

PRINTED AND PUBLISHED BY



PRINTED & PUBLISHED

at the

JAGAN MITRA PRESS

RITNAGIRI

1854



सरळ रे घ आ णि गो ली च

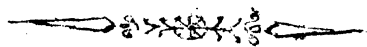
त्रि को ण मि ति



इं ग्र जी मूळ ग्रंथा चा अ स्मृ त्ते नं

म हा रा ष्ट्र भा षे त

के ली.



ती

रत्ना गिरी एथील जगन्नित्र आपस्यान्यांत

छापिली.



सन

१८५४



प्रस्ता

द्यान्वा परस्पर जोड फळा
ं, एकमेकीं चा साद्या शिबाय
असा त्यांचा संबंध असून
गणित असे दोन दोन भाग
घेत थोडे बहुत ग्रंथ आहे
गणित भागां विषयी ग्रंथां

य त्रिकोणमिति हा विष-
य म भाग (पाया) आहे;
वेध करून उंचा का दि-
गोल आणि ख गोल सं-
हे, त्यांचे वर्णन मी एथे को

मन लाविले असता याचा
उपयोग किती आहे, हे सर्वांस कळेल.

आलीकडे हा आमचा हिंदुस्तान देश अज्ञानरूपी निबिड
अंधकाराने व्याप्त झाला; असे परमकृपालु जगत्पिता जो ईश्व
रत्वाने पाहून इंग्लिशरूपी मशाल्यादेशांत आणिला; तेणे करून
कोही मशालीजवळील लोक प्रकाशांत आहेत; परंतु थोड्या

अंतरावली, कांहीं प्रकाश व कांहीं अंधः कारणीतचीच पडता हेत, आणि थोड्या अंतरा पलिकडले बहुतेक लोक घोर अंधः कारणीतच आहेत. पहासन १८५१ चा पुणे ज्ञान प्रकाश वर्तमान पत्रांत जोशी या सहीचीं एक दोन पत्रें पृथ्वी सूर्या भोंवती व आपल्या आंसा भोंवती फिरत नाहीं, अशा समजूतीचीं होनीं. त्यांचें कोणे कांणें पृथ्वी सूर्या भोंवती नव्हे आसा म भोंवती फिरत आहे; असें उत्तर दिल्या व जोशी बुवा इमके क्रुद्ध झाले कीं, त्यांनीं शेवटीं अपशब्दां पंथत मजल आणि ली; इतकी त्यांचा अंतःकरणाची पृथ्वी नव्हे नाहीं, अशी खात्री होऊन राहिली होनीं. व त्या प्रमाणें पत्रांत दूरस्थ बहुतेक लोकांची समजूत आहे; पूर्वींक्त जोशी बुवांचा पत्रांचें उत्तर यथा मति द्यावें; असें माझा मनांत आलें होतें. परंतु विचार केला कीं, असा जास बळकट ग्रह झाला आहे, तो माझा शंभर पत्रांनीं हीं निरसन होणार नाहीं. याजकरितां अशा समजूती निरसनार्थ पृथ्वी फिरत आहे, या आधारानें ग्रहांचे उदयास्ताधिकार ग्रहणें इत्यादि विषयांवर ग्रंथच झाले पाहिजेत, अणजे पृथ्वी गतिमान आहे, या आधारानें झालेल्या ग्रंथांनीं

* जास लिहितां वाचितां येतें, व सामान्यतः एतद्देशीय लोक विद्वान्, अणतात, त्याची अशी स्थिति मग इतर लोकांचें अज्ञान किती असेल, याचें अनुमान सहज होईल.

सूर्य चंद्रादिग्रहणे अचूक अनुभवासये ऊलागलीं, म्हणजे कांहीं अज्ञान कमी होईल; केवळ ग्रहणादिकांचा उपपत्ति घेवर्णन करून उपयोगी नाही.

हल्लींचा बहुतेक एतद्देशीय मोठमोठ्या विद्वानांची गणितावर अभिरुचिकमी आहे, परंतु विशेषेकरून या देशांतील लोकांचें अज्ञान निरसनार्थ, ग्रंथ करण्याकडे त्यांचें लक्ष फार आहे. असें असतां एतद्देशीय लोकांत ज्योतिषाविषयीं जसें अज्ञान आहे, तसें दुसरे कोणतेंच नसेल; क्षणभर गणिताविषयीं एकीकडे ठेविलें, तरी प्रश्न, मुद्दत, जातक, ताजक इत्यादि फलग्रंथांनीं तर अनर्थच केला आहे, त्यांनीं रावापासून रंकापर्यंत, आणि महापंडितापासून गुराख्यापर्यंत सर्वांसे डलाविलें आहे. असें असून या अज्ञान निरसनार्थ ग्रंथांचीं भाषांतरे करण्यास कोणी लेखणीच उचलित नाही, याचें कारण इतर ग्रंथांपेक्षां गणिताचें भाषांतर करणें कठीण, किंवा दुसऱ्या मोठमोठ्या दुर्निवार अडचणी आहेत, हें मला कळत नाही; परंतु कशाही कारणानें देशभाषेंत ग्रंथ न झाले असतां, आह्मां एतद्देशीय लोकांचेंच अनहित आहे. याजकरितां या प्रसंगीं उगाच हात पाय आटोपून बसणें ठीक नव्हे, असें जाणून, जरीं मी विद्वज्जनांचा दासांचा दा

स शोभणार नाही, इतकी माझा विद्येची न्यूनता असतां ही, वर लिहिलेलें अज्ञानदूरीकरणार्थ ग्रंथ करण्या विषयीं मोठ मोठ्या विद्वानांचीं मनें उनेजित करण्या करितां, त्यांस मोठ्या विनयतेनें आणि परमप्रितीनें हें लहानसें पुस्तक नजरकेलें असे.

या ग्रंथाची वाक्य रचना यथामति केली आहे; तथापि प्रसंगोपात वाक्य रचने कडे दृष्टि न देतां, जेथें जो शब्द लिहिला असतां, विषय यथास्थित समजेल, तेथें दुसरा पर्याय शब्द न देतां, तोच शब्द लिहिला आहे. याजकरितां कित्येक ठिकाणीं एकच शब्द एकापंक्तींत दोन वेळही आला असेल; त्याच प्रमाणें मराठीमध्ये आज पर्यंत जीं गणिताचीं पुस्तकें शिकविण्याचा वहिवाटींत आहेत, त्यांतिल कित्येक गणितसंबंधी शब्दापेक्षांजरी अधिक शुद्ध शब्द आढळतात; झणजे (कोन, याचा ठिकाणीं कोण, कुरलरी, याचा ठिकाणीं कर्लरी, सप्लुमेंट, याचा ठिकाणीं सप्लीमेंट) इत्यादि लिहिणें अधिक योग्य आहे, तरींजे आज रुढींत असून, शिकणारां चातोडीं दृढ बसून गेले आहेत, त्यांत फेरफारकेत्या वांचून तसेच लिहिले आहेत.

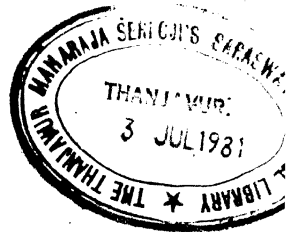
आतां सर्व लोकांस माझी हात जोडून विनंती आहेकीं,

मी हाल हान सा ग्रंथ केला आहे, यांतील दोषांकडे लक्ष न देतां जो कांहीं अत्य स्वल्प गुण असेल, त्याचें मंडन करावें कारण झटलें आहे,

त्यजंति शूर्पवत् दोषान् गुणान् गृह्णंति साधवः ॥

दोषग्राही गुणत्यागी चालनीवचदुर्जनः ॥ १ ॥

या ग्रंथांतील गुण दोष केवळ गुरारख्याचां काढवत नाहीत कांहीं तरी विद्वान पाहिजे, आतां जे विद्वान आहेत त्यांस कोणत्या ही मास प्रथम किती श्रम पडतात, इत्यादि सर्व विचार माहितच असतात. कारण त्यांचा हातून यापेक्षां ही मोठ मोठी कामें होतात; याजकरितां ते दोषांकडे दृष्टि न देतां, जो कांहीं थोडाबहुत गुण असेल, त्याचेंच मंडन करतील. असा मला पूर्ण भरवंसा आहे.



सूचना.

हा ग्रंथ केवल इंग्रजी में भाषांतर न रहे, जैसा कि हमें हा विषय मराठी मध्ये चांगला दिखाना सुबोध होईल, असा केला आहे. व हा ग्रंथ करण्यास जांनी मदत केली, त्यांचा मी मोठा आभारी आहे.

कार्यप्रकाशक चिह्न.

हीं बहुतेक शिक्षामाला पुस्तक चा प्रथम आणि दुसऱ्या भागांत सांगितलेली आहेत. परंतु या पुस्तकांत काही विशेष आहेत; तीं लिहितो.

हें चिह्न अधिक उणे दाखविण्याचें.


हें त्रिकोण वाचक.

हें कोन वाचक.

हें झणून, किंवा याज्ञकरिता, या शब्दांचें वाचक.

घांचा उपयोग.

ए० अ, किंवा अ० अ यांत आठ पांचां हून किंवा ब, अ हून मोटा आहे; असें मध्य चिह्न दाखवितें, झणजे चिह्नांत पद आहे तें मातें.

अबक  हें त्रिकोण लिहावयाचा असतां त्रिकोणाचा कोनांवरील अक्षरें लिहून पुढें करितात.

<अ अथवा <कअब हें कोणता ही कोन लिहावयाचा असतां, कोन स्थलीचें एक, किंवा कोन स्थलीचें मध्ये घेऊन तीन अक्षरें लिहून त्याचा मागें करितात.

अ = ब . आणि ब = ड . ∴ अ = ड अथवा अ = ब आ

णि ब = ड आहे, याज करितो अ = ड आहे, यांत (अ) चा मार्ग.
जे तीन बिंदु आहेत; ते (अ, णू, याज करितो) या शब्दांचे वा
चक आहेत.

या पुस्तकांत अक्षरांवर (१, ५) इत्यादि चिन्हे आहेत.
त्यांमुळे अनुक्रमें, सचिन्ह, दोनचिन्ह, इत्यादि तें तें अक्षरसू-
णावें.

प्रकरण पहिलें.

सरळरेषत्रिकोणमिति.

भाग पहिला.

सरळरेषत्रिकोणमितींतील बहुतेक उपयोगी विषय शिक्षा मालखुस्तकाचा दुसऱ्या भागांत सांगितलेले आहेत, परंतु गोलीयत्रिकोणमिति इत्यादि पुढील विषय समजण्यास नेवट्यांनीं निरर्वाह होत नाहीं. याजकरितां अनेक ग्रंथांचा आधारानें संक्षेपतः सुबोध होण्या सारख्या काहीं विषय लिहितों.

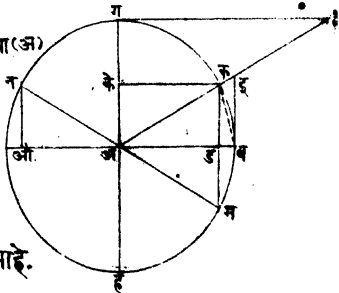
१ कलम पहिलें. जर (बक गन फहम) या वर्तुळांत बक, कों स बरा बर (अ) व, अंक = त्रिज्या = र, घेतला तर, बक कों सा चाला बी = अंक * अ, आणि

कड = भुजज्या (अ), अड = कोभुजज्या (अ)

बइ = स्पर्श (अ), गल = कोस्पर्श (अ)

अडु = छे (अ), अल = कोछे (अ); फ

बडु = शर (अ), बक = ज्या (अ)



या प्रमाणें होतानें उघड आहे.

* एथें त्रिज्या गुणक लावण्याचें कारण असें आहे कीं, मूळ त्रिज्या जितकें पट बाद वांवी; तितकें पट (अ) कों स व त्याची भुजज्या इत्यादि बाद तात-या विषयीं विस्तार पुढें लिहिला आहे.

आता या आकृतींत काढकोन आणि सरूप त्रिकोण यांचा गुणापासून एक त्रिज्येचा प्रमाणातें रवातीं लिहिलेले, मारणी कोणक उतपन्न होतात-

- कोअ·छेअ = १ (१) स्पअ·कोस्पअ = १ (२)
- भुअ·कोछेअ = १ (३) भुअ + कोअ = १ (६)
- स्पअ = $\frac{\text{भुअ}}{\text{कोअ}}$ (३) छेअ = १ + स्पअ (७)
- कोस्पअ = $\frac{\text{कोअ}}{\text{भुअ}}$ (४) कोछेअ = १ + कोस्पअ (८)
- इत्यादि किंवा.

$$\text{भुअ} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\text{कोअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोअ}}{\text{छेअ}}$$

$$\text{कोअ} = \frac{\text{भुअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{१}{\text{छेअ}}$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{भुअ}}{\text{कोअ}} = \frac{\text{छेअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}}$$

* अथवा या प्रमाणें ही दाखविले जातें कीं, स्पअ·कोस्पअ = १, कोस्पअ = $\frac{१}{\text{स्पअ}}$ आतां यासमी करणाचा दोन ही बाजूंस (७) यातें गुणिलें असतां (७) कोस्पअ = $\frac{७}{\text{स्पअ}}$ यापासून दिखून येतें कीं, कोणतीही संख्या कोणत्याही कोसाचा स्पर्शरेषेनें भागिलीतर भागाकार तीच संख्या पूर्वी कोसाचा कोस्पर्शरेषेनें गुणिली त्या गुणाकाराबराबर होती तसेंच दुसरें असें कळून येतें कीं, कोस्पअ रेषेनें भागिली आणि स्पर्शरेषेनें गुणिली हें बराबरचु आणखी हें ही उघड आहे कीं, कोभुअचा व छेअरेषा आणि भुअचा व कोछेअरेषा तसेंच कोण

$$\text{कोसअ} = \frac{\text{कोअ}}{\text{भुअ}} = \frac{\text{कोउअ}}{\text{छेअ}} = \frac{१}{\text{सअ}}$$

$$\text{छेअ} = \frac{\text{सअ}}{\text{भुअ}} = \frac{\text{कोउअ}}{\text{कोसअ}} = \frac{१}{\text{कोअ}}$$

$$\text{कोउअ} = \frac{\text{छेअ}}{\text{सअ}} = \frac{\text{कोसअ}}{\text{कोअ}} = \frac{१}{\text{भुअ}}$$

ज्या = २ शर, या प्रमाणे ही होतात

टीप. वरील आकृतींत बक = बम आहे. परंतु तो, अब त्रिज्ये-चा खालचा बाजूस आहे; झपून न्याला (-अ) झणतात. याच कक्ष्या वरून आणखी स्पष्ट आहे की, भु (-अ) = -भुंअ; को (-अ) = कोअ, इत्यादि.

३ शिक्षामाला पुस्तका वरून स्पष्ट करूत की, जर कोणत्याही दोन कोंसांची बेरीज (१०) आहे, तर ते कोंस परस्परांचे कोण्टांमेट आहेत. व एकाची जी भुज ज्या, स्पर्श रेषा आणि छेदन रेषा ती अनुक्रमें दुसऱ्याची कोभुज ज्या, कोस्पर्श रेषा, कोछेदन रेषा आहे.

४ जर या वरचा आकृतींत < फअन, वअक कोना बराबर करून, नओ, वफ वरलंब केला; तर नओ = फड, अओ = अड आहे. आतां जर, नओ, आणि अओ यांस त्रिज्येनें भागिलें तर भागाकार बरें सांगितल्या प्रमाणे, वअन कोनाचा भुज ज्या

तीही संख्या आणि तिचा व्युत्क्रम हे परस्पर संबंधानें असतात.

व को भुज ज्या होतील, हा व अंन कोन बअंक कोनाचा सप्लुमेंट अणजे (१८०°) चा भरीचा आहे, याज करिता उषद आहे की, अ कोन बत्याचा सप्लुमेंट याची भुज ज्या बराबर आहे. आणि त्याचा को भुज ज्या, स्पर्शरेषा आणि छेदन रेषा याही बराबर, पुरंतु चिन्हें मात्र व्युत्क्रम आहेत. याज करिता जर ब गेफ अर्ध परिष भागिला, अब त्रिज्येनें, बराबर $\frac{1}{2}$ घेतला तर भु अ = को (घ - अ) = भु (२घ + अ) = भु (घ - अ) = \pm भु (२नघ \pm अ) = भु ((२न + १) घ - अ), को अ - को (घ - अ) = को (२घ + अ) = को (२नघ \pm अ) = - को ((२न + १) घ + अ)

आहे. याज करिता (३) सारणी को एका प्रमाणें स्प अ = को स्प (घ - अ) = - स्प (घ - अ) = स्प (२घ + अ) = स्प (नघ + अ) = - स्प (नघ - अ) इत्यादि होतील.

टीप. यावरून असे सिद्ध होते की, कोणत्या ही सरळ रेषा त्रिकोणाचा एका कोनाची भुज ज्या दुसऱ्या कोनाचा बेरजेचा भुज ज्ये बराबर आहे. आणि को भुज ज्या, उणी को भुज ज्ये बराबर आहे इत्यादि.

५. बरील कलमांत सिद्ध झालेले सारणी को एक खाती लिहितो.

$$\text{भुअ} = \pm \text{भु} (2\text{नघ} \pm \text{अ}) = \text{भु} ((2\text{न}+1)\text{घ} - \text{अ}) \dots (९२)$$

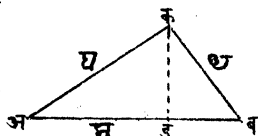
$$\text{कोअ} = \text{को} (2\text{नघ} \pm \text{अ}) = -\text{को} ((2\text{न}+1)\text{घ} - \text{अ}) \dots (९०)$$

$$\text{स्पअ} = \text{स्प} (\text{नघ} + \text{अ}) = -\text{स्प} (\text{नघ} - \text{अ}) \dots (९१)$$

या त्रिकोणांत (१) कलमा

प्रमाणं, भुअ = $\frac{\text{कड}}{\text{अक}}$, आणि

भुब = $\frac{\text{कड}}{\text{बक}}$, आहैं.



आतां अ, ब, क कोनां समोरील बाजू दाख विण्यास अनुक्रमें छ, घ, प्र घेऊन वरील दोन समीकरणांचे छेद सोडवून किंमत ठेविली असता घ·भुअ = कड, छ·भुब = कड असें होतें.

यातील, कड चा किंमती परस्पर बराबर लिहून छ·भुब = घ·भुअ

याचे गुणक सोडवून $\frac{\text{भुब}}{\text{भुअ}} = \frac{\text{घ}}{\text{छ}}$ या प्रमाणें शिक्षामाला पुस्तका

चा दुसऱ्या भागांतील त्रिकोणमितीचा (१ सि० प्र०) सिद्ध होतें.

ह्यापून $\frac{\text{भुक}}{\text{भुअ}} = \frac{\text{प्र}}{\text{छ}}$ घे. आणि या समीकरणाचे छेद सोडवून

$$\text{भुक} = \frac{\text{प्र} \cdot \text{भुअ}}{\text{छ}} = \frac{(\text{अड} + \text{बड}) \cdot \text{भुअ}}{\text{छ}}$$

यांत (अड) आणि (बड) यांचा किंमती ठेवून.

$$\text{भुक} = \frac{(\text{घ} \cdot \text{कोअ} + \text{छ} \cdot \text{कोब}) \cdot \text{भुअ}}{\text{छ}} \text{ भाजकानें भागून.}$$

$$= \left(\frac{\text{घ}}{\text{छ}} \cdot \text{कोअ} + \text{कोब} \right) \text{भुअ यांतवर सिद्धकेल्या प्रमाणें किंमत ठेव.$$

$$= \left(\frac{\text{भुब}}{\text{भुअ}} \cdot \text{कोअ} + \text{कोब} \right) \cdot \text{भुअ गुणकानें गुणून.}$$

$$\text{भुक} = \text{भुब} \cdot \text{कोअ} + \text{भुअ} \cdot \text{कोब} \text{ यांत (४) कलमांतील दिवे}$$

प्रमाणें किंमत ठेवून-

$$\text{भु(अ+ब)} = \text{भुअ.कोब} + \text{कोअ.भुब} \dots\dots\dots (१२)$$

आतां या सारणी को एकांत (ब) चा ठिकाणी (-ब) कों समानून
धाची (२) कलमांनील दिसे प्रमाणें किंमत ठेव.

$$\text{भु(अ-ब)} = \text{भुअ.कोब} - \text{कोअ.भुब} \dots\dots\dots (१३)$$

या सारणी को एकांत (अ) चा ठिकाणी (१०-अ) लिहून (३) क
जमा प्रमाणें किंमत ठेविली असतां पुढें लिहिलेला सारणी को एक
उत्पन्न होतो.

$$\text{भु}\{ (१०-अ) - ब \} = \text{भु}(१० - (अ+ब)) =$$

$$\text{को(अ+ब)} = \text{कोअ.कोब} - \text{भुअ.भुब} \dots\dots\dots (१४)$$

या सारणी को एकांत (ब) कोनाचा ठिकाणी (-ब) धरून.

$$\text{को(अ-ब)} = \text{कोअ.कोब} + \text{भुअ.भुब} \dots\dots\dots (१५)$$

७ आतां (१२) आणि (१३) या सारणी को एकांची बेरीज व
वजाबाकी घेऊन रवालीं लिहिलेले सारणी को एक उत्पन्न हो-
तात.

$$\text{भु(अ+ब)} + \text{भु(अ-ब)} = २ \text{भुअ.कोब} \dots\dots\dots (१६)$$

$$\text{भु(अ+ब)} - \text{भु(अ-ब)} = २ \text{कोअ.भुब} \dots\dots\dots (१७)$$

याच रितीनें (१५) आणि (१४) या सारणी को एकांची बेरी
ज व वजाबाकी घेऊन.

$$\text{को (अ-ब) + को (अ+ब) = २कोअ कोब} \dots (१८)$$

$$\text{को (अ-ब) - को (अ+ब) = २भुअ भुब} \dots (१९)$$

अंतरवरील सारणी को एकान्त (अ+ब) = अ आणि (अ-ब) = ब असें मानिलें, तर या दोन समीकरणांनी बेरी-जबं वजावाकीं यांज पासून २अ = अ+ब व, २ब = अ-ब होईल. यास दोहोंनीं भागून अ = $\frac{१}{२}$ (अ+ब) आणि ब = $\frac{१}{२}$ (अ-ब) आहे. या किमती (१६), (१७), (१८), (१९) सारणी को एकान्त ठेवित्या असतां खातीं लिहित्या प्रमाणें सारणी को एकान्त होताना.

$$\text{भुअ + भुब} = २भु\frac{१}{२} (अ+ब) \cdot \text{को}\frac{१}{२} (अ-ब) \dots (२०)$$

$$\text{भुअ - भुब} = २को\frac{१}{२} (अ+ब) \cdot \text{भु}\frac{१}{२} (अ-ब) \dots (२१)$$

$$\text{कोब + कोअ} = २को\frac{१}{२} (अ+ब) \cdot \text{को}\frac{१}{२} (अ-ब) \dots (२२)$$

$$\text{कोब - कोअ} = २भु\frac{१}{२} (अ+ब) \cdot \text{भु}\frac{१}{२} (अ-ब) \dots (२३)$$

आतां (२१) सारणी को एकान्त (२०) सारणी को एकान्तें भागून-

$$\frac{\text{भुअ - भुब}}{\text{भुअ + भुब}} = \frac{२को\frac{१}{२} (अ+ब) \cdot \text{भु}\frac{१}{२} (अ-ब)}{२भु\frac{१}{२} (अ+ब) \cdot \text{को}\frac{१}{२} (अ-ब)} \quad \text{या समीकरणान्वा उजव्या बाजूंत (४) व (३) सारणी को एकान्तें किंमत ठेवून}$$

$$\frac{\text{भुअ - भुब}}{\text{भुअ + भुब}} = \text{को}\frac{१}{२} (अ+ब) \cdot \text{भु}\frac{१}{२} (अ-ब) \quad \text{यांत ए}$$

क वेळ को स्पर्श रेषे ची व पुनः स्पर्श रेषे ची (२) कलमांती ल किंमत ठेवून.

$$\frac{\text{भुज-भुव}}{\text{भुज+भुव}} = \frac{\text{स्पर्श (अ-ब)}}{\text{स्पर्श (अ+ब)}} = \frac{\text{कोस्पर्श (अ+ब)}}{\text{कोस्पर्श (अ-ब)}} \dots (२४)$$

याच प्रमाणें (२३) यास (२२) यानें भागून खाकी लिहि देलां. सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{\text{कोब-कोअ}}{\text{कोब+कोअ}} = \frac{२ \text{स्पर्श (अ+ब)} \cdot \text{भुर्श (अ-ब)}}{२ \text{कोस्पर्श (अ+ब)} \cdot \text{कोस्पर्श (अ-ब)}} \text{ या समीकरणाचा उजव्या बाजूंत (३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून}$$

$$\frac{\text{कोब-कोअ}}{\text{कोब+कोअ}} = \text{स्पर्श (अ+ब)} \cdot \text{स्पर्श (अ-ब)} \text{ यान पर्याया नें स्पर्श रेषे चा (२) कलमांती ल कि मती ठेवून.}$$

$$\frac{\text{कोब-कोअ}}{\text{कोब+कोअ}} = \frac{\text{स्पर्श (अ+ब)}}{\text{कोस्पर्श (अ-ब)}} = \frac{\text{स्पर्श (अ-ब)}}{\text{कोस्पर्श (अ+ब)}} \dots (२५)$$

वर लिहिल्या रितीनें (२०) यास (२२) यानें भागून.

$$\frac{\text{भुज+भुव}}{\text{कोअ+कोब}} = \frac{२ \text{भुर्श (अ+ब)} \cdot \text{कोर्श (अ-ब)}}{२ \text{कोस्पर्श (अ+ब)} \cdot \text{कोस्पर्श (अ-ब)}} \text{ भाजकानें भागून उजव्या बाजूंत (३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेव.}$$

$$\frac{\text{भुज+भुव}}{\text{कोअ+कोब}} = \text{स्पर्श (अ+ब)} \dots (२६)$$

याच रिती प्रमाणें (२३), (२३), (२१) या सारणी कोष्टकांत अनुक्रमें (२१), (२०), (२२) या सारणी कोष्टकांनीं भागून उजव्या बाजूंत (३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेविली

असतां पुटें लिहिलेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\frac{\text{कोब} - \text{कोअ}}{\text{भुअ} - \text{भुब}} = \text{स्प}^{\frac{1}{2}}(\text{अ} + \text{ब}) \text{ --- (२७)}$$

$$\frac{\text{कोब} - \text{कोअ}}{\text{भुअ} + \text{भुब}} = \text{स्प}^{\frac{1}{2}}(\text{अ} - \text{ब}) \text{ --- (२८)}$$

$$\frac{\text{भुअ} - \text{भुब}}{\text{कोब} + \text{कोअ}} = \text{स्प}^{\frac{1}{2}}(\text{अ} - \text{ब}) \text{ --- (२९)}$$

१० आतां (२०), (२२), (२३) या सारणी कोष्टकांत ब = अंश मानिले, तर खातीं लिहिलेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{भुअ} = २\text{भु}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \cdot \text{को}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \text{ --- (३०)}$$

$$१ + \text{कोअ} = २\text{को}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \text{ --- (३१)}$$

$$१ - \text{कोअ} = २\text{भु}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \text{ --- (३२)}$$

११ याच प्रमाणें (३०) सारणी कोष्टकांत (अ) या चा ठिकाणी (अ + ब) आणि (अ - ब) पर्यायानें ठेविले असतां खातीं लिहिलेलीं समीकरणें उत्पन्न होतात.

$$\text{भु}(\text{अ} + \text{ब}) = २\text{भु}^{\frac{1}{2}}(\text{अ} + \text{ब}) \cdot \text{को}^{\frac{1}{2}}(\text{अ} + \text{ब})$$

$$\text{भु}(\text{अ} - \text{ब}) = २\text{भु}^{\frac{1}{2}}(\text{अ} - \text{ब}) \cdot \text{को}^{\frac{1}{2}}(\text{अ} - \text{ब})$$

आतां या समीकरणांतील प्रथमास (२०) सारणी कोष्टका नें भागून.

$$\frac{\text{भु}(\text{अ} + \text{ब})}{\text{भुअ} + \text{भुब}} = \frac{\text{को}^{\frac{1}{2}}(\text{अ} + \text{ब})}{\text{को}^{\frac{1}{2}}(\text{अ} - \text{ब})} \text{ --- (३३)}$$

याच रितीनें दुसऱ्या व. पहिल्या समीकरणांस (२१) सारणी कोष्टकांनं भागून.

$$\frac{\text{भु}(अ-ब)}{\text{भुअ}-\text{भुब}} = \frac{\text{को३}(अ-ब)}{\text{को३}(अ+ब)} \dots\dots (३४)$$

$$\frac{\text{भु}(अ+ब)}{\text{भुअ}-\text{भुब}} = \frac{\text{भु३}(अ+ब)}{\text{भु३}(अ-ब)} \dots\dots (३५)$$

तसेंच दुसऱ्या समीकरणास (२०) सारणी कोष्टकांनं भागून

$$\frac{\text{भु}(अ-ब)}{\text{भुअ}+\text{भुब}} = \frac{\text{भु३}(अ-ब)}{\text{भु३}(अ+ब)} \dots\dots (३६)$$

१२ जर (३०) सारणी कोष्टकांत (अ) चा त्रिकोणी (२अ) मानिला, तर पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{भु२अ} = २\text{भुअ} \cdot \text{कोअ} \dots\dots (३७)$$

याच रितीनें (३१) सारणी कोष्टकांत (अ) चा त्रिकोणी (२३) मानून, स्थलांतरांनं आणि २कोअ ची भुजज्येंत किंमत ठेविल्या पासून येणारे जें समीकरणसोत (६) सारणी कोष्टकाप्रमाणें किंमत ठेविली असतां पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{को२अ} = २\text{कोअ} - १ = १ - २\text{भु३अ} = \text{कोअ} - \text{भु३अ} \dots\dots (३८)$$

१३ आतां (१२) सारणी कोष्टकास (१४) सारणी कोष्टकांनं भागून.

$$\frac{\text{भु}(अ+ब)}{\text{को}(अ+ब)} = \frac{\text{भुअ} \cdot \text{कोब} + \text{कोअ} \cdot \text{भुब}}{\text{कोअ} \cdot \text{कोब} - \text{भुअ} \cdot \text{भुब}}$$

या समीकरण-चा उजव्या बाजूतील अंश व छेद यांस (कोअ-कोब) यांनं भागून, दोन ही बाजूंत (३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेव.

$$\text{स्य (अ+ब)} = \frac{\text{स्यअ+स्यब}}{१-\text{स्यअ}\cdot\text{स्यब}} \dots\dots\dots (३९)$$

याच रितीनें (१३) यास (१५) यांनं भागून, पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{स्य (अ-ब)} = \frac{\text{स्यअ}-\text{स्यब}}{१+\text{स्यअ}\cdot\text{स्यब}} \dots\dots\dots (४०)$$

०४ आतां (१४) सारणी कोष्टकास (१२) सारणी कोष्टकांनं भागून-

$\frac{\text{को (अ+ब)}}{\text{भु (अ+ब)}} = \frac{\text{कोअ}\cdot\text{कोब}-\text{भुअ}\cdot\text{भुब}}{\text{भुअ}\cdot\text{कोब}+\text{कोअ}\cdot\text{भुब}}$ या समीकरण-चा उजव्या बाजूतील अंश व छेद यांस (भुअ-भुब) यांनं भागून दोन ही बाजूंत (४) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेव.

$$\text{कोस्य (अ+ब)} = \frac{\text{कोस्यअ}\cdot\text{कोस्यब}-१}{\text{कोस्यब}+\text{कोस्यअ}} \dots\dots\dots (४१)$$

याच प्रमाणें (१५) यास (१३) यांनं भागून खाली लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{कोस्य (अ-ब)} = \frac{\text{कोस्यअ}\cdot\text{कोस्यब}+१}{\text{कोस्यब}-\text{कोस्यअ}} \dots\dots\dots (४२)$$

१५ आतां (१२) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणी (अ+ब) आणि (ब) चा ठिकाणी (क) ठेविले असतां, त्याचें रूप खाली लिहिल्या प्रमाणें होईल.

(२२)

भु((अ+ब)+क) = भु(अ+ब)·कोक + को(अ+ब)·भुक
यात भु(अ+ब) आणि को(अ+ब) यांचा (१२) व (१४) स
रणी कोष्टकांतील किंमती ठेवून.

$$\begin{aligned} \text{भु(अ+ब+क)} &= (\text{भुअ} \cdot \text{कोब} + \text{कोअ} \cdot \text{भुब}) \cdot \text{कोक} \\ &+ (\text{कोअ} \cdot \text{कोब} - \text{भुअ} \cdot \text{भुब}) \cdot \text{भुक} \end{aligned}$$

उजव्या बाजूतील गुणकांनी गुणून.

$$\begin{aligned} \text{भु(अ+ब+क)} &= \text{भुअ} \cdot \text{कोब} \cdot \text{कोक} + \text{कोअ} \cdot \text{भुब} \cdot \text{कोक} \\ &+ \text{कोअ} \cdot \text{कोब} \cdot \text{भुक} - \text{भुअ} \cdot \text{भुब} \cdot \text{भुक} \end{aligned}$$

याच प्रमाणें (१४) सारणी कोष्टकांत वर लिहिलेल्या किं
मती ठेवून पुढील समीकरण उत्पन्न होतें.

$$\begin{aligned} \text{को(अ+ब+क)} &= \text{कोअ} \cdot \text{कोब} \cdot \text{कोक} - \text{भुअ} \cdot \text{भुब} \cdot \text{कोक} \\ &- \text{भुअ} \cdot \text{कोब} \cdot \text{भुक} - \text{कोअ} \cdot \text{भुब} \cdot \text{भुक} \end{aligned}$$

या दोन समीकरणांतील प्रथमास दुसऱ्याने भाग आणि उ
जव्या बाजूचे अंश व छेद यांस (कोअ·कोब·कोक) यांने
गुन त्या समीकरणाचा दोनही बाजूंत (२) सारणी कोष्ट
का प्रमाणें किंमत ठेव, ह्यणजे खाली लिहिलेल्या सारणी
ष्टक उत्पन्न होईल.

$$\text{स्प(अ+ब+क)} = \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पब} + \text{स्पक} - \text{स्पअ} \cdot \text{स्पब} \cdot \text{स्पक}}{1 - \text{स्पअ} \cdot \text{स्पब} - \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक} - \text{स्पब} \cdot \text{स्पक}} \dots \dots (१)$$

याच प्रमाणें वरील दुसऱ्या समीकरणास प्रथमानें भाग, अ

(२३)

णि उ.ज.व्या बाजूंतील अंशव छेद यां सा (भुअ-भुब-भुक) यांने भागून, त्या समीकरणांत (४) सारणी कोष्टका प्रमाणें किं-मत ठेव. झणजे पुढें लिहिते त्या सारणी कोष्टक उत्पन्न होईल.

$$\text{कोस्य (अ+ब+क)} = \frac{\text{कोस्यअ} \cdot \text{कोस्यब} \cdot \text{कोस्यक} - \text{कोस्यअ} - \text{कोस्यब} - \text{कोस्यक}}{\text{कोस्यअ} \cdot \text{कोस्यब} + \text{कोस्यअ} \cdot \text{कोस्यक} + \text{कोस्यब} \cdot \text{कोस्यक} - १}$$

१६ जर (३९), (४१) या सारणी कोष्टकांत अ = ब धरल्यांत रखाहीं लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{स्य २अ} = \frac{२\text{स्यअ}}{१ - \text{स्य}^२\text{अ}} \quad \text{--- (४५)}$$

$$\text{कोस्य २अ} = \frac{\text{कोस्य}^२\text{अ} - १}{२\text{कोस्यअ}} \quad \text{--- (४६)}$$

१७ जर (अ+ब) = नूअ, मानिल्या तर स्थलांतरांनै व साधारण गुणक काढून, ब = (न-१)अ आहे. या किमती (३९) सारणी कोष्टकांत ठेवून.

$$\text{स्य नअ} = \frac{\text{स्यअ} + \text{स्य (न-१)अ}}{१ - \text{स्यअ} \cdot \text{स्य (न-१)अ}} \quad \text{या समीकरणांत न = ३ धरून.}$$

$$\text{स्य ३अ} = \frac{\text{स्यअ} + \text{स्य २अ}}{१ - \text{स्यअ} \cdot \text{स्य २अ}} \quad \text{यांत (४५) सारणी कोष्टकांतील (स्य २अ) ची किंमत ठेवून.}$$

$$\text{स्य ३अ} = \frac{\text{स्यअ} + \frac{२\text{स्यअ}}{१ - \text{स्य}^२\text{अ}}}{१ - \text{स्यअ} \cdot \frac{२\text{स्यअ}}{१ - \text{स्य}^२\text{अ}}} \quad \left. \vphantom{\text{स्य ३अ}} \right\} \text{छेद सोडवून.}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{स्व३अ} &= \frac{\frac{\text{स्वअ} - \text{स्व२अ} + २\text{स्वअ}}{१ - \text{स्वअ}}}{\frac{१ - \text{स्वअ} - २\text{स्वअ}}{१ - \text{स्वअ}}} \end{aligned} \right\} = \frac{२\text{स्वअ} - \text{स्वअ}}{१ - ३\text{स्वअ}}$$

$$\text{स्व३अ} = \frac{२\text{स्वअ} - \text{स्वअ}}{१ - ३\text{स्वअ}} \dots \dots \dots (४७)$$

याश्च प्रमाणे वर सांगितलेल्या किंमती (४१) सारणी कोष्टकात ठेवून.

$$\text{कोस्वनअ} = \frac{\text{कोस्वअ} \cdot \text{कोस्व}(न-१)\text{अ}-१}{\text{कोस्वअ} + \text{कोस्व}(न-१)\text{अ}}; \text{यासमीकरणानु} \\ \text{न} = ३ \text{ धरून.}$$

$$\text{कोस्व३अ} = \frac{\text{कोस्वअ} \cdot \text{कोस्व२अ}-१}{\text{कोस्वअ} + \text{कोस्व२अ}} \text{ यांत (४६) सारणी को} \\ \text{ष्टकातील (कोस्व२अ) ची किंमत ठेवून.}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{कोस्व३अ} &= \frac{\frac{\text{कोस्वअ} \cdot \frac{\text{कोस्वअ}-१}{२\text{कोस्वअ}} - १}{\text{कोस्वअ} + \frac{\text{कोस्वअ}-१}{२\text{कोस्वअ}}} \end{aligned} \right\} \text{छेद सम करून भा} \\ \text{गाकारांनं.}$$

$$\text{कोस्व३अ} = \frac{\text{कोस्वअ} - \text{कोस्वअ} - २\text{कोस्वअ}}{२\text{कोस्वअ} + \text{कोस्वअ} - १} = \frac{\text{कोस्वअ} - ३\text{कोस्वअ}}{३\text{कोस्वअ} - १}$$

$$\text{कोस्व३अ} = \frac{\text{कोस्वअ} - ३\text{कोस्वअ}}{३\text{कोस्वअ} - १} \dots \dots \dots (४८)$$

१८ जातां (३२) सारणी कोष्टकास (३०) सारणी कोष्टकांनं भागून, यांत (३) सारणी कोष्टकाप्रमाणे किंमत ठेव, झणजे पुढें लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{१-कोअ}{भुअ} = स्प\frac{१}{२}अ - - - - - (४९)$$

या सारणी को ए का चाडाव्या बाजूतील अंश पदास भाज कानें पृथक् पृथक् भागून, त्यांत (२) कलमांत सांगितलेल्या किमती ठेविल्यानें पुढील सारणी को एक उत्पन्न होतो.

$$कोछेअ - कोस्पअ = स्प\frac{१}{२}अ - - - - - (५०)$$

आतां (४६) सारणी को ए का स दोन यांनीं गुणून रवालीं लिहित्या प्रमाणें.

