

# Numeri reali **1**

## 1.1 Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

Nel volume Algebra 1 abbiamo presentato i diversi insiemi numerici. Li riprendiamo brevemente per poi approfondire i numeri reali e le loro proprietà.

L'insieme dei *numeri naturali* racchiude i numeri che utilizziamo per contare; si indica nel seguente modo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

Su questi numeri sono definite le seguenti operazioni:

- *addizione*:  $n + m$  è il numero che si ottiene partendo da  $n$  e continuando a contare per altre  $m$  unità;
- *sottrazione*:  $n - m$  è il numero, se esiste ed è unico, che addizionato a  $m$  dà come risultato  $n$ ;
- *moltiplicazione*:  $n \cdot m$  è il numero che si ottiene sommando  $n$  volte  $m$ , o meglio sommando  $n$  addendi tutti uguali a  $m$ ;
- *divisione*:  $n : m$  è il numero, se esiste ed è unico, che moltiplicato per  $m$  dà come risultato  $n$ ;
- *potenza*:  $n^m$  è il numero che si ottiene moltiplicando  $m$  fattori tutti uguali a  $n$  con  $m \geq 2$ , ponendo  $n^1 = n$  e  $n^0 = 1$ ;
- *radice*:  $\sqrt[n]{m}$  con  $n \geq 2$  è il numero, se esiste ed è unico, che elevato a  $n$  dà come risultato  $m$ .

L'addizione, la moltiplicazione e la potenza sono definite su tutto l'insieme dei numeri naturali, cioè dati due numeri naturali qualsiasi,  $n$  ed  $m$ , la somma  $n + m$  e il loro prodotto  $n \cdot m$  è sempre un numero naturale; la potenza  $n^m$ , escluso il caso  $0^0$ , è un numero naturale. Non sempre, invece, è possibile calcolare la differenza  $n - m$ , il quoziente  $n : m$  o la radice  $\sqrt[n]{m}$ .

Tuttavia, dal punto di vista pratico-applicativo molto spesso si incontrano situazioni nelle quali occorre eseguire operazioni che non sempre è possibile eseguire con i soli numeri naturali. Iniziamo dall'operazione di sottrazione. Sappiamo che in tante situazioni di natura economica, ma non solo, deve essere possibile sottrarre un numero da uno più piccolo. Deve essere possibile, per esempio, comprare un'auto che costa € 12 000 anche quando in banca possediamo solo € 10 000. Deve quindi essere possibile eseguire una sottrazione del tipo  $10\,000 - 12\,000$ . Il risultato di questa operazione non va poi confuso con il risultato di  $12\,000 - 10\,000$ . Nel secondo caso, infatti, significa che sul nostro conto corrente abbiamo € 12 000 e dobbiamo spenderne 10 000, ci rimangono quindi € 2 000. Nel primo caso invece, possediamo € 10 000 e dobbiamo pagare € 12 000, ci rimane quindi un debito di € 2 000. Per distinguere i due tipi di numeri mettiamo davanti al numero il segno “+” o il segno “-”. Si genera così l'insieme dei *numeri relativi*.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

Su questi numeri l'operazione di sottrazione è ovunque definita, in altre parole è sempre possibile eseguire la sottrazione tra qualunque numero di  $\mathbb{Z}$ .

Non è invece sempre possibile eseguire le divisioni. Oltre ai casi  $n : 0$  e  $0 : 0$ , non è possibile, con i numeri interi, eseguire, ad esempio, la divisione  $3 : 4$ . Esistono però tante situazioni reali in cui una divisione di questo tipo deve poter essere eseguita. Per esempio è possibile dividere in parti uguali 3 uova in 4 persone, si può fare una frittata in una padella tonda e dividere la frittata in quattro parti uguali, a ciascuna persona toccano  $\frac{3}{4}$  di uovo. Deve essere possibile dividere in parti uguali 3 euro tra 4 persone. Dopo aver notato che a nessuno tocca 1 euro intero, si procede a cambiare le monete da 1 euro in monete da 1 decimo di euro, cioè da dieci centesimi, si cambiano quindi i 3 euro con 30 decimi di euro. Dividendo le 30 monete in 4 parti uguali risulta che ciascuno riceve 7 monetine e ne avanzano 2. Per dividere le 2 monete da un decimo si cambiano in monete da un centesimo, ottenendo 20 centesimi di euro. Si dividono allora le 20 monetine in 4 parti uguali, ciascuno avrà 5 centesimi di euro. In tutto a ciascuno toccano 75 centesimi di euro.

