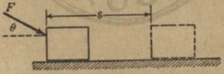
179. 功之代數表示法 上述 $F_1 \cos\phi \times s$ 一式，僅屬表示功之代數式之一種. 但力之大小有常有變，其作用之方向亦有種種不同，故表示功之方式自亦有異. 玆將最關重要之數例分述於下：

(1) 力之大小爲一常數，其方向亦爲一定，並與位移之方向相同者. 例如用手舉物，以等加速度舉至 s 高時，則其所作之功爲

$$U = F \cdot s,$$

式中 U 表所作之功.

(2) 力之大小爲一常數，其方向亦爲一定，但不與位移之方向相同者. 例如第 471 圖，其所作之功爲



第 471 圖

$$U = F\cos\theta \cdot s = F_t \cdot s,$$

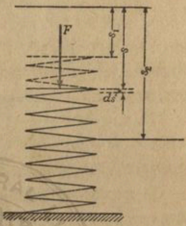
式中 $F\cos\theta$ 可以 F_t 代之，因 $F\cos\theta$ 係與施力點之路線相切.

(3) 力之大小爲一變數，但其方向爲一定，並與位移之方向相同者. 例如第 472 圖，有一螺旋彈簧，用力下壓使自 s_1 之地位變爲 s_2

之地位，在此種工作中，F 力卽係一變數．茲爲便利研究，可假定在極微小之位移 ds 中，F 爲一常數．於是由第一例，此 F 力在位移 ds 中所作之功爲 $dU=Fds$，而其對於彈簧所作全部之功，自其始値 F_1 變至終値 F_2 時之結果爲

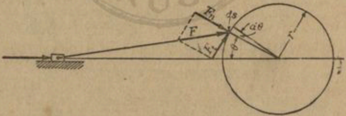
$$U=\int_{s_1}^{s_2}Fds.$$

在此式中，倘 F 與 s 之關係已知，則 U 卽可用積分法求得．



第 472 圖

（4）力之大小爲一變數，而其方向亦不一定者．例如第 473 圖中蒸汽機之連桿對於曲柄銷之壓力．此 F 力所作之功仍可用第(3)例之方式表之，惟 F 應易爲切線分力 F_t，卽



第 473 圖

$$U=\int_{s_1}^{s_2}F_t ds.$$

此式對於施力點所運行之路線，無論係一圓形與否，均可適用．但當

所行之路綫為一圓形，則其位移 ds 可以 $ds=rd\theta$ 一式表之．因之，

$$U=\int_{s_1}^{s_2}F_t ds=\int_{s_1}^{s_2}F_t r d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}Td\theta,$$

式中 T 為轉力矩，或即 F 力對於圓形路綫中心之力矩．又若當角移 $\theta=\theta_2-\theta_1$ 時，力矩 T 為一常數，則

$$U=T\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta=T(\theta_2-\theta_1)=T\cdot\theta.$$

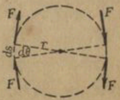
故在曲柄轉動一週期間，F 力所作之功應等於 $U=T\cdot 2\pi$．若在每一單位時間內轉動 n 周，則其每一單位時間所作之功為

$$U=T\cdot 2\pi n.$$

因功為一種無向量，故某力所作之功可與另一力所作之功相加，無論該力之作用方向或其施力點之位移如何，均能求其代數和．同理，在一羣物體中，力對於某一物體所作之功又可與其對於另一物體所作之功相加，無論此羣物體運動之狀態如何，亦均能求其代數和．

185．力偶所作之功　在第 474 圖中，設力偶 F，F 作用於一物體，使其轉動 $d\theta$ 之角，並假定在此微小位移 ds 中之 F 力為一常數，則此力偶所作之功等於 $2Fds$，或 $2Frd\theta$．但 $F\cdot 2r$ 乃此力偶之力矩，故力偶在角移 $d\theta$ 中所作之功實等於力偶矩 T 與力偶之角移 $d\theta$ 之相乘積．再者，若力偶之角移為 $\theta=\theta_2-\theta_1$，則所作之功為

$$U=\int_{\theta_1}^{\theta_2}Td\theta.$$



第 474 圖

倘在角移 θ 中，力偶之力矩為一常數，此力偶

所作之功卽爲

$$U=T\cdot\theta.$$

181. 功之記號 功有正有負：凡位移與功分力取同一方向者，其功爲正，如第470圖中之 F_1；凡位移與功分力取相反方向者，其功爲負，如第470圖中之摩擦力 F，並以 $-Fs$ 表之，蓋在此情形中，所施之力不特無助於物體之運動，反將阻滯之也.

182. 功之單位 凡一單位之力作用於一物體使其運動一單位之距離，則其所作之功稱爲一單位之功. 因力之單位旣有絕對與重力之分，故功之單位亦應分絕對與重力兩種.

功之絕對單位，在公制中，係以一達因之力作用於一物體，使其生一厘米之位移，此一單位之功，稱爲一爾格. 惟因爾格之値過小，不便計算，故乃採用另一較大單位，爲爾格之千萬倍，卽 10^7 爾格，稱爲一焦耳.

功之重力單位，在公制中，如力用公斤，位移用公尺，則功之單位爲公尺公斤. 如力用克，位移用厘米，則功之單位爲克厘米. 在英制中，力用磅，距離用呎，功之單位爲呎磅. 以上各種單位其關係如下：

$$1\text{公尺公斤}=1,000\times100\text{克厘米}=1,000\times100\times980\text{達因}$$
$$=9.8\times10^7\text{爾格}=9.8\text{焦耳}.$$

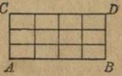
$$1\text{公尺公斤}=7.233\text{呎磅}.$$

$$1\text{呎磅}=0.1383\text{公尺公斤}.$$

183. 功之圖解表示法 用積分法以求一種變力所作之功，有時因功分力 F_t 與位移 s 之關係過於複雜，不易計算，故每應用圖解法以解之. 蓋功爲力與位移之相乘積，力與位移旣均爲一種有向量，

可用矢量表之，故功亦可用一種面積表之.

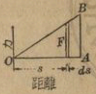
如第 475 圖，命 AB 按某一比例尺表其位移 s，又 AC 按同一或另一比例尺表力之大小. 設力之大小為一常數，則面積 $ABCD$，因其為 AB 與 AC 之相乘積，即表所作之功. 若 AB 表 4 公尺，又 AC 表 3 公斤，則每一方格之面積表一公尺公斤之功，其全部面積即表 12 公尺公斤之功.



第 475 圖

若力之大小為一變數，則縱標之高雖不盡相同，但其面積仍表所作之功. 其中最簡之例為力與距離互成比例者：如力由零昇至一最大值，或由一最大值降至零，其結果皆為一三角形，如第 476 圖所示. 圖中縱標 AB 按某一比例尺表 F 力之最大值，其最小值等於零，由此按一定比率逐漸增加. 於是 F 力所作之功由三角形 OBA 之面積表之，即等於 $\frac{1}{2}AB \times AO$. 或命 F_1 等於 F 力之最大值，s_1 等於總距離，則

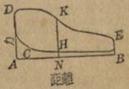
$$U = \tfrac{1}{2}F_1 s_1.$$



第 476 圖

至若 F 力之變化既不規則，而 F 與 s 間之關係又不明瞭，例如第 477 圖中之蒸汽示功圖，則其面積可用辛博生三分一定律，或將其分成若干長狹之面積，逐一按梯形計算之. 倘能用求積儀，則更為簡單準確.

設在第 477 圖中，命 AB 表大氣壓力線. 則在上部曲線中任一縱標，例如 NK，表當活塞自左向右行至該點時，汽缸內之



第 477 圖

蒸汽壓力，而面積 $ADEB$ 即表蒸汽之全功. 又在下部曲線中相應之縱標，例如 NH，表此活塞於回程中行至該點時，汽缸內之蒸汽壓力. 此種回壓力所作之功應爲一負數，由面積 $ADCHB$ 表之. 故在每一來回衝擊中，蒸汽所作之淨功應等於面積 $CDKEH$.

例題 107. 有一 140 公噸之列車，以每時 10 公里之等速率行駛於 2% 之坡度上，共行 1 公里之距離. 試求其對於抵抗重力所作之功. 若列車阻力爲每公噸 4 公斤，試求機車所作之功共爲若干?

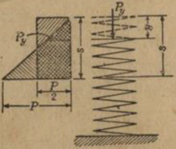
解 因列車行駛於 2% 之坡度上，故其切線分重量應爲 $\frac{2}{100}\times 140,000=2,800$ 公斤.

行駛 1 公里之距離，其對於抵抗重力所作之功等於 $2,800\times 1,000=2,800,000$ 公尺公斤.

列車阻力 $=140\times 4=560$ 公斤. 又列車之切線分重量 $=2,800$ 公斤，故抗阻列車運動之總力應爲 $560+2,800=3,360$ 公斤.

機車行駛 1 公里距離所作之功共等於 $3,360\times 1,000=3,360,000$ 公尺公斤.

例題 108. 有一螺旋彈簧，如第 178 圖，其彈性係數爲 200 磅/吋，因在軸線上受有作用力而向下壓縮 4 吋. 試求該力對於壓縮彈簧所作之功.



第 78 圖

解 命 P_y 表相當於彈簧被壓縮 y 吋時之任一力. 於是由第 179

節第(3)例，得

$$U=\int_0^s P_y dy.$$

但　　$P_y=200y,$

因之，　$$U=\int_0^s 200y\,dy=\frac{200s^2}{2}=\frac{200\times 4^2}{2}\ (\text{當 } s=4 \text{ 吋時})$$

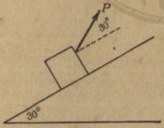
$$=1,600 \text{ 吋磅}.$$

方程式 $U=\frac{200s^2}{2}$ 又可作 $U=\frac{200s}{2}\times s=\frac{P}{2}\times s=$ 平均力 $\times$ 總位移，亦即等於三角形示功圖之面積，如圖所示.

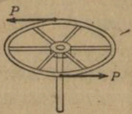
習　題

415．有一方形物體重 80 斤，置於 $30°$ 之斜面上，如第 479 圖所示，用一 60 斤之力 P 牽之，使向上行動 20 尺之距離．設摩擦係數爲 $\frac{1}{4}$，試求作用於該物體之諸力所作之全功．

答．42.8 尺斤．



第 479 圖



第 480 圖

416．第 480 圖示一汽閥之手輪，其直徑爲 1 尺．當轉動手輪時，兩手所施之力 P,P 成一等力偶．設欲使此汽閥閉緊，須將手輪迴轉

8 次，並令 P 力之大小各等於 20 斤，試求其所作之功.

答. 1,005.3 尺斤.

417. 重 160 公噸之列車，以每時 30 公里之速率行駛於 1 %之坡度上，共行 2 公里之距離. 若列車阻力為每公噸 3 公斤，試求機車所作之功.

答. 4,160,000 公尺公斤.

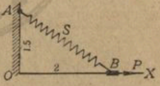
418. 長 200 尺之鋼繩通過一滑車上，兩端各垂下 50 尺及 150 尺. 鋼繩每尺重 2 斤. 今若將滑車轉動，使鋼繩兩端垂下之長相等，試求對於抵抗重力所作之功.

答. 5,000 尺斤.

419. 今欲開一直徑 30 尺，深 50 尺之土井，假定土重每立方尺為 100 斤，又堆土地點高出井面 6 尺，試求將此井內之土全部取去所作之功.

答. 109,563,000 尺斤.

