洋算例題續編

洋筭例題續第四篇巻之五

陸軍大尉福田半編輯

疊積分

○前篇巻之二に於てハ如く第一次微分の符号を附するに元始函數を定めたる後ち之より分訳する者あり第二次微分ハ第一次微分を再ひ微分し得る所の者あり第三次微分ハ第二次微分を又微分し得る者あり故に第二次微分式を積分するに一次に積分する能はず先一度積分し一次微分式を得る而して後ち又積分するを要す故に第三次四次等の微分式を積分するには其次數の如く逐次に積分を要し

○第二次微分式を積分するにハ∬或∫²なる符号を以てし又第三次微分式を積分するハ∭或ハ∫³なる符号を以てし之に準ス

一例 $\partial^2 u = ax^2\partial x$ なる微分式を積分する如何

設題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} = ax^2\partial x$$

$$\int\frac{\partial^2 u}{\partial x} = \int ax^2\partial x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ax^3}{3} + c$$

$$\int\partial u = \int\frac{ax^3}{3}\partial x + \int c\partial x$$

$$u = \frac{ax^4}{12} + cx + c'$$

$$\therefore u = \iint ax^2\partial x^2$$

$$u = \frac{ax^4}{12} + cx + c'$$

才一　才二　才三　才四　才五

今 $\partial^3 u = ax\partial x^3$ なる微分式を積分する如何

今 $\partial^3 u = ax^2\partial x^3$ なる微分式を積分する如何

今 $\partial^4 u = 144\partial x^4$ なる微分式を積分する如何

今 $\partial^3 u = ax^{\frac{1}{2}}\partial x^3$ なる微分式を積分する如何

今 $\partial^2 u = -x^{-1}\partial x^2$ なる微分式を積分する如何

微分方程式積分法

前巻に記載する所の積分法ハ皆通例積分法にして仮令(1)の如き式に於て(2)なる者を積分し又(3)の如き式に於て(4)なる者を積分する者なり今若し(5)の如き式に於て(6)の如き者ハ是まて記載する所の法を以て積分する能ハす之を積分する法を微分方程式積分法と云ふ今(5)式

に於て(7)の如き者は(5)式をPQにて除せは(8)となる是即ち(3)と同し者なるか故に是まての法を以て積分し得へし又P及ひQの(6)式に於てそ亦種々の法あり逐次に之を示すへし今P及ひQの(6)式に於てxyの指数同しけれは先つ(5)式をQにて除し(9)となる後に於てyを(10)と

(1) $\begin{cases}\partial y = x\partial x \\ \partial^n y = x\partial x^n\end{cases}$

(2) $x=\partial f(x)$

(3) $y\partial y = x\partial x$

(4) $\begin{cases}y=\partial f(y) \\ x=\partial f'(x)\end{cases}$

(5) $P\partial x = Q\partial y$

(6) $\begin{cases}P=f(xy) \\ Q=F(xy)\end{cases}$

(7) $\begin{cases}P=f(y) \\ Q=F(x)\end{cases}$

(8) $\frac{\partial x}{Q}=\frac{\partial y}{P}$

(9) $\partial y=\frac{P}{Q}\partial x$

(10) $y=ux$

(11) $\frac{P}{Q}=u$

(12) $\partial y = u\partial x + x\partial u$

(13) $u\partial x + x\partial u = u\partial x$

(14) $(u^{-u})\partial x = x\partial u$

定むれはxyの指数同しきか故に$\frac{P}{Q}$はuの函数となる之を(11)とし今(10)を微分し(12)となる(11)及ひ(12)を(9)に容れ(13)となる変形して(14)及ひ(15)となる積分して(16)を得る右項積分したる後ち(10)の変形(17)を用ゐれは即ち(5)式の全積分を得るなり

(15) $\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial u}{u^{-u}}$

(16) $\log x=\int\frac{\partial u}{u^{-u}}$

(17) $u=\frac{y}{x}$

二例

$x\partial x + y\partial y = x\partial y - y\partial x$

なる微分式あり積分すること如何

(1) $x\partial x + y\partial y = x\partial y - y\partial x$

(2) $(x-y)\partial y = (x+y)\partial x$

(3) $\partial y = \frac{x+y}{x-y}\partial x$

(4) $y = vx$

(5) $\begin{cases} \frac{p}{q} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+v}{1-v} = v \\ u - v = \frac{1+v}{1-v} - v = \frac{1+v^2}{1-v} \end{cases}$

(6) $N\log x = \int\frac{1-v}{1+v^2}\partial v = \int\frac{\partial v}{1+v^2} - \int\frac{v\partial v}{1+v^2}$

(7) $\therefore \tan^{-1} v = N\log\sqrt{1+v^2} + C$

(8) $\tan^{-1}\frac{y}{x} = N\log\sqrt{x^2+y^2} + C$

先つ(1)式を変形して(2)となる前法に依て(4)と定まれは(5)となる故に前の公式に因り(6)を得る積分して(7)となる(4)を用ひてvを$\frac{y}{x}$に代へ且つ変形して(8)を得る是れ即ち(1)式の積分

今爰に二次の微分式あり其形(1)の如き者は積分すること甚だ容易にして是れ一次の法にて積分し得難し先つ(1)式を∂x^2にて除し(2)となる二次方程式の法を以て解き(3)を得る∂xを乗し(4)となる爰にあり以て通例の法を以て積分し得へし其

なり

積分したる者は即ち(5)なり

(1) $\partial y^2 + ax\partial x.\partial y + b\partial x^2 = 0$

(2) $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + ax\frac{\partial y}{\partial x} + b = 0$

(3) $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{2}ax \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2x^2-4b}$

(4) $\partial y = -\frac{1}{2}ax\partial x \pm \partial x\sqrt{(a^2x^2-4b)}$

(5) $y = -\frac{1}{4}ax^2 \pm \frac{1}{4}x\sqrt{a^2x^2-4b} \pm N\log\left\{x+\sqrt{\left(x^2-\frac{4b}{a^2}\right)}\right\}+C$

設題

第六 今 $(1+x^2)\partial y = y^{\frac{1}{2}}\partial y$ なる式ゟ積分を出すこと如何

第七 今 $xy^2\partial x + \partial y = 0$ なる式ゟ積分を出すこと如何

第八 今 $\frac{\partial x}{1+x^2} + \frac{\partial y}{1+y^2} = 0$ なる式ゟ積分を出すこと如何

第九 今 $\frac{x\partial y + y\partial x}{x} = \partial y$ なる式ゟ積分を出すこと如何

第十 今 $x\partial x = y\partial y + y^2\partial y + x\partial y$ なる式ゟ積分を出すこと如何

第十一 今 $y\partial y - x\partial x = a(x\partial y + y\partial x)$ なる式ゟ積分を出すこと如何

十二 今 $a\partial x^2 = y\partial y^2 - b\partial x\partial y$ なる式ゟ積分を出すこと如何

十三 今 $y^2\partial y = 3xy\partial x - x^2\partial y$ なる式ゟ積分を出すこと如何

十四 今 $y^2\partial x + xy\partial y + x^2\partial y = 0$ なる式ゟ積分を出すこと如何

十五 今 $x^2\partial y - y\partial x = xy\partial x$ なる式ゟ積分を出すこと如何

洋算例題續第四篇巻之五 終

洋算例題續第四篇巻之六

陸軍大尉福田半編輯

諸表

A

$$\int \frac{x^5\partial x}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{(8a^2-4abx^2+3b^2x^4)\sqrt{(a+bx^2)}}{15b^3}$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = -\frac{1}{8}x(3c^2+2x^2)\sqrt{(c^2-x^2)} + \frac{3}{8}c^4B$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{\sqrt{(c^2+x^2)}} = -\frac{1}{8}x(3c^2-2x^2)\sqrt{(c^2+x^2)} + \frac{3}{8}c^4L_1$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{\sqrt{(x^2-c^2)}} = \frac{1}{8}x(2x^2+3c^2)\sqrt{(x^2-c^2)} + \frac{3}{8}c^4L'_1$$

$$\int \frac{x^3\partial x}{\sqrt{(a+bx)}} = -\frac{(2a-bx^2)\sqrt{(a+bx^2)}}{3b^2}$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{(c^2-x^2} + \frac{1}{2}c^2B_1$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(c^2+x^2)}} = \frac{1}{2}x\sqrt{(c^2+x^2)} - \frac{1}{2}c^2L_1$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(x^2-c^2)}} = \frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-c^2)} + \frac{1}{2}c^2L'_1$$

$$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{\sqrt{(a+bx^2}}{b}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = B \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt{(c^2+x^2)}} = L \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt{(x^2-c^2)}} = L'$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5\sqrt{(x^2-c^2)}} = \frac{(3x^2+2c^2)\sqrt{(x^2-c^2)}}{8c^4x^4} + \frac{3}{8c^5}\,B,$$

C

$$\int x^5\partial x\sqrt{(a+bx^2)} = \frac{(8a^2-12abx^2+15b^2x^4)\sqrt{(a+bx^2)^3}}{105\,b^3}$$

$$\int x^4\partial x\sqrt{(c^2-x^2)} = \frac{x}{48}(3c^4+2c^2x^2-8x^4)\sqrt{(c^2-x^2)} + \frac{1}{16}c^6 B$$

$$\int x^4\partial x\sqrt{(c^2+x^2)} = \frac{x}{48}(3c^4-2c^2x^2-8x^4)\sqrt{c^2+x^2} + \frac{1}{16}c^6 L$$

$$\int x^4\partial x\sqrt{x^2-c^2} = \frac{x}{48}(8x^4-2c^2x^2-3c^4)\sqrt{x^2-c^2} - \frac{1}{16}c^6 L',$$

$$\int x^3\partial x\sqrt{(a+bx^2)} = -\frac{(2a-3bx^2)\sqrt{(a+bx^2)^3}}{15\,b^2}$$

$$\int x^2\partial x\sqrt{c^2-x^2} = -\frac{1}{8}x(c^2-2x^2)\sqrt{(c^2-x^2)} + \frac{1}{8}c^4 B$$

$$\int x^2\partial x\sqrt{c^2+x^2} = \frac{1}{8}x(c^2+2x^2)\sqrt{(c^2+x^2)} - \frac{1}{8}c^4 L$$

$$\int x^2\partial x\sqrt{x^2-c^2} = \frac{1}{8}x(2x^2-c^2)\sqrt{x^2-c^2} - \frac{1}{8}c^4 L'$$

