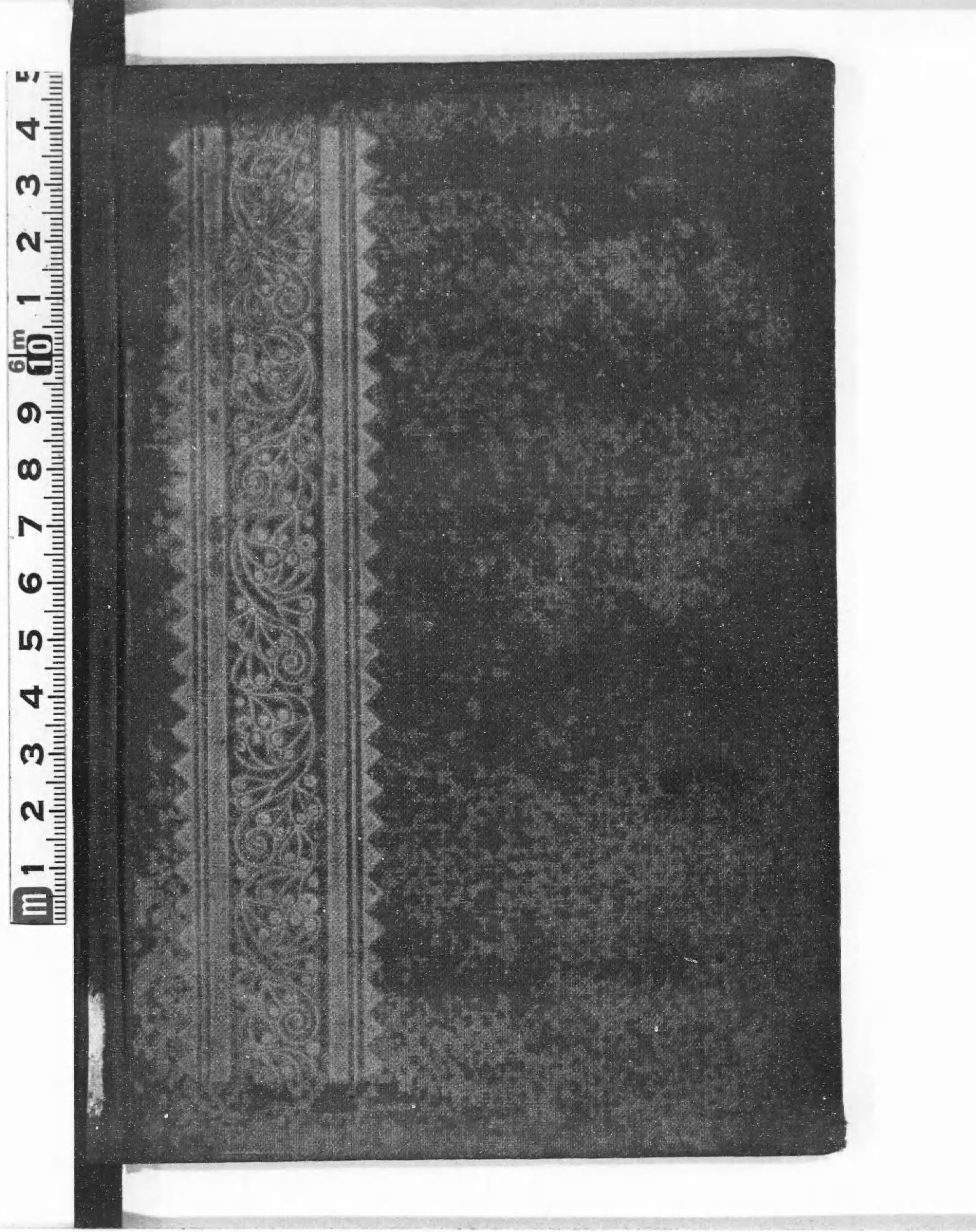
始



最新
平面立體
解析幾何學問題詳解

松室隆光著

東京
啓文社出版

緒　言

本書ハ文部省檢定試驗及ビ大學入學試驗ニ應ゼントスルモノ並ビニ高等學校各種專門學校學生ノタメニ編纂シタルモノナリ.

問題ハ廣ク英.獨.佛ノ原書ヨリ蒐集シタリト雖モ，其解法ハ悉ク編者自ラ試ミタルヲ以テ其拙劣ト意外ノ誤謬ニツイテ御示教ヲ賜ラバ幸甚ノ至ナリ。

問題ノ配列，用語等ハ中川竹內兩博士著解析幾何學教科書ニ從ヒタリ。コレ同書ハ邦文ニテ書カレタル此種ノ書トシテ最良ノモノナリト信ジタレバナリ。從テ本書ハ又同教科書ニテ獨習スルモノノ適當ナル參考書ナリト信ズ。

昭和四年九月一日

松室隆光識

目　次

（目　次　終）

最新 平面 立體 解析幾何學問題詳解

第一編　問　題　集

第一章　平面上ニ於ケル點ノ座標ニ關スル問題

1. 一直線上ノ任意ノ三點 A, B, C ニ關シテ

$$AB+BC+CA=0$$

ナルコトヲ證明セヨ.

2. 四點 A, B, C, D ガ一直線上ニ在ルトキハ, 次ノ關係アルコトヲ證明セヨ.

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC=0$$

3. 四點 A, B, C, D ガ一直線上ニ在リテ

$$\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}$$

ナルトキハ, 次ノ關係アルコトヲ證明セヨ.

$$\frac{AB}{BC}=-\frac{AD}{DC}$$

4. 前題ニ於テ A ト C トノ中點ヲ M トセバ,

$$MB.MD=MA^2$$

ナルコトヲ證明セヨ.

5. 直交軸ニ於テ (2.1), $(3.-2)$, $(4.-1)$ ナル三點ハ, 直角三角形ヲナスコトヲ證明セヨ.

6. 直交軸ニ於テ三點 (2.4), $(2+\sqrt{3}.5)$, (2.6) ハ正三角形ノ三頂點ナルコトヲ證明セヨ.

7. 點 (x,y) ノ, 點 $(12,8)$ ヨリノ距離ハ, 點 $(3,2)$ ヨリノ距離ノ二倍ニシテ, 且此等ノ三點ハ一直線上ニ在リ. x 及ビ y ヲ求メヨ.

8. 二點 $(a,-b)$, (b,a) ノ中點ト原點トノ間ノ距離ヲ求メヨ. 但シ軸ノ間ノ角ヲ $45°$ トス.

9. 直交軸ニ於テ與ヘラレタル三點 $(2,3)$, $(-2,1)$, $(3,-2)$ ヨリ等距離ニ在ル點ノ座標ヲ求メヨ.

10. 直交軸ニ於テ四點 $(1,1)$, $(4,4)$, $(4,8)$, $(1,5)$ ヲ頂點トスル四邊形ハ, 平行四邊形ナルコトヲ證明シ, 且其對角線ノ長サヲ求メヨ.

11. 三點 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) ヲ頂點トスル三角形ノ重心ノ座標ヲ求メヨ. 三點ガ $(5,-9)$, $(1,5)$, $(-3,7)$ ナルトキハ如何.

12. 三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ヲ夫々 x 及ビ y ノ軸トスルトキ, (i) A ヨリ BC ニ下セル垂線ノ足. (ii) 角 A ノ二等分線ガ BC ト交ル點ノ座標ヲ求メヨ. 但シ三角形ノ三邊ヲ知レルモノトス.

13. 次ノ各極座標ヲ, 極ヲ原點トシ原線ヲ x 軸ノ正ノ部分トセル直交座標ニ直セ.

$$(2,\ 30°),\quad \left(1,\ -\frac{\pi}{4}\right),\quad (-2,\ -30°),\quad \left(-1,\ \frac{\pi}{4}\right)$$

14. m ヲ任意ノ整數トスルトキ $((-1)^m\rho,\ \theta+m\pi)$ ハ悉ク同一ノ點ヲ表ハスコトヲ示セ.

15. 一邊 m ナル正六角形ノ一邊ヲ原線トシ, 其一端ナル頂點ヲ極トシ, 總テノ頂點ノ極座標ヲ求メヨ.

16. 直交軸ニ於テ, 點 (4.3) ヨリナル距離ニ在ル總テノ點ノ座標ガ滿足スベキ方程式ヲ作レ.

17. 直交軸ニ關シテ表ハサレタル次ノ方程式ヲ, 極座標ノ式ニ直セ, 但シ原點ヲ軸トシ x 軸ノ正ノ部分ヲ原線トス.

$$x^2+y^2=ax,\qquad x^2-y^2=a^2.$$

18. 次ノ各方程式ヲ直交軸ニ關シテノ式ニ直セ.

$$\rho\sin\theta=a\cos\theta,\qquad \rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2}=a^{\frac{1}{2}}$$

19. 軸ノ間ノ角ガ ω ナル斜交軸ニ關シ, 或點ノ座標ヲ $(x.y)$ トシ, ソノ原點ヲ極トシ x 軸ノ正ノ部分ヲ原線トセルトキノ同點ノ極座標ヲ $(\rho.\theta)$ トスレバ, 次ノ關係アルコトヲ證明セヨ.

$$x=\frac{\rho\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega},\qquad y=\frac{\rho\sin\theta}{\sin\omega}.$$

20. 極ヲ O トシ與ヘラレタル二點ヲ $A(\rho_1.\theta_1)$. $B(\rho_2.\theta_2)$ トス. 角AOB ノ二等分線ガ AB ト交ル點ノ極座標ヲ求メヨ.

21. 極座標ニ於テ $P\left(5,\frac{\pi}{2}\right)$ ヨリ 3 ナル距離ニ在ル點 Q ノ軌跡ヲ求メヨ.

22. 二點 $P(4,15°)$. $Q(5,75°)$ 間ノ距離 d ヲ求メヨ.

第二章　座標ノ變換ニ關スル問題

23. 直交軸アリ，其原點ヲ (1.2) ニ移シ，且軸ヲ直交セルマヽニテ 45° 回轉セバ，次ノ諸點ノ座標ハ如何ニ變ズルカ．

(2.4)，(0.3)，(1.1)，(4.2)．

24. 原點ヨリ a ナル距離ニテ x 軸ト垂直ニ交ル直線ノ方程式ハ，直交軸ニ關シテ表ハセバ $x=a$ ナリ．今 x 軸ハ其マヽトシ軸ノ間ノ角ヲ 120° トセバ，同ジ直線ノ方程式ハ如何ニ變ズルカ．

25. 平行移動ニヨリテ原點ヲ $(a.b)$ ニ移ストキ，方程式 $3x+4y=7$ ハ如何ナル形トナルカヲ考ヘ，之ニヨリテ此方程式ノ軌跡ヲ求メヨ．

26. 平行移動ニヨリテ原點ヲ $(a.b)$ ニ移サバ，次ノ方程式ハ如何ナル形ヲ取ルカ．

(I)　$x^2-y^2-2ax+2by+a^2-b^2=0,$

(II)　$x^2+y^2-2ax-2by-r^2+a^2+b^2=0.$

27. 平行移動ニヨリ原點ヲ如何ナル點ニ移ストキ，方程式

$$6x^2+5xy-6y^2-17x+7y+5=0$$

ガ次ノ形ヲトルカ．

$$6x^2+5xy-6y^2=0.$$

28, 直交軸ニ關シテ $x\mathrm{con}\alpha+y\sin\alpha=p$ ナル方程式アリ．今軸ヲ直交セルマヽ α ナル角ダケ回轉シテ，此方程式ハ如何ナル線ヲ表スカヲ述ベヨ．

29. 直交軸ニ關シテ $21x^2-10\sqrt{3}xy+31y^2=144$ ナル方程式

アリ．今軸ヲ直交セルマヽ 30° 回轉セバ，此方程式ハ如何ニ變ズルカ．

30. 直交軸ニ關シテ $4xy-3x^2=a^2$ ナル方程式アリ．今此直交軸ヲ $\tan\theta=2$ ナル如キ角丈回轉セバ此方程式ハ如何ナル形トナルカ．

31. $x^2+y^2=a^2$ ハ直交軸ニ關スル圓ノ方程式ナリ．今軸ノ間ノ角ガ 60° ナルトキ，原點ヲ中心トシ，半徑 a ナル圓ノ方程式ヲ座標ノ變換ニヨリテ上記方程式ヨリ導ケ．

32. 直交軸ニ關シテ $x^2+4xy+y^2+6x-3=0$ ナル方程式ハ，原點ヲ $(1.-2)$ ニ移スト同時ニ軸ヲ直交セルマヽニテ 60° 回轉セバ，如何ナル方程式トナルルカ．

33. 直交軸ニ關スル方程式 $y^2+4ay\cot\alpha-4ax=0$ ヲ，交角 α ナル斜交軸ニ關スル方程式ニ變ゼヨ．

34. 60° ノ交角ヲ有スル兩軸ニ關スル方程式

$$2x^2-5xy+2y^2=4$$

ヲ變形シ，其兩軸ノ交角ノ二等分線ヲ兩軸トスル方程式ニ變ゼヨ．

35. 次ノ曲線ノ各次數如何．（但シ $m.n$ ハ正又ハ負ノ整數トス）

(I)　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1,$　　(II)　$y^m=x^n.$

36, 或軸ヲ同ジ原點ノ他ノ軸ニ變換スルトキニ要スル公式ガ $x=mx'+ny',\ y=m'x'+n'y'$ ナルトキハ，次ノ關係アルコトヲ證明セヨ．

$$\frac{m^2+m'^2-1}{n^2+n'^2-1}=\frac{mm'}{nn'}.$$

37. 一ノ直交軸ヲ x, y トシ，他ノ同原點ノ直交軸ヲ X.Y トスルトキ，一般ニ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ．

$$x^2+y^2+2xy\cos xOy=\mathrm{Y}^2+\mathrm{X}^2+2\mathrm{XY}\cos \mathrm{XOY}.$$

但シ O ハ原點トス．

38. 方程式ノ次數ハ座標軸ノ變換ニヨリテ變ズルコトナキコトヲ證明セヨ．

39. 若シ座標軸ヲ變換シテ $ax^2+2hxy+by^2$ ヲ $a'x+2h'xy+b'y^2$ ニ變ズルコトヲ得バ．次ノ關係アルコトヲ證明セヨ．但シ ω, ω' ハ二双ノ軸ノ交角トス．

$$\frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin^2\omega}=\frac{a'+b'-2h'\cos\omega}{\sin^2\omega},\qquad \frac{ab-h^2}{\sin^2\omega}=\frac{a'b'-h'^2}{\sin^2\omega'}.$$

40. 交角 ω ナル斜交軸ニ關スル方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+c=0$$

アリ．原點及ビ x 軸ヲ不變ニシテ直交軸ニ變ジテ方程式

$$a'x^2+2h'xy+b\,y\;+c=0$$

ヲ得タリトス．然ルトキハ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ．

$$\frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin\omega}=a'+b',\qquad \frac{ab-h^2}{\sin^2\omega}=a'b'-h'^2.$$

41. 一ツノ座標軸ヨリ他ノ座標軸ニ移ル變更方程式ヲ

$$\left.\begin{array}{l} x=ax'+by'+c \\ y=a'x'+b'y'+c' \end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l} x'=lx+my+n \\ y'-l'x+m'y+n' \end{array}\right\}$$

トスルトキ，次ノ關係アルコトヲ證明セヨ．

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l, & m \\ l', & m' \end{vmatrix}=1.$$

42. 原點ヲ固定スル軸ノ變換ニ於テ，（直交軸）

$$ax^2+2hxy+by^2$$

ガ變ジテ

$$a'x+2h'xy+b'y^2$$

トナルトキハ，次ノ關係アルコトヲ證明セヨ．

$$a+b=a'+b',\qquad ab-h^2=a'b'-h'^2$$

注意， 斯クノ如キヲ Invariant（不變式）ト云フ．

第三章　直線ニ關スル問題

43. 座標軸ノ間ノ角ヲ $60°$ トシ，次ノ方程式ニヨリテ表ハサレタル直線ヲ畫ケ. $3x+4y=12$.

44. 二點 $(0.-1)$, (3.3) ヲ過ル直線ノ方程式ヲ作リ，且之ヲ標準形ニ直セ.（直交軸）

45. 原點ヨリ一ノ直線ニ下セル垂線ノ長サガ 5 ニシテ，コノ垂線ハ x 軸ト y 軸トノ正ノ方向ノ間ニ在リ. 前者ト $45°$ 後者ト $30°$ ノ角ヲナストセバ，其直線ノ方程式如何.

46. 點 (2.3) ヲ過リ直線 $3x+4y=9$ ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

47. 點 $(a.b)$ ヲ過リ x 軸及ビ y 軸ト相等シキ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求メヨ.

48. 點 (1.2) ト $(-1.-2)$ トハ直線 $3x+4y-8=0$ ノ同ジ側ニ在ルカ否カ. 又此各點ヨリ直線マデノ距離ヲ求メヨ.

49. 二直線 $x-y-a=0$, $x+y-a=0$. ノ交點ヲ過リ，他ノ直線 $2x-3y-b=0$ ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

50. 二直線 $2x+3y-a=0$, $2x+4y-3a=0$ ノ交點ヲ過リ，直線 $3x+2y-b=0$, ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

51. 四直線 $x=a_1$, $x=a_2$, $y=b_1$ $y=b_2$ ニヨリテ作ラレタル平行四邊形ノ對角線ノ方程式ヲ求メヨ.

52. 二直線 $x+\sqrt{3}y=0$, $x-\sqrt{3}y=0$ ノ間ノ角ヲ求メヨ.

53. 二直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ ノ交點ト，點 $(a.b)$ トヲ

過ル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

54. 軸ノ間ノ角ヲ ω トシテ直線 $my+x+a=0$ ト，$y-mx=0$ トノナス角ノ正切ヲ求メヨ.

55. 次ノ三直線ニヨリテ作ラレタル三角形ノ面積ヲ求メヨ.

$$x-y-3=0,\ 4x-2y-3=0,\ 3x-y-1=0.$$

56. 次ノ三直線ニヨリテ作ラレタル三角形ノ面積ヲ求メヨ.

$$y=ax-\frac{bc}{2},\qquad y=bx-\frac{ca}{2},\qquad y=cx-\frac{ab}{2}.$$

57. 二直線 $3x-4y-8=0$, $12x-5y-6=0$ ノナス角ノ二等分線ノ方程式ヲ求メヨ.

58. 一點 P ヨリ直線 $ax+by+c=0$ ニ下セル垂線ノ長サガ d ニシテ，ソノ足ノ座標ガ $(x_1.y_1)$ ナルトキ P ノ座標如何.（直交軸）

59. 極座標ニ於テ $\frac{1}{\rho}=a\cos\theta+b\sin\theta$ ナル方程式ハ一ノ直線ヲ表スコトヲ證明シ，且極ヨリ此直線ヘ下セル垂線ノ長サヲ求メヨ.

60. 二點 $(\rho_1.\theta_1)$, $(\rho_2.\theta_2)$ ヲ過ル直線ノ極座標ニ於ケル方程式ヲ求メヨ.

61. 二次方程式 $6x^2-5xy-6y^2+4x-7y-2=0$ ハ二直線ヲ表ハスカ.

62. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ガ二ツノ直線ヲ表ストキハ，$ax^2+2hxy+by^2-2gx-2fy+c=0$ モ亦二ツノ直線ヲ表スコトヲ證明シ，且兩者ノ表ス二直線ノ位置ノ關係ヲ研究セヨ.

63. 直交軸ニ於テ $x^2+8xy+3y^2=0$ ノ表ス二直線ノ間ノ角ノ

二等分線ノ方程式如何.

64. 直交軸ニ關シ $x^2-2xy\sec\theta+y^2=0$ ノアラハス二直線ノナス角及ビ其二等分線ノ方程式ヲ求メヨ.

65. N ヲ如何ナル常數トスルモ方程式

$$(a+\mathrm{K}a')x+(b+\mathrm{K}b')y+(c+\mathrm{K}c')=0$$

ノ表ス直線ハ必ズ或ル一定點ヲ過ルコトヲ證明セヨ. 又其定點ノ座標ヲ求メヨ.

66. a 及ビ b ハ各其値ヲ變ズルモ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=$ 一定。ナルトキハ方程式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ノアラハス直線ハ必ズ或ル一定點ヲ過ルコトヲ示セ. 又其定點ノ座標如何.

67. 一ツノ四角形ノ對邊ノ中點ヲ結ブ二ツノ直線ト, 二ツノ對角線ノ中點ヲ結ブ直線トハ, 同一點ニ於テ交ハルコトヲ證明セヨ.

68. 與ヘラレタル二直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

69. 三角形ノ三ツノ內角ノ二等分線ハ一點ニ會スルコトヲ證明セヨ.

70. 三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ハ一點ニ會スルコトヲ證明セヨ.

71. 三角形ノ各頂點ヨリ對邊ニ下シタル垂線ハ一點ニ交ルコトヲ證明セヨ.

72. 三角形ノ垂心ト重心ト外心トハ一直線上ニ在ルコトヲ證明セヨ.

73. 四角形 ABCD ニ於テ相對スル邊 AB, CD ガ E ニ於テ, 又 BC, AD ガ F ニ於テ相交ルモノトス. 二ツノ對角線 AC, BD 及ビ線分 EF ノ各中點ハ一直線上ニ在ルコトヲ證證明セヨ.

74. 三角形ノ一ツノ角ノ大サト位置トガ與ヘラレ, 且此角ヲ挾ム二邊ノ和ガ與ヘラルヽトキ, 第三邊ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

75. O ニ於テ相交ハル二直線アリ. 一點 P ヨリコレニ垂線 PM, PN ヲ下シタルトキ, OM+ON ガ不易ナリトセバ P ノ軌跡如何.

76. 二點 A, B アリ, B ヲ過ル任意ノ一直線ニ A ヨリ垂線 AP ヲ下シ, ソノ足ヲ P トス. AP 上ニ一點 Q ヲトリ, AP•AQ ヲ常數ナラシムルトキ Q ノ軌跡ヲ求メヨ.

77. 一點 P ヨリ一ノ定三角形ノ三邊ニ下セル垂線ノ和ガ一定ナルトキ P ノ軌跡ヲ求メヨ.

78. 定點 O ヲ過ル任意ノ直線 g ヲ引キ, 與ヘラレタル三ツノ直線ト $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3$ ニ於テ交ラシメ, g 上ニ更ニ一點 X ヲ取リテ $\dfrac{1}{\mathrm{OX}}=\dfrac{1}{\mathrm{OR}_1}+\dfrac{1}{\mathrm{OR}_2}+\dfrac{1}{\mathrm{OR}_3}$ ナラシム. 點 X ノ軌跡ヲ求メヨ.

79. 二直線 a, b 及ビコレラノ上ニ在ラザル一點 P ガ與ヘラルヽトキ, P ヲ過ル任意ノ二ツノ直線 c, d ヲ引キ, c ガ a 及ビ b ト交ル點ヲ夫々 A, B トシ, d ガ a 及ビ b ト交ル點ヲ $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1$ トス, 直線 AB_1, 及ビ $\mathrm{A}_1\mathrm{B}$ ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

80. 與ヘラレタル三角形ニ內接スル矩形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

81. 三角形ノ底邊ガ固定シ, 頂點ガ一定直線上ニ動クトキ, 一邊

ハ底邊上ニ在リテ且此三角形ニ内接スル正方形ノ各頂點，及ビ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ．

82. 二ツノ相交ル直線 LM, LN 及ビ一直線上ニ在ル三點 O, P, Q アリ．今 O ヲ過ル任意ノ一直線ガ LM, LN ト交ル點ヲ夫々 A, B トシ，AB 及ビ BQ ヲ結ビ其點ヲ C トス．然ルトキハ C點ノ軌跡ハ L ヲ過ル一ノ直線ナルコトヲ證明セヨ．

83. 一點ニ於テ相交ル三ツノ直線 OA, OB, OC アリ．又別ニ二ツノ定點 P, Q アリ．今 OC 上ニ任意ノ一點 R ヲトリ RP, PQ ヲ結ビソノ OA, OB ト交ル點ヲ夫々 S, T トセバ，直線 ST ハ OC 上ニ於ケル R ノ位置ニ關セズ常ニ或ル一定點ヲ過ルコトヲ證明セヨ．

84. 二定直線ニ至ル距離ノ和ガ一定ナル如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ．

85. 定直角三角形ノ斜邊ノ兩端ガ夫々一點ニ於テ直交スル直線上ヲ動クトキ，直角頂ノ軌跡ヲ求メヨ．

86. AB, CD ヲ二定線分トスルトキ，三角形 PAB 及ビ PCD ノ面積ノ和常ニ一定値 K^2 ナル點 P ノ軌跡ヲ求メヨ．

87. 三角形ノ底邊 AB ト二邊 AD, BC ノ平方ノ差ヲ與ヘテ頂點 C ノ軌跡ヲ求メヨ．

88. 三角形ノ底邊ト二邊ノ和トガ與ヘラレタルトキ，底邊ノ一端 B ヲ過ギテ邊 BC ニ垂直線ヲ引キ，之ト頂角ノ外角ノ二等分線トノ交點ノ軌跡ハ底邊ニ垂直ナル直線ナルコトヲ證明セヨ．

89. 一定點 A ヨリ一定直線 BC ニ引ケル線分ヲ與ヘラレタ

ル比 $m:n$ ニ内分スル點ノ軌跡ヲ求メヨ．

90. x 軸上ニ二定點 H, K アリ．y 軸上ニ二ツノ動點 L, M アリテ，若シ

$$\frac{a}{OL}+\frac{b}{OM}=1$$

ナルトキ二直線 HL, KM ノ交點 P ハ，直線ヲ畫クコトヲ證明セヨ．但シ a, b ハ常數トス．

91. 直交スル定直線 Ox, Oy アリ．此二直線ト任意ノ直線トノ交點ヲ夫々 A, B トシ，OA+OB ガ不變ニシテ a ニ等シキトキ，線分 AB ヲ與ヘラレタル比ニ内分スル點 P ノ軌跡ヲ求メヨ．

92. 三角形 ABC ノ三ツノ角ノ大サハ一定ニシテ其頂點 A ノ位置ハ固定シ，頂點 B ハ定直線 L 上ヲ動クモノトセバ，頂點ノ軌跡ヲ求メヨ．

93. 二定點 $A(a, O)$ 及ビ $B(-a, O)$ アリ．A 點ヲ過ル直線ノ方向係數ガ點 B ヲ過ル直線ノ方向係數ノ二倍ニ等シキトキ此二直線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ．

94. $$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=2a,\qquad \rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=a$$

ナル二直線ノ交點ノ極座標ヲ求メヨ．

第四章　圓ニ關スル問題

95. 原點ニ於テ x 軸又ハ y 軸ニ切シ，且半徑 r ナル圓ノ方程式ヲ求メヨ．

96. x 軸ト y 軸トニ切シ，半徑 r ナル圓ノ方程式ヲ求メヨ．

97. 直線 $y=mx+n$ ニ平行ニシテ，圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ切スル直線ノ方程式ヲ求メヨ．

98. 點 $(-2,3)$ ヨリ圓 $(x-1)^2+(y-6)^2=9$ ニ引キタル二ツノ切線ノ方程式ヲ求メヨ．

99. x 軸ト $45°$ ノ角ヲナシ，圓 $(x-1)^2+(y-2)^2=8$ ニ切スル直線ノ方程式，及ビ其切點ノ座標ヲ求メヨ

100. 直線 $4x-3y-15=0$ ハ，圓 $(x-2)^2+(y-6)^2=25$ ニ切スルコトヲ證明シ，且其切點ノ座標ヲ求メヨ．

101. 圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ノ上ニ在ル二點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ヲ結ビツクル直線ノ方程式ハ，

$$(x-x_1)(x_1+x_2+2g)+(y-y_1)(y_1+y_2+2f)=0,$$

又ハ

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=x^2+y^2+2gx+2fy+c$$

ニヨリテ表ハサルヽコトヲ證明シ，之ヨリシテ P ニ於ケル切線ノ方程式ヲ導ケ．

102. 圓 $x^2+y^2-2x-6y+9=0$ ニ關シ，直線 $x-y+4=0$ ノ極ヲ求メヨ．

103. 二ツノ圓ノ中心ヲ結ビツクル直線上ニ一點ヲ取ルトキ，

此點ヲ過リテ引ケル任意ノ直線ノ，各々ノ圓ニ關スル極ヲ結ビツクル直線ハ，常ニ一定點ヲ過ルカ又ハ一定直線ニ平行ナルコトヲ證明セヨ．

104. 二點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ヲ直徑ノ兩端トスル圓ノ方程式ハ $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ ナルコトヲ示セ．

105. 二定點ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ．

106. 二ツノ圓 $x^2+y^2=3$, $x^2+y^2-5x+y+4=0$ ノ交點ト，點 $(1,2)$ トヲ過ル圓ノ方程式ヲ求メヨ．

107. 同ジ中心ヲ有スル圓ノ一群ニ關シ，與ヘラレタル直線ノ極ノ軌跡ヲ求メヨ．

108. 一ツノ三角形ガ若シ或ル圓ニ關スル極三角形ト見做シ得ルトキハ，其圓ノ中心ハ三角形ノ垂心ナルコトヲ證明セヨ．

109. $x^2+y^2-2Kx+c=0$ ニ於テ，c ヲ一定數トシ，K ヲ種々ノ值ニ變ズルトキ，此方程式ノ表ス圓ノ一群ハ，悉ク或定メラレタル二ツノ實又ハ虛ナル點ヲ過ルコトヲ示セ．

110. 正三角形 ABC ノ頂點 A ヲ原點ニ，AB ノ方向ヲ軸ノ正ノ方向ニトリタル直交軸ニ關シコノ三角形ノ外接圓ノ方程式ヲ求メヨ．

111 二ツノ圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$, $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$ ノ共通弦ノ長サヲ求メヨ．

112. 二直線 $x-y+1=0$, $x+y-7=0$ ハ圓 $(x-1)^2+(y-2)^2=3$ ニ關シテ共軛ナルコトヲ示セ．

113. 圓 $2x^2+2y^2-3x+5y=7$ ニ關スル直線 $9x+y-28=0$

ノ極ヲ求メヨ.

114. 圓 $x^2+y^2-4x-6y+5=0$ ニ關スル點 $(-2,3)$ ノ極線ヲ示メヨ.

115. 點 (4.5) ヨリ圓 $2x^2+2y^2-8x+12y+21=0$ ニ引カレタル一對ノ切線ノ方程式ヲ求メヨ.

116. 次ノ三點ヲ過ル圓ノ方程式ヲ求メヨ.

$$(1.0),\ (0.-6),\ 及ビ\ (3.4).$$

117. 二圓 $x^2+y^2+2x+3y+1=0$, $x^2+y^2+4x+3y+2=0$ ノ共通弦ヲ直徑トセル圓ノ方程式ヲ求メヨ.

118. 三直線 $x+y=6$, $2x+y=4$ 及ビ $x+2y=5$ ヨリナル三角形ノ外接圓ノ方程式ヲ求メヨ.

119. n 個ノ定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ハ圓ナルコトヲ證明セヨ.

120. 正方形ノ各邊ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ, 一定ナル點ノ軌跡ハ圓ナリ.

121. 直線 $x+2y-3=0$, ト圓 $x^2+y^2-2x-2y=0$ トノ二交點ヲ原點ニ連ネタル直線ノ方程式ヲ求メ, 且此等ノ二直線ハ直交スルコトヲ示セ.

122. 三直線 $3x-4y=0$, $7x-24y=0$, 及ビ $5x-12y-36=0$ ヲ三邊トスル三角形ノ內心ノ座標ヲ求メヨ.

123. O_1, O_2 ハ同心圓ニシテ, P ハ O_1 ノ任意ノ切線ナリトス. 圓 O_2 ニ關シ P ノ極ノ軌跡ヲ求メヨ.

124. 一ノ直線上ノ一點ニ於テ之ニ切スル圓ノ一群アリ, 一定

點ノコレラノ圓ニ關スル極線ヲ夫々作ルトキ, ソレラノ極線ハ悉ク或ル一點ヲ過ルコトヲ證明セヨ.

125. 一定點 P ヲ通ズル任意ノ直線ガ, 與ヘラレタル圓ト交ル點ヲ A, B トス, 弦 AB ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

126. 三角形ノ底邊ノ大サ, 位置, 及ビ頂角ノ大サガ與ヘラレタルトキ, ソノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ.

127. 原點ヨリ圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ニ引キタル二ツノ切線ノ方程式ヲ求メヨ.

128. 極座標ニテ表ハサレタル方程式

$$\rho^2-\rho a\cos 2\theta\cdot\sec\theta-2a^2=0$$

ハ如何ナル曲線ヲ表スカ.

129. 一點 P ヨリ三角形ノ三邊ニ下セル垂線ノ自乘ノ和ガ一定ナルトキ, コノ點ノ軌跡ガ一ノ圓トナルタメニハ, 與ヘラレタル三角形ハ正三角形ナラザルベカラザルコトヲ證明セヨ.

130. 甲乙ノ二圓アリ. 一點 P ノ甲圓ニ關スル極線ガ, 乙圓ニ切スルトキ, P ノ軌跡ガ圓トナルタメニハ二圓ノ位置ノ關係如何.

131. 圓上ノ二定點ヲ A.B トス, A 及ビ B ニ於ケル切線ニ此圓上ノ任意ノ一點 P ヨリ下セル垂線ノ積ハ, P ヨリ直線 AB ニ下セル垂線ノ自乘ニ等シキコトヲ證明セヨ.

132. P ニ於テ直交スル二直線 AB, CD ガ直交二軸 x 軸, y 軸ト交ル點ヲ夫々 A, C; B, D トス, AC, BD ノ中點ガ變ゼザル樣ニ二直線ガ動クトキ, P ノ軌跡ヲ求メヨ.

133. 二定點 A, B ヲ過ル任意ノ圓ニ一定點 P ヨリ引キタル切線ノ切點ノ軌跡ガ圓トナルニハ, P ノ位置如何.

134. 直線 $x\cos a+y\sin a-p=0$

ト, 圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

トノ二ツノ交點ヲ原點ト結ビツクル直線ガ, 相互ニ垂直ナルタメノ條件ハ

$$2p^2+2p(g\cos a+f\sin a)+c=0$$

ナルコトヲ示セ.

135. $P(x_1, y_1)$ ヲ通ジテ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ切スル二ツノ直線ノ方程式ハ, $(x_1y-y_1x)^2=r^2\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}$ ニヨリテ表ハシ得ルコトヲ示セ.

136. 二定點ヲ過ル任意ノ圓ト, 一定圓トノ交點ヲ P, Q トス. 直線 PQ ハ一定點ヲ通ズルコトヲ證明セヨ.

137. 二ツノ圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,

及ビ $(x-x')^2+(y-b')^2=r'^2$

ノ各ノ切線ノ方程式ヲ補助變數ヲ用ヒテ表ストキ

$$(x-a)\cos\theta+(y-b)\sin\theta=r^2$$

及ビ $$(x-a')\cos\theta'+(y-b')\sin\theta=r'^2$$

トス. 今此二ツノ切線ガ相一致シテ兩圓ノ共通切線トナルタメニハ, θ ハ次ノ方程式ヨリ定ムベキコトヲ示セ.

$$(a-a')\cos\theta'+(b-b')\sin\theta+(r\pm r')=0.$$

138. $x^2+y^2-2x-6y+9=0$, $x^2+y^2+6x-2y+1=0$

ノ共通切線ノ方程式ヲ求メヨ.

139. 三圓 $$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0$$
$$x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0$$
$$x^2+y^2-22_3x-2b_3y+c_3=0$$

ノ根心ノ座標ヲ求メヨ.

140. 二圓 $$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2,$$
$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2.$$

ノ中心ヲ夫々 O_1, O_2 トシ, 交點ノ一ツヲ A トス. 角 O_1AO_2 ヲ. ω トスルトキハ, $\mathrm{Cos}\,\omega$ ノ値如何.

注意. 此角ヲ二圓ノ交角ト云ヒ. 交角ガ 0° ナルトキハ兩圓ハ互ニ內切スト云ヒ, 交角ガ 180° ナルトキ外切スト云フ.

141. 二ツノ圓ヲ $x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0$,

$$x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0$$

トシ, ソノ交角ヲ ω トスルトキ.

$$c_1+c_2+2r_1r_2\cos\omega-2a_1a_2-2b_1b_2=0$$

ナルコトヲ示セ. 但シ r_1, r_2 ハ兩圓ノ半徑トス.

142. 三圓 $$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0,$$
$$x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0,$$
$$x^2+y^2-2a_3x-2b_3y+c_3=0$$

ノ各ト直交スル圓ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2, & x, & y, & 1 \\ c_1, & a_1, & b_1, & 1 \\ c_2, & a_2, & b_2, & 1 \\ c_3, & a_3, & b_3, & 1 \end{vmatrix}$$

ナルコトヲ示セ.

143. 次ノ三ツノ圓ト直交スル圓ノ方程式ヲ求メヨ.

$$x^2+y^2+2x+3y-1=0,$$
$$x^2+y^2-2x-3y+25=0,$$
$$x^2+y^2+3x+y+3=0.$$

144. 一定點ヨリノ距離ノ平方ガ, 定直線ヨリノ距離ニ比例スル如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

145. 同一圓ノ弧上ニ立ツ圓周角ハ, 其弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半ニ等シキコトヲ證明セヨ.

146. 圓 $x^2+y^2=2rx$ ニヨリテ, 直線 $y=mx$ ヨリ截リ取ラレタル弦ヲ直徑トスル圓ノ方程式ヲ求メヨ.

147. 圓ニ內切スル正三角形 ABC ノ圓弧 BC 上ノ任意ノ點ヲ P トスルトキ,

$$PA=PB+PC$$

ナルコトヲ證明セヨ.

148. 定點ヲ過ル任意ノ直線ノ定圓ニ關スル極ノ軌跡ヲ求メヨ.

149. 定圓 O 外ノ一點 P ヨリ任意ノ直線ヲ引キ, 圓周ト A, B ニテ交ラシメ, AB 上ニ點 M ヲトリ. PM ヲ PA, PB ノ等差中項ナラシムルトキ, M ノ軌跡ヲ求メヨ.

150. 前題ニ於テ PM ガ PA, PB ノ調和中項ナルトキノ M ノ軌跡ヲ求メヨ.

151. 一點 P ヨリ正方形ノ四頂點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナルトキ, P 點ノ軌跡ヲ求メヨ.

152. 正三角形 ABC ニ於テ, PA＝PB+PC ナル如キ點 P ノ軌跡ハ, 此三角形ノ外接圓ナルコトヲ證明セヨ.

153. 三角形 ABC ノ內接圓ガ邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トスルトキハ, 三直線 AD, BE, CF ハ共點ナルコトヲ證明セヨ.

154. 與ヘラレタル圓周上ノ一點 P ヨリ, 任意ノ三弦 PA, PB, PC ヲ引キ, 是等ノ弦ヲ直徑トシテ畫キタル三圓ガ, 二ツ宛交ル三點ハ一直線上ニ在リ.

155. 方程式 $(n+1)(x^2+y^2)=ax+nby$ ニテ表ハサレタル圓ハ, 皆同一ノ根軸ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

156. 二定圓ノ交點 A ヲ過ル直線ガ, 更ニ圓周ト交ル點ヲ夫々 P, Q トスルトキ, PQ ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

157. 圓周上ノ任意ノ點 P ニ於ケル切線ト, 直徑 AB ノ一端 B ニ於ケル切線トノ交點 C ト, 直徑ノ他ノ端 A トヲ過ル直線ハ, 點 P ヨリ直徑 AB ヘ引キタル垂線ヲ二等分ス.

158 定圓 O 外ノ定點 P ト, 此圓周上ノ任意ノ點 Q トヲ結ビツクル線分ヲ定比 $m:n$ ニ內分スル點 M ノ軌跡ヲ求メヨ.

159. 圓 O 外ニ在ル定直線 L 上ノ任意ノ點ヨリ圓 O ニ引ケル切線ノ切點弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

160. 圓 O 內ノ定點 P ヨリ, 垂直ナル二直線 PA. PB ヲ引キ, 圓周トノ交點ヲ A, B トス. 弦 AB ノ中點 M ノ軌跡ヲ求メヨ.

161 圓周上ノ一點 O ヨリ引ケル定弦 OC アリ. 今 OC ノ兩側ニ之ト相等シキ角ヲナス二ツノ弦 OA, OB ヲ引クトキ, 其角ノ大サ如何ニ關ハラズ, 弦 AB ハ一定ノ方向ヲ有ス.

162. 二等邊三角形ノ頂角內ノ一點ヨリ底邊ニ至ル距離ノ平方ガ他ノ二邊ニ至ル距離ノ積ニ等シキトキ, 此點ノ軌跡ヲ求メヨ.

163. 點 P ヨリ二ツノ同心圓

$$x^2+y^2=r_1^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x^2+y^2=r_2^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ノ各々ヘ引ケル二ツノ切線ノ長サガ, 此等ノ圓ノ半徑ニ逆比例スルトキ, 點 P ノ軌跡如何.

164. 同心ナラザル二定圓 C 及ビ C′ ノ各々ヲ二等分スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ.

第五章 二次曲線ノ分類ニ關スル問題

165. $3x^2-2xy+3y^2-2=0$ ヲ標準形ニ直セ. 以下同ジ.

166. $x^2-6xy+y^2-2x+6y-3=0$

167. $x^2-4xy+4y^2+6x-2y+11=0$

168. $3x^2-6xy-5y^2+12x+20y+23=0$

169. $2x^2+4xy+5y^2-4x+2y+4=0$

170. $5x^2+2xy+5y^2-2x-10y+3=0$

171. $7x^2+4xy+4y^2+14x+4y+2=0$

172. $7x^2-8xy+y^2-6x+6y-1=0$

173. $x^2+6xy+y^2+10x-2y+1=0$

174. $3x^2-4xy+6y^2-8x-4y+3=0$

175. $2y^2-3x-8y+17=0$

176. $9x^2+24xy+16y^2-34x+38y-9=0$

177. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2x}{a}-\frac{2y}{b}+1=0$ ハ直交軸ニ於テ何ヲ表スカ. 以下同ジ.

178. $x^2-6xy-7y^2+2ax+2ay=0$

179. $by\left(1-\frac{y}{b}\right)+cx\left(1-\frac{x}{c}\right)-xy=0$

180. $(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2=a^4$ ハ二ツノ楕圓ヲ表スコトヲ示シ, 且其各々ノ方程式ヲ標準形ニ直セ. (直交軸)

181. 三角形 ABC ノ邊 AB ノ上ニ一點 P ヲトリ, AC ニ垂

線 PQ ヲ下ストキ, BQ ト CP トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

182. $x^2+6xy-7y^2+2x+2y+K=0$ ノ標準形ガ,

$x^2-4y^2=1$ トナル様ニ K ヲ定メヨ.

183. 平行移動ニヨリテ, 一ノ二次式.

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2f+c$$

ガ變ジテ

$$a'X^2+2h'XY+b'Y^2+2g'X+2f'Y+c'$$

トナルトキハ

$$\begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a', & h', & g' \\ h', & b', & f' \\ g', & f', & c' \end{vmatrix}$$ ナルコトヲ證明セヨ.

184. 二定圓ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ二定圓ノ中心ヲ焦點トスル楕圓又ハ双曲線ナルコトヲ證明セヨ.

185. 三角形ノ底邊ノ大サ, ソノ位置, 及ビ他ノ二邊ノ和 (又ハ差) ガ與ヘラレタルトキ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ.

186. 一定直線ニ切シ, 且一定點ヲ通過スル圓ノ中心ノ軌跡ハ一定點ヲ焦點トシ, 一定直線ヲ準線トスル抛物線ナルコトヲ證明セヨ.

第六章 楕圓及ビ双曲線ニ關スル問題

187. 一定ノ長サヲ有スル線分 AB ノ兩端ガ, 直角ニ相交ル二ツノ直線ノ上ニ夫々アルトキ, AB ヲ與ヘラレタル比ニ分ツ點ノ軌跡如何.

188. 二定點ヲ過ル數多ノ圓ニ引キタル互ニ平行ナル切線ノ切點ノ軌跡如何.

189. 楕圓ノ長軸ノ兩端ヲ A, A′ トシ楕圓上ニ在ル任意ノ一點ヲ P トス. A 及ビ A′ ヲ通ジ, 夫々 AP 及ビ A′P ニ垂直ナル直線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

190. 一定圓ニ於テ一定直線ニ平行ナル弦ヲ PQ トス. PQ 上ニ一點 T ヲトリ, $PT^2+QT^2=$ 一定, ナラシムルトキ, T ノ軌跡如何.

191. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ大サ及ビ位置ガ與ヘラレ, 且 $\angle B=2\angle C$ ナルトキ, 頂點 A ノ軌跡如何.

192. PQ ハ楕圓ノ長軸 AA′ ニ垂直ナル弦トス. PA, QA′ ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

193. 直線 $y=mx+n$ ガ二次曲線

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ法線ナルタメノ條件ヲ求メヨ.

194. AB ハ楕圓ノ一ノ直徑ナリ. 楕圓上ノ一點 P ニ於ケル

切線ガ A 及ビ B ニ於ケル切線ト交ハル點ヲ C 及ビ D トス.
AC, BD ハ P ノ位置如何ニ拘ハラズ一定ナルコトヲ證明セヨ.

195. 前問ニ於テ中心ヲ C トセバ, OC ト OD トハ共軛ナルコトヲ證明セヨ.

196. 楕圓ニ於テ相互ニ垂直ナル半徑ヲ OP, OQ トスルトキ.

$$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}$$

ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

197. 楕圓ニ於テ一定點ヲ過ル弦ノ中點ノ軌跡ハ, 之ト同ジ心差率ヲ有スル他ノ楕圓ナルコトヲ證明セヨ.

198. 楕圓上ノ二點 P, Q ノ心差角ヲ夫々 θ_1. θ_2 トスルトキハ直線 PQ ハ心差角ガ $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ ナル點ニ於ケル切線ニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

199. 楕圓ヲ其短軸ニヨリテ半分ニ分ツトキ, ソノ一ツニ內接スル圓ノ半徑ヲ求メヨ.

200. 双曲線上ノ一點ニ於ケル切線ニ, 中心ヨリ下セル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ.

201. 楕圓上ノ一點 P ヲ足トスル法線ガ長軸ト交ル點ヲ Q トス. PQ ノ中點ノ軌跡ハ一ノ楕圓ニシテ, モシ此等ノ楕圓ノ心差率ヲ e 及ビ e_1 トスルトキ,

$$1-e^2=(1+e^2)(1-e_1^2)$$

ナルコトヲ證明セヨ.

202. 楕圓上ノ一點 P ニ於ケル切線ニ, 中心ヨリ下セル垂線ノ長サト P ヲ足トスル法線ノ主軸ノ間ニ挾マレタル部分ノ長サ

トノ積ハ, 一定ナルコトヲ證明セヨ.

203. 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ短軸ヲ直徑トスル圓 O ニ楕圓上ノ一點ヨリ切線ヲ引キ, ソノ二ツノ切點ヲ結ビツクル直線ガ兩軸ト交ル點ヲ P 及ビ Q トスルトキハ.

$$\frac{b^2}{OP^2}+\frac{a^2}{OQ^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ,

204. 楕圓 $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$ 上ノ任意ノ一點ニ於ケル切線ガ他ノ楕圓 $\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1$ ト交ハル點ヲ P 及ビ Q トス. P ト Q トニ於テ後ノ楕圓ニ引キタル切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

205. AA′ ヲ楕圓ノ長軸トス. 楕圓上ノ任意ノ一點 P ニ於ケル切線ガ AA′ ト交ル點ヲ T トシ, T ヲ通ジ AA′ ニ垂直ナル直線ト PA, PA′ トノ交點ヲ夫々 M, N トス, 然ルトキハ MT=TN ナルコトヲ證明セヨ.

206. 直線 $y=mx+n$ ガ楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ト交ル點ヲ P, Q トスルトキハ.

$$PQ=\frac{2ab\sqrt{(1+m^2)(a^2m^2+b^2-n^2)}}{a^2m^2+b^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

207. 楕圓ノ長軸ノ一端ヲ A トシ, A ニ於ケル切線ガ一双ノ共軛ナル直徑ト交ル點ヲ C 及ビ D トセバ.

4CA・AD ハ短軸ノ自乘ニ等シキコトヲ證明セヨ.

208. 楕圓又ハ双曲線ニ於テ通徑ノ一端ニ於ケル切線ノ方程式ヲ作リ, 依リテ長軸又ハ交軸ノ長サガ一定ナル一群ノ楕圓又

ハ双曲線ニ於テハコレラノ通徑ノ端ニ於ケル切線ハ，必ズ或定點ヲ過ルコトヲ示セ.

209. PQ ハ O ヲ中心トスル楕圓ノ弦ナリ，OP ト OQ トガ共軛ナルトキ，PQ ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

210. 楕圓上ノ一點 P ヨリ長軸ト等シキ角ヲ作ル二ツノ弦 PQ, PQ′ ヲ引カバ，直線 QQ′ ハ短軸ニ對シテ P ト對稱ナル點ニ於ケル切線ニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

211. 楕圓ノ焦點ノ一ツヲ過リ，任意ノ切線ニ垂直ニ引ケル直線ト中心及ビ切點ヲ結ブ直線トノ交點ノ軌跡如何.

212. 一點 (x_1, y_1) ヨリ曲線 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ切線ヲ引キソノ二ツノ切點ト中心トヲ結ビツクルトキハ，ソノ二ツノ直線ノ方程式ハ $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}\right)^2$ ナルコトヲ示セ.

213. 一點 P ヨリ中心ヲ O トスル楕圓ニ切線ヲ引キ，其切點ヲ Q, R トス. OQ, OR ガ常ニ互ニ垂直ナル如キ P 點ノ軌跡如何.

214. 一點ノ楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ關スル極線ガ，常ニ其楕圓ノ法線ナルトキソノ點ノ軌跡ハ

$$\frac{a^6}{x^2}+\frac{b^6}{y^2}=(a^2-b^2)^2$$

ナルコトヲ證明セヨ.

215. 一ノ楕圓ニ於テ共軛直徑ノ間ノ角ガ 60° ナルトキ兩直徑ノ長サガ丁度相等シト云フ. コノ楕圓ノ心差率如何.

216. 與ヘラレタル直線上ノ任意ノ一點 P ヨリ二ツノ楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a_1^{\,2}}+\frac{y^2}{b_1^{\,2}}=1$$

ニ夫々切線 PR, PR$_1$, PQ, PQ$_1$ ヲ引クトキ切點ヲ結ビ付クル直線 RR$_1$, 及ビ QQ$_1$ ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

217. 双曲線上ノ一點 P ニ於ケル切線ガ，交軸ト交ル點ヲ S トシ，P ト中心トヲ通ズル直線ガ頂點 A ニ於ケル切線ト交ハル點ヲ T トス. ST ハ PB ニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

218. 双曲線ノ中心ヲ O トシ. P 及ビ Q ヲ曲線上ノ二點トシ，P ト Q トニ於ケル切線ガ OQ, OP ト交ハル點ヲ夫々 P$_1$, Q$_1$ トス. 三角形 OPP$_1$ ト OQQ$_1$ トハ，相等シキ面積ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

219. 双曲線上ノ一點 P ニ於ケル切線ガ. 二ツノ頂點ニ於ケル切線ト交ル點ヲ S, T トス. ST ヲ直徑トスル圓ハ兩焦點ヲ通ズルコトヲ證明セヨ.

220. ϕ_1, ϕ_2 ハ共軛ナル二ツノ双曲線ナリ. 一双ノ共軛ナル直徑ガ ϕ_1 及ビ ϕ_2 ト交ハル點ヲ P, Q トセバ，P, Q ニ於テ夫々 ϕ_1, ϕ_2 ニ引ケル切線ハ漸近線上ニテ交ルコトヲ證明セヨ.

221. 双曲線上ノ一點ニ於ケル切線ト二ツノ漸近線トガ作ル三角形ノ面積ハ，一定ナルコトヲ證明セヨ.