420. 在第 481 圖中，彈簧 S 之一端固結於直牆上之 A 點，另一端則繫於空心鐵塊 B 上. 鐵塊中心穿過一光滑水平棍 OX. 當用力 P 挽 B 使向右滑動時，彈簧卽隨之延伸. 假設彈性係數為 60 斤/尺，試求鐵塊自 O 滑動至 B 時彈簧所作之功.



第 481 圖

答. 30 尺斤.

184. 功率之定義 前已言及，功之成積，係以力與施力點運行距離之相乘積表之. 惟此距離實隨時間及速度而異，同一機械在同

一速度內，動作時間長，所作之功亦多，動作時間短，所作之功亦從而減少. 故欲比較各機械之工作能力，應就在同一時間內所作之功論之，易言之，卽應以單位時間內所作之功量爲標準. 某機械在單位時間內所作之功卽稱爲該機械之功率. 例如發電機，蒸汽機，汽油發動機，凡研究其力量之大小者，卽係按其所能產生之功率而論之也.

功率之定義既如上述，是其與功之意義固大有區別. 如重100斤之物體舉高10尺，則無論該物體係於一秒，或五秒間舉至如是高度，其所作之功恆相等，但功率則不然. 其在一秒間舉起者，功率爲每秒1,000尺斤，在五秒間舉起者，功率爲每秒200尺斤. 如以公式表之，命U爲在時間t內所作之功，P爲功率，則

$$P=\frac{U}{t}.$$

上式係假定P爲一常數. 至若P爲一變數，則在任何時間，

$$P=\frac{dU}{dt}.$$

185. **功率之單位** 凡於單位時間內生單位之功者稱爲單位功率. 在重力單位中，功率通常以每秒若干呎磅(呎磅/秒)，或每秒若干公尺公斤表之(本書兼採用每秒若干尺斤). 在絕對單位中，則多爲每秒若干達因(爾格/秒)，或每秒若干焦耳.

惟此種單位，在一般工程問題中似覺過小，不適於用，故更採用一種較大值者. 例如重力單位，在英美諸國用馬力，簡記爲 H.P.，其意義爲一分鐘間作成 33,000 呎磅之功，或一秒間作成 550 呎磅之功. 法德諸國雖亦用馬力，但爲一分鐘間作成 4,500 公尺公斤之功，或一秒間作成 75 公尺公斤之功. 故法德一馬力較之英美約少七十分之一，卽

$$1 \text{ 英制馬力} = 1.014 \text{ 法制馬力};$$

$$1 \text{ 法制馬力} = 0.986 \text{ 英制馬力}.$$

在絕對單位中，係採用瓦特及仟瓦，其定義如下：

$$1 \text{ 瓦特} = 10^7 \text{ 爾格/秒} = 1 \text{ 焦耳/秒};$$

$$1 \text{ 仟瓦} = 1,000 \text{ 瓦特}.$$

瓦特及仟瓦用於電氣工程中最廣. 如按英制馬力換算，則得

$$1 \text{ 馬力} = 746 \text{ 瓦特};$$

$$1 \text{ 仟瓦} = 1.34 \text{ 馬力}.$$

上述換算率有時特取其近似值，約爲

$$1 \text{ 馬力} = \frac{3}{4} \text{ 仟瓦};$$

$$1 \text{ 仟瓦} = \frac{4}{3} \text{ 馬力}.$$

又有用馬力時，或仟瓦時者，此種單位自較前述更大. 一馬力時爲一馬力之常率於一小時間所作之功，即

$$1 \text{ 馬力時} = 33,000 \times 60 = 1,980,000 \text{ 呎磅}.$$

同理，

$$1 \text{ 仟瓦時} = \frac{1,000 \times 60 \times 60}{9.8} = 367,000 \text{ 公尺公斤}$$

$$= 1.34 \times 1,980,000 = 2,650,000 \text{ 呎磅}.$$

習 題

421. 礦井絞機於一分鐘間將重 600 磅之昇降機絞高 500 呎，試求其功率若干？

答. 9.09 馬力.

422. 輪帶緊邊之張力爲 800 磅，鬆邊之張力爲 350 磅. 滑輪直徑 2 呎. 若滑輪之速率爲每分 240 轉，試求其所傳送之馬力若干?

答. 20.6 馬力.

423. 今有兩滑輪同裝於一輪軸上，相距 10 呎. 若主動輪自皮帶傳來之動力等於 3 馬力，又輪軸之等速率爲每分 150 轉，試求傳送於輪軸之轉力矩若干?

答. 105 磅呎.

424. 起重機於 10 秒鐘內將 6 立方呎之混凝土絞起 15 呎. 若每立方呎混凝土重 125 磅，又土斗本身重 150 磅，試求起重機所用馬力.

答. 2.46 馬力.

425. 有一 500 仟瓦之發電機，其電力 90% 係用於某工廠，如該工廠每日工作 8 小時，又每仟瓦時(稱爲1度)之電費需銀一角，試求該工廠每日應納電費若干?

答. 360 元.

186. 能之定義　所謂能者，乃物體可以作功之能力. 蓄功之作成原由於力，力之含蓄於物體內者是謂之能，施之於外者乃謂之力. 凡物體內存有若干之能，斯可以作若干之功. 例如鐘錶發條，捲緊後蓄有若干之能，因能與鐘錶內部之摩擦相抗衡，乃使時針繼續移動. 又如內燃發動機之爆發汽體蓄有若干之能，因能於被燃後發生極大之爆炸力，推動活塞，乃使機器轉動.

物體內所含之能，因其表現於工作之狀態，有種種不同，故能遂有若干分類：其表現於外而發生機械之動作者，是謂機械能；其發生極大之熱量者，是謂熱能；其發生化學作用者，是謂化學能；又其發

生電力作用者,是謂電能.近世科學智識雖已充分發展,但對於能之各種狀態之研究,實尚未臻於完滿境地,仍有賴吾人繼續努力.目前所可得而言者,不過一種之能經過適當手續,可以轉變爲他種之能而已.綜合上述,其中僅有機械能與動力學發生較大關係,本書於以下諸節將專論之,其他數種非範圍所及,概行從略.

按機械能依其性質又別爲兩類:一曰位能;乃物體之組織因其位置之關係上所蓄有之能;又一曰動能,乃物體在運動狀態中所蓄有之能.

此外,由能之定義,可見能與功均爲一種無向量,故其所用單位二者亦相同.

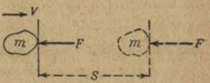
187. 位能 位能爲物體之組織因其位置之關係上所蓄有之能.例如捲緊之發條與壓縮之氣體,因其內部各質點間之相對位置而蓄有可以作功之能力.又如高處之水含有位能,當其建瓴而下,可以推動水輪.惟此種位能,質言之,並非爲水所單獨含有,實由於水與地球之相對位置關係而生.惟前已假定地球爲一固定之物體,是以位能乃假定爲專屬於水.

上述之水設其在高處之位置爲 h_1,落至水輪上之位置爲 h_2,則其上下之位置差爲 h_1-h_2.又命水重爲 W,於是水所含有之位能爲 $W(h_1-h_2)$.此種位能當水降落達於水輪上時,立即變爲水力.

又如舉 W 斤物體於 h 尺之高處,則該物體將含有 Wh 尺斤之位能,倘任其自由落下時,立可生 Wh 尺斤之工作.

188. 動能 動能爲物體在運動狀態中所蓄有之能.因物體在運動中含有若干之動能,故可作成若干之工作.工作一經完成,動能

亦瞬即消失.似此释義,學者或未易深切明瞭,試更以圖說明之.如第482圖,設有質量 m 之質點,以速度 v 運動於一定方向.今若於反對方向施以阻力



第482圖

F,使此質點之運動速度漸減,迨行經 s 之距離後終至靜止.於是阻力 F 所作之功等於

$$F\cdot s.$$

但 $$F=m\cdot a=\frac{W}{g}a,\quad 又\quad s=\frac{v^2}{2a},$$

因之, $$Fs=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2.$$

故 F 力所作之功亦即等於 $\frac{1}{2}mv^2$. 反之,此質點以速度 v 自 b 運動至 c,其所作之功卽係抵抗此種阻力,亦將等於 $\frac{1}{2}mv^2$.關於此 $\frac{1}{2}mv^2$ 一數量卽稱爲該質點之動能,通常多以 E_k 表之,卽

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2.$$

189. **物體移動中之動能**　前述之動能雖僅指一質點而言,但一個物體乃由若干質點所組成,故質點之動能仍可適用於物體本身,卽一個物體之動能,恆等於其所含各質點動能之總和.命 M 爲物體之質量,m 爲其中任一質點之質量,E_k 爲物體之動能.則

$$E_k=\Sigma\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}v^2\Sigma m=\frac{1}{2}Mv^2.$$

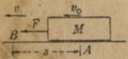
因物體之運動有移動,轉動及平面運動之分,故本書對於物體

之動能亦分爲三類討論之.

在物體之移動中，所有各質點無論在任何時間內，恆得同一速度，易言之，即 v 爲一常數，故物體之總動能等於

$$E_k = \Sigma \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} M v^2.$$

今設有一質量 M 之物體，受一組之力所作用，自 A 運行至 B，如第48圖. 命 F 爲所有作用力之合力，又 s 爲 A, B 間之距離，v_0 爲物體在 A 之速度，v 爲在 B 之速度. 於是此一組之力所作之功等於



第48圖

$$U = \int_0^s F ds.$$

但 $$F = Ma, \qquad 又 \qquad a ds = v dv,$$

$$U = \int_0^s F ds = \int_0^s M a ds = \int_{v_0}^{v} M v dv$$

$$= \frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} M v_0^2.$$

$\frac{1}{2} M v_0^2$ 爲物體在 A 之動能，而 $\frac{1}{2} M v^2$ 爲物體在 B 之動能. 因得下一原則:

在任一移動中，合力所作之正功等於動能之增加量.