$$\int x\partial x\sqrt{(a+bx^2)} = \frac{\sqrt{(a+bx^2)^3}}{3b}$$

B

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{c^2-x^2}} = \frac{1}{c}L,$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(c^2+c^2)}} = \frac{1}{c}L',$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(x^2-c^2)}} = \frac{1}{c}B,$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2\sqrt{(a+bx^2)}} = -\frac{\sqrt{a+bx^2}}{ax}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{(c^2-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(c^2-x^2)}}{2c^2x^2} + \frac{1}{2c^3}L,$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{(c^2+x^2)}} = -\frac{\sqrt{(c^2+x^2)}}{2c^2x^2} - \frac{1}{2c^3}L',$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{(x^2-c^2)}} = \frac{\sqrt{(x^2-c^2)}}{2c^2x^2} + \frac{1}{2c^3}B,$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4\sqrt{(a+bx^2)}} = -\frac{(a-2bx^2)\sqrt{(a+bx^2)}}{3a^2x^2}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5\sqrt{(c^2-x^2)}} = -\frac{(2c^2+3x^2)\sqrt{(c^2-x^2)}}{8c^4x^4} + \frac{3}{8c^5}L,$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5\sqrt{(c^2+x^2)}} = -\frac{(2c^2-3x^2)\sqrt{(c^2+x^2)}}{8c^4x^4} + \frac{3}{8c^5}L',$$

$$\int \partial x \sqrt{c^2-x^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{c^2-x^2} + \frac{1}{2} c^2 B$$

$$\int \partial x \sqrt{(c^2+x^2)} = \frac{1}{2} x \sqrt{(c^2+x^2)} + \frac{1}{2} c^2 L$$

$$\int \partial x \sqrt{(x^2-c^2)} = \frac{1}{2} x \sqrt{(x^2-c^2)} - \frac{1}{2} c^2 L'$$

D

$$\int \frac{\partial x}{x} \sqrt{(c^2-x^2)} = \sqrt{(c^2-x^2)} + c L,$$

$$\int \frac{\partial x}{x} \sqrt{c^2+x^2} = \sqrt{(c^2+x^2)} + c L',$$

$$\int \frac{\partial x}{x} \sqrt{x^2-c^2} = \sqrt{x^2-c^2} - c B,$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2} \sqrt{c^2-x^2} = -\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{x} - B,$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2} \sqrt{c^2+x^2} = -\frac{\sqrt{c^2+x^2}}{x} + L$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2} \sqrt{x^2-c^2} = -\frac{\sqrt{x^2-c^2}}{x} + L'$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3} \sqrt{c^2-x^2} = -\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{2x^2} - \frac{1}{2c} L,$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3} \sqrt{x^2-c^2} = -\frac{\sqrt{x^2-c^2}}{2x^2} + \frac{1}{2c} B,$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4} \sqrt{a+bx} = -\frac{\sqrt{(a+bx^2)^3}}{3ax^3}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6} \sqrt{a+bx^2} = -\frac{(3a-2bx^2)\sqrt{(a+bx^2)^3}}{15a^2x^5}$$

E

$$\int \frac{x^6 \partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = -\frac{8a^2+4abx^3-b^2x^4}{3b^3\sqrt{a+bx^2}}$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{(c^2-x^2)^3}} = \frac{x(3c^2-x^2)}{2\sqrt{(c^2-x^2)}} - \frac{3}{2} c^2 B,$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{(c^2+x^2)^3}} = \frac{x(3c^2+x^2)}{2\sqrt{c^2+x^2}} - \frac{3}{2} c^2 L$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{(x^2-c^2)^3}} = \frac{x(x^2-3c^2)}{2\sqrt{(x^2-c^2)}} + \frac{3}{2} c^2 L'$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{(a+bx^2)^3}} = \frac{2a+bx^2}{b^2\sqrt{(a+bx^2)}}$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(c^2-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}} - B$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(c^2+x^2)^3}} = \frac{-x}{\sqrt{(c^2+x^2)}} + L$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4\sqrt{(a+bx^2)^3}} = -\frac{(a^2-4abx^2-8b^2x^4)}{3a^3x^3\sqrt{(a+bx^2)}}$$

G

$$\int x^3\partial x\sqrt{(a+bx^2)^3} = -\frac{(2a-5bx^2)\sqrt{(a+bx^2)^5}}{35b^2}$$

$$\int x^2\partial x\sqrt{(c^2-x^2)^3} = -\frac{1}{48}x(3c^2-2x^2)(c^2-4x^2)\sqrt{c^2-x^2} + \frac{1}{16}c^6B$$

$$\int x^2\partial x\sqrt{(c^2+x^2)^3} = -\frac{1}{48}x(3c^2+2x^2)(c^2+4x^2)\sqrt{(c^2+x^2)} - \frac{1}{16}c^6L$$

$$\int x^2\partial x\sqrt{(x^2-c^2)^3} = \frac{1}{48}x(2x^2-3c^2)(4x^2-c^2)\sqrt{(x^2+c^2)} + \frac{1}{16}c^6L'$$

$$\int x\partial x\sqrt{(a+bx)^3} = \frac{\sqrt{(a+bx^2)^5}}{5b}$$

$$\int \partial x\sqrt{(c^2-x^2)^3} = \frac{1}{8}x(5c^2-2x^2)\sqrt{(c^2-x^2)} + \frac{3}{8}c^4B$$

$$\int \partial x\sqrt{(c^2+x^2)^3} = \frac{1}{8}x(5c^2+2x^2)\sqrt{(c^2+x^2)} + \frac{3}{8}c^4L$$

$$\int \partial x\sqrt{(x^2-c^2)^3} = \frac{1}{8}x(2x^2-5c^2)\sqrt{(x^2-c^2)} + \frac{3}{8}c^4L'$$

II

$$\int \frac{\partial x}{x}\sqrt{(c^2-x^2)^3} = \frac{1}{3}(4c^2-x^2)\sqrt{(c^2-x^2)} + c^3L_1$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(x^2-c^2)^3}} = \frac{-x}{\sqrt{(x^2-c^2)}} + L'$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(a+bx)^3}} = \frac{1}{b\sqrt{a+bx^2)}}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(a+bx^2)^3}} = \frac{x}{a\sqrt{(a+bx^2)}}$$

F

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(c^2-x^2)^3}} = \frac{1}{c^2\sqrt{(c^2-x^2)}} + \frac{1}{c^3}L_1$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(c^2+x^2)^3}} = \frac{1}{c^2\sqrt{c^2+x^2}} + \frac{1}{c^3}L'_1$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(x^2-c^2)}} = \frac{1}{c^2\sqrt{(x^2-c^2)}} - \frac{1}{c^3}B_1$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{(a+bx^2)^3}} = -\frac{a+2bx^2}{a^2x\sqrt{a+bx^2}}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{c^2-x^2}} = -\frac{c^2-3x^2}{2c^4x^2\sqrt{(c^2-x^2)}} + \frac{3}{2c^5}L_1$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{(c^2+x^2)^3}} = -\frac{c^2+3x^2}{2c^4x^2\sqrt{c^2+x^2}} - \frac{3}{2c^5}L'$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{(x^2-c^2)^3}} = -\frac{3x^2-c^2}{2c^4x^2\sqrt{(x^2-c^2)}} - \frac{3}{2c^5}B$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5}\sqrt{(a+bx^2)^3} = \frac{\sqrt{(a+bx^2)^5}}{5ax^5}$$

I

$$\int \frac{x^3\partial x}{\sqrt{(2cx-x^2)}} = -\frac{1}{6}(15c^2+5cx+2x^2)\sqrt{(2cx-x^2)}+\frac{5}{2}c^3B_1$$

$$\int \frac{x^3\partial x}{\sqrt{(2cx+x^2)}} = \frac{1}{6}(15c^2-5xc+2x^2)\sqrt{(2cx+x^2)}-\frac{5}{2}c^3L_2$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(2cx-x^2)}} = -\frac{1}{2}(3c+x)\sqrt{(2cx-x^2)}+\frac{3}{2}c^2B_2$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(2c-x-x^2)}} = -\frac{1}{2}(3c-x)\sqrt{(2cx+x^2)}+\frac{3}{2}c^2L_2$$

$$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{(2cx-x^2)}} = -\sqrt{(2cx-x^2)}+cB_2$$

$$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{(2cx+x^2)}} = \sqrt{(2cx+x^2)}-cL_2$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(2c-x^2)^2}} = B_2 \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt{(2cx+x^2)}} = L_2$$

j

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(ax+bx^2)}} = -\frac{2\sqrt{(ax+bx^2)}}{ax}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2\sqrt{(ax+bx^2)}} = -\frac{2(a-2bx)\sqrt{(ax+bx^2)}}{3a^2x^2}$$

$$\int \frac{\partial x}{x}\sqrt{(c^2+x^2)^3} = \frac{1}{3}(4c^2+x^2)\sqrt{(c^2+x^2)}+c^3L'_1$$

$$\int \frac{\partial x}{x}\sqrt{(x^2-c^2)^3} = \frac{1}{3}(x^2-4c^2)\sqrt{(x^2-c^2)}+c^3B_1$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2}\sqrt{(c^2-x^2)^3} = -\frac{(2c^2+x^2)\sqrt{(c^2-x^2)}}{2x}-\frac{3}{2}c^2B$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2}\sqrt{(c^2+x^2)^3} = -\frac{(2c^2-x^2)\sqrt{(c^2+x^2)}}{2x}+\frac{3}{2}c^2L$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2}\sqrt{(x^2-c^2)^3} = \frac{(x^2+2c^2)\sqrt{(x^2-c^2)}}{2x}-\frac{3}{2}c^2L'$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3}\sqrt{(c^2-x^2)^3} = -\frac{(c^2+2x)\sqrt{(c^2-x^2)}}{2x^2}-\frac{3}{2}cL_1$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3}\sqrt{(c^2-x^2)^3} = -\frac{(c^2-2x)\sqrt{(c^2+x^2)}}{2x^2}+\frac{3}{2}cL'_1$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3}\sqrt{(x^2-c^2)^3} = \frac{(2x^2+c^2)\sqrt{x^2-c^2}}{2x^2}-\frac{3}{2}cB_1$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4}\sqrt{(c^2-x^2)^3} = -\frac{(c^2-4x^2)\sqrt{(c^2-x^2)}}{3x^3}+B$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4}\sqrt{(c^2+x^2)^3} = -\frac{(c^2+4x^2)\sqrt{(c^2+x^2)}}{3x^3}+L$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4}\sqrt{(x^2-c^2)^3} = -\frac{(4x^2-c^2)\sqrt{(x^2-c^2)}}{3x^3}+L'$$