$२कोस्प२अ = \frac{कोस्पअ-१}{कोस्पअ}$ या समीकरणाचा उजव्या बाजूतील अंश पदास भाज कानें पृथक् पृथक् भागून, त्यांत (२) कलमांतील किंमत ठेव, झणजे पुढील सारणी को एक उत्पन्न होतो.

$$२कोस्प२अ = कोस्पअ - स्पअ - - - - - (२१)$$

१९ जर (१३), (१५) या सारणी को ए का त (अ) चा ठिकाणीं (४५) आणि (ब) चा ठिकाणीं ($\frac{१}{२}अ$) ठेविले; तर त्या सारणी को ए कांचें रूप रवालीं लिहित्या प्रमाणें होईल.

$$भु (४५ - \frac{१}{२}अ) = भु ४५ \cdot को\frac{१}{२}अ - को ४५ \cdot भु\frac{१}{२}अ$$

$$को (४५ - \frac{१}{२}अ) = को ४५ \cdot को\frac{१}{२}अ + भु ४५ \cdot भु\frac{१}{२}अ$$

आतां (३) कलमा प्रमाणें भु ४५ = को ४५ आहे; याजकरितां या दोन समीकरणांत को ४५ या चा ठिकाणीं भु ४५ लिहून

(२६)

$$\text{सु (४९ - १/२ अ)} = \text{भु ४९} \cdot \text{को १/२ अ} - \text{भु ४९} \cdot \text{भु १/२ अ}$$

$$\text{को (४९ - १/२ अ)} = \text{भु ४९} \cdot \text{को १/२ अ} + \text{भु ४९} \cdot \text{भु १/२ अ}$$

या समीकरणों का उजव्या बाजूंतील साधारण गुणक काढून.

$$\text{सु (४९ - १/२ अ)} = \text{भु ४९} (\text{को १/२ अ} - \text{भु १/२ अ}) \dots (६)$$

$$\text{को (४९ - १/२ अ)} = \text{भु ४९} (\text{को १/२ अ} + \text{भु १/२ अ}) \dots (७)$$

या दोन समीकरणोंतील प्रथमास दुसऱ्याने भागून, (३) सारणी कोष्टकाप्रमाणे डाव्या बाजूंत किंमत ठेव.

$$\text{सु (४९ - १/२ अ)} = \frac{\text{को १/२ अ} - \text{भु १/२ अ}}{\text{को १/२ अ} + \text{भु १/२ अ}}$$

या समीकरणों का उजव्या बाजूंतील अंश छेदास (को १/२ अ - भु १/२ अ) यानें गुण.

$$\text{सु (४९ - १/२ अ)} = \frac{\text{को १/२ अ} - २ \cdot \text{भु १/२ अ} \cdot \text{को १/२ अ} + \text{भु १/२ अ}}{\text{को १/२ अ} - ५ \cdot \text{भु १/२ अ}}$$
 याचा उजव्या बाजूंतील अंशांत (६) व (३०) आणि छेदांत (३०) सारणी कोष्टकाप्रमाणें किंमती ठेव.

$$\text{सु (४९ - १/२ अ)} = \frac{१ - \text{भु अ}}{\text{को अ}}$$
 या समीकरणों का उजव्या बाजूंतील अंश पदास भाजकानें पृथक् पृथक् भागून, त्यांत (२) कलमांत सांगितलेल्या किंमती ठेवित्यानें पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{सु (४९ - १/२ अ)} = \text{छे अ} - \text{सु अ} \dots (५२)$$

यांत (३१) सारणी कोष्टकास (३०) सारणी कोष्टकानें भागू

नत्यांत (२) कलमां प्रमाणें किमती ठेवित्या असतां खालीं लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{कोस्य } \frac{1}{2} \text{अ} = \text{कोछेअ} + \text{कोस्यअ} \dots \dots \dots (५३)$$

२७ आतां (७१९) कलमांतील (य) समीकरणास (६५) समीकरणानें भागून, खालीं लिहित्या प्रमाणें होतें.

$$\frac{\text{को}(\frac{1}{2}\text{अ} - \frac{1}{2}\text{अ})}{\text{भु}(\frac{1}{2}\text{अ} - \frac{1}{2}\text{अ})} = \frac{\text{को}\frac{1}{2}\text{अ} + \text{भु}\frac{1}{2}\text{अ}}{\text{को}\frac{1}{2}\text{अ} - \text{भु}\frac{1}{2}\text{अ}}$$

याचा डाव्या बाजूंत (४) सारणी कोष्टका प्रमाणें किमती ठेवून, उजव्या बाजूंतील अंश व छेद यांस (को $\frac{1}{2}$ अ + भु $\frac{1}{2}$ अ) यानें गुण.

$$\text{कोस्य}(\frac{1}{2}\text{अ} - \frac{1}{2}\text{अ}) = \frac{\text{को}\frac{1}{2}\text{अ} + २\text{भु}\frac{1}{2}\text{अ} \cdot \text{को}\frac{1}{2}\text{अ} + \text{भु}\frac{1}{2}\text{अ}}{\text{को}\frac{1}{2}\text{अ} - \text{भु}\frac{1}{2}\text{अ}}$$

या समीकरणचा उजव्या बाजूंतील अंशांत (६) व (३०) अणि छेदांत (३८) सारणी कोष्टका प्रमाणें किमती ठेव.

$$\text{कोस्य}(\frac{1}{2}\text{अ} - \frac{1}{2}\text{अ}) = \frac{१ + \text{भुअ}}{\text{कोअ}} ; \text{याचा उजव्या बाजूंतील}$$

अंश पदासं भाजकानें पृथक् पृथक् भागून त्यांत (२) कलमांत सांगितल्या किमती ठेवित्यानें पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{कोस्य}(\frac{1}{2}\text{अ} - \frac{1}{2}\text{अ}) = \text{छेअ} + \text{स्यअ} \dots \dots \dots (५४)$$

२१ आतां (१२, (१४) या सारणी कोष्टकांत (अ) आणि (ब) या चाठिकाणी (१९) कलमांत सांगितलेल्या त्यांचा कि-मती ठेविल्या असतां, त्याच कलमांतील रिती प्रमाणें पुढील समीकरणें उत्पन्न होतात.

$$\text{भु} (४९ + \frac{१}{३} \text{अ}) = \text{भु} ४९ (\text{को} \frac{१}{३} \text{अ} + \text{भु} \frac{१}{३} \text{अ})$$

$$\text{को} (४९ + \frac{१}{३} \text{अ}) = \text{भु} ४९ (\text{को} \frac{१}{३} \text{अ} - \text{भु} \frac{१}{३} \text{अ})$$

या दोन समीकरणांतील दुसऱ्यास प्रथमास व प्रथमास दुसऱ्यास पृथक् पृथक् भागून (५४) आणि (५२) सारणी कोष्टकां चारितीनें रवाली लिहिलेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{कोस्य} (४९ + \frac{१}{३} \text{अ}) = \text{छेअ} - \text{स्पअ} - - - - (५५)$$

$$\text{स्प} (४९ + \frac{१}{३} \text{अ}) = \text{छेअ} + \text{स्पअ} - - - - (५६)$$

आतां (५६) सारणी कोष्टकांतून (५२) सारणी कोष्टक वजा करून स्थलांतरां पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होते.

$$\text{स्प} (४९ + \frac{१}{३} \text{अ}) = \text{स्प} (४९ - \frac{१}{३} \text{अ}) + २\text{स्पअ} - - (५७)$$

२२ अर (६) सारणी कोष्टकांत (अ) चाठिकाणी (४९) मानिलेन रवाली लिहिल्या प्रमाणें होवें.

$\text{भु} ४९ + \text{को} ४९ = १$ आतां (३) कलमा प्रमाणें $\text{भु} ४९ = \text{को} ४९$ आहे; याजकरितां या समीकरणांत को ४९ याचा ठिकाणीं भु ४९ लिहून.

(२९)

$\sqrt{४९} + \sqrt{४९} = १$ बेरीज घेऊन.

$२\sqrt{४९} = १$ गुणक सोडवून.

$\sqrt{४९} = \frac{१}{२}$ मूल काढल्याने, $\sqrt{४९} = \sqrt{\frac{१}{४}}$ अति सरळ रूप देऊन (३) कलमा प्रमाणें किंमत ठेविली असतां.

$$\sqrt{४९} = \text{को } \sqrt{९} = \sqrt{\frac{१}{२}} = \frac{१}{\sqrt{२}} \dots \dots \dots (५८)$$

याच रितीनें (३) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं

(४९) ही किंमत ठेविली असतां पुढें लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\text{स्य } \sqrt{४९} = \frac{\sqrt{४९}}{\text{को } \sqrt{४९}} \} \text{ यांत को } \sqrt{४९} \text{ याची वरचा सारणी को}$$

ष्टकातील किंमत ठेवून.

$$\text{स्य } \sqrt{४९} = \frac{\sqrt{४९}}{\sqrt{४९}} = १; \text{ आतां (३) कलमा प्रमाणें किं}$$

मत लिहून.

$$\text{स्य } \sqrt{४९} = \text{कोस्य } \sqrt{४९} = १ \dots \dots \dots (५९)$$

वरचा रिती प्रमाणेंच (३) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं (४९) लिहून, (५९) सारणी कोष्टकातील (स्य $\sqrt{४९}$) याची किंमत ठेविली असतां (३) कलमाचा साह्यानें पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\sqrt{४९} = \text{को } \sqrt{४९} = \sqrt{२} \dots \dots \dots (६०)$$

२३ आतां (३) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं (६०)

(३०)

ठे विले, तर खालीं लिहित्या प्रमाणें होतें:

$\text{भु } ६^{\circ} = २ \text{भु } ३^{\circ} \cdot \text{को } ३^{\circ}$, यांत (३) कलमा प्रमाणें को ३°
याचा ठिकाणीं भु ६° लिहून.

$\text{भु } ६^{\circ} = २ \text{भु } ३^{\circ} \cdot \text{भु } ६^{\circ}$ या समीकरणचा दोनही बाजूं
म (भु ६°) यानें भागून.

$१ = २ \text{भु } ३^{\circ}$ गुणक सोडवून (३) कलमा प्रमाणें किं
मत ठेविली असतां.

$$\text{भु } ३^{\circ} = \text{को } ६^{\circ} = \frac{१}{२} \quad \dots \quad (६१)$$

याच प्रमाणें जर (३१) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिका
णीं (६°) मानिले, तर खालीं लिहित्या प्रमाणें होईल.

$२ \text{को } ३^{\circ} = १ + \text{को } ६^{\circ}$ यांत (६१) सारणी कोष्टकां ती
ल (को ६°) याची किंमत ठेवून.

$$२ \text{को } ३^{\circ} = १ + \frac{१}{२}, \text{ बेरीज घेऊन गुणक सोडविल्यानें}$$

$\text{को } ३^{\circ} = \frac{३}{४}$, मूळ काढून, (३) कलमा प्रमाणें
किंमत ठेविली असतां.

$$\text{को } ३^{\circ} = \text{भु } ६^{\circ} = \sqrt{\frac{३}{४}} = \frac{१}{२} \sqrt{३} \quad \dots \quad (६२)$$

याच प्रमाणें खालीं लिहिलेले सारणी कोष्टक सुलभरि
तीनें उत्पन्न होतात.

$$\text{स्य } ३^{\circ} = \text{को स्य } ६^{\circ} = \sqrt{\frac{१}{३}} = \frac{१}{\sqrt{३}} \quad \dots \quad (६३)$$

(३१)

$$\text{कोस्य } ३^{\circ} = \text{स्य } ६^{\circ} = \sqrt{३} \text{ - - - - - (६४)}$$

$$\text{छे } ३^{\circ} = \text{कोछे } ६^{\circ} = \sqrt{\frac{४}{३}} = \frac{२}{\sqrt{३}} \sqrt{३} \text{ - - - - - (६५)}$$

$$\text{कोछे } ३^{\circ} = \text{छे } ६^{\circ} = २ \text{ - - - - - (६६)}$$

२४ अर (३४), (३८) या सारणी को एकान्त (अ) चा ठिकाणी (३६) ठे विले, तर त्या सारणी को एकान्तें रूप खाती लिहित्या प्रमाणें होईल.

$$\text{भु } (७२) = २ \text{ भु } ३६ \cdot \text{को } ३६ \text{ - - - - - (फ)}$$

$$\text{को } ७२ = २ \text{ को } ३६ - १ \text{ - - - - - (ग)}$$

आतां भु १०८ = भु (७२ + ३६) आहे; याज करिता (१२) सारणी की एकान्त (अ) चा ठिकाणी (७२) आणि (व) चा ठिकाणी (३६) ठे विले असता, त्याचें रूप पुढें लिहित्या प्रमाणें होईल.

$$\text{भु } (७२ + ३६) = \text{भु } ७२ \cdot \text{को } ३६ + \text{को } ७२ \cdot \text{भु } ३६$$

या समीकरणांत (भु ७२) आणि (को ७२) आहे, त्या ठिकाणी (फ) व (ग) या समीकरणांतील त्यांचा त्यांचा किमती ठेवून,

$$\text{भु } (७२ + ३६) = २ \text{ भु } ३६ \cdot \text{को } ३६ + २ \text{ को } ३६ \cdot \text{भु } ३६ - \text{भु } ३६$$

अथवा

$$\text{भु } (७२ + ३६) = ४ \text{ को } ३६ \cdot \text{भु } ३६ - \text{भु } ३६$$

(३२)

या समीकरणचा डाव्या बाजूत (४) कलमाचा टिपे प्रमाणे किंमत ठेवून.

$\text{भु } ७२ = ४ \text{ को } ३६ \cdot \text{भु } ३६ - \text{भु } ३६$ या समीकरणचा डाव्या बाजूत (भु ७२) आहे; त्या ठिकाणी याची (फ) समीकरणातील किंमत ठेवून.

$२ \text{ भु } ३६ \cdot \text{को } ३६ = ४ \text{ को } ३६ \cdot \text{भु } ३६ - \text{भु } ३६$ या समीकरणास (भु ३६) याने भाग:

$२ \text{ को } ३६ = ४ \text{ को } ३६ - १$ स्थलांतर करून चिन्हे बदल कर.

$$४ \text{ को } ३६ - २ \text{ को } ३६ = १ \text{ गुणक सोडवी.}$$

$$\text{को } ३६ - \frac{२}{४} \text{ को } ३६ = \frac{१}{४} \text{ वर्ग पुरा कर.}$$

$$\text{को } ३६ - \frac{२}{४} \text{ को } ३६ + \frac{१}{१६} = \frac{१}{१६} \text{ वर्ग मूळ काढ.}$$

$$\text{को } ३६ = \frac{१}{४} = \pm \frac{१}{४} \sqrt{५} \text{ स्थलांतराने.}$$

$$\text{को } ३६ = \frac{१}{४} + \frac{१}{४} \sqrt{५} \text{ साधारण गुणक काढून (३)}$$

कलमा प्रमाणे किंमत ठेविली असता.

$$\text{को } ३६ = \text{भु } ५४ = \frac{१}{४} (१ + \sqrt{५}) \text{ - - - - (६७)}$$

आता (भू०३४सि०) पासून (६) सीरणी कोष्टकाप्रमाणे येणारेजे समीकरण त्यांत (को ३६) याची (६७) सीरणी कोष्टकातील किंमत ठेवून, (३) कलमाचा माथ्याने

(२३)

खातीं लिहिले लासारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{भु } ३६ = \text{को } ५४ = \frac{१}{४} \sqrt{१० - २\sqrt{५}} \dots \dots \dots (६८)$$

याच प्रमाणें (३८) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणी (३६) ठेविजे असतां, खातीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

को ७२ = २को ३६-१ या समीकरणांत (को ३६) याची (६७) सारणी कोष्टकांतील किंमत ठेवून.

को ७२ = २($\frac{१}{४} (१ + \sqrt{५})$)^२ - १ उजव्या बाजूंतील प्रथम पदाचा वर्ग करून एक वजा कर.

को ७२ = $\frac{२}{१६} + \frac{४}{१६} \sqrt{५} + \frac{१०}{१६} - \frac{१६}{१६} = \frac{-४}{१६} + \frac{४}{१६} \sqrt{५}$
साधारणगुणक काढून (३) कलमा प्रमाणें किंमत ठेवि-
ली असतां.

$$\text{को } ७२ = \text{भु } १८ = \frac{१}{४} (-१ + \sqrt{५}) \dots \dots \dots (६९)$$

आतां (भू० ३४ सि०) पासून (६) सारणी कोष्टका प्रमाणें येणारें जें समीकरण त्यांत (को ७२) याची (६९) सारणी कोष्टकांतील किंमत ठेवून (३) कलमाचा साहाय्येनें खातीं लिहिला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{भु } ७२ = \text{को } १८ = \frac{१}{४} \sqrt{१० + २\sqrt{५}} \dots \dots \dots (७०)$$

२५ जर (१७) सारणी कोष्टकांत अ = ६० आणि ब = अ मानिला, तर त्या सारणी कोष्टकाचें रूप पुढें लिहिल्या प्रमा

णें होंतें.

भु(६०+अ)-भु(६०-अ)=२को६०. भुअ यांत(को६०)
यांची(६१) सारणी कोष्टकांतील किंमत ठेवून; स्थलांतरानें
पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{भु}(६०+अ) = \text{भु}(६०-अ) + \text{भुअ} \dots \dots (११)$$

आतां(६१) सारणी कोष्टकांतून (६१) सारणी कोष्टक
वज्रक सूत्र रचाली लिहित्या प्रमाणें होतें-

$$\text{भु} ५९ - \text{भु} १८ = \frac{१}{३} \text{ या समीकरणस्य (२कोअ)}$$

यानें सूत्रः

$$२\text{भु} ५९ \cdot \text{कोअ} - २\text{भु} १८ \cdot \text{कोअ} = \text{कोअ}$$

याचा डाव्या बाजूंत (५९) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत
ठेवून-

$$\text{भु}(५९+अ) + \text{भु}(५९-अ) - \text{भु}(१८+अ) - \text{भु}(१८-अ) = \text{कोअ} \dots (१२)$$

५६ आतां (कोअ+भुअ) = (कोअ+भुअ) आणि (कोअ-
भुअ) = (कोअ-भुअ) आहे, म्हणून या दोन समीकरणां
चे वर्ग ही बरा बरा आहेत. याज करितां,

$$(\text{कोअ} + \text{भुअ})^२ = \text{कोअ} + २\text{भुअ} \cdot \text{कोअ} + \text{भुअ}^२$$

$$(\text{कोअ} - \text{भुअ})^२ = \text{कोअ} - २\text{भुअ} \cdot \text{कोअ} + \text{भुअ}^२$$

या दोन समीकरणांचा उजव्या बाजूंत (६) , (३१) सारणी

कोष्ट कांतील किंमती ठेवून दोन ही बाजूंची वर्ग मुलें काढ

$$\text{कोअ} + \text{भुअ} = \sqrt{१ + \text{भु२अ}}$$

$$\text{कोअ} - \text{भुअ} = \sqrt{१ - \text{भु२अ}}$$

} या दोन समीकरणांची

वेरीज व वजाबाकी घेऊन, येणारी जी समीकरणें त्यास

दोन यात्री भाग ह्मणजे पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात

$$\text{कोअ} = \frac{१}{२} \sqrt{१ + \text{भु२अ}} + \frac{१}{२} \sqrt{१ - \text{भु२अ}} \dots (७३)$$

$$\text{भुअ} = \frac{१}{२} \sqrt{१ + \text{भु२अ}} - \frac{१}{२} \sqrt{१ - \text{भु२अ}} \dots (७४)$$

२७ आतां (६) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें.

७ : ८ :: भुअ : भुब मिश्रणानें व भागाकारानें लि

हून.

$$\frac{७}{७ + ८} = \frac{\text{भुअ} - \text{भुब}}{\text{भुअ} + \text{भुब}}$$

या समीकरणाचा उजव्या

बाजूंत (२४) सारणी कोष्टकांतील किंमत ठेवून.

$$\frac{७ - ८}{७ + ८} = \frac{\text{स्प}^{\frac{१}{२}}(\text{अ} - \text{ब})}{\text{स्प}^{\frac{१}{२}}(\text{अ} + \text{ब})}$$

(७५)

या सारणी कोष्टकांतील पदें प्रमाणांत लिहून.

$$७ + ८ : ७ - ८ :: \text{स्प}^{\frac{१}{२}}(\text{अ} + \text{ब}) : \text{स्प}^{\frac{१}{२}}(\text{अ} - \text{ब})$$

हें प्रमाण शिक्षा माला पुस्तकाचा दुसऱ्या भागातील त्रिकोणमितीचा (२सि० प्र०) झालें.

२८ आतां (६) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें पुढील समीकरणें होतात.

$$\frac{\text{श}}{\text{प्र}} = \frac{\text{भुअ}}{\text{भुक}} \dots (प) \quad \frac{\text{घ}}{\text{प्र}} = \frac{\text{भुब}}{\text{भुक}} \dots (ल)$$

या दोन समीकरणांची बेरीज घेऊन:

$\frac{\text{श+घ}}{\text{प्र}} = \frac{\text{भुअ+भुब}}{\text{भुक}}$ या समीकरणात (भुक) या चा ठिकाणी (४) कलमाचाटि पे प्रमाणें किंमत ठेव.

$\frac{\text{श+घ}}{\text{प्र}} = \frac{\text{भुअ+भुब}}{\text{भु(अ+ब)}}$ या चा उजव्या बाजूंत (३३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेव

$\frac{\text{श+घ}}{\text{प्र}} = \frac{\text{को } \frac{१}{३} (\text{अ-ब})}{\text{को } \frac{१}{३} (\text{अ+ब})}$ या समीकरणातील प्रमाणोंत लिहून:

को $\frac{१}{३} (\text{अ-ब})$: को $\frac{१}{३} (\text{अ+ब})$:: श+घ : प्र -- (७)
याच रितीने (प) समीकरणांतून (ल) समीकरण वजाव
रून.

$\frac{\text{श-घ}}{\text{प्र}} = \frac{\text{भुअ-भुब}}{\text{भुक}}$ या समीकरणात (भुक) या चा ठिकाणी (४) कलमाचा टिपे प्रमाणें किंमत ठेव

$\frac{\text{श-घ}}{\text{प्र}} = \frac{\text{भुअ-भुब}}{\text{भु(अ+ब)}}$ या चा उजव्या बाजूंत (३५) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून, येणाऱ्या समीकरणेचीं पदे प्रमाणांत लिहितीं असतां, पुढील सारणीचे एक उत्पन्न होतो.

$$\text{भु } \frac{१}{३} (\text{अ-ब}) : \text{भु } \frac{१}{३} (\text{अ+ब}) :: \text{श-घ} : \text{प्र} \dots (८)$$

२९ आतो जेर कोणत्याही त्रिकोणाचा अ, ब, क कोनां समोरील बाजू दाखवावयास अनुक्रमेण, छ, घ, झ आणि क कोना पासून समोरील बाजूवर केलेल्या लंब दाखविण्यास (कूड) घेतला तर (भू० ३६ किंवा ३७ सि० प्र०) स्वातीं लिहिलेलीं समीकरण उत्पन्न होतें.

$\theta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 \pm 2\alpha\gamma \cdot \text{अड}$ यांत (अड) ची (६) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें किंमत लिहून.

$$\theta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 \pm 2\gamma\alpha \cdot \text{कोअ}$$

आतां या समीकरणातील (अ) कोन लघु असल्यास (भू० ३७ सि० प्र०) उजव्या बाजूतील तिसऱ्या पदाचे चिन्ह (ऋण) होतें; आणि विशाळ असल्यास (भू० ३६ सि० प्र०) धन होईल, असें भासतें; परंतु विशाळ कोनाची को भुज ज्या (४) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें उणी आहे; तिनें (२प्र) यास गुणिलें असतां गुणाकार (ऋण) च होतो, झणून (अ) कोन कसा ही असो तथापि तिसरें पद (ऋण) च होईल, याज करितां.

$$\theta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha \cdot \text{कोअ} \dots \dots \dots (७८)$$

या सारणी फोष्ट कोनीय पदस स्थलांतर करून; गुणक सोडीव.

(३०)

कोअ = $\frac{घ^२ + प्र^२ - ७^२}{२घप्र}$ या समीकरणानें शिक्षामाला पु
स्तकाचा दुसऱ्या भागांतील त्रिकोणमितीचा (३सि०) चीं उ
दाहरणें होताना फक्तु हें लाग्रनमानें गणित करण्याचा उ
पयोगी नाहीं.

आतां या समीकरणानें छेद सोडवून.

$२घप्र \cdot कोअ = घ^२ + प्र^२ - ७^२$, जिहें बदल करून दो
न ही बाजूंत (२घप्र) मिळविल्यानें खाली लिहित्या प्र-
माणें होतें.

$$२घप्र - २घप्र \cdot कोअ = ७^२ + २घप्र - घ^२ - प्र^२$$

या समीकरणाने दोन ही बाजूंतून साधारण गुणक काढून.

$$२घप्र(१ - कोअ) = ७^२ - (घ - प्र)^२ \dots (न)$$

याच प्रमाणें वरील समीकरणानें जिहें बदल न करितां (२घप्र)
मिळवून वर लिहित्या रितीनें पुढील समीकरण उत्पन्न
होतें.

$$२घप्र(१ + कोअ) = (घ + प्र)^२ - ७^२ \dots (म)$$

आतां (न) आणि (म) या दोन समीकरणांचा डाव्या बा
जूंत (३३), (३१) सारणी कोष्टकातील किमती ठेवून,
उजव्या बाजूतील पदें गुण्य गुणकरुपांनें लिहित्वां अ
सतां खाली लिहित्या प्रमाणें होतें.

(३९)

$$\text{४ घप्र} \cdot \text{भु}^{\frac{३}{२}} \text{अ} = (\text{७} - \text{घ} + \text{प्र}) \cdot (\text{७} + \text{घ} - \text{प्र})$$

$$\text{४ घप्र} \cdot \text{को}^{\frac{३}{२}} \text{अ} = (\text{७} + \text{घ} + \text{प्र}) \cdot (-\text{७} + \text{घ} + \text{प्र})$$

आता $(\text{७} + \text{घ} + \text{प्र}) = २\text{अ}$ घेतले, तर वरील दोन समीकरणांचे रूप पुढे लिहित्या प्रमाणे होईल.

$$\text{४ घप्र} \cdot \text{भु}^{\frac{३}{२}} \text{अ} = २(\text{अ} - \text{घ}) \cdot २(\text{अ} - \text{प्र})$$

$$\text{४ घप्र} \cdot \text{को}^{\frac{३}{२}} \text{अ} = २(\text{अ}) \cdot २(\text{अ} - \text{७})$$

या दोन समीकरणांचे गुणक सोडवून वर्गमूल काढित्या नें खातीं लिहितेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होताने.

$$\text{भु}^{\frac{३}{२}} \text{अ} = \sqrt{\frac{(\text{अ} - \text{घ}) \cdot (\text{अ} - \text{प्र})}{\text{घप्र}}} \dots \dots \dots (७९)$$

$$\text{को}^{\frac{३}{२}} \text{अ} = \sqrt{\frac{\text{अ} \cdot (\text{अ} - \text{७})}{\text{घप्र}}} \dots \dots \dots (८०)$$

या दोन सारणी कोष्टकांतील प्रथमास दुसऱ्यानें भागून डाव्या बाजूंत (३) सारणी कोष्टका प्रमाणे किंमत ठेवून घणजे पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{स्प}^{\frac{३}{२}} \text{अ} = \sqrt{\frac{(\text{अ} - \text{घ}) \cdot (\text{अ} - \text{प्र})}{\text{अ} \cdot (\text{अ} - \text{७})}} \dots \dots \dots (८१)$$

या सारणी कोष्टकांत अक्षरांचा फेरफार करून पुढील स

मीकरणें उत्पन्न होतात.

$$\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{व} = \sqrt{\frac{(\text{अ}-\text{ब}) \cdot (\text{अ}-\text{घ})}{\text{अ} \cdot (\text{अ}-\text{घ})}}$$

$$\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{क} = \sqrt{\frac{(\text{अ}-\text{ब}) \cdot (\text{अ}-\text{घ})}{\text{अ} \cdot (\text{अ}-\text{घ})}}$$

हीं दोन समीकरणें व (७९), (८०), (८१) हे सारणीको
एक शिक्षा माला पुस्तकातील त्रिकोण मितिचा (३सि०)
ची लागूत मानें उदाहरणें करण्यास उपयोगी आहेत.

आतां यावर सांगितल्या समीकरणांस (८१) सारणीको
एकानें भागून पुढील सारणीको एक उत्पन्न होतो.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{व}}{\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{अ}} &= \frac{\text{अ}-\text{ब}}{\text{अ}-\text{घ}} \\ \frac{\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{क}}{\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{अ}} &= \frac{\text{अ}-\text{ब}}{\text{अ}-\text{घ}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (८२)$$

याच प्रमाणें वरील दोन समीकरणांस (८१) सारणीका
एकानें गुणून खालील लिहिलेला सारणीको एक उत्पन्न होतो.

$$\left. \begin{aligned} \text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \cdot \text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{व} &= \frac{\text{अ}-\text{घ}}{\text{अ}} \\ \text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \cdot \text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{क} &= \frac{\text{अ}-\text{घ}}{\text{अ}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (८३)$$

(४१)

आतां (३०) सारणी कोष्ट का चा उजव्या बाजूंत (७९)
 (८०) सारणी कोष्ट कांतील किमती ठेवित्या असतां पुढील
 सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो-

$$\text{भुज} = \frac{३}{४} \sqrt{\text{अ} \cdot (\text{अ}-\text{ब}) \cdot (\text{अ}-\text{घ}) \cdot (\text{अ}-\text{घ})} \dots (८४)$$

उदाहरणें.

प्रथम दोन किछे समुद्रांत किनाऱ्याशीं समरेघेंत आहेत त्या
 जमधील अंतर ५०० यार्ड व त्या अंतराचा मध्यावरच एक
 निशाण खडकावर उभें केलेलें आहे, इतके नकाशा वरून
 माहित आहे. आतां त्या किट्यांचा बाजू कडील भुमीचा
 एक सोडा समुद्रांत गेलेला आहे. त्या जवर त्या दोन ही कि-
 ट्यांस गोळा लागू होण्या सारिखा मोर्चा करणें आहे. परंतु
 त्या स्थला पासून एक एक किट्या किती लांब आहे हें कळा
 वें ह्मणून प्रत्येक किट्या व निशाण लक्षून दोन कोन मापि-
 ले, ते ३० आणि २० अंश झाले. तेव्हां त्या स्थला पासून प्र-
 त्येक किट्याची लांबी किती?

$$\text{उत्तर} \left\{ \begin{array}{l} \text{प्रथम किट्या } ४४५ \cdot ८३ \\ \text{दुसरा किट्या } ६५१ \cdot ७६ \end{array} \right\} \text{ यार्ड.}$$

दुसरे कोणा एका पलटणी वें निशाण शत्रुनें त्या ण सा-

लून नेऊन समुद्रांत एक सुदृढ किं छा होता, त्या चा बुरजा चा परिघावर भुमी कडील अंगी उभें करून ठेविलें. नंतर तो बुरूज फोडून निशाण आणावें; असें त्या पलटणीचा मनांत आलें. परंतु तो फांचे गोळे लागू होतील, किं वीष्वा हीं; हा विचार ठरवावया करितां जेथें मोरचा करणार त्या स्थला पासून बुरजा पर्यंत लांबी आणि त्या बुरजाची उंची ममांजीवी; झणून मोरचा करणार त्या स्थला पासून निशाणाचा पाया (बुंध) आणि शिखर लक्षून कोन मापिला, तो १० दहा अंश झाला; नंतर तेथून २०० याई मागें येऊन त्याच लक्ष्यांशीं कोन मापिला, तो १० दहा अंश झाला. आणि त्या निशाणाची उंची १२ फुटी माहित आहे. यावरून मोरचा करणार त्या स्थला पासून सरळ रेषेनें बुरजा पर्यंत लांबी व त्या बुरजाची उंची किती आहे तें सांग ?

उत्तर { मोरचा पासून लांबी ३४.०३ } फुट.
 { बुरजाची उंची २८.५५ }

दुसरीं या प्रमाणें कित्येकच मत्कारिक उदाहरणें लिहावयाचीं होती; परंतु विस्तारभयास्तव न लिहितां पुढें दुसरा विषय आरंभितों.

प्रथम प्रकरण समाप्त.

(४३)

प्रकरण दुसरें. गोलीयत्रिकोणमिति भागपहिला.

कलम ३०

व्याख्या.

१ गोल तोच होय, कीं जाची मर्यादा वांकडी पातळी, त्या गोलांतील एकाबिंदूपासून सर्वत्र सारख्या अंतरांनें आहे; आणि त्या, आंतील बिंदूस गोलाचा मध्यक्षणतातमनांत आण्णकीं, अर्धवर्तुळव्यासा भोंवतें फिरवित्यापासून गोल उत्पन्न होतो.

२ गोलाचा आस तीच सरळरेषा आहे, कीं जिचा वरज अर्धवर्तुळ फिरतें, आणि गोलाचा मध्य तोच आहे, कीं जो अर्धवर्तुळाचा मध्य क्षणजे, गोल आणि अर्धवर्तुळ यांचा मध्य एकच आहे, जापासून त्याची मर्यादा वांकडी पातळी सर्वत्र बराबर अंतरांनें आहे

३ गोलाचा एकी कडील मर्यादेपासून गोलाचा अंतर मध्य बिंदू छेदून पार दुसऱ्या कडील मर्यादे पर्यंत जाणारी जी सरळरेषा तिला गोलाचा व्यासक्षणतात. आणि गोलाचा मध्य बिंदूपासून गोल पृष्ठ पर्यंत जी सरळरेषा तिला गोलां

चीत्रिज्या क्षणतात.

४ विषुववृत्त, क्रांतिवृत्त इत्यादि जीं गोलाचे दोन सम-
भाग करितात, क्षणजे त्यांचा आणि गोलाचा मध्य बिंदु ए-
कच आहे, त्यांस महदृत्ते क्षणतात. आणि अयनवृत्त, ध्रुव-
वृत्त इत्यादि जीं गोलाचे दोन विषम भाग करितात, क्षणजे
त्यांचा मध्य बिंदु गोलाचा मध्य बिंदू वर नाही, अशीं जीं वृ-
त्ते त्यांस लघुवृत्ते क्षणतात.

५ महदृत्ताचा कोंसांतील कोणत्याही एक बिंदू पासून
नव्वद अंशांवर जो बिंदु त्यास त्या वृत्ताचा ध्रुव क्षणतात.

६ जाचा तीन ही बाजू गोलाचा महदृत्ताचे कोंस आहेत,
असा जो गोलाचा सपाटिचा भाग, त्यास गोलिय त्रिकोण क्ष-
णतात. व मर्यादा कोंसास त्रिकोणाचा बाजू क्षणतात. आ-
णि कोन तोच होय कीं, त्या कोनाचा दोहों कडील बाजूंचा
झोंकानें झाला आहे. पुढें जेथें अमुकच त्रिकोण सांगितला
नसेल, तेथें गोलिय त्रिकोण समजावा.

७ कोणत्याही गोलिय त्रिकोणांत एक कोन ध्रुवमानून
त्या कोनासमोर नव्वद अंशांवर जर एक कोंस केला, आ-
णि जाबाजूंनी तो कोन होतो. त्या बाजूंकडे त्या कोंसास मि-
ळत अशा क्षणजे नव्वद अंश होत पर्यंत वाट चिंत्यात

रत्यां मधील कोंसांत जितके अंश असतील, त्यांनीं समोरील कोन मापला जातो; कारण कोणता ही कोन ध्रुव मानून जर कोंस केला, तर तो महदृत्ताचा होतो. आतां मनांत आणकीं, केले त्या महदृत्ता नेंच गोलाचें दोन समभाग केले, आणि त्या वृत्ताचा ध्रुव हाता नेंच पून पातळी बराबर सपाट केले, तर त्याची आकृती दिग्दर्शन पुस्तकांतील खगोलाचानकाशाचा एका गोलार्धासारखी सपाट वर्तुळ होऊन, त्याचा मध्य बिंदु पूर्वोक्त वृत्ताचा ध्रुव होईल, याजकरितां ध्रुव स्थलीक्षणजे वर्तुळ मध्यावर जे कोन होताना, त्यांचें माप शिक्षामाला पुस्तकाचा दुसऱ्या भागांत (हट्टनकृत भूमितीचा अठ्ठावेंनाव्या व्याख्येप्रमाणे) समोरील कोंस आहे. या आणि भूमितीचा (५८) व्या, व्याख्येंत सर्व स्वी सादृश्य आहे

८ गोल, सरळ पातळी नें कापिला असतां, त्याचें छिन्न (भू० ११६ सि० प्र०) वर्तुळ होईल.

यांतील बहुतेक व्याख्या वगैरे शिक्षामाला पुस्तकाचा दुसऱ्या भागांत षसिद्धपदार्थविज्ञान, आदिकरूतकित्येक मराठी ग्रंथांत आहेत; परंतु आपणास जासूत्रांची गरज लागणार तीं सुचनार्थ एथें लिहिलीं आहेत.

प्रत्यक्ष प्रमाणें

१ महदृत्तों पर स्पर्शसदुभागितात-क्षणजे एक मेकास (१८०°) अंशांवर दोन ठिकाणीं छेदितात.

