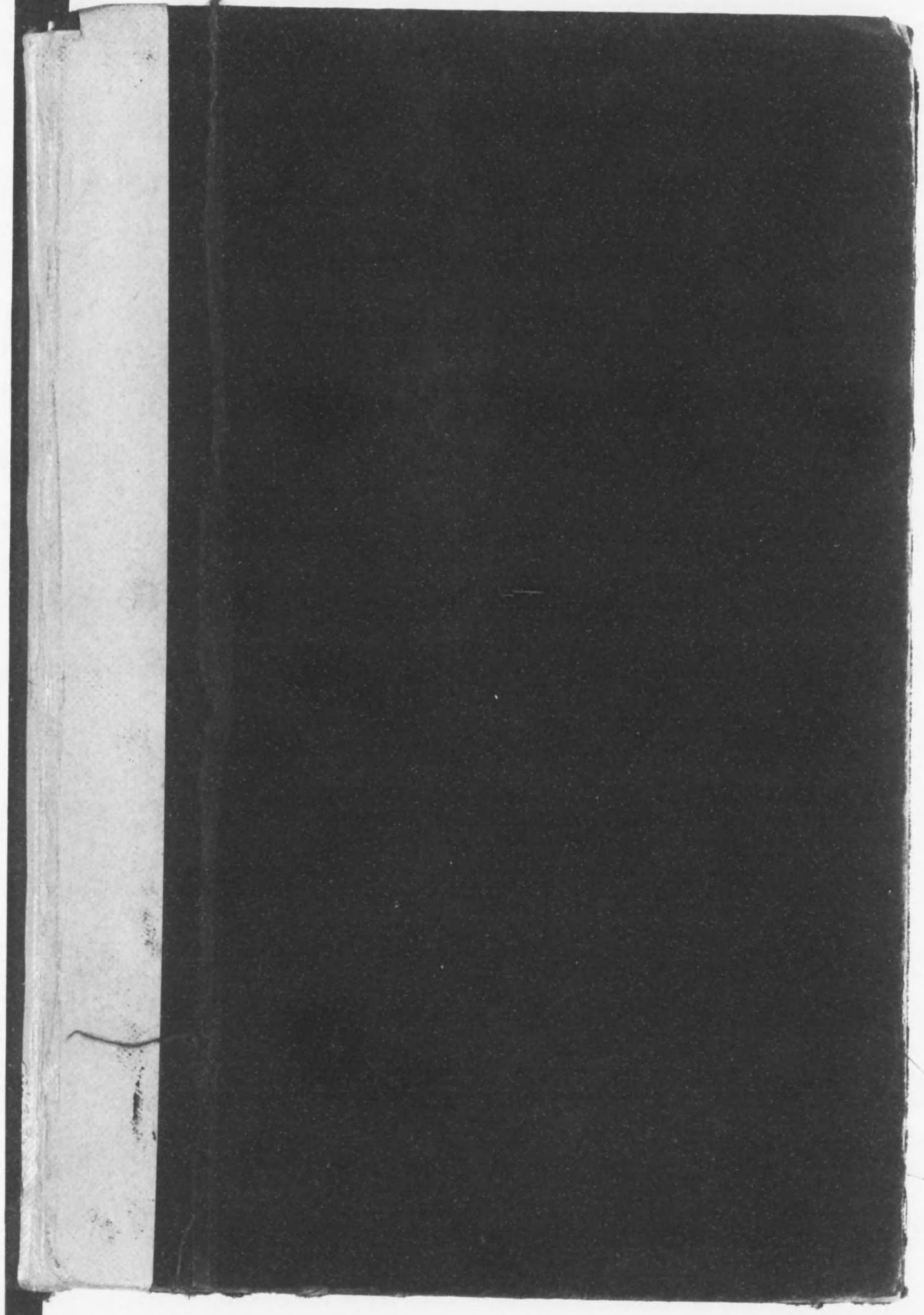




始



46
415

理學博士土井不曇著

物理學通論

中和會事務所



46-415

序

本書は中等學校の課程を了へて一步進んだ課程に入らんとする人々の要求に應ずる目的で編んだものである。とは云ひながら高等専門學校の學生が座右に備へて参考に資するといふ目的に對してよりも、章を遂つて通讀するに適してゐる。而も僅々 300 餘頁に盛られた内容であるが故に。物理學の全般を概念的に知らしめるといふ點に努力が集中されてゐる。

惟ふに物理學の分野は漸次擴大されて止まる所を知らぬ有様であつて、この廣汎に亘る内容を遺憾なく一小冊子に述べつくすことは、殆ど不可能に屬する。従つて各部に於て、之を物理學全體から觀たとき重要であると考へられる事項、乃至は之等を了解するに對して適當であると考へられる事項を能ふ限り漏らさず蒐收したならば、本書の如きが帯びる使命の大半は遂げられたものと云はなければならぬ。若しそれ進んで本書が、讀者の既に有せられるであらう所の事項に關しては専らその活用に意を用ひ、敘述はなるべく常識的に試みて、嚴密を偏愛するの餘りまはりくどい句を連續し結局讀者に何物をも與へないで終るが如き弊は極力之を避けたこと、さればといつて平易を志すの餘り讀者に不安の念を抱かしめ乃至は誤解に陥らしめることは無いやうに、本質的には敘述をかなり嚴格に進めたこと等を擲んで頂けたなら幸ひである。

更に一言断つて置きたい點は微積分の初歩計算を使用したことに關してである。これは讀者が此程度の計算に習熟せることを豫期したからではなく、唯その符號の意味を謂はゞ紹介する程度の希望を以てしたことに外ならないのである。

目 次

第一章	運動及び力	1
§ 1	質點の直線運動	1
§ 2	抛 體	4
§ 3	等速圓運動	7
§ 4	直線振動體	9
§ 5	萬有引力	12
§ 6	仕事と運動エネルギー	17
§ 7	力の保存系	20
§ 8	質點系	25
§ 9	廻轉系	28
§ 10	流 體	35
§ 11	弾 性	38
§ 12	表面張力と毛管現象	42
§ 13	波 動	49
§ 14	波動の傳波速度	54
§ 15	音	56
§ 16	減衰振動 強制振動	61
第二章	光	65
§ 17	光速度	65
§ 18	光の反射	68
§ 19	光の屈折	73

§20	レンズ	80
§21	收 差	86
§22	光の波動的現象	92
§23	分光器	99
§24	複屈折	103
§25	光學的活性	108
§26	倍率 分解能	112
第三章	熱	117
§27	温度 熱量	117
§28	熱力學の第一法則	119
§29	可逆變化	124
§30	熱力學の第二法則	133
§31	エントロピー	137
§32	状態變化	145
§33	熱の移動	151
第四章	電氣 磁氣	155
§34	電 場	155
§35	導 體	161
§36	絶縁體	165
§37	電氣容量	170
§38	磁 氣	173
§39	物質の磁化	174
§40	電場及び磁場のエネルギー	180
第五章	電 流	185

§41	電氣抵抗	185
§42	電流と熱	189
§43	接觸電壓	191
§44	電流と化學變化	194
§45	電流が作る磁場	196
§46	電磁感應	203
§47	交 流	211
§48	變壓器・感應コイル・誘導電動機	222
§49	真空放電	231
§50	電氣振動	236
第六章	輻射の本性と物質の構造	243
§51	電磁波	243
§52	X 線	246
§53	輻射波	249
§54	放射能	253
§55	電 子	255
§56	原 子	263
§57	分 子	271
§58	結 晶	279
§59	物質の熱的性質	282
§60	物質の電磁氣的性質	293
§61	原子核	301
§62	輻射と物質とエネルギー	307
	索 引	卷末

第一章 運動及び力

§1 質點の直線運動

ニュートンの運動方程式  ゼンマイを引き延すと縮まらうとする。全く同じ様なゼンマイを二つ作つて同じ様に引き延した時に縮まらうとする力は同じである。

それは引き延された二つのゼンマイの先をひつかけて互ひに引かせてみれば分る。従つて此の兩方のゼンマイが同時に一つのものを引く時はその力が二倍になることは明かである。此の様に一つの力の二倍三倍等の力を求めることが出来るから、一つの力が他の力の幾倍であるかを知ることが出来る。即ち力も長さや質量の様に測ることが出来る。ニュートン Newton は力を一つの物體に作用させた時にその物體がどう運動するかと云ふことを研究して次の法則を發見した。即ち物體に力が作用すると物體は力の方向に一定の加速度を生じ、此の加速度の大いさは物體の質量に反比例し、作用する力の大いさに比例する。之をニュートンの運動の法則といふ。従つて作用する力を f とし、物體の質量を m とし、生ずる加速度を a とすると a は $\frac{f}{m}$ に比例することになる。故に代數の公式にしたがひ

* f は force(力), m は mass(質量), a は acceleration(加速度)の頭文字をとる。以下力の大いさといふべき所を單に力といひ、他のものについても之に準ずる。且單位は斷らない限り C. G. S. 單位を使ひ、之を記すことを省略する。

$$a = k \frac{f}{m}$$

とおくことが出来る。但し k は a や f や m に無関係な一定の數である。

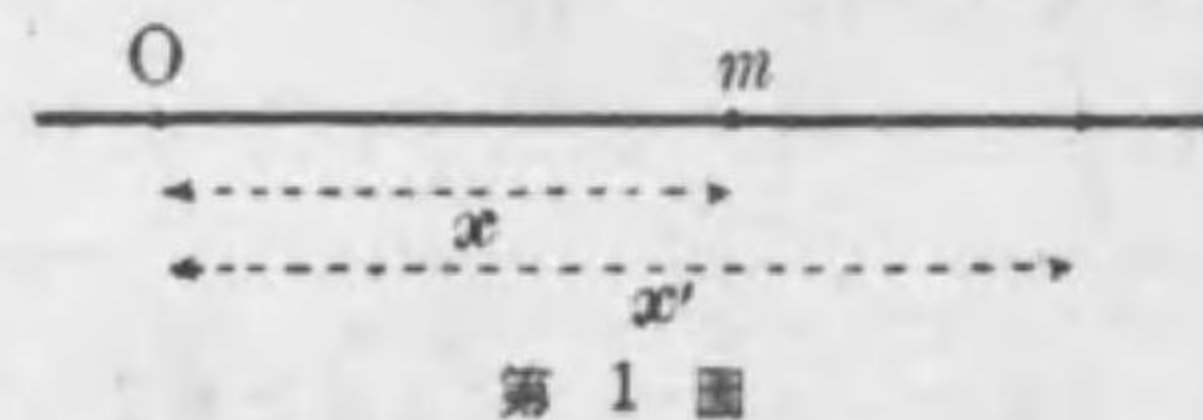
質量 1g の物體に $1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ の加速度を生ずる力を 1 ダイーン (1 dyne) といふから常にこの單位だけを使ふことにすると k は 1 となり次式が成立つ。

$$f = ma \quad (1.1)$$

之をニュートンの運動方程式といふ。

質點の直線運動 物體に大きさがある時は力の作用點によつては物體に廻轉運動が起るから此の様な場合にはニュートンの法則はどう適用していかはつきりしない。此の法則が直接適用されるのは廻轉が起らない場合である。従つて若し質量はもつてゐるが大きさを有たない物體即ち幾何で云ふ點が質量をもつたものを考へるならばいつでも上の法則が使へる。このものを質點と云ひ、考を簡單にするのに都合のものである。物體が小さくてその大きさを考へる必要のない時は常に質點として取扱ふことが出来る。

物體の運動のうちで最も簡単な場合、即ち“質點の直線に沿うての運動”を考へる。質點の通路である直線上に一定の點 O をとり質量 m の質點の運動を之に關係させて考へる。 O から質點迄



第 1 圖

* $1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ は毎秒毎秒 1 厘のことである。sec は second(秒)の略。

の距離を x とすると質點の位置は x で與へられる。此の時 O を原點と云ひ、 x を質點の座標と云ふことは幾何學と同様である。質點が位置 x にある時刻を t とし、少し後の時刻 t' の時の質點の位置を x' とすると、質點は $t'-t$ の間に $x'-x$ だけ動いてゐる。従つてその平均の速度は動いた長さを動いた時間で割つて

$$v = \frac{x' - x}{t' - t}$$

である。速度が一定ならば之が速度になるが加速度がある時は之は平均の速度で $t'-t$ が短い程眞の速度に近くなる。従つて眞の速度 v は $t'-t$ が段々 0 に近づく時の極限である。數學の記法に従ふと

$$v = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{dx}{dt} \quad (1.2)$$

之は質點が位置 x にある時の速度である。次に位置 x' に質點がある時の速度を v' とすると平均の加速度は速度の變化を其の間の時間で割つて

$$\frac{v' - v}{t' - t}$$

である。之も前と同様に時間が短い程眞の加速度に近くなるから質點が位置 x にある時の加速度 a は次式で與へられる。

$$a = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.3)$$

(1.3) 式を (1.1) 式に代入すると

$$f = m \frac{dv}{dt}$$

となる。質量は不變なものとすると之は

* v は velocity (速度) の頭文字である。

$$f = \frac{d}{dt}(mv) \quad (1.4)$$

と書くことが出来る。質量と速度との積 mv を運動量と云ふから (1.4) 式は次の様に解釋することが出来る。即ち質點の運動量の時間に對する變化の割合はその質點に作用する力に等しい。今質量は不變なるものとしたが質點が電氣を帯びてゐる様な場合は速度が大きくなると質量が變る。併し此の時にも (1.4) 式を適用すれば不都合のない事が知れてゐる。又相對論に於ても質量が速度と共に變るとするけれども (1.4) 式は成立するのである。

上式の適用を實例について説明しよう。落體が落ち始めてから t sec の間に經過する距離は g を重力の加速度とすると $\frac{1}{2}gt^2$ である。落ち始めた位置を原點とし時刻をその時から測ると丁度落ちた距離は前述の x となり

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.5)$$

である。従つて速度は (1.2) 式により

$$v = \frac{dx}{dt} = gt \quad (1.6)$$

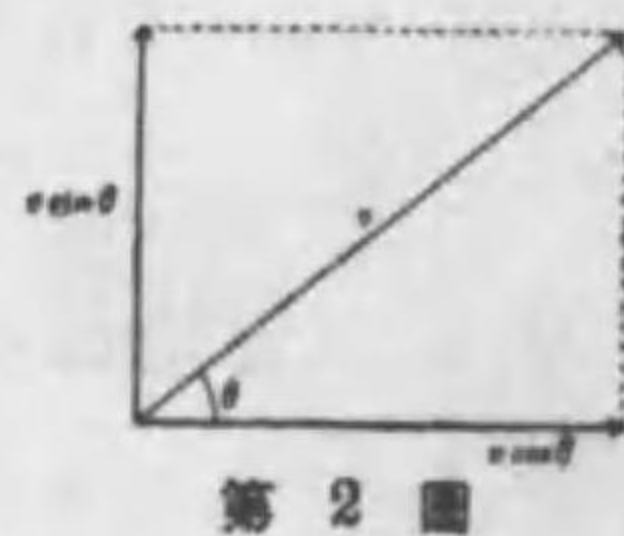
となり、加速度は (1.3) 式により

$$a = \frac{dv}{dt} = g \quad (1.7)$$

となつて既によく知つてゐる結果となる。

§ 2 抛 體

次に物體を斜めに投げた場合の通路を考へる。今質點を水平面と θ の角をなす方向に v の速度で投げたものとす



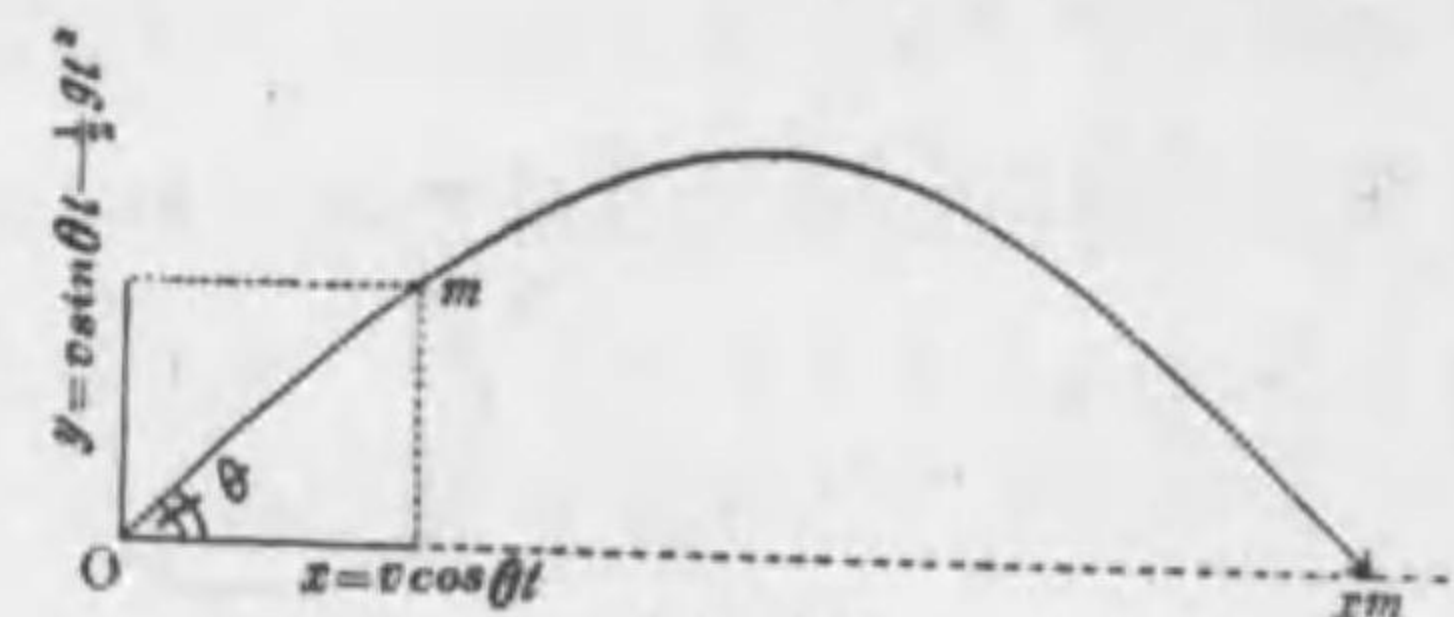
第 2 圖

る。 v を水平と鉛直との成分に分けて考へると

$$\text{鉛直成分} = v \sin \theta \quad \text{水平成分} = v \cos \theta$$

である。重力は鉛直に作用するから此の質點は鉛直方向には直上に向つて $v \sin \theta$ の速度で投げ上げられた質點と同じ運動をし、水平には重力が作用しないから $v \cos \theta$ の一定の速度で進む。従つて質點は此の二つの運動の合運動をする。

投げてから t だけ時間が経過した時水平の方向へ x だけ進んだものとする



第 3 圖

$$x = (v \cos \theta)t \quad (2.1)$$

である。又鉛直方向に y だけ昇つたとすると

$$y = (v \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.2)$$

である。(2.1) から $t = \frac{x}{v \cos \theta}$ となり、之を (2.2) に代入すると

$$y = (v \sin \theta) \frac{x}{v \cos \theta} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v \cos \theta} \right)^2$$

$$\therefore y = x \tan \theta - x^2 \frac{g}{2v^2} \sec^2 \theta \quad (2.3)$$

となる。之は解析幾何學で分つてゐる様に、拋物線の式である。即ち抛體の通路は拋物線である。實際は空氣の抵抗があるから、此の式の通りにはならないけれども大體の様子は之で分る。物體を地面上の一點 O から投げたものとする、之が地面上で到達する所 x_m は再び y が 0 になつた所である。故に之を求めるには (2.3) に於て $y=0$ とおけ

ばよい。即ち

$$x \tan \theta - x^2 \frac{g}{2v^2} \sec^2 \theta = 0$$

を x について解いてその根を求めればよい。左邊を x でくくると

$$x \left(\tan \theta - x \frac{g}{2v^2} \sec^2 \theta \right) = 0$$

となる。之の根は

$$x=0 \text{ 又は } \frac{2v^2}{g} \frac{\tan \theta}{\sec^2 \theta}$$

となる。 $x=0$ は投げた所であるから求める x_m は後者である。之を三角函数の公式により變形すると

$$x_m = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta \tag{2.4}$$

となる。即ち投げる速度 v が大きい程遠く迄達する。之は常識で考へても當然の事である。次に速度 v が一定とすればどの方向に投げた時に最も遠方に達するかを考へよう。 $\frac{v^2}{g}$ は θ に無関係だから $\sin 2\theta$ を最も大きくする様な θ の値が求める角である。所で \sin の値は 1 が一番大きく \sin が 1 になる角は 90° である。従つて x_m が一番大きくなる角 θ_m は

$$2\theta_m = 90^\circ$$

でなければならぬ。即ち

$$\theta_m = 45^\circ \tag{2.5}$$

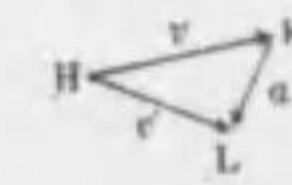
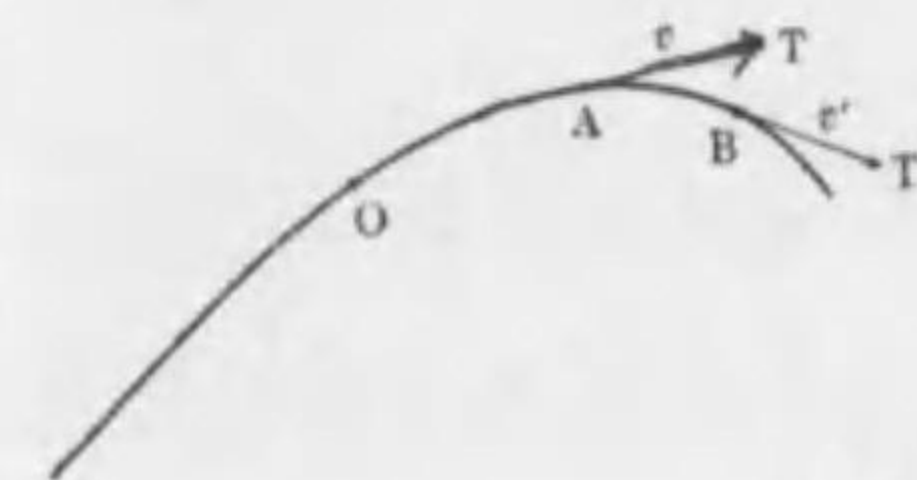
の時最も遠方に達する。競技の砲丸投などに於て 45° の方向に投げよと云ふ根據は茲に存する。又射撃に於て銃口を上げて程射距離が延びるのは(2.4)式に於て θ が 45° より

*勿論 θ は 0° から 90° 迄の間のみを考へる。

小さい間は θ が大きい程 x_m が大きくなるからである。

§3 等速圓運動

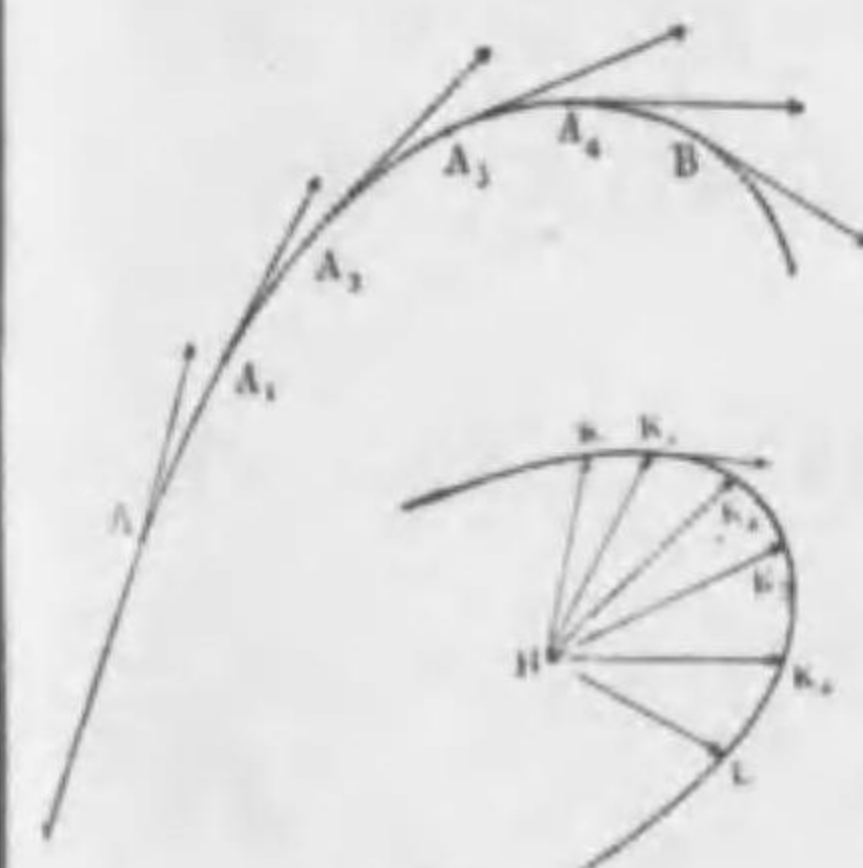
ホドグラフ 曲線運動をする質點の加速度を求めることを考へる。曲線OABに沿うて質點が運動してゐるものとする。



第4圖

のとする。A點に於ける速度の方向はその點の切線 AT の方向である。その時の速度の大きさを v とし、B點に於ける速度の大きさを v' とする。 $v'-v$ は此の間の速度の大きさの増加であるが、之をその間の時間で割つても加速度は出ない。加速度は速度の變化の割合であるから方向も一緒に考へなければならない。今別の點HにATと平行で v の長さの矢HKを畫き、BT'と平行で v' の長さの矢HLを畫くとAからBに質點が移る間に速度は \vec{HK} から \vec{HL} に變化してゐる。速度 \vec{HK} に速度 \vec{KL} を合はせると速度 \vec{HL} になるから速度の變化は \vec{KL} で表はされる

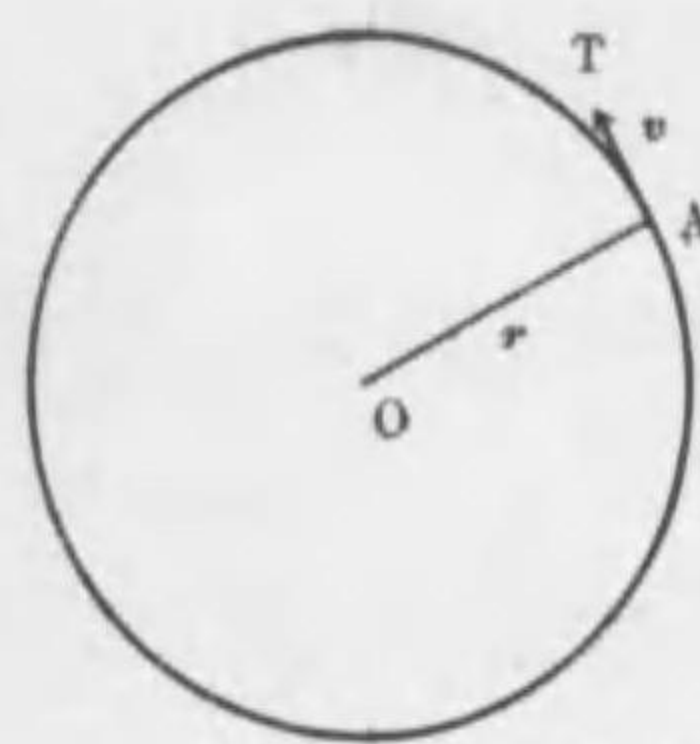
ことが分る。若しAからB迄行く時間が單位時間ならば速度 \vec{KL} は平均の加速度(大きさも方向も)を表はしてゐる。今AとBの間に $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ 等をとつて此の位置に於ける速度を前の様に一點Hから矢で畫いてみる。そして矢の先をつ



第5圖

なぐと一つの曲線が出来る。此の曲線を**ホドグラフ**といふ。質点がAからBに運動するとその速度を表すベクトルの先端はホドグラフの上を運動する。最初に考へた様に此のベクトルの先端の速度が質点の加速度(方向も大きさも)を表はすのである。此の様にして曲線運動をする質点の加速度を求めることが出来る。

等速圓運動 次に之を應用して等速圓運動をする質点の加速度を求める。半径 r の圓周上を質量 m の質点Aが



第6圖

一定の速さ v で運動してゐるものとする。質点の速度を表はすベクトルを一定点Hから畫いてホドグラフを作ると速さ v は一定であるからホドグラフはHを中心とする圓になる。そして質点が圓周を一周すると速度ベクトルの先端もホドグラフを一周する。圖に於てOAと速度 \overrightarrow{AT} は垂直であり速度ベクトル \overrightarrow{HK} とその先端の速度 \overrightarrow{KL} (之が質点の加速度となる)とも垂直であるから質点の加速度は中心Oに向つてゐることが分る。一周の時間は質点の通路の圓周を速さで割つて

$$\frac{2\pi r}{v}$$

である。ホドグラフの圓周は $2\pi v$ であるからホドグラフ上の速さ即ち質点の加速度の大きさ a は之を一周の時間で割ればよい。即ち

$$a = 2\pi v \div \frac{2\pi r}{v}$$

$$\therefore a = \frac{v^2}{r} \quad (3.1)$$

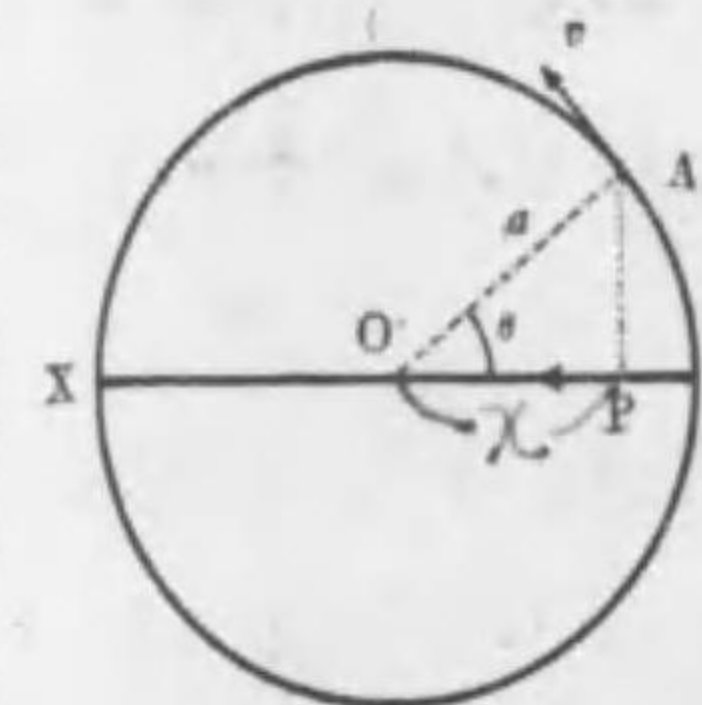
である。質点の質量は m であるから求心力 f は(1.1式により

$$f = \frac{mv^2}{r} \quad (3.2)$$

となる。

§4 直線振動體

變位 半径 a の圓周上を一定の速さ v で運動する質量 m の質点を考へる。直径XYを引き質点の位置Aから



第7圖

XYに垂線APを下しその足をPとする。

今点Pの運動を考察する。 $\angle AOY = \theta$,

$OP = x$ と表はすと

$$x = a \cos \theta$$

である。質点がYにある時から時間を

測りAの位置に来る迄の時間を t とすると

$$\theta = \frac{\widehat{AY}}{a} = \frac{vt}{a}$$

である。質点が圓周を一周する時間を T とすると

$$T = \frac{2\pi a}{v}$$

であるから

$$\frac{v}{a} = \frac{2\pi}{T}$$

となり、之を θ の中に代入すると

$$\theta = \frac{2\pi}{T} t$$

となる。之を x の表式に代入するとPの運動は

$$x = a \cos \frac{2\pi}{T} t \quad (4.1)$$

で表はされる。此の様な式で表はされる運動を単弦運動 (S. H. M. と略記する) と云ひ此の様な運動をする質点を直線振動體と云ふ。T は丁度質点が XY の間を一往復する時間で之を S. H. M. の週期といふ。其の逆数は單位時間内の往復の數で之を振動數と云ひ通常 ν であらはず。即ち

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (4.2)$$

である。 $\frac{2\pi}{T}t$ は質點の状態をあらはす角であるから S. H. M. の位相角又は單に位相といふ。OY = a は質點が中心から離れる最大の距離で、之を S. H. M. の振幅^{**}といふ。若し $t = -\frac{\pi}{2}$ を時刻の始とすると (4.1) は

$$x = a \sin \frac{2\pi}{T} t$$

となるから、一般に S. H. M. は

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \frac{2\pi}{T} t = a \cos 2\pi \nu t \\ \text{又は } x &= a \sin \frac{2\pi}{T} t = a \sin 2\pi \nu t \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

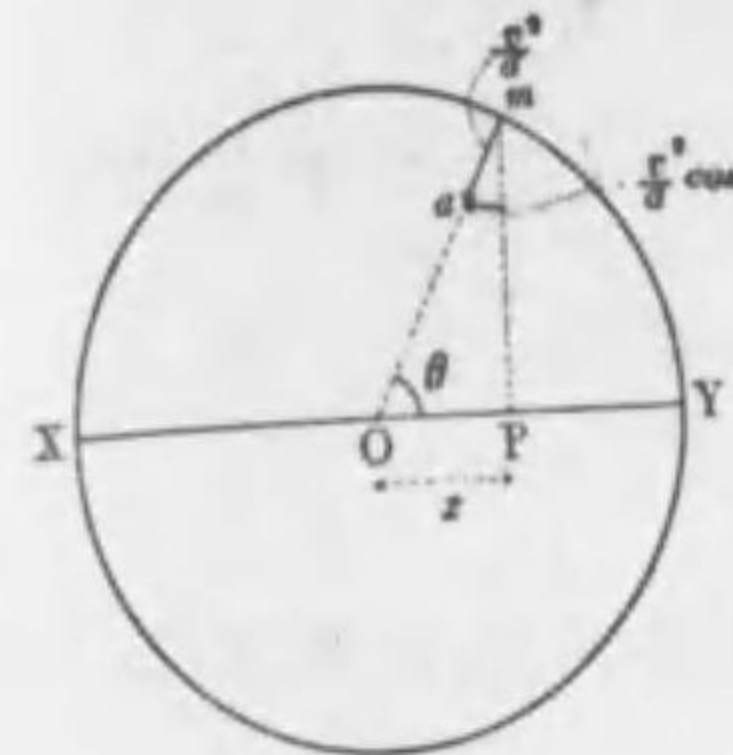
で表はされる。

加速度 直線振動體の加速度は圓運動の加速度の OY 方向の成分であるから

$$-\frac{v^2}{a} \cos \theta$$

で與へられる。 $v = \frac{2\pi a}{T}$ を入れると

* S. H. M. は Simple Harmonic Motion (單一調和運動)の略されたものである。
** a は Amplitude (振幅)の頭文字である。加速度と混同してはならない。



第 8 圖

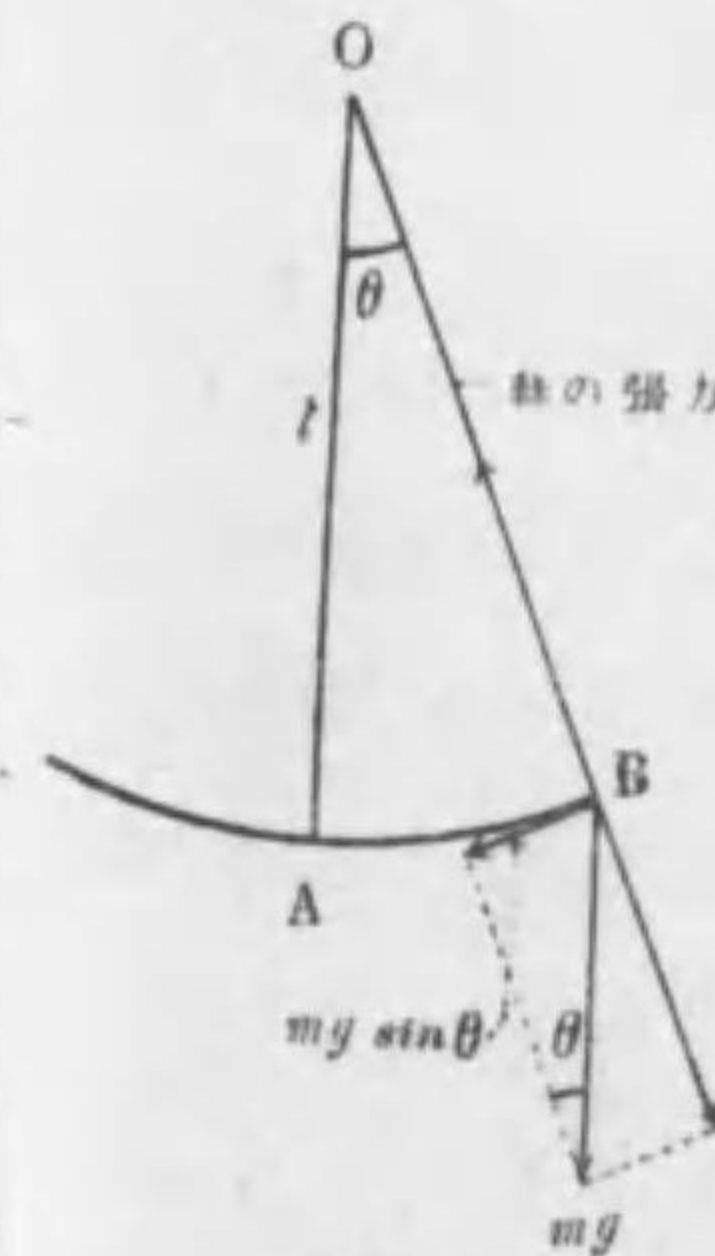
$-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a \cos \theta$ となる。然るに $x = a \cos \theta$ で加速度は $\frac{d^2x}{dt^2}$ であるから

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x = -(2\pi\nu)^2 x \quad (4.4)$$

となる。此の式は (4.3) を直接微分しても得られる。質點の質量は m であるから (1.1) 式により直線振動體に働く力 f は

$$f = -m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x = -m(2\pi\nu)^2 x \quad (4.5)$$

で與へられる。逆に一つの質點に働く力又は其の加速度が (4.4) 又は (4.5) で表はされる時は此の質點は直線振動體であつて S. H. M. をすることを計算により示すことが出来る。従つて力又は加速度が (4.4) 又は (4.5) の形になるならばその運動は直ちに (4.3) の形で與へられ、週期又は振動數は (4.4) 又は (4.5) と比較して比例常數から直接求めることが出来る。その一例として次に單振子を挙げよう。



第 9 圖

單振子 O から長さ l の糸で質量 m の質點 A を吊した單振子を考へる。

質點が B にきて糸が鉛直線 OA から角 θ だけ傾いたとする。質點に働く力は重力 mg と糸の張力とである。重力を糸の方向と之に直角の方向とに分けて考へると、前者と糸の張力との差引が O に向ふ求心力となり、後者はその大きさが $mg \sin \theta$ で糸と直角の方向の加速度を質

點に與へる。 $\widehat{AB}=l\theta$ で糸と直角の方向の加速度は之を時間について二度微分したものであるから $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$ である。従つて(1.1)により

$$m\left(l\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = -mg \sin\theta$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

を得る。今 θ が極めて小さいものとする $\sin\theta \approx \theta$ であるから次式が成立つ。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad (4.6)$$

之は x と θ とがちがふだけで(4.4)と全く同型である。従つてこの時 θ が時間と共に(4.3)の様に振動し、その週期は(4.6)と(4.4)を比較して $\frac{g}{l} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ で與へられる。即ち振子の週期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4.7)$$

となつてよく知られてゐる公式を得る。

§5 萬有引力

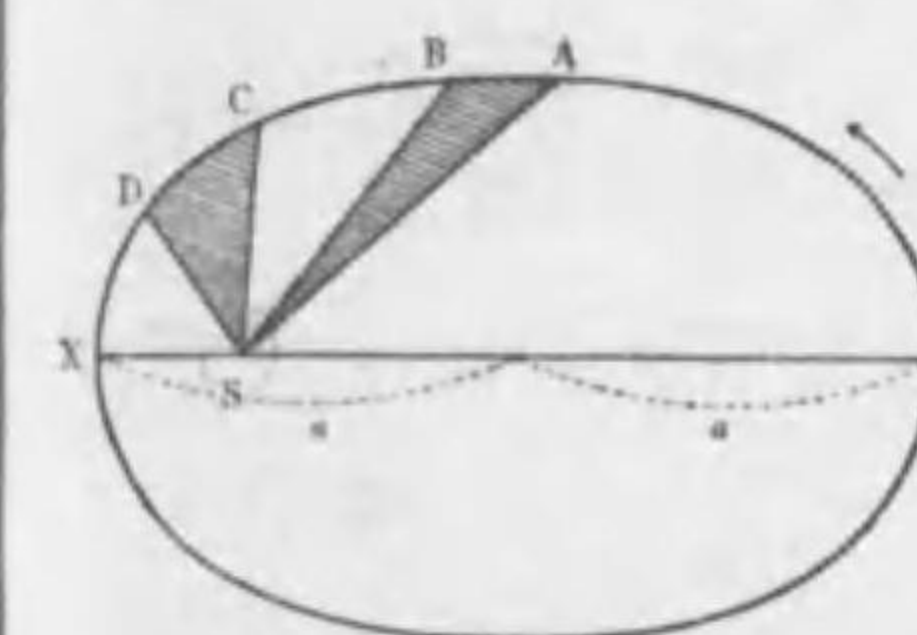
ケプレルの法則 デンマークの天文學者ティヒョ・ブラヘ Tycho Brahe は具さに遊星の運動を研究し、その観測の龐大な記録を残して死んだ。此の時臨終の床に呼ばれた青年天文學者ケプレル Kepler は此の記録を研究して所謂ケプレルの法則を發見した。之は次の三法則からなる。

第一法則 各遊星は夫々太陽を一焦點とする一定の楕圓軌道の上を運動する。

第二法則 太陽から遊星に到る動徑が任意の一定の時間に描く面積は各遊星につき一定である。

第三法則 軌道を一周する時間の自乗と軌道楕圓の長徑の三乗との比はどの遊星についても同じである。

第一法則は各遊星軌道の形を示し且つ太陽の位置が軌道に對して如何なる點に存するかを示してゐる。之は遊星に働く力が太陽と遊星との距離の自乗に反比例することを表はしてゐる。圖に於て S を太陽とし、 $ABCD$ を一つの遊星の軌道楕圓とする。今遊星が A から B 迄動く時間と C から D 迄動く時間とが同じであるとする。圖の様に之等の點を S



第10圖

に結んで出来る所の斜線を引いた部分 ABS と CDS とは面積が等しいと云ふのが第二法則の意味である。動徑とは SA, SB, SC, SD 等の事である。力が常に空間内の一定點に向ふ時此の空間を有心力場といひ、その一定點を力の中心といふ。又 ABS の如く動徑の描く面積の時間的變化の割合を面積速度といふ。第二法則は面積速度一定の法則を表はしてゐる。此の法則は有心力場で常に成立するものであるから第二法則は太陽を中心とする有心力場内に遊星があることを示してゐる。(§9 參照)

圖の XY が長徑でその半分を a とし、一周する時間を T (週期と云ふ) とすると第三法則は $\frac{a^3}{T^2}$ がどの遊星について

も同じであることを示してゐる。之は各遊星の單位質量に働く力がすべて一定であることを表はしてゐる。實例についてみると次表の様である。

遊星	a	T	$\frac{a^3}{T^2}$
水星	$5.793 \times 10^7 \text{ km}$	87.969 日	2.513×10^{19}
金星	10.81 " "	224.70 "	2.505 "
地球	14.95 " "	365.2564 "	2.502 "
火星	22.78 " "	686.98 "	2.505 "
木星	77.76 " "	4332.6 "	2.505 "
土星	142.6 " "	10759.2 "	2.504 "
天王星	286.9 " "	30586.3 "	2.523 "
海王星	449.5 " "	60187.7 "	2.508 "
プルトー	591.7 " "	90910 "	2.507 "

ニュートンの萬有引力の法則 ニュートンは此の法則より解析幾何學的に所謂ニュートンの萬有引力の法則が存在することを證明したのである。今日では微積分學を使つて極めて容易に導くことが出来る。

質量が夫々 m_1 及 m_2 なる二つの質點の間の距離を r とすると二つの質點の間に働く引力 f は

$$f = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (5.1)$$

で與へられる。負號を附けたのは力が引力であることを示すのである。若し正號ならば斥力を表はす。 G は一定の正の數で萬有引力の常數又は重力常數と云ふ。地球上の物體もやはり萬有引力により地球と引き合ふから落下

と云ふ現象が起る。地球は質點ではないけれども地球外部の質點と引き合ふ場合は地球の質量全體がその中心に集つて出來た質點と同等であることが分つてゐる。それで地表の物體を考へるときは(5.1)に於て r を地球の半徑、 m_2 を地球の質量、 m_1 を物體の質量と考へればよい。そこで地表で地球引力即ち重力が物體に與へる加速度は(1.1)により f を m_1 で割ればよいから

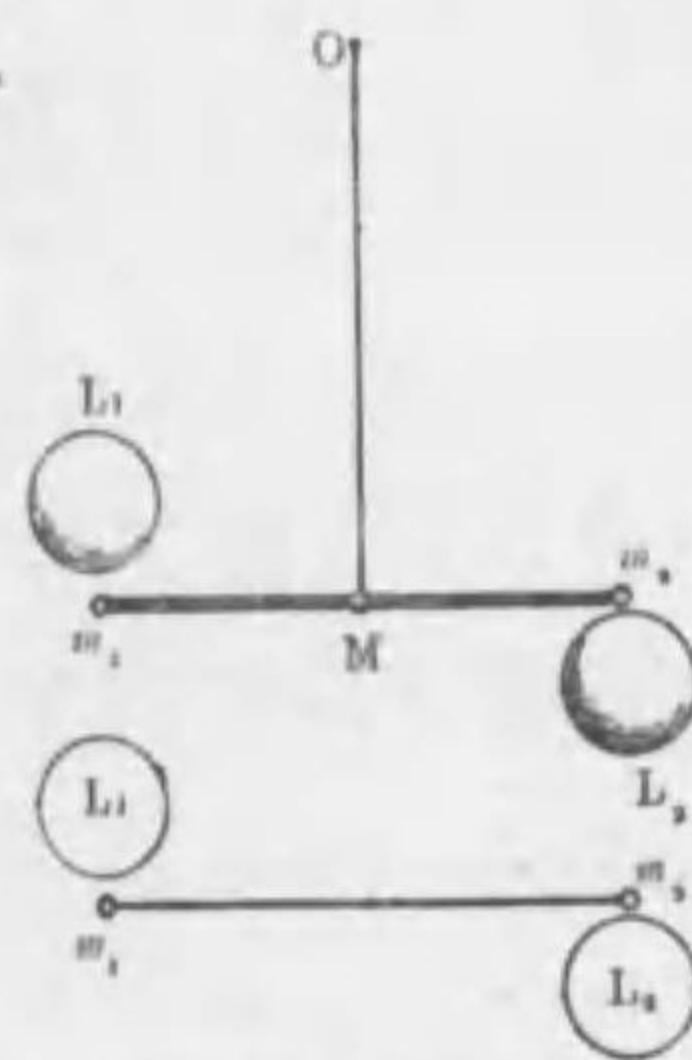
$$\frac{f}{m_1} = -G \frac{m_2}{r^2}$$

となる。 G, m_2, r は今は皆一定の値であるから地表では重力の加速度は物體の質量に無關係に一定の筈である*。之は重力の加速度は物體に無關係に一定の値 g であると云ふ既に知つてゐることと一致する。併し昔は落下加速度が物體によつて異ると考へた人もあつた。例へばギリシヤのアリストテレス Aristoteles は其の一人である。此の説は長く疑はれずにおたが十七世紀に至つてガリレオ Galileo がピサの斜塔上から種々の重さの物體を落して其の異なることを證した。ニュートンの萬有引力の法則は落體の現象はもとより天體の運動をも一括して説明するに至つたのである。

キャベンディッシュの實驗 さて G を一定の値とすると(5.1)により天體の運動をよく説明することが出来るが實際に天體の運動から G の値を求めることは出来ない。それは天體の質量が不明だからである。従つて G の値を求

*負號は加速度の方向が下向きであることを示す。

めるには質量の分つてゐる地球上の物體について引力をはからなければならない。此の企を始めて行つたのはジョン・ミチエル John Michell である。併し彼は測定装置を残したまゝ實驗を終らずに死んだ。死後其の装置はオラストン Wollaston の手に渡つたが彼は之をヘンリー・キャベンディッシュ Henry Cavendish に與へた。キャベンディッシュは之を僅かに改良して 1797 年の夏と 1798 年の春とに實驗を行つた。之が名高いキャベンディッシュの實驗であつて其の要點



第 11 圖

は次の様である。O から細い針金をつりその先に棒を水平につけ棒の兩端に同じ質量の鉛の小球 m_1, m_2 をつける。そして圖のやうに同じ質量の鉛の大きな球 L_1, L_2 を置くと m_1 と L_1, m_2 と L_2 は萬有引力で引き合ふから棒を吊つた針金が振れる。此の振れた角は加へられた力に比例するから振れを測定して力を知ることが出来る。引力は此の様な小さい物體の間では極めて小さいから振れの角も亦極めて小さい。それで棒の中心に小さな鏡 M をつけ之に光をあてて遠方から之を望遠鏡で観て振れの角を測定するのである。この様にして力距離質量等が分るから G の値を之より計算することが出来る。その後多くの人々が色々な方法で G の値を測定した結果

$$G = 6.670 \times 10^{-8} \text{ C.G.S. 單位} \quad (5.2)$$

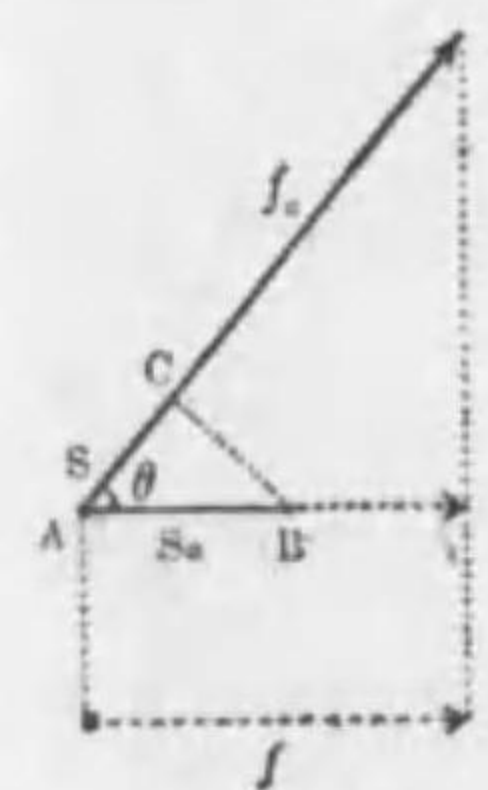
であることが分つた。此の値を使ふと (5.1) から地球の質量や他の天體の質量を計算することが出来る。その結果によると地球の質量 M は

$$M = 5.98 \times 10^{27} \text{ g}$$

である。

後に述べる磁力や電氣力は物質によつて幾分かさへぎることが出来る。萬有引力も亦この様にさへぎり得るか否かを多くの人々が研究したけれどもさへぎることは出来ない事が分つた。

§ 6 仕事と運動エネルギー



第 12 圖

圖の様に A にある質量 m の質點に f_0 と云ふ力が働いて質點を A から B 迄動かしたとすると此の力のなした仕事は力 f_0 と力の方向へ質點が動いた距離との積である。AB と力とのなす角を θ とし AB を s_0 , AC を s とすると仕事 W は次式で與へられる。

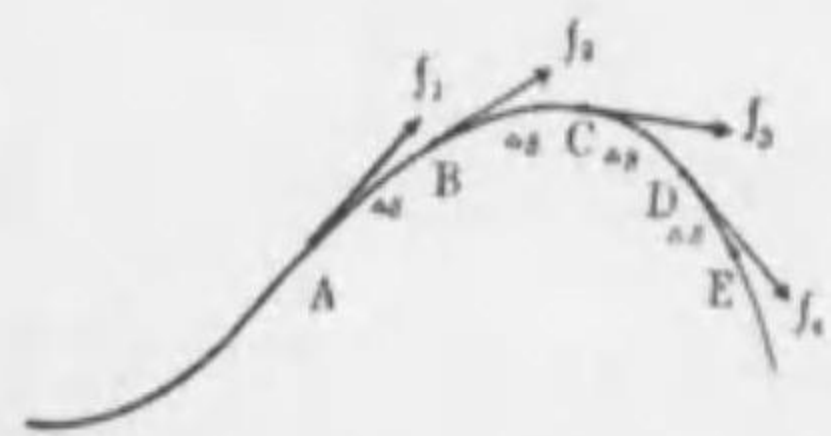
$$W = f_0 s$$

所が $s = s_0 \cos \theta$ であり AB の方向の f_0 の成分を f とすると $f = f_0 \cos \theta$ であるから仕事は次の様に書きかへることが出来る。

$$W = f_0 s = f_0 s_0 \cos \theta = f s_0 \quad (6.1)$$

即ち言葉で云ふと力のなした仕事は力と力の方向へ質點の動いた距離との積又は質點の動いた距離と質點の動い

た方向の力の成分との積又は力と質點の動いた距離にその間の角の \cos を掛けたものに等しい。次に力が質點の動くにつれて變化する場合を考へる。質點が曲線 ABCD



第 13 圖

E の上を動いたとき A から E迄に力がなした仕事を求めてみよう。A, B, C, D 等の點で質點に働いてゐる力の曲線の切線方向の成分を夫々 f_1, f_2, f_3, f_4 とする。A から E迄を B, C, D で四等分してその各の長さを Δs とする。さうすると A から E迄に力のなした仕事 W は大體に於て

$$f_1 \Delta s + f_2 \Delta s + f_3 \Delta s + f_4 \Delta s$$

に等しい。併し A から B迄の間にも力は變化するから正確には等しくない。A から E迄を更に細かく區切つて同じ様な和を作ると段々 W の眞の値に近くなる。分點が無限に多くなつて Δs が 0 に近づく時の極限に於ては丁度 W に等しくなる。所が此の様にして得た値は數學の方で分つてゐる様に力の切線方向の成分 f を曲線の長さについて積分したものである。従つて次の式が成立つ。

$$W = \int_A^E f ds \quad (6.2)$$

s は曲線上のある定點から測つた曲線の長さである。所が (1.1) により $f = ma$ である。此の時 a は切線方向の加速度と考へなければならぬ。従つて此の質點の速度を v とするときには直線運動の場合と同様に

$$a = \frac{dv}{dt} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

である。茲に注意すべき點は f や a は曲線の切線方向の成分である事である。(6.2) に於て f の代りに ma を代入し再び a の代りに $\frac{dv}{dt}$ を代入すると

$$W = \int_A^E m \frac{dv}{dt} ds$$

となる。所が微分の定理によつて

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt}$$

である。前述の様に $\frac{ds}{dt}$ は v であるから

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

である。再び微分の定理を使ふと

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = v \frac{dv}{ds}$$

となるから $\frac{dv}{dt}$ の代りに上式の左邊を代入すると

$$W = \int_A^E m \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) ds$$

となる。 m は常數であるから積分の外に出すと

$$W = m \int_A^E \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) ds,$$

所が之は $\frac{1}{2} v^2$ を s で微分し又 s で積分することになつてゐるから元に戻つて不定積分の値は $\frac{1}{2} v^2$ となる。従つて

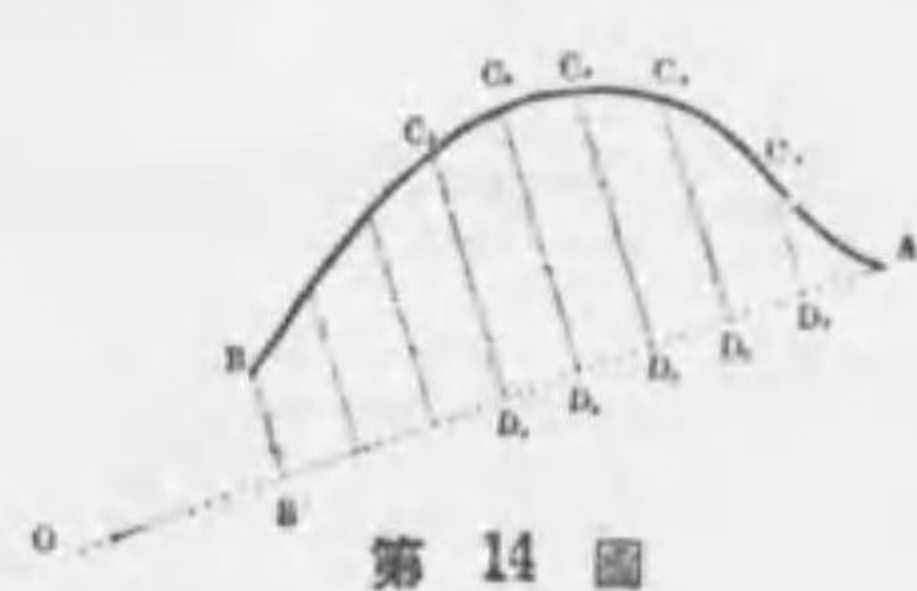
$$W = m \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_E - m \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_A,$$

$$\text{即ち} \quad \int_A^E f ds = W = \frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{1}{2}mv_A^2, \quad (6.3)$$

但し v_A 及 v_E は夫々 A 点及び E 点の速度である。言葉で言へば A から B 迄に力のなした仕事は質点の運動エネルギーの増加に等しい。

§7 力の保存系

次に力が萬有引力である場合を考へる。今一つの質点が O にあるものとし、他の一つの質点を A 点に置くと之に引力が働く。この様に力の作用の及ぶ空間を一般に力場といひ、萬有引力による力場を重力場といふ。



第 14 圖

今の重力場で質点を通路 A C₁ C₂ C₃... B に沿うて A から B 迄動かした時に萬有引力がなす仕事を考へてみよう。A と O を結び OB と同じ長さに OB' をとる。AB' の間を多くの點 D₁ D₂ D₃... 等で等分し、O を中心として D₁ D₂... 等を通る圓が曲線 A C₁ C₂... B と交る點を夫々 C₁ C₂... 等とする。力のなした仕事は前述の様に力と力の方向へ質点が動いた距離との積と考へることが出来るから A 点の力を f_A と云ふ様にかくと A から C₁ 迄に力がした仕事は大體 $f_A \cdot AD_1$ であり C₁ から C₂ 迄にした仕事は大體 $f_{C_1} \cdot D_1 D_2$ 、C₂ から C₃ 迄にした仕事は大體 $f_{C_2} \cdot D_2 D_3$ となる。従つて A から B 迄に力がなした仕事は之等の總和で

$$f_A \cdot AD_1 + f_{C_1} \cdot D_1 D_2 + f_{C_2} \cdot D_2 D_3 + \dots$$

となる。所が C₁ と D₁ は O から等距離にあるから $f_{C_1} = f_{D_1}$ である。同様に $f_{C_2} = f_{D_2}$ 、 $f_{C_3} = f_{D_3}$... 等であるから考へる仕事は

$$f_A \cdot AD_1 + f_{D_1} \cdot D_1 D_2 + f_{D_2} \cdot D_2 D_3 + \dots$$

となる。分點の数が無限に多くなるときの之は眞の仕事の値になる。所がその時は此の和は力 f を A から B' 迄 AB' に沿うて積分した事になる。A と B を結ぶ曲線がどんな形であつても此の事は云へるから A から B 迄質点を動かした時に萬有引力がなす仕事は通路に無關係に一定である。此の様に力場内で質点を或一點から他の一點迄動かした時に力のなす仕事が通路の形に無關係に一定である様な力場を力の保存系と云ふ。自然に存在する力は萬有引力の他に磁力、電氣力等があるが之等は皆保存系を作ると考へられる。従つて分子原子等の細かい部分に立入つて自然現象を考へる時は自然に存する力場は皆保存系と考へることが出来るのである。

位置エネルギー 次に力の保存系に於ける大切な性質を述べる。物體が位置の爲に有つてゐるエネルギーを位置エネルギーと云ふ。そのエネルギーの量は物體がある特別の位置に来る迄に力のなした仕事であらはず。所で今考へる二つの質点の場合はその特別の位置を二つの質点が無限に遠く離れた場合とする。今二つの質点の質量が夫々 M 及び m でその間の距離が r であるとする。二つの質点は萬有引力で引き合つてゐるのであるから離れ



第 15 圖

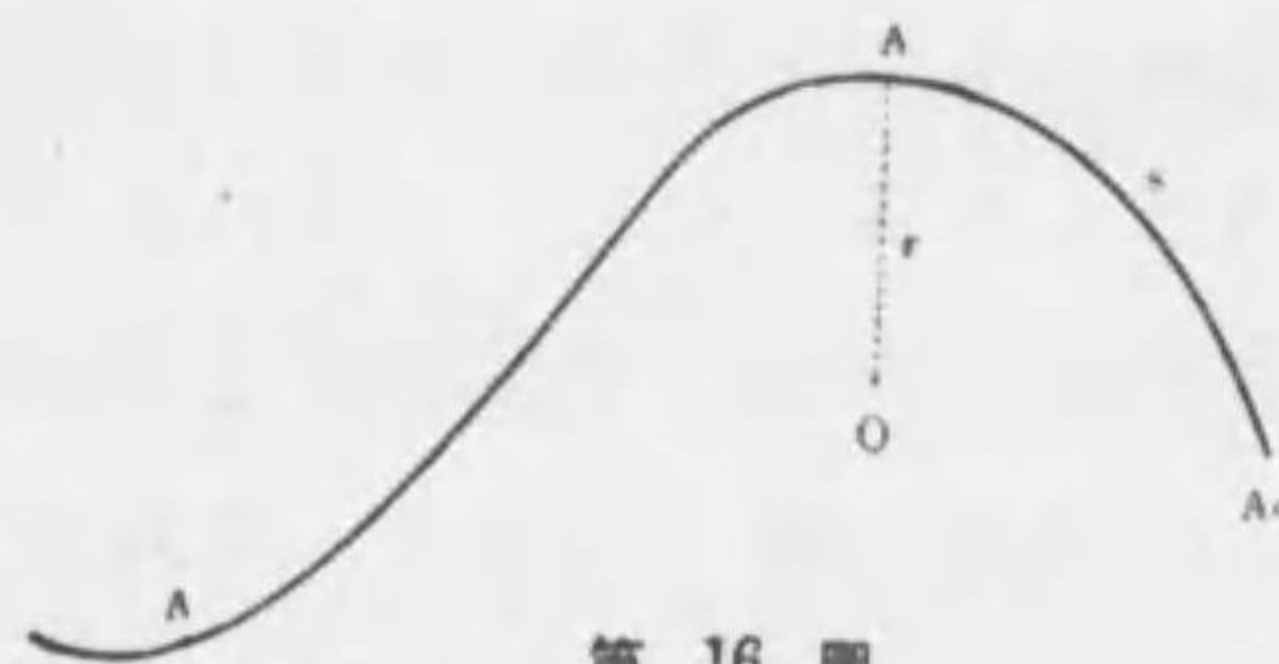
る爲には力が仕事をされる。r の距離から無限に遠く迄離れるときに力のなす仕事は従つて負である。前述の様に力場は保存系で仕事は力を直線に沿うで r の位置から無限大の所迄積分すればよから質点 m が r の位置にあるときの位置エネルギーは

$$W = - \int_r^{\infty} \left(G \frac{mM}{r^2} \right) dr = \left[G \frac{mM}{r} \right]_r^{\infty} = -G \frac{mM}{r} \quad (7.1)$$

となる。

ポテンシャル

さて今求めた W は質点を動かす通路



第 16 圖

に無関係なのであるからその通路を曲線 A'A₁ A₂ としてもよい。AO=r、 $\widehat{A_1A_2}=s$ とすると (6.2) により

$$W = \int_s^{\infty} f ds$$

となる。之に積分の定理を應用すると

$$W = - \int_{\infty}^s f ds$$

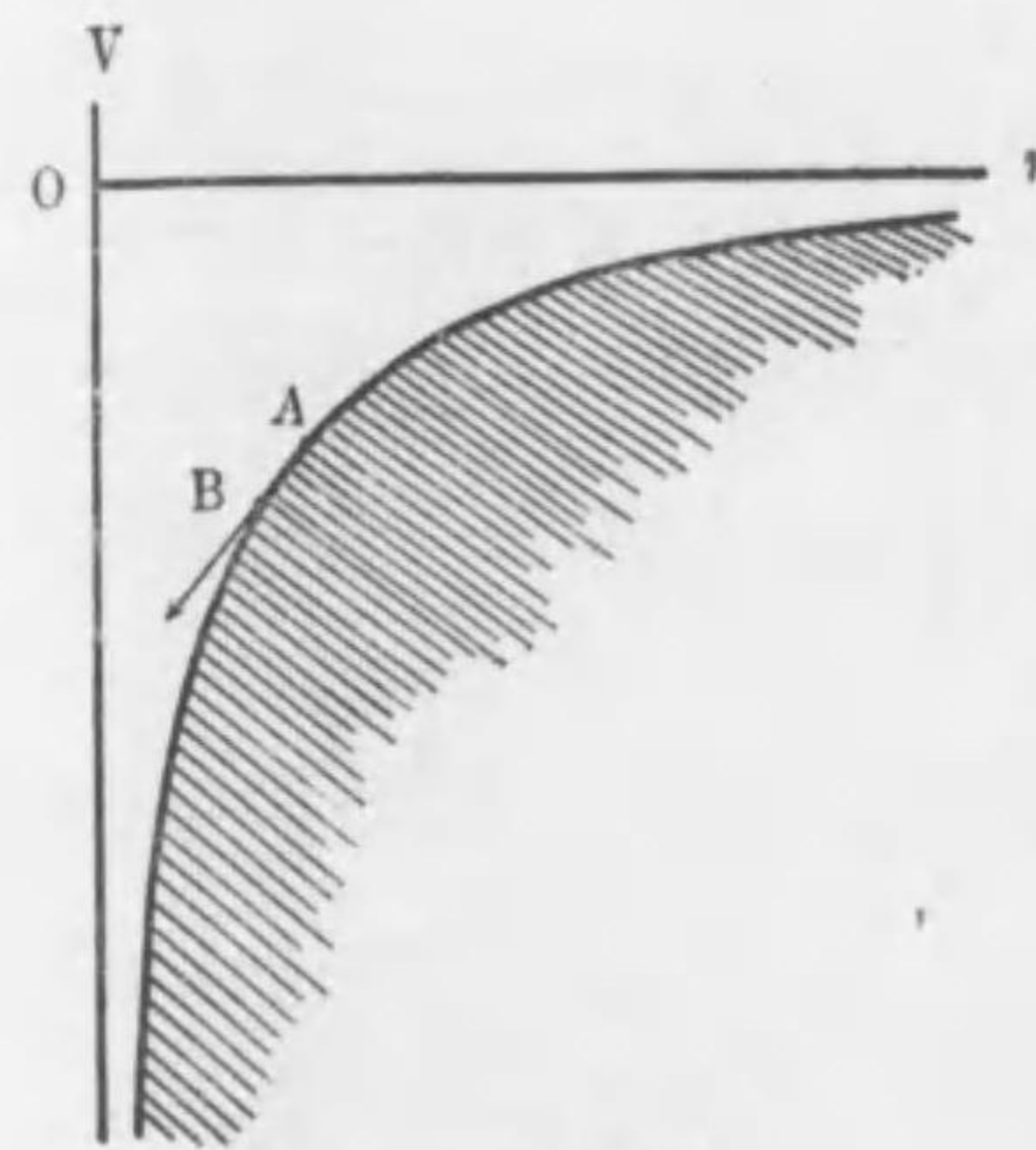
となる。但し f は曲線の切線方向の力の成分である。今 W を s で微分すると、s で積分したものを再び s で微分することになるから -f となる。故に

$$-\frac{dW}{ds} = f \quad (7.3)$$

を得る。此の W の様にそれをある曲線に沿うて微分してその符號を逆にすると丁度質点に働く力の曲線の切線方向の成分になる様なものを一般に質点に働く力のポテンシャルと云ふ。従つて位置エネルギーはポテンシャルである。質点の質量 m が異るとポテンシャルにも大小が出来るから m=1 とした時のポテンシャルを力場のポテンシャルと云ふ。従つて重力場のポテンシャル V は (7.1) で m=1 とおいて

$$V = -\frac{GM}{r} \quad (7.4)$$

である。之のグラフは第 17 圖の様に双曲線の一部である。



第 17 圖

O は第 16 圖の O に相當し右の方は O から遠方の方である。ポテンシャルは遠方の所程高くなつてゐる。此のグラフの斜線を入れた部の形の模型を滑かな木で作つたとすると O の所は丁度穴になる。

そして外程高いから若し質点を A 點に置いたならば B の方へ滑り落ちるであらう。之は即ち O の質点が吸引することに相當する。そして落ち様とする力は即ち O にある質点の引力である。(7.4) を r で微分して符號をかへれば力になるのであるが、r で微分することは即ちグラフの勾配を求めることであつて力は此の模型の面の勾配を

表はしてある。

機械的エネルギーの保存 力の保存系の第一の特徴は今述べた様にポテンシャルと云ふものを考えることが出来る事であるが、その第二は此の中に存する質点の位置エネルギーと運動エネルギーの和が一定なることである。

今質点がAからB迄動いたとする。その時の運動エネルギーの増加は力のなした仕事に等しい(前述)。所が此の仕事は(6.2)により

$$\int_B^A f ds$$

である。積分の意味から之を次の様に書き換へることが出来る。

$$\begin{aligned} \int_A^B f ds &= \int_{\infty}^B f ds - \int_{\infty}^A f ds \\ &= \left(- \int_{\infty}^A f ds \right) - \left(- \int_{\infty}^B f ds \right) \end{aligned}$$

此の時始の項は(7.2)から分る様にA点の位置エネルギーであり、後の項はB点の位置エネルギーであるから、仕事は位置エネルギーの減少に等しい。従つてAからB迄質点が動くとき運動エネルギーの増加は位置エネルギーの減少と全く等しいから両方の和は増減なしである。即ち機械的エネルギーの總和は不変である。云ひかへれば力の保存系ではエネルギー保存の法則が行はれる。前述の様

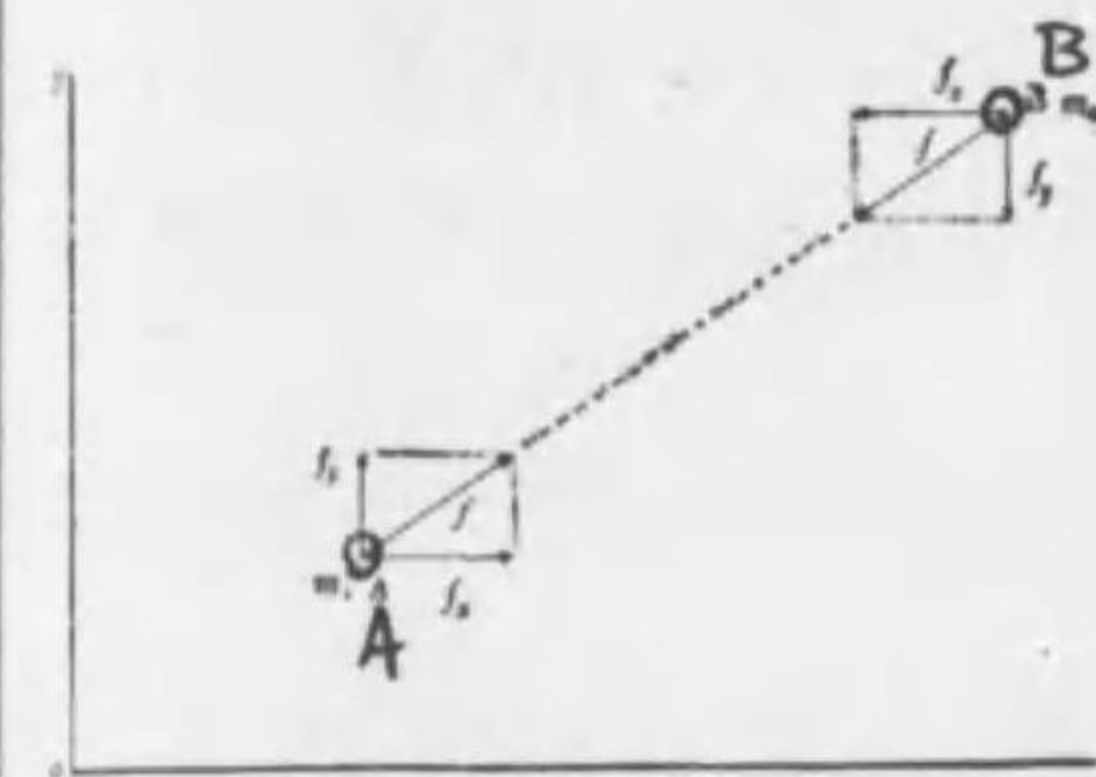
第18圖



に自然界の力は皆保存系を作ると考へられるから自然界ではエネルギー保存の法則が行はれるであらうことが了解される。

§8 質点系

重心の運動 今一平面内に、質量が夫々 m_1 及び m_2 の二



第19圖

つの質点A及びBが萬有引力で引き合つて運動してゐるものとする。Aが引かれる力を f としその x 方向の成分を f_x 、 y 方向の成分を f_y であらはすとニュートンの反作用の法則によつてBに働く力の x 方向及び y 方向の成分は夫々 $-f_x$ 及び $-f_y$ である。今此の他に m_1 には f' 、 m_2 には f'' と云ふ力が他から働いてゐるものとする。(1.1)に相當する式は x 方向及び y 方向について成立するから