M

$$B = \sin^{-1}\frac{x}{c} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = \cos^{-1}\frac{\sqrt{(c^2-x^2)}}{c}$$

$$L = \log\frac{x+\sqrt{(c^2+x^2)}}{c} = -\log\frac{-x+\sqrt{c^2+x^2}}{c}$$

$$L' = \log\frac{x+\sqrt{(x^2-c^2)}}{c} = -\log\frac{x-\sqrt{x^2-c^2}}{c}$$

$$B_1 = \sin^{-1}\frac{\sqrt{(x^2-c^2)}}{x} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-c^2}}{c} = \cos^{-1}\frac{c}{x}$$

$$L_1 = \log\frac{c-\sqrt{(c^2-x^2)}}{x} = -\log\frac{c+\sqrt{(c^2-x^2)}}{x}$$

$$L_1' = \log\frac{-c+\sqrt{(c^2+x^2)}}{x} = -\log\frac{c+\sqrt{(c^2-x^2)}}{x}$$

$$B_2 = \mathrm{versin}^{-1}\frac{x}{c} = \cos^{-1}\frac{c-x}{c}$$

$$L_2 = \log\frac{c+x\sqrt{2cx+x^2}}{c} = -\log\frac{c+x-\sqrt{2cx+x^2}}{c}$$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(ax+bx^2)}} = -\frac{2(3a^2-4abx+8b^2x^2)\sqrt{(ax+bx^2)}}{15a^3x^3}$$

K

$$\int x\,dx\sqrt{2cx+x^2} = -\frac{1}{6}(3c+2x)(c+x)\sqrt{2cx+x^2}+\frac{1}{2}c^3L_2$$

$$\int x\,dx\sqrt{(2cx-x^2)} = -\frac{1}{6}(3c-2x)(c+x)\sqrt{(2cx-x^2)}+\frac{1}{2}c^3B_2$$

$$\int x\,dx\sqrt{(2cx-x^2)} = -\frac{1}{2}(c-x)\sqrt{(2cx-x^2)}+\frac{1}{2}c^2B_2$$

$$\int x\,dx\sqrt{(2cx+x^2)} = \frac{1}{2}(c+x)\sqrt{2cx+x^2}-\frac{1}{2}c^2L_2$$

L

$$\int\frac{dx}{x}\sqrt{(2cx-x^2)} = \sqrt{(2cx-x^2)}+cB_2$$

$$\int\frac{dx}{x}\sqrt{(2cx+x^2)} = \sqrt{(2cx+x^2)}+cL_2$$

$$\int\frac{dx}{x^2}\sqrt{(2cx+x^2)} = -\frac{2\sqrt{(2cx-x^2)}}{x}-B_2$$

$$\int\frac{dx}{x^2}\sqrt{(2cx+x^2)} = -\frac{2\sqrt{(2cx+x^2)}}{x}+L_2$$

$$\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{(ax+bx^2)} = -\frac{2(a+bx)\sqrt{(ax+bx^2)}}{3ax^2}$$

洋筭例題續第四篇巻之七

陸軍大尉福田半編輯

曲線の長さを求むる法

○凡そ物あれハ必す是を細分し此細部を微數と云ふ又此微數を微分と為し得へし而して此微分を積分すれハ即ち物の大小を知るへし蓋し其細分必す連續せされハ物の大小を知る能ハ

○線の長さを求むるハ幾何學に於て直線及ひ圏の長さハ已に知れり曲線に至てハ微分積分に非されハ其長さを知る能ハス今積分に於てハ是を細分し各部分を直線に擬し其直線の長さを求むる所なり故に之を曲線改直線法と云ふ是

れ蓋し積分のみに非ず幾何学に於て圏の長さを
を求むるに是を細分し其各部を直線とし其長
を求むると同理なり
○前篇巻之十一第二則に拠れば一切曲線の微分
公式 $\partial l = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ なり
右曲線式を直線式に改むるには本曲線の微分
を求め式中の x 及び ∂x に代へ而して後に其積分
を求め得る所の数即ち曲線の長さをなり
一例今弧線あり任意一分の長さを求むる如何
前編巻之三第十五則に拠り (1) とし微分を求め
半径を一とすれば (2) を得る合名法に依て級数
を作り (3) を得る各積分し (4) を得る茲に於て弧
度令度より起るとすれば x を亦令にして c を
亦令なり故に (5) を得る即ち弧線任意一分の長
を得る式なり

(1) $x = \tan^{-1} z$

(2) $\partial z = \frac{\partial x}{1+x^2}$

(3) $\frac{\partial x}{1+x^2} = \partial x - x^2 \partial x + x^4 \partial x - x^6 \partial x + \cdots\cdots$

(4) $z = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots\cdots + c$

(5) $z = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots\cdots$

(6) $x = 30^\circ \qquad \tan 30^\circ = \sqrt{\frac{1}{3}}$

(7) $z = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \cdots\cdots\right)$

(8) $z = 0{,}5235987\cdots\cdots$

(9) $\pi = 6z = 3{,}14159265\cdots\cdots$

故に又假に (6)
とすれば (7) を
得る計算而 (8)
を得る即ち半
径を一とする
処の弧三十度
の長なり之を
六倍して (9) を
得る即ち半周

百八十度の長さにして圓周率是なり

二 例令楕円線なり任意一分の長を求む原点中点にあれは其式即ち(1)なり微分して(2)を得る之れ自乗して(3)となる以て曲線微分公式に容れ(4)を得る級数を作り(5)なる∫号を加へ(6)にとし式中各項積分をなせは(7)(8)(9)(10)等の如し以て(6)式に容れ(11)を成るなり此式中之は孤にして a は半径なり此弧に属する正弦は $\frac{x}{a}$ にして楕圓周任意一分の長を求むる式なり扠楕圓周四分之一の長を求めんと欲せは x は a にして正弦 $\frac{x}{a}$ は 1 なり故に其弧之は $\frac{\pi}{2}$ なり且つ式中 $\sqrt{a^2-x^2}=0$ なるなり故に之を四倍せれは(13)を得て楕円全周を得る式となるなり

(1) $y^2=(1-e^2)(a^2-x^2)$

(2) $\partial y=-\frac{(1-e^2)x\partial x}{y}=\frac{-(1-e^2)x\partial x}{\sqrt{(1-e^2)(a^2-x^2)}}$

(3) $\partial y^2=\frac{x^2(1-e^2)\partial x^2}{(a^2-x^2)}$

(4) $\partial z=\sqrt{\partial x^2+\frac{x^2(1-e^2)}{a^2-x^2}\partial x^2}=\frac{a\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1-\frac{e^2x^2}{a^2}}$

(5) $\partial z=\frac{a\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{e^2x^2}{2a^2}-\frac{e^4x^4}{2.4.a^4}-\frac{3e^6x^6}{2.4.6.a^6}\cdots\right)$

(6) $z=a\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{e^2}{2a}\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{e^4}{2.4.a^3}\int\frac{x^4\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}-$

$-\frac{x^6\partial x}{2.4.6.a^5}\int\frac{x^6\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ----------

(7) $az'=a\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(8) $-\frac{e^2}{2a}\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\frac{e^2x}{2.2.a}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{e^2a}{2.2}z'$

(10) $-\frac{3e^6}{2.4.6.a}\int\frac{x^6\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\frac{3e^6}{2.4.6a^5}\sqrt{a^2-x^2}\left(\frac{x^5}{6}+\frac{5a^2}{2.4}x^3+\frac{3.5.a^4}{2.4.6}x\right)$

$-\frac{3.3.5e^6a}{2.2.4.4.6.6.}z'$ ----------

(9) $-\frac{e^4}{2.4.a^3}\int\frac{x^4\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\frac{e^4}{2.4a^3}\sqrt{(a^2-x^2)}\left(\frac{x^3}{4}+\frac{3a^2}{2.4}\right)-$

$-\frac{3ae^4}{2.2.4.4}z'$

$$(11)\quad z = az'\left(1-\frac{l^2}{2.2}-\frac{3l^4}{2.2.4.4}-\frac{3.3.5l^6}{2.2.4.4.6.6}\cdots\cdots\right)$$

$$+\sqrt{a^2-x^2}\left\{\frac{l^2x}{4a}+\frac{l^4}{8a^3}\left(\frac{x^3}{4}+\frac{3a^2}{8}\right)+\frac{l}{16a^5}\left(\frac{x^5}{6}+\frac{5a^2x^3}{24}+\frac{5a^4x}{16}\right)+\cdots\cdots\right\}+C$$

$$(12)\quad z = \frac{1}{2}ax\left(1-\frac{l^2}{2.2}-\frac{3l^4}{2.2.4.4}-\frac{3.3.5l^6}{2.2.4.4.6.6}\pm\cdots\right)$$

$$(13)\quad 4z = 2ax\left(1-\frac{l^2}{2.2}-\frac{3l^4}{2.2.4.4}-\frac{3.3.5l^6}{2.2.4.4.6.6}\cdots\cdots\right)$$

三例今 $x=l-\sqrt{2ry-y^2}$ を式とする擺線あり其任意一分の長を求む（式中之ℓ訊あり）(1)式を微分し(2)を得る之を自乗し(3)と為る曲線微分公式に用ゐれば(4)を得る積分して(5)を得る茲に於て圖を按ずるに曲線B点に起れば $z=0$ ナル時 $y=2r$ なり故に $0=0+C$ 即ち $C=0$ なり故に擺線一

$$(1)\quad x = rl-\sqrt{2ry-y^2}$$

$$(2)\quad dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ry-y^2}}$$

$$(3)\quad dx^2 = \frac{y^2dy^2}{(2ry-y^2)}$$

$$(4)\quad dz = \sqrt{dx^2+dy^2} =,$$

$$= \sqrt{dy^2+\frac{y^2dy^2}{2ry-y^2}}$$

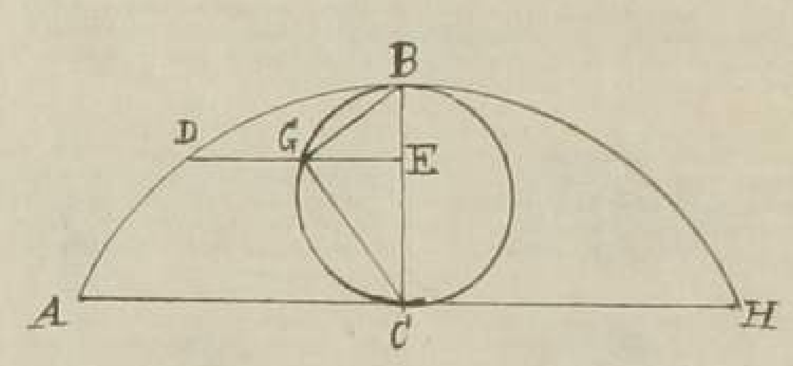
$$= \sqrt{\frac{2ry\,dy^2}{2ry-y^2}} = \sqrt{\frac{2r\,dy}{2r-y}}$$

$$= (2r)^{\frac{1}{2}}(2r-y)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$(5)\quad z = \int (2r)^{\frac{1}{2}}(2r-y)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$= -2\sqrt{2r(2r-y)}+C$$