222. 双曲線上ノ二點 P, Q ニ於ケル切線 P$_1$PP$_2$ 及ビ Q$_1$QQ$_2$ ト，二ツノ漸近線トノ交點ヲ P$_1$, P$_2$, Q$_1$, Q$_2$ トス. 直線 P$_1$Q$_2$ ハ P$_2$Q$_1$ ニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

223. C ニ於テ相交ル二ツノ定直線 CP$_1$P$_2$ 及ビ CQ$_1$Q$_2$ ト，或一ツノ圓トノ交點ヲ P$_1$, P$_2$, Q$_1$, Q$_2$ トス. 弦 P$_1$P$_2$ 及ビ Q$_1$Q$_2$ ガ夫々與ヘラレタル長サニ等シキトキ，此圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ.

224. 楕圓ノ一双ノ共軛ナル直徑ヲ漸近線トスル相互ニ共軛ナル双曲線ヲ ϕ_1, ϕ_2 トス. モシ ϕ_1 ガ此楕圓ニ切スルトキハ. ϕ_2 モ亦コレニ切スルコトヲ證明セヨ.

225. 等邊双曲線上ノ任意ノ一點 P ニ於ケル切線ニ, 中心 O ヨリ下セル垂線ノ足ヲ T トシ, コノ垂線ガ曲線ト交ル點ヲ S トス. OT・OS ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

226. 双曲線上ノ一點ニ於ケル法線ガ交軸及ビ共軛軸ト交ル點ヲ P 及ビ Q トス. PQ ニ於テ夫々ソノ軸ニ垂直ニ引ケル直線ノ交點ノ軌跡如何.

227. 楕圓ノ軸ノ上ニ在ル一定點ヲ過ル任意ノ直線ヲ g トス, g ニ共軛ニシテ且垂直ナル直線ガ g ト交ル點ノ軌跡如何.

228. 等邊双曲線上ノ一點 P ニ於ケル法線ガ, 兩軸ト交ル點ヲ K, L トス. KL ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

229. 等邊双曲線上ニ在ル一點 P ヲ足トスル法線ガ, 再ビ曲線ト交ル點ヲ Q トシ曲線ノ中心ヲ O トスルトキハ

$$3OP^2+OQ^2=PQ^2$$

ナルコトヲ證明セヨ.

230 等邊双曲線上ノ一點 P ヲ過リ. 相互ニ垂直ナル直線ガ更ニ曲線ト交ル點ヲ QR トス. QR ハ P ニ於ケル法線ニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

231. 楕圓ノ一ノ焦點ヲ F トシ. 曲線上ノ任意ノ一點ヲ P トセバ. PF ヲ直徑トシテ畫キタル圓ハ楕圓ノ補助圓ニ切スルコトヲ證明セヨ.

232. 楕圓ノ共軛ナル二ツノ直徑ト一ツノ準線トニヨリテ作ラレタル三角形ノ垂心ハ, 定點ナルコトヲ證明セヨ.

233. 一定點 P ヲ通リ互ニ垂直ナル任意ノ二直線ガ一定ノ楕圓又ハ双曲線ニ關シ常ニ共軛ナルトキハ, P ハ焦點ノ一ツナルコトヲ證明セヨ.

234. 楕圓ノ一ノ焦點ヲ過ル弦ヲ PQ, コレニ平行ナル直徑ヲ CD トシ, 長軸ヲ AA′ トスルトキハ

$$PQ:CD=CD:AA'$$

ナルコトヲ證明セヨ.

235. 楕圓ノ一ノ焦點ヲ通シ相互ニ垂直ナル二ツノ弦ノ長サヲ p_1, p_2 トスルトキ

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\text{一定}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

236. P, Q ヲ楕圓ノ上ニ在ル二點トシ, 直線 PQ ト焦點 F ニ對スル準線トノ交點ヲ R トス. 直線 FR ハ三角形 PQF ノ F ニ於ケル外角ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ.

237. 楕圓ノ一ノ焦點 F ヲ通ズル弦ヲ PP_1 トシ, 此弦ノ上ニ一點 Q ヲトリ $FQ^2=PF, FP_1$ ナラシメバ, Q ノ軌跡ハ與ヘラレタル楕圓ト同ジ心差率ヲ有スル楕圓ナルコトヲ證明セヨ.

238. 任意ノ一點 P ト楕圓ノ一ノ焦點 F トヲ結ビ, PF ヲ直徑トシテ畫キタル圓ガ楕圓ノ補助圓ト交ル點ヲ Q,R トスルトキハ, PQ, PR ハ楕圓ノ切線ナルコトヲ證明セヨ.

239. 双曲線上ノ一點ニ於ケル切線, 法線及ビ共軛軸ニヨリテ

作ラレタル三角形ノ外接圓ハ，焦點ヲ過ルコトヲ證明セヨ.

240. 双曲線上ノ一點ニ於ケル切線ガ，二ツノ漸近線ト交ル點ヲ P, Q トシ，焦點ノ一ヲ F トスレバ角 PFQ ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

241. ϕ_1, ϕ_2 ハ同焦點楕圓ナリ，モシ θ_1, θ_2 ヲ心差角トスル ϕ_1 上ノ二點ヲ P_1, P_2 トシ，又 ϕ_2上ノ二點ヲ Q_1, Q_2 トスルトキハ

$$P_1Q_2=P_2Q_1$$

ナルコトヲ證明セヨ.

242. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ト同焦點ナルスベテノ二次曲線ニ對シテ，一ノ與ヘラレタル直線 $lx+my=1$ ノ極ノ軌跡如何.

243. 數多ノ同焦點楕圓ノ平行ナル切線ノ切點ハ，一ノ双曲線ノ上ニ在ルコトヲ證明セヨ.

244. φ_1, φ_2 ハ同焦點楕圓ナリ，φ_1, φ_2 ノ切線ガ互ニ垂直ナルトキソノ交點ノ軌跡如何.

245. 數多ノ同焦點楕圓ノ各ノ上ニ與ヘラレタル一定ノ心差角ヲ有スル點ヲ作ラバ，コレラノ點ハ又楕圓ト同焦點ナル一ノ双曲線上ニ在ルコトヲ證明セヨ.

246. 一ノ楕圓ノ圖アリ定規ト兩脚規ノミヲ用ヒテソノ中心ヲ見出セ.

247. 兩軸ノ截片相等シキ楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ切線ノ方程式ヲ求メヨ.

248. 心差角ノ差ガ一定ナル如キ楕圓上ノ二點ニ於ケル切線

ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

249. 楕圓ノ通徑ノ一端ニ於ケル法線ガ短軸ノ一端ヲ過ルトキハ其心差率ヲ與フル式ハ

$$e^4+e^2-1=0$$

ナルコトヲ證明セヨ.

第七章 拋物線ニ關スル問題

250. 拋物線 $y^2=4dx$ ノ上ニ在ル二點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ニ於ケル切線ノ交點ノ座標ハ

$$\left(\frac{y_1y_2}{4d}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

ナルコトヲ示セ.

251. 拋物線上ノ一點 P ノ縱線ヲ PM トス. PM ノ中點ヲ通ジ主軸ニ平行ナル直線ガ曲線ト交ル點ヲ Q トシ, 又直線 MP ガ頂點 A ニ於ケル切線ト交ル點ヲ T トセバ,

$$AT=\frac{2}{3}PM$$

ナルコトヲ證明セヨ.

252. 拋物線 $y^2=4dx$ ノ焦點ニ一ツノ頂點ヲ有シ, 他ノ二ツノ頂點ハ曲線上ニ在ル正三角形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ.

253. 拋物線 $y^2=4dx$ ノ通徑ノ兩端ニ於ケル法線ノ方程式ヲ求メヨ.

254. 共通ノ主軸ヲ有スル二ツノ拋物線アリ. 一方ノ曲線ノ頂點ヲソノ主軸ニ沿ヒテ適當ニ滑ラシメバ, 二ツノ曲線ハ相重リ合フコトヲ得ルモノトス. 然ルトキハ其一方ニ引ケル切線ト他ノ曲線トノ二ツノ交點ハ切點ヨリ等距離ニ在ルコトヲ證明セヨ.

255. 拋物線ニ於テ常ニ一定ノ距離ヲ有スル二ツノ直徑ガ曲線ト交ル點ヲ P 及ビ Q トス. P, Q ニ於ケル切線ノ交點ハ又一ノ拋物線上ニ在ルコトヲ證明セヨ.

256. 拋物線 $y^2=4dy$ 上ノ三點 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ヲ頂點トスル三角形ノ面積ハ

$$\left|\frac{1}{8d}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)\right|$$

ナルコトヲ示セ.

257. 拋物線ノ三ツノ切線ヨリ成ル角三形ノ面積ハ, ソノ三ツノ切點ヲ頂點トスル三角形ノ面積ノ半分ナルコトヲ證明セヨ.

258. 三角形 ABC ノ頂點 A ガ底邊 BC ニ平行ナル一直線上ニ動クトキ, 此三角形ノ垂心ノ軌跡ヲ求メヨ.

259. 相等シキ縱線ヲ有スル二點 P, Q ヨリ曲線

$$y^2=4dx$$

ニ引ケル切線ノ方向係數ガ夫々 m_1, m_2 及ビ n_1, n_2 ナルトキ

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

260. 一點ヨリ拋物線ニ引ケル二ツノ切線ノ間ノ角ガ一定ナル如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

261, 拋物線上ニ在ル任意ノ二點 P, Q ノ中點ヲ通ル直徑ト焦點ヨリ直線 PQ ニ下セル垂線トノ交點ノ軌跡如何.

262. AB, CD ハ圓ノ垂直ナル二ツノ直徑ナリ. A ヲ通ズル弦 AF ガ CD ト交ル點ヲ E トシ, E ヲ通ジテ AB ニ平行ナル直線ト FB トノ交點ヲ P トス. P ノ軌跡ヲ求メヨ.

263. 拋物線ニ內接セル直角三角形ノ直角頂ガ常ニ曲線ノ頂點ニアルトキ其斜邊ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

264. PQ ハ拋物線ノ一ノ弦ニシテ, PT ハ P ニ於ケル切線ト

ス．主軸＝平行ナル一ノ直線ガ弧 PQ ト交ハル點ヲ E トシ．PT ト交ハル點ヲ T トシ．PQ ト交ハル點ヲ F トスルトキハ

$$TE:EF=PF:FQ$$

ナルコトヲ證明セヨ．

265. 一點 P ヨリ拋物線＝引ケル二ツノ切線ト，ソノ切點ヲ結ビ付クル弦トガ作ル三角形ノ面積ガ一定ナルトキ，P ノ軌跡ヲ求メヨ．

266. 拋物線ノ圖アリ．定規ト兩脚規トヲ用ヒテソノ主軸ヲ見出ス方法如何．

267. 拋物線 $y^2=4dx$ アリ．一ツノ直線 $y=mx+b$ ガソノ法線ナルタメノ條件如何．

268. 拋物線ノ焦點ヨリ任意ノ法線＝下セル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ．

269. 拋物線＝於テ相互＝垂直ナル法線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ．

270. 拋物線上ノ一點＝於ケル切線ガ通徑ト準線ト＝交ル二ツノ點ハ焦點ヨリ等距離＝在ルコトヲ證明セヨ．

271. 拋物線ノ焦點ヲ通ズル弦ヲ PQ トシ，曲線ノ頂點ヲ O トセバ，三角形 OPQ ノ面積ハ PQ ノ長サノ平方根＝比例スルコトヲ證明セヨ．

272. 拋物線ノ三ツノ切線ガ作ル三角形ノ垂心ハ準線ノ上＝在ルコトヲ證明セヨ．

273. 前問＝於ケル三角形ノ外接圓ハ焦點ヲ過ルコトヲ證明セヨ．

274. 拋物線＝關シ一點 P ノ極線＝ P ヨリ垂線ヲ下シ，其足ヲ T トシ，又此垂線ガ主軸ト交ル點ヲ S トセバ，T ト S トハ焦點ヨリ等距離＝在ルコトヲ證明セヨ．

275. 前問＝於テ P ノ極線ガ主軸上ノ一定點 R ヲ過ルトキハ，S ハ定點＝シテ T ノ軌跡ハ RS ヲ直徑トスル圓トナルコトヲ證明セヨ．

276. 拋物線ノ準線ト主軸トノ交點 P ヲ通ジ，任意ノ直線ヲ引キ曲線ト交ル點ヲ Q，P トシ，又焦點 F ヲ通ジテ之＝平行ナル直線ガ曲線ト交ル點ヲ Q_1, R_1 トセバ

$$PQ\cdot PR=FQ_1\cdot R_1F$$

ナルコトヲ證明セヨ．

277. 拋物線上ノ一點ト焦點トヲ直徑ノ兩端トスル圓ハ，ソノ拋物線ノ頂點＝於ケル切線＝切スルコトヲ證明セヨ．

278. 拋物線ノ焦點ヲ通ズル任意ノ弦ノ兩端ヲ P_1, P_2 トシ，此二點ヲ足トスル法線ガ主軸ト交ル點ヲ Q_1, Q_2 トスルトキ

$$\frac{1}{P_1Q_1^2}+\frac{1}{P_2Q_2^2}$$

ハ一定ナルコトヲ證明セヨ．

279. 圓 $x^2+y^2-2ax-3a^2=0$ 上ノ點ノ，圓

$x^2+y^2+2ax-3a^2=0$ ＝關スル極線ハ，恒＝拋物線

$y^2+4ax=0$ ＝切スルコトヲ證明セヨ．

280. 與ヘラレタル點ヲ過リ與ヘラレタル軸及ビ焦點ヲ有スル拋物線二個アリテ，且互＝直交スルコトヲ證明セヨ．

281. 抛物線上ノ一點ヨリ頂點ニ於ケル切線ニ下セル垂線ノ足ヲ過ギ，此點ヲ結ブ弦ニ垂直ナル直線ハ，一定點ヲ過ルコトヲ證明セヨ．

282. 抛物線ノ二切線ノ方向係數ヲ $\tan\theta_1$, $\tan\theta_2$ トスルトキ

(i) $\tan\theta_1 \tan\theta_2 = d$ (ii) $\cot\theta_1 + \cot_2\theta' = b$

ナル二切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ．

283. 與ヘラレタル圓及ビ與ヘラレタル直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ，與圓ノ中心ヲ焦點トスル抛物線ナルコトヲ證明セヨ．

284. 二曲線 $y^2 = 4dx$, $y^2 = 2\gamma x - x^2$ ニ共通ナル總テノ弦ノ方程式ヲ求メヨ．

285. 抛物線ノ焦點弦ヲ直徑トシテ畫キタル圓ノ方程式ヲ求メヨ．

286. 抛物線ノ任意ノ二ツノ焦點弦ヲ直徑トスル二圓ノ共通弦ハ頂點ヲ過ルコトヲ證明セヨ．

287. 頂點ニ於テ直角ヲ張ル如キ抛物線ノ弦ノ極ノ軌跡ヲ求メヨ．

288. 抛物線 $y^2 = 4dx$ ノ法線ノ極ノ軌跡ヲ求メヨ．

289. 抛物線ノ任意ノ焦點半徑ヲ直徑トスル圓ハ，頂點ニ於ケル切線ニ切スルコトヲ證明セヨ．

290. 定規トコンパスニヨリ抛物線ノ焦點ヲ求メヨ．

291. 抛物線 $y^2 = 4dx$ ノ法線ヨリナル弦ノ中點ノ軌跡ハ次式

ニテ表ハサルヽコトヲ證明セヨ．

$$\frac{y^2}{2d} + \frac{4d^2}{y^2} = x - 2d.$$

第八章　空間ニ於ケル點ノ座標ノ問題

292. 三角形ノ三ツノ頂點ノ座標ヲ夫々 $(a.\ b.\ c)$, $(b.\ c.\ a)$ $(c.\ a.\ b)$ トスルトキ各邊ノ長サ如何.

293. 三點 $(1, 2, 3)$, $(3, 1, 5)$, $(2, 4, 3)$ ヲ頂點トスル三角形ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ.

294. 任意ノ四面體ニ於テ三双ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ビ付クル線分ノ中點ハ同一ノ點ナルコトヲ示セ.

295. 三角形ノ頂點ヲ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ トシ, 邊 BC 上ニ一點 D ヲトリ; $BD:DC=n:m$ ナラシメ次ニ線分 AD 上ニ一點 E ヲトリ, $AE:ED=m+n:l$ ナラシムルトキ, 點 E ノ座標如何.

296. 任意ノ三角形ノ重心ノ座標ヲ表ス公式ヲ作レ.

297. 一ノ直線ガ x 軸及ビ y 軸ト夫々 $60°$ 及ビ $45°$ ノ角ヲナストキハ, z 軸トナス角如何.

298. 方向餘弦ノ比ガ $A:B:C$ ナル直線アリ. 其方向餘弦ノ値ヲ求メヨ.

299. 問題 (293) ニ於ケル二點ヲ夫々原點ニ結ビ付クル直線ノ方向餘弦如何.

300. 同一ノ點ヨリ引ケル二ツノ直線ノ方向餘弦ヲ夫々 l, m, n 及ビ l', m', n', トスルトキ, モシ

$$\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}$$

ナラバ其二直線ハ相合スコルトヲ證明セヨ.

301. 次ノ方程式ノ軌跡如何.

(i) $x=y$　　(ii) $z^2-a^2=0$,

(iii) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$　　(iv) $y^2+z^2=a^2$.

302. 次ノ各方程式ハ如何ナル面ヲ表スカ其形狀ヲ推定セヨ.

(i) $x=y+z$,　　(ii) $x^2+y^2=z$.

303. 次ノ各聯立方程式ノ軌跡如何

(i) $x=a,\ \ y=b$,

(ii) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$,

(iii) $ax+by=0$.

304. 極座表ニ關スル次ノ各方程式ノ軌跡如何.

(i) $\gamma=a$,　　(ii) $\theta=\alpha$,

(iii) $\phi=\frac{\pi}{4}$,　　(iv) $\gamma=a\cos\theta$.

305. 極座標ニ關スル方程式ニシテ r ヲ含マザルモノハ, 常ニ極ヲ過リツツ種々ニ方向ヲ變ズル一ノ直線ニヨリテ空間ニ畫カルヽ面ヲ表スコトヲ示セ.

306. 極座標ニ關スル方程式ニシテ ϕ ヲ含マザルモノハ一ノ平面曲線ガ其平面内ノ一直線ヲ軸トシテ空間ニ回轉スルトキ生ズル面ヲ表スコトヲ示セ.

307. 種々ノ位置ニ於ケル圓ノ一平面上ニ投ズル射影ヲ求メ

ヨ.

308. 相交ル二平面 P 及ビ Q アリ, ソノ間ノ角ヲ α トス. 平面 P 上ニ在ルーノ三角形ノ面積ヲ S トシ, ソノ平面 Q 上ニ於ケル射影ノ面積ヲ S′ トセバ,

$$S'=S\cos\alpha$$

ナルコトヲ證明セヨ.

309. 一平面上ニ四點 A, B, C, D アリ. コノ四點ノ他ノ一平面上ニ於ケル射影ヲ夫々 A′, B′, C′, D′ トスルトキハ, 二ツノ四面體 ABCD′ 及ビ A′B′C′D ノ體積ハ相等シキコトヲ證明セヨ.

310. 空間ニ一ノ三角形アリ. 三ツノ座標面上ニ於ケルソノ射影ノ面積ヲ知リテ, モトノ三角形ノ面積ヲ求ムルコトヲ考ヘヨ.

311. 極座標ニ於ケル二點 (γ,θ,ϕ), (γ',θ',ϕ') ノ間ノ距離ハ

$$\sqrt{\gamma^2+\gamma'^2-2\gamma\gamma'\{\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\}}$$

ナルコトヲ示セ.

312. 前題ノ結果ニヨリテ一般ニ球面三角形 ABC ニ於テ, BC, CA, AB ガ球ノ中心ニ對シテ張ル角ヲ a, b, c トスルトキハ

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

ナルコトヲ證明セヨ.

313. 二ツノ聯立方程式

$$Al^2+Bm^2+cn^2=0,\qquad al+bm+cn=0$$

ニヨリテ定メラレタル方向餘弦ヲ有スル二直線ガ, 互ニ垂直ナルタメノ條件ハ

$$(B+C)a^2+(C+A)b^2+(A+B)c^2=0$$

ナルコトヲ示セ.

314. 二直線ノ方向餘弦ガ夫々 1. 2. 3 及ビ 2. 3. 6 ニ比例スルトキ其間ノ角ヲ求メヨ.

315. 夫々方向餘弦ガ 1. 2. 3 及ビ 5. −4. 1 ニ比例スルトキ, 其間ノ角ヲ求メヨ.

316. 座標ガ $(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$ ナル點ノ極座標ヲ求メヨ.

317. 極座標ガ $\left(4, \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}\right)$ ナルトキ其直角座標ヲ求メヨ.

第九章　直線及ド平面ニ關スル問題

318. 二點 $P(b,c,a)$ 及ビ $Q(c,a,b)$ ヲ過ル直線ハ原點ト線分 PQ ノ中點トヲ過ル直線ニ垂直ナルコトヲ示セ.

319. 二ツノ直線アリ. 一ハ xy 面內ニアリテ z 軸ト α ナル角ヲナシ, 他ノ一ハ yz 面內ニ在リテ z 軸ト r ナル角ヲナスモノトス. コノ二直線ニ共ニ垂直ナル直線ノ方向餘弦ヲ求メヨ.

320. 次ノ各場合ニ於ケル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

(i), 一點 (a,b,c) ヲ過リ直線 $\dfrac{x-\alpha}{l}=\dfrac{y-\beta}{m}=\dfrac{z-\gamma}{n}$ ニ平行ナルモノ.

(ii), (i) ニ於ケルト同シ點ヲ過リ同ジ直線ニ垂直ニ交ルモノ.

(iii), 一點 (a,b,c) ヲ過リ平面 $Ax+By+Cz+D=0$ ニ垂直ナルモノ.

321. 二點 (a,b,c) 及ビ (a',b',c') ヲ過リ平面 $lx+my+nz=p$ ニ垂直ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ.

322. 一點 (a,b,c) ヲ過リ平面 $Ax+By+Cz+D=0$ ニ平行ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ.

323. 一點 (a,b,c) ヲ過リ直線 $\dfrac{x-a'}{l}=\dfrac{y-b'}{m}=\dfrac{z-c'}{n}$ ヲ含ム平面ノ方程式ヲ求メヨ.

324. 一點 (a,b,c) ヲ過リ二平面 $lx+my+nz=p$ 及ビ $l'x+m'y+n'z=p'$ ニ共ニ垂直ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ.

325. 一點 (a,b,c) ヲ過リ二直線 $\dfrac{x-\alpha}{l}=\dfrac{y-\beta}{m}=\dfrac{z-\gamma}{n}$ 及ビ $\dfrac{x-\alpha'}{l'}=\dfrac{y-\beta'}{m'}=\dfrac{z-\gamma'}{n'}$ ノ何レニモ平行ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ.

326. 直線 $\dfrac{x-a}{L}=\dfrac{y-b}{M}=\dfrac{z-c}{N}$ ヲ含ミ. 直線

$\dfrac{x-a'}{L'}=\dfrac{y-b'}{M'}=\dfrac{z-c'}{N'}$ ニ平行ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ.

327. 一點 (a,b,c) ヲ過リ平面 $Ax+By+Cz+D=0$ ニ平行ニシテ, 且直線 $\dfrac{x-\alpha}{l}=\dfrac{y-\beta}{m}=\dfrac{z-\gamma}{n}$ ニ交ル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

328. 三點 (a,b,c), (b,c,a), (c,a,b) ヲ過ル平面ノ方程式ヲ作リ, 且原點ヨリ共平面迄ノ距離ヲ求メヨ.

329. 點 (α,β,γ) ヲ過リ且 x 軸及ビ y 軸上ニ夫々 a 及ビ b ナル截片ヲ作ル平面ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=\frac{z}{\gamma}\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-1\right)$$

ナルコトヲ示セ.

330. 二ツノ直線ノ何レニモ垂直ニ相交ル直線ヲ z 軸トシ, ソノ二直線間ニ挾マレタル部分ノ中點ヲ原點トシ, 二直線ト等角ヲナス様ニ x 軸及ビ y 軸ヲ引クモノトセバ, 元ノ二直線ノ方程式ハ

$$y=x\tan\alpha,\qquad z=c.$$

$$y=-x\tan\alpha\qquad z=-c,$$

ナル形ニテ表ハサルヽコトヲ示セ.

331. 二ツノ定直線上ニ兩端ヲ有スル定長ノ線分ノ中點ノ軌跡ハ, 一ノ楕圓ナルコトヲ證明セヨ.

332. 點 P ハ直線 $y=x\tan\alpha$, $z=c$ 上ニ在リテ z 軸ヨリ a ナル距離ニ在リ. 點 Q ハ直線 $y=-x\tan\alpha$, $z=-c$ 上ニ在リテ z 軸ヨリ b ナル距離ニ在リトスルトキハ, 線分 PQ ノ長サハ

$$\sqrt{4c^2+a^2+b^2\pm 2ab\cos 2a}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

333. 二直線 $y=mx$, $z=c$ 及ビ $y=-mx$, $z=-c$ ノ何レニモ交ル直線ノ方程式ハ一般ニ

$$\frac{mx-\lambda\cos\theta}{m\sin\theta}=\frac{y-m\lambda\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\lambda z}{c}$$

ナル形ヲ有スルコトヲ示セ.

334. 二ツノ定直線上ニ兩端ヲ有スル任意ノ線分ノ中點ハ, 一ノ平面上ニアルコトヲ證明セヨ. 逆ニソノ平面上ノ任意ノ點ハ常ニ斯クノ如キ一ツノ線分ノ中點ナリト考ヘ得ルカ.

335. ABC 及ビ A′B′C′ ハ二ツノ直線ニシテ, BB′ ハ其間ノ最短距離ナリトシ, 又 CA′ ハ A′B′C′ ニ垂直, C′A ハ ABC ニ垂直ナリトセバ, AB. BC＝A′B′. B′C′ ナルコトヲ示セ.

336. 四點 (1.2.3), (2.3 4), (3.4.1), (4.1.2) ヲ頂點トスル四面體ニ於テハ, ソノ六ツノ二面角ノウチ, 二ツハ各 90°, 一ツハ 60° ナルコトヲ示シ, 且殘リノ三ツノ二面角ヲ求メヨ.

337. 點 $(\alpha.\beta.\gamma)$ ヨリ直線 $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ ニ至ル距離如何.

338, 二ツノ平行線 $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ 及ビ

$$\frac{x-a'}{l'}=\frac{y-b'}{m}=\frac{z-c'}{n}$$

ノ間ノ距離及ビ此二直線ヲ含ム平面ノ方程式ヲ求メヨ.

339. 直線 $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ ト各座標軸トノ間ノ最短距離ヲ求メヨ.

340. 立方體ノ一ツノ稜ト之ニ交ラザル對角線トノ間ノ最短距離如何.

341. $x+2y+3z=3x+2y+z=0$ ナル直線ガ x 軸, y 軸及ビ z 軸トナス角ヲ夫々 $\alpha.\beta.\gamma$ トスルトキ, $\alpha=\gamma$ 及ビ $\sec 2\beta=3$ ナルコトヲ示セ.

342. 次ノ方程式ヲ有スル直線ノ方向餘弦ヲ求メヨ.

$$ax+by+cz=bx+cy+az=cx+by+az.$$

343. 原點ヲ過リ二直線

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}, \quad 及ビ \quad \frac{x-a'}{l'}=\frac{y-b'}{m'}=\frac{z-c'}{n'}$$

ニ交ル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

344. 一直線ガ二ツノ定直線ト二點 A, B ニテ相交リ, 且常ニ一定平面ニ平行ナル樣ニ空間ニ動クトキ, 線分 AB ヲ一定ノ比ニ分ツ點ノ軌跡ハ, 一ノ直線ナルコトヲ證明セヨ.

345. 三ツノ平面 $x+y+z=0$, $lx+my+nz=0$,

$$(m+n)x+(n+l)y+(l+m)z=0$$

ハ一直線

$$\frac{x}{m-n}=\frac{y}{n-l}=\frac{z}{l-m}$$

ニ於テ出會フコトヲ證明セヨ.

346. 二平面 $lx+my+nz=p,\ l'x+m'y+n'z=p'$

ノナス角ヲ二等分スル平面ノ方程式ヲ求メヨ.

347. 三直線 $\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{z}{\gamma},\ \dfrac{x}{a^2\alpha}=\dfrac{x}{b^2\beta}=\dfrac{z}{c^2\gamma},$

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

ガ同一平面内ニ在ルトキハ

$$\frac{l}{\alpha}(b^2-c^2)+\frac{m}{\beta}(c^2-a^2)+\frac{n}{\gamma}(a^2-b^2)=0$$

ナルコトヲ證明セヨ.

348. 原點ヲ過リ且直線

$$x+2y+3z+4=2x+3y+4z+1=3x+4y+z+2$$

ヲ含ム平面ノ方程式ヲ作レ.

349. 極座標ニ於テ平面上ノ任意ノ點ノ座標ヲ (γ, θ, ϕ) トシ, 極ヨリ其平面ニ下セル垂線ノ足ノ座標ヲ (c, α, β) トスルトキハ, ソノ平面ノ方程式ハ

$$\frac{c}{r}=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\cos(\phi-\beta)$$

ナルコトヲ示セ.

350. 相交ル二直線

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},\quad 及ビ\quad \frac{x-a}{l'}=\frac{y-b}{m'}=\frac{z-c}{n'}$$

ノナス角ノ二等分線ノ方程式ヲ求メヨ.

351. 一ノ平面鏡ガ三ツノ座標軸ト等角ヲナシテ傾ケルトキ,

λ, μ, γ ナル方向餘弦ヲ有スル光線ガ之ニ當ラバ其反射光線ノ方向餘弦ハ

$$\frac{1}{3}(2\mu+2\gamma-\lambda),\ \frac{1}{3}(2\gamma+2\lambda-\mu),\ \frac{1}{3}(2\lambda+2\mu-\gamma)$$

ナルコトヲ示セ,

352. u_1, u_2, v_1, v_2 ヲ以テ何レモ x, y, z ノ間ノ一次式ヲ表ハサシムルトキ, 二直線 $u_1=0, v_1=0$ 及ビ $u_2=0, v_2=0$ ノ兩方ニ出會フ直線ノ方程式ハ, $u_1+\lambda_1 v_1=0,\ u_2+\lambda_2 v_2=0$ ナルコトヲ示セ. 但シ λ_1, λ_2 ハ任意ノ常數トス.

353. 三ツノ平面ノ方程式ヲ $u=0,\ v=0,\ w=0$ トスルトキハ, コレラガ同一ノ直線ニ於テ相交ルタメニ必要ニシテ充分ナル條件ハ $\lambda u+\mu v+\gamma w=0$ ナル恒等式ガ成立スルコトナルヲ證明セヨ.

354. 二直線 $\dfrac{x-a}{l}=\dfrac{y-b}{m}=\dfrac{z-c}{n}$, 及ビ $\dfrac{x-a'}{l'}=\dfrac{y-b'}{m'}=\dfrac{z-c'}{n'}$ ノ何レニモ垂直ニ交ル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

355. 四面體ノ四ツノ頂點ノ座標ヲ用ヒテソノ體積ヲ表ス公式ヲ作レ.

356. 三點 (1.1.0), (1.2.1), (−2.2.−1) ヲ過ル平面ノ方程式ヲ求メヨ.

357. 直線 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{4}$ ガ平面 $2x+4y-z+1=0$ ニ交ル點ノ座標ヲ求メヨ.

358. (1.2.3) ヲ過リ直線 $x-y+2z=5,\ 3x+y+z=6$ ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

359. 原點ヨリ直線 $x+2y+3z+4=0$, $2x+3y+4z=5$ =下シタル垂線ノ方程式ヲ求メヨ.

又垂線ノ足ノ座標如何.

360. 原點ヲ過リ二直線

$$3x+2y+4z-5=0=2x-3y+4z+1,$$

$$2x-4y+z+6=0=3x-4y+z-3$$

=交ル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

361. 直線 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{5}$ ノ間ノ最短距離ヲ求メ且其方程式ヲ作レ.

362. 二直線 $3x-9y+5z=0=x+y-z$,

$$6x+8y+3z-13=0=x+2y+z-3$$

ノ間ノ最短距離, 及ビ其方程式ヲ求メヨ.

363. $x+y+z=0$, $\frac{3}{y-z}+\frac{5}{z-x}-\frac{8}{x-y}=0$ ナル方程式=ヨリテ表ハサレタル二直線ノ間ノ角ヲ求メヨ.

364. 平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ガ座標軸ヲ截ル三點=ヨリテ作ラレタル三角形ノ面積ヲ求メヨ.

365. 方向餘弦ガ

$$2l+2m-n=0,$$

$$mn+nl+lm=0$$

ナル二方程式=ヨリテ與ヘラルヽ二直線ハ直角ヲナスコトヲ證明セヨ.

366. 方向餘弦ガ $l+m+n=0$,　$l^2+m^2-n^2=0$ ナル二方程式=ヨリテ與ヘラルル二直線ノ間ノ角ヲ求メヨ.

第十章　特殊ノ二次曲面=關スル問題

367. 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上ノ一點 (x', y', z') ヲ過リ此點=引ケル半徑=垂直ナル平面ノ方程式ヲ作レ.

368. 空間=於テ二定點ヨリノ距離ノ比ガ一點ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

369. 一定點 O ヲ過ル半直線 OP 上=一點 Q アリ. 二ツノ線分ノ積 OP•OQ ハ一定量=シテ Q ハ一定平面上=在リトセバ P ノ軌跡如何. 一定平面=代フル=球面ヲ以テセバ如何.

370. 二ツノ球面ノ交リナル圓ヲ含ム平面ノ方程式ヲ求メヨ.

371. 三ツノ球面アリ. ソノ中ノ二ツ宛=ツキテ前題ノ如キ平面ヲ作ルトキ, ソレラノ三平面ハ一直線=於テ相交ルコトヲ示セ.

372. 前問=於ケル一直線ハ三ツノ球ノ中心ヲ含ム平面=垂直ナルコトヲ證明セヨ.

373. $xy=az$ ハ如何ナル面ヲ表スカ.

374. 一般=二次ノ同次方程式ハ原點ヲ頂點トスル錐面ヲ表スコトヲ證明シ, 特=

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$$

ナル方程式ヲ有スル曲面ノ形ヲ吟味セヨ.

375. 極座標=於テ $r=a\sin\theta\cos\phi$ ナル方程式ハ如何ナル曲面

ヲ表スカ.

376. 一直線上ノ三定點 A, B, C ガ夫々各座標面上ニアル様ニ動クトキ，ソノ直線上ノ他ノ一定點 P ノ軌跡ハ一ノ楕圓面ナルコトヲ證明セヨ.

377. 楕圓面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ニ於テ原點即チ楕圓面ノ中心ヨリ相互ニ垂直ナル三ツノ方向ニハカリタリ曲面マデノ距離ヲ r_1, r_2, r_3 トスルトキハ

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

ナル關係アルコトヲ示セ.

378. 一定點及ビ一定平面ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

379, 次ノ各場合ニ於テ球面ノ方程式ヲ作レ.

(i) 點 (α, β, γ) ヲ中心トシ半徑 r ナルモノ,

(ii) 三ツノ座標面ニ切シ半徑 r ナルモノ,

(iii) (α, β, γ) ヲ中心トシ點 $(a, b\ c)$ ヲ過ルモノ.

(iv) 四點 (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), (a_4, b_4, c_4) ヲ過ルモノ.

380. 空間ニ於テ相交ラザル二定直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡如何.

381. A, B, C ヲ三ツノ定點トスルトキ $PA^2+PB^2=PC^2$ ナル如キ點 P ノ軌跡ハ，角 ACB ガ鋭角ナラバ球面，直角ナラバ一點，鈍角ナラバ虚トナルコトヲ示セ,

382. 一定直線及ビ之ト相交ル一定平面ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ一ノ錐面ナルコトヲ示セ.

383. 二直線 $\frac{x\pm a}{0}=\frac{\pm y}{\cos\alpha}=\frac{z}{\sin\alpha}$

ガ x 軸ト交ル點ヲ A, A′ トシ，xy 面ノ同ジ側ニ於テコノ二直線上ニ P, P′ヲトリ，$AP\cdot AP'=C^2$ ナラシムルトキ，直線 PP′ ニヨリテ空間ニ畫カルヽ面ハ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2\cos^2\alpha}+\frac{z^2}{c^2\sin^2\alpha}=1$$

ナル双曲面ナルコトヲ示セ.

384. 圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $z=0$ ヲ過リ，且 $y=0$ ナル平面ト唯一點ニテ出會フ球面ノ方程式ヲ作リ，コノ球面ガ xy 面ニヨリテ截ラルヽ截口ノ面積ヲ求メヨ.

385. 双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \text{(i)}$$

及ビ錐面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad \text{(ii)}$$

ヲ同一ノ平面 $z=K$ ニテ截ルトキハ，其截口ノ面積ノ比ハ K ガ大ナルニ從ヒテ限リナク 1 ニ接近スルコトヲ示セ.

386. 相交ラザル二定直線ノ各ヲ含ミ，相互ニ垂直ナル二平面ヲ作ルトキハ，ソノ二平面ノ交リナル直線ハ一葉双曲面ヲ畫クコトヲ示セ.

387. 楕圓拋物面ハ大サヲ變ジツツ平行移動ヲナス楕圓ニヨリテ空間ニ畫カルヽ面ナリト考へ，之ニヨリテ其方程式ヲ作レ.

388. 相互ノ關係位置ガ一定ナル二直線 a, b アリ．今 a ハ固

定シ b ハ a ヲ軸トシテ其周ニ回轉スルモノトセバ，b ハ如何ナル面ヲ畫クカ.

389. 一定點 A ヲ過リ二定平面ト B 及ビ C ニ テ交ル直線アリ．線分 BC ノ中點ノ軌跡ハ一ノ双曲線柱ナルコトヲ證明セヨ.

390. 直線アリ常ニ二ツノ拋物線

$$y^2=a^2x,\ z=0 \quad 及ビ \quad z^2=-b^2x,\ y=0$$

ニ出會ヒ，且二平面 $b^2y^2=a^2z^2$ ノ何レカ一方ニ平行ナル様ニ動クモノトス．ソノ直線ハ双曲線面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=x$$

ヲ畫クコトヲ示セ.

391. 直圓錐ガ相互ニ垂直ナル三ツノ母線ヲ有スルトキハ，ソノ頂角ハ $\sec^{-1}(-3)$ ナルコトヲ示セ.

392. $(0,0,0)$, $(0,1,-1)$, $(-1,2,0)$, $(1,2,3)$ ナル四點ヲ過ル球面ノ方程式ヲ求メヨ.

393. (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ヲ直徑ノ兩端トスル球面ノ方程式ヲ作レ.

394. 圓 $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ ト，點 (α, β, γ) トヲ過ル球面ノ方程式ヲ作レ.

395. 圓 $x^2+y^2+z^2=9$, $2x+3y+4z=5$: 及ビ點 $(1,2,3)$ ヲ過ル球面ノ方程式ヲ作レ.

396. 定點 O ヨリ P, Q ニ於テ與ヘラレタル球面ト交ル割線ヲ引ケバ OP•OQ＝ 一定ナルコトヲ證明セヨ.

397. 原點ヲ頂點トシ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ト $lx+my+nz=1$ トノ交リヲ過ル錐面ノ方程式ヲ求メヨ.

398. 原點ヲ頂點トシ $x=a$. $y^2+z^2=b^2$ ナル圓ヲ底トスル錐面ノ方程式ヲ作レ.

399. (x', y', z') ヲ頂點トシ xy 面內ニ位置スル楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ヲ底面トスル錐面ノ方程式ヲ作レ.

400. z 軸ヲ軸トシ yoz 面內ノ曲線 $f(z, y)=0$ ヲ回轉スルトキ生ズル回轉面ノ方程式ヲ作レ.

401. OX 軸ノ周ニ $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ ナル圓ヲ回轉シテ生ズル曲面ノ方程式ヲ作レ

402. 拋物線 $y^2=4ax$, $z=0$ ガ其軸ヲ軸トシテ回轉スルトキ生ズル曲面ノ方程式ヲ作レ.

又頂點ニ於ケル切線ヲ軸トシテ回轉スルトキノ方程式如何.

403. 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ ガ其軸ヲ軸トシテ回軸スルトキ生ズル面ノ方程式ヲ求メヨ.

404. 直線 $z=0$, $y=2x$ ヲ OX, OY ノ周ニ回轉スルコトニヨリテ生ズル面ノ方程式ヲ求メヨ.

405. 圓 $x^2+y^2+2ax+b^2=0$, $z=0$ ヲ y 軸ノ周リニ回轉スルコトニヨリテ生ズル面ノ方程式ヲ求メヨ.

406. 二點 $(a,0,0)$, $(-a,0,0)$ ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

第十一章 二次曲面一般論 ＝關スル問題

407. 中心ヲ原點トスルトキノ有心二次曲面ノ方程式ハ x, y, z ＝關シテ一次ノ項ヲ有セザルコト及ビ其逆ヲ證明セヨ.

408. 二次曲面ト平面トノ交リハ一ノ二次曲線ナルコトヲ證明セヨ.

409. 橢圓面ノ中心ヨリ其面上ノ任意ノ點＝於ケル切平面＝下シタル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ.

410. 任意ノ有心二次曲面＝於テ, 一ノ直徑ノ端＝於ケル切平面ハ. ソノ直徑＝共軛ナル徑面＝平行ナルコトヲ證明セヨ.

411. 二次曲面ノ中心ヲ過ル二ツノ直線 g, g' アリ. g ノ方向＝共軛ナル徑面ガ g' ヲ含ムトキハ, g' ノ方向＝共軛ナル徑面ハ g ヲ含ムコトヲ證明セヨ.

412. 曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ ＝切シ與ヘラレタル方向餘弦 l, m, n ヲ有スル平面ノ方程式ハ,

$$lx+my+nz=\pm\sqrt{\left\{\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}\right\}}$$

ナルコトヲ示セ.

413. 錐面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ ノ相互＝垂直ナル切平面ノ交リハ, 他ノ一ノ錐面

$$(b+c)x^2+(c+a)y^2+(a+b)z^2=0$$

ヲ畫クコトヲ示セ.

414. 二直線 $x=a', y=0$ 及ビ $x=-a, z=0$ ＝出會ヒ且球面 $x^2+y^2+z^2=c^2$ ＝切スル直線ハ如何ナル面ヲ畫クカ特＝ $c=a$ ナルトキハ如何.

415. 一葉双曲面上＝在ル二群ノ母線ノ中同ジ群＝屬スル二ツノ母線ハ決シテ相交ルコトナク, 相異ル群＝屬スル二ツノ母線ハ必ズ相交ルコトヲ證明セヨ.

416. 曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ノ母線ノ方程式ハ次ノ形＝表ハサルヽコトヲ示セ, 但シ θ ハ曲面ヲ $z=0$ 面＝テ截リタル橢圓上ノ點ノ心差角トス.

$$\frac{x-a\cos\theta}{a\sin\theta}=\frac{y-b\sin\theta}{-b\cos\theta}=\pm\frac{z}{c}$$

417. 一葉双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ノ母線ノ xy 面上＝於ケル射影ハ, xy 面上＝於ケル截口ナル橢圓＝切スルコトヲ示セ.

418. 一葉双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ノ xy 面上＝於ケル截口ナル橢圓上＝於テ, 母線ガ互＝直交スル點ヲ求メヨ.

419. 曲面 $c^2(x^2+y^2)-a^2z^2=a^2c^2$ ト平面 $z=\pm c\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}$ トノ交線上ノ任意ノ一點ヲ通ズル二ツノ母線ハ, 互＝直交スルコトヲ證明セヨ.

420. 曲面 $Ayz+Bzx+Cxy+D=0$ ノ母線ヲ求ムル方法ヲ考ヘ, 其結果＝ヨリテ此方程式ハ $ABCD>0$ ナルトキ＝限リ一葉双曲面ヲ表スコトヲ示セ.

421. 曲面 $xy+yz+zx+a^2=0$ ガ平面 $x+y+z=\pm a$ ト交ル點＝於テハ, 母線ガ互＝直交スルコトヲ示セ.

422. 曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ニ於テ母線ガ互ニ直交スル點ハモトノ曲面ト球面 $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$ トノ交リノ上ニ在ルコトヲ示セ.

423. 點 (x', y', z') ニ於ケル次ノ曲面ノ切平面ヲ求メヨ.

(i) $xy=cz$.　　(ii) $x^2+2yz=a^2$.

424. 次ノ二次曲面ノ中心ヲ求メヨ.

(i) $14x^2+14y^2+8z^2-4yz-4zx-8xy+18x-18y+5=0$,

(ii) $3x^2+5y^2+3z^2-2yz+2zx-2xy+2x+12y+10z+20=0$.

425. 前題ニ於テ原點ヲ中心ニ移サバ (i), (ii) ハ如何ナル形ヲトルカ.

426. $yz+2zx+3xy+6=0$ ノ點 $(-1, 0, 3)$ ヲ過ル母線ノ方程式ヲ求メヨ.

427. 圓 $x^2+y^2+z^2=5$, $x+2y+3z=3$ ヲ過リ且平面 $4x+3y=15$ ニ切スル球面ノ方程式ヲ求メヨ.

428. 有心二次曲線ノ互ニ垂直ナル三ツノ切平面ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

429. 軸ヲ過ル二次ノ錐面ノ一般方程式ハ

$$fyz+gzx+hxy=0$$

ナル形ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

430. 同一ノ原點ヲ過ル任意ノ二組ノ直交軸ヲ過ル錐面ヲ求メ得ルコトヲ示セ.

第二編　問題解法ニ用ヒラルル代數學ノ諸定理

1. 二次方程式.

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$

ノ根ハ次ノ如シ.

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 及ビ } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

而シテ此等ノ根ハ b^2-4ac ガ正ナルカ, 零ナルカ, 又ハ負ナルカニ從テ實ニシテ異ル二根ナルカ等根ナルカ又ハ虛根ナリ.

2. 代數方程式ノ根ト係數トノ關係.

代數方程式ノ最大指數ノ項ノ係數ガ1ナルトキハ

(i) 根ノ總和ハ第二項ノ係數ノ符號ヲ變ヘタルモノニ等シ.

(ii) 二個宛ノ根ノ積ノ總和ハ, 第三項ノ係數ニ等シ.

(iii) 三個宛ノ根ノ積ノ總和ハ第四項ノ係數ノ符號ヲ變ヘタルモノニ等シ.

以下同樣ニ進ムコトヲ得.

例題 1. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 卽チ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ ノ根ヲ α, β トスルトキハ, 次ノ關係アリ.

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ 及ビ } \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

例題 2. 方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 卽チ $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$ ノ根ヲ α, β, γ トスルトキハ次ノ

關係アリ.

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

3. $a_1x+b_1y+c_1z=0$. $a_2x+b_2y+c_2z=0$ ナルトキハ

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}$$

ナリ. 此式ハ立體解析幾何學ニテ屢々用ヒラル.

4. $\begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix}$ ハ二次ノ行列式ト稱セラレ $a_1b_2-b_1a_2$ ヲ表ス. 從テ

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2.$$

例題　(i) $\begin{vmatrix} 2. & 3 \\ 4. & 5 \end{vmatrix}=2\times5-4\times3=10-12=-2.$

(ii) $\begin{vmatrix} -3. & -4 \\ -7. & -6 \end{vmatrix}=-3\times(-6)-(-7)\times(-4)$

$$=18-28=-10.$$

5. $\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}$　　(1)

ハ三次ノ行列式ト稱セラレ,

$$a\begin{vmatrix} b_2, & b_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix}-a^2\begin{vmatrix} b_1, & b_3 \\ c_1, & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1, & b_2 \\ c_1, & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

ヲ表ス. 而シテ第四節ニヨリテ之ハ

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1),$$

即チ　$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$

ヲ表ス.

6. 前節ノ結果ニヨリテ三次ノ行列式ハ次ノ規定ニヨリテ二次ノ行列式ノ三個ノ和トシテ表スコトヲ得.

三次ノ行列式ノ最初ノ行ノ文字ヲ順次ニトリ之等ノ各ニ之等

ヲ含ム行ト列トヲ除キテ作リタル二次ノ行列式ヲ乘ジ, 且交互ニ十, 一ノ符號ヲ附シテ其總和ヲ作レバヨシ.

斯クテ (1) ニ於テ a ヲ含ム行ト列トヲ除クトキニハ, 行列式 $\begin{vmatrix} b_2, & b_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix}$ ヲ得. 之即チ (2) ニ於ケル a_1 ノ係數ナリ.

同樣ニ (1) ニ於テ a_2 ヲ含ム行ト列トヲ除クトキハ, 行列式 $\begin{vmatrix} b_1, & b_3 \\ c_1, & c_3 \end{vmatrix}$ ヲ得. 而シテ之ニ負號ヲ附スルトキハ (2) ニ於ケル a_2 ノ係數トナル.

7. 例題.　行列式 $\begin{vmatrix} 1, & -2, & -3 \\ -4, & 5, & -6 \\ -7, & 8, & -9 \end{vmatrix}$

$$=1\times\begin{vmatrix} 5, & -6 \\ 8, & -9 \end{vmatrix}-(-2)\times\begin{vmatrix} -4, & -6 \\ -7, & -9 \end{vmatrix}+(-3)\times\begin{vmatrix} -4, & 5 \\ -7, & 8 \end{vmatrix}$$

$$=\{5\times(-9)-8\times(-6)\}+2\times\{(-4)\times(-9)$$

$$-(-7)\times(-6)\}-3\{(-4)\times8-(-7)\times5\},$$

$$=\{-45+48\}+2\times\{36-42\}-3\times\{-32+35\}$$

$$=3-12.-19=-18.$$

8. $\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}$

ハ四次ノ行列式ト稱セラレ.

$$a_1\times\begin{vmatrix} b_2, & b_3, & b_4 \\ c_2, & c_3, & c_4 \\ d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}-a_2\times\begin{vmatrix} b_1, & b_3, & b_4 \\ c_1, & c_3, & c_4 \\ d_1, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}+a_3\times\begin{vmatrix} d_1, & d_2, & d_4 \\ b_1, & b_2, & b_4 \\ c_1, & c_2, & c_4 \end{vmatrix}-a_4\begin{vmatrix} d_1, & d_2, & d_3 \\ b_1, & b_2, & b_4 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}$$

ヲ表ス. 而シテ其結果ハ, 第六章ノ結果ニヨリテ此等四個ノ三次ノ行列式ヲ展開シテ得ラル.

9. 二次ノ行列式ヲ展開セバ二項ヨリナリ. 三次ノ行列式ヲ展開セバ $3\times2=6$ 項ヨリナル. 而シテ四次ノ行列式ノ展開ハ

$4\times3\times2=24$ 項ヨリナル、以下同樣ニ推定シ得ベシ.

10. 例題. 次ノ結果ヲ證明セヨ

(i) $\begin{vmatrix}2, & -3\\ 4, & 8\end{vmatrix}=28,$ (ii) $\begin{vmatrix}-6, & 7\\ -4, & -9\end{vmatrix}=82,$ (iii) $\begin{vmatrix}5, & -3, & 7\\ -2, & 4, & -8\\ 9, & 3, & -10\end{vmatrix}=-98$

(iv) $\begin{vmatrix}9, & 8, & 7\\ 6, & 5, & 4\\ 3, & 2, & 1\end{vmatrix}=0.$ (v) $\begin{vmatrix}-a, & b, & c\\ a, & -b, & c\\ a, & b, & -c\end{vmatrix}=4abc,$

(vi) $\begin{vmatrix}a, & h, & g\\ h, & b, & f\\ g, & f, & c\end{vmatrix}=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2,$

消　去　法

11. 二個ノ未知數 x, y ヲ有スル二個ノ方程式

$$a_1x+a_2y=0, \qquad (1)$$

$$b_1x+b_2y=0 \qquad (2)$$

ニ於テ, 四個ノ係數 a_1, a_2, b_1, b_2 ノ間ニ或關係存セザルベカラズ. 何トナレバ (1) ヨリ.

$$\frac{x}{y}=-\frac{a_2}{a_1}$$

又 (2) ヨリ

$$\frac{x}{y}=-\frac{b_2}{b_1},$$

以上ノ二式ノ $\frac{x}{y}$ ノ値ヲ等シト置キテ

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2}{a_1},$$

即チ
$$a_1b_2-a_2b_1=0, \qquad (3)$$

(3) ハ方程式 (1) ト (2) トガ x, y ノ同ジ値ニ對シテ眞ナルタメノ條件ナリ. 方程式 (1) 及ビ (2) ヨリ此條件 (3) ヲ求ムル方法ヲ消去法ト云ヒ, (3) ヲ消去式ト稱ス.