Per rappresentare il risultato di queste due operazioni di divisione abbiamo usato nel primo caso la notazione frazionaria  $\frac{3}{4}$  e nel secondo caso la notazione decimale 0,75. Le due scritture sono perfettamente equivalenti.

Per risolvere tutti i problemi di divisione i matematici hanno costruito l'insieme dei *numeri razionali* che indichiamo nel seguente modo:

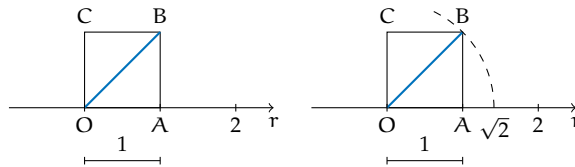
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \right\} = \left\{ 0, +1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{11}{17}, \frac{129}{1725}, \dots \right\}$$

Con questi numeri è possibile sempre eseguire l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione (tranne con divisore 0) e l'elevazione a potenza.

Non sempre, invece, è possibile eseguire l'estrazione di radice. Per esempio, hai già conosciuto il numero  $\sqrt{2}$ , cioè il numero che elevato al quadrato dà 2; esso non è un numero razionale, cioè non può essere scritto né sotto forma di frazione né sotto forma di numero decimale finito o periodico. I numeri di questo tipo si dicono *numeri irrazionali*.

Riportiamo brevemente il ragionamento che ci permette di affermare che  $\sqrt{2}$  non è un numero razionale.

Fissiamo sulla retta orientata  $r$  l'unità di misura e disegniamo il quadrato OABC di lato 1. Ci proponiamo di calcolare la misura della lunghezza della sua diagonale OB.



Il triangolo OAB è retto in A, quindi per il teorema di Pitagora  $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$ . Sostituiamo le misure:  $\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ . Per ottenere  $\overline{OB}$  dobbiamo estrarre la radice quadrata e quindi  $\overline{OB} = \sqrt{2}$ . Sappiamo che "estrarre la radice quadrata" di 2 significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà 2. Questo numero deve esistere, nel senso che esiste sicuramente un punto sulla retta  $r$  che lo rappresenta, poiché lo si può costruire graficamente tracciando l'arco di circonferenza di centro O e raggio  $\overline{OB}$ , determinando così su  $r$  il punto K estremo del segmento OK con  $\overline{OK} = \overline{OB}$ .

Dalla posizione del punto  $\sqrt{2}$  possiamo dire che  $1 < \sqrt{2} < 2$ . Il valore cercato evidentemente non è un numero intero. Può essere un numero decimale finito? Compiliamo una tabella che contenga nella prima riga i numeri con una sola cifra decimale compresi tra 1 e 2 e nella seconda riga i rispettivi quadrati:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
x <sup>2</sup>	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,89

Osserviamo che il numero 2 è compreso tra  $1,4^2$  e  $1,5^2$ , di conseguenza  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ , ma ancora non possiamo precisare il suo valore, anche se abbiamo ristretto l'intervallo in cui esso si trova. Diciamo che 1,4 è un valore approssimato per difetto mentre 1,5 è un valore approssimato per eccesso; scrivendo  $\sqrt{2} = 1,4$  oppure  $\sqrt{2} = 1,5$  commettiamo un errore minore di  $1/10$ .

Per migliorare l'approssimazione e tentare di ottenere  $\sqrt{2}$  come numero razionale costruiamo la tabella dei numeri decimali con due cifre compresi tra 1,4 e 1,5:

x	1,41	1,42	1,43	1,44
x <sup>2</sup>	1,9881	2,0164	2,0049	2,0776

Ora possiamo dire che 1,41 è un valore approssimato per difetto di  $\sqrt{2}$  mentre 1,42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di  $1/100$ . Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione e di conseguenza abbiamo ristretto l'intervallo in cui cade  $\sqrt{2}$ , ma ancora non abbiamo trovato un numero razionale che sia uguale a  $\sqrt{2}$ .