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= f_x + f'_x, & m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= f_y + f'_y \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -f_x + f''_x, & m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -f_y + f''_y \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

となる。茲で (x_1, y_1) はAの座標で、 (x_2, y_2) はBの座標である。先づ x についての式を邊々加へてみる。

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = f_x - f_x + f'_x + f''_x$$

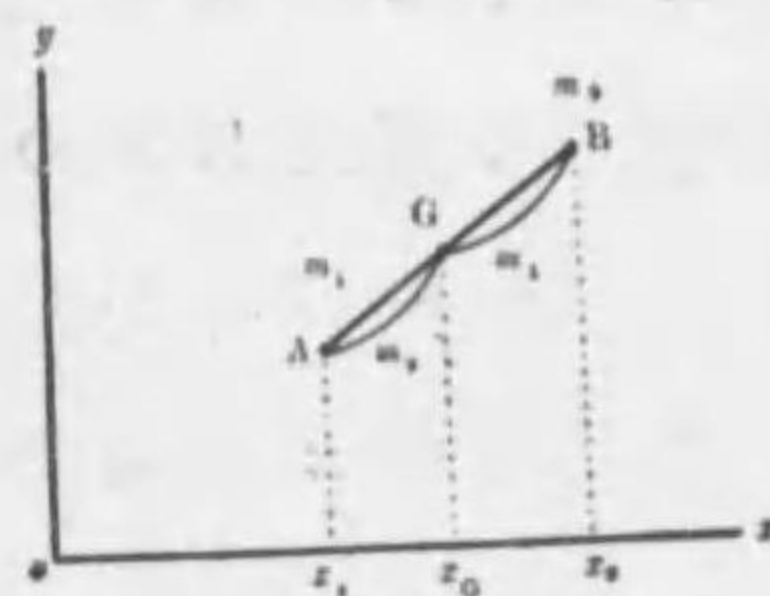
m_1 や m_2 は常數であるから微分記號の中へ入れてもよい。従つて上式は次の如く變形出来る。

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1x_1+m_2x_2)=f_x'+f_x''$$

此の左邊に $\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}=1$ をかけると

$$\left. \begin{aligned} (m_1+m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\right) &= f_x'+f_x'' \\ (m_1+m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right) &= f_y'+f_y'' \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

となり、同じ様にして y の方についても



第 20 圖

が成立する。さて A と B との重心を G とし G の座標を (x_0, y_0) とすると

$$\frac{x_2-x_0}{x_0-x_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

となる。従つて

$$\begin{aligned} m_2(x_2-x_0) &= m_1(x_0-x_1) \\ m_2x_2-m_2x_0 &= m_1x_0-m_1x_1 \\ (m_1+m_2)x_0 &= m_1x_1+m_2x_2 \end{aligned}$$

∴

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} \\ y_0 &= \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2} \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

となる。同様に

を得る。之等を(8.2)に代入し質点の質量の和を M とすると

$$\left. \begin{aligned} M\frac{d^2x_0}{dt^2} &= f_x'+f_x'' \\ M\frac{d^2y_0}{dt^2} &= f_y'+f_y'' \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

となる。此の式の意味を考へてみると丁度次のやうになる。

質点 A に f , 質点 B に f' と云ふ力が外から働いてゐるときに A と B との重心がなす運動は丁度重心に m_1 と m_2 との

和の質量 M を持つた質点があつて之に f と f' との合力が働いてゐるときに此の質点をする運動と同じである。之は質点の数が多くても同様に云ふ事が出来る。

従つて外から力が働いてゐない時は重心は静止してゐるか又は直線等速運動をする。

形のある物體は質点が集つて出来たものと考えることが出来るから之によつてニュートンの第二法則は物體の重心の運動に對して云はれることが分る。質点の間に働く力は萬有引力でなくても(8.2)式を作るときにニュートンの反作用の法則によつて消えてしまふから(8.2)式はそのときも成立つ。

運動量の保存 外から働く力 f, f' 等がなければ(8.2)

式は

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1x_1+m_2x_2)=0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1y_1+m_2y_2)=0$$

となる。一つだけ微分記號を括弧中に入れると

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\frac{dx_1}{dt}+m_2\frac{dx_2}{dt}\right)=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\frac{dy_1}{dt}+m_2\frac{dy_2}{dt}\right)=0,$$

となる。 $\frac{dx_1}{dt}$ 等は速度の x 成分であるから之を v'_x の様にかくと

$$\frac{d}{dt}(m_1v'_x+m_2v'_x)=0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1v'_y+m_2v'_y)=0$$

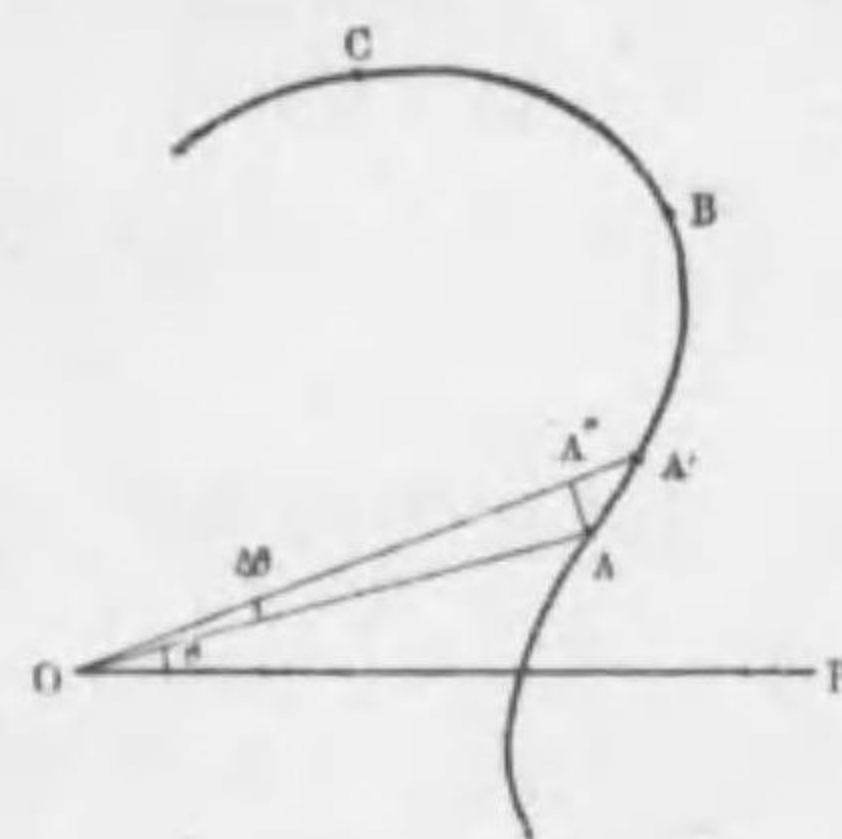
となる。微分をして0になるものは常數であるから

$$\left. \begin{aligned} m_1 v_x' + m_2 v_x'' &= \text{一定} \\ m_1 v_y' + m_2 v_y'' &= \text{一定} \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

である。即ち二つの質點の間にどんな力が働いてゐても(衝突するときも含まれる)外から力が働かない限り兩方の運動量の和は時間に無關係に一定である。之は質點の數が多い時にも同じ方法で云ふ事が出来、之を運動量保存の法則と云ふ。本節の考察は平面運動について行はれたけれども一般の運動についても同じ結果が成立する。

§9 廻轉體

力の能率と角運動量 一つの質點が一平面内で圖の



第 21 圖

様に曲線ABCに沿うて運動してゐるとき、一定の點Oから一定の直線OPをひき、Oと質點の位置Aとを結びOPとOAのなす角を θ とすると質點が運動するにしたがひ角 θ は段々に變化する。 θ が時間と共に變化する割合を角速度と云ふ。普通速度と同様に角速度も微分記號で表はすことが出来る。即ち ω を角速度とすると

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (9.1)$$

である。

ニュートンは時間で微分することを微分されるものの

上に點をうつて表はした。此の記法に従ふと

$$\omega = \dot{\theta}$$

である。前述の速度や加速度の様なものも此の記法で表はせば簡單にかける。即ち(1.2)(1.3)等は次の如く表はされる。

$$v = \dot{x} \quad a = \dot{v} = \ddot{x}$$

今極めて短い時間 Δt の間に質點がAからA'に移つたとすると $\frac{\widehat{AA'}}{\Delta t}$ の極限が速度の大いさである。OA'を結びOAを半径としOを中心とする圓とOA'の交點をA''とすると $\frac{\widehat{AA''}}{\Delta t}$ の極限は速度のOAに直角な成分となる。所で $\angle AOA'$ を $\Delta\theta$ 、OAを r とすると

$$\widehat{AA''} = r \Delta\theta$$

となる。従つて速度のAOに直角な成分を v_{\perp} とかくと

$$v_{\perp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\widehat{AA''}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta\theta}{\Delta t}$$

である。 $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ の極限は $\frac{d\theta}{dt}$ で之は(9.1)により ω に等しいから

$$v_{\perp} = r\omega = r\dot{\theta} \quad (9.2)$$

を得る。次に質點がO點の周りに圓運動をしてゐる場合を考へる。此の時は r は變らないから質量 m の質點の加速度のOAに直角な成分を a_{\perp} とすると

$$a_{\perp} = r\dot{\omega}$$

となる。 $\dot{\omega}$ は角加速度である。今質點に働いてゐる力のOAに直角な成分を f_{\perp} とすると

$$f_{\perp} = ma_{\perp}$$

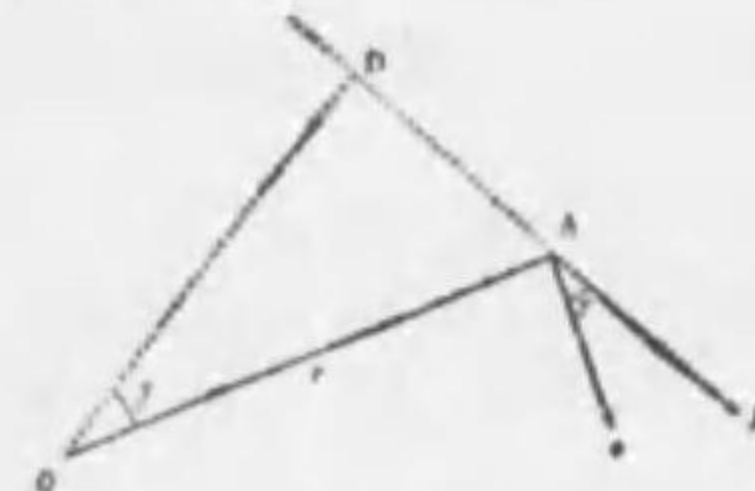
である。之に前の式を代入すると

$$f_{\perp} = mr\dot{\omega}$$

となる。兩邊に r を掛けて微分記號を外に出すと r は不変であるから

$$rf_{\perp} = mr^2\dot{\omega} = \frac{d}{dt}(mr^2\omega)$$

となる。所が(9.2)により $r\omega$ は v_{\perp} に等しい。そして今は圓運動を考へてゐるから v_{\perp} は v 其自身に等しく()の中は $r(mv)$



第 22 圖

である。又 Λ を通つて力の方向の直線をひき O から之に垂線を下して其の足を D とし $\angle AOD = \varphi$ とすると力が OA と直角な直線となす角も φ である。

従つて

$$rf_{\perp} = rf \cos \varphi = f r \cos \varphi,$$

然るに $r \cos \varphi = OD$ であるから rf_{\perp} は力の點 O に関する能率である。之を C とかき運動量 mv を G とかくと結局

$$C = mr^2\dot{\omega} = \frac{d}{dt}(rG) \quad (9.3)$$

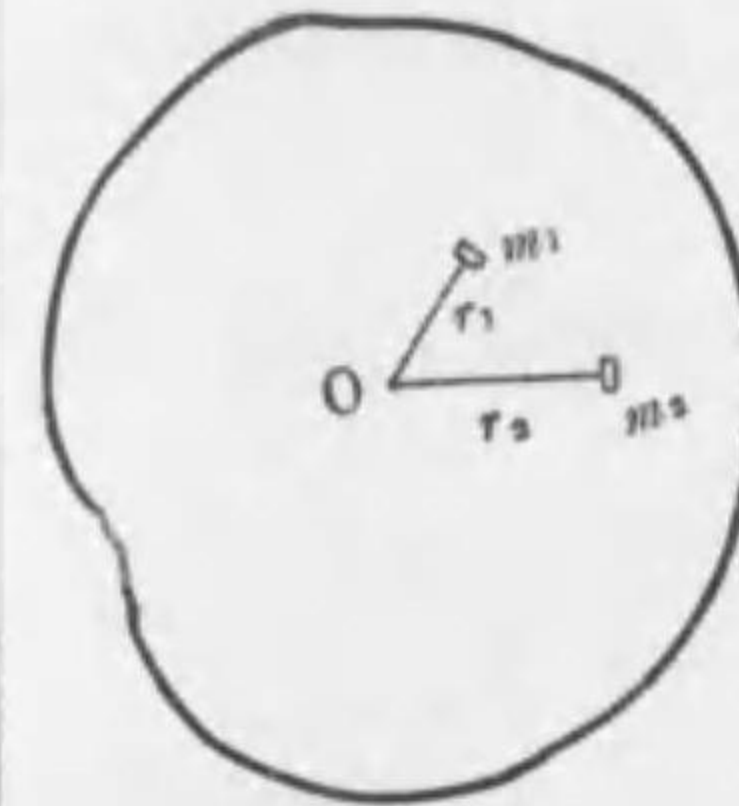
となる。 rG は點 O に関する運動量の能率であつて之を此の點に関する質點の角運動量といふ。従つて(9.3)は質點の或一點に関する角運動量の時間的變化の割合は質點に働く力のその點に関する能率に等しいことを表はしてゐる。今は圓運動の時について此の結果を得たが此の結果は一般の曲線運動についてもいへる。

有心力場に於て質點が運動する時は、力の中心に對する力の能率は常に 0 であるから力の中心に對する質點の角運動量は變化しない。角運動量は $mr^2\dot{\omega}$ で $\frac{r^2\dot{\omega}}{2}$ は面積速度

であるから中心力場では面積速度が一定である。(§5 參照)

剛體の迴轉運動 次に一定の形をもつてゐる固體の運動を考へる。どんな大きな力を加へても各部の相互位置のかはらない理想的の固體を剛體といふ。固體は形及び體積を變化することは困難であるから通常の場合には之を剛體として取扱ふことが出来る。

前節に於て物體の重心の運動は質點の運動と同様に取扱へることを知つた。剛體の位置は重心の位置と重心に對する各部の位置が分れば全く定る。従つて剛體の運動を研究するには重心の周りの迴轉運動を研究すればよい。



第 23 圖

今一つの剛體を極めて細かく分割して考へるとその一つ一つを質點と考へることが出来る。そして相互位置は不變なのであるから剛體が重心の周りに迴轉してゐるときその各は圓運動をしてゐる。重心は前述の O

點に當り質點の數は多いけれどもその各に對して(9.3)が當てはまるからそれ等を邊々相加へ合すと

$$C_1 + C_2 + C_3 + \dots = \frac{d}{dt}(r_1G_1 + r_2G_2 + r_3G_3 + \dots) \\ = m_1r_1^2\dot{\omega} + m_2r_2^2\dot{\omega} + m_3r_3^2\dot{\omega} + \dots$$

となる。之を Σ 記號で簡單にかくと

$$\Sigma C = (\Sigma mr^2)\dot{\omega} = \frac{d}{dt}(\Sigma rG) \quad (9.4)$$

となる。 ΣrG を剛體の重心に對する角運動量といひ、 Σmr^2 を剛體の慣性能率といふ。

$$H = \sum rG$$

$$I = \sum mr^2$$

$$K = \sum C$$

とおくと(9.4)は

$$K = I\dot{\omega} = \dot{H} \quad (9.5)$$

となり丁度(1.1)の如き形となる。即ち重心に対する剛体の廻轉運動に於ては外力の能率の和は角運動量の時間的變化の割合に等しい。

上の計算に於て分る様に

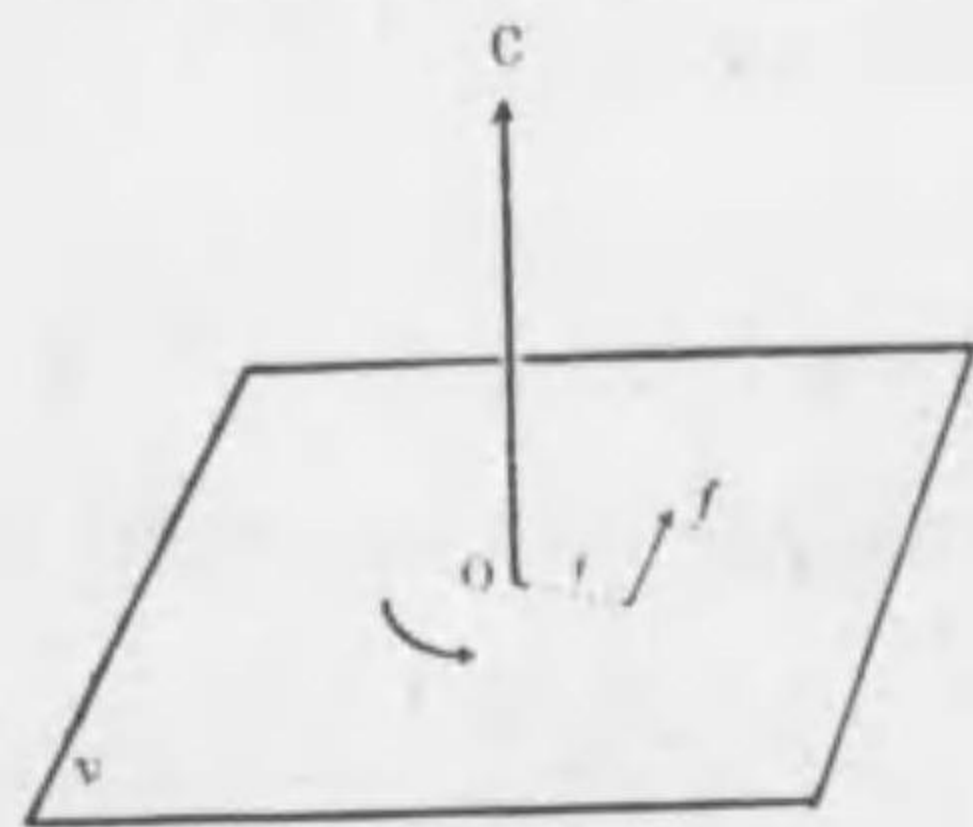
$$H = I\omega \quad (9.6)$$

である。又剛体の廻轉運動エネルギーを求めると

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \quad (9.7)$$

となることが分る。即ち I は質量に似た役目をつとめてゐる。

上の考察は平面圓運動から出發した爲に重心を通る一定の軸の周りの廻轉運動について得られた結果であるが角運動量及び力の能率をベクトルと考へると一般に角運動量の時間的變化の割合が外力の能率の和に等しいこと

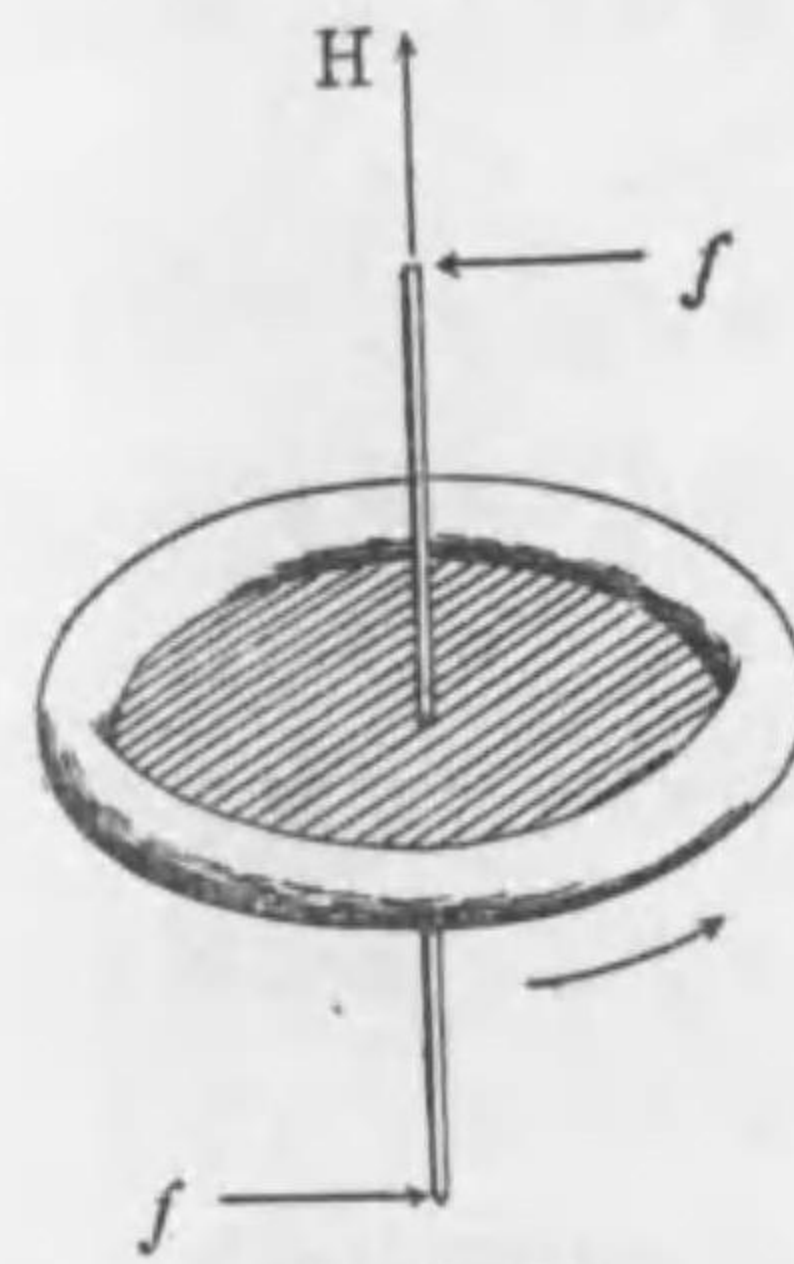


第 24 圖

が理論的に導き出される。但し能率を表はすベクトルは O 點に關して力の働く方向に右ネヂを廻すときネヂの進む方向をベクトルの方向とし能率の大きさをベクトルの大きさ

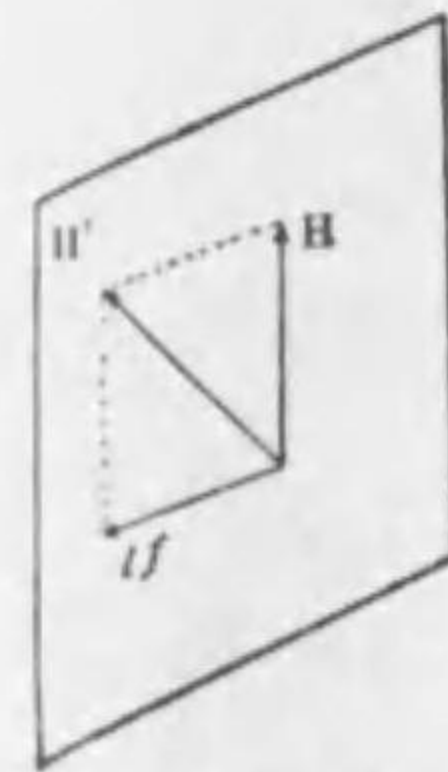
とする。角運動量も一種の能率であるから同様に考へる。

ジャイロスコープ そこで此の結果を使つて廻轉せるジャイロスコープの軸を傾けようとする力の働いた時それがどうなるかと云ふ問題を考へる。ジャイロスコープ



第 25 圖

が圖の様に廻轉してゐるとするとその角運動量ベクトルの方向は上向である。今軸の上端を右から下端を左から夫々力 f で押したならば此の二つの力は偶力を形成しその能率は f である。但し l は軸の長さである。此の能率を表はすベクトルは上の約束に従ひ紙面に直角に前方を向いてゐる。所が前

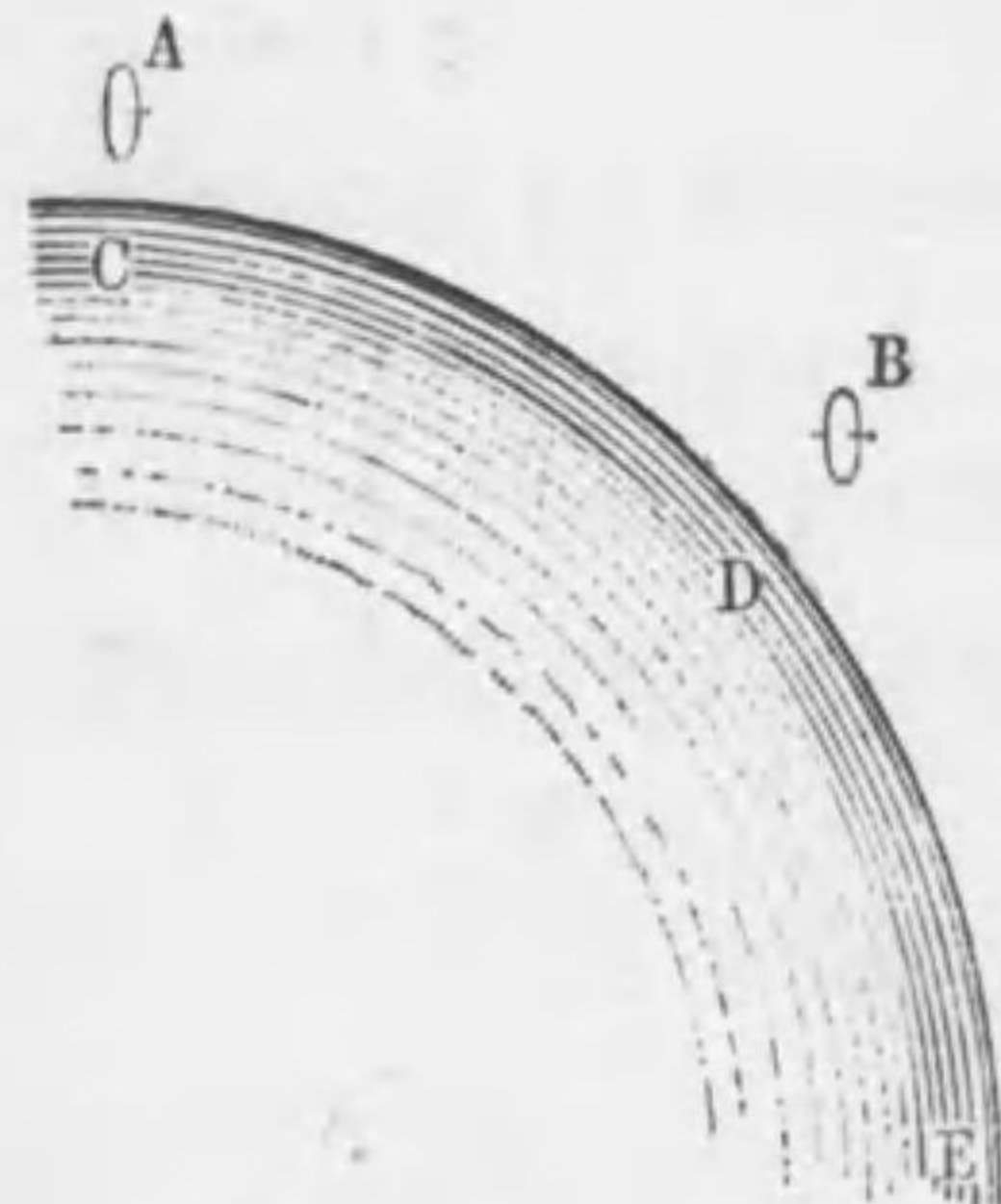


第 26 圖

に述べた様に之は H が單位時間に變化する割合である。従つて 1sec 後には H は H と f とのベクトル和である H' に變化する。ジャイロスコープの角運動量ベクトルの方向は常に軸の方向である。従つて H が H' に變ることとは軸が H' 方向迄廻轉することである。

従つてジャイロスコープの軸を廻さうとする偶力を加へると軸は偶力の面内に廻らないで之と直角の面内に廻る。而かもジャイロスコープの角運動量ベクトルの先端の廻る方向が偶力の能率を表はすベクトルの方向である。

* 軸の廻轉の角速度が大きい時は少しそれる。



第 27 圖



第 28 圖

ジャイロコンパスは此の理を
 應用したもので、その要部は、慣性
 能率の極めて大きな獨樂を廻轉
 子とし、之を入れる箱を場磁石と
 した誘導電動機である。廻轉子
 の軸が水平になる様に箱を吊し、
 吊した點は互に直角に自由に廻
 轉する環に固定されてゐる。此
 のジャイロコンパスが赤道上に
 あつて廻轉子の軸が東西を向い
 てゐたものとする。之に電流を
 通じて廻轉せしめその角運動量

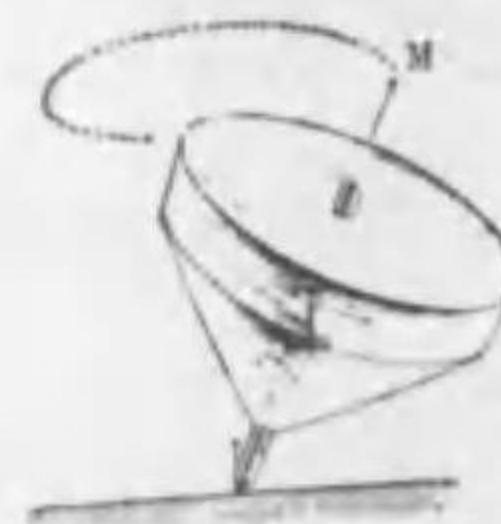
ベクトルの方向が東を向くやうにし
 たものとする。第27圖に於てCDEを
 地球の赤道面での切口とし南からみ
 たものとする。地球自轉の爲に暫く
 の後Aにあつたジャイロコンパスは
 Bの位置に来る。此の時廻轉軸は不
 變に保たれようとして圖の様になる。

かうなるともはや軸は水平でないから重力と吊した點の
 反作用の爲に偶力を受け、軸の東端が北に偏る。この事は
 廻轉軸が北を向く迄起るからジャイロコンパスの軸は遂
 に北を向いて靜止する様になる。赤道以外の位置では稍

* スペリー式。

複雑であつて、北を知るには緯度による補正、船の速度によ
 る補正等を要する。

獨樂が傾いた時味噌摺運動をするのも同じ理である。



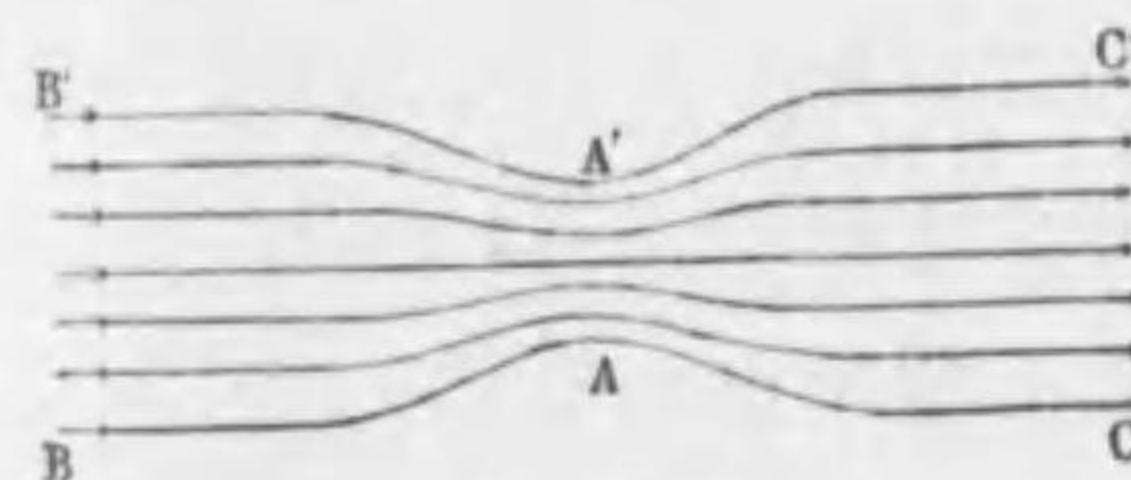
第 29 圖

此の時は獨樂の重さと足の下端に働く反
 作用とが軸を傾け様とする偶力となり軸
 は之と直角の方向へ廻る。

このやうな獨樂の運動と同じ様に地軸
 が攝動をするが之もやはり太陽の引力が地球の重心に對
 して能率をもつてゐるからである。

§ 10 流 體

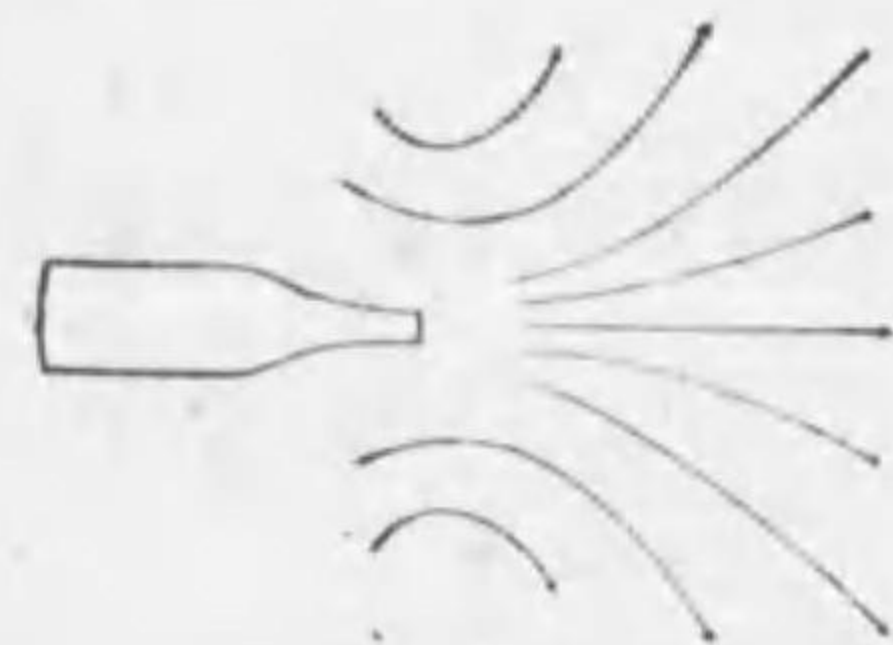
流體の流れの状態が一定の場所ではいつも同じである
 場合に之を定常の流れと云ふ。此の様な流れでは流體の
 一つの部分の通路の上にあるすべての部分は同じ通路の
 上を通る。此の通路を流線と云ふ。定常の流れについて
 は流線を考察することによつて問題を性質的にとくこと
 が出来る。次にその數例を述べる。



第 30 圖

第30圖の様に流線が或所
 でくびれてゐる場合を考
 へる。流れは定常である
 から流體は或部分に蓄積
 されることはない。従つてBB'の間を1sec間に通りぬける
 流體と同じだけの量がAA'の間を1sec間に通りぬけな
 ければならない。BB'よりもAA'の方が細いからBB'の所

よりもAA'の所の方が流體の流れる速度は大きくなければならない。従つてBからAに近づくに従ひ流體の速度は大になる。即ちBからAに向ふ加速度がある。更に言ひかへれば流體にはBからAに向ふ力が働いてゐる。重力等を考へに入れなければ此の力はB點とA點との流體の中の壓力の差による。流體がBからAに壓される爲にはB點の壓力がA點の壓力より大でなければならぬ。同様の理由でA點の壓力はC點の壓力よりも小さい。即ち同じ流線上の二つの點を比較すると流線がくびれてゐる點は他の點よりも壓力が小さい。之即ち細孔より氣體を噴出するとき孔の附近の壓力の小さくなる所以である。

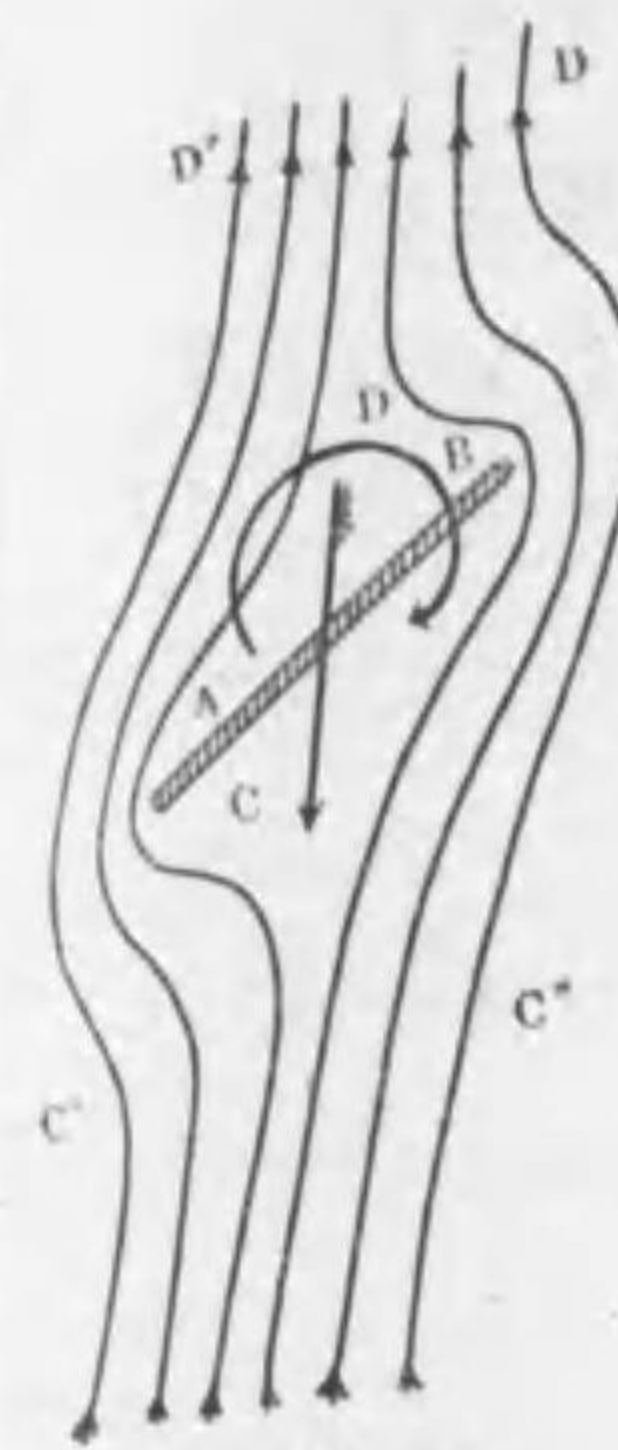


第 31 圖

次に流線が曲つてゐる場合異なる流線上の二點を考へる。第32圖のやうに流線がA點の方を中心にして同じ様に曲つたとする。流體の各部分は圓運動に近い運動をするからAの方に向ふ加速度がある。従つて流體にはBからAに向ふ力が働いてゐなければならぬ。即ち此の時はA點の壓力はB點の壓力よりも小さい。即ち流線が曲つてゐる時その曲率の中心に近い流線上の壓力は曲率の中心から遠い流線上の壓力よりも小さい。今板ABが流體中を→の様に斜に進む場合を考へる。此の時板についてみてゐると流體は上方



第 32 圖



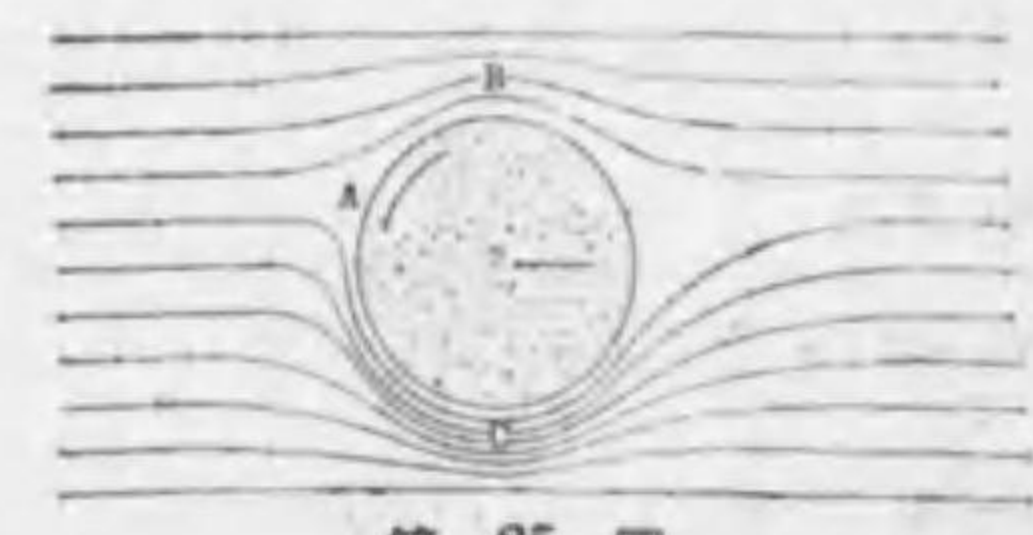
第 33 圖

へ流れる様に見える。そして流線は大體圖の様になる。上の考察を此の流線の曲り方に當てはめてみるとC點やD點はC', C'', D', D''等の點よりも壓力が大である。所が之等の點を遠方にとつて考へると板の影響が殆んどないから壓力は皆大體同じである。板に對してDやCと反對側は流線が曲つてゐないから遠方の方と壓力が同じと考へられる。従つてC點D點は板に對してその裏側よりも壓力が大きい。それで板は∩の様に廻轉される。貨幣を水中に投じても真直に沈まず、又木の葉がひらひらとおちるのは此の様にその平面が廻轉され落ちる先端の方が次第に上向きになる爲である。第三に球形の物體が廻轉しながら流體中を進行する場合を考へる。第35圖の様に球が矢の如く廻轉しながら右から左に進むものとする。球について流體を見ると流體は左から右に流れ、その流線は大體圖に示す様になる。球の廻轉の爲に近傍の流體がひきづられるからAからCに行く流體の方がAからBに行く流體よりも速くなる。即ち速



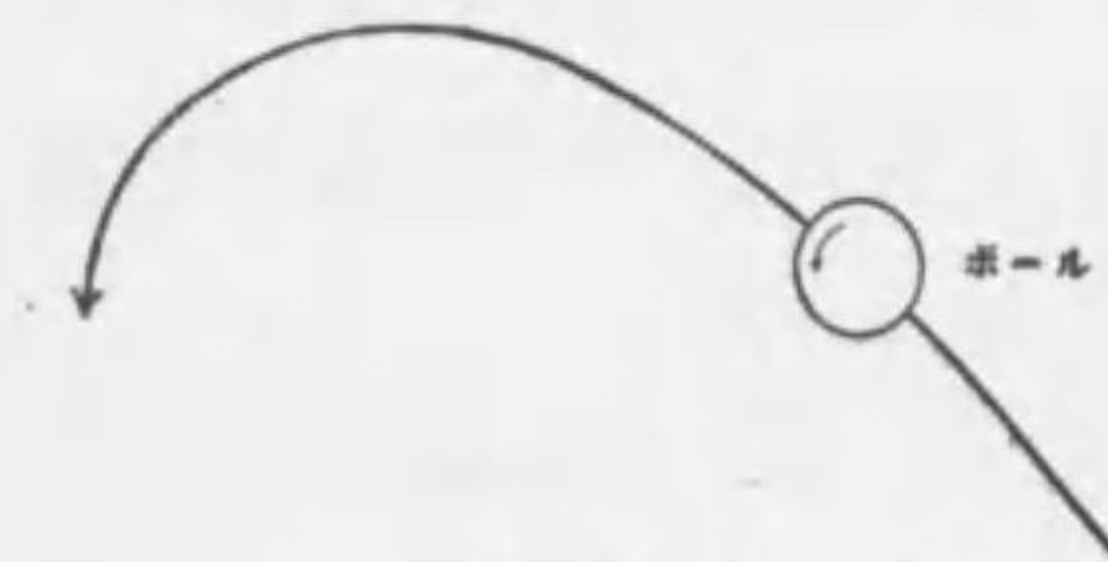
第 34 圖

その流線は大體圖に示す様になる。球の廻轉の爲に近傍の流體がひきづられるからAからCに行く流體の方がAからBに行く流體よりも速くなる。即ち速



第 35 圖

度の大きさはAからBに行くものよりもAからCに行くものの方が大きい。従つてA點の壓力はB點及びC點の壓力よりも大でA點とB點との壓力の差よりもA點とC點との壓力の差の方が大きい。故にB點の壓力はC點の壓力よりも大である。その結果、球はBからCに壓される。此の事は流線のくびれ方を見てもよく分る。即ち球の廻轉の爲に球の前面の中心よりもBに偏つた方の流體がCの方へ流されるからB點の流線のくびれ方よりもC點の流線のくびれ方の方がひどい。即ちAを中介にして考へるとB點の壓力の方がC點の壓力よりも大となる。野球、庭球、卓球等の球に廻轉を與へるとその通路が曲る現象は此の理由によつて説明される。

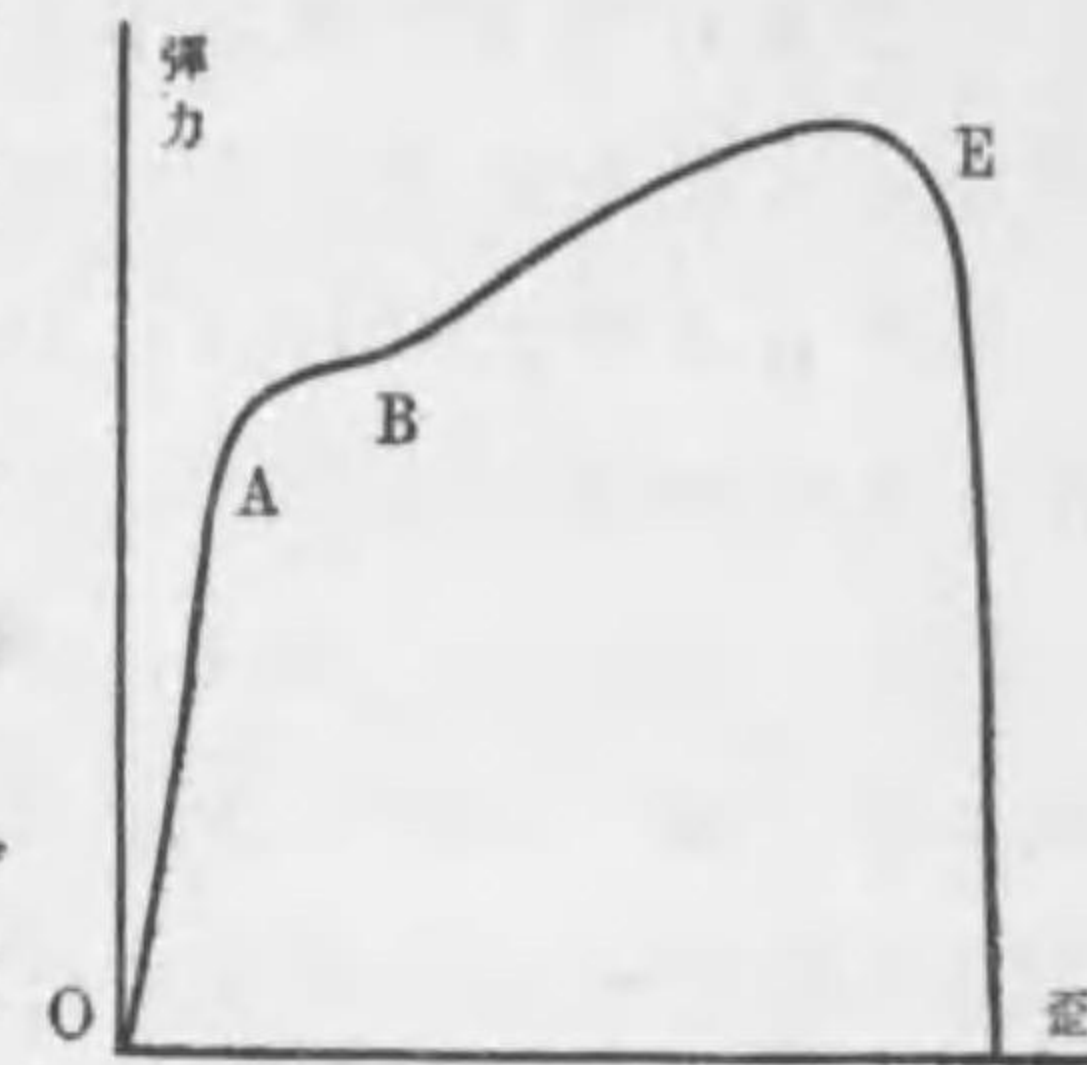


第 36 圖

§ 11 弾 性

外力を加へて物體の體積又は形を歪ませると一般に物體は舊の體積又は形に復さうとする弾力を生ずる。歪が小さいときは弾力が歪に比例するといふフック Hooke の法則が成立し、外力を去ると物體は舊の如くなる。若し歪が大きいときはフックの法則は成立せず、又外力を去つても物體は舊の如くならない。針金を引きのばした時歪と弾力との關係をグラフにすると第37圖の様になる。グラ

フのOAの部は丁度フックの法則が成立つ範圍でAが弾性の極限である。ABの間は歪が増しても弾力はあまり増さない。Bの所になると歪を増しても弾力は増さず外力が此の大きさになると歪は急に増す。此の點を降伏點と云ふ。更に歪を増すとEに至つて弾力は急に減じ針金は切れてしまふ。



第 37 圖

氣體は體積の弾性をもつてゐるがボイルの法則から分る様に歪が大きくなれば弾力は著しく増加する。

弾性率 長さ l 、切口の面積が S の針金を長さの方向に P の力で引き延ばして長さが Δl だけ伸びたとする。

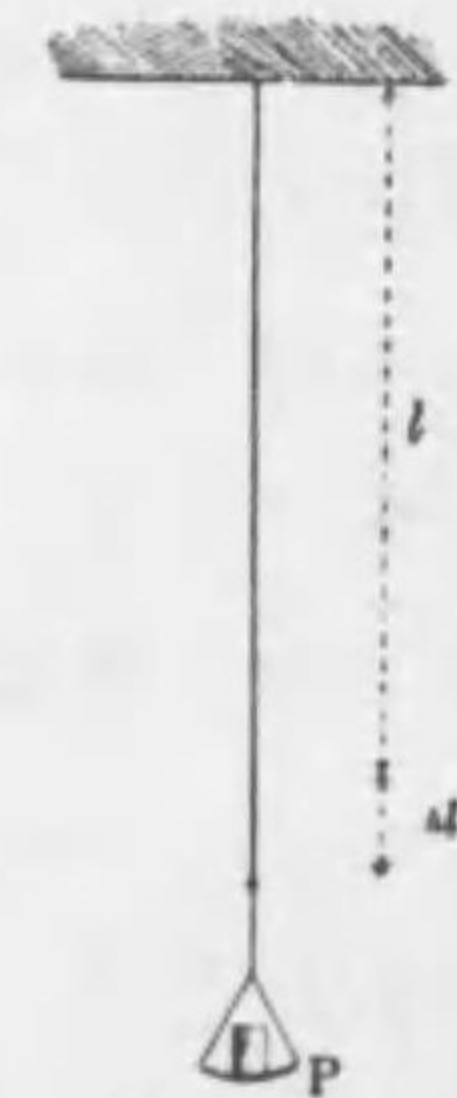
此の時弾力は外力と釣合つてゐるのであるからやはり P である。歪を單位の長さが伸びた割合であらして $\frac{\Delta l}{l}$ とし弾力は切口の單位面積についてあらはして $\frac{P}{S}$ とする。此の時フックの法則は $\frac{P}{S}$ が $\frac{\Delta l}{l}$ に比例することをあらはしてゐるから式でかけば

$$\frac{P}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

となる。但し E は比例の常數で

$$E = \left(\frac{P}{S} \right) \div \left(\frac{\Delta l}{l} \right)$$

であるから單位の歪を與へた時の弾力になる。 E は物質

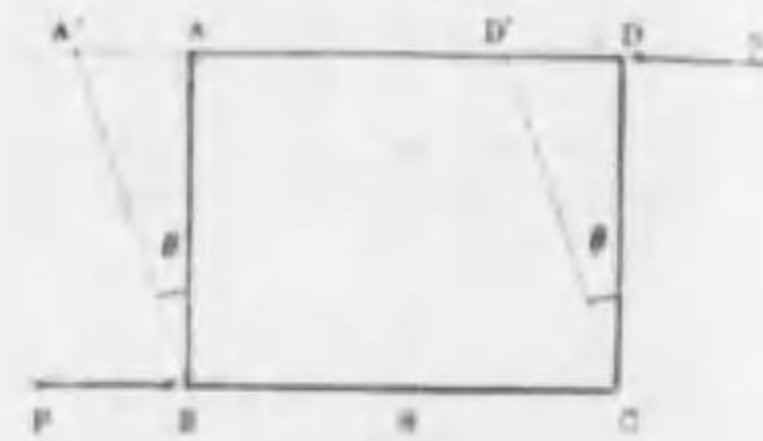


第 38 圖

によつて定つてある一定の値で之をヤングYoung率と云ふ。この様に針金を縦に引き延ばすと必ず横に縮む。縦の伸び方と横の縮み方との割合をポアソン Poisson 比と云ふ。

又歪には形だけのものを考へることも出来る。

例へば第39圖の様な直方體ABCDの上下の面に平行に力を加へて點



第 39 圖

線のA'BCD'の様にすることである。加へた力をPとし切口BCの面積をSとすると舊の形にかへらうとする弾力は單位面積については $\frac{P}{S}$ である。 $\angle ABA' = \theta$ とすると θ は歪をあらはしてゐる。フツクの法則によると

$$\frac{P}{S} = n\theta$$

である。此のnを剛性率と云ふ。

各固體物質の弾性的性質は上に述べたやうなヤング率、ポアソン比、剛性率等を知ればすべて分る。又液體や氣體の様に體積だけの弾性をもつてゐるものは體積の歪に對する弾力の割合が分ればよい。此の割合を體積彈性率と云ふ。液體は極めて壓縮しがたいから體積彈性率の逆數をとつて壓縮率といふ。數種の物質について之等の數値をあげると次表のやうである。(C.G.S.單位)

* ポアソン比 = $\frac{\text{横に縮む割合}}{\text{縦に延びる割合}}$

** 體積彈性率 = $\frac{\text{加へられた壓力}}{\text{體積減少の割合}}$

固 體	E(ヤング率)	n(剛性率)	σ (ポアソン比)	k(體積彈性率)
銅	12.4-12.9 $\times 10^{11}$	3.9-4 $\times 10^{11}$	0.26	14.3 $\times 10^{11}$
鋼	19.5-20.6 $\times 10^{11}$	7.9-8.9 $\times 10^{11}$	0.25-0.33	18.1 $\times 10^{11}$
石 英	5.18 $\times 10^{11}$	3.0 $\times 10^{11}$	—	1.4 $\times 10^{11}$
ガラス	5.0-7.8 $\times 10^{11}$	2.0-3.2 $\times 10^{11}$	0.20-0.27	3.6-5.9 $\times 10^{11}$

液 體	温 度	壓 縮 率
水	15°C	48.9 $\times 10^{-6}$
水 銀	15°C	3.71 $\times 10^{-6}$
ア ル コ ー ル	15°C	102.7 $\times 10^{-6}$
オ リ ー ブ 油	20°C	62.5 $\times 10^{-6}$

彈性振動 彈性體を外力で歪ませ外力を去ると振動する。今簡単な例について此の振動を考察する。第40圖

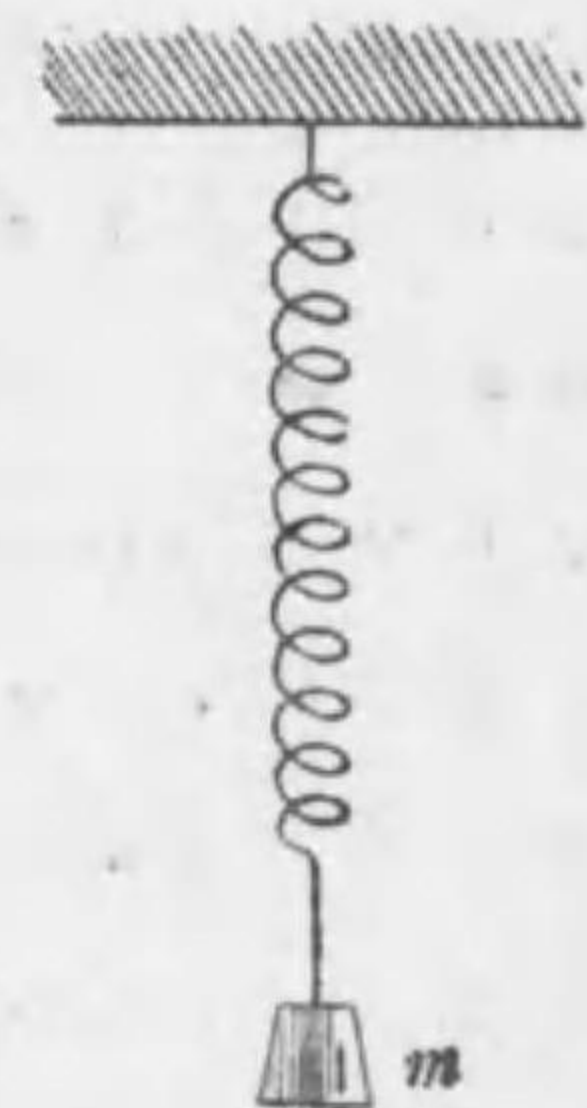
のやうにゼンマイの下に質量mの物體を吊すとゼンマイは延びて静止する。此の延びを x_0 とするとゼンマイが物體を引き上げ様とする弾力はフツクの法則により cx_0 (cは比例常數)である。弾力と物體に働く重力は釣合つてゐるから

$$cx_0 = mg$$

である。更に x だけ引き延ばすと弾力は

$$c(x_0 + x)$$

となる。物體を離せば物體は静止の位置にかへらうとして加速度を生じる。此の時物體に働く全體の力をfとす



第 40 圖

ると

$$f = -\{c(x_0 + x) - mg\}$$

$$= -(cx + cx_0 - mg),$$

となる。最初の式を参照すると

$$f = -cx \quad (11.1)$$

となる。 x は物体の静止の位置からの変位で此の式は物体のどの位置でも成立し、力は常に静止の位置に向つてゐる。従つて此の物体は単弦運動をする。(§4参照) 其の週期を T とすると(11.1)と(4.5)を比較して

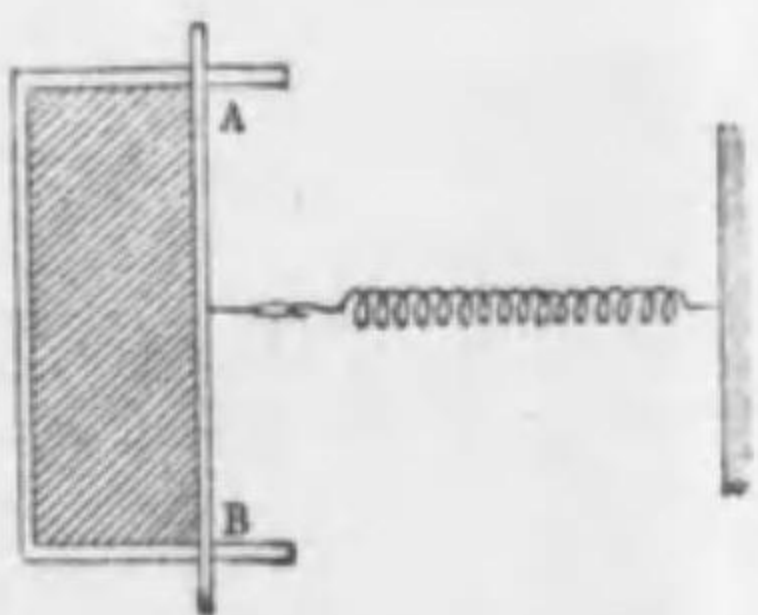
$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = c,$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \quad (11.2)$$

となる。弾性の極限内で振動するときはいつでもフックの法則で力が働くから弾性体が小さい振幅で振動するときは常に単弦運動をする。

§12 表面張力と毛管現象

表面張力 圖の如く針金を曲げ、一本の自由な針金 AB をのせて矩形を作り、之に石鹼膜を張らせる。針金 AB に豫め鉤をつけておき之に極めて鋭敏なゼンマイ秤をかければ石鹼膜が表面張力によつて縮



第 41 圖

* 負號は x の小さい方に f が向いてゐることをあらはす。

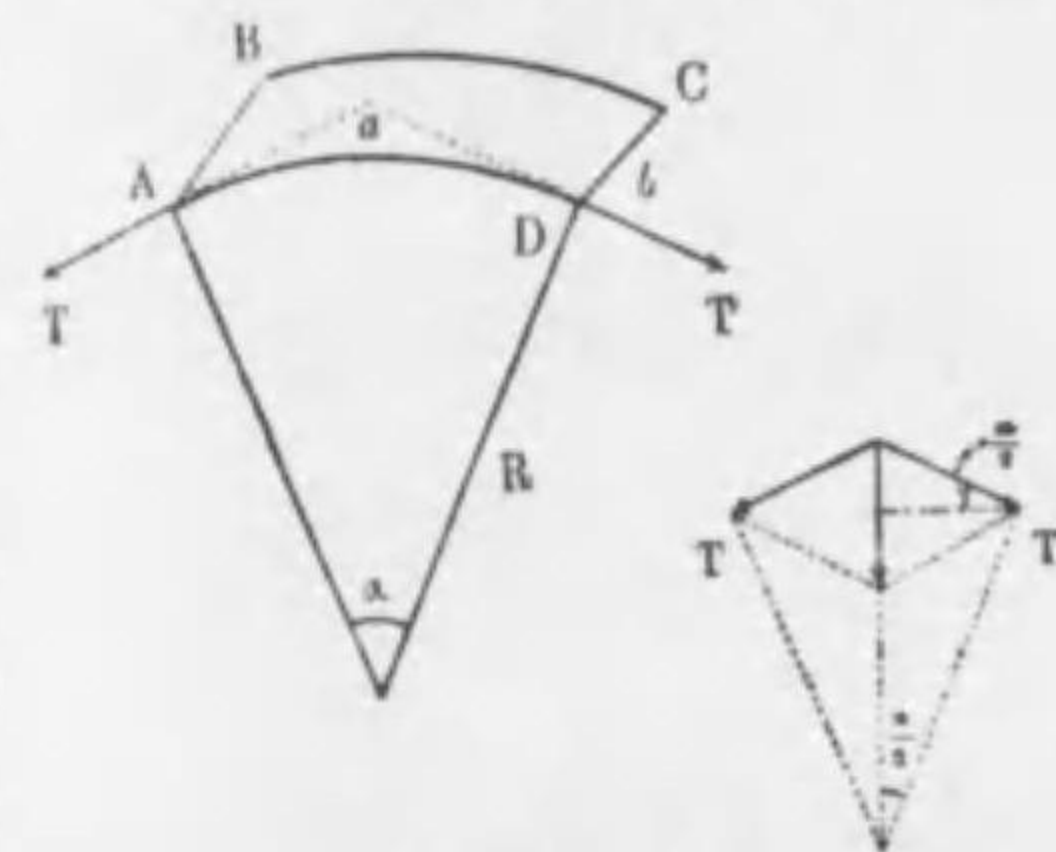
まうとする力を測ることが出来る。之は AB 全體に働く力であるから針金と石鹼膜の接する長さ AB で之を割れば單位の長さに働く表面張力を知ることが出来る。但し此の時、表裏兩面の表面張力が働いてゐるから之を考慮に入れて更に 2 で割らなければならない。此の値は膜の大きさに無關係である。液の表面上に一つの線分を考へるとき表面張力は此の線分の長さに比例した大いさで線分の兩側へ之と直角に引き合つてゐるものと考へられる。

表面張力による壓力 液の表面が曲つてゐる場合は此の二つの引き合ふ力は相殺しないで合力を生ずる凸面の場合には合力は液



第 42 圖

の内部に向ひ、凹面の場合には外部に向ふ。次に曲面に働く



第 43 圖

此の合力の大きさを計算して見よう。今曲面から極めて小さい彎曲した矩形の部分 $ABCD$ を切り取る。 $AD = a$, $DC = b$ とし、 AD がその曲率の中心で挟む角を α とする。單位の長さに働く表面張力を T とすると DC 及び AB に働く表面張力は夫々 Tb となる。此の二つの合力は圖で分るやうに

$$2Tb \sin \frac{\alpha}{2}$$

* 此の時の T は實は DC 及び AB に於ける T の平均である。

である。所が α を極めて小さくとると α は極めて小さくなり、 $\sin \frac{\alpha}{2}$ は α に近い。従つて合力は

$$2Tb \frac{\alpha}{2} = Tba$$

に近くなる。切口 AD の曲率半径を R とすれば $\alpha = \frac{a}{R}$ であるから之を前式に入れると合力は

$$\frac{T}{R} ab \quad (12.2)$$

となる。

次に切口 AD と切口 BC に働いてゐる表面張力の合力を考えると関係は前と同様であるから切口 DC の曲率半径を R' とすれば合力は

$$\frac{T}{R'} ab \quad (12.2)$$

となる。従つて曲面の部分 ABCD に働く全體の力は(12.1)と(12.2)を加へた所の

$$\frac{T}{R} ab + \frac{T}{R'} ab = T \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) ab$$

である。従つて表面張力によつて生ずる壓力の強さを p とすると p は上記の力を ABCD の面積 ab で割つたものであるから

$$p = T \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

となる。さて曲面をその法線を含んだ平面で切つてみる。切口の曲率はこの平面を廻轉すると一般に變化する。その曲率の極大値と極小値とをその曲面の主曲率と云ひ、そ

* 實は矩形の部分 ABCD が無限に小さくなつた極限に於て此の式が同じ點の p, T, R, R' について成立するのである。

の和を曲面の平均曲率といふ。微分幾何學の定理によると一般に法線を含み互に直交する二つの平面が曲面を切つたとき、その切口の曲率の和は平均曲率に等しい。即ち主曲率を $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ とすると

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

である。故に吾々の式は此の平均曲率を使つて

$$p = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (12.3)$$

と表はされる。

此の式の例として半径 r の石鹼玉の内外の空氣の壓力の差を求めてみよう。石鹼玉は一枚の液の膜であるから表面は二枚ある。膜は極めてうすいから外の表面と中の表面とに於て半径は同じ r と見ることが出来る。従つて

$$R_1 = R_2 = r$$

で球の外の壓力を p 、中の壓力を p' とすると此の差が(12.3)で與へられることとなる。

$$p' - p = 2T \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) = \frac{4T}{r} \quad (12.4)$$



第 44 圖

二液面の接觸 次に油滴を水面に落した場合を考へよう。第44圖の様に水の表面と油滴の表面とが接してゐる點 A を考へる。 T_1 を水の表面張力、 T_2 を油の表面張力、 T' を水と油とが接してゐる面の表面張力とし、 T_1 と T_2 とのなす角を θ_1 、 T_1 と T' とのなす角を θ_2 とする。若し

$$T_2 + T' > T_1$$

ならば θ_1 と θ_2 が適當になつたとき

$$T_2 \cos \theta_1 + T' \cos \theta_2 + T_1 = 0 \quad (12.5)$$

となつて三つの力が釣合ふ事が出来るから油は粒になつて水面に存在することが出来る。若し

$$T_2 + T' < T_1$$

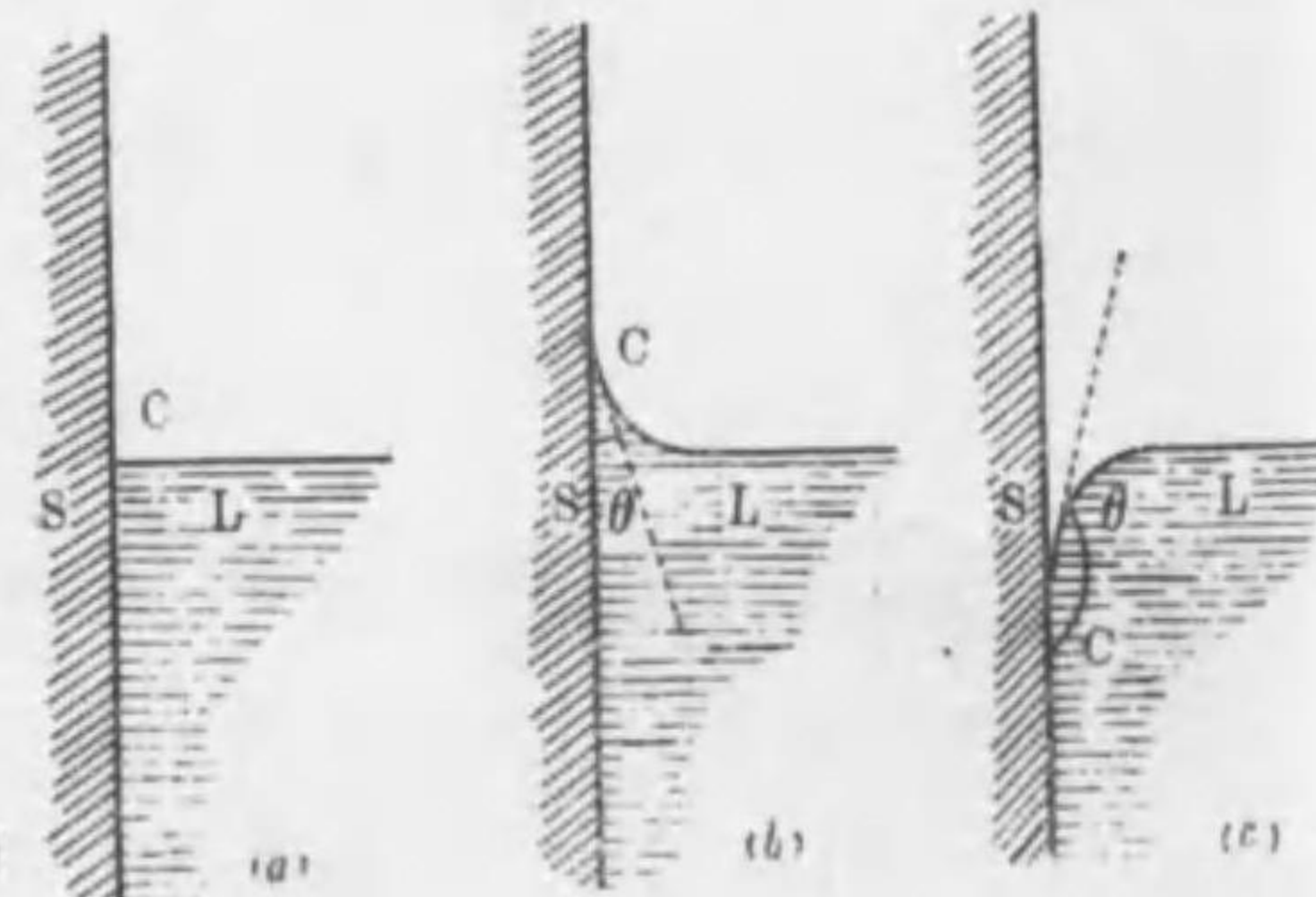
ならば(12.5)式を充すやうな θ_1, θ_2 は存在しないから油は T_1 に引かれていくらでも擴がる。石油を水面に落したやうなのは此の場合である。又若し

$$T_2 + T' = T_1$$

ならば $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ の時に(12.5)式が充される。此の時は油滴の厚さがない時であるから結局油は水面にいくらでも擴がることになる。

固体と液体の接觸 次に固体と液体との接觸を考へ

る。固体をその表面が鉛直になるやうに液体の中に入れたものとし、固体面と液面の接觸點 C を考へる。(その鉛直の切口に於て)