२ गोलीय त्रिकोणाचा बाजू महदृत्तांचे कोंस असतात; कारण गोलीय त्रिकोणमितीचा उपयोग मुख्यत्वे करून ज्योतिषगणिताला फार आहे, आणि आकाशातील कोणत्याही त्रिकोणाचा बाजूंचा कोंसाचा मध्य भूमध्य असतो, म्हणून गोलीय त्रिकोणाचा बाजू सर्वदा महदृत्तांचेच कोंस झटले पाहिजेत.

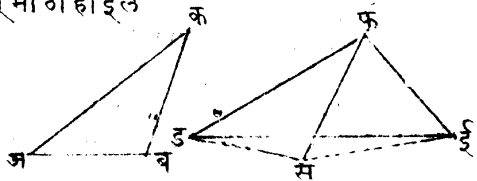
प्रथमसिद्धांत.

कोणत्याही दोन सरळ रेघ त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू अनुक्रमें दुसऱ्याचा दोन बाजूं बराबर असून एकाचा अंतरकोनापेक्षा दुसऱ्याचा अंतरकोन मोठा असेल तर दुसऱ्याचा अंतरकोनासमोरील बाजूपेक्षा मोठ्या अंतरकोनासमोरील बाजू मोठी होईल.

अथक आणि

डईफ या दो

न त्रिकोणां-



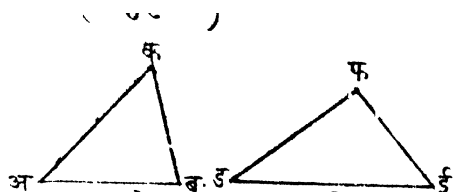
त एका चा अक, बक बाजू अनुक्रमें दुसऱ्याचा डफ, ईफ बाजूंबराबर असून क अंतर कोनापेक्षां फ अंतर कोन मोठा असेल तर अब बाजू हून डई बाजू मोठी होईल.

आतां \triangle क बराबर कोन करणारी फ बिंदू पासून रेखा कर, आणि बकचा बराबर फस घे तर ती डईफ त्रिकोणांत किंवा डई बाजूवर अथवा डफई \triangle बाहेर कोठें ही आली, तथापि सई, सड सांध; तेव्हां (भू०१सि०प्र०) अबक \triangle = डफस \triangle आणि सईफ \triangle सम द्वि बाजू होईल, याज करितां \angle फईस = \angle ईसफ आणि \angle डईस, \angle फईस कोनाचा तुकडा तो. \angle फईस किंवा त्याचा बराबरीचा \angle डसफ हून लहान आहे; म्हणून डईस त्रिकोणांत डईस कोनापेक्षां ईसड कोन मोठा याज करितां (भू०१सि०प्र०) सड किंवा तिचा बरोबरीचा अब बाजू हून डई बाजू मोठी आहे हें सिद्ध

दुसरा सिद्धांत.

जेव्हां दोन सरळ रेखा त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसऱ्याचा दोन बाजूंबराबर असून एकाची तिसरी बाजू दुसऱ्याचा तिसऱ्या बाजू हून मोठी असेल तर लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षां मोठ्या बाजूसमोरील कोन मोठा होईल.

अबक आणि
 डईफ या दोन
 त्रिकोणांनएका
 चा अक, बक बाजू अनुक्रमेणें दुस-याचा डफ, ईफ बाजूं ब
 रायर असून अब बाजू हून डई बाजू मोठी असेल, तर
 $\angle क$ पेक्षा $\angle फ$ मोठा होईल.



आतां मनांत आणकीं $\angle क = \angle फ$ आहे तर (भू०१सि०
 प०) अब = डई हावी, परंतु अब बाजू पेक्षा डई बाजू
 प्रतिलेनच मोठी असें सांगितलें आहे; म्हणून $\angle क =$
 $\angle फ$ होणार नाही. आणि जर $\angle क, \angle फ$ हून मोठा अ-
 सेल, तर (वरील सिद्धांता प्रमाणें) अब बाजू डई
 बाजू हून मोठी असावी; परंतु ती ही प्रतिलेनच लहा-
 नेच सांगितली आहे, याज करितां $\angle क, \angle फ$ हून मो-
 ठा नाही तर निश्चय कळून येतें कीं क कोना हून फ को-
 न मोठा आहे हें सिद्ध.



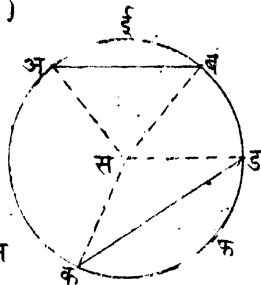
तिसरा सिद्धांत.

वर्तुळांतील अर्धवर्तुळ पर्यंत मोठ्या ज्या वर मो-
 ग कोंस आणि लहान ज्या वर लहान कोंस आहे.

(४९)

अईबडफकवर्तुळान

अबज्याहून कडज्यामोठीअ-
सेलतर अईबकोंसाहूनकफड
कोंसमोठाहोईल.



झणून सवर्तुळ मध्यापासून

सअ, सब, सक, सड त्रिज्याकर झणजे अबसआणिकडस
हेदोन त्रिकोणहोतील.

आतां 'अब'स, कडस यादोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बा
जू दुसऱ्याचा दोन बाजू बराबर असून एकाची तिसरी बाजू
दुसऱ्याचा तिसऱ्या बाजूहून मोठी आहे; झणून (वरील २सि०
प्र०) असब कोनापेक्षां कसड कोन मोठा आहे. याज करितां
(भू०५८ व्या० प्र०) त्याचा मापक जो कफड कोंस तो अईब
कोंसाहून मोठा आहे हे सिद्ध.

याच्चा उलट. जेव्हां कफड कोंस अईब कोंसाहून मोठा
असेल; तेव्हां त्याची कडज्या अईब कोंसाचा अबज्याहून
मोठी होईल.

आतां कफड कोंस अईब कोंसाहून मोठा आहे; याज
करितां (भू०५८ व्या० प्र०) त्यानें मापला जातो जो कसड
कोन तो अईब कोंसानें मापणाऱ्या असब कोनाहून मो-

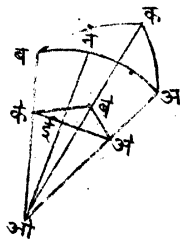
ठा आहै, झणून क सड, असब या दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसऱ्याचा दोन बाजू बराबर असून एकाचा अंतर कोन दुसऱ्याचा अंतर कोनाहून मोठा आहे, याज करितां (वरील श. सि. ० प्र. ०) त्याची जी कड ज्या ती अब ज्याहून मोठी आहे हे सिद्ध.

कुरलरी. या पासून सिद्ध होतें कीं, कोणत्याही कोंसाचा त्रिज्यांची लांबी बराबर असल्यास मोठ्या ज्यांवर मोठा व लहान ज्यांवर लहान कोंस आणि मोठ्या कोंसाची मोठी व लहान कोंसाची लहान ज्या असत्ये.

चौथा सिद्धांत.

कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाचा दोन बाजूंची बेरीज निसऱ्या बाजूहून अधिक आहे.[†]

अबक गोलीय त्रिकोण असेल तर त्याचा कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज निसऱ्या बाजूहून अधिक होईल, झणजे अक आणि बक या दोन बाजूंची



† भरीं वा चा आकृति कागदावर तथा स्थित दाखवितां येना हीं तः तथा पि बहुतेक आकृति सुबोध होण्या सारख्या कादत्या आहेत. फिल्यक

बेरीज अ ब बाजू हून अधिक होईल.

आतां ओ गोल मध्य बिंदू पासून अ ओ, क ओ, ब ओ त्रि-
ज्या कर, व अ ओ, ब ओ यांस सांधणारी कशी ही अंक सरळ
रेषा कर. आणि क ओ ब कोना बराबर अ ब कों सावर कोन क
रणारी ओ न सरळ रेषा कर ह्यणजे ती अंक रेघेस कोठें ही ई
स्थलीं मिळेल; तेव्हां ब क कों सबन कों सा बराबर किंवा क ओ ब को
न ब ओ न कोना बराबर होईल. आतां ओ ई = ओ ब अंतर क ओ
त्रिज्येवर घेऊन व. ब व अ ब सरळ रेघेनें सांध. ह्यणजे अंक ब
हा सरळ रेघ त्रिकोण होईल यांत (भू० १० सि० प्र०) क ब आ-
णि अ ब यादोन बाजूंची बेरीज अंक बाजूहून अधिक आहे;
परंतु ब क = क ई आहे, कारण ब ओ क आणि क ओ ई हे कोन प
रस्पर बराबर केले आहेत; व ई ओ बाजू बराबर ब ओ बा-
जू घेतली आहे. आणि क ओ बाजू दोन ही त्रिकोणांस साधार
ण याज करितां (भू० १ सि० प्र०) ब क बाजू क ई बाजू बराबर आहे

भरीव आकृति कागदावर काढित्वा ह्यणजे फारच दुर्बोध होतात. परंतु हा
ग्रंथ बालबोधव्यायाज करितां या पुस्तकांत तशा आकृतींची संख्या
जित्नी कमी होईल तिती केली आहे; आणि विषय ही फारच सुबो
ध केला आहे. असें असून ही जी आकृति दुर्बोध वाटेल ती कांहीं कांहीं
करावी. ह्यणजे समजून पडण्यास कठीण पडणार नाही.

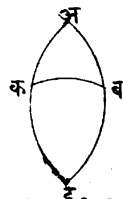
झणून बाकी राहिली जी अंब बाजूती अई बाजू हून मोठी आहे; परंतु अ ओब आणि अ ओई या दोन त्रिकोणांत अ ओ बाजू दोहोंस साधारण आहे, आणि पूर्वी सांगितल्या प्रमाणे अ ओई = ओब असून अंब बाजू अई बाजू हून मोठी आहे. झणून (वरील २सि०प्र०) तिचा समोरचा अ ओब कोन अ ओई कोना हून मोठा झणजे (भू०५८व्या०प्र०) त्याचा मापक जो अक कोंस तो अन कोंसा हून मोठा आहे; याज करिता अक आणि बक यांची बेरीज अन आणि बन यांचा बेरजे हून झणजे अब हून मोठी आहे हे सिद्ध.

पांचवा सिद्धांत.

कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाचा तीन बाजूंची बेरीज 360° अंशां हून उणी आहे.

अबक गोलीय त्रिकोण असेल, तर त्याचा अब, अक, बक या तीन बाजूंची बेरीज 360° अंशां हून कमी होईल.

आतां अक आणि अब या दोन बाजूंवादी व अशा कीटु स्थलावर एक मेकांस उघेदिलेली तर अकड आणि अबड या दोन कोंसांची बेरीज (वरी-



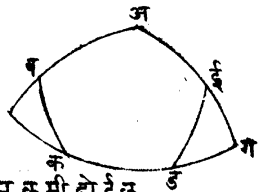
ल प्रत्यक्ष प्रमाणांत) सांगितल्या प्रमाणें ३६० आहे, आणि (वरील ४सि०प्र०) कड आणि बड यांची बेरीज बक हून अधिक आहे, व पूर्वी सांगितले कीं एक आणि अबकीं सां सजेव्हां कड व बड कोंस मिळवावे, तेव्हां ३६० होतील. परंतु त्यांचा बेरजे पेक्षा कमी जो बक कोंस तो मिळविला तर एक + अब + बक ही बेरीज ३६० हून कमीच होईल. आणि हे तीन ही कोंस गोलीय त्रिकोणाचा बाजू आहेत; याजकरितां तीन ही बाजूंची बेरीज ३६० हून कमी आहे हे सिद्ध.

कुरलरी यावरून सिद्ध होतें कीं, गोलीय त्रिकोणाची कोणती ही बाजू १८० अंशां हून कमी असत्ये.

सहावासिद्धांत.

कोणत्या ही गोलीय पंचकोनाचा पांच बाजूंची बेरीज ३६० अंशां हून उणी आहे.

कोणता ही अबकडई गोलीय पंचकोन असेल तर त्याचा अब, बक, कड, डई, ईअ या पांच बाजूंची बेरीज ३६० अंशां हून कमी होईल.



आतां अ कोना समोरील कड बाजू वाढीव अशी कीं -

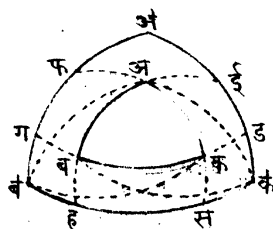
अब, अई वाढ विल्या बाजूंस फ आणि ग स्थलीं मिळेल, ते-
 हां अफ ग त्रिकोण झाला, त्याचा तीन बाजूंची झणजे अब +
 बफ + फक + कड + डग + गई + ई अ ही बेरीज (वरील
 ५ सि० प्र०) ३६० अंशां हून कमी आहे. झणून पंच कोनाकृत
 चा अब, बक, कड, डई, ई अ या बाजूंची बेरीज ३६० हून
 कमीच होईल. कारण त्रिकोणाचा बाजूंचा बेरजेपेक्षां पंच को-
 नाचा बाजूंचा बेरजेत बफ, फक, डग, गई या बाजूंनसून दुस-
 र्या बक, डई या दोन बाजू आहेत. परंतु त्या बफ, फक,
 डग, गई यांचा बेरजेहून (वरील ४ सि० प्र०) लहान आहेत
 याज करितां त्रिकोणाचा बेरजेतून मोठ्या बाजूकाढून त्यांचा
 बदली लहान बाजू मिळविल्या असतां बेरीज पूर्व बेरजे पे-
 क्षां लहानच होईल. आणि पूर्वीची बेरीज ३६० अंशां हून कमी
 आहे, याज करितां पंच कोनाचा पांच बाजूंची बेरीज ३६० अं-
 शां हून कमी आहे हे सिद्ध.

सातवा सिद्धांत.

कोणत्या ही गोलीय त्रिकोणाचे तीन कोन ध्रुव मानून
 कोंस केले असतां त्यां पासून जो दुसरा गोलीय त्रिकोण होतो
 त्याचेजे तीन कोन ते प्रथम गोलीय त्रिकोणाचा तीन हीं बा

जूंके ध्रुव आणि संपुमेंट होतील. तसेंच त्याचा जातीन बाजू त्या प्रथम त्रिकोणाचा तीनही कोनांचे संपुमेंट होतील.

जर अबक गोलीय त्रिकोण असेल तर त्याचे अ, ब, क कोन ध्रुव मानून बक, अक, अं ब कोंस के त्यास त्या पासून अं ब क दुसरा त्रिकोण होतो, त्यांचे अं अ, ब, क कोन ते प्रथम त्रिकोणाचा बक अक, अब बाजूंचे ध्रुव आणि संपुमेंट होतील. तसेंच त्याचा जा बक, अक, अं ब बाजू त्या प्रथम त्रिकोणाचा अ, ब, क कोनांचे संपुमेंट होतील.



आता बक बाजू अं ब आणि अक या कोंसां स मिळेल अशी ग आणि ड बिंदू पर्यंत वाढीव याच प्रमाणें अक आणि अब बाहेरील त्रिकोणाचा बाजूं स मिळत अशा फ, स व ह, ई बिंदू पर्यंत वाढीव आणि अब, क ब तसेंच बक अक इत्यादि सांध; तर (वरील ५ व्या० प्र०) अ या कोन बिंदू पासून बक, कोंसां तील कोणत्या ही बिंदू पर्यंत अंतर ९० अंश आहे; याच प्रमाणें क कोन बिंदू पासून अं ब कोंसां तील कोणत्या ही बिंदू पर्यंत अंतर ९० अंश आहे; संपूर्ण ब

(५६)

हा कोन अक कों साचा ध्रुव व त्याच प्रमाणें ब कोन बिंदू पा
सून क अ कों सातील सर्व बिंदू पर्यंत अंतर ९० अंश आणि
(वर सांगितल्या प्रमाणें) अ कोना पासून बक कों स पर्यं-
त अंतर ९० अंश आहे, याज करितां क कोन ब अ कों साचा
ध्रुव आहे, याच रितीनें अ हा कोन बक कों साचा ध्रुव आ
हे हें सिद्ध.

पुनः (वरील ७ व्या० प्र०) अ कोनाचें माप गब कड कों
स आहे; याज करितां (वर सांगितल्या प्रमाणें)

$$\text{गब} + \text{बक} = ९०$$

$$\text{तसेंच; कड} + \text{बक} = ९०$$

बेरीज घेऊन, $(\text{गब} + \text{बक} + \text{कड}) + \text{बक} = १८०$ } आतां गब
+ बक + कड याचा ठिकाणीं गब कड कोंस किंवा (वरी-
ल ७ व्या० प्र०) यानें माप तो जो अ कोन तो ठेविला तर तो
बक बाजूचा सफुमेंट आहे, व या प्रमाणेंच अक, अब
बाजूंचे ब आणि क हे कोन सफुमेंट होतात हें सिद्ध.

याच रितीनें अ कोनाचें माप (वरील ७ व्या० प्र०)
हस कोंस आहे; आणि (वर सांगितल्या प्रमाणें)

$$\text{बह} + \text{हस} = ९०$$

याच प्रमाणें, सक + हस = ९०

(बं ह + ह स + स क) + ह स = १८० } या बेरजेंती
 लहस कों सा चा विकार्णी (वरील ७ व्याख्ये प्रमाणे) त्यानें मा
 पला जातो जो अ कोना तो ठेविला आणि बं ह + ह स + स क
 याच्या विकार्णी बं ह स क कों स ठेविला तर तो अ कोना चा स-
 पूमेंट आहे, याच प्रमाणे ब, क कोनांचे अई ड क आणि बंगफअ
 हे कों स स पूमेंट होवात हे सिद्ध.

आठ वा सिद्धांत.

कोणत्याही गोळीय त्रिकोणाचा तीन कोनांची बेरीज दो
 न काट कोना हून अधिक आणि सहा काटकोना हून कमी होईल.
 कोणताही अबक किंवा अ ब क गोळीय त्रिकोण असेल
 तर त्याचा अ, ब, क अथवा अ, ब, क कोनांची बेरीज दोन काट
 कोना हून अधिक आणि सहा काटकोना हून कमी होईल.

आतां (वरचा सिद्धांताचा आकृती वर वृष्टि ठेव) अबक
 आणि अ ब क हे त्रिकोण परस्परांचे सपूमेंटरी आहेत. तेव्हां

* जा त्रिकोणाचे तीन हीकोन अनुक्रमें समोरील बाजूंचे ध्रुव आहेत, ए
 णजे जाचे तीन हीकोन अनुक्रमें समोरील बाजूंस मिळविले असतां दोन दोन
 काटकोन होतात, त्यास किंवा दोन त्रिकोणांत एकाचे तीन हीकोन अथवा वा
 अनुक्रमें दुसऱ्याचा तीन ही बाजूंस किंवा अंगनांस मिळविल्या असतां दोन दोन
 काटकोन होतात; त्या त्रिकोणास सपूमेंटरी अथवा ध्रुवक त्रिकोण असें म्हणतात.

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{बक} + \text{अ} = २ \\
 \text{अक} + \text{ब} = २ \\
 \text{अब} + \text{क} = २
 \end{array} \right\} \text{या चरित्तनें} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{बक} + \text{अ} = २ \\
 \text{अक} + \text{ब} = २ \\
 \text{अब} + \text{क} = २
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

वे०धे० $\text{बक} + \text{अक} + \text{अब} + \text{अ} + \text{ब} + \text{क} = ६$ $\{ \text{बक} + \text{अक} + \text{अब} + \text{अ} + \text{ब} + \text{क} = ६$

स्थ० $\{ \text{अ} + \text{ब} + \text{क} = ६ - (\text{बक} + \text{अक} + \text{अब}) \}$ $\{ \text{अ} + \text{ब} + \text{क} = ६ - (\text{बक} + \text{अक} + \text{अब})$

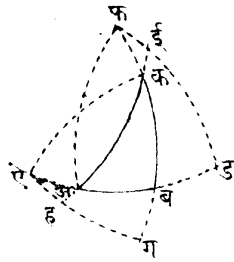
परंतु बक, अक, अब आणि बक, अक, अब या त्रिकोणांचा बाजू आहेत; म्हणून (वरील प्र० प्र०) त्यांची बेरीज ३६० अंशाहून ह्या त्रिकोणांचे चार काटकोनां हून कमी आहे; ती वजा केली असता जी तीन कोनांची बेरीज ती दोन काटकोनां हून अधिक आहे; या चरित्तनें वजा घ्याव्याची जी त्रिकोणांचा बाजूंची बेरीज ती कितीही लहान असली तरी बाकी सहा काटकोनां हून कमी राहिल, या जकरितां कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाचा तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां हून अधिक आणि सहा काटकोनां हून कमी आहे हे सिद्ध.

नववा सिद्धान्त.

कोणत्याही गोलीय काटकोन त्रिकोणाचा तीन बाजू दोन्ही कडे न घट न घट अंशपर्यंत वाढवित्या आणि त्यांची अ

ये सांघिलीं तर बाहेरील कोंस लघु कोनांचे कांठुमेंट होतील.

कोणताही अबक काट को-
न त्रिकोण असेल जांत ब को-
न काटकोन आहे तर त्याचा अब,
अक आणि बक या बाजू न घट
अंश पुरे होत अशा ड, ई, फ प
र्यंत वाढवून फ, ई, ड आणि



अ, फ हे बिंदू कोंस रूप बाजूनी सांघिले तर फ ई कोंसक अब
कोनाचा आणि अब कोंस ड फ ब कोनाचा कांठुमेंट होईल.

आतां ड ई कोंसक अब कोनाचें माप आहे, आणि बक.
बाजू न घट अंश होईल, अशी फ पर्यंत वाढ विली आहे, याज
करितां फ स्थलापासून अब ड कोंसांतील कोणत्याही बिंदू
पर्यंत अंतर न घट अंश आहे. म्हणून ड ई कोंसाचा झणजे
(वरील ७ व्या प्र०) त्यानें मापला जातो जो क अब कोन त्या
चा फ ई कोंस कांठुमेंट आहे, याच प्रमाणें ड फ ब कोनाचा
अब कोंस कांठुमेंट आहे हें सिद्ध.

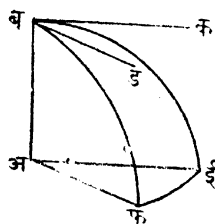
याच रितीनें दाखविलें जातें कीं हरे कोंस अब को-
नाचा आणि बक कोंस बरे ग कोनाचा कांठुमेंट आहे हें सिद्ध.

(६०)

दहावा सिद्धांत.

दोन मह दृत्तों पर स्परांस छेदि तील तर छेदन स्थली
दोन कोंसांनी जो कोन होतो, तो दोन वर्तुळां सत्याच स्थली
स्पर्श रेखा के त्या त्या मधील कोना बराबर आहे.

कोणते ही बई आणि बफ
मह दृत्तांचे कोंस ब स्थली पर
स्परांस छेदून ई बफ कोन करि
तात तो त्याच मह दृत्तांचा छे-
दन स्थलींचा बक आणि बड स्प
र्श रेखा तील कबड कोना बराबर आहे



झणून अगोल मध्या पासून बकशीं अई आणि बड
शीं अफ समांतर रेखा करून ईफ, अब सांधतर अब त्रि
ज्या (भू० ४७ सि० प्र०) बक आणि बड रेखा वर लंब होई
ल. व त्यांशीं अई आणि अफ समांतर आहेत, याज करि
तां (भू० १२ सि० कु० प्र०) त्यां वर ही लंब होईल.

आतां ईअब आणि फअब कोन काटकोन आहेत;
याज करितां (भू० ५८ व्या० प्र०) बई आणि बफ कोंस नव
दअंश आहेत. झणून (वरील ७ व्या० प्र०) ईबफ कोंसांचे
भाप फई कोंस आहे, आणि (भू० ५८ व्या० प्र०) ईअफ

(६१)

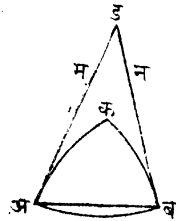
सरळ रेघ कोनाचें माप तोच कोंस आहे; अणून <ई ब फ = <ई अ फ आहे परंतु (भू० १०४ सि० प्र०) <ई अ फ = <क ब ड आहे. याज करितां (भू० प्र० प्र० प्र०) <ई ब फ = <क ब ड आहे हें सिद्ध.

कुरलरी-यावरून (भू० १०४ सि० सहायानें) सिद्ध होते कीं, गोला वरील दोन महद्वुत्तें परस्परांस छेदून पुढें वाढविलीं; तर त्यांतील छेदन स्थलींचा कोन त्याच स्थलां पासून त्यां वृत्तांस मिळेपर्यंत जा, ज्या कराव्या त्यांतील कोना बराबर आहे.

अकरावा सिद्धांत.

कोणत्या ही गोलीय त्रिकोणाचा दोन कोन स्थलीं बाजूंस स्पर्शरेषा केल्या; तर त्या परस्परांस मिळतात.

अबक गोलीय त्रिकोणाचा अ, ब कोन स्थलीं अक आणि बक बाजूंस अम आणि बन स्पर्शरेषा केल्या, तर त्या ड स्थलीं परस्परांस मिळतील.



आतां अब ज्या कर तेव्हां अक आणि बक कोंसांचा

(६२)

स्पर्श रेखा आणि अब कों साची ज्या यां पासून जे बर्जम आ
णि अबन कोंन होतात ते लघुकोन आहेत. कारण अक कों
साची अम आणि बक कों साची बन स्पर्श रेखा आहे, याज व
रितां वर्तुळ मध्यांतून अ आणि ब स्पर्श स्थलीं जाणारी रेषा
(भू० ४७ सि० प्र०) काटकोन करील, परंतु अशी वर्तुळ म.
ध्या पासून अब कों साचा अ आणि ब दोन ही शेवटां समि
ळणारी ज्या अब कों स १८० अंश असत्या वांचून होणार ना
हीं. आतां (वरील ४ सि० प्र०) अक + बक > अब हून मों
ठी आहे, त्यांत अब = १८० असत्यास (अब + बक + अक)
यांची बेरीज ३६० हून अधिक होईल. परंतु (वरील ५ सि० प्र०)
कोणत्या ही त्रिकोणाचा तीन बाजूंची बेरीज ३६० अंशां हून क
मी आहे; याज करितां (वरील ५ सि० कु० प्र०) गोलीय त्रि
कोणाची कोणती ही बाजू १८० हून कमी असत्ये; सणून
मअब आणि नब अ हे लघुकोन आहेत. याज करितां अम,
बनशीं समांतर नाहीं, आणि समांतर नाहीं सणून च ए
कमेकांसुड स्थलीं मिळतात हे सिद्ध.

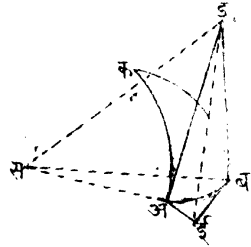
बारां वा सिद्धांत.

गोलीय समद्विबाजू त्रिकोणांत पाया कडील कोन बरा

(६३)

रा बर आं हेत अथवा जर कोणत्या ही गोलीय त्रिकोणांत दोन बाजू बराबर असतील तर त्यांचा समोरा समोरचा कोन बराबर होतील.

जर अबक त्रिकोणांत अक आणि बक या दोन बाजू बराबर असतील तर बकोन अकोना बराबर होईल.



झणून अ आणि ब कोन स्थलां अक, बक, अब या बाजूंस स्पर्श रेषा कर. तर त्या (वरील ११ सि० प्र०) कोनं हीड आणि ई स्थलां मिळतील.

आतां स गोल मध्यापासून सअ, सब त्रिज्या कर आणि सड साधनेद्वारां सबड आणि सअड हे दोन त्रिकोण आले. यांत सब आणि सअ त्रिज्या बराबर आहेत. व, सड बाजू दोहोंस साधारण आणि (भू० ४० सि० प्र०) सअड काटकोन सबड काटकोना बराबर याज करितां (भू० ३४ सि० २ कु० प्र०) अड = बड बाजू आहे. आणि (भू० ६१ सि० २ कु० प्र०) अई = बई आहे; आतां अडई, बडई या दोन त्रिकोणांत वर सिद्ध केल्या प्रमाणें अड = बड व

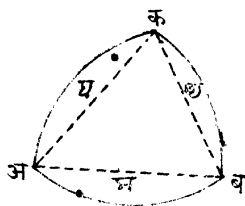
(६४)

अई = बई आणि डई बाजू दो हों स साधारण याज करि-
तां (भू० ५ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एक रूपक्षणजे <ड अई =
<ड बई आहे. परंतु (वरील १० सि० प्र०) <ड अई = <क अ ब
याच रितीनें <ड बई = <क ब अ आहे. यांत <ड अई =
<ड बई आहे. याज करितां <क अ ब = <क ब अ आहे
हें सिद्ध.

तेरावा सिद्धांत.

कोणत्या ही गोलीय त्रिकोणांत मोठ्या बाजू समोर
मोठा आणि लहान बाजू समोर लहान कोन आहे. तसेंच
मोठ्या कोना समोर मोठी व लहान कोना समोर लहान बा-
जू आहे.

अबक गोलीय त्रिकोणांत
अब बाजू अक, बक बाजूं हून
प्रत्येकीं मोठी असेल तर अब बा-
जू समोरचा <क, अक, बक यां-
चा समोरील <ब, <अ कोना हून
मोठा होईल.



क्षणून अक, अक, बक ज्या कर. आतां

अब बाजू अक, बक बाजू हून मोठी आहे. याज करितां (वरील ३सि०कु०प्र०) त्याची जी अन्न बज्या ती अथक अथवा बलक ज्या हून मोठी आहे. स्रणून (भू००सि०प्र०) प्रथम सरळरंघ त्रिकोणांत घकथ कोन < घअन्न किंवा < थबन्न या हून मोठा आहे; आणि हे तीन ही कोन (वरील ७व्या०प्र०) व (वरील १०सि०कु०प्र०) विचार करून पहातां अनुक्रमें अकब, कअब, कबअ कोना बरा बर आहेत. याज करितां घकथ अथवा त्याचा बरा बरी चानो अकब कोन तो < घअन्न, < थबन्न किंवा त्याचा बरा बरी चें जें कअब, कबअ या कोनां हून मोठा आहे हें सिद्ध.

याचा उत्पट जेव्हां अकब कोन कअब, कबअ कोनां हून मोठा असेल तर त्याचा समोरची अब बाजू अक किंवा बक बाजू हून मोठी होईल. आतां प्र, घ, थ ज्या कर, स्रण जें प्रथम सरळरंघ त्रिकोण होईल. त्याचा घकथ कोन पूर्वी मागितल्या प्रमाणें अकब कोना बरा बर होईल. स्रणून (भू००सि०प्र०) त्याचा समोरची जी प्र बाजू ती घ किंवा थ बाजू हून मोठी होईल. आणि घ अथवा थ या हून प्र मोठी आहे. याज करितां च (वरील ३सि०कु०प्र०) अब बाजू अक किंवा बक बाजू हून मोठी आहे हें सिद्ध.

भाग दुसरा.

गोलीय त्रिकोणमितीतील उपयोगी सारणी कोष्टक.

३१ गोलीय त्रिकोणमितीतील आदिकारण सारणी कोष्टक सिद्ध करणा करिता या आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे अबक

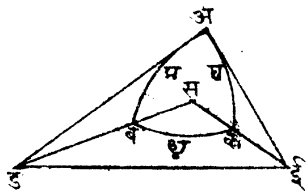
कोणता ही एक गोलीय त्रिको

ण असेल; जागोलाचा सम

ध्य बिंदु आहे. आतां अ, ब, क

कोनां समोरील बाजूंची लांबी

दाखवा यास अ, घ, झ हीं अ



क्षरें धर; आणि अस त्रिज्येचा अशेष टाबर लंबक रून ते वा

ढी व; असे कीं सब, सक या ढविलें त्या त्रिज्यांस ड आणि ई स्थ

लीं मिळतील. व ते (भू० ४६ सि० प्र०) अब, अक बाजूंचा

स्पर्श रेखा ही होतील; नंतर डई सांध.

आतां गोलाचा त्रिज्येची लांबी दाखवाव यास (७) घेत

* एबें लघुकोन त्रिकोण घेऊन पुढील सारणी कोष्टक सिद्ध केले आहेत.

परंतु ते लघु आदिकरून सर्व त्रिकोणांकरिता गू आहेत. कारण विशा

ळ कोनास मोर विशाळ झणजे नवद अंशां हून मोठी किंवा लघु कोनास

मोर लघु झणजे नवद अंशां हून लहान बाजू असले अमें नाहीं संपूर्ण

दृष्टीलेलें सारणी कोष्टक साधारण आहेत. याचा सत्यताचरील आकृ

तीत अ, ब, क कोन पर्श्यानें कसे ही घेतल्यास कळेल.

ली असता.स स्थायी जे कोन होतात. ते खातीं लिहित्या प्रमाणें अक्षरांनीं लिहितां येतील.

$\langle वसक = शु, \langle असक = घु, \langle असब = प्रु$, यात
(७).बराबर (१) धरिला असतां; $\langle वसक = शु, \langle असक = घु,$
 $\langle असंब = प्रु$, होईल. आणि त्रिज्या एक आहे, याज करि
तां अड = स्पप्र आणि अई = स्पघ व सड = छेप्र
सई = छेघ होईल.

आतां डअई त्रिकोणांत (१८) सारणी कोष्टकाची
योजना करून खातीं लिहित्या प्रमाणें होते.

$$\left. \begin{aligned} डई^2 &= अई^2 + अड^2 - २अई \cdot अड \cdot \cos \langle डअई \\ \text{याच प्रमाणें डसई त्रिकोणांत} \\ डई^2 &= डसई^2 + ईसई^2 - २सई \cdot सड \cdot \cos \langle डसई \end{aligned} \right\} \text{यांत बर}$$

लिहित्या किंमती ठेव.

$$डई^2 = स्पेघ + स्पेप्र - २स्पघ \cdot स्पप्र \cdot \cos \langle अ$$

$$डई^2 = छेघ + छेप्र - २छेघ \cdot छेप्र \cdot \cos \langle श या समीक$$

रणांत (३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून.

$$डई^2 = १ + स्पेप्र + १ + स्पेघ - २छेघ \cdot छेप्र \cdot \cos \langle श आतां डई^2$$

याथा दोन ही किंमती बराबर लिहून.

$$स्पेघ + स्पेप्र - २स्पघ \cdot स्पप्र \cdot \cos \langle अ = २ + स्पेघ + स्पेप्र - २छेघ \cdot छेप्र \cdot \cos \langle श$$

या समीकरणों की लपटा स्थलांतर कर. आणि चिन्हें बदल करून दोहों नी भाग.

$$\text{कोश} \cdot \text{कोम} \cdot \text{कोअ} = \text{स्पघ} \cdot \text{स्पम} \cdot \text{कोअ} + १$$

या समीकरण का डव्या बाजूंत (खे = कोमु) ही व उजव्या बाजूंत (३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून.

$$\frac{\text{कोश}}{\text{कोघ} \cdot \text{कोम}} = \frac{\text{भुघ} \cdot \text{भुम} \cdot \text{कोअ}}{\text{कोघ} \cdot \text{कोम}} + १ \quad \text{खेदसमकरून रद्द केल्यानें.}$$

$$\text{कोश} = \text{भुघ} \cdot \text{भुम} \cdot \text{कोअ} + \text{कोघ} \cdot \text{कोम} \quad \text{--- (८५)*}$$

या सारणी कोष्टका वरून सिद्ध होतें कीं, कोणत्या ही गोलीय त्रिकोणाचा एका बाजूची कोभुज ज्या त्याच बाजूचा समोरील कोनाची कोभुज ज्या आणि दुसऱ्या दोन बाजूंचा कोभुज ज्या या गुणाकार अधिक त्याच बाजूंचा कोभुज ज्यांचा गुणाकार या बराबर आहे. याज वरून पुढील दोन सारणी कोष्टका होताने.

* या सारणी कोष्टका कोश, कोअ, कोघ, कोम, यांची किंमत हे अत्र बबलघु असल्यास (धन) आणि विशाल असल्यास (४) कलमात्रमाणे (ऋण) होत्ये. परंतु (धन) किंवा (ऋण) याचा निर्णय (७), (अ), (घ), (झ) हे अवयव लघु अथवा विशाल ममज्या शिवायिस्ता रूपा कोष्टकाचेच होत नाही. या प्रमाणें पुढील सारणी कोष्टका ही विचार आहे.

‡ याची सत्वता (३१) कलमातील आकृतीचा (ब) आणि (क) कोन

(६९)

को घ = भु ७ · भु न · को ब + को ७ · को न - - - - (८६)

को न = भु ७ · भु घ · को क + को ७ · को घ - - - - (८७)

३२ आतां (८५) सारणी को ष्टकासं स्थलीं तैर करून व गुण
फ सोडवून को अ = $\frac{\text{को ७ - को घ · को न}}{\text{भु घ · भु न}}$ ही तीन बाजू दिल्या
पासून को नाची को भुज ज्या निघाळी त्या प्रमाणें च कोणत्या ही
त्रिकोणाचा तीन बाजूं समजल्या असतां तीन ही कोन कळ-
तात.

३३ आतां वरील समाकरणाचे छेद सोडवून.

को अ · भु घ · भु न = को ७ - को घ · को न हें समीकरण भु घ · भु न
= भु घ · भु न यांत एक वेळ वृजा करून व एक वेळ मिळवून आ-
णि साधारण गुणक काढून खाळी लिहिल्या प्रमाणें होतें.

(१-को अ) · भु घ · भु न = को घ · को न + भु घ · भु न - को ७

(१+को अ) · भु घ · भु न = को ७ - (को घ · को न - भु घ · भु न)

आतां या समीकरणांचा डाव्या बाजूंत (३२) व (३१) आणि उ-
जव्या बाजूंत (१५) व (१४) सारणी को ष्टका प्रमाणें किमती
लिहून.

· विट्स्व स्पर्शरेषा करून कृत्य फिरवून वरील रिती प्रमाणें पाहि-
लें असतां सहज कळेल.

$$\left. \begin{aligned} २. भु^{\frac{१}{३}} अ \cdot भु घ \cdot भु न &= को (घ-न) - को छ \\ २. को^{\frac{१}{३}} अ \cdot भु घ \cdot भु न &= को छ - को (घ+न) \end{aligned} \right\} \text{या दो न ही}$$

समीकरणों त (२३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किमत ठेवून, आणि दो हीं भागून खाली लिहित्या प्रमाणें होतें.