第四節ノ記號ニ從ヒテ (3) ハ $\begin{vmatrix}a_1, & a_2\\ b_1, & b_2\end{vmatrix}=0$ ト記スルコトヲ得.

此式ハ與ヘラレタル方程式 (1), (2) ノ x, y ノ係數ヲ共順序ニ配列シタル結果ヲ零ニ等シト置キテ得ラル.

12. 三ツノ未知數 x, y, z 間ノ關係式

$$a_1x+a_2h+a_3z=0, \qquad (1)$$

$$b_1x+b_2y+b_3z=0, \qquad (2)$$

$$c_1x+c_2y+c_3z=0. \qquad (3)$$

ニ於テ各式ヲ z ニテ除スレバ $\frac{x}{z}$ 及ビ $\frac{y}{z}$ ニ關スル方程式ヲ得而シテ此等三個ノ内二個ノ方程式ニヨリテ $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ ノ値ヲ求メ得ベシ. 此値ヲ第三ノ方程式ニ代入シテ九個ノ係數ノ間ノ關係ヲ得.

別ニ次ノ如クスルモ可ナリ.

方程式 (2) ト (3) トヨリ.

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{z}{b_3c_1-b_1c_3}=\frac{z}{b_1c_2-b_2c_1}$$

ヲ得. 此等ノ値ヲ (1) ニ代入シテ

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=0. \qquad (4)$$

此ハ (1), (2), (3) ナル方程式ヨリ x, y, z ヲ消去シタル結果ナリ.

第五章ニヨリテ方程式 (4) ハ次ノ形ニ表スルコトヲ得.

$$\begin{vmatrix}a_1, & a_2, & a_3\\ b_1, & b_2, & b_3\\ c_1, & c_2, & c_3\end{vmatrix}=0.$$

此消去式ハ前章ニ於ケル如ク方程式 (1), (2), (3) ニ現ハルヽ x, y, z ノ順ニ從ヒテ其係數ヲ配例シタル結果ヲ零ニ等シト置キテ得ラル.

13. 例題. 聯立方程式

$$ax+2y+3z=0,\quad 2x-3y+4z=0,$$
$$x+7y-8z=0$$

ガ同時ニ成立スルタメノ a ノ値如何.

x, y, z ヲ消去シテ

$$\begin{vmatrix} a, & 2, & 3 \\ 2, & -3, & 4 \\ 5, & 7, & -8 \end{vmatrix}=0.$$

卽チ　$a[(-3)\times(-8)-4\times7]-2[2\times(-8)-4\times5]$
$+3[2\times7-5\times(-3)]=0.$

卽チ　$a[-4]-2[-36]+3[29]=0,$

故ニ　$a=\dfrac{72+87}{4}=\dfrac{159}{4}.$

14. 四個ノ方程式

$$a_1x+a_2y+a_3z+a_4u=0,$$
$$b_1x+b_2y+b_3z+b_4u=0,$$
$$c_1x+c_2y+c_3z+c_4u=0,$$
$$d_1x+d_2y+d_3z+d_4u=0.$$

ヨリ四個ノ未知數 x, y, z, u ヲ消去シタル結果ハ

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}=0$$

ナル行列式ニヨリテ表ハサルヽコトハ, 前章ト同樣容易ニ證明スルコトヲ得.

尙一般ニ n 個ノ未知數ヲ有スル n 個ノ一次方程式ニ關スル同樣ノ定理モ, 前節ト同樣ニ證明スルコトヲ得ベシ. 但シ上記各方程式ノ右邊ガ皆零ナルコトニ注意スベシ.

第三編　第一編の解答

1, A ヲ原點ニトリ B, C ノ座標ヲ夫々 (x_1), (x_2) トスレバ

$$AB+BC+CA=x_1+(x_2-x_1)-x_2=0.$$

2. A ヲ原點ニトリ B, C, D ノ座標ヲ夫々 (x_1), (x_2), (x_3) トスレバ

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC$$
$$=x_1(x_3-x_2)+x_2(x_1-x_3)+x_3(x_2-x_1)=0.$$

3. 前題ト同樣ノ座標ヲトリテ

$$\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}$$ ニ代入スレバ, $$\frac{2}{x_2}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}.$$

變形シテ

$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}.$$ 即チ $$\frac{x_3-x_2}{x_3}=\frac{x_2-x_1}{x_1},$$

∴

$$\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{AB}.$$ 即チ $$\frac{AB}{BC}=-\frac{AD}{DC}.$$

4. 前題ト同樣ニシテ.

$$\frac{x_1}{x_2-x_1}=\frac{x_3}{x_3-x_2}.$$ 比例ノ公式ニヨリテ變化スレバ

$$\frac{x_1+(x_2-x_1)}{x_1-(x_2-x_1)}=\frac{x_3+(x_3-x_2)}{x_3-(x_3-x_2)},\quad \frac{x_2}{2x_1-x_2}=\frac{2x_3-x_2}{x_2}$$ トナル.

之ニ $x_2=2AM$, $2x_1-x_2=2MB$, $2x_3-x_2=MD$, ヲ代入スレバ

$$\frac{2AM}{2MB}=\frac{2MD}{2AM},$$
$$MB\cdot MD=MA^2.$$

5. (2, 1) ト (3, −2) トノ距離 d_1 ハ

$$d_1=\sqrt{(2-3)^2+(1+2)^2}=$$

(3, −2) ト (4, −1) トノ距離 d_2 ハ

$$d_2=\sqrt{(3-4)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{2}$$

(4, −1) ト (2, 1) トノ距離 d_3 ハ

$$d_3=\sqrt{(4-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}.$$

∴ $d_2^2+d_3^2=d_1^2$ ナルヲ以テ直角三角形.

6. (2. 4) ト $(2+\sqrt{3}, 5)$ トノ距離 d_1 ハ

$$d_1=\sqrt{(2-2-\sqrt{3})^2+(4-5)^2}=2,$$

$(2+\sqrt{3}, 5)$ ト (2, 6) トノ距離 d_2 ハ

$$d_2=\sqrt{(2+\sqrt{3}-2)^2+(5-6)^2}=2,$$

(2, 6) ト (2 4) トノ距離 d_3 ハ

$$d_3=\sqrt{(2-2)^2+(6-2)^2}=2.$$

$d_1=d_2=d_3$ ナルヲ以テ正三角形.

7. 點 (x, y) ハ二點間ヲ 2:1 ノ比ニ內分, 外分ス. 故ニ

$$x=\frac{3\times2+12}{2+1}=18,\quad y=\frac{2\times2+8}{2+1}=4.$$ 內分ノ場合

$$x=\frac{3\times2-12}{2-1}=-6,\quad y=\frac{2\times2-8}{2-1}=-4$$ 外分ノ場合.

8. 二點ノ中點ノ座標ハ $x=\frac{a+b}{2}.\ y=\frac{a-b}{2}.$

此點ト原點トノ距離 d ハ斜交軸ニ於ケル公式ニヨリ.

$$d^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+2\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos45°;$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(a+b)^2+(a-b)^2+2(a^2-b^2)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

$$=\frac{1}{4}\left\{a^2(2+\sqrt{2})+b^2(2-\sqrt{2})\right\}.$$

$$\therefore\quad a=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2}{2\sqrt{2}}}.$$

9. 等距離ノ點ノ座標ヲ (x, y) トセバ

$$(x-2)^2+(y-3)^2=(x+2)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+2)^2.$$

之ヲ解キテ $x=\frac{10}{11},\quad y=\frac{2}{11}.$

10. 平行四邊形ナルタメニハ相對スル二邊ガ相等シキヲ要ス.

(1, 1) ト (4, 4) トノ距離ハ $3\sqrt{2}$.

(4, 8) ト (1, 5) トノ距離ハ $3\sqrt{2}$.

(4, 4) ト (4, 8) トノ距離ハ 4.

(1, 1) ト (1, 5) トノ距離ハ 4.

即チ平行四邊形ナリ.

對角線 (1, 1), (4, 8) ノ長サハ $\sqrt{58}$,

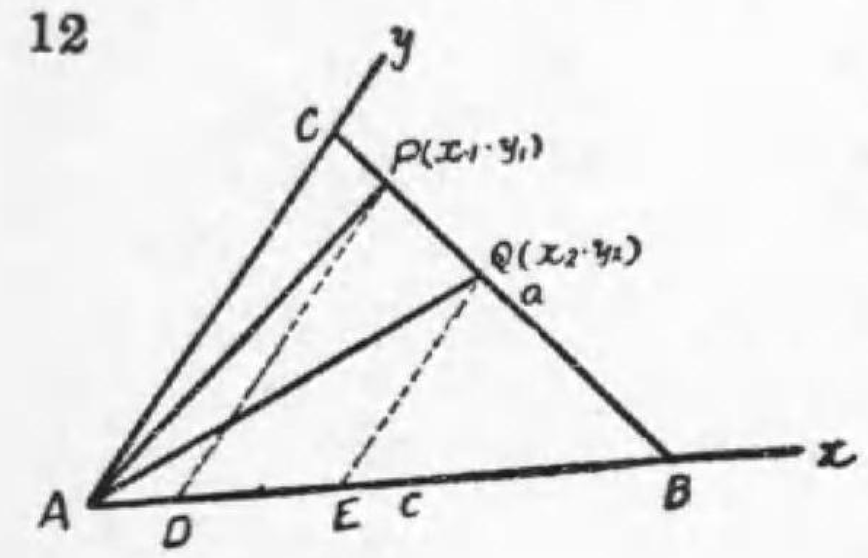
對角線 (4, 4), (1. 5) ノ長サハ $\sqrt{10}$,

11. (x_1, y_1) ト (x_2, y_2) トノ中點 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ト (x_3, y_3) トノ距離ヲ 1:2 ノ比ニ分ツ點ハ求ムル重心ノ座標ナリ. 即チ

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

此式ノ x, y = (5, −9), (1,5), (−3, 7) ノ値ヲ代入シテ (1,1).

12



垂線ノ足ヲ P,二等分線ノ足ヲ Q トシ三邊ヲ a, b, c トス.

PD, QE ヲ y 軸ニ平行ニ引ケバ

$$PB : PC = c\cos B : b\cos C.$$

比例ノ公式ニヨリテ

$$\frac{PB+PC}{PC}=\frac{b\cos C+c\cos B}{b\cos C}$$

即チ $$PC=\frac{ab\cos C}{b\cos C+c\cos B}$$

又 AD : AB = CP : CB ナルヲ以テ

$$AD=x_1=\frac{CP\times c}{a}$$ 上ノ PC ヲ代入シテ

$$x_1=\frac{bc\cos C}{b\cos C+c\cos B}\qquad(2)$$

次ニ　　DP:AC=BP:BC　ヨリ前ト同様ニシテ

$$y_1=\frac{bc\cos B}{b\cos C+c\cos B} \qquad (1)$$

又三角法ノ公式ニヨリテ

$$\cos B=\frac{b^2-a^2-c^2}{2ac},\ \cos C=\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}$$

此等ヲ (1), (2) ニ代入シテ P ノ座標トシテ次ノ結果ヲ得.

$$\left(\frac{c(c^2+b^2-c^2)}{2a^2},\quad \frac{b(c^2+a^2-b^2)}{2a^2}\right)$$

次ニ AQ ハ二等分線ナルヲ以テ

AC:AB=CQ:QB　即チ　$b:c=$CQ:QB

$$\frac{b}{b+c}=\frac{CQ}{CQ+QB} \qquad \therefore\ CQ=\frac{ab}{b+c}$$

又　AE:AB=CQ:CB　此各項ニ夫々代入シテ

$$x_2:c=\frac{ab}{b+c}:a \qquad \therefore\ x_2=y_2=\frac{bc}{b+c}$$

即チ E ノ座標ハ　$\left(\frac{bc}{b+c},\ \frac{bc}{b+c}\right)$

13. $(2, 30^\circ)$　$\rho=2$　$\theta=30^\circ$　ナルヲ以テ

$x=2\cos 30^\circ=\sqrt{3}$,　$y=2\sin 30^\circ=1$　即チ　$(\sqrt{3}, 1)$

$\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\rho=1$, $\theta=-45^\circ$　ナルヲ以テ

$$x=1\times\cos(45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=1\times\sin(-45^\circ)=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

即チ　　$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$(-2, -30^\circ)$　$\rho=-2$,　$\theta=-30^\circ$　ナルヲ以テ

$$x=-2\cos(-30^\circ)=-\sqrt{3} \quad y=-2\times\sin(-30^\circ)=1$$

即チ　　$(-\sqrt{3}, 1)$

$\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$　$\rho=-1$,　$\theta=45^\circ$　ナルヲ以テ

$$x=-1\times\cos 45^\circ=\frac{-1}{\sqrt{2}},\quad y=-1\times\sin 45^\circ=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

即チ　　$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

14. $m=2n$　トスレバ $((-1)^m\rho,\ \theta+m\pi)$ ハ

$((-1)^{2n}\rho,\ \theta+2n\pi)$

トナリ, 之ハ明ニ (ρ, θ) ト同一ノ點ナリ.

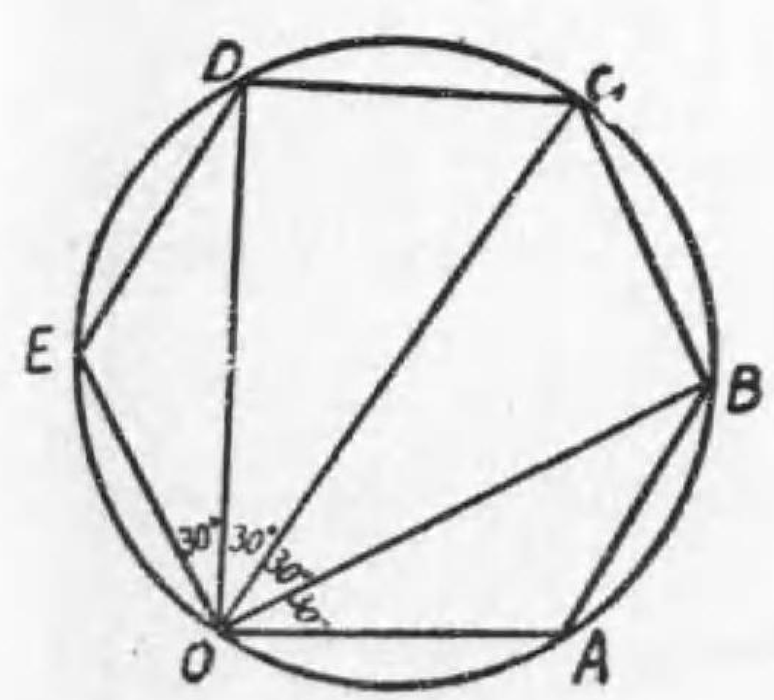
$m=2n+1$ トスルトキハ $((-1)^{2n+1}\rho,\ \theta+(2n+1)\pi)$ ハ

$(-\rho,\ \theta+\pi+2n\pi)$

即チ $(-\rho, \theta+\pi)$ トナリ, 之ハ明ニ又 (ρ, θ) ト同一ナリ.

故ニ m ノ値ノ如何ニ關セズ同一ノ座標ナリ.

15



OC=2a=2BC

OB=(OC²−BC²)=$\sqrt{3}a$

=OD.

故ニ O ヲ極トシ OA ヲ原線トセバ正六邊形ノ總テノ頂點 O, A, B, C, D, E ニ對シテ次ノ座標ヲ得.

$O(0,\ 0)$,　　$A(a,\ 0°)$,

$B(\sqrt{3}a,\ 30°)$,　$C(2a,\ 60°)$,

$D(\sqrt{3}a,\ 90°)$,　$E(a,\ 120°)$.

16. 斯クノ如キ點ノ座標ヲ $(x,\ y)$ トセバ題意ニヨリ

$$(x-4)^2+(y-3)^2=25$$

之ヨリ　　$x^2+y^2-8x-6y=0.$

17. $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$ ヲ代入スレバ

$x^2+y^2=ax$　ハ　$\rho=a\cos\theta.$

$x^2-y^2=a^2$　ハ　$\rho^2\cos 2\theta=a^2$ トナル.

18. $\rho\sin\theta=a\cos\theta$ ノ兩邊ニ ρ ヲ乘ジテ平方スレバ

$$\rho^2(\rho\sin\theta)^2=a^2(\rho\cos\theta)^2$$

トナリ. 之ニ $\rho^2=x^2+y^2,\ x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$ ヲ代入スレバ

$$(x^2+y^2)y^2=a^2x^2。$$

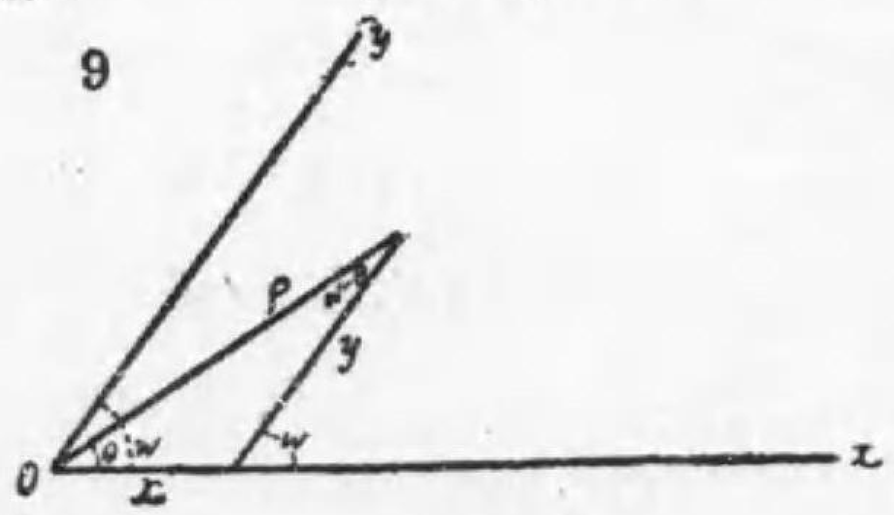
又　　$\rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2}=a^{\frac{1}{2}}$ ヲ平方スレバ $\rho\cos^2\frac{\theta}{2}=a$。

$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$ ナルヲ以テ　$\rho(1+\cos\theta)=2a$

$\rho=2a-x$ 更ニ平方シテ $\rho^2=4a^2-4ax+x^2$

即チ　　$y^2=4a(a-x).$

9



三角法ノ公式ニヨリテ

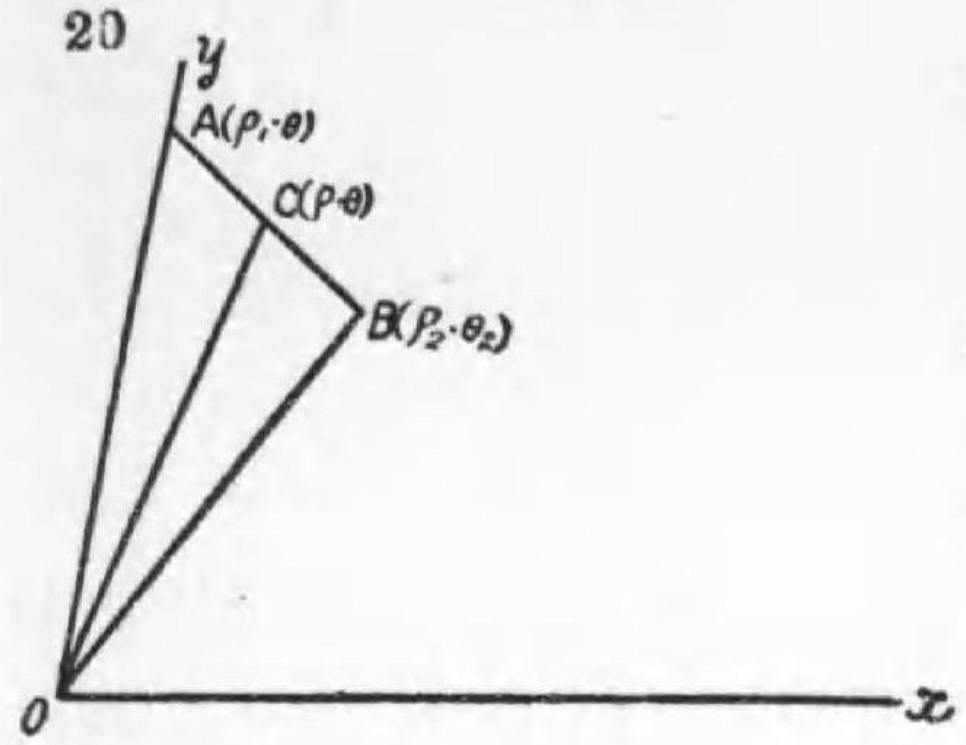
$$\frac{\rho}{\sin w}=\frac{x}{\sin(w-\theta)}\quad(1)$$

$$\frac{\rho}{\sin w}=\frac{y}{\sin\theta}\quad(2)$$

(1) ヨリ $x=\frac{\rho\sin(w-\theta)}{\sin w}$

(2) ヨリ　　$y=\frac{\rho\sin\theta}{\sin w}$

20



$\triangle AOC+\triangle COB$

$=\triangle AOB$

$\triangle AOC=\frac{1}{2}\rho_1\rho\sin(\theta_1-\theta)$

$\triangle COB=\frac{1}{2}\rho\rho_2\sin(\theta-\theta_2)$

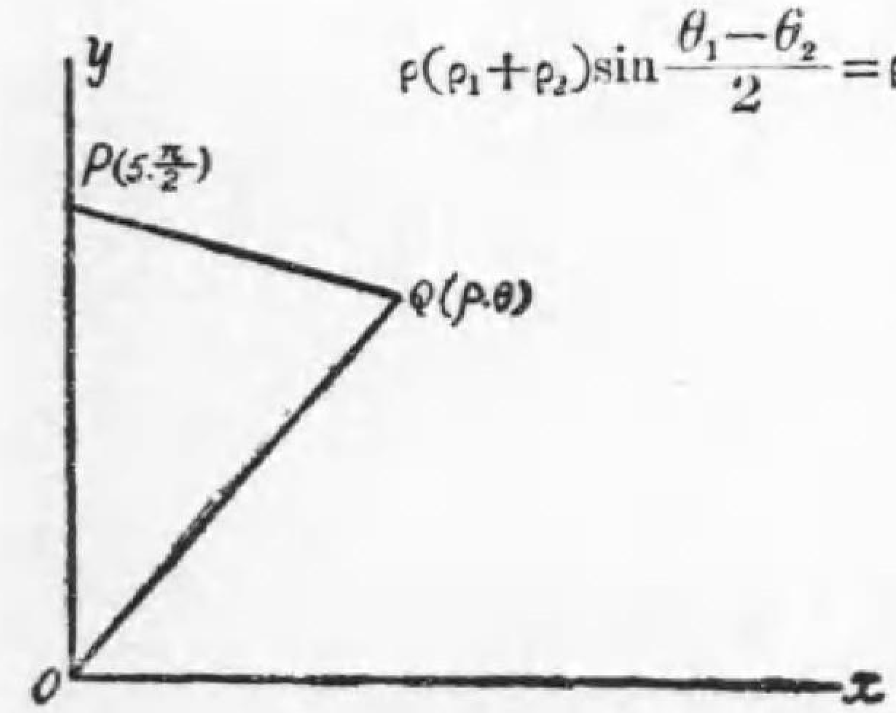
$\triangle AOB=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2).$

又　　$2\theta=\theta_1+\theta_2$

故ニ之等ヲ最初ノ式ニ代入シテ

$$\frac{1}{2}\rho_1\rho\sin(\theta_1-\theta)+\frac{1}{2}\rho\rho_2\sin(\theta-\theta_2)=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$

但シ　　$\theta_1-\theta=\theta-\theta_2=\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$



$$\rho(\rho_1+\rho_2)\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$\therefore\ \rho=\frac{2\rho_1\rho_2\cos\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)}{\rho_1+\rho_2}$$

$$\theta=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}.$$

21. 三角形 OPQ ノ三邊ノ間ニ次ノ關係アリ.

$$OP^2+OQ^2-2OP.OQ\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=PQ^2$$

故ニ夫々代入シテ

$$5^2+\rho^2-2\times5\times\rho\sin\theta=9.$$

$$\therefore\ \rho^2-10\rho\sin\theta+16=0.$$

22. 極ヲ O トスレバ

$$OP^2+OQ^2-2OP.OQ\cos POQ=PQ^2=d^2.$$

之ニ夫々代入シテ

$$d^2=4^2+5^2-2\times4\times5\times\cos(75^\circ-15^\circ)=21.\qquad\therefore\ d=\sqrt{21}$$

23 (2. 4) ハ原點ヲ (1. 2) ニ移スコトニヨリテ (1. 2) トナル. 軸ヲ 45° 回轉セシトキノ座標ヲ (x, y) トセバ次ノ關係アリ.

$$1=x\cos45^\circ-y\sin45^\circ,\quad 2=x\sin45^\circ+y\cos45^\circ.$$

此二式ヨリ x, y ヲ求ムレバ $\quad x=\frac{3}{\sqrt{2}},\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

故ニ (2. 4) ハ上ノ變換ニヨリテ $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ トナル.

同樣ニ (0. 3) ……………………… $(0, \sqrt{2})$

(1. −1) ……………………… $\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}\right)$

(4. 2) ……………………… $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}\right)$,

24. $x=a$ ニ於テ $x=X+Y\cos120^\circ$ ヲ代入スレバ

$$a=X-\frac{Y}{2}.$$

$$\therefore\ 2X-Y=2a.$$

35. $3x+4y=7$ ニ $x=X+1, y=Y+1$ ヲ代入スレバ

$$3(X+1)+4(Y+1)=7.$$

卽チ $\quad 3X+4Y=0,$

ニシテ新原點ヲ過ル直線ナリ.

26. (i) ニ $x=X+a,\ y=Y+b$ ヲ代入シテ整頓スレバ

$$x^2-Y^2=0,$$

(ii) ニ代入セバ

$$X^2+Y^2=r^2.$$

27. 求ムル點ヲ (a, b) トセバ $x=X+a,\ y=Y+b$

此式ヲ原方程式ニ代入スレバ

$$6(X+a)^2+5(X+a)(Y+b)-6(Y+b)^2-17(X+a)$$
$$+7(Y+b)+5=0.$$

此式ガ $\quad 6x^2+5xy-6y^2=0$

ト同一ノ形トナルタメニハ, X 及ビ Y ノ係數竝ニ絕對項ガ零ナルヲ要ス. 卽チ次ノ三式ヲ得.

$$12a+5b-17=0,\qquad(1)$$

$$5b-12b+7=0,\qquad(2)$$

$$6a^2+5ab-6b^2-17a+7b-5=0.\qquad(3)$$

(1), (2) ヨリ得タル $a=1,\ b=1$ ハ (3) ヲ滿足ス, 故ニ求ムル點ハ $\quad$ (1. 1) ナリ.

28. $x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha,\ y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha$ ヲ代入シテ

$$(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)\cos\alpha+(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)\sin\alpha-p=0$$

此式ヲ簡單ニセバ $\quad X=p.$

故ニ Y 軸ニ平行ナル直線, 卽チ舊 y 軸ト α 角ヲナス直線.

29. $x=X\cos30^\circ-Y\sin30^\circ,\quad y=X\sin30^\circ+Y\cos30^\circ$

ヲ代入スレバ

$$21\left(X\frac{\sqrt{3}}{2}-Y\frac{1}{2}\right)^2-10\sqrt{3}\left(X\frac{\sqrt{3}}{2}-Y\frac{1}{2}\right)\left(X\frac{1}{2}+Y\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$+31\left(X\frac{1}{2}+Y\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=144$$

$\therefore\ 4X^2+9Y^2=39.$

30. $\tan\theta=2$ ヨリ $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

故＝ $x=\left(X\frac{1}{\sqrt{5}}-Y\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ y=\left(X\frac{2}{\sqrt{5}}+Y\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

原式＝代入スレバ

$$-3\left(\frac{X-2Y}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(\frac{X-2Y}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2X+Y}{\sqrt{5}}\right)=a^2.$$

$\therefore\ X^2-4Y^2=a^2.$

31. $x=X+\frac{1}{2}Y,\ y=Y\frac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ代入スレバ

$$\left(X+\frac{1}{2}Y\right)^2+\frac{3}{4}Y^2=a^2,$$
$$X^2+XY+Y^2=a^2.$$

32 原點ヲ $(1,\ -2)$ ＝移セバ

$$(X+1)^2+4(X+1)(Y-2)+(Y-2)^2+6(X+1)-3=0$$

卽チ $X^2+4XY+Y^2=0$

軸ヲ 60° 回轉スルタメ＝ $X=x\frac{1}{2}+y\frac{\sqrt{3}}{2},\quad Y=x\frac{\sqrt{3}}{2}-y\frac{1}{2}$

ヲ代入スレバ

$$\left(x\frac{1}{2}+y\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+4\left(x\frac{1}{2}+y\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}-y\frac{1}{2}\right)$$
$$+\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}-y\frac{1}{2}\right)^2=0,$$

$\therefore\ (1+\sqrt{3})x^2+2xy+(1-\sqrt{3})y^2=0.$

33. $x=X+Y\cos\alpha,\ y=Y\sin\alpha$ ヲ代入シテ

$$Y^2\sin^2\alpha+4aY\sin\alpha\cot\alpha-4a(X+Y\cos\alpha)=0,$$

$\therefore\ Y^2\sin^2\alpha=4aX.$

34. 內角ノ二等分線ヲ新 x 軸トシ，且軸ノ變換ノ公式

$$x=X\frac{\sin(w-\alpha)}{\sin w}+Y\frac{\sin(w-\beta)}{\sin w},$$
$$y=X\frac{\sin\alpha}{\sin w}+Y\frac{\sin\beta}{\sin w}$$

＝ $\alpha=30^\circ,\ \ \beta=102^\circ,\ w=60^\circ$ ヲ代入スレバ

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}X-Y,\ \ y=\frac{1}{\sqrt{3}}X+Y$$

トナリ之ヲ與式＝代入スレバ

$$2\left(\frac{1}{3}X^2-\frac{2}{\sqrt{3}}XY+Y^2\right)-5\left(\frac{1}{3}X^2-Y^2\right)$$
$$+3\left(\frac{1}{3}X^2+\frac{1}{\sqrt{3}}XY+Y^2\right)=4,$$

$\therefore\ 27Y^2-X^2=12.$

35. (i) ヲ平方スレバ $x+y+2\sqrt{xy}=1$, 又ハ $2\sqrt{xy}=1-x-y$

更＝平方スレバ $4xy=1+x^2+y^2-2x-2y+2xy.$

$\therefore\ x^2+y^2-2xy-2x-2y+1=0$ ＝シテ二次式.

(ii) $m>n>0$ 又ハ $m<n<0$ ナラバ m 次

$n>m>0$ 又ハ $n<m<0$ ナラバ n 次

$m>0>n$ ナルトキ n ノ絕對値ヲ k トセバ

$n=-k.$ 故＝ $y^m=x^n$ ハ $y^m=x^{-k}$. 卽チ

$y^m x^k = 1$ ニシテ $m+k$, 從テ $m-n$ 次ナリ.

同様ニ　$m<0<n$ ナルトキハ $n-m$ 次ナリ.

$m=n$ ナラバ m 次又ハ n 次ナリ.

36. (x, y) 及ビ (x', y') ヲ二組ノ座標軸ニ關スル任意ノ點ノ座標トセバ, 原點ヨリ此點ニ至ル距離ノ平方ハ何レノ場合モ同一ナリ.

$$\therefore \quad x'^2+y'^2+2x'y'\cos w' = x^2+y^2+2xy\cos w$$

$$=(mx'+ny')^2+(m'x'+m'y')^2+2(mx'+ny')(m'x'+n'y')\cos w.$$

x'^2, y'^2 ノ係數ヲ等シト置キテ

$$1=m^2+m'^2+2mm'\cos w,\ 及ビ\ 1=n^2+n'^2+2nn'\cos w.$$

此兩式ヨリ $\cos w$ ヲ消去スレバ

$$\frac{m^2+m'^2-1}{n^2+n'^2-1}=\frac{mm'}{nn'}.$$

37. 一點 P ノ座標ヲ夫々 (x, y), (X, Y) トセバ

$$OP^2=x^2+y^2+2xy\cos w = X^2+Y^2+2XY\cos w'$$

ナル公式ヨリ　$x^2+y^2+2xy\cos xoy = X^2+Y^2+2XY\cos XOY.$

38. 何トナレバ軸ノ一般變換式ハ一次ナルヲ以テ之ヲ代入シテ得タル式ハ其次數ニ變更アルコトナシ.

39. O ヲ原點トシ P ヲ任意ノ點トス, P ノ新舊兩軸ニ關スル座標ヲ夫々 (x, y) 及ビ (x', y') トスレバ問題 37 ニヨリ

$$OP^2=x^2+y^2+2xy\cos w,$$

$$OP^2=x'^2+y'^2+2x'y'\cos w'.$$

故ニ $x^2+y^2+2xy\cos w$ ハ之ヲ $x'^2+y'^2+2x'y'\cos w'$ ニ變ズルコトヲ得. 又題意ニヨリテ $ax'+2hxy+by^2$ ハ $a'x'^2+2h'x'y+b'y'^2$ ニ變ズルコトヲ得ルヲ以テ, λ ヲ任意ノ常數トセバ

$$ax^2+2hxy+by^2+\lambda(x^2+2xy\cos w+y^2) \qquad (1)$$

ハ之ヲ次ノ如ク變ズルコトヲ得ベシ.

$$a'x'^2+2h'x'y'+by'^2+\lambda(x'^2+2x'y'\mathrm{sco}\, w'+y'^2) \qquad (2)$$

故ニ (1) 式ヲ完全平方ナラシムル λ ノ値ハ又 (2) 式ヲモ完全平方ナラシム. 即チ

(1) ヨリ　$(a+\lambda)(b+\lambda)-(h+\lambda\cos w)^2=0$　(3)

(2) ヨリ　$(a'+\lambda)(b'+\lambda)-(h'+\lambda\cos w')^2=0$　(4)

(3) ヨリ得ラルル λ ノ値ト (4) ヨリ得ラルル λ ノ値ハ同一ナルベキガ故ニ, 之ヲ變形シテ

$$\lambda^2+\frac{a+b-2h'\mathrm{sco}\, w}{\sin^2 w}\lambda+\frac{ab-h^2}{\sin^2 w}=0,$$

$$\lambda^2+\frac{a'+b'-2h'\mathrm{sco}\, w'}{\sin^2 w'}+\frac{a'b'-h'^2}{\sin^2 w'}=0.$$

故ニ次ノ結果ヲ得.

$$\frac{a+b-2h\cos w}{\sin^2 w}=\frac{a'+b'-2h\cos w'}{\sin^2 w'},\quad \frac{ab-h^2}{\sin^2 w}=\frac{ab'-h'^2}{\sin^2 w'}$$

40. 前題ニ於テ $w'=90^\circ$ トセヨ.

4 . $x=ax'+by'+c$, $y=a'x'+b'y+c'$ ヨリ x', y' ヲ求ムレバ

$$x'=\frac{b'x}{ab'-a'b}-\frac{b'y}{ab'-a'b}-\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b},$$

$$y'=\frac{a'x}{a'b-ab'}-\frac{ay}{a'b-ab'}-\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}.$$

此式ト　$x'=lx+my+n,\quad y'=l'x+m'y+n'$

トハ等値ナルヲ以テ x, y ノ係數ヲ相等シト置キ

$$b'=l(ab'-a'b), \qquad a'=l'(a'b-ab'),$$

$$-b=m(ab'-a'b) \qquad -a=m'(a'b-a'b).$$

此等四式ヨリ $1=(lm'-ml')(ab'-a'b)$,

$$\therefore \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l, & m \\ l', & m' \end{vmatrix}=1.$$

42. 第三十九題ニ於テ $w=w'=90°$ トセヨ.

43. $3x+4y=12$ ヲ變形シテ $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$.

故ニ x 軸ノ正ノ截片 4, y 軸ノ正ノ截片 3 ナル直線.

44. 公式 $\frac{y-y'}{y'-y''}=\frac{x-x}{x'-x''}$ ニ $(0, -1)$, $(3, 3)$ ヲ代入シテ,

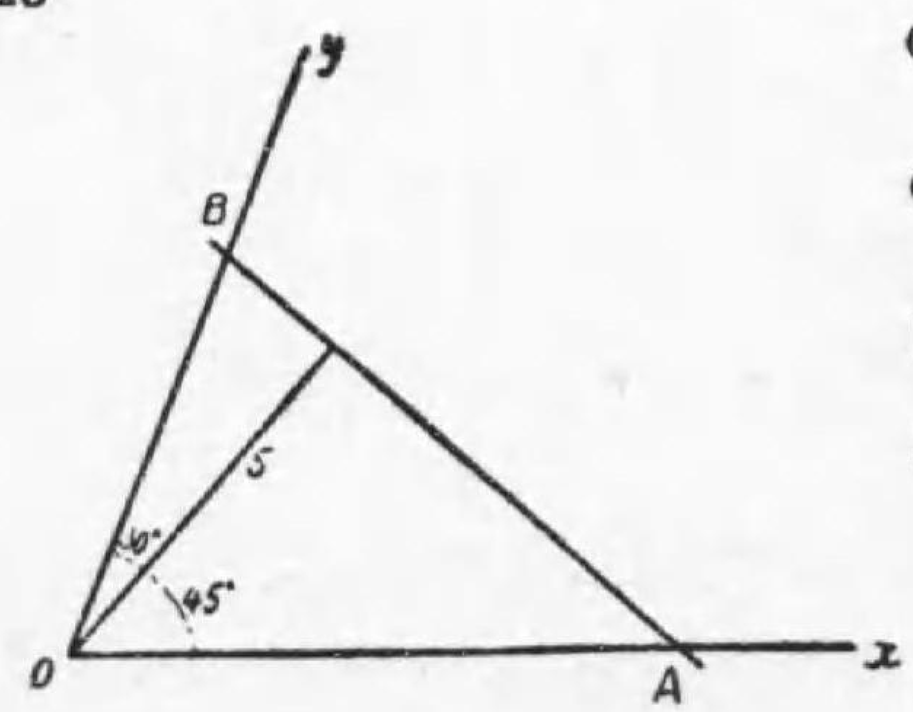
$\frac{y+1}{-1-3}=\frac{x-0}{0-3}$. 故ニ求ムル方程式ハ

$$3y-4x+3=0.$$

標準形ニ直セバ

$$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}h-\frac{3}{5}=0.$$

45



$OA=5\sec 45°=5\sqrt{2}$

$OB=5\sec 30°=\frac{10}{\sqrt{3}}$

兩軸上ノ截片ヲ知ルヲ以テ求ムル方程式ハ

$$\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{y}{\frac{10}{\sqrt{3}}}=1.$$

$$\therefore \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=10.$$

46. $(2, 3)$ ヲ過ル一般直線ノ方程式ハ

$$(y-3)=m(x-2).$$

之ガ $3x+4y=9$ ニ垂直ナルコトヨリ

$$y-3=\frac{4}{3}(x-2),$$

$$\therefore 4x-3y+1=0.$$

47. 相等シキ角ヲナスコトヨリ兩軸上ノ截片ハ相等シ. 此截片ヲ h トスレバ求ムル方程式ハ次ノ形ヲトル.

$$\frac{x}{h}\pm\frac{y}{h}=1 \quad 又ハ \quad x\pm y=h.$$

此方程式ハ (a, b) ヲ過ルガ故ニ次ノ關係アリ.

$$a\pm b=h$$

$$\therefore x\pm y=a\pm b.$$

48. $(1, 2)$ ヲ標準形ニ直シタル方程式ニ代入セバ

$$\frac{3+8-8}{5}=\frac{3}{5}>0 \qquad 正$$

$(-1, -2)$ ヲ代入セバ

$$\frac{-3-8-8}{5}=\frac{-19}{5}<0. \qquad 負$$

故ニ反對ノ側ニ在リテ其距離ハ $\frac{3}{5}$ 及ビ $\frac{19}{5}$ ナリ.

49 交點ヲ過ル一般ノ方程式ハ

$$(x-y-a)+k(x+y-a)=0, \quad 又ハ$$

$$x(1+k)-y(1-k)-(1+k)a=0.$$

之ガ $2x-3y-b=0$ ニ平行ナルクメニハ

$\frac{1+k}{1-k}=\frac{2}{3}$. 從テ $k=\frac{-1}{5}$. 之ヲ代入シテ

$$2x-3y-2a=0.$$

50 前題ト異ル解. 交點ノ座標ヲ求ムレバ $\left(\frac{-5}{2}a,\ 2a\right)$ 此點ヲ過リ $3x+2y-b=0$ =垂直ナル直線ノ方程式ハ解 46 ト同樣=シテ次ノ如ク得ラル.

$$2x-3y+11a=0.$$

5. (a_1, b_1), (a_2, b_2) ヲ過ル對角線ハ

$$(b_1-b_2)x-(a_1-a_2)y+(a_1b_2-a_2b_1)=0.$$

(a_1, b_2), (a_2, b_1) ヲ過ル對角線ハ

$$(b_1-b_2)x+(a_1-a_2)y+(a_1b_1-a_2b_2).$$

52. $x+\sqrt{3}\,y=0$ ノ方向係數 $m_1=\frac{-1}{\sqrt{3}}$,

$x-\sqrt{3}\,y=0$ ノ方向係數 $m_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

故=求ムル角ハ

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=-\sqrt{3},\qquad \therefore\ \theta=120^\circ,\ 又ハ\ 60^\circ$$

53. 二直線ノ交點ヲ過ル一般ノ方程式ハ

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+k\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{a}-1\right)=0.$$

之ガ (a, b) ヲ過ルヲ以テ代入シテ $k\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)=-1$ ヲ得.

$$\therefore\ \frac{x}{a^2}-\frac{y}{b^2}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

54. 二直線ノ方向係數ヲ夫々 m_1, m_2 トセバ $m_1=\frac{-1}{m}$ $m_2=m_1$ 之ヲ次ノ公式=代入セバ可ナリ.

$$\tan\theta=\frac{(m_2-m_1)\sin w}{1+(m_1+m_2)\cos w+m_1m_2},$$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{m^2+1}{m^2-1}\tan w.$$

55. 三直線中二ツ宛ノ交點ノ座標ハ夫々

$$\left(\frac{-3}{2},\ \frac{-9}{2}\right),\ \left(\frac{-1}{2},\ \frac{-5}{2}\right),\ (-1,\ -4).$$

此等ヲ公式

$$S=\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

=代入シテ $S=\frac{1}{4}$

56. 前題ト同樣=シテ面積 S ハ

$$S=\frac{1}{8}(a-b)(b-c)(c-a).$$

57. 二等分線上ノ點ハ皆此等二直線ヨリ等距離ナルコトヨリ

$$\frac{3x-4y-8}{\sqrt{(9+16)}}=\mp\frac{12x-5y-6}{\sqrt{(144+25)}}.$$

$$\therefore\ 99x-77y-134=0,\ 又ハ\ 21x+27y+74=0.$$

58. P 點ノ座標ヲ (X, Y) トセバ $ax+by+c=0$ =至ル距離ハ

$$d=\frac{aX+bY+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \qquad (1)$$

又足 (x_1, y_1) ハ $ax+by+c=0$ 上=在ルヲ以テ

$$ax_1+by_1+c=0 \qquad (2)$$

P(X, Y) ト足 (x_1, y_1) トノ距離ハ d ナルヲ以テ

$$(X-x_1)^2+(Y-y_1)^2=d^2 \qquad (3)$$

以上 (1), (2), (3) ヨリ X, Y ヲ求ムレバ

$$\mathrm{X}=x_1\pm\frac{da}{\sqrt{(a^2+b^2)}},\quad \mathrm{Y}=y_1\pm\frac{db}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

59. 變形シテ $1=a\rho\cos\theta+b\rho\sin\theta$

$\rho\cos\theta=x,\ \rho\sin\theta=y$ ヲ代入スレバ $1=ax+by$ トナリ,

直線ヲ表ス. 垂線ノ長サ $=\dfrac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$

60. $\mathrm{P}(\rho_1, \theta_1)$, $\mathrm{Q}(\rho_2, \theta_2)$ ヲ與ヘラレタル二點, $\mathrm{R}(\rho, \theta)$ ヲ此直線上ノ任意ノ點, O ヲ原點トセバ

$$\triangle\mathrm{POQ}=\triangle\mathrm{POR}+\triangle\mathrm{ROQ}$$

極座標ニ於ケル三角形ノ面積ヲ表ス公式ヲ用ヒテ

$$\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)=\rho_1\rho\sin(\theta-\theta_1)+\rho\rho_2\sin(\theta_2-\theta)$$

$$\therefore\quad \rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\rho_1\rho\sin(\rho_1-\theta)+\rho\rho_2\sin(\theta-\theta_2)=0.$$

6 . $a=6,\ b=-6,\ h=\dfrac{-5}{2},\ g=2,\ f=\dfrac{-7}{2},\ c=-2$ ヲ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{vmatrix}$$

ニ代入スレバ $\triangle\neq0$. 故ニ直線ヲ表サズ.

62. 最初ノ式ガ二直線ヲ表ストキハ次ノ關係アリ.

$$\triangle=\begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{vmatrix}=0$$

後ノ式ノ判別式ヲ作レバ

$$\triangle'=\begin{vmatrix} a, & h, & -g \\ h, & b, & -f \\ -g, & -f, & c \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a, & h, & -g \\ h, & b, & -f \\ g, & f, & -c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{vmatrix}=\triangle=0.$$

從テ後ノ式モ亦直線ヲ表ス.

次ニ最初ノ式ニ x ニ代フルニ $-x$, y ニ代フルニ $-y$ ヲ以テスレバ, 後ノ式トナル. 是レ原點ニ對シテ對稱ノ位置ニ在ルコトヲ示スモノナリ.

63. $h=4,\ a=1,\ b=3$ ヲ公式

$h(x^2-y^2)-(a-b)xy=0$ ニ代入スレバ

$2x^2-2y^2+xy=0.$

64. $a=1,\ b=1,\ h=-\sec\theta$ ヲ公式

$$\tan\phi=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

ニ代入スレバ $\tan\phi=\tan\theta\quad \therefore\ \phi=\theta.$

又公式 $h(x^2-y^2)-(a-b)xy=0$ ニ代入スレバ

$x^2-y^2=0.$

65. 與ヘラレタル方程式ヲ書キ換フレバ

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0.$$

此方程式ガ k ノ値ノ如何ニ拘ハラス成立スルタメニハ

$$ax+by+c \quad ト \quad a'x+b'y+c'$$

トハ x, y ノ或値ニ對シテ同時ニ零ナラザルベカラズ. 即チ此點ハ $ax+by+c=0,\ a'x+by+c'=0$

ナル聯立方程式ノ根ニシテ唯一點ナリ. 此ガ定點ナリ.

其座標ハ方程式ヲ解キテ

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\quad y=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'c}.$$

66. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=k,\ \dfrac{1}{a}=\dfrac{bk-1}{b}$ ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入

スレバ $\quad \dfrac{bk-1}{b}x+\dfrac{y}{b}=1,\quad y-x+b(kx-1)=0.$

故ニ b ノ値ニ關ハラズ $y-x=0$, $kx-1=0$ ノ交點ヲ通過ス. 其座標ハ $\quad x=y=\dfrac{1}{k}$ ナリ.

67. 四邊形 ABCD ノ AB ノ中點 O ヲ原點トシ OB ヲ x 軸トス. 又 CD ノ中點ヲ E トシ OE ヲ y 軸トス. 然ラバ A, B, C, D ノ座標ハ次ノ如ク表ハサル.

$$\mathrm{A}(-a,0),\ \mathrm{B}(a,0),\ \mathrm{C}(b,c),\ \mathrm{D}(-b,d)$$

AD ノ中點 F ノ座樣ハ $\left(\dfrac{-(a+b)}{2},\ \dfrac{d}{2}\right)$

CB ノ中點 H ノ座樣ハ $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{c}{2}\right)$

故ニ HF 線ノ方程式ハ

$$\frac{y-\dfrac{d}{2}}{x+\dfrac{a+b}{2}}=\frac{\dfrac{d}{2}-\dfrac{c}{2}}{-\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{a+b}{2}}$$

HF ト OE トノ交點ハ此式ニ $x=0$ ヲ代入シテ

$y=\dfrac{d+c}{4}$ ヲ得ルヲ以テ $\left(0.\ \dfrac{d+c}{4}\right)$ ナリ.

BD ノ中點 P ノ座標ハ $\left(\dfrac{a-b}{2},\ \dfrac{d}{2}\right)$

AC ノ中點 Q ノ座標ハ $\left(\dfrac{b-a}{2},\ \dfrac{c}{2}\right)$

PQ ガ EO ト FH トノ交點ヲ過ルタメニハ此點ト P, Q ノ三點ハ一直線上ニ在ラザルベカラズ. 然ルニ此等ノ三點ハ一直線上ニ在ルベキ條件ヲ滿足ス. 故ニ題言ノ如シ.

68. 直交軸ニ關シテ二直線ノ方程式ヲ

$$\cos\alpha x+\sin\alpha y=a,\quad \cos\beta x+\sin\beta y=b$$

トスレバ此等ヨリ等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ

$$\cos\alpha x+\sin\alpha y-a=\pm(\cos\beta y+\sin\beta y-b).$$

即チ二直線間ノ角ヲ二等分スル直線ナリ.

注意此問題ハ又二直線ヲ兩軸トスル斜交軸ニテ解クモ可ナリ.

69. 三邊ヲ

$$\left.\begin{array}{ll} x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0 & (1)\\ x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0 & (2)\\ x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_3-p_4=0 & (3)\end{array}\right\}$$

コヽニ此等ノ左邊ヲ表スニ夫々 a, b, c ヲ以テス.

トスレバ (1) ト (2) トノナス角ノ二等分線ハ

$$a=b \quad 又ハ \quad a-b=0 \qquad (4)$$

又 (2) ト (3) トノナス角ノ二等分線ハ

$$b=c \quad 又ハ \quad b-c=0 \qquad (5)$$

更ニ (3) ト (1) トノナス角ノ二等分線ハ

$$c=a \quad 又ハ \quad c-a=0 \qquad (6)$$

(4)+(5)+(6)=0 ナルヲ以テ此等ノ三直線ヲ同時ニ滿足スル點ヲ求ムルコトヲ得. 即チ一點ニ會ス.

注意 底邊ヲ x 軸ニトリ頂點ヲ $(0, b)$ トシ底ノ兩端ヲ $(a, 0)$, $(-a_2, 0)$ トシ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ兩邊ノ比ニ分ツ定理ヲ用フレバ直交軸ニヨリテ直接ニ證明スルコトヲ得.