分の長さは $v=2\sqrt{2r(2r-y)}$ 即ちB点より任意に一点D点に至るの数なり



図に拠れば

$BE=2r-y$

又

$BG^2=BC\times BE$

$BG=\sqrt{BC\times BE}$

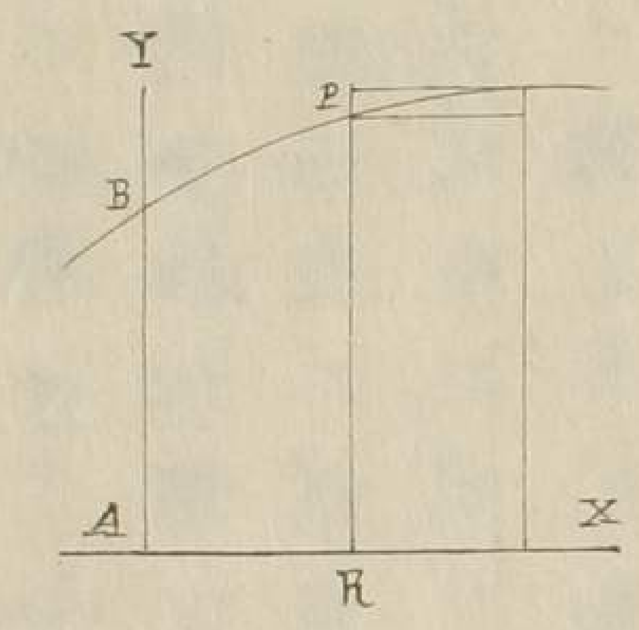
$BG=\sqrt{2r(2r-y)}$

故にBDの曲線一分は通弦BGの倍に等し

總して擺線の一分頂点より起れば其長さを必ず母輪線通弦の倍に等し又半擺線BDAは全径BCの倍に等し故に全擺線ADBHは全径の四倍に等し

○曲線面積を求むる法

○曲線の面積を求むる法は一矩形の曲線面積と相等しき者を求むるの法なり凡そ曲線面積代数諸項を以て之を顕はすことを得る時は直線面積に異ならず



曲線面積微分公式の $ds=y\,dx$ なり式中 s はABPRの面積にして x y はP点の縦横線なり

○何種の曲線に限らず其曲面積を求めんと欲せば本曲線の式を用ひ或は x を以て y の同数を

求め之を右に示す面積の公式中に用ひ而して後に其積分を求むれば得る所の者即ち本曲線の面積なり今一二例を左に示す

四

例 今抛物線あり其面積を求む如何

抛物線の式を(1)とすれば之を微分し(2)を得る公式中に用ひ(3)を得る積分し(4)となる茲に於て按ずるに面積頂点より起れば(5)なり故に(6)となる化して(7)を得る即ち抛物線一分の面積なり故に抛物線頂点より起れば其一段面積は其截点の縦横線の矩積三分の二に等し

(1) $y^2=2ax$

(2) $dx=\frac{y\,dy}{a}$

(3) $ds=y\,dx=\frac{y^2dy}{a}$

(4) $s=\frac{y^3}{3a}+c$

(5) $s=0 \quad y=0$

$\therefore c=0$

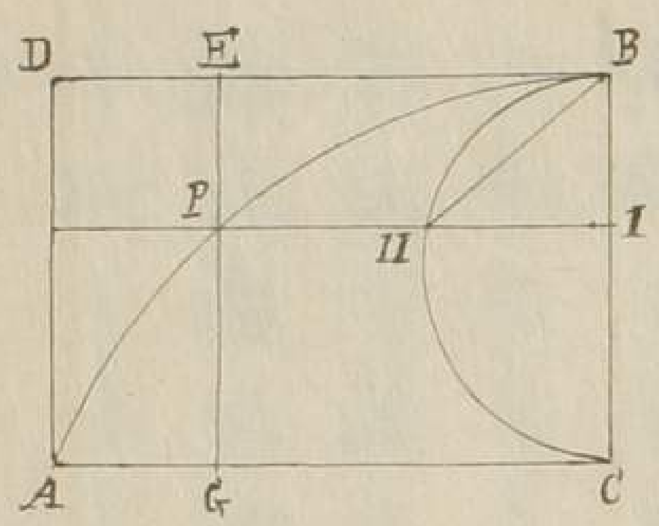
(6) $s=\frac{y^3}{3a}=\frac{y}{3a}y^2$

(7) $s=\frac{2}{3}xy$

五

例 今擺線あり其面積を求む

左図の如きABCは擺線面なり其積を求めんが為に先づABDの積を求むべし故に(1)とし圖に依てADEPの積をsとすれば(2)を得る惟ふに擺線の微分式は



(1) $\begin{cases} BC=2r \\ AG=x \\ PG=y \\ PE=2r-y=v \end{cases}$

(2) $ds=v\,dx$

$=(2r-y)\,dx$

(3) $dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{2ry-y^2}}$

(3)あり之を以て(2)に容れ化して(4)となる積分し(5)となる式中rは半径にしてy縦線あり此式前篇巻之十一設題第二に依れは平圓の分面積あり故に右圖中CHIの分面積あり又設ケてADEPの面積はADより起りCHIの面積はC点より起れり故にyを0とされは二

(4) $\partial s = \partial y \sqrt{2ry - y^2}$

(5) $s = \int \partial y \sqrt{2ry - y^2} + C$

(6) $ADEP = CHI$

(7) $y = 2r$

(8) $ABD = CHB = \frac{r^2 x}{2}$

(9) $ADBC = AC \times AD$

(10) $ADBC = 2r^2 x$

(11) $ABC = ADBC - ABD = \frac{3}{2} r^2 x$

(12) $2ABC = 3r^2 x$

面も皆0となる又(7)とされは(8)を得る又(9)とされは(10)を得る内(8)式

残減し(11)となる除象を乗して(12)となれ是即ち擺線面の全積にして母輪貴の三倍に等し以上五例に準して左に擧くる所の設題を了解せよ

設題

今半立方拋物線式$y^3 = ax^2$あり其任意一分の長を求む如何

今拋物線あり其任意一分の長を求む如何

今對數螺線あり其任意一分の長を求む如何

今諸乗方拋物線あり其面積の公式を求む如何

今平円あり其面積を求む如何

今橢円あり其面積を求む如何

七　今雙曲線あり其面積を求む如何

八　円外擺線あり其任意一分の長を求む如何

九　今蜉線あり其任意一分の長を求む如何

十　今蘿線あり其任意一分の長を求む如何

十一　今弧背あり其円の半径及ひ玄を顕し弧の長を求む如何

十二　今對數曲線あり其任意一分の長を求む如何

十三　今$y^3-3axy+x^3=0$を式とする所の曲線あり其面積を求む如何

十四　今蜉線あり其面積を求む如何

十五　今圓外擺線あり其面積を求む如何

十六　今蘿線あり其面積を求む如何

十七　今撱円の漸伸線あり其面積を求む如何

十八　今對數曲線あり其面積を求む如何

十九　今$y^3=x-x^3$を式とする所の曲線あり其面積を求む如何

二十　今$a^2y^2-a^2x^2-x^4=0$を式とする所の曲線あり其面積を求む如何

二十一　今弧背あり其圓の半径及ひ弦を顕し其面積を求む如何

洋算例題續第四編巻之七終

洋算例題續第四篇巻之八

陸軍大尉福田半編輯

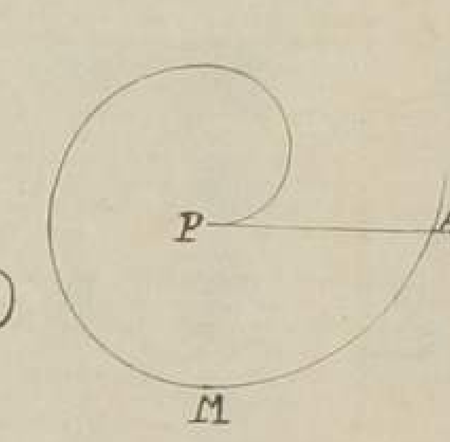
螺線面積を求むる法

凡そ極曲線面積微分公式 $\partial s = \frac{r^2 \partial t}{2}$ なり全面積を求めんと欲せバ乃ち本線式の微分を求め公式中に用ひ而して後積分を求め之を得べし

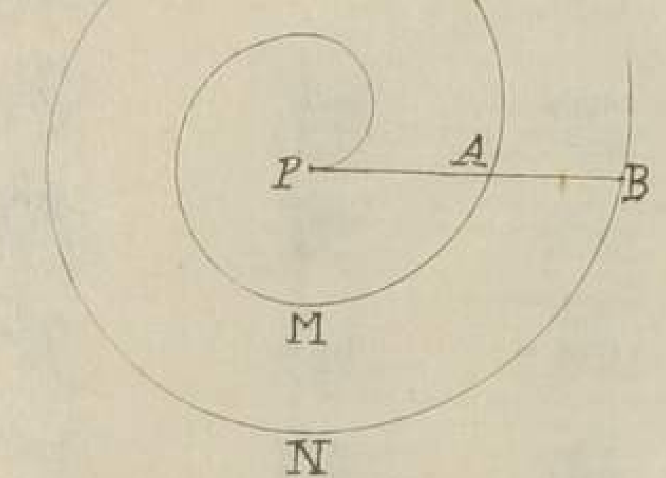
一例亜奇氏螺線あり其面積を求むる如何

本式 $r = \frac{t}{2\pi}$ 微分し $\partial r = \frac{\partial t}{2\pi}$ 公式中に用ひ $\partial s = r^2 \pi \partial r$ 積分し $s = \frac{t^3}{24\pi^2}$

若し $t=2\pi$ とすれは $s=\frac{\pi}{3}$ 乃ち帯径一匝して成る所の P M A 線面積は匝末帯径の長さ P M A を半径として造りうる面積三分之一にひとし



若し $t=2(2\pi)$ とすれは $s=\frac{8\pi}{3}$ 即ち帯径二匝して成る所の螺線面積なり内 P M A を減すれは $\frac{8\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}$ 即ち P N B の面積なり



二例 對數螺線あり其面積を求む如何

本線式 $t=\log r$ 微分し $dt=\frac{m\,dr}{r}$ $m=1$ なれは $dt=\frac{dr}{r}$ なり 公式中に用ひ $ds=\frac{r^2\,dt}{2}$ $=\frac{r\,dr}{2}$ 積分し $s=\frac{r^2}{4}+c$ $r=0$ $s=0$ $c=0$ 故に $s=\frac{r^2}{4}$ なり