惟有若干問題，與其用合力 F 爲計算根據，不如先分別求各力所作之功較爲便利. 命 $F_1, F_2, \cdots\cdots$ 表各作用力之大小，$F_1', F_2', \cdots\cdots$ 表其在物體運動方向之各分力，則

$$U = \int F_1' ds + \int F_2' ds + \cdots\cdots.$$

倘此一組之力均爲常數，又若各力沿運動方向所作用之距離各等於 $s_1, s_2, \cdots\cdots$，則

$$U=F_1's_1+F_2's_2+\cdots\cdots.$$

倘此一組之力中，有若干係屬阻力，則其所作之功應爲一負數．因又得一原則如下：

在任一移動中，正力所作之功減去負力所作之功等於動能之增加量，即

$$\text{正功}-\text{負功}=\text{末動能}-\text{初動能}.$$

如以初動能 $\frac{1}{2}Mv_0^2$ 移至左邊，則得

$$\text{初動能}+\text{正功}-\text{負功}=\text{末動能}.$$

倘此一組之力中有若干係屬變數，則功與動能之關係如下式：

$$U=\int Fds=\frac{1}{2}Mv^2-\frac{1}{2}Mv_0^2.$$

例題 103．有一 80,000 磅之列車行駛於 2% 之坡度上，機車牽桿之平均牽力爲 1,000 磅．若列車阻力爲每噸 6 磅，又初速度爲 20 呎/秒，試求列車行駛若干距離後，其速度將減至 10 呎/秒？

解　命 s 爲所求之距離．

$$\text{初動能}=\frac{1}{2}Mv_0^2=\frac{1}{2}\times\frac{80,000}{32.2}\times 20^2=497,000 \text{ 呎磅}.$$

$$\text{正　　功}=1,000s.$$

$$\text{列車阻力之負功}=40\times 6s=240s.$$

$$\text{重力之負功}=\frac{80,000\times 2}{100}s=1,600s.$$

$$\text{末　動　能}=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}\,\frac{80,000}{32.2}\times 10^2=124,200 \text{ 呎磅}.$$

於是 $$497,000+1,000s-240s-1,600s=124,200,$$

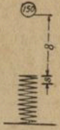
或 $$840s=372,800,$$

$$\therefore\quad s=444\text{呎}.$$

例題 110. 有一重150斤之物體自靜止向下降落8尺，打擊一2,000斤之彈簧．試求此彈簧之變形．

解 第484圖示在開始降落之前該物體與彈簧之相對位置．物體在開始降落之前係在靜止狀態，故其初動能為零．迨既降落於彈簧以後，又回復其靜止狀態，因之，其末動能復為零，而彈簧乃獲得最大之壓力．今命彈簧之變形等於 s 寸，則彈簧之阻力等於 $2,000s$；或 s 以尺計，彈簧之阻力等於 $20,000s$．又物體所作之正功為 $150(8+s)$，彈簧所作之負功為

$$\int_0^s 20,000s\,ds.$$



第48圖

於是 $$150(8+s)-\int_0^s 20,000s\,ds=0,$$

或 $$1,200+150s-10,000s^2=0,$$

$$\therefore\quad s=0.354\text{尺}=3.54\text{寸}.$$

習 題

426. 有一20斤重之物體，自12尺之高處自由降落至地面．試計算其動能及達到地面時之速度．

答．240尺斤；26.6尺/秒．

427. 有一100斤重之物體，置於一水平面上，物體與水平面間

之摩擦係數爲 $f=0.4$. 今若沿水平向施以 60 斤之力，試求此物體運行至 30 尺後其速度應爲若干？

答. 18.8 尺/秒.

428. 若前題中物體之速度增至 25 尺/秒，並將 60 斤之力易爲 30 斤，試求該物體將更進行若干尺？

答. 106.3 尺.

429. 貨車一列共掛車 50 輛，每輛重 150,000 磅，行駛於 $\frac{1}{2}\%$ 之坡度上. 坡長 8,000 呎. 機車牽桿之平均牽力爲 70,000 磅. 若列車之初速度爲 6 哩/時，又列車阻力爲每噸 8 磅，試求達到坡頂時其速度應爲若干？

答. 10.78 哩/時.

430. 有一重 500 斤之物體，自 4 寸之高處落下，打擊一 2,500 斤之彈簧. 試求彈簧發生若干寸之變形？

答. 1.48 寸.

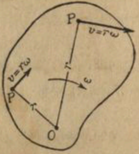
431. 有一重 100 磅之物體，置於一傾角 60° 之斜面頂上，令其自由落下. 當其落至 10 呎處，乃與一 150 磅之彈簧相撞擊. 若物體與斜面間之摩擦係數 $f=0.25$，又當物體落下時始終與斜面相接觸，試求彈簧被壓縮若干吋？

答. 11.4 吋.

190. 物體轉動中之動能 命第 485 圖示某物體以角速度 ω 繞 O 軸轉動，P 爲其中任一質點，其質量爲 dM，對 O 軸之距離爲 r，則其線速度爲 $r\omega$，動能爲 $\frac{1}{2}dMr^2\omega^2$. 於是該物體之總動能爲 $\int\frac{1}{2}dMr^2\omega^2$. 但因所有各質點在任何時間內之 ω^2 均相同，又因 $\int dMr^2=I_0$，故物

體轉動中之動能 $=\frac{1}{2}I_0\omega^2$.

倘該轉動體之形狀尚屬規則，則其慣性矩 I_0 之值可按普通積分法計算；否則當以實驗法求之.



第485圖

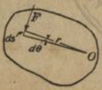
至於求轉動中功與動能之關係，可應用移動中之動能同一原則. 茲述之於下:

(1) 設所施之力爲一切線力，如第486圖之 F，則當其運動 ds 距離時，所作之功等於

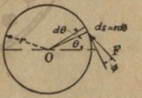
$$Fds=Frd\theta.$$

若 F 非一切線力，則應先求其切線分力，再求此分力所作之功.

(2) 設所施之力爲一組之力，命 F 爲其合力（僅有在 O 點之反動力除外），如第487圖所示；並命 ϕ 爲此合力 F 與其轉動圓之切線



第486圖



第487圖

之交角. 於是當 F 力之施力點運動 ds 距離時，F 力所作部分之功等於

$$dU=F\cos\phi\, ds,$$

但因

$$ds=rd\theta,$$

$$\therefore\quad dU=F\cos\phi\, rd\theta.$$

惟 $Fr\cos\phi$ 一數量乃爲 F 力對於轉動軸 O 之轉力矩，等於 $I\alpha$，又 $\alpha d\theta=\omega d\omega$，故

$$dU=I\alpha d\theta=I\omega d\omega.$$

F 力所作全部之功即等於

$$U=\int_{\omega_0}^{\omega}I\omega d\omega=\frac{1}{2}I\omega^2-\frac{1}{2}I\omega_0^2,$$

式中 $\frac{1}{2}I\omega^2$ 爲該物體之末動能，$\frac{1}{2}I\omega_0^2$ 爲該物體之初動能.

若在此一組之力中，有若干係屬阻力，則其所生之轉力矩爲一負數，而其所作之功亦爲一負數. 因得一原則如下：

在任一轉動中，所有正力所作之功減去所有負力所作之功等於動能之增加量，即

初動能＋正功－負功＝末動能.

例題 111. 有一飛輪及輪軸共重 1,800 磅，以每分 80 轉之速度轉動於軸承內. 輪軸直徑 3 吋，飛輪及輪軸之環動半徑爲 $k=2.5$ 呎. 若摩擦係數 $f=0.01$，試求飛輪轉動若干時之久始行停止?

解 作用於飛輪及輪軸上之力僅爲其與軸承之摩擦力，乃一負力，故其所作之功亦爲一負功. 在每一轉中，此種摩擦力所作之功爲 $fN\times 2\pi r$. 在 n 轉中，其所作之功爲

$fN\times 2\pi rn=0.01\times 1,800\times 2\pi\times 0.125n$，或 $14.16n$ 呎磅.

由上述原則，得

初動能－負功＝末動能＝0,

或
$$\frac{1}{2}I\omega^2-fN\times 2\pi rn=0.$$

但 $$I=Mk^2=\frac{1,800}{32.2}\times 6.25=349,$$

$$\omega=\frac{80\times 2\pi}{60}=8.39,\quad \omega^2=70.3,$$

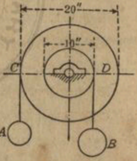
$$\frac{1}{2}I\omega^2=12,280\text{ 呎磅}.$$

於是 $$14.16n=12,280,$$

$$\therefore\quad n=867\text{ 轉}.$$

因飛輪之加速度爲一常數,故其每分鐘之平均轉動數=40.因之,轉動 867 轉所需之時間=867÷40=21 分 40 秒.

例題 112. 在第 488 圖中,有 A, B 兩重量分別用柔索繫之,使繞於大小不等之 C, D 兩滑輪上. A 重 20 磅, B 重 50 磅. 又滑輪對於轉動軸之慣性矩 = 1,200 磅吋^2, 並假定轉動軸上之摩擦力爲一常數,其力矩等於 10 吋磅. 又柔索之重量不計. 試求(a) A, B 兩重量之加速度,(b)假定兩重量係由靜止向上下運動,其在 5 秒末之速度各爲若干? 及(c)此一組物體在 5 秒末之總動能.



第 488 圖

解 在此題中, A, B 兩重量之運動係屬移動, C, D 兩滑輪之運動係屬繞其通過重心之軸之轉動,茲就各個部分分別討論之. (一)作用於重量 A 之力應爲一向下之重力 W_A = 20 磅,及一由於柔索 AC 所生之向上張力 T_A. (二)作用於重量 B 之力應爲一向下之重力 W_B=50 磅,及一由於柔索 BD 所生之向

上張力 T_B.（三）作用於滑輪之力，除滑輪本身之重力外，倘有由於柔索在 C,D 兩點所生之向下張力 T_A 及 T_B，及軸承所生之合阻力．此一合力又可分解爲一垂直分力及一與其表面相切之摩擦力．由圖中觀之，可見此滑輪應取順時針向轉動．

命 $v_A=A$ 之線速度，$v_B=B$ 之線速度．$\omega=$ 滑輪之角速度．$a_A=A$ 之線加速度，$a_B=B$ 之綫加速度．$\alpha=$ 滑輪之角加速度．於是在任何時間，當得

$$\omega=\frac{12v_A}{10}=\frac{12v_B}{5}, \tag{1}$$

又
$$\alpha=\frac{12a_A}{10}=\frac{12a_B}{5}. \tag{2}$$

所有作用於重量 A 諸力之合力應爲一通過其重心之垂直力，等於

$$T_A-20=\frac{20}{g}a_A. \tag{3}$$

所用作用於重量 B 諸力之合力應爲一通過其重心之垂直力，等於

$$50-T_B=\frac{50}{g}a_B. \tag{4}$$

所有作用於滑輪之諸力之合力應爲一力偶，其力矩等於

$$T_B\times\frac{5}{12}-T_A\times\frac{10}{12}-\frac{10}{12}=\frac{1,200}{144g}\alpha. \tag{5}$$

將 $a_A=\frac{10}{12}\alpha$ 及 $a_B=\frac{5}{12}\alpha$ 等值代入(3)，(4)，(5)諸式，解之，得

$$\alpha=\frac{48g}{445}=3.47 \text{ 逕/秒}^2.$$

又 $$T_A=20+\frac{200}{12g}\alpha=21.8\text{ 磅},$$

$$T_B=50-\frac{250}{12g}\alpha=47.8\text{ 磅}.$$

(a) 由(2)式,得 $a_A=\frac{10}{12}\alpha=\frac{8g}{89}=2.89$ 呎/秒^2,

又 $$a_B=\frac{5}{12}\alpha=\frac{4g}{89}=1.45\text{ 呎/秒}^2.$$

(b) 因重量係自靜止開始運動,故於5秒末,

$$v_A=a_At=\frac{40g}{89}=14.47\text{ 呎/秒},$$

又 $$v_B=\frac{1}{2}v_A=\frac{20g}{89}=7.24\text{ 呎/秒}.$$

(c) 此一組之力所生之總動能應等於重量A,B及滑輪之動能之總和.

故 $$E=\frac{20}{2g}\left(\frac{40g}{89}\right)^2+\frac{50}{2g}\left(\frac{20g}{89}\right)^2+\frac{1.200}{2\times 144g}\left(\frac{48g}{89}\right)^2$$

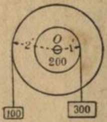
$$=\frac{400g}{89}=145\text{ 呎磅}.$$

習 題

432. 有一鋼鼓輪,直徑8吋,長10呎,正以每分240轉之速度轉動.試求其動能.

答. 932 呎磅.