$भु^{\frac{१}{३}} अ \cdot भु घ \cdot भु न = भु^{\frac{१}{३}} (छ+घ-न) \cdot भु^{\frac{१}{३}} (छ+न-घ)$
 $को^{\frac{१}{३}} अ \cdot भु घ \cdot भु न = भु^{\frac{१}{३}} (घ+न+छ) \cdot भु^{\frac{१}{३}} (घ+न-छ)$
 आतां तीन बाजूंचा बेरजे वराबर (२४) वरून वगुणक सोडवून आणि वर्गमूळ काढून.

$$भु^{\frac{१}{३}} अ = \sqrt{\frac{भु(छ-घ) \cdot भु(छ-न)}{भु घ \cdot भु न}} \dots \dots (८८)$$

$$को^{\frac{१}{३}} अ = \sqrt{\frac{भु छ \cdot भु (छ-छ)}{भु घ \cdot भु न}} \dots \dots (८९)$$

२४ आतां (८८) आणि (८९) या सारणी कोष्टकांनीं परस्पर भागून डाव्या बाजूंत (३) आणि (४) सारणी कोष्टकां प्रमाणें किमत ठेवून खाली लिहित्या प्रमाणें होतें.

$$स्प^{\frac{१}{३}} अ = \sqrt{\frac{भु(छ-घ) \cdot भु(छ-न)}{भु छ \cdot भु(छ-छ)}} \dots \dots (९०)$$

$$को स्प^{\frac{१}{३}} अ = \sqrt{\frac{भु छ \cdot भु(छ-छ)}{भु(छ-घ) \cdot भु(छ-न)}}$$

या प्रमाणें च (ब) आणि (क) यांचा भुज्या इत्यादि (८६) आणि (८७) या सारणी कोष्टकां पासून वरील रिती प्रमा

ण नि, घन्तात.

$$\left. \begin{aligned} \text{स्व } \frac{1}{2} \text{ ब} &= \sqrt{\frac{\text{भु}(\text{अ-श}) \cdot \text{भु}(\text{अ-न})}{\text{भुअ} \cdot \text{भु}(\text{अ-घ})}} \\ \text{स्व } \frac{1}{2} \text{ क} &= \sqrt{\frac{\text{भु}(\text{अ-श}) \cdot \text{भु}(\text{अ-घ})}{\text{भुअ} \cdot \text{भु}(\text{अ-न})}} \end{aligned} \right\} \text{आतां या दोन}$$

ही स्पर्श रेखांस (१०) सारणी कोष्टकानें भागून.

$$\frac{\text{स्व } \frac{1}{2} \text{ ब}}{\text{स्व } \frac{1}{2} \text{ अ}} = \frac{\text{भु}(\text{अ-श})}{\text{भु}(\text{अ-घ})} ; \frac{\text{स्व } \frac{1}{2} \text{ क}}{\text{स्व } \frac{1}{2} \text{ अ}} = \frac{\text{भु}(\text{अ-श})}{\text{भु}(\text{अ-न})} \dots (११)$$

३५ पुनः स्व $\frac{1}{2}$ ब आणि स्व $\frac{1}{2}$ क या समीकरणोंस (१०) सारणी कोष्टकानें गुणून खाली लिहित्या प्रमाणें होतें.

$$\left. \begin{aligned} \text{स्व } \frac{1}{2} \text{ अ} \cdot \text{स्व } \frac{1}{2} \text{ ब} &= \frac{\text{भु}(\text{अ-न})}{\text{भुअ}} \\ \text{स्व } \frac{1}{2} \text{ अ} \cdot \text{स्व } \frac{1}{2} \text{ क} &= \frac{\text{भु}(\text{अ-घ})}{\text{भुअ}} \end{aligned} \right\} \dots (१२)$$

३६ आतां (८८) आणि (८९) हे सारणी कोष्टक परस्पर गुणून व त्यांची दुपट करून आणि डव्या बाजूंत (३५) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून व अति सरळ रूपें देऊन खाली लिहित्या प्रमाणें होतें.

$$\text{भुअ} = \frac{२ \sqrt{\text{भुअ} \cdot \text{भु}(\text{अ-श}) \cdot \text{भु}(\text{अ-घ}) \cdot \text{भु}(\text{अ-न})}}{\text{भुघ} \cdot \text{भुन}} \dots (१३)$$

याच प्रमाणें, भु ब आणि भु क यांचा किंमती निघतात. सारणी जे जाजा भुज ज्ये बराबर किंमत काढावयाची असेल,

त्या त्या कोनास मोरील बाजू भाजकांत येत नाहीं. या प्रमाणें ती न ही बाजू दिल्या असतां ती न ही कोनांचा भुजज्या निघतात ३७ आतां या (१३) सारणी कोष्टकाचा दोन ही बाजूंस भुश या नें भागून खातीं लिहित्या प्रमाणें होतें.

$$\frac{\text{भुअ}}{\text{भुश}} = \frac{२ \sqrt{\text{भुअ} \cdot \text{भु(अ-श)} \cdot \text{भु(अ-घ)} \cdot \text{भु(अ-प्र)}}{\text{भुश} \cdot \text{भुघ} \cdot \text{भुप्र}}$$

याच प्रमाणें (३६) कलमांत भुब आणि भुक यांजबराबर जाकि मती येतील, त्या दोन समीकरणांचा दोहो बाजूंस भुघ आणि भुप्र यांनीं अनुक्रमें भागितें असतां उजव्या बाजूया कलमांतील समीकरणा प्रमाणें होतात. याज करितां टाव्या बाजू परस्पर बराबर मांडित्या नें खातीं लिहित्या प्रमाणें होतें.

$$\frac{\text{भुअ}}{\text{भुश}} = \frac{\text{भुब}}{\text{भुघ}} = \frac{\text{भुक}}{\text{भुप्र}} \quad \text{--- (१४)}$$

आतां या सारणी कोष्टकातील सर्व पदें प्रमाणांत लिहून.

$$\text{भुश} : \text{भुअ} :: \text{भुघ} : \text{भुब} :: \text{भुप्र} : \text{भुक}$$

या वरून सिद्ध होतें कीं कोणत्या ही गोळीय त्रिकोणाचा कोनांचा भुजज्या बाजूंचा भुजज्याशीं प्रमाणांत आहेत. झणून ही पदें परस्पर गुणून खातीं लिहित्या प्रमाणें समीकरणें होतात.

$$\left. \begin{array}{l} \text{भुअ} \cdot \text{भुघ} = \text{भुब} \cdot \text{भुश} \\ \text{भुअ} \cdot \text{भुन} = \text{भुक} \cdot \text{भुश} \\ \text{भुब} \cdot \text{भुन} = \text{भुक} \cdot \text{भुघ} \end{array} \right\}$$

२८ आतां (८५) आणि (८७) सारणी कोष्टक घे.

$$\text{कोश} = \text{भुघ} \cdot \text{भुन} \cdot \text{कोअ} + \text{कोघ} \cdot \text{कोन}$$

कोन = भुश · भुघ · कोक + कोश · कोघ, या समीकरणात कोघ यानें गुणून रवालीं लिहित्या प्रमाणें होतें.

कोन · कोघ = भुश · भुघ · कोघ · कोक + कोश · कोघ
या समीकरणाचा डाव्या बाजूबराबरील किंमत वरील दोन समीकरणांतून प्रथम समीकरणाचा उजव्या बाजूतील दुसऱ्या पदांत ठेवित्यानें रवालीं लिहित्या प्रमाणें होतें.

कोश = भुघ · भुन · कोअ + कोक · भुश · भुघ · कोघ + कोश · कोघ
स्थलांतर करून रवालीं लिहित्या प्रमाणें हातें.

कोश - कोश · कोघ = कोअ · भुघ · भुन + कोक · भुश · भुघ · कोघ
या समीकरणांतून साधारण गुणक काढून (१ - कोघ) = भुघ
ही किंमत देवून आणि भुघ यानें भागून रवालीं लिहित्या प्रमाणें होतें.

$$\text{कोश} \cdot \text{भुघ} = \text{कोअ} \cdot \text{भुन} + \text{कोक} \cdot \text{भुश} \cdot \text{कोघ}$$

या समीकरणस भुशुयाने भागून आणि $\left(\frac{\text{भुन}}{\text{भुशु}} = \frac{\text{भुक}^*}{\text{भुज}}\right)$
ही बराबरीची किंमत उजव्या बाजूतील प्रथम पदात ठेवून
नखातीं लिहित्या प्रमाणें होतो-

$$\text{कोस्यशु} \cdot \text{भुघ} = \text{कोस्यअ} \cdot \text{भुक} + \text{कोक} \cdot \text{कोघ} \dots (१९३)$$

यारिती प्रमाणें दोन दोन कोणत्या हीं बाजू अनुक्रमें धरित्या
जसतां पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात-

$$\text{कोस्यशु} \cdot \text{भुन} = \text{कोस्यअ} \cdot \text{भुब} + \text{कोब} \cdot \text{कोन} \dots (१९६)$$

$$\text{कोस्यघ} \cdot \text{भुशु} = \text{कोस्यब} \cdot \text{भुक} + \text{कोक} \cdot \text{कोशु} \dots (१९७)$$

$$\text{कोस्यघ} \cdot \text{भुन} = \text{कोस्यब} \cdot \text{भुअ} + \text{कोअ} \cdot \text{कोन} \dots (१९८)$$

$$\text{कोस्यन} \cdot \text{भुशु} = \text{कोस्यक} \cdot \text{भुब} + \text{कोब} \cdot \text{कोशु} \dots (१९९)$$

$$\text{कोस्यन} \cdot \text{भुघ} = \text{कोस्यक} \cdot \text{भुज} + \text{कोअ} \cdot \text{कोघ} \dots (१९०)$$

हे सहा सारणी कोष्टक, एक बाजू व तिचा समोरीचा कोन आणि
दुसरी बाजू व तिचा समोरील कोनाचीं चून दुसरा कोन यांचा
परस्पर संबंध दाखवितात. याजवरून असे सिद्ध होतें कीं दोन
बाजू आणि अंतर कोन सांगितल्या असतां दुसरा कोन का
ढिता येतो; आणि तसेंच दोन कोन व अंतर बाजू सांगित-
ली असतां दुसरी बाजू काढिता येते. यात जो कोन किंवा बा

* हे प्रमाण (३०) कलमाचा शेवटील दुसऱ्या समीकरणाचे पर
पर गुणक सोडवित्या पासून होतें

मूका दावया ची असेल तिचा कोस्पर्श रेंपे पासून काढितां ये
 िल. परंतु ही रीति लाग्रत मानें गणित करण्याचा उपयोगी
 ाहीं; कारण यांत बेरीज च्या वयाची आहे.

३२. आतां (१५) आणि (१७) या सारणी कोष्टकांतून (घोर
 ३ करणें आहे, या साठीं (१५) सारणी कोष्टकास भुश) व (१७)
 ारणी कोष्टकास (भुघ. कोक) यांनं गुणून रवालीं लिहि-
 या प्रमाणें होतें.

कोश. भुघ = भुश. कोस्पअ. भुक + भुश. कोघ. कोक
 ३श. कोघ. कोक = भुघ. कोस्पब. भुक. कोक + कोश. भुघ. कोक
 आतां प्रथम समीकरणाचा उजव्या बाजूतील दुसरें पद (भुश
 कोघ. कोक) असें आहे. त्याचा ठिकाणीं दुसऱ्या समीकरणा-
 ची उजवी बाजू ठेव; आणि उजव्या बाजूतील शेवटील पदांस
 स्थलांतर करून व (१-कोक = भुँक) ही किंमत ठेव. नंतर
 भुक. नें भाग घ्याजे रवालीं लिहित्या प्रमाणें समीकरण उत्पन्न
 होतें.

कोश. भुघ. भुक = कोस्पअ. भुश) + कोस्पब. कोक. भुघ
 या सूत्रीकरणाचा उजव्या बाजूतील प्रथम पदांत (४)
 मारणी कोष्टकाप्रमाणें किंमत ठेविला असतां तें पद रवालीं
 लिहित्या प्रमाणें होतें.

कोअ-भुअ
भुज

या पदांत (३७) कलमाचा शोबटील प्रथम समीकरणाचे परस्पर गुणकांसां इषित्वा पासून इत्याख्या पदांबराबरील किंमत खाली लिहितो.

कोअ-भुघ
भुब

याच प्रमाणें वर लिहित्या समीकरणाचा उजव्या बाजूतील दुसऱ्या पदांत (४) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून.

कोब-कोक-भुघ
भुब

आतां हें, व वरील, हीं दोन पदां वरचा समीकरणाचा उजव्या बाजूंत ठेवून आणि भुब, यां गुणून.

कोअ-भुब-भुक = कोअ + कोब-कोक यास, स्थलांतर करून.

कोअ = कोअ-भुब-भुक - कोब-कोक - - - - (१०१)

यावरून सिद्ध होतें कीं, कोणत्या ही गोळीय त्रिकोणाचा एका कोनाची कोभुज ज्या त्याचा समोरचा बाजूची कोभुज-ज्या गुणिली दुसऱ्या दोन कोनांचा भुज ज्यांनी उणी त्याच दुसऱ्या दोन कोनांचा कोभुज ज्यांच्या गुणाकार, याज वरा बरा आहे. याज करितां दुसऱ्या दोन कोनांचा कोभुज ज्यां बरा बरील किंमती खाली लिहितो.

कोब = कोघ-भुअ-भुक - कोअ-कोक - - - - (१०२)

को क = को न्न·भुअ·भुब-कोअ·कोब . . . (१०२)

४० वरील (१०१), (१०२) आणि (१०३) या तीन सारणी कोष्टकां पासून जेव्हां कोन सांगितले आहेत, तेव्हां स्वाभाविक भुजज्या, कोभुजज्या यांचा योगानें बाजूकळतात. हे सारणी कोष्टक बाजू काढावयास उपयोगी आहेत, याजकरिता (१०१) सारणी कोष्टकातील पदांस स्थलांतर करून गुणक सोडविल्यानें त्याचें रूप खालील लिहिल्या प्रमाणें होईल.

कोश = $\frac{\text{कोअ} + \text{कोब} \cdot \text{कोक}}{\text{भुब} \cdot \text{भुक}}$; या प्रमाणें कोन सांगितले असता बाजू निश्चित.

याच प्रमाणें घ आणि न्न बाजूंचा कोभुजज्या (१०२) आणि (१०३) या सारणी कोष्टकां पासून वरील रिती प्रमाणें कढिता येतील.

४१ आतां (१०१), (१०२) व (१०३) आणि (८५), (८६) व (८७) या सारणी कोष्टकांत सादृश्य आहे; इतकाच फेरकीं यांत कोनांचा कोभुजज्या बराबर किमती आहेत, आणि (८५), (८६) व (८७) यांत बाजूंचा कोभुजज्या बराबर किमती आहेत, व चिन्हे उणी आहेत. याजवरून (८५), (८६) (८७) आणि (१०१), (१०२), (१०३) या सारणी कोष्टकां

सून गोलीय त्रिकोणाच्चा तीन बाजू किंवा तीन कोन दिले असता बाकी तीन अवयव झणजे बाजू किंवा कोन निघतील; अथवा (८५), (८६), (८७) या सारणी कोष्टकातील बाजू व कोन संपूर्ण टरी झणजे ध्रुवक, त्रिकोणाचे अवयव धरित्यास (को७) आहे, त्या ठिकाणी (को-अ) या प्रमाणें च (को८) च ठिकाणी (को-ब) आणि (को९) या चा ठिकाणी (को-क) लिहिल्या तरी चालेल; कारण हे कोंस परस्परांचे संपूर्ण आहेत. झणून त्यांचा कोभुज व्यावहारिक आहेत; परंतु चिन्हें मात्र ऋण अशा त्रिकोणास ध्रुवक, त्रिकोणासणतात. याजकरिता (८५) सारणी कोष्टकाचें रूप खाली लिहिल्या प्रमाणें होईल.

$$\text{को(७-अ)} = \text{को(७-७)} \cdot \text{भु(७-ब)} \cdot \text{भु(७-क)} \\ + \text{को(७-ब)} \cdot \text{को(७-क)}$$

या समीकरणाचें (४) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें खाली लिहिल्या पद्धतीचें रूप होईल.

$$- \text{को अ} = - \text{को ७} \cdot \text{भु ब} \cdot \text{भु क} + \text{को ब} \cdot \text{को क}$$

याचीं चिन्हें बदल केलीं असतां (१०१) सारणी कोष्टका प्रमाणें समीकरण सिद्ध होतें, यावरून (८५), (८६) आणि (८७) या सारणी कोष्टकांत जापेक्षां गोलीय त्रिको

णाचे सर्व धर्म आहेत, त्यापेक्षा बाजू आणि कोन यांचा संबंध दाखविणारा सारणी कोष्टक याही रितीने बाजूंचा ठिकाणी कोन आणि कोनांचा ठिकाणी बाजू लिहून सर्व कोभुज्यांचा मार्ग उणे चिन्ह जोडित्याने सिद्ध करिता येईल.

४२. आता (१०१) या सारणी कोष्टकातील पदांस स्थानंतर करून खालील लिहित्या प्रमाणे होतें.

को७. भुब.भुक = कोअ + कोब.कोक

हे समीकरण (भुब.भुक) यांतून एक वेळ वजा करून, उजव्या बाजूतील उणे चिन्ह साधारण बाहेर काढव एक वेळ मिळवून या दोन ही समीकरणांचा डाव्या बाजूतील गुणक बाहेर काढित्याने खालील लिहिलेली समीकरणे उत्पन्न होतात.

(१-को७).भुब.भुक = -(कोब.कोक-भुब.भुक) + कोअ

(१+को७).भुब.भुक = कोब.कोक + भुब.भुक + कोअ

या दोन समीकरणांत (३२) व (३१) आणि (१४) व

(१५) या सारणी कोष्टका प्रमाणे अनुक्रमे किमती लि-

हून खालील लिहित्या प्रमाणे समीकरणे होतात.

२भु^३.७.भुब.भुक = -(कोअ + को(ब+क))

$$२\text{को}^{\frac{१}{२}}\text{अ} \cdot \text{भुब} \cdot \text{भुक} = \text{को}(\text{ब}-\text{क}) + \text{कोअ}$$

या दोन ही समीकरणोंत (२२) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून, आणि दोहोंनीं भागून खालील्लिहित्या प्रमाणें होतें.

$$\text{भु}^{\frac{१}{२}}\text{अ} \cdot \text{भुब} \cdot \text{भुक} = -\text{को}^{\frac{१}{२}}(\text{ब}+\text{क}+\text{अ}) \cdot \text{को}^{\frac{१}{२}}(\text{ब}+\text{क}-\text{अ})$$

$$\text{को}^{\frac{१}{२}}\text{अ} \cdot \text{भुब} \cdot \text{भुक} = \text{को}^{\frac{१}{२}}(\text{अ}+\text{ब}-\text{क}) \cdot \text{को}^{\frac{१}{२}}(\text{अ}+\text{क}-\text{ब})$$

यांत अ, ब, क या तीन कोनांचा बेरजे बराबर (२३)

धरून आणि गुणक सोडवून, वमूळ काढून खालील्लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{भु}^{\frac{१}{२}}\text{अ} = \sqrt{\frac{-\text{कोस} \cdot \text{को}(\text{स}-\text{अ})}{\text{भुब} \cdot \text{भुक}}} \quad \text{--- (१०४)}$$

$$\text{को}^{\frac{१}{२}}\text{अ} = \sqrt{\frac{\text{को}(\text{स}-\text{ब}) \cdot \text{को}(\text{स}-\text{क})}{\text{भुब} \cdot \text{भुक}}} \quad \text{--- (१०५)}$$

४३ आतां (१०४) सारणी कोष्टकास (१०५) सारणी कोष्टकानें भागून व डाव्या बाजूंत (२) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून, खालील्लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टक होतो.

$$\text{स्य}^{\frac{१}{२}}\text{अ} = \sqrt{\frac{-\text{कोस} \cdot \text{को}(\text{स}-\text{अ})}{\text{को}(\text{स}-\text{ब}) \cdot \text{को}(\text{स}-\text{क})}} \quad \text{--- (१०६)}$$

आतां (१०४) आणि (१०६) या सारणी कोष्टकांचा गुणा-

काराची दुपट करून डाव्या बाजूंत (३०) सारणी कोष्ट
का प्रमाणें किंमत ठेव.

$$\text{भु७} = \frac{२ \sqrt{-\text{कोस} \cdot \text{को(स-अ)} \cdot \text{को(स-ब)} \cdot \text{को(स-क)}}}{\text{भुब} \cdot \text{भुक}} \quad (१०१)$$

४५ आतां (१०२) सारणी कोष्ट की तून (१०१) सारणी
कोष्टक वजा करून व उजव्या बाजूंतील साधारण गुणक
काढून.

$$\text{कोब} - \text{कोअ} = \text{भुक} \cdot (\text{कोघ} \cdot \text{भुअ} - \text{को७} \cdot \text{भुब}) + \text{कोक} (\text{कोब} - \text{कोअ})$$

आतां उजव्या बाजूंतील शेवटील, पदास स्थलांतर करून
व साधारण गुणक काढून खालीं लिहित्या प्रमाणें होतें.

$$(१ - \text{कोक}) (\text{कोब} - \text{कोअ}) = \text{भुक} \cdot (\text{कोघ} \cdot \text{भुअ} - \text{को७} \cdot \text{भुब})$$

आतां (३२) सारणी कोष्टका प्रमाणें डाव्या बाजूंत व (३०)
सारणी कोष्टका प्रमाणें उजव्या बाजूंत किंमत ठेवून आ
णि (२ भु^३क) या नें दोन ही बाजूंस भागून खालीं लिहि
त्या प्रमाणें होतें.

$$\text{कोब} - \text{कोअ} = \text{कोस्प}^{\frac{३}{२}} \text{क} \cdot (\text{कोघ} \cdot \text{भुअ} - \text{को७} \cdot \text{भुब})$$

अर्थात् या समीकरणास (भुअ-भुब) आणि (भुअ+भुब)
यांनी अनुक्रमें भागून व (२१) आणि (२८) या सारणी को
ष्टका प्रमाणें किंमती लिहून खालीं लिहित्या प्रमाणें समी
करणें होतात.

$$\left. \begin{aligned} \text{स्य } \frac{1}{2} (\text{अ+ब}) &= \text{कोस्य } \frac{1}{2} \text{क. } \frac{\text{को घ. भुअ - को श. भुब}}{\text{भुअ - भुब}} \\ \text{स्य } \frac{1}{2} (\text{अ-ब}) &= \text{कोस्य } \frac{1}{2} \text{क. } \frac{\text{को घ. भुअ - को श. भुब}}{\text{भुअ + भुब}} \end{aligned} \right\}$$

या समीकरणोंचा उजव्या बाजूतील अंश आणि छेद यांस (भुअ) यानें गुणून आणि (भुअ, भुब, भुक) यांचा ठिकाणी (भुश, भुघ, भुम) अशीं अनुक्रमें पदे ठेवून, नंतर (भुक) यानें अंश आणि छेद भाग, झणजे खाली लिहित्या प्रमाणें समीकरणें उत्पन्न होतात.

$$\left. \begin{aligned} \text{स्य } \frac{1}{2} (\text{अ+ब}) &= \text{कोस्य } \frac{1}{2} \text{क. } \frac{\text{को घ. भुश - को श. भुघ}}{\text{भुश - भुघ}} \\ \text{स्य } \frac{1}{2} (\text{अ-ब}) &= \text{कोस्य } \frac{1}{2} \text{क. } \frac{\text{को श. भुश - को श. भुघ}}{\text{भुश + भुघ}} \end{aligned} \right\}$$

आतां या समीकरणोंत (१३) व (३४) आणि (३६) या सारणी कोष्टकां प्रमाणें किमती अनुक्रमें दोन ही समीकरणोंचा उजव्या बाजूंत ठेवून खाली लिहित्या प्रमाणें होतें.

$$\text{स्य } \frac{1}{2} (\text{अ+ब}) = \text{कोस्य } \frac{1}{2} \text{क. } \frac{\text{को } \frac{1}{2} (\text{श-घ})}{\text{को } \frac{1}{2} (\text{श+घ})} \quad \dots (१०८)$$

$$\text{स्य } \frac{1}{2} (\text{अ-ब}) = \text{कोस्य } \frac{1}{2} \text{क. } \frac{\text{भु } \frac{1}{2} (\text{श-घ})}{\text{भु } \frac{1}{2} (\text{श+घ})} \quad \dots (१०९)$$

आतां (८६) सारणी कोष्टकांतून (८५) सारणी कोष्टकावजा करून आणि वर लिहिला संस्कार देऊन खाली लिहित्या

त्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{स्प } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{घ}) = \text{स्प } \frac{1}{2} \text{न} \cdot \frac{\text{को } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{ब})}{\text{को } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{ब})} \text{ --- (११०)}$$

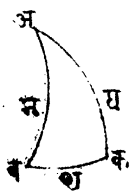
$$\text{स्प } \frac{1}{2} (\text{अ} \cdot \text{घ}) = \text{स्प } \frac{1}{2} \text{न} \cdot \frac{\text{भु } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{ब})}{\text{भु } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{ब})} \text{ --- (१११)}$$

हे चार सारणी कोष्टक; नेपियर या चा लाग्रॅन्त मानें गणित करण्यास फार उपयोगी झाले.

आतां (३१) कलमांतील आकृती पासून एथपर्यंत झालेले सारणी कोष्टक कोणत्या ही गोलीय त्रिकोणाचा बाजूवकोन यांची उदाहरणें करण्यास उपयोगी आहेत.

४५ आतां वरजें सारणी कोष्टक व समीकरणें तयार झालीं, तीं काटकोन त्रिकोणावर लाविलीं असतां सोपीं होतात. कारण त्यांत काटकोनाची कोभुज्या किंवा कोस्पर्शरेषा असत्ये, या मुळें कित्येक पदें उडतात.

आतां या आकृतींत (क) कोनकाटकोन असेल, तर त्याची कोभु. = ० आणि कोस्प. = ० आणि भु. = १ आहे.



तेह्नां (१०७) सारणी कोष्टकांत (क)

काटकोन मानिला असतां, खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरण हांते.

कोस्य घ·भु७ = कोस्य ब

या समीकरणस ($\frac{\text{भुघ}}{\text{कोस्य घ·भुघ}}$) यानें गुणून आणि (५) सारणी कोष्टका पासून उत्पन्न झाली, जी (कोस्य घ = $\frac{१}{\text{स्यघ}}$) ही किंमत उजव्या बाजूतील पदाचा छेदांत देवून, खातीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

भु७ = स्य घ·कोस्य ब

आतां (३७) कलमाचा शेवटील (९४) सारणी कोष्टका पासून उत्पन्न झालेलीं, जीं तीन समीकरणें त्यांतील दुसऱ्या समीकरणांत \angle क, काटकोन मानिला असतां, खातीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

भु७ = भुअ·भुअ

याच रितीनें (१०३) सारणी कोष्टकास स्थलांतर करून व \angle क, काटकोन मानून, (भुअ·भुब) यानें भागिल्यानें खातीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरण होतें.

कोअ = कोस्यअ·कोस्य ब

याच प्रमाणें (८७) सारणी कोष्टका पासून खातीं लिहिलेले समीकरण उत्पन्न होतें.

कोअ = को७·कोघ

तसेंच (१००) सारणी कोष्टकांत \angle क, काटकोन धरून

(८५)

न आणि (को घ) यानें भागून खालीं लिहित्या प्रमाणें समीकरण होतें.

कोअ = स्पघ. कोस्पन्न

याच रितीनें (१०१) सारणी कोष्टका पासून खालीं लिहित्या प्रमाणें समीकरण उत्पन्न होतें.

कोअ = को७. भुब

वर जीं काटकोन त्रिकोणा विषयीं निरनिराळीं सिद्ध झालेलीं, समीकरणें तीं सर्व खालीं लिहितों.

भु७ = स्पघ. कोस्पब = भुन्न. भुअ - - - - - (११२)

कोन्न = कोस्पज. कोस्पब = को७. कोघ - - - - - (११३)

कोअ = स्पघ. कोस्पन्न = को७. भुब - - - - - (११४)

४६ आतां यातीन हीं सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून खालीं लिहिलेले, सिद्धांत उत्पन्न होतात.

प्रथम सिद्धांत.

त्रिज्या, आणि एक पाय यांचा भुज ज्येचा जो काटकोन चौकोन घणजे गुणाकार होतो. तो जवळचा त्रिकोण कोनाची कोस्पर्शरेषा आणि दुसरा जो पायत्याची स्पर्शरेषा

* जाहोन बाजूंमधील अंतर कोन काटकोन असेल, त्या बाजूंस पायघणतात.

यां चा काट को न चो को ना बरा बर किं वा जो पाय घेत ला असेल,
त्या समोर चा को ना ची भुज ज्या व कर्णा ची भुज ज्या यां चा गु
णा कारा बरा बर आहे.

दुसरा सिद्धांत.

त्रिज्या आणि कर्णा ची को भुज ज्या यां चा गुणा कार, ति
र्क स को नां चा को स्पर्श रेषां चा गुणा कारा बरा बर, अथवा
जे दोन पाय त्यां चा को भुज ज्यां चा गुणा कारा बरा बर आहे.

तिसरा सिद्धांत.

त्रिज्या आणि तिर्क स को नां तून एक को ना ची को भुज
ज्या यां चा गुणा कार जवळ चा जो पाय त्या ची स्पर्श रेषा आ
णि कर्णा ची को स्पर्श रेषा यां चा गुणा कारा बरा बर किं वा स
मोर चा जो पाय त्या ची को भुज ज्या आणि दुसऱ्या तिर्क स को
ना ची भुज ज्या यां चा गुणा कारा बरा बर आहे.

यामिहंतां पासून काट को न त्रिकोणाचे सर्व अययवनिघतान.

उदाहरण.

डिमेंबर महिन्याचा एक विसाव्या तारखेस रत्नागिरी
त सूर्योदय किती वाजतां होईल? रत्नागिरी, सत्रा अक्षां
शांवर आहे; आणि इष्ट तारखेस सूर्याची क्रांति २३ २८
आहे.

या उदाहरण संबंधी व्याख्या.

खस्वस्तिक. तेंच होय, जो आपल्या मस्तकावरील आकाशातील बिंदु.

क्षितिजवृत्त. तेंच होय, जेथें पृथ्वीस आकाश लागले तें दिसतें.
याम्योत्तरवृत्त. तेंच होय, जें विषुववृत्तावर लंब असून दो
न ही ध्रुवांतून जातें.

उन्मंडल. विषुववृत्तावर उभें राहिलें असतां जें क्षि-
तिजवृत्त, होतें तें.

क्रांति. विषुववृत्तापासून कोणत्या हीताच्या पर्यंत या
भ्योन्नरजें अंतर, त्यास त्या ताच्याची क्रांति ह्म-
णतात.

आतां सूर्योदयास कमजास्ती वेळ लागण्याचें कारण.
त्याचा आरोपित गमन मार्गाचा क्षितिजावरील वर्तुळ खंड
डल्ल्यान; व क्षितिजाखालील मोठा; अथवा क्षितिजाव-
रील मोठा व खालील लहान, असणें हेंच आहे. तसेंच
खस्वस्तिकापासून सर्व दिशां कडे क्षितिजापर्यंत न बद-
न. बदल अंश असतात. ह्मणजे मनुष्य कोठें ही सपाटी व-
र उभा असो, तथापि क्षितिजावर अर्ध आकाश गोल त्या
स दिसतो. याच प्रमाणें कोणता ही तारा क्षितिजाजवळ

आल्या शिवाय दिसत नाही; हे सर्वोपमा हीतन्व असले.

जर विषुववृत्तावर उभे राहिले; तर दक्षिणोत्तर दोन ही ध्रुवांपर्यंत क्षितिज होईल. परंतु उत्तर गोलार्धात काही अक्षांशांवर उभे राहिल्यास तितके अंश दक्षिण ध्रुवावर, व उत्तर ध्रुवाखाली, क्षितिज जाईल. आतां उत्तरार्धातील पहाणाराचे क्षितिज, विषुववृत्ताशी मोठ्या उन्मंडलास छेदून सधून चढते जातां जातां दक्षिण ध्रुवाचा वरून, आणि उत्तर ध्रुवाचा खालून, पुढील अकृतींत दाखविल्या प्रमाणे जाईल. आणि उन्मंडल, व क्षितिज, यांजमधील सूर्याचा आरोपित गमन मार्गाचा उद, अतिक्रमण करावयास जो त्याला काळ लागतो; तेच सूर्योदयाचा न्यूनाधिक काळ, आहे.

या आकृतींत.

$$रट = ९०^{\circ}$$

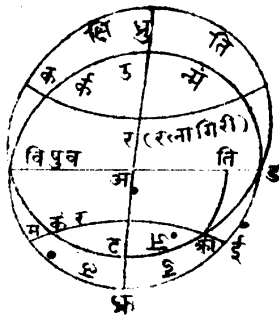
रअ = १७^{\circ} अक्षांश हे पूर्वी.

सांगितलेच आहे.

$$अट = ७३$$

याजकरिता अट चार अ

दाकापुढे टाकले.



तसेच क्रांति = २३ २८ ही या उदाहरणांतील सूर्याची स्पष्ट क्रांति आहे.

\angle क्रांति ड = ९०° ; \angle तिंड क्रां = ७३°, कारण (ध्रुव अट ध्रु) या वृत्ताचा ध्रुव (ड) आहे. ह्यणून तिंड क्रां हा कोन (अट) कोनांमध्ये मापला जातो.

आता वरील उदाहरणांत उन्मंडल आणि क्षितिज या मधील सूर्याचा आरोपित गमन मार्गाचा खंड (क्राई) यातील अंश संख्या विषुववृत्ता वरील (तिंड) खंडातील अंश संख्येबरोबर आहे. कारण त्या दोनही वृत्तांचा (ध्रु) हा ध्रुव आहे. ह्यणून (क्राई) चा ठिकाणी (तिंड) घेतला असता इच्छित उदाहरण करून (क्रांति ड) हा गोलीय काटकोन त्रिकोण होतो. त्याचें पृथक्करण पहिल्या सिद्धांत रितीनें होतें :

त्रिज्या \times भु (तिंड) = कोस्य \angle तिंड क्रां \times स्प क्रांति ; या समीकरणाचा उजव्या बाजूतील कोस्पर्श रेषेचा स्थली त्याचकोनाचा कोपूमेंटाची स्पर्श रेषालिहून.

त्रिज्या \times भु (तिंड) = स्पर् अ \times स्प क्रांति ; यांत, स्पर् अ = अक्षांश आहेत ह्यणून.

त्रिज्या \times भु (तिंड) = स्प अक्षांश \times स्प क्रांति

$$\text{त्रिज्या} \times \text{भु(तिड)} = \text{स्व } १७' \times \text{स्व } २३' २८''$$

लाग्रतमानें लिहित्यास.

ला त्रिज्या + ला भु(तिड) = ला स्व १७' + ला स्व २३' २८'' स्थलां
नरकरून, ला भु(तिड) = ला स्व १७' + ला स्व २३' २८'' - ला त्रिज्या
कि मती ठेवून.

$$\text{ला भु(तिड)} = ९५८५३३९ + ९६३७६११ - १० = ९१२२९५० \text{ ही}$$

भुजज्या ७° ३७' ३७'' यांची आहे.

तिड = ७° ३७' ३७'' } आतां १५ अंशास एक तास, अथवा
४ } दर अंशास चार मिन्युटें आहेत झणू
न सो होनीं गुणून.

मिन्युटें सेकंद प्रतिसेकंद
३० ३० २८

इतका काल (तिड) खंड क्रमण क-
राव यास लागेल; हा दक्षिण क्रांतिंतील आहे. याज करि-
तां सहा अवरांत मिळविला पाहिजे; व उत्तर क्रांतिंतील
असल्यास वजा करावा लागतो. याज करितां.

अथर मिन्युटें सेकंद प्रतिसेकंद इतक्या कालानें सू
६ ३० ३० २८

यीं दय होईल.

आतां हें उत्तर केवळ बराबर नाही कारण भू संनिहि
त वायु आहे, तेणें करून किरण व क्री भवन पावून (३३')

* हे मान सर्वदा बराबर असत नाहीं वायूचा भागानें व त्याचा उष्ण

तेतीस कला सूर्य क्षितिजा खाली असतांच दिसूलागतो या
 जाकरितां तितक्या कलांचा काल दरकलेस चार सेकंद या
 मानानें २ दोन मिऱ्युटे १२ बारा सेकंद वरील उत्तरांत वजा
 केला पाहिजे. व हें सर्व गणित भूकेंद्रा पासून आहे. अणून
 भूंपृष्ठा वरील लोकांस तो क्षितिजावर आठ विकला आ
 ल्या अणजे क्षितिजस्थ दिसतो. या जाकरितां तितक्या वि
 कलांचा काल बत्तीस प्रति सेकंद वरील उत्तरांत मिळवि
 ला पाहिजे. ही दोन ही केलीं असतां

अ० मि० से०
 ६ २८ १९

इतक्या कालानें सूर्या

चा मुंडलोदय होईल.

आतां याच दिवसाचा केंद्रोदयाची इच्छा असेल तर,
 सूर्य बिंबार्धाचा कलांचा काल वरील उत्तरांत मिळविला पा
 हिजे. नें बिंबार्ध १६ १७ इतकें आहे. याचा काल एक मिऱ्यु
 ट पांच सेकंद आठ प्रति सेकंद हा मिळविला असतां

अ० मि० से० प्र० से०
 ६ २९ २४ ८

इतक्या कालानें केंद्रोदय होईल

तेमुळे २९ २४ पासून ३३ पर्यंत कमजास्वी होते. परंतु याचें मध्यम मा
 न ३१ ४६ आहे.

ॐ ही संख्या सर्वदा बराबर असत नाही. पृथ्वी पासून सूर्याचें दूरत्व अ
 में अधिक उणें होतें तशी ही संख्या न्यूनाधिक होत्ये. ती या त्रिकोण
 मिनीनें मिथत्ये.

परंतु मध्यम काल ह्यणजे इंग्रजी रितीचीं घड्याळें जो काल दाखवितात, त्याची इच्छा असेल तर वरील दिवसाचें फालाचेंस मीकरण, -(१०४१) उणें एक मिन्युट एके चाळीस सेकंद हें पूर्वोक्त दृश्य कालांत मिळविलें असतां मध्यमकाल ६ अवर २७ मिन्युटें ४३ सेकंद ८ प्रति सेकंद इतका होतो.