Continuando con lo stesso procedimento costruiamo due classi di numeri razionali che approssimano una per difetto e l'altra per eccesso il numero cercato, restringendo ogni volta l'ampiezza dell'intervallo in cui cade questo numero. Il procedimento sembra non finire mai e le cifre decimali che troviamo non si ripetono periodicamente.


Valore per difetto	Numero	Valore per eccesso	Ordine dell'errore
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	$10^{-1}$
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	$10^{-2}$
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	$10^{-3}$
1,4142	$\sqrt{2}$	1,4143	$10^{-4}$
...	$\sqrt{2}$	...	...

Per arrivare a concludere che  $\sqrt{2}$  non è un numero razionale, possiamo ragionare nel seguente modo. Supponiamo per assurdo che  $\sqrt{2}$  sia un numero razionale e precisamente  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  con a e b primi tra loro. Se si eleva al quadrato  $\sqrt{2}$  si ottiene  $2 = \frac{a^2}{b^2}$ . Elevare un numero al quadrato significa elevare al quadrato le singole potenze dei fattori primi in cui esso si scompone. I fattori primi di  $a^2$  e di  $b^2$  sono gli stessi di a e di b con gli esponenti raddoppiati, quindi anche  $a^2$  e  $b^2$  sono primi tra loro e pertanto  $a^2$  non può essere il doppio di  $b^2$ . Quindi  $2 \neq \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$ .

Oltre a  $\sqrt{2}$  vi sono altri infiniti numeri che non possono essere scritti come frazione. Per esempio, tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti e tutte le

radici quadrate di frazioni che non sono il quadrato di alcuna frazione. Ma anche le radici cubiche del tipo  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[5]{7}$ , ... Un altro famoso numero irrazionale che si incontra nelle misure geometriche è il numero  $\pi$ , che corrisponde alla misura della circonferenza di diametro 1. Questi numeri, insieme ad altri che conoscerete in seguito, costituiscono l'insieme  $\mathbb{J}$  dei *numeri irrazionali*.

L'unione degli insiemi  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{J}$  definisce l'insieme  $\mathbb{R}$  dei *numeri reali*.

 *Esercizio proposto: 1.1*

## 1.2 I numeri reali

In base a quanto abbiamo detto prima, essendo  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$ , i numeri reali sono tutti quei numeri che si possono scrivere in forma decimale con un numero finito o infinito di cifre, non necessariamente periodiche. Per esempio, la frazione  $\frac{17}{16}$  è uguale al numero decimale finito 1,0625. La frazione  $\frac{16}{17}$  è uguale al numero decimale periodico 0,9411764705882352.

Il numero  $\pi$  è invece un numero decimale con infinite cifre, non periodico. Riportiamo alcune cifre.

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307  
816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582  
231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428  
810 975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 ...

Nonostante i numeri irrazionali siano stati scoperti dallo stesso Pitagora<sup>1</sup> o dai suoi allievi nel IV secolo a.C., solo nel XIX secolo Augustin-Louis Cauchy<sup>2</sup> e Richard Dedekind<sup>3</sup> sono giunti a una formulazione rigorosa dei numeri reali.

In effetti, assumere che i numeri reali sono tutti quelli che si possono scrivere in forma decimale finita o infinita, del tipo  $r = n + 0,abcd\dots$ , dove  $r$  è il numero reale,  $n$  è la sua parte intera e  $0,abcd\dots$  è quella decimale, comporta dei problemi. Per esempio, i numeri interi hanno una doppia rappresentazione:  $1 = 0,\overline{9}$  come i numeri decimali finiti:  $1,225 = 1,224\overline{9}$ . Occorre quindi escludere almeno i numeri decimali con il 9 periodico. Oltre questo problema rimane la difficoltà di eseguire le operazioni tra numeri decimali illimitati. Gli algoritmi per addizionare, sottrarre e moltiplicare due numeri richiedono di cominciare dall'ultima cifra, cosa che non è possibile per i numeri decimali che non finiscono mai. Altro problema non semplice da gestire è il fatto che una definizione di questo tipo è strettamente legata al sistema di numerazione a base 10 che noi utilizziamo.