故に訥氏對數螺線の面積は匝末帯径正方四分之一に等し

曲體面積を求むる法

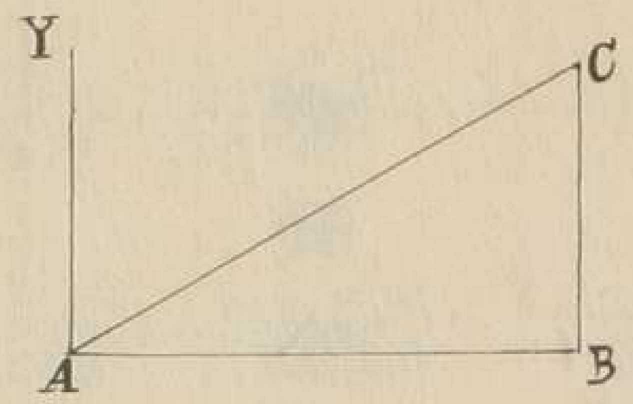
凡そ面界旋轉一匝して成る所の面積微分は即ち $dS=2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$ なり 故に積分 $S=\int 2\pi y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$

なり但し一切曲面の公式横軸を以て面旋轉の軸とれ

且 $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ハ母曲線微分の公式なり故に其曲面面積を求めんと欲せハ本母曲線の微分を求め或ハx dxを以てまたdyの二同数を求め得る或ハy dyを以てdxの同数を求め得之を右公式中に用ひて積分を求むるハ即ち曲面積を求むるを得へし

三 例 圓錐體あり其曲面面積を求むる如何

ABCの勾股形ABを軸とし旋轉一匝されハACの過ぐる所必ス円錐の曲面を為すへし



今Aを原点としABをhとしBCをbとしAC線上任意一点の縦横線をx yとすれハ比例左の如し

$$x : y :: h : b$$

$$y = \frac{bx}{h}$$

$$dy = \frac{b}{h}dx$$

$$dy^2 = \frac{b^2}{h^2}dx^2$$

之を公式に用ふれハ次の如く變化を為す

$$S = \int 2\pi \frac{bx}{h^2} dx \sqrt{h^2+b^2}$$

$$= \pi \frac{b}{h^2} x^2 \sqrt{h^2+b^2} + C$$

曲面頂点より起れハ

$x=0$

$s=0$

$c=0$

故に

$$s=\pi\frac{b}{n^2}x^2\sqrt{x^2+b^2}$$

若し

$x=AB=n$

なれは

$$s=\pi b\sqrt{n^2+b^2}$$
$$=2\pi b\frac{AC}{2}$$

なり此式は n を高とし b を底半径とせる圓錐曲線面は必ず底周に半斜線を乗じたるに同じかるべし

四例 楕円體あり長径を軸とし其曲面を求む如何

曲面公式

$$\partial s=2\pi y\sqrt{\partial x^2+\partial y^2}$$
$$=2\pi y\partial z$$

然し楕円線微分は次の如し

$$\partial z=\frac{a\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\left(1-\frac{e^2x^2}{2a^2}-\frac{e^4x^4}{2.4a^4}-\frac{3e^6x^6}{2.4.6a^6}-\frac{3.5e^8x^8}{2.4.6.8a^8}\cdots\cdots\right)$$

$$\therefore \partial s=\frac{2\pi ay\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{e^2x^2}{2a^2}-\frac{e^4x^4}{2.4a^4}-\frac{3e^6x^6}{2.4.6a^6}-\frac{3.5e^8x^8}{2.4.6.8a^8}\cdots\cdots\right)$$

但し

$$b=\frac{ay}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\therefore \partial s=2\pi b\partial x\left(1-\frac{e^2x^2}{2a^2}-\frac{e^4x^4}{2.4a^4}-\frac{3e^6x^6}{2.4.6a^6}-\frac{3.5e^8x^8}{2.4.6.8a^8}\cdots\cdots\right)$$

毎級積分残求之

$$s=2\pi Bx\left(1-\frac{e^2x^2}{2.3.a^2}-\frac{e^4x^4}{2.4.5a^4}-\frac{3e^6x^6}{2.4.6.7.a^6}-\frac{3.5e^8x^8}{2.4.6.8.9a^8}\cdots\cdots\right)$$

若し $x=0$ なれは $S=0$ $\therefore l=0$ 故に $x=a$ なれは

$$S=2\pi ab\left(1-\frac{l^2}{2.3}-\frac{l^4}{2.4.5}-\frac{3l^6}{2.4.6.7}-\frac{3.5l^8}{2.4.6.8.9}-\cdots\cdots\right)$$

即ち楕円體曲面の半なり之を倍すれは

$$4\pi ab\left(1-\frac{l^2}{2.3}-\frac{l^4}{2.4.5}-\frac{3l^6}{2.4.6.7}-\frac{3.5l^8}{2.4.6.8.9}-\cdots\cdots\right)$$

即ち楕円體

の全曲面なり

曲線体積を求むる法

曲線体積を求むとは曲線体積と相等しき立方體積を求むる曲線体積の微分は即ち次の如し

$$dV=\pi y^2 dx$$

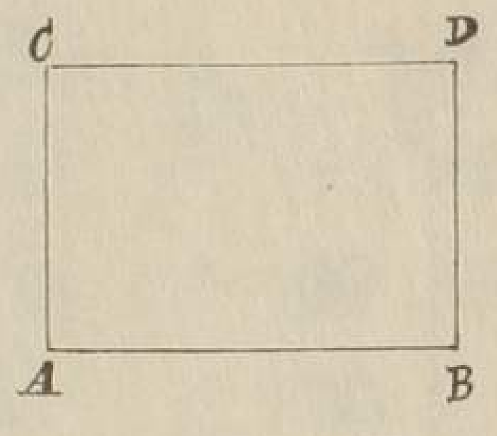
故に

$$V=\int \pi y^2 dx$$

即ち曲線体積の公式なり式中 x y は母曲線の縦横線にして横軸は曲面旋轉の軸なり凡そ其曲線の體積を求めんと欲せば必ず先つ本曲線式の微分を求め或は y dy を以て dx の同數を求め或は x を以て y^2 の同數を求め之を右公式中に用ひ而して後其積分を求む

れは即ち求る所の體積なり

五例 圓柱体あり其体積を求



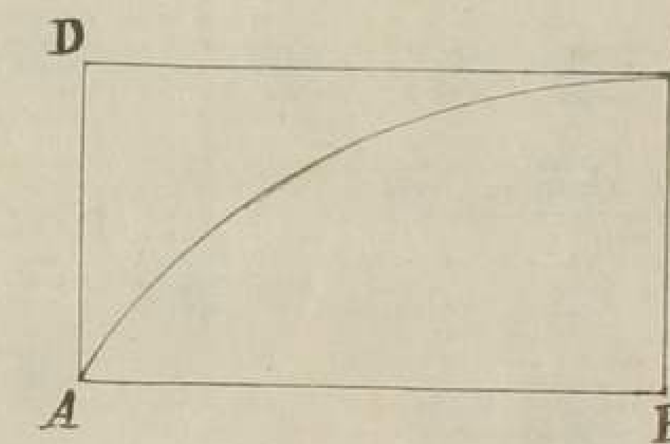
今ABCDの長方形ABを軸として旋轉一匝すればCDの過ぐる所曲面を成す其体を円柱体と云ふ

今 $AC=r$ $AB=h$ とすればCDの線式 $y=r$ なり故に

$$V=\int \pi y^2 dx$$
$$=\int \pi r^2 dx$$
$$=\pi r^2 x+c$$

を得る茲に於て x は o と h との二限として中間の積分を求むれば即ち $V=\pi r^2 h$ なり故に円柱体積は底面に高を乗ずるものに等し

六例 抛物線体あり其積を求むること如何



$AB=h$

$BC=b$

抛物線式

$y^2=2px$

故に

$\partial V=2\pi px\partial x$

積分

$V=\pi px^2+C$

$x=0$

$V=0$

$C=0$

又

$x=0$

$x=h$

の二限とすれば

$V=\pi ph^2$

但し

$b^2=2ph$

$\frac{b^2}{2}=ph$

故に

$V=\pi\frac{b^2}{2}h$

$=\pi b^2\frac{h}{2}$

なり

故に抛物線の体積は同底同高圓柱体積の半に等し

設題 前六例に準し以下解理を略す

第一 今双線螺線あり其面積を求む

第二 今圓柱体あり其曲面積を求む 但し高は円の半径に等し

第三 今立円体あり其曲面積を求む

第四 今抛物線あり其曲面積を求む 但し縦線はbに等し半通径はpに等し

第五 今母輪の半径をrとなる所の擺線体あり底辺を以て軸となる所の曲面積を求む

第六 今円錐体あり其高はh底の半径はrなり其体積を求む

第七 今半長径をaとし半短径をbとなる所の楕円体

あり長至を軸となる所の体積を求む
今諸拋物線あり各積の公式を求む
今平方拋物線体あり其積を求む
今母輪半径をアとし底辺を軸として旋轉ける所の
擺線体あり其体積を求む