या रितीनें कोणत्याही दिवसाची क्रांति आणि स्थलाचे अक्षांश समजल्या पासून त्या स्थलाचें दिनमान काढतां यावे, ह्यणून प्रत्येक दिवसाचा क्रांतिचा व कित्येक प्रसिद्ध स्थलांचा अक्षांशांचा कोष्टक या पुस्तकाचा शेवटीं दिला आहे. परंतु इष्ट दिवसाचा केंद्रोदयाची इच्छा असेल तर बिंबार्धाचा कलाचा दरकलेस चार सेकंद या प्रमाणें काल आलेल्या उत्तरांत मिळविला पाहिजे, परंतु बिंबसर्वदा सारिखें असत नाहीं. डिसेंबर महिन्याचा एकविसाव्या तारखेचा सुमारे सूर्य पृथ्वीचा जवळ असतो ह्यणून त्याचें बिंब ३२ ३५ असतें. व तेव्हां पासून दूर जात जात जूनचा एकविसाव्या तारखेस परमदूर होतो. तेव्हां बिंबाचें मान ३१ ३१ होतें. या प्रमाणें प्रतिदिवशीं न्यून अधिक होतें ह्यणून त्याची एकच संख्या सांगता येत नाही. परंतु सन १८३६चा शिक्षामंडळीचा पंचांगांत प्रति महिन्याचा चौथ्या पृष्ठावर बिंबार्धाचा कला लि-

हिल्या आहेत त्यांचा काल वरील उत्तरांत मिळवावा ह्यणजे इच्छित दिवसाचा केंद्रोदय कळेल. आणि त्याच दिवसाचा मध्यम कालाची इच्छा असेल तर पूर्वोक्त पंचांगाचा प्रतिमासिक पहिल्या पृष्ठावर साहाय्या कोष्टकांत दर दिवसाचे कालाचे समीकरण आहेत त्याचा चिन्हा प्रमाणें दृश्यकालास मिळवावें. ह्यणजे मध्यम काल कळेल.

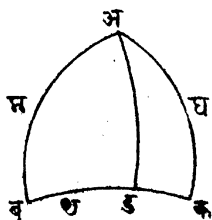
याच प्रमाणें या पुस्तकांत जे लघु किंवा विशाल अथवा काट कोन त्रिकोण यांचे सारणी कोष्टक इत्यादि लिहिले आहेत, ते सर्व भूव आकाश संबंधी गणिताचा उपयोगी आहेत.

तिर्कस कोन त्रिकोणा विषयीं विचार.

४७ तिर्कस कोन त्रिकोणांतील लंबाची योजना काट कोन त्रिकोणाचा समीकरणांत करून तिर्कस कोन त्रिकोणांचा उपयोगी सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

या आकृतींत, अड लंब कर.

आणि कड = ϕ व \angle क अड = θ
 घे: तूर बड = $\theta - \phi$ आणि \angle ब अड
 = अ - θ होईल.



आतां वरचा कलमांतील तिस

या सिद्धांता पासून खाली लिहित्या प्रमाणें समीकरणें
कोक = कोस्पघ · स्प१

या समीकरणांत (५) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न झालेली, (कोस्पघ = $\frac{1}{\text{स्पघ}}$) ही किंमत ठेवून आणि भाजक सोडवून, खाली लिहित्या प्रमाणें होतें.

$$\text{स्प१} = \text{स्पघ} \cdot \text{कोक} \text{ --- (११५)}$$

या सारणी कोष्टकाचा सहाय्यानें लंबापासून कोनापर्यंत अंतर कळतें.

४८ आतां घ, १, अड, हे अवयव एका काटकोन त्रिकोणांत, व झ, (७-१), अड हे दुसऱ्या त्रिकोणांत घेतल्यास दुसऱ्या सिद्धांता पासून खाली लिहित्या प्रमाणें समीकरणें होताना

$$\text{कोघ} = \text{को१} \cdot \text{कोअड}$$

$$\text{कोझ} = \text{को}(७-१) \cdot \text{कोअड}$$

यातील दुसऱ्यास, प्रथमानें भागून, पुढें लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टकांत उत्पन्न होतो.

$$\frac{\text{कोझ}}{\text{कोघ}} = \frac{\text{को}(७-१)}{\text{को१}} \text{ --- (११६)}$$

यावरून सिद्ध होतें कीं, लंबानें पायाचे झाले जे दोन खंड, त्यांचा कोभुज्या, जवळचा बाजूचा कोभुज्यांशीं प्रमाणें त आहें त.

४९. पुनः १, क, अड हे एका काटकोन त्रिकोणांत आणि (७-१), ब, अड हे दुसऱ्यांत धरिल्यास प्रथम सिद्धता पासून पुढें लिहिल्या प्रमाणें समीकरणें उत्पन्न होतात.

$$\text{भु } १ = \text{कोस्यक} \cdot \text{स्यअड}$$

$$\text{भु}(७-१) = \text{कोस्यब} \cdot \text{स्यअड}$$

यांतील प्रथमांस दुसऱ्यानें भागून खातीं लिहिल्या प्रमाणें

$$\frac{\text{भु } १}{\text{भु}(७-१)} = \frac{\text{कोस्यक}}{\text{कोस्यब}}$$

आतां (५) सारणी कोट्टका पासून उत्पन्न झालेल्या, (कोस्यक = ~~स्यक~~) आणि (कोस्यब = ~~स्यब~~) या किमती वरील समीकरणाचा उजव्या बाजूतील अंश आणि छेद स्थलीं ठेवून-

$$\frac{\text{भु } १}{\text{भु}(७-१)} = \frac{\text{स्यब}}{\text{स्यक}} \quad \text{--- (११३)}$$

या वरून सिद्ध होतें कीं, खंडाचा भुजज्या, जवळील कोनांचा स्पर्शरेषांशीं प्रमाणांत आहेत.

५०. आतां घ, क, कृ हे एका काटकोन त्रिकोणांत धरिल्यास (४६) कलमांतील दुसऱ्या सिद्धता पासून खातीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरण उत्पन्न होतें.

$$\text{कोघ} = \text{कोस्यक} \cdot \text{कोस्यकृ}$$

या समीकरणाचा उजव्या बाजूंत (५) सारणी कोट्टका

पासून उत्पन्न झालेली, (कोस्पक = $\frac{9}{\text{स्पक}}$) ही, किंमत आणि दोन ही बाजूंस (स्पक) या नें गुणिलें असतां खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{स्पक} = \frac{\text{कोस्पक}}{\text{कोघ}} \text{----- (११८)}$$

५१ याच प्रमाणें क, कु, अड हे, एका काटकोन त्रिकोणांत आणि ब, (अ-कु), अड हे, दुसऱ्यांत धरिल्यास (४६) कलमांतील तिसऱ्या सिद्धता पासून पुढील समीकरणें होतात.

$$\text{कोक} = \text{भुक} \cdot \text{कोअड}$$

$$\text{कोब} = \text{भु(अ-कु)} \cdot \text{कोअड}$$

यांतील दुसऱ्यास प्रथमानें भागून; खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{\text{कोब}}{\text{कोक}} = \frac{\text{भु(अ-कु)}}{\text{भुक}} \text{----- (११९)}$$

यावरून सिद्ध होतें की, लंब आणि बाजू यां पासून जेकोन होतात; त्यांचा भुज ज्या पाया कडील कोनाचा को भुज ज्यांशीं प्रमाणांत आहेत.

५२ आतां प्रथम घ, कु, अड व ङ, (अ-कु), अड हे आणि पुनः १, कु, अड व (अ-१), (अ-कु), अड हे अवयव धरून, वरचा रिती प्रमाणें खालीं लिहिले सा

रणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\frac{\text{कोकू}}{\text{को(अ-कू)}} = \frac{\text{स्पन्न}}{\text{स्पघ}} \dots \dots \dots (१२०)$$

$$\frac{\text{स्प१}}{\text{स्प(७-१)}} = \frac{\text{स्पकू}}{\text{स्प(अ-कू)}} \dots \dots \dots (१२१)$$

यावरून सिद्ध होते कीं, लंब आणि बाजूयां मधील कोनांचा कोभुज्या, बाजूचा स्पर्श रेषांशीं प्रमाणात आहेत. आणि त्या कोनांचा स्पर्श रेषा पायाचा खंडांचा स्पर्श रेषांशीं प्रमाणानें आहेत.

भाग तिसरा.

गोलीय त्रिकोणांचा पृथक्करणेचे वेगळे प्रकार.

५३ गोलीय त्रिकोणास सहा अवयव आहेत. झणजे तीन बाजू आणि तीन कोन, आतां कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाचे तीन अवयव सांगितले असतां, राहिले तीन अवयव सांगितल्याचा आधारानें पुढील सिद्धांतांवरून काढितां येतील.

१. जेव्हां तीन बाजू दिल्या असतील तेव्हां.
२. तीन कोन दिले आहेत तेव्हां.
३. दोन बाजू आणि अंतर कोन दिला असतां.
४. दोन कोन आणि अंतर बाजू दिली असतां.

दोन बाजू आणि त्यांतून एका बाजूसमोरील कोन दिल्या असता
 ६. दोन कोन आणि त्यांतून एका कोनासमोरील बाजू दिल्या असता.
 ५.४ आता प्रथम सिद्धांताची उदाहरणे (८८), (८९), (९०) या
 तून कोणत्याही सारणी कोष्टकापासून लाग्रतमरितीने होतात
 झणून (८८) सारणी कोष्टकात त्रिज्येची योजना केली अ
 सता, पुढील दिल्या प्रमाणे समीकरण उत्पन्न होते

$$\text{भु}^2 \text{अ} = \frac{\text{भु}(\text{अ}-\text{घ}) \cdot \text{भु}(\text{अ}-\text{म})}{\text{भुघ} \cdot \text{भुम}}$$

* जेव्हा कोना बराबर चा किमतीत त्रिज्येची योजना केली, तेव्हा ती दाख
 वा यास (२) आणि जेव्हा बाजूबराबर चा किमतीत केली, तेव्हा ती दाख वि-
 ष्यास (७) घेतला आहे याजवरून स्पष्ट आहे की (२) आणि (७) या
 ची किमते सर्वदा बराबर झणजे त्रिज्याच आहे.

यामूळ (८८) सारणी कोष्टकात (२) गुणक नसून एथे गुणक लाव
 ण्याचे कारण असे आहे की, जेव्हा हा सारणी कोष्टक उत्पन्न झाला, तेव्हा
 चयात्वारिती प्रमाणे त्रिज्या गुणक होती परंतु ती एक वलित्यामुळे गुण
 क किंवा भाजक लाविली असता ही किमतीत न्यूनाधिक होत नाही जसे ति
 स्या सारणी कोष्टकापासून (स्य कोभु = भु) असे होते, परंतु याचा वास्तवि
 क अर्थ (स्य कोभु = भु त्रिज्या) असा आहे तथापि त्रिज्या एक वलित्या मु
 ळं ती लाग्रत माशियायजे सारणी कोष्टक सिद्ध झाले आहेत त्यास गुण
 क किंवा भाजक असता ही लिहिली नाही परंतु लाग्रतम कोष्टकात एक ख
 र्व त्रिज्यामानून भुज्ज्या इत्यादिकांची लाग्रतम आहेत याज करिता ती, न
 लिहिल्यास किमती बराबर भिळणार नाहीत झणून रिती प्रमाणे जा सं
 रणी कोष्टकास त्रिज्या गुणक किंवा भाजक होती, ती लाग्रतमिक सारणी
 कोष्टकास प्रत्यक्ष गुणक किंवा भाजक लाविली आहे.

अथवा हेंचं समीकरण खाली लिहित्या प्रमाणें होईल.

$$\text{सु}^{\frac{1}{2}}\text{अ} = \sqrt{\frac{\text{र}}{\text{भुघ}} \cdot \frac{\text{र}}{\text{भुघ}} \cdot \text{भु}(\text{अ-घ}) \cdot \text{भु}(\text{अ-घ})}$$

हेंचं समीकरण लाग्रतमाचारितीनें खाली लिहित्या प्रमाणें होईल.

$$\text{लाभु}^{\frac{1}{2}}\text{अ} = \frac{1}{2}((१०-\text{लाभुघ}) + (१०-\text{लाभुघ}) + \text{लाभु}(\text{अ-घ}) + \text{लाभु}(\text{अ-घ})) \dots (१२२)$$

यांचरितीने (८९), (९०) सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून लाग्रतमरूपानें लिहित्या खाली लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टक होतील.

$$\text{प्रको}^{\frac{1}{2}}\text{अ} = \frac{1}{2}((१०-\text{लाभुघ}) + (१०-\text{लाभुघ}) + \text{लाभुअ} + \text{लाभु}(\text{अ-घ})) \dots (१२३)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{लास्य}^{\frac{1}{2}}\text{अ} &= \frac{1}{2}((१०-\text{लाभुअ}) + (१०-\text{लाभु}(\text{अ-घ})) \\ &+ \text{लाभु}(\text{अ-घ}) + \text{लाभु}(\text{अ-घ})) \end{aligned} \right\} \dots \dots (१२४)$$

याशेवटीलं सारणी कोष्टका पासून असें मिळवोते कीं, त्रिकोणाचा तीन बाजूंचा बेरजेचा अर्धाची लाग्रतमिक भुज ज्या दहांतून वजा करावी; आणि जो कोन काढावयाचा असेल, त्याचा समोरची बाजू तीन बाजूंचा अर्ध बेरजेंत वजा करून बाकीची लाग्रतमिक भुज ज्या दहांतून वजा करावी. आणि ती बाकी व पूर्वी दहांतून वजा केलें लेली बाकी यांची बेरीज घ्यावी. आणि त्या बेरजेंत काढावयाचा कोन समोरील बाजू खेरीज करून बाकी दोन बाजू अर्ध बेरजेंतून निरनिराळ्या वजा करून त्यांची

लाग्रतमिक भुज ज्यां ची बेरीज मिळ वावी. आणि त्यां बे रजे स दोहों नीं भा गावें, झणजे इच्छित्या कोना चा अर्धा ची लाग्रतमिक स्पर्श रेखा येईल.

याच सिद्धांताचा पृथक्करणार्थ (९३) सारणीकोष्टकां पासून ही, समीकरण उत्पन्न होती, परंतु कोन लघु किंवा विशाक्याचा निर्णय होत नाही, व आणखी ही बहुतेक अडचणी आहेत. झणून त्याचा व्यवहारांत फार उपयोग नाही; याजकरितां एथें लिहिलें नाही.

५५ (१२४) सारणीकोष्टका पासून एक कोन समजल्यावर बाकीचे कोन (९१) सारणीकोष्टका पासून खालीं लिहित्या प्रमाणें काढितां येतील.

$$\text{लास्य}^{\frac{1}{2}}\text{ब} = \text{लास्य}^{\frac{1}{2}}\text{अ} + \text{लाभु}(\text{अ}-\text{ध}) - \text{लाभु}(\text{अ}-\text{घ}) \dots (१२५)$$

$$\text{लास्य}^{\frac{1}{2}}\text{क} = \text{लास्य}^{\frac{1}{2}}\text{अ} + \text{लाभु}(\text{अ}-\text{ध}) - \text{लाभु}(\text{अ}-\text{घ}) \dots (१२६)$$

याच प्रमाणें स्पर्श रेखाचा व्युत्क्रम को स्पर्श रेखा आहे. याजकरितां (९२) सारणीकोष्टका पासून खालीं लिहित्या प्रमाणें कोष्टक उत्पन्न होताने.

$$\text{लाकोस्य}^{\frac{1}{2}}\text{ब} = \text{लाभुअ} + \text{लास्य}^{\frac{1}{2}}\text{अ} - \text{लाभु}(\text{अ}-\text{घ}) \dots (१२७)$$

$$\text{लाकोस्य}^{\frac{1}{2}}\text{क} = \text{लाभुअ} + \text{लास्य}^{\frac{1}{2}}\text{अ} - \text{लाभु}(\text{अ}-\text{घ}) \dots (१२८)$$

जेव्हां एकच कोन काढावयाचा असेल, तेव्हां (१२४) सार

णीकोष्टकापेक्षां (१२२) किंवा (१२३) या सारणी कोष्टकापासून सत्वर निघेल; परंतु जेव्हां लघुकोन काढवयाचा असेल तेव्हां (१२२) व विशाल कोन काढवयाचा असेल तेव्हां (१२३) सारणी कोष्टकाचा उपयोग करावा. कारण त्याप्रतम अंकांचा साधारण कोष्टकापासून अर्धकोन अधिक बराबर मिळतात. याजकरितां (१२२) आणि (१२३) सारणी कोष्टकाचे फार योग्य आहेत.

टीप. एककोन समजल्यावर बाकी कोन (३७) कलमांतील (१२४) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न झालेलीं, जीं ती नसलीं करणें त्यांचा सह्यानें निघतील. परंतु ती रीति (१२५) (१२६), (१२७) आणि (१२८) सारणी कोष्टकांत सांगितल्या प्रमाणें सुलभ नाहीं.

दुसरा सिद्धांत.

तीनकोन सांगितले आहेत तेव्हां.

१६ बाजू काढणें त्या (१०४), (१०५), (१०६), (१०७) या चार सारणी कोष्टकांचा उजव्या बाजूंस (७) आणि जेव्हां मुणक लावून, (१२५), (१२६), (१२७), (१२८) या सारणी कोष्टकांची रीति प्रमाणें कराव्या.

तिसरा सिद्धांत.

दोन बाजू आणि अंतर कोन दिला असता-

५७ प्रथम दोन कोन काढण्या करितां (१०८), (१०९) हे सारणी कोष्टक लाग्रतम रूपानें लिहून-

$$\text{लास्य } \frac{1}{2}(\text{अ}+\text{ब}) = \text{लाकोस्य } \frac{1}{2}\text{क} + \text{लाको } \frac{1}{2}(\text{ख}-\text{घ}) - \text{लाको } \frac{1}{2}(\text{ख}+\text{घ}) \quad (१२४)$$

$$\text{लास्य } \frac{1}{2}(\text{अ}-\text{ब}) = \text{लाकोस्य } \frac{1}{2}\text{क} + \text{लास्य } \frac{1}{2}(\text{ख}-\text{घ}) - \text{लास्य } \frac{1}{2}(\text{ख}+\text{घ}) \quad (१३०)$$

या प्रमाणें कोणत्या द्वीदोन कोनांचा बेरजेचें अर्ध आणि वजा बाकीचें अर्ध हीं समजलीं असतां; त्यांचा सून दोन कोन निघतात-

नंतर बाकी राहिलेली एक बाजू, (१४) सारणी कोष्टकाचा सून उत्पन्न झालेलीं, जीं तीन समीकरणें त्यांचा सहाय्यानें अधवा त्यांचे क्षा अधिक सुलभरितीनें (११०) किंवा (१११) सारणी कोष्टकांत (१३४) याची किंमत काढित्यानें निघत्ये-

५८ या सिद्धांताचा सून प्रथम तिसरी बाजूच काढणें आहे; तर (११५) सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून तोच (११६) या सारणी कोष्टकास लाग्रतमाचें रूप देऊन निघत्ये-

$$\text{लास्य } ७ = \text{लास्य } ६ + \text{लाकोक} - १० \quad (१३१)$$

$$\text{लाकोम} = \text{लाकोघ} + \text{लाको } (\text{ख}-७) - \text{लाको } ७ \quad (१३२)$$

यावरून उघड दिसतें कीं, वरील सारणी कोष्टकांत (ख)

काढिकाणीं (घ) आणि (घ) चा ढिकाणीं (ख) असें लिहि-

त्यास चिंता नाहीं कारण अंतर कोनाशीं त्यांचा संबंध सा-

रिखाची आहे.

चौथा सिद्धांत.

दोनकोन आणि अंतर बाजू दिली जाहेतेव्हा.

५९ प्रथम दोन बाजू काढणें त्या (११०) आणि (१११) हे सारणी कोष्टक लाग्रतम रूपानें लिहिले असता त्या पासून निघतील.

$$\text{लास्य}^{\frac{1}{2}}(\text{अ}+\text{घ}) = \text{लास्य}^{\frac{1}{2}}\text{प्र} + \text{लाको}^{\frac{1}{2}}(\text{अ}-\text{ब}) - \text{लाको}^{\frac{1}{2}}(\text{अ}+\text{ब}) \dots (१३३)$$

$$\text{लास्य}^{\frac{1}{2}}(\text{अ}-\text{घ}) = \text{लास्य}^{\frac{1}{2}}\text{प्र} + \text{लाभु}^{\frac{1}{2}}(\text{अ}-\text{ब}) - \text{लाभु}^{\frac{1}{2}}(\text{अ}+\text{ब}) \dots (१३४)$$

आतां या दोन सारणी कोष्टका पासून बाजू निघाल्यावर राहिलेला कोन (३०) कलमांतील (९४) सारणी कोष्टका पासून उत्पन्न झालेलीं, जीं तीन समीकरणें त्यांचा आधारानें अथवा त्यां पेक्षा अधिक वागल्यारितीनें (१०८) किंवा (१०९) सारणी कोष्टका पासून ही निघेल.

६० परंतु जर (घ), (अ), (क) दिलेले भाग असून प्रथमतः मराकोनच काढणें असेल; तर (११८) सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून तोच (११९) या सारणी कोष्टकास लाग्रतमार्थें रूप देऊन खालीलिहित्या प्रमाणें निघेल.

$$\text{लास्यक} = \text{लाकोस्यक} + ३० - \text{लाकोघ} \dots (१३५)$$

$$\text{लाकोब} = \text{लाकोक} + \text{लाभु}(\text{अ}-\text{क}) - \text{लाभुक} \dots (१३६)$$

पांचवा सिद्धांत-

दोन बाजू आणि त्यांतून एका बाजू समोरील कोन दिला असता
६१ जर (७) आणि (घ) या दोन बाजू आणि त्यांतून ए
की चा समोरील; (अ) कोन दिला असेल तर दुसऱ्या बाजूचा
समोरील (ब) कोन (३७) कल मांतील (९४) सारणी को
ष्ट का पासून झालेली जीं तीन समीकरणें त्यांतील पहिल्या
चा आधारानें खातीं लिहित्या प्रमाणें निघेल.

लाभुब = लाभुअ + लाभुघ - लाभु७ - - - - - (१३७)
आता या सारणी कोष्ट का पासून (ब) कोन समजल्या वर (अ)
आणि (क) हे अवयव (१३३) आणि (१२९) या सारणी कोष्ट
कांतील पदांस स्थलांतर केल्यानें खातीं लिहित्या प्रमाणें
निघतात.

$$\text{लास्य} \frac{1}{2} \text{द} = \text{लास्य} \frac{1}{2} (\text{७} + \text{घ}) + \text{लाको} \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{ब}) - \text{लाको} \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{ब}) \dots (१३८)$$

$$\text{अकोस्य} \frac{1}{2} \text{क} = \text{लास्य} \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{ब}) + \text{लाको} \frac{1}{2} (\text{७} + \text{घ}) - \text{लाको} (\text{७} - \text{घ}) \dots (१३९)$$

वर लिहित्या प्रमाणें च या कामा साठीं (१३४) आणि (१३०)

यां पासून ही सारणी कोष्टक सिद्ध होतील, हें उघड आहे.

६२ जर (ब) कोन संदिग्ध नसेल तर त्या जं विषयीं विचार.

जेव्हां दिलेल्या बाजूंची बेरीज (१८०) हून कमी असेल; ते

व्हाल हान बाजू समोरील कोन लघु होईल; आणि जेव्हां त्या

दिले.त्यां दोन बाजूंची बेरीज (१८०) हून अधिक असेल, ते व्हां मोठ्या बाजूस मोरील कोन विशाळ होईल; आणि जर त्या बाजूंची बेरीज (१८०) अंशच असेल, तर त्यांचा समोरील कोनांची बेरीज तितकी चक्षुणजे (१८०) होईल. जे व्हां या रिती प्रमाणे कोनाची निश्चय होत नाही ते व्हां (ब) कोनसे दिग्धसम जावा.

६३ परंतु जर प्रथम, (घ) तिसरी बाजूच काढणें आहे; तर (११५) व (११६) या सारणीकोष्टकांत (क) चा ठिकाणी (अ) व (७) चा ठिकाणी (घ), तसेंच (घ) चा ठिकाणी (७) असा फेरफार करून व (११५) सारणीकोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून तो व (११६) या सारणीकोष्टकांत सत्ताग्रसमाचें रूप देऊन खाली लिहित्या प्रमाणें निघेल.

लास्य १ = लास्य घ + लाको अ - १० - - - - - (१४०)

लाको (घ - १) = लाको ७ + लाको १ - लाको घ - - - (१४१)

† अशा उदाहरणाकरिता कित्येक सारणीकोष्टकांत अक्षरांचा फेरफार करावा; असें लिहितें. याची सत्यता अशी आहे की, या उदाहरणीं (४०) कलमांतील आकृतींत (क) कोनापासून (घ) बाजूवर लंबकेला असतां, (अ) लंबाचा योगानें झालेल्या सारणीकोष्टकाचा आतीचीं येणारीं जीं समीकरणें त्यां प्रमाणें अक्षरांचा फेरफार केल्यापासून समीकरणें उत्पन्न होतात. झणून निरनिराळ्या बाजूवर लंबनकरितां अक्षरांचा फेरफार करावा. याच प्रमाणें दुसऱ्या बाजू आणि कोन यांचा विचार आहे. यां वि

आतां या दुसऱ्या सारणी कोष्टकाची उजवी बाजू (अ) आणि (यांचें अंतर दाखवित्ये याज करितां (अ) आणि (ब) हे कोन बराबर किंवा न्यूनाधिक असतील; त्या प्रमाणें (अ) हा (१) आणि (ब-१) यांची बेरीज किंवा वजाबाकी दाखवील.

६४ याच प्रमाणें जर प्रथम दिलेल्या दोन बाजू मधील (क) अंतर कोनच काढणें असेल; तर (११८) आणि (१२०) किंवा (१२१) या सारणी कोष्टकांत वरचा कलमांत सांगितल्या प्रमाणें कारण पडेल, तदनुसार अक्षरांचा फेर फार, व (११८) सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून, तो व (१२०) किंवा (१२१) या सारणी कोष्टकांमधील ग्राममांचें रूप देऊन ग्वालीरि हिच्या प्रमाणें निघेल.

लास्यकु = लाकोस्यअ + १० - लाकोघ - - - - - (१४२)

लाको (क-कु) = लास्यघ + लाकोक - लास्यश - - - - (१४३)

आतां या दुसऱ्या सारणी कोष्टकाची उजवी बाजू (क) आणि (कु) यांचें अंतर दाखवित्ये याज करितां (अ) आणि (ब) कोन बराबर असतील; तेव्हां (क) कोन (कु) आणि (क-कु) यांचा बेरजे बराबर होईल. अथवा लहान मोठे असल्यास (क) कोन (कु) आणि (क-कु) यांची वजाबाकी दाखवील.

५१ीं विशेष विस्तार (११९) कलमांत पहावा.

(१०७)

सहावा सिद्धांत.

दोन कोन आणि त्यांतून एका कोना समोरील

बाजूदिली असता.

६५ जेव्हां (अ) आणि (ब) हे दोन कोन घट्यातील एकाचा समोरील (७) बाजू सांगितली आहे, तेव्हां दुसऱ्या कोना समोरील, (घ) बाजू (९४) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न झालेली, जीं तीन समीकरणें त्यांतील पहिल्याचा आधारांनिघत्तेला भुघ = लांभुं = लाभुब - लाभुअ - - - - (१४४)

या प्रमाणें (घ) बाजू समजल्यावर (घ) बाजूव (क) कोन (१२८) आणि (१३९) सारणी कोष्टकापासून कळतील.

जर (ब) कोन संदिग्ध नसेल तर त्याज विषयीं विचार.

जेव्हां दिलेल्या दोन कोनांची बेरीज (१८०) हून कमी असेल; तेव्हां लहान कोना समोरील बाजूल घुझणजे (९०) हून कमी होईल. आणि जर त्या दिलेल्या कोनांची बेरीज (१८०) हून अधिक असेल; तर मोठ्या कोना समोरील बाजू विशाल झणजे (९०) हून अधिक होईल. आणि ती बेरीज जर (१८०) च असेल; तर त्यांचा समोरील बाजूंची बेरीज तितकेच झणजे (१८०) होईल.

६६ परंतु जर प्रथम (क) कोन काढणें असेल तर (११८)

व (११६) या सारणी कोष्टकांत (६३) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें कारणपडेल, तदनुसार अक्षरांचा फेरफार व (११८) सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून तो व (११९) या सारणी कोष्टकांत लाग्रतमाचें रूप देऊन खाली लिहित्या प्रमाणें निघेल.

लास्पकृ = लाकोस्पब + १० - लाकोश - - - - (१४५)

लाभु(क-कृ) = लाभुकृ + लाकोअ - लाकोब - - - (१४६)

आतां आदुसऱ्या सारणी कोष्टकाची ऊर्जवीबाजू (क) आणि (कृ) यांचें अंतर दाखविले. याज करितां (शु) आणि (घ) या बाजू बराबर किंवा न्यूनाधिक असतील; त्या प्रमाणें (कृ) व (क-कृ) हे बराबर किंवा न्यूनाधिक होतील. तसेंच (अ) आणि (ब) हे कोन बराबर अथवा न्यूनाधिक असतील; तदनुसार (कृ) व (क-कृ) यांची बेरीज किंवा वजाबाकी दाखवील.

६७ परंतु जर प्रथम सांगितल्या दोन कोनां मधील (झ) अंतर बाजूच काढणें असेल, तर (११५) आणि (११७) या सारणी कोष्टकांत (६३) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें गरजला गेल; त्या प्रमाणें अक्षरांचा फेरफार व (११५) सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून तो व (११७) या सारणी को

एक का सलाग्रतमाचें रूप देऊन खालील हिल्या प्रमाणें विघले-

लास्य १ = लास्य ७ + लाकोब - १० - - - - - (१४१)

लाभु (६-१) = लाभु १ + लास्यब - लास्यअ - - - - (१४८)

आतां या दुसऱ्या सारणी कोष्टकाची उजवी बाजू (६) आणि (१) यांचें अंतर दाखविले जाऊन करितां (७) आणि (६) या बाजू बराबर किंवा न्यूनाधिक असतील; त्या प्रमाणें (१) आणि (६-१) हे खंड बराबर किंवा लहान मोठे होतील तसेंच (अ) आणि (ब) हे कोन बराबर किंवा कमजास्ती असतील; तदनुसार (६) बाजू (१) व (६-१) यांची बेरीज अथवा वैज्रबाकी दाखवील.

काट कोन त्रिकोणां विषयीं विचार.

६ वरील सहा सिद्धांतांत सिद्ध केल्या सारणी कोष्टकापेक्षा काट कोन त्रिकोणाचीं उदाहरणें (११२), (११३) आणि (११४) या सारणी कोष्टकापासून अधिक सुलभ रितीनें होतात.

आतां (४५) कलमांतील (अ ब क) या काट कोन त्रिकोणांत (क) कोन काट कोन आहे; तो मनांत न आणित्वा बाकीचा पांच अवयवांकडे लक्ष देऊन वर सांगितलेले तीन सारणी कोष्टकावून पहातां कळून येतें कीं, या तीन सारणी कोष्टकांतील पहिल्या उद्देशकांची ह्यणजे त्रिकोणा

चा एक एक अवयव वही स्थिति, दुसऱ्या उद्देशकांतील त्याच त्रिकोणाचे जे दोन अवयव, वरील आकृतीत आहेत, त्यांचा मध्ये आहे. तसेंच दुसऱ्या उद्देशकांतील अवयव, पहिल्या उद्देशकांतील अवयवांस, तिसऱ्या उद्देशकांतील अवयवांपासून वियुक्त करितात. याच प्रमाणे आणखी कळून येतें कीं, यासारणी कोष्टकाचा प्रथम उद्देशकांत एक (पाय) याची भुजज्या, आणि दुसऱ्या भागाचा कोभुजज्या, आहेत. व दुसऱ्या उद्देशकांत एक (पाय) याची स्पर्शरेषा, व दुसऱ्या भागाचा स्पर्शरेषा, आहेत. तसेंच तिसऱ्या उद्देशकांत (पाय) याचा कोभुजज्या, आणि दूतरभागाचा भुजज्या आहेत. आतां पहिल्या उद्देशकांत त्रिज्येची योजना केली असता पुढें सांगितलेली साधारण रीति उत्पन्न होत्ये. तेणें करून सुलभ रीतीनें काटकोन त्रिकोणाचे सर्व अवयव निघतात.

काटकोन त्रिकोणाचे दिलेले दोन अवयव आणि कडावयाचा अवयव मिळून जे तीन अवयव, त्यांमध्यें अवयव दुसऱ्या दोन अवयवांजवळ (ही हीं सही लागलेल्या) असेल, अथवा पूर्वाक्त तीन अवयवांतील दोन अवयवांस, जो वियुक्त करित असेल. त्या समधील अवयव असण्याचे आणि व

रसांगितल्या तीन अवयवां शिवाय राहिलेले जे दोन अवयव त्यां
सदुरचे अवयव ह्याणावे. वजे मधील अवयवास लागलेले अस
तील, त्यांस जवळील अवयव ह्याणावे.

६९ पुढल्याकलमांत लिहिले ती रीति खेरीज करून, त्रिज्या
आणि मधील अवयवाची कोभुजज्या, यांचा काटकोन चौको
न, जवळचा अवयवांचा कोस्पर्शरेषांचा काटकोन चौकोना
बराबर आहे. किंवा दुरचा अवयवांचा भुजज्यांचा काटकोनचौ
कोनाबराबर आहे.

७० वरचा कलमांत त्रिज्या आणि मधील अवयवाची कोभुज
ज्या, यांचा काटकोन चौकोन, जवळचा अवयवांचा कोस्पर्श
रेषांचा, किंवा दुरचा अवयवांचा भुजज्यांचा काटकोन चौको
नाबराबर आहे असे लिहिले; परंतु त्या अवयवांत जर (पाय
असतील तर त्यांचा कोभुजज्या, कोस्पर्शरेषा आणि भुजज्या
यांचा बदली अनुक्रमें भुजज्या, स्पर्शरेषा आणि कोभुजज्या,
घेतल्या पाहिजेत.

७१ वरील महाव्यासिद्धांतावरून असे सिद्ध होई कीं, जे व्हां
दिलेल्या भागांत एक (पाय) आणि त्याचा समोरील कोन
असेल, तर त्याची ड्रॅग्जा फलें संदिग्ध येतील.

कि. त्वेक ठिकाणीं काटावयाचा जो भाग त्याचा निश्चय

त्याचा कोभुज ज्या, स्पर्शरेषा, किंवा कोस्पर्शरेषायांचा अधिक किंवा उप्याचिन्हांवरून अथवा सहाय्यासिद्धतापासून - (पाय) आणि त्यांचा समोरील कोन बराबर आहेत; असें कळतें, तेणें करून ही होईल.

७२ जात्रिकोणाची एक बाजू (काडूंट) द्व्यणजे (९०) आहे; त्याला वृत्तपाद त्रिकोण असें द्व्यणतात. जेव्हां या जातीचा त्रिकोणास साधारण सारणी कोष्टक लावावे; तेव्हां ते काटकोन त्रिकोणास लाविल्यानें जसे सुलभ होतात. तसेच सुलभ होऊन, त्याचा पृथक्करणार्थवर काटकोन त्रिकोणाविषयीं जशी (११२), (११३) आणि (११४) या सारणी कोष्टकांनीं रीति दाखविली; त्या प्रमाणें रीति निघेल. परंतु असें त्रिकोण बहुत करून पहाण्यांत किंवा उपयोगांत ही नाहींत. याजकरितां याजविषयीं एकादिरीति सिद्ध करण्याची गरज नाहीं. असें असून गरज लागल्यास काटकोन त्रिकोणापासून दिलेले दोन भाग व काटावयाचा भाग याचा संबंध दाखविणारा सारणी कोष्टक सिद्ध करितां येईल. नंतर त्या

† (काडूंट) द्व्यणजे वर्तुळपाद याजकरितां जात्रिकोणाची एक बाजू (९०) अंश असत्ये; त्यास (काडूंट) त्रिकोण असें द्व्यणतात. हे नांव बाजूवरून पडलें आहे.

कोष्ठकृत समोरील कोनांचा ठिकाणी बाजू आणि बाजूचा ठिकाणी कोन असे फेरफार करावे आणि कोभुज्या, स्पर्शरेषा आणि कोस्पर्शरेषा यां संकलन चिन्हे जोडावीं. द्व्यणजे रवालीं लिहित्या प्रमाणें इच्छित्या कामास उपयोगी सारणी कोष्ठक उत्पन्न होईल.

जर (४५) कलमांतील आकृतींत (घ) बाजू हा एकवर्तुळ पाद कों समानिला आणि (अ), (ब) दुसरे कोन दिले आहेत, त्यांपासून (घ) बाजू समोरील कोन काढणें आहे; ते व्हां जात्रिकोणांत (क) कोन काढ कोन आहे; त्यांत (७), (घ), (घ) यांतीन बाजू मनांत आणित्या असतां, (कोघ = को७ = को७) आतां या समीकरणानें (काडुं ट) त्रिकोणाकरितां वरलिहित्या प्रमाणें अक्षरांचा फेरफार करून (-कोक = कोअ-कोब) किंवा (+कोक = -कोअ-कोब) असें होतें. परंतु जे व्हां या जातीचा त्रिकोणाचे अवयव काढावयाचे आहेत; ते व्हां (४१) कलमांत सपूमेंटा विषयीं विचार सांगितला आहे; तेणें करून सुलभरितीनें निघतील. अथवा याचें पृथक्करण दुसरां एक गोलीय काढ कोन त्रिकोण आहे; त्याचा अवयवांचें पृथक्करण वरलिहित्या त्रिकोणाचा जातीचा सर्व अवयवांणीं सादर्य आंदे.

आतां (घ) आणि (घ) यांची बेरीज व वजाबाकी यांची प्रत्येकीं अर्धे करून $\frac{१}{२}(\text{घ} + \text{घ}) = ९३ \quad ३४ \quad \text{व} \quad \frac{१}{२}(\text{घ} - \text{घ}) = ४३ \quad ४३$ आणि (३अ) = २९ २९ ३० आहे. याजकरिता अव्यक्त अक्षरव (१२९) आणि (१३०) या सारणी कोष्टकां पासून निघतात.