第 45 圖

此の時、液体と固体

との附着力の影響と液体の凝集力の影響の大小により C が如何になるかが定まる。若し附着力の影響の方が大き

ければ、液体はなるべく固体に近づかうとして C は上方に昇り (b) 圖のやうになる。若し凝集力の影響の方が著しければ液体はなるべく球形にならうとして C 點は下に降り (c) 圖のやうになる。圖に於て角 θ を接觸角といふ。附着力が大きい時は固体と液体との境に於ける表面張力は極めて小さいから C 點に働いてゐる力は主として液体の表面張力と附着力であり、附着力が小さく凝集力が大きいときは固体と液体との境の表面張力も相當大きく C 點に働く力は主として液体の表面張力と固体と液体との境の表面張力とであつて之に附着力が少しく影響を與へてゐる。

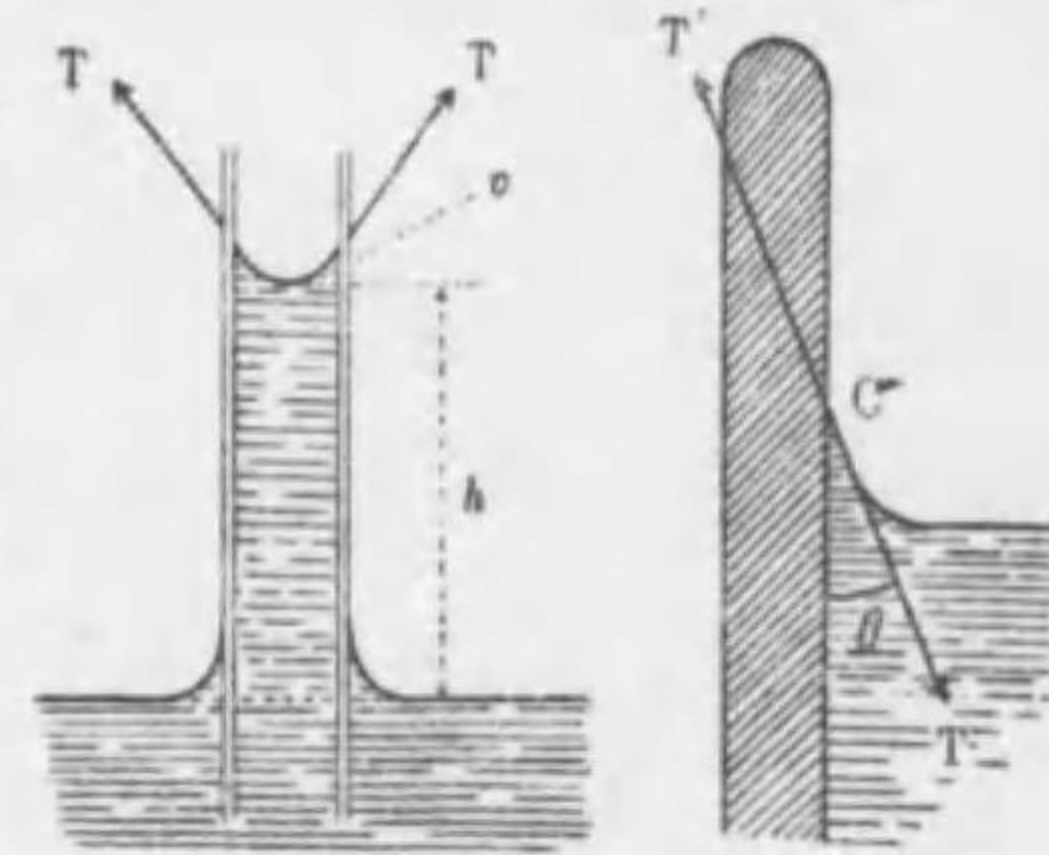
毛管現象 液体と固体との附着力が大きいとき、その液体の中へその固体の細い管を挿入すると附着力の爲に管内の液体がつり上げられる。今管の半径を r 、液体の密度を ρ 、液体の表面張力を T とする。管壁と液面との接觸點 C で液体をひき上げようとする力 T' と表面張力 T とは釣合つてゐる。従つて

$$T' = T$$

である。管内の液体をひき上げてゐる力は T' の合力である。 T' は管壁の内側に沿つて働いてゐるから接觸角を θ とするとその合力は

$$(T' \cos \theta) 2\pi r = 2\pi r T \cos \theta$$

である。管内の液体の上面は半月形に凹んでゐる。此の



第 46 圖

部の液體の體積を v とし、管外の液面から此の凹面の最下底迄の高さを h とすると管内の液體に働く重力は

$$(\pi r^2 h + v)\rho g$$

である。故に

$$2\pi r T \cos\theta = (\pi r^2 h + v)\rho g$$

を得る。之より h を出すと

$$h = \frac{2T \cos\theta}{r \rho g} - \frac{v}{\pi r^2} \quad (12.6)$$

となる。

v は極めて小さいから後項を無視すると

$$h = \frac{2T \cos\theta}{r \rho g} \quad (12.7)$$

を得る。即ち毛管内に上昇する液の高さはその液體の表面張力に比例し、管の半径及び液體の密度に逆比例する。

凝集力の影響が大きいときには管内の液面は降り h は負となるが此の場合は θ が $\frac{\pi}{2}$ 以上で $\cos\theta$ が負となるからやはり(12.7)と同じ式が成立する。

表面張力の測定 表面張力を測定するには種々の方法を使ふ。直接に之を測るには中空圓筒を液中に入れ之を鉛直に引き上げる。その下端に液膜がついて表面張力が直接中空圓筒を引くからその力を天秤又はゼンマイ秤で測つて表面張力を知るのである。又石輪玉の様な液膜の球を作りその内外の氣體の壓力の差を測定しても(12.4)から T を知り得る。又毛管現象を利用すると(12.6)又は(12.7)から T が知れる。又漣には T が關係するから漣の波長や週期を測つて T を知ることも出来る。(§13参照)表面張力

及び接觸角の大きさは次表のやうである。

物 質	表 面 張 力	ガラスとの接觸角
アルコール	22.0 ^{dyne/cm} (20°C)	0°
エーテル	16.5 (20°C)	16°
オリーブ油	32 (20°C)	—
水 銀	547 (17.5°C)	140°
石 油	26 (18°C)	26°
水	74.2 (15°C)	0°

§13 波 動

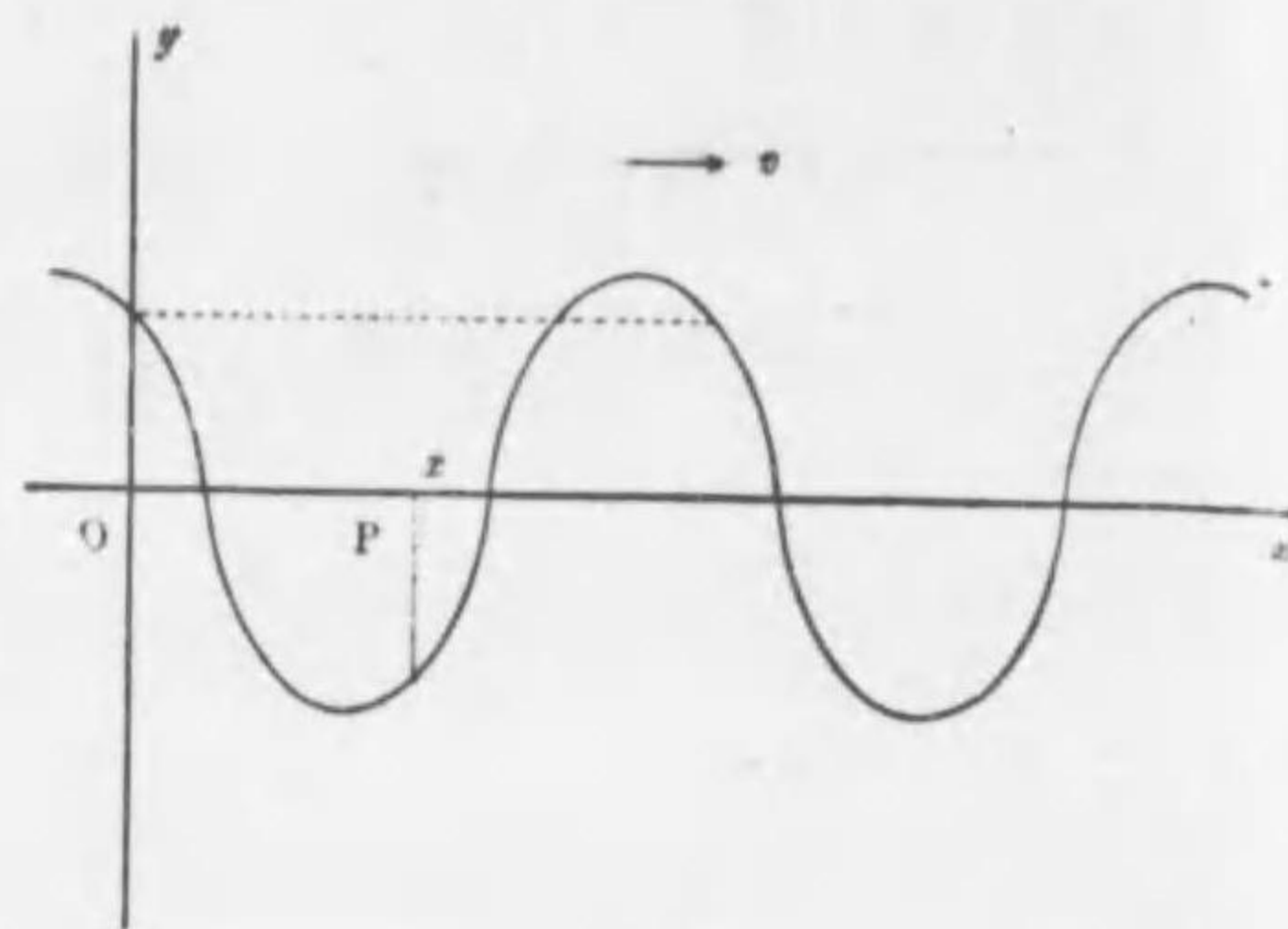
正弦波 §4で述べた様に y 方向に單弦運動をしてゐる質點の瞬間 t に於ける變位 y は

$$y = a \sin 2\pi \nu t \quad (13.1)$$

で與へられる。各部の質點の振動が單弦運動である様な横波を考へ、この横波が x 軸の正の方向へ速度 v で傳播するものとし、原點に於ける質點の位置が(13.1)で與へられるものとする。傳播速度が v であるといふことは或る點Aから x だけ離れた點Bの位相は、 $\frac{x}{v}$ だけ時間が経過した後現在のA點の位相と同じになることである。故に原點から x だけ離れた點Pの位相は瞬間 t に於て、それよりも $\frac{x}{v}$ だけ前の瞬間 $t - \frac{x}{v}$ に於ける原點の位相と同じになる。故にP點の質點の瞬間 t に於ける變位 y は次式で與へられる。

$$y = a \sin 2\pi \nu \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (13.2)$$

P は任意の點であるから(13.2)は任意の點の變位をあらはしてゐる。一般に(13.2)の様な式で表はされる波動を正弦波といふ。若し波動が x 軸



第 47 圖

の負の方向へ傳播するならば v の代りに $-v$ とすればよい。この波動の波長を λ 、週期を T とすれば

$$v = \lambda \nu, \quad \nu = \frac{1}{T} \quad (13.3)$$

であるから之を前式に入れると

$$\left. \begin{aligned} y &= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ \text{又は} \\ y &= a \sin 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

となる。

定常波 振動数及び振幅の等しい二つの波動が互に逆の方向に進んで重疊されたときに定常波が出来ることはよく知られた事である。今(13.4)より之を數學的に導き出してみよう。第一の波を y_1 、第二の波を y_2 で表はせば y_1 は y_1 に於て v の代りに $-v$ を代入すればよいから(13.2)(13.3)(13.4)を参照して

$$\begin{aligned} y_1 &= a \sin 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \\ y_2 &= a \sin 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

となり合成波は

$$y_1 + y_2 = a \sin 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + a \sin 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right)$$

である。三角函數の定理により

$$y_1 + y_2 = 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \nu t \quad (13.5)$$

と變形することが出来る。

従つて

$$x = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = \pm 1, \pm 3, \dots$$

なる點では常に $y_1 + y_2 = 0$ であり、此の點を定常波の節といふ。

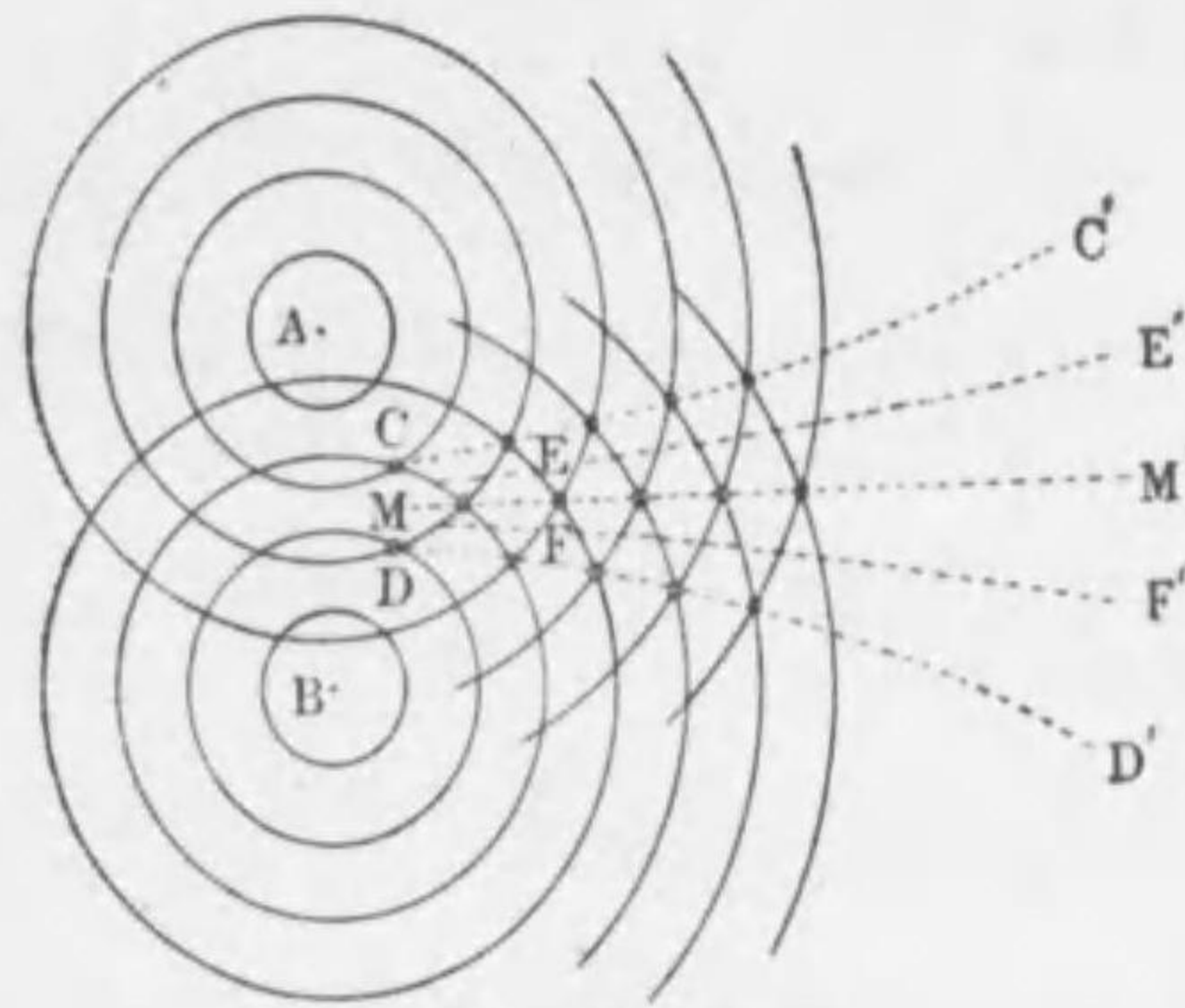
$$x = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

なる點の質點は $2a$ を振幅とする單弦運動をする。この點を定常波の腹といふ。之等の途中の質點は x の異なるに従ひ

$$2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

なる振幅を有する單弦運動をする。即ち重疊した波は定常波となつて進行しない。節と節腹と腹との距離は $\frac{\lambda}{2}$ である。水面の波が壁にあたつて反射した時などには此の様な事が起る。

干涉 振動数及び振幅の等しい波が水面上の二點から起つた場合を考へる。例へば同じ様な石を水面上の二點 A, B に同時に落して出来る圓形の波の重疊を考へる。ある瞬間に於ける水面の様子は第48圖の様になる。圖の同心圓は波の山を表はしたものとすると點線 CC', MM', DD' 等の上では・印の様に山と山とが重なつた所や其の



第 48 圖

間の谷と谷とが重なった所が出来て波動の形は著しくなる。又 CC' と MM' の間にある点線 EE' の上では山と谷とが重なる爲に水面の運動は打消されて平靜な水面と變りがない。 EE' 及び FF' の形は双曲線で此の上では常に二つの波が相殺して水面は運動しない。此の様な現象を**波動の干渉**といふ。

群波 波長の異なる二つ又は多くの波を重疊すると各成分波と異つた形の波が出来ゝ。之を群波と云ふ。各成分波の傳播速度が波長に無關係に一定ならば群波の形はこはれないで成分波の傳播速度と同じ速度で群波が傳播する。而し水面の波の様に波長によつて傳播速度の異なるものでは生じた群波の形は時間と共に變化し、又傳播速度も成分波のそれとは異なる。此の時群波の速度を**群速度**、成分波の速度を**位相速度**と云ふ。

今振動数が夫々 ν_1, ν_2 で振幅及び傳播速度の相等しい同方向に進む波が重疊された場合を考へよう。然るときは二つの波は

$$y_1 = a \sin 2\pi \nu_1 \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$y_2 = a \sin 2\pi \nu_2 \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

で表はされる。二つの振動数の平均を ν とすると

$$\nu_1 = \nu + \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}$$

$$\nu_2 = \nu - \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}$$

である。従つて

$$y_1 + y_2 = a \sin 2\pi \nu \left(t - \frac{x}{v} \right) \cos \pi (\nu_1 - \nu_2) \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$+ a \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{x}{v} \right) \sin \pi (\nu_1 - \nu_2) \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

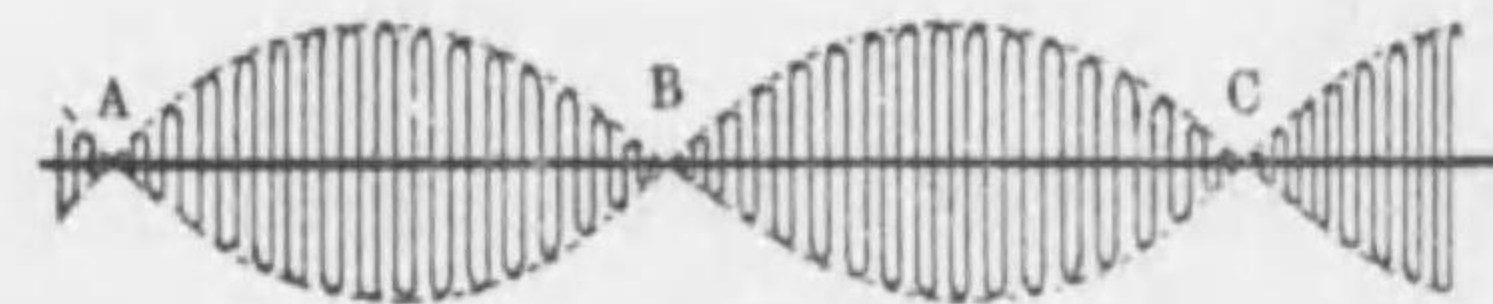
$$+ a \sin 2\pi \nu \left(t - \frac{x}{v} \right) \cos \pi (\nu_1 - \nu_2) \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$- a \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{x}{v} \right) \sin \pi (\nu_1 - \nu_2) \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$\therefore y_1 + y_2 = 2a \cos \pi (\nu_1 - \nu_2) \left(t - \frac{x}{v} \right) \sin 2\pi \nu \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (13.5)$$

となる。今 $\nu_1 - \nu_2$ は ν_1 及び ν_2 に比して極めて小さいものとする。 ν は大體に於て ν_1 又は ν_2 に等しい。このとき(13.6)の波形は第49圖の

様になる。此の形の波動がそのまゝ v の速度で傳播す



第 49 圖

るのである。(13.6)に於て前の \cos の因數が点線の形を與へ後の \sin の因數が實線の波動と同じ振動数の一定振幅の波動を表はす。前の因數は振幅とみなされるもので、此の場合振幅が振動しながら v の速度で傳播し

$$AB = \frac{v}{\nu_1 - \nu_2}$$

である。即ち AB は $\nu_1 - \nu_2$ に相當する波長の半分である。

§ 14 波動の傳播速度

液面の一部を突然押し下げると此の部が振動し、波動が四方に傳播する。此の波動を生ずる作用は液體の表面張力及び液體に作用する重力である。従つてその傳播速度 v も此の兩作用によつて支配される。即ち表面張力を Γ 、液體の密度を ρ 、重力の加速度を g とすると波長 λ の波は液の深い所では

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\Gamma}{\rho\lambda}} \quad (14.1)$$

の速度で傳播する。波長 λ が小さいときは根號内の前項は後項に對して極めて小さくなるから之を無視すると

$$v = \sqrt{\frac{2\pi\Gamma}{\rho\lambda}} \quad (14.2)$$

が傳播速度を與へる。水に於ては $\lambda = 0.3\text{cm}$ 以下の波長に對しては大體此の關係が成立し之を表面張力波といふ。表面張力波では波の各部は圓運動をしてゐる。この波動に於ては表面張力が主要な役目をなしてゐる。又波長が大なるときは前項の方が後項よりも著しく大となり後項を無視するときは

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (14.3)$$

が傳播速度を與へる。この波では重力が主要な役目をなしてゐるから之を重力波といふ。水に於ては $\lambda = 10\text{cm}$ 以上は重力波とみなされる。之等の間の波長の波は此のいづれとも見なし得ず傳播速度は(14.1)によらなければならない。以上に於ては液の深さは波長に比して十分大なる

ものと假定しての議論であつたが若し液の深さが減じて波長よりも遙かに小となるときは傳播速度は

$$v = \sqrt{gh} \quad (14.4)$$

で與へられ深さによつて異り、波長には無關係となる。重力波では水の各部分は、深い水の表面では圓形を描き、浅い水の表面では楕圓となる。遠淺海岸に沿うて進みつゝある波が次第に海岸に向つて進むやうになり遂には波の山が海岸と平行になつて渚に打ちあげる所謂磯波の現象は(14.4)で説明することが出来る。

彈性體の一部を振動させると彈性振動が傳播して波動を生ずる。之を彈性波といひ、地震波音波等は之に屬する。彈性體内には縦波も横波も共に起る。彈性體のヤング率を E 、ポアソン比を σ 、密度を ρ とすると縦波の傳播速度は

$$v = \sqrt{\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (14.5)$$

で横波の傳播速度は

$$v = \sqrt{\frac{1}{2(1+\sigma)}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (14.6)$$

である。 σ は $\frac{1}{2}$ よりも小さいから縦波の方が横波よりも速く傳はる。地震波では縦波の方が 1.6 倍位速い。此の外に表面に起るレーレー波と云ふ波が出来る。之は横波よりも更に遅く傳はる。

§ 15 音

音波の速度 音波は一種の弾性波であつて縦波である。音波が大きい固體の中を傳播する速度は(14.5)で與へられる。音波が液體の中を傳播する速度は、 k を液體の體積弾性率、 ρ をその密度とすれば

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (15.1)$$

である。又氣體中の傳播速度は

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (15.2)$$

で與へられる。茲に p は氣體の壓力、 ρ は氣體の密度、 γ は氣體の定壓比熱と定容比熱との比である。(§27 参照)

棒や引き張つた針金の中を傳播する速度は大きな固體の場合とはやゝ異り、 E を棒又は針金のヤング率とすると

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (15.3)$$

である。ボイル・シャルルの法則によると氣體の 0°C に於ける壓力及び密度を p_0, ρ_0 とし、 $t^\circ\text{C}$ に於ける壓力及び密度を p, ρ とすると

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{t}{273}\right)$$

である。之を(15.2)に代入すると $t^\circ\text{C}$ に於ける氣體中の傳播速度は

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} \sqrt{1 + \frac{t}{273}} = v_0 \sqrt{1 + \frac{t}{273}} \quad (15.4)$$

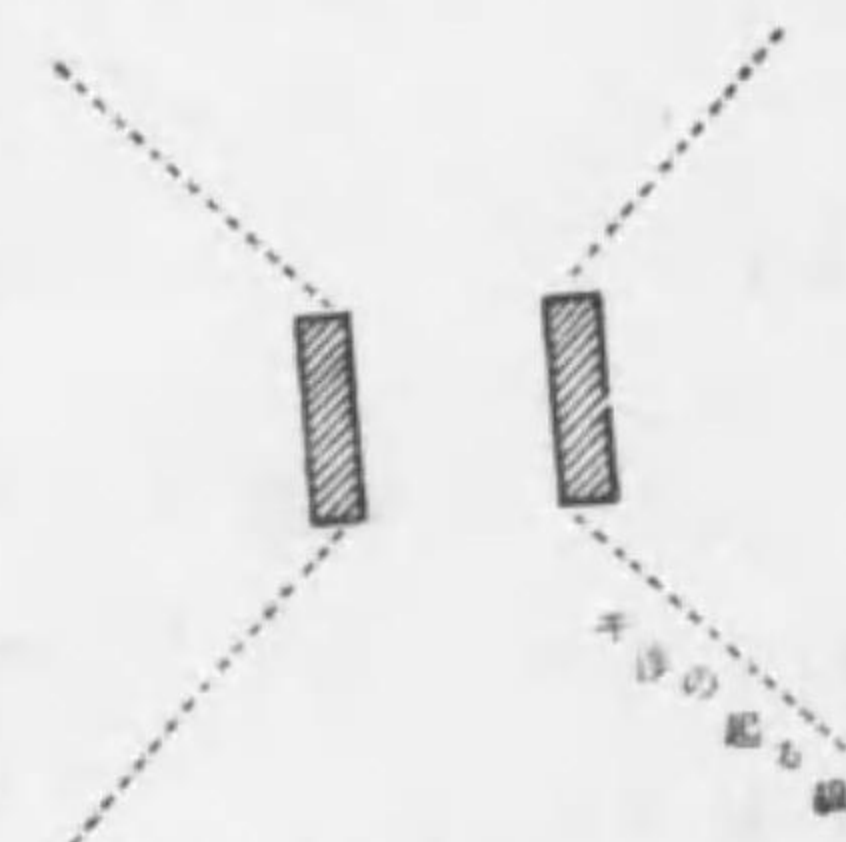
となる。但し v_0 は 0°C に於ける傳播速度である。

音波が縦波であることは傳播方向に垂直に薄膜を置けばよく之を振動せしめるが平行に置いたのでは振動させない事からも分る。又前述のやうな理論的の速度の式が實驗とよく合ふ事でも分る。音波は反射及び屈折をし、光の場合と同じ反射及び屈折の法則の成立することが確められてゐる。レンズ形のゴム膜を作りこの中に炭酸ガスを入れると之は音波に對して丁度光に對するガラスのレンズと同じ作用をする。

干渉 又音波は干渉をする。音叉を鳴らしたとき、その兩脚を結ぶ直線と 45° の角をなす直線の方角で音が聞えない事はよく知られた事實である。之は音叉の兩脚から出た音波の干渉によつて生ずる現象である。音叉が振動するときにはその兩脚の外側の空氣が壓縮される時には兩脚の間の空氣は稀薄にされる。従つて音叉の兩脚の外側から音波の密部が生ずる瞬間に兩脚の間では音波の粗部が生ずる。故に兩脚の面に對して 45° の方向の直線上では此の兩音波の粗部と密部とが丁度重り合つて干渉が起るのである。

又干渉はキンケ Quincke の管でも起すことが出来る。之は第51圖の様な管で FGHK 部は抜挿してその

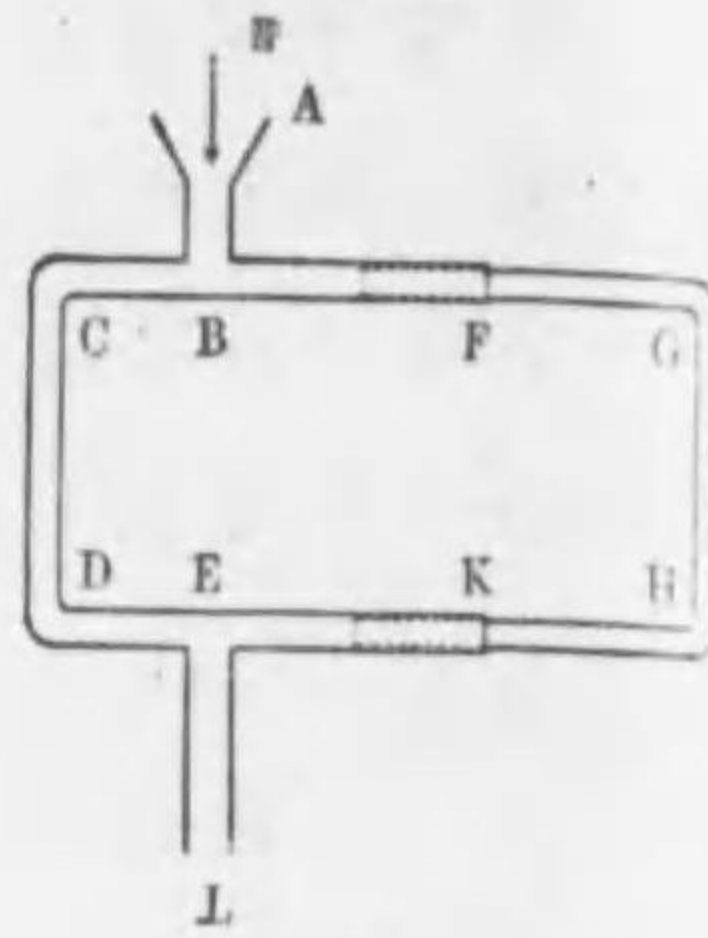
長さを變へることが出来る。A から音波を送ると B で左右に分れその通路の長さが異なる爲に再び E で合したとき



第 50 圖

は、FGHK の長さを適当に加減すると一方の密部が来たとき他方の粗部が来て干渉しLできいても音が聞えない。

ドップレル効果 發音體に向つて聽者が運動してゐるとき、又は發音體が運動してゐるときには發音體も聽者も止つてゐるとき聞える音とちがつた高さの音が聞える。之をド



第 51 圖

ブル効果といふ。汽笛を鳴し乍ら汽車がすれ合ふときすれちがつた瞬間に汽笛が低くなるのは此の現象である。

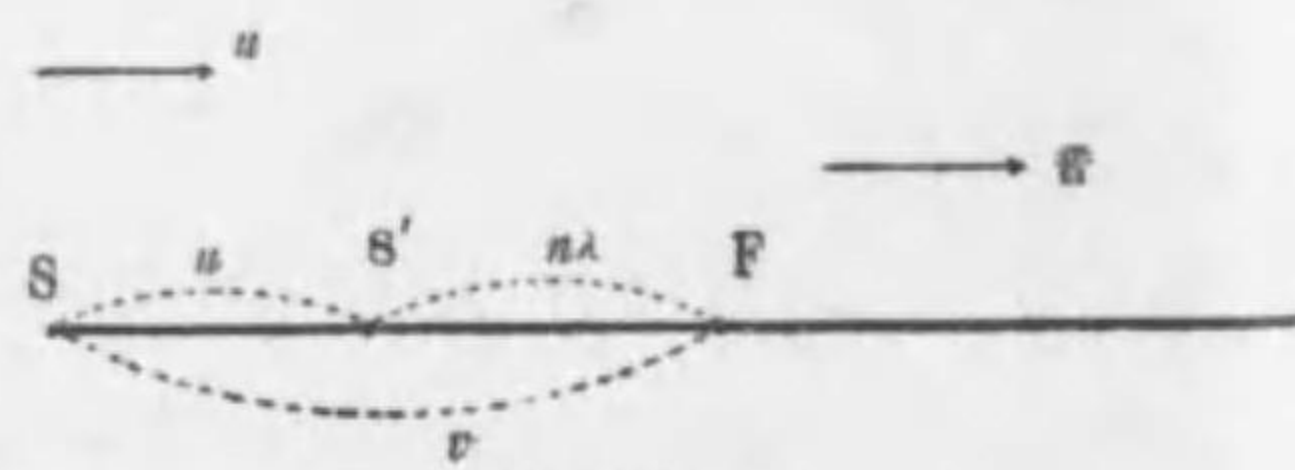
今發音體 S が速度 u で音の傳播方向に運動してゐたものとする。音の傳播速度を v とすると發音體が S にある瞬間に出た音は單位時間後に $SF=v$ なる如き F に達する。然るにこの間に發音體は u だけ進み S' に來る。此の音波の波長を λ とし發音體の振動数を n とすると S'F の間には n 個の波があるから

$$n\lambda = S'F = v - u$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda} = \frac{n}{v - u} \quad (15.5)$$

となる。故に静止せる觀測者に聞える音の振動数 n' は

$$\left. \begin{aligned} n' &= \frac{v}{v - u} n \\ n' &= n \left(1 + \frac{u}{v - u} \right) \end{aligned} \right\}$$



第 52 圖
(15.6)

となる。次に觀測者 O が速度 u' で音の傳播方向に運動してゐたものとする。あ



第 53 圖

あり單位時間後に O' に來たものとするれば $OO' = u'$ である。此間に最初 F' にあつた音波が O' に達したものとすれば觀測者が O から O' 迄に受ける波は F'O の間にあつたものである。F'O の間にある波の数を n'' とすれば

$$n''\lambda = F'O = v - u'$$

$$\therefore n'' = \frac{v - u'}{\lambda}$$

となる。故に静止せる振動数 n の發音體から出る音が觀測者に聞える振動数は

$$\left. \begin{aligned} n'' &= \frac{v - u'}{v} n \\ n'' &= n \left(1 - \frac{u'}{v} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

で與へられる。發音體も觀測者も運動してゐるときは (15.7) の n の代りに (15.6) の n' を使へばよい。即ち

$$\left. \begin{aligned} n'' &= \frac{v - u'}{v - u} n \\ n'' &= n \left(1 + \frac{u - u'}{v - u} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

である。音波の傳播方向と逆の方向に運動してゐるときは u, u' 等を負にとればよい。今の考察では媒質は静止してゐるものと假定した。若し媒質が運動してゐる場合は u 及び u' は媒質に對する相對速度をとればよい。従つて發音體も觀測者も静止し媒質のみが運動してゐるときは

聞える音の高さは變らない。之等の考察に於てはすべて $u, u' < v$ と假定してある。

唸 少しく高さの異なる二音が同時に聞えるときは唸を生ずる。二つの音波を y_1, y_2 で表はすとき之は(13.6)によつて説明される。(13.6)を再びかくと

$$2a \cos \pi(\nu_1 - \nu_2) \left(t - \frac{x}{v} \right) \sin 2\pi \nu \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

である。 $\cos \pi(\nu_1 - \nu_2) \left(t - \frac{x}{v} \right)$ は此の音波の振幅を支配する。 $\nu_1 - \nu_2$ は極めて小さいから振幅は極めて徐々に大きくなつたり小さくなつたりする。而かも $\left(t - \frac{x}{v} \right)$ がある爲に振幅の變化が傳播する。静止してゐる観測者に對しては單位時間に $\nu_1 - \nu_2$ 回だけの振幅の變動が観測される。即ち單位時間内の唸の数は二つの音波の振動数の差に等しい。發音體が壁に向つて運動してゐるときその後方に居る観測者は直接に發音體から來る音と壁から反射する音とを聞く。所が直接に來る音はドツブレル効果の爲に振動数が少しく小となり、壁から反射する音はドツブレル効果の爲に振動数が少しく大となつてゐるから此の兩音を同時に聞くと唸を聞く。

音響分析 發音體から發せられた音は種々の振動数種々の振幅の音波を含んでゐる。音波の各成分の振動数と各成分の振幅の差違によつて音の高さ、強さ、音色等が異なる。従つて音を正確に研究するには一つの音の含む各成分音の振動数及びその振幅を測定しなければならない。

この様に音を各成分に分けその振動数及び振幅を測定することを音響分析といふ。音響分析の一つの方法は音波をマイクロフォンに入れて之を電流の振動にかへ適當な方法で此の變化を寫眞に撮り、その結果を分析するのである。かくの如くして種々の發音體より出る音の差違が研究される。

§ 16 減衰振動 強制振動

減衰振動 振子や彈性體が振動するときには一般に單弦運動をすることを述べた。(§ 4 及 § 11 参照)その振動は S.H.M. の式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -sx \quad (16.1)$$

で與へられる。この左邊は振動體の質量と加速度の積で右邊は變位に比例する力を表はしてゐる。併し乍ら通常の場合には力は之のみではない。例へば空氣中で振動する様な場合には空氣の抵抗があつてこの爲に振幅は段々に減じて遂に振動がやむ。(16.1)はこの様な事は表はしてゐないで永久に S.H.M. の續くことを表はしてゐる。

(16.1)の表はす S.H.M. は

$$x = a \sin 2\pi \nu t \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{m}} \quad (16.2)$$

である。之に對して振幅が次第に減じて行く振動を減衰振動といふ。減衰の原因は上に述べた様に空氣の抵抗の如きもので振動體の速度に比例し、速度と逆の方向に働く力である。従つて比例の常數を r とおくと此の力は

$$-r \frac{dx}{dt}$$

である。この抵抗を考慮に入れた減衰振動の方程式は(16.1)の右邊に之を加へて

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -sx - r \frac{dx}{dt} \quad (16.3)$$

である。すべての項を左邊に移して m で割ると

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{s}{m} x = 0 \quad (16.4)$$

となり之が一般に減衰振動を表はす方程式である。此の解は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} x &= ae^{-\nu t} \sin 2\pi \nu t \\ \text{但し } x &= \frac{r}{2m}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

である。即ち振幅は時間と共に

$$ae^{-\nu t}$$

の如く減つて行く。但し e は自然對數の底である。この振幅の對數をとるとその一秒毎の減少は

$$\log(ae^{-\nu t}) - \log(ae^{-\nu(t+1)}) = \nu$$

となる。 ν を減衰係數といふ。 ν が小さい時には ν は大體 $\frac{r}{2m}$ に等しい。

強制振動 かくの如く通常の場合に振動するときは抵抗の爲に次第に減衰し遂に静止してしまふから長く振動をつゞけしめるには更に他より適當な力を加へなければならぬ。例へば時計の振子の如きは振動を永續させ

* 但し此の時 $\frac{s}{m} > \frac{r^2}{4m^2}$ なることが必要である。此の條件がみたされるときは振動はおこらない。

る爲にゼンマイの力を週期的に加へる。振動は週期的の力を加へるのでなければ續かない。週期的に變化する力を加へて物體を振動させることを**強制振動**といふ。週期的の力が若し

$$b \sin 2\pi n t$$

で表はされるならば強制振動の方程式は(16.3)の右邊に更に此の力を加へて

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -sx - r \frac{dx}{dt} + b \sin 2\pi n t$$

となる。最後の項だけを残して右邊の前二項を左邊に移し m で割ると

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{s}{m} x = \frac{b}{m} \sin 2\pi n t \quad (16.6)$$

となりその解は次の様に與へられる。

$$\begin{aligned} x &= \frac{b}{4\pi n x m} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{x^2 n^2} (\nu_0^2 - n^2)^2}} \sin \left(2\pi n t - \tan^{-1} \frac{x n}{\pi(\nu_0^2 - n^2)} \right) \\ &+ ae^{-\nu t} \sin(2\pi \nu t + \epsilon) \end{aligned} \quad (16.7)$$

但し ϵ はある常數である。前の項が強制振動の主な項を表はし後の項は減衰振動を表はしてゐる。 ν_0 は(16.2)で與へられるもので之を**固有振動數**といふ。 ν は(16.5)で與へられる振動數であり、 n は外力の振動數である。後の項は時間が経つと段々に減衰して小さくなるから暫くの後になると振動は大體前の項で與へられる。この時の振動數は n で之は力の振動數に等しい。即ち時間が経つにしたがつて振動は次第に外力に従ふやうになる。只位相が

$$\tan^{-1} \frac{2\eta}{\pi(\nu_0^2 - n^2)}$$

だけおくれる。之は減衰係数の影響であつてそれが小さければ位相の遅れも亦極めて小さい。

共鳴 外力の振動数 n が段々に固有振動数に近づくにしたがひ、強制振動を表はす前項の振幅は大きくなる。如何となれば n が ν_0 に近い程 $(\nu_0^2 - n^2)$ が小さくなつて根號の中が小となり、振幅は分母が小さくなるにしたがつて大きくなるからである。外力の振動数 n が丁度固有振動数 ν_0 に等しくなつたときは強制振動の項は振幅が最も大きくなり

$$\frac{b}{4\pi\nu_0 m} \sin\left(2\pi\nu_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (16.8)$$

となる。此の時は最もよく振動が起る。之が即ち共鳴の現象である。上式から分るやうに共鳴振動の振幅は減衰係数が大きい程、振動體の質量が大きい程、又振動数が大きい程小さい。これは常識的に考へてもさもあるべきことである。

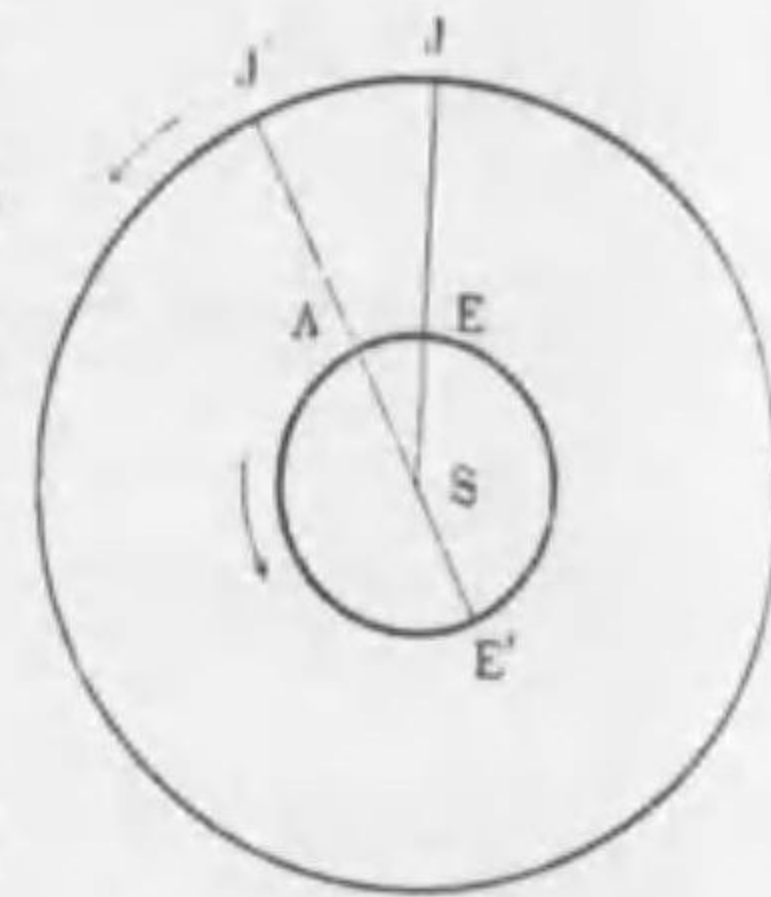
第二章 光

§ 17 光速度

發光體から出た光は一直線に空間を進む。ニュートン Newton は發光體から微粒子が出て一直線に進むものと考えた。そして反射屈折等の起る理由もこの考から説明した。然るに廻折・干涉等の波動的性質を表はす現象が光について發見されたので遂に光は微粒子の流ではなくて一種の波動であると信せられる様になつた。光が波動であるとしてそれに關する現象を始めて説明したのはハイゲンス Huygens である。彼は 1690 年に一書を公にして此の説を發表した。かくてながく光は波動であると信せられたが最近光電効果やコンプトン効果等が發見せられて光には波動性と共に粒子性のあることが確められたので光はこの兩方の性質を有し、あるときは波動性をあらはし、あるときは粒子性をあらはすものとされるに至つた。本章に於ては光を波動であると考へて取扱ふことにする。光を粒子的に取扱ふときその粒子性が如何に説明されるかは後章にゆづる。(第六章参照)

レーメルの測定 光の速度を測定しようとして始めて企てたのはガリレオ Galileo である。併し光の速度が大なる爲にその企は失敗に終つた。然るにデンマークの天文學者レーメル Römer は 1675 年に始めてこの測定に成功した。

彼の方法の要點は次の様である。木星には四つの衛星があつて之等が木星を一周する週期は一定である。之等の軌道平面は木星自身が太陽の周りを運動する軌道平面と略同一であつて衛星が木星の影の中に入ると蝕を生ずる。一つの衛星が蝕を生じてから次に蝕を生ずる迄の時間は常に一定の筈である。第54圖に於てSを太陽とし、圓AEE'を地球の軌道、圓JJ'を木星の軌道とする。衛星が木星の周りを一周する周期は極めて短く四個の内最短のものが42時間で最長のものが $16\frac{2}{3}$ 日であるからその間に地球はその軌道上を殆ど動かない。



第54圖

従つて一つの蝕から次の蝕迄の時間を容易に測ることが出来る。地球がEにあるとき木星がJにあり太陽と地球と木星とが一直線上にあるものとする。木星の週期は11.86年であるから地球がE'の位置に来て地球、太陽、木星が圖の様に一直線になつたとき木星はJに近い位置J'にある。地球がEにあるとき木星の衛星の蝕を観測し、後地球がE'にあるとき又蝕を観測する。蝕から蝕迄の時間が前の如く分つてゐるから此の時間に地球がE'に来る迄に起つた蝕の回数をかければ蝕の起る時間を豫知することが出来る。然るにレーメルはE'に於ては豫定の時間よりも996secだけ後れて蝕が起ることを發見した。彼は之を光がAE'を通過する時間であるとした。地球軌道の直

徑は 2986×10^{10} cmであるから之より光の速度を求めると

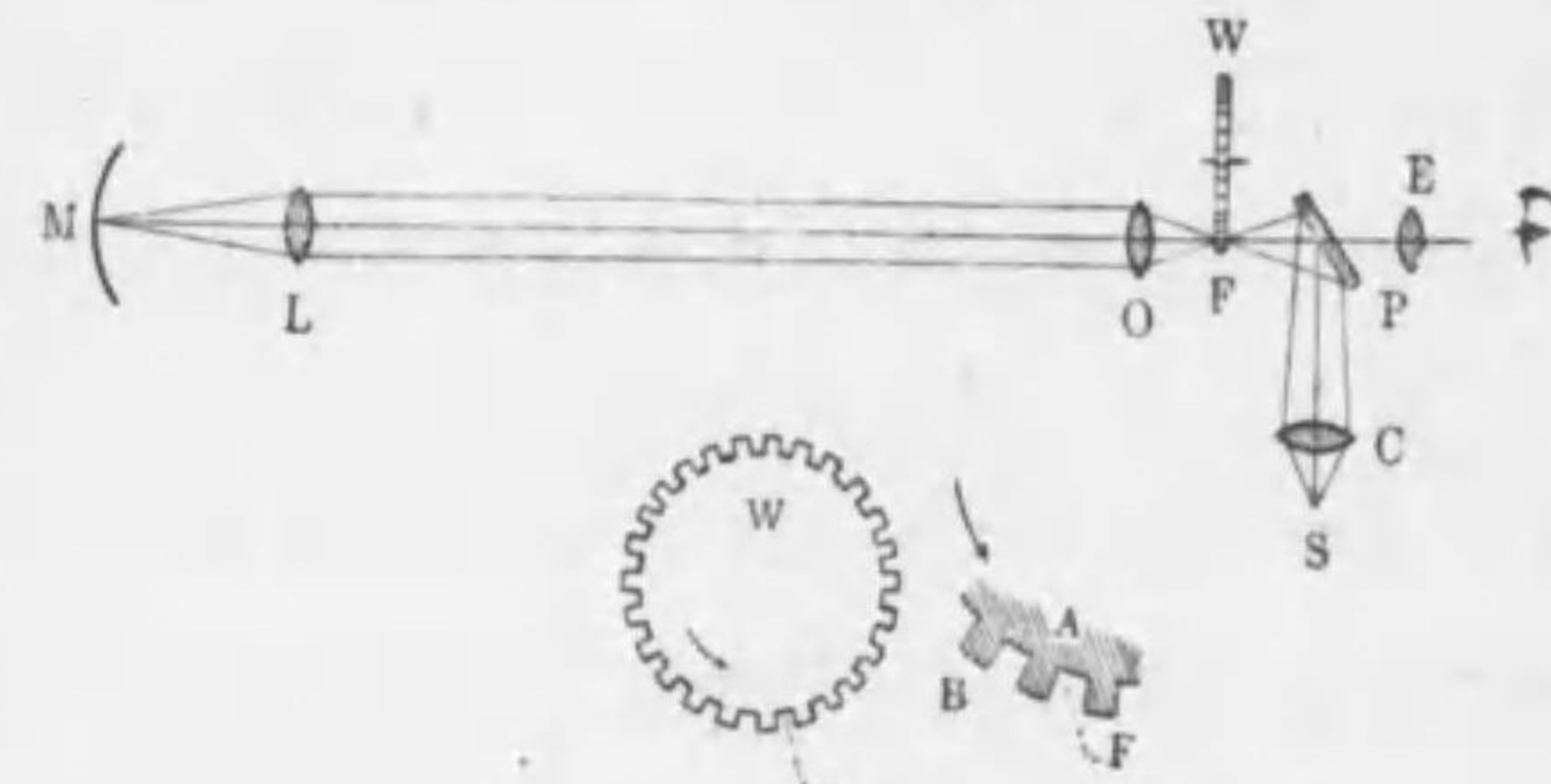
$$\frac{2986}{996} \times 10^{10} = 2.998 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

即ち約 $3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ となる。

フィゾーの實驗

地球上に於て始めて光の速度を測つたのはフィゾー Fizeau である。彼は次の如き方法で1849年に測定を行

つた。第55圖に於て光源Sから出た光はレンズCで收斂され、ガラス



第55圖

板Pで反射してFに實像を結ぶ。此の光はレンズOで平行にされ、レンズLでその焦點に集る。レンズLの焦點に凹面鏡Mをおいてこの光を反射し再びLで平行光線としOでその焦點Fに光源Sの實像を結ぶ。之を接眼レンズEで見るのである。焦點Fには齒車WがあつてFが丁度その齒の間になるやうにする。接眼レンズでFにある光源の實像を見ながらWを次第に速く廻轉する。始めFがWの齒の間であり光がFからMに達し再びFに歸る時間内に丁度Wのその隣の齒AがFの位置に来る様になるとFを通つた光はすべて齒でさへぎられるから光源の實像は見えなくなる。次に廻轉の角速度を二倍にすると再び像がみえる様になる。かくてFMの距離と齒車の速度か

ら光の速度を計算することが出来る。その後種々の人々が種々の方法で光の速度を測定して次の如き結果を得た。

フィゾー	Fizeau	$3.150 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
コルニュ	Cornu	3.004 " "
フォーコー	Foucault	2.980 " "
マイケルソン	Nichelson	2.998 " "
ニューコム	Newcomb	2.999 " "

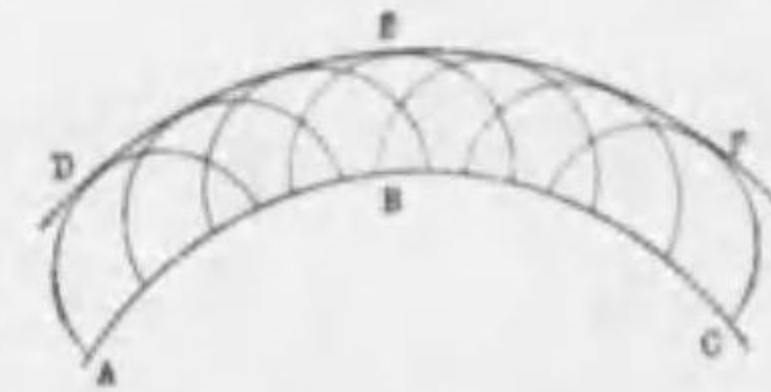
之等は光の真空中の傳播速度であつて物質中に於ては異なる値となる。單に光速度といへば真空中の光の速度を指し通常文字 c で之をあらはす。物質中の光の速度については後に述べる。(§19 参照)

光が直進するといふことは或る面に出来る物體の影は光源と物體の周とを結ぶ直線が此の面と交る線を境にして出来ることや、光が直進するものとし、光の道を直線であらはし反射屈折の法則に従つて幾何學的に作圖した結果が鏡・レンズ等で作った光學機械に於ける像の形、位置等とよく合ふ事で分る。併し乍ら之は近似的に云へることで光波が之等の結果を如何にして與へるかは後に述べる。(§22 参照)

§18 光の反射

ハイゲンスの原理 一般に波動が空間に擴がる時波動の同じ位相の點をつないで出来る曲面を波面といふ。波動の傳播方向は波面に直角の方向である。波動の傳播

は波面の進行現象である。ある瞬間に於ける光波面が知れてゐてその波面上の各點に於ける光の強さが分つてゐるならばその後の光波の傳播狀況は次の原理によつて指定される。即ちこの波面上の各點が光源となり、その點の光の強さに比例した強さで同じ振動數、同じ位相の球面光波を送り出した結果を求めればよい。之をハイゲンスの原理といふ。例へば第56圖に於てあ

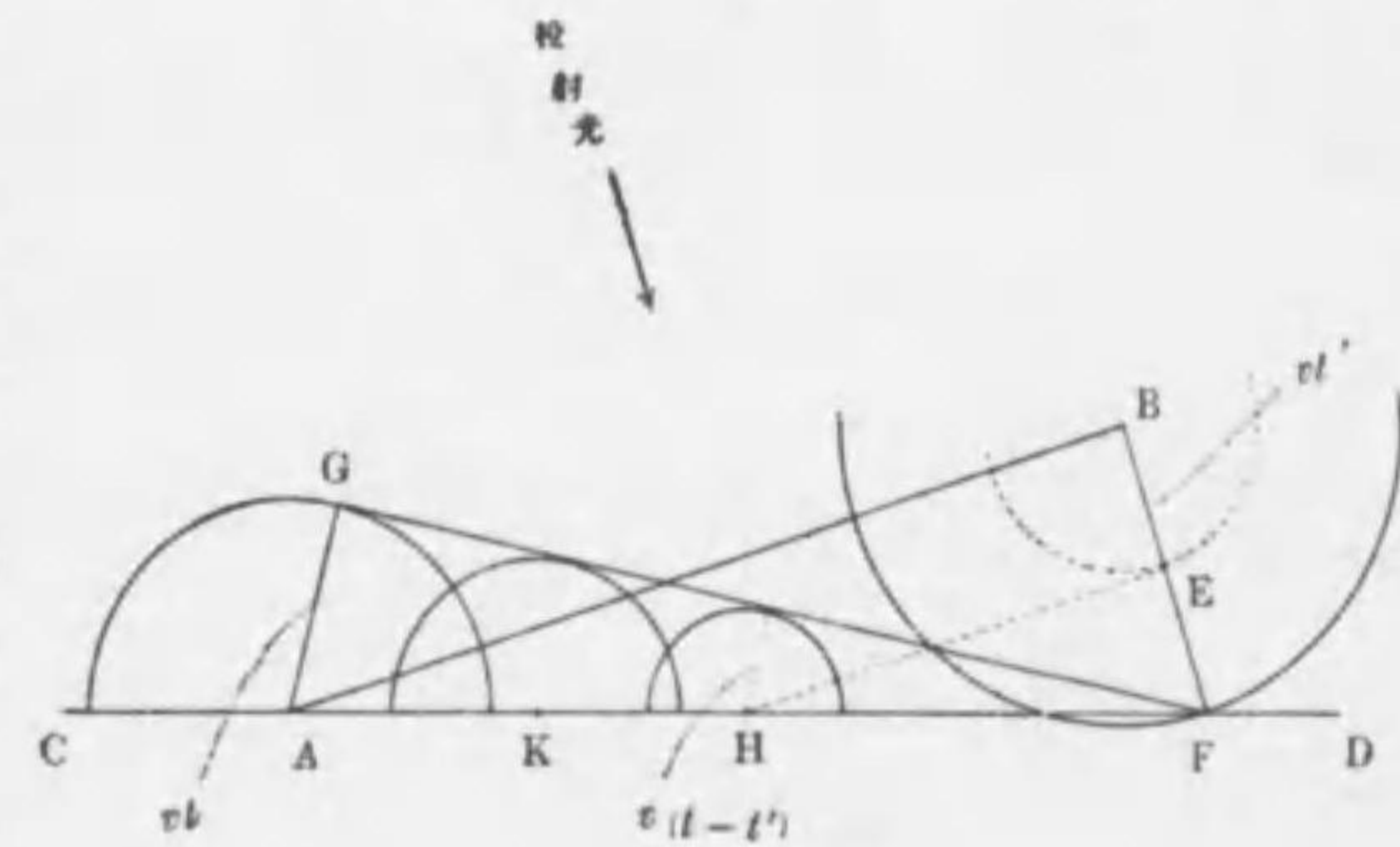


第56圖

る瞬間に於ける波面をABCとする。ABC上の各點を中心とし半徑 vt の圓を描きその包絡線をDEFとすれば之は t だけ時間が経過した後の波面である。但し v は考へる物質中に於ける光の速度である。

反射の法則 此の原理より反射の法則を求めることが出来る。第57圖に於てCDを反射する面、ABを投射光波の波面とし

この二つはAで交り光はA Bに直角に進むものとする。(すべて切口のみを考へる)

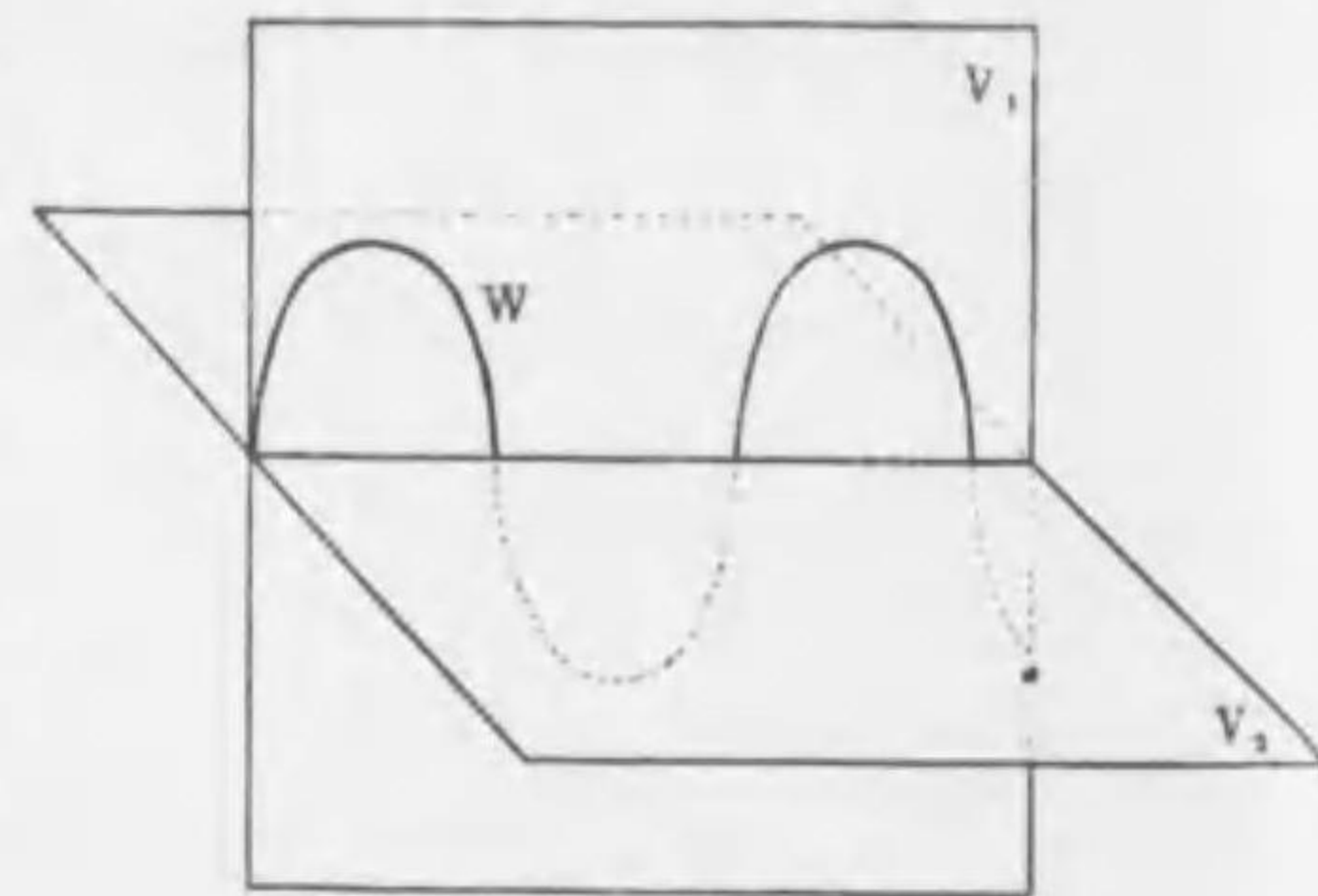


第57圖

ABに垂直にBFをひきCDとの交點をFとする。波面がABにあつた瞬間から t だけ経過した瞬間の波面を求める。但し v を

傳播速度とし $BF=vt$ とする。A を中心として半徑 vt の圓を描き F から此の圓に切線 FG を引く。時間が t だけ經過したときの波面は BF 上に $BE=vt$ の如く E 點をとり $EH \parallel AB$ の如くひけば EH がそれである。故に H を中心とし $v(t-t)$ を半徑とする圓を描けばこの圓は時間が t だけ經過したときの波面に切してある筈である。然るにこの圓は FG に切してあることが容易に知れる。 t は任意で (但し $t < t$) 従つて H も AF 間の任意の點であるから FG は求める波面である。明かに $\angle BAF = \angle GFA$ であり光の進む方向は波面に直角であるから反射角は投射角に等しい。投射光線と反射光線と反射面の法線とが同一平面上にあることも容易に證明出来る。即ち反射の法則を得る。

光波の振動面 波動には横波と縦波とがある。光は一體どちらなのであらうか。研究の結果によると光は横波である。第58圖に於て光波 W が面 V_1 内にあるものとし面 V_2 を V_1 に垂直な面とする。面 V_1 を光波の振動面、面 V_2 を光波の偏光面といふ。



第58圖

* 光波を考へるには振動面のみを考へればよい。昔光波の振動面を指定する標な面を偏光面といつたのであるがよくしらべてみると以前に偏光面といつた面は振動面と直交する面であつたが、併し尙現今偏光面といふ語が使はれる。

自然に存する光は振動數、振動面等の異なる種々の光波を極めて數多く含んだものである。或振動面をもつ光波を特別に多く含んだ光波を偏光といひ、之に對してさうでない光波を自然光といふ。

反射能 さて光が反射する際には投射光線と同じ強さの光を反射しないで必ずその幾分か失はれる。投射光の強さに對する反射光の強さの割合を反射能といふ。反射能は投射角によつて異り、投射角が大きい程大きい。又投射光の振動數及び振動面によつても異なる。磨いた金屬面その他の面に綠色光を垂直に投射した場合の反射能をあげれば次表に示す様である。

金 屬	銀	水銀	白金	ニッケル	金	銅	水	硝子姿見
反射能 (%)	93	78	61	63	74	48	1.7	82

金屬面の反射能は投射光が或特別の振動數をもつてゐるとき極めて著しくなることがある。之を選擇反射といふ。従つて此の様な金屬に白色光をあてると金屬は特有の色にみえる。金の色などは之である。

ガラスや水の表面に光を斜にあてて見ると振動面が投射面内にある光の反射能は之と直角の振動面の光の反射能よりも小さい。自然光は兩方の振動面の光を同じ様に含んでゐるからガラス面で斜に反射させると反射光は投射面に垂直な振動面をもつた光を多く含む様になる。即

* 投射光線と投射點に於ける境界面の法線との定める平面。

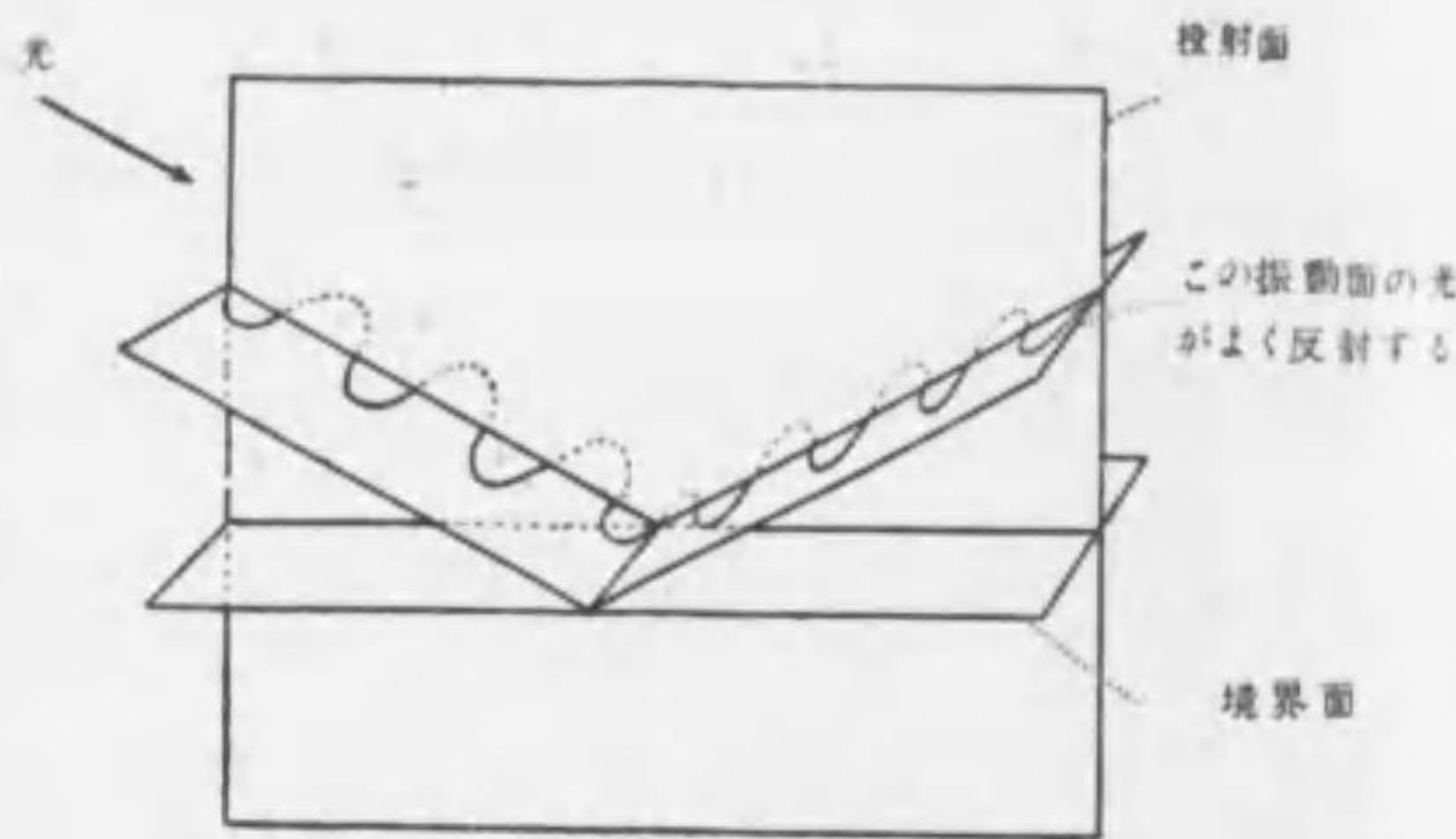
ち反射光は偏光となる。光をあてる物質の屈折率を n とすると投射角 φ が

$$\tan\varphi = n \quad (18.1)$$

をみたすときは投射面と同じ振動面の光は全く反射しない。従つて自然光を此の角で投射すると反射光は投射面に垂直な振動面をもつ光ばかりになる。此の様に一定平面の振動面の光波のみからなる光を直線偏光又は平面偏光といひ、之に對し或方向の振動面をもつ光が強くて他の方向の振動面の光は次第に弱いときには之を部分偏光といふ。角 φ を偏光角又はブリュースター Brewster の角といひ、(18.1) の関係をブリュースターの法則といふ。

磁氣光學的
ケル効果

直線偏光を
物體の面に直
角に投射する
とき投射光の
振動面と反射



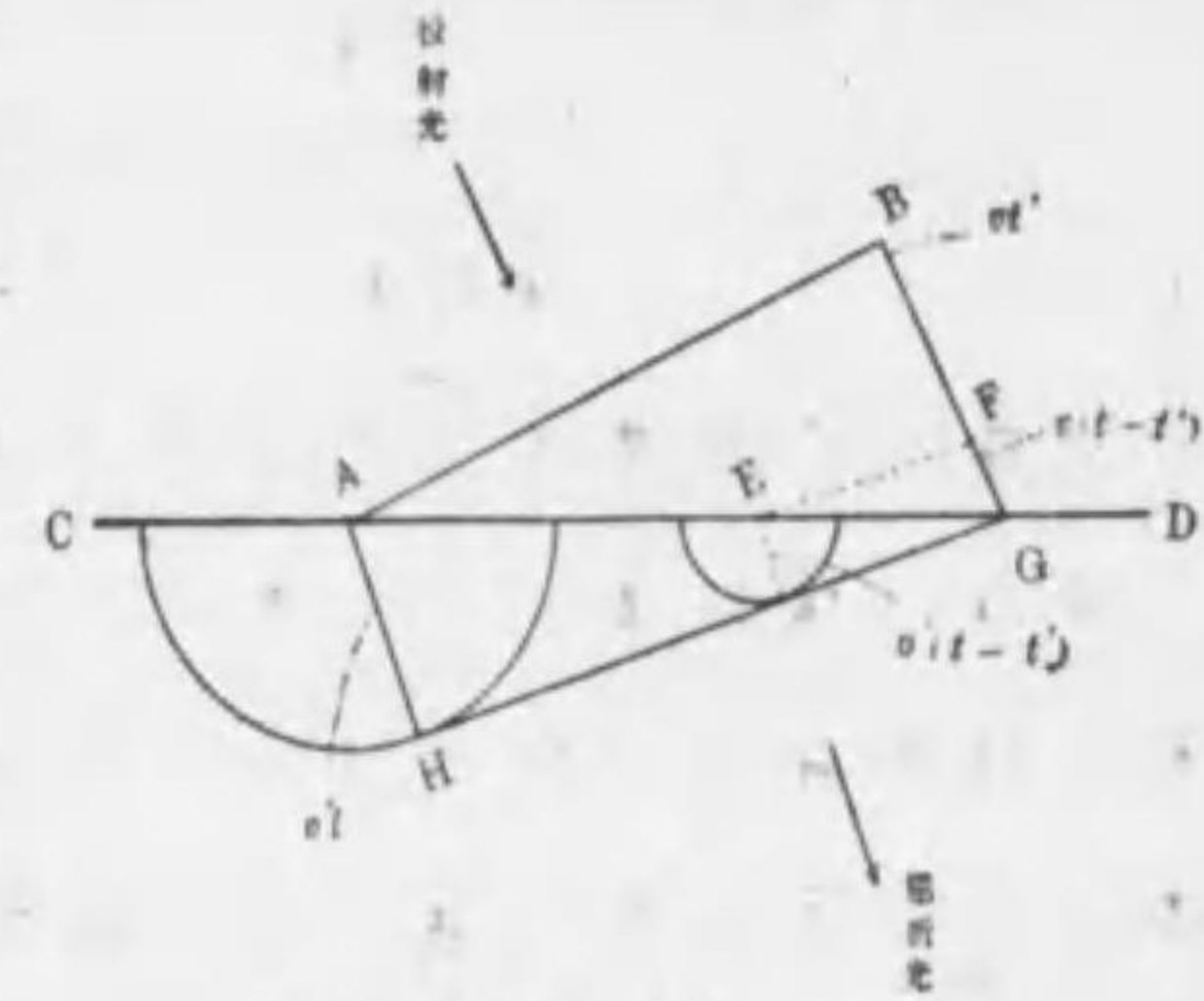
第 59 圖

光の振動面とは同じである。然るに 1877 年にケル Kerr は極めて強い電磁石の極に金屬を置いてその面で平面偏光を反射せしめると反射光の振動面が投射光の振動面から少しく廻轉してゐることを發見した。此の現象を磁氣光學的ケル効果といふ。