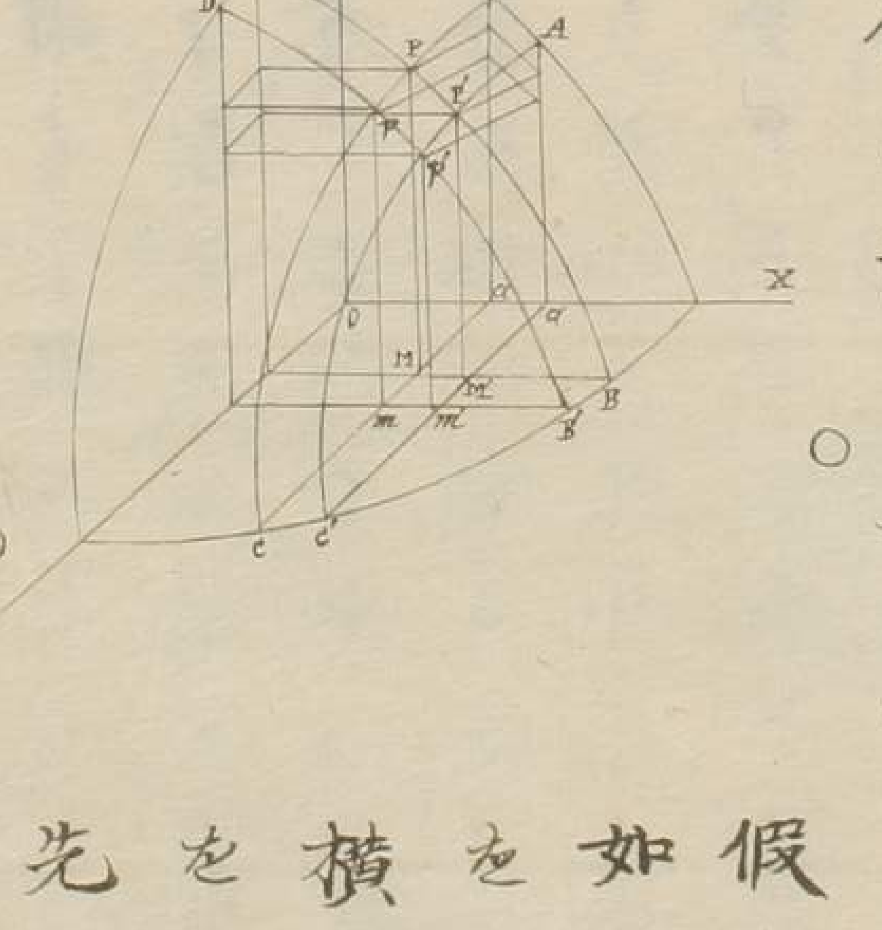
洋算例題續第四編巻之八終

洋算例題續第四篇巻之九

陸軍大尉福田半編輯

積分諸法

第一款本篇巻之八に記載ける所の曲線面積と回轉して成る体るを云其面積を求むる法甚だ容易なりと云へとも若し其体回轉して成る者にあらざれば又他の法を用ゆべし



假令上圖の如き面の式を(1)とし縦横線及微分を(2)とす今先つ之の之変する者と

とし微分し又次にyのみ変す
る者とし微分せを之変して
(3)となる次に又xy共に変じ
る者とせしを之を(4)となる今
微分を以て成る面の一部分を
即ち第二の微分(5)と見て可な
り今PP'pp'なる面三方の平

(1) $z=f(xy)$

(2)
$$\begin{cases} oa=x \\ aa'=\partial x \\ ob=y \\ bb'=\partial y \\ PM=z \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} P'M'=z+\frac{\partial z}{\partial x}\partial x \\ pm=z+\frac{\partial z}{\partial y}\partial y \end{cases}$$

(4) $p'm'=z+\partial z=z+\frac{\partial z}{\partial x}\partial x+\frac{\partial z}{\partial y}\partial y$

面に移る影を明とせしをPP'
P'pなる面積に因せる状式 式(7)
云をiと下面の影にして矩形な
るが故に(8)i' i''と斜状形にし
て其積を(9)(10)なり是に之及び
(3)(4)を容し(11)(12)となる状(8)及
び(11)(12)の末項を(7)に容せ(19)を

(5) $i.PP'p'p=\partial^2 o=\frac{\partial^2 o}{\partial x\partial y}\partial x\partial y$

(6)
$$\begin{cases} PP'p'p=XOY=i \\ PP'p'p=XOZ=i' \\ PP'p'p=YOZ=i'' \end{cases}$$

(7) $i\ PP'p'p=\sqrt{(i^2+i'^2+i''^2)}$

(8) $i=\partial x\partial y$

(9) $i'=\frac{1}{2}\partial x\{(PM-pm)+(P'M'-p'm')\}$

(10) $i''=\frac{1}{2}\partial y\{(PM-P'M')+(pm-p'm')\}$

$$(11)\quad i' = \tfrac{1}{2}\partial x\left\{(z-z)-\frac{\partial z}{\partial y}\partial y)+(z+\frac{\partial z}{\partial x}\partial x-z-\frac{\partial z}{\partial x}\partial x-\frac{\partial z}{\partial y}\partial y)\right\}=\frac{\partial z}{\partial y}\partial x\partial y$$

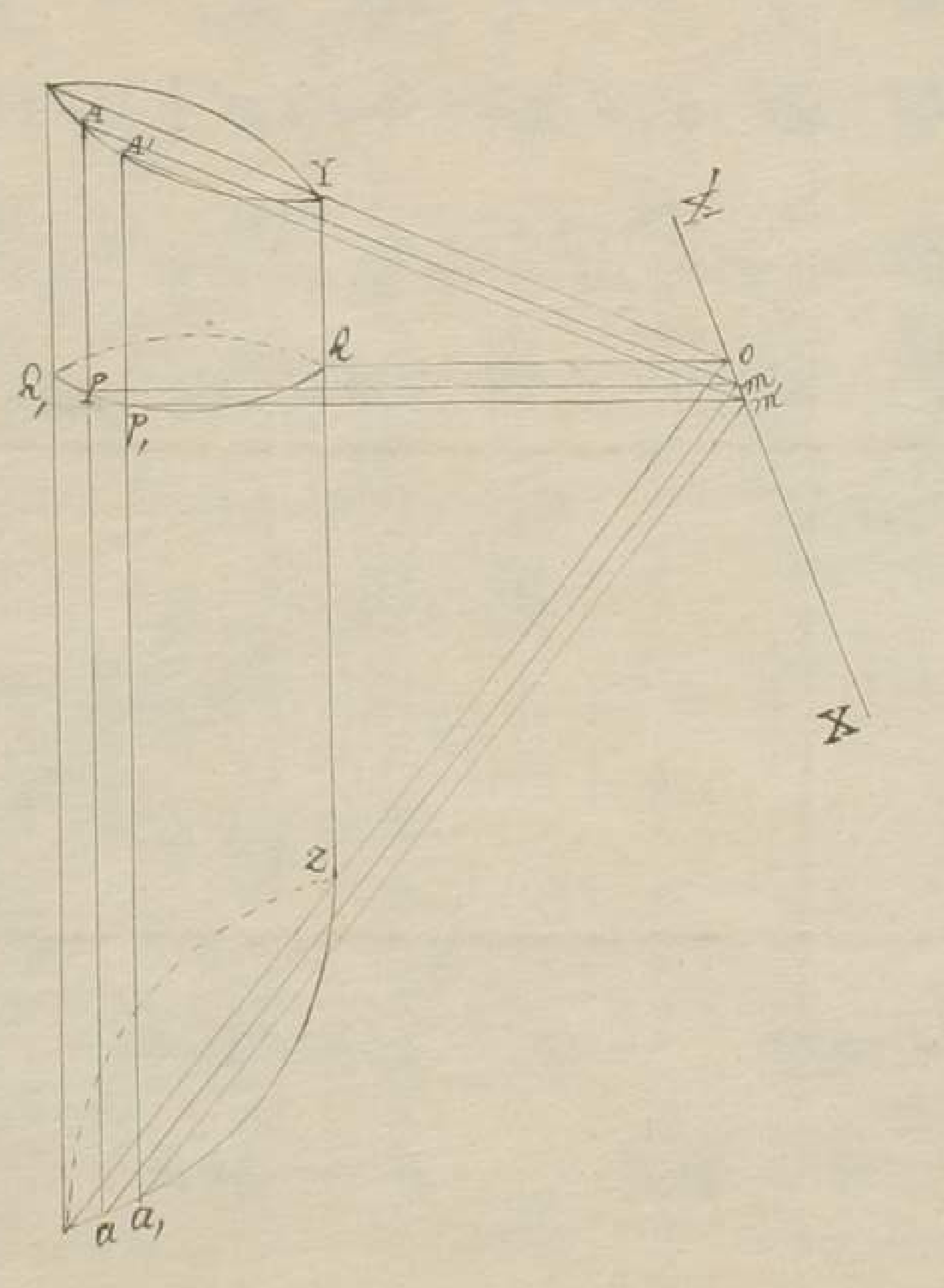
$$(12)\quad i'' = \tfrac{1}{2}\partial y\left\{z-z-\frac{\partial z}{\partial x}\partial x)+(z+\frac{\partial z}{\partial y}\partial y-z-\frac{\partial z}{\partial x}\partial x-\frac{\partial z}{\partial y}\partial y\right\}=\frac{\partial z}{\partial x}\partial x\partial y$$

$$(13)\quad \partial^2 \sigma = \partial x\partial y\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}}$$

$$(14)\quad \sigma = \iint \partial x\partial y\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}}$$

$$(15)\quad \sqrt{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}} = \varphi(xy)$$

第二款前巻記載せる所の者は皆正しき体にして假令之を切断したる者と云へとも皆平行面を以て截りたる者なり故に其の表面を知る公式ありて甚た易しと雖も若し其切断面平行ならさるときは之を他の法を用ひされは面積を知る能はす假令右図の如き上下の面平行ならさる



円埼あり表面積を求むるに先つ上下の面に平面を置く時は其面XX,に於て切合OYOZは円埼の中心に通りたる線にしてAa及ひA,a,はYZに平行しAm及ひA,mをOYと平

$$(1)\begin{cases} Om = x & pm = y \\ Om_{,} = x + \partial x & p_{,}m_{,} = y + \partial y \end{cases}$$

$$(2)\quad pp_{,} = \partial z = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$$

$$(3)\begin{cases} \angle YOQ = \alpha \\ \angle ZOQ = \beta \end{cases}$$

$$(4)\quad \angle YOZ = \alpha + \beta$$

$$(5)\quad \angle YOQ = \angle Amp \qquad \angle ZOQ = \angle amp$$

$$(6)\quad AP = y\tan\alpha \qquad ap = y\tan\beta$$

$$(7)\quad Aa = A_{,}a_{,} = y(\tan\alpha + \tan\beta)\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}y$$

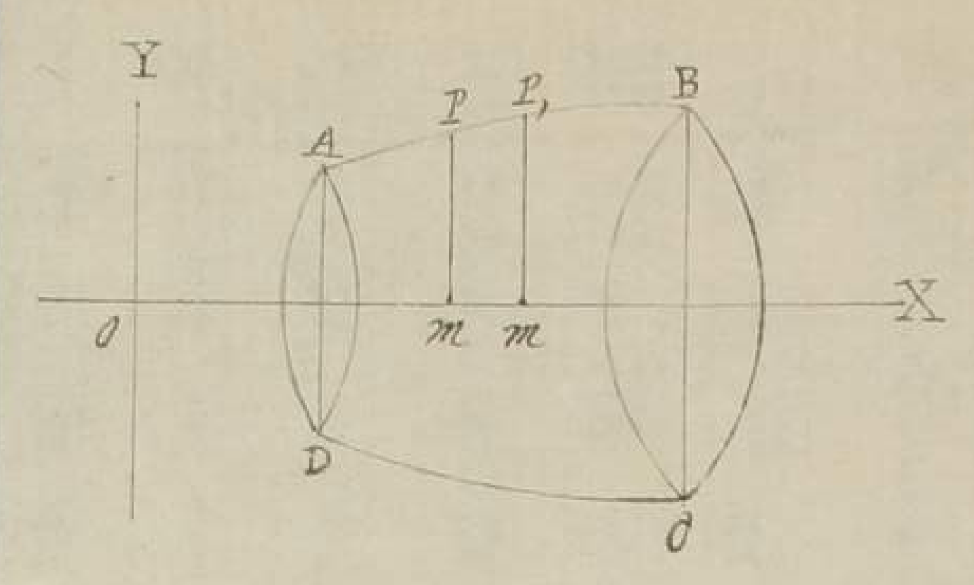
$$(8)\quad \therefore AA_{,}aa_{,} = \partial\theta = Aa \times pp_{,} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}y\partial z$$

$$(9)\quad \theta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\int y\partial x\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}} + c$$