लास्य $\frac{१}{२}(\text{क} + \text{ब}) = \text{लाकोस्य} \frac{१}{२}\text{अ} + \text{लाको} \frac{१}{२}(\text{घ} - \text{घ}) - \text{लाको} \frac{१}{२}(\text{घ} + \text{घ})$
 लास्य $\frac{१}{२}(\text{क} - \text{ब}) = \text{लाकोस्य} \frac{१}{२}\text{अ} + \text{लाभु} \frac{१}{२}(\text{घ} - \text{घ}) - \text{लाभु} \frac{१}{२}(\text{घ} + \text{घ})$
 या प्रमाणें $\frac{१}{२}(\text{क} + \text{ब}) = ९३ \quad ४ \quad १५$ ही आणि $\frac{१}{२}(\text{क} - \text{ब}) = ६३ \quad ११ \quad १५$ ही किंमत निघत्ये. आतां यांची बेरीज व वजाबाकी करून, क = १५४ १५ ३० ; ब = २९ ५३ आहेत. आतां (७) बाजू काढणें ती (१३१) व (१३२) सारणी कोष्टकां पासून खाली लिहित्या प्रमाणें निघत्ये.

$$\text{लास्य } ७ = \text{लास्य घ} + \text{लाको अ} - १०$$

$$\text{लाको } ७ = \text{लाको घ} + \text{लाको } (\text{घ} - ७) - \text{लाको } ७$$

यातील प्रथम समीकरणा पासून, ७ = ३३ ७ १५ ही आलेली किंमत (घ) यांतून वजा करून $(\text{घ} - ७) = १०४ \quad ९ \quad ४५$ ही आहे. द्वितीय दुसऱ्या समीकरणा पासून ७ = १०३ २० ३० आहे. अथवा (७) बाजू (१३१) आणि (१३२) या सारणी कोष्टकांत अक्षरांचा फेरफार करून खाली लिहित्या प्रमाणें ही

निघत्ये

लास्य १ = लास्य ऋ + लाको अ - १०

लाको ७ = लाको ऋ + लाको (घ - १) - लाको १

आपासून १ = १४९ ३० १५, (घ - १) = -१०३ ३९ १५ आ
हे; झणून ७ = १०३ २० ३० ही पूर्वी प्रमाणें चकिंमत आहे-

जेव्हां <ब आंणि <क, (७५) कलमा प्रमाणें आहेत, ते
व्हां (७) (६५) कलमांतील सहाव्या सिद्धांता प्रमाणें खाली
लिहिल्या सारणी कोष्टकांतून कोणत्या ही सारणी कोष्टका
पासून निघेल.

लाभु ७ = लाभु अ + लाभु घ - लाभु ब, यांत अक्षरांचा फेरफार
करून, लाभु ७ = लाभु अ + लाभु ऋ - लाभु क

जेव्हां या समीकरणापासून (७) बाजूची किंमत बराबर
कळत नाही, तेव्हां ती (१३३) व (१३४) या सारणी कोष्टकापा
सून उत्पन्न झालेली, जीं पुढील समीकरणें तीं कामांत घेत-
ल्यानें निघेल.

लास्य $\frac{1}{2}$ ७ = लास्य $\frac{1}{2}$ (ऋ + घ) + लाको $\frac{1}{2}$ (क + ब) - लाको $\frac{1}{2}$ (क - ब).

लास्य $\frac{1}{2}$ ७ = लास्य $\frac{1}{2}$ (ऋ - घ) + लाभु $\frac{1}{2}$ (क + ब) - लाभु $\frac{1}{2}$ (क - ब)

७६ चौथें, अब क त्रिकोणांत सांगितले अवयव.

हेकोन अक्षरांचा फेरफार केला असता निघतात.

७४ दुसरें, अबक त्रिकोणांत सांगितले अवयव.

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = १३९ २७ \\ \text{ब} = ५३ ३९ \\ \text{क} = ३४ ५ \end{array} \right\} \text{यां पासून तीन ही बाजू काढे}$$

आतां यां तीन कोनांची बेरीज $२२७ ११$ आहे. इवें अर्ध $११३ ३५ ३७ = स$, आणि या अर्धांतून तीन ही बाजू प्रत्येकीं वजा करून बाक्या, $(स-अ) = -२५ ५१ ३७$, $(स-ब) = ५९ ५६ ३७$ आणि $(स-क) = ७९ ३७ ३७$ आहेत. या ज करितां (७), (घ), (ङ) बाजू (१०४), (१०५), (१०६) आणि (१०७) यां तील कोणत्या ही सारणी कोष्टकास त्रिज्या गुणक लावित्या पासून निघतात.

$$\text{शुअ} = १३९ २७ \dots \dots \dots \text{लाग्र} ९.८१२९८८$$

$$\text{शुब} = ५३ ३९ \dots \dots \dots ९.९०६०१८$$

$$\text{शुक} = ३४ ५ \dots \dots \dots ९.७४८४९७$$

$$\text{को(स-अ)} = -२५ ५१ ३७ \dots \dots \dots ९.९५४१८२$$

$$\text{को(स-ब)} = ५९ ५६ ३७ \dots \dots \dots ९.६९९७३५$$

$$\text{को(स-क)} = ७९ ३७ ३७ \dots \dots \dots ९.२६०२९२$$

आतां (१५) सारणा कोष्ट का पासून खाली लिहित्या प्रमाणें हाईल.

$$\left. \begin{aligned} \text{को(स-ब)} &= ५९ \quad ५६ \quad ३०'' \quad \dots \quad ९-६९९७३५ \\ \text{को(स-क)} &= ७९ \quad ३० \quad ३०'' \quad \dots \quad ९-२६०२९२ \end{aligned} \right\}$$

$$\text{३०}'' \quad \dots \quad २०.$$

$$\text{भुब} = ५३ \quad ३९ \quad \dots \quad ९-९०६०१८$$

$$\text{भुक} = ३४ \quad ६ \quad \dots \quad ९-७४८४९७$$

$$२) \frac{१९-३०५५१२}{९-६४२७५६}$$

$$\text{को } \frac{१}{२} \text{ छ} = ६३ \quad १७ \quad १२'' \quad \dots$$

$$\therefore \text{ छ} = १२६ \quad ३४ \quad २४'' \quad \text{आहे हें उत्तर.}$$

याच प्रमाणें वर लिहित्या सारणी कोष्टकांत (छ) चाटिकाणी अनुक्रमें (घ) आणि (घ) असा फेरफार करून.

$$\text{को } \frac{१}{३} \text{ घ} = ४७ \quad ५३ \quad \dots \quad ९-८२६४९४$$

$$\therefore \text{ घ} = ९५ \quad ४६ \quad \text{आहे हें उत्तर.}$$

$$\text{को } \frac{१}{३} \text{ झ} = २१ \quad ५४ \quad १९'' \quad \dots \quad ९-९६७४५५$$

$$\therefore \text{ झ} = ४३ \quad ४८ \quad ३८'' \quad \text{हें उत्तर.}$$

७५ तिसरें, अबक, त्रिकोणांत सांगितले अवयव.

$$\left. \begin{aligned} \text{अ} &= ४२ \quad ४३ \\ \text{घ} &= ४६ \quad ५१ \\ \text{झ} &= १४१ \quad १७ \end{aligned} \right\} \text{या पासून राहिले, तीन अवयव काट}$$

पूर्वोक्तसहा सिद्धांताचा बोध होण्या करितां प्रत्येक सिद्धांताचें एकेक उदाहरण लिहितों

७३ प्रथम, अबक त्रिकोणांत सांगितले अवयव.

$$\left. \begin{aligned} \text{अ} &= १००^{\circ} \\ \text{घ} &= ३३^{\circ} १६' \\ \text{न} &= ६२^{\circ} ४६' \end{aligned} \right\} \text{या पासून तीन हीकोन काढू}$$

आतां तीन बाजूंची बेरीज $२००^{\circ} ४$ आहे. इचें अर्ध १००°
 $\text{२} = \text{अ}$, आणि या अर्धातून तीन ही बाजू प्रत्येकीं वेजा करून
बाक्या, $(\text{अ}-\text{अ}) = ०$ व $(\text{अ}-\text{घ}) = ६२^{\circ} ४६'$ आणि
 $(\text{अ}-\text{न}) = ३३^{\circ} १६'$ आहेत. याज करितां (अ) कोन (१२४)
सारणी कोष्टका पासून खाली लिहिल्या प्रमाणें निघेल.

भुअ = $१००^{\circ} २'$	लागू	९.९९३३०७
भु(अ-घ) = $०^{\circ} २'$		६.७६४७५६
भु(अ-घ) = $६२^{\circ} ४६'$		९.९४००४५
भु(अ-न) = $३३^{\circ} १६'$		९.७०२१३२
		<hr/>
		२) २२.९७२९१४
स्प ३ अ = $०^{\circ} ७' ५३''$		<hr/>
		११.४०६४५७

(अ = $१००^{\circ} ७' ५३''$ आहे.

आतां (१२५) आणि (१२६) या सारणी कोष्टका पासून -

$\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{अ} + \text{भु}(\text{अ}-\text{शु}) = ११ \cdot ४८६४५७ + (६ \cdot ७६४७५६)$
 $= १८ \cdot २५१२१३$ यां तून एकवेळ, $\text{भु}(\text{अ}-\text{घ}) = ९ \cdot ९४८८४५$
 हीवपुनः, $\text{भु}(\text{अ}-\text{झ}) = ९ \cdot ७८२१३२$ ही पृथक् पृथक् वजा करू
 णे, $\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{ब} = ८ \cdot ३०२३६८$ आणि $\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{क} = ८ \cdot ४६९०$ त्या या बा
 क्या र हातात याज करिता लाग्रत मकोष्टका पासून $\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{ब}$
 $= १^{\circ} ८' ५७''$ आणि $\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{क} = १^{\circ} ४१' १३''$ निघतात याची दु
 पटक रून $\angle\text{ब} = २^{\circ} १७' ५४''$, $\angle\text{क} = ३^{\circ} २२' २६''$ हें उत्तर.

अथवा याच उदाहरणांतील (अ) कोन (१२२) आणि
 (१२३) या सारणी कोष्टकाचा सहाय्ये करून निघतो.

(१२२) याचा सहायानें.

(१२३) याचा सहायानें.

भुघ = $३७^{\circ} १८'$ लाग्र ९.७८२४६४ भुघ = $३७^{\circ} १८'$ लाग्र ९.७८२४६४

भुझ = $६३^{\circ} ४६'$ ९.९४८९७५ भुझ = $६३^{\circ} ४६'$ ९.९४८९७५

भु(अ-घ) = $६३^{\circ} ४४'$ ९.९४८८४५ भुअ = $१००^{\circ} २'$ ९.९९३३०७

भु(अ-झ) = $३७^{\circ} १६'$ ९.७८२१३२ भु(अ-शु) = $२'$ ६.७६४७५६

$\text{भु}^{\frac{1}{2}}\text{अ} = ८८^{\circ} ८'$ ९.९९९७६९
 $\frac{१९.९९९५३८}{९.९९९७६९}$

$\text{को}^{\frac{1}{2}}\text{अ} = ८८^{\circ} ७' ५३''$ ८.५१३३१२
 $\frac{१७.०२६६२४}{८.५१३३१२}$

$\therefore \angle\text{अ} = १७६^{\circ} १६'$ हें उत्तर. $\therefore \angle\text{अ} = १७६^{\circ} १५' ४६''$

याच प्रमाणें या सारणी कोष्टकापासून (ब) आणि (क)

(१२०)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = १०^{\circ} \\ \text{ब} = २^{\circ} १७' ५४'' \\ \text{क} = ३^{\circ} २२' २६'' \end{array} \right\} \text{यां पासून राहिले, तीन अवयवकादर}$$

आतां (क) आणि (ब) यांची बेरीज व वजाबाकी यांची प्रत्येकीं अर्थें करून, $\frac{1}{2}(क+ब) = २^{\circ} ५०' ११''$ व $\frac{1}{2}(क-ब) = ०^{\circ} ३२' १६''$ आणि $\frac{1}{2}\text{अ} = ५^{\circ}$ आहे. याज करितां अव्यक्त अवयव (१३३) आणि (१३४) या सारणी कोष्टकांत अक्षरांचा फेर फार करून निघतील.

को $\frac{1}{2}(क+ब)$	= २° ५०' ११''	लागू	९-९९९४६३
को $\frac{1}{2}(क-ब)$	= ०° ३२' १६''		९-९९९९८०
भु $\frac{1}{2}(क+ब)$	= २° ५०' ११''		८-६९४४२०
भु $\frac{1}{2}(क-ब)$	= ०° ३२' १६''		७-९७२४३३
स $\frac{1}{2}\text{अ}$	= ५°		९०-०७६१८६
स $\frac{1}{2}(अ+ब)$	= ५° २'		९०-०७६७०३
स $\frac{1}{2}(अ-ब)$	= १२' ४६''		९-३५४१९९

अ = ६२' ४६'', ब = ३७' १८'' आतां (अ) कोन काढणें तो (१२४) सारणी कोष्टका पासून (७३) कलमांतील रीतीनें खालीं लिहिल्या प्रमाणें निघतो.

स $\frac{1}{2}\text{अ} = ८८' ७' ५३''$
 $\therefore \angle \text{अ} = १७६' १५' ४६''$ आहे. हें उत्तर.

७७ पांचवें; अबक त्रिकोणांत सांगितले अवयव-

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{श} = ४६ \quad १६ \\ \text{घ} = ७३ \quad ८ \\ \text{ज} = ३७ \quad ५४ \end{array} \right\} \text{या पासून राहिले अवयव काट}$$

या अवयवां पासून (ब) कोन (१३७) सारणी कोष्टकाचा सहायाने स्वलीं लिहित्या प्रमाणें निघेल.

$$\text{लाभुब} = \text{लाभुघ} + \text{लाभुअ} - \text{लाभुशु}$$

या पासून (ब) = $५४^{\circ} २७'$ किंवा $१०९^{\circ} ३३'$ ही किंमत निघत्ये. आतां या उदाहरणीं (६२) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें दिलेल्या बाजूंची बेरीज (१००) हून उणी आहे, आणि लहान बाजू समोरील कोन सांगितला आहे; ते व्हा (ब) कोन संदिग्ध आहे, या जकरिता त्याची किंमत पांचव्या सिद्धांताने किंमत नाही; झणून (१३८) आणि (१३९) या सारणी कोष्टका पासून जर (ब) कोनाबरोबर $५४^{\circ} २७'$ धरिले, तर (घ) = $१००^{\circ} १६'$ किंमत येत्ये आणि (क) = $१२३^{\circ} १३'$ येत्ये, परंतु (ब) = $१२९^{\circ} ३३'$ धरिला, तर (घ) = $३७^{\circ} ४९'$ आणि (क) = $३१^{\circ} १९'$ येतात. परंतु प्रथम (क) कोनच काढणें असेल, तर (१४२) आणि (१४३) सारणी कोष्टका पासून स्वलीं लिहित्या प्रमाणें निघेल.

(१२२)

कृ = ७९ १६ १६ आणि (क-कृ) = ४९ ५३ आहेत. जा-
तां जापेक्षां हे उदाहरण संदिग्ध आहे, त्यापेक्षां (क) कौन,
कृ आणि (क-कृ) यांचा बेरजे बराबर किंवा वजाबाकी बराब-
र असेल, ह्यपून तो वर सांगितल्या प्रमाणें निघेल. तसेंच (झ)
बाजू पांचव्या सिद्धांतातील (६३) कलमांत सांगितल्या प्रमा-
णें काढितां येईल.

७८ सहावें, अबक त्रिकोणांत सांगितले अवयव.

$$\left. \begin{array}{l} क = ९० \\ ७ = १३३ ४ \\ अ = १११ ३३ \end{array} \right\} \text{यां पासून राहिले अवयव काढे?}$$

या अवयवां पासून (अ) कर्ण काढणें आहे; तेव्हां (७) बाजूम-
धील अवयव आणि (अ), (झ) हेदुरचे अवयव आहेत; या
ज करितां तो (६९) व (७०) कलमांत सांगितल्या रितीनें खालीं
लिहित्या प्रमाणें निघतो.

र. भु७ = भुअ भुझ, स्थलांतराजें व लाप्रतम रूपानें लिहून,
लाभुअ = लाभु७ + १० - लाभुअ, आतां सहाव्या सिद्धांतचा
(६९) कलमांतील रिती प्रमाणें.

झ = ५१ ४८ किंवा १२८ १३ आहेत.

आतां(घं) हा मधील अवयव काढणें आहे; आणि(७)व(अ) हे दुरचे अवयव आहेत; झणून (६९) व (७०) कलमांतील काढ कोन त्रिकोणान्वा रिती प्रमाणें

: र-भुघ = स्प७ को स्पअ, गुणक सोडवून, व लाग्रतमाचें रूप देऊन, लाभुघ = लास्प७ + लाकोस्पअ - १०, या पासून घ = २५ ५ किंवा १५४ ५५ किंमत निघत्ये.

याच प्रमाणें (ब) कोन काढणें आहे; तेकां(अ) मधील आणि(७) व (ब) हे दुरचे अवयव आहेत; याज करितां वर सांगितल्या (६९) व (७०) कलमां पासून, Δ व खाली लिहित्या प्रमाणें निघेल.

र-कोअ = भुब को ७, गुणक सोडवून व लाग्रतमाचें रूप देऊन, लाभुब = लाकोअ + १० - लाको७, या पासून Δ व = ३२ ३९ किंवा १४७ २९ या प्रमाणें तीनही, अव्यक्त अवयव निघतात.

दुसरीं कित्येक उदाहरणें.

(१)	$\left. \begin{array}{l} \text{७} = ५६ \quad १७ \\ \text{घ} = १४७ \quad ३३ \\ \text{झ} = ११२ \quad ४८ \end{array} \right\} \text{उत्तर}$	$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ६२ \quad ३२ \\ \text{ब} = १४५ \quad ५ \\ \text{क} = ७९ \quad ३३ \end{array} \right\}$
(२)	$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ४७ \quad ९ \\ \text{ब} = १३६ \quad २९ \\ \text{क} = ० \quad ८८ \quad ३४ \end{array} \right\} \text{उत्तर}$	$\left. \begin{array}{l} \text{७} = १६ \quad २४ \\ \text{घ} = १६४ \quad ३६ \\ \text{झ} = १५७ \quad २२ \end{array} \right\}$

(३)	$\left. \begin{array}{l} \text{शु} = ७८^{\circ} \quad ४१' \\ \text{घ} = १५३^{\circ} \quad ३०' \\ \text{क} = १४०^{\circ} \quad २३' \end{array} \right\} \text{उत्तर}$	$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = १३३^{\circ} \quad १५' \\ \text{ब} = १६०^{\circ} \quad ३६' \\ \text{म} = १२०^{\circ} \quad ५०' \end{array} \right\}$
(४)	$\left. \begin{array}{l} \text{शु} = ७१^{\circ} \quad ४५' \\ \text{ब} = १०४^{\circ} \quad ५' \\ \text{क} = ८३^{\circ} \quad १८' \end{array} \right\} \text{उत्तर}$	$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ७०^{\circ} \quad ३१.५' \\ \text{घ} = १०२^{\circ} \quad १७' \\ \text{म} = ८६^{\circ} \quad ४१' \end{array} \right\}$
(५)	$\left. \begin{array}{l} \text{शु} = १३६^{\circ} \quad २५' \\ \text{म} = १२५^{\circ} \quad ४०' \\ \text{क} = १००^{\circ} \end{array} \right\} \text{उत्तर}$	$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = १२३^{\circ} \quad १६' \\ \text{ब} = ६३^{\circ} \quad ६' \\ \text{घ} = ४६^{\circ} \quad ४८' \end{array} \right\}$
(६)	$\left. \begin{array}{l} \text{ब} = ५६^{\circ} \quad १७' \\ \text{शु} = ११५^{\circ} \quad २८' \\ \text{घ} = ६०^{\circ} \quad २६' \end{array} \right\} \text{उत्तर}$	$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ५९^{\circ} \quad ३६' \\ \text{क} = १७२^{\circ} \quad ४३' \\ \text{म} = १७२^{\circ} \quad २३' \\ \text{अथवा} \\ \text{अ} = १२०^{\circ} \quad २१' \\ \text{क} = ७३^{\circ} \quad ५३' \\ \text{म} = ८८^{\circ} \quad ५३' \end{array} \right\}$
(७)	$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = १०३^{\circ} \quad १६' \\ \text{ब} = ७६^{\circ} \quad ४४' \\ \text{घ} = ३०^{\circ} \quad ७' \end{array} \right\} \text{उत्तर}$	$\left. \begin{array}{l} \text{शु} = १४९^{\circ} \quad ५३' \\ \text{म} = १६४^{\circ} \quad ५०' \\ \text{क} = १४९^{\circ} \quad २७' \end{array} \right\}$

* जे हां दिलेल्या कोनां ची बेरीज (१८०) असेल, ते हां सहा व्यासि

(८) $\left. \begin{array}{l} घ = १२४^{\circ} ५३' \\ म = ३१^{\circ} १९' \\ ब = १६^{\circ} २६' \end{array} \right\} \text{उत्तर}$

$\left. \begin{array}{l} ङ = १५५^{\circ} ३५\frac{१}{२}' \\ क = १^{\circ} १९\frac{१}{२}' \\ अ = १७१^{\circ} ४८\frac{१}{२}' \end{array} \right\}$

(९) $\left. \begin{array}{l} घ = १४३^{\circ} ५४' \\ ब = १४६^{\circ} १२' \\ क = ४^{\circ} ४०' \end{array} \right\} \text{उत्तर}$

$\left. \begin{array}{l} ङ = ११२^{\circ} ३९' \\ म = ४३^{\circ} ३९' \\ अ = ६^{\circ} ३७' \\ ङ = \text{अथवा } ९^{\circ} २७' \\ म = १३६^{\circ} २१' \\ अ = ८^{\circ} ५६' \end{array} \right\}$

(१०) $\left. \begin{array}{l} अ = ९^{\circ} \\ ब = ९५^{\circ} ६' \\ क = ७१^{\circ} ३६' \end{array} \right\} \text{उत्तर}$

$\left. \begin{array}{l} ङ = ९१^{\circ} ४२' \\ घ = ९५^{\circ} २३\frac{१}{२}' \\ म = ७१^{\circ} ३१\frac{१}{२}' \end{array} \right\}$

(११) $\left. \begin{array}{l} अ = ७५^{\circ} ३६' \\ ब = ९^{\circ} \\ ङ = ६४^{\circ} ३' \end{array} \right\} \text{उत्तर}$

$\left. \begin{array}{l} म = ३१^{\circ} ५१' \\ घ = ६८^{\circ} १०\frac{१}{२}' \\ क = ३४^{\circ} २८' \\ अथवा \\ म = १४८^{\circ} ९' \\ घ = १११^{\circ} ४६\frac{१}{२}' \\ क = १४५^{\circ} २३' \end{array} \right\}$

होता चा तपशील प्रमाणेंहें उदाहरण वजावाकी करून होईल.

(१२)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{श} = ५३^{\circ} १६' \\ \text{घ} = ३५^{\circ} २३' \\ \text{क} = १०^{\circ} \end{array} \right\}$	उत्तर	$\left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = ६६^{\circ} ४०' \\ \text{ब} = ४१^{\circ} ३२' \\ \text{म} = ६०^{\circ} ५१' \end{array} \right\}$
(१३)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{श} = ३०^{\circ} \\ \text{घ} = ४४^{\circ} \\ \text{म} = ५०^{\circ} \end{array} \right\}$	उत्तर	$\left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = ४०^{\circ} ३६' \\ \text{ब} = ५६^{\circ} ५२' \\ \text{क} = १३^{\circ} ४५' \end{array} \right\}$
(१४)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{श} = ३^{\circ} \\ \text{घ} = ४०^{\circ} \\ \text{म} = ५^{\circ} \end{array} \right\}$	उत्तर	$\left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = ३६^{\circ} ५४' \\ \text{ब} = ५३^{\circ} १०' \\ \text{क} = १०^{\circ} २' \end{array} \right\}$
(१५)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{श} = ६^{\circ} \\ \text{घ} = ४०^{\circ} \\ \text{म} = १०^{\circ} \end{array} \right\}$	उत्तर	$\left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = ५६^{\circ} ५२' \\ \text{ब} = ७२^{\circ} १३' \\ \text{क} = १०^{\circ} ४७' \end{array} \right\}$
(१६)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = ३२^{\circ} २६' ६'' \\ \text{ब} = १३^{\circ} ५' २३'' \\ \text{श} = ४४^{\circ} १३' ४३'' \end{array} \right\}$	उत्तर	$\left\{ \begin{array}{l} \text{घ} = ४४^{\circ} १४' २६'' \\ \text{म} = ५१^{\circ} ६' १३'' \\ \text{क} = ३६^{\circ} ४५' २०'' \end{array} \right\}$
(१७)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{श} = ४०^{\circ} १८' २९'' \\ \text{घ} = ६७^{\circ} १४' २८'' \\ \text{अ} = ३४^{\circ} २२' १७'' \end{array} \right\}$	उत्तर	$\left\{ \begin{array}{l} \text{ब} = ५३^{\circ} २५' १५'' \\ \text{क} = ११^{\circ} १३' ३५'' \\ \text{म} = ४९^{\circ} ५७' ६'' \end{array} \right\}$

भाग चौथा-

गोलीय त्रिकोण संबंधी अनेक प्रकारची सिद्धता-

७९ आतां (५७) कलमांतील विशाल कोन त्रिकोणा कृतींत (अबक) त्रिकोणाचा तीन बाजूं पासून (अड) लंबानें झाले; जे पायाचे खंड ते कोनांचा सहाया शिवाय ही पुढील रीतीनें निघतात. आतां (कड) = ७ आहें; याज करिमां (५८) कलमांतील (११६) सारणी कोष्टकाची प्रमाणांत लिहून,

को (७-१) : को १ : : को घ : को घ हें मिश्र प्रमाणानें लिहित्यास,
को (७-१) + को १ : को (७-१) - को १ : : को घ + को घ : को घ - को घ अ
होतें. आतां उपाग्रसरांस अग्रसरांनीं भागून,

$$\frac{\text{को (७-१) - को १}}{\text{को (७-१) + को १}} = \frac{\text{को घ - को घ}}{\text{को घ + को घ}}$$

आतां या समीकरणा पासून (२५) सारणी कोष्टक आणि (५) सारणी कोष्टकावरील टीप यांचा सहायानें खालीं लिहिला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{स्प } \frac{१}{२} \text{ ७} \cdot \text{स्प } \left(१ - \frac{१}{२} \text{ ७} \right) = \text{स्प } \frac{१}{२} (\text{घ} + \text{घ}) \cdot \text{स्प } \frac{१}{२} (\text{घ} - \text{घ}) \dots (१४०)$$

॥ सारणी कोष्टकांतील पदें प्रमाणांत लिहून,

$$\text{स्प } \frac{१}{२} \text{ ७} : \text{स्प } \frac{१}{२} (\text{घ} + \text{घ}) : : \text{स्प } \frac{१}{२} (\text{घ} - \text{घ}) : \text{स्प } \left(१ - \frac{१}{२} \text{ ७} \right)$$

त (१ - $\frac{१}{२}$ ७) हा (बक) बाजूचा मधील बिंदू पासून (ड) परत अंतर दाखवितो; आणि हा त्याचा स्पर्शरेषेनें कळतो; अ

पून तो संदिग्ध नसेल, तर (२) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें
 (भु^१/_क = स्प) इत्यादि मनांत आणून (पहिल्या किंवा तिसऱ्या वर्तु
 ळपादांत घेतां येईल. आणि संदिग्ध नसेल, तर दुसऱ्या किंवा
 चौथ्या वर्तुळपादांत घेतां येईल. या प्रमाणें दोन किंमती निघा-
 त्यावर जादोन स्थली (बक) कों सामलंब छेदितो, ते दोन बिंदुक
 ळतील*) आणि हे खंडलंबाचा दोहो तील कोणता ही एक भाग
 त्रिकोणाचा आंत पडतो, किंवा नाही हे दाखवितात. या प्रमाणें पा
 याचे खंडकळत्यावर (अडब) व (अडव.) या काटकोन त्रिकोणां
 चे कोन काढितां येतील. आणि या प्रमाणें तिसऱ्या भागांत सांगित
 ल्या रिती शिवाय, ही निराली रीति प्रथम सिद्धांताची उदाहरणें क
 रावयास उत्पन्न झाली.

८० आतां <कअड = कृ आहे, या जकरितां (५१) कलमांतील
 (११९) सारणी कोष्टकाचीं पदे प्रमाणांत लिहून,

भु३ : भु(अकृ) : : कोक : कोब, हे मिश्र प्रमाणानें व भागाकारा
 नें आणि (२४), (२५) सारणी कोष्टकाचा व पांचव्या सारणी कोष्टका

* ते दोन बिंदु असे मनांत आणिले पाहिजेत कीं, (बक) हा कों सपू
 र्ण वर्तुळ होई पर्यंत वाढविला. तसाच (अड) लंब ही, पूर्ण वर्तुळ हो
 ई पर्यंत वाढविला, अणजे लंबानें (बक) वृत्तास दोन छेदन बिं
 दु होतात. आणि प्रथम तिसरा वर्तुळपाद झटला आहे; तो याच पूर्ण
 वनें करून होतो.

वर्गलटीप, यांचा सहायाने खाली लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{कोस्य} \frac{1}{2} \text{अ} \cdot \text{स्य} (\text{क}-\frac{1}{2} \text{अ}) = \text{स्य} \frac{1}{2} (\text{ब}+\text{क}) \cdot \text{स्य} (\text{ब}-\text{क}) \dots (१५०)$$

स्रोत $(\text{क}-\frac{1}{2} \text{अ})$ ह्या अंतरकोन लंब आणि (अ) कोन दुष्भागणी रेषा यां मध्ये झाला आहे; आणि कोनांचा निरनिराळ्या बाजूंस बंधी वृणवरील कलमाचा शेवटीं लिहिल्या प्रमाणें आहे; याजकरितां ही दुसरी एकरीति दुसऱ्या सिद्धांताचीं उदाहरणें करण्यास उत्पन्न झाली.

०१. आता (५२) कलमातील (१२०) सारणीकोष्टकाचीं पदें प्रमाणांत लिहून,

को(अ-क) : कोक :: स्यघ : स्यघ्न, हे मिश्रप्रमाणें लिहून, व उपायसरांस अयसरांनीं भागिल्यानें खाली लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\frac{\text{को(अ-क)} - \text{कोक}}{\text{को(अ-क)} + \text{कोक}} = \frac{\text{स्यघ} - \text{स्यघ्न}}{\text{स्यघ} + \text{स्यघ्न}}$$

या सर्मीकरणाचा दुसऱ्या उद्देश कोतील अंश आणि छेद यांस (कोघ-कोघ्न) यानें गुणून व प्रथम बाजूंत (२५) आणि दुसऱ्या बाजूंत (१३); (१२) सारणीकोष्टकाप्रमाणें किंमत ठेवून,

$$\frac{\text{स्य} (\text{क}-\frac{1}{2} \text{अ})}{\text{कोस्य} \frac{1}{2} \text{अ}} = \frac{\text{सु} (\text{घ}-\text{घ्न})}{\text{सु} (\text{घ}+\text{घ्न})} \dots (१५१)$$

या सारणीकोष्टकापासून लंब आणि (अ) कोन दुष्भागणी रेषा यांचा मधील कोनाचा सुलभरितीनें निश्चय करितां येतो; याज

करिता (अबड) आणि (अकड) या दोन काटकोन त्रिकोणांना योगाने, ही दुसरी एकरीति तिसऱ्या सिद्धांताची उदाहरणे करावयास उत्पन्न झाली.

८२ आतां (४९) कलमांतील (११७) या सारणीकोष्टकाचीं पदे प्रमाणांत लिहून,

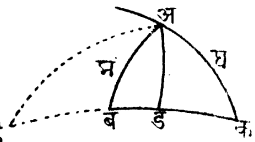
भु७ : भु (७-१) :: स्पव : स्पक, या सवरचा कलमा प्रमाणें संस्कार देऊन, खालील लिहिलेला सारणीकोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{\text{स्प}(७-३७)}{\text{स्प}३७} = \frac{\text{भु}(ब-क)}{\text{भु}(ब+क)} \dots \dots \dots (१५२)$$

ही दुसरी एकरीति चौथ्या सिद्धांताचीं उदाहरणे करावयास उत्पन्न झाली.

८३ या आकृतींत (अ) कोन दुभागणारा (अड) कोन कर आणि (कड)

= घ, व (बड) = प्र, घे-नेकां (३७) कट्टे



लमांतील (१४) सारणीकोष्टका प्रमाणें -

$$\frac{\text{भुघ}}{\text{भुव}} = \frac{\text{भु}\angle\text{अडक}}{\text{भु}\angle\text{अ}} \quad , \quad \text{आणि} \quad \frac{\text{भुप्र}}{\text{भुघ}} = \frac{\text{भु}\angle\text{अडव}}{\text{भु}\angle\text{अ}} \quad , \quad \text{आहेप}$$

रंतु (४) कलमा प्रमाणें, भु \angle अडव = भु \angle अडक आहे; झणून

$$\frac{\text{भुघ}}{\text{भुव}} = \frac{\text{भुप्र}}{\text{भुघ}} \quad \text{याजकरिता} \quad \frac{\text{भुघ}}{\text{भुव}} = \frac{\text{भुघ}}{\text{भुप्र}} \quad \dots \dots \dots (१५३)$$

या सारणीकोष्टकातील पदे प्रमाणांत आहेत; झणून जेकांकां जू दिल्या आहेत; तेकां हाकोष्टक मिश्र प्रमाण आणि भागाकार

व (२४) सारणीकोष्टकयांचा सहायानें स्थालीलिहित्या प्रमाणें बाजूंचे खंड काढावयाचा उपयोगी पडतो.

$$\frac{\text{स्प} \frac{१}{३} (\text{घ}-\text{घ्न})}{\text{स्प} \frac{१}{३} (\text{घ}+\text{घ्न})} = \frac{\text{स्प} \frac{१}{३} (\text{घ}-\text{घ्न})}{\text{स्प} \frac{१}{३} \text{७}} \dots \dots \dots (१५४)$$

८४ आता (अ) कोना पासून (घ) बाजू पुढें वाढविल्याने बाहेर जो कोन होतो, तो (बक) वाढविलेल्या पायास (ड) स्थलीमिळे, अशा महदूत्तानें दुभाग, आणि (कड) = घ, व (बड) = घ्न, घे-आता बाहेरील कोनाचें अर्ध (१/३ अ) चा कोणेंट आहे; याजकरिता

(३७) कलमांतील (२४) सारणीकोष्टकाप्रमाणें

$$\frac{\text{भुघ}}{\text{भुघं}} = \frac{\text{भुड}}{\text{को} \frac{१}{३} \text{अ}} \text{ , आणि } \frac{\text{भुन}}{\text{भुनं}} = \frac{\text{भुड}}{\text{को} \frac{१}{३} \text{अ}} \text{ आहे.}$$

$$\therefore \frac{\text{भुघ}}{\text{भुघं}} = \frac{\text{भुन}}{\text{भुनं}} \text{ , याजकरिता } \frac{\text{भुघ}}{\text{भुन}} = \frac{\text{भुघं}}{\text{भुनं}} \dots \dots \dots (१५५)$$

या पासून वरील कलमांत लिहित्या प्रमाणें पुढील सारणीकोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{\text{स्प} \frac{१}{३} (\text{घ}-\text{घ्न})}{\text{स्प} \frac{१}{३} (\text{घ}+\text{घ्न})} = \frac{\text{स्प} \frac{१}{३} \text{७}}{\text{स्प} \frac{१}{३} (\text{घं}+\text{घ्नं})} \dots \dots \dots (१५६)$$

८५ या आकृतींत कोणत्याही (बक) बाजूस दुभागणारा (अड)

कोस कर आणि \angle अड = ब, व \angle क, अड

= क, घं. आता (३७) कलमांतील (२४)

सारणीकोष्टकाचा सहायानें स्थाली



लिहित्या प्रमाणें होते.

$$\frac{\text{भुज}}{\text{भु३७}} = \frac{\text{भु८अडब}}{\text{भुब}} , \text{ आणि } \frac{\text{भुघ}}{\text{भु३७}} = \frac{\text{भु८अडक}}{\text{भुक}}$$

या दोन समीकरणांतील दुसऱ्यास प्रथमातें भाग-आतां (४) कलमाप्रमाणें (भु८अडब = भु८अडक) आहे, झणून खाली लिहित्या प्रमाणें सारणीकोष्टक उत्पन्न होता.

$$\frac{\text{भुघ}}{\text{भुज}} = \frac{\text{भुब}}{\text{भुक}} \dots \dots \dots (१५७)$$

या सारणीकोष्टकापासून (८३) कलमांत मांगितल्या प्रमाणें पुढील सारणीकोष्टक उत्पन्न होता.

$$\frac{\text{स्व३(घ-न)}}{\text{स्व३(घ+न)}} = \frac{\text{स्व३(ब-क)}}{\text{स्व३(अ)}} \dots \dots \dots (१५८)$$

या भागांतील पांचही कलमांत सिद्ध झालेले, सारणीकोष्टक - (अबक) त्रिकोणाचा बाजू परस्पर समिळे पर्यंत वाढविल्याने त्रिकोण होतात; त्यां सत्त्वावे; झणजे (७, घ, न) बाजू आणि (अ, ब, क) कोन एतद्वाचक अवयवांचा त्रिकोण आहे; तर हे सारिखे दिसून येतील.