§ 19 光の屈折

スネルの法則 第 60

圖に於て CD を二つの媒質の境界面、AB をある瞬間の光波の波面とし光は CD の上方の媒質 I 内から来て CD の下方の媒質 II 内に屈折するものとする。今ハイゲンズの原理



第 60 圖

により屈折の法則を求めよう。AB に立てた垂線 BG と CD との交點を G とする。波面 AB が G に達する迄の時間を t とし、媒質 I 内の傳播速度を v 、媒質 II 内の傳播速度を v' とすると、 t だけ時間が経過した後は波面は媒質 II 内で A を中心とし $v't$ を半径とする圓周上の一點を通る。(切口だけを考へて) G から此の圓に切線をひき切點を H とする。波面が AB にある瞬間から時間が t' だけ経過した瞬間の媒質 I 内の波面を EF とすると、時間が t だけ経過したときの媒質 II 内の波面は E を中心とし $v'(t-t')$ を半径とする圓周上の一點を通らなければならない。然るに此の圓は GH に切する。 t' は任意であるから(勿論 $t > t'$) GH は波面が AB にあつた瞬間から時間が t だけ経過した後の波面である。光線の傳播方向は波面に垂直であるから投射角を i 、屈折角を r とすると

$$i = \angle BAG, r = \angle HGA$$

である。然るに

$$vt = BG = AG \sin \angle BAG = AG \sin i$$

$$v't = AH = AG \sin \angle AGH = AG \sin r$$

$$\therefore \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'} \quad (19.1)$$

となる。今

$$\frac{v}{v'} = n \quad (19.2)$$

とおけば n は投射角及び屈折角に無関係である。故に

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad (19.3)$$

となる。又投射光線と屈折光線と境界面の法線とが一平面内にあることも容易に證し得るから光の屈折に關するスネル Snellius の法則を得る。而し乍ら之だけでは(19.2)で與へられる n が確に實驗的に知られてゐる屈折率に等しいかどうか分らない。又媒質 I を空氣とし媒質 II を水又はガラスとすれば n は I よりも大きい。従つて(19.2)は空氣中の光の速度よりも水やガラスの中の光の速度の方が小さいことを示してゐる。フーコーは1850年にこのことを確めたのである。種々の研究の結果(19.2)の示す關係の正しいことが分つてゐる。(19.2)の示す様に屈折率は媒質 I と媒質 II の中に於ける光の速度の比であるから若し媒質 II が一定の物質であつても媒質 I が異れば一般に異なる。従つて一つの物質について屈折率を云々するときには如何なる媒質からその物質中に光が入るときの屈折率であるかを定めておかなければならない。通常屈折率といふのは眞空中からその物質内に入るときの屈折率を

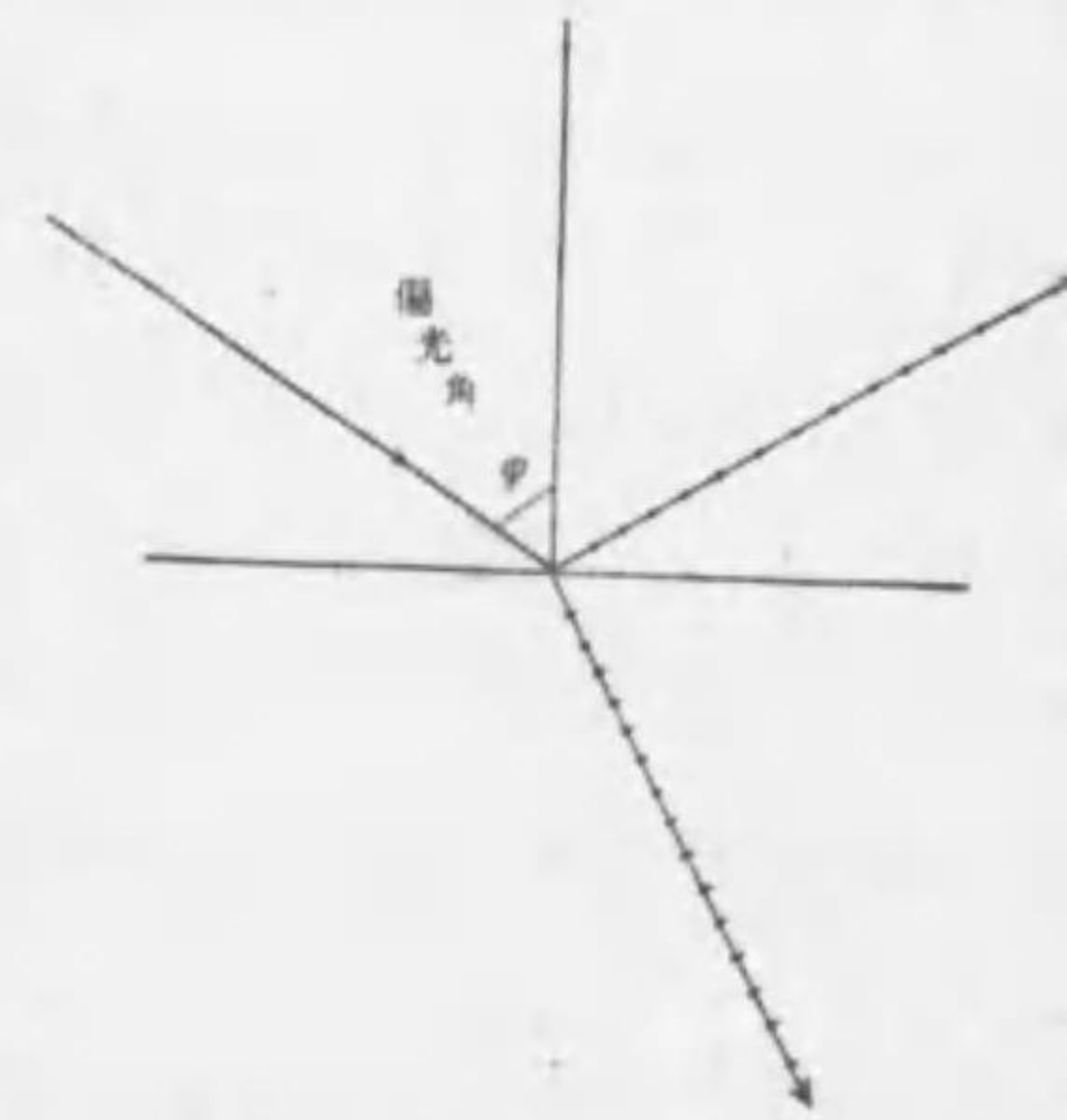
いふ。眞空中の光の速度は c であるから一つの物質内の光の速度を v とすると、その物質の屈折率は次式で與へられる。

$$\frac{c}{v} = n \quad (19.4)$$

空氣から一つの物質内に光が入るときの屈折率は(19.4)で與へられる n と殆んど同じであるから之を屈折率として使ふことが多い。

屈折光の量 殆んど光を吸収しない物質面で反射、屈折が起るときは反射する光が多ければ屈折する光は少い。従つて投射角が大きくなると屈折光の量は少くなり、又屈折光には投射面内に振動する光波の方が之と直角の面内に振動する光波よりも多く含まれてゐる。偏光角で投射した場合の屈折光は投射面内に振動する光波を最も多く含んでゐる。而し之と直角の面内に振動する光波を全く含まないのである。従つて反射光の様に直線偏光にはならない。反射光と屈折光との偏光状態の關係は大體第61圖に示すやうになる。

屈折率の大なる物質から屈折率の小なる物質に入るときには投射角が全反射の限界角に達すると全反射が起る。即ち此のとき屈折光の量は全く零となる。第二



第 61 圖

の物質内には全く光が来ない様に見えるのであるが絶対に光波が第二の物質内に入らないのではなくて光波は境界を極めて少しく超えて第二の物質内に入る。而し乍ら第二の物質に向つて進まず再び第一の物質の方へ歸つてしまふ。従つて第二の物質内には光が全く入り込まない様に見える。

分散 屈折率は一般に投射光波の振動数によつて異なる。之を**屈折率の分散**といふ。光を吸収しない物質の屈折率は大體次の様な式であらはされる。

$$n = n_0 + A\lambda^2 + B\lambda^4 \quad (19.5)$$

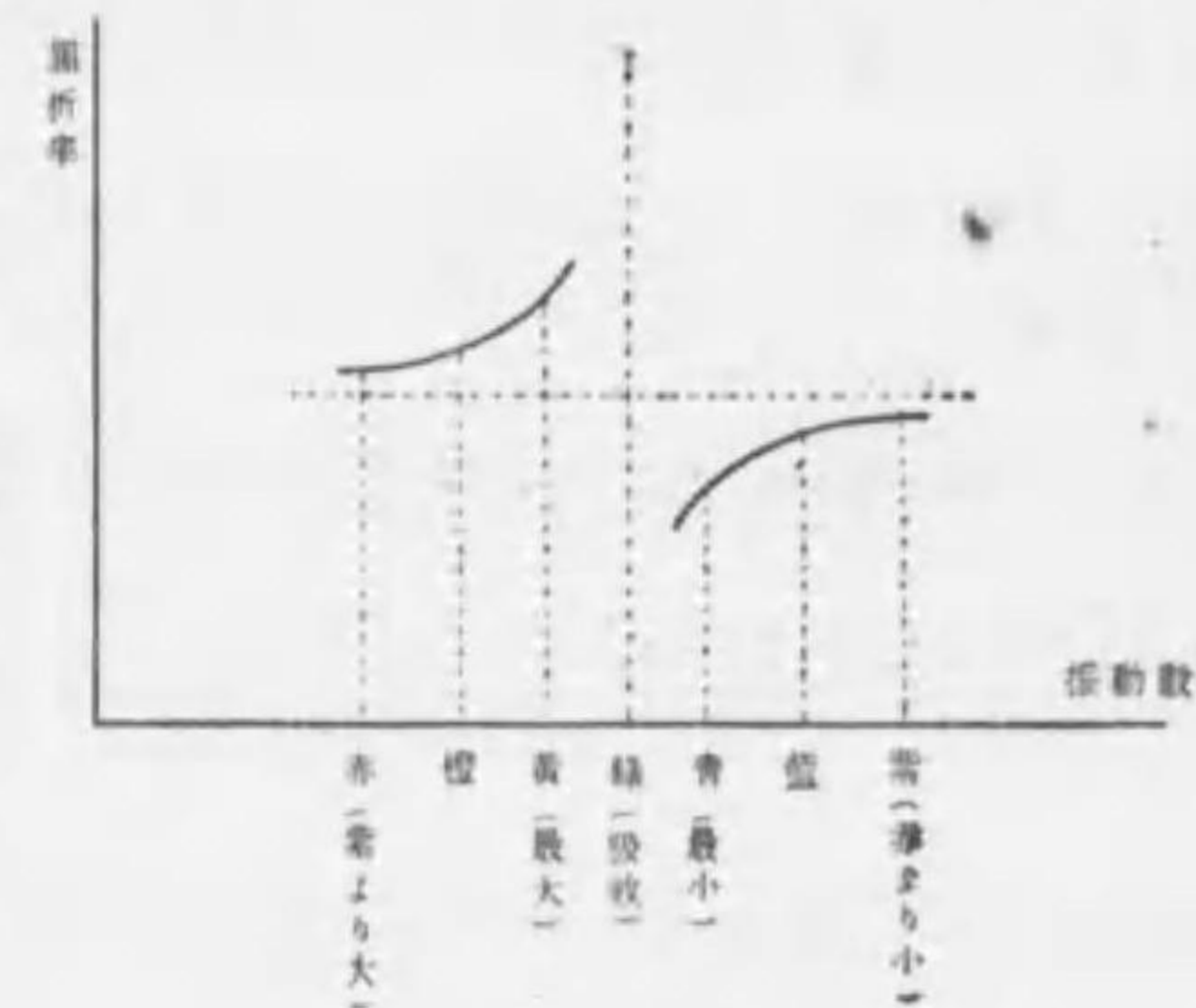
但し n_0, A, B は常數で λ は光の振動数である。之を**コーシーの分散式**といふ。即ち光の振動数が大きくなると屈折率も大きくなる。従つて赤の光よりも堇の光の方が餘計に屈折する。之はよく知られた事實であつて通常透明なプリズムで作つたスペクトルは色が赤橙黄緑青藍堇の順にならぶ。此のやうな分散を**正常分散**といふ。

然るに透明でなく或る特別の色の光を吸収する様な物質のプリズムで作つたスペクトルは色の順序が異なる。例へばフクシンのアルコール溶液を作り、之を極めて小さい角のプリズム形のガラス容器に入れ、之に光をあててスペクトルを作ると色が青藍堇赤橙黄の順にならんだものが

* 光が一つの境界面で屈折をしたとき振動数による屈折率の相違の爲にその成分が別々の方向に向つて分れる現象を普通に分散といふ。之より屈折率が振動数によつて異なることを分散といふ様になり一般に物質の光學的性質を表はす量が光の振動数によつて異なることを分散といふ様になつた。更に之を擴張して一般にある量が振動数により異なることを分散といふこともある。

出来る。そして堇と赤との間に光のない所がある。フクシン溶液は緑を吸収してゐるのであつてその前後の色が逆になつてゐるのである。之は青が最も屈折率が小さく黄が最も大きい事を示してゐる。従つてこの屈折率をグラフにかいて見れば第

62圖の様になる譯である。緑は吸収されてないけれども堇と赤の間に光の来ない部があるから之が緑に相當するものに相違ない。従つて緑の屈折率は堇と赤



第 62 圖

の中間に相當してゐるにちがひない。此の様な分散を異常分散といふ。異常分散の時には吸収される光の振動数を ν_0 とすると ν_0 の極く近傍を除いて次の式が成立する。

$$n^2 = A^2 + \frac{B}{\nu_0^2 - \nu^2} \quad (19.6)$$

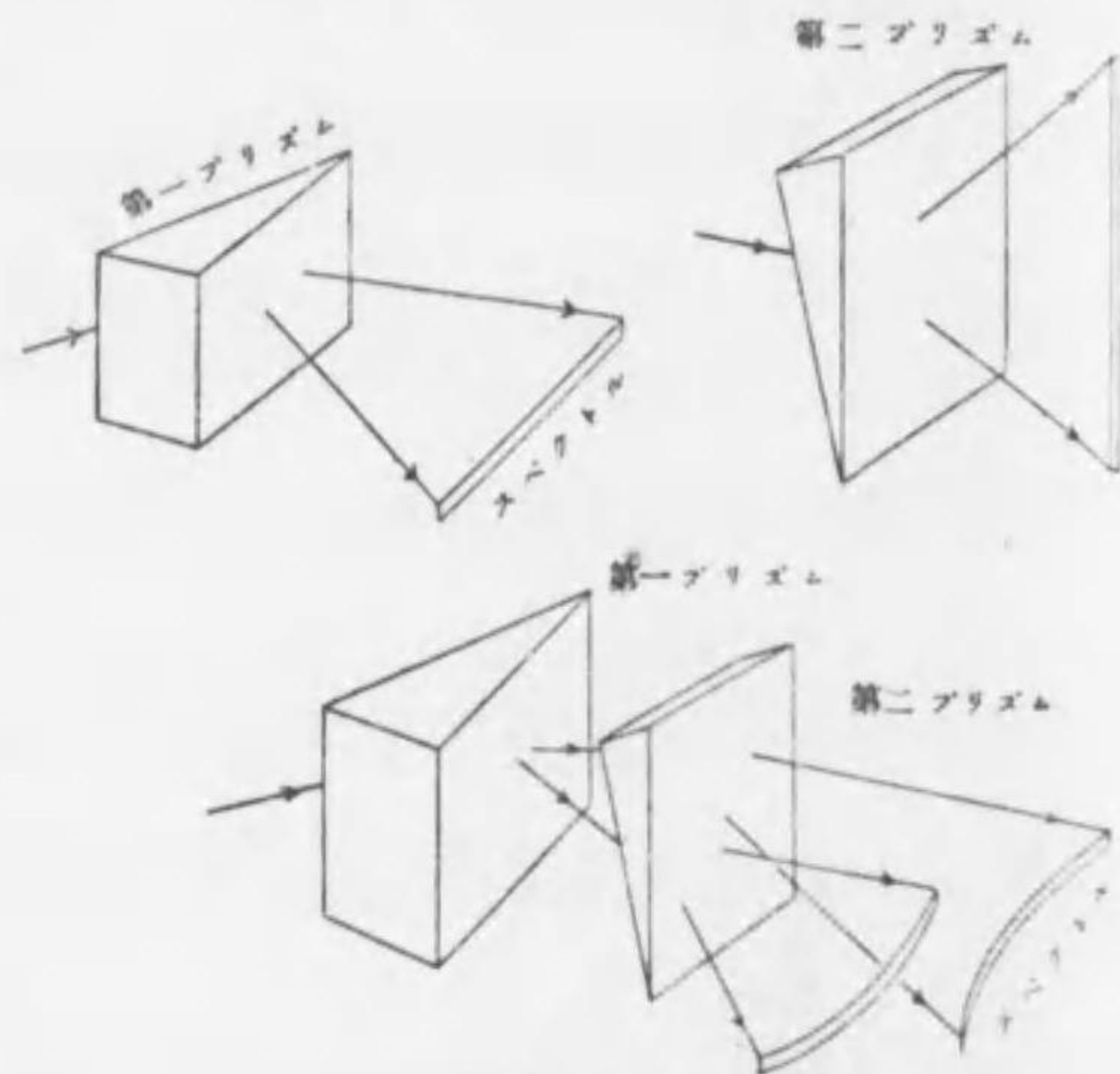
但し A, B は常數である。若し吸収される光が種々あるときはその各振動数の吸収光毎に後項のやうな形の項が加はる。(19.6)が第62圖の様な形をあらはしてゐることは次の考察から分る。 ν_0 と ν があまり近くなければ前項に比し後項は小さい。従つて二項定理により展開すれば大體に於て

$$n = A \sqrt{1 + \frac{B}{A^2 \nu_0^2 - \nu^2}} = A + \frac{B}{2A(\nu_0 + \nu)(\nu_0 - \nu)}$$

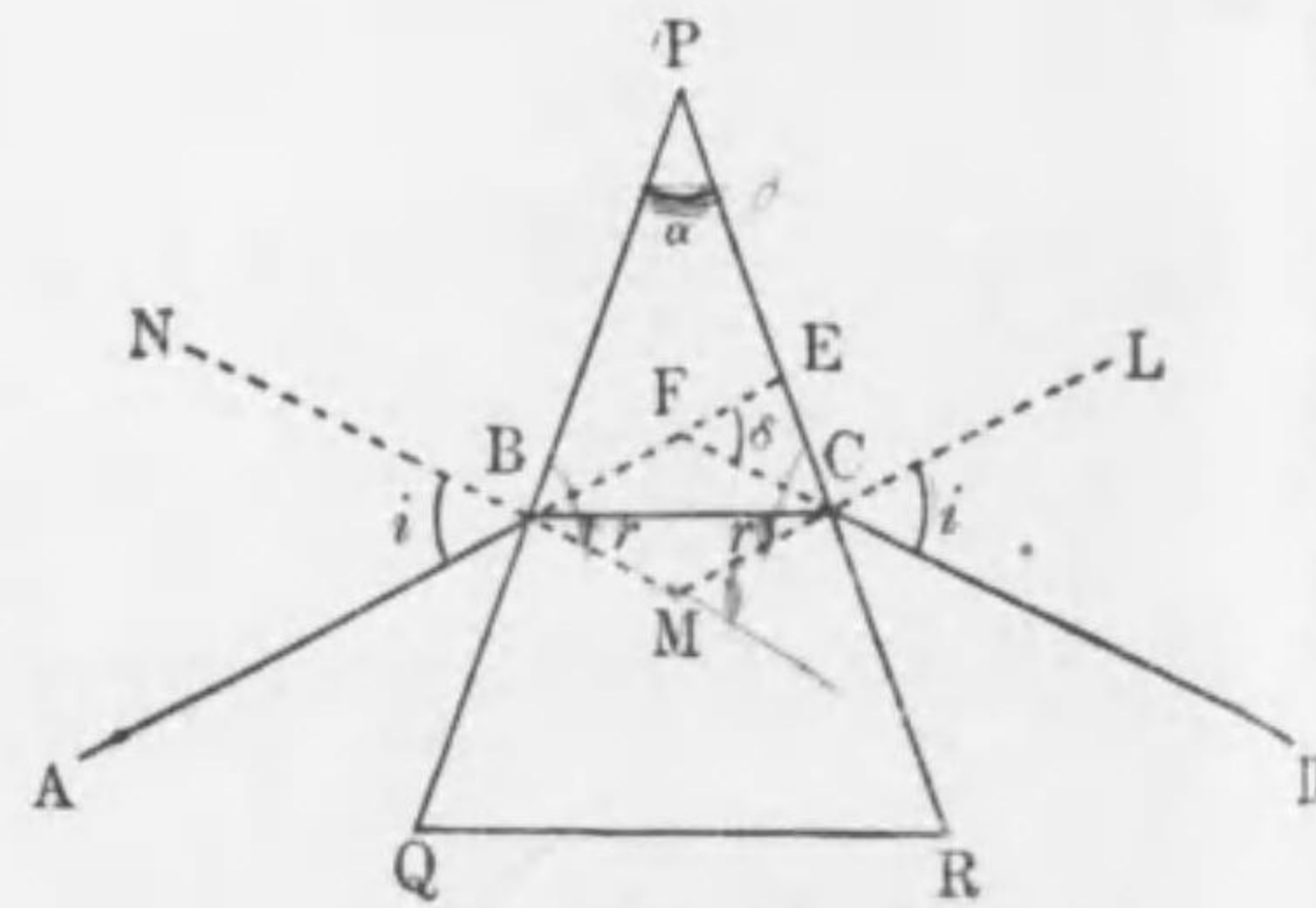
所が $\frac{B}{2(r_0+r)}$ は r_0 の近所ではあまりかはらぬから n は大體 $\frac{1}{r_0-r}$ の様にかはる。所が之は直角双曲線を表はすから丁度第62圖の様な形になる。此の様な形は直接にプリズムで見ることも出来る。先づ一つの透明なプリズムで極めて幅の狭いスペクトルを水平方向に作る。次にフクシツ溶液のプリズムが鉛直方向にスペクトルを作る様な方向にし而かもプリ

ズムの尖端を下にして之を前のプリズムの後に重ねる。然るときは第一のプリズムは光を水平方向に線状にひろげるから振動數に従つて光を配置する。第二のプリズムは之を屈折率に従つて鉛直方向に分けるから第62圖の様になる。(第63圖参照)

屈折率の測定



第 63 圖



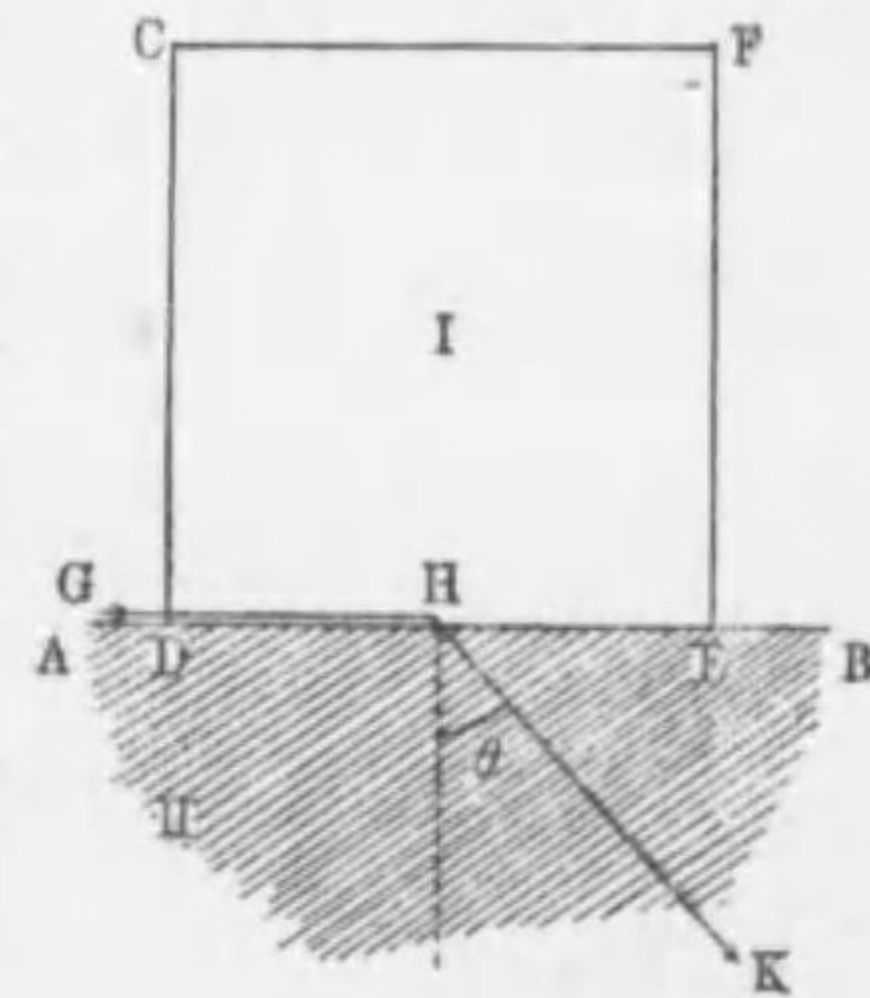
第 64 圖

固体及び液体の屈折率を測定する主な方法は極小フレの方法と全反射の限界角を測る方法とである。第64圖に示す様にプリズム PQR にあてた投射光 AB とプリズムを出る屈折光とのなす角 DFE をフレの角といふ。プリズムを廻轉するとフレの角は大きくなつたり小さくなつたりする。NM ⊥ PQ, LM ⊥ PR とすると丁度 ∠ABN = ∠DCL となつた時フレの角が極小になる。それで極小フレの角を δ とし、此の時の投射角、屈折角等を圖の如く i, r 等とし、プリズムの角を α とすると。

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 2r, \quad \delta = r + \frac{\alpha}{2} \\
 \therefore r &= \frac{\alpha}{2}, \quad i = \frac{1}{2}(\delta + \alpha) \\
 \therefore n &= \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \alpha)}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (17.7)
 \end{aligned}$$

となり δ 及び α を測つてプリズムの屈折率を知ることが出来る。之が極小フレの方法である。

第65圖に示す様に屈折率の分つてゐる固体 II の面 AB の上に CD と DE が直角になる様に磨いた固体 I をおき、底のない圓筒 CDEF をおいて中に液体 I を入れる。AB に平行に且つ AB にすれすれに光 GH を送ると全反射の限界角 θ で屈折して物質 II の中に入る。此



第 65 圖

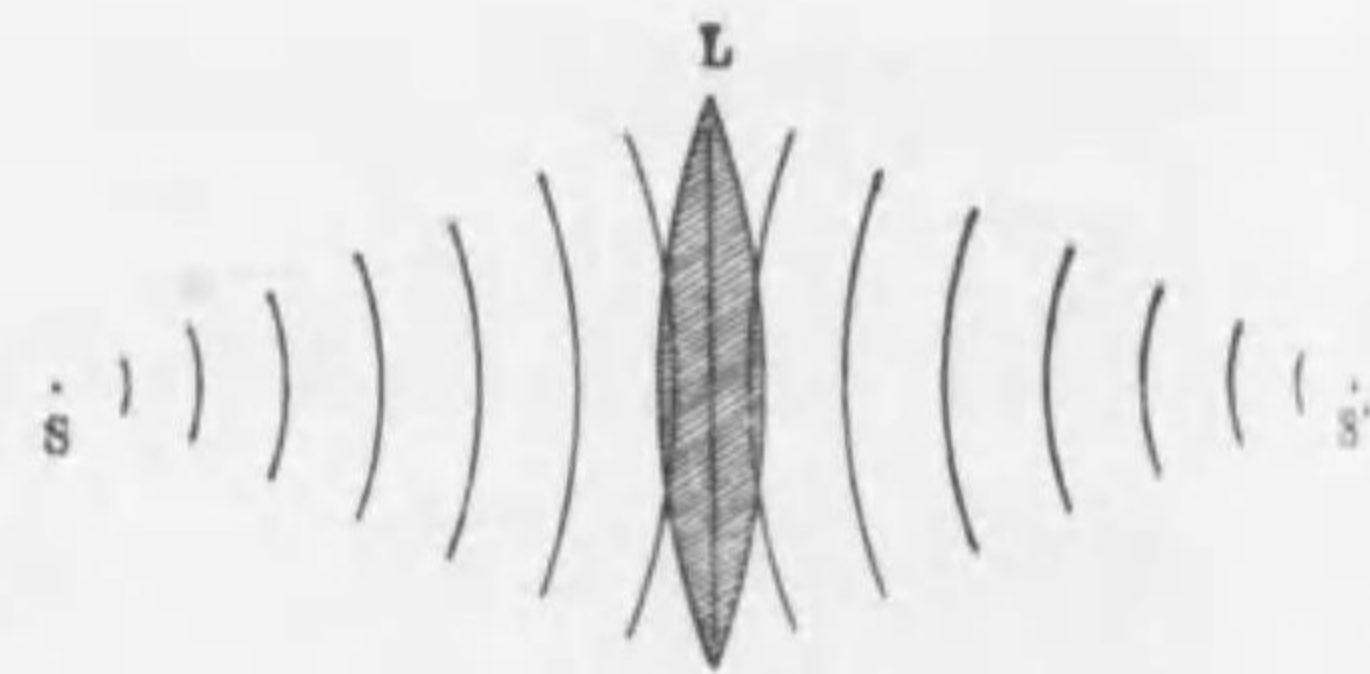
の時 I の屈折率を n , II の屈折率を n_0 とすると

$$\sin \theta = \frac{n}{n_0}$$

である。従つて θ を測れば I の屈折率 n を知ることが出来る。プルフリッヒ Pulfrich の屈折計, アッベ Abbe の屈折計等は此の方法を使ふものである。

§ 20 レンズ

第 66 圖に示す様に
 点光源 S から出た光
 が凸レンズ L に投射
 するときはレンズの
 裏側的一点 S' に光が



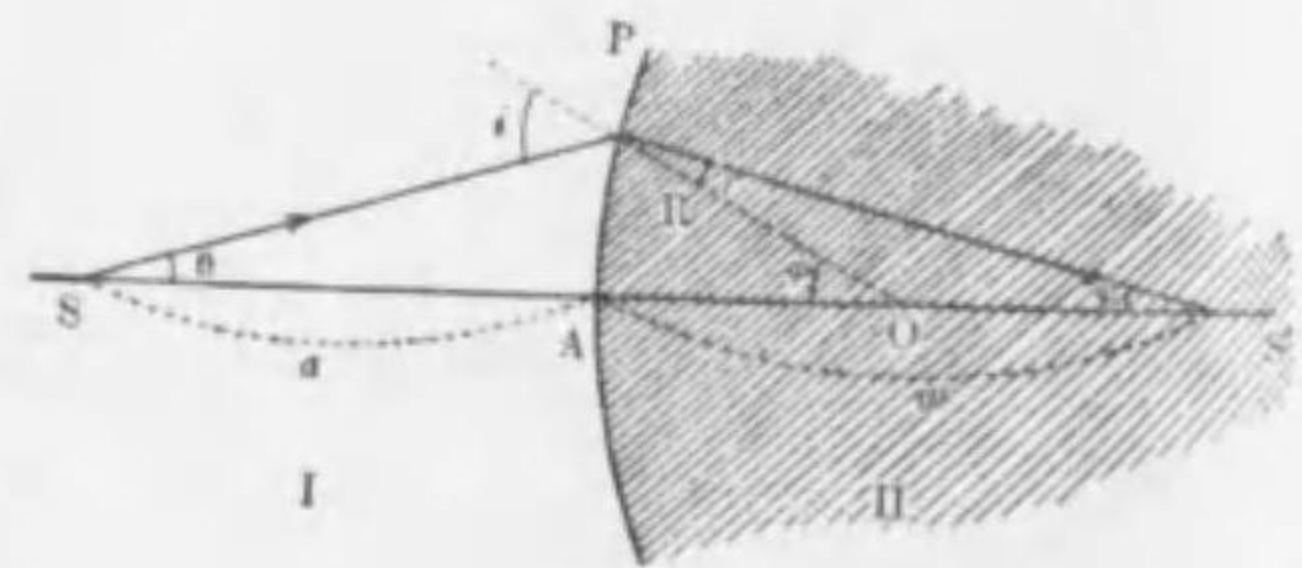
第 66 圖

集まる。S から出た光波の波面は圖に示す様に球面である。この光波がレンズ L に投射するときはハイゲンスの原理に従つて波面が變り, L を通過すると波面は S' を中心とする球面となる。故に S' に集るのである。波面上の各点の位相は皆同じであるから S から種々の方向に出て S' に集つた光の位相は皆同じである。

次にスネルの法則に従へば如何にしてレンズの性質が説明せられるかを示さ

う。

凸球面に於ける屈折
 第 67 圖に於て AP を半
 徑 R の球面とし, その中



第 67 圖

心 O とする。球面の外側の物質 I は空氣又は真空とし、球面の内側の物質 II の屈折率を n とする。I の中にある光源 S から出た光線が球面 AP で屈折した後の通路を考へる。SO と AP の交点を A とし, S から出た光線の中 SO に極めて近い任意の光線が球面 AP に投射した点を P とする。P 點で球面に立てた法線は PO である。光はこゝでスネルの法則に従つて屈折する。S が A に近いときは屈折光線は直線 SO から段々遠ざかる方向に行くが若し SA の距離が半徑 R に比して充分遠い所であれば P で屈折した光線は SO の延長と交る。この点を S' とし今この様な場合を考へる。種々の角に圖の様な符號をつけ, SA = a, AS' = a' とする。

スネルの法則によつて

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

である。所が SP は SA に極めて近いから SA に比し AP は極めて小さい。故に θ は極めて小さく, 従つて i 及び r も亦極めて小さい。故に近似的に

$$\frac{i}{r} = n$$

である。然るに $\triangle SPO, \triangle POS'$ を考へると

$$i = \theta + \phi, r = \phi - \psi$$

故に

$$\frac{i}{r} = \frac{\theta + \phi}{\phi - \psi} = n \quad \therefore \frac{i}{r} = \frac{\frac{\theta}{\phi} + 1}{1 - \frac{\psi}{\phi}} = n$$

* n は空氣から物質 II に入るとき屈折率とみて差支ない。

となる。然るに θ, φ, ψ が小さいことから近似的に

$$AP = a\theta = R\varphi = a'\psi$$

$$\therefore \frac{\theta}{\varphi} = \frac{R}{a}, \quad \frac{\psi}{\varphi} = \frac{R}{a'}$$

となる。之を前の式に代入すると

$$\frac{\frac{R}{a} + 1}{1 - \frac{R}{a'}} = n$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{n}{a'} = \frac{1}{R}(n-1) \quad (20.1)$$

を得る。之は P の位置に無関係であるから S から出た SA に近い光線は近似的に一点 S' に集る。即ち S' は S の像であつて (20.1) は凸球面で屈折が起る場合の光源と像の位置の関係を與へる式である。S を次第に A に近づけると S' は A から次第に遠ざかる。S' が無限の遠方に行つたときは S から出る光は屈折の後平行光線となる。この様な S の位置は $a' \rightarrow \infty$ として

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{R}(n-1)$$

で與へられる。この S の位置を第一焦點といひ

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{R}(n-1) \quad (20.2)$$

が與へる f_1 を第一焦點距離といふ。又 I の中から來た光が平行光線をなすときは $a \rightarrow \infty$ とみるべきものでそのときの S' の位置は

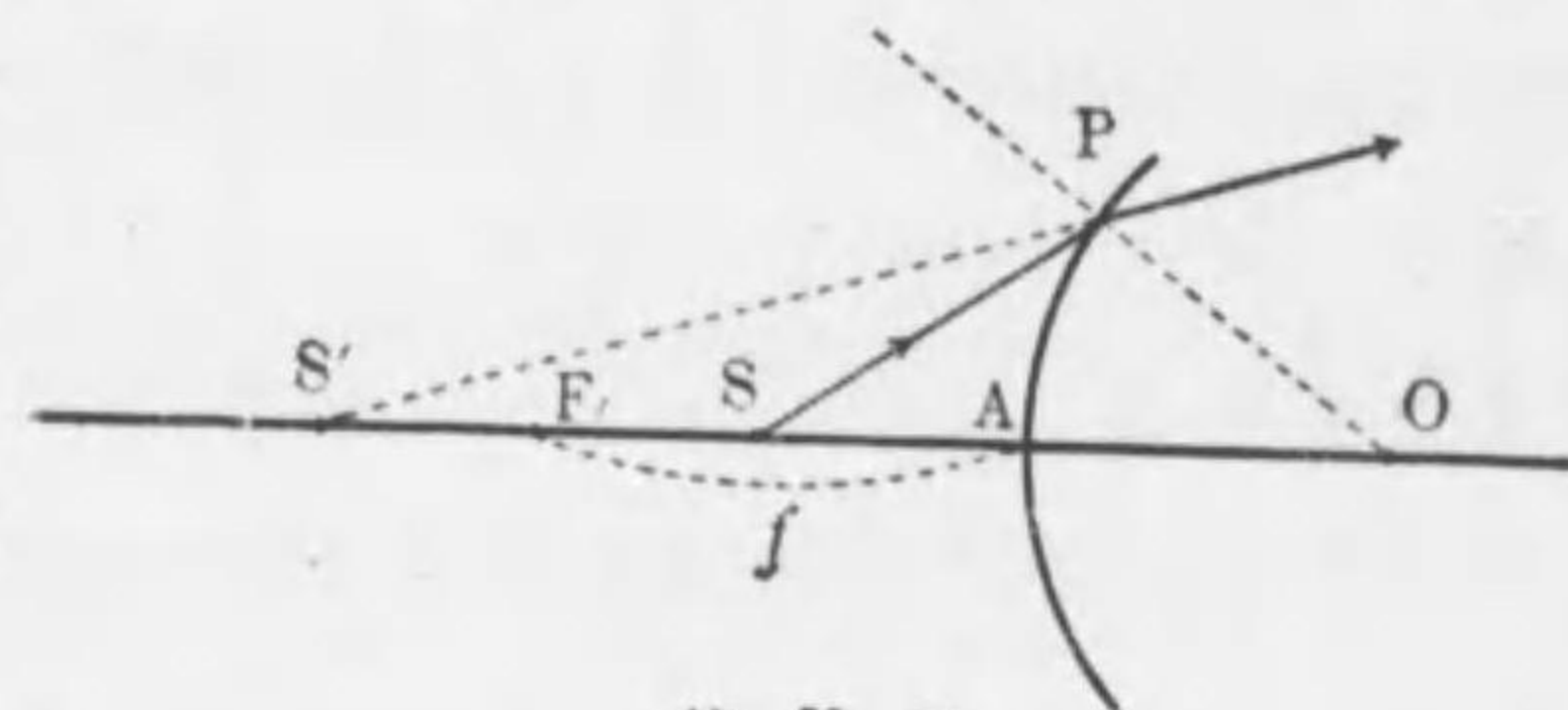
$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{R} \frac{n-1}{n}$$

で與へられる。この S' の位置を第二焦點といひ

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{R} \frac{n-1}{n} \quad (20.3)$$

で與へられる f_2 を第二焦點距離といふ。

(20.1) は S' が光源である場合でも成立するもので第一焦點は物質 II の中から來た平行光線が集まる點と考へてもよい。又 a が f_1 よりも小になるときは S から出た光線が屈折して一點に集まらず次第に擴がる。併し屈折光線を I 内の方へ逆に延長すると SA の延長上の一點 S' に集る(第 68 圖。それ



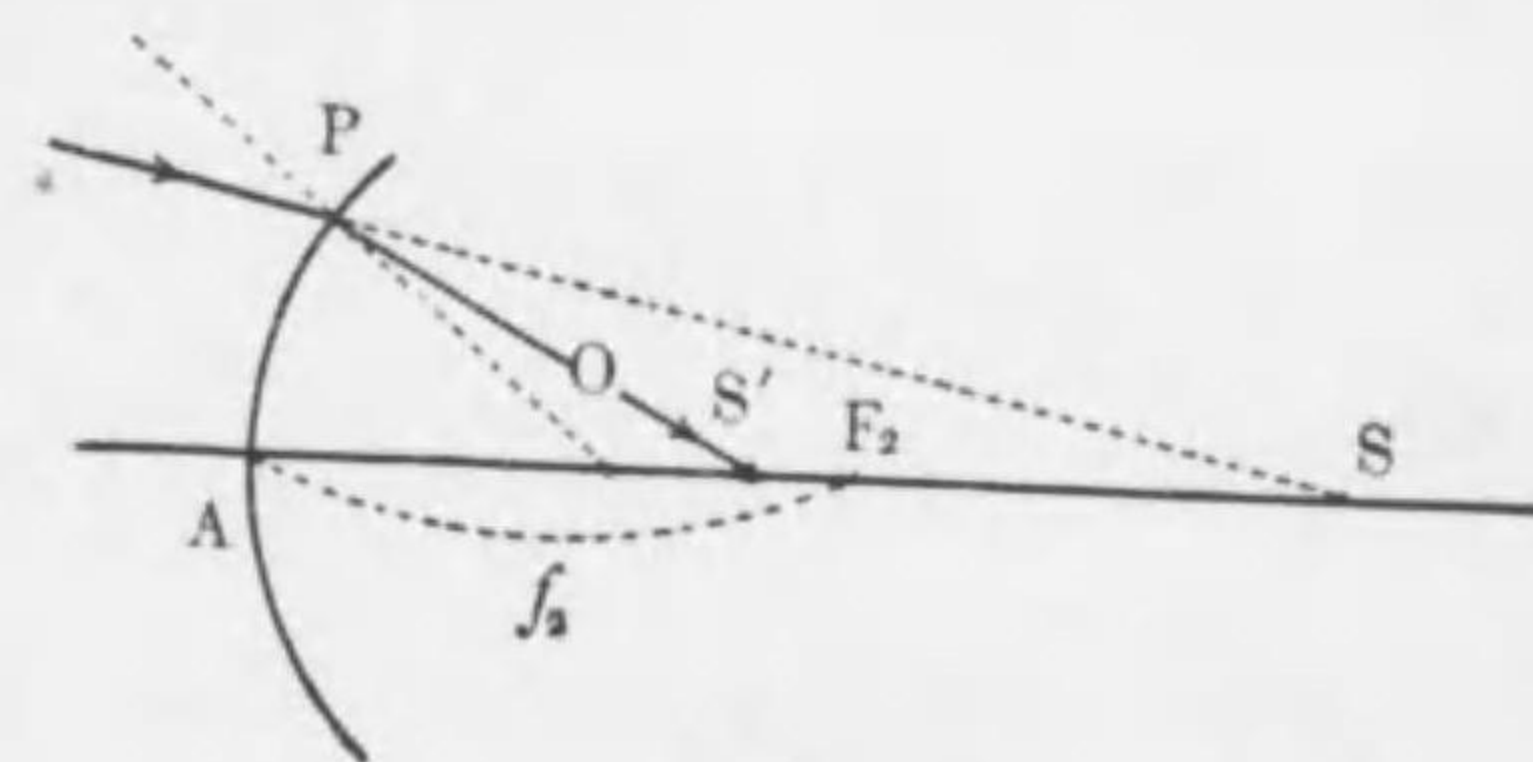
第 63 圖

で S'A を負と考へて之を a' とすると (20.1) が成立する。又 a' が f_2

より小になる様な S の位置はないが II 内の S'A 上の一 點 S' に集まる如き光線が I から來たと考へると之は S' に集まることが分る。このとき SA を負と考へて a とおくとやはり (20.1) が成立する(第 69 圖)。従つて (20.1) は a, a' の正負にかゝはらず成立するものである。

凸レンズの公

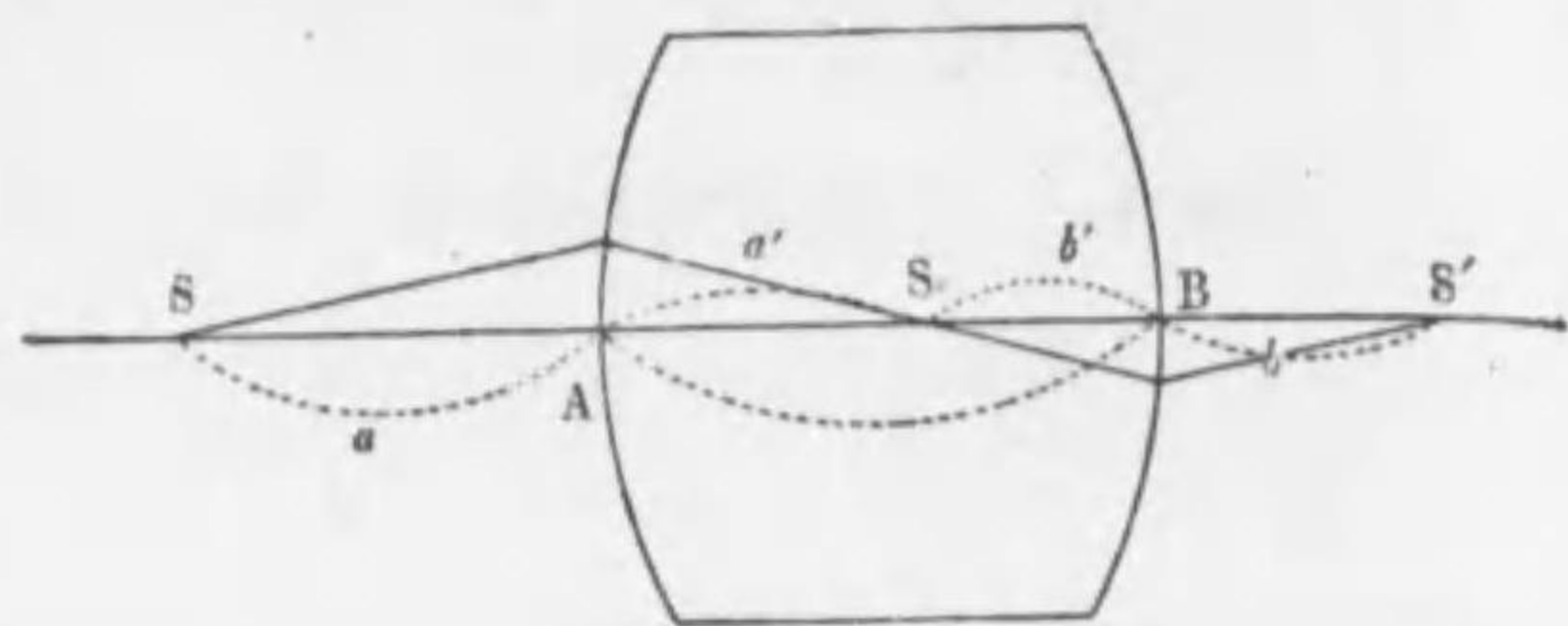
式 (20.1) を使ふと屈折率 n の物質で出來た凸レンズの公式を導くことが出來



第 69 圖

る。第一の凸面の球面半徑を R_1 、第二の凸面の球面半徑

を R_2 とし、光源 S は二つの球面の中心を結ぶ直線(之をレンズの軸とい



第 70 圖

ふ) 上にあるものとする。此の直線が兩球面と交る點を夫々 A 及び B とし、 S から出た光線が第一の面で屈折して集る點を S_1 、 S_1 から出た光線が第二の面で屈折して集る點を S' 、 $SA=a$ 、 $AS_1=a'$ 、 $S_1B=b'$ 、 $BS'=b$ 、 $AB=e$ とすると(20.1)により

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{a'} = \frac{1}{R_1}(n-1) \quad \therefore a' = \frac{n}{\frac{1}{R_1}(n-1) - \frac{1}{a}}$$

$$\frac{1}{b'} + \frac{n}{b} = \frac{1}{R_2}(n-1) \quad \therefore b' = \frac{n}{\frac{1}{R_2}(n-1) - \frac{1}{b}}$$

となる。 $a'+b'=e$ はレンズの厚さで一定であるから

$$e = \frac{n}{\frac{1}{R_1}(n-1) - \frac{1}{a}} + \frac{n}{\frac{1}{R_2}(n-1) - \frac{1}{b}} \quad (20.4)$$

が光源 S とその像 S' との位置の關係を與へる。 e が極めて小さい薄レンズでは之を無視することが出来るから(20.4)で $e=0$ とおけば

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (20.5)$$

となり薄レンズの公式を得る。 $a \rightarrow \infty$ 又は $b \rightarrow \infty$ のときの

* 前述の議論により a', b' 等が負になつても(20.4)は成立するから e が何程小さい場合でも(20.4)は成立する。

b 又は a は同じ値をとる。このときの S' 及び S の位置をレンズの焦點といひ、このときの b 又は a の値を焦點距離といふ。之を f とすると(20.5)から f は

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (20.6)$$

で與へられる。(20.5)は之を使つて

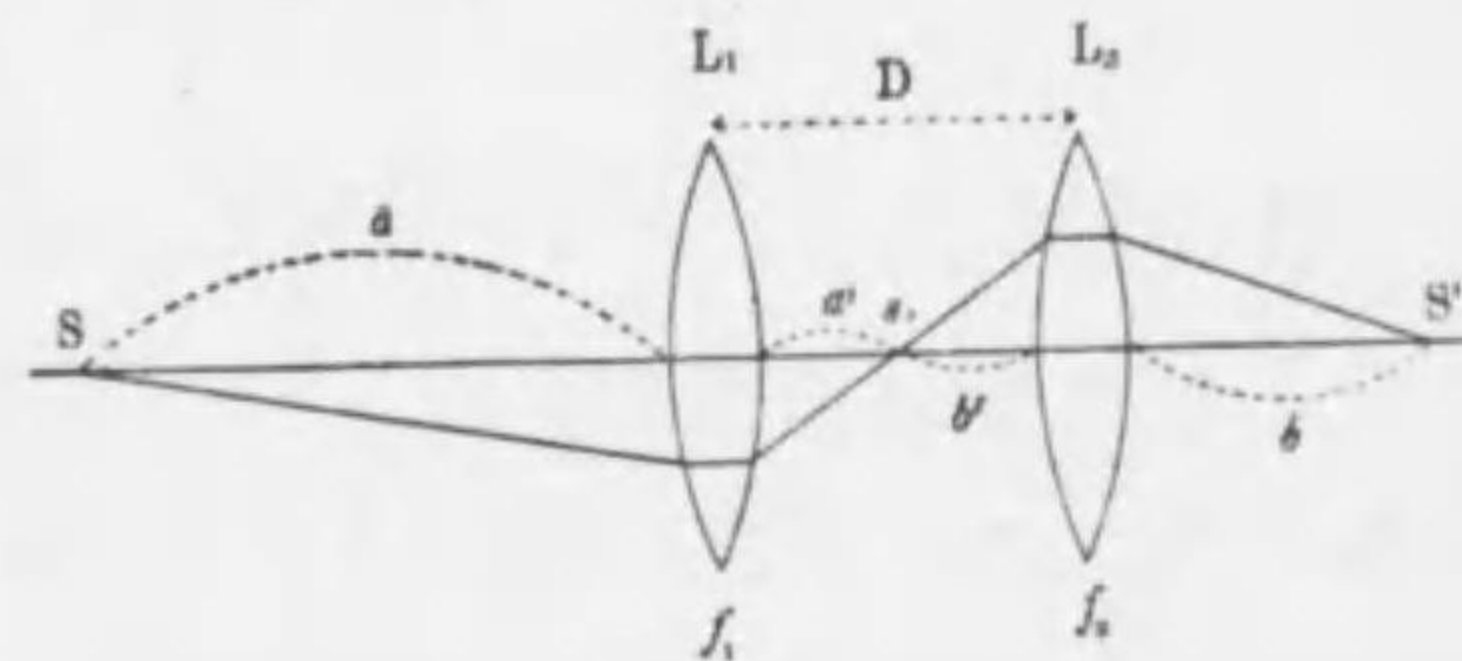
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (20.7)$$

となりよく知られた形となる。

一般の場合 凹球面で屈折する場合の考察法は上述の場合と全く同じでよい。只凹球面の半径は負と考へ、之を R で表はし且つ光源の方に像が出来る場合その距離を前の如く負と考へれば(20.1)式が成立する。従つて如何なる凸面と凹面とを組合はせてレンズを作つたときでも(20.5)(20.6)(20.7)が成立する。只球面半径、距離、焦點距離等は上の原理に従つて正負とすることを忘れなければよい。(一方が平面のときは球面半径を ∞ と考へればよい) e が無視出来ない様な厚レンズではレンズの表面から二つの焦點迄の距離は(20.4)から分る様に等しくない。

薄レンズの組合

せ (20.7)は前述の如き意味に於て a, b の正負にかゝらず成立する。



第 71 圖

従つて之より薄レンズ二枚を組合せたときの公式を得ることが出来る。第71圖の如く焦點距離 f_1 のレンズ L_1 と

焦点距離 f_1 のレンズ L_1 とがその軸を一致せしめて D だけ離れて組合はされたものとする。軸上的一点 S に光源をおき L_1 による S の像を S_1 , L_2 による S_1 の像を S' とし、 $SL_1=a$, $L_1S_1=a'$, $S_1L_2=b'$, $L_2S'=b$ とおくと (20.7) により

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f_1} \quad \therefore a' = \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{a}}$$

$$\frac{1}{b'} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2} \quad \therefore b' = \frac{1}{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{b}}$$

となる。 $a'+b'=D$ であるから

$$\frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{b}} = D$$

を得る。 D が何程小さくてもこの式は成立する。二つのレンズが密着してゐるときは $D=0$ となり

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (20.8)$$

を得る。即ち合成レンズの焦点距離を f とすると

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (20.9)$$

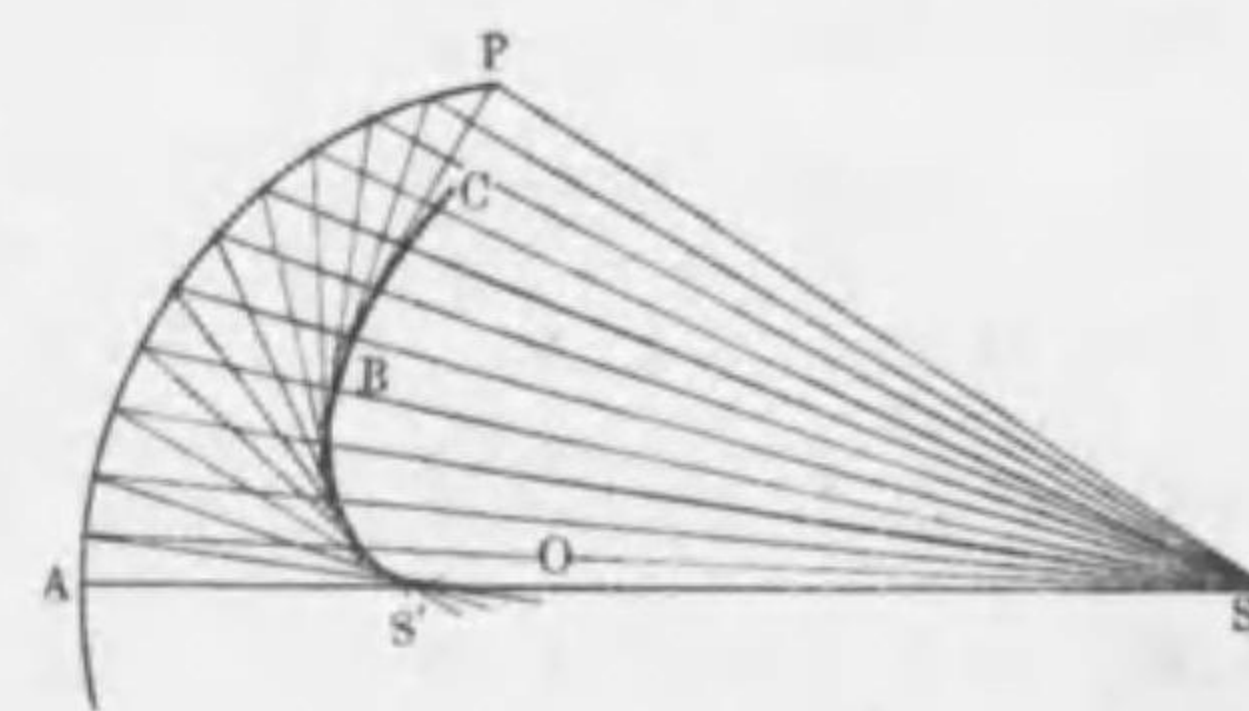
である。

§ 21 収差

どんなに細い細隙を通して平行光線を送つても光の波動性の爲にこの光線は進行と共に少しく擴がるから極めて細い平行光線を送つても之に對して嚴密に反射屈折の法則が成立しないことはいふ迄もない。この點に關しては後に § 22 に於て精しく述べる。今假に反射の法則やス

ネルの法則が完全に成立するとしても球面鏡の公式の導き方や前節に述べたレンズの公式の導き方から分る様に之等の公式が完全に成立するのではない。それは軸上にある光源から出た光線の中、軸とあまり大きな角をなさない光線に對して近似的に成立するのである。従つて軸以外の所から出た光線や軸と大きな角をなす様な光線に對しては勿論前述の考察は完全には成立しない。又屈折率は振動數によつて異なる。従つて之等球面鏡やレンズで作つた光學器械では必ずその不完全さが入つて来る。そして像に色がついたり、像が歪んだり、ぼんやりしたりする。此の様に反射の法則やスネルの法則が完全に成立するとしても生ずる像の不完全さを収差といふ。

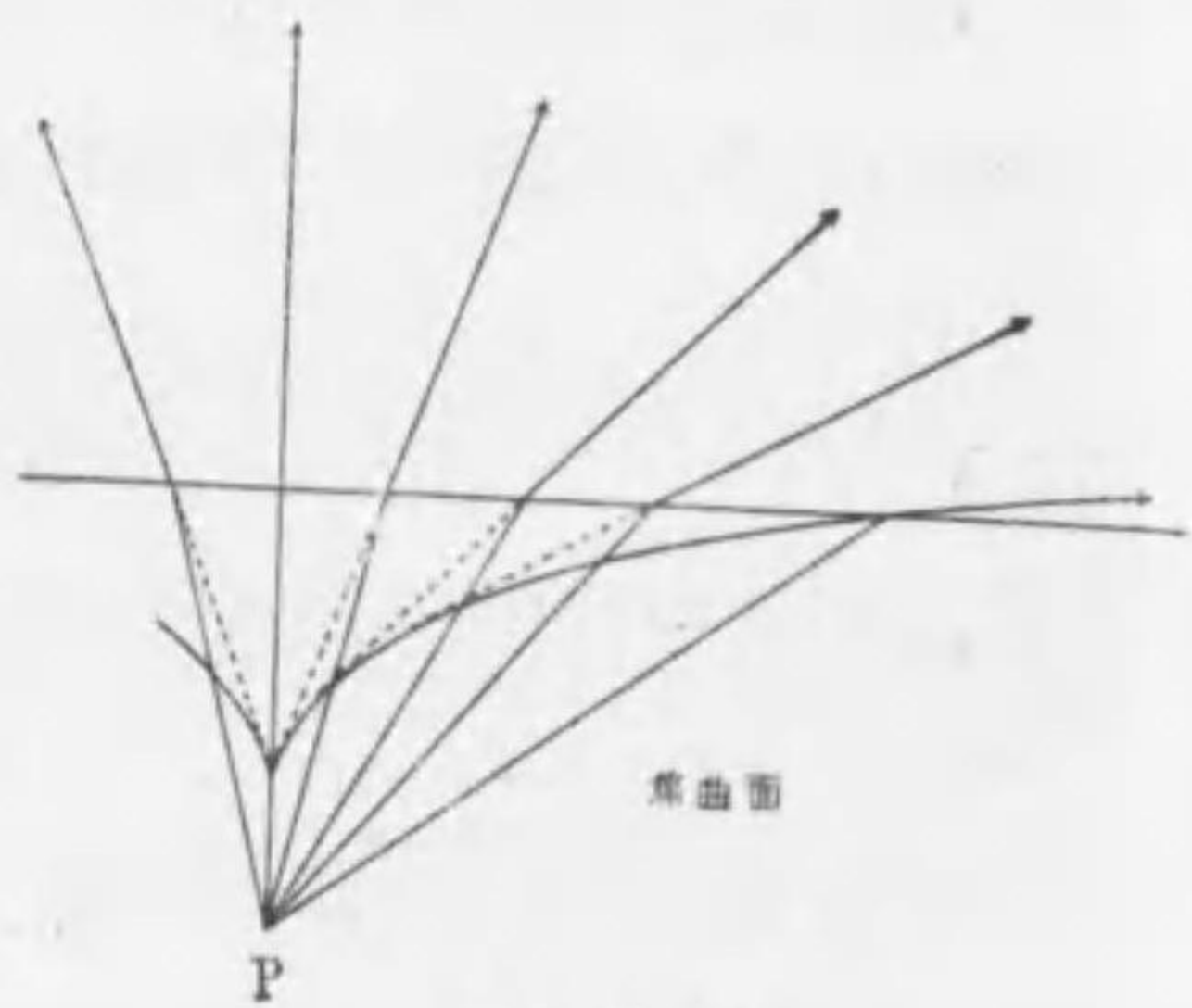
球面収差 平面反射鏡の前に點光源を置いたとき、反射光線は鏡面に對して光源と對稱の位置にある點から出た様な方向に向ふことは完全に證し得る。従つて此の場合収差はない。然るに第72圖の如く凹球面鏡 AP の軸上に點光源 S を置いても鏡面に當つたすべての光線は反射の後完全に一點に集まらない。圖の如く一つの曲面 $S'BC$ で包まれる様な方向に向ふ。この様な収差を球面収差といふ。反射光線の包絡面 $S'BC$ を焦曲面といふ。圓筒の内面で反射した光線の焦



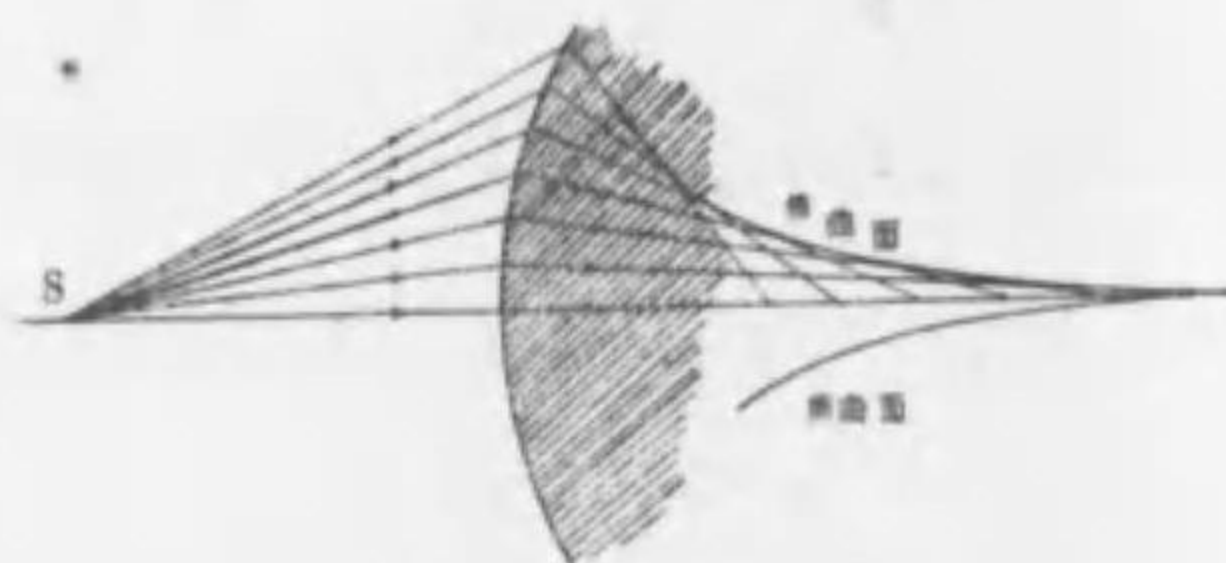
第 72 圖

曲面は湯のみに太陽の光が水平に近くあたつた時その内面に出来るのを見ることが出来る。軸に平行な平行光線に對してこの様な收差のない凹面鏡は拋物線をその軸に對して廻轉したときに出来る廻轉拋物面の凹面鏡である。この鏡ではその焦點に點光源をおけば反射光線は完全に平行となる。探照燈の反射鏡とするものは之である。

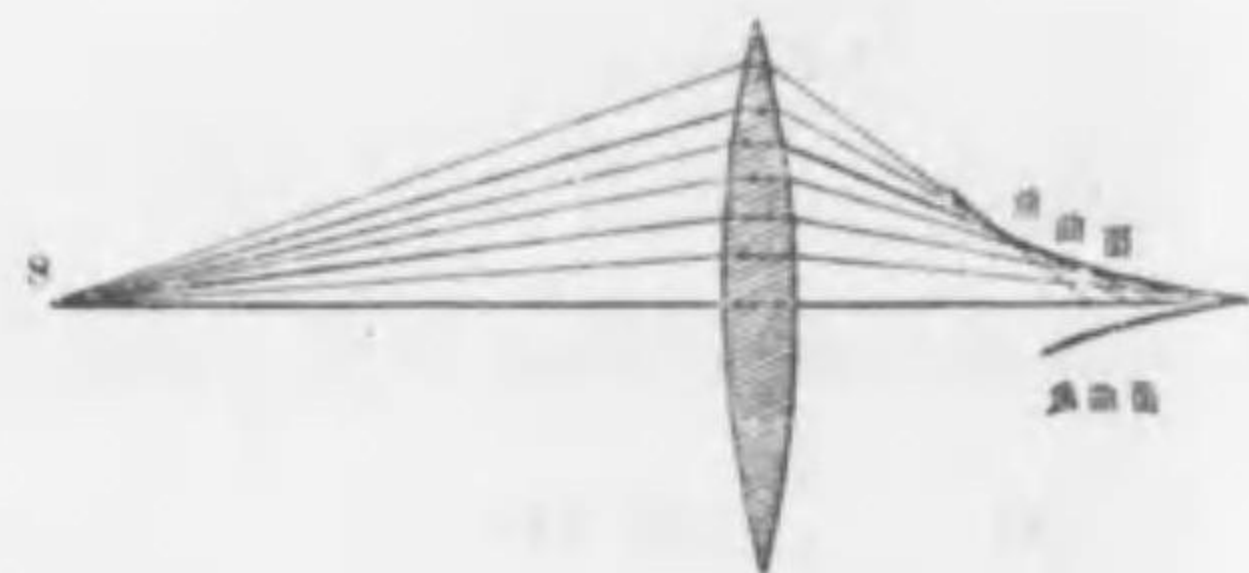
水中の點光源から出た光を考へる。この時も水面で屈折して空氣中へ出る光を逆に延長して見ると一點に集らないで一つの包絡面を作る(第73圖)。この包絡面をやはり焦曲面といふ。球面で屈折した光線もやはり焦曲面を作る(第74圖)。従つてレンズにもやはり球面收差が存在する(第75圖)。之を除くには異なる屈折率の凸レンズと凹レンズを組合せるとよい。球面内には一つの特別の點があつてこゝに光源



第 73 圖



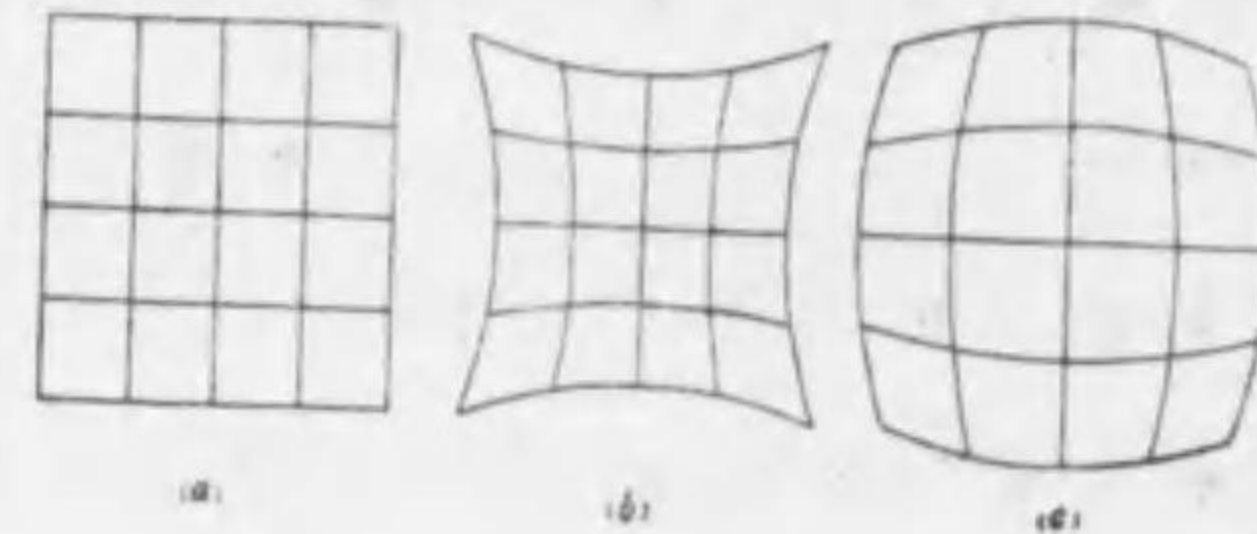
第 74 圖



第 75 圖

があるときは球面收差がない。この様な點を球の不遊點といふ。

像の歪曲と彎曲 大きさのある物體の像をレンズで作る際物體の各部から出た光が夫々レンズの別の部分を通ると第76圖(a)の様な眞四角なものの像が(b)の様に絲卷形になつたり(c)の様に三味線胴形になつたりする。之を

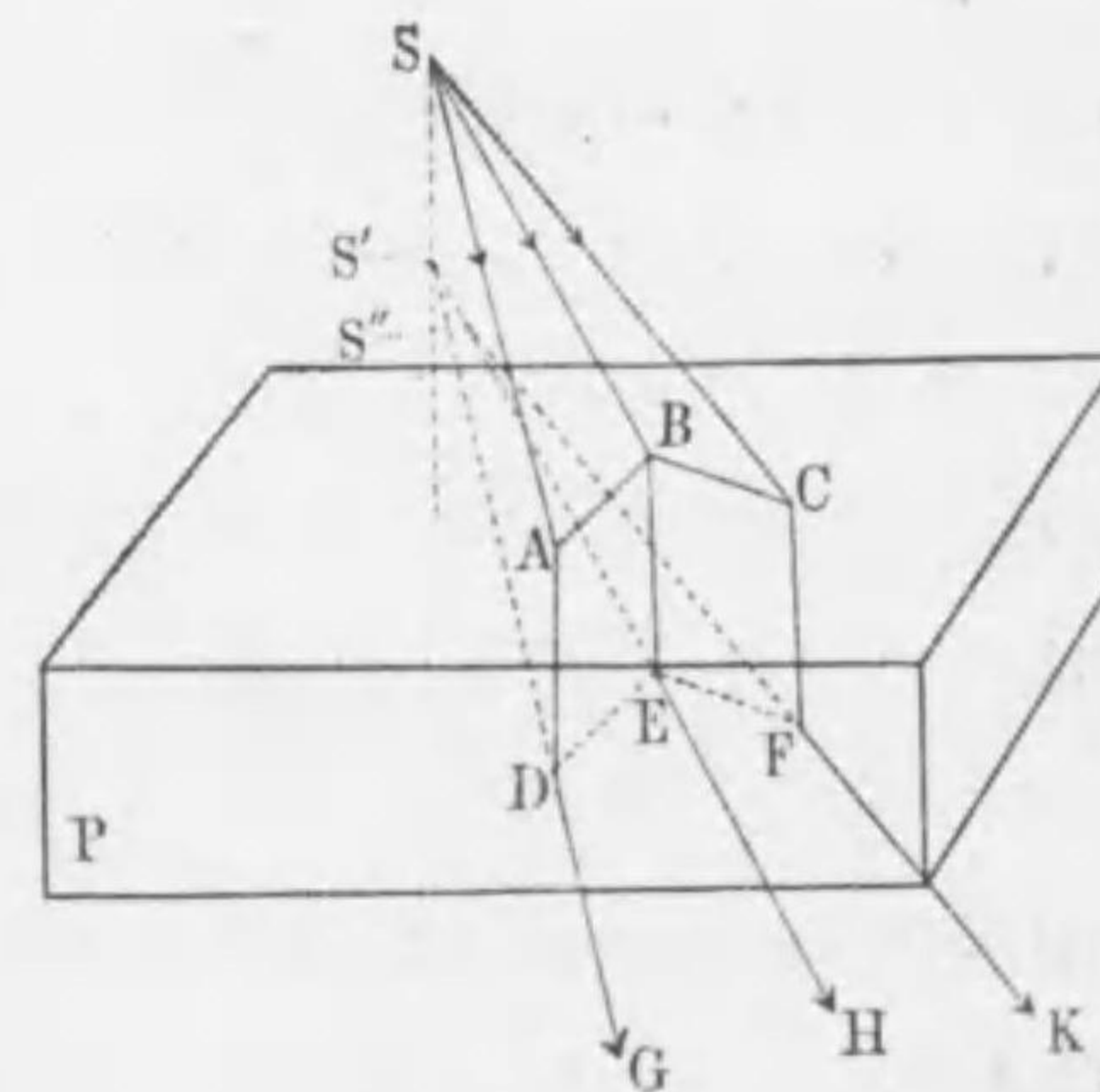


第 76 圖

像の歪曲といふ。レンズによる歪曲はシボリによつて影響されるから二枚組合せたレンズではシボリをその間の適當の位置に置いて歪曲を除くことが出来る。又物體が一平面にあつてもその像が一平面内に出来ないことがある。之を像の彎曲といふ。