433. 第489圖示一直徑2呎之滑輪固結於一直徑4呎之滑輪上,自由轉動於其公共幾何軸O.兩輪共重200磅,其環動半徑$k=1.5$



第 489 圖

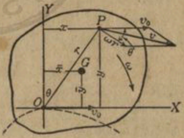
呎．今若於小輪上繞一柔索，下懸一 300 磅之重量，又於大輪上以反向繞一柔索，下懸一 100 磅之重量，試求當 300 磅之重量自靜止向下運動 5 呎時，該滑輪之轉動速率．輪軸之摩擦不計．

答．每分 50.5 轉．

434．有一 5 呎長之圓棍重 20 磅，自由轉動於距一端 1 呎處之垂直軸上．今若將此圓棍垂直倒豎，而後釋放，試求當圓棍通過水平位置時，其速度為若干？當落至最低位置時，其速度又為若干？

答．4.72 弳/秒．6.68 弳/秒．

191．平面運動中之動能 一個剛體之平面運動，無論在任何時間內，均可假定為兩項運動之結合：其一為該物體對通過運動平面內任一點 O 之軸之純轉動；又一為該物體之移動．此點業經於第 152 節中詳加論述．故一個物體中任一質點 P 之速度 v，應為該質點繞 O 轉動之線速度 ωr，及其移動之線速度 v_0 兩者之和，如第 490 圖中所示．其次，剛體中任一質點之線速度 ωr，其方向應與 r 成垂直．故矢量 v_0 與矢量 ωr 之交角 θ 應等於 r 與 Y 軸之交角 θ．於是依三角學原理，



第 490 圖

$$v^2=(\omega r)^2+v_0^2+2v_0\omega r\cos\theta.$$

在此圖中，即以 O 為原點，作 X 及 Y 兩直角坐標軸，並為簡便計，即

以 X 軸與矢量 v_0 取同一方向. 今因質點 P 之動能等於

$$dE_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\overline{\omega r}^2+v_0^2+2v_0\omega r\cos\theta),$$

故物體本身之總動能應等於

$$E_k=\Sigma\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\Sigma m(\overline{\omega r}^2+v^2+2v_0\omega r\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\Sigma m\omega^2r^2+\frac{1}{2}\Sigma mv_0^2+\Sigma mv_0\omega r\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}\omega^2\Sigma mr^2+\frac{1}{2}v^2\Sigma m+\omega v_0\Sigma mr\cos\theta.$$

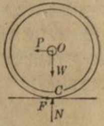
但 Σmr^2 為該物體對於 O 軸之慣性矩, 因之, $\Sigma mr^2=I_0$; 又 $r\cos\theta=y$, 因之, $\Sigma mr\cos\theta=\Sigma my=M\bar{y}$, 其中 M 為該物體之總質量, $\bar{y}$ 為質心與 X 軸之距離.

故 $$E_k=\frac{1}{2}I_0\omega^2+\frac{1}{2}Mv_0^2+M\bar{y}\omega v_0. \tag{1}$$

惟此式係特指 X 及 Y 軸取如上圖所示之位置而言. 實則 O 可為運動平面內之任一點, 故物體之質心亦可取為原點 O; 若然則 $\bar{y}=0$, I_0 變為 $\bar{I}$, 又 v_0 變為 $\bar{v}$. 於是物體之總動能等於

$$E_k=\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2+\frac{1}{2}M\bar{v}^2. \tag{2}$$

例題 113. 第 491 圖示一實心圓柱, 直徑 4 呎, 重 1,000 磅. $P=100$ 磅. 試求當此圓柱自靜止向前運動 5 呎後, 其速度等於若干?



第 491 圖

解 P 力所作之功 $=5\times100=500$ 呎磅. 至於 W 力對於物體本身並未作功, 蓋 W 力之施

力點，就其作用之方向言，實毫未發生上下運動. 又 F 及 N 兩力對於該物體亦未作功，蓋其施力點係在靜止狀態. 於是

$$U=500=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I_0\omega^2.$$

因 $$I_0=\frac{1}{2}Mr^2,\quad 及\quad r\omega=v,$$

$$\therefore\quad 500=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{4}Mr^2\omega^2=\frac{3}{4}Mv^2=\frac{3}{4}\ \frac{1,000}{32.2}v^2.$$

$$v=4.633呎/秒.$$

習　題

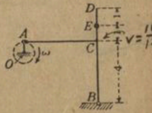
435. 有一鑄鐵圓盤，直徑 2 呎，厚 3 吋，以每秒 20 呎之速度滾動於一水平地板上. 試求其動能.

答. 3,294 呎磅.

436. 有一直徑 3 吋，厚 1 吋之鋼圓盤，在一長 8 呎，傾角 30° 之斜面上自由滾落. 試求此圓盤落至斜面底部之角速度. 又摩擦力 F 應爲若干?

答. 104.8 弳/秒; 0.334 磅.

437. 在第492圖中，OA 爲曲柄，長 4 吋，正以每分 90 轉之速度轉動. AC 爲連桿，聯結於圓棍 BCD，此圓棍之上下粗細一律，重20磅. 在圓棍之 CD 間有一 4 磅之重量，其位置如圖所示. 當曲柄轉動時，連桿卽牽引圓棍，使左右擺動. 試求圓棍 BCD 及重量 E 之總動能.



答. 3.26 呎磅.

第 492 圖

438. 試求例題 103 中連桿之動能.

答. 1,820 呎磅.

192. 能之散逸 運動之物體常因與其接觸而間恆發生若干之摩擦力而消耗能量. 蓋施力於物體，首須抵抗此種摩擦，倘其力不足勝，則物體自不生運動，而所作之功必亦耗於無用. 反之，力量漸增至足以勝其摩擦時，物體之運動乃立即發生. 此種因摩擦而消耗於無用之功，大抵均化為熱能而散逸，故稱為消耗功；其使物體發生運動成為有效之作功者，則稱為有效功. 消耗功與有效功之和應等於物體之輸入能，即

$$輸入能=有效功+消耗功.$$

任何機械，無論其構造如何精細，當其動作時，恆發生若干摩擦，消耗若干能量轉變為熱. 是以機械之設計，務令其摩擦減至最小限度. 凡機械所作之有效功，亦即其輸出能，與其輸入能在某一定時間內之比率，稱為機械之效率. 以公式表之，

$$效率=\frac{輸出能}{輸入能}.$$

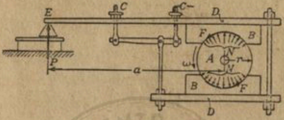
故若摩擦，或消耗功，能減至最小限度，則所得效率自將增至最大數. 惟達100%之理想效率，在宇宙間實無此物.

雖然，一般機械之構造在力求減少其摩擦，但亦有某種機械如制動器等特利用摩擦力以散逸其輸入能者.

惟以上所謂能之散逸絕非即能之毀滅，蓋物體所作之功因摩擦關係，其一部分乃散逸為熱，即由機械能變為熱能，故不論在何種工作中，一種能可以轉變為他種能，而能之總量恆不變，易言之，即能

可以轉移或變換，但不能創造或毀滅．是即有名之能量不滅論．

193. 測功器 第 493 圖爲一種簡單測功器，通稱爲博郎尼測功器．A 爲一有邊滑輪，裝置於一轉動軸上．B,B 爲兩制動木塊，如



第 493 圖

將其緊貼於滑輪上，即生摩擦力．此摩擦力之大小可由 C,C 兩螺絲帽校正其上下位置以控制之．D,D 爲一框架，其上橫桿之一端 E 支於秤臺上．當滑輪轉動時，將 C,C 兩螺絲帽逐漸扭緊，則 B,B 兩木塊即逐漸與滑輪緊貼，發生摩擦，以阻止滑輪之轉動．於是滑輪發生相反之反動力，以抵抗兩木塊之制動力，此力將藉橫桿 D 而傳達於臺秤上．由於此種摩擦所消失之功及轉動軸產生之力可求之如下：

其法先將臺秤校準，使當滑輪尚未轉動時秤上指針適在 0 點．於是，當滑輪轉動時，由木塊與滑輪間之摩擦所產生，並藉橫桿傳達於 E 之壓力 P，其大小即可自指針所示之數讀出之．今因此種制動框架係受 N,P 與 F 三力之作用而成平衡（F 表兩木塊上之總摩擦力），故 P 與 F 兩力對於轉動軸之力矩和必等於零，或

$$Fr = Pa.$$

又在 1 秒間摩擦力矩 Fr 所作之功爲

$$U_f = Fr\omega = Pa\omega,$$

式中 ω 爲每秒之弳數. 又 $\omega=\frac{2\pi n}{60}$, 此 n 爲滑輪每分之轉動數. 於是

$$U_f = Pa\omega = \frac{2\pi Pan}{60} = \frac{\pi Pan}{30}.$$

若 P 係以磅計, a 以呎計, 則 U_f 卽以呎磅計. 又摩擦力矩(亦卽轉動軸所產生之馬力數), 等於

$$\text{H.P.} = \frac{\pi Pan}{30\times 550} = \frac{\pi Pan}{16,500}.$$

習 題

439. 第 494 圖之測功器係用以測驗蒸汽機者, 其中 $W=400$ 磅, $r=4$ 呎. 若機器之轉動速度爲每分 150 轉, 又彈簧秤所示之數爲 85 磅, 試求測得之馬力爲若干?

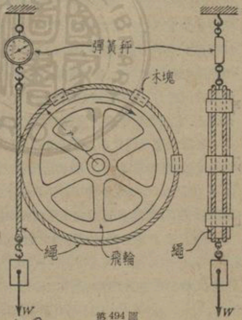
P=S 400-85

答. 36 馬力.

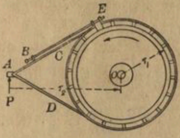
440. 在第 495 圖所示測功器中, $r_1=2$ 呎, $r_2=6$ 呎. 被測驗之機器轉動速度爲每分 180 轉, 又 $P=410$ 磅. 試求測得之馬力數.

答. 84.3 馬力.

Y不用



第 494 圖



第495圖

194. 水力 設有一水流，其橫截面等於 A 平方呎，流速等於每秒 v 呎，則其每秒之流量應等於 Av 立方呎，其重量應等於 $62.5Av$ 磅．於是水流所含之動能，或水力，爲

$$\frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2=0.97Av^3 \text{ 呎磅.}$$

若此種水量流至某一定點後完全轉爲機械工作，則其所生之馬力應爲 $\dfrac{0.97Av^3}{550}$．

又若水流係自 h 呎之高處落下，其每秒流下之重量等於 W，則其每秒所作之功應爲 Wh，而其所生之馬力爲 $\dfrac{Wh}{550}$．

習　　題

441．某河之橫截面爲 90 平方呎，水流至某點後轉爲瀑布，以每秒 8 呎之速度向下降落 6 呎．試求其所生之水力．

答． 491 馬力．

442．設有每秒 300 立方呎之水量，自 40 呎之水頭降落於一平置渦輪上．渦輪之效率爲 85%，試求所生水力爲若干?

答． 1,160 馬力．

總　習　題

443．水塔直徑 16 呎，高 80 呎．今欲自井內將水抽入塔中，若

井水之平均水平線在塔底之下 120 呎,試求所作抵抗重力之功爲若干?

答. 150,848,000 呎磅.

444. 在前題中,若於 6 小時內將水塔灌滿,試求抽水機所生之馬力數.

答. 13.56 馬力.

445. 有一長 8 呎,寬 6 呎,深 4 呎之水池蓄水半滿,今欲將所有之水全數抽至池頂,問所作之功等於若干?

答. 18,000 呎磅.

446. 鋼繩長 500 呎,每呎重爲 2 磅.試求將其全數捲起所作之功.