Già nel volume Algebra 1, nel paragrafo sulle relazioni di equivalenza, abbiamo visto come i matematici hanno potuto costruire l'insieme  $\mathbb{Z}$  degli interi relativi a partire dall'insieme di coppie ordinate di  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  e l'insieme  $\mathbb{Q}$  dei razionali relativi a partire dall'insieme di coppie ordinate di  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$ . La questione a questo punto è: possiamo costruire l'insieme dei numeri reali a partire dall'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$ ? Per rappresentare il numero  $\sqrt{2}$  abbiamo costruito un insieme, che indichiamo con  $A$ , di numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 e un insieme, che indichiamo con  $B$ , di numeri razionali il cui quadrato è maggiore di 2. Sembra allora che il numero  $\sqrt{2}$  divida l'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$  in due parti: quella dei numeri razionali  $a \in A$  cioè tali che  $a^2 < 2$  e quella dei numeri razionali  $b \in B$  cioè tali che  $b^2 > 2$ . La coppia di insiemi  $(A; B)$  caratterizza il numero  $\sqrt{2}$ , possiamo anzi identificare  $\sqrt{2}$

<sup>1</sup>filosofo, matematico, astronomo, scienziato e politico della Grecia antica (570 a.C. ca. - 495 a.C. ca.).

<sup>2</sup>matematico e ingegnere francese (1789 - 1857).

<sup>3</sup>matematico tedesco (1831 - 1916).

proprio con la coppia  $(A; B)$ . È questa l'idea alla base del ragionamento di Richard Dedekind e del sezionamento degli insiemi.

**Definizione 1.1.** Si chiama *sezione* o *partizione* di un insieme  $X$ , una coppia di sottoinsiemi non vuoti  $A$  e  $B$  tali che:  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = X$ ,  $\forall a \in A, \forall b \in B \quad a < b$ .

### Esempio 1.1. Sezioni

- ➔ Consideriamo i due insiemi  $A$  e  $B$  così definiti:  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 3\}$ . Essi definiscono una sezione di  $\mathbb{Q}$ , infatti  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = \mathbb{Q}$  e, per come sono stati definiti, ogni elemento di  $A$  è minore di ogni elemento di  $B$ ; inoltre possiamo osservare che  $A$  non ammette massimo, non essendoci in esso un numero che sia maggiore di tutti gli altri, mentre  $B$  ammette il minimo che è 3.
- ➔ Siano  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -1\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$  la coppia  $(A; B)$  non è una sezione di  $\mathbb{Q}$  perché pur essendo  $A \cap B = \emptyset$  non è  $A \cup B = \mathbb{Q}$ .
- ➔ Siano  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \frac{2}{7}\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \frac{2}{7}\}$ , anche in questo caso la coppia  $(A; B)$  non è una sezione di  $\mathbb{Q}$  poiché  $A \cap B = \{\frac{2}{7}\}$ .
- ➔ Costruiamo gli insiemi  $A$  e  $B$  nel seguente modo:  $A$  sia l'unione dei numeri razionali negativi e l'insieme dei numeri razionali positivi il cui quadrato è minore di 2 e in  $B$  mettiamo tutti i razionali positivi il cui quadrato è maggiore di 2.  $A = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 > 2\}$ . Si ha  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = \mathbb{Q}$  poiché  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , inoltre ogni elemento di  $A$  è minore di ogni elemento di  $B$ . Dunque  $(A; B)$  è una sezione di  $\mathbb{Q}$ , ma  $A$  non ha massimo e  $B$  non ha minimo, in quanto abbiamo già dimostrato che non esiste un numero razionale che ha 2 come quadrato. Questa sezione individua un buco nell'insieme  $\mathbb{Q}$ .

Gli esempi visti ci permettono di affermare che una partizione  $(A; B)$  può essere di tre tipi.

- ➔  $A$  ammette massimo e  $B$  non ammette minimo;
- ➔  $A$  non ammette massimo e  $B$  ammette minimo;
- ➔  $A$  non ammette massimo e  $B$  non ammette minimo.

**Definizione 1.2.** Si chiama *elemento separatore* di una partizione  $(A; B)$  di un insieme  $X$ , il massimo di  $A$  o il minimo di  $B$ , nel caso in cui almeno uno di questi elementi esista.

Nel primo esempio, poiché esiste il minimo di  $B$ , la partizione  $(A; B)$  ammette un elemento separatore e identifica il numero razionale 3. Nel quarto esempio non esiste un numero razionale che fa da elemento separatore, la sezione  $(A; B)$  identifica un numero irrazionale.