70 頂點ヲ $\mathrm{A}(a_1, b_1)$, $\mathrm{B}(a_2, b_2)$, $\mathrm{C}(x_3, b_3)$ トスレバ AB ノ垂直二等分線ハ A, B ヨリ相等シキ距離ニ在ルヲ以テ

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2,$$

即チ $$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-(x-a_2)^2-(y-b_2)^2=0 \quad (1)$$

同様ニ BC ノ垂直二等分線ハ

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-(x-a_3)^2-(y-b_3)^2=0 \quad (2)$$

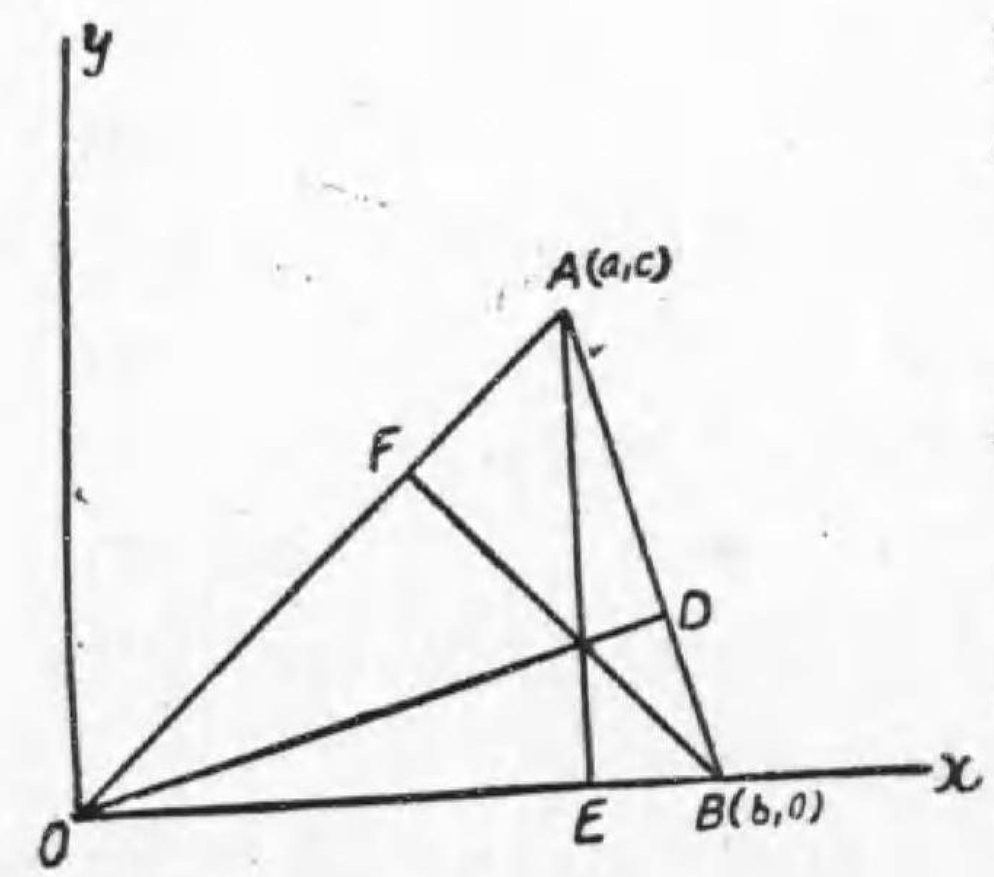
又 CA ノ垂直二等分線ハ

$$(x-a_3)^2+(y-b_3)^2-(x-a_1)^2-(y-b_1)^2=0 \quad (3)$$

(1)+(2)+(3)=0 故ニ一點ニ交ル.

注意 底邊ヲ x 軸其一端ヲ原點トスル直交軸ニテ直接證明シ得.

7 .



圖ノ如ク直交軸ヲトレバ OA ノ方程式ハ

$$y=\frac{c}{a}x \quad (1)$$

AB ノ方程式ハ

$$y=\frac{c}{a-b}(x-b) \quad (2)$$

OD ハ AB ニ垂直ナル故ニ

$$y=\frac{b-a}{c}x \quad (3)$$

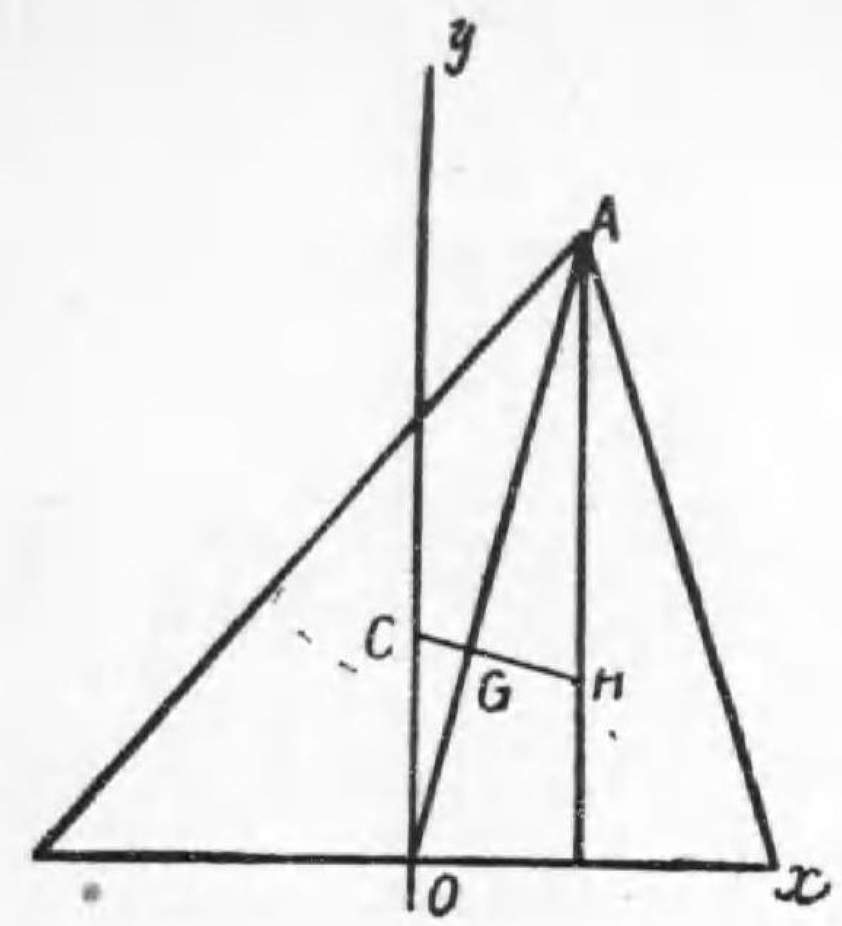
BF ハ OA ニ垂直ナ故ニ

$$y=\frac{-a}{c}(x-b) \quad (4)$$

(3) ト (4) トノ交點ノ x 座標ハ $x=a$ ニシテ AE ノ横座標ト同一ナリ. 故ニ AE ハ BF, OD ノ交點ヲ過ルコトヲ知ル.

即チ一點ニ會ス.

72 底邊ヲ x 軸, 其垂直二等分線ヲ y 軸, 頂點ノ座標ヲ A(a, b), 外心ヲ C$(0, d)$ トスレバ垂心ノ座標ハ H$(a, b-2d)$ ナリ. 何トナレバ外心ヨリ底邊ニ致ル距離ハ, 頂點ヨリ垂心ニ致ル距離ノ二分一ナルヲ以テナリ. 又重心ノ座標ハ



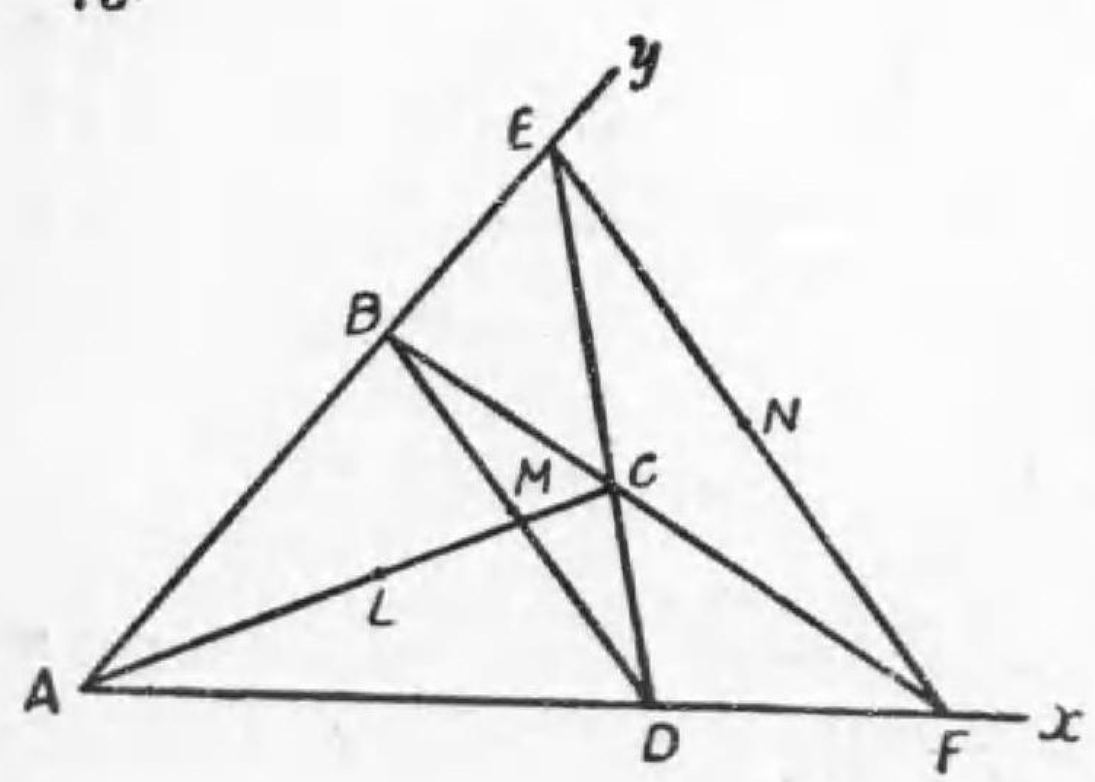
$$G\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$$ ナリ.

C, G, H ガ一直線上ニアルタメニハ

$$\triangle=\begin{vmatrix} 0, & c, & 1 \\ \frac{a}{3}, & \frac{b}{3}, & 1 \\ a, & b-2c, & 1 \end{vmatrix}$$

ガ零ナルコトヲ要ス. 然ルニ △ ノ零ナルコトハ容易ニ知ラル. 即チ一直線上ニ在リ.

73



ADF, ABE ヲ夫々 x 軸, y 軸トス. AD=$2a$, AB=$2b$ トセバ D ノ座標ハ $(2a, 0)$ ニシテ B ノ座標ハ $(0, 2b)$. 又 C ノ座標ヲ $(2h, 2k)$ トス.

AC ノ中點 L ノ座標ハ (h, k) ニシテ BD ノ中點 M ノ座標ハ (a, b) ナリ. 故ニ LM ノ方程式ハ

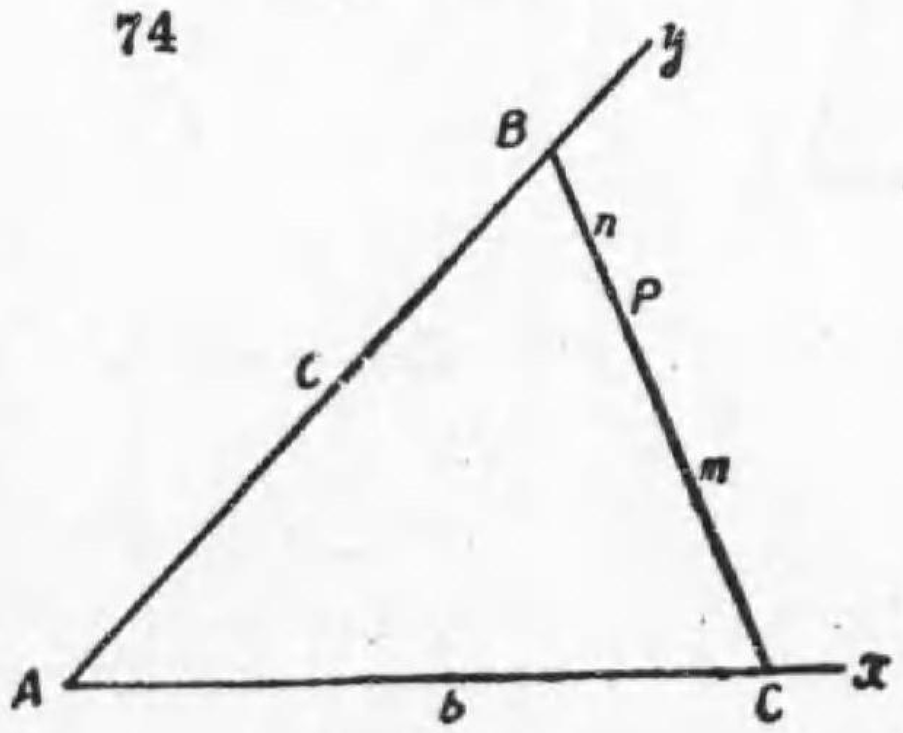
$$y-b=\frac{k-b}{h-a}(x-a),\ 即チ\ (h-a)y-(k-b)x=bh-ak \qquad (1)$$

又 BC ノ方程式ハ $y-2b=\frac{k-b}{h}$ ニシテ $y=0$ トセバ

$x=\frac{-2bh}{k-b}$ 從テ F ノ座標ハ $\left(\frac{2bh}{b-k}, 0\right)$ ナリ. 同様ニ DC ノ方程式ヨリ E ノ座標ハ $\left(0, \frac{2ak}{a-h}\right)$ ナリ. EF ノ中點ヲ N トスレバ其座標ハ $\left(\frac{bh}{b-k}, \frac{ak}{a-h}\right)$.

N ノ座標ハ (1) ヲ滿足ス. 故ニ L, M, N ハ一直線上ニ在リ.

74



角 A ヲ一定ニトリ A ヲ原點トス.

$AC+AB=c+b=k \quad (1)$ トセバ,

$C(b. 0)$, $B(0. c)$, ナリ. 從テ CB ヲ定比 $m:n$ ニ分ツ點ヲ $P(x, y)$ トセバ

$$x=\frac{na}{m+n} \qquad (2)$$

$$y=\frac{mb}{m+n} \qquad (3)\ ナリ.$$

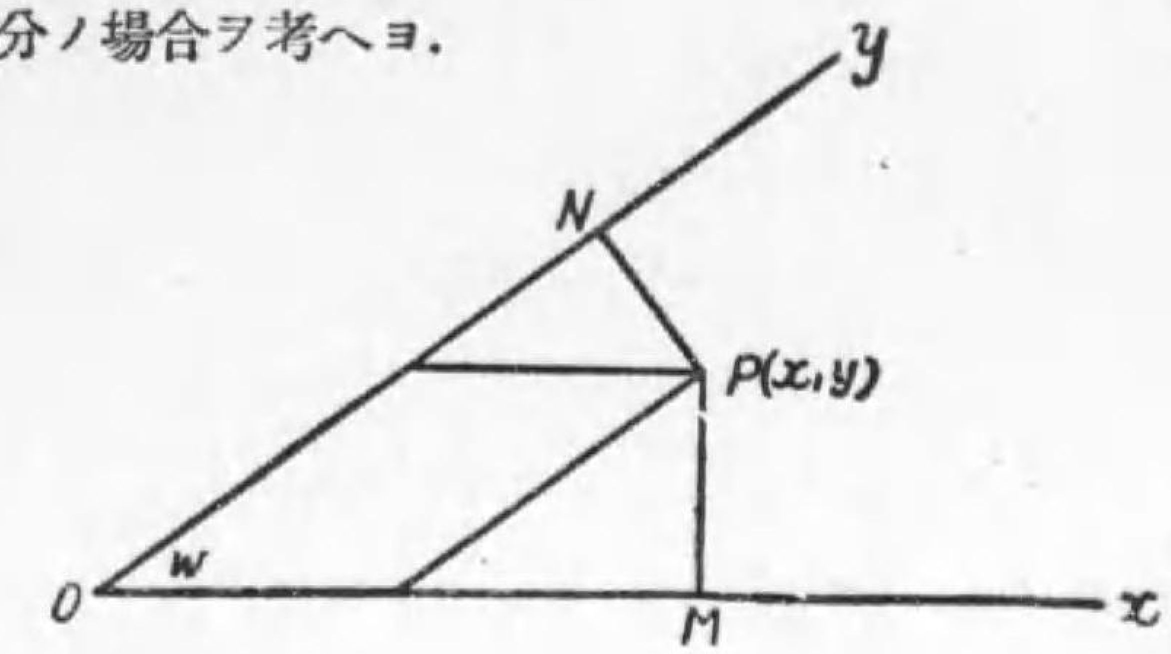
(1), (2) 及ビ (3) ヨリ a, b ヲ消去スレバ

$$\frac{x}{n}+\frac{y}{m}=\frac{k}{m+n}$$

トナリ, 求ムル軌跡ハ直線ナリ.

注意, 外分ノ場合ヲ考ヘヨ.

75.



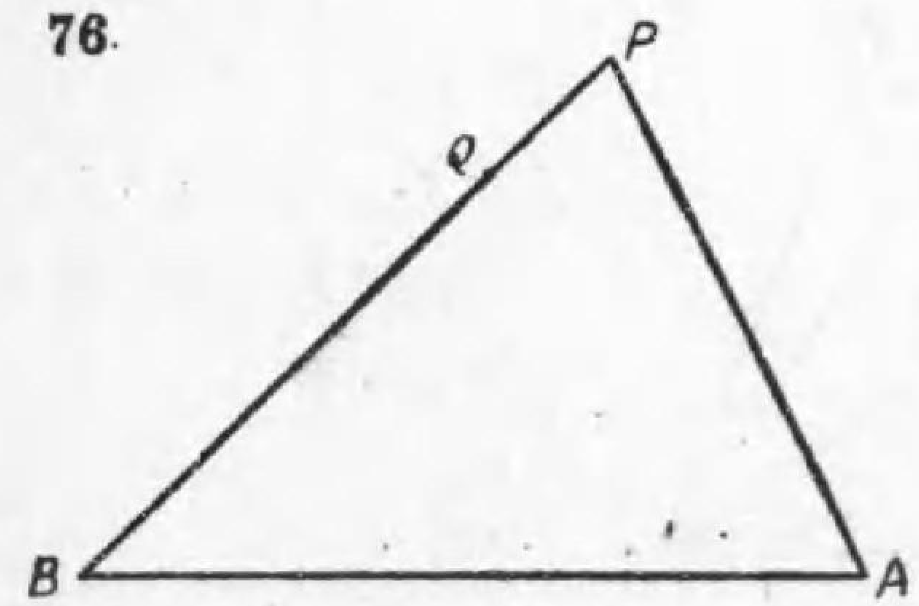
圖ニヨリ
$$OM=x+y\cos w \qquad (1)$$
$$ON=y+x\cos w \qquad (2)$$
$$OM+ON=K \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ヨリ OM, ON ヲ消去スレバ

$$x+y\cos w+y+x\cos w=k,$$
$$x(1+\cos w)+y(1+\cos w)=k.$$

即チ直線ナリ.

76.



B ヲ極, $BA=d$ ヲ原線トシ Q ノ座標ヲ $(\rho. \theta)$ トス.

$BF=d\cos\theta$ ナルヲ以テ

$$BP\ BQ=d\cos\theta.\rho=k^2$$

コヽニ於テ 直交軸ニ直スタメニ $x=\rho\cos\theta$ ヲ

代入スレバ $x=\frac{k^2}{d}$ トナリ直線ヲ表ス.

77. 三角形ノ三邊ヲ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1=0 \qquad (1)$$

$$x\cos\beta+y\sin\beta-p_2=0 \qquad (2)$$

$$x\cos r+y\sin r-p_3=0 \qquad (3)$$

トシ, P ノ座標ヲ (X, Y) トセバ P ヨリ (1), (2), (3) ニ致ル距離ノ和ガ一定ナルガ故ニ

$$(X\cos\alpha+Y\sin\alpha-p_1)+(X\cos\beta+Y\sin\beta-p_2)$$
$$+(X\cos r+Y\sin r-p_3)=K$$

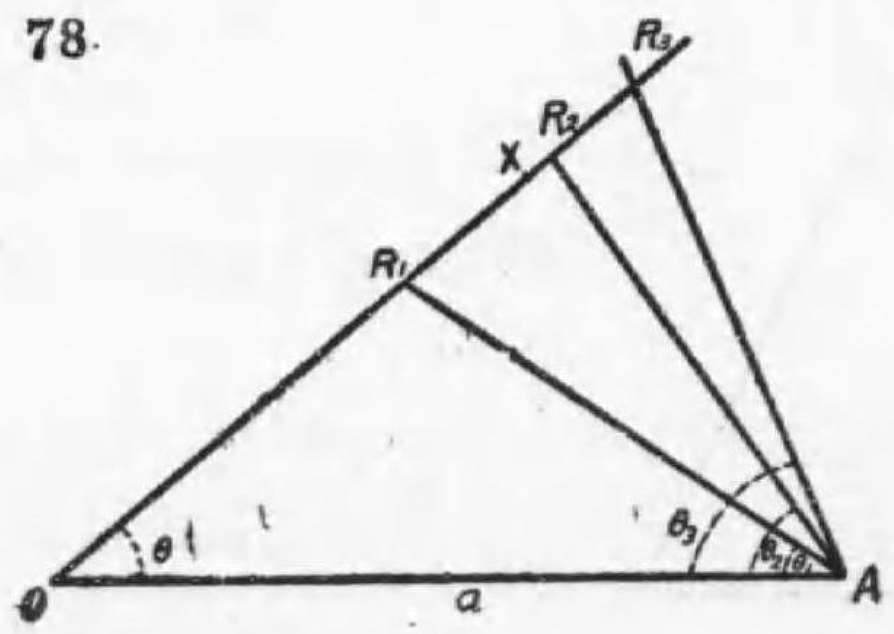
之ヲ書キ換ヘテ

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos r)X+(\sin\alpha+\sin\beta+\sin r)Y$$
$$=K-(p_1+p_2+p_3)$$

即チ直線ナリ.

注意. 三角形ニ換フルニ多角形ヲ以テスルモ同樣ニシテ P ノ軌跡ヲ求ムルコトヲ得.

78.



圖ニ於テ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ハ一定ナリ. OX=ρ トス.

三角形ノ正弦比例ノ公式ニヨリ

$$\frac{OR_1}{\sin\theta_1}=\frac{a}{\sin(\pi-\theta-\theta_1)} \qquad (1)$$

$$\frac{OR_2}{\sin\theta_2}=\frac{a}{\sin(\pi-\theta-\theta_2)} \qquad (2)$$

$$\frac{OR_3}{\sin\theta_3}=\frac{a}{\sin(\pi-\theta-\theta_3)} \qquad (3)$$

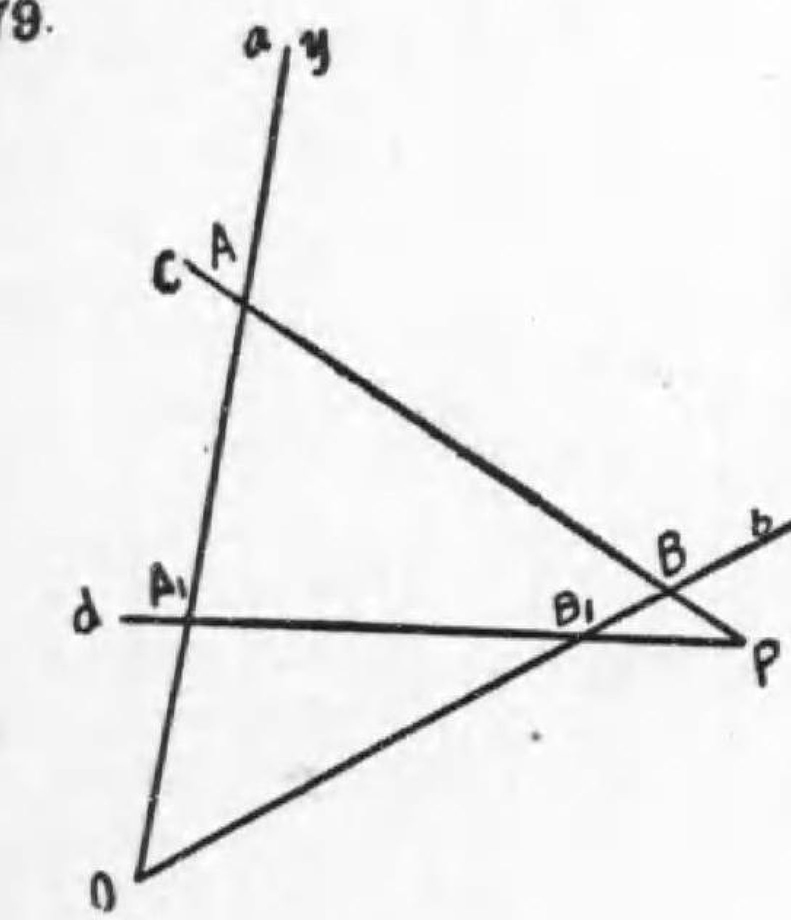
$$\frac{1}{OX}=\frac{1}{OR_1}+\frac{1}{OR_2}+\frac{1}{OR_3} \qquad (4)$$

(1), (2), (3) (4) ヨリ OR_1, OR_2, OR_3 ヲ消去シ OX=ρ トスレバ

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\sin(\pi-\theta_1-\theta)}{a\sin\theta_1}+\frac{\sin(\pi-\theta_2-\theta)}{a\sin\theta_2}+\frac{\sin(\pi-\theta_3-\theta)}{a\sin\theta_3}$$

即チ直線ナリ.

79.



P ノ座標ヲ (h, k) トス.

$OB=m,\ OB_1=m_1,$

$OA=n,\ OA_1=On_1$

トスレバ A_1B_1 ノ方程式ハ

$$\frac{x}{m_1}+\frac{y}{n_1}=1$$

之ガ P ヲ過ルガ故ニ

$$\frac{h}{m_1}+\frac{k}{n_1}=1 \qquad (1)$$

又 AB ノ方程式ハ

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$$

之モ亦 P ヲ過ルガ故ニ

$$\frac{h}{m}+\frac{k}{n}=1 \qquad (2)$$

AB_1 及ビ A_1B ノ方程式ハ夫々

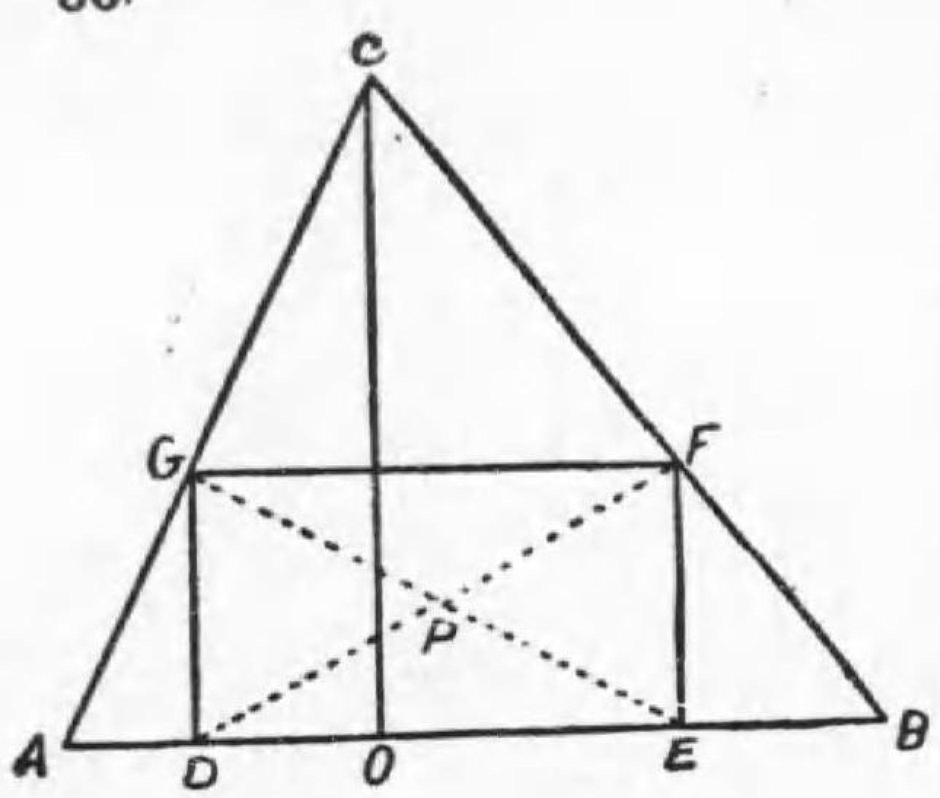
$$\frac{x}{m_1}+\frac{y}{n}=1 \quad (3) \qquad \frac{x}{m}+\frac{y}{n_1}=1 \quad (4)$$

(1), (2), (3), (4) ヨリ m_1, n_1, m, n ヲ消去スレバ

$$hx+hy=0$$

故ニ原點ヲ過ル直線ナリ.

80.



底 AB ヲ x 軸, C ヨリノ垂線 CO ヲ y 軸, $OC=h$, $OB=b$, $OA=a$ トセバ直線 AC ノ方程式ハ

$$\frac{y}{h}-\frac{x}{a}=1 \quad (1)$$

直線 BC ノ方程式ハ

$$\frac{y}{h}+\frac{x}{b}=1 \quad (2)$$

$GD=EF=K$ トセバ G ノ横座標 x ハ, (1) ニ $y=K$ ト代入シテ $x=OD=-a\left(1-\frac{k}{h}\right)$. 又 (2) ニ代入シテ $x=OE=b\left(1-\frac{k}{h}\right)$.

従テ　$D\left(-a\left(1-\frac{k}{h}\right),\ 0\right)$, $F\left(b\left(1-\frac{k}{h}\right),\ k\right)$

對角線ノ交點 P ハ DF ノ中點ナルヲ以テ其座標ハ

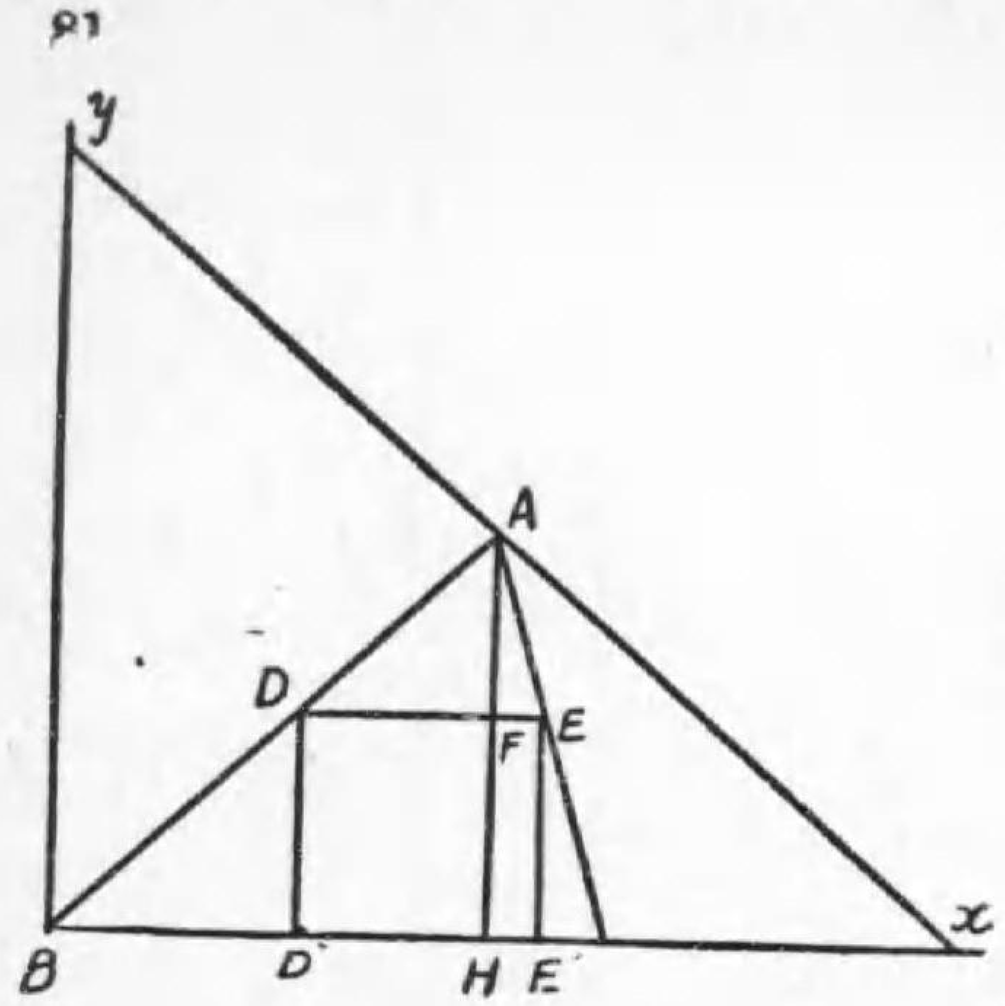
$$x=\frac{b-a}{2}\left(1-\frac{k}{h}\right), \qquad y=\frac{k}{2}$$

此等ノ二式ヨリ k ヲ消去スレバ P ノ軌跡トシテ

$$\frac{x}{\left(\frac{b-a}{2}\right)}+\frac{y}{\frac{h}{2}}=1$$

求ムル軌跡ハ底邊ノ中點ト垂線 OC ノ中點トヲ結ブ直線ナリ.

81



BC ヲ x 軸トシ, B ニ於ケル垂線ヲ y 軸 定直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x}{h}+\frac{y}{k}=1$$

其上ノ任意ノ一點ヲ $A(x_1, y_1)$ トスレバ

$$\frac{x_1}{h}+\frac{y_1}{k}=1 \quad (1)$$

$DD'=DE=EE'=y$, $BC=a$ トスレバ

$$\frac{AF}{AH}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

故ニ代入シテ變化スレバ

$$y=\frac{ay_1}{a+y_1} \quad (2). \qquad \text{AB ノ方程式ハ } y=\frac{y_1}{x_1}x \quad (3)$$

又 AC ノ方程式ハ　$y-y_1=\frac{(x-x_1)}{x_1-a}y_1$　(4)

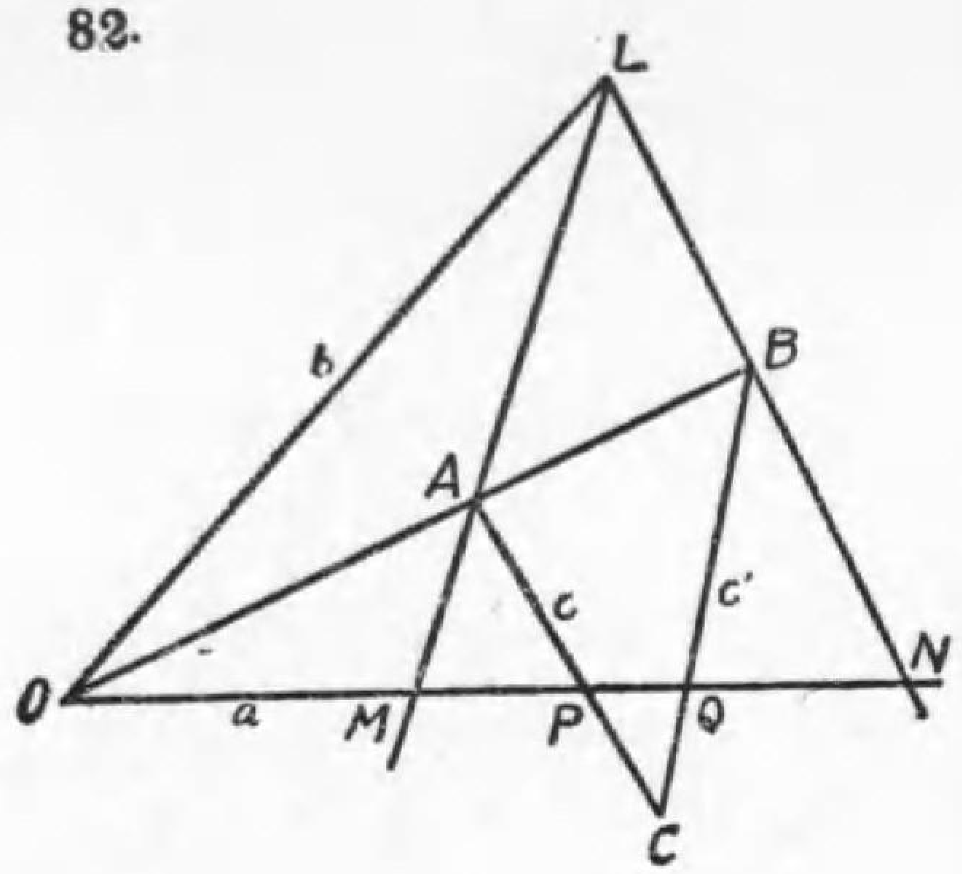
(1), (2), (3) ヨリ x_1, y_1 ヲ消去スレバ D ノ軌跡トシテ

$$\frac{ax}{h}+\frac{a+k}{k}y=a$$ ナル直線ヲ得.

(1), (2), (4) ヨリ x_1, y_1 ヲ消去レスバ E ノ軌跡ヲ得.

同様＝對角線ノ交點ノ軌跡ハ DE ノ中點ノ横座標ト (2) 式ヨリ得ラルヽ DD′ ノ中點ノ縱座標ヨリ x_1, y_1 ヲ消去シテ得ラル.

82.



OPQ ヲ x 軸トシ, OL ヲ y 軸トス. C ノ座標ヲ (X, Y) トシ OL$=b$, OM$=a$, ON$=a'$, OP$=c$, OQ$=c'$ トセバ LM, LN ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (1)$$

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b}=1 \qquad (2)$$

CP ノ方程式ハ $(\mathrm{X}-c)y-x\mathrm{Y}+c\mathrm{Y}=0$ (3)

(1) ト (3) トノ交點 A ノ座標ハ

$$x_1=\frac{ab(\mathrm{X}-c)+ac\mathrm{Y}}{b(\mathrm{X}-c)+a\mathrm{Y}},\ y_1=\frac{b(a-c)\mathrm{Y}}{b(\mathrm{X}-c)+a\mathrm{Y}}$$

同様＝シテ B ノ座標ハ

$$x_2=\frac{a_1b(\mathrm{X}-c')+a'c'\mathrm{Y}}{b(\mathrm{X}-c')+a'\mathrm{Y}},\ y_2=\frac{b(a'-c')\mathrm{Y}}{b(\mathrm{X}-c')+a'\mathrm{Y}}$$

O, A, B ガ一直線上＝在ルガタメ＝ハ $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$ ナリ.

之＝上ノ式ヲ代入シテ

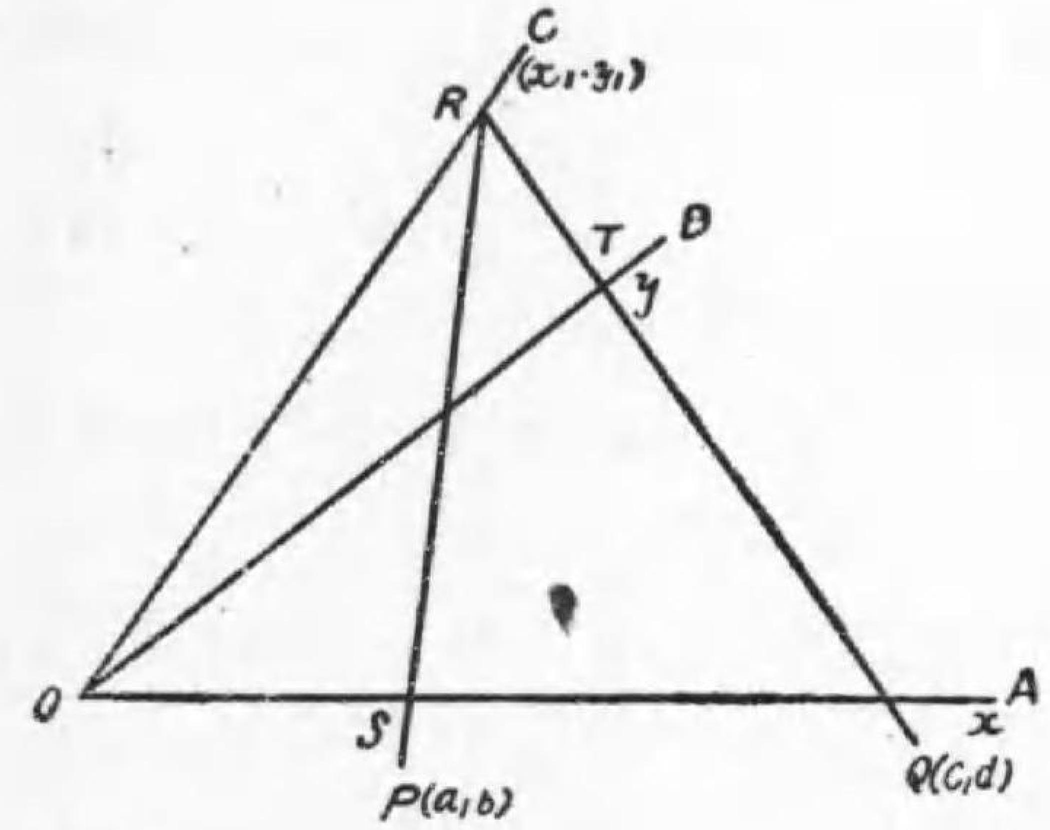
$$\frac{b(a-c)\mathrm{Y}}{ab(\mathrm{X}-c)+ac\mathrm{Y}}=\frac{b(a'-c')\mathrm{Y}}{a'b(\mathrm{X}-c')+a'c'\mathrm{Y}}$$

コレ C ノ座標ヲ以テ滿足セラルヽ關係式ナルヲ以テ求ムル軌跡ノ方程式ナリ. 書キ換ヘテ

$$\frac{(ac'-a'c)x}{cc'(a-a')-aa'(c-c')}+\frac{y}{b}=1$$

$x=0$ トセバ $y=b$. 即チ L ヲ過ル.

83.



O ヲ原點トシ, OA ヲ x 軸, OB ヲ y 軸トシ, 定直線 OC ノ方程式ヲ $y=mx$ トス. OC 上ノ任意ノ一點 R ノ座標ヲ (x_1, y_1) トセバ

$$y_1=mx_1 \qquad (1)$$

PR, QR ノ方程式ハ

$$\frac{x-x_1}{x_1-a}=\frac{y-y_1}{y_1-b} \qquad (2)$$

$$\frac{x-x_1}{x_1-c}=\frac{y-y_1}{y_1-d} \qquad (3)$$

(2) ＝於テ $y=0$ トセバ

$$\mathrm{OS}=\frac{a-x_1}{y_1-b}y_1+x_1=\frac{ay_1-bx_1}{y_1-b}$$

(3) ＝於テ $x=0$ トセバ

$$\mathrm{OT}=\frac{(d-y_1)x_1}{x_1-c}+y_1=\frac{dx_1-cy_1}{x_1-c}$$

故＝ ST ノ方程式ハ

$$\frac{x}{\mathrm{OS}}+\frac{y}{\mathrm{OT}}=1 \text{ 卽チ } \frac{x(y_1-b)}{ay_1-bx_1}+\frac{y(x_1-c)}{dx_1-cy_1}=1$$

分母ヲハラヒ (1) ヲ代入スレバ

$$x_1\{xm(d-cm)+(am-b)y-(am-b)(d-cn)\}$$
$$-\{xb(d-cm)+yc(am'-b)\}=0$$

トナリ. 之ハ定點ヲ過ル方程式ナリ. 但シ x_1 ハ任意ノ値ヲトリ得.

84. 二定直線ヲ

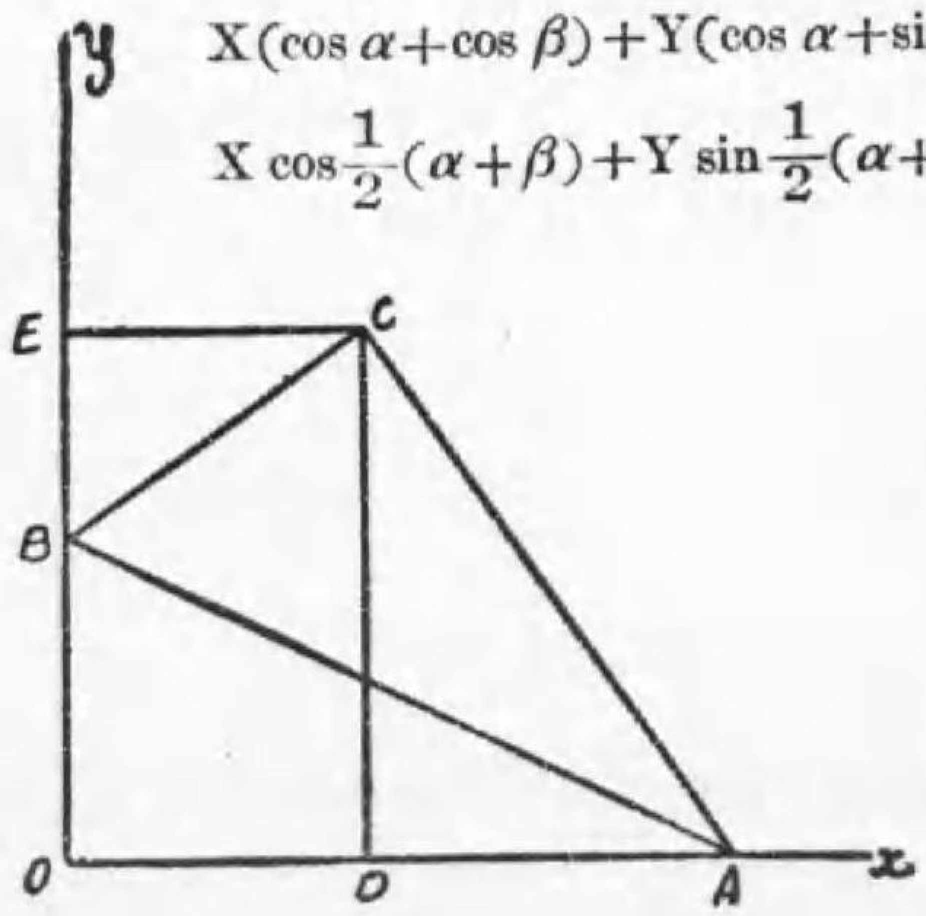
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p_1 \quad x\cos\beta+y\sin\beta=p_2$$

トスレバ一點 (X, Y) ヨリ此等ノ二直線＝至ル距離ノ和一定ナルガ故＝

$$(\mathrm{X}\cos\alpha+\mathrm{Y}\sin\alpha-p_1)+(\mathrm{X}\cos\beta+\mathrm{Y}\sin\beta-p_2)=k$$

$$\mathrm{X}(\cos\alpha+\cos\beta)+\mathrm{Y}(\cos\alpha+\sin\beta)=k+p_1+p_2,$$

$$\mathrm{X}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\mathrm{Y}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{k+p_1+p_2}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$



卽チ求ムル軌跡ハ二定直線ト等角ヲナス直線ナリ.

85. 二定直線ヲ x, y 軸＝トリ AC＝b, BC＝a トシ, 直角三角形ノ或位置＝於ケル角

OAC＝EBC ヲ α トス.

C(x, y) ノ座標ハ圖＝ヨリ

$$x=\mathrm{OD}=\mathrm{EC}=a\sin\alpha \qquad (1)$$

$$y=\mathrm{DC}=b\sin\alpha \qquad (2)$$

(1) 及ビ (2) ヨリ $\sin\alpha$ ヲ消去シテ $y=\frac{b}{a}x$

故＝軌跡ハ原點ヲ過ル直線ナリ.

86　AB＝a, CD＝b トシ AB, CD ノ方程式ヲ夫々

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1=0, \quad x\cos\beta+y\sin\beta-p_2=0$$

トス. 又 P ノ座標ヲ (X, Y) トスレバ P ヨリ AP, CD ＝至ル垂直距離ハ夫々

$$\mathrm{X}\cos\alpha+\mathrm{Y}\sin\alpha-p, \quad \mathrm{X}\cos\beta+\mathrm{Y}\sin\beta-p_2$$

題意＝ヨリテ

$$\frac{1}{2}a(\mathrm{X}\cos\alpha+\mathrm{Y}\sin\alpha-p_1)+\frac{1}{2}b(\mathrm{X}\cos\beta+\mathrm{Y}\sin\beta-p_2)=k^2$$

$$\mathrm{X}(a\cos\alpha+b\cos\beta)+\mathrm{Y}(a\sin\alpha+b\sin\beta)=2k^2+ap_1+bp_2$$

卽チ直線ナリ.

87. A, B ノ座標ヲ夫々 (a, 0), (b, 0) トシ頂點 c ノ座標ヲ x, y トスレバ題意ヨリ求ムル軌跡ハ

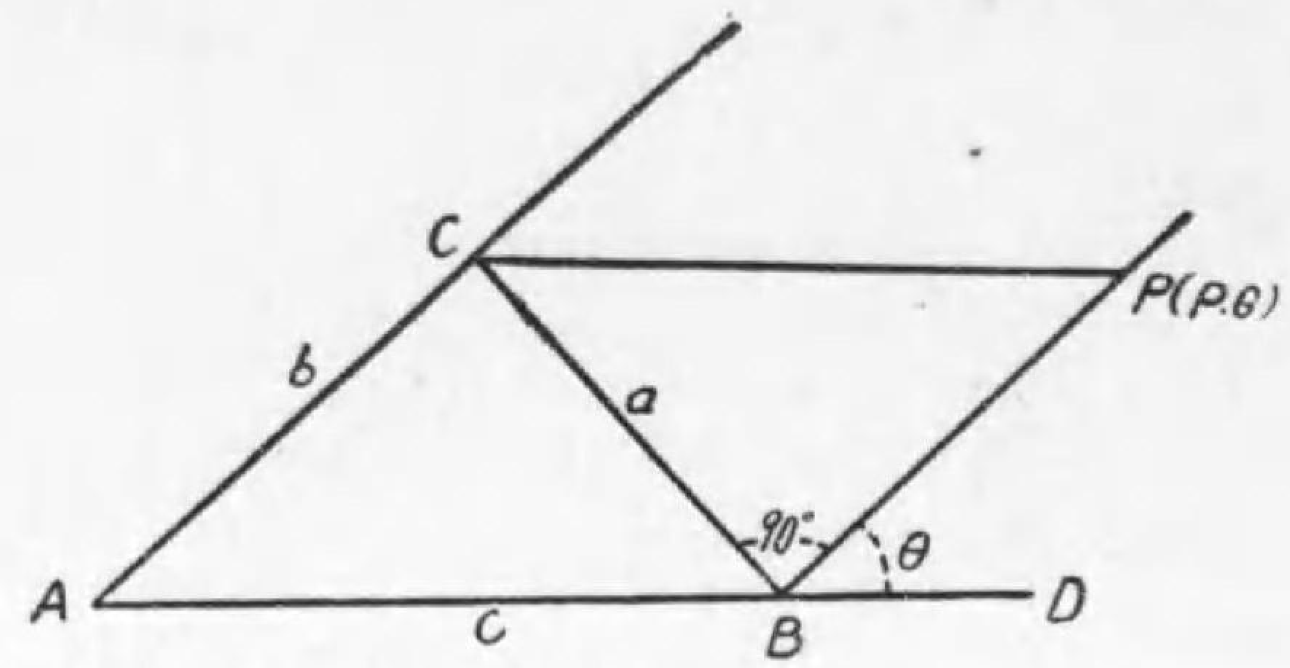
$$\{(x-a)^2+y^2\}-\{(x-b)^2+y^2\}=k^2$$

$$2x(b-a)=k^2-a^2+b^2$$

卽チ AB ＝垂直ナル直線.

38　三角形ノ各頂點ヲ A, B, C 之＝對スル邊ヲ a, b, c トス. B ヲ極トシ, AB ノ延長ヲ原線トセバ P ノ座標ハ (ρ. θ),

$<\mathrm{BCP}=90^\circ-\frac{1}{2}c$.



