Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 49

Übungsaufgaben

Aufgabe 49.1. Schaue in einen Spiegel. Vertauscht die Spiegelung links und rechts, oben und unten, vorne und hinten? Durch welche lineare Abbildung wird eine Spiegelung beschrieben?

Aufgabe 49.2. Gibt es Gründe, für Linkshänder andere Schrauben anzufertigen als für Rechtshänder?

Aufgabe 49.3. Gilt die Rechte-Hand-Regel auch für Linkshänder?

Aufgabe 49.4. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass auf der Menge der (geordneten) Basen die Orientierungsgleichheit eine Äquivalenzrelation ist, die bei $V \neq 0$ aus genau zwei Äquivalenzklassen besteht.

Aufgabe 49.5. Sei $V \neq 0$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Zeige, dass wenn man einen Vektor v_i durch sein Negatives $-v_i$ ersetzt, dass dann die neue Basis die entgegengesetzte Orientierung repräsentiert.

Aufgabe 49.6.*

Bestimme, ob die beiden Basen des $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Aufgabe 49.7.*

Bestimme, ob die beiden Basen des $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Aufgabe 49.8.*

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Wie muss man x wählen, damit diese drei Vektoren die Standardorientierung des $\mathbb{R}^3$ repräsentieren?

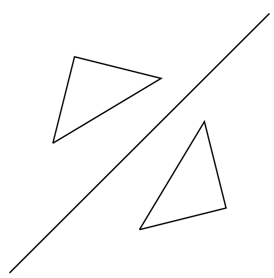
b) Wie muss man x wählen, damit diese drei Vektoren die der Standardorientierung entgegengesetzte Orientierung repräsentieren?

Aufgabe 49.9.*

Lucy Sonnenschein befindet sich in Position $(-2, 3) \in \mathbb{Z}^2$ (die Koordinaten seien mit x und y bezeichnet) und schaut in die positive x-Richtung. Alle folgenden Angaben beziehen sich auf ihre jeweilige Position und ihre Ausrichtung, der Uhrzeigersinn bezieht sich auf die Draufsicht. Lucy führt hintereinander folgende Bewegungen aus. Sie macht einen Schritt nach rechts, dann zwei Schritte nach hinten, sie dreht sich um 180 Grad, macht drei Schritte nach links, macht eine Vierteldrehung im Uhrzeigersinn, macht vier Schritte nach rechts und zwei Schritte nach hinten, dreht sich um 360 Grad und macht einen Schritt nach links.

Wo befindet sie sich nach der Gesamtbewegung und in welche Richtung schaut sie?

Aufgabe 49.10. Diskutiere, ob es sinnvoll ist, die Ecken eines Dreiecks in der Ebene immer gleichermaßen gegen den Uhrzeigersinn mit A, B, C zu bezeichnen, insbesondere unter Berücksichtigung des Bildes unten.



Aufgabe 49.11. Es seien V und W zwei endlichdimensionale orientierte reelle Vektorräume und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann orientierungstreu ist, wenn es eine die Orientierung auf V repräsentierende Basis $v_1, \ldots, v_n$ gibt, deren Bildvektoren $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ die Orientierung auf W repräsentieren.

Aufgabe 49.12. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei π eine Permutation auf M und M_π die zugehörige Permutationsmatrix. Zeige, dass M genau dann orientierungstreu ist, wenn

$$\operatorname{sgn}(\pi) = 1$$

ist

Aufgabe 49.13. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $G = \operatorname{GL}(V)$ die Gruppe der bijektiven linearen Abbildungen auf V. Zeige, dass die Menge der orientierungstreuen Abbildungen in G einen Normalteiler bilden. Welche Beziehung besteht zum Betrag der Determinante?

Aufgabe 49.14.*

Die Puzzleteile für ein Puzzle haben eine grob rechteckige Form, wobei die eine Seite erkennbar länger als die andere sei, und auf jeder Seite gibt es entweder eine Einbuchtung oder eine Ausbuchtung. Wie viele Typen von Puzzelteilen gibt es?

Aufgabe 49.15. Bestimme die Ordnung der ebenen Drehung um 291 Grad.

Aufgabe 49.16.*

Wie viele Elemente besitzt die von der Drehung um 45 Grad, von der Drehung um 99 Grad und von der Zwölfteldrehung erzeugte Untergruppe der Drehgruppe SO_2?

Aufgabe 49.17. Betrachte die Gruppe der Drehungen am Kreis um Vielfache des Winkels $\alpha = 360/12 = 30$ Grad. Welche Drehungen sind Erzeuger dieser Gruppe?

Aufgabe 49.18. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit $(1, 0)$ als einem Eckpunkt. Bestimme die (eigentlichen und uneigentlichen) Matrizen, die den Symmetrien an diesem Dreieck entsprechen.

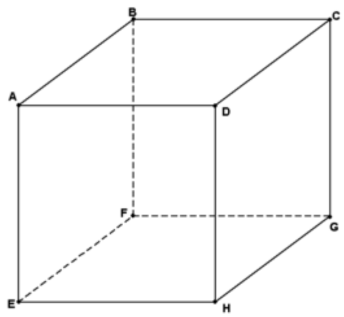
Aufgabe 49.19.*

Es sei Q das Quadrat im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.