८६ आतां (८८), (८९), (९०), (९३) आणि (१०४), (१०५) (१०६); (१०७) या सारणीकोष्टकापासून पुढें दाखविल्या प्रमाणें घेतल्यास (घ, न) आणि (ब, क) यांचा संबंध दाखविणारे संक्षिप्त सारणीकोष्टक उत्पन्न होतील.

$$\left. \begin{aligned} \text{आतां } & \sqrt{\text{भुख} \cdot \text{भु(ख-७)} \cdot \text{भु(ख-घ)} \cdot \text{भु(ख-न)}} = \text{र} \\ \text{आणि } & \sqrt{-\text{कोस} \cdot \text{को(स-अ)} \cdot \text{को(स-ब)} \cdot \text{को(स-क)}} = \text{न} \end{aligned} \right\} \text{घे.}$$

तर (८८) सारणी कोष्ट का प्रमाणें येणा-या जा भु^३अ, भु^३ब, भु^३क, यांचा किमती त्यांचा परस्पर गुणाकार करून, आणि प्रत्यक्ष वर्ग मूळ काढून, खातीं लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{भु}^{\frac{३}{३}}\text{अ} \cdot \text{भु}^{\frac{३}{३}}\text{ब} \cdot \text{भु}^{\frac{३}{३}}\text{क} = \frac{\text{भु}(\text{अ-ब}) \cdot \text{भु}(\text{अ-घ}) \cdot \text{भु}(\text{अ-घ})}{\text{भुब} \cdot \text{भुघ} \cdot \text{भुघ}} \dots (१५९)$$

या सारणी कोष्टकाचा उजव्या बाजूस $\frac{\text{भुअ}}{\text{भुअ}}$ यानें गुणून त्या गुणाकारा बरा बरील किंमत देवित्यानें खातीं लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{भु}^{\frac{३}{३}}\text{अ} \cdot \text{भु}^{\frac{३}{३}}\text{ब} \cdot \text{भु}^{\frac{३}{३}}\text{क} = \frac{\text{भुअ} \cdot \text{भुब} \cdot \text{भुघ} \cdot \text{भुघ}}{\text{भुअ} \cdot \text{भुब} \cdot \text{भुघ} \cdot \text{भुघ}} \dots (१६०)$$

८९ जाती (८९) सारणी कोष्टका प्रमाणें येणा-या जा को^३अइ त्यादिकांचा किमती त्यांचा परस्पर चाकलमांतीलरितीनें खातीं लिहितेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{को}^{\frac{३}{३}}\text{अ} \cdot \text{को}^{\frac{३}{३}}\text{ब} \cdot \text{को}^{\frac{३}{३}}\text{क} = \frac{\text{४} \cdot \text{भुअ}}{\text{भुब} \cdot \text{भुघ} \cdot \text{भुघ}} \dots (१६१)$$

९० याच रितीनें (९०) सारणी कोष्टका प्रमाणें येणा-या जा-स्य^३अ, स्य^३ब, स्य^३क, यांचा किमती त्यांचा परस्पर गुणाकारापासून खातीं लिहितेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{स्य}^{\frac{३}{३}}\text{अ} \cdot \text{स्य}^{\frac{३}{३}}\text{ब} \cdot \text{स्य}^{\frac{३}{३}}\text{क} = \sqrt{\frac{\text{भु}(\text{अ-ब}) \cdot \text{भु}(\text{अ-घ}) \cdot \text{भु}(\text{अ-घ})}{\text{भुअ}}} \dots (१६२)$$

या सारणी कोष्टकाचा उजव्या बाजूस $\sqrt{\left(\frac{\text{भुअ}}{\text{भुअ}}\right)}$ यानें गुणून, त्या गुणाकारा बरा बरील किंमत देवित्यानें खातीं लिहितेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होईल.

$$\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \cdot \text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{ब} \cdot \text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{क} = \frac{\text{न}^2}{\text{भुज}} \dots \dots \dots (१६३)$$

८९ याच प्रमाणे (९३) मारणी कोष्ट का पासून येणाऱ्या जा भुज, भुब, भुक, यांचा कि.मती त्यांच्या परस्पर गुणाकार करून त्या गुणाकाराबराबरील किं.मत ठेविल्याने रंवालीं लिहिल्या प्रमाणे मारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{भुज} \cdot \text{भुब} \cdot \text{भुक} = \frac{\text{न}^3}{\text{भु}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \cdot \text{भु}^{\frac{1}{2}}\text{ब} \cdot \text{भु}^{\frac{1}{2}}\text{न}} \dots \dots \dots (१६४)$$

९० आता वरील कलमा प्रमाणे (१०४), (१०५), (१०६) व (१०७) या मारणी कोष्टकां मारि स्वयं येणाऱ्या जा भु^{१/२}अ, भु^{१/२}ब, भु^{१/२}न इत्यादिकांचा कि.मती त्यांच्या परस्पर गुणाकार करून त्या गुणाकाराबराबरील किं.मत ठेविल्याने रंवालीं लिहिल्या प्रमाणे मारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{भु}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \cdot \text{भु}^{\frac{1}{2}}\text{ब} \cdot \text{भु}^{\frac{1}{2}}\text{न} = \frac{-\text{न} \cdot \text{कोस}}{\text{भुज} \cdot \text{भुब} \cdot \text{भुक}} \dots \dots \dots (१६५)$$

$$\text{को}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \cdot \text{को}^{\frac{1}{2}}\text{ब} \cdot \text{को}^{\frac{1}{2}}\text{न} = \frac{\text{को}(\text{स-अ}) \cdot \text{को}(\text{स-ब}) \cdot \text{को}(\text{स-क})}{\text{भुज} \cdot \text{भुब} \cdot \text{भुक}} \dots \dots \dots (१६६)$$

$$\text{को}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \cdot \text{को}^{\frac{1}{2}}\text{ब} \cdot \text{को}^{\frac{1}{2}}\text{न} = \frac{\text{न}^2}{-\text{कोस} \cdot \text{भुज} \cdot \text{भुब} \cdot \text{भुक}} \dots \dots \dots (१६७)$$

$$\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \cdot \text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{ब} \cdot \text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{न} = \sqrt{\frac{-\text{कोस}}{\text{को}(\text{स-अ}) \cdot \text{को}(\text{स-ब}) \cdot \text{को}(\text{स-क})}} \cdot \frac{\text{कोस}}{\text{न}} \dots \dots \dots (१६८)$$

$$\text{भु}^{\frac{1}{2}}\text{अ} \cdot \text{भु}^{\frac{1}{2}}\text{ब} \cdot \text{भु}^{\frac{1}{2}}\text{न} = \frac{\text{न}^2}{\text{भुज} \cdot \text{भुब} \cdot \text{भुक}} \dots \dots \dots (१६९)$$

९१ आता (१६४) आणि (१६९) या मारणी कोष्टकां पासून रंवालीं लिहितेले मारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$r = \frac{1}{2} (\text{भुं७} \cdot \text{भुं८} \cdot \text{भुं९} \cdot \text{भुं१०} \cdot \text{भुं११} \cdot \text{भुं१२})^{\frac{1}{6}} \dots \dots \dots (१३०)$$

$$n = \frac{1}{2} (\text{भुं१३} \cdot \text{भुं१४} \cdot \text{भुं१५} \cdot \text{भुं१६} \cdot \text{भुं१७} \cdot \text{भुं१८})^{\frac{1}{6}} \dots \dots \dots (१३१)$$

१२ वरचा कलमांतील प्रथम सारणी कोष्टकास दुसऱ्या सारणी कोष्टकाने भागून, व (१०७) सारणी कोष्टकाप्रमाणे येणाऱ्या जा भुं७, भुं८, भुं९, यांचा किमती त्या प्रत्येक समीकरणाने दोनही बाजूंस भुं१३, भुं१४, भुं१५, हे अनुक्रमे भाजक लावून, तीं तीनही, समीकरणे परस्पर गुणून, येणारे अंश समीकरण त्याचा उजव्या बाजूचा बराबरील किंमत ठेवून, घनमूळ काढिले असता, तिसराचोथ्या आणि पांचवा हे उद्देशक, उत्पन्न होतात-

$$\frac{r}{n} = \left(\frac{\text{भुं७} \cdot \text{भुं८} \cdot \text{भुं९}}{\text{भुं१३} \cdot \text{भुं१४} \cdot \text{भुं१५}} \right)^{\frac{1}{6}} = \frac{\text{भुं७}}{\text{भुं१३}} = \frac{\text{भुं८}}{\text{भुं१४}} = \frac{\text{भुं९}}{\text{भुं१५}} \dots \dots (१३२)$$

हा (३१) कलमांतील (१४) सारणी कोष्टकाप्रमाणे सारणी कोष्टक उत्पन्न झाला; हा घून खालील लिहित्या प्रमाणे होईल-

$$\frac{n}{\text{भुं१३}} = \frac{r}{\text{भुं७}}, \text{ आणि } \frac{n}{\text{भुं१४}} = \frac{r}{\text{भुं८}}, \text{ व } \frac{n}{\text{भुं१५}} = \frac{r}{\text{भुं९}} \dots \dots (१३३)$$

१३ आतां (१३) आणि (१०७) या सारणी कोष्टकापासून खालील लिहित्या प्रमाणे समीकरणे उत्पन्न होतात-

$$\frac{\text{भुं१३}}{\text{भुं७}} = \frac{२४}{\text{भुं७} \cdot \text{भुं८} \cdot \text{भुं९}}, \text{ आणि } \frac{\text{भुं७}}{\text{भुं१३}} = \frac{२४}{\text{भुं१३} \cdot \text{भुं१४} \cdot \text{भुं१५}}$$

या दोन समीकरणांतील प्रथम समीकरणाची डावी बाजू दुसऱ्या समीकरणाचा डाव्या बाजूचा व्युत्क्रम आहे; याजकरिता प्रथम डावी बाजू दुसऱ्याचा उजव्या बाजूचा व्युत्क्रम

राबर लिहून आणि छेद सोडवून खातीं लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$४४न = भु७ \cdot भु८ \cdot भु९ \cdot भु१० \cdot भु११ \cdot भु१२ \cdot भु१३ \cdot भु१४ \cdot भु१५ \cdot भु१६ \cdot भु१७ \cdot भु१८ \cdot भु१९ \cdot भु२० \quad (११४)$$

१४ वरचा कलमांतील सारणी कोष्टकांत (भु१० \cdot भु११ \cdot भु१२) याचा ठिकाणीं त्याची (१६४) सारणी कोष्टकांतील किंमत लिहून, भागाकारानें खातीं लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$न = \frac{२४^२}{भु७ \cdot भु८ \cdot भु९} \quad (११५)$$

याच रितीनें (१०४) सारणी कोष्टकांत (भु७ \cdot भु८ \cdot भु९) याचा ठिकाणीं त्याची (१६९) सारणी कोष्टकांतील किंमत लिहून, भागाकारानें खातीं लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$४ = \frac{२४^२}{भु१० \cdot भु११ \cdot भु१२} \quad (११६)$$

१५ आतां (१२) कलमा प्रमाणें $\frac{२४^२}{भु१३ \cdot भु१४ \cdot भु१५}$ याचा बदल $\frac{४^२}{भु१३ \cdot भु१४ \cdot भु१५}$ ही किंमत (१६७) सारणी कोष्टकांत लिहून आणि छेद सोडवून,

$$-को१ \cdot को२ \cdot को३ \cdot को४ \cdot को५ \cdot को६ \cdot को७ \cdot को८ \cdot को९ \cdot को१० \cdot को११ \cdot को१२ \cdot को१३ \cdot को१४ \cdot को१५ = ४^२$$

आतां (१३) सारणी कोष्टकाचे छेद सोडवून, उजव्या बाजूंत (८६) कलमांत सांगितलेली, किंमत ठेवित्यानें पुढील समीकरण उत्पन्न होतें.

$$भु१६ \cdot भु१७ \cdot भु१८ = २४$$

ही किंमत वरील समीकरणाचा डाव्या बाजूंत लिहून, आणि

(२४-को३७-को३८-को३९) यानें भाग्यून, त्यांत (४) बरा बरील किमतींत ठेविली असतां, खालील लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{-कोस} = \frac{\sqrt{\text{भुअ} \cdot \text{भु(अ-७)} \cdot \text{भु(अ-घ)} \cdot \text{भु(अ-द)}}}{२\text{को३७} \cdot \text{को३८} \cdot \text{को३९}}$$

$$\frac{\gamma}{२\text{को३७} \cdot \text{को३८} \cdot \text{को३९}} \dots \dots (१३७)$$

१६ वरचा कलमाप्रमाणेंच (१६०) सारणी कोष्टकापासून पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{भुअ} = \frac{\sqrt{\text{-कोस} \cdot \text{को(स-अ)} \cdot \text{को(स-ब)} \cdot \text{को(स-क)}}}{२\text{भु३अ} \cdot \text{भु३ब} \cdot \text{भु३क}}$$

$$\frac{\text{न}}{२\text{भु३अ} \cdot \text{भु३ब} \cdot \text{भु३क}} \dots \dots (१३८)$$

(क्यागनोली) या विद्वानां जे चमत्कारिक सारणी कोष्टक सिद्ध केला आहे, तो पुढें लिहित्या रितीनें उत्पन्न होतो.

१७ आतां (१६१) सारणी कोष्टकाचा उजव्या बाजूतील पहिल्या पदास स्थलांतर करून, त्यास (कोअ) यानें गुणून, आणि त्या समीकरणाचा दोनही बाजूंत (भुघ-भुघ) हें मिळविलें, झणजे डाव्या बाजूंत (भुघ-भुघ-भुघ-भुघ-कोअ) हीं पदे येतील, त्यांचा ठिकोणीं त्यांचा बरा बरींच (भुघ-भुघ-भुअ) हें पद लिहित्यानें खालील लिहित्या प्रमाणें समीकरण उत्पन्न हातें.

कोअ-को७+भुघ-भुप्र-भुँअ = भुघ-भुप्र+कोघ-कोप्र-कोअ..(३)
याचरितीनें(१०१) सारणी कोष्ट का पा मून ही, पुढें लिहित्या प्र
माणें समीकरण उत्पन्न होतें.

कोअ-को७+भुब-भुक-भुँ७ = भुब-भुक-कोब-कोक-को७
या समीकरणाचा डाव्या बाजूतील दुसऱ्या पदांत (३१) कल
माचा शेषटील प्रथम, व दुसऱ्या समीकरणांतील, भुब-भु७
आणि, भुक-भु७ यांचा बराबरील किमती ठेवून,

कोअ-को७+भुघ-भुप्र-भुँअ = भुब-भुक-कोब-कोक-को७
आतां याची वं(३) समीकरणाची डावी बाजू एक सारिखी आ
हे; याजकरितां, उजव्या बाजूपरस्पर बराबर लिहून,

भुघ-भुप्र+कोघ-कोप्र-कोअ = भुब-भुक-कोब-कोक-को७..(११९)

१८ आतां (८५) सारणी कोष्ट का स(कोब-कोक) याचें व-
(१०१) सारणी कोष्ट का स(कोघ-कोप्र) याचें गुण; आणि
त्या गुणिल्या दोन समीकरणांची बेरीज घेऊन स्थलांतर
कैत्यास पुढें लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

को७-कोब-कोक-कोअ-कोब-कोक-भुघ-भुप्र = -कोअ-कोघ-कोप्र
+को७-कोघ-कोप्र-भुब-भुक .. (१२०)

आतां हाच(११९) आणि या जातीचे दुसरे सारणी कोष्टक किं
वा समीकरणें घ्याम धरूं असा गुण आहे कीं, (७) याचा ठिकाणीं

(घ-अ)व(घ) चाठिकाणीं(घ-ब) इत्यादि किंमत ठेविली असतां, किमतींत अंतरपडत नाही. याच प्रमाणें जेत्रिकोण एकमेकांचे सप्लुमेंटरी आहेत, त्या त्रिकोणांत वरलिहित्या प्रमाणेंच होतें.

९९ आतां (८५) व (१०१) या सारणी कोष्टकास (को७-भुब-भुक) व (कोअ-भुघ-भुप्र) यांनीं अनुक्रमें गुणून त्या दोन समीकरणांची वजाबाकी घे; आणि त्या बाकीस (भुघ-भुप्र) यांनीं भाग, ह्मणजे खाली लिहित्या प्रमाणें होईल.

$$\frac{\text{को७-भुब-भुक}}{\text{भुघ-भुप्र}} - \frac{\text{कोअ}}{\text{भुघ-भुप्र}} = \frac{\text{को७-कोघ-कोप्र-भुब-भुक}}{\text{भुघ-भुप्र}} + \frac{\text{कोअ-कोब-कोक}}{\text{भुघ-भुप्र}}$$

यांत (९३) कलमांतील (९४) सारणी कोष्टका प्रमाणें

$$\left(\frac{\text{भुब-भुक}}{\text{भुघ-भुप्र}} \right) \text{ याचा ठिकाणीं } \left(\frac{\text{भुअ}}{\text{भु७}} \right) \text{ लिहून व (को७) या}$$

चाठिकाणीं (१-भु७) ही किंमत ठेवून,

$$\frac{\text{भुअ}}{\text{भु७}} - १ = \frac{\text{को७-कोघ-कोप्र-भुअ}}{\text{भु७}} + \frac{\text{कोअ-कोब-कोक}}{\text{भु७}}$$

या समीकरणांत (१३२) सारणी कोष्टका प्रमाणें $\left(\frac{\text{भुअ}}{\text{भु७}} \right)$ या चाठिकाणीं $\left(\frac{\text{न}}{\text{१-१}} \right)$ लिहून, व भाजक सोडवून, स्थलीतरानें आ

णेश्रमाकारानें खाली लिहित्या प्रमाणें

$$\text{न} (१ - \text{को७-कोघ-कोप्र}) = १ (१ + \text{कोअ-कोब-कोक})$$

अथवा

$$\frac{\text{न}}{१} = \frac{१ + \text{कोअ-कोब-कोक}}{१ - \text{को७-कोघ-कोप्र}} \dots \dots \dots (१८१)$$

या सारणी कोष्टकाचे छेद सोडवून स्थलांतराने खाली लिहित्या प्रमाणे होते.

$$नै-रै = नै \cdot को७ \cdot कोघ \cdot कोम + रै \cdot कोअ \cdot कोब \cdot कोक$$

आतां (१८) सारणीकोष्टकाप्रमाणे कोघ कोम = ३ को (घ+म) + ३ को (घ-म) आहे. या समीकरणास (को७) याने गुणून उजव्या बाजूंत याच (१८) सारणीकोष्टकाची योजनाके त्यास, खाली लिहित्या प्रमाणे होते.

$$\begin{aligned} को७ \cdot कोघ \cdot कोम &= ३ को (७+घ+म) + ३ को (-७+घ+म) \\ &+ ३ को (७-घ+म) + ३ को (७+घ-म) \end{aligned}$$

अथवा.

$$को७ \cdot कोघ \cdot कोम = ३ को २ (अ+३ को २ (अ-७) + ३ को २ (अ-घ) + ३ को २ (अ-म)$$

आतां या समीकरणांतील व याच प्रमाणे येणारी जी (कोअ कोब कोक) याची किंमत तीवरील (नै-रै) या समीकरणाचा उजव्या बाजूंत ठेवून त्यास (नै-रै) याने भाग; आणि दुसऱ्या बाजूंत त्यांचा किंमती ठेवून ह्या जे खाली लिहित्या प्रमाणे सारणीकोष्टकाक उत्पन्न होतो.

$$\frac{१}{३} \frac{१}{३} = \frac{१}{९} \left\{ \begin{array}{l} \frac{को २ अ + को २ (अ-७) + को २ (अ-घ) + को २ (अ-म)}{३ अ \cdot ३ (अ-७) \cdot ३ (अ-घ) \cdot ३ (अ-म)} \\ + \frac{को २ स + को २ (स-अ) + को २ (स-ब) + को २ (स-क)}{-को स \cdot को (स-अ) \cdot को (स-ब) \cdot को (स-क)} \end{array} \right\} \dots (१८२)$$

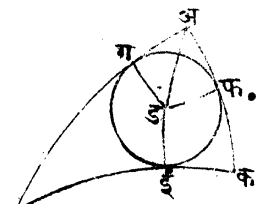
या सारणीकोष्टकांत अंशस्थली (३८) सारणीकोष्टकाप्रमाणे किंमत ठेवून पुढील सारणीकोष्टकाक उत्पन्न होतो.

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{को(अ-भु)} + \text{को(अ-घ)} - \text{भु(अ-प्र)}}{\text{भु(अ-भु)} + \text{भु(अ-घ)} + \text{भु(अ-प्र)}} \\ + \frac{\text{को(सं-अ)} + \text{को(सं-ब)} - \text{भु(सं-क)}}{\text{को(सं-अ)} + \text{को(सं-ब)} + \text{को(सं-क)}} \end{array} \right\} \dots (१८३)$$

या पासून उघड कळतं कीं, छेद एका नें वाटविले, किंवा कमी कले असतां, वरचा सारणीकोष्टकांत अनेक फेरफार होतील.

१०० वरचा सारणीकोष्टकांतील (४), (५) या सदुत्सर्गनावे दिलीं असतां, भु, कोस इत्यादिकांचा किमती निघतील. त्याका ठणें सुलभ आहेत; झणून एथें त्यांचा विस्तार न करितां त्रिकोणां तर, व बाह्य, बाजूं स स्पर्शणाऱ्या वर्तुळाचा विचार लिहिनां; तेणें करून कित्येक चमत्कारिक सारणीकोष्टक उत्पन्न होतात.

१०१ या अबक त्रिकोणातील वर्तुळाचा (ड) ध्रुव आणि ड, फ, ग हे स्पर्श बिंदु असून डअ, डई, डफ, डग, हे महदृत्ताचे कोंस असतील, तर \angle ई, \angle फ आणि \angle ग हे का



टकोन होतील आणि जापेक्षां डफ, डगची बराबर आणि डअ, अडफ, व अडग यां दोन त्रिकोणांस साधारण आहे; त्यापेक्षां अफ, अग या बाजू (११२) सारणीकोष्टका प्रमाणें बराबर होतील. तसेंच (११२) सारणीकोष्टका प्रमाणें डअफ, व डअग

(१४२)

हे दोन कोन ही, बराबर होतील. याच प्रमाणें, बई = बग आणि
 कई = कफ होतात; द्यपून अफ + बई + ईक, द्यणजे अफ + ७
 ही बेरीज तीन बाजूंचा बेरजेचा अर्धा बराबर आहे; याज करि
 तां अफ + ७ = ७ द्यपून अफ = ७ - ७ आहे. आतां जर डफ = ७
 घेतला; तर अफ ड काट कोन त्रिकोणा पासून (११२) सारणीको
 ष्टकाचा सहायानें, स्पडफ = भु अफ · स्पड अफ यांत (९०) सा
 रणीकोष्टकाप्रमाणें व (८६) कलमांत सांगितलेली, किंमत -

लिहून,

$$\text{स्पड} = \sqrt{\frac{\text{भु}(\text{अ}-७) \cdot \text{भु}(\text{अ}-घ) \cdot \text{भु}(\text{अ}-घ)}{\text{भुअ}}} = \frac{\gamma}{\text{भुअ}} \quad (१०४)$$

१०२ या सारणीकोष्टकांतील (१) यास, (१६१) सारणीको
 ष्टका पासून उत्पन्न होणारी जी (भुअ) ची किंमत, तिनें भागून,

$\frac{\gamma}{\text{भुअ}}$ किंवा, $\text{स्पड} = \frac{\gamma^2}{\text{को} \frac{१}{२} \text{अ} \cdot \text{को} \frac{१}{२} \text{ब} \cdot \text{को} \frac{१}{२} \text{क} \cdot \text{भुअ} \cdot \text{भुघ} \cdot \text{भुघ}}$
 यांत (१७५) सारणीकोष्टका पासून उत्पन्न होणारी जी (१)
 याची किंमत ती ठेविली असतां, खाली लिहित्या प्रमाणें होतें.

$$\left. \begin{aligned} \text{स्पड} &= \frac{n}{2 \text{को} \frac{१}{२} \text{अ} \cdot \text{को} \frac{१}{२} \text{ब} \cdot \text{को} \frac{१}{२} \text{क}} \\ \text{कोस्पड} &= \frac{2 \text{को} \frac{१}{२} \text{अ} \cdot \text{को} \frac{१}{२} \text{ब} \cdot \text{को} \frac{१}{२} \text{क}}{n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (१०५)$$

१०३ जर (१०१) कलमांतील त्रिकोणाचा तीन बाजू, बाहेर वा
 दविल्या पासून, जाची एकेक बाजू पूर्वोक्त त्रिकोणाची आहे; अ-

तीन त्रिकोण होतात; त्यांत तीन ही, बाजूंस स्पर्शणारीं तीन वर्तु
केलीं; तर तीं पूर्वीक त्रिकोणाचा तीन ही, बाजूंस बाहेरून स्पर्श
रतील आतां (७) बाजूंस बाहेरून स्पर्श करणारे जें वर्तु कत्या
चा ध्रुवा पासून परिघा पर्यंत कों सकरून तो दाखवायास (८)
येतला; व त्याच प्रमाणें (९) आणि (१०) यांस बाहेरून स्पर्शक
णारीं जीं वर्तु कें त्यांचा ध्रुवा पासून परिघा पर्यंत केलेले कों सदा
च विण्या करितां (११) व (१२) हे घेतले; तर (१०४) सारणीकोष्ट
प्रमाणें च खालीं लिहित्या रूपाचे सारणीकोष्टक उत्पन्न होतील.

$$p^{\text{१}} = \sqrt{\frac{\text{भुज} \cdot \text{भु}(\text{अ-घ}) \cdot \text{भु}(\text{अ-प्र})}{\text{भु}(\text{अ-७})}} = \frac{r}{\text{भु}(\text{अ-७})} \dots (१०६)$$

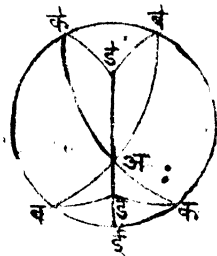
$$p^{\text{२}} = \sqrt{\frac{\text{भुज} \cdot \text{भु}(\text{अ-७}) \cdot \text{भु}(\text{अ-प्र})}{\text{भु}(\text{अ-घ})}} = \frac{r}{\text{भु}(\text{अ-घ})} \dots (१०७)$$

$$p^{\text{३}} = \sqrt{\frac{\text{भुज} \cdot \text{भु}(\text{अ-७}) \cdot \text{भु}(\text{अ-घ})}{\text{भु}(\text{अ-प्र})}} = \frac{r}{\text{भु}(\text{अ-प्र})} \dots (१०८)$$

२०४ आतां (१०४), (१०६), (१०७) व (१०८) हे सारणी
कोष्टक परस्पर गुणून खालीं लिहित्या प्रमाणें समप्रमाण सा
रणीकोष्टक उत्पन्न होतो.

$$p^{\text{१}} \cdot p^{\text{२}} \cdot p^{\text{३}} = \text{भुज} \cdot \text{भु}(\text{अ-७}) \cdot \text{भु}(\text{अ-घ}) \cdot \text{भु}(\text{अ-प्र}) = r^3 \dots (१०९)$$

१०५ या आकृतींत अबक त्रिकोणाचा
 शीनही, कोनांस बाहेरून स्पर्शकरणां-
 र्तुळकेलें; असें मानून त्याचा ध्रुवा पासून
 तपूर्वोक्त त्रिकोणाचा कोनांपर्यंत महदू
 ताचे कोंस करून (७) बाजूवर (डई) इ
 में संकेत कर.



आतां अडब व अडक आणि बडक हे त्रिकोण समद्विबा
 त्रु, याजकरितां (वरील १२ सि० प्र०) पायाकडील कोन बराबर आ
 इत; म्हणून $\angle अडब + \angle अडक = \angle अ$ आणि $\angle डबक + \angle डकब$
 $= \angle ब + \angle क - \angle अ$ आहे; याजकरितां $\angle डबई = \frac{1}{2}(\angle ब + \angle क - \angle अ)$
 $= स - \angle अ$ आहे. आतां (११४) सारणी कोष्टकाचा सहायानें
 'बईड' या काटकोन त्रिकोणांत कोडबई = स्पबई कोस्पबड
 आहे. आतां या समीकरणाचा दोन ही, बाजू $\frac{\text{स्पबड}}{\text{कोडबई}}$ यानें गुण
 आणि (बड = र) घे; तर पांश्व ज्यां सारणी कोष्टकावरील टिपेचा
 सहायानें खाली लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\text{स्पर} = \frac{\text{स्पबई}}{\text{कोडबई}} = \frac{\text{स्पई७}}{\text{को(स-अ)}}$$

या पासून (१०६) सारणी कोष्टकाप्रमाणें खाली लिहिलेला, सा
 रणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{स्पर} = \sqrt{\frac{\text{कोस} \cdot \text{को(स-अ)} \cdot \text{को(स-ब)} \cdot \text{को(स-क)}}{\text{न}}} = \frac{\text{कोस}}{\text{न}} \dots (११०)$$

१०६ या सारणी कोष्टकापा सूत्र तीन ही, कोनांचा योगाने (२) ची किंमत कळत्ये; ती बाजूंत काढण्या करितां (१६५) सारणी कोष्टकापा सूत्र उत्पन्न होणारी जी (- कोस) याची किंमत, तिला (२) यानें भाग; ह्यणजे खाली लिहित्या प्रमाणें समीकरण उत्पन्न होईल.

$$\frac{-\text{कोस}}{२} \text{ किंवा, स्पर} = \frac{\text{शुद्ध} \cdot \text{शुद्ध} \cdot \text{शुद्ध} \cdot \text{शुद्ध}}{४}$$

या समीकरणांत (१७६) सारणीकोष्टकापा सूत्र उत्पन्न होणारी जी (२) याची किंमत ती ठेविली असतां, खाली लिहित्या प्रमाणें सारणीकोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\left. \begin{aligned} \text{स्पर} &= \frac{२\text{शुद्ध} \cdot \text{शुद्ध} \cdot \text{शुद्ध}}{४} \\ \text{कोस्पर} &= \frac{२\text{शुद्ध} \cdot \text{शुद्ध} \cdot \text{शुद्ध}}{४} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (१९१)$$

१०७ त्रिकोणाचा बाजू वाढविल्यानें जे (१०३) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें तीन त्रिकोण होतात; त्यांचा बाहेरतीनही, कोनांस स्पर्श करणारीं तीन वर्तुळां केलीं; असें मान आतां पूर्वीक त्रिकोणाची (७) ही एक बाजू असून (२) हाकेलेल्या वर्तुळाचा ध्रुवापासून परिघापर्यंत महदृत्ताचा कोस (२) शी संबंध ठेवणारा कल्पिला; व त्याच प्रमाणें (घ), (न) बाजू आणि वर सांगितल्या प्रमाणें (२) शी संबंध ठेवणाऱ्या दुसऱ्या दोन वर्तुळांचा ध्रुवापासून

न परिघापर्यंत (र') व (र'') हे कोंस मानिले; तर (१०३) कलमांती ल सारणी कोष्टकाप्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{स्पर} = \sqrt{\frac{\text{को(स-अ)}}{-\text{कोस} \cdot \text{को(स-ब)} \cdot \text{को(स-क)}}} = \frac{\text{को(स-अ)}}{न} \dots (१९२)$$

$$\text{स्पर}' = \sqrt{\frac{\text{को(स-ब)}}{-\text{कोस} \cdot \text{को(स-अ)} \cdot \text{को(स-क)}}} = \frac{\text{को(स-ब)}}{न} \dots (१९३)$$

$$\text{स्पर}'' = \sqrt{\frac{\text{को(स-क)}}{-\text{कोस} \cdot \text{को(स-अ)} \cdot \text{को(स-ब)}}} = \frac{\text{को(स-क)}}{न} \dots (१९४)$$

१०८ आतां (१९०), (१९२), (१९३), (१९४) हे सारणी कोष्टक परस्पर गुणून, खाली लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\left. \begin{aligned} \text{स्पर} \cdot \text{स्पर}' \cdot \text{स्पर}'' \cdot \text{स्पर}''' &= \frac{१}{न^२} \\ \text{कोस्पर} \cdot \text{कोस्पर}' \cdot \text{कोस्पर}'' \cdot \text{कोस्पर}''' &= न \end{aligned} \right\} \dots (१९५)$$

१०९ सप्लुमेंटरी त्रिकोणाचा बाजू (घ-अ) व (घ-ब) आणि (घ-क) या आहेत. त्या त्रिकोणात र, वर्तुळ संबंधी (१८४) सारणी कोष्टकांतील (७), (घ), (घ) यांचा ठिकाणी ठेविल्या असतां, खाली लिहिलेलीं, समीकरणें उत्पन्न होतात.

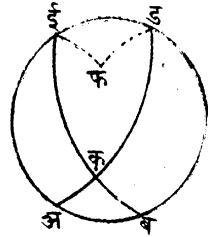
$$\text{स्पर्ज} = \sqrt{\frac{\text{को(स-अ)} \cdot \text{को(स-ब)} \cdot \text{को(स-क)}}{-\text{कोस}}}$$

$$\text{कोस्पर्ज} = \sqrt{\frac{-\text{कोस}}{\text{को(स-अ)} \cdot \text{को(स-ब)} \cdot \text{को(स-क)}}}$$

आतां ही (को स्पर्ज) ची किंमत (१९०) सारणी कोष्टकांतील (स्पर) चा किंमतीबराबर आहे; म्हणून (ज) आणि (र) हे परस्परां-

ये कांशुमेंटं आहेत-यावरून असे सिद्ध होतें कीं, कोणत्या ही, गोलीय त्रिकोणांतरगत, वर्तुळाचा ध्रुवा पासून परिघापर्यंत फेलाजो कोंस, तो ध्रुवक, किंवा सप्तमेंटरी त्रिकोणाचा बाहेरील वर्तुळाचा ध्रुवा पासून परिघापर्यंत जो कोंस त्याचा कांशुमेंट आहे-यावरून या त्रिकोणाचा एक नवा संबंध दिखून येतो.

११० कोणत्या ही, गोलीय त्रिकोणाचा क्षेत्रफलाची रीति उत्पन्न करण्या करितां या आकृतीतील (अबक) त्रिकोणाची (अब) बाजू पूर्ण वर्तुळ होईपर्यंत वाढीव; आणि (अक) घट (बक) या त्याचा परिघास (ड) आणि (ई) स्थ-



लीं छेदून पुढें जाऊन, द्वितीय वर्तुळाधीत (फ) ठिकाणीं परस्पर-रांस छेदित अशा कर-आतां महद्दृत्ते (वरील १ प्र० प्र०) परस्पर रांस दुभागितात; झणून (बकई) आणि (कईफ) हीं अर्धवर्तुळे आहेत; यांकरितां (बक) आणि (ईफ) बराबर, याच प्रमाणें (अक), (डफ) चा बराबर आहे; व (वरील १ व्या० प्र०) आणि (भू० ७ सि० प्र०) (फ) कोन (क) कोना बराबर आहे; यांकरितां (अबक) आणि (डईफ) हे दोन त्रिकोण एक रूप आहेत-आतां जा-ची मर्यादा दोन महद्दृत्तांचीं अर्धे आहेत; असा जो

(ल्यूनी) तो, तींच महदूचें मिळून जोकोन होतो, त्यांशीं प्रमाणांत आहे; ह्यणून अर्धगोलाचें पृष्ठदारवविण्या करितां जर (ह) घेतला, तर रवालीं लिहिल्या प्रमाणें होईल.

१८०° : अ :: ह : ल्यूनी, अबडक

यांतील आद्यंत व मध्यपदें गुणून, आणि गुणक सोडवून,
 $\frac{ह \cdot अ}{१८०} = ल्यूनी, अबडक, आहे. याचरितीनें \frac{ह \cdot ब}{१८०} = ल्यूनी,$
 ब अईक, आणि $\frac{ह \cdot क}{१८०} = ल्यूनी, कईफड, आहे.$

आतां उघडदिसतें कीं, वरसांगितले जे तीन (ल्यूनी) त्यांची बेरीज (अईडब) अर्धगोलाचें पृष्ठ अधिक (अबक) त्रिकोणाची दुपट याबराबर आहे; ह्यणून,

$$ह \cdot \frac{(अ+ब+क)}{१८०} = ह+२(अबक\Delta)$$

यास स्थलांतर करून, व गुणक सोडवून,

$$अबक\Delta = \frac{१}{२} ह \cdot \frac{(अ+ब+क-१८०)}{१८०} आहे.$$

आतां (शून्य लब्धि आणि मूल परिणति प्रमाणें) अथवा (शिक्षामालापुस्तकाचा दुसऱ्या भागांतील क्षेत्रफल, घनफलांत ४४ पृष्ठावर गोलाचें पृष्ठफल करण्याची रीति सांगि

*. दोन कोंस परस्परांस दोन ठिकाणीं छेदितात; त्यांमधील जी अंतर पातळी, तिला (ल्यूनी) असें ह्यणतात. जस जसा छेदनस्थलांचा कोन मोठा होत जाईल; त्या प्रमाणानें (ल्यूनी) ही मोठा होत जातो.

तली आहे; तिज पासून) कळून येते कीं, अर्धगोलाचें पृष्ठत्या गोलाचा महदृत्ताचा दुपटी बराबर किंवा (२७३) याचा बराबर आहे. एथें (७) द्वयणजे गोलाची त्रिज्या, आतां (अबक) त्रिकोणाचें क्षेत्रफल दाखवायास (त) घेतला, तर खाली लिहित्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$त = ७३ \frac{(अ+ब+क-१८०)}{१८०} \dots \dots \dots (१९६)$$

या सारणी कोष्टकाचीं पदे प्रमाणांत लिहून,

$$१८० : अ+ब+क-१८० :: ७३ : अबक \Delta \text{ क्षेत्रफल.}$$

यावरून सिद्ध होते कीं, गोलाय त्रिकोणाचें क्षेत्रफल त्याचा कोनांची बेरीज जितकी क्षेत्रफळातकोनां हून अधिक असेंल; तितक्याशीं प्रमाणांत होईल. या दोन काटकोनां हून जितकी अधिक बेरीज, तिला (स्पेरिकल एक्सिस) द्वयणजे गोलाय वृद्धि असें द्वयणतात. आणखी असं आहे कीं, जेव्हां (स्पेरिकल एक्सिस) किंवा तीन कोनांची बेरीज माहीत आहे; तेव्हां तीज पासून क्षेत्रफल काढतां येईल. यावरून दिसून येते कीं, जे त्रिकोण एकाच गोलावर असून जाचा एकच (स्पेरिकल एक्सिस) आहे; ते सर्व जरी निरनिराळें दिसण्यांत आले; तरी क्षेत्रफलानें बराबर आहेत. १११ कोणत्याही गोलाय बहुकोनाकृतीचा क्षेत्रफळाची रीति उत्पन्न करण्याकरिता त्या बहुकोनाकृतीचे कोन महदृत्ताचा कोनां सां

नीं सांघ, ह्यणजेत्या आकृतीचा बाजू संख्येत दोन उणें इतकें त्रिकोण होतील.

आतां बाजू संख्या दाखवायास (४) आणि कोनांची बेरीज दाखवायास (स) घे. तर त्या त्रिकोणांचा (स्पेरिकल एक्सेस) बरा बरा (स - (४ - २)) · १८०° होईल. ह्यणून त्या बहुकोनाकृतीचे क्षेत्रफल दाखवायास (फ) घे. तर पुढें लिहित्या प्रमाणें होईल.

$$१८०° : (स - (४ - २)) · १८०° :: १८०° \times जै : फ \dots (१९१)$$

१९२ जर त्रिकोणाचा तीन बाजू दिल्या असतील; तर त्याचे कोन (५४) व (५५) कलमां प्रमाणें काढितां येतील. आणि जर दोन बाजू व अंतर कोन दिला असेल; तर (१२९) व (१३०) सारणीकोष्टकां पासून अव्यक्त कोनांची अर्ध बेरीज व अर्ध वजा बाकी समजेल; तेणें करून तीनही कोन काढतील. या दोन जातींची उदाहरणें व्यवहारा मध्ये फार येतात; ह्यणून कोन समजण्याचा पूर्वीच (स्पेरिकल एक्सेस) काढण्याची रीति सांगतां.

आतां $\frac{1}{2}(अ + ब + क)$ हें दाखवायास (स) आणि (स्पेरिकल एक्सेस) दाखवायास (इ) घे. तेव्हां $\frac{1}{2}इ = स - ९०°$; $\frac{1}{2}इ = -कोस$, $को \frac{1}{2}इ = भुस$ आणि $स्पस = -कोस्प \frac{1}{2}इ$ आहे; ह्यणून $स्प \frac{1}{2}(अ + ब + क) = -कोस्प \frac{1}{2}इ$, होईल.