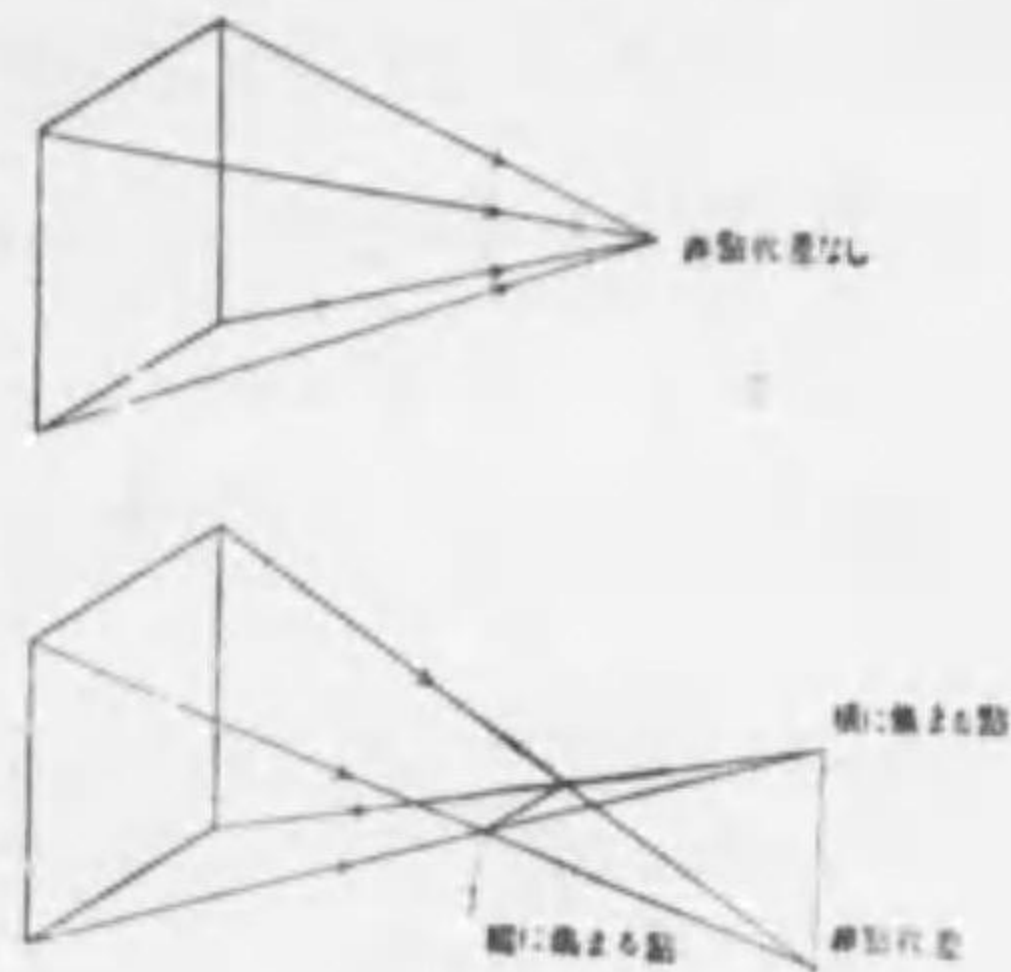
非點收差

平行な平面をもつたガラス板Pの上方に點光源Sがあつて之から出た光がPを透過して出る場合を考へる(第77圖)。Sから出てSABの面内に擴がつた光がPを透過した後之を逆に延長



第 77 圖

してみるとある一点 S' に集る。然るに之と直角の平面



第 78 圖

SBC 内に擴がつた光が D を透過した後之を逆に延長してみると他の点 S'' に集まる。この様に異つた方向に擴がつた光の集まる點が異なる現象を非点収差といふ。レンズに於てもレンズの周邊にあつた光は縦の収斂の仕方と横の収斂の仕方が異り非点収差が起る。レンズの曲面がゆがんでゐて縦の切口の曲率半径と横の切口の曲率半径とが異なる様な場合には著しい非点収差が起る。この様な水晶體をもつた眼は亂視である。英語では非点収差のことも亂視の事も Astigmatism といふ。

コマ レンズの軸から離れた所にある点光源の像が一点とならず一端に濃い頭を有し一方にはやけて彗星の様になることがある。之はやはりレンズの不完全さから起る収差によるもので、この様な収差をコマといふ。

以上述べた五つの収差即ち球面収差、像の歪曲、像の彎曲、非点収差、コマをザイデル Seidel の五収差といふ。

色収差 以上はすべて形に屬するものであるが他に色に屬するものがある。屈折率は光の振動数によつて異なる。(20.6)を見れば分る様にレンズの焦點距離は屈折率によつて異なる。従つて一つのレンズの焦點距離は色によ

つて異なる。即ち異つた色の光は異つた位置に像をむすぶ。故に白色光で照らされた物體の像には色がついてみえる。之を色収差といふ。之を除くには異つた屈折率のレンズを組合せて種々の色に對する焦點距離を一致させるのである。通常レンズの焦點距離は太陽スペクトルのフラウンホーフェル線のうち D 線についていはれる。今フラウンホーフェル線の F 線と C 線に對する焦點距離が等しい様な二つのレンズの組合せ條件を求めよう。(20.6)により F 線に對して

$$\frac{1}{f_F} = (n_F - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{n_F - 1}{n_D - 1} (n_D - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{n_F - 1}{n_D - 1} \frac{1}{f}$$

となる。同様に

$$\frac{1}{f_C} = \frac{n_C - 1}{n_D - 1} \frac{1}{f}$$

故にこの差をとれば

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \frac{1}{f}$$

となる。

$$\frac{1}{v} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \quad (21.1)$$

はガラスの分散能といはれるものであるから之を入れると

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = \frac{1}{v f} \quad (21.2)$$

を得る。二つのレンズを密着して組合せたときの焦點距離は(20.9)より各色に對して夫々

$$\frac{1}{f_F} = \frac{1}{f_F'} + \frac{1}{f_F''}, \quad \frac{1}{f_C} = \frac{1}{f_C'} + \frac{1}{f_C''}$$

である。合成レンズが F 線と C 線とに對して色収差をも

たない爲には

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = \frac{1}{f_F'} - \frac{1}{f_C'} + \frac{1}{f_F''} - \frac{1}{f_C''} = 0$$

でなければならない。之に(21.2)を入れると

$$\frac{1}{\nu'f'} + \frac{1}{\nu''f''} = 0 \quad (21.2)$$

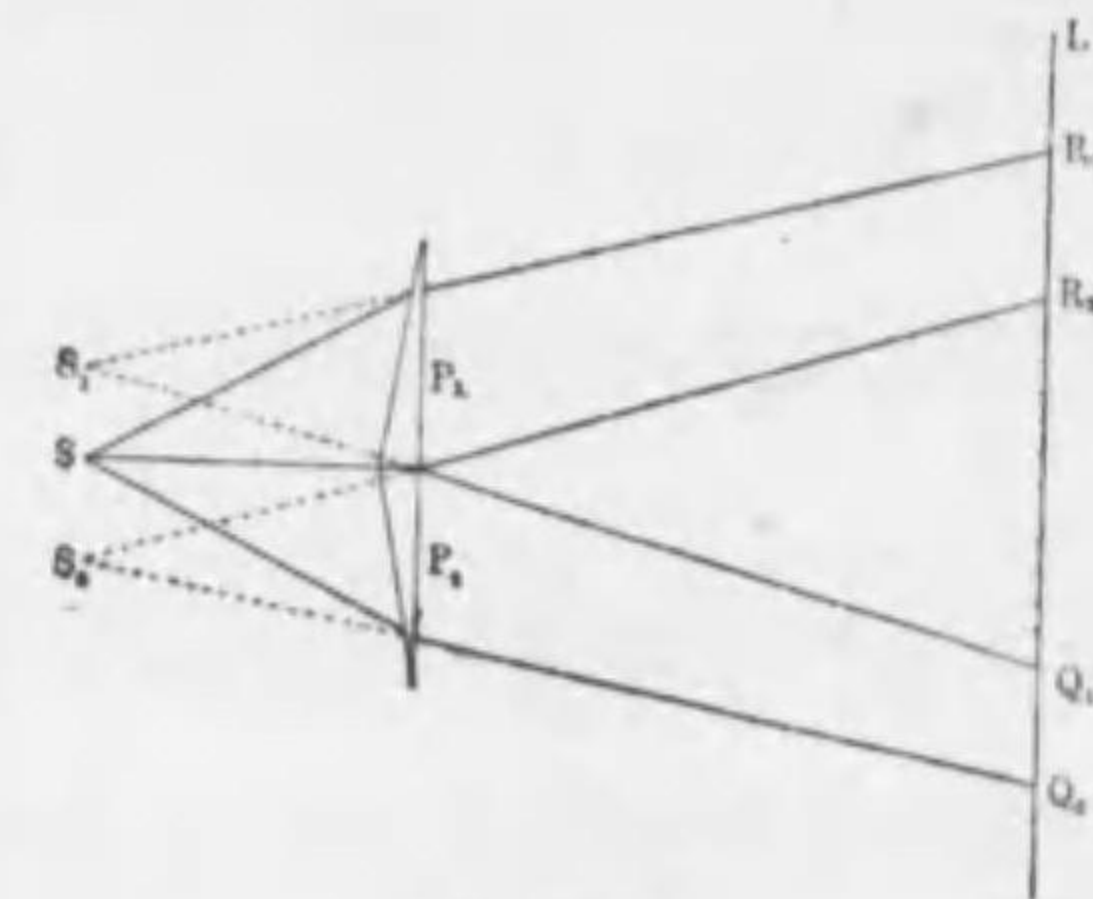
となる。之がF線とC線とに對して色収差を除く条件である。 $\nu' > 0, \nu'' > 0$ であるから若し $f' > 0$ ならば $f'' < 0$, 即ち一方が凸レンズならば他は凹レンズでなければならない。又若し $\nu' = \nu''$ ならば $f' = -f''$ となり合成レンズは同じ焦点距離の凸レンズと凹レンズから出来てゐることになるからレンズの用をなさない。故に必ず $\nu' \neq \nu''$ でなければならない。顕微鏡、望遠鏡、寫眞機等種々の精巧な光學機械に於ては以上の様な収差を極度に少なくする様に設計されてゐる。明るくて此の如き種々の収差のない光學機械を如何にして作るか、光學機械設計者の研究の焦點である。

§ 22 光の波動的現象

光の波動的性質はそれが障礙物の後方に迄達する廻折の現象、二つの光が干渉することによつて明暗の縞を生ずる現象及び偏光の現象に現はれてゐる。次にそれ等の現象が如何に光の波動性によつて説明されるかを示さう。

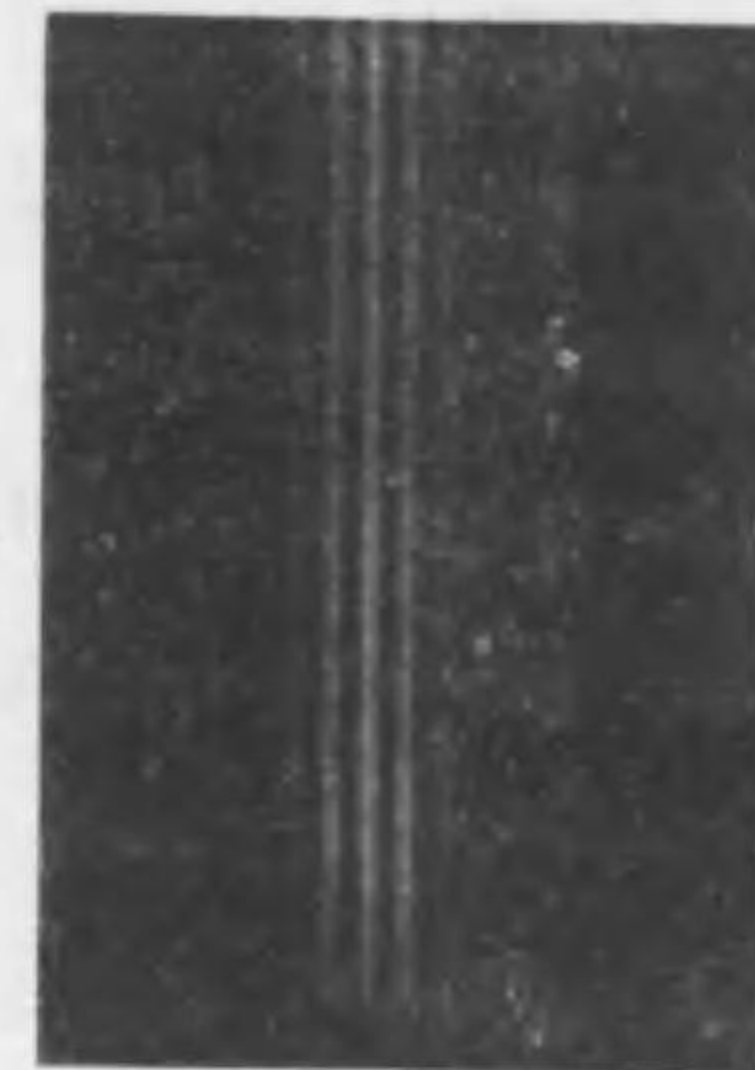
フレネルの複プリズム フレネル Fresnel は第79圖に示す様なプリズムを使つて光の干渉實驗を行つた。圖に於て P_1, P_2 は二つのプリズムでその後方に光源 S をおくと S の像は P_1 と P_2 とによつて S_1 と S_2 とに出来る。従つ

てプリズムで屈折して出た光のうち S_1 から出た方向に行くものは $R_1 Q_1$ の間にひろがり、 S_2 から出た方向に行くものは $R_2 Q_2$ の間にひろがる。丁度之は § 13 に述べた二點から出る波動と同



第 79 圖

じであるから二つの波動が重つた $R_2 Q_1$ の間では干渉を起す場所が出来るとする。それで衝立 L をおくと干渉した所は暗くなるから $R_2 Q_1$ の間には第80圖に示す様な明暗の縞が出来るとする。今如何なる點が暗くなり如何なる點が明るくなるかを計算してみよう。第81圖に於て S_1, S_2 なる二つの光源から同じ振幅、同じ振動数の光波が同じ位相で送り出されてゐるものとする。衝立 L 上の任意の一點 P に於ける光波の影響を考へる。 $S_1 S_2 = 2d, AB = D, BP = x$ とおけば



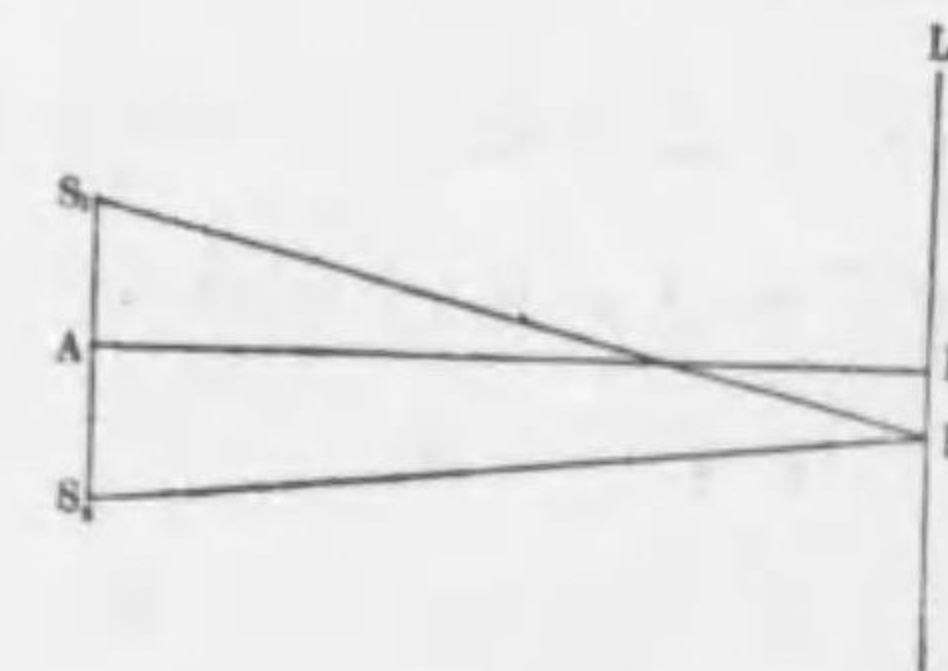
第 80 圖

$S_1 P^2 = D^2 + (d+x)^2$

$$S_2 P^2 = D^2 + (d-x)^2$$

$$S_1 P^2 - S_2 P^2 = (d+x)^2 - (d-x)^2$$

$$= 4xd$$



第 81 圖

$$\therefore S_1P - S_2P = \frac{4xd}{S_1P + S_2P}$$

となる。d及びxはDに比し極めて小さいものとすれば近似的に $S_1P + S_2P = 2D$ とみられ

$$S_1P - S_2P = \frac{2xd}{D}$$

となる。所で若し $S_1P - S_2P$ が波長の整数倍ならば二つの光波は互に強め合つてP點は明るくなり、若し $S_1P - S_2P$ が半波長の奇数倍ならば二つの光波は干渉して暗くなる。故に明暗の條件は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} x &= m \frac{D\lambda}{2d} && \text{明} \\ x &= \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{D\lambda}{2d} && \text{暗} \end{aligned} \right\} \quad (22.1)$$

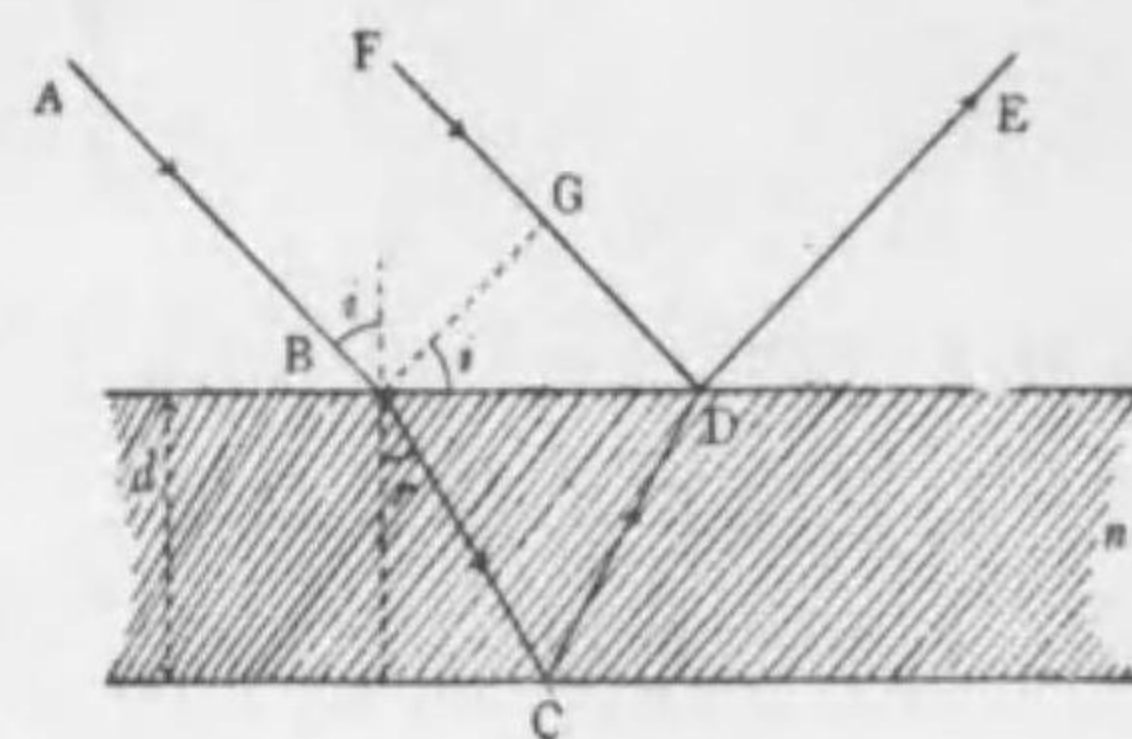
但し λ は光の波長で、mは整数である。従つてB點は明るくなりその兩側に $\frac{D\lambda}{2d}$ づつへだてて等距離に明るい所がならび、その間に暗い所がならんで明暗の縞が出来る。これを干渉縞といふ。

薄膜 次に平行な平面をもつた透明な板の上面と下面とで反射する光の干渉を考へる。板の屈折率を n、厚さを d とし平行光線が投射角 i で投射したものとす。(第82圖)二つの光線 AB と FD を考へると AB は屈折して内部に入り裏面の C 點で反射して再び表面の D 點で屈折し DE の方向に出る。FD は D 點で反射し DE の方向に出るからこの二つが強め合ひ又は干渉する。さて

$$GD = BD \sin i = 2d \tan r \sin i$$

$$BC + CD = 2BC = \frac{2d}{\cos r}$$

であつて BG 上では投射光線の位相は同じである。物体の表面で光が反射するときと裏面で反射するときとを比較すると反射しただけで二つの光波は位相が丁度



第82圖

π だけ異なる。従つて D で反射したものは位相が π だけ變り、C で反射したものは位相が變らぬとみてよい。或は反射の爲に BCD を通つた光は半波長だけ餘分の道を通つたと考へてもよい。又屈折率 n の物質中では光の速度は空氣中の $\frac{1}{n}$ になるから BCD の n 倍の長さの道を通つたのと同じになる。従つて若し

$$n(BC + CD) - GD$$

が半波長の奇数倍に等しければ DE の方向に進む光は強くなり、之れが若し波長の整数倍ならば干渉して DE の方向に向ふ光はなくなるから暗くなる。所が

$$\frac{2dn}{\cos r} - 2d \tan r \sin i = \frac{2d}{\cos r} (n - \sin r \sin i)$$

に $n = \frac{\sin i}{\sin r}$ を入れると

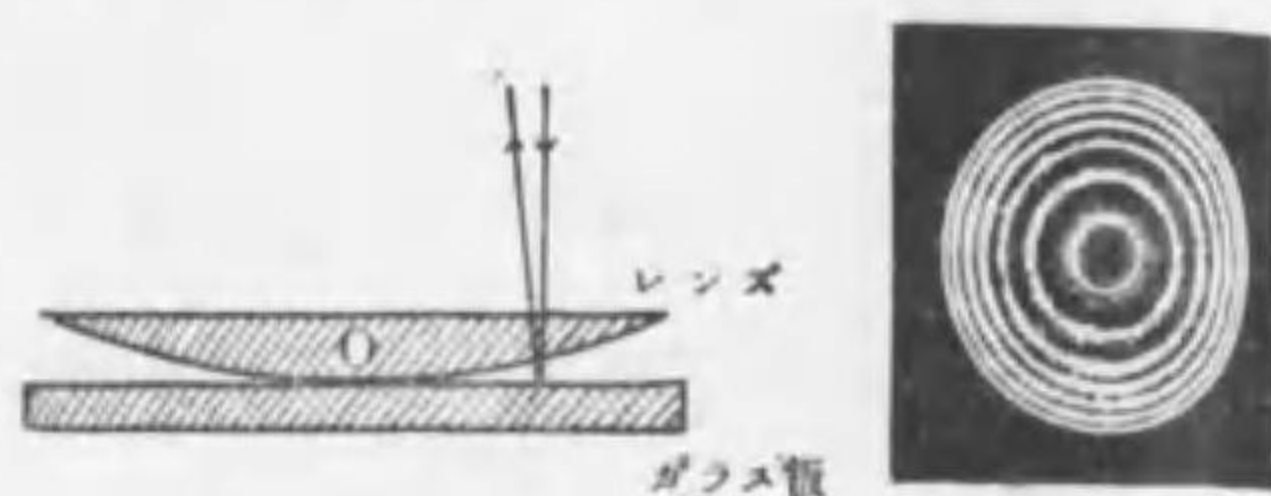
$$n(BC + CD) - GD = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

となるから明暗の條件は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} &= \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda && \text{明} \\ 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} &= m \lambda && \text{暗} \end{aligned} \right\} \quad (22.2)$$

但し m = 整数

θ は投射角であるから反射角に等しく光線の方角を示してゐる。(22.2)で變るものは θ だけであるからある方向に反射するものは明るく他の方向へ反射するものは暗くなる。白色光が投射した場合は θ に種々のものがあるからある波長の光は干渉しても他の波長の光は干渉しない。従つて白色光のある成分が缺けて色がみえる。石鹼玉の色、眞珠の色、水面に落ちた油の色等は之に屬する。又平面ガラス板の上に球面半径の大きなレンズをのせてみると同心圓が見える。之は



第 83 圖 (a)

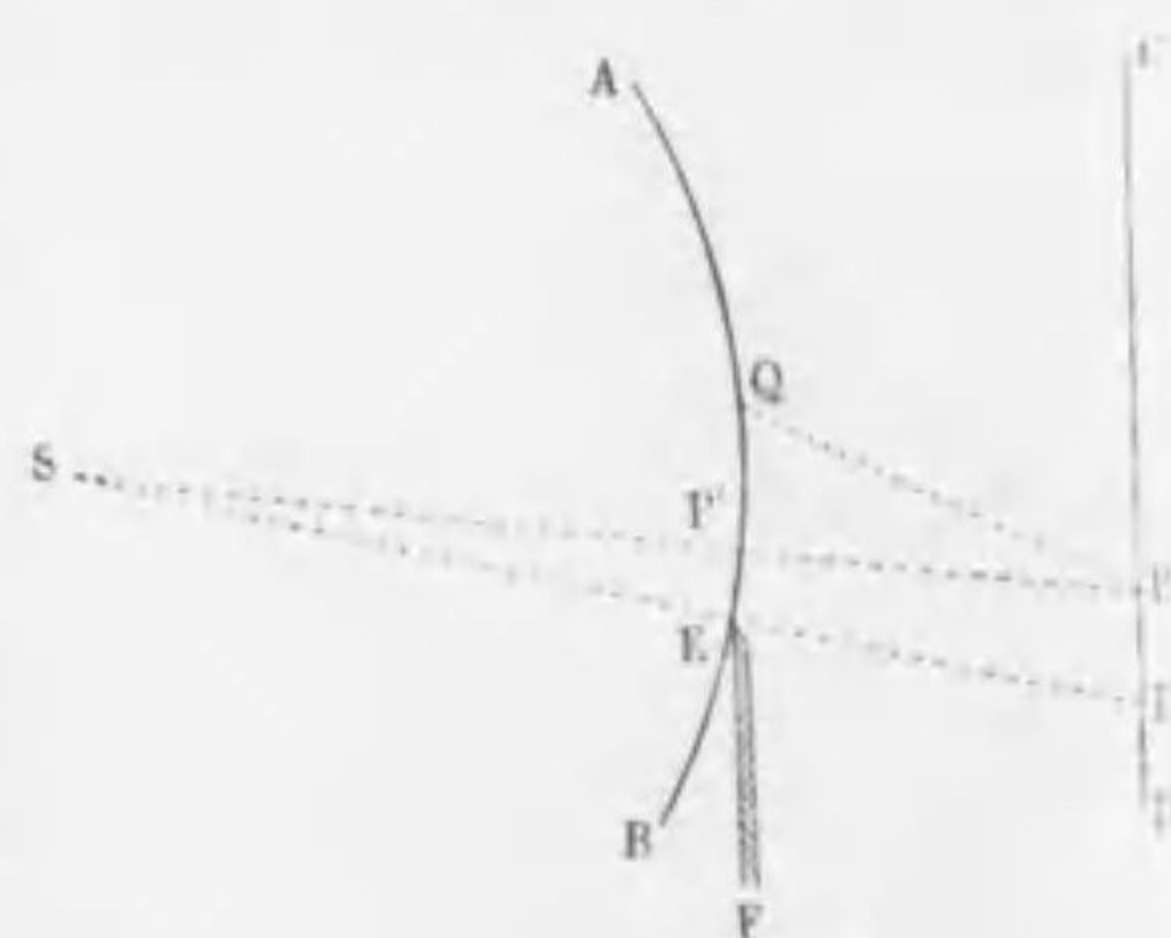
第 83 圖 (b)

ガラス板の上面とレンズの下面とで反射した光が干渉して出来るも

のでレンズとガラス板との隙は外側程大きく接觸點 O から等距離にある點では隙間が同じである爲に同じやうに干渉が起る(第83圖b)。従つて同心圓の干渉縞が見える。

之をニュートン環といふ。

影 直線端をもつた板 EF を點光源 S の前に置いて光を遮断し、後方に衝立 CD をおくと板の影が出来ゝる。若し光が完全に直進するものならば板



第 84 圖

の端 E と光源 S を結ぶ直線 SE と CD の交點を E' とする時 E'D の部へは光が來ない筈である。そして CE' の部は

一様に照される筈である。然るに實際にはさうならず第85圖に示す様に E'D の中へも光が少しく入りこみ、且

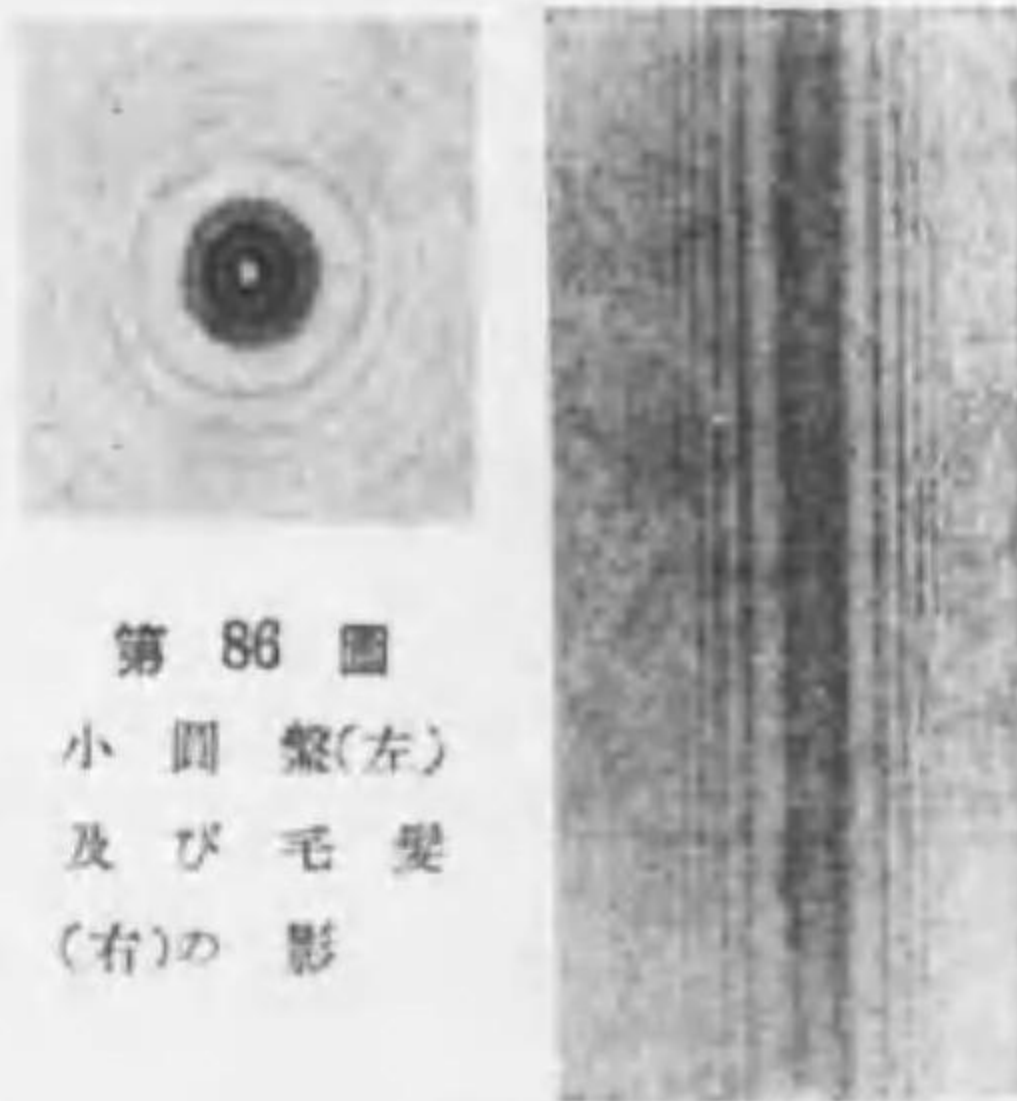


第 85 圖

CE' 部の照度は一様ではなく E' の近傍に明暗の縞が現れる。S から出た光波の波面が E に接觸した時の波面を \widehat{AEB} とする。ハイゲンスの原理により (§18 参照) P 點の光の強さを求めるには波面 \widehat{AE} 上の各點が光源となり同振動數同位相の光波が送られたものとし之等のすべての影響を計算すればよい。 \widehat{AE} 上の光の強さは一様であるからこの假想光源から出る光は始は同じ強さであるが P に達したときは假想光源から P 迄の距離の自乗に逆比例した強さとなつてゐる。従つて SP と \widehat{AE} との交點 P' の近傍の部分だけが大きな影響を P に與へそれ以外の部は殆んど無關係である。次に位相を考へる。P' の近傍 \widehat{AE} 上に Q 點をとると若し $QP - P'P$ が波長の整數倍なら Q から來た光は P' から來た光と強め合ひ之が若し半波長の奇數倍ならば Q から來た光は P' から來た光を弱める。併し完全に干渉はしない。何故ならば QP の方が P'P より大であつて Q から來た光は P' から來た光よりも弱いからである。P が E' から遠ければ P' は E から遠く従つて P に影響を與へる P' の近傍の範圍は障礙物 EF で遮られない。故に P が E' から遠い所ではどの點でも光の強さが殆ど同じになる。所が P が E' に段々近づくと P' が E に近づく。従つて P に影響する大切な範圍が EF で段々に遮られる。この範

圓の或る點は今述べたやうにPの光を弱めようとし或る點は強めようとする。従つてP'がEに近づいて弱める範圍がEFで遮られた時はPは明るくなり強める範圍がEFで遮られるとPは暗くなる。上に考察した事から分るやうに強める點と弱める點はP'の近傍に交互に存在するからE'の近傍は交互に明るい點と暗い點とになる。即ち明暗の縞が出来る譯である。この様な縞を廻折縞といふ。又E'Dの部でも波面AEからの影響があるから光が来る。併しE'から遠ざかるに従ひ波面AEが遠くなるから照度は段々に減する。之等の部に於ける光の強さは精しい計算によつて理論的に求められ實驗によつて得た値と一致することが分つてゐる。

第86圖は毛髮及び小圓盤の影である。之を見ても明かな様に光は物體の裏側迄も進んで行くことが分る。之等の縞は光源に大きさがあるときは殆んど分らなくなるし、光が障礙物の裏側迄進むこともその強さが極めて弱い爲に殆んど分らない。又分る程度に入りこんだ部分は極めて少い。従つて通常の場合には光が直進すると考へて殆ど差支がない。併し之は光が波動性を有しない爲ではなく、その波長が短い爲に近似的にいへるのである。光が障礙物の裏



第86圖
小圓盤(左)
及び毛髮
(右)の影

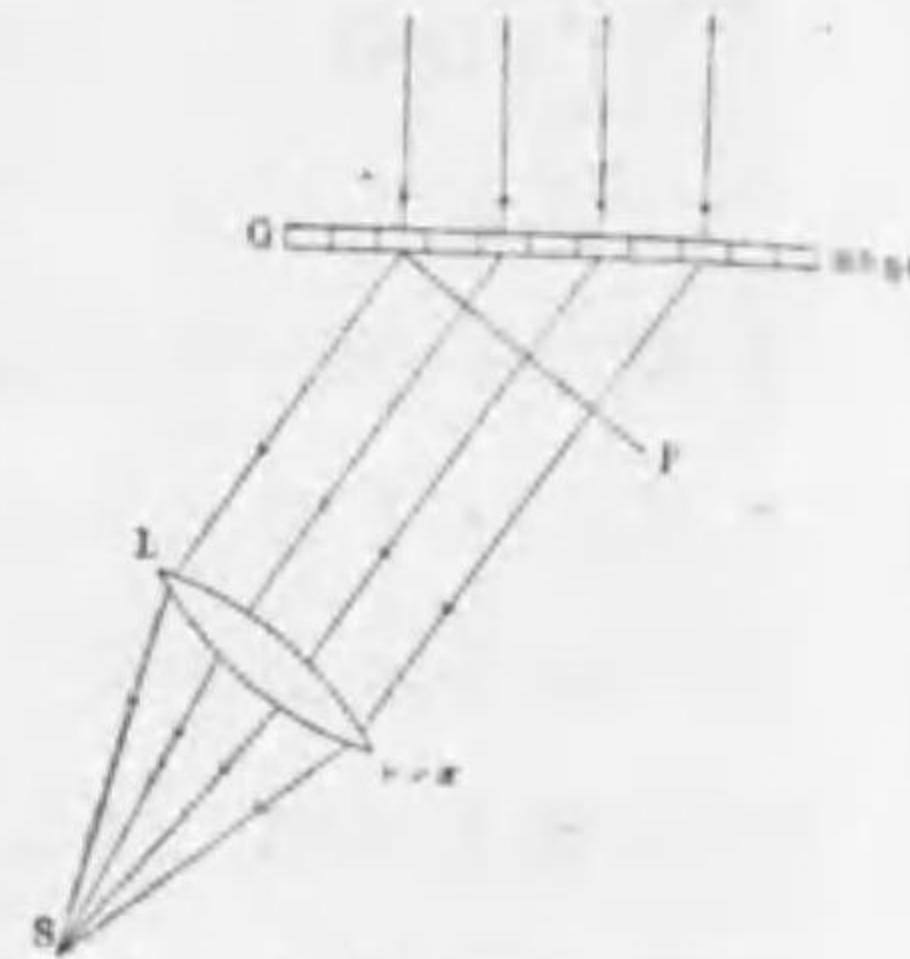
側迄も進む現象を光の廻折といふ。

§23 分光器

種々の波長の光波を含んだ光をその成分に分ける器械を分光器といひ、分光器を使つて各成分の波長を測り得る様にした装置を分光計、又スペクトルの寫眞をとるやうにした装置を分光寫眞器といふ。各成分の波長を測るには二つの方法を使ふ。その第一は各成分の波長を他の光の波長に比較することなしに直接測定するもので、その第二は波長の知れてゐる光と比較することによつてその波長を知るのである。第一の目的に使ふ分光器は廻折格子及び反射格子である。第二の目的に使ふ主なものはプリズムである。極めて少しの波長の差を見るには階段格子、ルンマーゲールケ板又はフブリーベローの干涉計を使ふ。又赤外線、紫外線用にはガラスプリズムは用をなさぬので石英、螢石、岩鹽等のプリズム又は反射格子を使ふ。

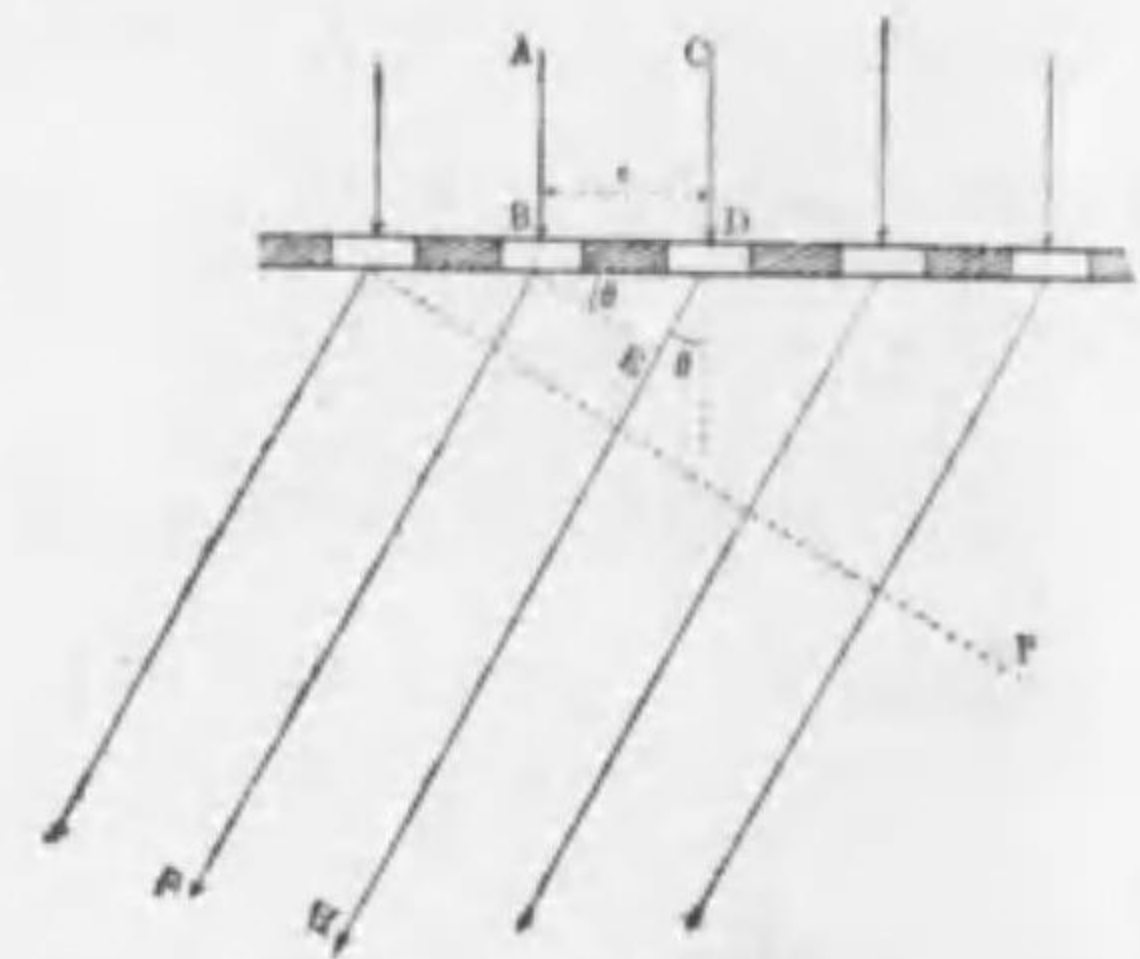
廻折格子 平面ガラスに金剛石の尖端で多數の平行線を等距離に刻し波長測定用に供するものを廻折格子といふ。線の数は1cmにつき數千の多きに達するから線と線との間は極めて狭い。一つの線と次の線との距離を格子常數といふ。今格子常數 e の廻折格子に直角に平行光線があつたものとする。刻まれた線の部は光が通らないで線と線との間だけ光が通るからハイゲンスの原理によつて線と線との間を光源と考へれば廻折格子を通過後

の光波の様子を知ることが出来る。スペクトルを見るには第87圖の如く廻折格子を通過後の光をレンズで一點Sに集めて見るのである。レンズLからS迄の間には各光波の位相は互に變らないから各の細隙からある方向に出た光波がSに集つたとき強め合ふか干渉するかをみるにはレンズLに到達した時の位相を比較すればよい。



第87圖

従つて光の進む方向に垂直なある面P上の位相を見ればよい。第88圖に於てGを廻折格子とし斜線を入れた部を刻まれた線の部とする。今投射光は格子面に垂直にあつたものとし、投射光線と θ の角をなす方向に行く光波を考へる。圖に於て $\angle BED = \angle R$ とすると若し $DE = m\lambda$ (m は整数 λ は波長)であつたならば、次々の細隙を出た光はPに來た時



第88圖

波長の整数倍だけの通路差をもつてゐるから同じ位相にあつてレンズで集められた時強め合ふ。 $DE = e \sin \theta$ であるから λ の波長の光は

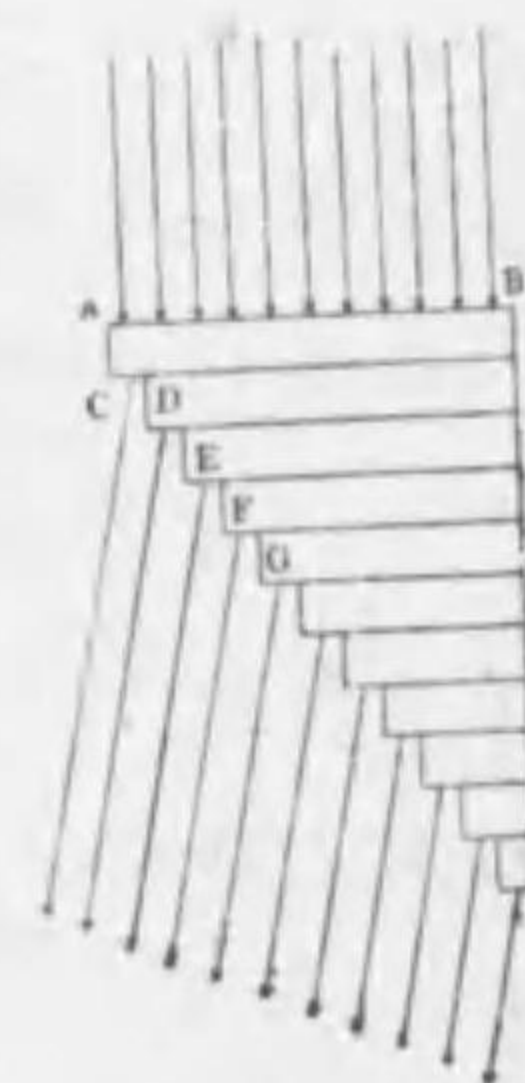
$$e \sin \theta = m\lambda \quad (23.1)$$

で定められる θ の方向に強く出る。精しい計算によると

格子の線の数が多い時は之以外の方向では波長 λ の光は暗くなる。従つて λ が異なるに従ひ θ の異なる方向に光が出ることになり、レンズで集められた所にはスペクトルが出来る。 $m=1, 2, 3, \dots$ となるに従ひ一つづつ λ のスペクトルが出来る。 $m=1$ のスペクトルを第一次のスペクトル、以下第二次、第三次等のスペクトル等といひ、一般に m をスペクトルの次数といふ。 θ を測定すれば e が分つてゐるから(23.1)から波長を知ることが出来る。

反射格子 金屬製凹面鏡の表面に線をひいて格子を作ると反射した光が前のやうにスペクトルを作る。且つ凹面鏡には凸レンズの様な性質があるから凸レンズを使ふ必要がない。之はガラスで吸収される様な輻射線のスペクトルを作るのに便利なものでこの反射格子をローランド Rowland の凹面格子ともいふ。

階段格子 第89圖の様にガラス板を澤山重ねて階段状にしABの面から平行光線を入れると光はガラス板を通過して後各階段CDEFG等から出る。ハイゲンスの原理によりCDEFG等は光源と同じ役目をつとめ之等の各光波が重疊して之をレンズで集めるときスペクトルを生ずる。廻折格子と異なる重要な點は各階段から出る光は次第に



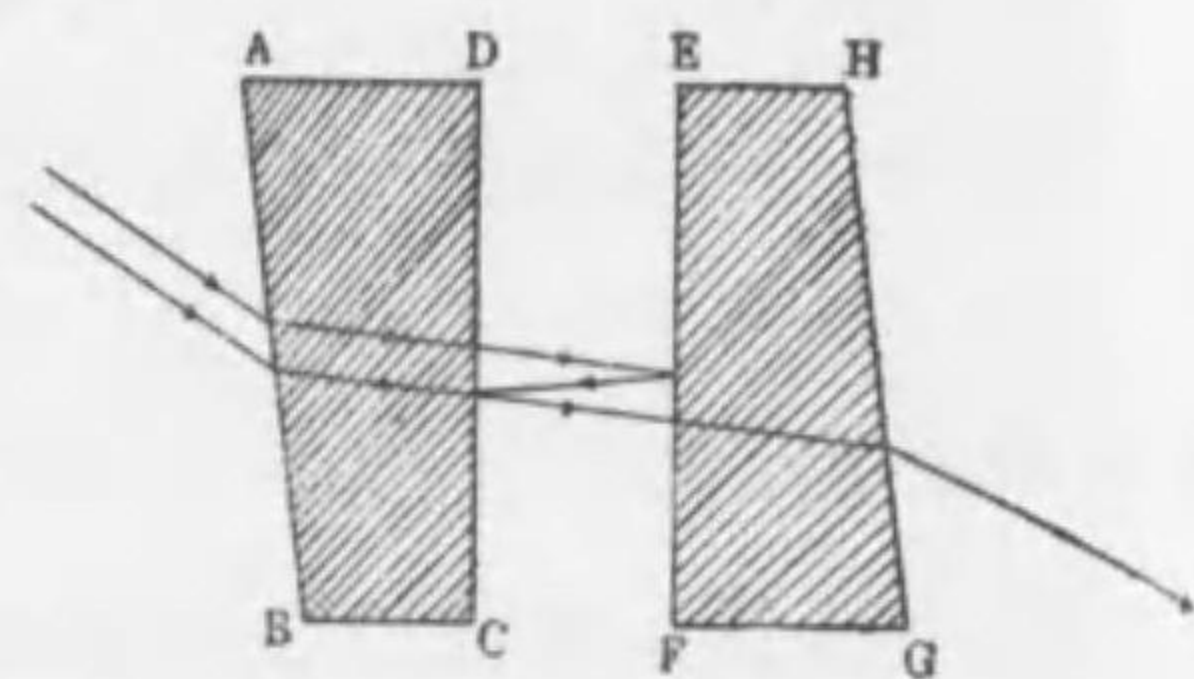
第89圖

ガラスの中を多く通つてゐる爲に一つの階段と次の階段とから出る二つの光波の位相の差が著しく異なる。従つて

出来たスペクトルは極めて次数の高いものとなる。この様な分光器を階段格子といふ。之を使ふと極めて微細な波長の違も認めることが出来る。

フーブリーペローの干渉計

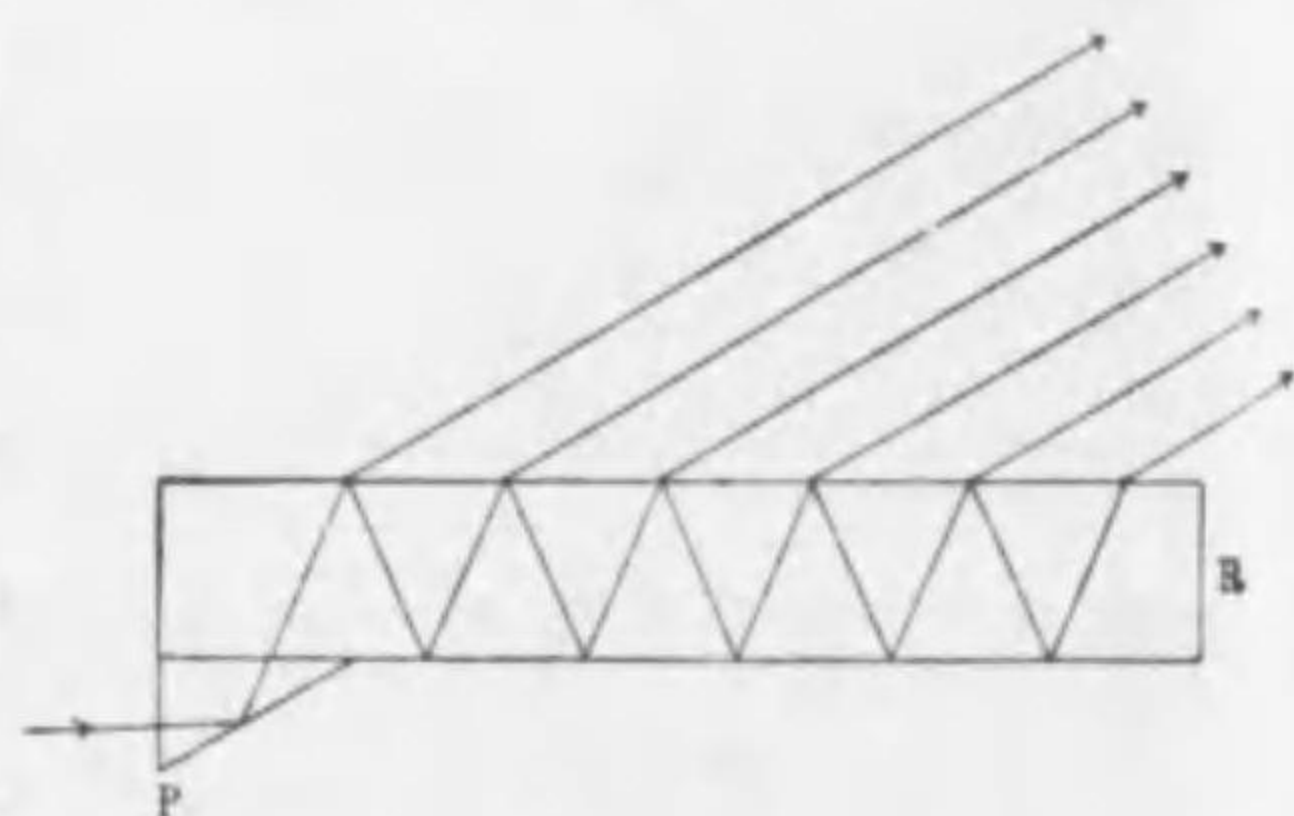
第90圖の様に二つの楔形のガラス板 ABCD と EFGH とをならべ、面 DC と面 EF、面 AB と面 HG とが夫々平行になる



第90圖

様にし面 DC と面 EF とを半ば銀メツキしたものをフーブリーペロー Fabry-Perot の干渉計といふ。半ば銀メツキした面では透過光と反射光とが同じ位の強さになるので透過した光と銀メツキ面で反射した光とが一緒になつて強め合ひ、又は干渉してスペクトルを作ることが出来る。(§22 参照)。このスペクトルも極めて次数が高く、この分光器も極めて少しの波長の差を知ることが出来る。

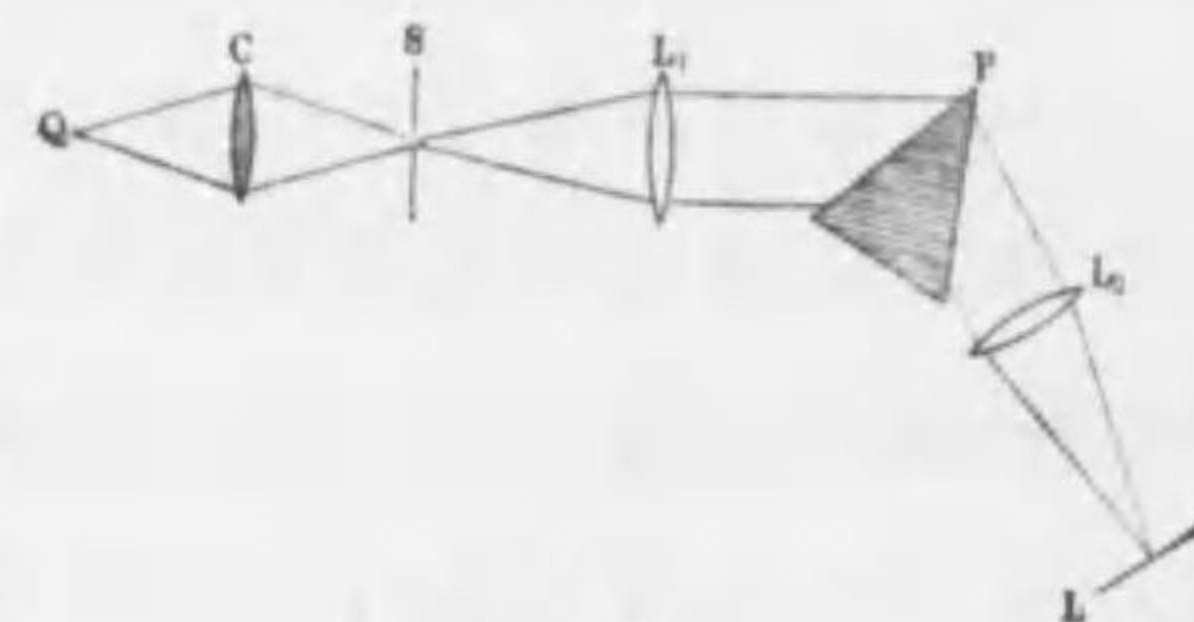
ルンマーゲールケ板 両面が平行な細長いガラス板 R の一端に第91圖の如く全反射プリズム P をつけたものをルンマーゲールケ Lunmer-Gehrcke 板といふ。P に平行光線を送り、R の二面で反射した後通過した光



第91圖

をレンズで集めると干渉してスペクトルを作る。このスペクトルも次数が高いからこの分光器は少しの波長の差を精密に知るのに使ふ。

分光寫眞機 通常の分光寫眞機の構造は大體第92圖に示す様である。Q は光源で光は集光レンズ C で細隙 S の上に集められる。S は極めて細く精巧に作った隙間であつて直線光源の様な作用をする。S



第92圖

は凸レンズ L1 の焦點に置いてあるから L1 から出た光は平行となりプリズム P に入つて分散する。之を凸レンズ L2 で集め寫眞乾板 L の上にスペクトルを作り之を寫眞にとる。

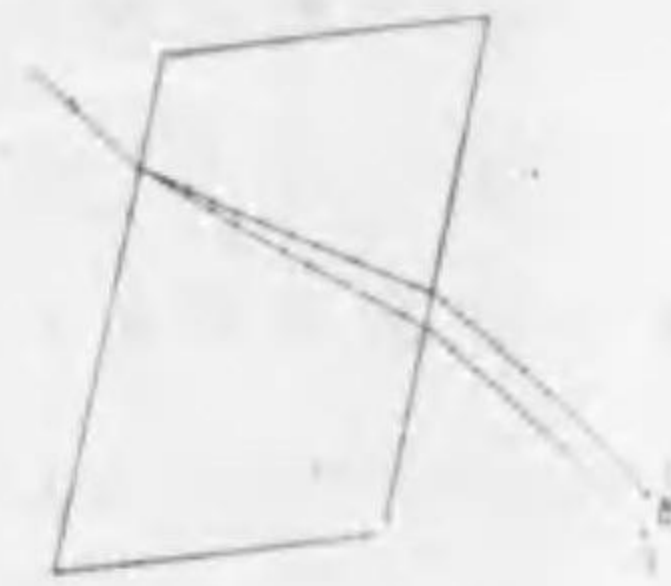
§24 複屈折

直線複屈折 方解石の劈開片を通して紙上に印した一點を見ると之が二點に見える。(第93圖)方解石をまはすと一つの點 E は他の點 O の周をまはる。之は方解石に入つた光が二つに分れて屈折する爲である。O 點に相當する方の光線はスネルの法則に従ふもので之を常光といひ、E 點に相當する方の光線はスネルの法則に従はず之を異常光といふ。この様に光線が結



第93圖

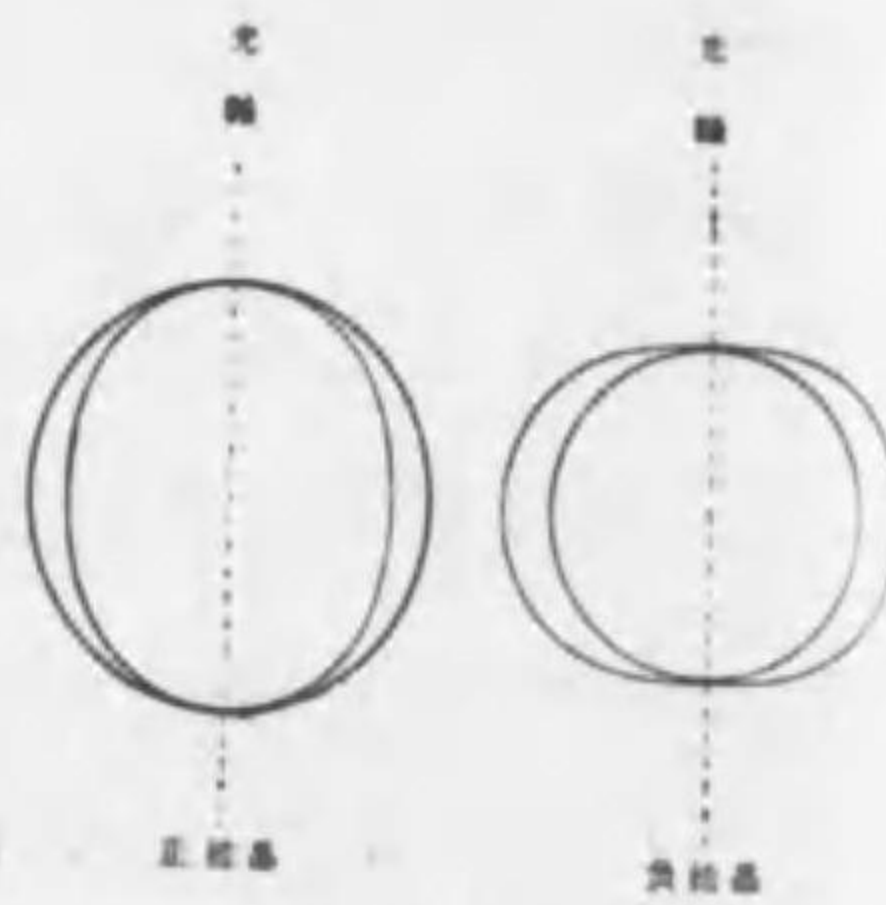
品の中に入り二つに分れて屈折する現象を複屈折といふ。併し結晶の光軸といはれる方向に光を入ると屈折光線が二つに分れない。光軸が一つだけある結晶を単軸結晶といひ、二つある結晶を二軸結晶といふ。二軸結晶では複屈折をした



第 94 圖

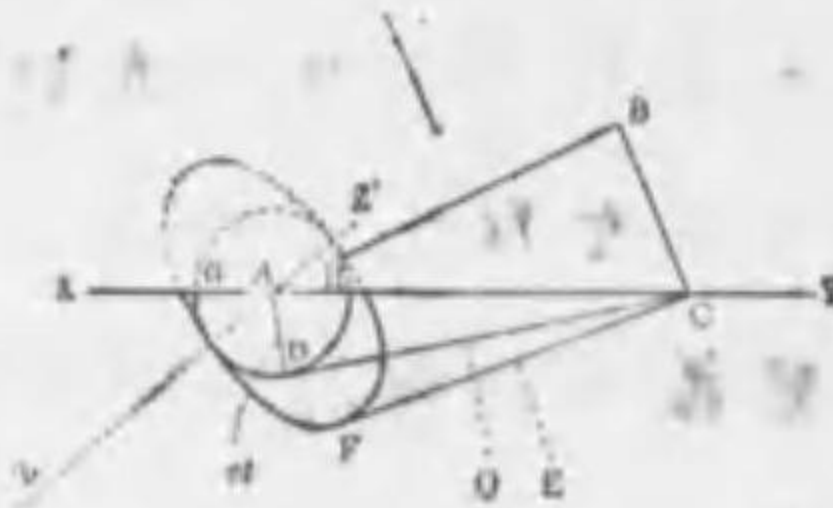
二つの光線は共に異常光線である。光軸と投射光線とを含む平面を主面といひ、常光線の振動面は主面と垂直で異常光線の振動面は主面と平行である。上に述べた様な複屈折は振動面が互に直角な二つの直線偏光の傳播速度が異なる現象であるから之を直線複屈折といふ(次節参照)。等軸晶系に屬する以外の結晶はすべて複屈折を起すもので方解石、電氣石、水晶等は單軸結晶に屬し、黃玉、アラレ石等は二軸結晶に屬する。

常光の傳播速度と異常光の傳播速度とは光軸の方向では同じであるが他の方向では一般に異なる。常光の傳播速度の方が大きい結晶を正結晶といひ、異常光の傳播速度の方が大きい結晶を負結晶といふ。例へば水晶は正結晶で、方解石や電氣石は負結晶である。常光の速度は方向によつて異らず異常光の速度は方向によつて異なる。従つて結晶内の點光源から出た光波の波面は常光では球とな



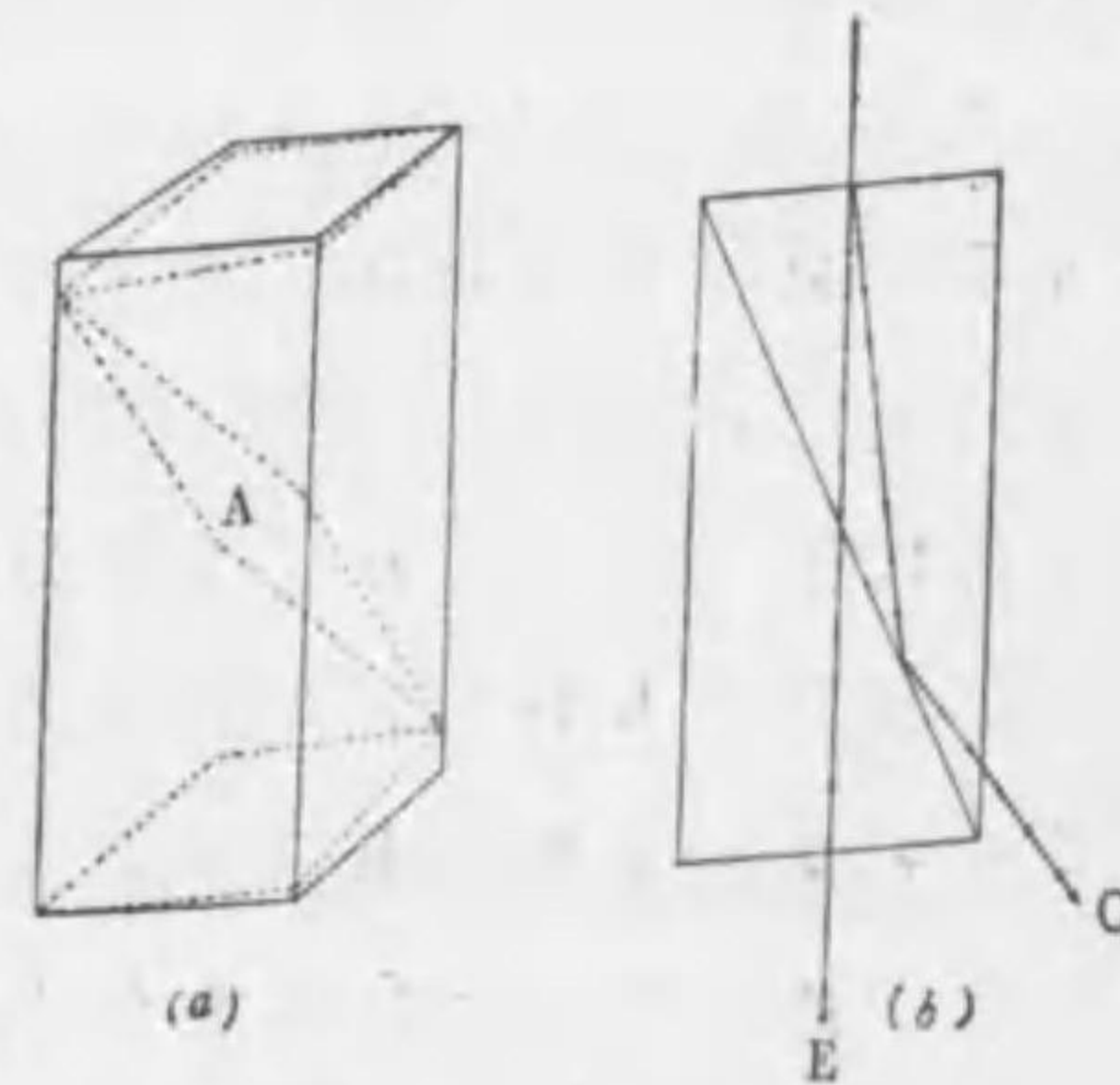
第 95 圖

り異常光では光軸を軸とする廻轉楕圓面となる(第95圖)。これを念頭に於てハイゲンスの原理を適用すると複屈折を説明することが出来る。第96圖は光軸を含んだ結晶の切口としXYを結晶面の切口とする。ある瞬間の空氣中の光波面をABとする。AB⊥BCとしBがCに達する迄の時間をもとじ常光の結晶内での速度をvとする。Aを中心としvを半径として圓GDHを描きCよりこの圓に切線CDをひけばCDは常光の波面である。光軸ZZ'が圓GDHを切る點で圓に切ずるやうにAを中心とする異常光の楕圓波面を作りCより之に切線CFをひけばCFは異常光の波面を表はす。常光、異常光は之等の波面の進む方向に進行して複屈折をする。之で分る様に光軸を含む平面に垂直に投射した光は複屈折をしない事が分る。併し此の方向は光軸ではない。



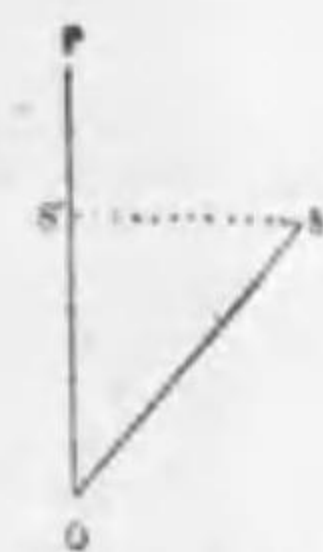
第 96 圖

ニコル 方解石の劈開片を第97圖(a)の點線の様に切り再びA面をカナダバールサムでつぎ合はせたものをニコル Nicol のプリズム又は單にニコルといふ。ニコルに光を送ると常光はバールサム面で全反射して横にそれ異常



第 97 圖

光だけが透過するから直線偏光が得られる。
 この直線偏光を若し第二のニコルに通すと光の振動面 OS と第二のニコルの主面 OP とがある傾をなしてゐるときは第二のニコルを通る光波の振幅はもとの光波の振幅 OS の OP 方向

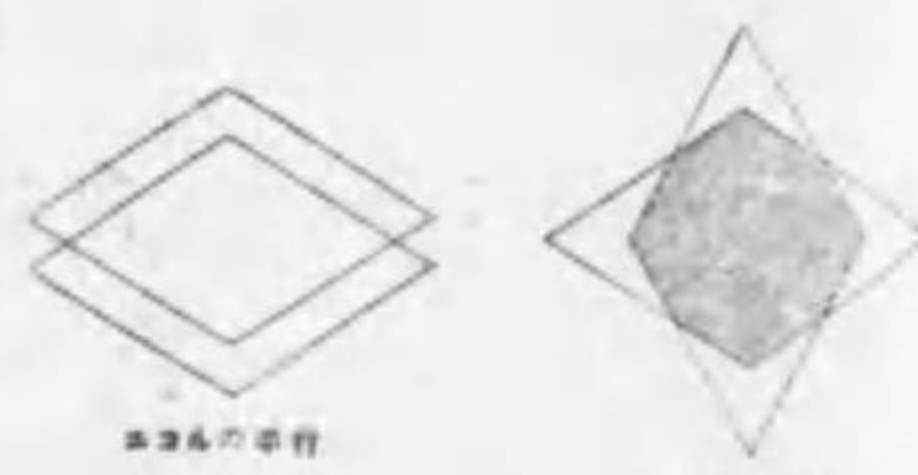


第 98 圖

の正射影 OS' となる。従つて $\angle SOP$ が直角のときは OS' がなくなるから光は通らない。このときは第一のニコルと第二のニコルの主面は互に直交してゐる。これをニコルの直交といふ。若し OS と OP が平行ならばこれをニコルの平行といふ。二つのニコルを通して光を送るとき平行にすれば最も明るく直交すれば光は全く通らないから暗くなる(第99圖)。