三角形ニ於テ　$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B.$

二邊ノ和ヲ m トスレバ $b=m-a.$ 角 CBA ハ PBD ノ餘角ナルヲ以テ $\cos B=\sin\theta$, 之ヲ上ノ式ニ代入セバ

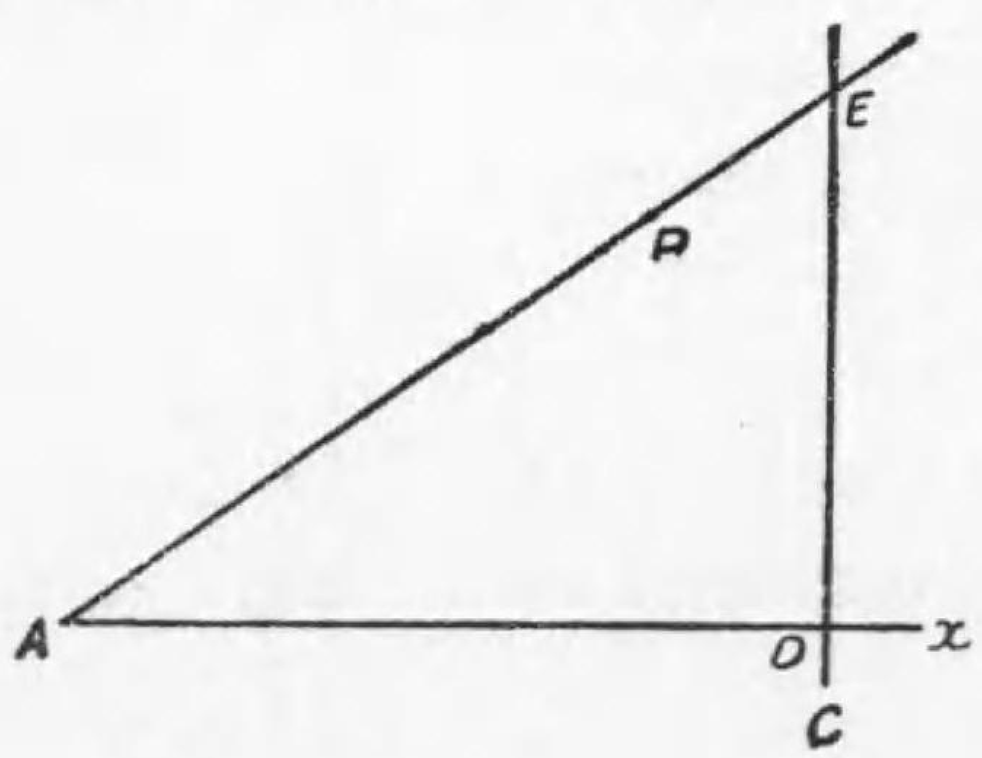
$$m^2-2am+a^2=a^2+c^2-2ac\sin\theta,\quad a=\frac{m^2-c^2}{2(m-c\sin\theta)}\qquad(1)$$

三角法半角ノ公式ニヨリ

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{\sin C}{1+\cos C}=\frac{b\sin C}{b(1+\cos C)}$$

又　$b\sin C=c\sin B=c\cos\theta$, 及ビ $b\cos C=a-c\cos B=a-c\sin\theta$

故ニ代入シテ　$\tan\frac{C}{2}=\dfrac{c\cos\theta}{m-c\sin\theta}\qquad(2)$



別ニ　$a=\rho\tan\frac{1}{2}C$ ナルヲ以テ之ニ (1), (2) ヲ代入スレバ

$$\rho\cos\theta=\frac{m^2-c^2}{2c}$$

即チ底ニ垂直ナル直線ナリ.

89. A ヲ極トシ

CB ニ垂直ナル直線ヲ原線トス. $AD=a$ トセバ BC ノ方程式ハ $\rho\cos\theta=a.$ BC 上ノ任意ノ一點ヲ E トシ AE ヲ $m:n$ ニ内分スル點ヲ P トスレバ

$$\frac{AP}{PE}=\frac{n}{m}$$

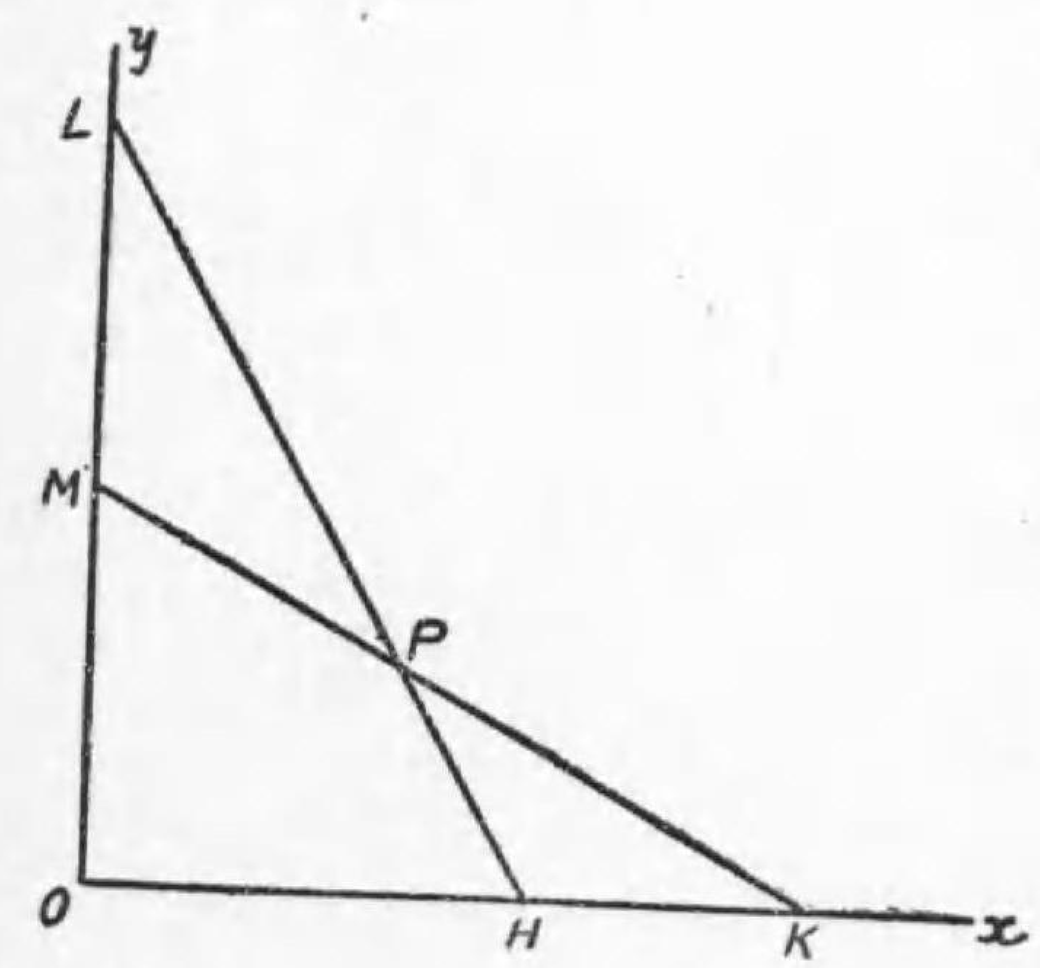
$$\frac{AP}{AE}=\frac{m}{m+n}\quad 即チ\quad AP=\frac{m}{m+n}AE$$

P ノ座標ヲ $(\gamma.\ \theta)$ トスレバ

$$r=\frac{m}{m+n}\rho=\frac{m}{m+n}\ \frac{a}{\cos\theta}\qquad\therefore\ r\cos\theta=\frac{ma}{m+n}$$

即チ AD ニ垂直ナル直線ナリ.

90



$OH=h,\quad OK=k$

$OL=l,\ OM=m$ トス. 但シ h, k ハ常數ニシテ $l,\ m$ ハ補助變數トス.

HL ノ方程式ハ

$$\frac{x}{h}+\frac{y}{l}=1\quad(1)$$

KM ノ式程式ハ

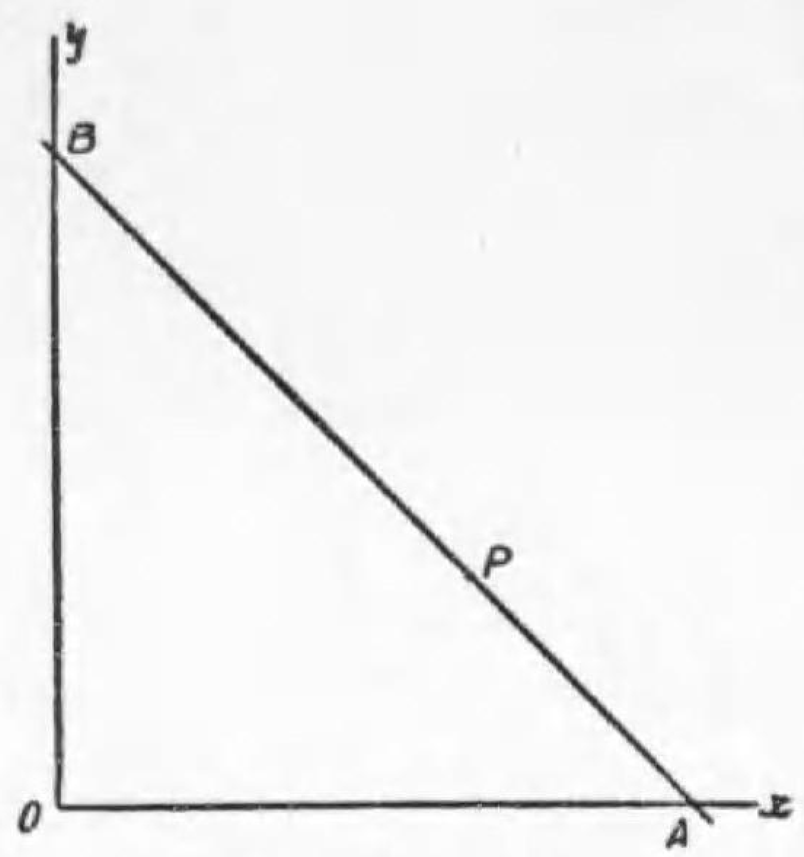
$$\frac{x}{k}+\frac{y}{m}=1\quad(2)$$

又題意ヨリ

$$\frac{a}{l}+\frac{b}{m}=1\qquad(3)$$

(1), (2), (3) ヨリ $l,\ m$ ヲ消去スレバ直線ノ方程式ヲ得.

91.



$OA=a$,　$OB=b$ トセバ $A(a, 0)$　$B(0, b)$ ナリ. $AP:BP=m:n$ ナルニヨリ

$$x=\frac{na}{m+n},\quad y=\frac{mb}{m+n}$$

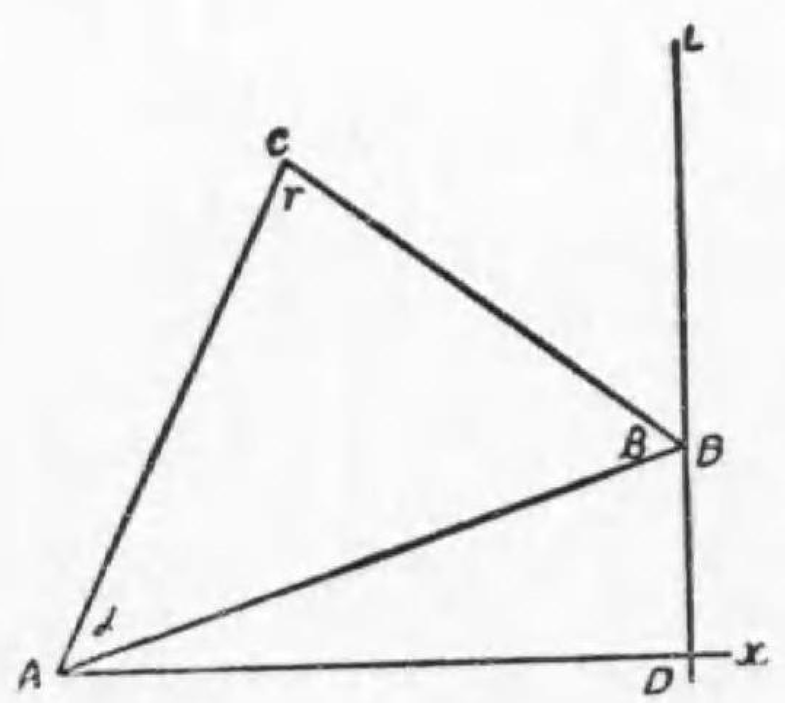
$$a+b=k$$

以上ノ三式ヨリ a, b ヲ消去セバ

$$\frac{x}{n}+\frac{y}{m}=\frac{k}{m+n}$$

故ニ求ムル軌跡ハ直線ナリ.

92.



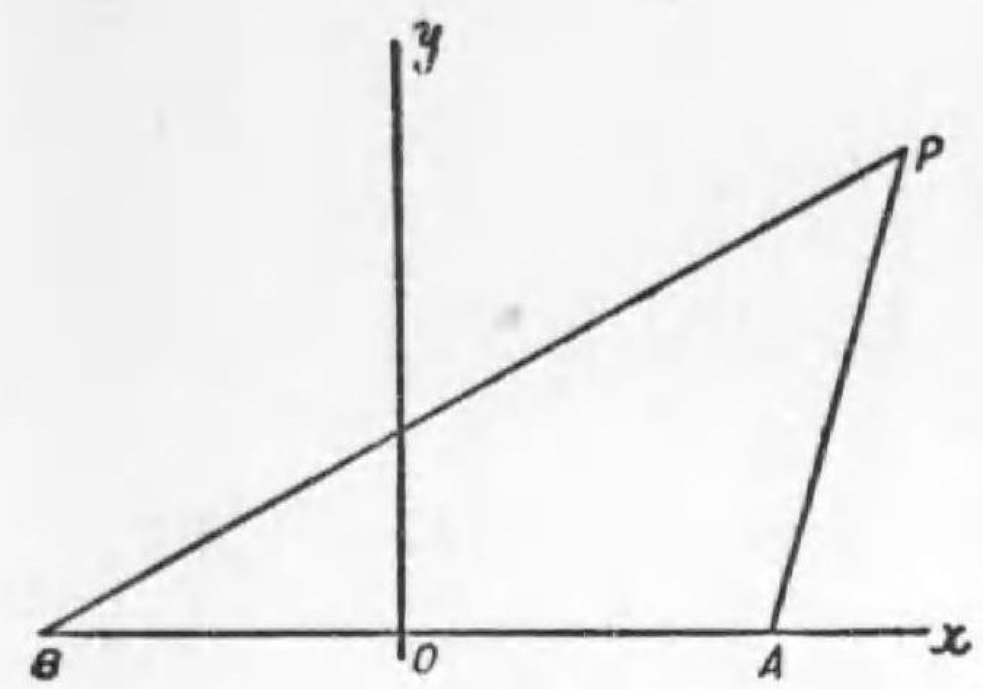
定點 A ヲ極トシ, 定直線 L ニ至ル垂線ヲ原線, 且 $AD=d$ トス. α, β, γ ハ常ニ一定ナリ.

$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}=k$ ニシテ一定 $AC=\rho$, $\angle DAC=\theta$ トセバ, $\angle DAB=\theta-\alpha$, $AC=k.AB$ 又 $AD=AB\cos BAD$ ナルヲ以テ $d=AB\cos(\theta-\alpha)$. 故ニ

$$AC=\rho=k.AB=k\frac{d}{\cos(\theta-\alpha)}$$

即チ　$\rho\cos(\theta-\alpha)=dk$ ニシテ直線ナリ.

93.



AB ノ中點ヲ原點トス.

P ヲ軌跡上ノ點トセバ BP ノ方向係數 m ハ AP ノ方向係數ノ $\frac{1}{2}$ ナリ. 故ニ BP ノ方程式ヲ

$$y=m(x+a) \qquad (1)$$

トセバ AP ノ方程式ハ

$$y=2m(x-a) \qquad (2)$$

(1), (2) ヨリ m ヲ消去シテ　$x+a=2x-2a$,　$x=3a$.

故ニ求ムル軌跡ハ y 軸ニ平行ナル直線ナリ.

94　與ヘラレタル二方程式ヨリ

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

之ヲ解キテ $\cos\theta=0$,　$\theta=\frac{\pi}{2}$.　從テ　$\rho=2a$.

故ニ交點ハ　$\left(2a, \frac{\pi}{2}\right)$.

95.　中心ハ正ノ x 軸上原點ヨリ r ニ在リテ半徑 r ナル圓ハ

$$(x-r)^2+y^2=r^2 \quad 即チ \quad x^2+y^2-2rx=0.$$

又中心ハ正ノ y 軸上原點ヨリ r ニ在リテ半徑 r ナル圓ハ

$$x^2+(y-r)^2=r^2,\quad 即チ\quad x^2+y^2-2ry=0.$$

96. $(x\pm r)^2+(y\pm r)^2=r^2$ 之ヲ解キテ

$$x^2+y^2\pm 2rx\pm 2ry+r^2=0.$$

97. 求ムル直線ノ方向係數ハ m ナルヲ以テ公式ヨリ直＝

$$y=mx\pm\sqrt{1+m^2}$$

或ハ求ムル直線ノ方程式ヲ $y=mx+p$ トシ中心ヨリ此直線＝至ル距離ガ半徑＝等シキコトヨリ

$$r^2=\frac{p^2}{1+m^2}\qquad\therefore\quad p=\pm r^2\sqrt{1+m^2}$$

98. $(-2, 3)$ ヲ過ル一般直線ノ方程式ハ $y-3=m(x+2)$ 圓ノ中心 $(1, 6)$ ヨリ此直線＝引ケル垂線ノ長サガ半徑ノ長サ 3 ＝等シキトキ圓＝切スルヲ以テ

$$9=\frac{\{(6-3)-m(1+2)\}^2}{1+m^2}$$

之ヲ解キテ　$m=0$, 又ハ $m=\infty$

故＝求ムル方程式ハ $y=3$ 又ハ $x=-2$.

99. 直線ノ方程式ハ $y=x+k$ ナル形ヲ有ス. 圓ノ中心 $(1, 2)$ ヨリ此直線＝至ル距離ガ半徑 $\sqrt{8}$ ＝等シキトキ切スルヲ以テ　$\frac{(2-1-k)^2}{(1^2+1^2)}=8,\quad k=5$ 又ハ -3.

故＝求ムル方程式ハ

$$y=x+5\quad(1)\quad 又ハ\quad y=x-3\quad(2)$$

中心ヲ過リ (1), (2) ＝垂直ナル直線ノ方程式ハ

$$y-2=-(x-1)\quad 即チ\quad y+x=3\qquad(3)$$

切點ノ座標ハ (1) ト (3) 又ハ (2) ト (3) トノ交點ノ座標ナリ. 即チ $(-1, 4)$, $(3, 0)$.

100. 圓ノ中心ヨリ與直線＝至ル距離ガ半徑＝等シキヲ以テ切ス. 切點ハ前題ト同樣＝シテ $(6, 3)$.

101. 二點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) ヲ過ル割線ノ方程式ハ

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y-y_2}\qquad(1)$$

然ル＝此等ノ點ハ圓上＝在ルヲ以テ

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0,\ 及ビ\ x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0.$$

$\therefore$ 減ジテ　$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2g)=-(y_1-y_2)(y_1+y_2+2f)$　(2)

(1) ト (2) トヨリ割線ノ方程式トシテ

$$(x-x_1)(x_1+x_2+2g)+(y-y_1)(y_1+y_2+2f)=0.$$

ヲ得. 之＝ $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ ヲ代入スレバ (x_1, y_1) ＝於ケル切線ノ方程式トシテ次式ヲ得.

$$x_1x+y_1y+g(x_1+x)+f(y_1+y)+c=0.$$

又割線ノ方程式ノ兩邊ヨリ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=x^2+y^2+2gx+2fy+c$$

ヲ減スレバ

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=x^2+y^2+2gx+2fy+c.$$

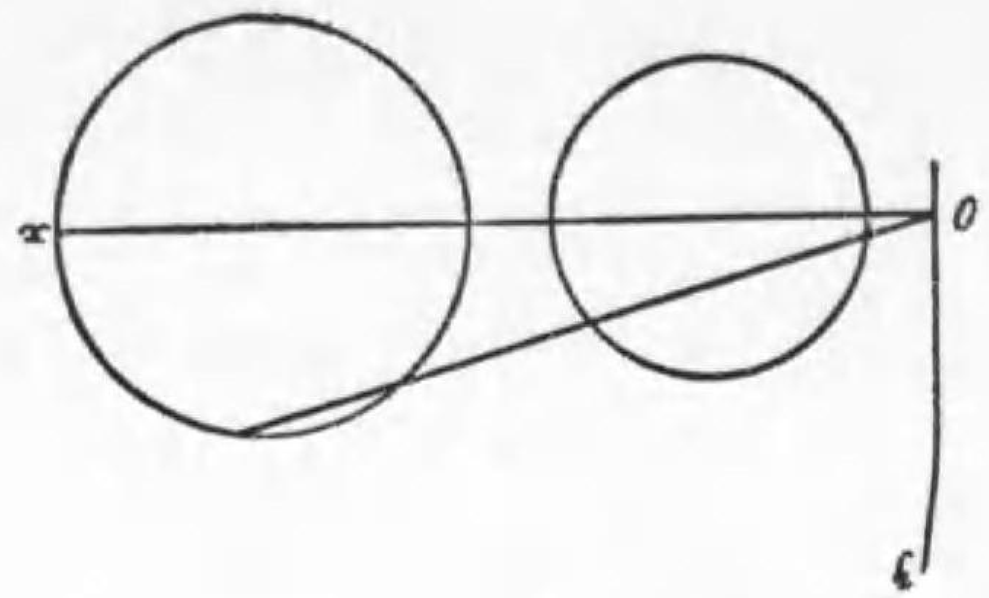
但シ　$c=-(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1)$.

102 圓ノ方程式ヲ $(x-1)^2+(y-3)^2=1$ ト書キ原點ヲ中心＝移シテ　$X^2+Y^2=1$ 此時直線ノ方程式ハ

$X-2Y=1$　トナル.

コヽニ於テ極ノ座標トシテ $(1, -2)$ ヲ得. 此ヲ舊ノ座標ニ復セバ　$(2, 1)$.

103.



二圓ノ中心ヲ結ビツクル直線ヲ x 軸トシ, 此直線上ニトリタル定點ヲ原點トセバ圓ノ方程式ハ夫々次ノ如ク表ハサル.

$$y^2+(x-p)^2=r_1^2 \quad (1)$$

$$y^2+(x-q)^2=r_2^2 \quad (2)$$

又任意ノ直線ノ方程式ハ

$$y=mx \quad 又ハ \quad mx-y=0 \quad (3)$$

ニテ表ハサル.

(3) ノ (1) ニ關スル極ハ

$$x_1=p-\frac{mr_1^2}{mp}=\frac{p^2-r_1^2}{p}, \quad y_1=\frac{-r_1^2}{mp} \quad 即チ \quad \left(\frac{p^2-r_1^2}{p}, \ \frac{-r_1^2}{mp}\right)$$

(3) ノ (2) ニ關スル極ハ

$$x_2=q-\frac{mr_2^2}{mq}=\frac{q^2-r_2^2}{q}, \quad y_2=\frac{-r_2^2}{mq} \quad 即チ \quad \left(\frac{q^2-r_2^2}{q}, \ \frac{-r_2^2}{mq}\right)$$

以上二個ノ極ヲ過ル直線ノ方程式ハ

$$\frac{y+\dfrac{r_1^2}{mp}}{\dfrac{-r_1^2}{mp}+\dfrac{r_2^2}{mq}}=\frac{x-\dfrac{p^2-r_1^2}{p}}{\dfrac{p^2-r_1^2}{p}-\dfrac{q^2-r_2^2}{q}}$$

$$\left(my+\frac{r_1^2}{p}\right)\left(\frac{p^2-r_1^2}{p}-\frac{q^2-r_2^2}{q}\right)=\left(x-\frac{p^2-r_1^2}{p}\right)\left(\frac{r_2}{q}-\frac{r_1^2}{p}\right)$$

更ニ書キ換ヘテ

$$m\left(\frac{p-r_1^2}{p}-\frac{q-r_2^2}{q}\right)y-\left(\frac{r_1^2}{p}-\frac{r_2^2}{q}\right)x+\frac{p^2r_2^2-q^2r^2}{pq}=0.$$

此直線ハ $\left(\frac{p-r_1^2}{p}-\frac{q-r_2^2}{q}\right)\neq 0$ ナルトキハ m ノ値ノ如何ニ關ハラズ $y=0$ ナルトキ x ノ値一定ナルヲ以テ x 軸上定點ヲ過リ. $\left(\frac{p-r_1^2}{p}-\frac{q-r_2^2}{q}\right)=0$ ナルトキハ y 軸ニ平行ナリ.

104. 圓周上ノ一點ノ座標ヲ (X, Y) トセバ此點ト (x_1, y_1) トヲ結ブ直線ノ方程式ハ

$$\frac{y-y_1}{y_1-Y}=\frac{x-x_1}{x_1-X} \quad ニシテ方向係數 \quad m_1=\frac{y_1-Y}{x_1-X}$$

又 (x_2, y_2) トヲ結ブ直線ノ方程式ハ

$$\frac{y-y_2}{y_2-Y}=\frac{x-x_2}{x_2-X} \quad ニシテ方向係數 \quad m_2=\frac{y_2-Y}{x_2-X}$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2) ガ直徑ノ兩端ナルトキハ上ノ二直線ハ垂直ナルヲ以テ　$m_1 \cdot m_2=\frac{y_1-Y}{x_1-X}\cdot\frac{y_2-Y}{x_2-X}=-1$

(X, Y) ハ圓上ノ點ナルヲ以テ (x, y) ニ置キ換フレバ

$$(y-y_1)(y-y_2)+(x-x_1)(x-x_2)=0.$$

105. 二定點ノ距離 $2a$ ヲ x 軸其中點ヲ原點トシ軌跡上ノ點ヲ (x, y) トスレバ

$$\{(x-a^2)+y^2\}:\{(x+a)^2+y^2\}=k^2.$$

但シ k ハ比ノ値. 簡單ニシテ

$$(k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2+2a(k^2+1)x+a^2(k^2-1)=0$$

卽チ圓ナリ.

106. $x^2+y^2-5x+y+4+k(x^2+y^2-3)=0$ ハ二定圓ノ交點ヲ過ル一般圓ノ方程式ナリ. 此圓ガ (1. 2) ヲ過ルガ故ニ

$$1+4-5+2+4+k(1+4-3)=0 \qquad \therefore\ k=3$$

$k=3$ ヲ代入スレバ求ムル方程式ハ次ノ如クナル

$$2x^2+2y^2+5x-y-13=0.$$

107. 圓ノ方程式ヲ $x^2+y^2=r^2$ トス. 但シ r ハ補助變數. 直線ノ方程式ヲ $ax+by+c=0$ トス. 此直線ノ圓ニ關スル極ヲ (x_1, y_1) トスレバ

$$x_1=-\frac{ar^2}{c}, \qquad y_1=-\frac{br^2}{c}$$

r ヲ消去スレバ $bx_1=cy_1$ (x_1, y_1) ヲ (x, y) ニ書キ換ヘテ

$$bx=cy \quad \text{卽チ直線テリ.}$$

108. 三直線ノ方程式ヲ $\quad a_1x+b_1y+c_1=0 \quad (1)$

$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad (2) \qquad a_3x+b_3y+c_3=0 \quad (3)$

トシ. 圓ノ中心ヲ原點トス.

(2), (3) ノ交點ヲ (x_1, y_1) トスレバ

$$x_1=\frac{b_2c_3-b_3c_2}{a_2b_3-a_3b_2}, \qquad y_1=\frac{c_2a_3-c_3a_2}{a_2b_3-a_3b_2}$$

此點ハ (1) ノ極ナルヲ以テ

$$\frac{b_2c_3-b_3c_2}{a_2b_3-a_3b_2}=-\frac{a_1r^2}{c_1}, \qquad \frac{c_2a_3-c_3a_2}{a_2b_3-a_3b_2}=-\frac{b_1r^2}{c_1}$$

此等ノ式ヨリ r^2 ヲ消去スレバ

$$b_1(b_2c_3-b_3c_2)=c_1(c_2a_3-c_3a_2)$$

トナル. コレ原點ト交點トヲ結ブ直線ガ $a_1x+b_1y+c_1=0$ ニ垂直ナルコトナリ. 卽チ原點ハ垂心ナリ.

109. k ノ値ノ如何ニ拘ハラズ $x=0$ トセバ $y^2=-c$

卽チ $y=\pm\sqrt{-c}$ ナル y 軸上ノ二定點ヲ過ル.

110. 三邊ヲ各 a トスレバ外心ノ座標ハ $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$ 原點ト外心トノ距離ガ半徑 r ナルヲ以テ

$$r=\sqrt{\left\{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{12}\right\}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

故ニ求ムル圓ノ方程式ハ $x^2+y^2=a\left(x+\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$

111. 二圓ノ半徑相等シキヲ以テ半徑ノ平方ヨリ中心距離ノ $\frac{1}{2}$ ノ平方ヲ減ジタルモノハ共通弦ノ $\frac{1}{2}$ ノ平方ニ等シ.

故ニ求ムル長サヲ l トセバ

$$\frac{1}{4}l^2=c^2-\frac{1}{4}\{(a-b)^2+(b-a)^2\}. \qquad \therefore\ l=\sqrt{\{4c^2-2(a-b)^2\}}.$$

112 $x+y=7$ ノ圓 $(x-1)^2+(y-2)^2=3$ ニ關スル極ノ座標ハ

$x_1=1-\frac{3}{1+2+1}=\frac{1}{4}, \quad y_1=2-\frac{3}{1+2-7}=\frac{5}{4}$. 此ハ $x-y+1=0$ ヲ滿足ス. 故ニ共軛ナリ.

113. 102 ト同樣ニシテ $\qquad (3, -1)$

114. 答 $x=3$.

115 答 $3x^2-64xy+3y^2-664x+226y+763=0.$

116. 答 $4x^2+4y^2-142x+47y+138.=0.$

117. 答 $2x^2+2y^2+2x+6y+1=0.$

118. 答 $x^2+y^2-17x-19y+50=0.$

119. n 個ノ點ヲ (a_1, b_1) (a_2, b_2) トスレバ題意ヨリ

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+\cdots\cdots(x-a_n)^2 +(y-b_n)^2=k^2.$$

即チ圓ナリ.

120. 正方形ノ各邊ヲ $x=0,\ y=0,\ x=a,\ y=a$ トスレバ題意ニヨリ

$$x^2+y^2+(a-x)^2+(a-y)^2=k^2.$$

即チ圓ナリ.

121. 134 ト同様ニシテ二直線ノ方程式ハ

$$x^2+y^2-\frac{2}{3}(x+y)(x+2y)=0$$

此二直線ハ $(y-m_1x)(y-m_2x)=0$ ナル形ニ書クコトヲ得ベク $y=m_1x,\ y=-m_2x$ ガ直交スルタメニハ $m_1m_2=1$ ナルコトヲ要ス. 而シテ m_1m_2 ハ $(y-m_1x)(y-m_2x)=0$ ニ於ケル x^2 ノ係數ナリ. 而シテ今得タル方程式ハ

$$x^2-6xy+y^2=0.$$

x^2 ノ係數 1 ナリ故ニ直交ス. 一般ニ二次ノ同次式ニ於テ x^2 及ビ y^2 ノ係數ノ和ガ零ナルトキ此同次式ガ表ス二直線ハ直交ス.

122 $3x-4y=0,\ 7x-24y=0$ 間ノ角ヲ二等分スル直線ノ方程

式ハ $\dfrac{3x-4y}{\sqrt{(9+16)}}=\dfrac{7x-24y}{\sqrt{(49+576)}}$, 又ハ $3x-4y=0$ (1)

次ニ $3x-4y=0$ ト $5x-12y-36=0$ トノ間ノ角ノ二等分線ハ

$$\frac{3x-4y}{5}=\frac{5x-12y-36}{13} \text{ 又ハ } 16x-28y=45 \qquad (2)$$

(1) ト (2) トノ交點ガ求ムル内心ナリ. $\left(\dfrac{5}{8},\ -\dfrac{5}{4}\right)$

123 O_1 及ビ O_2 圓ヲ夫々 $x^2+y^2=r_1^2,\ x^2+y^2=r_2^2$ トシ, O_1 圓ノ任意ノ切線 $x_1x+y_1y=r_1^2$ ノ O_2 圓ニ關スル極ノ座標 (X, Y) ハ $\quad X=\dfrac{x_1r_2^2}{r_1^2},\quad Y=\dfrac{y_1r_2^2}{r_1^2}$

(x_1, y_1) ハ O_1 圓上ノ點ナルコトヨリ上ノ式ヨリ得タル x_1, y_1 ノ値ヲ O_1 圓ノ方程式ニ代入シテ $X^2+Y^2=\dfrac{r_2^4}{r_1^2}$ 即チ同心圓ナリ.

124. 切線ヲ x 軸, 切點ヲ原點トセバ $x^2+(y-r)^2=r^2$ ハ r ノ値ヲ種々變ズルコトニヨリテ圓群ヲ表ス. 定點 $P(x_1, y_1)$ ノ極線ハ $\quad x_1x+y_1y-r(y+y_1)=0$

ニシテ, 二定直線 $x_1x+y_1y=0,\ y+y_1=0$ ノ交點ヲ過ル.

125 定點 P ヲ原點トシ中心ノ極座標ヲ (ρ_1, θ_1) トスレバ圓ノ方程式ハ次ノ如ク表ハサル.

$$\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos(\theta-\theta_1)=r^2.$$

原點ヨリ此圓ニ至ル距離ヲ $\rho',\ \rho''$ トスレバ $\rho',\ \rho''$ ハ圓ノ方程式ノ二根ナリ. 根ト係數トノ關係ヨリ

$$\rho'+\rho''=2\rho_1\cos(\theta-\theta_1)$$

$\dfrac{\rho'+\rho''}{2}=\mathrm{R}$ トスレバ

$$\mathrm{R}=\rho_1\cos(\theta-\theta_1)$$

即チ軌跡ハ圓ナリ.

126 底邊ヲ x 軸, 其中點ヲ原點トシ, 三頂點ヲ $(a, 0)$. $(-a, 0)$, (X, Y) トスレバ二邊ノ方程式ハ夫々

$$\frac{x-a}{y}=\frac{a-\mathrm{X}}{-\mathrm{Y}} \quad (1) \qquad \frac{x+a}{y}=\frac{-a-\mathrm{X}}{-\mathrm{Y}} \quad (2)$$

(1) 及ビ (2) ノナス角ガ一定 α ナルヲ以テ

$$\tan\alpha=\frac{\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}-a}-\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}+a}}{1+\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}-a}\cdot\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}+a}}=\frac{2a\mathrm{Y}}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-a^2}$$

$\therefore\ \mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-2a\mathrm{Y}\cot\alpha-a^2=0.$ 即チ圓ナリ.

127. $y=mx$ ト與圓トノ交點ヲ與フル式ハ

$$(m^2+1)x^2+2x(g+fm)+c=0.$$

切スルトキ=ハ x ノ等根ヲ得. 即チ其條件ハ

$$(g+fm)^2-(m^2+1)c=0.$$

此 m = $m=\dfrac{y}{x}$ ヲ代入シテ

$$y^2(f^2-c)+2fgxy+x^2(g^2-c).=0$$

128. 與ヘラレタル方程式ヲ因數=分解スレバ

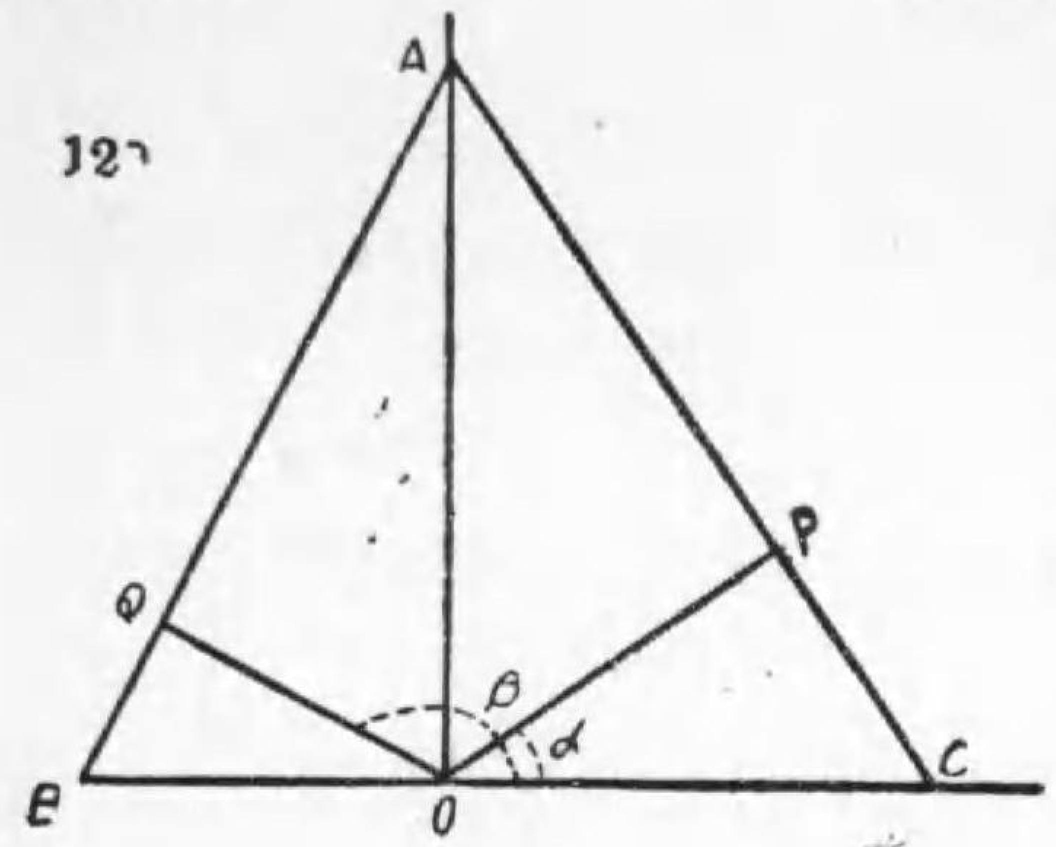
$$(\rho-2a\cos\theta)(\rho+a\sec\theta)=0$$

即チ $\rho=2a\cos\theta$ (1) $\rho=-a\sec\theta$ (2)

(1) ノ兩邊=ρヲ乘スレバ $\rho^2=x^2+y^2=2ax$ 圓

(2) ヨリ $x=-a$ 直線

129



任意ノ三角形 ABC ノ底邊 BC ヲ x 軸 A ヨリ下シタル垂直線ヲ y 軸トスル

$\mathrm{OP}=p,\quad \mathrm{OQ}=q$ トセバ

AC ノ方程式ハ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p.$

AB ノ方程式ハ $x\cos\beta+y\sin\beta=q$

BC ノ方程式ハ $y=0$

題意ヨリ

$$y^2+(x\cos\alpha+y\sin\alpha+p)^2+(x\cos\beta+y\sin\beta-q)^2=k^2$$

此方程式ガ圓ヲ表スタメ=ハ

$$\cos\alpha\sin\alpha+\cos\beta\sin\beta=0 \qquad (1)$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1+\sin^2\alpha+\sin^2\beta \qquad (2)$$

(1) ヨリ $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=0$

即チ $\alpha+\beta=180^\circ \qquad \alpha-\beta=90^\circ$

$\alpha-\beta=90^\circ$ ハ (2) ヲ背理セムシルガ故=捨テテ

$\mathrm{A}+\mathrm{B}=180^\circ$ ヲ (2) =代入シテ $\alpha=30^\circ,\ \beta=150^\circ$

從テ　角 ACB 及ビ 角 ABC ハ 60° ニシテ ABC ハ正三角形ナリ.

130. 一點 (X, Y) ノ甲圓 $x^2+y^2=r^2$, ニ關スル極線ハ $Xx+Yy=r^2$, ニシテ, 之ガ乙圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=r_2^2$ ニ切スルタメニハソノ中心距離ガ半徑ニ等シキコトヨリ

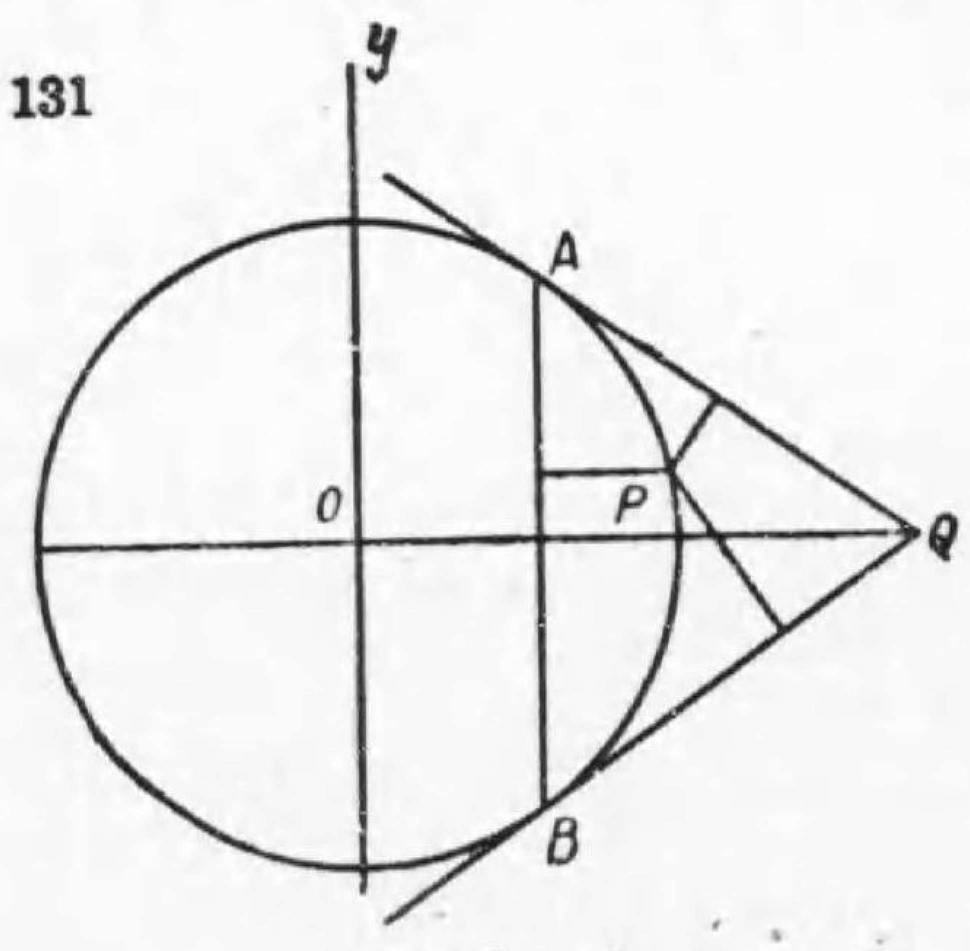
$$r_2^2(X^2+Y^2)=(aX+bY-r_1^2)^2$$

(X, Y) ヲ流通座標ト見做ストキ此方程式ガ圓ナルタメニハ

$$a=b \quad ab=0 \quad 卽チ \quad a=b=0$$

ナラザルベカラズ. 故ニ乙圓ト甲圓トハ同心圓ナリ.

131



$y=m(x-a)$ (2)

Q$(a, 0)$ ノ極線 AB ノ方程式ハ

$$x=\frac{r^2}{a} \quad ナリ.$$

AQ ノ方程式ヲ

$y=-m(x-a)$　(1)

トセバ BQ ノ方程式ハ

$y=m(x-a)$　(2)

圓上ノ點 P(x_1, y_1) ヨリ (1) ニ至ル距離ハ

$$\frac{y_1-m(x_1-a)}{\sqrt{(1+m^2)}}$$

ニシテ (2) ニ至ル距離ハ

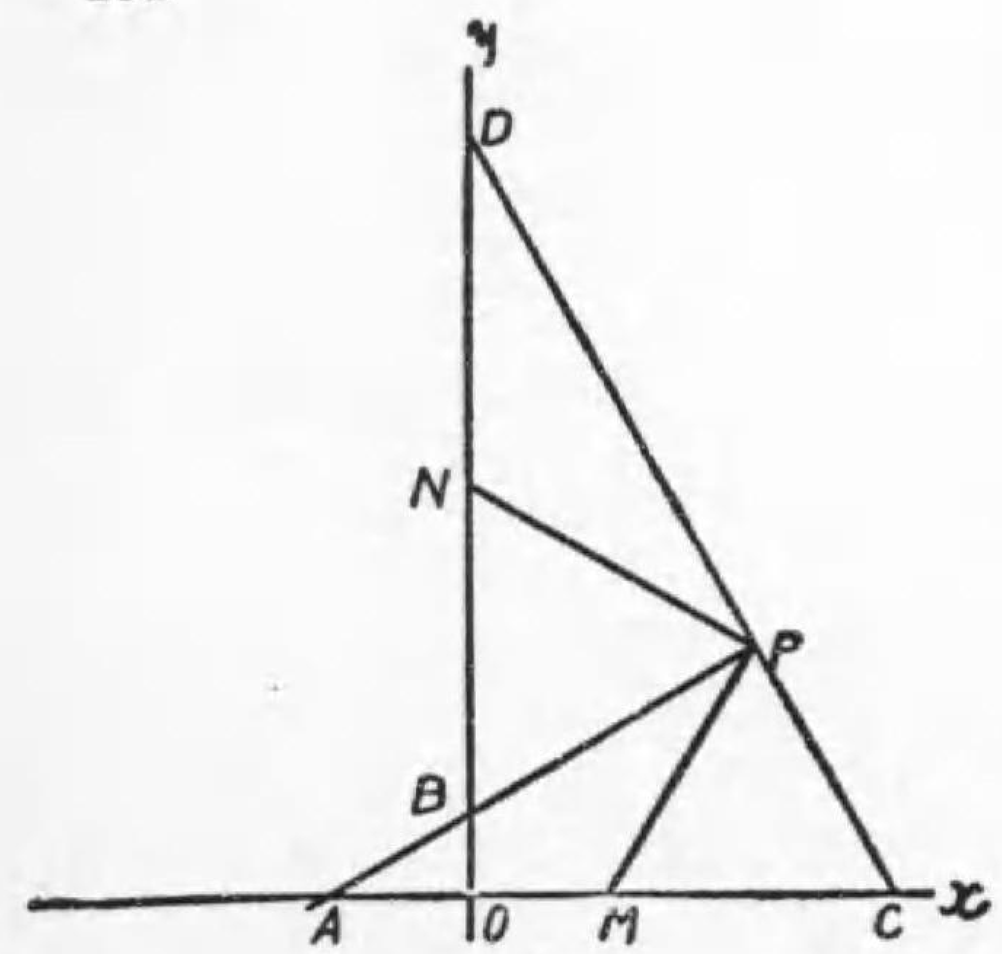
$$\frac{y_1-m(x_1-a)}{\sqrt{(1+m^2)}}$$

從テコレ等ノ積ハ

$$\frac{y_1^2-m^2(x_1-a)^2}{1+m^2}$$

然ルニ　$m^2=\dfrac{r^2}{a^2-r^2}$ ナルヲ以テ之ヲ代入シテ變化セバ $\left(x_1-\dfrac{r^2}{a}\right)^2$ 又別ニ (x_1, y_1) ト AB トノ距離ノ平方ハ $\left(x-\dfrac{r^2}{a}\right)^2$ ナリ. 故ニ題言ノ如シ.

132.



AC ノ中點 M, BD ノ中點ヲ N トシ OM$=m$, ON$=n$ トス. BPD, APC ハ共ニ直角三角形ニシテ NPM 角モ亦直角三角形ナリ. 故ニ P(x, y) トセバ

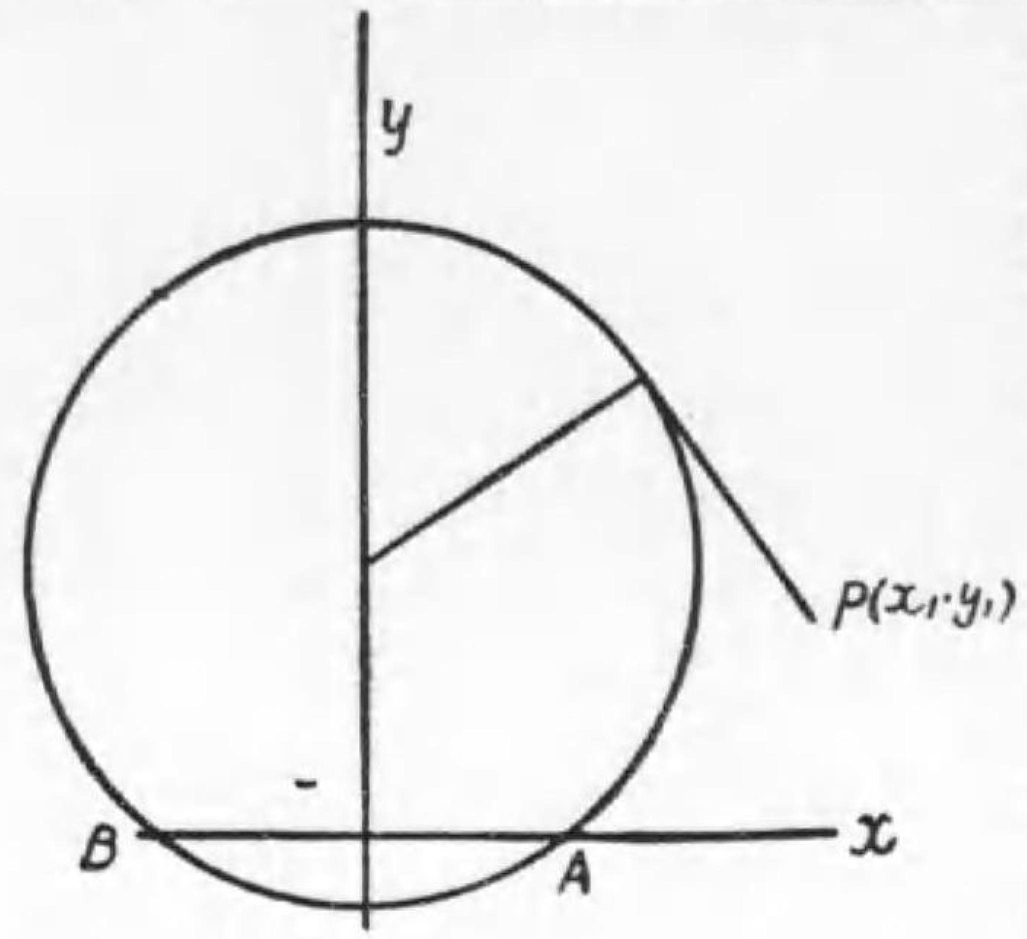
$$NP^2+MP^2=NM^2$$
$$=ON^2+OM^2$$

卽チ　$$x^2+(y-n)^2+(x-m)^2+y^2=m^2+n^2.$$

$$x^2+y^2-mx-ny=0.$$

故ニ原點ヲ過ル圓ナリ.

133. A$(a, 0)$, B$(-a, 0)$ ヲ過ル圓ノ一般方程式ハ



$y^2-2ky+x^2=a^2$ (1)

定點 $P(x_1, y_1)$ ト此圓ノ中心 $(0, k)$ トヲ直徑ノ端トスル圓ハ

$$x^2+y^2-xx_1-y_1+ky+y_1k=0 \qquad (2)$$

(1) ト (2) トヨリ k ヲ消去セバ P ヨリ引キタル切線ノ切點ノ軌跡ヲ得. 即チ

$$x^2+y^2-x_1x-\left(y_1+\frac{x^2+y^2-a^2}{2y}\right)y+y_1\frac{x^2+y^2-a^2}{2y}=0 \qquad (3)$$

(3) ガ圓ナルタメニハ $y_1=0$ 即チ P 點ハ AB 上ニ在ルヲ要ス.

134. $(x^2+y^2)p^2+p(x\cos\alpha+y\sin\alpha)(2gx+2fy)$
$+c(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2=0$

ハ與ヘラレタル圓ト直線トノ交點ニテ滿足セラレ，且二次ノ同次式ナルヲ以テ原點ヲ過ル二直線ヲ表ス. 此二直線ガ垂直ナルタメニハ x^2 ト y^2 トノ係數ノ和ガ零ナルヲ要ス.