答. 250,000 呎磅.

447. 有一物體重 50 磅,自 50 吋之高處自由降落,打擊於一 800 磅之彈簧上.試求該彈簧之變形爲若干吋?

答. 2.56 吋.

448. 在第 493 圖之博郎尼測功器中,若 $a=6$ 呎,$n=$ 每分 210 轉,$P=360$ 磅,試求所生之馬力數.

答. 85.4 馬力.

449. 有貨車一列重 100,000 磅,當其以每秒 2 呎之速率進行時,適與站臺之撞柱相撞.假定此種撞力悉由機車牽桿之彈簧擔荷,並限定彈簧之壓縮不得超過 2.5 吋,試求其彈率.

答. 23,8 0 磅/吋.

450. 有一重 40 磅之物體,以每秒 60 呎之初速度垂直向上投

射，當其達到距出發點20呎之高處時，乃與一300磅之彈簧相撞．試求打擊彈簧時之速度．又彈簧將被壓縮若干吋？

答．$v=8.1$ 呎/秒；$s=10.5$ 吋．

451．重400噸之列車，以每時60哩之速率行駛於一水平軌道上．若列車阻力為每噸17磅，試求機車牽桿之牽引力及機車所生之馬力數．

答．6,800磅；1,088馬力．

452．重1,000噸之列車，以每時30哩之速率行駛於0.5%之坡度上．若列車阻力等於每噸10磅，試求機車所生之馬力數．

答．1,600馬力．

453．用蒸汽開動之起重機，自40呎之深坑中每分鐘取出礦石1噸．若起重機之效率為25%，又蒸汽機之效率為85%，試求此蒸汽機所生之馬力數．

答．3.8馬力．

454．有一重1磅之球繫於長3呎之繩之一端．今若握繩之另一端而轉動之，其角速度為每分120轉，試求球之動能．

答．22呎磅．

455．有一實心均質圓筒，自水平面向一傾角15°之斜面上滾動，並不發生滑溜．圓筒重120磅，直徑3呎．若當圓筒正與斜面接觸時，筒心之速度為20呎/秒，試求圓筒可以向斜面上滾動若干遠？

答．36呎．

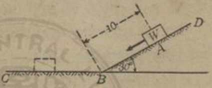
456．重80磅之物體，以每秒8呎之速度沿粗糙水平面投出．若該物體行至10呎之處即行停止，試求其動摩擦係數．

答. 0.099.

457. 有長 6 呎，粗細一律之圓棍，以每分 500 轉之速率，繞通過圓棍中心 O 之垂直軸，轉動於一水平面內. 試求圓棍上距 O 點 2 呎處之截面由於離心力而生之張力; 並求圓棍之動能.

答. $T=2,120$ 磅; $E_k=7,870$ 呎磅.

458. 在第 496 圖中，DB 為一 30° 之斜面，BC 為一水平地板. 有方箱 W 置於此斜面上之 A 點，令其自靜止向下滑溜，及至 B 點後仍繼續向地板上滑動. A, B 之距離為 10 呎. 若方箱與斜面及方箱與地板間之摩擦係數均等於 0.3，則方箱在地板上將滑動若干遠始行停止?



第 496 圖

答. 8.01 呎.

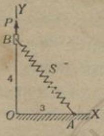
459. 有一重 8.05 磅之物體置於一水平面上，並與一水平彈簧之一端相接觸，彈簧之他端則與直牆相頂. 今若使物體向牆方運動，將彈簧壓縮 6 吋之多，而後再將彈簧放鬆，使物體向回程投去，已知彈簧之彈率為 2 磅/吋，又物體與平面之動摩擦為 1 磅，試求當彈簧回復其原狀時該物體回投之速度. 若彈簧卽於此時停止運動，試再求該物體將更行若干距離始行停止?

答. $v=4.47$ 呎/秒. $s=2.5$ 呎.

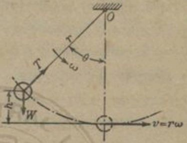
460. 在第 497 圖中，B 表一鐵塊，重 16.1 磅，沿垂直圓棍 OY 上下滑動，鐵塊與圓棍間並不發生摩擦. S 為一彈簧，其未引伸時之長等於 3 呎，一端固定於平面 OX 上之 A 點，另一端則連結於 B.

若於纜塊上施以 50 磅之平均力 P，使其於 O 點自靜止向上運動，問 B 行至 4 呎之高處時其速度應爲若干？彈簧之彈率爲 20 磅/呎.

答. 19.55 呎/秒.



第 497 圖



第 498 圖

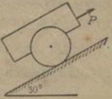
461. 第 498 圖示一單擺，擺錘 W 重 6 磅，擺線之長 r 爲 6 呎. 今若將擺引至與垂直線成 $60°$ 角之位置而後釋放，試求擺錘落至其最低位置時之速度若干？假定空氣之阻力不計.

答. 11.35 呎/秒.

462. 重 4 磅之小球用長 6 呎之線繫之，使成單擺之左右擺動. 當其通過最低位置時，球之速度爲每秒 10 呎. 試求該球可自其最低位置擺至若干高度？

答. 1.55 呎.

463. 第 499 圖示一兩輪手車，連車身共重 360 磅，輪重各爲 60 磅，直徑 4 呎. 今若用一與路面平行之 P 力挽之，使手車自靜止進行至 100 呎之距離時達到每時 15 哩之速率，試求 P 力之大小.



答. 212 磅.

第 499 圖

第十七章　衝量,動量與衝擊

195. 概論　當力作用於物體而成運動時,其所生影響可以種種方法表之,例如以力與距離相乘積表之者是爲功,以力與時間相乘積表之者是爲衝量或衝擊,以質量與速度相乘積表之者是爲動能或動量.此等數量,因其所含之因素各不相同,故對於運動問題之解決各有其利便之處.本章目的卽在解釋衝量,動量及衝擊三個數量之意義,設立若干原則,以示其間之關係,及用以解決動力學問題之方法.

196. 衝量之定義　衝量爲力與時間之相乘積.設有力 F 作用於一物體,在某一時距 t 內,其力之大小不變且方向一定,則其衝量卽等於 Ft.但若 F 之大小時有變化,則在某一瞬時 dt 之衝量將等於 Fdt,而在任一時距 t 內之衝量當爲

$$\int_0^t Fdt.$$

在上式中,倘已知 F 與 t 之關係,卽可以積分法求之.

按衝量與力本身之性質相同,乃屬一種有向量,力本身所作用之方向亦卽爲衝量之方向.因此,若力所作用之方向中途發生變化,則結果所得之總衝量,將爲依此變化方向所得諸分衝量之矢量代數和.試假定有力 F 初作用於某一方向,經過 t 秒時間,突將其方向反轉,仍作用 t 秒時間,其結果所得之總衝量應等於零,蓋兩次衝量之數值相等而符號相反.又若將此 F 力,於作用 t 秒後,使其方向僅變

化至90°,則結果所得之總衝量等於$Ft\sqrt{2}$,其方向則與任一分衝量之方向成45°之角.總之,無論F力之方向如何變化,$\int Fdt$必為一有向量.

197. 衝量之單位 衝量既為力與時間之相乘積,故其單位亦應依力與時間之單位而定.如力之單位為公斤或斤,時間為秒,則衝量單位為公斤秒或斤秒.如力之單位為磅,時間為秒,則衝量單位為磅秒.

198. 線衝量 上述之衝量又可稱為線衝量,以別於角衝量(或稱線衝量之力矩,俟於下節說明之).因線衝量既為一種有向量,故亦猶如力之本身,可用分解及合成法處理之.設作用力為一常數,則在任一方向之分衝量,將為在該方向之分力與時距之相乘積.命Q_x及Q_y分別表在X及Y軸兩方向之分衝量,F_x及F_y分別表在X及Y軸之兩個分力.Δt為F力作用之時距.則

$$Q_x=F_x\Delta t;\qquad Q_y=F_y\Delta t.$$

若作用力為一變數,則在時距$\Delta t=t_2-t_1$內,分衝量為

$$Q_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x dt;\qquad Q_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y dt.$$

至若有一組之力同作用於一物體,則在任一方向之線衝量將為所有在該方向之各分衝量之代數和,即

$$Q_x=\Sigma F_x\cdot\Delta t;\qquad Q_y=\Sigma F_y\cdot\Delta t.$$

倘此一組之力均為常數.或

$$Q_x=\Sigma\int_{t_1}^{t_2}F_x dt;\quad Q_y=\Sigma\int_{t_1}^{t_2}F_y dt.$$

倘此一組之力均爲變數.

199. 角衝量 命第 500 圖示一繞 O 軸自由轉動之物體. 命 F 爲作用於該物體之力, d 爲其對於 O 軸之力臂. 於是 F 力對於 O 軸之力矩將等於 Fd. 此一力矩如再以所作用之時距 Δt 乘之, 即得 $Fd\cdot\Delta t$. 是稱爲衝量之力矩, 或角衝量. 玆以 L_0 表之, 即

第 500 圖

$$L_0 = d\times F\cdot\Delta t,$$

倘 F 爲一常數. 或

$$L_0=\int_{t_1}^{t_2} d\times F\cdot dt,$$

倘 F 爲一變數.

至若有一組之力同繞 O 軸自由轉動, 則其總角衝量將爲各力繞 O 軸之角衝量之代數和, 即

$$L_0=\Sigma d\times F\cdot\Delta t,$$

倘此一組之力均爲常數. 或

$$L_0=\Sigma\int_{t_1}^{t_2} d\times F\cdot dt,$$

倘此一組之力均爲變數.

習 題

464. 重 40 斤之物體, 沿一傾角 60° 之斜面向下滑動, 經 4 秒鐘之久. 若物體與斜面間之摩擦係數等於 0.2, 試求平行於此斜面之分衝量.

答. 123 斤秒

465. 重2,000噸之列車行駛於$\frac{1}{2}$%之上坡道.機車牽桿之牽引力爲50,000磅,又列車阻力爲每噸8磅.若上坡之時間需2分鐘,試求作用於列車之諸力在此2分鐘內之線衝量.

答. 1,680,000磅秒.

466. 有一圓盤裝置於一轉動軸上.若轉動軸所生於圓盤上之力矩T,係依$T=2t^2+4t$一式而變化,式中T係以斤尺計,t以秒計.試求圓盤自靜止開始轉動後4秒鐘內之角衝量.

答. 74.7斤秒尺.

200. 動量之定義 物體所以發生運動之原因乃由力之作用.今設有同質量之物體,取同一之方向運動,則速度較大者需力自亦較多.又若速度雖等,而質量不同,則質量較大者需力亦必較多.此卽學者所習知之牛頓運動第二定律.故凡研究物體運動,對其速度與質量二者必須同加注意.物體所有質量與其速度之相乘積稱爲動量.卽質量m之物體,以速度v運動時,其動量等於

$$mv.$$

動量亦猶如速度,爲一種有向量,具有一定之方向及位置,故可以矢量表之.

201. 動量之單位 動量既爲質量與速度之相乘積,故其單位亦應依質量與速度之單位而定.單位動量卽爲單位質量以單位速度運動所得之動量.在公制中,若以公斤,公尺及秒爲力,長度及時間之單位時,則動量之單位爲

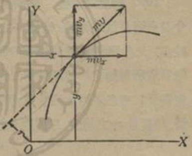
$$單位質量\times單位速度=\frac{公斤\times秒^2}{公尺}\times\frac{公尺}{秒}=公斤秒.$$

(因質量 $M=\frac{W}{g}$,但 W 以公斤計,又 g 以 $\frac{公尺}{秒^2}$ 計,故 M 以 $\frac{公斤\times秒^2}{公尺}$ 計.)在英制中,若以磅,呎及秒爲力,長度及時間之單位時,則動量之單位爲

$$單位質量\times單位速度=\frac{磅\times秒^2}{呎}\times\frac{呎}{秒}=磅秒.$$

由此可見動量之單位實與衝量之單位相同.