結晶を通過した光の干渉

第 100 圖に於て Q を光線、 N_1, N_2 をニコル、C を單軸結晶、L をレンズ、S を衝立とする。Q から出た光



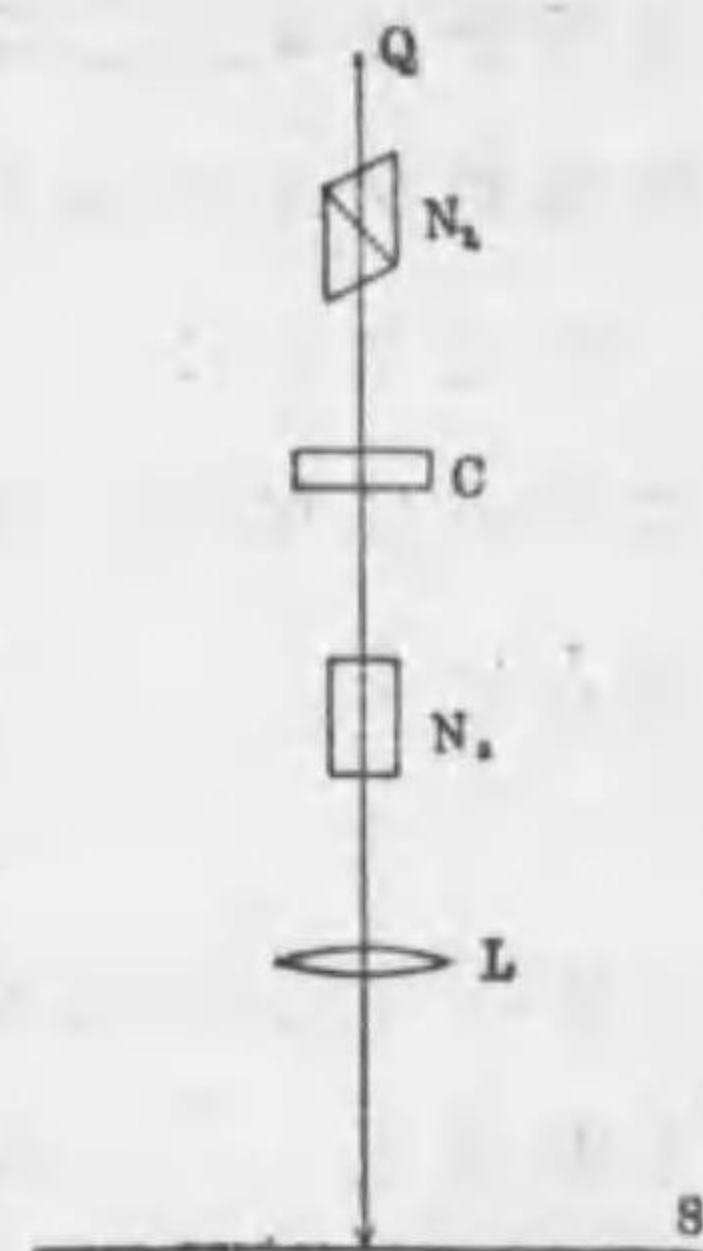
第 99 圖

は N_1 で直線偏光となり結晶 C に入る。C は複屈折によつてこの直線偏光を互に直交する振動面を持つ二つの直線偏光 R_1, R_2 に分ける。 R_1, R_2 が N_2 に入ると R_1, R_2 の N_2 の主面に平行な振動成分だけが通過する。 R_1, R_2 は C 内でその速度がちがふから二つの間に位相差が出来る。従つてレンズ L で衝立上に集められたときある場所に來たものは干渉し他の場所に來たものは強めあつて干渉縞を生ずる。この干渉縞は同心圓で若しニコルが直交してゐ

るときは中に明るい十字が見え、若しニコルが平行になつてゐるときは中に暗い十字が見える。

(第101圖(a)) C を複軸結晶にしたときは第101圖(b) の様な干渉縞が見える。

光弾性 各方向に一様の性質を有する物質を等方性物質といひ、結晶の様に方向によつて性質を異にするものを非等方性物質といふ。等方性物質でも人工的に之を非等方性にすることが出来る。例へばペークライトやガラスを



第 100 圖

壓縮したり、曲げたりすると結晶の如く複屈折をする様になる。之をニコル

の間に入れて光を送り干渉縞を作ると歪の多い所は縞が密集する。故に之によつて種々の



第 101 圖 (a)



第 101 圖 (b)

形の物體に力を加へた時最も多く力のかゝる點を知ることが出来る。従つて工學上極めて



第 102 圖

有用の現象である。この現象を光弾性といふ(第102圖)。

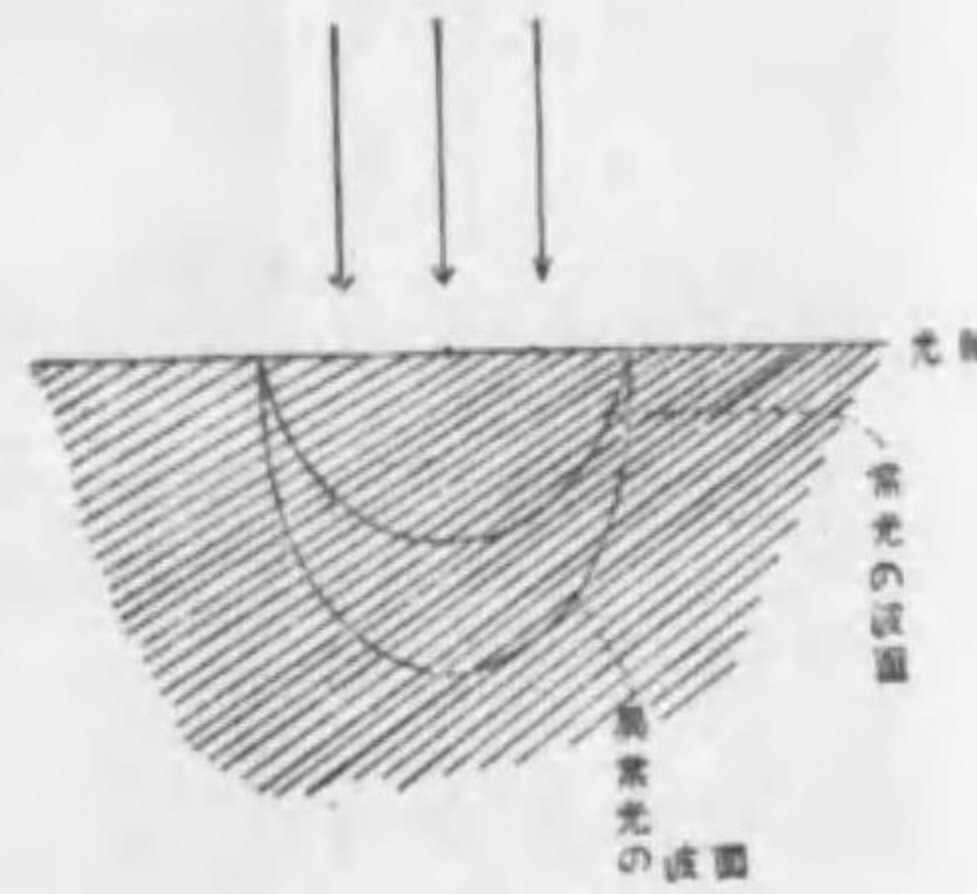
電磁氣的複屈折 又等方性物質を強い電場の中に入

れ光を送ると電場の方向を軸とする單軸結晶のやうに複屈折をする。之はケル Kerr により發見されたので電氣光學的ケル効果といふ。

又同じ様に磁場の中へ入れても等方性物質が複屈折をする様になる。之をコットンムートン Cotton-Mouton 効果といふ。

§ 25 光學的活性

圓偏光 前節に述べた様に單軸結晶の光軸に平行な面に直角に投射した光は複屈折をしない。併し常光と異常光の速度は異なる。それは境界面の一點から出る光波の波面を思ひ起せば分る。従つて二つの光波は進行と共に位相が次第に變る。單軸結晶を光軸に平行な二つの面で切り、その中を通過した常光と異常光との間に丁度 $\frac{1}{4}$ 波長だけの位相差を作るやうにした板を $\frac{1}{4}$ 波長板といふ。今この板に垂直に直線偏光を送り、その振動面と光軸とが 45° の角をなす様にする。然るときは

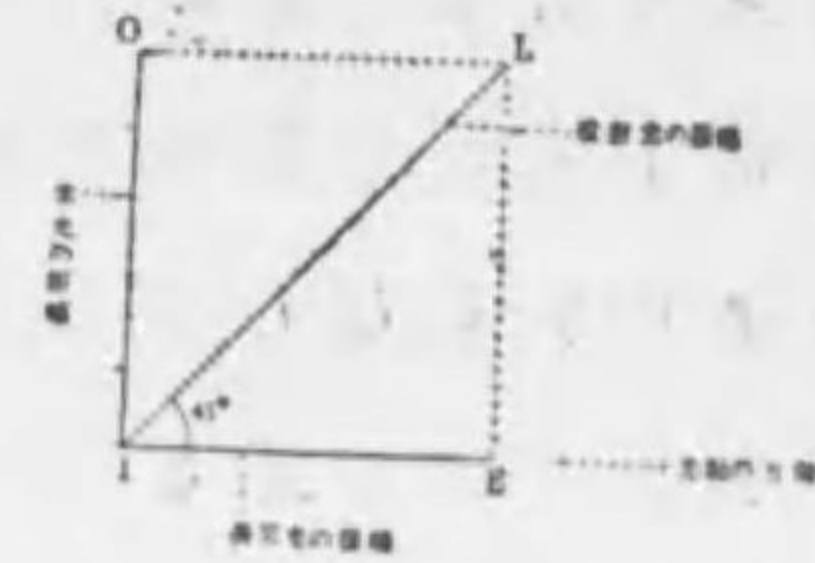


第 103 圖

常光の振幅と異常光の振幅とは全く同じになる(第104圖)。板の面に平行に切面をとり、光は主軸の正の方向に進むものとして常光と異常光が結晶に投射した瞬間に次の如く表はされたものとする(§13参照)。

$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)$$

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)$$



第 104 圖

板を通つた後には丁度一方の光は $\frac{1}{4}$ 波だけ短い道を通つたのと同じ

であるから二つの光波は次の様になる。

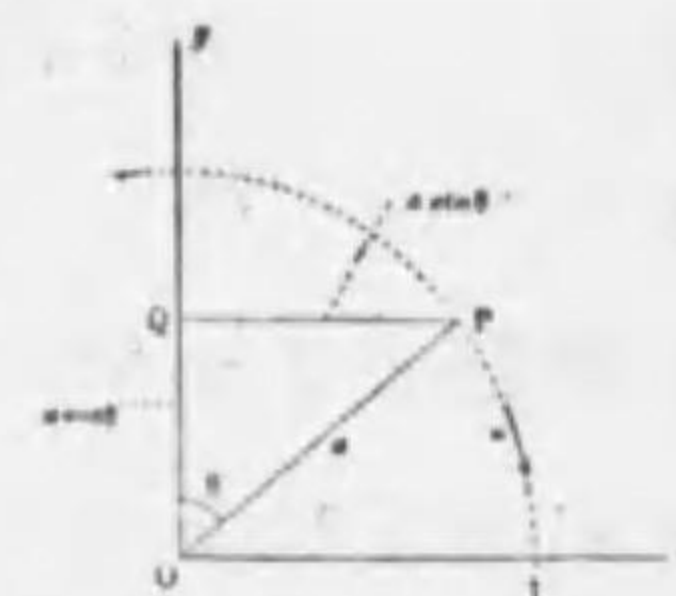
$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)$$

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z - \frac{\lambda}{4}}{\lambda} \right) = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) + \frac{\pi}{2} \right\} \quad (25.1)$$

$$= a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)$$

さて $2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) = \theta$ とおくと光に向つて z が一定の點

で見るとき(z の正の方から見ると)これ等の (xy) が表はす點 P は第105圖の如くなる。 $\angle POQ = \theta, OP = a$ とすると QO が y で、PQ が x となる。 z が一定であるから θ は時間と共に増す。従つて P は O を中心とし、 a を半径とする圓周上を

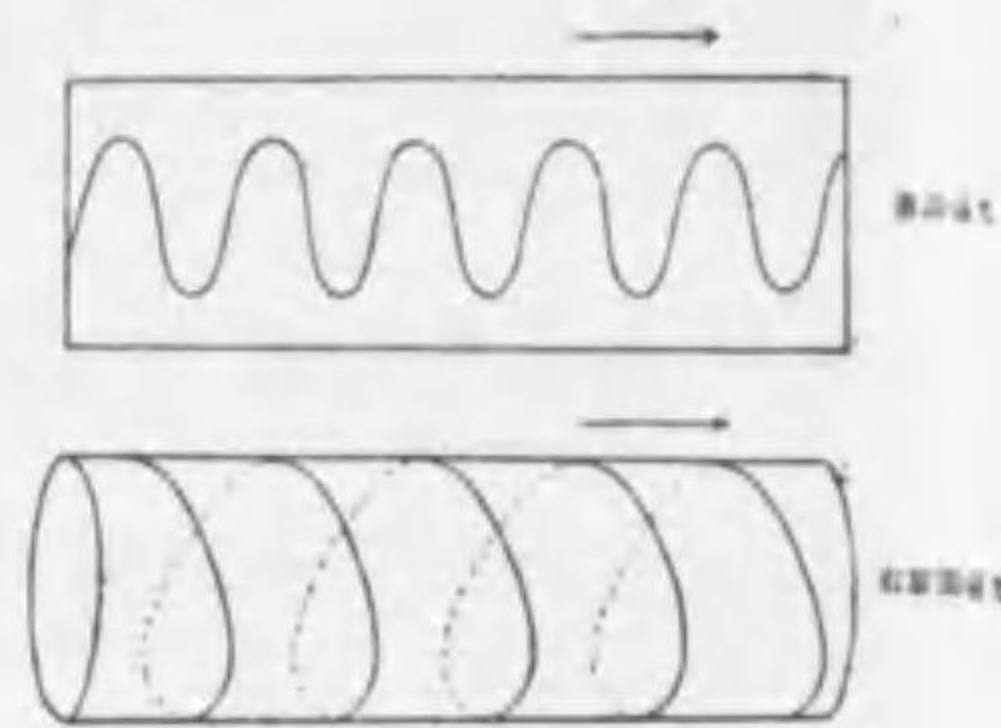


第 105 圖

右廻りに廻轉する。この様な光波から成る光を右旋圓偏光といふ。若し P 點が左廻りに廻轉するならば左旋圓偏光といふ。直線偏光は一平面内にある波形の針金をそのまゝ進行させた様なものである。右旋圓偏光は針金を右ネジの様に圓筒形にまいて之をそのまゝ進行させた様な

ものである。

若し $\frac{1}{4}$ 波長板の光軸と投射した直線偏光の振動面とが 45° の角をなしてゐないときは前述P點の通る道は圓とならず楕圓となる。之を楕圓偏光といふ。

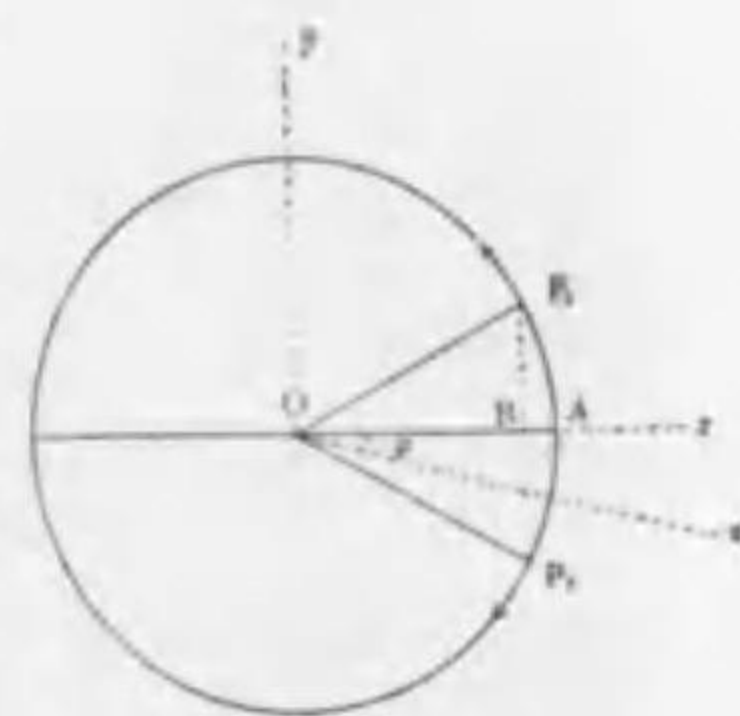


第 106 圖

光學的活性 砂糖の溶液は等方性の物質であるが之に

直線偏光を投射すると通過後の光波の振動面は通過前の光波の振動面と異り、光に向つてある角だけ右廻りに廻轉されてゐる。この様に直線偏光の振動面を廻轉する性質を光學的活性といひ、光に向つて右廻りの方を右旋性左廻りの方を左旋性といふ。有機化合物には光學的活性を有するものが多く、結晶も多少この性質を有する。例へば右水晶は右旋性で、左水晶は左旋性である。振動面の廻轉角は物質によつて異り、投射光の波長によつても異なる。又溶液に於てはその濃度に比例する。

圓複屈折 一般に直線偏光は右旋圓偏光と左旋圓偏光とに分けることが出来る。第 107 圖は x 方向に振動する直線偏光を光に向つて見た切口とする。振動の中心を O とし、 O を中心として直線偏光の振幅の半分を半径とする圓 P_1AP_2 を描く。A を同時に出發し互にこの



第 107 圖

圓周を逆にまはる二點 P_1 と P_2 を考へる。 P_1 と P_2 の運動を合成すると圖に於て P_1B, BP_2 は方向が逆であるから相殺し合成されたものは OB の二倍となる。 P_1, P_2 が共に A に來たとき B は A に來る。従つて合成された運動は OA の二倍の振幅を有する單弦運動となる。即ち直線偏光の断面をあらはす。故に P_1 の表はす圓偏光と P_2 の表はす圓偏光とを合成したものは $\angle P_1OP_2$ の二等分線の方に振動する直線偏光である。

さて光學的活性物質中では右旋圓偏光の傳播速度と左旋圓偏光の傳播速度とが異なる。故に若し直線偏光が投射するとその右旋成分と左旋成分とは次第に位相が異り、物質を通過した後は二つの成分の間には通過前に比し一定の位相の差が出來てゐる。従つて投射前には第 107 圖の如く P_1 と P_2 は A 點で出會つたものとしても通過後にはもはや A 點で出會はない。故に $\angle P_1OP_2$ の二等分線が x 方向とある角 ϕ だけ異なる x' 方向を向く。即ちこの物質によつて直線偏光の振動面が ϕ だけ廻轉された事になる。物質中で右旋圓偏光と左旋圓偏光とが異なる傳播速度で傳播することを圓複屈折といふ。従つて振動面の廻轉は圓複屈折の結果として起る現象といへる。前述の直線複屈折は互に直角な直線偏光の傳播速度の異なる現象であつた。一般に結晶中では逆廻りの二つの楕圓偏光の傳播速度の異なる楕圓複屈折が起る。直線複屈折は楕圓が偏平になつて遂に直線になつてしまつた特別の場合で圓複屈折は楕

圓が圓になつた特別の場合である。

フレデー効果 光學的不活性物質も亦人工的に活性にすることが出来る。極めて強い磁場内に光學的不活性物質を入れ磁場の方向に直線偏光を送ると振動面が廻轉される。自然物質による振動面の廻轉方向は光の進む方向に對して一定の方向であるから光學的活性物質を通過した光を鏡で反射して逆行せしめると振動面はもとの通りになる。併し磁場内では光を通過後反射して逆行せしめると振動面が一回通過した場合の二倍だけ廻轉する。この様な現象は1845年フレデー Faraday が発見したもので之を**フレデー効果**といふ。

§ 26 倍率 分解能

擴大鏡顯微鏡等は小物體を擴大してその細部を検するのが目的である。従つて第一に擴大の仕方が著しい程よい。併し如何に擴大しても擴大された像の細部が一つはつきりと區別して認められるのでなければいけない。若し像がぼんやりしてゐたならば如何に擴大されてもその細部を検することは出来ない。従つて之等がよく目的にかなふ爲にはこの二つの條件を充さなければならない。この擴大能力を**倍率**といひ、如何なる細部迄區別し得るかの能力を**分解能**といふ。

倍率 擴大鏡の倍率 m は眼をその焦點においたとして眼から 25cm の所に出来た虚像の大きさ y' と實物の大

きさ y との比で表はす。第 108 圖から分るやうに $\triangle FAB \sim \triangle FDC$ だから $\frac{y'}{2} : \frac{y}{2} = 25 : f$

となり倍率は次の如く與へられる

$$m = \frac{25}{f} \quad (26.1)$$

顯微鏡の倍率 m も眼を接眼レン

ズの焦點において見たとき眼から 25cm の所に出来る虚像の大きさ y'' と實物の大きさ y との比で表はす。對物レンズで出来た像の大きさを y' とすると倍率は

$$m = \frac{y''}{y} = \frac{y''}{y'} \cdot \frac{y'}{y}$$

となるが $\frac{y''}{y'}$ は擴大鏡の場合と同じで接眼レンズの焦點距離を f_2 とすると

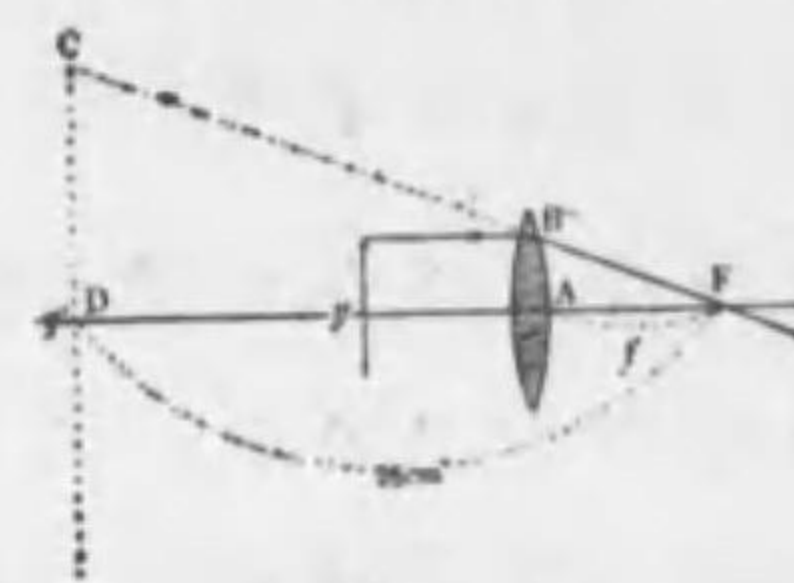
$$\frac{y''}{y'} = \frac{25}{f_2}$$

となる。第 109 圖に於て $\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$ であるが x は大體對物レンズの焦點距離 f_1 に等しいと見ることが出来る。又對物レンズで出来る像は接眼レンズの焦點

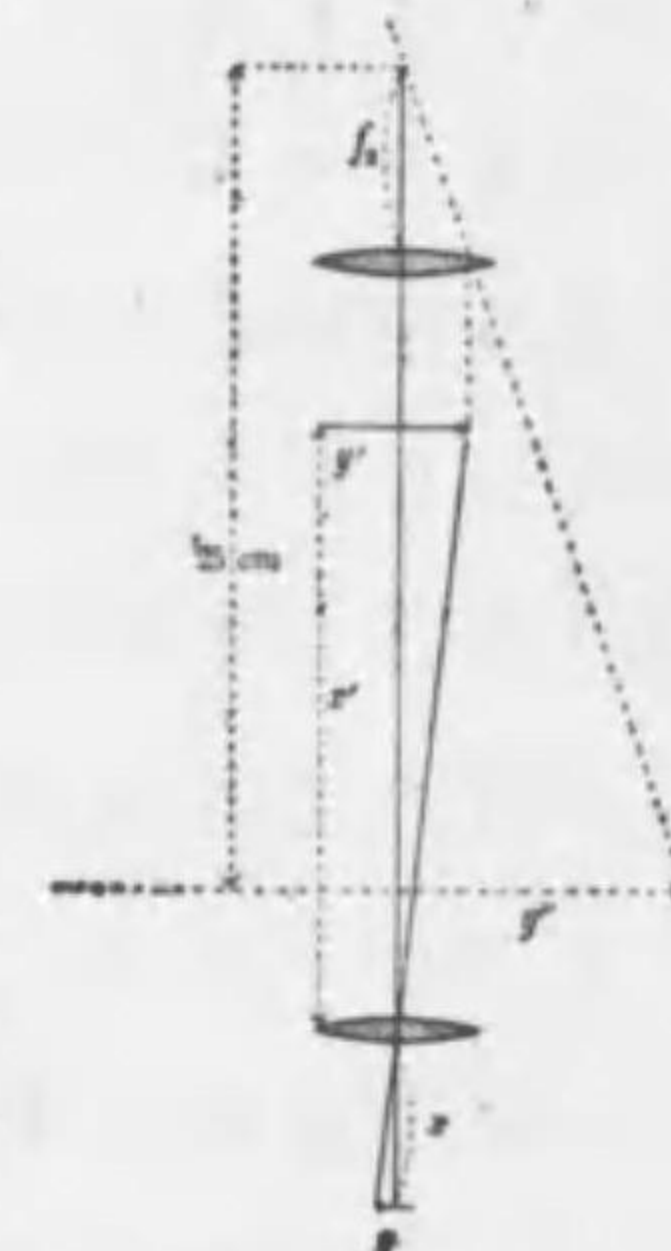
の附近に出来るし f_1 は x' に比して極めて小さいから x' は大體に於て對物レンズの焦點と接眼レンズの焦點との距離に等しい。之は一定の長さで顯微鏡の筒の光學的の長さといはれる。之を d とすると

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{f_1}$$

* 25cm は健全な眼が最も樂に物體を見得る距離で**明視距離**といはれる。



第 108 圖



第 109 圖

となり倍率は

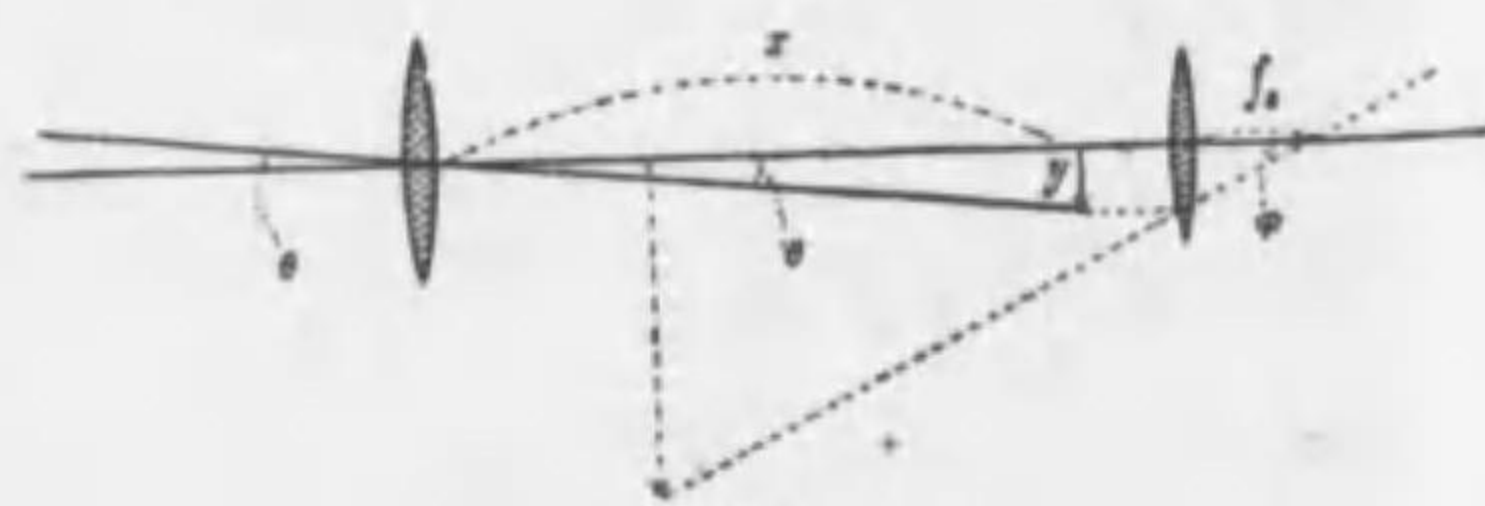
$$m = \frac{25d}{f_1 f_2} \quad (26.2)$$

で表はされる。即ち拡大鏡や顕微鏡はそれ等のレンズの焦点距離が短い程倍率がよい。

望遠鏡では實物と像との大きさの比をとつても倍率の意味をなさぬ。如何となれば實物は極めて遠方であり像は極めて近傍にあるからである。この時は接眼レンズの焦点に眼をおいたものとして眼から虚像の兩端に引いた直線のなす角 φ の \tan と眼から實物の兩端に引いた直線のなす角の \tan との比で倍率を表はす^{*}。之等の角は物體や像の見かけ上の大きさを表はしてゐるからである。所が眼から實物の兩端に引いた直線のなす角は實物が極めて遠方にある爲に大體に於て第 110 圖に於ける θ に等しい。而して圖に於て $\tan\theta = \frac{y}{x}$ である。然るに實物が極めて遠方にある爲に x は大體對物レンズの焦点距離 f_1 に等しい。又接眼レンズの焦点距離を f_2 とすると $\tan\varphi = \frac{y}{f_2}$ であるから

$$m = \frac{\tan\varphi}{\tan\theta} = \frac{f_1}{f_2} \quad (26.3)$$

となる。故に天體望遠鏡では焦点距離の大きな對物レンズを使ふ。



第 110 圖

* 之等の角を視角といふ。

分解能 次に分解能について述べよう。分解能の良非の出来るのは光の波動性に原因するのである。顕微鏡で極めて接近した二點を見たとき之を二點として見分け得る最小の距離 r が小さい程分解能はよいことになる。研究の結果によると對物レンズと物體との間にある物質の屈折率を n 、使ふ光の真空中の波長を λ 、對物レンズの直径の兩端と物體の中點を結ぶ二つの直線のなす角を 2θ とすると r は次式で與へられる。

$$r = \frac{\lambda}{n \sin\theta} \quad (26.4)$$

故に對物レンズと實物の間に屈折率の大きな液體を入れると分解能がよくなる。この様にすることを油浸といふ。油浸は分解能をよくするばかりでなく物體を對物レンズの不遊點にあらしめて収差を少くする利もある。(§21 参照) 眼で見える光の λ には一定の極限があり $\sin\theta$ も 1 より大きくなり得ないから顕微鏡の分解能には限りがある。極端によくしたとしても $r = \frac{1}{4000}$ mm 位である。

望遠鏡の對物レンズの直径を d 、來る光の波長を λ とすると角 φ だけちがつた方向の極めて遠方にある二點を二點として見分け得る最小の角は次式で與へられる。

$$\varphi = \frac{1.22\lambda}{d} \quad (\text{ラヂアン}) \quad (26.5)$$

従つて望遠鏡は對物レンズの口径の大なるもの程よい。

分光器は種々の波長の光を分けて之を検する目的に使ふのであるから第一に波長の異つた光が異つた方向に來ること即ちスペクトルがよく擴がることが必要で、第二に

各波長の光のスペクトルが判然と現はれることが必要である。分光器の前者の様な能力を分散能といひ、後者の様な能力を分解能といふ。波長が λ だけ異なる二つの光が廻折格子で完全に分け得る最小の値は次の様である。

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm} \quad (26.6)$$

但し λ は調べようとする光の波長、 N は格子全體の線の數、 m はスペクトルの次數である。廻折格子では次數の高いスペクトルは次の次數のものと重なるから次數を増加することが出来ぬ。同じやうに楕段格子、フブリーペローの干渉計、ルンマーゲールケ板等の分解能もそのスペクトルの次數が高い程よい。然るに之等の分光器で出来るスペクトルは前述の如く極めて次數が高いから極めて微細な波長の差もよく分解することが出来るのである。

* 今二つの異なる波長の光を考へてゐるがその差が極めて小さいから、どちらの波長と考へてもよい。

第三章 熱

§ 27 温度 熱量

温度 二つの物體を接觸させると暖い物體から冷い物體へ熱が移るが遂に熱の移動が止む様になる。この様になつたとき二つの物體の温度は等しいといふ。異なる物體の温度の違ひを表はすこと即ち温度を測るには次の様な種々の方法をとる。

先づ第一に温度の基準點を定める。即ち一氣壓に於て氷と水とが共存し得る温度を 0° 、一氣壓に於ける沸騰水蒸氣の温度を 100° とする。次に一定量の氣體を一定の容器に入れその壓力を一定にしてその體積を測り、體積の増加が 0° と 100° との間で温度に比例するものとして氣體の體積によつてその温度を定める。又は氣體の體積を一定にしてその壓力を測り、壓力の増加が 0° と 100° との間で温度に比例するものとして氣體の壓力によつてその温度を定める。前の様な操作をする装置を定壓氣體寒暖計といひ、後の様な操作をする装置を定容氣體寒暖計といふ。通常氣體は水素、ヘリウム、窒素等であるが理論的には後に述べる様に假想的の氣體を使ふ。 0° と 100° の外側の温度は之等の氣體の體積又は壓力が 0° と 100° の間と同じ割合で増減するものと考へて測る。

通常の水銀寒暖計は 0° と 100° との間で水銀の體積の増加が溫度に比例するものと考へて溫度を定めるものである。之等の寒暖計で示される溫度は 0° と 100° 以外は必ずしも一致しない。學術的の基準になるものは後に述べる理想氣體寒暖計で定めた溫度である。

物體の性質は溫度によつて變化するから豫めその性質が溫度と共に如何に變化するかを測つておき、之によつて逆に任意の溫度を測ることも出来る。かくの如き目的に使用される物質の性質又は現象は、熱電氣、電氣抵抗、熱輻射等である。併しこの爲には先に溫度と物體の性質の變化との關係を定める爲に、溫度を測定すべき別の溫度計が必要である。この基本になる溫度計は前述の氣體寒暖計である。

熱量 純水 1g の溫度を 14.5° から 15.5° 迄高める熱量を 1 カロリーといふ。一つの物體の溫度を 1° だけ高める熱量をその物體の熱容量といひ、ある物質 1g の熱容量をその物質の比熱といふ。原子量 A の物質 A g の熱容量をその物質の原子熱といひ、1 モルの熱容量を分子熱といふ。通常の溫度ではすべての固體元素の原子熱は約 6 である。之をデュロンブティエ Dulong-Petit の法則といふ。

一定量の氣體に於てはその體積を一定にして熱した場合と、その壓力を一定にして熱した場合とで比熱がちがふ。前の場合の比熱を定容比熱、後の場合の比熱を定壓比熱と

* 精しくは 15° カロリーといはれる。

いふ。

比熱は溫度によつて異り、殊に低温になると著しく變化し段々に小さくなる。

熱は一種のエネルギーであつて仕事をする事が出来る。1850 年 ジュール Joule は 1 カロリーの熱が 4.19×10^7 エルグの仕事に相當する事を始めて直接に測定した。この値を熱の仕事當量といひ、通常 J で表す。従つて、 Q カロリーの熱エネルギーを W エルグとすれば次式が成立する。

$$JQ=W$$

以下熱エネルギーは常にカロリー單位で、その他のエネルギー及び仕事は常にエルグ單位で表はす。

§ 28 熱力學の第一法則

熱力學 一つの物體の機械的エネルギーを度外にしてその物體の有するエネルギーを内部エネルギーといふ。但し機械的エネルギーとは第一章にのべた様な位置エネルギー及び運動エネルギーの事であつて物體の分子的又は原子的の細部に立入つては考へないものを意味する。例へば物體が溫度の爲に有するエネルギーは一種の内部エネルギーであつて物體の溫度が降るときは熱エネルギーとして外部に出される。又液體が凝固するときには溫度の變化なくして熱エネルギーを外部に放出する。従つて物體は又それが液體状態にあることのみによつても内

この値はジュールがその時測つたものではなく後の測定の結果である。

部エネルギーを有することが分る。種々の變化に於ける物體の内部エネルギーの變化と物體間に行はれ又は授受される仕事又は熱量等の間の關係を論ずる科學を熱力學といふ。以下の考察に於ては物質に變化のない内部が一様な物體のみを考へる。

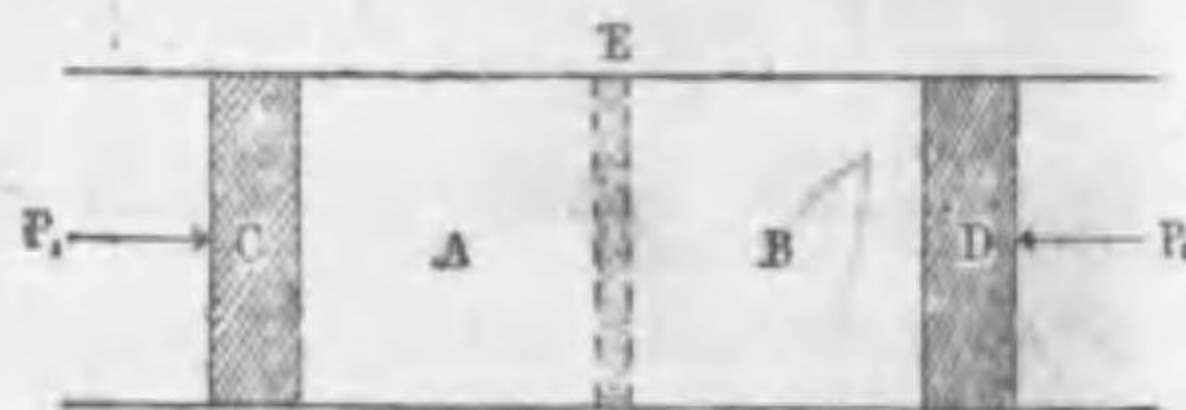
第一法則 エネルギー保存の法則によれば一定の状態にある物體が有する内部エネルギーは一定でなければならない。又變化が起る際には、一つの物體に對して外からなした仕事と外から加へた熱エネルギーとの和はその物體の内部エネルギーの増加に等しい筈である。之を熱力學の第一法則といふ。外からなした仕事を W 、加へた熱量を Q 、最初の内部エネルギーを U_1 、最後の内部エネルギーを U_2 とすれば第一法則は

$$W + JQ = U_2 - U_1 \quad (28.1)$$

で表はされる。

ジュールトムソン効果 ジュール Joule 及びトムソン Thomson は次の如き實驗を行つた。之をジュールトムソンの多細孔栓の實驗と呼ぶ。第 111

圖の如く兩端に活塞 C 及び D を有する圓筒の中程に多くの細孔を有する真



第 111 圖

鍍板の間に綿をつめた栓 E をもうけて圓筒を AB 二部分に分つ。始め A 部に壓力 p_1 の氣體をつめ活塞 D を E に接し B の體積を 0 とする。活塞 C を壓力 p_1 で押し、活塞 D を壓

力 p_2 で押し、 $p_1 > p_2$ とすると氣體は細孔を通つて A から B に移る。この時 A 部の氣體の壓力は常に p_1 、B 部の氣體の壓力は常に p_2 となるやうに活塞を動かす。このことは E が細孔栓だから實現することが出来る。圓筒及び活塞は完全に熱を導かないものとする。従つてこの時熱の出入はない。寒暖計で氣體の溫度を測つてみると實驗の結果によれば氣體が B 内に噴出してしまつた時氣體の溫度は少しく變る。水素に於ては溫度が昇り他の多くの氣體に於ては溫度が降る。この効果をジュールトムソン効果といふ。尙溫度の降下は大體壓力の差に比例し、溫度が低い程降下が著しい。

氣體の内部エネルギー 一般に内部が一様な一定の物體が一定の状態にあるときその状態はこの物體に周圍から作用する壓力、物體の體積、物體の溫度の内の二つが分れば完全に分る^{*}。従つて一定量の氣體の状態はその壓力、體積、溫度の内の二つを指定することにより完全にいひ表はされる。従つてこの氣體に屬する他の量は一般に壓力、體積、溫度の内の二つが異なるに従つて異なる。上にのべたジュールトムソンの實驗によれば氣體の内部エネルギーがその溫度のみに關するか又は體積によつても異なるかが分る。上の實驗に於て最初の氣體の體積を V_1 、最後の氣體の體積を V_2 とする。活塞の面積を S とすると C に働く力は $p_1 S$ である。A 部の最初の長さを l とすると外力がなした

^{*}この時物質が變化しないことが大切である。

仕事は $(p_1 S)l = p_1 V_1$ である。同様に D の方で氣體が外力に對してなした仕事は $p_2 V_2$ である。故に外力のなした全體の仕事は $p_1 V_1 - p_2 V_2$ である。熱の出入がないから(28.1)により

$$p_1 V_1 - p_2 V_2 = U_2 - U_1 \quad (28.2)$$

である。最初の温度を T_1 、最後の温度を T_2 とし、氣體の定容比熱を c_v とする。今

$$p_1 V_1 - p_2 V_2 = J c_v (T_2 - T_1)$$

なる温度 T' を考へる。最後の状態の氣體から體積をかへないで熱をとりその温度を T' とするとこのときの氣體の内部エネルギーは

$$U_2 - J c_v (T_2 - T') = U_2 - (p_1 V_1 - p_2 V_2) = U_2 - (U_2 - U_1) = U_1$$

となる。従つてこの状態(温度 T' 、體積 V_2)では氣體の内部エネルギーは最初の状態(温度 T_1 、體積 V_1)の内部エネルギーと全く同じである。若し

$$T' = T_1$$

ならばその氣體の内部エネルギーは體積に關係なく温度だけの函数となる。従つてこの様な氣體では温度を測定すればその内部エネルギーを知ることが出来る。又若し

$$T' \neq T_1$$

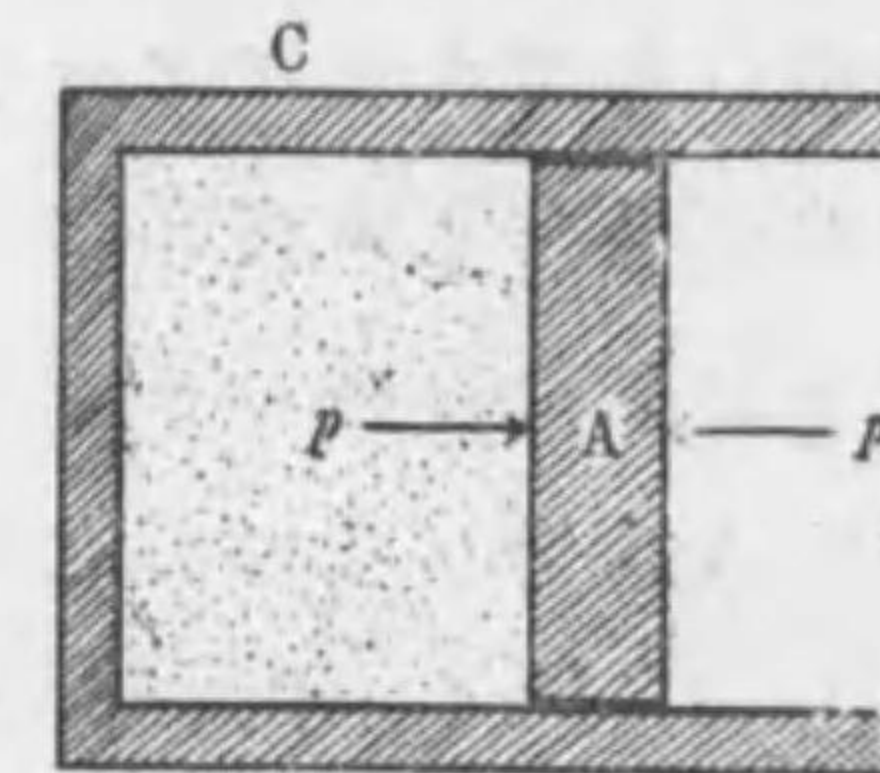
ならばその氣體の内部エネルギーは温度が同じでも體積によつて異なることになる。即ちこのとき氣體の内部エネルギーは温度と體積との函数である。

實驗の結果によると $V_2 > V_1$ なるとき一般に T' は T_1 より

りも低いとその差は極めて少い。特に水素に於てはその差が小さい。従つて大體に於ては氣體の内部エネルギーは温度のみの函数とみることが出来る。

氣體の斷熱膨脹 物體に全く熱の出入がない様にしてその状態を變化させることを斷熱變化といふ。第112圖

の如く全く熱を導かない物質で作つた圓筒 C に熱を導かない活塞 A をつけ、この中に氣體を密閉したものとする。今活塞 A を動かして氣體を膨脹させると氣體はその壓力で外部に對して仕事を



第 112 圖

をする。この變化は斷熱變化であるから(28.1)に於て $Q=0$ である。即ち

$$W = U_2 - U_1$$

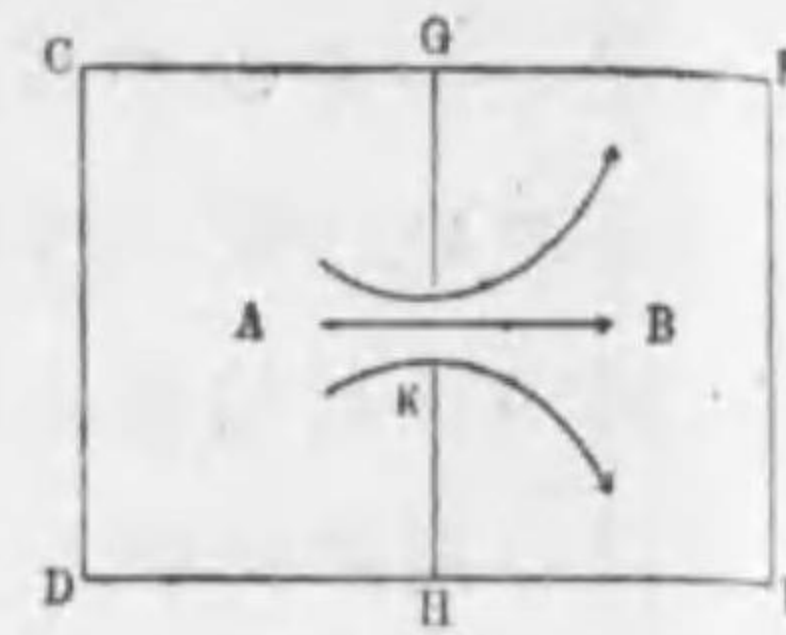
所が今は氣體が外に對して仕事をしてゐるから $W < 0$ 従つて

$$U_2 < U_1$$

となる。前述の様に内部エネルギーが同じでも體積の大きい場合の方が温度が低い。今の場合には體積が大きくなり且つ内部エネルギーは小さくなるのであるから温度が降る。大氣中に上昇氣流が起る様なときには空氣は斷熱膨脹をするから著しく温度が降る。夏空に見る入道雲はこの爲に出来るものである。

第 113 圖に於て CDEF は斷熱物質で作つた容器とし隔壁 GH も斷熱性のものとする。今 GH の孔 K を密

栓し A に氣體を密閉し B を真空にする。次に K の栓をとつて氣體を真空中に噴出せしめると之も断熱變化である。併しこの時氣體は外部に對して仕事をしないから氣體



第 113 圖

全體の内部エネルギーは不變である。従つて温度の變化は前の場合と同様にはならない。前述の様に内部エネルギーは氣體の體積によつても異なるからこの時少しく温度が降る。併しその變化は極めてかすかで殆んど分らない。

§ 29 可逆變化

状態式 前述の様に物體の状態はこの物體に周圍から作用する壓力、物體の體積、物體の温度の内二つが定まれば定まる。従つて一定の状態にある物體について上の三つの内二つを知るならば残りの一つは自ら知れる。即ちこの二つの間には一つの關係式が成立する。この關係式をその物體の**状態式**といふ。一定量の氣體の體積を V 、壓力を p 、その温度を t とするとボイル-シャルル Boyle-Charles の法則により

$$pV = p_0 V_0 \left(1 + \frac{t}{273.2}\right) \quad (29.1)$$

である。但し $p_0 V_0$ は 0° に於ける壓力及び體積である。273.2 + t を**絶対温度**といひ、 T であらはず。今この物體の

* 以後一定の物體の一定の状態を指定するに必要な壓力、體積、温度を共にその物體の壓力、體積、温度といふ。
** 絶対温度は常に大文字 T で表はす。

量を ν モルとし

$$\frac{p_0 V_0}{273.2} \frac{1}{\nu} = R \quad (29.2)$$

とおけば(29.2)は次く如くかける。

$$p_0 V_0 = \nu RT \quad (29.3)$$

之は即ち状態式で、 R はすべての氣體につき殆んど同じ値 (CGS 單位と度で測つたとき)

$$R = 8.314 \times 10^7 \quad (29.4)$$

をとり之を**氣體常数**といふ。

(29.3) 式は、大體に於て成立するのであつてすべての氣體に完全にあてはまるのではない。嚴密にいへば(29.3)をみたす氣體は實在しない。そこで(29.3)をみたし、且つ内部エネルギーが温度のみの函数である様な假想的の氣體を考へ之を**理想氣體**といふ。實際の氣體 1 モルの状態式は次の如き式でよく表はされることが實驗によつて確かめられる。

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (29.5)$$

但し v は 1 モルの體積即ち分子容である。之を**ファンデルワールス Van der Waals の状態式**といふ。

理想氣體の等温曲線と断熱曲線 物體の状態を定める體積、壓力、温度の内二つを縦横の座標にとれば平面上の一點でその物體の一定の状態を表すことが出来る。壓力を縦座標、體積を横座標にとつたものを pV 圖表といひ、§ 31 の終迄は之によつて考察をすゝめる。

温度を一定にして物體の状態を變化させることを**等温**

變化といふ。状態を表す圖表に於てかくの如き變化を表はすものは一つの曲線となる。之を等温曲線といひ、物体の壓力と同じ壓力が外部から働いて断熱變化をしたとき之を表す曲線を断熱曲線といふ。

理想氣體では等温曲線は pV 圖表に於て

$$pV = \nu RT (\text{一定})$$

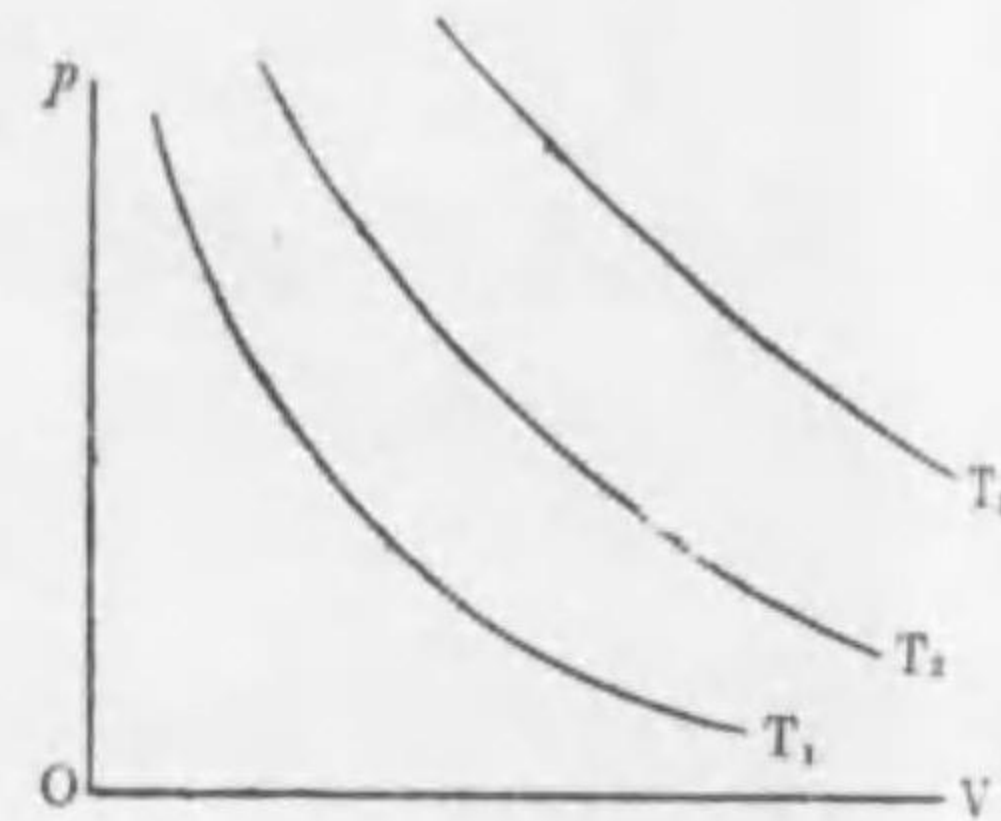
で表はされる。之は第 114 圖の様に T を媒介變數とする双線線で T の値の異なるに從ひ異なる双曲線を表す。圖に於ては $T_1 < T_2 < T_3$ である。断熱變化のとき若し壓縮されるならば外からなされた仕事が内部エネルギーとなつて温度は昇るから其の場合氣體の

壓力は等温變化の場合よりも著しく大きくなる。次に質量 m g の理想氣體の断熱曲線を求めよう。第 115 圖に於て状態 Q から極めて少しく断熱變化をした場合を考へる。この結果状態が P に變つたものと

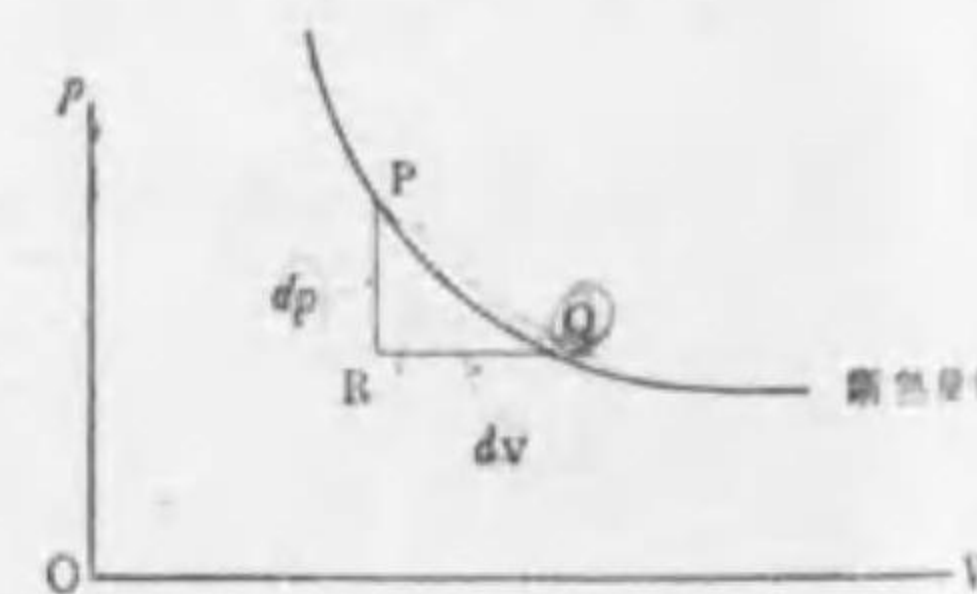
し P と Q との壓力、體積の關係を求める。この變化は Q から壓力が一定で R 迄變り、 R から體積が一定で P 迄變化した

ものと考へた場合に極めて近く、極限に於ては一致する。

今壓力及び體積の増加を夫々 dp 及び dV とする。壓力が



第 114 圖



第 115 圖

一定のとき體積の變化に對する温度變化の割合を微分記號で

$$\left(\frac{dT}{dV}\right)_p$$

とかけば Q から R に達したときの温度の變化は $\left(\frac{dT}{dV}\right)_p dV$ である。同様に R から P に達したときの温度の變化は $\left(\frac{dT}{dp}\right)_V dp$ である。従つて c_v, c_p を定容比熱及び定壓比熱

とすれば變化 $Q \rightarrow R \rightarrow P$ に於て氣體が得た熱量は

$$mc_v \left(\frac{dT}{dp}\right)_V dp + mc_p \left(\frac{dT}{dV}\right)_p dV$$

である。^{**} 所が變化 $Q \rightarrow P$ は断熱變化であるから上の値は 0 である。

さて(26.3)より

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_V = \frac{V}{\nu R}, \quad \left(\frac{dT}{dV}\right)_p = \frac{p}{\nu R}$$

であるから之を前の式に代入して $\frac{m}{\nu R}$ をおとすと

$$c_v V dp + c_p p dV = 0$$

となる。そこで

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma \quad (29.6)$$

とおけば

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad (29.7)$$

となる。之の解は

$$pV^\gamma = (\text{一定}) \quad (29.8)$$

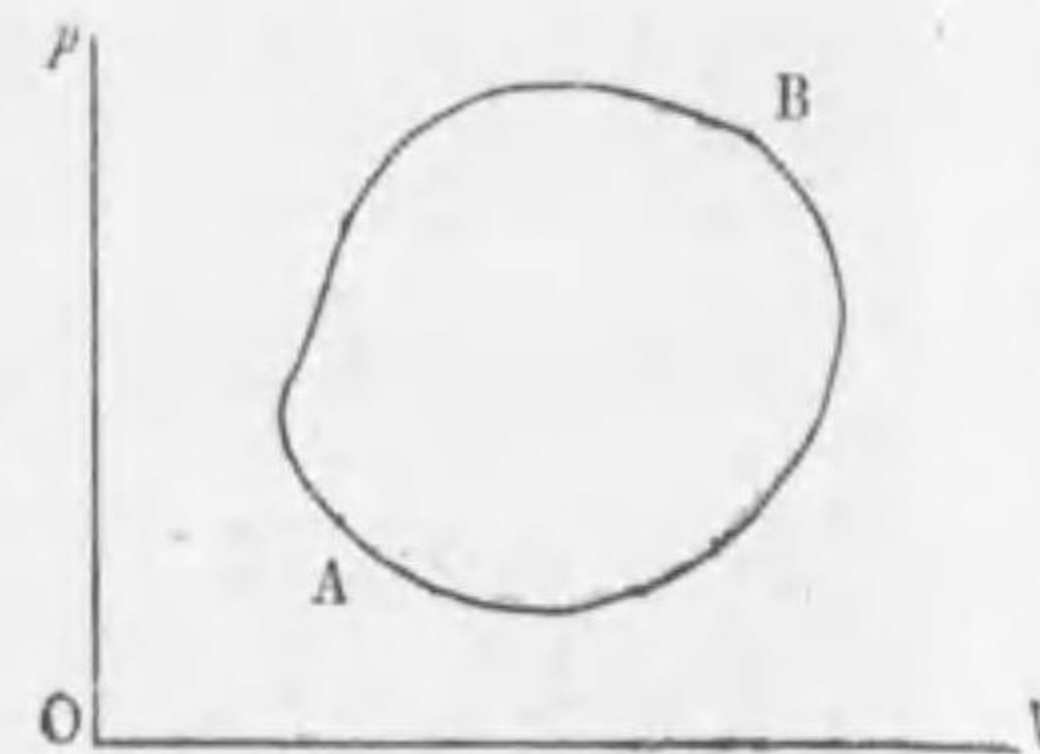
* 熱力學では便宜上常にかくの如き符號を使ふ。之は通常の微分記號では $T=f(p,V)$ なるとき $\frac{\partial f}{\partial V}$ の事である。讀者は以下この記號について誤まらぬやうにされたい。

** この時壓力が釣合つてゐるから ϕ が使へる。§ 31 参照。

である。この式の表はす法則をポアソン Poisson の法則といひ、その表はす曲線は即ち求める断熱曲線である。

カルノーの循環過程

一つの物體がある状態から他の状態に変化するときこの変化にあづかつたすべての物體の状態をもとにかへすことが出来るならばこの変化を可逆變化といひ、さうでない変化を非可逆變化といふ。例へば真空中に於ける振子の運動の様なのは可逆變化で物體の冷却の様なのは非可逆變化である。前節に述べた例では、



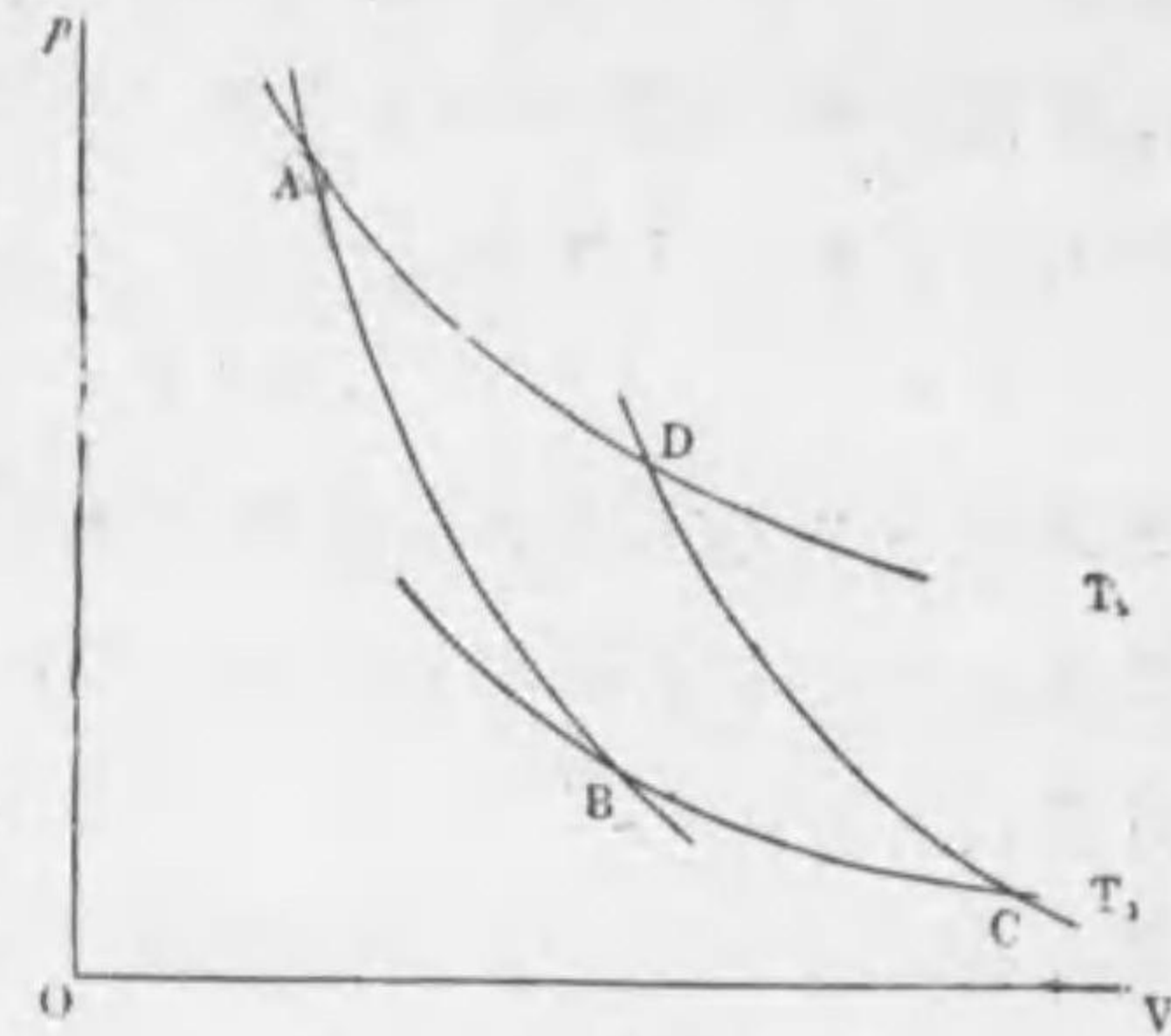
第 116 圖

ールトムソンの實驗は可逆變化で、真空中へ氣體が噴出するのは非可逆變化である。可逆變化の方が考察が容易であるから熱力學では先づ可逆變化を考察して非可逆變化の場合を之から考へる。壓力が釣合つてゐて熱の移動が等温の二物體間にのみ起る變化は任意の段階に於て逆行し得るから可逆變化である。以下本節に於ては可逆變化のみを考へる。

第 116 圖の如く物體が一つの状態 A から他の種々の状態に変化し、再び元の状態 A にかへることを循環過程といふ。循環過程のうち最も簡単な基本的のものは次の様な可逆變化である。第 117 圖に於て AB^D 及び BC を一定量の氣體の温度 T₂ 及び T₁ の等温曲線とする。AD 上の一

*非可逆變化については § 31 参照。

を通る断熱曲線は前述の如く等温曲線よりも急であるから AD 及び BC と交る。之を AB とし他の断熱曲線を DC とする。状態 A から出發し、AB に沿うて B 迄、BC に沿うて C 迄、CD に沿うて D 迄變化し、更に



第 117 圖

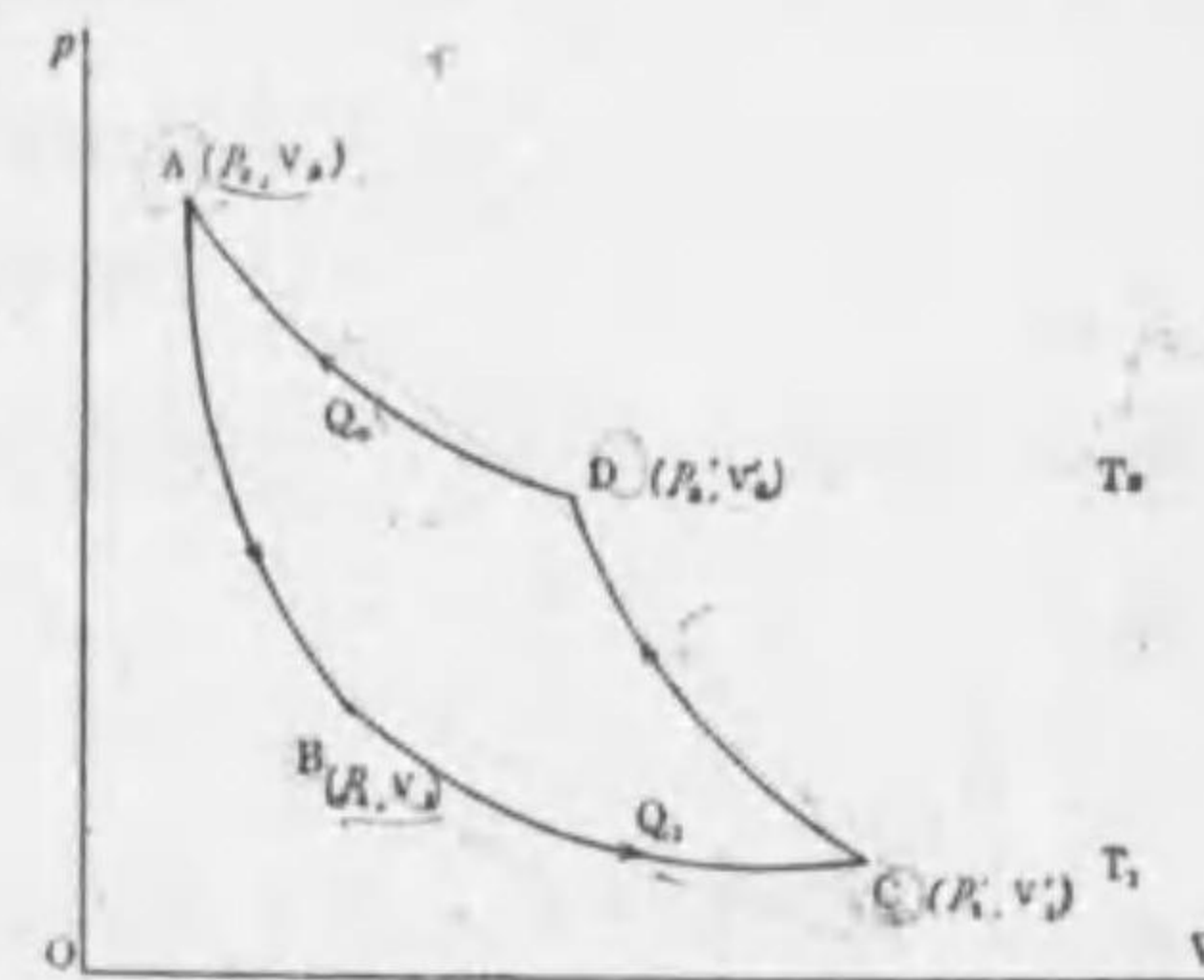
DA に沿うて元の状態 A にかへる可逆循環過程をカルノー Carnot の循環過程といふ。

さて理想氣體 1 モルについてのカルノーの循環過程を考へる。第 118 圖に於

て ABCD をこの過程とし状態 A, B, C, D 等の壓力及び體積を圖の如く夫々

$$(p_2, V_2), (p_1, V_1),$$

$$(p'_1, V'_1), (p'_2, V'_2)$$



第 118 圖

とし、BC の温度を T₁、AD の温度を T₂ とする。變化 A→B 及び C→D は断熱變化であるからこの際熱の出入はない。變化 B→C の際外から氣體に入つた熱量を Q₁、變化 D→A の際氣體から外に出た熱を Q₂ とする。變化 B→C の際温度は一定で氣體は理想

氣體であるから氣體の内部エネルギーは不変である。故に變化 B→C の際外から氣體になした仕事を W とすると (28.1) により

$$JQ_1 + W = 0$$

である。さて壓力 p の氣體が極めて少しの體積 dV だけ膨脹したとき氣體が外に對してなす仕事は (28.2) の考察と同様に考へて

$$pdV$$

である。随つて B→C なる變化全體では之を積分して

$$\int_{BC} pdV$$

となる。従つて

$$W = - \int_{BC} pdV$$

$$\therefore JQ_1 = \int_{BC} pdV$$

となる。然るに (29.3) により

$$p = \frac{RT_1}{V}$$

であるから

$$JQ_1 = \int_{V_1}^{V_1'} \frac{RT_1}{V} dV = RT_1 \log \frac{V_1'}{V_1}$$

同様に

$$JQ_2 = RT_2 \log \frac{V_2'}{V_2}$$

となる。又 (29.3) 及び (29.8) により

$$\left. \begin{aligned} p_1 V_1 &= RT_1, & p_2 V_2 &= RT_2 \\ p_1 V_1^\gamma &= p_2 V_2^\gamma \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore RT_2 V_2^{\gamma-1} = RT_1 V_1^{\gamma-1}$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}$$

同様に

$$\left(\frac{V_2'}{V_1'} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\therefore \log \frac{V_1'}{V_1} = \log \frac{V_2'}{V_2}$$

従つて

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{又は} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (29.9)$$

を得る。即ち一定量の理想氣體に行ふカルノーの循環過程に於て二つの等温變化の際氣體に出入する熱量の比はそれ等の變化の際の絶対温度の比に等しい。従つて理想氣體の一定の断熱曲線上の任意の一點からこの點を通る等温曲線に沿うて他の一定の断熱曲線とこの等温曲線との交點に移る可逆變化の際出入する熱量とその等温曲線の絶対温度との比は等温曲線に無關係に一定である。

ケルビンの熱力學的溫度 上に述べた事は理想氣體に於てのみ正確に成立する。一般の氣體に於ては等温曲線断熱曲線共に形が理想氣體のそれ等と異なる。併しカルノーの循環過程を考へることが出来るから二つの一定の断熱曲線をとるその間で上に述べたやうなカルノーの循

環過程を考へ

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\theta_2}{\theta_1} \quad (29.10)$$

の様な θ_2, θ_1 をとり

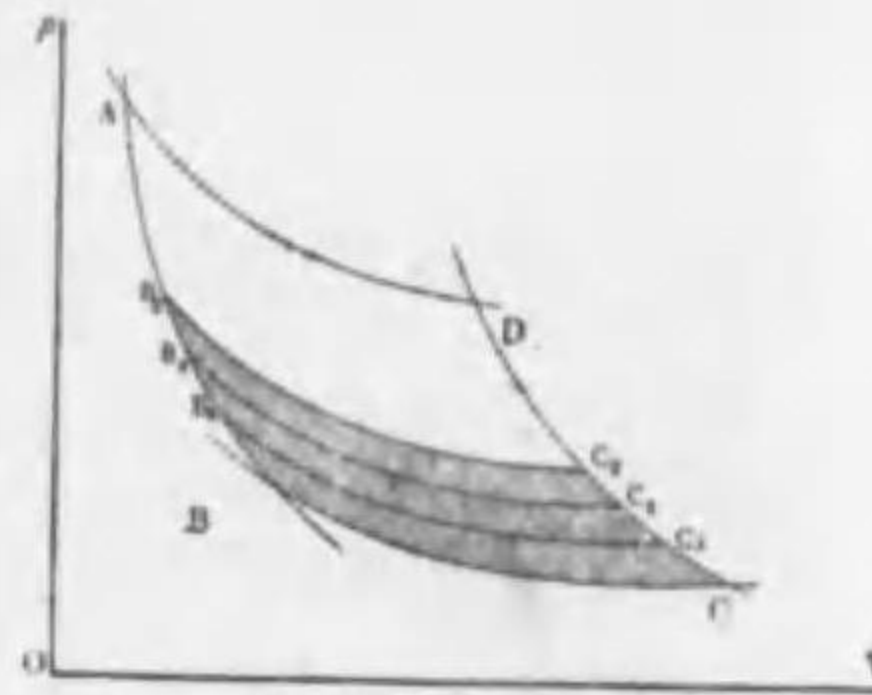
$$Q_1=0 \text{ のとき } \theta_1=0 \quad (29.11)$$