即チ $\qquad 2p^2+2p(g\cos\alpha+f\sin\alpha)+c=0.$

135. $P(x_1, y_1)$ ヲ過ル直線ノ一般方程式ハ

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad (1)$$

此直線ガ與圓ノ切線ナルタメニハ原點ヨリ此直線ニ下シタル垂線ガ圓ノ半徑ニ等シ. 即チ

$$\frac{mx_1-y_1}{\sqrt{(1+m^2)}}=r$$

又ハ $\qquad (mx_1-y_1)^2=r^2(1+m^2) \qquad (2)$

(1) ヨリ得タル m ヲ (2) ニ代入スレバ

$$\left(\frac{x_1(y-y_1)}{x-x_1}-y_1\right)^2=r^2\left\{1+\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)^2\right\}$$

$$\therefore\quad (x_1y-y_1x)^2=r^2\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}.$$

136. 一定圓ヲ $x^2+y^2=r^2$, 二定點ヲ (α_1, β_1), (α_2, β_2) トスレバ此二定點ヲ過ル一般ノ圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2-(\alpha_1+\alpha_2)x-(\beta_1+\beta_2)y+\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2$$
$$-k\{(\beta_1-\beta_2)x+(\alpha_1-\alpha_2)y+\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\}=0$$

此圓ト定圓トノ交點ヲ結ブ直線即チ根軸ノ方程式ハ

$$(\alpha_1+\alpha_2)x+(\beta_1+\beta_2)y-\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2+k\{(\beta_1-\beta_2)x$$
$$+(\alpha_1-\alpha_2)y+\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\}=0$$

ニシテ k ノ値ノ如何ニ拘ハラズ定點ヲ過ル.

137. 二切線ガ同一ノ直線ナルトキハ各々ノ x, y ノ係數ノ比ハ相等シ. 故ニ $\qquad \tan\theta=\tan\theta'$

從テ $\qquad \theta=\theta'$ 又 $\theta=\theta'+180°$.

$\theta=\theta'$ ナルトキハ $\qquad (a-a')\cos\theta+(b-b')\sin\theta+(r-r')=0$

$\theta=\theta'+180°$ ナルトキハ $(a-a')\cos\theta+(b-b')\sin\theta+(r+r')=0$

138. 圓ノ方程式ヲ書キ換フレバ

$$(x-1)^2+(y-3)^2=1,\quad (x+3)^2+(y-1)^2=9$$

故＝共通切線ノ傾角ハ前題＝ヨリ

$$(1+3)\cos\theta+(3-1)\sin\theta+(1\pm3)=0$$

ヨリ得ラル．之ヲ解キテ

$$\sin\theta=\frac{-3}{5},\quad \sin\theta=1,\quad \cos\theta=\frac{-3}{5},\quad \cos\theta=-1.$$

此等ノ値ヲ前題ノ切線ノ方程式＝代入スレバ

$$x=0,\quad 3x+4y-10=0,\qquad y-4=0,\quad 4x-3y=0.$$

139. $i=1,\ i=2$ ＝應ズル圓ノ根軸ハ

$$2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y-(c_1-c_2)=0 \qquad (1)$$

$i=2,\ i=3$ ＝應ズル圓ノ根軸ハ

$$2(a_2-a_3)x+2(b_2-b_3)y-(c_2-c_3)=0 \qquad (2)$$

$i=3,\ i=1$ ＝應ズル圓ノ根軸ハ

$$2(a_3-a_1)x+2(b_3-b_1)y-(c_3-c_1)=0 \qquad (3)$$

$(1)\times b_3+(2)\times b_1+(3)\times b_2$ ヨリ

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{b_1(c_2-c_3)+b_2(c_3-c_1)+b_3(c_1-c_2)}{b_1(a_2-a_3)+b_2(a_3-a_1)+b_3(a_1-a_2)}$$

同様＝シテ

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_1(c_2-c_3)+a_2(c_3-c_1)+a_3(c_1-c_2)}{a_1(b_2-b_3)+a_2(b_3-b_1)+a_3(b_1-b_2)}$$

140 三角法ノ公式ヨリ $O_1A^2+O_2A^2+2O_1A.O_2A\cos w=O_1O_2^2$.

$$\therefore\quad \cos w=\frac{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}$$

141 二圓ノ方程式ヲ書キ換ヘテ

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=a_1^2+b_1^2-c_1,$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=a_2^2+b_2^2-c_2.$$

前題＝ヨリテ

$$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2-a_1^2-b_1^2+c_1-a_2^2-b_2^2+c_2+2r_1r_2\cos w=0$$

書キ換ヘテ　$c_1+c_2+2r_1r_2\cos w-2a_1a_2-2b_1b_2=0.$

142 求ムル圓ヲ $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0 \qquad (1)$

トセバ (1) ガ $i=1$ ナル圓＝直交スルヲ以テ中心間ノ距離ノ平方ハ半徑ノ平方ノ和＝等シキコトヨリ

$$(A+a_1)^2+(B+b_1)^2=A^2+B^2-C+a_1^2+b_1^2-c_1$$

即チ

$$2Aa_1+2Bb_1+C+c_1=0 \qquad (2)$$

同様＝ $i=2.3$ ＝應ズル圓ト直交スルコトヨリ

$$2Aa_2+2Bb_2+C+c_2=0 \qquad (3)$$

$$2Aa_3+2Bb_3+C+c_3=0 \qquad (4)$$

(1), (2), (3), (4) ヨリ A, B, C ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2, & y, & y, & 1\\ c_1\ , & a_1, & b_1, & 1\\ c_2\ , & a_2, & b_2, & 1\\ c_3\ , & a_3, & b_3, & 1\end{vmatrix}=0.$$

143. 前題ノ結果ヨリ直＝得ラルヽモ亦此三圓ノ根心ヲ求メテ，此根心 (2, 3) ヨリ三圓ノ何レカ＝引ケル切線ノ切點迄ノ距離ヲ求メテ 5 ヲ得．此ヲ半徑トスル圓ヲ作レバ可ナリ．

即チ

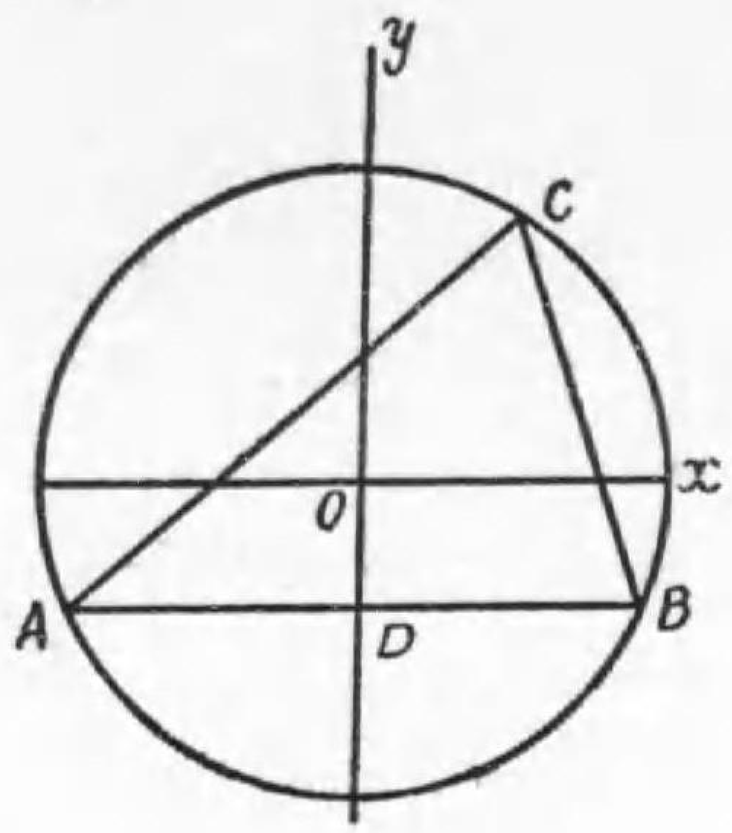
$$(x^2-2)^2+(y-3)^2=25$$

144. 原點ヲ定點＝トリ定直線ヲ $x=a$ トスレバ題意＝ヨリ

$$x^2+y^2=k(a-x)$$

卽チ圓ナリ.

145



弦 AB ニ平行ナル直徑ヲ x 軸, 中心ヲ原點トス.

OD$=m$, AD$=$DB$=l$ トシ, 圓上ノ點 C ノ座標ヲ (x_1, y_1) トスレバ AC ノ方程式ハ

$$\frac{y+m}{x+l}=\frac{y_1+m}{x_1+l} \qquad (1)$$

BC ノ方程式ハ

$$\frac{y+m}{x-l}=\frac{y_1+m}{x_1-l} \qquad (2)$$

故ニ角 ACB ヲ α トスレバ

$$\tan\alpha=\frac{2l(y_1+m)}{x_1^2+y_1^2-l^2+2y_1m+m^2}$$

然ルニ $x_1^2+y_1^2=r^2$, $m^2+l^2=r^2$ ナルヲ以テ

$$x_1^2+y_1^2-l^2=m^2 \qquad \therefore\ \tan\alpha=\frac{l}{m}$$

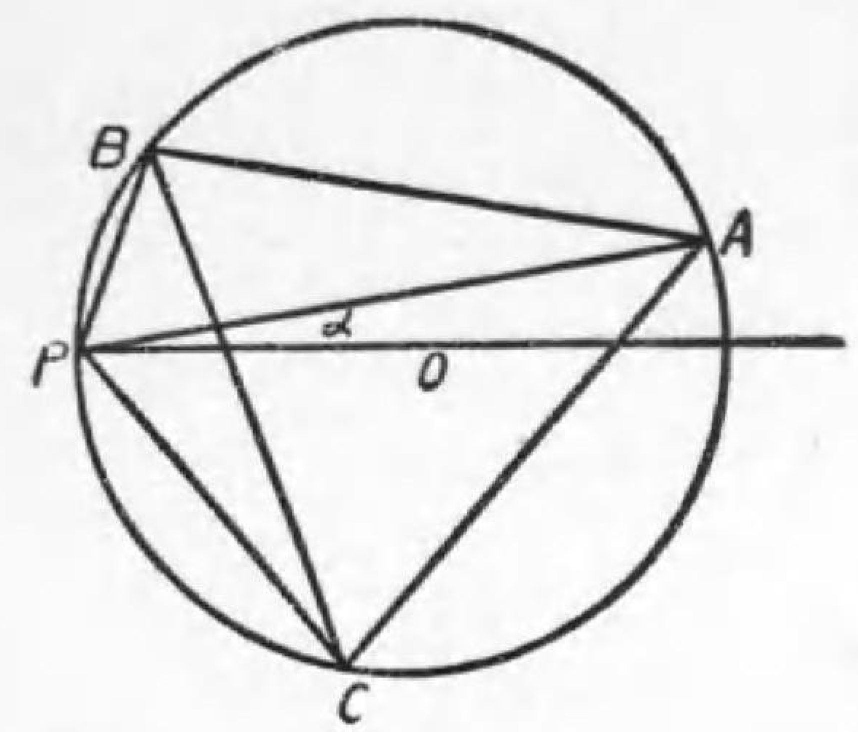
次ニ $\tan \mathrm{ODB}=\frac{l}{m}$ $\therefore$ $\tan\alpha=\tan \mathrm{ODB}$ 卽チ $\alpha=\frac{1}{2}\mathrm{AOB}$

146. 圓ト直線トノ交點ノ座標ハ (0.0), $\left(\frac{2r}{1+m^2}, \frac{2rm}{1+m^2}\right)$ ナリ. 此二點ノ中點ガ圓ノ中心ナリ. 從テ中心ハ $\left(\frac{r}{1+m^2}, \frac{rm}{1+m^2}\right)$. 半徑ハ原點ト中心トノ距離ナルヲ以テ $\frac{r}{\sqrt{(1+m^2)}}$

半徑ト中心トヲ知ルヲ以テ求ムル圓ハ

$$(1+m^2)(x^2+y^2)-2rx-2rmy=0.$$

147.



P, O ヲ過ル直徑ヲ原線, P ヲ原點トス. 外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ圓ノ方程式ハ

$$\rho=2\,\mathrm{R}\cos\theta \qquad (1)$$

$$\mathrm{OPB}=\alpha+60°,$$

$$\mathrm{OPC}=60°-\alpha$$

(1) ニ於テ $\theta=\alpha$ トシタルトキノ ρ ノ値ハ PA ナルヲ以テ $\mathrm{PA}=2\,\mathrm{R}\cos\alpha$

又 (1) ニ $\theta=60°+\alpha$ ヲ代入セバ

$$\mathrm{PB}=2\,\mathrm{R}\cos(60°+\alpha)$$

更ニ (1) ニ $\theta=60°-\alpha$ ヲ代入スレバ

$$\mathrm{PC}=2\mathrm{R}\cos(60°-\alpha)$$

$\therefore$ $\mathrm{PB}+\mathrm{PC}=2\mathrm{R}\{\cos(60°+\alpha)+\cos(60-\alpha)\}=2\mathrm{R}\cos\alpha=\mathrm{PA}$

故ニ題言ノ如シ.

148. 定點 (x_1, y_1) ヲ過ル任意ノ直線 $y-y_1=m(x-x_1)$ ガ定圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ關スル極ヲ (X, Y) トスレバ

$$\mathrm{X}=\frac{r^2}{y_1-m_1x_1}, \qquad \mathrm{Y}=\frac{mr^2}{y_1-mx_1}$$

此等ヨリ m ヲ消去スレバ

$$x_1X+y_1Y=r^2$$

トナリ卽チ極線ナリ.

149. P ヲ極座標ノ極, 圓ノ中心ヲ P ニ結ブ直線ヲ原線, 半徑ヲ R, PO$=a$ トスレバ圓ノ方程式ハ

$$\rho^2-2\rho\cos\theta+a^2-R^2=0 \qquad (1)$$

之ヲ ρ ニツイテ二次方程式ト考フルトキ其二根 ρ_1, ρ_2 ハ卽チ OA. OB ナリ. 根ト係數トノ關係ヨリ

$$OA+OB=\rho_1+\rho_2=2a\cos\theta.$$

OA, OB ノ中點 M ノ座標ヲ (ρ, θ) トセバ $\rho_1+\rho_2=2\rho$

$$\therefore\ \rho=a\cos\theta.$$

卽チ OP ヲ直徑トスル圓ナリ.

150. 假設ニヨリ $\dfrac{2}{PM}=\dfrac{1}{PA}+\dfrac{1}{PB}$ 卽チ $\dfrac{2}{\rho}=\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}$

$\rho=\dfrac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$ 然ルニ前題ノ (1) ヨリ $\rho_1+\rho_2=2a\cos\theta$, $\rho_1\rho_2=a^2-R^2$

之ヲ代入シテ

$$\rho=\frac{a^2-R^2}{a}\sec\theta. \text{ 卽チ } x=\frac{a^2-R^2}{a} \text{ ナル直線.}$$

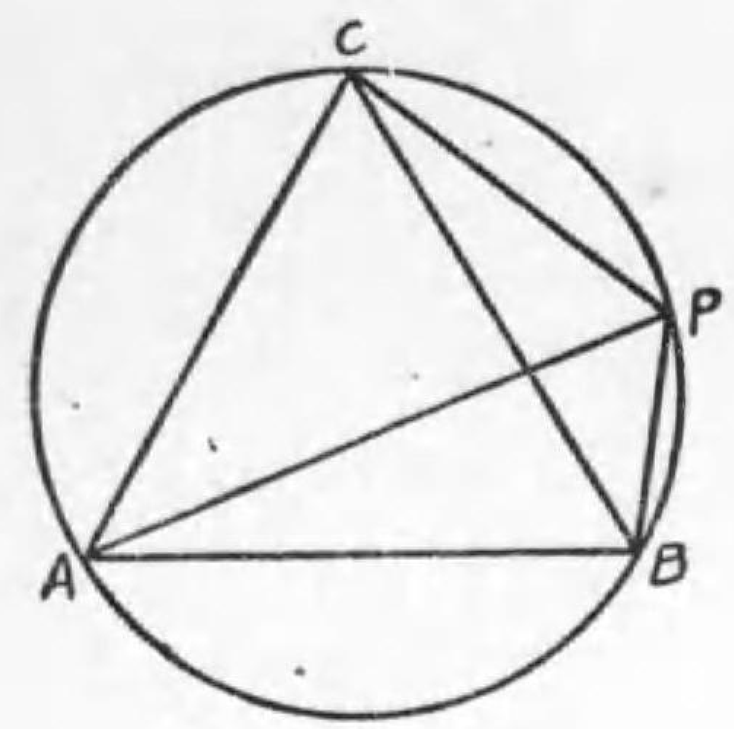
151. 正方形ノ四點ヲ $A(a, a)$, $B(a, -a)$, $C(-a, -a)$, $D(-a, a)$ トシ, 軌跡上ノ點ヲ (x, y) トスルトキハ題意ヨリ

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(x-a)^2+(y+a)^2+(x+a)^2+(y+a)^2$$
$$+(x+a)^2+(y-a)^2=k^2.$$

$$\therefore\ x^2+y^2=\frac{k^2}{4}-2a^2.$$

卽チ圓ナリ.

152. A ヲ極, AB ヲ原線トス. AB$=a$ トスレバ B 及ビ C ノ極座標ハ夫々 $(a, 0)$, $(a, 60^\circ)$. 今 P ノ座標ヲ (ρ, θ) トスレバ　$AP=\rho$



$$BP=\sqrt{\{\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta\}}.$$

$$CP=\sqrt{\{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(60^\circ-\theta)\}}.$$

然ルニ AP=BP+CP.

$$\therefore\ \rho=\sqrt{\{\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta\}}+\sqrt{\{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(60^\circ-\theta)\}}.$$

之ヲ逐次平方シテ簡單ニスレバ

$$\sqrt{3}\,\rho-2a\cos(\theta-30^\circ)=0.$$

$$\therefore\ \rho=2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\cos(\theta-30^\circ).$$

ニシテ正三角形 ABC ノ外接圓ナリ.

153. 內接圓ノ方程式ヲ $x^2+y^2=r^2$ トシ切點 D, E, F ヲ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) トスレバ切線ノ方程式ハ三角形ノ三邊トナル. 卽チ

$$x_1x+y_1y=r^2 \quad (1) \qquad x_2x+y_2y=r^2 \quad (2)$$
$$x_3x+y_3y=r^2 \quad (3)$$

(2) ト (3) トノ交點 A ヲ過ル直線一般ノ方程式ハ

$$(x_2x+y_2y-r_2)+k(x_3x+y_3y-r^2)=0.$$

ニシテ之ガ D 點ヲ過ルトキハ

$$(x_2x_1+y_2y_1-r^2)+k(x_3x_1+y_3y_1-r^2)=0$$

故＝ AD ノ方程式ハ

$$(x_3x_1+y_3y_1-r^2)(x_2x+y_2y-r^2)$$
$$-(x_2x_1+y_2y_1-r^2)(x_3x+y_3y-r^2)=0 \qquad (1)$$

同様＝ BE ノ方程式ハ

$$(x_1x_2+y_1y_2-r^2)(x_3x+y_3y-r^2)$$
$$-(x_3x_2+y_3y_2-r^2)(x_1x+y_1y-r^2)=0 \qquad (3)$$

又 CF ノ方程式ハ

$$(x_2x_3+y_2y_3-r^2)(x_1x+y_1y-r^2)$$
$$-(x_1x_3+y_1y_3-r^2)(x_2x+y_2y-r^2)=0 \qquad (3)$$

(1)+(2)+(3)=0. 故＝共點ナリ.

154. P ヲ極, 直徑 d ヲ原線トスレバ圓ノ方程式ハ

$$\rho=d\cos\theta \qquad (1)$$

PA ヲ直徑トスル圓ハ PA ト原線トノ角ヲ α トスルトキ

$$\rho=d\cos\alpha\cos(\theta-\alpha) \qquad (2)$$

同様＝ PB, PC ヲ直徑トスル圓

$$\rho=d\cos\beta\cos(\theta-\beta) \qquad (3)$$
$$\rho=d\cos\gamma\cos(\theta-\gamma) \qquad (4)$$

＝テ表ハサル. (2), (3) ノ交點ノ座標ハ

$$\theta=\alpha+\beta, \quad \rho=d\cos\alpha\cos\beta$$

(2), (4) ノ交點ノ座標ハ

$$\theta=\alpha+\gamma, \quad \rho=d\cos\alpha\cos\gamma$$

此等ノ二ツノ交點ヲ過ル直線ノ方程式ハ (問題 60 參照)

$$\rho=d\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

此方程式ガ α, β, γ ＝ツキテ對稱ナルコトハ (1), (2), (3) ノ交點ガ同一直線上＝在ルコトヲ示ス.

155. 與ヘラレタル方程式ヲ書キ換ヘテ

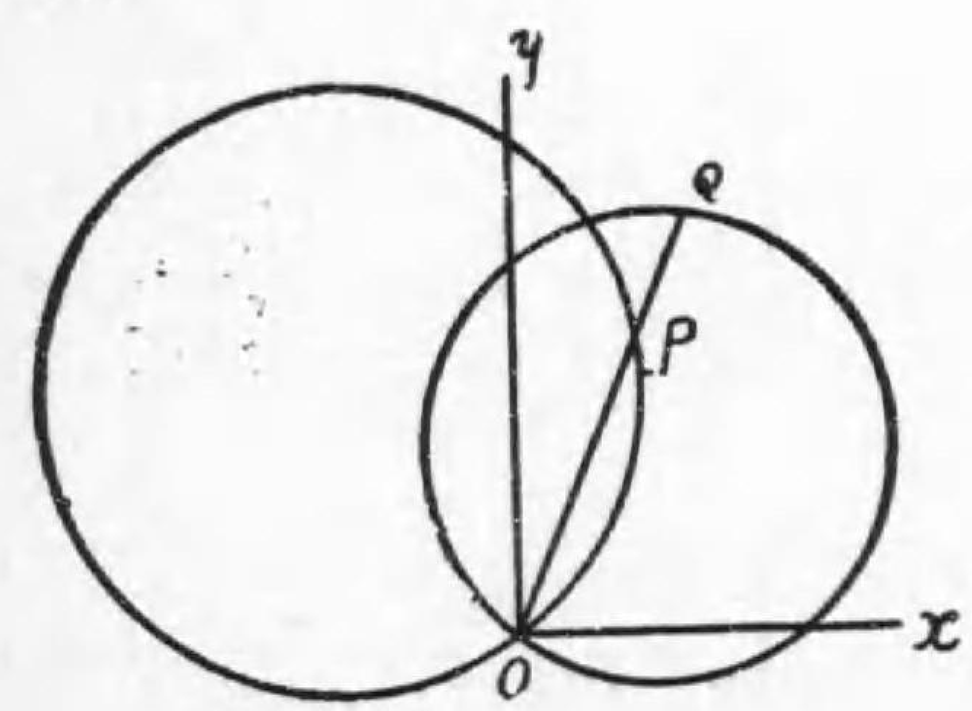
$$x^2+y^2-ax+n(x^2+y^2-by)=0$$

此方程式ハ n ＝如何ナル値ヲ與フルモ

$$x^2+y^2-ax=0 \quad (1) \qquad x^2+y^2-by=0 \quad (2)$$

ナル二圓ノ交點ヲ過ル. 從テ (1) ヨリ (2) ヲ減ジテ根軸ノ方程式ハ　$ax-by=0$

156.



O ヲ原點トスル任意ノ直交軸ヲトレバ二定圓ハ次ノ如ク表ハサル.

$$x^2+y^2+2gx+2fy=0 \quad (1)$$
$$x^2+y^2+2g'x+2f'y=0 \quad (2)$$

之ヲ極座標＝直セバ

$$\rho+2g\cos\theta+2f\sin\theta=0 \qquad (3)$$
$$\rho+2g'\cos\theta+2f'\sin\theta=0 \qquad (4)$$

OPQ ガ Ox トナス角ヲ α トスレバ

$$\mathrm{OP}=-2g\cos\alpha-2f\sin\alpha, \quad \mathrm{OQ}=-2g'\cos\alpha-2f'\sin\alpha$$

PQ ノ中點 M ノ極座標ヲ (ρ, θ) トスレバ

$$2\rho=\mathrm{OP}+\mathrm{OQ},\qquad \theta=\alpha$$

$$\therefore\quad 2\rho=-2(g+g')\cos\theta-2(f+f')\sin\theta$$

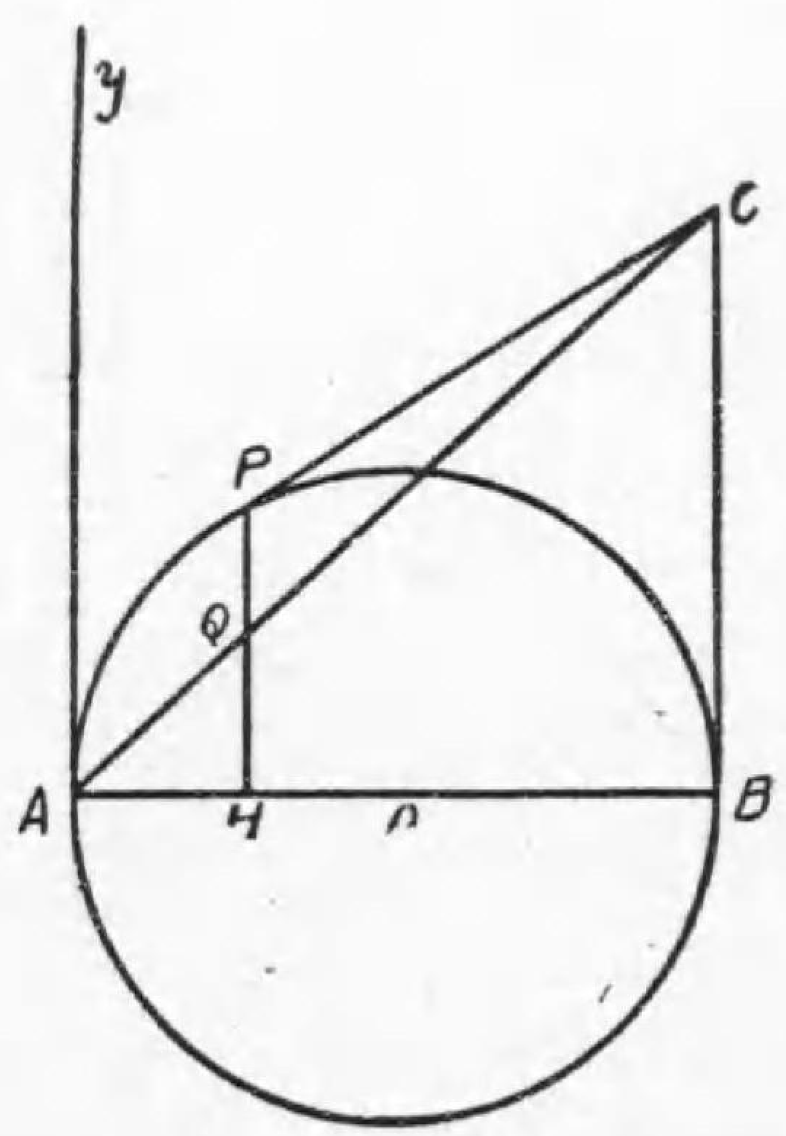
即チ　$\rho+(g+g')\cos\theta+(f+f')\sin\theta=0$

兩邊ニ ρ ヲ乘ジテ直交座標ニ直セバ

$$x^2+y^2+(g+g')x+(f+f')y=0$$

即チ原點ヲ過ル圓.

157.



B 點ヲ $(2r, 0)$ トスレバ圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2=2rx \qquad (1)$$

$\mathrm{P}(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線ハ

$$x_1x+y_1y=r(x+x') \qquad (2)$$

又 B 點ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$x=2r \qquad (3)$$

(2), (3) ノ交點 c ト原點トヲ結ブ直線ハ

$$x(x'-2r)=-2yy' \qquad (4)$$

AC, PH ノ交點ノ Q ノ縦座標ハ (4) ノ x ニ, x' ヲ代入シテ $x'(x'-2r)=-2yy'$

即チ　$2yy'=2rx'-x'^2=y'^2.\qquad \therefore\quad y=\dfrac{y'}{2}$

故ニ Q ハ PH ノ中點ナリ.

158. P ヲ極座標ノ極, $\mathrm{PO}=a$ ヲ原線, R ヲ圓ノ半徑トセバ圓ノ方程式ハ　$\rho^2-2a\rho\cos\theta+a^2-\mathrm{R}^2=0$　(1)

此圓周上ノ任意ノ點 Q ノ座標ヲ (ρ, θ) トセバ

$$\mathrm{PM}:\mathrm{MQ}=m:n.$$

從テ　$\mathrm{PM}:\mathrm{PQ}=m:m+n.\quad \therefore\quad \mathrm{PM}=\dfrac{m\mathrm{PQ}}{m+n}$

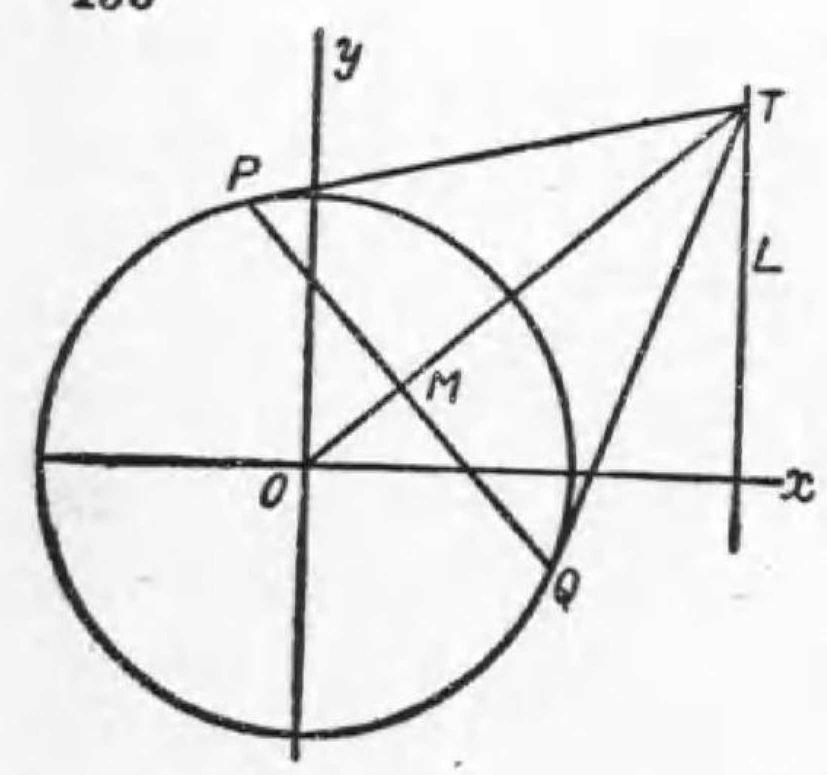
即チ　$\rho=\dfrac{m+n}{m}\mathrm{PM}$

之ヲ (1) ニ代入シテ PM ヲ ρ ニテ表ハセバ

$$\rho^2-2\left(\frac{ma}{m+n}\right)\rho\cos\theta+\left(\frac{ma}{m+n}\right)^2-\left(\frac{m\mathrm{R}}{m+n}\right)^2=0$$

即チ圓ナリ.

159



定直線 L ノ方程式ヲ $x=a$ トス. 其ノ上ノ一點 $\mathrm{T}(a_1, y)$ ヨリ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ引キタル切線ノ切點弦, 即チ T ノ極線 PQ ノ方程式ハ

$$ax+y_1y=r^2 \qquad (1)$$

又 OT ノ方程式ハ

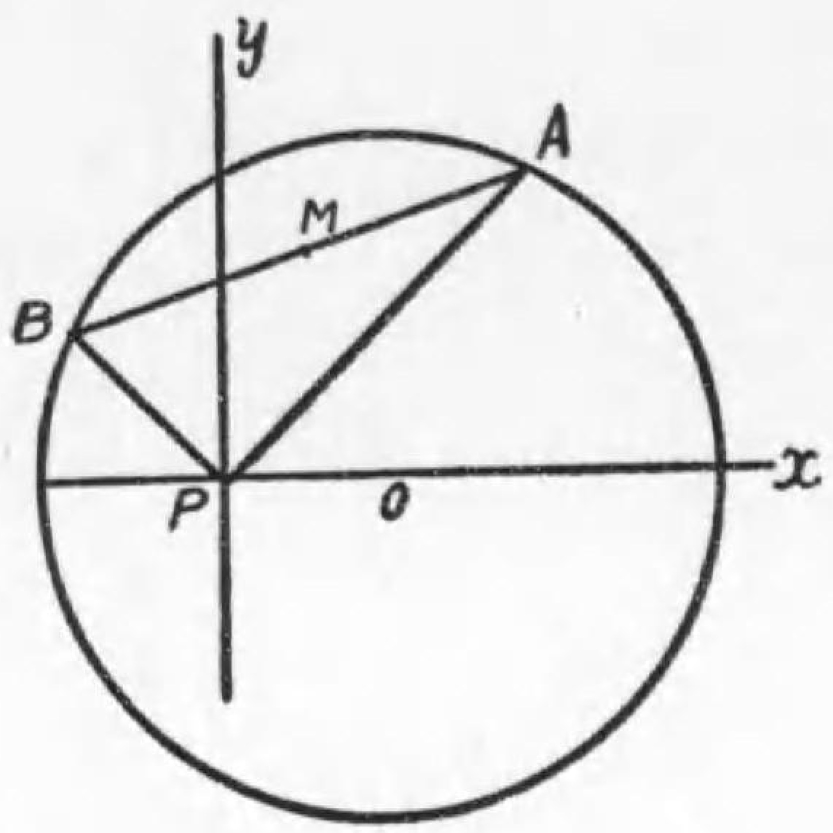
$$ay=y_1x \qquad (2)$$

OT ト PQ ノ交點ガ PQ ノ中點 M ナルヲ以テ, (1) 及ビ (2) ヨリ y_1 ヲ消去スレバ M ノ軌跡ノ方程式

$$a(x^2+y^2)-r^2x=0$$

ヲ得. 即チ圓ナリ.

160.



$PO=a$, 圓ノ半徑ヲ R トスレバ, 圓ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+y^2=R^2 \qquad (1)$$

A, B ノ座標ヲ (x_1, y_1) (x_2, y_2) トスレバ

$$(x_1-a)^2+y_1^2=R^2 \qquad (2)$$

$$(x_2-a)^2+y_2^2=R^2 \qquad (3)$$

PA, PB ノ方向係數ハ夫々 $\dfrac{y_1}{x_1}$, $\dfrac{y_2}{x_2}$ ニシテ且此等ハ垂直ナルヲ以テ $x_1x_2+y_1y_2=0$ (4)

AB ノ中點 M ノ座標ヲ (x, y) トスレバ

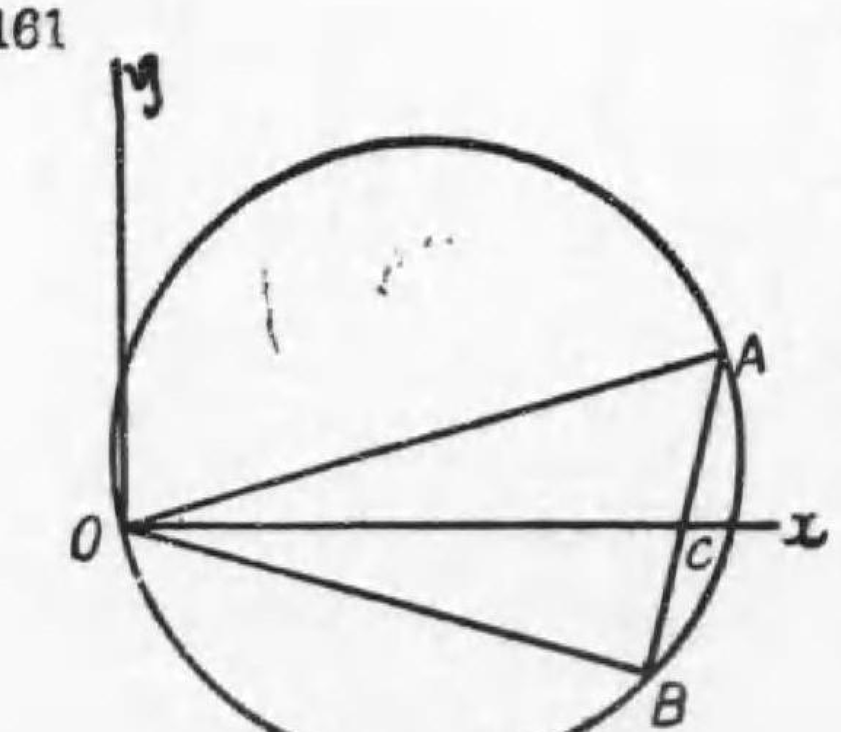
$$2x=x_1+x_2 \quad (5) \qquad 2y=y_1+y_2 \quad (6)$$

(2), (3), (4), (5), (6) ヨリ x_1, y_1, x_2, y_2 ヲ消去セバ求ムル軌跡ハ

$$x^2+y^2-ax+\frac{a^2-R^2}{2}=0.$$

ニシテ圓ナリ.

161



O ヲ原點 OC ヲ x 軸トスレバ圓ノ方程式ハ次ノ形ヲ有ス.

$$x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0 \qquad (1)$$

直線 OA ノ方程式ヲ

$$y=mx \qquad (2)$$

トスレバ OB ノ方程式ハ

$$y=-mx \qquad (3)$$

(1) ト (2) トヨリ A ノ座標ハ

$$\left(\frac{\alpha+\beta m}{1+m^2},\ \frac{m(\alpha+\beta m)}{1+m^2}\right)$$

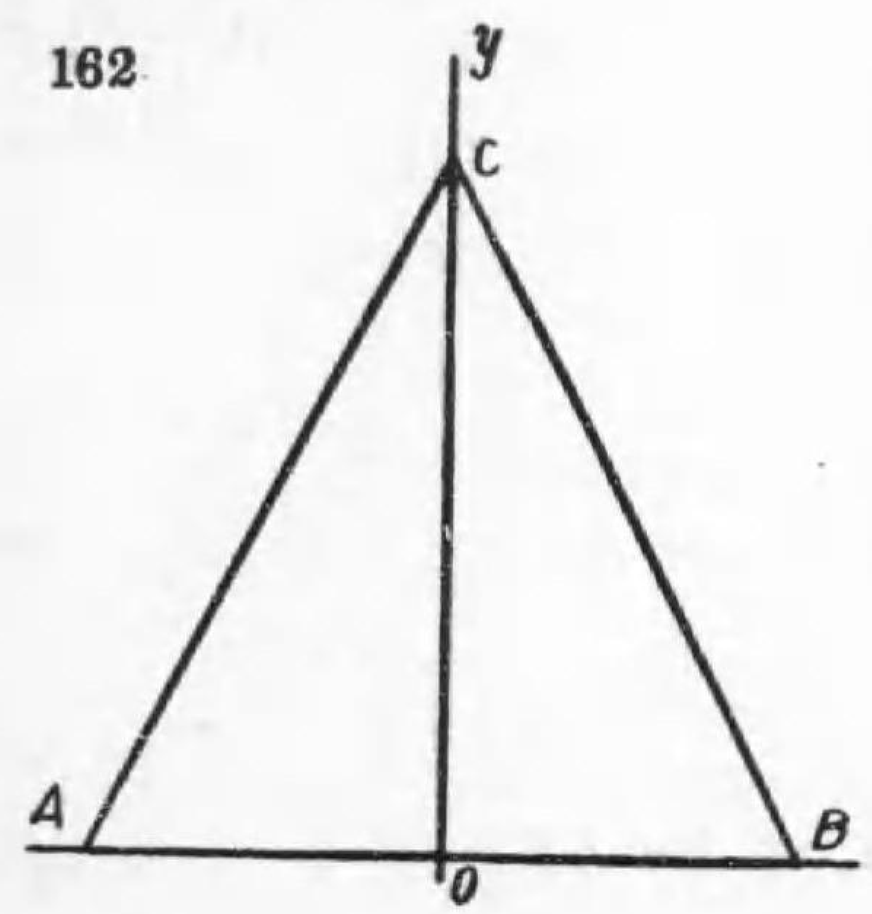
(1) ト (3) トヨリ B ノ座標ハ

$$\left(\frac{\alpha-\beta m}{1+m^2},\ \frac{m(\beta m-\alpha)}{1+m^2}\right)$$

故ニ直線 AB ノ方向係數ハ此等ノ式ヨリ $\dfrac{\alpha}{\beta}$

即チ一定ナリ.

162



$OB=OA=a$, $OC=b$ トスレバ BC, AC ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

又ハ $bx+ay=ab$ (1)

及ビ $bx-ay=ab$ (2)

題意ニヨリ

$$\frac{bx+ay-ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\cdot\frac{bx-ay-ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=y^2$$

$$\therefore\ b^2(x^2+y^2)+2a^2y=a^2b$$

即チ圓ナリ.

163. P ノ座標ヲ (x_1, y_1) トシ, P ヨリ (1), (2) ニ引キタル切線ノ切點ヲ夫々 T_1, T_2 トスレバ

$$\frac{PT_1^2}{PT_2^2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}$$

然ルニ $PT_1^2=x_1^2+y_1^2-r_1^2,\quad PT_2^2=x_1^2+y_1^2-r_2^2$

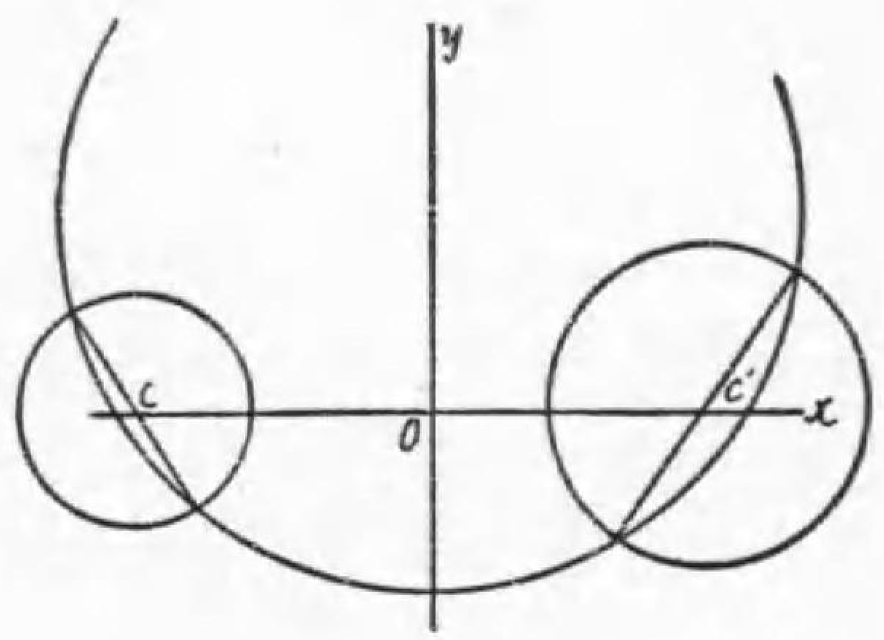
以上三式ヨリ $x_1^2+y_1^2=r_1^2+r_2^2$

(x_1, y_1) ハ流通座標ナルヲ以テ (x, y) ニテ置キ換フレバ

$$x^2+y^2=r_1^2+r_2^2$$

即チ同心圓ナリ.

164.



二定圓ノ中心線ヲ x 軸, 其根軸ヲ y 軸トス. c, c' 圓ノ方程式ヲ夫々

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

$$(x-a_1)^2+y^2=r_1^2$$

トスレバ根軸ノ方程式ハ

$$2(a_1-a)x+a^2-r^2-(a_1^2-r_1^2)=0.$$

然ルニ根軸ハ y 軸ナルヲ以テ $x=0$ 從テ $a^2-r^2=a_1^2-r_1^2$ 之ヲ b^2 トスレバ二圓ノ方程式ハ次ノ如クナル.

$$x^2+y^2-2ax+b^2=0 \qquad (1)$$

$$x^2+y^2-2a_1x+b^2=0 \qquad (2)$$

條件ニ適スル中心 P ヲ有スル圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+R=0 \qquad (3)$$

トセバ P ノ座標ハ (α, β) ナリ. 圓 C, P ノ根軸ハ

$$2(\alpha-a)x+2\beta y+b^2-R=0 \qquad (4)$$

(4) ハ C 點ヲ過ルヲ以テ $(a, 0)$ ヲ代入シテ

$$2a(\alpha-a)+b^2-R=0 \qquad (5)$$

同樣ニ $2a_1(\alpha-a_1)+b^2-R=0 \qquad (6)$

(5), (6) ヨリ R ヲ消去シテ $\alpha=a+a_1$ (α, β) ハ流通座標ナルヲ以テ $\alpha = x$ ヲ代入シテ

$$x=a+a_1$$

故ニ軌跡ハ y 軸ニ平行ナル直線ナリ.

165. 與ヘラレタル式ヲ一般二次方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ニ比較シテ $a=3,\ b=3,\ h=-1$ ナルヲ以テ a', b' ヲ與フル式ハ

$$z^2-(a+b)z+(ab-h^2)=0 \quad ヨリ$$

$z^2-6z+8=0$ 從テ $z=4$. 又ハ $z=2$ ニシテ $h<0$

故ニ求ムル標準形ハ $2x^2+y^2=1$

166. 中心ヲ求ムル方程式ハ $x_1-3y_1-1=0,\ -3x_1+y_1+3=0$ 之ヲ解キテ $x_1=1,\ y=0$. 原點ヲ中心ニ移ストキハ與ヘラレタル方程式ハ $x^2-6xy+y^2=4$ a', b' ヲ與フル方程式ハ

$$z^2-2z-8=0 \quad \therefore\ z=4,\ z=-2$$

$h<0$ ナルヲ以テ $a'=-2,\ b'=4$. 故ニ求ムル標準形ハ

$$2y^2-x^2=2$$

167. $ab-h^2=0$ ナルヲ以テ中心ヲ有セズ. 與ヘラレタル方程式ヲ書キ直シテ

$$(x-2y+k)^2+2(3-k)x-2(1-2k)y+11-k^2=0$$

トシ，コヽニ k ヲ $\frac{1}{2}\ \frac{3-k}{1-2k}=-1$, $k=1$ トスルトキハ

$$(x-2y+1)^2+4x+2y+10=0$$

コヽニ於テ直線 $x-2y+1=0$, $4x+2y+10=0$ ヲ夫々新シキ X 軸, Y 軸トスレバ與ヘラレタル直線ノ方程式ハ

$$(1^2+2^2)Y^2\pm\sqrt{(16+4)}X=0$$

トナル. 若シ X 軸ト Y 軸ニ對シテ舊原點ト同側ニ在ル部分ヲ正方向トスレバ此複號ハ正ヲトルベシ. 從テ標準形ハ

$$\sqrt{5}\,Y^2=-2X.$$

168. 中心ヲ求ムル方程式 $3x_1-3y_1+6=0$, $-3x_1-5y_1+10=0$. 之ヲ解キテ $y_1=2$, $x_1=0$. 原點ヲ中心ニ移セバ

$3x^2-6xy-5y^2+43=0$ a', b' ヲ與フル式ハ $z^2+2z-24=0$. $z=-6$, $z=4$, $h<0$ ナルヲ以テ $a'=-6$, $b'=4$ 故ニ標準形ハ

$$-6x^2+4y^2+43=0.$$

169. 中心ヲ求ムル方程式ハ

$$2x_1+2y_1-2=0,\quad 2x_1+5y_1+1=0$$

之ヲ解キテ $y_1=-1$, $x_1=2$ 原點ヲ中心ニ移セバ

$2x^2+4xy+5y^2=1$. a', b' ヲ與フル式ハ $z^2-7z+6=0$ 故ニ $z=6$, $z=1$, $h>0$ ナルヲ以テ $a'=6$, $b'=1$. 從テ求ムル標準形ハ $6x^2+y^2=1$

170 中心ヲ求ムル方程式ハ

$$5x_1+y_1-1=0,\quad x_1+5y_1-5=0$$

之ヲ解キテ $y_1=1$, $x_1=0$. 原點ヲ中心ニ移セバ $5x^2+2xy+5y^2=2$ a', b' ヲ與フル式ハ $z^2-10z+24=0$. 故ニ $z=4$, $z=6$, $h>0$ ナルヲ以テ $a'=6$, $b'=4$. 從テ求ムル標準形ハ $3x^2+2y^2=1$.

171. 中心ヲ求ムル方程式ハ $7x_1+2y_1+7=0$, $2x_1+4y_1+2=0$. 之ヲ解キテ $y_1=0$, $x_1=-1$ 原點ヲ中心ニ移セバ

$7x^2+4xy+4y^2=5$. a', b' ヲ與フル式ハ $z^2-11z+24=0$.

$z=8$, $z=3$, $h>0$ ナルヲ以テ $a'=8$, $b'=3$. 從テ求ムル標準形ハ $8x^2+3y^2=5$.

172. 中心ヲ求ムル方程式ハ $7x_1-4y_1-3=0$, $-4x_1+y_1+3=0$. 故ニ $x_1=1$, $y_1=1$. 原點ヲ中心ニ移セバ $7x^2-8xy+y^2=1$. a', b' ヲ與フル式ハ $z^2-8z-9=0$. $z=9$, $z=-1$, $h<0$ ナルヲ以テ $a'=-1$, $b=9$. 故ニ求ムル標準形ハ $-x^2+9y^2=1$.

173. 中心ヲ求ムル方程式 $x_1+3y_1+5=0$, $3x_1+y_1-1=0$. 之ヲ解キテ $x_1=1$, $y_1=-2$. 原點ヲ中心ニ移セバ

$x^2+6xy+y^2+8=0$. a', b' ヲ與フル方程式ハ $z^2-2z-8=0$ 之ヲ解キテ $z=-2$, $z=4$. $h>0$ ナルヲ以テ $a'=4$, $b'=-2$. 從テ求ムル標準形ハ $y^2-2x^2=4$.

174. 中心ヲ求ムル方程式ハ $3x_1-2y_1-4=0$, $-2x_1+6y_1-2=0$ $x_1=2$, $y_1=1$ 原點ヲ中心ニ移セバ $2x^2-4xy+6y^2=7$. a', b' ヲ與フル式ハ $z^2-9z+14=0$. $z=7$, $z=2$. $h<0$ ナルヲ以テ $a'=2$, $b,=7$. 故ニ求ムル標準形ハ $2x^2+7y^2=7$.

175. 原式ヲ書キ換ヘテ $2(y^2-4y+4)-3x+95=0$, 又ハ $2(y-1)^2-3(x-3)=0$. 原點ヲ (3, 1) ニ移セバ

$$Y^2=\frac{3}{2}X.$$

176 原式ヲ書キ換ヘテ

$$(3x+4y+k)^2-2(3k+17)x-2(4k-19)y-9-k^2=0.$$

k ヲ決定スル式 $\frac{3}{4}\cdot\frac{3k+17}{4k-19}=-1$. 之ヲ解キテ $k=1$.

従テ k ノ値ヲ代入スレバ

$$(3x+4y+1)^2-40x+30y-10=0$$

之ヲ書キ換ヘテ

$$25\frac{(3x+4y+1)^2}{9+10}-50\frac{40x+30y+10}{\sqrt{(40^2+30^2)}}=0$$

故ニ標準形トシテ $Y^2=2X$ ヲ得.

177. $H^2-AB=\frac{1}{a^2b^2}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}$ ニシテ判別式 $\Delta\neq0$ ナルヲ以テ拋物線ナリ.

178. $ab-h^2=-7-9=-15<0$ ニシテ, $\Delta=0$ ナルヲ以テ二ツノ實直線ナリ.

179 $ab-h^2=1-\frac{1}{4}>0$ ニシテ $a\Delta<0$ ナルヲ以テ實楕圓.