行ならしむるはam及ひa,m,は亦OZに平行し且つm及ひm,に切合す今mよりAaに直立線Pmを引き爰に円埼に直立する面QQを造るP,m,は此面中に有る者とし是少差あるときは最も微なる故に之を捨て用ひず今Oを縦横線原点とし(1)とすれはPP,は(2)なり又上下の角度を(3)とし已知なれはYOZ角は(4)にして又(5)なる同角を為す故にAP及ひapは(6)なり而して此の二個を合しうる者即ちAaはA,a,と甚た接近する者なる故に(7)なり故にA,a,の積は(8)是に(2)を容れ積分して(9)を得る即ち斜

截円擣曲面積なり

第三欵体積を求むるにも又回轉したる者を以て最初とし假令左圖ABの如き曲線あり其式を(1)とし今此曲線X軸を中心として回轉すれはABCDの如き体を為すべし而して其切斷面は常に圓なり今(2)としPMの回轉にて成る者を∂Vとは是はPm_1なる矩形とP$p$$P_1$なる三角



(1) $y = f(x)$

(2) $\begin{cases} Om = x & pm = y \\ mm_1 = \partial x & p_1p = \partial y \end{cases}$

(3) $\partial V = \pi p^2 m \times mm_1 = \pi y^2 \partial x$

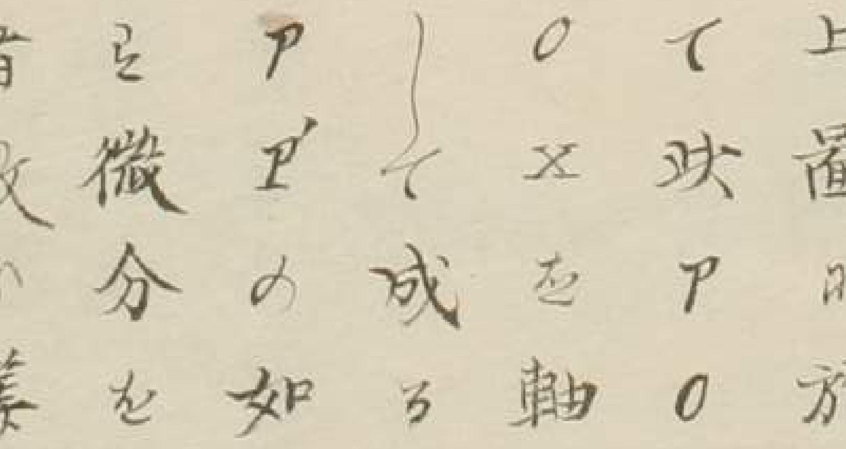
(4) $Y = \pi \int y^2 \partial x + c$

(5) $Y = \pi \int x^2 \partial y + c$

形をもて成る者なり然れとも此三角形は矩形に對し第二等の者なる故に之を捨て用ひさ故に其積を(3)とし積分して(4)なり是即ちX軸を回轉して成る体積を求むる公式なり若し曲線Y軸を回轉すれは其積を求むる公式(5)なり

第四欵極式を以て成る曲線曲轉して生する体の積を求むるに

上圖に於て(1)の如して此POPなる面OXを軸として回轉して成る者とはPPP'の如き三角形は微分を以て成る者故に算入すへきに



及ヒ之を因て又ＰｐをPより原線に落る垂線Pmの直線中に在るものとし又Pp及ひpm

(1) $\begin{cases} OP = r & \angle XOP = \varphi \\ POP' = \partial\varphi \end{cases}$

(2) $\begin{cases} Pp = r\sin\partial\varphi = r\partial\varphi \\ pm = r\sin\varphi \end{cases}$

(3) $\pi(pm^2 - Pm^2)$

(4) $\pi\{(r\sin\varphi + r\partial\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2\}$

(5) $2\pi r^2\sin\varphi\,\partial\varphi$

(6) $\partial V = \frac{2}{3}\pi r^3\sin\varphi\,\partial\varphi$

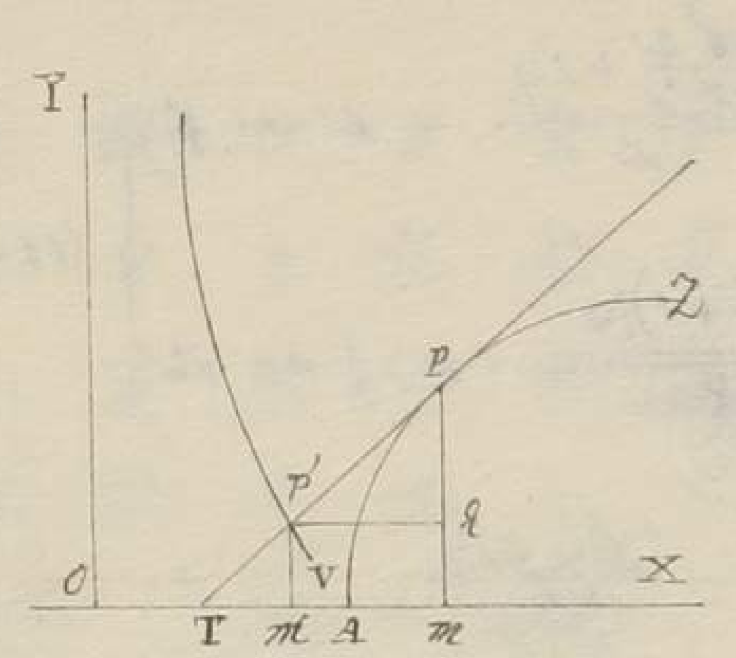
(7) $V = \frac{2}{3}\pi\int r^3\sin\varphi\,\partial\varphi + C$

は(2)なり而してPOp回轉する時はPpを以て輪形の面を為し其積は(3)之に(2)を容れ(4)となるPOp回轉したる体積は即ち扇に脊の三分一を乗じたる者にして其脊は即ちrなり

故に(5)に$\frac{r}{3}$を乗し積の微分は即ち(6)なり故積分して(7)を得る即ち極式曲線回轉して成る体の積を求むる公式なり

第五款

漸伸線の式を求むるは高等幾何学に屬する者なれとも其繁雑にして且一般に公式を得る能はす今此法に積分を用ゆるときは一般の公式を得て如何なる曲線に於ても之を容易に求め得へし右圖Aは曲線其



(1) $y = \psi(x)$

(2) $Om = x \quad pm = y$

(3) $Om' = t \quad p'm' = 0$

(4) $pp' = Ap + C$

(5) $Ap = s = \int\partial s = \int\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = x$

式を(1)としVWとAZの衡伸線なり今P点の縦横線を(2)としP'点即ち衡伸線縦横線を(3)とせ又PP'をVWの曲率半径となる即ちVWに直立し又A

(6) $\angle P'Tm = \varphi$

(7) $PQ = PP'\sin\varphi \qquad P'Q = PP'\cos\varphi$

(8) $PQ = Pm - Qm = y - u \qquad P'Q = om - om' = x - x'$

(9) $\sin\varphi = \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}} \qquad \cos\varphi = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}}$

(10) $y - u = \frac{x\partial y}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}} \qquad x - x' = \frac{x\partial x}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}}$

(11) $\begin{cases} u = \psi(x) - \frac{x}{\sqrt{(1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2})}} \\ x' = x - \frac{x}{\sqrt{(1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2})}} \end{cases}$

Zに切線となり而してPP'は通例APに等しとし或は或定数を加減せるものあり故に(4)なり是れ即ち曲線の長さ(5)にして元来積分を以て成る者なれば或は定数の加減は随意なり今是を必ずxの函数と為し得べし故にxとなし今PP'を伸せしを横軸とTに於て交はる此角をφ(6)とすれば(7)なり又P'Qを引き(7)を得る此式中PQ及びP'Qは(8)なりφの正玄余玄は微分に依て(9)と変に於て(8)(9)及び(5)を(7)に容れ(10)を得る此式を即ちψ(x)なる故に変形して(11)となる但し(11)なる二式共に分母を開即ち開

平数なるか故に一を正を用ひ
一を負を用ゆべし今(11)なる二
式を以てxを消去するときは変数
yを以て或る式を為す是即ち
漸伸線の式なり故に(11)なる二
式を以て漸伸線の式を造る公
式とす