とし、氷の融解点を θ_1 、水の沸騰点を θ_2 (両方共 1 氣壓に於て) としたとき

$$\theta_2 - \theta_1 = 100 \quad (29.12)$$

となる様に θ を定める。この様な θ を **ケルビン Kelvin** の熱力學的溫度と呼ぶ。

θ を定めるには Q を測定する必要はなく次の様にすればよい。第 119 圖に於て AB 及び CD を二つの斷熱曲線とし、AD 及び BC を夫々水の沸騰點及び氷の融解點に於ける等溫曲線とする。ABCD にかこまれる面積を等溫曲線 $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, \dots$



第 119 圖

等で 100 等分すれば之等の相隣る等溫曲線の溫度は 1 だけの差となることが證し得る。従つて二つの斷熱曲線 ABCD の間で $\theta=0$ の等溫曲線から上述の等溫曲線間の面積と等しい面積をとる様に等溫曲線をひけば之等の等溫曲線が θ の目盛を示す。故に θ は熱量を測定することなく全く力學的の方法で定めることが出来る。故に理論的溫度としては之を使ふのがよい。次節に於て述べる様に一般に如何なる氣體をとつて定めた θ も皆理想氣體寒

暖計で定めた絶對溫度に等しい。よつて以下に於てはすべてこの溫度を使ふことにする。

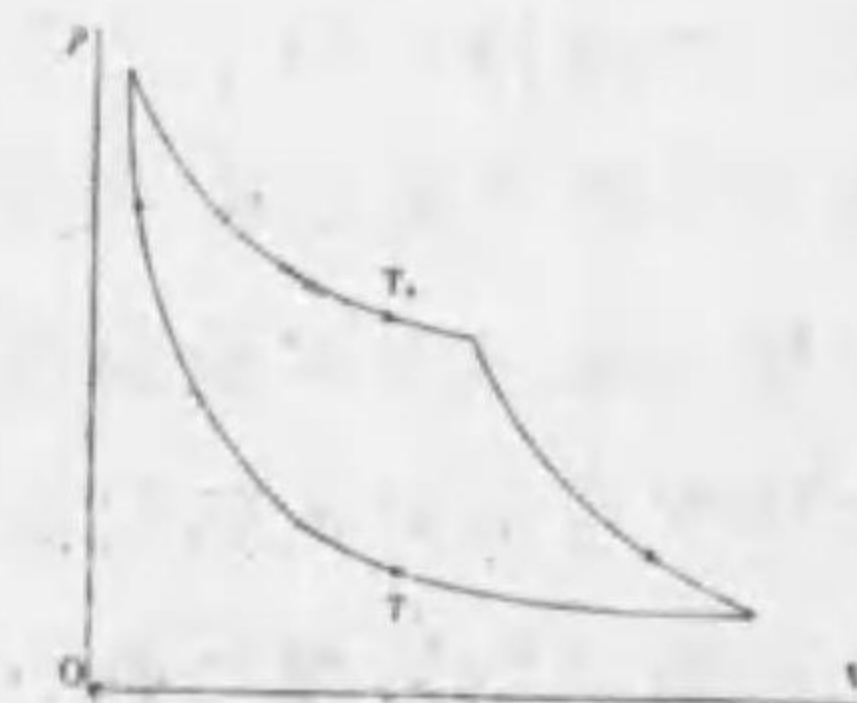
§ 30 熱力學の第二法則

第二法則 熱力學第一法則はエネルギー保存の法則を熱的現象に適用したものである。これは物體が一つの狀態から他の狀態に變化したならばその時エネルギー關係が如何になるかを與へるものであつて、一つの狀態から他の狀態への變化が自然に起り得るか否かを規定することは出来ない。第二法則はこの規定に役立ち自然現象の方向を指定し得るものであつて高温物體から低温物體への熱の移動が非可逆的なることを述べてゐる。即ち

その二物體以外に何等の變化をも残すことなく、低温の物體から高温の物體に熱を移すことは如何なる方法によるも不可能である。

之を熱力學の第二法則といふ。

熱機關の効率 カルノーの循環過程に於て二つの等溫變化の溫度を T_1, T_2 とし $T_2 > T_1$ なるものとする。今 T_2 に於て熱 Q_2 を吸収して氣體を膨脹させ、 T_1 に於て熱量 Q_1 を放出して氣體を壓縮したものとし、一回の循環過程に於て氣體が外に向つ



第 120 圖

てなした仕事を W とする。過程を一回終つたときには

氣體はもとの状態にかへるからその内部エネルギーは不変である。故に(28.1)により*

$$J(Q_2 - Q_1) = W \quad (30.1)$$

である。この過程に於て氣體は温度 T_2 の高熱源**から熱エネルギー JQ_2 を取り、温度 T_1 の低熱源に熱エネルギー JQ_1 を與へ、その間に外に向つて仕事 W をしてゐる。従つてこの氣體と之に上述の循環過程をさせる装置全體は一種の熱機關である。之をカルノーの可逆熱機關といふ。一般に高熱源より取つた熱エネルギーに對する外部に向つてなした有効な仕事の比を熱機關の効率といふ。之を E とするとカルノーの可逆熱機關では

$$E = \frac{W}{JQ_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} \quad (30.2)$$

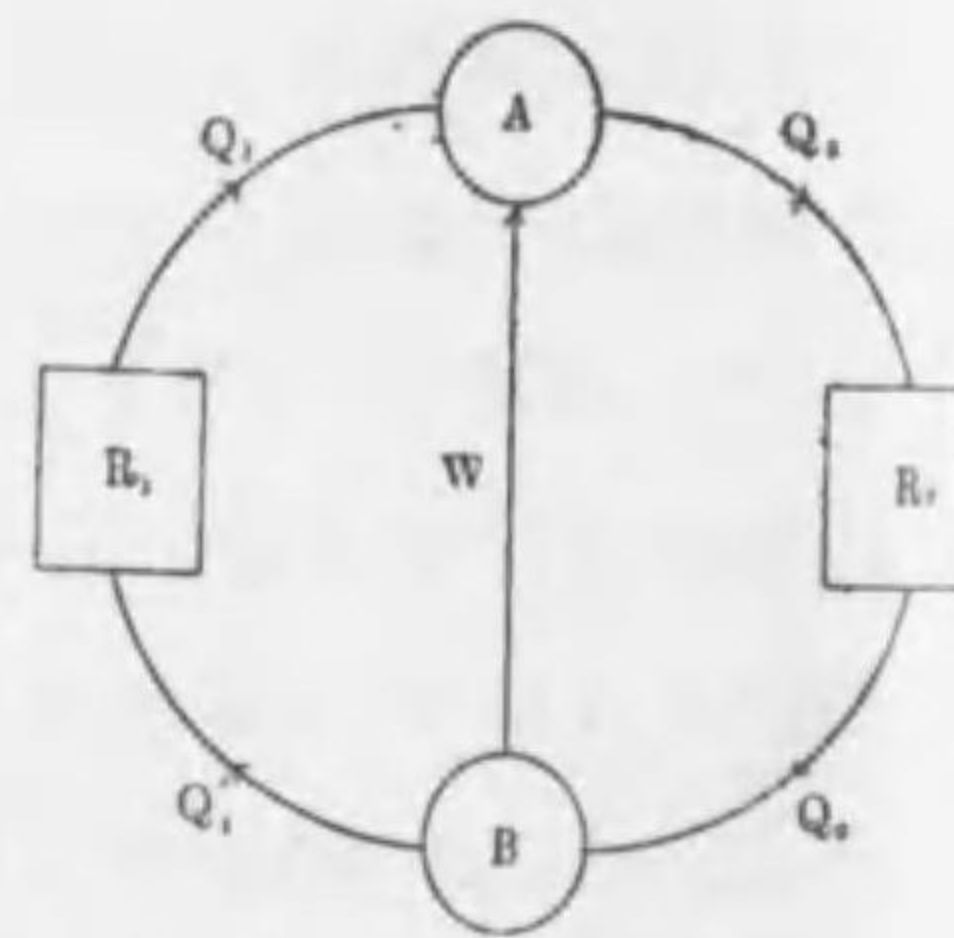
となる。若し使ふ氣體が理想氣體ならば(29.9)により

$$E = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \quad (30.3)$$

である。

次に氣體が循環過程をする事によつて外に仕事をする一般の熱機關の効率を考へよう。第121圖に於て R_2 を高熱源、 R_1 を低熱源、 A を可逆熱機關***、 B を可逆又は非可逆熱機關とする。

この兩熱源の間に働いたとき



第121圖

* (28.1)の W は外から氣體になした仕事だから今の W と符號が逆である。

** 高温度の熱源の意。

*** 可逆變化をする熱機關の意。

の A の効率を E 、 B の効率を E' として E と E' との大小を比較しよう。一般に

$$E \geq E'$$

の内のどれかであるが第二法則によれば $E < E'$ ならざることゝを次の様に證し得る。 B が一循環過程の間に R_2 から熱 Q_2' をとり、 R_1 に熱 Q_1' を與へ外に對して仕事 W をするものとする。 B と A を連結して B がする仕事 W で A を運轉し、 A は一循環過程の間に R_1 より熱 Q_1 をとり R_2 に熱 Q_2 を與へ、且つ B が一循環過程を終る間に A も一循環過程を終る様にする。然るときは

$$E' = \frac{W}{JQ_2'}$$

である。又 A は可逆熱機關であるから若し R_2 と R_1 の間に之を働かしたならば一循環變化に於て(今の場合と變化の向きが逆) R_2 から熱 Q_2 をとり R_1 に熱 Q_1 を與へて仕事 W を外に向つてする筈である。故に

$$E = \frac{W}{JQ_2}$$

となる。若し $E < E'$ ならば之等より

$$\frac{W}{JQ_2} < \frac{W}{JQ_2'}$$

を得る。 W, J, Q_2, Q_2' は皆正であるから之より

$$Q_2' < Q_2$$

となり A, B が一循環變化を終ると R_2 は R_1 から熱 $Q_2 - Q_2' > 0$ を受けとつた事になる。かくて R_1, R_2 以外に何等の變化が残つてゐないで熱は低熱源から高熱源に移つた事になり、第二法則に反する。故に $E < E'$ なることは

出来ない。故に同じ二つの熱源の間に働く熱機関の内可逆機関よりも大きな効率をもつたものはあり得ない。

次に若しBも可逆機関であつたならば今の考察は全く逆に出来るから $E' < E$ ならざることがいへる。従つて同じ二つの熱源間に働くすべての可逆機関の効率は等しい。

又若しBが非可逆機関であつたならば上の考察を逆にすることが出来ないから $E' < E$ ならざることとは主張出来ない。併し若し $E = E'$ としたならば上の考察に於て

$Q_2 = Q_2'$ 従つて $Q_1 = Q_1'$ となり一循環変化の後すべてのものに変化が残らぬからBは可逆となり假定に反する。故に $E' < E$ 即ち非可逆機関の効率は之と同じ二つの熱源間に働く可逆機関の効率よりも小さい。

理想氣體寒暖計の示度と熱力學的溫度 カルノー機関は又ケルビンの熱力學的溫度を測る溫度計と考へることが出来る。上記の例に於てAを理想氣體を入れたカルノー機関、Bを任意の氣體を入れたカルノー機関とする。Aで測つた R_1 及び R_2 の熱力學的溫度を夫々 θ_1, θ_2 , Bで測つた R_1 及び R_2 の熱力學的溫度を夫々 θ_1', θ_2' とし理想氣體寒暖計で測定した R_1 及び R_2 の溫度を夫々 T_1, T_2 とする。然るときは

$$E = E' \quad \therefore \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{Q_2' - Q_1'}{Q_2'} \quad \therefore \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q_1'}{Q_2'}$$

然るに(29.10)(29.9)により

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \frac{Q_1'}{Q_2'} = \frac{\theta_1'}{\theta_2'}$$

故に

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_1'}{\theta_2'}$$

従つて一般に理想氣體寒暖計で測つた溫度を T, θ で測つた溫度を θ とすると

$$\frac{T}{\theta} = k(\text{常數})$$

となる。所が氷の融解點と水の沸騰點との間を100等分することによつて $k=1$ なることが容易に知れる。かくて

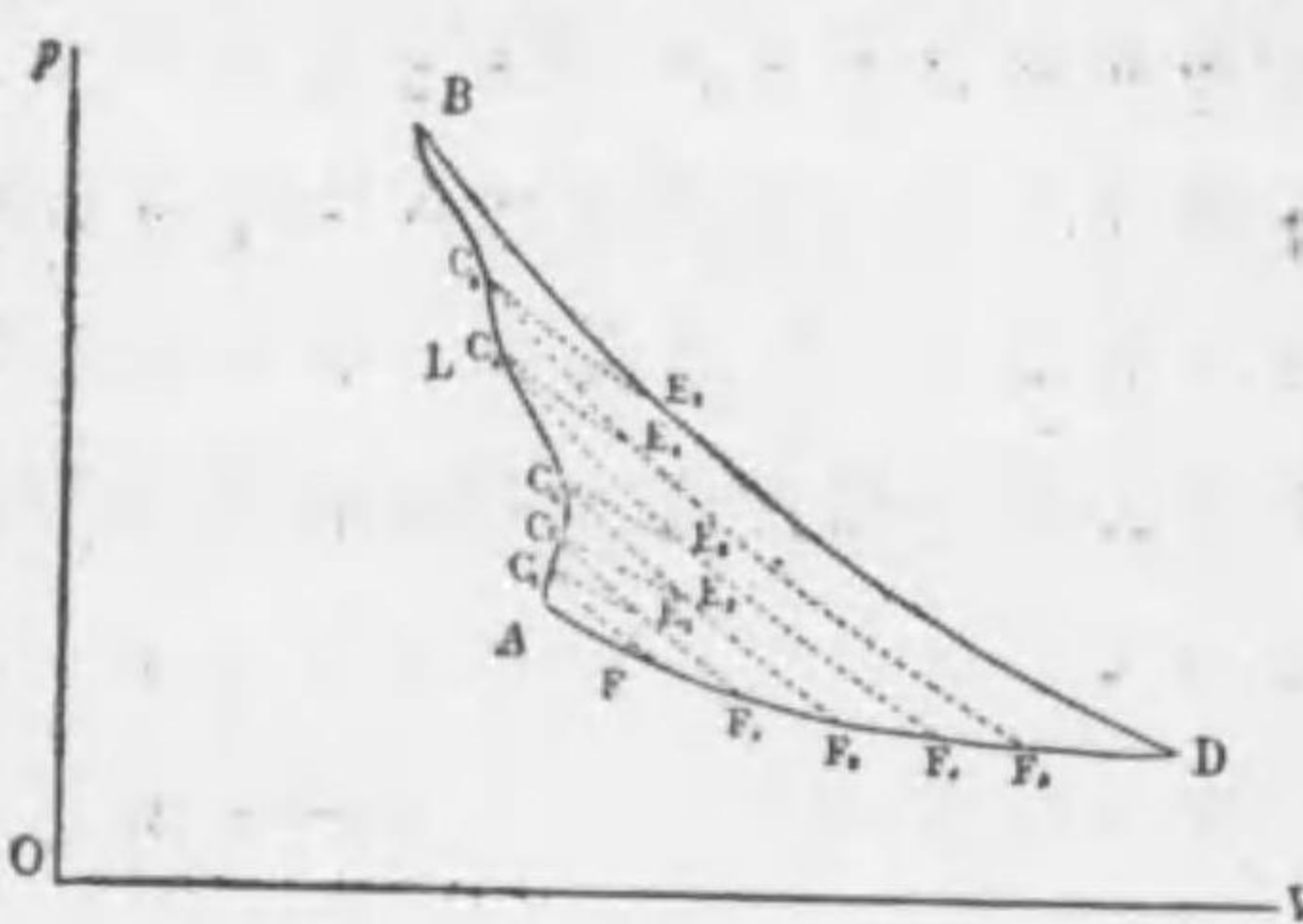
$$T = \theta \quad (30.4)$$

を得前節の最後に述べたことが示された。

§ 31 エントロピー

一定量の氣體が第122圖に於ける曲線Lに沿うて可逆的に状態Aから状態Bへ

逆變化したものとす。AからB迄の變化を細分し各細分點を C_1, C_2, C_3, \dots 等とする。この變化に於て A, C_1, C_2, \dots, B 等の溫度を夫々 T_0, T_1, T_2, \dots, T とし、 $A \rightarrow C_1, C_1 \rightarrow C_2, \dots$ 等の變化に於て氣體内に入つた熱量を夫々 Q_0, Q_1, Q_2, \dots 等とする。今



第122圖

なる和を求める。圖に示す様に A, C_1, C_2, \dots, B 等を通る等溫曲線を $AD, C_1E_1, C_2E_2, \dots$ 等とし、斷熱曲線を $C_1F_1, C_2F_2, \dots, BD$ 等

$$S_1 = \frac{Q_0}{T_0} + \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots$$

なる和を求める。圖に示す様に A, C_1, C_2, \dots, B 等を通る等溫曲線を $AD, C_1E_1, C_2E_2, \dots$ 等とし、斷熱曲線を $C_1F_1, C_2F_2, \dots, BD$ 等

とする。然るときは Q_0 は $A \rightarrow F_1 \rightarrow C_1$ の變化に於て氣體内に入つた熱量 Q_1' に近い値である。然るに變化 $A \rightarrow F_1 \rightarrow C_1$ の内 $F_1 \rightarrow C_1$ の際は熱の出入がないから Q_1' は變化 $A \rightarrow F_1$ に於けるものである。同様にして變化 $C_1 \rightarrow E_1$ に於て氣體に入る熱量を Q_2' とすれば之は Q_0 に近い。他も同様であるから S_1 は

$$\frac{Q_0'}{T_0} + \frac{Q_1'}{T_1} + \frac{Q_2'}{T_2} + \dots$$

に近い。然るに變化 $F_1 \rightarrow F_2, F_2 \rightarrow F_3, \dots$ 等に於て氣體に入る熱量を Q_1'', Q_2'', \dots 等とすれば(29.9)により

$$\frac{Q_1'}{T_1} = \frac{Q_1''}{T_0}, \quad \frac{Q_2'}{T_2} = \frac{Q_2''}{T_0}, \quad \dots$$

等となり S_1 は

$$\frac{Q_0'}{T_0} + \frac{Q_1''}{T_0} + \frac{Q_2''}{T_0} + \dots$$

に近くなる。變化 $A \rightarrow D$ に於て氣體に入つた熱量を Q' とすると之は $\frac{Q'}{T_0}$ となる。而して分點 C_0, C_1, C_2, \dots 等の數を増し各分點の間を近づける程此の値と S_1 の値は近づく。随つて

$$\lim S_1 = \frac{Q'}{T_0}$$

となる。D は考へる變化の始と終の状態 A 及び B が定まれば一定である。従つて $\frac{Q'}{T_0}$ も A と B が一定ならば AB を結ぶ曲線の形に無關係に一定である。Q を A から L 上の任意の點迄變化したとき氣體が吸収する熱量とすれば $\lim S_1$ は積分の形にかはる。之に J をかけたものを S とおくと

$$S(L) = J \int_L \frac{dQ}{T} = J \int_A^B \frac{dQ}{T} = S(A, B)$$

を得る。S は L の兩端點 A 及び B の位置のみに關し、變化の道 L の形に無關係である。故にある特定の狀態 N に於ける S の値を零と規約し、S は常にこの狀態と考へる狀態との間に積分したものと約束するときは任意の狀態 P に於ける S の値は

$$S(P) = J \int_N^P \frac{dQ}{T} \quad (31.1)$$

となり、S は氣體の狀態のみに關する函数となる。S を狀態 P に於けるこの氣體の**エントロピー**といふ。二つの物體のエントロピーは各物體のエントロピーの和と定義する。熱源のエントロピーは熱源の種類によつて複雑になるが吾々は今一定の體積を有する一樣な物體を熱源と考へることにすればそのエントロピーは物體の場合と同様に考へられる。一定の溫度を有する熱源は熱容量が無限に大きい物體と考へればよい。

エントロピーを使へば物體の狀態變化が可逆的であるか否かを表はすこと、又は二つの狀態を比較するときこの

* 一般の熱源は自らの内部エネルギーを何等かの方法で熱として他物體に與へる物體である。かくの如き物體は、一樣でない物體や化學變化をおこしつゝある物體を含む。従つて吾々が考察してゐる物體以外のものであり、その狀態も p と V だけでは定まらない。

間に變化が自然に起り得るか否かを指定すること等が極めて便利に出来る。

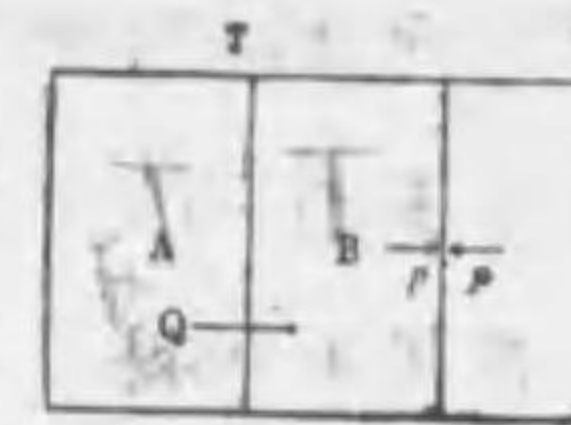
非可逆變化 壓力が釣合ひ熱の移動が等温の二物體間に起る様な變化は前に述べた様に可逆變化であるがさうでないものは非可逆變化である。

先づ壓力が釣合つてゐない變化が非可逆なることを示さう。

氣體の壓力が外力よりも大きくて等温的に膨脹した場合には外力がなされた仕事はこれ等の二つの力が釣合つてゐる場合よりも小さい。従つて吸収する熱も小さい筈である。之をもとの状態にかへす爲には氣體の壓力と外力が釣合つたまゝで變化さすか、外力の方を壓力よりも大きくして變化さすかである。どちらにしても前の場合に外力がなされた仕事よりもこの場合に外力のなした仕事の方が大きいから氣體が放出する熱量も大きい。従つて氣體がもとの状態迄かへるとき熱が丁度もとの通りにならない。即ち變化は非可逆的である。外力の方が氣體の壓力より大で氣體が壓縮されるときも同様である。次に熱の移動が温度の異なる二物體の間に行はれたとき之を逆行し得ない事は第二法則より明かである。可逆變化非可逆變化の場合變化の前後に物體のエントロピーが如何に變るかを次に考へよう。

可逆變化とエントロピー 第 123 圖の如く温度 T の氣體 B が同温度の熱源 A と接してその壓力が外力と釣合

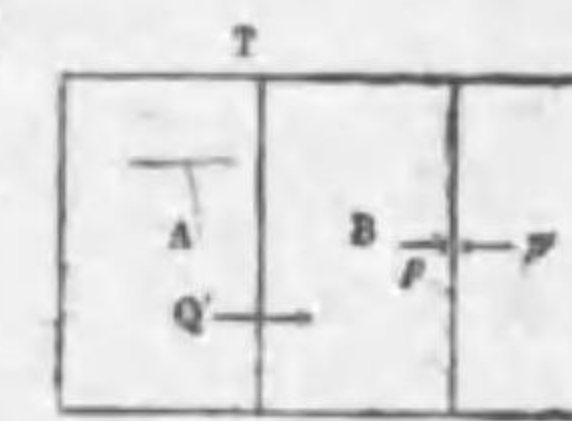
ひ乍ら膨脹したとき熱源から氣體に與へた熱量を Q とすると變化前後の氣體の状態は同じ等温曲線上の二點であるから、こ



の變化による氣體のエントロピーの増加は明らかに $\frac{JQ}{T}$ である。熱源は體積をかへないからその内部エネルギーの減少は JQ である。等體積等温度の二つの状態に於て内部エネルギーが JQ だけ異つてゐる熱源のこの二状態のエントロピーの差は明らかに $\frac{JQ}{T}$ である。従つて熱源のエントロピーの減少は $\frac{JQ}{T}$ である。故に全體のエントロピーには増減がない。又氣體が可逆的に斷熱變化をするときは變化前後の状態が同じ斷熱曲線上にあるから變化前後の氣體のエントロピーは同じである。一般の可逆變化は第 122 圖に於ける考察の様に等温可逆變化と斷熱可逆變化とをつぎ合はせた變化の極限と考へられるからこの際變化にあづかつたすべての物體のエントロピーの總和は不變である。

非可逆變化とエントロピー 次に非可逆變化の場合を考へる。第 124 圖の如く氣體 B が温度

T の熱源に接し外壓力 p' と氣體の壓力 p とが釣合はずに等温的に膨脹したものと



する。この時熱源から氣體に移つた熱量を Q' とし若し外壓力が p で釣合ひ乍ら可逆等温的に氣體 B が最後の状態に達したものとした時吸収する熱量を Q とする。外力 p' がなされた仕事を W' , 外力 p がなされた

仕事を W , 変化前後の氣體の内部エネルギーを夫々 U_1, U_2 とすると(28.1)により

$$JQ - W = U_2 - U_1$$

$$JQ' - W' = U_2 - U_1$$

である。故に兩邊を邊々相引けば

$$J(Q - Q') = W - W'$$

となる。然るに $p > p'$ であるから $W > W'$ となり従つて

$$Q > Q'$$

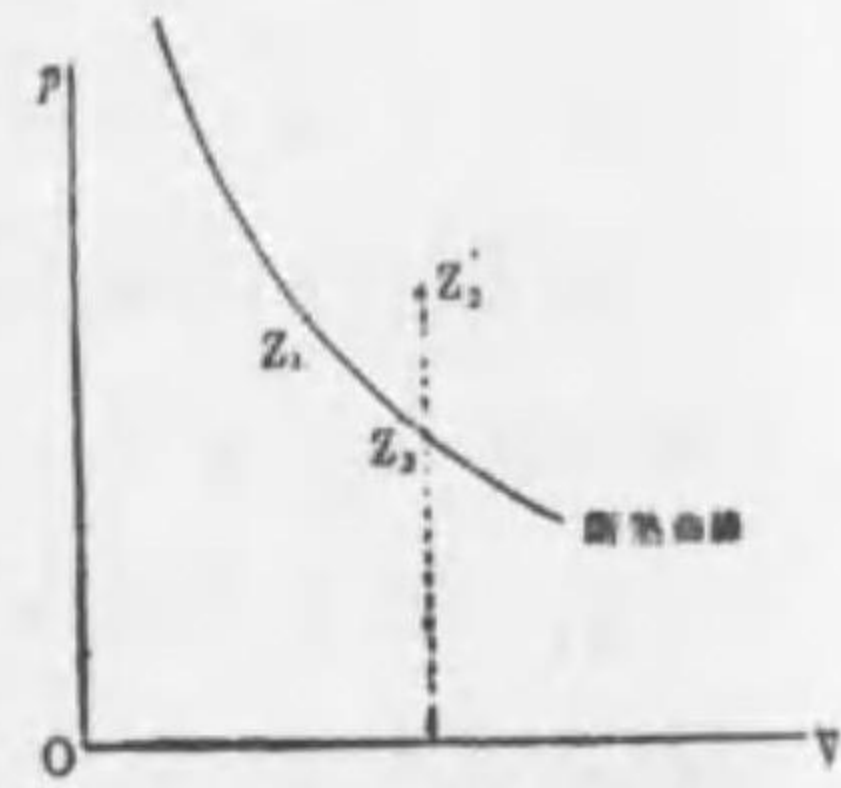
となる。今の非可逆變化に於て氣體のエントロピーの増加は $\frac{JQ}{T}$ である。熱源は體積をかへないからその内部エネルギーを JQ' だけ失つてゐる。従つてそのエントロピーの減少は $\frac{JQ'}{T}$ である。故に全體のエントロピーは

$$\frac{JQ}{T} - \frac{JQ'}{T} = \frac{J}{T}(Q - Q') > 0$$

だけ増加する。

壓力が釣合はず斷熱的に膨脹した場合を考へよう。

最初の状態を Z_1 と名付け、最後の状態を Z_2 と名付ける。若し壓力が釣合つて膨脹したならばその時到達するであらう所の最後の状態を Z_2' とする。



第 125 圖

* 氣體のエントロピーの増加が $\frac{JQ}{T}$ なることに注意。之はエントロピーの定義を考へれば間違ふことはない。エントロピーは状態のみにより定まり變化の仕方にはよらない。變化の仕方が異つても變化前後の状態が一定ならばエントロピーの増減は常に一定である。

變化 $Z_1 \rightarrow Z_2$ のとき外壓力がなされた仕事を W , 變化 $Z \rightarrow Z_2'$ のとき外壓力がなされた仕事を W' , Z_2 及び Z_2' に於ける氣體の内部エネルギーを夫々 U_2 及び U_2' とすると(28.1)により

$$U_1 - U_2 = W$$

$$U_1 - U_2' = W'$$

である。之等を邊々相引くと

$$U_2' - U_2 = W - W'$$

となる。然るに壓力が釣合はない場合は外壓の方が氣體の壓力より小さいから $W > W'$ である。故に $U_2' > U_2$ となる。即ち氣體は Z_2 に於けるよりも Z_2' に於ける方が内部エネルギーを多く有する。 Z_2' と Z_2 は體積が等しいから Z_2' の方が Z_2 よりも温度が高い。故に Z_2' は Z_2 よりも pV 圖表で上にあり Z_2' は Z_2 の乗つてゐる斷熱曲線より右側の斷熱曲線上に乗つてゐる。 Z_1 と Z_2 は同じ斷熱曲線上に乗つてゐてエントロピーに差がない。故に Z_2' に於ける氣體のエントロピーは Z_1 に於ける氣體のエントロピーよりも大である。この變化にあづかつた他の物體は熱力學的變化を受けてゐないものとすれば全體のエントロピーは増加してゐる。氣體が真空中に噴出膨脹した場合は外壓力が零の場合として上の場合に含まれる。又摩擦が存する場合も上の場合に含まれる。上には膨脹の場合の

* 之は可能である。如何となれば外壓は錘によつて作り得るからである。

みを考へたが壓縮される場合も同様に非可逆變化の場合にはエントロピーが増加する。

最後に温度の異なる二物體間に熱が移動する場合を考へよう。このとき二物體の體積は不變で變化の間に二物體の温度は夫々一定なものとする。移動した熱量を Q とし高温の物體の温度を T_2 、低温の物體の温度を T_1 とすると全體のエントロピーは

$$\frac{JQ}{T_1} - \frac{JQ}{T_2} > 0$$

だけ増加する。

非可逆變化は上に述べた三つの變化の組合されたものと考へることが出来るから非可逆變化の場合には變化にあづかつたすべての物體のエントロピーの總和は常に増加する。

かくて可逆變化は變化にあづかつた物體のエントロピーの總和を不變にする様な變化であり、非可逆變化は之を増加せしめる様な變化であると考へることが出来る。一般に自然に起る變化は非可逆變化であるから自然に起る變化は必ず變化にあづかつた物體のエントロピーの總和を増加する。

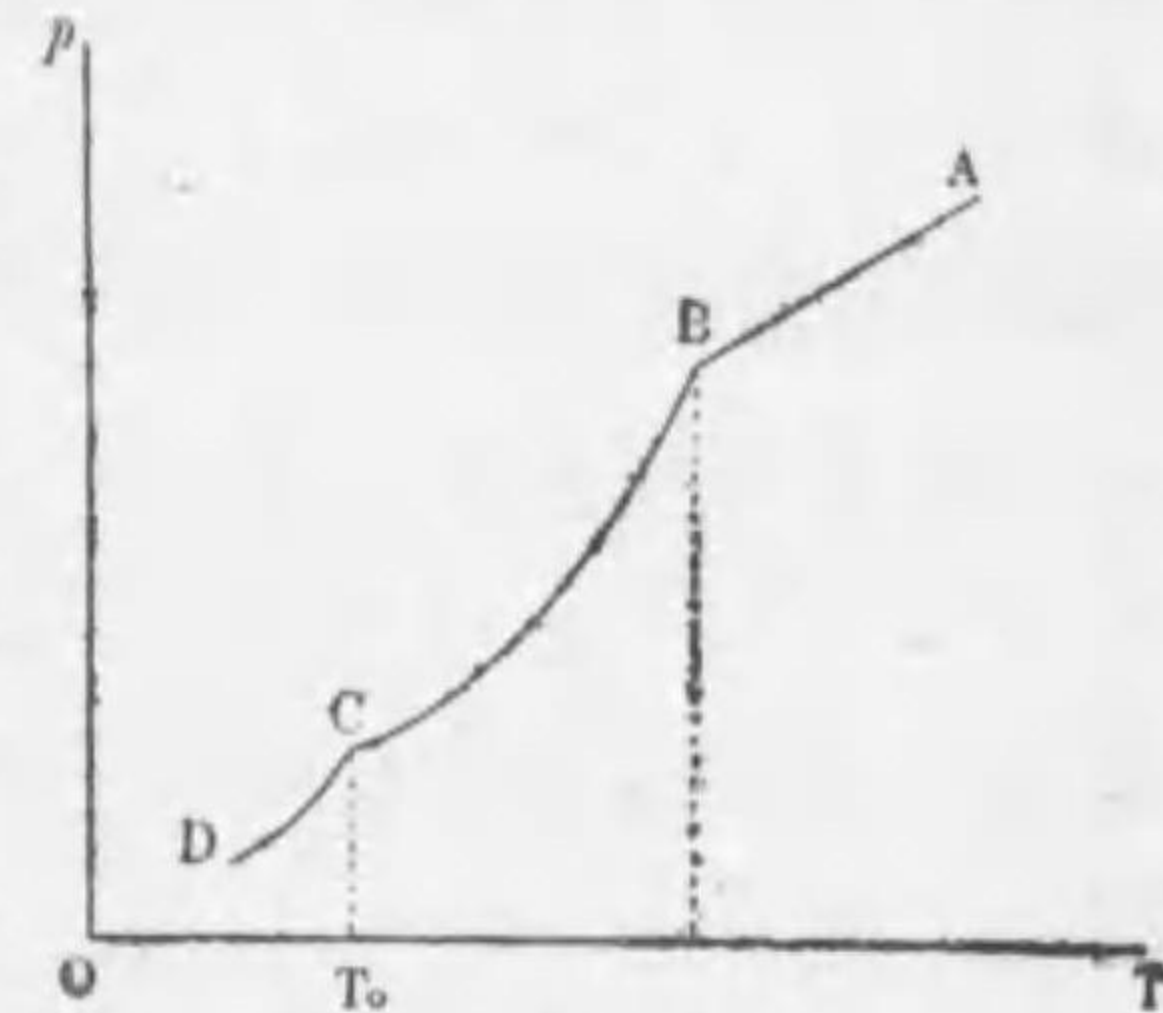
故にある獨立した物體系の二つの状態 Z_1, Z_2 のエントロピー S_1, S_2 を比較し、若し、 $S_1 = S_2$ ならば Z_1 から Z_2 迄可逆的に變化することが出来る。従つて自然に $Z_1 \rightarrow Z_2$ なる變化が起ることはない。若し $S_1 < S_2$ ならば Z_1 から Z_2 迄非可逆的に變化することが出来る。即ち自然に變化 $Z_1 \rightarrow Z_2$ の

起ることが可能である。若し $S_1 > S_2$ ならば Z_1 から Z_2 に變化することは不可能である。

§ 32 状態變化

冷却 物體の状態を變化させるには之を (i) 熱し又は冷却するか、(ii) 壓縮又は膨脹せしめる。熱する場合と冷却する場合とを比較すると大體逆の變化が起り、壓縮する場合と膨脹せしめる場合とを比較するとやはり大體に於て逆の變化が起る。

先づ第一に冷却する場合を考へよう。あまり壓力の大きくない氣體の一定量をと、之を一定の容器に密閉し體積を一定にして冷却するものとする。氣體の温度を横座標に、氣體の壓力を縦座標にとつた pT 圖表によつて考察を進める。氣體は始め第 126 圖の A の様な状態



第 126 圖

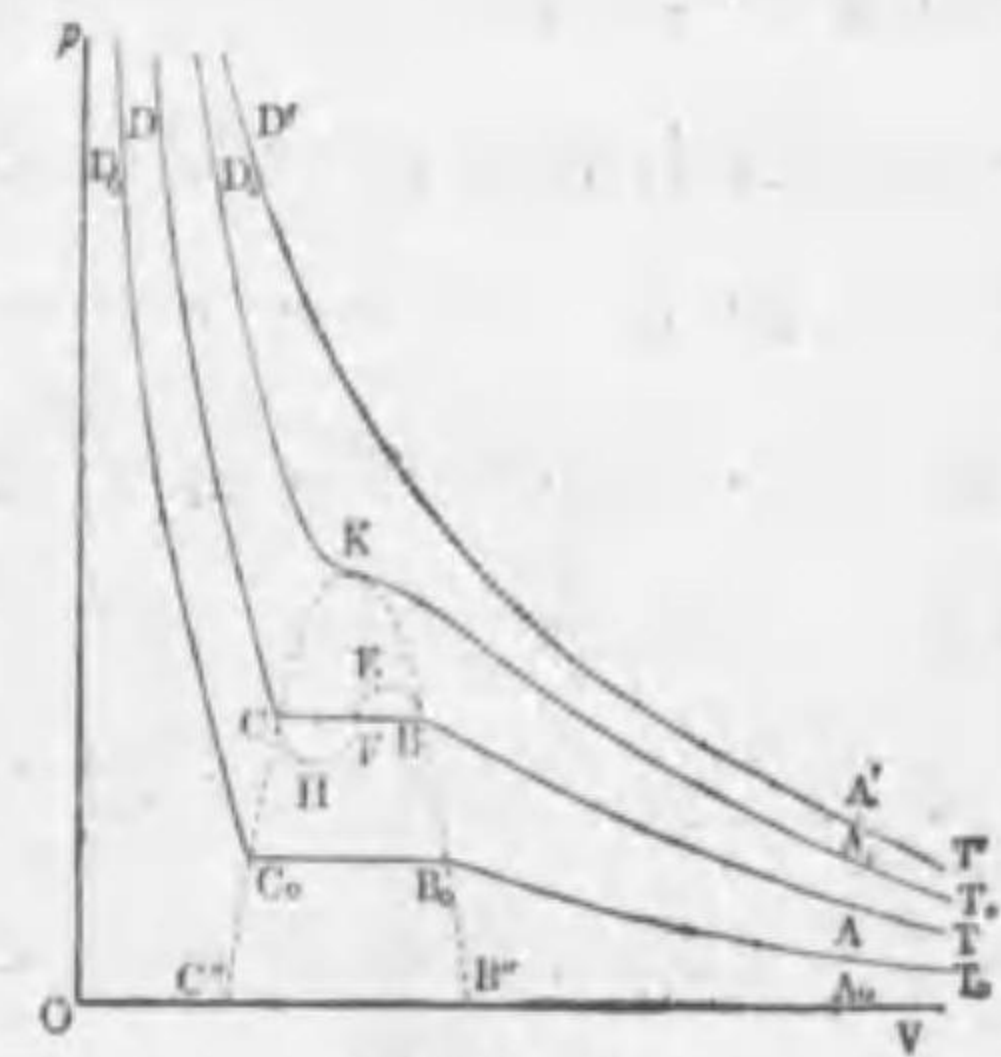
にあつたものとする。冷却により氣體の温度が降るにつれてその壓力は小さくなる。壓力は大體絶對温度に比例して減少する(状態式參照)。遂に、それよりも温度を下げれば氣體の一部が液化する様な特別の状態 B に達する。B 點から更に冷却すると氣體の一部が液化する爲に氣體の壓力は著しく減る。この状態の氣體は飽和蒸氣でその壓

少し状態 D_1 に達する。更に冷却すると温度は一定のまま氣體の一部が液化し體積のみ減少する。液化が全部終わった時は D_2 に達する。 D_1D_2 の間は第 127 圖では一點 D で表はされる。 D_1D_2 の温度 T_1 は即ち露點で之は第 127 圖から分る様に壓力によつて異なる。 D_2 から更に冷却すると再び温度が降り液體の體積は減少し遂に状態 M_1 に達する。之を更に冷却すると温度は一定のまま液體の一部が凝固し始め體積は減少し、 M_2 に至つて液體が全部凝固する。更に冷却すると再び體積が減少する。若し壓力が K の壓力 p_c よりも大きいときは液化は起らず、又若し壓力が P の壓力 p_c よりも小さいときは液化が起らず直接凝固が起る。水の様なものでは D_2M_1 の間で一度谷が出來凝固の際體積が増加するから M_2 が M_1 の上にある。 M_1M_2 の間の状態は第 127 圖では一點 M で表はされる。この様に内部が一様でない物體の状態は必ずしも p, V, T の任意の二つでは表はされない。併し若し p と V とをとれば之で上の如き物體の状態はよく表はされる。

M_1M_2 の温度は即ち融解點で、之は第 127 圖から分る様に壓力によつて異なる。第 127 圖の曲線 PR は融解點が壓力によつて變る様子を表はしてゐる。従つて若し p を横座標にとれば之は融解點曲線を表はす。上に述べた變化は正常の場合で、同じ物體が異常の變化をすることもある。例へば A_2 から D_1 に達したとき極めて徐々に冷却すると變化が D_1D_2 に沿うて進まず A_2D_1 を延長した曲線 D_1C_1 に

沿うて少しく進むことがある。即ち氣體は飽和以上の濃さになる。この状態を過飽和又は過冷却の状態といふ。大氣の温度が降つて水分が飽和以上に含まれる様になつても水滴の生じない状態は之に屬する。又 D_2 から M_1 に達したときにも同様に變化が M_1C_2 の方向に進み凝固が起らない場合がある。之も過冷却の状態といひ水に於てよく見る現象である。逆に M_1 から D_2 に進むとき氣化が行はれずして液體のまま T_1 以上に熱せられることがある。之を過熱の状態といひ水の突沸は之に原因する。

壓縮 次に壓縮する場合を考へる。一つの物質からなる一定量の氣體を温度を一定にして壓縮したものとする。この變化は等温變化であるから pV 圖表では等温曲線であらはされる。第 129 圖に於て温度 T の氣體を状態 A から壓縮すると等温曲線に沿うて B に達して氣體は飽和の状態となる。更に壓縮すると一部が液化し氣體の壓力は増加しない。この時の壓力は即ち飽和蒸氣壓である。遂に全部液化する點 C に達し、之からは全部が液體であるから少しの體積の變化にも物體の壓力は著しく増加する。若し温度が三重點の温度 T_c (第 127 圖参照) 以下ならば液化の代りに凝固が起つて氣體は直接固體に變る。又温度が臨界

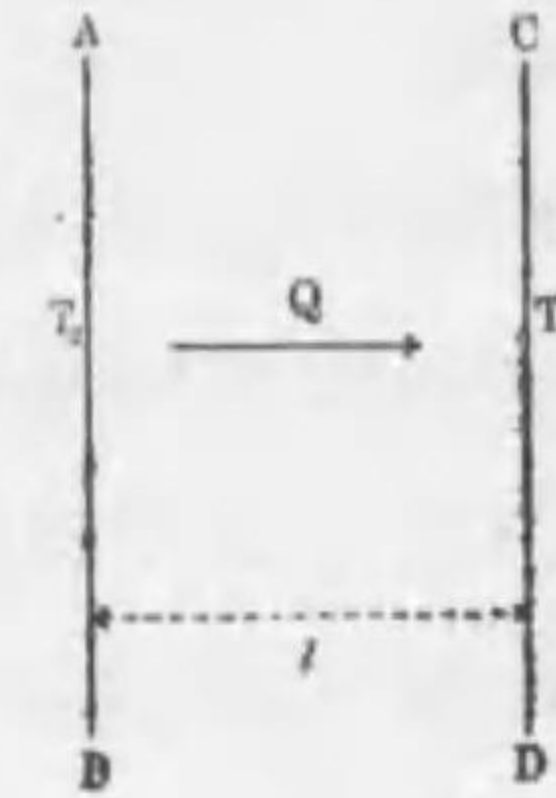


第 129 圖

温度 T_c に近づくと従ひ、B と C とは近より T_c に至つて BC は重つて K となる。K は即ち臨界点である。B, C の軌跡を圖の點線 $B''B, BKCC, C''$ で表はし、温度 T_c の等温曲線を A_cKD_c 、温度 T_1 の等温曲線を $A_1B_1C_1D_1$ で表はせば點線 $B''KC''$ 内では物體は一様でなくその外では一様である。 $A_cKB_1A_1$ 内の氣體を壓縮すると液化し、 A_1B_1B'' 内の氣體を壓縮すると凝固する。蒸氣といふのは A_cKB'' 内の氣體の事である。之以外の點の氣體は壓縮しても液體とならず次第に濃い物體となる。温度 T の等温曲線 ABCD の B と C の間で圖の様な點線 BEFHIC をひくと ABEFHICD は大體ファンデルワールスの状態式を表はす曲線となる。ファンデルワールスの状態式は内部が一様な物體についてのものであるから之が $B''KC''$ 内で實際と合はないことは當然である。若し物體が一様なまゝで状態が變化するならば $B''KC''$ 内でもファンデルワールスの状態式は大體あてはまる。例へば圖の BE 部で表はされる状態は過飽和の状態であり、CH 部で表はされる状態は過熱の状態と同様のもので異常變化として實現し得るものである。HE 部の状態は不安定で實現不可能である。過飽和過冷却過熱の状態は實現し得るけれども安定でなく一寸した機械的の刺激に對してもその状態はこわれて正常状態にもどるもので之を準安定の状態といふ。

§ 33 熱の移動

傳導 一つの物體中の二つの部分の温度が異るときは熱は傳導によつて高温部から低温部に移動する。今物體の中の一つの方向にだけ温度が異り之と直角の面内では温度が一様なものとする。この面を等温面といふ。第 130 圖に於て AB を高温度 T_2 の等温面とし、CD を低温度 T_1 の等温面とする。AB と CD の距離を l とし、温度の變り方が一定なものとする



第 130 圖

を温度勾配といふ。實驗の結果によると

$$\frac{T_2 - T_1}{l}$$

單位時間に等温面の單位面積を通して流れる熱量は温度勾配に比例する。

後つて單位時間に等温面の單位面積を通して流れる熱量を Q とすると

$$Q = k \frac{T_2 - T_1}{l} \quad (3.1)$$

が成立する。この時常數 k を考へる物質の熱傳導度といふ。種々の物質について熱傳導度をあげると次表の様である。但し單位は熱をカロリー、温度を $^{\circ}C$ 、長さを cm、時間を sec で表はす。

物 質	温 度	k	物 質	温 度	k
銀	18	1.006	水 銀	0	0.0148
銅	18	0.918	水	0	1.5×10^{-3}
鐵	18	0.161	空 氣	0	5.3×10^{-5}
ガラス	0	3×10^{-3}	水 素	0	3.8×10^{-4}
ニボナイト	20	0.14×10^{-3}	炭酸ガス	0	3.3×10^{-5}

ニュートンの冷却の法則 室内にある高温の物体は傳導、輻射、對流の三つの方法で熱を失ひ、次第に低温となる。この時空氣の熱傳導度は極めて小さいから物体の冷却は主として後の二つの方法によるのである。室内の高温の物体 A から輻射によつて熱が失はれると同時に室内の他の物体から輻射によつて物体 A に熱が来る。従つて物体 A が次第に低温になるのは對流輻射等によつて失はれる熱の方が輻射によつて與へられる熱よりも大きいからである。若し物体 A の温度が室温と同じであつたならば A の温度は變らない。この時は明かに對流は起らない筈であるから輻射によつて物体 A に出入する熱量は等しい譯である。物体 A の温度 T が室温 T_0 よりも少しく高い時、A が單位時間に失ふ熱量 Q は T と T_0 の差に比例する。即ち k を比例常數とすれば

$$Q = k(T - T_0) \quad (33.2)$$

である。之をニュートンの冷却の法則といふ。

ステファンボルツマンの法則 物体が温度の爲に輻射線を出すことを温度輻射といふ。物体が輻射するエネルギーがその物体の温度と共にどう變るかといふことについては色々の人々が研究した。すべての波長の輻射線を完全に吸収する物体を黒體といふ。ステファン Stefan 及びボルツマン Boltzmann の研究によると黒體の單位表面積から單位時間に輻射するエネルギーの量 E はその物体の絶對温度 T の四乗に比例する。即ち σ を常數とすると

$$E = \sigma T^4 \quad (33.3)$$

である。之をステファンボルツマンの法則といふ。多くの測定の結果によると

$$\sigma = 5.30 \times 10^{-8} \quad (\text{單位 C.G.S.}^\circ\text{K})$$

である。従つて逆に E を測れば黒體の温度 T を知ることが出来る。(§27 參照) 太陽を近似的に黒體とみなすときは (33.3) を使つて太陽の温度を知ることが出来る。地球上で太陽の方向に垂直な平面の單位面積に 1 分間に到達する熱量は 2 カロリーである。之より太陽表面の 1cm^2 から 1 sec 間に輻射するエネルギーを計算すると

$$6.45 \times 10^{10} \text{ エルグ}$$

となる。之を (33.3) に入れると

$$6.45 \times 10^{10} = 5.30 \times 10^{-8} T^4$$

となり

$$T = 5.91 \times 10^3$$

を得る。即ちこの計算によると太陽表面の温度は約 5900°K である。

ウーエンの變位則 物体を熱すると上述の如く段々輻射エネルギーの量が増加するが又最も多く輻射する輻射線の波長も段々に變る。例へば鐵を 500°C 位に熱すると赤く光る。即ち可視光線は赤色の所を多く出してゐる。更に温度をあげると波長の短い光が出始める。例へば 1000°C 以上にすると白く光り始める。即ち可視光線の全

* 之を太陽常數といふ。

領域の光を出してゐる。物体の温度を T とし、その最も多く出す放射線の波長を λ_m とするとウィーン Wien によれば λ_m と T とは反比例する。即ち C を常數とすると

$$\lambda_m T = C \quad (33.4)$$

である。之をウィーンの變位則といふ。 C の値は黒體に對しては

$$C = 0.294 \text{ cm} \cdot \text{K}$$

又みがいた白金では

$$C = 0.263$$

となつてゐる。

之からも亦太陽の温度を推定することが出来る。太陽スペクトルに分布されてゐるエネルギーを地球上で測定した結果ラングレー Langley は

$$5.5 \times 10^{-5} \text{ cm} < \lambda_m < 6.0 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

なることを確めた。大氣の吸収の仕方は波長の小なるもの程著しいから之を考慮に入れるとラングレーの結果から恐らく

$$\lambda_m = 4.9 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

が最も信頼すべき値であらうとされてゐる。太陽に對する C の値は前述の二つの C の値の間にあるべき筈で、之等の C 及び λ_m の値を(33.4)に入れると

$$5.37 \times 10^3 < T < 6.00 \times 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$$

となり、大體ステファンボルツマンの法則より得たものと一致する。従つて太陽表面の温度は約 6000°K といふことになる。

第四章 電氣 磁氣

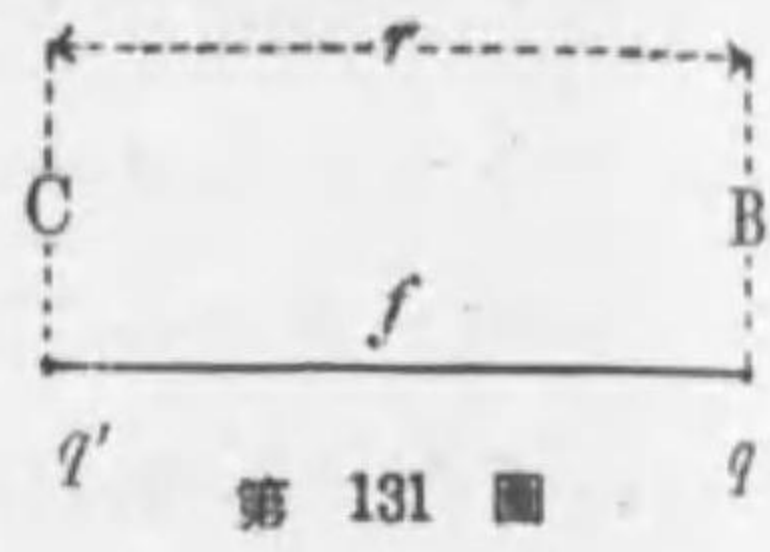
§ 34 電 場

クーロンの法則 同種の電氣若しくは異種の電氣の間には斥力又は引力が作用する。この力は距離の自乗に反比例して變化する。之即ちクーロン Coulomb の電氣の法則であつてニュートンの萬有引力の法則とよく似てゐる。キャベンディッシュ及びマクスウエルの研究によればクーロンの電氣の法則は極めて正確に成立することが知られてゐる。又最近原子の研究の結果クーロンの法則が極めて小さい電氣量につき極めて小さい距離迄も成立することが知られてゐる。

電氣の場合に於ても物体の場合の様に問題を簡單にする爲一點に電氣が集つたものを考へ之を點荷電といふ。今一つの點荷電 A を固定しておいてその近傍の一定點に他の點荷電 B をおいてその間に作用する力 f_1 を測る。次に B を去り他の點荷電 C を同じ位置に置いてその間に作用する力 f_2 を測る。この時 f_1 と f_2 との割合を以て點荷電 B と C との有する電氣量の割合とする。従つて A を去つて B と C とをおいた時その間に働く力を f とし B の電氣量を q , C の電氣量を q' , B と C との距離を r とし k を常數とすればクーロンの法則によつて

$$f = k \frac{qq'}{r^2}$$

となる。 q と q' とが等しい様 (a) $\overset{B}{\bullet}$ $\overset{A}{\bullet}$
 にしておいて B と C とを真空
 中におきその間の距離を 1cm
 とし、その間に作用する力が 1
 ダインのときの B と C との荷 (b) $\overset{C}{\bullet}$ $\overset{A}{\bullet}$
 電量を電氣量の單位とする*
 この單位を使ふと $q=q'=1, r=1$
 のとき $f=1$ であるから $k=1$ と (c)
 なり、クーロンの法則は真空中
 に於て $f = \frac{qq'}{r^2}$ (34.1)



で表はされる。この様な單位を電氣量の C.G.S. 靜電單位
 といふ。實用上に於ては後に述べる様に之の約 3×10^9 倍
 の單位クーロンを使ふ。(§44 及び §45 参照) 以下 C.G.S. 靜電
 單位を使つて考察を進める。

電氣量 q の一つの點荷電が一定點 O にあつたものとす
 る。この近傍に點荷電をもつて來る
 と之に力を及ぼすから考へる點荷電
 は O の周りに一つの力場を作る。(§
 7 参照) 之を電場といひ、電場においた
 單位點荷電に作用する力を電場の強
 さといふ。従つて O から r の距離の電場の強さ E は



* 單位の電氣量といふ場合には常に陽電氣を指し陰電氣の方は負號をつけて表はす。故に單位の陰電氣は -1 と表はす。
 ** 若し q が正のときは陽電氣、負のときは陰電氣を表はすことに注意。

$$E = \frac{q}{r^2} \quad (34.2)$$

である。そして電場の方向は二つの點荷電を結ぶ方向で
 向きは O から外向きである。若し q が負ならば E は負と
 なりこの時は力は O の方に向いてゐる。之より明らかな
 る如く大いさ E の電場内に點荷電 q をおいた時之に働く
 力 f は

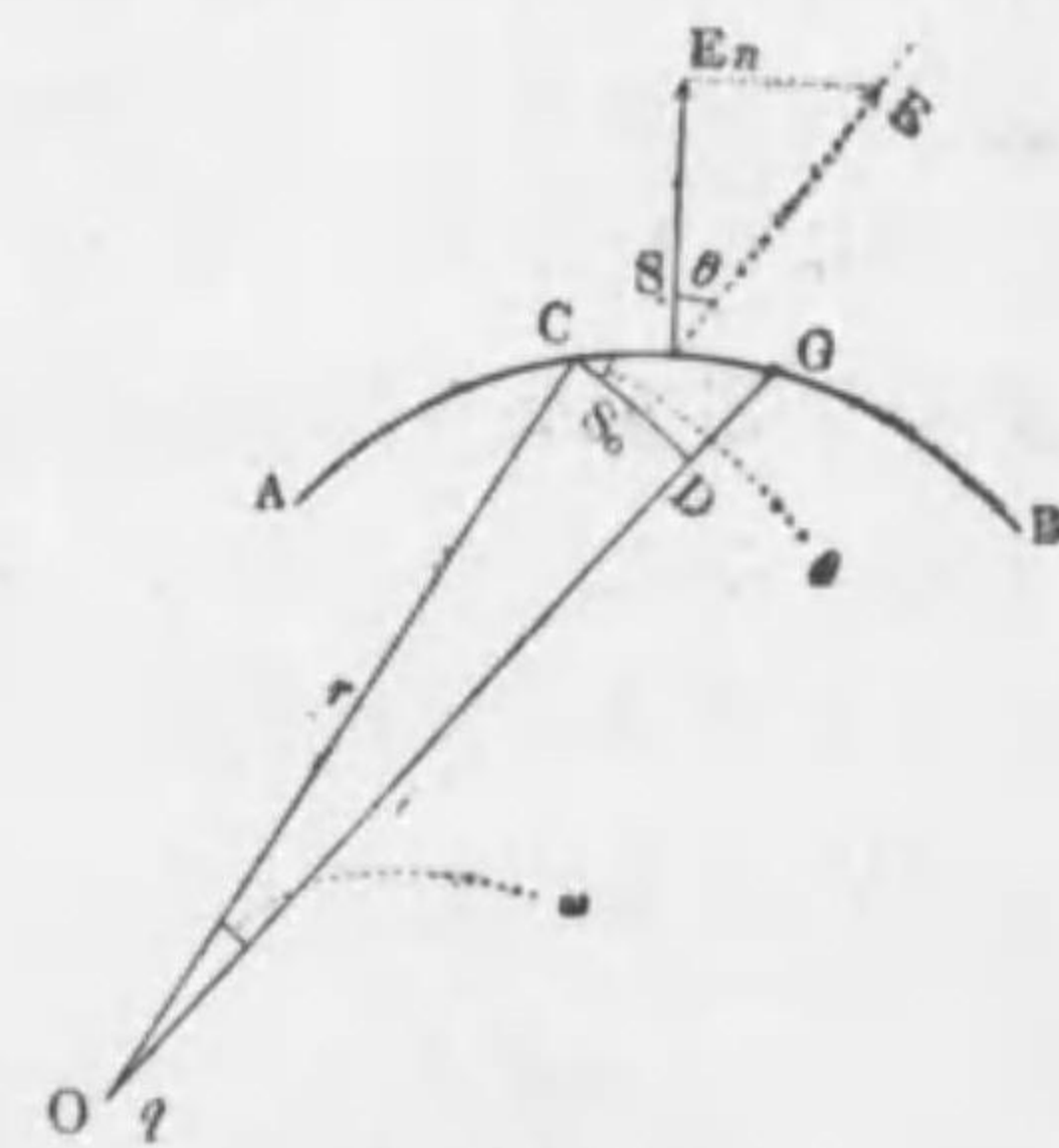
$$f = qE \quad (34.3)$$

で與へられる。§7 に述べた重力場の場合と同様に電場
 にはポテンシャルを考へることが出来る。之を電位、ま
 ちはぬときは單にポテンシャルといふ。之を ϕ とすると
 (7.4) と同じ様に

$$\phi = \frac{q}{r} \quad (34.4)$$

となる。多くの點荷電による電位は各荷電による電位を
 加へ合はせたものである。實用上では電場内の一點から
 他の一點迄 1 クーロンの點荷電を動かした時の仕事が
 10^7 エルグ = 1 ジュールならばその二點間の電位の差を 1 ボル
 トであるといふ。

ガウスの定理 第 133
 圖の様に一點 O に點荷電 q
 があるものとする。AB を
 任意の表面とし、AB 上の任
 意の點 C の近傍に極めて小
 さいこの表面の一部 CG を
 考へ、この面積を S とする。



OCの長さを r とし、 r を半径、Oを中心とする球面を描き、CGを底とし、Oを頂点とする錐形部がこの球面から切り取る部をCDとし、その面積を S_0 とする。Oに對して外向きにC點でABの法線を立て之とOCとのなす角を θ とする。然るときはCGとCDとのなす角も θ である。今C點に於ける電場の上記の法線方向の成分を E_n とし $E_n S$ の値を計算してみよう。 $E_n = E \cos \theta$ であるから(34.2)により

$$E_n S = E \cos \theta S = \frac{q}{r^2} S \cos \theta$$

となる。然るに大體に於て $S \cos \theta = S_0$ であるから

$$E_n S = \frac{q}{r^2} S_0$$

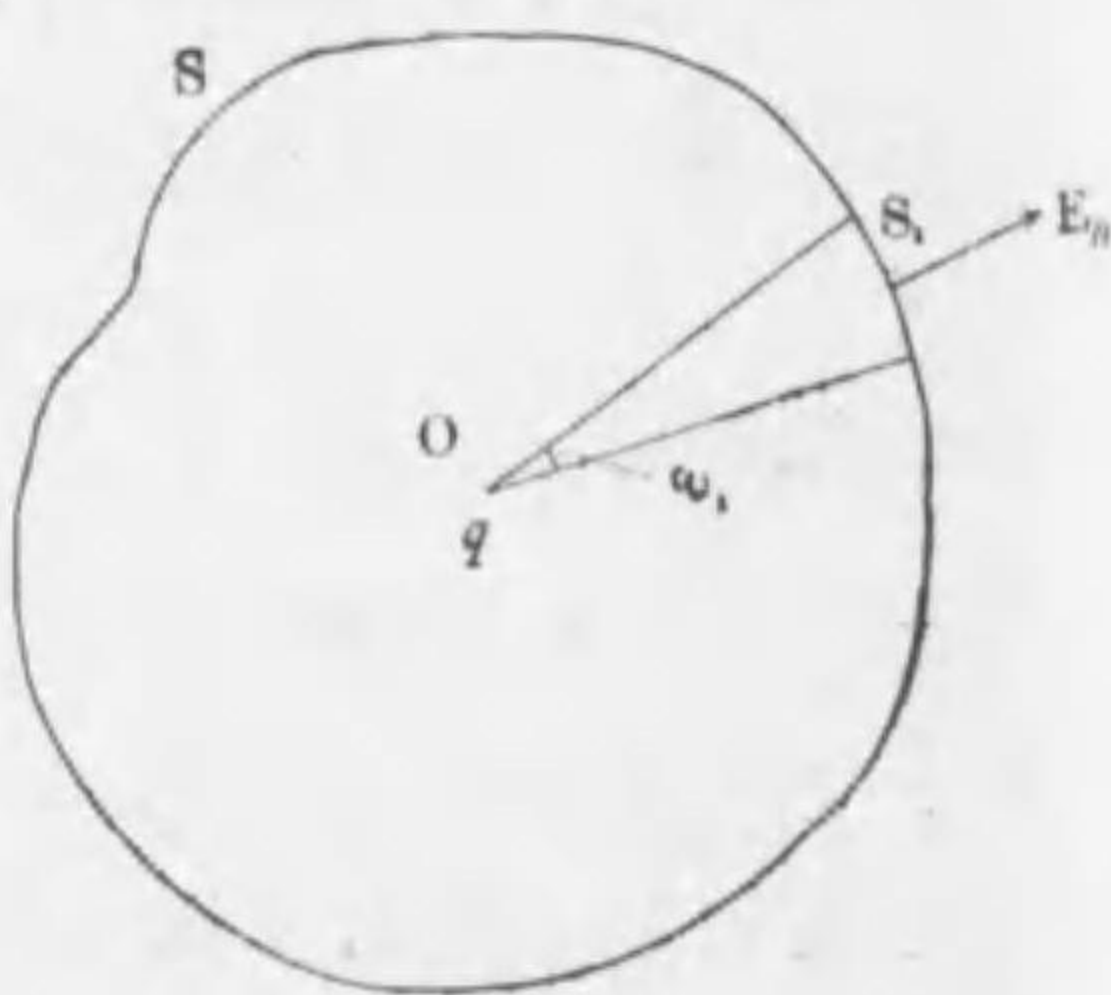
となる。 $\frac{S_0}{r^2}$ は半径に無關係の値であつて S_0 がOに對して張る立體角と呼ばれる。之を ω とおくと

$$E_n S = q \omega \quad (34.5)$$

となる。

第134圖(a)の様にOを包む閉曲面Sを考へ之を S_1, S_2, S_3, \dots 等に細分し、之等の全體について $E_n S$ の様なものを作りそれ等の和を求めてみる。前の考察に於て表面ABは任意だから(34.5)は常に成立する。故に

$$E_n S_1 + E_n S_2 + E_n S_3 + \dots = q(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots)$$



第 134 圖 (a)

となる。然るに ω をOの周り全部について加へたものは球の表面積を半径の自乗で割つたものであるから 4π となる。故に上式の右邊は $4\pi q$ に等しい。(34.5)は近似的に成立するものであるから上式も近似的に成立つ。併し S_1, S_2, S_3 等を小さくしてその數を増せば兩邊は何程でも近くなる。故に極限に於ては等しい。而して極限に於ては上式の左邊は積分 $\int_S E_n dS$ で表はされるから結局

$$\int_S E_n dS = 4\pi q$$

なる等式を得る。若し閉曲面S内に q_1, q_2, \dots 等の多くの點荷電があるときはその各による電場について上の事が云へるから結局 $\int_S E_n dS$ は $4\pi(q_1 + q_2 + \dots)$ に等しくなる。

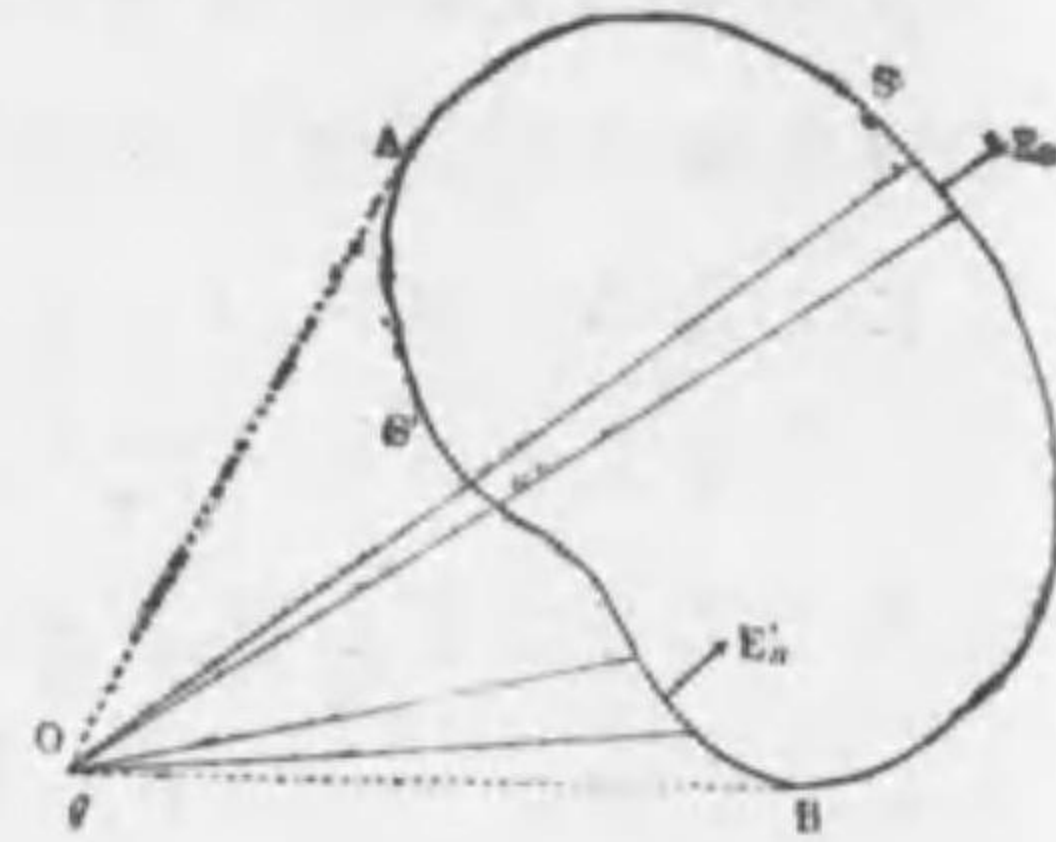
$q_1 + q_2 + \dots = \sum q$ と略記すれば

$$\int_S E_n dS = 4\pi \sum q \quad (34.6)$$

を得る。即ち電場内の任意の閉曲面上に於ける電場の外向き法線成分をその曲面全體について積分したものはその曲面内に含まれる荷電の總量の 4π 倍に等しい。之をガウス Gauss の定理といふ。

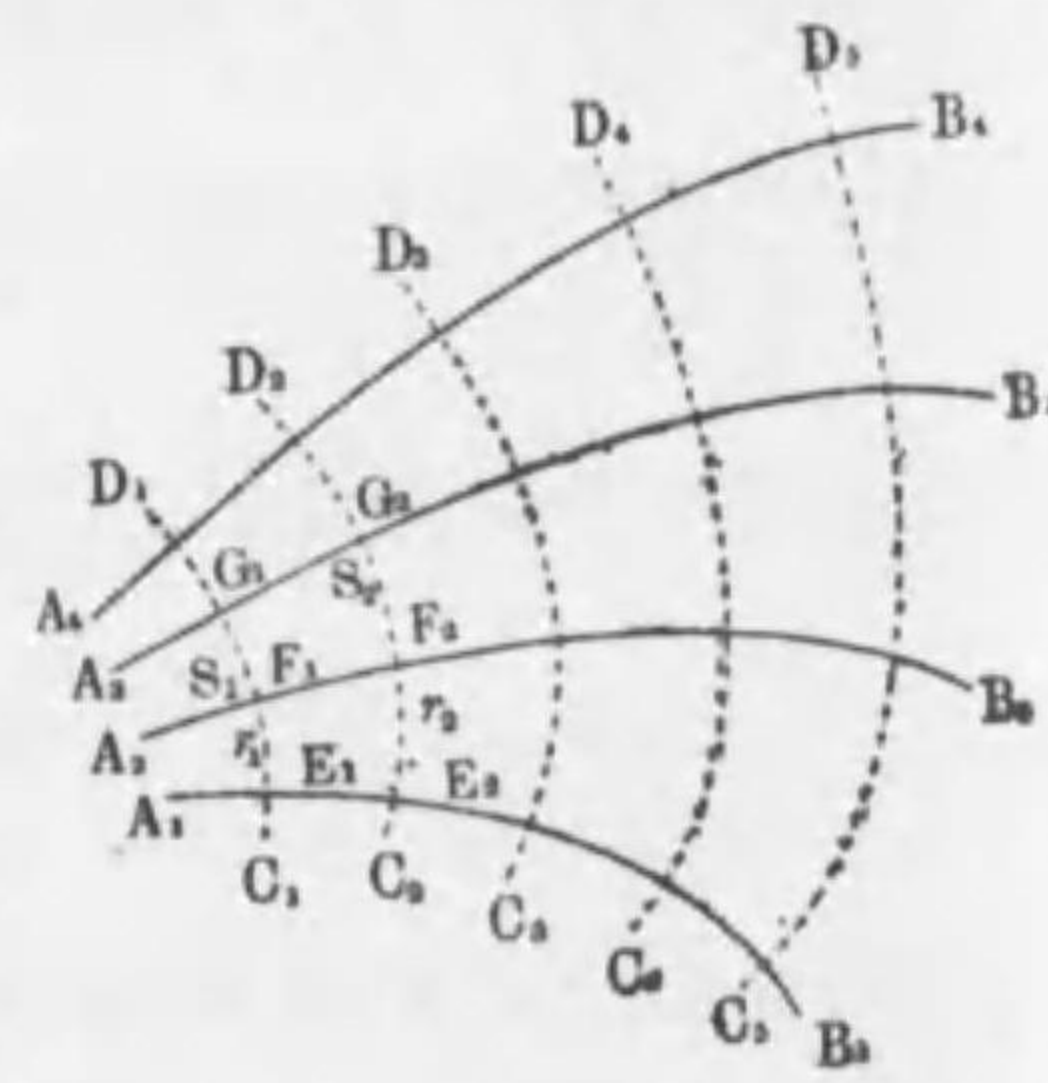
若し第134圖(b)の様に荷電が閉曲面の外にあるときは圖の様なABで曲面を二つの部 S, S' に分けるとSでは電場は閉曲面に對して外向であるが S' 内では内向である。故に S' については E_n が皆負になる。立體角の和 $\sum \omega$ はSでも S' でも同じであるからSについての積分と S' についての積分は絶對値が同じで符號が逆になる。従つて曲面

全體の積分は 0 となる。
 (34.6) に於ける $\sum q$ を閉曲面の内部にある荷電の和と解することにすれば(34.6)はこの場合にも成立し、従つてすべての場合に成立することになる。之は極めて大切な定理である。



第 134 圖 (b)

力線と等電位面 電場の中に曲線をひきその上の各点の電場の方向がその曲線に切する様にしたときこの曲線を電場の**力線**といふ。又電場内に於て相等的電位の点をつらねた曲面を**等電位面**といふ。一つの等電位面内にある曲線上では電位が一定であるから、この曲線に沿うて電位を微分すると必ず 0 となる。従つて等電位面に沿うては電場の成分はない((7.3)式参照)。即ち電場内にある点荷電に作用する力はその点を通る等電位面に垂直である。故に電場の力線は等電位面と直交してゐる。第 135 圖に於て實線 $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ 等を等電位面の切口とし、点線 C_1D_1, C_2D_2, \dots 等を力線とすると之等は互に直交し圖の様になる。 A_1B_1, A_2B_2, \dots 等の電位を夫々 $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ 等とし