**Definizione 1.3.** L'insieme  $\mathbb{R}$  dei *numeri reali* è l'insieme di tutte le partizioni di  $\mathbb{Q}$ . Chiamiamo *numero razionale* le partizioni che ammettono elemento separatore e *numero irrazionale* le sezioni che non ammettono elemento separatore.

Ogni numero reale è quindi individuato da due insiemi di numeri razionali: il primo contiene tutte le approssimazioni per difetto e l'altro tutte le approssimazioni per eccesso.

Ritornando all'esempio precedente, il numero  $\sqrt{2}$  è individuato dalla sezione costituita dagli insiemi  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \vee x^2 < 2\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 > 2\}$ . Nell'insieme  $A$  ci sono tutti i numeri razionali negativi oltre quelli che approssimano  $\sqrt{2}$  per difetto:

$$A = \{1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, 1,414213, \dots\}.$$

Nell'insieme  $B$  ci sono tutti i numeri razionali positivi che approssimano  $\sqrt{2}$  per eccesso:

$$B = \{2, 1,5, 1,42, 1,415, 1,4143, 1,41422, 1,414214, \dots\}.$$

Questa costruzione dell'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  a partire dall'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$  è puramente astratta e formale, non serve al calcolo, vuole solo concludere il cammino intrapreso per costruire tutti gli insiemi numerici a partire dall'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ .

Dal punto di vista teorico è possibile definire nell'insieme delle partizioni di  $\mathbb{Q}$ , l'ordinamento e le operazioni. Dal punto di vista del calcolo useremo le approssimazioni.

**Definizione 1.4.** Un insieme  $X$  si dice *continuo* se ogni partizione  $(A; B)$  di  $X$  ammette un solo elemento separatore, cioè se esiste un unico elemento  $\bar{x} \in X$  tale che  $\forall a \in A, \forall b \in B$  si ha  $a \leq \bar{x} \leq b$ .

**Teorema 1.1** (di Dedekind). *Ogni sezione  $(A; B)$  dell'insieme  $\mathbb{R}$  ammette uno e un solo elemento separatore.*

Da questo teorema segue che un numero reale è definito come elemento separatore di una sezione  $(A; B)$  di  $\mathbb{R}$ .

**Postulato 1.2** (di continuità della retta). *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta geometrica e l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali.*

Da questo postulato segue la possibilità di definire sulla retta un sistema di coordinate: ad ogni punto corrisponde un numero reale (la sua *ascissa*) e viceversa ad ogni numero reale è associato uno e un solo punto sulla retta; analogamente si ha nel piano dove il sistema di assi cartesiani permette di realizzare una corrispondenza biunivoca tra coppie di numeri reali (*ascissa* e *ordinata* del punto) e un punto del piano geometrico. Vedremo in seguito che la possibilità di associare numeri e punti si estende anche allo spazio tridimensionale e oltre.

### 1.2.1 Confronto fra numeri reali

Per confrontare due numeri reali, osserviamo prima di tutto i segni. Se i segni dei numeri sono discordi, il numero negativo è minore del numero positivo. Se i segni dei numeri sono concordi si valuta la parte intera del numero: se sono positivi è più grande quello che ha la parte intera maggiore, viceversa se sono negativi è più grande quello che ha la parte intera minore. A parità di parte intera bisogna confrontare la parte decimale partendo dalle cifre più a sinistra finché non si trova la prima cifra decimale diversa: se i numeri sono positivi è maggiore quello che ha la cifra maggiore; se sono negativi è maggiore quello che ha la cifra minore.

**Esempio 1.2.** Confrontare i seguenti numeri reali

→  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$ .

$\sqrt{2} < \sqrt{3}$ . Per verificarlo ci si può aiutare con la calcolatrice per calcolare le prime cifre decimali dei due numeri  $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ ,  $\sqrt{3} = 1,7320\dots$ ; oppure ci si arriva osservando che il numero che elevato al quadrato dà 2 deve essere minore del numero che elevato al quadrato dà 3;

→  $\sqrt{99}$  e 10.

$\sqrt{99} < 10$ . Per verificarlo è sufficiente osservare che  $\sqrt{100} = 10$ .