(1) Bestimme zu jeder eigentlichen Symmetrie dieses Quadrates die Matrix bezüglich der Standardbasis.
(2) Bestimme zu jeder uneigentlichen Symmetrie dieses Quadrates die Matrix bezüglich der Standardbasis.
(3) Ist die Gruppe der eigentlichen und uneigentlichen Symmetrien an diesem Quadrat kommutativ?

Aufgabe 49.20. Bestimme sämtliche Matrizen, die den Symmetrien eines Quadrates mit den Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)$ entsprechen. Sehen diese Matrizen für jedes Quadrat (mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt) gleich aus?

Aufgabe 49.21. Betrachte ein Rechteck in der Ebene, das kein Quadrat sei, und dessen Mittelpunkt der Nullpunkt sei und dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen mögen. Bestimme die Matrizen, die die (eigentlichen und uneigentlichen) Symmetrien des Rechteckes beschreiben. Erstelle eine Verknüpfungstafel für diese Symmetriegruppe.



Aufgabe 49.22. Welche Zahlen treten als Ordnungen von eigentlichen Würfelsymmetrien auf? Beschreibe die Wirkungsweise der Symmetrie auf den Eckpunkten, den Kanten und den Seiten des Würfels sowie auf den Raumdiagonalachsen, den Seitenmittelpunktsachsen und den Kantenmittelpunktsachsen.

Aufgabe 49.23. Bestimme die vier Bewegungen an einem Würfel mit den Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ in Matrixschreibweise, die $(1, 0, 0)$ auf $(0, 0, -1)$ abbilden.

Aufgabe 49.24. Wie viele (wesentlich verschiedene) Möglichkeiten gibt es, die Seiten eines Würfels von 1 bis 6 zu nummerieren, so dass die Summe gegenüberliegender Seiten stets 7 ergibt?

Wie viele Möglichkeiten gibt es überhaupt?

Aufgabe 49.25. Die Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ eines Würfels seien mit $1, 2, 3, \ldots, 8$ (oder ähnlich) bezeichnet (Skizze!). Beschreibe durch Wertetabellen, wie die folgenden (eigentlichen oder uneigentlichen) Würfelsymmetrien die Eckpunkte permutieren:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Was passiert mit den Kantenmittelpunkten unter diesen Bewegungen?

Aufgabe 49.26. Sei W der Würfel mit den Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Fixiere eine Kantenmittelpunktachse (durch den Nullpunkt). Welche Bewegungen des Würfels lassen sich als Drehung um diese Achse beschreiben? Wie sehen diese Bewegungen in Matrixschreibweise aus, und was passiert dabei mit den Eckpunkten des Würfels?

Aufgabe 49.27. Bestimme die Koordinaten eines Tetraeders, bei dem der Nullpunkt der Mittelpunkt ist, die vier Eckpunkte des Tetraeders vom Nullpunkt den Abstand eins besitzen, der Punkt $(0, 0, 1)$ ein Eckpunkt ist und ein weiterer Eckpunkt Koordinaten der Form $(u, 0, v)$ besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 49.28. (4 Punkte)

Bestimme, ob die beiden Basen des $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Aufgabe 49.29. (6 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Zeige, dass es auf V, aufgefasst als reellen Vektorraum, eine natürliche Orientierung gibt

Aufgabe 49.30. (4 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n und sei das Produkt $V^n = V \times \cdots \times V$ mit der Produkttopologie versehen. Es sei I ein reelles Intervall und

$$\varphi\colon\ I \longrightarrow V^n$$

eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

für jedes $t \in I$ eine Basis von V ist. Zeige, dass sämtliche Basen $\varphi(t)$, $t \in I$, die gleiche Orientierung auf V repräsentieren.

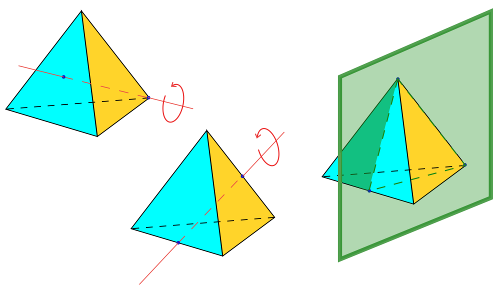
Aufgabe 49.31. (2 Punkte)

Wie viele Elemente besitzt die von der Drehung um 51 Grad, von der Drehung um 99 Grad und von der Siebteldrehung erzeugte Untergruppe der Drehgruppe SO_2?

Aufgabe 49.32. (2 Punkte)

Es sei W der Würfel mit den Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Es sei φ eine Dritteldrehung um die Raumdiagonale durch $(1,1,1)$ und $(-1,-1,-1)$. Bestimme Ebenengleichungen für diejenigen Ebenen, auf denen je drei Eckpunkte liegen, die durch diese Drehung ineinander überführt werden.

Aufgabe 49.33. (5 Punkte)



Man gebe für die in den obigen Skizzen angedeuteten Symmetrien des Tetraeders eine geeignete Matrixdarstellung.

Abbildungsverzeichnis