第 135 圖

$\varphi_1, \varphi_2, \dots$ 等の差は皆同じものとする。上記の曲線の交點に圖の如く符號をつけ $E_1F_1=r_1, E_2F_2=r_2, F_1G_1=s_1, F_2G_2=s_2, \dots$ とすると各点の電場は、

$$E_1 \text{ に於ては } \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_1}$$

$$E_2 \text{ に於ては } \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_2}$$

$$F_1 \text{ に於ては } \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{s_1}$$

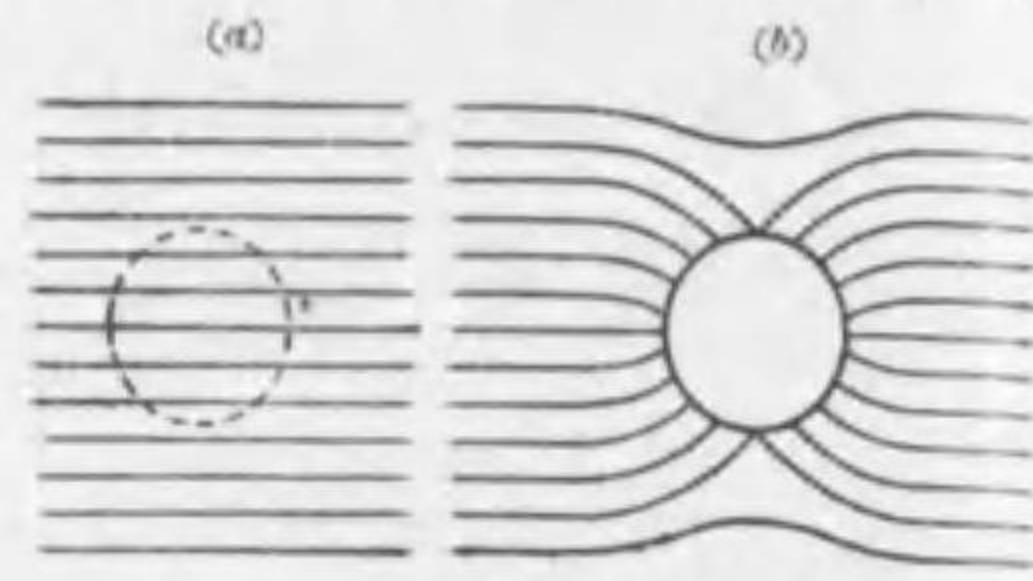
$$F_2 \text{ に於ては } \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{s_2}$$

の極限である。従つて $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ 等の差を充分小さくしておけば之等の値は E_1, E_2, F_1, F_2 等に於ける電場の値に近い。今は $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2$ の様にとつてあるから之等の点の電場は r_1, r_2, s_1, s_2 等に逆比例することになる。即ち一定の電位差を有する等電位面が密集してゐる所程電場は大きい。而して若し φ_2 の方が φ_1 よりも大きいならば電場は φ_2 等電位面から φ_1 等電位面の方を向いてゐる。之は § 7 にも説明した所で等電位面の切口の曲線は等高線式地圖に於ける等高線に相當してゐる。凹凸のある地上に水を流すとき水は高い等高線の方から低い等高線の方に向つて力を受ける。この力は斜面の勾配に比例するが電場もやはり電位の勾配に比例する。

§ 35 導 體

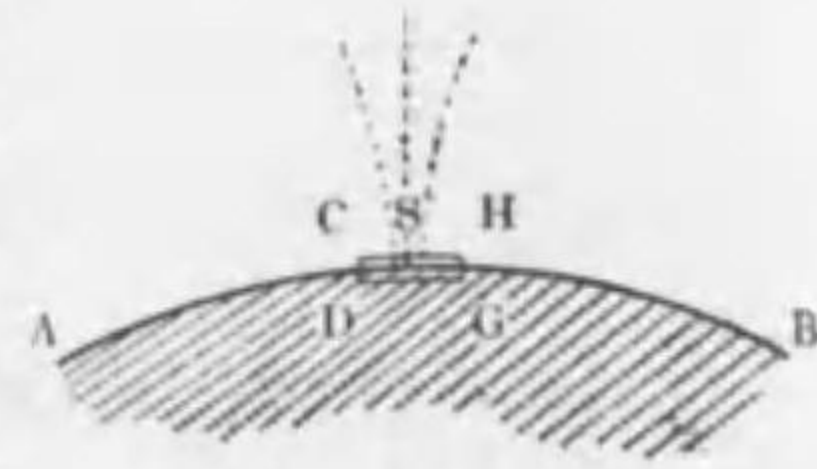
導體表面の電場 導體内にある電氣は力を受ければその方向に移動する。故に電氣の流れのない導體内では

電場はない。従つて導體の各點は等電位であり、その表面も亦等電位面である。上に述べた様に電場は等電位面に垂直であるから導體表面の電場は表面に垂直である。従つて力線が平行な直線から成つてゐる第 136 圖(a)の様な電場の中に球狀導體をおけば第 136 圖(b)の様になる。次にそ



第 136 圖

の強さを求めよう。第 137 圖に於て AB を導體面とし、その外は真空とする。同種の電氣は反撥するから導體に與へられた電氣はすべて表面に分布する。AB 上の電氣の表面密度を σ とし、側面



第 137 圖

が AB 面に垂直で兩底面が AB に平行、且つ AB の一部を内部に含む極めて小さい圓錐を考へる。その切口の面積を S 、CH 面上の電場を E としこれにガウスの定理を適用する。CH 面で電場は面に垂直、圓筒の側面で電場は面に平行、導體内部で電場は零、圓錐内部の電氣量は σS であるから

$$ES = 4\pi\sigma S$$

$$\therefore E = 4\pi\sigma \quad (35.1)$$

を得る。この關係は圓錐を小さくする程完全に成立し、極限に於ては E は AB 面上の値となる。即ち導體表面に於ける電場の大きさは表面密度の 4π 倍である。

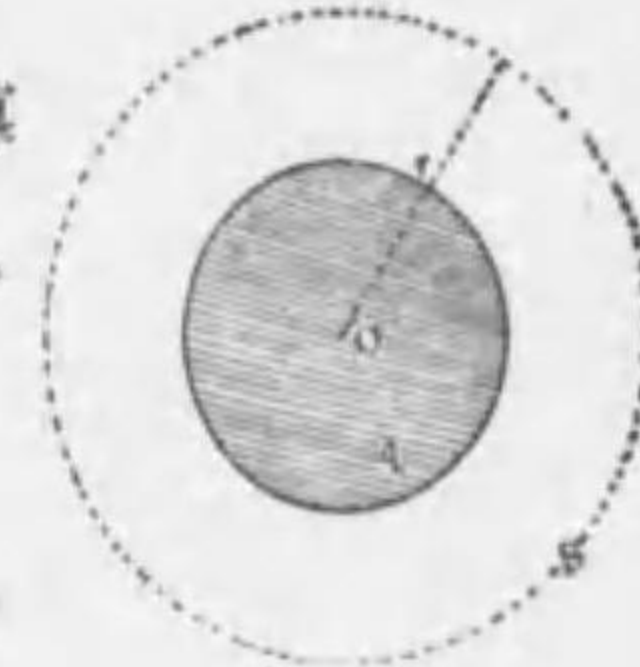
導體中にある空洞内の電場 導體内に空洞があるときその中に於ける電場を求める。空洞の内面は等電位面

であるから之に極めて近い所に之に沿うて閉じた等電位面 S を作ることが出来る。空洞の内面と S 面との電位差は各點に於て一定であるから電場は S に垂直である上にどこでも S の外を向いてゐるかどこでも内を向いてゐるかである。電場の外向の大きさを $+E$ 、 $E \geq 0$ とすると内部に荷電がないから、ガウスの定理により

$$\int_S E dS = 0,$$

となる。常に正又は零の量 E を積分して零となる爲には E 自身が零でなければならぬ。即ち導體中にある空洞内では電場は常に零である。故に導體で全く圍まれた空間内には外からの電氣力は作用しない。

荷電球狀導體による電場 球狀の導體に電氣量 q を與へたときその中心 O から r だけ離れた點の電場 E を求めよう。導體と同心で半径 r の球面 S を考へる。



第 139 圖

この上の各點は皆條件が同じであるから、電場はその大きさが等しく且つ半径の方向に向いてゐなければならない。従つて S 上にガウスの定理を適用すると

$$\int_S E dS = 4\pi q,$$

* 若し E が中向ならガウスの定理に於ける積分は負になるが右邊が 0 であるから負號を落して上の如き形に必ずなる。

然るに

$$\int_S E dS = E \int_S dS = E 4\pi r^2$$

故に

$$E = \frac{q}{r^2} \quad (35.2)$$

を得る。即ち中心に點荷電 q があるのと同じである。

電氣双極による電場 大きさの等しい正負の點荷電が極めて近距離に位置してあるものを電氣双極といひ、兩點荷電を結ぶ直線を電氣双極の軸といふ。兩點荷電の距離を s 、荷電の絶對値を q とし軸上で正荷電の外方 r の位置にある點の電場 E を求めよう。之は $+q$ によるものと $-q$ によるものを合はせればよい。即ち

$$E = \frac{q}{r^2} - \frac{q}{(r+s)^2}$$

である。今 s が r に比して極めて小さいものとすれば(之を $r \gg s$ とかく)二項定理により

$$\begin{aligned} (r+s)^{-2} &= r^{-2} \left(1 + \frac{s}{r}\right)^{-2} = r^{-2} \left(1 - \frac{2s}{r} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{r^2} - \frac{2s}{r^3} + \dots \end{aligned}$$

となるから大體に於て

$$E = \frac{2sq}{r^3}$$

となる。 sq を双極の電氣能率又は双極能率^{*}といふ。之を p とおくと

$$E = \frac{2p}{r^3} \quad (35.3)$$

* 之は丁度偶力の能率とよく似たものである。

である。 $-q$ の外方では明らかに E は負である。そこで $-q$ から $+q$ の方へ向く方向を電氣能率又は電氣双極の方向といふ。

小球導體外の點荷電による電場 O 點に半徑 a の極めて小さい球狀導體があり、之より r だけ離れた點 A に點荷電をおいたものとする。この



第 141 圖

時靜電感應によつて點荷電に近い方の球表面には點荷電と異種の電氣が、又反對側には同種の電氣が生じ、之等の二つはその量が等しい。従つて球内には一種の双極が出来る。理論的研究の結果によるとかくて生じた双極能率 p は次の如く與へられる。

$$p = \frac{a^3 q}{r^2} \quad (35.4)$$

故に之によつて生ずる A 點の電場は(35.3)により

$$E = \frac{2a^3 q}{r^5}$$

である。點荷電と球との引力 f は qE であるから

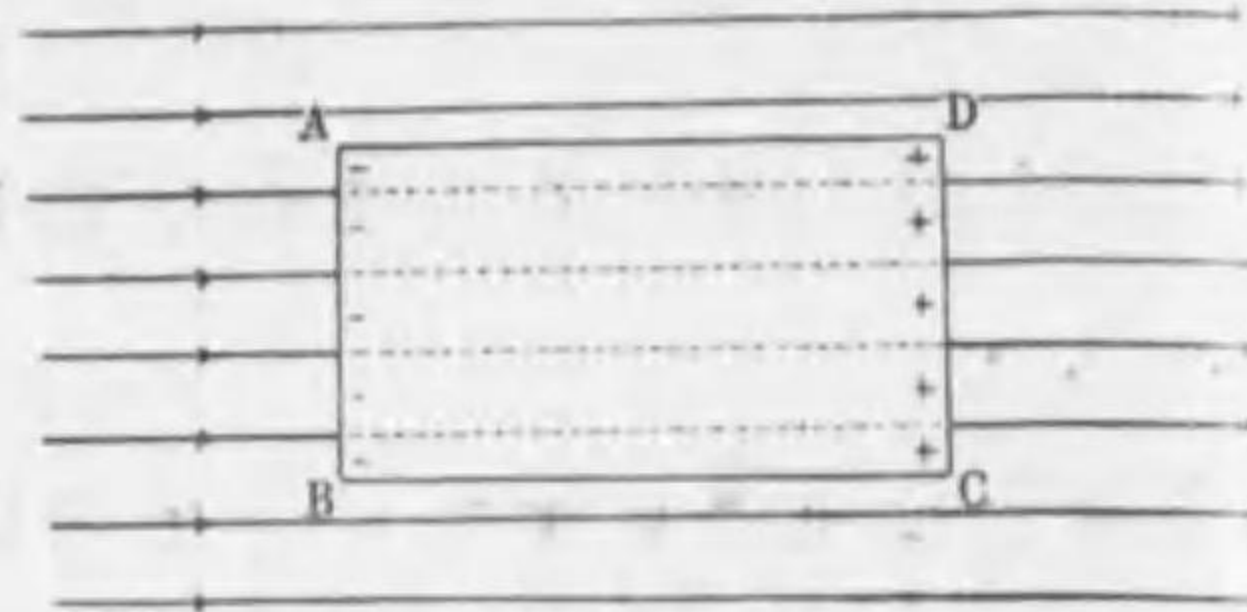
$$f = \frac{2a^3 q^2}{r^5}$$

となる。荷電物體の近傍に小物體があるときは之と全く同じではないが、之に似た様な事が起つて小物體は引かれるのである。

§ 36 絶緣體

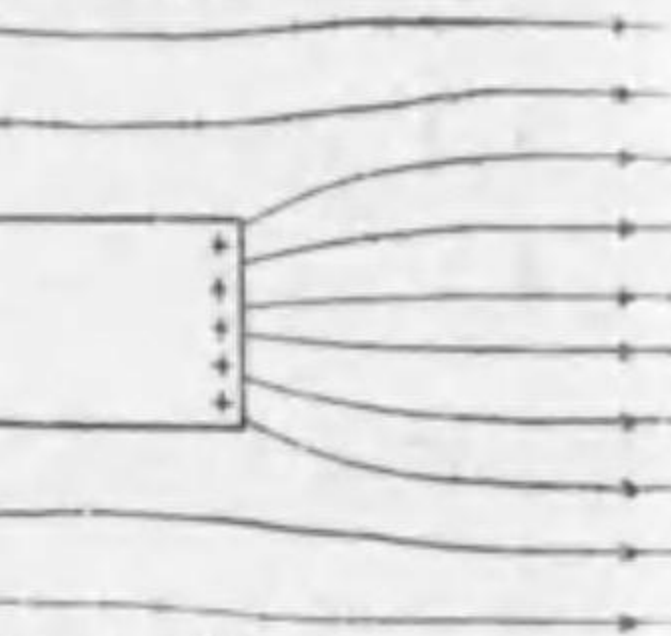
絶緣體内外の電場 電場内に絶緣體を置くと靜電感應によつてその兩端に異種の電氣が現はれる。第 142 圖

(a)の様に力線が平行でど
こも同じ大きさの電場の
中へ直方体の絶縁體
ABCDを切口ABを電場と
垂直にして入れると電場
の正の側の切口には正の
電氣が現はれ、負の側の切
口には負の電氣が現はれ
る。之等の電氣も電場を

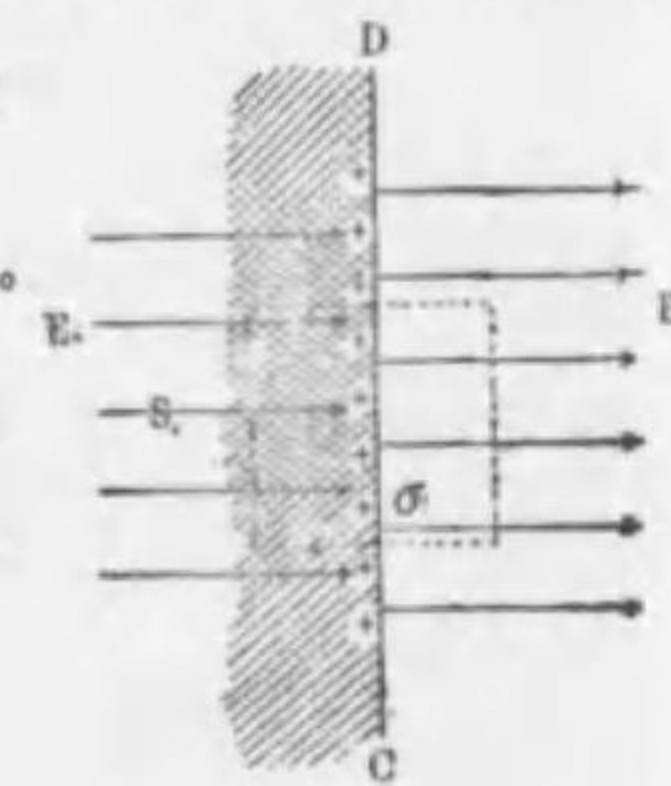


第 142 圖 (a)

作るからもとの電場にこの電場を加へ合せたものが今の
場合の電場である。従つて切口AB, DCの直ぐ外では電場
は始よりも強くなり, ABや DCの直ぐ内側では電場は始
めよりも小さくなる。従つて第 136 圖の様な導體程極端
にはならぬけれども一様な真空電場内に絶縁體を入れる
とその兩端では第 142 圖 (b)の様に力線が少しく集る。今
DCの直ぐ外側の電場を E_0 , 直ぐ内側の電場を E_1 , DC面に
現はれた電氣の表面密度を σ とし, 切口面積が S_1 , 側面が
電場に平行で DC面を含む直圓錐を考
へ之に對してガウスの定理を適用する。
然るときは導體表面の場合と殆んど同
じで唯異なる所は内部にも電場が存す
ることだけである。従つて



第 142 圖 (b)



第 143 圖

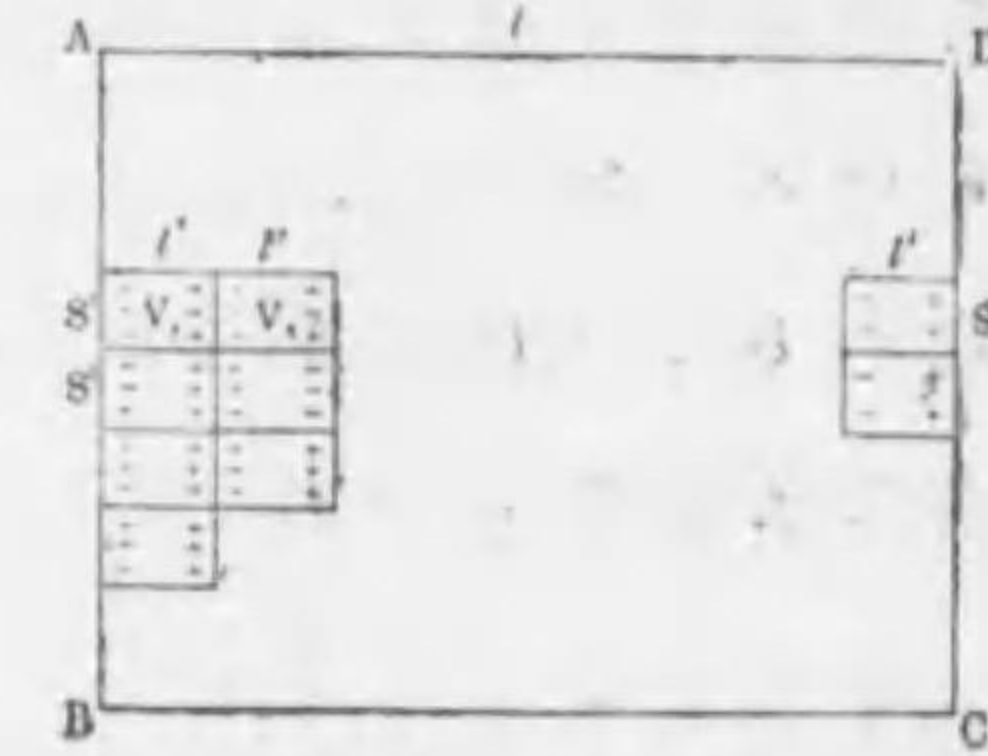
$$E_0 S_1 - E_1 S_1 = 4\pi \sigma S_1$$

*之を一様な電場といふ。

$$\therefore E_0 - E_1 = 4\pi\sigma \quad (36.1)$$

となる。即ち外の電場は中の電場よりも表面密度の 4π 倍
だけ大きい。

電氣偏極と電氣變位 今 ABCD を細かい直方體 V_1 ,
 V_2 等に細分しそれ等の切
口の面積を S' 長さを l' とし
その兩面に夫々 ABCD に生
じたと同じ様に表面密度が
 σ の正負の電氣を與へたも
のとする。然るときは AB



第 144 圖

面と DC 面とは夫々 $-\sigma$ と $+\sigma$ の表面密度の荷電がある
こととなり, 内部では相隣るものが互に相殺して荷電がな
いと同じになる。例へば V_1 の右側と V_2 の左側との荷
電は符號が逆で量が等しいから打消す。従つてかくの如
く考へたものと實際のものとは一致する。又實際にこの
様な分割を行つてもかくなる。之等 V_1, V_2, \dots 等は一種の
双極と考へられる。その電氣能率は之等の細部分の體積
を V' とすれば

$$l'(\sigma S') = \sigma(l'S') = \sigma V'$$

である。之等を全部加へ合はすと ABCD の體積を V とす
るとき

$$\sigma l'S' + \sigma l'S' + \dots = \sigma(V' + V' + \dots) = \sigma V$$

となる。 V_1, V_2 等の部分を極めて小さく且つ數多くする
と單位の體積について之等の能率の和を考へることが出

来る。それを P とすると

$$P = \frac{\sigma V}{V} = \sigma \quad (36.2)$$

となる。 P をこの絶縁体の単位体積の電気能率又は電気偏極といふ。 P は絶縁体内の各点について考へられるもので電場が一様でない時は各点でその値が異なる。又絶縁体の外の真空中には感應による電気はないから電気偏極を考へることは出来ない。即ち真空中では $P=0$ である。そこで若し

$$D = E + 4\pi P \quad (36.3)$$

の様な量 D を考へるならば絶縁体の外では $D_0 = E_0$ 、内では $D_1 = E_1 + 4\pi P_1$ となり(36.1)(36.2)から

$$D_0 - D_1 = E_0 - E_1 - 4\pi P_1 = 4\pi\sigma - 4\pi P_1 = 0$$

となり絶縁体表面の直ぐ外と直ぐ内とで D の値が等しくなり D は絶縁体の内外を通じて連続的に變る量となる。従つて絶縁体を考へるときには E を考へるよりも D を考へる方が便利な事が多い。 D を電気變位といふ。 $D_0 = E_0$ で $D_0 = D_1$ であるから $D_1 = E_1$ である。即ち絶縁体の表面が電場に垂直であるときは表面の直ぐ外の電場と直ぐ内の電気變位は等しい。實驗の結果によると電気偏極は電場の強さに比例する。即ち x を比例常数とすると

$$P = xE \quad (36.4)$$

となる。この比例常数 x を帯電率といふ。之を(36.3)に代入すると

* P は電場の爲に電気が偏つて出来たとも考へられる。

$$D = E + 4\pi xE = (1 + 4\pi x)E$$

となるから

$$\epsilon = 1 + 4\pi x \quad (36.5)$$

とおくと

$$D = \epsilon E \quad (36.6)$$

となる。 ϵ を電媒常数といふ。

上に述べた様に絶縁体の内部は導体と異り電場が弱まるけれども電気力は透ることが出来る。それで絶縁体のことを電媒質ともいふ。

上に述べた様に絶縁体の表面が電場に垂直なときはその直ぐ外の電場が直ぐ内の電気變位に等しいのであるから絶縁体内の電気變位を知らうと思へばそこに電場と直角な極めて薄い切れ目を作りその中の電場をはかればよい。



第 145 圖

種々の物質の電媒常数 ϵ は次表の様である。

物 質	ϵ	物 質	ϵ
松 脂	1.8-2.6	氷	93.9
パラフィン	2-2.3	エーテル	4.37
ゴ ム	2.1-2.3	アルコール	26.8(15°C)
エポナイト	2.7-2.9	ベンゼン	2.29(18°C)
シュラック	3-3.7	グリセリン	39.1(15°C)
硫 黄	3.6-4.3	水	81
磁 器	4.4-6.8	水 素	1.000264(0°C)
ガ ラ ス	5-10	ヘリウム	1.000074(〃)

* 電媒質といふ名の起りは別の理由による

酸素	1.000547(")	空氣	1.000586(")
窒素	1.000606(")	炭酸ガス	1.000985(")
一酸化炭素	1.000695(")		

上表に見る様に氣體の電媒常數は殆んど1に近いから氣體に於ては大體 $\epsilon=1, \kappa=0$ とみて差支へがない。

§ 37 電氣容量

導體の電氣容量 導體に一定の電氣量 q を與へるとそれは導體の表面に分布してこの導體の表面が一つの等電位面となる。その電位を ϕ としたとき q を ϕ で割つたものをその導體の電氣容量といふ。之を C とすれば

$$C = \frac{q}{\phi} \quad (37.1)$$

である。

半径 a の球導體の容量を求めよう。之が荷電 q をもつときその外の電場は (35.2) により中心に點荷電 q があるのと同じである。従つてその電位は (34.4) により



第 146 圖

$$\phi = \frac{q}{r}$$

で與へられる。故に表面の電位は

$$\phi = \frac{q}{a}$$

故に容量は

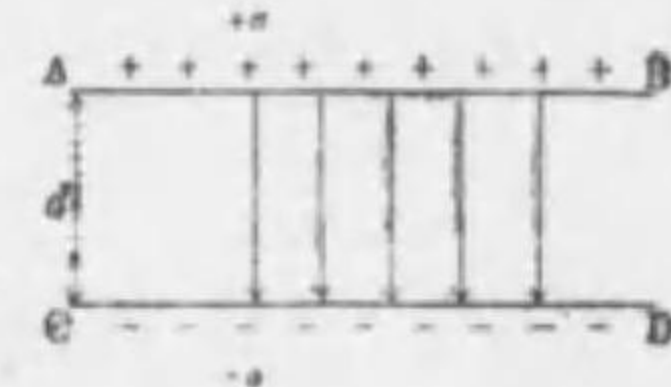
$$C = \frac{q}{\phi} = a \quad (37.2)$$

となる。

蓄電器の電氣容量 蓄電器は導體を二つ組合せたも

のである。兩導體に夫々正及び負の等量の電氣を與へた時その一方の電氣量の絶對値を兩導體の電位差で割つたものを蓄電器の電氣容量といふ。

次に平板導體を平行に置いた蓄電器の容量を求めよう。第147圖の様に二枚の板を AB, CD とし、その面積を S 、距離を d とする。AB 及び CD に夫々正及び負の等量の電氣を與へ、その表面密度が夫々 $+\sigma$ 及び $-\sigma$ になつたものとする。電場は板の周邊の方で少しく異なるが大體内部では一樣となる。故に S に比して d が小さい時は内部には一樣な電場があるものと考へてよい。AB 表面の附近では電場 E は (35.1) により



第 147 圖

$$E = 4\pi\sigma$$

で與へられる。AB と CD との電位差 V は CD から AB 迄 $+1$ の點荷電をもたらすに要する仕事である (§7 參照)。電場は一樣であるからこの仕事は明らかに

$$Ed = 4\pi\sigma d$$

である。即ち

$$V = 4\pi\sigma d$$

となる。AB の有する電氣量は σS であるからこの蓄電器の容量 C は σS を V で割つて

$$C = \frac{S}{4\pi d} \quad (37.3)$$

となる。但し今の計算は AB と CD との間が真空の場合である。若し AB と CD との間に電媒質があつたならば感應

によつて現はれた電氣により電場が $4\pi\sigma$ と異なるから (37.3) の様にはならない。次にこの場合を考へよう。第 148 圖の様に入れた電媒質の両面に σ' の表面密度の電氣が感應によつて現はれたものとする。絶縁体内の電場は (35.1) に於て σ の代りに $\sigma - \sigma'$ をおけばよい。即ち

$$E = 4\pi(\sigma - \sigma')$$

従つて電位差は $V = 4\pi(\sigma - \sigma')d$ となり容量は

$$C = \frac{\sigma S}{4\pi(\sigma - \sigma')d} = \frac{S}{4\pi\left(1 - \frac{\sigma'}{\sigma}\right)d}$$

となる。然るに (36.2) により

$$\sigma' = P$$

又 (36.4) によつて

$$P = \kappa E$$

故に

$$\begin{aligned} \sigma' &= \kappa 4\pi(\sigma - \sigma') \\ \therefore 1 - \frac{\sigma'}{\sigma} &= \frac{1}{1 + 4\pi\kappa} \end{aligned}$$

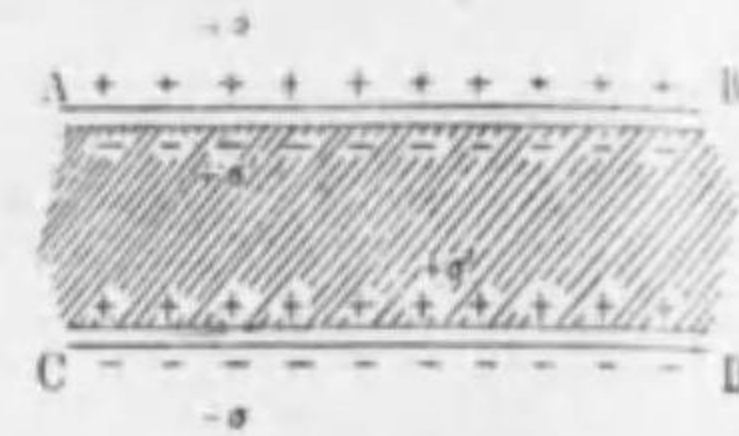
となる。故に (36.5) によつて

$$1 - \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{1}{\epsilon}$$

となり容量は

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d} \quad (37.4)$$

となる。即ち間に電媒常数 ϵ の電媒質を入れると蓄電器の電氣容量は真空の場合の ϵ 倍に増加する。



第 148 圖

$1 - \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{1}{\epsilon}$ を E や V に代入すれば分る様に電場も電位も電媒質中では真空中の $\frac{1}{\epsilon}$ に減する。従つて電媒質中ではクーロンの法則は

$$f = \frac{qq'}{\epsilon r^2} \quad (37.5)$$

となる。導體の容量も同様に電媒質中では増加する。

電氣量 1 クーロンを與へた時、蓄電器の二導體間の電位差が 1 ボルトになる様な容量を 1 フラッドといひ、電氣容量の實用單位とする。但し之は大きいから實際にはマイクロフラッド (= 10^{-6} フラッド) を使ふ。

§ 38 磁氣

磁氣は電氣と異り一種のものが單獨に存在することはない。磁氣を帯びた物體には必ず N S 兩極があつて丁度靜電感應によつて出來た陰陽電氣の様にその磁氣量が等しい。磁氣量の C.G.S 單位は電氣量の C.G.S 靜電單位と同じ様に定める。磁氣に對しても電氣の場合と同様なクーロンの法則が成立する。N 極にある磁氣を正、S 極にある磁氣を負と約束する。二つの極の磁氣量を m, m' としその間の距離を r とすると真空中で兩者の間に作用する力 f は次式で與へられる。

$$f = \frac{mm'}{r^2} \quad (38.1)$$

之が即ちクーロンの磁氣の法則で若し f が負ならば引力、正ならば斥力を表はす。磁場(又は磁場の強さ)は電氣の場合と同様磁場におかれた單位正磁氣に作用する力である。

實用上に於ても C.G.S. 磁氣單位と同じ大いさの磁場の單位を使ひ、之をガウスと呼ぶ。磁場 H 内に磁氣 m をおくとそれに作用する力 f は(34.3)と同様に

$$f = mH \quad (38.2)$$

で與へられる。クーロンの法則が成立するから電氣の場合の様にガウスの定理が磁場と磁氣の間に成立する。電位と同様に磁位を考へることが出来、磁場内では力線と等磁位面の關係は電氣の場合と全く同じである。磁氣の場合には電氣の場合の導體に相當するものがなく、絶縁體に相當するもの許りであるが電氣の場合と大いに異つた性質がある。

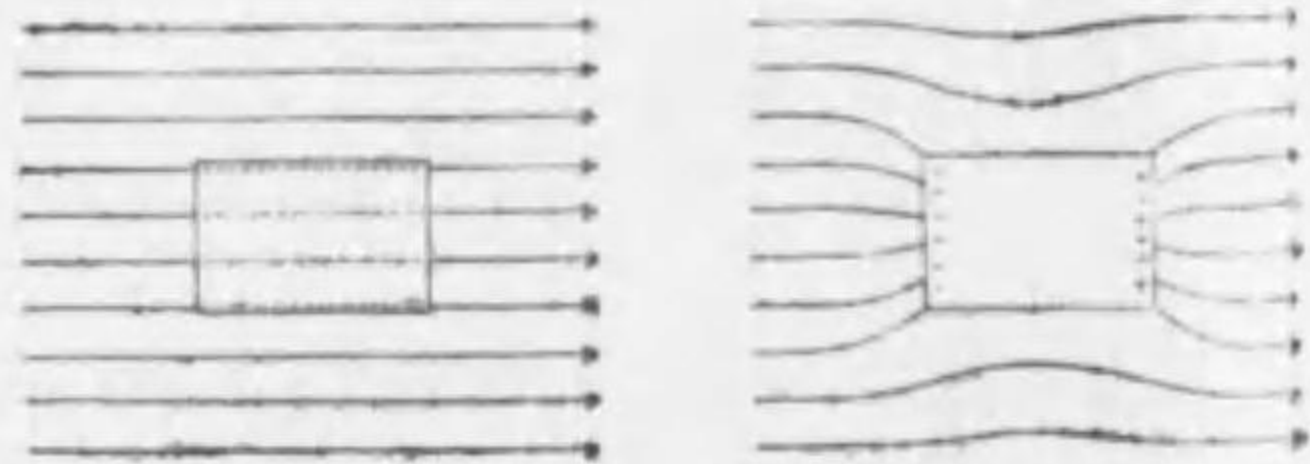
小磁石は丁度電氣双極に相當したものである。その各磁極にある磁氣量を $+m$ 及び $-m$ としその長さを s とすれば

$$M = ms \quad (38.3)$$

をその小磁石の磁氣能率といふ。

§ 39 物質の磁化

磁性體 直方體の軟鐵を一様な磁場内にその一面が磁場と平行になる様に



第 149 圖

入れると磁氣感應によつて磁場の方向の端には N 極が現はれ、逆の端には S 極が現はれる。之を磁場の方向に磁化したといふ。

今各の端に現はれた磁氣の表面密度を m とし、軟鐵の體積を V とする。この直方體を多くの小さい直方體に細分すると各小直方體の兩端にはやはり表面密度 m の磁氣が現はれる。全直方體はこの小直方體の集りと考へ得ること § 36 の電氣の場合の考察と同様である。小直方體は小磁石と考へられるからその磁氣能率を夫々 M_1, M_2, M_3, \dots とするとこの分割を極めて多くしたと考へたとき之等の磁氣能率の和の單位體積に對する割合

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + \dots}{V}$$

は § 36 の場合と同様に m に等しい。之を I とすると(36.2)に相當して

$$I = m \quad (39.11)$$

を得る。 I を磁化の強さ又は單位體積の磁氣能率といふ。丁度之は電氣偏極に相當する。従つて電氣變位に相當したものが考へられる。之を B とし、磁場を H とすると(36.3)に相當して

$$B = H + 4\pi I \quad (39.2)$$

である。 B を磁氣感應といふ。磁氣感應は電氣變位と同じ様に軟鐵内に磁場に平行な割目を入れたときこの割目内の磁場と同じものである。

磁化の強さと磁場との比を磁化率といひ、鐵では磁化率は磁場の強さによつて異なる。磁化率を κ とすると(36.4)に相當する式が得られる。

$$I = \kappa H \quad (39.3)$$

従つて(36.5)に相當して

$$\mu = 1 + 4\pi x \quad (39.4)$$

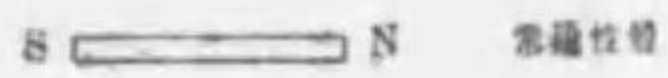
とおくときは(36.6)に相當して

$$B = \mu H \quad (39.5)$$

を得る。この時 μ を透磁率といふ。 x 又は μ は各物質の磁性を表はす係数である。

鐵、ニッケル、コバルト等では x が著しく大きくて磁場に入れた時強く磁化する。他の多くの物質も磁場の方向に磁化するけれども x は極めて小さく磁化したかどうか殆んど分らない程である。この様に磁場の方向に磁化する物質を常磁性體といひ、そのうち鐵、ニッケル、コバルト等の如く強く磁化する物質を特に強磁性體といふ。以上の物質は皆磁場の方向に磁化するのであるが蒼鉛、銀、銅等は磁場と逆の方向に磁化する。即ち磁場の方向の端にはN極が出来ずして却つてS極が出来、その反対側にN極が出る。この様な物質を反磁性體といふ。

従つて反磁性體の小さい棒を



磁場の中に入れると感應によつて



出来た極が磁場に引かれて棒が磁

第 150 圖

場と直角の位置になる。常磁性體の棒は磁場と平行になる。

常磁性體では x は正で、 μ が1より大きい。反磁性體では x が負となり μ は1より小さくなる。従つて常磁性體

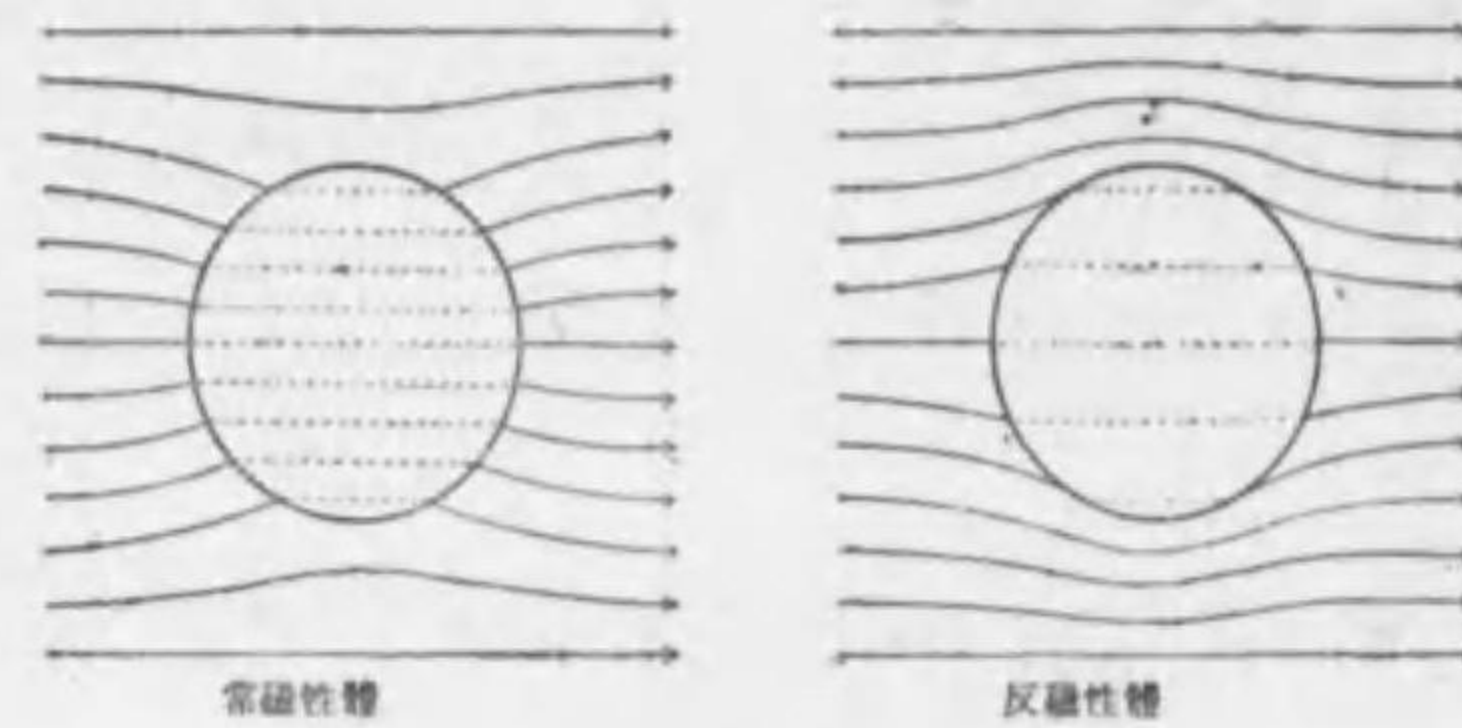
の表面の直ぐ内部

の磁場は直ぐ外部

の磁場よりも弱く、

反磁性體では之と

逆に内部の方が強



第 151 圖

い。一樣な磁場の

中へ常磁性體を入れると、電媒質の場合の様に磁場はその兩端で集められ、反磁性體を入れると磁場はその兩端で散らされる。(第 151 圖)

強さ H_0 の磁場中に常磁性體を入れると感應によつて現はれた磁氣が磁場 H_1 を作り H_0 と H_1 が合成されて磁場となる。常磁性體の内部では H_1 は H_0 と逆向きであるから

$$H = H_0 - H_1$$

となり、 H_1 は磁化を妨げる様に作用する。それで H_1 を消磁力といふ。

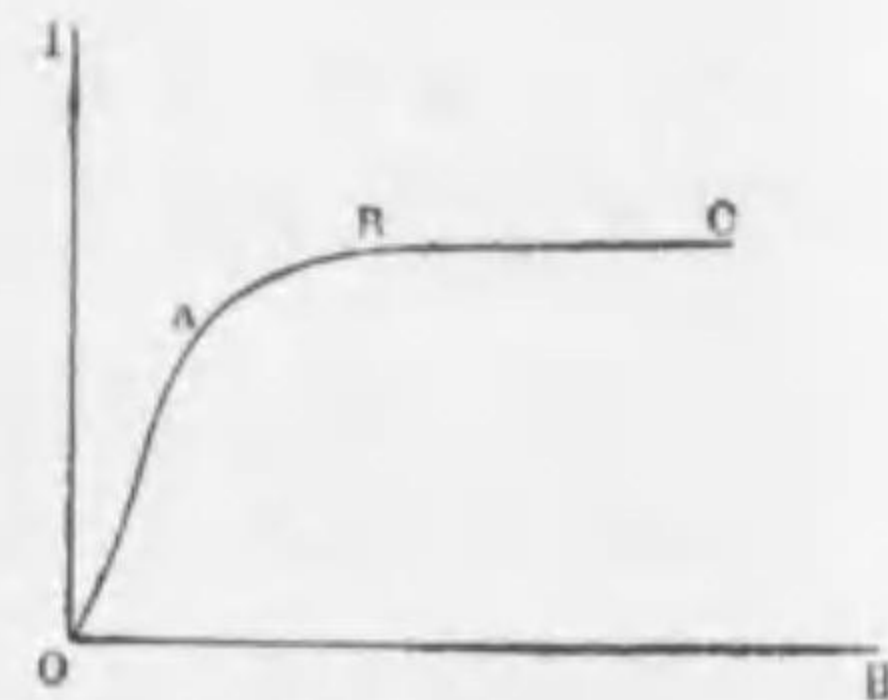
種々の物質の磁化率 x は次表の様である。

反 磁 性 體	x	常 磁 性 體	x
蒼 鉛	-14×10^{-7}	鐵	10-1500
石 墨	-8 "	ニ ッ ケ ル	10-30
金 剛 石	-1.1 "	コ バ ル ト	7-15
金	-3 "	マ ン ガ ン	300×10^{-7}
水	-2 "	バ ラ デ ウ ム	55 "
銀	-1.5 "	白 金	29 "
臭 素	-1.4 "	イ リ デ ウ ム	5 "
鹽	-0.0006 "	ア ル ミ ニ ウ ム	1.8 "

反磁性體	χ	常磁性體	χ
鉛	-1×10^{-7}	錫	0.35×10^{-7}
亞鉛	-0.9 "	酸素	0.142 "
硫黃	-0.8 "	窒素	0.001 "
水	-0.72 "	空氣	0.029 "
銅	-0.7 "	炭酸ガス	0.0002 "
ヘリウム	-0.011 "		
水素	-0.0005 "		

従つて反磁性體では透磁率 μ は1よりやゝ小さく、常磁性體では1よりやゝ大きい。併しその差は上表に見る如く極めて小さいから通常強磁性體以外に於ては $\chi=0, \mu=1$ とみて差支へない。

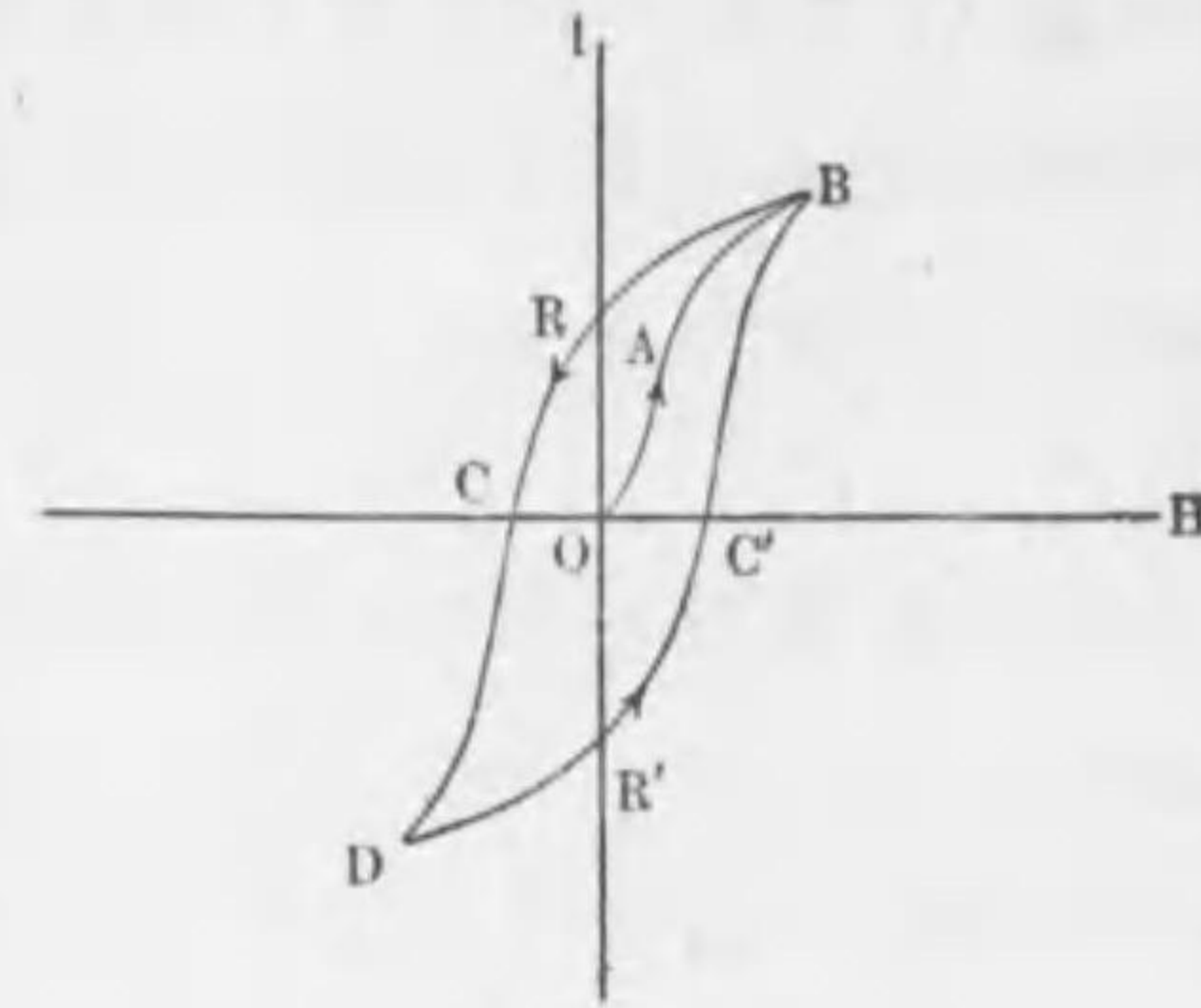
履歴現象 鐵を磁場に入れ、磁場の強さを次第に増して之を磁化させ、 I と H との曲線を描いてみると第152圖OABCの様になる。之を磁化曲線といふ。磁場0の近所では曲線の傾斜はゆるやかで次いで傾斜が急に増加しAに至ると再びゆるやかになり遂にBCの如く殆んど水平になる。BC部では磁場を増しても磁化の強さは増加しない。この時飽和の状態に達したといふ。この曲線でみる様に磁化の強さと磁場の強さとの比即ち磁化率 χ は一定ではなく、磁場の大きさにより著しく異なる。



第 152 圖

磁場0の値から次第に磁場を増し磁化がB點に達した時、磁場を次第に弱くしてみると磁化曲線はもとの曲線

OABと一致せず之よりも上方を通りBRの様になる。即ち磁場の強さ H はもとと同じであつても磁化の強さ I はもとよりも大きい。この様に一度磁化された鐵は磁場を弱くしても、



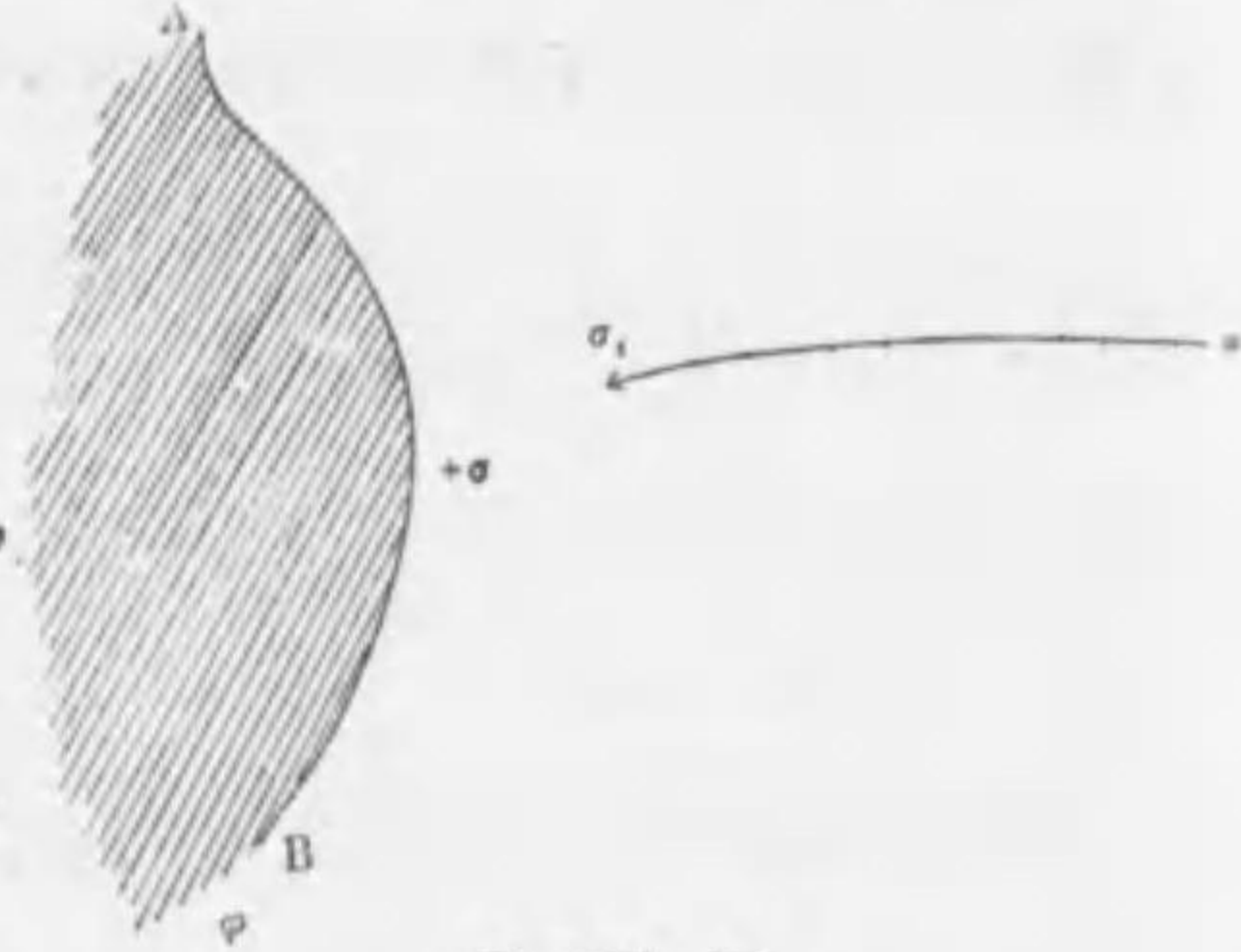
第 153 圖

感應によつて生じた磁氣が残る。ORは磁場を全くなくした時に残つてゐる磁化の強さ、即ち鐵の端に感應で現はれてゐる磁氣密度である。更に磁場を逆にすると磁化曲線はRCDの如くなる。OCは感應によつて現はれた磁氣を全く消失せしめるに要する磁場の強さを表はしてゐる。鐵の方からいへば、OCは感應によつて得た磁氣を保たうとする力である。次にDから再び磁場を弱くし遂に0とし再び逆の方向に磁場を強めるとDR/C'B曲線を得る。この様に鐵の磁化現象は、鐵が以前に如何に磁化されてゐたかといふ履歴によつて著しく異なる。それでこの現象を磁化の履歴現象といひ、曲線BRCDR/C'Bを履歴曲線といふ。この曲線は鐵の磁性をよく表はしてゐる。B及びDの曲線の傾斜が水平ならばBの高さは飽和した場合の磁化の強さである。又各點の I と H との比は χ を表はし、ORは之を磁化した場合磁場を去つた後に残る磁氣を表はす。即ちORはこの鐵が如何に強い磁石となり得るかの可能性

を表はし、B 點の H はこの鐵を最も強い磁石とするのに如何程の磁場が必要であるかを表はす。OC はこの鐵を磁石とした時消磁せんとする力に耐へる性能を表はす。

§ 40 電場及び磁場のエネルギー

同種の電氣は相吸引し、異種の電氣は相斥ける。種々の電氣が種々の分布をしてゐるときは常に之等の引力又は斥力がそれ等の電氣間に作用してゐる。故に若し電氣の移動をさまたげるものがなければ、之等の電氣は引力又は斥力によつて移動し、相互の位置エネルギーは



第 154 圖

減する。従つて電氣が或配置をもつてゐることは位置エネルギーを有することである。このエネルギーはすべて電場の中に貯へられてゐるものと考へ、電場のない所にはエネルギーはないものと考へる。この様に考へた電氣の位置エネルギーを電場のエネルギーといふ。磁場のエネルギーも同じ様に考へる。

次に電場の單位體積中に存するエネルギーを計算しよう。通常は之を單に電場のエネルギーといふ。之を計算するには單位體積の電場が増加した爲に電氣の位置エネルギーが何程増加したかを見ればよい。先づ表面密度 σ

の荷電を有する導體の位置エネルギーを求め。第 154 圖に於て AB を導體の面とし、その電位を φ とする。位置エネルギーは電氣が無限に細かく分れ、その相互の距離が無限に遠いときに零なるものと定める。今電位 φ_1 の所に荷電 σ_1 があるときその位置エネルギーは電位の定義から明らかに $\sigma_1 \varphi_1$ である。今導體面 AB の荷電の表面密度 σ を極めて細分して考へ $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ とする。荷電零の状態の表面に極めて少しの荷電を無限遠點から持ち來し、表面密度が σ_1 となつたとき導體の電位が φ_1 となり、更に表面密度が σ_2 だけ増されたとき導體の電位が φ_2 となり、… とする。然るときは $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ 等を順次に無限遠點から導體に持つて來ると順次に位置エネルギーが $\sigma_1 \varphi_1, \sigma_2 \varphi_2, \sigma_3 \varphi_3, \dots$ づつ増加する。従つて $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ を全部持つて來て表面密度が σ となつたときの位置エネルギーは之等の和

$$\sigma_1 \varphi_1 + \sigma_2 \varphi_2 + \sigma_3 \varphi_3 + \dots$$

である。表面密度 σ 、電位 φ の荷電導體の電氣の位置エネルギーは $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ 等の分け方が無限に多く、その各が無限に小さくなつた極限である。その時には上の和は積分の形 $\int_0^\sigma \varphi d\sigma$ となるから導體の單位表面にある荷電の位置エネルギー w は次式で與へられる。

$$w = \int_0^\sigma \varphi d\sigma$$

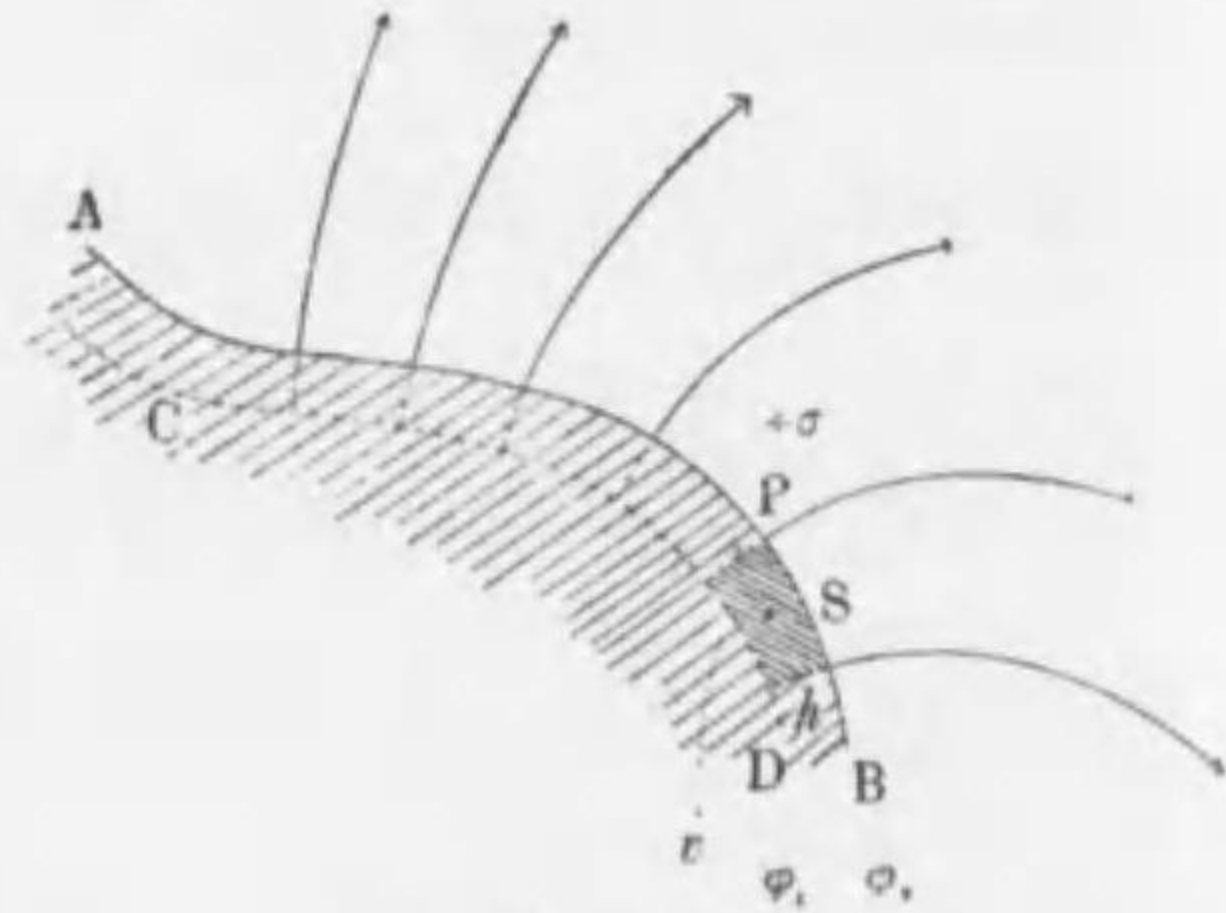
導體の單位表面の電氣容量を C とすると $\sigma = C\varphi$ であるから之を上式に代入すると

$$u = \int_0^{\sigma} \frac{\sigma}{C} d\sigma = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{C} = \frac{1}{2} \sigma \varphi \quad (40.1)$$

を得る。

次に之を使つて単位體積の電場を増加したときに増加する電氣の位置エネルギーの増加(即ち電場のエネルギー)を求めよう。

第155圖に於てABを導體の表面とし、その荷電の表面密度を σ 、電位を φ_2 とする。導體の表面では前に述べた様に電場は表面に垂直であ



第155圖

る。今導體の表面が電場に垂直なまゝ動く様に極めて少しずらせてCDに移つたものと考へる。その時導體の電位が φ_1 に變つたものとする。表面の一點Pが垂直に移動した距離を h とする。Pの近傍に極めて小さい表面の一部を考へその面積を S とする。Sを底面としこの周を通る力線を側面とする柱狀部を v とする。導體の内部では電場 E は0であるからこの移動によつて電場はABとCDの間の部だけ増加してゐる。そして電位が φ_2 から φ_1 に變つたから導體の荷電の位置エネルギーは單位表面毎に(40.1)によつて $\frac{1}{2}\sigma\varphi_2$ から $\frac{1}{2}\sigma\varphi_1$ に増加してゐる。このエネルギーがABとCDとの間の電場のエネルギーである。 v

部のABの方の端にもとあつた荷電のエネルギーは大體に於て $\frac{\sigma\varphi_2 S}{2}$ で、CDの方の端に出来た荷電のエネルギーは大體に於て $\frac{\sigma\varphi_1 S}{2}$ である。ABがCDに移つた爲のエネルギーの増加は $\frac{\sigma\varphi_1 S}{2} - \frac{\sigma\varphi_2 S}{2} = \frac{\sigma}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)S$ である。之が v 部の電場のエネルギーである。 v の體積は Sh であるから v 部の單位體積についてはエネルギーは

$$\frac{\sigma(\varphi_1 - \varphi_2)S}{2Sh} = \frac{\sigma}{2} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{h}$$

だけ増してゐる。 $h \rightarrow 0$ となつた極限で $S \rightarrow 0$ としたときがP點に於ける電場のエネルギーとなる。(正確にP點の單位體積のエネルギーの増加となる)この時上の値は

$$\lim \frac{\sigma}{2} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{h} = -\frac{\sigma}{2} \lim \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{h} = -\frac{\sigma}{2} \frac{d\varphi}{dh}$$

となる。然るに $E = -\frac{d\varphi}{dh}$ であるから(§34及び§7参照)P點の單位體の電場のエネルギーを U_E とすると

$$U_E = \frac{1}{2} \sigma E$$

となる。然るに(35.1)により $\sigma = \frac{E}{4\pi}$ であるから

$$U_E = \frac{E^2}{8\pi} \quad (40.2)$$

となる。若し電場に電媒常數 ϵ の電媒質があるときには(35.1)の代りに $\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} = E$ となるから $\sigma = \frac{\epsilon E}{4\pi}$ となり(40.2)の代りに

$$U_E = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} \quad (40.3)$$

* 電媒質中では電場は真空中の場合の $\frac{1}{\epsilon}$ となる。(37.5)参照。

を得る。磁場の場合も全く同様に透磁率 μ の物質中の磁場のエネルギー U_M は次式で與へられる。

$$U_M = \frac{\mu H^2}{8\pi} \quad (40.4)$$

第五章 電 流

§ 41 電氣抵抗

オームの法則 電位の異なる二つの導体を導線で結ぶと高電位の物體から低電位の物體へ電氣が流れる。導線の兩端の電位の差を電壓といひ、單位時間に導線の切口を通して流れる電氣量を電流の強さ又は單に電流といふ。實用上では 1sec 間に 1 クーロンの電氣量が流れる電流を單位とし之をアンペアといふ。普通に電流が起るのは電位差の爲であるが一般には種々の原因によつて起る。一般に電流を生ぜしめる原因を電動力といひ、丁度それに相當する効果をもつてゐる電壓で表はす。

導線の兩端の電壓が一定であつて一定の電流が流れてゐる時にはオーム Ohm の法則が成立する。即ち電流の強さを I 、導線の兩端の電壓を V とし R を常數とすると

$$V = RI \quad (41.1)$$

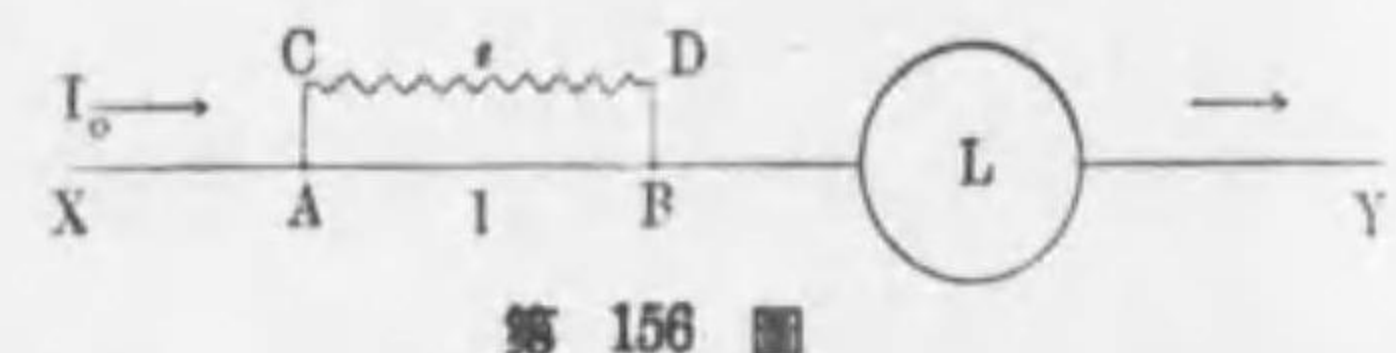
である。常數 R は即ち電氣抵抗と呼ばれるものである。實用上理論的には兩端の電壓 1 ボルトの時、1 アンペアの電流が起る様な導線の抵抗を 1 オームといひ、國際的には切口の面積が一様で長さ 106.300cm、質量 14.4521g の水銀柱の溫度 0°C に於ける電氣抵抗を 1 オームといふ。この單位を抵抗の國際實用單位といふ。

導線の抵抗はその太さ及び長さによつて異なる。切口 1cm^2 、長さ 1cm の導線の抵抗をその導線を構成する物質の比電気抵抗といひ、その逆をその物質の比電気導度といふ。

金属導線の抵抗は温度が昇ると一般に大きくなる。絶対零度近傍に近づくと抵抗は著しく小さくなり、殆んど0に近づく。物質によつては絶対零度の近傍の或温度で抵抗が突然殆んど0になることがある。之を超導導といふ。温度と電気抵抗との関係を知つておけば電気抵抗を測定することによつて温度を知ることも出来る (§27 参照)。抵抗はその他光や磁場によつても影響を受ける。

第 156 圖に示す様に

ある装置 L に導線 XY によつて電流を



第 156 圖

通じて物理的の操作を行ふとき、XY を通る電流を I_0 とする。導線 XY の途中に抵抗の極めて小さい一定の導線 AB を挿入し、AB の両端を抵抗の大なる一定の導線 ACDB で連ねる。AB を通る電流を I 、その抵抗を r 、ACDB を通る電流を i 、その抵抗を R とする。(41.1) によると AB 間の電圧は rI 又は Ri である。又 I_0 は I と i との和であるから

$$rI = Ri \quad I_0 = i + I$$

之より I を消去すると

$$I_0 = \frac{R+r}{r} i = \frac{R}{r} \left(1 + \frac{r}{R}\right) i \quad (41.2)$$

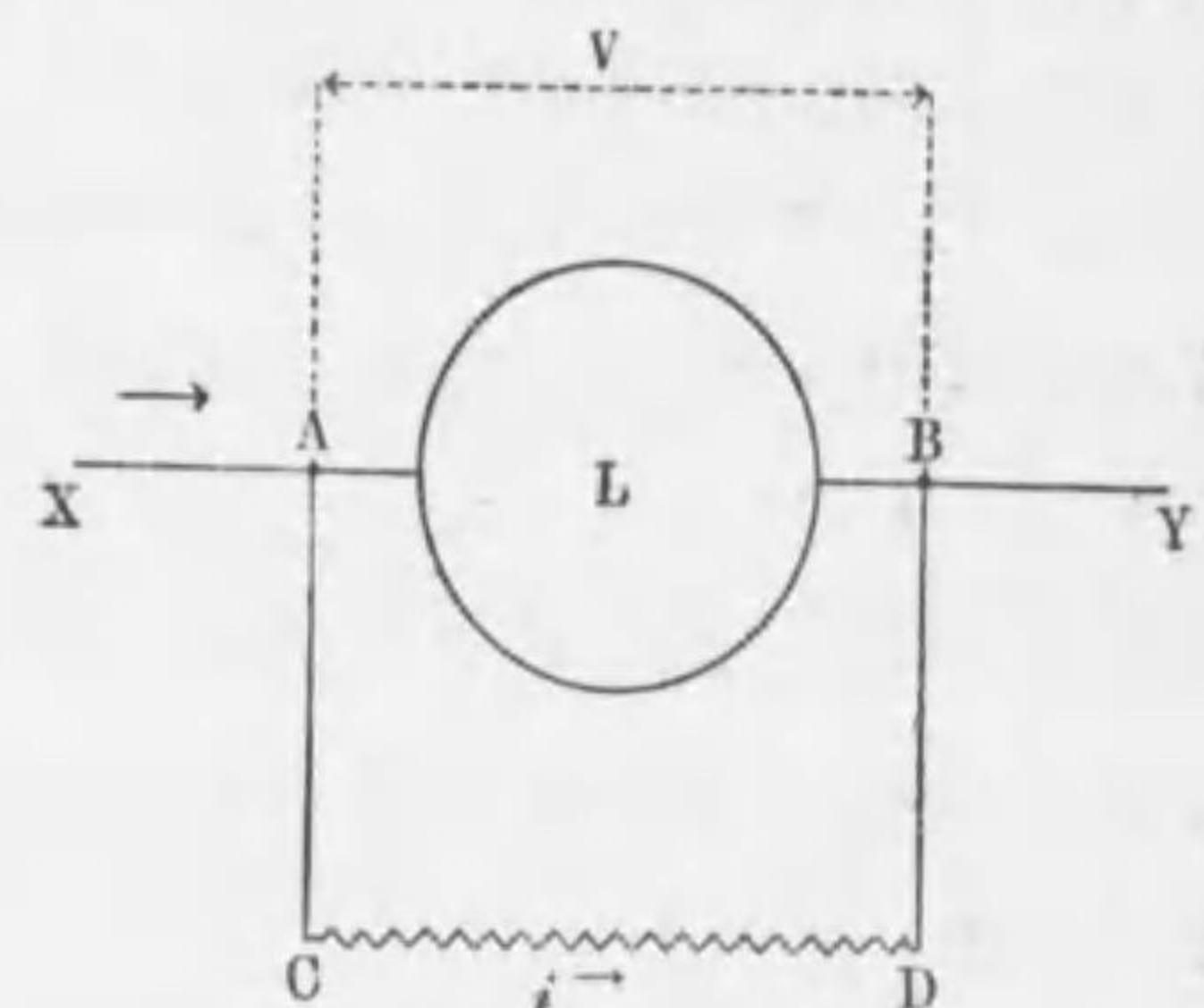
となる。 r 及び R は一定であるから I_0 は i に比例する。従

つて i を測れば I_0 を知ることが出来る。後に述べるアンペア計は AB 及び ACDB を一定の箱の中におさめ i に比例して指針が動き電流 I_0 のアンペア数を示す様にした装置である。(§46 参照)

次に第 157 圖の様に L の両端 AB を極めて大きな抵抗の一定の導線 ACDB

で連ねる。この時 AB 間の電圧を V とし、ACDB の抵抗を R 、ACDB を通る電流を i とするとオームの法則(41.1)により

$$V = Ri \quad (41.3)$$



第 157 圖

となるから i を測れば V を知ることが出来る。若し導線 ACDB を去れば AB 間の抵抗は増加するから、AB 間を通る電流は小となり AB 間の電圧は増す。若し ACDB の抵抗が L の抵抗に比して極めて大きいならばこの変化は極めて小さい。従つて ACDB を連ねて測つた V が之を去つた時の AB 間の電圧に等しいと見て差支へない。若し AB 間の抵抗が大きい時には、ACDB を連ねたまま操作をしなければこの様にして測つた電圧が實際の電圧を示さないから ACDB を去つてはいけない。之が後に述べるボルト計で電圧を測定出来る理由である。ボルト計では ACDB 部を一定の箱の中におさめ i に比例して指針が動き AB 間の電