202. 線動量 上述之動量又稱爲線動量,以別於角動量(或稱動量之力矩,俟於下節說明之). 因線動量旣爲一種有向量,故亦猶如線衝量,可用分解及合成法處理之. 如第501圖,設有質量 m 之質點,以速度 v 運動於一平面上,則其所得之動量可在任兩方向分解爲兩個分動量,其大小各等於在該方向之分速度與質量之相乘積. 茲命 T_x 及 T_y 分別表在 X 及 Y 軸兩方向之分動量. 則



第501圖

$$T_x=(mv)_x=mv_x;\quad T_y=(mv)_y=mv_y.$$

此種動量僅係就一個質點而言,至若任一物體之線動量,即爲該物體中所含各質點之線動量之代數和. 命 T 表物體之線動量,則

$$T=\Sigma mv=M\bar{v},$$

卽任一物體之總動量等於物體之總質量與其質心之速度之相乘積.

203. 角動量 動量旣係一種有向量,故對於任一點亦可得一力矩. 如在第501圖中,質點 m 之動量爲 mv,其對於任一點 O 之力矩

應爲動量 mv 之大小及其與該點之距離 r 之相乘積．是稱爲動量之力矩，或角動量．玆以 H_0 表之，即

$$H_0=mv\cdot r.$$

或，若用分動量計算之時，則得

$$H_0=mv_xy-mv_yx,$$

即任一質點之動量力矩等於其兩個分動量之力矩之代數和（因力矩 mv_xy 係順時針向，故爲正；mv_yx 係反時針向，故爲負）．

玆命第 502 圖示任一物體，以角速度 ω 繞 O 軸轉動．於是其中任一質點之線速度（其與 O 軸之距離爲 r）等於 $r\omega$，其線動量即爲 mv，或 $mr\omega$，其方向則與 r 成垂直．因之，該質點對於 O 軸之動量力矩應爲

$$mv\cdot r=mr\omega\cdot r=mr^2\omega.$$

所有此等質點對於 O 軸之動量力矩之代數和爲

$$H_0=\Sigma mr^2\omega=\omega\Sigma mr^2,$$

$$\therefore\quad H_0=I_0\omega,$$

式中 I_0 爲該物體對於轉動軸 O 之慣性矩．故任一轉動體對於其轉動軸之角動量等於該物體對於轉動軸之慣性矩與其角速度之相乘積．

第 502 圖

習　　題

467．一重 8 磅之物體用線繩繫之，使成錐動擺之轉動．若該物體轉動時與軸心之距離爲 15 吋，角速度爲每分 90 轉，試求(a)該物

體之線動量;(b)該物體對於轉動軸之角動量.

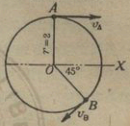
答. (a) 2.93 磅秒; (b) 3.66 磅呎秒.

468. 一長 3 呎,每呎重 4 磅之圓棍,於其一端穿過一垂直軸,使其以每分 120 轉之角速度繞軸轉動於水平面內. 試求圓棍對於轉動軸之角動量.

答. 14.05 磅呎秒.

469. 有兩小物體 A 及 B,運動於半徑 2 呎之圓周上,如第 503 圖,A 重 4 磅,B 重 8 磅. 當在如圖示之位置時,A 之速度為40呎/秒,又兩物體在 X 軸方向之分動量代數和等於5磅秒. 試求 B 之速度.

答. 6.89 呎/秒.



第 503 圖

204. 線衝量與線動量之關係 設有一組之力作用於質量 M 之物體,使成加速度 a 之運動. 今命 F 為其合力,則

$$F = Ma.$$

但因

$$a = \frac{dv}{dt},$$

故

$$F = M\frac{dv}{dt}, \qquad Fdt = Mdv.$$

命 t 之極限為 0 及 t,又其相應速度為 v_0 及 v,則得

$$\int_0^t Fdt = \int_{v_0}^{v} Mdv.$$

若質量 M 係假定為一常數,則

$$\int_0^t Fdt = Mv - Mv_0.$$

若質量 M 非爲一常數，則首須求得 M 與 v 之關係，再由上式用積分法解之．若質量 M 與合力 F 均爲常數，則得

$$Ft = Mv - Mv_0.$$

根據上式所示之關係，因得一原則如下：

在任何時距 t 內，所有作用於同一物體上諸力之合力，其線衝量應等於其線動量之變化．

應用此種關係，所有含有力，質量，速度，時間等之問題均可直接解決之，不必再如第十五章之方法，須先求兩三個方程式以解之矣．茲舉例於下：

例題 114. 有一物體以每秒 30 呎之初速度垂直向上拋擲．假定該物體達至最高點後，復向下自由降落，試求其在出發 2.5 秒後之速度．

解 作用於該物體之合力 F 卽爲其重量 W，而 W 之作用線方向與初速度之方向適相反．故依

$$Ft = Mv - Mv_0$$

一式，因得

$$-2.5W = \frac{W}{32.2}v - \frac{W \times 30}{32.2}.$$

$$\therefore \quad v = -50.5 \text{ 呎/秒}.$$

所得之負號，係表該物體已在向下降落途中．

例題 115. 有一靜止之物體因受變力 F 及變摩擦力 F_1 之作用

而成運動．物體重 500 磅，F 力之大小等於 $100\sqrt{t}$，又 F_1 力之大小約等於 $20-t$．試求該物體在 10 秒末之速度．

解　　衝量＝動量之變化．

$$\int_0^{10}100t^{\frac{1}{2}}dt-\int_0^{10}20dt+\int_0^{10}tdt=\frac{500}{32.2}v,$$

$$\left[\frac{200}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{10}-\left[20t\right]_0^{10}+\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{10}=\frac{500}{32.2}v,$$

$$\therefore\ v=126\ 呎/秒.$$

習　　題

470．有一物體以每秒 80 呎之速度向下投射，試求其 2 秒後之速度．

答．144.4 呎/秒．

471．有重 100 磅之物體置於一水平地板上，受一 15 磅之平均水平力及一大小等於 $10-t^2$ 之變摩擦力所作用而成運動．試求該物體自靜止開始 10 秒後之速度．

答．22.9 呎/秒．

472．有一物體沿傾角 45° 之斜面向下滑動．若動摩擦係數等於 0.2，試求該物體之速度自 10 呎/秒變至 30 呎/秒需時若干秒？

答．1.09 秒．

205．角衝量與角動量之關係　設有一物體繞一定軸轉動，則所有作用於該物體之外力對於該軸之力矩代數和，應等於該物體對於該軸之慣性矩與其角加速度之相乘積．即

$$\Sigma Fd=I\alpha. \tag{1}$$

今若作用於該物體之力均爲常數,則α亦爲一常數,易言之,即該物體將以等加速度運動.因之

$$\alpha=\frac{\omega_2-\omega_1}{\Delta t},$$

式中ω_1及ω_2各爲在時距Δt內之初角速度及末角速度.於是(1)式變爲

$$\Sigma d\times F\cdot\Delta t=I(\omega_2-\omega_1). \qquad (2)$$

若作用於該物體之力均非常數,則α亦非一常數,即其在任何時間內之值爲$\frac{d\omega}{dt}$.因之

$$\Sigma Fd=I\frac{d\omega}{dt}.$$

但因I係一常數,故上式變爲

$$\Sigma d\times F\cdot dt=Id\omega.$$

求兩邊之積分,得

$$\Sigma\int_{t_0}^{t}d\times F\cdot dt=\int_{\omega_1}^{\omega_2}Id\omega=I\omega_2-I\omega_1. \qquad (3)$$

在(2),(3)兩式中,所有左邊之數均爲作用於該物體之諸力對於轉動軸之角衝量,所有右邊之數均爲該物體對於轉動軸之角動量之變化.因得原則如下:

在任何物體之轉動中,所有作用諸力之角衝量代數和,應等於其角動量之變化.

例題 116. 有一重3,200磅之飛輪,正以每分鐘125轉之角速度轉動.飛輪之環動半徑爲3.3呎,輪軸直徑爲6吋.若在軸承上

NATIONAL CENTRAL LIBRARY

之摩擦係數 $f=0.02$，試求飛輪將轉動若干轉始行停止？

解 摩 擦 力 $=3,200\times 0.02=64$ 磅.

摩擦力之衝量 $=64t$，

角 衝 量 $=64t\times\frac{1}{4}=16t$.

又 角衝量＝角動量之變化，

$$16t=I\omega,$$

或 $$16t=\frac{W}{g}k^2\omega=\frac{3,200}{32.2}\times 3.3^2\times\frac{125}{60}\times 2\pi=14,180,$$

$$\therefore\quad t=885\text{ 秒}=14.75\text{ 分}.$$

飛輪之平均速率為每分 62.5 轉，故在 14.75 分鐘內應轉動 $62.5\times 14.75=922$ 轉.

習 題

473. 在上述例題中，若將輪軸上加以另一種滑潤油，則飛輪將於 22 分 13 秒後始行停止. 試求軸承之摩擦係數.

答. 0.0133.

474. 有一鑄鐵鼓輪，直徑 1 呎，長 4 吋，用一直徑 2 吋之軸使支持於軸承上. 軸承之摩擦係數為 0.01. 鼓輪上繞一繩索. 今若於繩索上施以 5.44 磅垂直向下之力，試求輪緣自靜止開始 10 秒後之線速度.

答. 28.6 呎/秒.

475. 在前題中，若於 10 秒後復將所施之力取去，試求鼓輪因受軸承之摩擦，將轉動若干時之久而後停止？

答. 4 分 23 秒.

476. 有一重 1,288 磅之飛輪,裝置於直徑 4 吋之軸上.當轉動時輪軸傳送 1,200 吋磅之轉力矩於飛輪,致使其角速度於 10 秒內自 600 彁/分增加至 50 彁/秒.試求此飛輪之環動半徑.

答. 0.79 呎

477. 有一球體重 64.4 磅,直徑 30 吋,沿傾角 30° 之斜面向下滾動,並不發生滑溜.若球心之初速度爲 30 呎/秒,試求在 5 秒末球心之速度爲若干?

答. 87.5 呎/秒

206. 線動量不滅論 凡兩物體間,或同一物體之兩部分間,發生相互作用時,此等相互作用之力,其大小必相等而方向必相反.此乃牛頓第三運動定律之根據.此等力旣發生相互之作用,則其接觸之時間亦必相等,因之,其所得之衝量自亦必大小相等而方向相反,應可互相抵消.故若對於該兩物體,別無其他任何外力作用於其間時,則就全體而言,$\int F dt$ 必等於零.於是依第 204 節之原則,此兩物體在發生作用前之線動量代數和,必與旣發生作用後之線動量代數和相等.是卽線動量不滅論之原則.

茲命 M_1 及 M_2 表兩物體之質量,v_1 及 v_2 爲其在接觸前之速度,又 v_1' 及 v_2' 爲其旣接觸後之速度.於是

$$M_1v_1+M_2v_2=M_1v_1'+M_2v_2'.$$

惟在此等相互作用中,理論上動量固毫無若何損失,但實際上動能則每有減少,其原因蓋已由二者間之接觸,發生部分之熱能之故.