180 原式ヲ書キ換ヘテ $x^4-2a^2x^2+a^4+y^4-2a^2y^2=0$,

更ニ $(x^4+y^4+a^4+2x^2y^2-2a^2x^2-2a^2y^2)-2x^2y^2=0$,

$$(x^2+y^2-a^2)^2-2x^2y^2=0,$$

$$(x^2+y^2-a^2+\sqrt{2}xy)(x^2+y^2-a^2-\sqrt{2}xy)=0,$$

$\therefore\ x^2-\sqrt{2}xy+y^2=a^2$, 又ハ $x^2+\sqrt{2}xy+y^2=a^2$

a', b' ヲ與フル式ハ

$z^2-2z+\frac{1}{2}=0$, 又ハ $z^2-2z+\frac{1}{2}=0$,

$z=1\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,

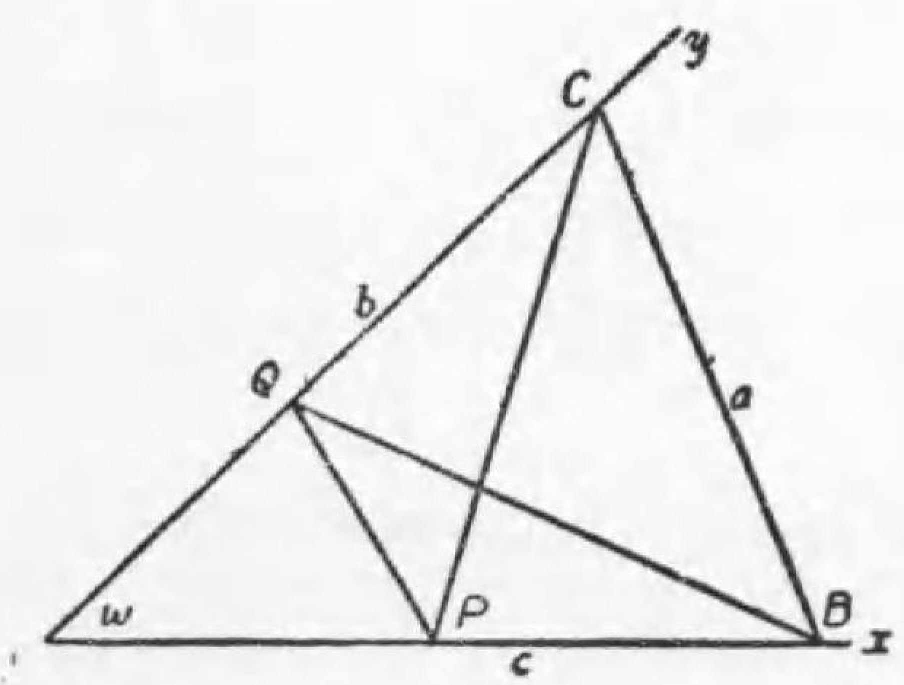
$h<0$　　$h>0$

$\therefore\ \left.\begin{aligned}a'&=1-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ b'&=1+\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}$　　$\therefore\ \left.\begin{aligned}a'&=1+\frac{1}{\sqrt{2}}\\ b'&=1-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}$

以上ヲ綜合スルトキ標準形トシテ

$$\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x^2+\left(1\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)y^2=a^2.$$

181



AB, AC ヲ夫々 x軸, y軸トシ $AP=k$, 角 $BAC=w$ トス. $AQ=AP\cos w$ ナルヲ以テ QB ノ方程式ハ

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{k\cos w}=1\quad(1)$$

CP ノ方程式

$$\frac{x}{k}+\frac{y}{b}=1 \qquad (2)$$

(2) ヨリ $\quad \dfrac{x}{k}=\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \quad \therefore \ k=\dfrac{bx}{b-y}$

之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$\frac{x}{c}+\frac{(b-y)y}{\cos w^{b}x}=1$$

$$\therefore \ b\cos wx^2-cy^2+cby-cb\cos wx=0$$

$AB-H^2<0$ ニシテ判別式 $\Delta \neq 0$ ナルヲ以テ双曲線ナリ.

182. 中心ヲ求ムル方程式ハ $x_1+3y_1+1=0,\ 3x_1-7y_1+1=0.$

故ニ中心ニ原點ヲ移セバ $x^2+6xy-7y^2-\dfrac{3}{4}+k=0.$

$a',\ b'$ ヲ求ムルタメニ $z^2+6z-16=0$ ヲ解キテ

$z=-8,\ z=2,\ h>0$ ナルヲ以テ $a'=2,\ b'=-8.$

故ニ $\quad 2x^2-8y^2-\dfrac{3}{4}+k=0$ 又ハ $x^2-4y^2-\dfrac{3}{8}+\dfrac{k}{2}=0$

此方程式ガ $\quad x^2-4y^2=1$ ナルタメニハ

$$1=\frac{3}{8}-\frac{k}{2} \qquad \therefore \ k=-\frac{5}{4}$$

183. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ト $a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'y+2f'y+c'=0$ トハ同一ノ二次曲線ヲ表スヲ以テ, 前者ガ二直線ナルトキハ後者モ同一ノ二直線ナラザルベカラズ. 故ニ

$$\Delta=0=\Delta'.$$

次ニ有心二次曲線ナルトキハ 其中心ニ原點ヲ移セバ兩者ハ同値トナラザルベカラズ, 即チ

$$ax^2+2hxy+by^2+\frac{\Delta}{ab-h^2}=0=a'x^2+2h'xy+b'y^2+\frac{\Delta}{a'b'-h^2}$$

$$\therefore \ \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{h}{h'}=\frac{\dfrac{\Delta}{ab-h^2}}{\dfrac{\Delta'}{a'b'-h^2}} \qquad \therefore \ \Delta=\Delta'.$$

又無心二次曲線ナルトキハ $Y^2=px$ ナル標準形ニ直セバ同一ノ形ヲ取ル. 而シテ此時ノ新座標 (X, Y) ハ

$$X=\pm\frac{2(ag-ka)x+(af-kh)y+(ac-k^2)}{2\sqrt{\{(ag-ka)^2+(af-kh)^2}}$$

$$=\frac{2(a'g'-k'a')x+(a'f'-k'h')y+(a'b'-k')}{2\sqrt{\{(a'g'-k'a')^2+(a'f-k'h)}}$$

$$Y=\pm\frac{ax+hy+k}{\sqrt{(a^2+k^2)}}=\frac{a'x+h'y+k'}{\sqrt{(a^2+k'^2)}}$$

新座標軸ノ舊座標軸ノ二組ニ對スル傾角ハ同一ナルヲ以テ

$$\frac{b}{c'}=\frac{a}{a'}=\frac{h}{h'}=\frac{k}{k'}=\frac{ag-ka}{a'g'-k'a'}=\frac{af-kh}{af-k'h}$$

$$=\frac{(ag-ka)+(af-kh)}{(a'g'-k'a')+(af'-k'h')} \qquad (1)$$

但シ $\quad k=\dfrac{ag+hf}{a+b} \quad (2) \qquad k'=\dfrac{a'g'+h'f}{a'+b'} \quad (3)$

$ab-h^2=0$ ナルコトニ注意スレバ (1), (2), (3) ヨリ

$$\Delta=\Delta'$$

故ニ題言ノ如シ.

本題ハ行列式ノ計算ヨリ直接ニ求ムルコトヲ得.

184. 二定圓ノ中心 c_1 及ビ c_2 ヲ結ブ直線ヲ x 軸, 其中點ヲ原點, 其間ノ距離ヲ $2a$ トシ, c_1 圓ノ半徑ヲ r_1, c_2 圓ノ半徑ヲ r_2 トス. c_1, c_2 圓ニ切スル圓ノ中心ノ座標ヲ $(x,\ y)$ トスレバ次

ノ關係アリ.

$$\sqrt{\{(x+a)^2+y^2\}}-\sqrt{\{(x-a)^2+y^2\}}=r_2-r_1=2k$$

二回平方シテ簡單ニスレバ

$$x^2(a^2-k^2)-k^2y^2=k^2(a^2-k^2)$$

從テ $a>k$ ナルトキハ双曲線. $a<k$ ナルトキハ楕圓ナリ. 而シテ其焦點ハ此二圓ノ中心ナルコト明ナリ.

135. 底邊 $2d$ ヲ x 軸, 其中點ヲ原點, 二邊ノ和又ハ差ヲ $2a$ トシ, 頂點ノ座標ヲ (x, y) トスレバ, 次ノ關係式アリ.

$$\sqrt{\{(x+d)^2+y^2\}}\pm\sqrt{\{(x-d)^2+y^2\}}=2a$$

二回平方シテ簡單ニスレバ

$$x^2(a^2-d^2)+a^2x^2=a^2(a^2-d^2)$$

$2a$ 若シ三角形ノ二邊ノ和ナルトキハ, 他ノ一邊 $2d$ ヨリ大ナリ. 故ニ $a^2-d^2>0$ ニシテ方程式ハ楕圓ヲ表ス. $2a$ 若シ二邊ノ差ナルトキハ $a^2-d^2<0$ ニシテ双曲線ヲ表ス.

183 定直線ヲ y 軸, 定點トノ距離 d ヲ x 軸トシ, 圓ノ中心ヲ (x, y) トスレバ次ノ關係アリ.

$$x^2=y^2+(d-x)^2$$

$$\therefore\ y^2=2d\left(x-\frac{d}{2}\right)$$

即チ拋物線ニシテ定直線ハ準線, 定點ハ其焦點ナリ.

187. $AB=k$, B ノ座標ヲ $(b, 0)$, A ノ座標ヲ $(0, a)$ トシ, AB ヲ定比 $m:n$ ニ分ツ點ノ座標ヲ (x, y) トスレバ

$$x=\frac{ma}{m+n},\qquad y=\frac{nb}{m+n}$$

又 $a^2+b^2=k^2$ 以上三式ヨリ a, b ヲ消去スレバ

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=\frac{k^2}{(m+n)^2}$$

トナリ, 楕圓ナリ.

188. 二定點ヲ $(a, 0)$, $(-a, 0)$ トシ, 圓ノ中心ヲ $(0, k)$ トスレバ, ソノ方程式ハ

$$y^2-2yk+x^2=a^2 \qquad (1)$$

ニシテ k ヲ變ズル數ト見做セバ數多ノ圓ヲ表ス. 次ニ $(0, k)$ ヲ過リ方向係數 m ナル切線ニ垂直ナル直線ハ切點ヲ過ル. 其方程式ハ

$$my=-x+mk \qquad (2)$$

(1) ト (2) トヨリ k ヲ消去スレバ

$$x^2-\frac{2}{m}xy-y^2=a^2$$

ヲ得. コレ求ムル軌跡ニシテ双曲線ナリ.

169. $P(x_1, y_1)$ ト $A(a, 0)$ トヲ結ブ直線ニ垂直ニシテ A ヲ過ル直線ハ

$$y=(x-a)\frac{x_1-a}{y_1} \qquad (1)$$

$A'(-a, 0)$ ヲ過リ $A'P$ ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

$$y=(x+a)\frac{x_1-a}{y_1}$$

又 (x_1, y_1) ハ楕圓上ニ在ルヲ以テ

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ヨリ (x_1, y_1) ヲ消去スレバ求ムル交點ノ軌跡

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

ヲ得. コレ双曲線ナリ.

190 圓ノ中心ヲ原點, 一定直線ニ平行ナル直線ヲ y 軸トス.

T ノ座標ヲ (x, y) PQ ト x 軸トノ交點ヲ H トスレバ題意ニヨリ

$$\mathrm{PT}^2+\mathrm{TQ}^2=(\mathrm{QH}+\mathrm{HT})^2+(\mathrm{QH}-\mathrm{HT})^2$$

$$=2\mathrm{QH}^2+2\mathrm{HT}^2=k^2 \qquad (1)$$

又 $\qquad \mathrm{QH}^2=r^2-x^2 \qquad (2) \qquad \mathrm{HT}^2=y^2 \qquad (3)$

(1), (2), (3) ヨリ QH, HT ヲ消去シテ

$$y^2-x^2=\frac{k^2-2r^2}{2}$$

ヲ得. 即チ軌跡ハ双曲線ナリ.

191. B, C, A ノ座標ヲ $(d, 0)$, $(-d, 0)$, (x, y) トセバ次ノ關係アリ.

$$\tan \mathrm{B}=\frac{y}{d-x} \quad (1) \qquad \tan c=\frac{y}{d+x} \quad (2)$$

$\tan \mathrm{B}=\tan 2\mathrm{C}$ 又ハ $\tan \mathrm{B}=\dfrac{2\tan \mathrm{C}}{1-\tan^2 \mathrm{C}}$ (1), (2), (3) ヨリ B, C ヲ消去セバ $\qquad 3x^2-y^2+2dx=d^2$

故ニ求ムル軌跡ハ双曲線ナリ.

192. P, Q, A, A′ ノ座標ヲ (x_1, y_1), $(x_1, -y_1)$, $(a, 0)$ $(-a, 0)$ トス. AP ノ方程式ハ

$$y=\frac{-y_1}{a-x_1}(x-a) \qquad (1)$$

A′Q ノ方程式ハ

$$y=\frac{-y_1}{a+x_1}(x+a) \qquad (2)$$

P ハ楕圓上ノ點ナルヲ以テ

$$\frac{{}_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ヨリ x_1, y_1 ヲ消去スレバ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ トナリ, 双曲線ナリ.

193. $y=mx+n$ ヲ曲線上ノ點 (x_1, y_1) ニ於ケル法線トスレバ此直線ハ $\qquad y-y_1=m(x-x_1) \qquad (1)$

ナル形ヲ有ス. 又 (x_1, y_1) ニ於ケル切線ハ

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (2)$$

(1) ト (2) トハ垂直ナルヲ以テ

$$m=\frac{a^2y_1}{b^2x_1} \qquad (3)$$

(3) ヲ書キ換ヘテ $\dfrac{bm}{a}=\dfrac{ay_1}{bx_1}$, 從テ

$$\frac{b^2m^2+a^2}{a^2}=\frac{a^2y_1{}^2+b^2x_1{}^2}{b^2x_1{}^2}=\frac{a^2}{x_1{}^2}$$

但シ $\qquad a^2y_1{}^2+b^2x_1{}^2=a^2b^2$

故ニ $\qquad x_1=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{(b^2m^2+a^2)}}, \quad y_1=\pm\dfrac{b^2m}{\sqrt{(b^2m^2+a^2)}}$

之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$y=mx\pm\frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{(a^2+b^2m^2)}}$$

故＝ $$n=\pm\frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{(a^2+b^2m^2)}}$$

双曲線＝於テハ上ノ b^2 ＝ $-b^2$ ヲ代入スレバ可ナリ.

194. 共軛直徑ヲ座標ノ軸＝トレバ楕圓ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1 \qquad (1)$$

楕圓上ノ一點＝於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{x_1x}{a'^2}+\frac{y_1y}{b'^2}=1 \qquad (2)$$

又 A ＝於ケル切線ヲ

$$x=a' \qquad (3)$$

トスレバ B ＝於ケル切線ハ

$$x=-a' \qquad (4)$$

AC ノ長サハ (2) ＝ (3) ヲ代入シテ得タル y ナルヲ以テ

$$AC=y=\frac{b'}{y'}\left(1-\frac{x_1}{a'}\right)$$

同様＝ $$BD=y=\frac{b'}{y'}\left(1+\frac{x_1}{a'}\right)$$

$$\therefore\ AC.BD=\left(1-\frac{x_1^2}{a'^2}\right)=b'^2$$ 即チ一定.

195 前題＝於テ C ノ座標ハ $\left(a',\ \frac{b'^2}{y'}\left(1-\frac{x_1}{a'}\right)\right)$

故＝ OC ノ方程式ハ

$$y=\frac{b_1^2}{a'y'}\left(1-\frac{x_1}{a_1}\right)x \qquad (1)$$

同様＝ OD ノ方程式ハ

$$y=\frac{-b'^2}{a'y_1}\left(1+\frac{x_1}{a_1}\right)x \qquad (2)$$

(1), (2) ノ方向係數ヲ $m,\ m_1$ トスレバ

$$mm_1=\frac{-b'^2}{a'^2}$$

是共軛ナル條件ナリ.

196. 中心ヲ極トスレバ楕圓ノ極方程式ハ

$$\rho^2=\frac{b^2}{1-e^2\cos\theta} \qquad (1)$$

故＝一ツノ半徑ヲ θ_1 ヲ以テ表ハセバ $OP^2=\rho_1^2=\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta_1}$ ト

ナリ. 之＝垂直ナル半徑 OQ ハ θ_1 ノ代＝ $\theta_2=\theta_1+\frac{\pi}{2}$ ヲ代入

シタル $$OQ^2=\rho_2^2=\frac{b^2}{1-e^2\sin^2\theta_1}$$

從テ $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 即チ一定ナリ.

197. 定點ヲ原點, 長軸＝平行ナル直線ヲ x 軸トセバ, 楕圓ノ方程式ハ次ノ形ヲ有ス.

$$b^2(x-x_1)^2+a^2(y-y_1)^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

但シ中心ハ $(-x_1,\ -y_1)$. 定點即チ原點ヲ過ル一般ノ方程式ハ

$$y=mx \qquad (2)$$

(1) ト (2) トノ交點ノ座標ハ (1) ＝ (2) ヲ代入シテ得ラル

$$x^2(b^2+a^2m^2)-(2x_1b^2+2y_1am)x+b^2x_1+a^2y_1^2-a^2b^2=0$$

此横座標ヲ $x',\ x''$ トスレバ

$$x'x''=\frac{2(x_1b^2+y_1am)}{b^2+a^2m^2}$$

故ニ弦ノ中點ノ座標ヲ (X, Y) トスレバ

$$\frac{x'+x''}{2}=\mathrm{X}=\frac{x_1b^2+y_1am}{b^2+a^2m^2} \qquad (3)$$

X, Y ハ $y=mx$ ヲ滿足スルガ故ニ　$\mathrm{Y}=m\mathrm{X}$ (4)

(3) ト (4) トヨリ m ヲ消去セバ

$$b^2\mathrm{X}^2+a^2\mathrm{Y}^2=b^2x_1\mathrm{X}+ay_1\mathrm{Y}$$

即チ (1) ト同ジ心差率ヲ有スル楕圓ナリ.

198. 心差角 $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ ナル點ノ座標ヲ (x_1, y_1) トセバ

$$x_1=a\cos\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2),\qquad y_1=b\sin\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$$

(x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ方程式ハ　$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

之ニ上ノ x_1, y_1 ヲ代入セバ切線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}\cos\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)+\frac{y}{b}\sin\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)=1 \qquad (1)$$

叉 P, Q ノ座標ハ $(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$, $(a\cos\theta_2, b\sin\theta_2)$ ナルヲ以テ PQ ノ方程式ノ方向係數ハ

$$\frac{b}{a}\ \frac{\sin\theta_1-\sin\theta_2}{\cos\theta_1-\cos\theta_2}$$

ニシテ (1) ノ方向係數ニ等シ. 故ニ PQ ハ切線ト平行ナリ.

199 楕圓ノ方程式ヲ

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

トシ內接圓ノ半徑ヲ r トスレバ其方程式ハ

$$(x-r)^2+y^2=r^2 \qquad (2)$$

(2) ガ (1) ニ切スルトキハ (1) ト (2) ヨリ得ラルヽ x ハ等根ナリ.

$$(b^2-a^2)x^2+2ra^2x-a^2b^2=0.\quad 等根ノ條件ヨリ$$

$$r^2a^4=-a^2b^2(b^2-a^2)\quad\therefore\quad r^2=\frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2}\qquad\therefore\quad r=eb$$

200 双曲線ノ切線ノ方程式ハ

$$y=mx\pm\sqrt{(a^2m^2-b^2)} \qquad (1)$$

中心ヨリ之ニ下ス垂線ノ方程式ハ

$$y=-\frac{1}{m}x \qquad (2)$$

求ムル軌跡ハ (1) ト (2) トヨリ m ヲ消去シテ

$$y^4+2x^2y^2+x^4=a^2x^2-b^2y^2$$

201 P 點ノ座標ヲ (x_1, y_1) トスレバ此點ニ於ケル法線ハ

$$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$$

ナリ. 之ニ $y=0$ ヲ代入スレバ長軸トノ交點ノ座標ヲ得. 即チ

$$x=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

故ニ P, Q ノ中點ノ座標ヲ (X, Y) トスレバ

$$\mathrm{X}=\frac{2a^2-b^2}{2a^2}x_1,\quad \mathrm{Y}=\frac{1}{2}y_1.\quad 從テ\ x_1=\frac{2a^2\mathrm{X}}{2a^2-b^2},\quad y_1=2\mathrm{Y}$$

(x_1, y_1) ハ $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上ノ點ナルヲ以テ代入シテ書キ換フレバ

$$\frac{\mathrm{X}^2}{\frac{(2a^2-b^2)^2}{4a^2}}+\frac{\mathrm{Y}^2}{\frac{b^2}{4}}=1$$

コレ楕圓ノ方程式ニシテ其心差率ヲ e_1 トスレバ

$$e_1^2=\frac{\frac{1}{4a^2}(2a^2-b^2)^2-\frac{b^2}{4}}{\frac{1}{4a^2}(2a^2-b^2)^2}=1-\frac{a^2b^2}{(2a^2-b^2)^2}$$

$$=1-\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^2}\right\}$$

$$\therefore\quad (1-e_1^2)(1+e^2)=\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-e^2$$

$$\therefore\quad 1-e^2=(1+e^2)(1-e_1^2)$$

202. $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ ニ中心ヨリ下シタル垂線ノ長サハ

$$l_1=\frac{1}{\left\{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$P(x_1, y_1)$ ニ於ケル法線 $\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$ ガ x 軸, y 軸ト交ル點ノ座標ハ $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1,\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{-(a^2-b^2)}{b^2}y_1\right)$

ニシテ此二點間ノ距離ハ

$$l_2=(a^2-b^2)\left\{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}\right\}^{\frac{1}{2}}\quad \therefore\ l_1l_2=a^2-b^2\ 一定$$

203 楕圓上ノ點ヲ (x_1, y_1) トスレバ

$$a^2y_1^2+b^2x_1^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

短軸ヲ直徑トスル圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2=b^2 \qquad (2)$$

(x_1, y_1) ヨリ (2) ニ引キタル切線ノ切點弦ハ (x_1, y_1) ノ極線ナルヲ以テ $x_1x+y_1y=b^2$ (3), (3) ニ於テ $x=0$ トセバ

$OQ=\frac{b^2}{y_1}$. (3) ニ於テ $y=0$ トセバ $OP=\frac{b^2}{x_1}$

$$\therefore\quad \frac{b^2}{OP^2}+\frac{a^2}{OQ^2}=\frac{b^2x_1^2+a^2y_1^2}{b^4}=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\therefore\quad \frac{b^2}{OP^2}+\frac{a^2}{OQ^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

204 $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$ 上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線

$$\frac{x_1x}{a_1^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \quad (1) \quad ガ \quad \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=0 \qquad (2)$$

ト交ル點ニ於ケル切線ノ交點ノ座標ヲ (X, Y) トスレバ (X, Y) ノ (2) ニ關スル極線ハ

$$\frac{xX}{a_2^2}+\frac{yY}{b_2^2}=1 \qquad (3)$$

ニシテ (3) ト (1) トハ同一ノ方程式ナラザルベカラズ. 故ニ (1) ト (3) トヲ比較シテ

$x_1=\frac{a_1^2X}{a_2^2}$, $y_1=\frac{b_1^2Y}{b_2^2}$. 之ヲ $b_1^2x_1^2+a_1^2y_1^2=a_1^2b_1^2$ ニ代入スレバ求ムル軌跡ハ

$$\frac{a_1^4b_1^2X^2}{a_2^4}+\frac{a_1^2b_1^4Y^2}{b_2^4}=a_1^2b_1^2$$

$$\therefore\quad \frac{a_1^2X^2}{a_2^4}+\frac{b_1^2Y^2}{b_2^4}=1$$

205 楕圓ノ方程式ヲ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ トシ P ノ座標ヲ (x_1, y_1),

中心ヲ C トセバ $\mathrm{CT}=\dfrac{a^2}{x_1}$ ハ (x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ方程式ニ $y=0$ ヲ代入シテ得ラル．今 P ノ縦線ヲ PH トスレバ

$$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{TN}}=\frac{\mathrm{A'H}}{\mathrm{A'T}}=\frac{a+x_1}{a+\dfrac{a^2}{x_1}}=\frac{x_1}{a}$$

又
$$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{TM}}=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AT}}=\frac{c-x_1}{\dfrac{a^2}{x_1}-a}=\frac{x_1}{a}$$

$$\therefore\quad \mathrm{MT}=\mathrm{TN}$$

206. $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ ニ $y=mx+n$ ヲ代入セバ

$$x^2(a^2m^2+b^2)+2mna^2x+a^2(n^2-b^2)=0$$

此二根ヲ x_1, x_2 トセバ

$$x_1+x_2=\frac{-2mna^2}{a^2m^2+b^2},\quad x_1x_2=\frac{a^2(n^2-b^2)}{a^2m^2+b^2}$$

$$\therefore\quad (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{4a^2b^2(a^2m^2+b^2-n^2)}{(a^2m^2+b^2)^2}$$

求ムル長サ $\mathrm{PQ}=(x_1-x_2)\sec\theta$ ニシテ $\tan\theta=m$ ナルコトヨリ

$$\mathrm{PQ}=\frac{2ab\{(1+m^2)(a^2m^2+b^2-a^2)\}^{\frac{1}{2}}}{a^2m^2+b^2}$$

207. $\mathrm{A}(a, 0)$ ニ於ケル切線ハ $x=a$．$y=mx$ ト共軛ナル直徑ハ $y=-\dfrac{b^2}{ma^2}x$．此二方程式ニ $x=a$ ヲ代入スレバ $\mathrm{AC}=ma$, $\mathrm{AD}=\dfrac{-b^2}{ma}$　$\therefore$ $4\mathrm{AC}.\mathrm{AD}=-4b^2$ 絶對値ヲトレバ短軸 $2b$ ノ平方．

208. 楕圓ニ於テハ通徑ノ一端ノ座標ハ $\left(ea, \dfrac{b^2}{a}\right)$

此點ニ於ケル切線ノ方程式ハ　$ex+y=a$

今長軸一定ナルトキハ a ハ一定ナルモ e ハ變ル．故ニ $y-a+ex=0$ トセバ $x=0$, $y=a$ ナル二直線ノ交點卽チ y 軸上原點ヨリ a ナル點ヲ常ニ通ル．

双曲線ニツキテモ同樣ニ證明シ得．

209. P ノ心差角ヲ ϕ トスレバ Q ノ心差角ハ $\phi+90^\circ$ 從テ P, Q ノ座標ハ $\mathrm{P}(a\cos\phi, b\sin\phi)$, $\mathrm{Q}(-a\sin\phi, b\cos\phi)$
故ニ PQ ノ中點ノ座標ヲ (x, y) トセバ

$$2x=a(\cos\phi-\sin\phi),\quad 2y=b(\cos\phi+\sin\phi)$$

此兩式ヨリ ϕ ヲ消去スレバ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$$

210 P, Q, Q′ ノ心差角ヲ ϕ, ϕ_1, ϕ_2 トスレバ

PQ ノ方程式ハ　$\dfrac{x}{a}\cos\dfrac{1}{2}(\phi+\phi_1)+\dfrac{y}{b}\sin\dfrac{1}{2}(\phi+\phi_1)=1$

PQ′ ノ方程式ハ　$\dfrac{x}{a}\cos\dfrac{1}{2}(\phi+\phi_2)+\dfrac{y}{b}\sin\dfrac{1}{2}(\phi+\phi_2)=1$

PQ, PQ′ ハ x 軸ト等角ヲナスヲ以テ

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\phi+\phi_1)}{\sin\frac{1}{2}(\phi+\phi_1)}+\frac{\cos\frac{1}{2}(\phi+\phi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\phi+\phi_2)}=0$$

此式ヲ簡單ニシテ　$\phi=\dfrac{-(\phi_1+\phi_2)}{2}$　(1)

又 QQ′ ノ方程式ハ $\dfrac{x}{a}\cos\dfrac{1}{2}(\phi_1+\phi_2)+\dfrac{y}{b}\sin(\phi_1+\phi_2)=1$　(2)

P ノ x 軸ニ關スル對稱點 $P'(-a\cos\phi,\ b\sin\phi)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ $\frac{-x}{a}\cos\phi+\frac{y}{b}\sin\phi=1$ (3)

(2) ト (3) トハ (1) ナル條件ニヨリテ平行ナリ.

211. 任意ノ切線ヲ $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ トシ焦點 $(ea,\ 0)$ ヨリ之ニ下ス垂線ノ方程式ハ $y=(x-ea)\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ (1)

中心ト切點トヲ結ブ直線ノ方程式ハ $y=\frac{y_1}{x_1}x$ (2)

(1), (2) ヨリ x_1, y_1 ヲ消去セバ $x=\frac{a}{e}$

故ニ楕圓ノ準線ナリ.

212. 一點 $(x_1,\ y_1)$ ヨリ曲線 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ (1)

ニ引キタル二切線ノ切點ヲ結ブ直線ハ $(x_1,\ y_1)$ ノ極ナルヲ以テ

$$\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (2)$$

(1) ト (2) トノ交點ト原點トヲ結ブ二直線ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}\right)^2$$

問題 134 參照

213. 前題ニ於ケル二次ノ同次式ガ，二垂直線ナルタメニハ x^2 ト y^2 トノ係數ノ和ガ零ナルベキコトヨリ

$$\frac{1-x_1^2}{a^2}+\frac{1-y_1^2}{b^2}=0$$

$(x_1,\ y_1)$ ヲ流通座標ト見做セバ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

即チ楕圓ナリ.

214. 一點 $(x_1,\ y_1)$ ノ楕圓ニ關スル極線ハ $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

即チ $y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2}{y_1}$ 之ガ法線ナルタメニハ

$$\frac{b^4}{y_1^2}=\frac{\frac{b^4x_1^2}{a^4y_1^2}(a^2+b^2)^2}{a^2+\frac{b^4x_1^2}{a^4y_1^2}b^2}$$

$$\therefore\ a^6y_1^2+b^6x_1^2=x_1^2y_1^2(a^2+b^2)^2$$

今 x_1, y_1 ヲ流通座標ニ置キ換フレバ

$$\frac{a^6}{x^2}+\frac{b^6}{y^2}=(a^2+b^2)^2$$

215. 共軛ナル二直徑ヲ a', b' トスレバ

$ab=a'b'\sin 60^\circ=a'b'\frac{\sqrt{3}}{2}$ 此トキ $a'=b'=p$ ナルヲ以テ

$$ab=p^2\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

又 $a^2+b^2=a'^2+b'^2=2p^2$ (2)

(1) ト (2) トヨリ $a^2-b^2=p^2$, $a^2=\frac{3}{2}p^2$

$$\therefore\ e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{2}{3} \qquad \therefore\ e=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

216. 定直線ヲ $y=mx+h$ トシ其上ノ任意ノ一點ヲ $(x_1,\ y_1)$ トスレバ $y_1=mx_1+h$ (1)

(x_1, y_1) ノ楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニ關スル極線ガ RR_1 ナルヲ

以テ $$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (2)$$

同様ニ QQ_1 ノ方程式ハ

$$\frac{x_1x}{a_1^2}+\frac{y_1y}{b_2^2}=1 \qquad (3)$$

求ムル軌跡ハ (1), (2), (3) ヨリ x_1, y_1 ヲ消去セバ可ナリ, 即チ

$$\begin{vmatrix} m, & -1, & h \\ \dfrac{x}{a^2}, & -\dfrac{y}{b^2}, & -1 \\ \dfrac{x}{a_1^2}, & \dfrac{y}{b_1^2}, & -1 \end{vmatrix}=0$$

217. $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線 $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ ニ於テ $y=0$ トセバ交軸ト交ル點 S ノ x 座標トシテ $x=\dfrac{a^2}{x_1}=OS$, (O 中心) ヲ得. OP ノ方程式ハ $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ ニシテ, $A(a, 0)$ ニ於ケル切線 $x=a$ トノ交點 T ノ縦座標トシテ $y=\dfrac{y_1}{x_1}a$ ヲ得.

$$\tan TSA=\frac{AT}{SA}=\frac{\dfrac{y_1}{x_1}a}{a-\dfrac{a^2}{x_1}}=\frac{y_1}{x_1-a}=\tan PAP'$$

(但シ P ハ x 軸上 P ノ射影トス)

故ニ ST ト AP トハ平行ナリ.

218 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ ニシ

テ OQ ノ方程式ヲ $y=\dfrac{y_2}{x_2}x$ トセバ $Q(x_2, y_2)$ ナリ. 此二直線ノ交點ヲ (X', Y') トセバ

$$X'=\frac{a^2b^2x_2}{b^2x_1x_2-a^2y_1y_2}, \quad Y'=\frac{a^2b^2y_2}{b^2x_1x_2-a^2y_1y_2}$$

又 Q ニ於ケル切線ノ方程式ト OP トノ交點ヲ (X'', Y'') トセバ

$$X''=\frac{a^2b^2x_1}{b^2x_1x_2-a^2y_1y_2}, \quad Y''=\frac{a^2b^2y_1}{b^2x_1x_2-a^2y_1y_2}$$

而シテ面積 $OPP_1=\dfrac{1}{2}(x_1Y'-X'y_1)$, $OQQ=\dfrac{1}{2}(X''y_2-Y''x_2)$

$$\triangle OPP_1=\triangle OQQ_1$$

219. P 點ヲ (x_1, y_1) トセバ此點ニ於ケル切線ハ $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ 之ニ $x=a$ ヲ代入セバ

$$S \text{ ノ縦線}=y=\frac{b^2(x_1-a)}{ay_1}$$

又 $x=-a$ ヲ代入セバ

$$T \text{ ノ縦線}=y=\frac{-b^2(x_1+a)}{ay_1}$$

ST ハ y 軸ニテ二等分サルヽヲ以テ其二等分點 R ノ座標ハ $\left(0, \dfrac{-b^2}{y_1}\right)$, SR ノ平方ハ $a^2+\dfrac{b^4x_1^2}{a^2y_1^2}$ 故ニ ST ヲ直徑トスル圓ノ方程式ハ

$$\left(y^2+\frac{b^2}{y_1}\right)^2+x^2=a^2+\frac{b^4x_1^2}{a^2y_1^2}$$

此方程式ニ於テ $y=0$ トスレバ $x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$

即チ焦點ヲ通ル.

220. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ヲ ϕ_1 ノ方程式トスレバ, ϕ_2 ノ方程式ハ $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ナリ. ϕ_1 上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ ニ應ズル ϕ_2 上ノ點 Q ノ座標ハ $\left(\dfrac{a}{b}y_1,\ \dfrac{b}{a}x_1\right)$. 故ニ P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (1)$$

Q ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$-y_1x+x_1y=ab \qquad (2)$$

(1) ト (2) トヨリ (x_1, y_1) ヲ消去セバ $\dfrac{y}{x}=\dfrac{b}{a}$. 即チ交點ノ軌跡ハ漸近線ナリ.

221. 漸近線ヲ x 軸トセバ双曲線ノ方程式ハ $xy=\dfrac{a^2+b^2}{4}$ ニシテ其上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ方程式ハ $y_1x+x_1y=\dfrac{a^2+b^2}{2}$. 此方程式ニ於テ $x=0$ トスレバ $y=\dfrac{a^2+b^2}{2x_1}$ $y=0$ トスレバ $x=\dfrac{a^2+b^2}{2y_1}$. 漸近線即チ兩軸ノナス角ヲ w トスレバ

$$S=\frac{1}{2}xy\sin w=\frac{1}{2}\ \frac{(a^2+b^2)^2}{4x_1y_1}\sin w=\frac{a^2+b^2}{2}\sin w$$

即チ一定. 但シ $x_1y_1=\dfrac{a^2+b^2}{4}$

222 漸近線ヲ兩軸トスルトキノ双曲線ノ方程式ハ $xy=k$ ニシテ其上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}=2 \qquad (1)$$

同様ニ $Q(x_2, y_2)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{x_2}+\frac{y}{y_2}=2 \qquad (2)$$

(1) ニ於テ $y=0$ トスレバ P_1 點ノ座標ハ $y=0,\ x=2x_1$. 即チ $P_1(2x_1, 0)$. 同様ニシテ P_2 ノ座標ハ $P_2(0, 2y_1)$

(2) ニ於テ $y=0$ トスレバ Q_1 點ノ座標ハ $Q_1(2x_2, 0)$. 又 Q_2 ノ座標ハ $Q_2(0, 2y_2)$.

從テ P_1Q_2 ノ方向係數 m_1 ハ $\qquad m_1=\dfrac{-y_2}{x_1}$

又 P_2Q_1 ノ方向係數 m_2 ハ $\qquad m_2=-\dfrac{y_1}{x_2}$

然ルニ P, Q ハ曲線上ノ點ナルヲ以テ $x_1y_1=x_2y_2=k$

故ニ $\dfrac{y_1}{x_2}=\dfrac{y_2}{x_1}$. 即チ $m_1=m_2$ ニシテ P_1Q_2 ト P_2Q_1 トハ平行ナリ.

223. C ヲ原點, 二定直線ヲ座標軸, 任意ノ圓ノ中心ノ座標ヲ (X, Y), 其半徑ヲ r トスレバ圓ノ方程式ハ

$$(x-X)^2+(y-Y)^2+2(x-X)(y-Y)\cos w=r^2 \qquad (1)$$

(1) ニ於テ $y=0$ トシ整頓スレバ

$$x^2-2x(X+Y\cos w)+X^2+2XY\cos w-r^2=0$$

此二根ヲ x_1, x_2 トスレバ

$$P_1P_2^2=(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4(X+Y\cos w)^2$$
$$-4(X^2+2XY\cos w-r^2)=m^2 \quad \text{一定}$$
$$\therefore\ 4Y^2\cos w^2+4r^2=m^2 \qquad (2)$$

同様ニ (1) ニ於テ $x=0$ トスルコトヨリ

$$4X^2\cos w^2+4r^2=n^2 \qquad (3)$$

(2) ト (3) トヨリ r^2 ヲ消去スレバ

$$X^2-Y^2=\frac{n^2-m^2}{4\cos w}$$

故ニ求ムル軌跡ハ双曲線ナリ.

224. 共軛直徑ヲ軸トセバ楕圓ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \tag{1}$$

而シテ此共軛直徑ヲ漸近線トスル双曲線ノ方程式ハ

$$xy=k \tag{2}$$

ニシテ其共軛双曲線ノ方程式ハ

$$xy=-k \tag{3}$$

今 (1) ト (2) トガ切スルトキハ唯一點 (x_1, y_1) ノミヲ共有ス. 即チ $x_1y_1=k$.

然ルニ今 $(x_1, -y_1)$ ナル點ヲ考フルニ此點ハ (1) 及ビ (3) ヲ滿足スル唯一點ナリ. 即チ切點ナリ. 故ニ題言ノ如シ.

225 等邊双曲線 $x^2-y^2=a^2$ ノ上ノ點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ $x_1x-y_1y=a^2$ (1)

故ニ中心ヨリ之ニ下ス垂線 OT ノ長サハ

$$OT=\frac{a^2}{\sqrt{(x_1^2+y_1^2)}}$$

又 OP ノ方程式ハ (1) ニ垂直ナルコトヨリ $y=-\frac{y_1}{x_1}x$ (2).

(2) ガ双曲線ニ交ル點ノ座標ハ $(\pm x_1, \mp y_1)$. 故ニ OS ハ

$$OS=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)}$$

$$\therefore\ OS.OT=a^2 \qquad 一定.$$

226 法線ノ方程式ヲ $\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$ トシ, 之ガ交軸ト交ル x 座標, 即チ OP ハ $y=0$ ヲ代入シテ

$$OP=\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1=x \tag{1}$$

共軛軸ト交ル y 座標, 即チ OQ ハ $x=0$ ヲ代入シテ

$$OQ=\frac{-(a^2-b^2)}{b^2}y_1=y \tag{2}$$

(1) 及ビ (2) ハ P 及ビ Q ニ於テ夫々其軸ニ垂直ナル直線ノ方程式ナリ. 故ニ (1) 及ビ (2) ト $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$ トヨリ x_1, y_1 ヲ消去スレバ求ムル軌跡ヲ得.

$$\frac{a^2x^2}{(a^2-b^2)^2}-\frac{b^2y^2}{(a^2-b^2)^2}=1.$$

227. 軸上ノ一定點ヲ $(x_1, 0)$ トシ之ヲ過ル一般直線ヲ

$$y=m(x-x_1) \tag{1}$$

トス. (1) ヲ書キ換ヘテ

$$\frac{x}{a^2}\,\frac{a^2}{x_1}-\frac{y}{b^2}\,\frac{b^2}{mx_1}=1$$

トセバ (1) ノ極ハ $\left(\frac{a^2}{x_1}, \frac{-b^2}{mx_1}\right)$ ナリ. (1) ニ共軛ナル直線ハ其極ヲ過ルコトト, 且垂直條件トヨリ

$$y+\frac{b^2}{mx_1}=\left(x-\frac{a^2}{x_1}\right)\frac{-1}{m} \tag{2}$$

(1) ト (2) トヨリ m ヲ消去セバ所要ノ軌跡ヲ得.

$$x_1(x^2+y^2)-(a^2-b^2+x_1^2)x+(a^2-b^2)x_1=0$$

即チ圓ナリ.

223. $x^2-y^2=k^2$ 上ノ一點 $P(x, y_1)$ ＝於ケル法線ハ

$\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}=2$ ナリ．今 $y=0$ トセバ k ノ座標ハ $k(2x, 0)$.

$x=0$ トセバ L ノ座標ハ $(0, 2y_1)$. KL ノ中點ノ座標ハ (x_1, y_1)

＝シテ P 其モノナリ．故＝軌跡ハ元ノ双曲線ナリ．

229 等邊双曲線 $xy=K$ 上ノ $P(x_1, y_1)$ ＝於ケル法線ハ

$x_1x-y_1y=x_1^2-y_1^2$. 此法線ガ更＝曲線ト交ル點ノ座標ハ以上二式

ヲ解キテ $x=\frac{-y_1^2}{x_1}$, $y=-\frac{-x_1^2}{y_1}$. $(K=x'y')$.

從テ Q ノ座標ハ $\left(\frac{-y_1^2}{x_1}, \frac{-x_1^2}{y_1}\right)$

(Q ハ第三象限＝アルヲ要スルヲ以テ) 故＝

$$3OP^2+OQ^2=3(x_1^2+y_1^2)+\left(\frac{y_1^4}{x_1^2}+\frac{x_1^4}{y_1^2}\right)$$

又 $$PQ^2=\left(x_1+\frac{y_1^2}{x_1}\right)^2+\left(y_1+\frac{x_1^2}{y_1}\right)^2=3(x_1^2+y_1^2)$$
$$+\left(\frac{y_1^4}{x_1^2}+\frac{x_1^4}{y_1^2}\right)$$

故＝ $$3OP^2+OQ^2=PQ^2$$

230. 等邊双曲線上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ ヲ過ル直線

$$y-y_1=m_1(x-x_1) \qquad (1)$$

ガ曲線 $xy=k$ (2) ト交ル點 Q ノ座標ハ (1) ト (2) トヨリ

$(x_1y_1=k$ ＝注意シテ)

$$Q\left(\frac{-y_1}{m_1}, -m_1x_1\right)$$

ナリ．(Q ハ第三象限＝在リ)

P ヲ過ル他ノ直線ヲ $y-y_1=m_2(x-x_1)$ トセバ R ノ座標ハ前

ト同様＝ $R\left(\frac{-y_1}{m_2}, -m_2x_1\right)$

此二直線ガ垂直ナルコトヨリ

$$m_1m_2=-1$$

QR ノ方向係數ハ

$$\tan\theta=\frac{x_1(m_2-m_1)}{y_1(m_1-m_2)}m_1m_2=\frac{x_1}{y_1}$$

然ル＝ $P(x_1, y_1)$ ＝於ケル法線ハ $x_1x-y_1y=x_1^2-y_1^2$ ＝シテ方向

係數ハ矢張 $\frac{x_1}{y_1}$ ナリ．故＝ QR ト平行ナリ．

231. P ノ座標ヲ (x_1, y_1) トスレバ之ト焦點 $F(ea, 0)$ トノ

中點ノ座標ハ $\left(\frac{ea+x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$. 又半徑 PF ノ $\frac{1}{2}$ ハ $\frac{a-ex_1}{2}$

故＝圓ノ方程式ハ

$$\left(x-\frac{ea+x_1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(a-ex_1)^2$$

今 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ ＝注意シテ變化スレバ

$$x^2+y^2-(ea+x_1)x-y_1y+eax_1=0$$

之ト補助圓 $x^2+y^2=a^2$ トガ切スルタメ＝ハ二圓ノ根軸

$$(ea+x_1)x+y_1y=a(a+ex_1)$$

ガ何レカ＝切スルコトヲ證明スレバ可ナリ．

圓 $x^2+y^2=a^2$ ノ中心ヨリ根軸＝至ル題離ハ

$$\frac{a(a+ex_1)}{\sqrt{\{(ea+x_1)^2+y_1^2}}=a$$

故＝切ス．注意 $y_1=a^2-{}^2e^2a^2-x_1^2+e^2x_1^2$

232 楕圓ノ方程式ヲ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ トスレバ x 軸ハ準線ト垂直ナル故ニ問題ノ垂心ハ x 軸上ニ在ルコト明ナリ.

共軛徑ノ方程式ヲ夫々

$$y=mx \quad (1), \qquad y=-\frac{b^2}{mx^2}x \quad (2)$$

トセバ準線ト (1) ノ交點ノ座標ハ $\left(\frac{a}{e},\ m\frac{a}{e}\right)$

此點ヨリ (2) ニ下ス垂線ノ方程式ハ

$$y-m\frac{a}{e}=\left(x-\frac{a}{e}\right)\frac{a^2m}{b^2}$$

此方程式ニ $y=0$ トスレバ垂心ノ座標ハ $(ea,\ 0)$ 一定.

233 $P(x_1,\ y_1)$ ヲ過ル垂直ナル二直線ヲ

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad (1), \qquad y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1) \quad (2)$$

トス. (1) ト (2) トハ共軛ナルヲ以テ (1) ノ極ハ (2) ヲ滿足ス.

然ルニ (1) ノ極ハ $\left(\frac{b^2}{y_1-mx_1},\ -\frac{ma^2}{y_1-mx_1}\right)$. 此ヲ (2) ニ代入スレバ

$$mb^2-m(y_1^2-mx_1y_1)=ma^2+x_1y_1-mx_1^2$$

此式ハ題意ニヨリ m ノ値ノ如何ニ拘ハラズ成立セザルベカラズ.

而シテ此ガタメニハ

$$x_1y_1=0 \quad 又ビ \quad m(b^2-y_1^2+mx_1y_1-a^2+x_1^2)=0$$

$$又ハ \quad b^2-y_1^2+mx_1y_1-a^2+x_1^2=0.$$

今 $y_1=0$ トセバ $x_1=\pm\sqrt{a^2-b^2}$, $x_1=0$ トセハ $y_1=\pm\sqrt{b^2-a^2}$.

故ニ $a>b$ ナルトキハ P 點ハ x 軸上ノ焦點ニシテ.

$b>a$ ナルトキハ P 點ハ y 軸上ノ焦點ナリ.

234. 左焦點 F ヲ極トセル楕圓ノ方程式ハ

$$\rho=\frac{l}{(1-e\cos\theta)}, \qquad l=\frac{b^2}{a}.$$

今 FP ノ長サヲ $\rho_1=\frac{l}{(1-e\cos\theta)}$ トセバ FQ ノ長サハ θ ノ代リニ $\theta+180°$ ヲ代入シタル

$$\rho_2=\frac{l}{1+e\cos\theta}.$$

故ニ PQ ノ長サハ $PQ=\rho_1+\rho_2=\frac{2b^2}{(1-e^2\cos^2\theta)a}$

CD ノ方程式ハ $y=x\tan\theta$, 之ヲ $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ ニ代入スレバ

$$x^2=\frac{a^2b^2}{a^2\tan^2\theta+b^2}, \qquad y^2=\frac{a^2b^2\tan^2\theta}{a^2\tan^2\theta+b^2}$$

$$\therefore \quad x^2+y^2=\frac{CD^2}{4}=\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$$

$$\therefore \quad CD^2=\frac{4a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$$

$$PQ.AA'=\frac{2b^2}{(1-e^2\cos^2\theta)a}\cdot 2a=\frac{4a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=CD^2$$

$$\therefore \quad PQ:CD=CD:AA'.$$

235. 左ノ焦點ヲ極トセル楕圓ノ方程式ハ

$$\rho=\frac{l}{1-e\cos\theta}$$

今 $p_1,\ p_2$ 弦ニ應ズル傾角ヲ θ_1 及ビ $\theta_1+90°$ トセバ

$$p_1=\frac{2l}{1-e\cos^2\theta}, \qquad p_2=\frac{2l}{1-e\sin^2\theta} \quad 前題參照.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{2-e^2}{2l}=\frac{a}{2b^2}\left(2-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)=\frac{(a^2+b^2)}{2ab^2}\ \text{一定.}$$

236. P, Q ニ於ケル二切線

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (1)$$

$$\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1 \qquad (2)$$

ノ交點 T ト F ヲ結ブ直線ハ R ノ極線ナリ. 何トナレバ R ハ T ノ極線 PQ ト F ノ極線ナル準線トノ交點ナルヲ以テナリ. 故ニ TF ト FR トハ垂直ナリ.

今 TF ガ PFQ 角ヲ二等分スルコトヲ云ヘバ之ニ垂直ナル FR ハ其外角ヲ二等分ス.

$T(x, y)$ ト焦點 F トノ距離ヲ ρ 又 $P(x_1, y_1)$ ト F トノ距離ヲ ρ_1 トシ ρ, ρ_1 ガ軸トナス角ヲ θ, θ_1. 中心ヲ O トスレバ

$$\cos\theta=\frac{x+c}{\rho},\ \sin\theta=\frac{y}{\rho},\ \cos\theta_1=\frac{x_1+c}{\rho'},\ \sin\theta_1=\frac{y_1}{\rho'},\ c=OF$$

從テ
$$\cos(\theta-\theta_1)=\frac{(x+c)(x_1+c)+yy_1}{\rho\rho_1}.$$

(1) ヨリ得タル yy_1 ヲ代入セバ

$$\rho\rho_1\cos(\theta-\theta_1)=(a+ex)(a+ex_1)$$

然ルニ $\rho_1=a+ex_1$

故ニ
$$\cos(\theta-\theta_1)=\frac{a+ex}{\rho}$$

今 $FQ=\rho_2$ トシ FQ ト x 軸トノ角ヲ θ_2 トセバ同樣ニ

$$\cos(\theta-\theta_2)=\frac{a+ex}{\rho}$$

$\therefore$ $\cos(\theta-\theta_1)=\cos(\theta-\theta_2)$, $\theta-\theta_1=\theta_2-\theta$ 故ニ FT ハ角 PFQ ヲ二等分ス. 即チ FR ハ外角ヲ二等分ス.

237 PP_1 ノ傾角ヲ θ トセバ

$$PF=\frac{b^2}{a(1-e\cos\theta)},\quad P_1F=\frac{b^2}{a(1-e\cos\theta)}$$

$$\therefore \quad PF.P_1F=\frac{b^4}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}=FG^2$$

$FQ=\rho$ トセバ Q ノ軌跡ハ $\rho^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)=b^4$

之ヲ直交軸ニ直セバ $a^2x^2+b^2y^2=b^4$ 卽チ與ヘラレタル楕圓ト同一ノ心差率ヲ有ス.

238. P ヨリ楕圓ニ引キタル二切線ニ焦點 F ヨリ下シタル垂線ノ足ハ補助圓上ニアリ. 何トナレバ焦點ヨリ楕圓ノ切線ニ下シタル垂線ノ足ノ軌跡ハ補助圓ナルヲ以テナリ. 故ニ結局此足ガ Q, R ナリ. 從テ角 PQF, PRF ハ直角ナルヲ以テ Q, R ハ又 PF ヲ直徑トスル圓上ニ在リ.

是ニヨリテ題言ノ眞ナルコト容易ニ知ラル.

