**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2018**

# Lineare Algebra und analytische Geometrie II

## Arbeitsblatt 41

### Übungsaufgaben

Aufgabe 41.1. Bestimme den Kern der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ und den Kern der transponierten Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 41.2. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine bijektive winkeltreue Abbildung auf einem euklidischen Vektorraum $V$. Zeige, dass die adjungierte Abbildung ebenfalls winkeltreu ist.

Aufgabe 41.3. Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und einer Basis $v_i$, $i \in I$. Es seien

$$\varphi, \psi\colon V \longrightarrow V$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass $\psi$ genau dann die adjungierte Abbildung zu $\varphi$ ist, wenn

$$\langle \varphi(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, \psi(v_j) \rangle$$

für alle $i, j \in I$ ist.

Aufgabe 41.4. Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5-2\mathrm{i} & 3-7\mathrm{i} & 4-7\mathrm{i} \\ 1-8\mathrm{i} & 9-2\mathrm{i} & 17\mathrm{i} \\ 6 & 8-9\mathrm{i} & 2-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

beschrieben. Bestimme die Matrix des adjungierten Endomorphismus.

Aufgabe 41.5. Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ beschrieben. Auf dem $\mathbb{R}^2$ sei ein Skalarprodukt $\Psi$ durch $\Psi(e_1, e_1) = 4$, $\Psi(e_2, e_2) = 5$ und $\Psi(e_1, e_2) = 3$ gegeben. Bestimme die Matrix des adjungierten Endomorphismus zu $\varphi$ bezüglich des gegebenen Skalarproduktes und bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 41.6. Es sei $V$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass der adjungierte Endomorphismus folgende Eigenschaften erfüllt.

(1)
$$(\varphi + \psi)\hat{} = \hat{\varphi} + \hat{\psi}.$$
(2)
$$(s\varphi)\hat{} = \overline{s}\hat{\varphi}.$$
(3)
$$(\hat{\varphi})\hat{} = \varphi.$$
(4)
$$(\varphi \circ \psi)\hat{} = \hat{\psi} \circ \hat{\varphi}.$$

Aufgabe 41.7.*

Es seien $V$ und $W$ euklidische Vektorräume und $\varphi \colon V \to V$ ein Endomorphismus mit adjungiertem Endomorphismus $\hat{\varphi}$. Es sei $\psi \colon V \to W$ eine Isometrie. Zeige, dass der adjungierte Endomorphismus zu
$$\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} \colon W \longrightarrow W$$
gleich $\psi \circ \hat{\varphi} \circ \psi^{-1}$ ist.

Aufgabe 41.8. Es sei $V$ ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt und einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $\varphi \colon V \to V$. Es sei $\hat{\varphi}$ der adjungierte Endomorphismus zu $\varphi$. Zeige, dass $\hat{\varphi}$ mit dem adjungierten Endomorphismus zu $\varphi$, aufgefasst als reell-lineare Abbildung, bezüglich des zugehörigen reellen Skalarproduktes übereinstimmt.

Aufgabe 41.9. Es sei $V$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass die Zuordnung
$$\operatorname{End}(V) \longrightarrow \operatorname{End}(V),\ \varphi \longmapsto \hat{\varphi},$$
antilinear ist.

Aufgabe 41.10.*

Es sei $V$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei
$$V = V_1 \oplus V_2$$
die direkte Summe der Untervektorräume $V_1$ und $V_2$. Es seien
$$\varphi_1 \colon V_1 \longrightarrow V_1$$
und
$$\varphi_2 \colon V_2 \longrightarrow V_2$$
lineare Abbildungen und
$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$$
die Summe davon.

(1) Die Summenzerlegung sei zusätzlich orthogonal, d.h. $V_1$ und $V_2$ stehen senkrecht aufeinander. Zeige

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_1 \oplus \hat{\varphi}_2 .$$

(2) Zeige, dass die Aussage aus Teil (1) nicht gilt, wenn die Summenzerlegung nicht orthogonal ist.

Aufgabe 41.11. Es sei $V$ ein euklidischer Vektorraum mit dem Dualraum $V^*$.

(1) Zeige, dass durch

$$\langle f, g \rangle := \langle \operatorname{Grad} f, \operatorname{Grad} g \rangle$$

ein Skalarprodukt auf dem Dualraum erklärt wird.