在此 v_1 之方向應始終認定爲正,倘 v_2 之方向與 v_1 相反,應卽認定爲負.

例題 117. 重 20,000 磅之野砲放射 50 磅之砲彈. 若砲彈自砲口射出時之速度爲每秒 1,200 呎, 試求 (a) 砲身向後退之初速度爲若干? (b) 如砲身倒坐力爲 3,000 磅, 應後退若干久始行停止? (c) 砲身後退若干遠? (d) 砲彈及砲身之動能各若干?

解 (a) 砲彈前進之動量－砲身後退之動量＝0.

$$\frac{50}{32.2}\times 1,200=\frac{20,000}{32.2}v,$$

$$\therefore \quad v=3\text{ 呎/秒}.$$

(b) 倒坐力之衝量等於砲身之動量, 故

$$3,000t=\frac{20,000}{32.2}\times 3,$$

$$\therefore \quad t=0.621\text{ 秒}.$$

(c) 因倒坐力係一常數, 故砲身應爲等加速度之運動, 而後退之距離應等於平均速度與時間之相乘積. 平均速度爲 $\frac{1}{2}\times 3=1.5$.

$$\therefore \quad s=1.5\times 0.621=0.932\text{ 呎}.$$

(d) 砲彈之動能爲

$$\frac{1}{2}\times\frac{50}{32.2}\times 1,200^2=1,120,000\text{ 呎磅}.$$

砲身之動能爲

$$\frac{1}{2}\times\frac{20,000}{32.2}\times 3^2=2,790\text{ 呎磅}.$$

由此可知砲彈之動量, 雖與砲身之動量相等, 但砲彈之動能則大過砲身之動能幾及 400 倍.

習　題

478. 某人體重 160 磅，以每秒 8 呎之水平速度，向一停在水面之小船躍去．若船重 200 磅，問此人躍至船上立定時船之速度應爲若干？又所失之動能爲若干？

答．3.56 呎/秒；88.4 呎磅．

479. 某人體重 150 磅，在岸邊以每秒 10 呎之水平分速度向河中一重 180 磅之船躍去．該船原以每秒 5 呎之速度沿同一方向漂流．試求(a)此人躍上船後船與人之合速度爲若干？水之阻力不必計入．(b)若該船達到此種合速度需 $\frac{1}{2}$ 秒之時間，則此人對船所生之平均水平力爲若干？

答．(a) 7.27 呎/秒．(b) 25.4 磅．

480. 重 $\frac{1}{4}$ 唡之鎗彈沿水平向射入一置於光滑水平面上之木塊．木塊重 3 磅．當鎗彈射入以後，若木塊之速度爲每秒 15 呎，試求鎗彈自鎗口射出之速度，並求所失之動能．

答．2,895 呎/秒；2,025 呎磅．

481. 有一木塊重 16.8 磅，以每秒 20 呎之速度運動於一光滑水平面上，另有重 2 唡之鎗彈，以每秒 2,000 呎之速度，順木塊運動之方向，對準其中心射去．試求鎗彈射入木塊後之合速度．

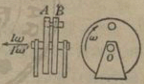
答．34.6 呎/秒．

482. 重 160,000 磅之野砲，以每秒 1,500 呎之速度放射重 1,000 磅之砲彈．試求(a)野砲後坐之初速度；(b)砲彈之動能；(c)野砲之動能．

答. (a) 9.37 呎/秒; (b) 35,000,000 呎磅; (c) 218,000 呎磅.

207. 角動量不滅論 根據第 205 節之原則,在任何物體之轉動中,所有作用諸力之角衝量代數和,應等於其角動量之變化.故若在此項運動中,無論兩物體間,或同一物體之兩部分間,發生如何之相互作用及反作用,倘別無任何外力加入其間,則對於轉動軸而言,卽不另生任何角衝量.但在同一時間 t 內,物體間之內力每以成對出現,此成對之內力恆大小相等而方向相反,因之,每對內力之角衝量 $\int Fdt - \int Fdt$ 將變爲零.因角衝量旣等於零,故對於該轉動軸之角動量應不發生任何變化,易言之,卽角動量應始終等於一常數.是卽角動量不滅論之原則.

茲試舉例於下:如第 504 圖,有 A, B 兩圓盤,支持於同一水平軸上.假定圓盤 A 係固定於軸上並成靜止,而圓盤 B 則以角速度 ω 繞軸轉動.今命圓盤 B 之慣性矩等於 I,其全部器械之慣性矩等於 I'.於是因圓盤 A 係在靜止中,故全部器械之角動量將等於 B 之角動量或 $I\omega$.今若設法使 A, B 兩盤聯成一體,例如在 A 盤上鑽一眼,B 盤上釘一螺栓以插入之,使兩者一同動作,則兩者將同以新角速度 ω' 轉動,此時全部器械之角動量成爲 $I'\omega'$ 但因此種角動量受圓盤及螺栓之內作用及反作用,並未發生變化,故



第 504 圖

$$I'\omega' = I\omega,$$

或

$$\omega' = \frac{I}{I'}\omega.$$

此 $I\omega$ 及 $I'\omega'$ 兩者均已用同一矢量示於圖之左方.

角動量亦與線動量相同，前後之總量雖不變，但因兩圓盤間之互相作用，其動能則已損失不少.

試更舉一例以作說明. 如第 505 圖，有 A, B 兩個物體，用一水平軸支持之，A, B 可以自由移動於水平軸上. 今若使其同以角速度 ω 繞垂直軸轉動，並命 I 爲其對於轉動軸之慣性矩. 於是其角動量將爲 $I\omega$. 又若兩物體因受內力之作用而同時移至 A', B' 兩位置上繼續轉動，則其慣性矩將變爲 I'. 依照前例，其角速度 ω' 爲

第 505 圖

$$\omega' = \frac{I}{I'}\omega.$$

因 I' 小於 I，故 ω' 必大於 ω.

習　　題

483. 在第 504 圖中，A, B 兩圓盤均爲鋼製，直徑 18 吋，B 厚 2 吋，A 厚 0.5 吋. 若 B 開始單獨轉動時，其速率爲每分 60 轉，試求兩圓盤聯合後之轉動速率.

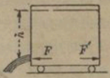
答. 每分 48 轉.

484. 在第 505 圖中，命 A, B 爲兩直徑 6 吋之鑄鐵球，支持於一長 4 呎直徑 1 吋之實心鋼棍上. 在如圖示之位置時，A, B 兩球之球心距爲 3.5 呎，並以每分 120 轉之速率繞垂直軸轉動. 又在 A, B 兩球間原有一彈簧使之聯繫. 今若緊壓彈簧，使 A, B 兩球移至 A', B'

之位置，其球心距變爲1呎，試求兩球之新轉動速率，彈簧之質量不計．又其動能之變化等於若干？

答．每分760轉；2,450呎磅，增加．

208．水注之反動力 設有一噴射之水注，其截面等於 A，自水箱之一側流出，如第506圖所示．此箱中水之深度（又稱**水頭**）爲 h，於是水注流出時之速度將爲 $v=\sqrt{2gh}$．惟水在離水箱之前係屬靜止者，故水注在流動之方向，每秒動量之變化將爲 Mv，其中 M 爲水注每秒之流量．若命 W 爲水注每秒流出之重量，又 w 爲水每單位體積之重量，則 $Mv=\frac{W}{g}v$．但 $W=wAv$，故 $Mv=\frac{wAv^2}{g}$．是即爲水注每秒動量之變化．於是在時距 t 內動量之變化將爲 $\frac{wAv^2}{g}t$．此種變化必起因於衝量 Ft．故



第506圖

$$Ft=\frac{wAv^2}{g}t,$$

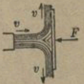
或

$$F=\frac{wAv^2}{g}=2wAh.$$

根據第三運動定律，有作用必有反作用，則水注對於水箱必生一與 F 相等而相反之反動力 F'，如圖所示．若水箱並未受任何外力所支持，則因受 F' 力之反作用，將向右移動．

209．水注之壓力 設有一噴射之水注對準一靜止之平板垂直射去，如第507圖所示，則此水注在其原方向所有之速度必均被消

減．若W爲水注每秒流出之重量，則在流動之方向其每秒動量之變化將爲$\frac{W}{g}v$，在時距t內其動量之變化將爲$\frac{W}{g}vt$．此一數量必與支持平板之力F之衝量相等，卽

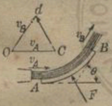


第507圖

$$Ft=\frac{W}{g}vt=\frac{wAv^2}{g}t,$$

或
$$F=\frac{W}{g}v=\frac{wAv^2}{g}=2wAh.$$

若此水注係沿切線方向對一曲面板射去，如第508圖所示，當其離開曲面板時，如圖中之B點，其流射之方向與水平成θ之交角．水注離開B點時之速率，倘曲面板之摩擦不計，則將與其進入A點時之速率相等．按比例尺作矢量oc表水注在A點之速度，od表其在B點之速度．於是cd將爲其速度之矢量變化．若W爲水注每秒流動之重量，則在時距t內動量之矢量變化將爲



第508圖

$$\frac{W}{g}\overline{cd}\,t=\frac{W}{g}2v\sin\frac{\theta}{2}t,$$

在cd之方向．此一數量必等於衝量Ft．故在曲面板上用以支持該板使抵抗水注壓力之F力，將爲

$$F=\frac{W}{g}2v\sin\frac{\theta}{2}.$$

習　題

485. 有一立方形水箱，每邊各1呎，重7.5磅. 箱中滿蓄以水，並用繩懸之使其重心與懸點之距離為5呎. 今若於箱之一側鑿一1吋方孔，其與箱頂之距離為6吋. 試求當水注流出時，水箱重心將因反作用關係，向右移動若干遠?

答. 0.372吋.

486. 直徑2吋之水注，在60呎之水頭下垂直投射於一平板上，試求水注施於平板上之壓力.

答. 164磅.

487. 救火機水管之直徑1.5吋，用以對準牆上射水，其噴射水注之速度為每秒120呎. 試求水注施於牆上之壓力.

答. 343磅.

488. 直徑2吋之水注，在120呎之水頭下對準一曲面板投射. 若$\theta=90°$，試求水注施於曲面板上壓力之大小及方向.

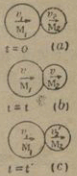
答. 463磅，與初速度v成45°之角.

489. 若在上題中，$\theta=180°$，試更求壓力之大小及方向.

答. 655磅，與水注平行.

210. 衝擊　兩物猝然相遇，必發生一種迅劇之推撞，例如鐵鎚打擊鐵釘，鎗彈射擊鎗靶，球棍回擊棒球等. 凡在此極短暫時間內所得之衝量均稱為衝擊. 若兩物體之質心，在發生推撞之前，係沿同一直線上運動，又兩物體間互相發生之壓力，亦係沿此直線，則此種衝擊稱為直接中心衝擊，至若所有其他之衝擊，則均屬於間接斜行式.

