

Lineare Algebra

Arbeitsblatt 24

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 24.1. Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton durch eine explizite Rechnung für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgaben

AUFGABE 24.2. Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton durch eine explizite Rechnung für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 24.3. Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton für eine obere Dreiecksmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 24.4. Es sei M eine diagonalisierbare Matrix mit dem charakteristischen Polynom χ_M . Zeige direkt, dass

$$\chi_M(M) = 0$$

gilt.

AUFGABE 24.5. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei

$$\psi = \varphi \oplus \cdots \oplus \varphi: V \oplus \cdots \oplus V \longrightarrow V \oplus \cdots \oplus V$$

die m -fache direkte Summe von φ mit sich selbst. Wie verhält sich das Minimalpolynom (das charakteristische Polynom) von ψ zum Minimalpolynom (zum charakteristischen Polynom) von φ ?

AUFGABE 24.6. Schreibe die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4X^2 - 3X + 2 & X^3 - 2X + 8 \\ 3X^4 - X^3 - 2X^2 + 7 & X^4 - 6 \end{pmatrix}$$

(mit Einträgen aus $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Q}(X)$) als

$$A_4X^4 + A_3X^3 + A_2X^2 + A_1X + A_0$$

mit Matrizen $A_4, A_3, A_2, A_1, A_0 \in \text{Mat}_2(\mathbb{Q})$.

AUFGABE 24.7. Es sei M eine $n \times n$ -Matrix über einem Körper K , dessen Minimalpolynom die Form

$$(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_k)$$

mit verschiedenen λ_i besitze. Zeige, dass M diagonalisierbar ist.

AUFGABE 24.8. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sei M die Menge der n -ten Einheitswurzeln in K . Zeige, dass M eine Untergruppe der Einheitengruppe K^\times ist.

AUFGABE 24.9.*

Zeige, dass jede komplexe Einheitswurzel auf dem Einheitskreis liegt.

Eine n -te Einheitswurzel heißt *primitiv*, wenn sie die Ordnung n besitzt.

AUFGABE 24.10. Es sei $\zeta \in K$ eine n -te primitive Einheitswurzel in einem Körper K . Zeige die „Schwerpunktformel“

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$

AUFGABE 24.11. Es sei M die Permutationsmatrix zu einer Transposition. Zeige, dass M über \mathbb{R} diagonalisierbar ist.

AUFGABE 24.12.*

Es sei der Zykel $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \dots \mapsto n \mapsto 1$ gegeben und sei M die zugehörige $n \times n$ -Permutationsmatrix über einem Körper K .

a) Es sei $P \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $< n$. Erstelle eine Formel für $(P(M))(e_1)$.

b) Bestimme das Minimalpolynom von M .

c) Man gebe ein Beispiel für einen Endomorphismus φ auf einem reellen Vektorraum V mit untereinander verschiedenen Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ derart, dass $\varphi(v_1) = v_2$, $\varphi(v_2) = v_3$ und $\varphi(v_3) = v_1$ gilt und dass das Minimalpolynom von φ nicht $X^3 - 1$ ist.

AUFGABE 24.13. Von einer Permutation $\pi \in S_n$ sei die Zyklenzerlegung bekannt. Bestimme das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom der Permutationsmatrix M_π .

AUFGABE 24.14. Es sei $\pi \in S_n$ eine Permutation und M_π die zugehörige Permutationsmatrix über einem Körper K . Zu $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ sei

$$V_J = \langle e_j, j \in J \rangle \subseteq K^n.$$

a) Zeige, dass V_J genau dann M_π -invariant ist, wenn $\pi(J) \subseteq J$ ist.

b) Zeige, dass es M_π -invariante Unterräume geben kann, die nicht von der Form V_J sind.

AUFGABE 24.15. Es sei K ein endlicher Körper. Zeige, dass jede Einheit in K eine Einheitswurzel ist.

AUFGABE 24.16.*

Bestimme die Ordnung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper mit 3 Elementen.

AUFGABE 24.17. Es sei K ein endlicher Körper und M eine invertierbare $n \times n$ -Matrix über K . Zeige, dass M endliche Ordnung besitzt.

AUFGABE 24.18.*

Man gebe eine Matrix $M \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})$ der Ordnung 4 an.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 24.19. (4 Punkte)

Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

durch eine explizite Rechnung.

AUFGABE 24.20. (4 Punkte)

Es sei M eine $n \times n$ -Matrix über einem Körper K und sei

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m \in K[X]$$

ein Polynom mit

$$P(M) = 0$$

und mit $a_0 \neq 0$. Zeige, dass M invertierbar ist und dass die inverse Matrix durch

$$M^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1 + a_2M + \cdots + a_mM^{m-1})$$

beschrieben wird.

AUFGABE 24.21. (5 Punkte)

Es seien V und W endlichdimensionale K -Vektorräume und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

und

$$\psi: W \longrightarrow W$$

Endomorphismen mit den Minimalpolynomen P bzw. Q . Zeige, dass das Minimalpolynom von

$$\varphi \oplus \psi: V \oplus W \longrightarrow V \oplus W$$

gleich dem normierten Erzeuger des Ideals $(P) \cap (Q)$ ist.

AUFGABE 24.22. (3 Punkte)

Bestimme die Ordnung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{Z}/(5)$ mit 5 Elementen.

AUFGABE 24.23. (4 Punkte)

Zeige, dass eine Permutationsmatrix über \mathbb{C} diagonalisierbar ist.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7