洋算例題續第三篇巻之十

陸軍大尉福田半編輯

泥渚問題

一才 今Sを心点としAを頂点とする所の抛物線面有り其ASPの面積を求む如何

二才 今 $y^3-3axy+x^3=0$ を式とする曲線の面積を求む如何

三才 今楕円漸伸線あり其面積を求む如何

四才 今立円体あり其体積を求む如何

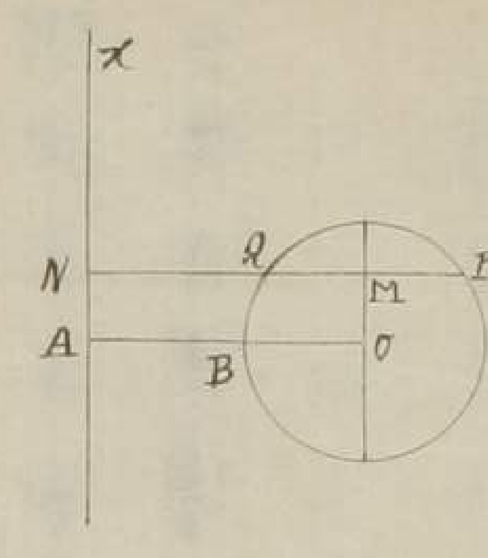
五才 今漸近線を軸とし旋轉する所の蚜線体あり其体積を求む如何

六才 今漸近線を軸とし旋轉する所の蘿線体あり其体積を求む如何

七才 今縦線を軸とし旋轉する所の抛

物線体あり其体積を求む如何

同しく其曲面積を求む如何



今図の如くPQBかろ一円ANXを軸とし旋轉する所の曲面積及ひ体積を求む但しOBをaに等しAOをbに等し記之の如り

今$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$擬式とする曲線の長さを求む如何

今$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$擬式とする曲線の面積を求む如何

今$(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$擬式とする曲線の面積を求む如何

今一図の如き円墻の横面より同円を穿ち去るあり半径若干穿ち去る処ろの面積体積及ひ周圍の内面積を求む如何

今二図の如き円墻の両傍辺に正方の二隅を切して穿ち去るあり半径若干穿ち去る処ろの面積体積及ひ周圍の内面積を求む如何

今三図の如き円墻の両傍辺に同円及ひ正方の對角線を切して同しく穿ち去るあり其穿ち去る円方周圍四辺の体積を與して其面積を求む如何

今四図の如き円墻の中心より斜めに截ちあり半径rに及ひ高さhを題して截る処ろの傍面積体積及截面積を求む如何

十七

今五箇の如き円埼の傍面を截断し又之を斜めに両截せるあり去るc如しひ矢b高hを題して左右の面積及ひ体積を求む如何

十八

今六箇の如き円埼左右より斜めに截し其斜線の交点を心とし同円を穿ち去るあり半径r及ひ高hを題し上下左右黒白の体積及ひ面積を求む如何

十九

今七箇の如き円埼中心に向ふて斜方形を穿ち去るあり半径r及ひ長a平bを題して穿ち去る面積及ひ体積を求む如何

二十

今八箇の如き円埼の中心に向ふて円を穿ち去るあり埼半径r若干去半径r若干穿ち去る処ろの面積体積及ひ内面積を求む如何

二十一

今九箇の如き円埼其一端に切して円を穿ち去るあり埼半径r及ひ去半径Rを題して穿ち去る処ろの体積面積及ひ内面積を求む如何

二十二

今十箇の如き正交せる円埼の中心に於て同径の円を穿ち去るあり半径r若干穿ち去る処ろの面積体積及ひ内面積を求む如何

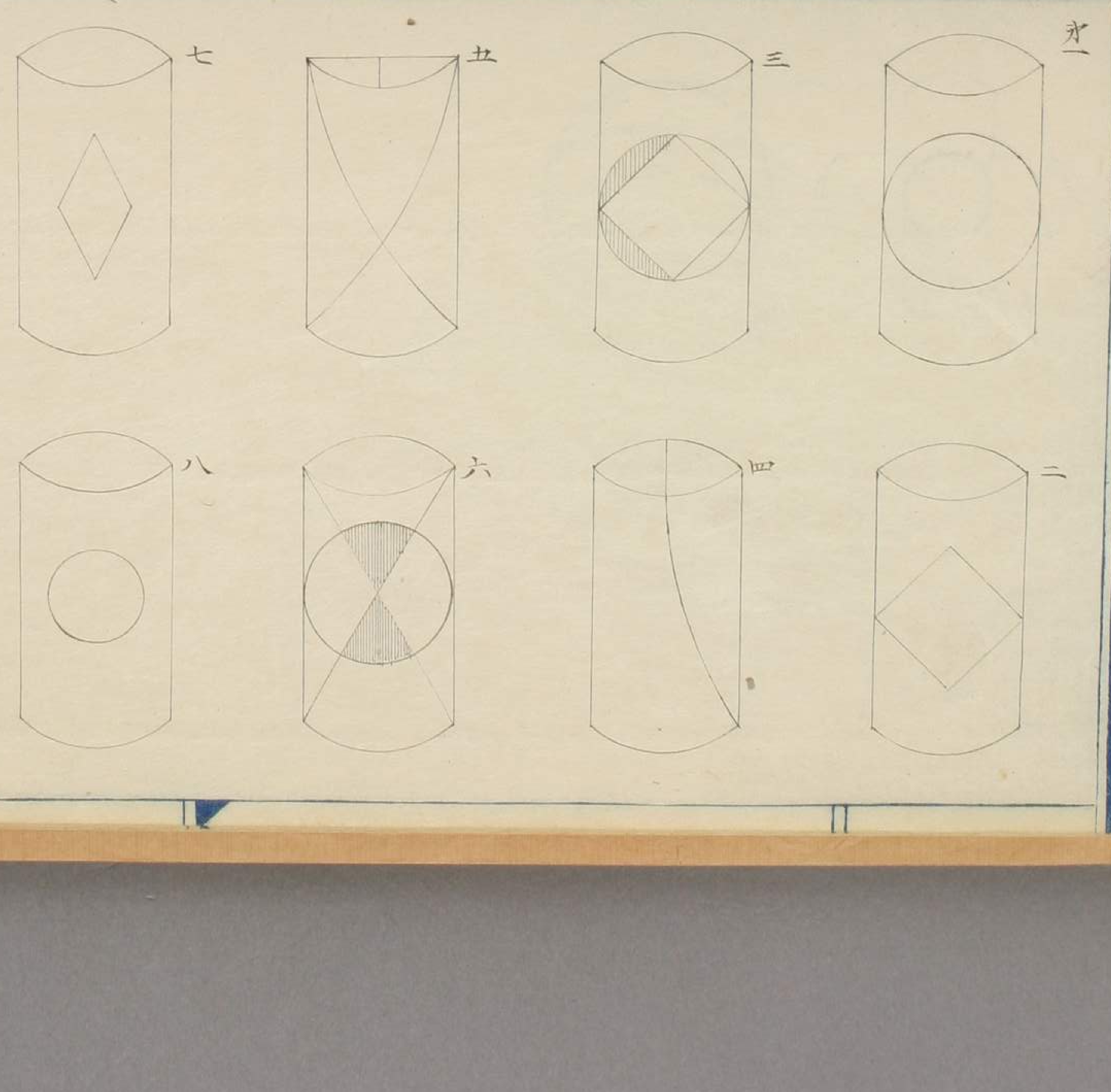
二十三

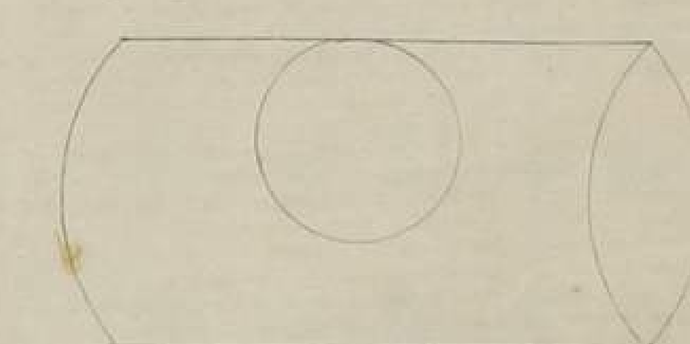
今十一箇の如き傍弧錐あり底半径r及ひ正高hを題して傍面積を求む如何

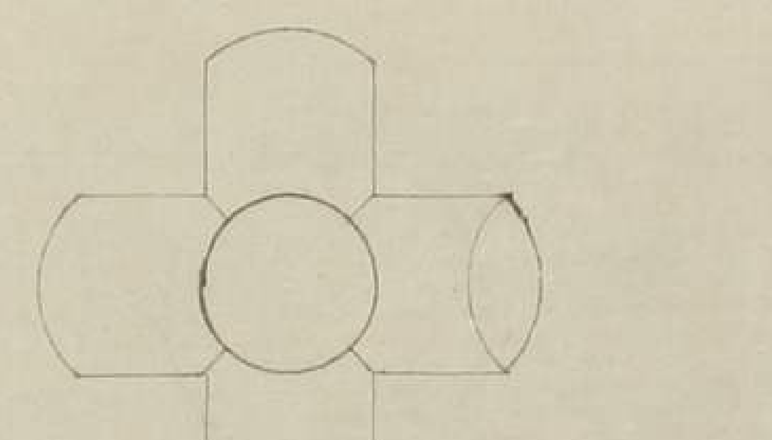
二十四

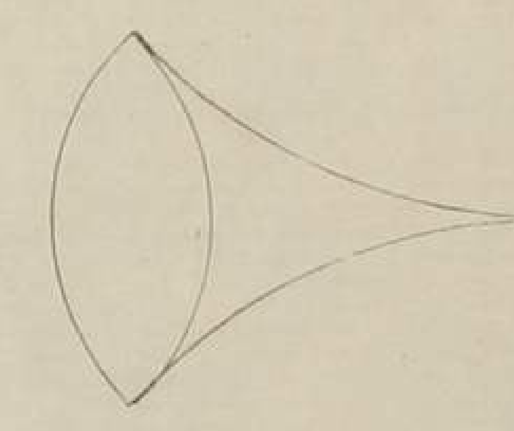
今十二箇の如き正立円の面積等分に若干段に之を截せるあり半径r及ひ截せる梁b截せる若干数nを題して等分の面積を求む如何

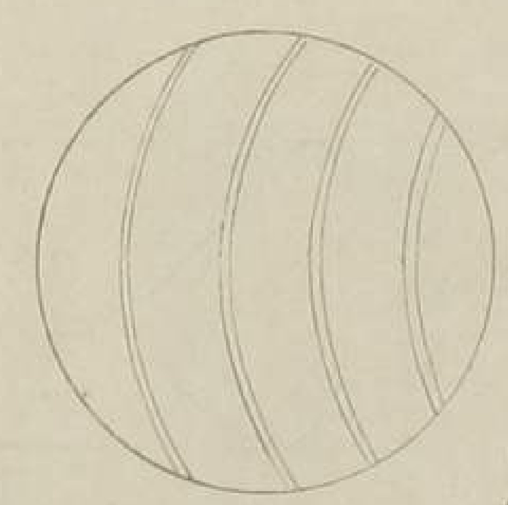
今十三圖の如き円壔の中心より切して双円を穿ち去るあり壔半径ア若干去半径凡若干穿ち去る面積体積及ひ内面積を求む如何

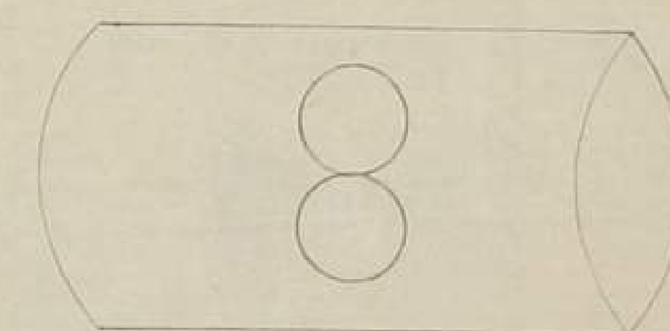



九


十


十一


十二


十三