爲簡單計,茲假定發生撞撞之物體爲兩球,如第509圖所示.命大球之質量爲 M_1,以速度 v_1 向右運動,使追擊一質量 M_2,並正以速度 v_2 向右運動中之小球.當此兩球甫經接觸,如圖(a)所示,兩者間之壓力爲零.但經一極短暫時間後,兩球心互相切近,於是兩球即因互生之壓力而發生變形.當壓力達到最大值時,變形亦爲一最大值,如圖(b)所示.且兩物體即以同一速度 v 進行.若此兩球均爲無彈性之物體,則所生壓力必逐降低爲零,惟其變形則仍繼續保留,並同以 v 之速度向右運動.依線動量不滅之原則,將見



第 500 圖

$$M_1v_1+M_2v_2=M_1v+M_2v.$$

若此兩球均爲部分彈性體.則所生壓力將逐漸降低爲零,其原形亦必部分回復,而兩體將再行分離,M_1 以速度 v'_1 向右進行,M_2 則以速度 v'_2 向右進行,如圖(c)所示.於是在此情形中,仍依線動量不滅之原則,將見

$$M_1v+M_2v=M_1v'_1+M_2v'_2.$$

在此種衝擊中,其第一期稱爲壓縮期,第二期稱爲恢復期.由以上兩式,得

$$M_1v_1+M_2v_2=M_1v'_1+M_2v'_2.$$

即在發生衝擊前之線動量代數和,實等於既發生衝擊後之線動量代數和.

在此 v_1 之速度應始終認定爲正.若 v_2 係取反向,則應認爲負.v'_1 及 v'_2 之記號亦均表其方向.

又兩球在衝擊前之相對速度爲 v_1-v，旣衝擊後之相對速度爲 $v'_2-v'_1$，惟因所有物體欲其爲完全彈性，頗不易得，故旣衝擊後之相對速度，常小於在衝擊前之相對速度，此兩者之比率稱爲恢復係數，以 e 表之，即

$$e=\frac{v'_2-v'_1}{v_1-v_2},$$

或

$$e(v_1-v_2)=v'-v'_1.$$

對於完全非彈性體，e 之値等於零；對於完全彈性體，e 之値等於1. 下表所載，爲數種物質恢復係數 e 之値，均自實驗求得者.

物質	e	物質	e
玻璃	0.95	鋼	0.55
		鑄鐵	0.50
象牙	0.89	鉛	0.15

在此等衝擊中，其動能亦每有減少：兩物體之末動能與其初動能之差數即爲所減少之動能，並已轉變爲熱能.

倘兩物體之衝擊係屬間接斜行式者，則兩者之速度均可分解爲兩個分速度：一沿質心線上，又一與質心線成垂直. 後一分速度不受衝擊影響，故並不發生變化，前一分速度則與直接中心衝擊中所生速度之變化相同. 於是此前後兩分速度可再度結合而各得一末速度.

例題 118. 有一非彈性體，重 5 磅，以每秒 10 呎之速度運動，使與另一重 2 磅之非彈性體相衝擊，後者係以每秒 6 呎之速度取與前者相反之方向運動. 試求兩物體之末速度若干？又因衝擊所損失之動能若干？

解 $M_1v_1+M_2v_2=M_1v+M_2v.$

$$\frac{5}{g}\times10-\frac{2}{g}\times6=\left(\frac{5}{g}+\frac{2}{g}\right)v.$$

$$\therefore\quad v=5.43\text{ 呎/秒}.$$

$$\text{初動能}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{32.}\times100+\frac{1}{2}\times\frac{2}{32.2}\times36=8.88\text{ 呎磅};$$

$$\text{末動能}=\frac{1}{2}\times\frac{7}{32.2}\times5.43^2=3.21\text{ 呎磅}.$$

$$\therefore\quad \text{動能之損失}=8.88-3.21=5.67\text{ 呎磅}.$$

例題 119. 有一重 10 磅之靜止鋼球，用一重 4 磅之鐵錘，以每秒 12 呎之速度，取水平向擊去．試求在衝擊後球與錘之速度各爲若干？又動能之損失若干？

解 設錘之質量爲 M_1，球之質量爲 M_2，由上表得 $e=0.55$.

$$0.55(12-0)=v_2'-v_1'=6.6.$$

又 $$48+0=4v_1'+10v_2'.$$

解上兩式，得 $$v_1'=-1.29\text{ 呎/秒},$$

$$v_2'=5.31\text{ 呎/秒}.$$

由以上所得結果，可知鋼球係順鐵錘原來之方向進行，而鐵錘本身則將跳回．

$$\text{初動能}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{32.2}\times144=8.95\text{ 呎磅};$$

$$\text{錘之末動能}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{32.2}\times1.29^2=0.10\text{ 呎磅};$$

$$\text{球之末動能}=\frac{1}{2}\times\frac{10}{32.2}\times5.31^2=4.39\text{ 呎磅}.$$

$$\therefore\quad \text{動能之損失}=8.95-4.49=4.46\text{ 呎磅}.$$

習題

490. 有一重 10 磅之非彈性體,以每秒 20 呎之速度向前運動,追擊一重 15 磅,並正以每秒 15 呎之速度,取同一方向運動之非彈性體.試求兩者之末速度及其動能之損失.

答. 17 呎/秒; 2.4 呎磅.

491. 有一重 30 磅之非彈性球體,以每秒 100 呎之速度打擊另一重 30 磅,並在靜止中之非彈性球體.試求兩者之末速度及其動能之損失.

答. 50 呎/秒; 2,330 呎磅.

492. 有一重 2 啢之玻璃球自 2 吋之高處降落於一厚玻璃板上.試求玻璃球將回躍若干吋高?又因衝擊所損失之動能若干?

答. 1.8 吋; 0.002 呎磅.

493. 有一重 1 磅之鑄鐵球,以每秒 10 呎之速度打擊另一重 7.5 磅,正以每秒 3 呎之速度,取相反方向運動之球.試求兩者之末速度.

答. $v_1' = -7.21$ 呎/秒; $v_2' = -0.71$ 呎/秒.

494. 有一重 5 磅之鋼錘,打擊一重 1 磅並在靜止中之鋼球.試求欲使鋼球達到每秒 100 呎之末速度時,鋼錘之初速度應為若干?

答. 77.5 呎/秒.

總習題

495. 重 40,000 磅之貨車,自靜止開始向一 2% 之坡度下行.若列車阻力為每噸 6 磅,試求其在 1 分鐘後之速度.

答. 32.8 呎/秒.

496. 若在上題中,列車阻力為每噸 $6+0.1t$ 磅,其中 t 係以秒計,試求其在1分鐘後之速度.

答. 80呎/秒.

497. 若在1分鐘後使用制動器,令第495題中之貨車於10秒間完全停止,試求所需制動器之力為若干?

答. 4,700磅.

498. 重5磅之鎗,以每秒2,400呎之鎗口速度,放射一重0.1唡之子彈.試求鎗之後坐速度.

答. 3呎/秒.

499. 有一重300磅之平車,正以每秒15呎之等速度向前進行.今有體重150磅之人自車旁橫躍而上(該人對於平車進行之方向並無速度可言),試求此人登車立定後平車之速度應為若干?

答. 10呎/秒.

500. 兩個直徑4吋之鑄鐵球,用彈簧聯結之,使支持於一圓棍之兩端.兩球心之距離為3呎,並於圓棍之中心穿一垂直軸,使兩球以每分60轉之速率轉動於水平面內.今若於兩球正在轉動時,校準彈簧,使兩球相切於垂直軸上,試求兩球之新轉動速率應為若干?

答. 每分3,80轉.

501. 若有一橡皮球,其恢復係數 $e=0.9$,自10呎之高處降落至地面,試求其回躍之高度.

答. 8.1呎.

502. 有一直徑2吋之鑄鐵球,自12吋之高處降落於一鐵塊上向上回躍4吋.試求其恢復係數 e 及所失之動能.

答. $e=0.577$; 0.727 呎磅.

503. 有一重 100,000 磅之貨車, 以每時 5 哩之速率追趕另一重 90,000 磅, 正以每時 2 哩之速率, 取同一方向進行之貨車, 並與之相撞. 若 $e=0.20$, 試求兩車相撞後所失之動能.

答. 13,080 呎磅.

504. 某人自距地面 5 呎之高處取與水平成 60° 角之方向向上拋擲一球, 使打擊於距離 20 呎處之牆上. 若球之初速度為每秒 60 呎, 又其恢復係數 $e=0.50$, 試求此球將落於地面何處, 及其落地時之速度為若干?

答. 距牆 39.8 呎; $v=$ 5.9 呎/秒, 與垂直線成 15°15′.

NATIONAL CENTRAL LIBRARY 國家圖書館 ROC

中英名詞對照表

(以見於本書之先後爲次)

集中力 Concentrated force, 1
施力點 Point of application, 1
分佈力 Distributed force, 2
無向量 Scalar quantity, 2
有向量 Vector quantity, 2
動量 Momentum, 3
矢量 Vector, 3
力線 Line of force, 3
閉合多邊形 Closed polygon, 5
相對運動 Relative motion, 7
剛體 Rigid body, 9
質點 Particle, 9
慣性 Inertia, 10
反動力 Reaction, 11
牽力 Pull, 11
絕對單位 Absolute unit, 12
重力單位 Gravitational unit, 12
達因 Dyne, 12
磅達 Poundal, 12
力之合成 Composition of forces, 12
合力 Resultant, 12
力之分解 Resolution of forces, 12
分力 Component, 12
平衡 Equilibrium, 13
平衡力 Equilibrant, 13
力之平行四邊形 Parallelogram of force, 13
力線圖 Force diagram, 14
外力 External force, 19
內力 Internal force, 19
張力 Tension, 20
壓力 Compression, 20
應力 Stress, 20
同點力 Concurrent force, 22
非同點力 Non-concurrent force, 22
平行力 Parallel force, 22
非平行力 Non-Parallel force, 22
同平面力 Coplanar force, 22
非同平面力 Non-coplanar force, 22
力之多邊形 Force polygon, 28
力矩 Moment of force, 33
力矩中心 Center of moment, 33
力臂 Arm of force, 33
力矩軸 Axis of moment, 33
瓦銳廟氏學說 Varignon's Theorem, 34
位置圖 Space diagram, 36

版權所有
翻印必究

中華民國三十六年六月初版

應用力學

全一冊　定價國幣貳拾元
（精裝本另加精裝費定價五元）
（外埠酌加運費匯費）

編著者	呂　謀
出版者	國立編譯館
發行人	吳秉常
印刷所	正中書局
發行所	正中書局

（2115）

整：楓
校：向

滬・本　　2/1－0.15

應用科學

衛生之道	陳果夫
民族健康之醫藥基礎	胡定安
健康淺說	周尚剛
女子衛生	程浩
氣候與健康	余曼金
夏令飲食衛生	劉冠生
實用營養學	鄭集
維生素新論	盧祁澤容
飲水衛生	劉德福
鄉村衛生	龔述者
痢疾及其預防	司馬論
瘧疾及其預防	趙歷先
廢棄物處置	玄撒芳
休息與睡眠	陳邦賢
調劑與製藥學	師　哲
生藥藥理學	胡成儒
助產學	師　哲
看護學	師　哲
怎樣給你一個健美的嬰兒	余竹貞等
滑翔機之空氣動力特性	柏實義
大衆滑翔學	羅錦春
化學工業用材料	張奎旦
工業藥品製造法	顧毓珍等
液體燃料	顧毓珍
炸藥學	李潤田
食品工業	金培松
醱酵工業	金培松
罐頭食物製造法	張澤堯
製鹽工程	王善政
化妝品及香料製造法	屈軒錫等
日用肥皂工業	孟心如等
蠟燭工業	王　都
電木與電鍍	鄒粟銘
染料與染色	孟心如

國立中央圖書館
0040853