(2) Zeige, dass die natürliche Abbildung

$$V \longrightarrow V^*, \, v \longmapsto \langle v, - \rangle ,$$

eine Isometrie zwischen $V$ und $V^*$ stiftet.

Aufgabe 41.12. Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Identität ist selbstadjungiert.
(2) Die Hintereinanderschaltung von zwei selbstadjungierten Abbildungen ist wieder selbstadjungiert.
(3) Zu einer bijektiven selbstadjungierten Abbildung ist auch die Umkehrabbildung selbstadjungiert.

Aufgabe 41.13. Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein $\varphi$-invarianter Untervektorraum. Zeige, dass auch die Einschränkung

$$\varphi|_U \colon U \longrightarrow U$$

selbstadjungiert ist.

Aufgabe 41.14. Es sei $V$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass es zu jeder Linearform $f \in V^*$ einen eindeutig bestimmten Vektor $y \in V$ mit

$$f(v) = \langle y, v \rangle$$

für alle $v \in V$ und einen eindeutig bestimmten Vektor $z \in V$ mit

$$f(v) = \langle v, z \rangle$$

für alle $v \in V$ gibt.

Aufgabe 41.15. Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass die Menge der selbstadjungierten Endomorphismen von $V$ einen Untervektorraum in $\operatorname{End}(V)$ bilden.

Aufgabe 41.16. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine Isometrie auf einem euklidischen Vektorraum $V$. Zeige, dass $\varphi$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn die Ordnung von $\varphi$ gleich 1 oder gleich 2 ist.

Aufgabe 41.17.*

Es sei $M$ eine reell-symmetrische $2 \times 2$-Matrix. Zeige, dass $M$ einen Eigenwert besitzt.

Aufgabe 41.18.*

Es sei $V$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $V$. Es sei $\langle -, - \rangle$ das durch

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

definierte Skalarprodukt auf $V$. Zu einer linearen Abbildung bezeichne $\Psi_\varphi$ die (über $\langle -, - \rangle$) zugehörige Sesquilinearform. Zeige, dass die Gramsche Matrix von $\Psi_\varphi$ bezüglich der Basis mit der beschreibenden Matrix von $\varphi$ bezüglich der Basis übereinstimmt.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 41.19. (4 Punkte)

Es seien $V_1, \ldots, V_n, V_{n+1}$ Vektorräume über $\mathbb{C}$, es seien

$$\varphi_i\colon V_i \longrightarrow V_{i+1}$$

lineare oder antilineare Abbildungen und es sei

$$\varphi = \varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \cdots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$$

die Hintereinanderschaltung der Abbildungen. Zeige durch Induktion über $n$ die beiden folgenden Aussagen.

(1) Wenn die Anzahl der antilinearen Abbildungen gerade ist, so ist $\varphi$ linear.
(2) Wenn die Anzahl der antilinearen Abbildungen ungerade ist, so ist $\varphi$ antilinear.

Gilt von diesen Aussagen auch die Umkehrung?

Aufgabe 41.20. (4 Punkte)

Die lineare Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ beschrieben. Auf dem $\mathbb{R}^2$ sei ein Skalarprodukt $\Psi$ durch $\Psi(e_1, e_1) = 3$, $\Psi(e_2, e_2) = 7$ und $\Psi(e_1, e_2) = 2$ gegeben. Bestimme die Matrix des adjungierten Endomorphismus zu $\varphi$ bezüglich des gegebenen Skalarproduktes und bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 41.21. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

die lineare Abbildung, die bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ gegeben sei. Bestimme die Matrix zum adjungierten Endomorphismus von $\varphi$ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 41.22. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi \colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

die lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & -2+9\mathrm{i} \\ -2-9\mathrm{i} & 5 \end{pmatrix}$ gegeben sei. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren von $\varphi$.

Aufgabe 41.23. (4 (1+1+1+1) Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

aufgefasst als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, nicht selbstadjungiert ist, und zwar mit den folgenden Methoden.

(1) Bestimme die adjungierte Abbildung zu $M$.
(2) Lemma 41.10 (1) ist nicht erfüllt.
(3) Lemma 41.10 (3) ist nicht erfüllt.
(4) Es gibt keine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren zu $M$ (d.h. die Konklusion aus Satz 41.11 ist nicht erfüllt.)