आतां या समीकरणाचा डाव्या बाजून (३९) सारणीकोष्टका

प्रमाणें ३ (अ+ब) हा एक कौंस व ३ क हा दुसरा कौंस घेऊन, जें समीकरण येतें; त्याचा उजव्या बाजूतील अंश आणि छेद-
(को ३ (७+घ)) यानें गुणून, त्यांत स्प ३ (अ+ब) ची (१०८) सा
रणी कोष्टकांतील किंमत ठेवून, खालील लिहिल्या प्रमाणें समीक
रण होतें.

$$\text{कोस्प ३ इ} = \frac{\text{को ३ (७-घ)} \cdot \text{कोस्प ३ क} + \text{को ३ (७+घ)} \cdot \text{स्प ३ क}}{\text{को ३ (७+घ)} - \text{को ३ (७-घ)}}$$

आतां या समीकरणाचा उजव्या बाजूचा उणा एक गुणक मोडवू
न, उजव्या बाजूतील अंशांस (२भु ३ क · को ३ क) यानें व छेदांस
त्याच गुणकाचा बराबरील (भुक) यानें गुण; आणि अंशांत (३)
व (३२) सारणी कोष्टकां प्रमाणें किंमत ठेव; ह्यणजे खालील लिहि
लेलें समीकरण उत्पन्न होतें.

$$\text{कोस्प ३ इ} = \frac{\text{को ३ (७-घ)} + \text{को ३ (७+घ)} + (\text{को ३ (७-घ)} - \text{को ३ (७+घ)}) \cdot \text{को व}}{\{\text{को ३ (७-घ)} - \text{को ३ (७+घ)}\} \cdot \text{भुक}}$$

या समीकरणाचा उजव्या बाजूतील अंशांस छेदांनीं भागून,
अंशांत (१८) व छेदांत (१९) सारणी कोष्टकां प्रमाणें किंमत ठेव;
ह्यणजे खालील लिहिलेल्या रूपाचा सारणी कोष्टक होतो.

$$\text{कोस्प ३ इ} = \frac{\text{कोस्प ३ ७} \cdot \text{कोस्प ३ घ} + \text{को क}}{\text{भुक}} \dots \dots \dots (१९८)$$

११३ आतां (भु ३ इ = - को स) आहे; ह्यणून तीन बाजू दि-
त्या असतील; तर (१९७) सारणी कोष्टका प्रमाणें सारणी को
ष्टक उत्पन्न होईल.

$$\text{शु३इ} = \frac{\sqrt{\text{शुअ} \cdot \text{शु(अ-७)} \cdot \text{शु(अ-घ)} \cdot \text{शु(अ-प्र)}}}{२\text{को३७} \cdot \text{को३घ} \cdot \text{को३प्र}} \dots (१९९)$$

११४ आतां (१९८) सारणीकोष्टकांतील (कोक) आणि (शुक) रद्द करण्या करितां अंशांतील पहिलें पद (२शु३७ · २शु३घ · को३७ · को३घ) यानें गूण; आणि याच गुणंकाचा बराबरील (शु७ · शुघ) यानें छेद, व अंशस्थलीं चीं बाकी पदे गूण; झणजे स्वातीं लिहित्या प्रमाणें समीकरण उत्पन्न होईल.

$$\text{कोस३इ} = \frac{२\text{को३७} \cdot २\text{को३घ} + \text{शु७} \cdot \text{शुघ} \cdot \text{कोक}}{\text{शु७} \cdot \text{शुघ} \cdot \text{शुक}}$$

आतां या समीकरणांतील अंशस्थलींचें प्रथम पद (३१) सारणीकोष्टकाप्रमाणें (१ + को७) · (१ + कोघ) याचा बराबर आहे, व दुसरें पद (८७) सारणीकोष्टकांतील पदांमध्यलांतर करून (कोप्र - को७ · कोघ) याचा बराबर आहे; आणि छेद (९३) सारणीकोष्टकाप्रमाणें (२४) याचा बराबर आहे; झणून याकी अती वरचा समीकरणांत ठेवून, पुढें लिहित्या प्रमाणें सारणीकोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{कोस३इ} = \frac{१ + \text{को७} + \text{कोघ} + \text{कोप्र}}{२ \sqrt{\text{शुअ} \cdot \text{शु(अ-७)} \cdot \text{शु(अ-घ)} \cdot \text{शु(अ-प्र)}}} \dots (२००)$$

११५ आतां (१९९), (२००) या सारणीकोष्टकांचा गुणाकारांतील अंशस्थलीं दोन, उर्ध्वे दोन, मिलावून, त्यांत (३१) सारणीकोष्टकाप्रमा

णें किंमत ठेवें; द्यणजे खाली लिहिलेला सारणीको एक उत्पन्न

होईल.

$$\text{कोई ई} = \frac{१ + \text{कोई} \theta + \text{कोई} \psi + \text{कोई} \pi}{४ \text{कोई} \theta \cdot \text{कोई} \psi \cdot \text{कोई} \pi} = \frac{\text{कोई} \theta + \text{कोई} \psi + \text{कोई} \pi - १}{२ \text{कोई} \theta \cdot \text{कोई} \psi \cdot \text{कोई} \pi} \dots (२०१)$$

११६ आतां (२०१) सारणीको एकाचा दोन ही, बाजू एको नून वजाक

हून, बाकीस (१२९) सारणीको एकानें भाग; आणि डाव्या बाजूं

त (४९) सारणीको एका प्रमाणें किंमत ठेवें; द्यणजे पुढील समी

करण उत्पन्न होतें.

$$\text{संघट्ट} = \frac{१ - \text{कोई} \theta - \text{कोई} \psi - \text{कोई} \pi + २ \text{कोई} \theta \cdot \text{कोई} \psi \cdot \text{कोई} \pi}{\sqrt{\theta \psi \pi (\psi \pi - \theta) \cdot \theta (\psi \pi - \psi) \cdot \theta (\psi \pi - \pi)}}$$

या समी करणाचें अंश खाली लिहिल्या गुण्य गुणकांचा गुणाकार आहे.

कोई θ - कोई ψ - कोई π + $\theta \psi \pi$, आणि

- कोई θ + कोई ψ - कोई π + $\theta \psi \pi$;

अथवा हेच गुण्य गुणक (१४) आणि (१५) सारणीको एका प्रमा

णें पुढें लिहिल्या रूपाचें होतील.

कोई θ - कोई (य + π), आणि

- कोई θ + कोई (य - π),

हीं पदें (२२) सारणीको एका प्रमाणें खाली लिहिल्या रूपाचीं होतात

$२ \theta \psi \pi (\theta + \psi + \pi) \cdot \theta \psi \pi (-\theta + \psi + \pi)$, आणि

$२ \theta \psi \pi (\theta - \psi + \pi) \cdot \theta \psi \pi (\theta + \psi - \pi)$

(१५४)

अथवा

२ भुई (अ-घ) · भुई (अ-प्र), आणि

२ भुई अ · भुई (अ-७);

यांच्या गुणाकार अंश स्थली ठेवून, व (३०) सारणी कोष्टक प्रमाणे छेदां सरुपांतर करून, आणि अंशांस छेदांनी भागून, पुढें लिहिल्या प्रमाणे सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

सष्ट इ = $\sqrt{\text{स्वईअ} \cdot \text{स्वई(अ-७)} \cdot \text{स्वई(अ-घ)} \cdot \text{स्वई(अ-प्र)}} \quad (२०२)$

हा सुंदर सारणी कोष्टक तीन बाजू दिल्या असतां, (संगिकलणकेस) काटण्याचा उपयोगी झाला.

११७ जर पाया आणि क्षेत्रफल किंवा पाया आणि तीन कोनांची बेरीज, जात दोन कोन बराबर आहेत, हीं दिलीं असतां, त्या त्रिकोणाचा शिरोकोनाचे (लोकस) पुढील रितींनीं काटितां येईल.

आतां (१०५) कलमांतील आकृती प्रमाणे (बकबक) या वर्तुळांन सांगितल्या (७) पाया बराबर (बक) कोंस कर, आणि (बकब), (कबक) हे प्रत्येकीं अर्धवर्तुळा बराबर घेत्याच प्रमाणे \triangle बकड, \triangle कबड हे प्रत्येकीं सांगितल्या कोनांचा अर्ध बेरुज बराबर कर; तर (ब) ब (क) यां वून जाणारें जें लघु वर्तुळ, जाचा (ड) ध्रुव आहे; तेंच ह्मणिले (लोकस) ह्मणिले. आतां (अ) शिरोबिंदु परिघा

* हें लघु वर्तुळ किंवा कोंस असतो.

वरकोठेंही, असला, तंरीं चिंता नाही, कारण (बब), (कक), (अड) हे महद्दृत्तांचा कोंसांनीं जे (अंबड) व (अकड) कोन होतात; त्यांचा बेरजे बराबर (बअक) किंवा (अ) कोन आहे; आणि (बबक), व (ककव) हे प्रत्येकीं (ब) आणि (क) कोनां बराबर आहेत; ह्यणून जे व्हा (अ), लघुवर्तुळाचा परिघावर आहे; ते व्हा (अ, ब, क) या तीन कोनांची बेरीज, (कबब), (अंबड) व (बकक) आणि (अकड) या कोनांचा बेरजे बराबर आहे; आणि हे शेवटील कोन कृत्यानें सांगितल्या कोनांचा बेरजे बराबर आहेत.

टीप, याच रितीनें असें सिद्ध होतें कीं, जर (अबक) त्रिकोणाचें क्षेत्रफल व (बक) पाया हीं सांगितलीं असतां, (अबक) याचा बाहेर जें वर्तुळ होईल; तें त्याचा शिरकोनाचें (लोकस) होईल.

११८, (१०५) कलमावरून उघड आहे कीं, कोणत्याही गोलाचें त्रिकोणाचा पाया व शिरकोन आणि दुसऱ्या दोन कोनांची बेरीज यांची व जाबाकी, हीं सांगितलीं असतां, त्या त्रिकोणाचा बाहेर जें वर्तुळ होईल; त्याचा जो परिघ तोच त्या शिरां विंदूचें (लोकस) होईल.

११९ जर काटकोन त्रिकोणाचे अवयव भुज ज्या किंवा को भुज ज्या याचा सहाय्यानें काटा व याचे असतील; आणि ती भुज ज्या किंवा को भुज ज्या त्रिज्येचाला बीज व क ज व क असेल; तर (४५) व (४६) कलमांनीं लरितीनें लाग्रतमिक कोष्टकापासून उत्तर बराबर नि-

धतनाहीं; याज करितां पुढें दुसरीरीति लिहितो.

आतां (११२), (११३), (११४) या सारणी कोष्टकांत (१९), (१८), (१९)
या सारणी कोष्टकां प्रमाणें किंमत ठेवून पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न
होतात.

$$\text{भु}\text{शु} = \frac{1}{2}(\text{को}(\text{अ} \sim \text{घ}) - \text{को}(\text{अ} + \text{घ})) \dots \dots (२०३)$$

$$\text{को}\text{घ} = \frac{1}{2}(\text{को}(\text{शु} \sim \text{घ}) + \text{को}(\text{शु} + \text{घ})) \dots \dots (२०४)$$

$$\text{को}\text{अ} = \frac{1}{2}(\text{भु}(\text{शु} + \text{ब}) - \text{भु}(\text{शु} - \text{ब})) \dots \dots (२०५)$$

या सारणी कोष्टकांचा उजव्या बाजूतील पदांची बेरीज किंवा वजा-
बाकी घेऊन, स्वाभाविक भुज ज्या आणि को भुज ज्या यांचा सहायानें इ-
च्छा फलें उत्पन्न होतील; वयांपासून उत्पन्न होणारे जे लाग्रतमिक को
ष्टक, त्यांचा योगानें उत्तर अगदीं जवळजवळ निघेल. याच प्रमाणें
दुसरीरीति प्रथम इच्छित नव्हे; असा भाग घेऊन तो व सांगितल्या
भागांतून एक भाग यांजपासून उत्पन्न होत्ये; तीं अर्शा कीं, अणु (पाय)
सांगून कर्ण काटणें असेल; आणि तो कर्ण व ते (पाय) फार लहान अ-
सतील; तर (११३) सारणी कोष्टका प्रमाणें को घ = को श - को घ
याची योजना करण्या बद्दल (११२) सारणी कोष्टकांत अक्षरांचा
फेरफार करून भु घ = को स्प अ - स्प श याचा योगानें प्रथम \angle अ,
काटनंतर (११४) सारणी कोष्टका प्रमाणें को अ = स्प घ - को स्प घ
यापासून (घ) याची किंमत फारच बराबर निघेल.

१२० कित्थेक सारणीकोष्टकां सखलीं लिहित्या प्रमाणे रूप दिलें असतां, त्यांपासून स्पर्शरेषेचा योगानें फारच सुलभ आणि बराबर अशीं उत्तरे येतील. आतां मनांत आणकीं, (अ) व (७) हे अवयव सांगितले असून, (ब) काटणें आहे; तर (११४) सारणीकोष्टकाचा सहायानें खालीं लिहित्या प्रमाणें होतें.

१ : भुब :: को७ : कोअ

हें मिश्रणानें व भागाकारानें लिहून,

$$\frac{१-भुब}{१+भुब} = \frac{को७-कोअ}{को७+कोअ}$$

आतां भुब = को (९०° - ब.) आहे; झणून वरचा समीकरण स- (३२) व (३१) आणि (२५) या सारणीकोष्टकाप्रमाणें रूप देऊन, व वर्गमूळ काढून,

$$\text{स्प}(४६ - \frac{३}{२}ब) = \pm \sqrt{\text{स्प}^2(अ+७) \cdot \text{स्प}^2(अ-७)} \dots (२०६)$$

या सारणीकोष्टकापासून लागतमाचा सहायानें उत्पन्न होणाऱ्या कोस तो (धन) किंवा (ऋण) असेल; झणून तो दाखवाया स ± (क) घेतला तर, ब = (९०° ± २क) होईल. यारितीनें (ब) ची किंमत फारजवळ जवळ निघत्ये.

१२१ याच प्रमाणें (११२) सारणीकोष्टकापासून १ : भुज :: भुप्र : भु७ हें प्रमाण होईल; यांमज वरचा कलमांत सांगितल्या प्रमाणें संस्का

रकेले; तरखालीं लिहिलेले सारणीकोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{स्प}(\text{घ} \pm \frac{1}{2}\text{प्र}) = \pm \sqrt{\frac{\text{स्प}^2(\text{अ}-\text{घ})}{\text{स्प}^2(\text{अ}+\text{घ})}} \dots \dots (२०७)$$

$$\text{स्प}(\text{घ} \pm \frac{1}{2}\text{अ}) = \pm \sqrt{\frac{\text{स्प}^2(\text{प्र}-\text{घ})}{\text{स्प}^2(\text{प्र}+\text{घ})}} \dots \dots (२०८)$$

१२२ याच प्रमाणें (११३) सारणीकोष्टका पासून -
१ : को७ :: कोघ : कोप्र, असें प्रमाण होतें; यासही (१२०) कल
मांत सांगितलेले संस्कार देऊन पुढें लिहिला सारणीकोष्टक उत्पन्न
होतो.

$$\text{स्प}^2 \text{७} = \sqrt{\text{स्प}^2(\text{प्र}+\text{घ}) \cdot \text{स्प}^2(\text{प्र}-\text{घ})} \dots \dots (२०९)$$

१२३ आतां खालीं लिहिलेलीं समीकरणें (११२), (११३), (११४)

या सारणीकोष्टका प्रमाणें आहेत.

$$\text{भु७} = \text{स्पघ} \cdot \text{कोस्पब}$$

$$\text{कोप्र} = \text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्पब}$$

$$\text{कोअ} = \text{स्पघ} \cdot \text{कोस्पप्र}$$

यांतील पहिल्या समीकरणाचा दोनही बाजू एका नृनवजा करून
न, वमिळवून, याबाकी सबे रजेनें भाग; म्हणजे खालीं लिहिल्या
प्रमाणें होतें.

$$\frac{१ - \text{भु७}}{१ + \text{भु७}} = \frac{१ - \text{स्पघ} \cdot \text{कोस्पब}}{१ + \text{स्पघ} \cdot \text{कोस्पब}}$$

या समीकरणाचा डाव्या बाजूंत (१२०) कलमांत सांगितल्याप्र

माणें संस्कारदे, आणि उजव्या बाजूतील अंश व छेद यांस -
को घ-को ब यांनं गुणून, अंश स्थलीं (१३) व छेद स्थलीं (१२)
सारणी कोष्टकां प्रमाणें किंमत ठेव, आणि वर्गमूळ काढ; झणजे
पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{स३५} = \pm \sqrt{\frac{\text{भु}(ब-घ)}{\text{भु}(ब+घ)}} \dots \dots \dots (२१०)$$

याचरितीनें दुसऱ्या दोन राहिलेल्या समीकरणां पासून खालीं लि-
हिलेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{स३६} = \sqrt{\frac{-\text{को}(अ+ब)}{\text{को}(अ-ब)}} \dots \dots \dots (२११)$$

$$\text{स३७} = \sqrt{\frac{\text{भु}(प्र-घ)}{\text{भु}(प्र+घ)}} \dots \dots \dots (२१२)$$

जर गोलीय त्रिकोणाचा बाजूंची लांबी वाढत वाढत जात अ-
सून, त्रिज्याही वृद्धिगत होत असेल; तर तो त्रिकोण हळू हळू सर-
रळरे घ त्रिकोणाचा रूपाचा होईल. आणि जर त्रिज्या अनंत अ-
सेल; तर सरळ रेघ त्रिकोणच होईल; अशा त्रिकोणांत बाजू व-
तिची भुज ज्या आणि स्पर्शरेखा या एकत्र मिळून, एकच सरळ रे-
घ होईल. आणि को भुज ज्या, त्रिज्येबरोबर झणजे अनंत व को स-
र्शरेखा ही, अनंत होईल. बाजू वरून असें सिद्ध होतें कीं, गो-
लीय त्रिकोण संबंधी सारणी कोष्टकांत बाजूंचा भुज ज्या अथ

वा स्पर्शरेषा किंवा बाजूंची बेरीज, अर्ध बेरीज इत्यादिकांचा भुजज्या अथवा स्पर्शरेषा आहेत; ते सारणी कोष्टक सरळ रेघ त्रिकोण संबंधी ही होतील.

आतां वर सांगितल्या प्रमाणें बाजूंचा भुजज्या व स्पर्शरेषा यांजबराबर बाजूच आहेत; म्हणून भुजज्या व स्पर्शरेषा यांचा ठिकाणीं बाजू लिहून (१५४) सारणी कोष्टकाचें रूप शिक्षामाला पुस्तकाचा दुसऱ्या भागांतील सरळ रेघ त्रिकोणमितीचा (१ सि० प्र०) होईल आणि (८८), (८९), (९०), (९३) हे सारणी कोष्टक, (७९), (८०), (८१), (८४) या सारणी कोष्टकां प्रमाणें होतील. तसेंच (२४) व (६७) सारणी कोष्टकां प्रमाणें स्पई (अब) = कोस्पईक यांत थोडा फेर फार केल्यानें (७५) सारणी कोष्टका प्रमाणें होतें. याच रितीनें (९१) व (९२) हे, (८२) आणि (८३) सारणी कोष्टकां सारिखे, आणि (११०) व (१११) हे, (७६) व (७७) या सारणी कोष्टकां प्रमाणें होतात. तसेंच (११७), (१२१), (१४९), (१५२), (१५३), (१५४), (१५५), (१५६), (१५७), (१५८), (१५९), (१६०), (१६१), (१६२), (१६४) आणखी ही, कित्येक सारणी कोष्टकांचे परिणाम सरळ रेघ त्रिकोणावर लागू आहेत. आणि (२०२) या सारणी कोष्टकास किंचित् रुपांतर केल्यानें तीन बाजू सांगितल्या असतां, क्षेत्र

फलकरण्यान्वा $\sqrt{(अ-उ) \cdot (अ-घ) \cdot (अ-घ) \cdot (अ-घ)}$ हा कोष्टक उत्पन्न होतो.

१२४ आतां (११२), (११४) या सारणी कोष्टकांतील (को७=२) द्व्यणजे त्रिज्या घेऊन, आणि प्रथमास कोस्पन्न, यानें गुणित्या नें (११२), (११४) हे सारणी कोष्टक सरळरेघ त्रिकोणावर लावितां येतात. याच प्रमाणे (११३) सारणी कोष्टकांतील प्रथमवदुसऱ्या उद्देशकां पासून, स्पअ = कोस्पब हें उत्पन्न होतें. व याचरितीनें प्रथम आणि तिसऱ्या उद्देशकांचे वर्ग करून (६) सारणी कोष्टकाचा सहायानें खालील हि त्या प्रमाणें होतें.

$$१-भु३ = १-भु७-भु८+भु७-भु८$$

यांतून एकवजा करून चिह्न बदल कर; वदुसऱ्या बाजूंतील शेवटीलपद (जै) यानें भाग, द्व्यणजे त्रिज्या अनंत आहे. द्व्यणून शेवटीलपद जाऊन (भू०३४सि०प्र०) नै = ७+८ असें सिद्ध होतें.

१२५ वर सांगितला जो फेरफार, त्याचरितीनें (१५) सारणी कोष्टक खालील हि त्या प्रमाणें होईल.

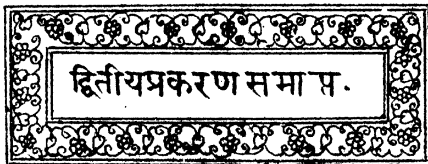
$$\sqrt{(१-भु७)} = कोअ-भु८-भु९ + \sqrt{(१-भु८-भु९+भु८-भु९)}$$

याचा द्वाव्या बाजूचें वर्गमूळ श्रेढींत काढिलें असतां (१-३भु७-३भु७-३०) होईल. तसेंच दुसऱ्या बाजूंतील

दुसऱ्या पदांचें वर्ग मूळ काटिलें असतां, खालीं लिहिल्या प्रमाणें होईल.

कोअ भुघ भुघ्न + १ - ३ भुँघ - ३ भुँघ्न + ३ भुँघ भुँघ्न - ३ भुँघ - ३
यांतून एक वजा करून, चतुर्घातापासून पुढील अदें (७) यानें भा
ग, आणि दुपट करून, व वरचा कलमांत सांगितल्या प्रमाणें संस्का
रदे, ह्यणजे खालीं लिहिल्या प्रमाणें (७८) सारणी कोष्टका मारि-
खें समीकरण उत्पन्न होतें.

$$\text{७} = \text{घे} + \text{घ्न} - २ \text{घघ्न} \cdot \text{कोअ}$$



सूर्याची क्रांति, रेखांश ७५ पूर्वेस, दिवसाचे १२ वाजतां.

नारखा	जाने वारी दक्षिण	फेब्रुआरी द.	मार्च द.	एप्रिल उत्तर	मे उ.	जून उ.
१	२३ ४	१७ १६	७ ४१	४ १८	१६ ५३	२१ ५८
२	२२ ५९	१६ ५१	७ २६	४ ४१	१५ ११	२२ ६
३	२२ ५४	१६ ४२	७ ४	५ ४	१५ २९	२२ १४
४	२२ ४८	१६ २५	६ ४१	५ २७	१५ ४६	२२ २१
५	२२ ४१	१६ ७	६ १७	५ ५०	१६ ४	२२ २९
६	२२ ३४	१५ ४८	५ ५४	६ १२	१६ २१	२२ ३६
७	२२ २८	१५ ३०	५ ३१	६ ३५	१६ ३८	२२ ४२
८	२२ २०	१५ ११	५ २	६ ५७	१६ ५४	२२ ४८
९	२२ १२	१४ ५२	४ ४४	७ २०	१७ ११	२२ ५३
१०	२२ ४	१४ ३३	४ २१	७ ४२	१७ २७	२२ ५८
११	२१ ५५	१४ १३	३ ५७	८ ४	१७ ४३	२३ ३
१२	२१ ४५	१३ ५३	३ ३४	८ २६	१७ ५८	२३ ७
१३	२१ ३५	१३ ३३	३ १०	८ ४८	१८ १३	२३ ११
१४	२१ २५	१३ १३	२ ४७	९ १०	१८ २८	२३ १४
१५	२१ १४	१२ ५३	२ २३	९ ३२	१८ ४३	२३ १७
१६	२१ ३	१२ ३२	१ ५९	९ ५४	१८ ५७	२३ २१
१७	२० ५२	१२ १९	१ ३६	१० १५	१९ ११	२३ २३
१८	२० ४०	११ ५०	१ १२	१० ३६	१९ २४	२३ २५
१९	२० २८	११ २९	० ४८	१० ५७	१९ ३७	२३ २६
२०	२० १६	११ ८	० २५	११ १८	१९ ५०	२३ २७
२१	२० ३	१० ४६	० १	११ ३८	२० ३	२३ २८
२२	१९ ४९	१० २४	० २३	११ ५९	२० १५	२३ २८
२३	१९ ३६	१० ३	० ४६	१२ १९	२० २७	२३ २७
२४	१९ २१	९ ४१	१ १०	१२ ३९	२० ३९	२३ २७
२५	१९ ७	९ १८	१ ३४	१२ ५९	२० ५०	२३ २७
२६	१८ ५२	८ ५७	१ ५७	१३ १८	२१ १	२३ २४
२७	१८ ३७	८ ३५	२ २१	१३ ३८	२१ १२	२३ २३
२८	१८ २१	८ १२	२ ४४	१३ ५७	२१ २२	२३ २१
२९	१८ ५	७ ४९	३ ८	१४ १६	२१ ३१	२३ १८
३०	१७ ४९	७ २६	३ ३०	१४ ३४	२१ ४१	२३ १५
३१	१७ ३३	७ ३	३ ५४	१४ ५३	२१ ५०	२३ १५

या कोष्टकांत महिन्यांखालीं आणि तारखां स मों रक्रांतिलि हि ली आहे.

सूची-बी क्रांति, रेखांश ७५, पूर्वेष, दिवसांशे १२ वाजतां.

तारखा	जुलई उ०	आगस्त उ०	सप्टेंबर उ०	अक्टोबर दक्षिण	नोवेंबर द.	डिसेंबर द.
१	२३ ११	१८ १३	८ ३३	३ ५५	१४ १४	२१ ४३
२	२३ ७	१७ ५८	८ ११	३ १९	१४ ३४	२१ ५३
३	२३ २	१७ ४२	७ ४९	२ ४२	१४ ५३	२१ २
४	२२ ५८	१७ २८	७ २७	४ ५	१५ ११	२२ १०
५	२२ ५२	१७ १२	७ ५	४ २९	१५ ३०	२२ १९
६	२२ ४७	१६ ५५	६ ४३	४ ५३	१५ ४८	२२ २७
७	२२ ४१	१६ ३९	६ ३१	५ १५	१६ ६	२२ ३४
८	२२ ३५	१६ २३	५ ५८	५ ३८	१६ २५	२२ ४१
९	२२ २९	१६ ५	५ ३५	६ १	१६ ४२	२२ ४७
१०	२२ २१	१५ ४८	५ १३	६ २३	१६ ५९	२२ ५३
११	२२ १४	१५ ३०	४ ५०	६ ४६	१७ १६	२२ ५८
१२	२२ ६	१५ १२	४ २७	७ ३	१७ ३३	२२ ३
१३	२१ ५७	१४ ५४	४ ४	७ ३२	१७ ४९	२३ ८
१४	२१ ४९	१४ ३६	३ ४१	७ ५४	१८ ५	२३ १२
१५	२१ ४०	१४ १८	३ १८	८ १६	१८ २१	२३ १५
१६	२१ ३०	१३ ५९	२ ५५	८ ४०	१८ ३६	२३ १९
१७	२१ २०	१३ ४०	२ ३२	९ २	१८ ५१	२३ २२
१८	२१ १०	१३ २१	२ ९	९ २४	१९ ६	२३ २४
१९	२१ ०	१३ १	१ ४५	९ ४६	१९ २०	२३ २६
२०	२० ५०	१२ ४२	१ २२	१० ७	१९ ३४	२३ २७
२१	२० ३९	१२ २३	० ५९	१० २९	१९ ४८	२३ २८
२२	२० २७	१२ २	० ३५	१० ५०	२० १	२३ २८
२३	२० १५	११ ४३	३० २	११ १२	२० १५	२३ २७
२४	२० ३	११ २१	२० १२	११ ३३	२० २७	२३ २७
२५	१९ ५०	११ १	० ३५	११ ५४	२० ३९	२३ २६
२६	१९ ३७	१० ४०	० ५९	१२ १४	२० ५१	२३ २४
२७	१९ २४	१० २०	१ २२	१२ ३५	२१ २	२३ २३
२८	१९ १०	९ ५९	१ ४५	१२ ५५	२१ १३	२३ २०
२९	१८ ५६	९ ३८	२ ९	१३ १५	२१ २४	२३ १७
३०	१८ ४३	९ १६	२ ३२	१३ ३५	२० ३४	२३ १४
३१	१८ २८	८ ५५	३ ५	१३ ५५	२० ४५	२३ १०

श्री ७५ रेखांशां वरील दिवसाचा वारा वाजतांची आहे. तिजवरून इच्छित काल

ऋषि स्थलयांची क्रांति स्वल्पान्त कळेल. जर मार्च तारीख पंधरा प्रातः कालचा सहा
 वाजतांची क्रांति समजावी, अर्ध इंचा असेल, तर त्या तारखेस मोर आणि महिन्याखा
 षे बारा वाजतांची क्रांति २ २४ आहे, परंतु प्रातः कालचा सहा वाजतांची क्रांतिची
 इंचा आहे, झणून इच्छित तारखेचा पूर्वील तारखेस मोर, बारा वाजतांची क्रांति
 १ ४७ आहे, याजवरून २४ तास मोर २४ कमी, तर ६ तासांस किती? या प्र-
 माणें त्रैराशिकानें सहा कला येतात; याज करितां इच्छित काली क्रांति २ २९ आ-
 हे. आतां याच दिवशीं सायं कालचा सहा वाजतांची क्रांतिची इंचा असेल,
 तर पंधरा वसोळा, या दोन तारखांचा क्रांतिचें अंतर २४ आहे, झणून वर सांगि-
 तल्या रितीनें त्रैराशिके केल्यास सहा कला येतात; यास्तव सायं काली सहा वाज-
 तांची क्रांति २ १७ आहे. याच प्रमाणें जर वर लिहित्या पंधरा व्या तारखेस दिवसा
 चा चारा वाजतां ७२ रेखांशावरील क्रांतिची इंचा असेल, तर पंधरा वसोळा,
 या दोन तारखांचा बारा वाजतांची क्रांतिचें अंतर २४ आहे, झणून ३६० ज-
 र २४ तर ३ किती? या प्रमाणें त्रैराशिकानें १२ येतात; याज करितां ७२ रेखां-
 शांवर २ २२ ४८ क्रांति आहे. त्याच तारखेस ७८ रेखांशावरील दिवसाचा
 बारा वाजतांची क्रांति, १४ व १५ तारखांचें अंतर घेऊन, वर लिहित्या रितीनें
 २ २३ १२ आहे. या प्रमाणें इच्छित कालचीही, इष्ट स्थळावरील क्रांति निघेल
 आतां क्रांति काढण्याविषयीं वर जीरीनि लिहिली, ती केवळ बराच मूर्खी; परंतु
 थोड्या अंतरावरील क्रांति काढणें आहे, झणून विशेष चूक पडत नाही.

पुढील कोष्टकांत वर लिहित्या रितीचा उपयोग व्हावा, झणून कित्यक प्र-
 सिद्ध गांवांचा नावां खाली, त्या त्या गांवाचे रेखांश, व सर्व गांवांस मोर अक्षांश
 लिहिले आहेत. त्यांनील कला ५० म्हा पांच ५॥ साडे पांच, अशा गरीरी
 तीनें लिहित्या आहेत.

कित्येक स्थलोंचा अक्षांशांचा कोष्टक -

कलकत्ता ८८ २८	२३ २३	अहमदनगर ७४ ४९	१९ ६	कहाड ७४ १६।	१७ १७।।
काशी	२५ ३०	जामगाव	१९ ४०।	वांडे ७३ ५७	१७ ५५।
शिंघहेदराबाद ७५ ४१	२५ २२	टोंकें ७५ ७	१९ ४०।	पंढरपूर ५३४	१७ ४०।।
भद्रास ८० १९।।	१३ ४।।	बेलें	१९ २।।	शिरोळ	१८ ७
मुंबई ७२ ५७	१८ ५५।।	करमाळें	१८ २७	इस्लांपूर	१७ ३
ठज्जनी ७५ ४५।।	२३ ९	नासिक ७३ ५१	०८ ५७।।	वाळवें	१७ १।।
इंदूर ७५ ४७।।	२२ ४३	अंबकेश्वर	१९ ५३	कोल्हापूर ७४ १७	१६ ४१।।
गवाल्हेर ७८ १	२५ १५	संगमनेर	१९ ३९	मलकापूर ७४	१६ ५५।
धार ७५ १८	२२ ३५।।	पुणे ७३ ५५	१८ ३०	निपाणी ७५ ३५।।	१६ २३।।
अश्रीरगड ७६ १०।।	२१ २५।।	तळेगाव	१८ ४१	पन्हाळा ७४ १०	१६ ४८।।
एलिचपूर ७७ ३२	२१ १६।।	सासवड	१८ १८।।	कागल	१६ ३४।
नागपूर ७९ ९	२१ १०	भीमाशंकर	१९ ८	मिरज ७४ ४२	१६ ४९
हेदराबाद ७९ २३	१७ २२	जुन्नर ७४	१९ १६	सांगली ७४ ३७।	१६ ५१।।
अवरंगाबाद ७५ ३५	१९ ५५।	चिंचवड	१८ ३७	नासगाव ७३ ३९।।	१७ २।
दोलताबाद ७५ १६	१९ ५७।।	पाटस	१८ २५।।	चिंचणी ७४ ४३	१७ ३।
पैठण ७५ २५	१९ ३१।	इंदापूर ७५ ५।।	१८ ७	कुठदवाड ७५ ३९	१६ ४१।
अकलकोट ७६ १६	१७ ३३	जेजुरी	१८ १३।।	इतलकजी ७४ ३२	१६ ३८।।
बेदर ७६ १०	१७ ५५।।	टेंभुर्णी ७५ १६	१८ १।।	जमसिंहो	१६ ३०।।
कलबुर्गी ७५ ५५	१७ ३०।	सोलापूर ७५ ५०।।	१७ ४२	किठूर	१५ ३५।।
धुळे ७४ ४४	२० ५२	ब्रह्मपुरी	१७ ३३।।	धारवाड ७५ ४।।	१५ २६।।
मालंगाव ७७ ३५	२० ३३।।	भांहाळ	१७ ४८।।	सुनीहुबळी ७५ १२	१५ १९।।
ब-हाणपूर ७५ १४	१९ १७	मंगळवेढें ७५ १०।	१७ ३०।।	नरगुंद	१५ ४३
नंदुरबार	२१ २१।	सातारा ७४ २।।	१७ ४१।।	बदामी	१५ ५५
तालनेर	२१ १३।।	विजापूर	१६ ४९।।	कलादगी	१६ १३
कपूर	२० १४।	भोर	१८ ७	बागलकोट	१६ ११।।

(१६७)

किलेक स्थलांचा अक्षांशांचा कोष्टक -

मदुर्ग	१९ ५६।।	रत्नागिरी	१७ ४	सोमेश्वर	१६ ५८।
बलमुंद	१५ ३३	कोरगाव	१७ ५६	पांवल	१६ ५२।।
ळगांव	१५ ५०।।	ओजगाव	१७ ५०।।	पूर्णगड	१६ ४८।।
हाडुर	१५ ४९।।	हरण	१७ ४८।।	कळबुशी	१७ ५८।
धोक	१६ २०	मुरुड	१७ ४६।।	मागून	१७ १५।।
काक	१६ १०।	कापोजोगनद	१७ ४५।।	सुंबाड	१७ १७।।
दशाहापुर	१६ ५।।	जालगांव	१७ ४४।।	संगमेश्वर	१७ ११
मदाबाद	२२ १	करजगांव	१७ ४२	देवसुख	१७ ३।।
डिंडे	२२ ४७	चिरवलगांव	१७ ३९।।	देवकें	१६ ५९
शेंदें	२२ २१	कोळधरें	१७ ३८।।	शिपोशी	१६ ५६
बोव	१९ ४१	पंचनदी	१७ ३७।।	लांजें	१६ ५१।।
रत	२१ १३	दाभोळ	१७ ३४।।	कोतवडें	१७ ५।।
गे	१९ १०	पालगड	१७ ४८।।	आडिबरे	१६ ४४।।
गान	२० २४	खेड	१७ ४३	विजयदुर्ग	१६ ३३।
रापूर	१९ ५२	सुसरी	१७ ४२।।	वाघोटणें	१६ २९।।
हिं	१९ २०	मेंदें	१७ ३६।।	राजापूर	१६ ३९।
याण	१९ १५	अंजनबळ	१७ ३३।।	पेंभुंई	१६ ३०
बेल	१८ ५९	सुहागर	१७ ३८।	खारंपाटण	१६ ३३।।
ग	१८ ४३	पालशेत	१७ २६।।	साळशी	१६ २०
डिंडे	१८ २।।	साबडें	१७ २४।।	आचरे	१६ १३।
गटणें	१८ ३१	विपळोण	१७ २१।।	अशामठ	१६ १५।
शाळाकुलावा	१८ ५४	परीशाम	१७ २२।।	मालवण	१६ ६।
शिवाग	१८ ३८	मालमुंड	१७ १।।	वेंसुळें	१६ ५१।।
तरा	१८ १६।	नेवरे	१७ ७	सावंतवाडी	१५ ५४।
रधन	१८ २	गोळप	१६ ५४।।	गोबें	१६ ३०

शुद्धिपत्र.

पृष्ठ	पंक्ती	अशुद्ध	शुद्ध
३	२	साहाया शिवाय	सहाया शिवाय
६	१	न्यूनता असतां ही,	न्यूनता आहे, तरी ही.
१०	५	दोन चिन्ह,	द्वि चिन्ह,
१५	१०	किंमती	किमती
—	१५	—	—
४१	९	माहित	माहीत
९७	१३	सांगितल्याचा	सांगितल्याचा
१४१	१७	त्रिकोणांतर,	त्रिकोणांतरगत
१५४	१९	असतो.	असतें.
छापतांनां कांहीं प्रतींवर अशुद्धें उठलेलीं पहाण्यांत आलीं तीं			
३२	१७	को ३६ = $\frac{१}{४}$	को ३६ - $\frac{१}{४}$
८९	९	कारण	कारण
—	१२	पृथःकरण	पृथक्करण
१४१	१५	डग चो	डगचा