 *Esercizi proposti:* 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6

### 1.3 Valore assoluto

Si definisce *valore assoluto* di un numero reale  $a$ , indicato con  $|a|$ , il numero stesso se  $a$  è positivo o nullo, il suo opposto se  $a$  è negativo. Pertanto il risultato dell'operazione valore assoluto è sempre un numero positivo.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}.$$

Il numero  $a$  si dice argomento del valore assoluto.

$$|-3| = 3;$$

$$|+5| = 5;$$

$$|0| = 0.$$

#### 1.3.1 Proprietà del valore assoluto

→  $|x + y| \leq |x| + |y|$ : (*disuguaglianza triangolare*) il valore assoluto della somma di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri. Si ha l'uguaglianza solo quando i due numeri reali hanno lo stesso segno, oppure quando almeno uno dei due numeri è nullo.

→  $|x - y| \leq |x| + |y|$ : il valore assoluto della differenza di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri.

→  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ : il valore assoluto del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei valori assoluti dei due numeri.

→  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ : il valore assoluto del rapporto di due numeri è uguale al rapporto dei valori assoluti dei due numeri.

Se l'argomento del valore assoluto è una funzione  $f(x)$  si ha:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}.$$

**Esempio 1.3.** Valore assoluto di numeri reali

- $|5 + 3| = |5| + |3|$  in entrambi i casi si ottiene 8;
- $|5 + (-3)| = 2$  mentre  $|5| + |-3| = 8$ , pertanto  $|5 + (-3)| < |5| + |-3|$ .

Nelle espressioni contenenti valori assoluti con argomento letterale si deve cercare di eliminare il valore assoluto.

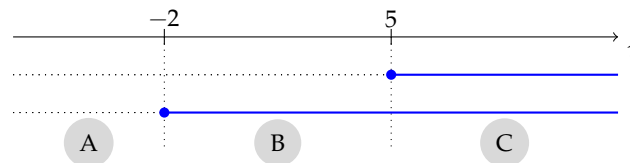
**Esempio 1.4.** Valore assoluto con argomento letterale

- $|x^2| = x^2$  infatti  $x^2$  è una quantità sempre non negativa;
- $|a^2 + 1| = a^2 + 1$  infatti  $a^2$  è sempre non negativo, quindi sarà sempre  $a^2 + 1 \geq 1 > 0$ ;
- $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$  una funzione di questo tipo si dice *definita per casi*;
- $f(a) = |a + 1| - 3a + 1$  acquista due significati a seconda che l'argomento del valore assoluto sia positivo o meno. La sua espressione algebrica è:

$$f(a) = |a + 1| - 3a + 1 = \begin{cases} a + 1 - 3a + 1 = -2a + 2 & \text{se } a + 1 \geq 0 \Rightarrow a \geq -1 \\ -(a + 1) - 3a + 1 = -4a & \text{se } a + 1 < 0 \Rightarrow a < -1 \end{cases}.$$

**Esempio 1.5.**  $f(x) = |x - 5| + |x + 2|$ .

La presenza di due valori assoluti ci obbliga a studiare i casi generati dal segno dei singoli argomenti. Pertanto poiché l'argomento del primo valore assoluto è non negativo per  $x \geq 5$  e l'argomento del secondo valore assoluto è non negativo per  $x \geq -2$ , possiamo porre la reciproca situazione nel seguente grafico:



(A) se  $x < -2$  entrambi gli argomenti sono negativi, pertanto

$$f(x) = |x - 5| + |x + 2| = -x + 5 - x - 2 = -2x + 3.$$

Se  $x = -2$  si ha  $f(-2) = |-2 - 5| + 0 = 7$ ;

(B) se  $-2 < x < 5$  il primo argomento è negativo e il secondo è positivo, pertanto

$$f(x) = |x - 5| + |x + 2| = -x + 5 + x + 2 = 7.$$

Se  $x = 5$  si ha  $f(5) = 0 + |5 + 2| = 7$ ;

(C) se  $x > 5$  entrambi gli argomenti sono positivi, pertanto


$$f(x) = |x - 5| + |x + 2| = x - 5 + x + 2 = 2x - 3.$$



Possiamo allora sintetizzare in questo modo

$$|x - 5| + |x + 2| = \begin{cases} -2x + 3 & \text{se } x < -2 \\ 7 & \text{se } -2 \leq x < 5 \\ 2x - 3 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

---

 *Esercizi proposti:* [1.7](#), [1.8](#), [1.9](#), [1.10](#)