339. $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線, 法線ガ共軛軸ト交ル點ヲ Q, R トス. P ニ於ケル切線, 法線ハ次ノ如シ

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (1)$$

$$\frac{y}{a^2y_1}+\frac{x}{b^2x_1}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \qquad (2)$$

中心ヲ O トシ (1) ニ於テ $x=0$ トスレバ

$OR=\dfrac{-b^2}{y_1}$. (2) ニ於テ $x=0$ トスレバ $OQ=\dfrac{y_1(a^2+b^2)}{b^4}$

QPR 角ハ直角ナルヲ以テ QR ノ中點 C ハ外接圓 QPR ノ中心ナリ. 焦點 $F(ea, 0)$ 若シ此外接圓周上ニ在ラバ

$CF=\dfrac{QR}{2}$ ナリ.

然ルニ　$\dfrac{QR}{2}=\left(\dfrac{y_1(a^2+b^2)}{b^2}+\dfrac{b^2}{y_1}\right)\dfrac{1}{2}$

又　$OC=\left(\dfrac{y_1(a^2+b^2)}{b^2}-\dfrac{b^2}{y_1}\right)\dfrac{1}{2}$

従テ　$CF^2=OC^2+OF^2=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{y_1(a^2+b^2)}{b^2}-\dfrac{b^2}{y_1}\right)^2+(a^2+b^2)$

$a^2+b^2=e^2a^2$

$$CF^2=\frac{1}{4}\left(\frac{y_1(a^2+b^2)}{b^2}+\frac{b^2}{y_1}\right)^2=\frac{QR}{2}\qquad\therefore\ OF=\frac{QR}{2}$$

即チ F ハ QPR 三角形ノ外接圓周上ニ在リ.

240　切線ヲ $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ (1) トシ漸近線ヲ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\quad(2),\quad\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\quad(3)$$ トス.

(1) ト (2) トノ交點 Q ノ座標ハ $\left(\dfrac{a^2b}{bx_1-ay_1},\ \dfrac{ab^2}{bx_1-ay_1}\right)$

(1) ト (3) トノ交點 R ノ座標ハ $\left(\dfrac{a^2b}{bx_1+ay_1},\ \dfrac{-a^2b}{bx_1+ay_1}\right)$

FG ノ方向係數　$m=\dfrac{ab^2}{ea(bx_1-ay_1)-a^2b}$

FR ノ方向係數　$m_1=\dfrac{-ab^2}{ea(bx_1+ay_1)-a^2b}$

$\tan QFR=\dfrac{m-m_1}{1+mm_1}=\dfrac{-b}{a}$ 一定ナリ.

但シ上ノ計算ニ $b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$　$e^2a^2=a^2+b^2$ ニ注意セヨ.

241　φ_1, φ_2 ノ長短軸ノ半分ヲ a_1, b_1 及ビ a_2, b_2 トスレバ同

焦點ナルコトヨリ　$a_1^2-b_1^2=a_2^2-b_2^2$　(1)

P_1, P_2 及ビ Q_1, Q_2 ノ座標ヲ心差角ニテ表ハセバ

$P_1(a_1\cos\theta_1,\ b_1\sin\theta_1)$,　$P_2(a_1\cos\theta_2,\ b_1\sin\theta_2)$,

$Q_1(a_2\cos\theta_1,\ b_2\sin\theta_1)$,　$Q_2(a_2\cos\theta_2,\ b_2\sin\theta_2)$

$$\therefore\ P_1Q_2^2=(a_1\cos\theta_1-a_2\cos\theta_2)^2+(b_1\sin\theta_1-b_2\sin\theta_2)^2$$

$$P_2Q_1^2=(a_1\cos\theta_2-a_2\cos\theta_1)^2+(b_1\sin\theta_2-b_2\sin\theta_1)^2$$

(1) ナル條件ヨリ　$P_1Q_2^2=P_2Q_1^2$.　$\therefore\ P_1Q_2=P_2Q_1$

242　同焦點二次曲線ハ　$\dfrac{x^2}{a^2+k}+\dfrac{y^2}{b^2+k}=1$　(1)

(1) ニ關シテ $lx+my=1$ ノ極 (X, Y) ハ此方程式ヲ書キ換ヘテ

$$\frac{l(a^2+k)}{a^2+k}x+\frac{m(b^2+k)}{b^2+k}y=1$$

トスルコトニヨリテ　$X=l(a^2+k)$,　$Y=m(b^2+k)$.

此二式ヨリ k ヲ消去セバ

$$\frac{X}{l}-\frac{Y}{m}=a^2-b^2$$

之求ムル軌跡ナリ.

243　同焦點楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2+k}+\dfrac{y^2}{b^2+k}=1$ 上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於

ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{x_1x}{a^2+k}+\frac{y_1y}{b^2+k}=1\qquad(1)$$

此方程式ノ方向係數ヲ m トセバ

$$m=\frac{-(b^2+k)x_1}{(a^2+k)y_1}\qquad(2)$$

又 $$\frac{x_1^2}{a^2+k}+\frac{y_1^2}{b^2+k}=1 \qquad (3)$$

(2) ト (3) ヨリ k ヲ消去シ x_1, y_1 ヲ流通座標トセバ双曲線ノ方程式ヲ得.

244. ϕ_1, ϕ_2 ノ半長短軸ヲ a_1, $b_1 : a_2$, b_2 トスレバ同焦點ナルコトヨリ $$a_1^2-b_1^2=a_2^2-b_2^2 \qquad (1)$$

ϕ_1, ϕ_2 ノ切線ハ

$$y=m_1x+\surd(a_1^2m_1^2+b_1^2) \qquad (2)$$

$$y=m_2x+\surd(a_2^2m_2^2+b_2^2) \qquad (3)$$

(2), (3) ハ垂直ナルヲ以テ $m_1m_2=-1$ (4)

(2), (3), (4) 及ビ (1) ヨリ m_1, m_2 ヲ消去セバ

$$x^2+y^2=a_1^2+b_1^2$$

トナル卽チ圓ナリ.

245. $\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}=1$ ノ一定ノ心差角ヲ ϕ トセバ, 之ニ應ズル點ノ座標ハ $x=\sqrt{(a^2+k)}\cos\phi$, $y=\sqrt{(a^2+k)}\sin\phi$

此兩式ヨリ k ヲ消去セバ

$$\frac{x^2}{\cos^2\phi^2}-\frac{y^2}{\sin^2\phi}=a^2-b^2$$

ニシテソノ焦點ハ $\surd\{(a^2-b^2)\cos^2\phi+(a^2-b^2)\sin^2\phi\}=a^2-b^2$ ナルヲ以テ楕圓ト同一ナリ.

246. 平行弦ノ中點ノ軌跡ハ楕圓ノ徑ニシテ, 二徑ノ交點ハ中心ナリ.

247. 切點ヲ (x_1, y_1) トセバ切線ノ方程式ハ

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (1)$$

相等シキ截片ヲ k トセバ切線ノ方程式ハ

$$x+y=k \qquad (2)$$

(1) ト (2) トハ同一ノ式ナルヲ要スルヲ以テ相應項ヲ比較シテ

$$\frac{x_1}{a^2}=\frac{y_1}{b_2}=\frac{1}{k}$$

$$\therefore\ x_1=\frac{a^2}{k},\quad y_1=\frac{b^2}{k}$$

之ヲ $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ ニ代入シテ $k=\surd(a^2+b^2)$

$$\therefore\ (2)\ \text{ハ}\ x+y=\surd(a^2+b^2)$$

248. 二點ノ心差角ヲ ϕ_1, ϕ_2 トスレバ $\phi_1-\phi_2=\theta$ 一定 (1).

ϕ_1, ϕ_2 ニ應スル切線ノ方程式ハ

$$\frac{x\cos\phi_1}{a}+\frac{y\sin\varphi_1}{b}=1 \qquad (2)$$

$$\frac{x\cos\varphi_2}{a}+\frac{y\sin\varphi_2}{b}=1 \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ヨリ φ_1, φ_2 ヲ消去セバ $(b^2x^2-a^2y^2)\tan\theta=2abxy$.

249 $\left(ea,\ \frac{b^2}{a}\right)$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$\frac{x-ea}{\frac{e}{a}}=\frac{y-\frac{b^2}{a}}{\frac{1}{a}}$$

此方程式ニ於テ $x=0$ トセバ $y=-ae^2$.

故ニ法線若シ短軸ノ端ヲ過ルトキハ $ae^2=b$ ナラザルベカラズ.

∴ 平方シテ變形セバ $a^2e^4=a^2(1-e^2)$ 即チ

$$e^4+e^2-1=0.$$

250 $P_1(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線ノ方程式

$$yy_1=2d(x+x_1) \qquad (1)$$

$P_2(x_2, y_2)$ ニ於ケル切線ノ方程式

$$yy_2=2d(x+x_2) \qquad (2)$$

(1) ト (2) トヨリ $y_2(x+x_1)=y_1(x+x_2)$

$$\therefore\ x(y_2-y_1)=y_1x_2-x_1y_2 \qquad (3)$$

然ルニ $x_1=\frac{y_1^2}{4d}$, $x_2=\frac{y_2^2}{4d}$ コレト (3) トヨリ

$x=\frac{y_2y_1}{4d}$ (3), (3) ト x_1 ノ値トヲ (1) ニ代入シテ

$y=\frac{y_2+y_1}{2}$ ∴ 求ムル座標 $\left(\frac{y_2y_1}{4d}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$

251 P ノ座標ヲ (x_1, y_1) トセバ Q ノ縦座標ハ $\frac{y_1}{2}$ ナリ.

之ヲ $y^2=4dx$ ニ代入シテ Q ノ縦座標 $x=\frac{x_1}{4}$, 即チ

$Q\left(\frac{x_1}{4}, \frac{y_1}{2}\right)$. 從テ MQ ノ方程式ハ

$$\frac{y}{-\frac{y_1}{2}}=\frac{x-x_1}{x_1-\frac{x_1}{4}}$$

之ニ $x=0$ ヲ代入セバ $AT=y=\frac{2}{3}y_1=\frac{2}{3}MP$

$$\therefore\ AT=\frac{2}{3}PM.$$

252. 焦點ヲ極トスル拋物線ノ極方程式

$$\rho=\frac{2d}{1-\cos\theta}$$

ニ $\theta=30°$ ヲ代入セバ, 正三角形ノ一邊トシテ

$$\rho=\frac{4d}{2-\sqrt{3}}$$

ヲ得. $\theta=150°$ ヲ代入セバ

$$\rho=\frac{4d}{2+\sqrt{3}}$$

ヲ得. 故ニ求ムル一邊ハ $\frac{4d}{2\pm\sqrt{3}}$ ナリ.

252. 答 $y\pm x\mp 3d=0.$

254. 一方ノ方程式ヲ $y^2=4dx$ (1) トセバ他ノ拋物線ハ $y^2=4d(x+a)$ (2) ナル形ヲ有ス. (1) 上ノ點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線ガ (2) ト交ル點ノ縦座標ハ $yy_1=2d(x+x_1)$ ノ x ヲ (2) ニ代入シテ得ル方程式

$$y^2-2y_1y+4d(x_1-a)=0$$

ノ根ナリ. 故ニ交點ノ縦座標ヲ Y_1, Y_2 トスレバ方程式ノ根ト係數トノ關係ヨリ

$$Y_1+Y_2=2y_1$$

此關係ハ (x_1, y_1) ガ交點ノ中央ナルコトヲ示ス.

255. 二直徑ガ曲線ト交ル點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) ニ於ケル切線ノ交點ノ座標ハ問題 250 ニヨリテ

$x=\frac{y_1y_2}{4d}$ (1), $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ (2)

次ニ二直徑ノ距離ノ差ハ一定ナルヲ以テ

$$y_2-y_1=k \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ヨリ y_1, y_2 ヲ消去スレバ

$$y^2=4dx+\frac{k^2}{4}$$

ニシテ拋物線トナル. 卽チ題言ノ如シ.

256. 此等三點ヲ頂點トスル三角形ノ面積ハ

$$S=\frac{1}{2}y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)$$

此等ハ拋物線上ノ點ナルヲ以テ $x_1=\frac{y_1^2}{4d}$, $x_2=\frac{y_2^2}{4d}$, $x_3=\frac{y_3^2}{4d}$

此ヲ上ノ式ニ代入シテ

$$S=\left|\frac{1}{8d}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)\right|$$

257. 拋物線上ノ三ツノ點ヲ $(x_1\ y_1)$, (x_2, y_2), (x_3, y_3) トスレバ共三角形ノ面積ハ前題ニヨリテ

$$S=\left|\frac{1}{8d}(y\ -y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)\right|$$

又此等ノ點ニ於ケル切線ノ交點ノ座標ハ問題 250 ニヨリ

$$\left(\frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{y_2y_2}{4d}\right),\ \left(\frac{y_2+y_3}{2},\ \frac{y_2y_3}{4d}\right),\ \left(\frac{y_3+y_1}{2},\ \frac{y_3y_1}{4d}\right).$$

此三點ノ三角形ノ面積ヲ S′ トセバ

$$S'=\left|\frac{1}{16}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y\ )\right|$$

∴ 故ニ前ノ半分ナリ.

258 A$(a, 0)$, B$(-a, 0)$, C(x_1, h) ヲ三頂點トセバ

AC ノ方程式ハ $\frac{x-a}{a-x_1}=\frac{y}{-h}$, B ヨリ AC ニ下ス垂線ノ方程式ハ

$$y=(x+a)\frac{a-x_1}{h} \qquad (1)$$

C ヨリ AB ニ下ス垂線ノ方程式ハ

$$x=x_1 \qquad (2)$$

C ガ $y=h$ 上ヲ動ク故ニ x_1 ハ變ル.

(1) ト (2) トヨリ x_1 ヲ消去セバ求ムル軌跡ハ

$$x^2=a^2-hy$$

ニシテ拋物線ナリ.

259. 縱線相等シキヲ以テ P, Q ハ (x_1, y_1), (x_2, y_1) ニテ表ハサル. P(x_1, y_1) ヲ過ル切線ノ方向係數ハ

$$y_1=mx_1+\frac{d}{m} \quad 卽チ \quad x_1m^2-y_1m+d=0$$

ヲ解キテ得ラル. 之ヲ m_1, m_2 トスレバ

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1}}{\frac{d}{x_1}}=\frac{y_1}{d}$$

同様ニ Q 點ニツキテ

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{y_1}{d}. \qquad \therefore\ \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}$$

260. 一點ノ座標ヲ (x, y) トスレバ此點ヲ過ル切線ノ方向係數ヲ與フル式ハ

$$y=mx+\frac{d}{m} \quad 又ハ \quad m^2x-my+d=0$$

此二切線ノ方向係數ヲ m_1, m_2 トスレバ

$$m_1+m_2=\frac{y}{x} \quad (1) \qquad m_1+m_2=\frac{d}{x} \quad (2)$$

二切線ノナス角 θ ハ一定ナルヲ以テ

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=k \quad (3)$$

(1), (2), (3) ヨリ m_1, m_2 ヲ消去スレバ

$$y^2-k^2x^2-2dk^2x-(4d+k^2d)=0$$

即チ双曲線ナリ.

261 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ノ方程式ハ

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2} \quad (1)$$

ナルヲ以テ PQ ノ中心ヲ過ル直徑ノ方程式ハ

$$y=\frac{2d(x_1-x_2)}{y_1-y_2} \quad (2)$$

焦點ヨリ (1) ニ下シタル垂線ノ方程式ハ

$$y=\frac{2d(x_1-x_2)}{y_1-y_2} \quad (3)$$

(2) ト (3) トヨリ x_1, x_2, y_1, y_2 ヲ消去スレバ $x=-d$ 即チ軌跡ハ準線ナリ.

262. AB ヲ x 軸 CD ヲ y 軸トシ圓ノ方程式ヲ $x^2+y^2=r^2$ トス. AF ノ方程式ヲ $y=(x+a)m$ (1) トスレバ之ニ垂直ナル BF ノ方程式ハ $y=(x-a)\frac{-1}{m}$ (2). (1) ニ於テ $x=0$ トスレバ $y=OE=ma$ $\therefore$ $m=\frac{y}{a}$ (3)

(3) ト (2) トヨリ m ヲ消去スレバ $y^2=a(a-x)$

故ニ軌跡ハ拋物線ナリ.

263 內接直角三角形ノ二邊ヲ $y=mx$ (1), $y=-\frac{x}{m}$ (2) ニテ表ス. 拋物線 $y^2=4dx$ (3). ト (1) トノ交點 P ノ座標ハ $\left(\frac{4d}{m^2}, \frac{4d}{m}\right)$ (3) ト (2) トノ交點 Q ハ $Q(4dm^2, -4dm)$

PQ ノ中點ノ座標ヲ X, Y トスレバ

$$2X=4d\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right) \quad (4), \qquad 2Y=4d\left(\frac{1}{m}-m\right) \quad (5)$$

(4) ト (5) トヨリ m ヲ消去スレバ

$$Y^2=2dX-8d^2$$

即チ拋物線ナリ.

264. P ヲ過ル徑ヲ x 軸, 其點ニ於ケル切線ヲ y 軸トセバ拋物線ノ方程式ハ $y^2=4d'x$ ナル形ヲ有ス.

Q ノ座標ヲ (x_1, y_1) トスレバ PQ ノ方程式ハ

$y=\frac{y_1}{x_1}x$ (1) EF ノ方程式ヲ $y=k$ (2) トスレバ

$$\frac{PF}{FQ}=\frac{k}{y_1-k} \quad (3)$$

ET ハ $y^2=4d'x$ ニ $y=k$ ヲ代入シテ得ル x ノ値ナルヲ以テ

$ET=\frac{k^2}{4d'}$. FT ハ方程式 (1) ニ $x=k$ ヲ代入スレバ可ナルヲ以テ

$$FT=\frac{y_1}{x_1}k \quad (4)$$

$$\therefore \quad FT-ET=\frac{y_1}{x_1}k-\frac{k^2}{4d'}=EF$$

コレニ $x_1=\frac{y_1^2}{4d'}$ ヲ代入セバ $\qquad EF=\frac{k}{y^1-k}$.

故ニ (3) ト (4) トヨリ $\mathrm{ET:EF=PF:FQ}$.

265. 切點ノ座標ヲ (x_1, y_1), (x_2, y_2). P ノ座標ヲ (X, Y) トスレバ問題 250 ニヨリテ

$$\mathrm{X}=\frac{y_1y_2}{4d} \quad (1) \qquad \mathrm{Y}=\frac{y_1+y_2}{2} \quad (2)$$

此等三點ノ作ル三角形ノ面積ヲ S トセバ

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-\mathrm{Y})+x_2(\mathrm{Y}-y_1)+\mathrm{X}(y_1-y_2)\}$$

此式ニ $x_1=\frac{y_1^2}{4d}$, $x_2=\frac{y_2^2}{4d}$ ヲ代入スレバ

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\left\{\frac{y_1^2y_2-y_1y_2^2}{4d}-\mathrm{Y}\frac{y_1^2-y_2^2}{4d}+\mathrm{X}(y_1-y_2)\right\} \quad (3)$$

(1), (2), (3) ヨリ x_1, x_2, y_1, y_2 ヲ消去スレバ

$$4d^2s^2=(\mathrm{Y}^2-4d\mathrm{X})3$$

$4d^2s^2=3k$ トスレバ

$$\mathrm{Y}^2-4d\mathrm{X}=k$$

トナリ拋物線ナリ.

266. 平行弦ノ中點ヲ結ビ付クレバ徑ヲ得. 徑ニ垂直ナル弦ヲ直角ニ二等分スル直線ハ求ムル主軸ナリ.

267. $y=mx+b$ (1) ガ拋物線ト交ル點ノ座標ヲ (x_1, y_1) トスレバ切線ノ方程式ハ $y_1y=2d(x+x_1)$ (2)

(1) ト (2) トハ垂直ナルヲ以テ $m=-\frac{y_1}{2d}$ (3)

(3) ヲ $y_1^2=4dx_1$ ニ代入セバ $x_1=dm^2$ (4)

又法線ノ方程式ハ $y-y'=m(x-x')$ ナル形ナルヲ以テ之ニ (3)

及ビ (4) ノ x_1, y_1 ヲ代入スレバ

$$y+2dm=m(x-dm^2)$$

$$\therefore\ y=mx-2dm-dm^2$$

故ニ求ムル條件 $b=-md(2+m^2)$

268. 任意ノ法線ノ方程式ヲ $y=mx-2dm-dm^2$. (1)

トセバ焦點 $(d, 0)$ ヨリ之ニ下ス垂線ノ方程式ハ

$y=(x-d)\frac{-1}{m}$ (2). (1) ト (2) トヨリ m ヲ消去スレバ

$$y^2=d(x-d)$$

ニシテ拋物線ナリ. 注意 $y^2+(x-a)^2=0$ ヲトラズ.

269. 交點ノ座標ヲ (X, Y) トスレバ此點ヨリ引キタル法線ノ方向係數ハ次ノ三次方程式ノ根ナリ.

$$\mathrm{Y}=m\mathrm{X}-2dm-dm^2$$

即チ $dm^2-m(\mathrm{X}-2d)+\mathrm{Y}=0$ (1)

此三根ヲ m_1, m_2, m_3 トスレバ根ト係數トノ關係ヨリ

$$m_1m_2m_3=-\frac{\mathrm{Y}}{d} \quad (2)$$

此中ノ二ツ例ヘバ m_1, m_2 ナル方向係數ヲ有スル法線ハ垂直ナルニヨリ $m_1,m_2=-1$ (3)

(2) ト (3) トヨリ $m_3=\frac{\mathrm{Y}}{d}$ ヲ得. 然ルニ m_3 ハ (1) ノ根ナルヲ以テ之ヲ (1) ニ代入セバ

$$\mathrm{Y}\{\mathrm{Y}^2-d(\mathrm{X}-2d)+d^2\}=0$$

今 $\mathrm{Y}=0$ トセバ $m_3=0$ ナル故 m_1 及ビ m_2 ハ (1) ヨリ得ル二次方程式 $dm^2-(\mathrm{X}-2d)=0$ ノ二根ナルベク而シテ (3) ガ成立

スルタメニハ $m_1m_2=\dfrac{X-2d}{d}=-1$ $\therefore$ $X=3d$

故ニ一點 $(3d,\ 0)$ ガ適スルノミ從テ軌跡ナラズ.

斯クテ $Y^2-d(X-2d)+d^2=0$

$$\therefore\ Y^2=d(X-3d)$$

ガ求ムル軌跡ナリ.

270. 拋物線上ノ一點 $P(x_1,\ y_1)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ $yy_1=2d(x+x_1)$ (1). (1) ガ通徑 $x=d$ ト交ル點 Q ノ縱線ハ此點ト焦點トノ距離ナリ. 故ニ焦點ヲ F トスレバ

$FQ=y=\dfrac{2d(d+x_1)}{y_1}$. 次ニ切線ガ準線 $x=-d$ ト交ル點 R ノ座標ハ (1) ヨリ $y=\dfrac{2d(x_1-d)}{y_1}$ ナルヲ以テ

$$R\left(-d,\ \frac{2d(x_1-d)}{y_1}\right)$$

ナリ. 故ニ $FR=\sqrt{\left[(-d-d)^2+\left\{\dfrac{2d(x_1-d)}{y_1}\right\}^2\right]}$

之ニ $y_1^2=4dx_1$ ヲ代入シテ變形スレバ

$$FR=\frac{2d(x_1+d)}{y_1}\qquad\therefore\ FQ=FR$$

271 焦點ヲ極トスル極座標ノ方程式ヨリ

$$FP=\rho_1=\frac{2d}{1-\cos\theta},\quad FG=\frac{2d}{1+\cos\theta}$$

$$\therefore\ PQ=\rho_1+\rho_2=\frac{4d}{1-\cos^2\theta}=L$$

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{d}}{\sqrt{L}}$ OPQ 三角形ノ面積ヲ S トセバ

$$S=\frac{1}{2}OF\cdot FP\sin\theta+\frac{1}{2}OF\cdot FQ\sin\theta=\frac{d}{2}\cdot\frac{4d\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{2d^2}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ S=d^{\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

卽チ PQ ノ長サノ平方根ニ比例ス.

272. 拋物線ノ三切線ヲ次ノ如ク表ス.

$y=m_1x+\dfrac{d}{m_1}$ (1) $y=m_2x+\dfrac{d}{m_2}$ (2) $y=m_3x+\dfrac{d}{m_3}$ (3)

(2) ト (3) トノ交點ノ座標ハ

$$\left(\frac{d}{m_2m_3},\ \frac{d}{m_2}+\frac{d}{m_3}\right)$$

此點ヲ過リ (1) ニ垂直ナル直線ハ

$$y-\left(\frac{d}{m_2}+\frac{d}{m_2}\right)=\frac{-1}{m_1}\left(x-\frac{d}{m_2m_3}\right)$$

此直線ガ $x=-d$ ナル準線ト交ル點ノ縱座標ハ

$$d\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_1m_2m_3}\right)$$

此結果ノ對稱ナルコトハ他ノ垂線モ亦同點ニテ準線ト交ルコトヲ示スモノナリ.

273 拋物線ノ方程式ヲ $\dfrac{2d}{\rho}=1+\cos\theta$ トシ其上ノ三點 A, B, C ニ於ケル切線ノ傾角ヲ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ トセバ A, B, C ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{2d}{\rho}=\cos\theta+\cos(\theta-\alpha)\qquad(1)$$

$$\frac{2d}{\rho}=\cos\theta+\cos(\theta-\beta)\qquad(2)$$

$$\frac{2d}{\rho}=\cos\theta+\cos(\theta-\gamma) \qquad (3)$$

B, C ニ於ケル切線ノ交點ハ

$$\frac{2d}{\rho}=2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},\ \theta=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

C, A ニ於ケル切線ノ交點ハ

$$\frac{2d}{\rho}=2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2},\ \theta=\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$

A, B ニ於ケル切線ノ交點ハ

$$\frac{2d}{\rho}=2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},\ \theta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

此三點ハ　$$\rho=\frac{2d}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}-\cos\left(\theta-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)$$

ヲ滿足ス．故ニ此方程式ハ三點 A, B, C ヲ過ル圓ナリ．

此方程式ニ於テ　$\theta-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}=90^\circ$　ナル如キ θ ヲトルトキハ $\rho=0$ トナリ原點卽チ焦點ヲ過ル．

274. $P(x_1, y_1)$ ノ極線ハ

$$y_1y=2d(x+x_1) \qquad (1)$$

(x_1, y_1) ヨリ之ニ下ス垂線ノ方程式ハ

$$y-y_1=\frac{-y_1}{2d}(x-x_1) \qquad (2)$$

今 (1) ガ主軸ト交ル點ヲ R トスレバ RST ハ直角三角形ナリ．(1) ニ於テ $y=0$ トセバ $x=-x_1$. 故ニ原點ヲ O トセバ $OR=x_1$　(2) ニ於テ $y=0$ トセバ $x=x_1+2d$. 從テ $OS=x_1+2d$ 故ニ焦點ハ RS ノ中點ナリ．直角三角形ノ斜邊ノ中點ナル焦點 F ハ二頂點 T, S ヨリ等距離ニアリ．

275. 前題ノ (1) 式ニ於テ $y=0$ トセバ $x=-x_1$, 然ルニ R ハ定點ナルヲ以テ x_1 ハ一定値ナリ．從テ $OS=x=x_1+2d$ モ一定ニシテ S ハ定點ナリ．直角三角形 TSR ノ斜邊ノ兩端一定ナルトキハ直角頂 T ノ軌跡ハ圓ナリ．

276. P ヲ過ル直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x+d}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=l \qquad (1)$$

トセバ P ヨリ拋物線ニ交ル迄ノ距離 l ヲ求ルニハ $y^2=4dx$ ト (1) ヨリ　$l^2\sin^2\theta-4dl\cos\theta+d=0$

故ニ根ト係數トノ關係ヨリ　$PQ,PR=\frac{4d^2}{\sin^2\theta}$

又別ニ PQR ニ平行ナル焦點ヲ過ル直線ニ關シ

$$FR_1=\frac{2d}{1-\cos\theta}.\quad FQ_1=\frac{2d}{1+\cos\theta}$$

$$\therefore\ FQ_1FR_1=\frac{4d^2}{1-\cos^2\theta}=\frac{4d^2}{\sin^2\theta}.$$ 故ニ $PQ,PR=FQ_1,FR_1$

277. 拋物線上ノ一點 P ノ座標ヲ (x_1, y_1) トセバ圓ノ中心ハ焦點 $F(d, 0)$ ト P トノ中點ナルヲ以テ其座標ハ $\left(\frac{x_1+d}{2},\ \frac{y_1}{2}\right)$ 此點ヨリ頂點ニ於ケル切線卽チ y 軸ニ至ル距離ハ　$\frac{x_1+d}{2}$　(1) ナリ．次ニ F, P ノ距離ハ

$$\sqrt{\{(x_1-d)^2+y_1^2\}}=x_1+d \qquad (2)$$

但シ　$y_1^2=4dx_1$

(2) ハ (1) ノ二倍ナルヲ以テ FP ヲ直徑トスル圓ハ頂點ニ於ケル切線ニ切ス．

278. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ夫々

$$y-y_1=\frac{-y_1}{2d}(x-x_1) \quad (1) \qquad y-y_2=\frac{-y_2}{2d}(x-x_2) \quad (2)$$

(1) ニ $y=0$ トセバ Q_1 ノ座標トシテ $Q(2d+x_1, 0)$

(2) ニ $y=0$ トセバ Q_2 ノ座標トシテ $Q_2(2d+x_2, 0)$

故ニ $\qquad P_1Q_1^2=4d^2+y_1^2$. $P_2Q_2^2=4d^2+y_2^2$

$$\therefore \quad \frac{1}{P_1Q_1^2}+\frac{1}{P_2Q_2^2}=\frac{1}{4d^2+y_1^2}+\frac{1}{4d^2+y_2^2}$$

然ルニ $y_1^2=4dx_1$, $y_2^2=4dx_2$ ナルヲ以テ

$$\frac{1}{P_1Q_1^2}+\frac{1}{P_2Q_2^2}=\frac{1}{4d}\left\{\frac{1}{d+x_1}+\frac{1}{d+x_2}\right\} \qquad (1)$$

次ニ P_1, P_2 ヲ過ル弦ノ方程式ハ $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{4d}{y_1+y_2}$ ニシテ之ガ焦點ヲ過ルヲ以テ $x=d$, $y=0$ ヲ代入シテ且簡單ニスレバ

$$y_1y_2=-4d^2 \quad 平方スレバ \quad y_1^2y_2^2=16d^4$$

$$\therefore \quad 4dx_14dx_2=16d^4 \qquad x_1x_2=d^2$$

此關係ヲ (1) ニ代スレバ

$$\frac{1}{P_1Q_1^2}+\frac{1}{P_2Q_2^2}=\frac{1}{4d^2} \quad 卽チ一定.$$

279. 圓 $x^2+y^2-2ax-3a^2=0$ 上ノ一點ヲ (x_1, y_1) トスレバ

$$x_1^2+y_1^2-2ax_1-3a^2=0 \qquad (1)$$

ナリ. 次ニ此點ガ圓 $x^2+y^2+2ax-3a^2=0$ ニ關スル極線ノ方程式ハ

$$(x+x_1)(x_1+a)+yy_1=4a^2 \qquad (2)$$

(2) ガ拋物線 $y^2+4ax=0$ ニ切スルタメニハ $x=-\dfrac{y^2}{4d}$ ヲ (2) ニ代入シテ得タル方程式 $(x_1+a)y^2-4ay_1y-4a^2(x_1-3a)=0$ ガ等根ヲ有セザルベカラズ.

而シテ此方程式ガ等根ヲ有スルタメニハ其判別式ガ零ナルヲ要ス. 然ルニ

$$判別式=16a^2\{y_1^2+(x_1+a)(x_1-3a)\}$$
$$=16a^2(x_1^2+y_1^2-2ax_1-3a^2)=0$$

(注意 (1) ヨリ) 故ニ切ス.

280. 與ヘラレタル焦點及ビ主軸ヲ夫々原點及ビ x 軸トスル一方程式ヲ $y^2=4d(x+d)$ (1) トシ, 與ヘラレタル點ヲ $P(x_1, y_1)$ トス. サテ (1) ト同焦點ナル拋物線ノ一般ノ方程式ハ $y^2=4k(x+k)$ ナルヲ以テ, 之ガ P ヲ過ルトキハ $y_1^2=4k(x_1+k)$ ナル關係アリ. (2) ハ k ニ關スル二次方程式ニシテソノ判別式ハ $16x_1^2+16y_1^2$ ナルヲ以テ, ソノ二根ハ常ニ實ニシテ x_1 及ビ y_1 ガ同時ニ零ナラサル限リ相異ル. 今 $y\neq 0$ トセバ (2) ノ二根ハ一ハ正ニシテ一ハ負ナリ. 故ニ P ガ (1) ノ主軸上ニ在ラザルトキハ P ヲ通ジテ (1) ト同焦點ナル拋物線ハ常ニ二ツアリ. 其一ハ右向ニシテ一ハ左向ナリ.

次ニ一點 $P(x_1, y_1)$ ヲ通スル二ツノ同焦點拋物線ノ方程式ヲ一般ニ $\qquad y^2=4d(x+d)$, $y^2=4k(x+k)$

トスルトキハ共ニ P ヲ過ルニヨリ

$$y_1^2=4d(x_1+d), \quad y_1^2=4k(x_1+k)$$

此二式ヨリ x_1 ヲ消去セバ $\qquad y_1^2+4dk=0 \qquad (3)$

然ルニ P ニ於テ兩方ノ拋物線ニ切線ヲ引カバ

$$y_1y=2d(x+x'+d), \quad y_1y=2k(x+x_1+k)$$

ナルヲ以テ (3) ハ此二切線ガ互ニ垂直ナルコトヲ示ス.

卽チ二ツノ抛物線ハ直交ス.

281.　抛物線上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ ヨリ頂點ニ於ケル切線卽チ y 軸ニ下ス垂線ノ足ノ座標ハ $(0, y_1)$. 又原點卽チ頂點ト P 點トヲ結ブ弦ノ方程式ハ $y=\frac{y_1}{x_1}x=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4d}}x$

$\therefore\ y=\frac{4d}{y_1}x.$ $(0, y_1)$ ヨリ此弦ニ下ス垂線ノ方程式ハ

$y-y_1=x\frac{-y_1}{4d}$　又ハ　$4dy+y_1(x-4d)=0$

此直線ハ y_1 ノ値如何ニ關セズ $y=0,\ x=4d$ ナル點卽チ主軸上頂點ヨリ $x=4d$ ナル點ヲ過ル.

282.　二切線ノ交點ノ座標ヲ (X, Y) トセバ此點ヨリ抛物線ニ引ケル二切線ノ方向係數ヲ與フル式ハ

$$Y=mX+\frac{d}{m}\quad 又ハ\quad m^2X-mY+d=0$$

ニシテ其方向係數ノ一ヲ $m_1=\tan\theta_1$. 他ノ一ヲ $m=\tan\theta_2$ トセバ

$$\tan\theta_1+\tan\theta_2=m_1+m_2=\frac{Y}{X}\qquad(1)$$

$$\tan\theta_1\tan\theta_2=\frac{d}{X}\qquad(2)$$

(1), (2) ト $\tan\theta_1\tan\theta_2=a$ ヨリ θ_1 及ビ θ_2 ヲ消去シテ求ムル軌跡　　$aX=d$ ヲ得.

同樣ニ (1), (2) ト $\cot\theta_1+\cot\theta_2=b$ ヨリ $Y=bd$ ヲ得.

283.　與ヘラレタル直線ヨリ與ヘラレタリ圓 O ト反對ノ側ニ此圓ノ半徑ニ等シキ距離ノ直線 L ヲトレバ求ムル軌跡ハ L

及ビ O 圓ノ中心ヨリ相等シキ點ノ軌跡ト同一ニシテ O 圓ノ中心ガ焦點ナル軌物線ナリ.

284.　$y^2-4dx=0$　(1)　　$y^2-2rx+x^2=0$　(2)

(1)−(2)　　$x(2r-4d-x)=0$　　$\therefore\ x=0,\ 2r-4d-x=0$

ハ求ムル二弦ナリ.

又原點ヲ過ル弦ヲ求ムルニハ (1) ト (2) トヨリ原點ヲ過ル二直線ノ二次方程式ヲ作ル方法ニヨリ(問題134解參照)

$$(y^2+x^2)2d=y^2r\quad 又ハ\quad y=\pm\frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{(r-2d)}}x$$

故ニ求ムル弦ハ $x=0,\ x=4d-2r,\ y=\frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{(r-2d)}}x.$

285.　焦點弦ノ端ヲ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ トスレバ此二點ヲ過ル弦ノ方程式ハ　$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{4d}{y_1+y_2}$　(1)

ニシテ其方向係數 m ハ

$$m=\frac{4d}{y_1+y_2}\qquad(2)$$

$(x_1, y_1)\ (x_2, y_2)$ ハ焦點弦ノ両端ナルガ故ニ問題 278 ニヨリ

$$x_1x_2=d^2\quad(3)\qquad y_1y_2=-4d^2\quad(4)$$

$(x_1, y_1)\ (x_2, y_2)$ ヲ直徑ノ両端トスル圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0\qquad(5)$$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ハ抛物線上ニ在ルガ故ニ

$$4d(x_1+x_2)=y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=\frac{16d^2}{m^2}+8d^2$$

$$\therefore\ (x_1+x_2)=\frac{4d}{m^2}+2d\qquad(6)$$

(2), (3), (4) 及ビ (6) ヲ (5) ニ代入セバ求ムル圓ノ方程式ヲ得.

$$x^2+y^2-2d\left(\frac{2}{m^2}+1\right)x-\frac{4d}{m}y-3d^2=0$$

286 前題ニヨリ任意二焦點弦ノ方向係數ヲ m_1, m_2 トスレバ圓ノ方程式ハ夫々

$$x^2+y^2-2d\left(\frac{2}{m_1^2}+1\right)x-\frac{4d}{m_1}y-3d^2=0 \qquad (1)$$

$$x^2+y^2-2d\left(\frac{2}{m_2^2}+1\right)x-\frac{4d}{m_2}y-3d^2=0 \qquad (2)$$

(1), (2) ノ共通弦ハ其根軸ナルヲ以テ (1)−(2) ヨリ

$$2d\left\{\left(\frac{2}{m_2^2}+1\right)-\left(\frac{2}{m_1^2}+1\right)\right\}x+4d\left(\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_1}\right)y=0$$

之ハ x, y ノ一次同次式ナルヲ以テ原點ヲ過ル.

287. 二點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ヲ結ブ弦ノ極ノ座標ヲ (X, Y) トスレバ $\mathrm{X}=\frac{y_1y_2}{4d}$ (1), $\mathrm{Y}=\frac{y_1+y_2}{2}$ (2)

又原點ト (x_1, y_1) トヲ結ブ直線ノ方程式ハ $y=\frac{y_1}{x_1}x$ (3)

同様ニ原點ト (x_2, y_2) トヲ結ブ座線ノ方程式ハ

$y=\frac{y_2}{x_2}x$ (4). (3) ト (4) トハ垂直ナルヲ以テ

$$y_1y_2=-x_1x_2=-\frac{y_1^2}{4d}\cdot\frac{y_2^2}{4d} \quad \therefore\ y_1y_2=-16d^2 \quad (5)$$

(5) ト (1) ヨリ y_1y_2 ヲ消去セバ求ムル軌跡トシテ

$$\mathrm{X}=-4d$$

288 抛物線上ノ點 (x_1, y_1) ヲ足トスル法線ノ方程式ハ

$2d(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0$ 此法線ノ極ヲ求ムルタメニ變形シテ

$$-2dy=y_1(x-x_1-2d)$$

今極ノ座標ヲ (X, Y) トスレバ

$$\mathrm{X}=-(x+2d) \quad (1), \qquad \mathrm{Y}=\frac{4d^2}{y_1} \qquad (2)$$

又 (x_1, y_1) ハ曲線上ニ在ルガ故ニ $y_1^2=4dx_1$ (3)

(1), (2), (3) ヨリ x_1, y_1 ヲ消去スレバ

$$(\mathrm{X}+2d)\mathrm{Y}^2+4d^3=0$$

289. 焦點半徑ノ曲線上ノ點ヲ (x_1, y_1) トスレバ二點 (x_1, y_1) 及ビ $(d, 0)$ ヲ直徑ノ兩端トスル圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2-(d+x_1)x-y_1y+dx_1=0$$

$x=0$ ヲ代入スレバ $y^2-y_1y+dx_1=0$ 之ニ $dx_1=\frac{y_1^2}{4}$ ヲ代入スレバ

$$y^2-y_1y+\frac{y_1^2}{4}=0 \quad \therefore\ \left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2=0.$$

ニシテ等根ヲ有ス故ニ y 軸ニ切ス.

290. 既知問題ニヨリ主軸ト頂點 O ヲ求メ O ニ於テ主軸ニ垂線ヲ立テ此垂線上ニ Q ヲトリ, OQ ヲシテ抛物線上ノ一點 P ノ縱線ノ $\frac{1}{2}$ ナラシム. PQ ヲ結ビ Q ニ於テ PQ ニ垂直ナル直線ノ主軸ヲ截ル點ガ焦點ナリ.

證明ハ前題ヲ參照セバ直ニ明ナリ.

291. $y^2=4dx$ 上ノ一點 (x_1, y_1) ヲ足トスル法線ノ方程式ハ

$$2d(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0 \qquad (1)$$

茲ニ方向係數 $m=\dfrac{-y_1}{2d}$ (2)

此弦ノ中點ノ y 座標ハ $y=\dfrac{2d}{m}$, $\therefore\ y=\dfrac{-4d^2}{y_1}$ (3)

又 (x_1, y_1) ハ曲線上ノ點ナルコトヨリ $x_1=\dfrac{y_1^2}{4d}$ (4)

(1), (3), (4) ヨリ x_1, y_1 ヲ消去セハ求ムル軌跡ハ

$$\frac{y^2}{2d}+\frac{4d^2}{y^2}=x-2d$$

292. (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b) ヲ夫々 P, Q, R トスレバ

$$PQ=\sqrt{\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}}=QR=RP$$

293. (1,2,3), (3,1,5), (2,4,3) ヲ夫々 P. Q. R トスレバ

$$PQ^2=(1-3)^2+(2-1)^2+(3-5)^2=9$$

$$QR^2=(3-2)^2+(1-4)^2+(5-3)^2=14$$

$$RP^2=(2-1)^2+(4-2)^2+(3-3)^2=5$$

$\therefore$ $PQ^2+RP^2=QR^2$ 從テ PQR ハ直角三角形.

294. 四面體ノ頂點ヲ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ トスレバ A, B ノ中點ノ x 座標ハ $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ C, D ノ中點ノ x 座標ハ $\frac{1}{2}(x_3+x_4)$. 故ニ此等二點ヲ結ブ直線ノ中點ノ x 座標ハ $\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)$ 他ノ座標モ同樣ニシテ $\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)$, $\frac{1}{4}(z_1+z_2+z_3+z_4)$ ナルコトヲ知ル. 而シテ此等ノ式ノ對稱ナルコトヨリ他ノ稜ノ中點ヲ結ビ付クル直線ノ中點モ同一點ナルコトヲ知ル.

295. D ノ x 座標ハ $\dfrac{mx_2+nx_3}{m+n}$ ニシテ從テ E ノ x 座標ハ

$$\frac{\dfrac{mx_2+nx_3}{m+n}(n+m)+lx_1}{l+m+n}=\frac{lx_1+mx_2+nx_3}{l+m+n}$$

同樣ニ E ノ y, z 座標ハ $\dfrac{ly_1+my_2+ny_3}{l+m+n}$

$$\frac{lz_1+mz_2+nz_3}{l+m+n}$$

296. 三角形ノ頂點ノ座標ヲ前題ノ如クトレバ重心ノ座標ハ

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

297. z 軸トナス角ヲ θ トセバ方向余弦ノ關係ヨリ

$$\cos^2 60^\circ+\cos^2 45^\circ+\cos^2\theta=1$$

$$\therefore\ \cos\theta=\pm\frac{1}{2} \qquad \therefore\ \theta=60^\circ,\ 120^\circ$$

298. $l:m:n=A:B:C$ (1) 又 $l^2+m^2+n^2=1$ (2)

(1) 及ビ (2) ヨリ

$$l=\frac{\pm A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},\quad m=\frac{\pm B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

$$n=\frac{\pm C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

299. (1, 2,3) ト原點トノ距離ハ $\sqrt{(1+4+9)}=\pm\sqrt{14}$

從テ方向余弦ハ

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{14}},\quad \frac{\pm 2}{\sqrt{14}},\quad \frac{\pm 3}{\sqrt{14}}$$

同樣ニ (3,1,5) ニ在リテハ $\frac{\pm 3}{\sqrt{35}}$, $\frac{\pm 1}{\sqrt{35}}$, $\frac{\pm 5}{\sqrt{35}}$

又 (2,4,3) ニ在リテハ $\frac{\pm 2}{\sqrt{29}}$, $\frac{\pm 4}{\sqrt{29}}$, $\frac{\pm 3}{\sqrt{29}}$

300　$\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}=k$ トスレバ

$$l=kl',\quad m=m'k,\quad n=n'k$$

從テ　$l^2+m^2+n^2=(l'^2+m'^2+n'^2)k^2=1 \qquad \therefore\ k^2=1$

$$\therefore\ l=\pm l',\quad m=\pm m',\quad n=\pm n'$$

故ニ同一ノ點ヨリ同ジ方向カ又ハ正反對ノ方向ニ引カレタル二直線トナリ相合ス.

301.　(1) xy 平面上 x 軸ト 45° ノ角ヲナス直線ヲ含ミ xy 面ニ垂直ナル平面.

(2) $z=a,\ z=-a$ ナルヲ以テ xy 面ヨリ距離 a ニ在リテ之ニ平行ナル二平面.

(3) xy 上ノ直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ヲ含ミ且 xy 面ニ垂直ナル平面

(4) x 軸ヲ軸トシ半徑 a ナル圓柱.

302.　(i) $z=0$ トセバ xy 面上ノ $x=y$ ナル直線トナリ, $y=0$ トセバ xz 面上ノ $x=z$ ナル直線トナル. 故ニ上記二線ヲ含ム平面ニシテ原點ヲ過ル.

(ii) $x^2=z$ ナル拋物線ヲ z 軸ノ周ニ回轉シテ生スル回轉面

303.　(i) xy 平面上 (a,b) ナル點ヲ過リ且 z 軸ニ行ナル

直線　(ii) 方向余弦

$$\frac{\pm a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\quad \frac{\pm b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\quad \frac{\pm c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$$

ニシテ且原點ヲ過ル直線.

(iii)　$z=c$ 平面內ニ在ル $ax+by=0$ ナル直線.

304.　(i) 半徑 a ナル球面, (ii) z 軸ヲ軸トシ頂角 2α ナル圓錐, (iii) xz 面ト 45° ノ角ヲナス平面, (iv) ZOX 平面上ニ在ル $r=a\cos\theta$ ナル曲線ヲ z 軸ノ周ニ回轉シテ生ズル曲面.

305.　本題ニ於ケル θ,φ ノ關係ハ $f(\theta,\varphi)=0$ ニテ表ハサル此式ニ $\varphi=k$ ナル値ヲ與フレバ之ニ應スル θ ハ $F(\theta)=0$ トナル. 卽チ φ ノ値ニ應ジテ常ニ θ ノ値ヲ得. 故ニ問題ノ如キ面ヲ表ス.

306.　φ ヲ含マサルヲ以テ $f(\gamma,\theta)=0$ ナル形ヲ有ス. コレハ z 軸ノ周ニ ZOY 平面內ノ曲線 $f(\gamma,\theta)=0$ ヲ回轉シテ生ズル回轉面ナリ.

307.　xy 平面上ノ x 軸ヲ軸トシテ圓 $x^2+y^2=\gamma^2$ ヲ回轉セバ此圓ノ縱線ガ xy 面ニ投ズル射影ノ長サハ $y\cos\theta$ ナリ. 故ニ圓ハ xy 面上 $x^2+y^2\cos^2\theta=\gamma^2$ ナル楕圓トナル.

若シ $\theta=90°$ ナルトキハ此圓ノ射影ハ直線トナル.

308.　P, Q 平面ノ交線ニ垂直ナル無數ノ平面ニテ S 及ビ

S' ヲ截斷シテ考ヘヨ.

309. 二平面ノ角ヲ θ トセバ $\triangle ABC=\triangle A'B'C'\cos\theta$. 次ニ $DD'=p$ トセバ D' ヨリ ABCD ノ面ニ下シタル垂線ノ長サハ $p\cos\theta$ ナリ.

故ニ 四面體 $ABCD'=\frac{1}{3}\triangle ABC\times p\cos\theta=A'B'C'D$

$$\therefore\ ABCD'=A'B'C'D.$$

310. 空間ニ在ル三角形ノ面積ヲ A トシ原點ヨリ此平面ニ下シタル垂線ガ x, y, z 軸トナス角ヲ α, β, γ トセバ yz, zx, xy 面上ニ於ケル A ノ射影ハ $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$, $A\cos\gamma$ ナルヲ以テ $A^2\cos^2\alpha+A^2\cos^2\beta+A^2\cos^2\gamma=A^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=A^2$

311. 二點 (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) 間ノ距離ハ

$$D^2=x^2+y^2+z^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2-2(xx_1+yy_1+zz_1)$$

此式ニ $x=\gamma\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\gamma\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\gamma\cos\theta$

$$x_1=\gamma'\sin\theta'\cos\varphi',\quad y_1=\gamma'\sin\theta'\sin\varphi',\quad z_1=\gamma'\cos\theta'$$

ヲ代入セヨ.

312. 球面ノ中心ヲ O トシ, OA ヲ z 軸, O ヲ過リ OA ニ垂直ナル平面ト AOB 面トノ交リヲ x 軸トスレバ

$$\angle AOB=c=\theta,\ \angle AOC=b=\theta',\ \angle xOC'=A=\varphi',\ \varphi=0$$

但シ C' ハ BOC, AOC 平面ノ交線上球面ノ上ニ在ル點トス.

此等ノ値ヲ前題ノ式ニ代入スレバ

$$BC^2=r^2+r^2-2r^2\{\cos c\cos b+\sin c\sin b\cos(-A)\}$$
$$=2r^2\{1-(\cos c\cos b+\sin c\sin b\cos A)\}$$

又三角形 OBC ヨリ $BC^2=4r^2\sin^2\frac{a}{2}$

此兩式ヨリ $2\sin^2\frac{a}{2}=1-\{\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\}$

$$\therefore\ \cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

313. 二直線ノ方向余弦ヲ l, m, n; l', m', n', トスレバ垂直ナルコトヨリ $ll'+mm'+nn'=0$

又ハ
$$1+\frac{m}{l}\cdot\frac{m'}{l'}+\frac{n}{l}\cdot\frac{n'}{l'}=0 \qquad (1)$$

次ニ $A+\frac{m^2}{l^2}B+\frac{n^2}{b^2}C=0$ ニ $\frac{n}{l}=-\left(\frac{bm}{l}+a\right)$ ヲ代入スレバ

$$\frac{m^2}{l^2}(Bc^2+b^2C)+2abC\frac{m}{l}+(a^2C+Ac^2)=0$$

此二根ヲ $\frac{m}{l}$, $\frac{m'}{l'}$ トスレバ根ト係數ノ關係ヨリ

$$\frac{m}{l}\cdot\frac{m'}{l'}=\frac{a^2C+Ac^2}{Bc^2+b^2C} \qquad (2)$$

同様ニシテ
$$\frac{n}{l}\cdot\frac{n'}{l'}=\frac{b^2A+a^2B}{Bc^2+b^2C} \qquad (3)$$

(2) 及ビ (3) ヲ (1) ニ代入シテ變形スレバ

$$(B+C)a^2+(C+A)b^2+(A+B)c^2=0$$

314. $1:2:3=l:m:n$ ヨリ

$$l=\frac{\pm 1}{\sqrt{14}},\quad m=\frac{\pm 2}{\sqrt{14}},\quad n=\frac{\pm 3}{\sqrt{14}}$$

$2:3:6=l':m':n'$ ヨリ

$$l'=\frac{\pm 2}{7},\quad m'=\frac{\pm 3}{7},\quad n'=\frac{\pm 6}{7}$$

二直線間ノ角ヲ θ トスレバ