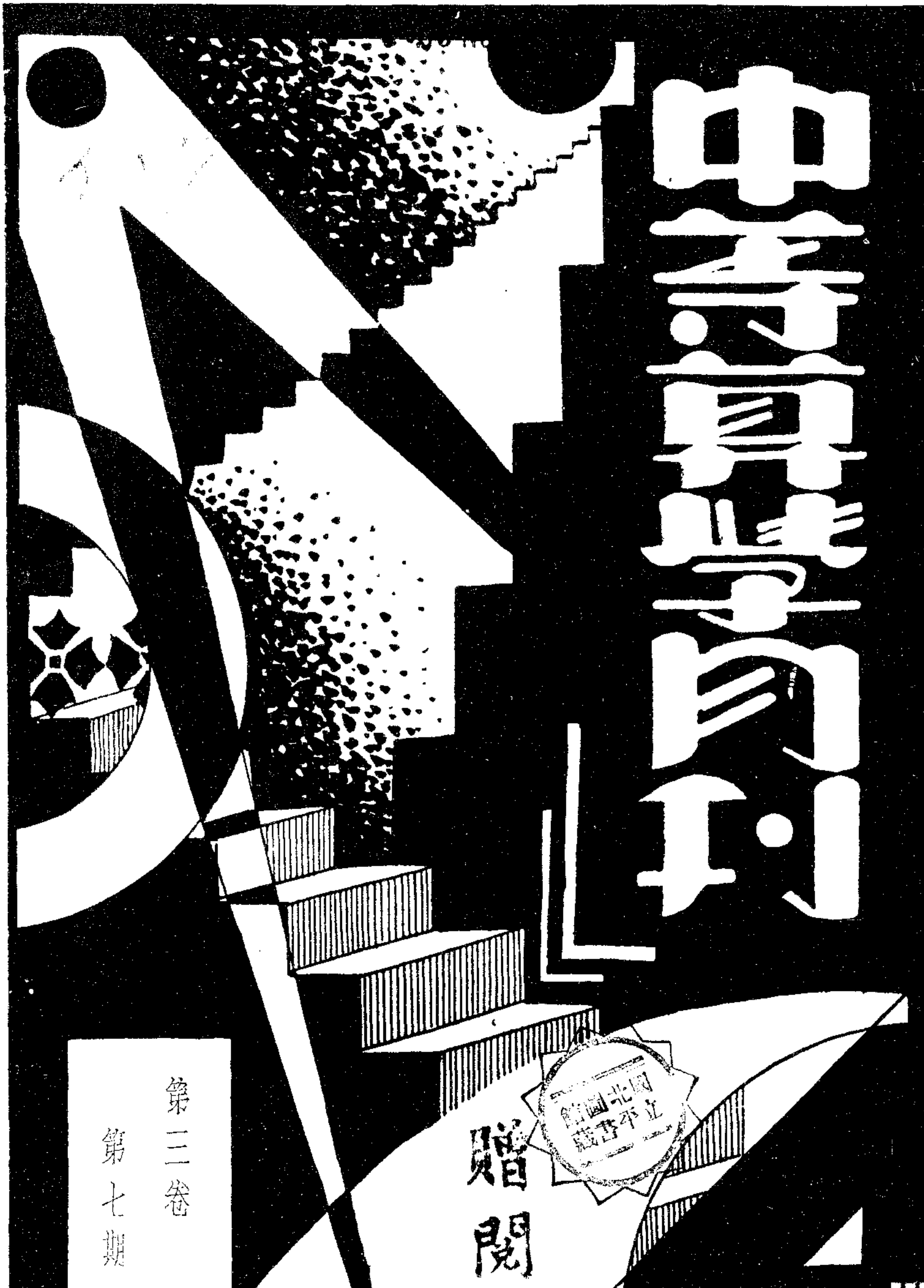


中等算學月刊
第三卷
第七期
贈閱
國立北平圖書館藏

本社重要啓事

茲因社務日益進展，同人等又皆廁身教界，對於本刊發行事宜，無暇兼顧．為使本刊普遍全國計，自即期起關於發行部份各項事宜，概委託南京中央書局，負責辦理．嗣後如蒙各埠各學校書局承銷，或國內外讀者訂閱，概請逕向該書局接洽為禱！至於舊有定戶，除由武昌珞珈山武漢大學敝社經手之少數定戶外，亦已完全移交中央書局，按期照寄．謹此公告，諸希亮察！

本刊投稿簡則

1. 本刊以供給中學師生補充算學教材，引起研究興趣為宗旨，如蒙賜稿，至所歡迎．

2. 來稿以簡明淺易，能合中等算學程度為宜． 如屬譯作，務請註明原文出處．

3. 來稿務宜謄正，萬勿過於潦草． 格式每頁二十五行，每行三十五字．繪圖請用黑色墨水，精確作好，以便製版．

4. 來稿內容，本刊有修正之權，其不願修改者，請於寄稿時聲明．

5. 來稿除寄稿時特別聲明並附足郵費外，概不退還．

6. 來稿登載後，酌贈本刊若干期，以答雅意，非敢言酬也．

7. 來稿請寄南京南捕廳鍾英中學本社，或武昌珞珈山武漢大學本社．

本刊預定章程

1. 定閱者請參閱本刊封面後幅內定價表，註明起訖期數將款項惠寄南京太平路中央書局，收到後即發正式收據為憑．本刊每期出版後，儘先發送不誤．

2. 定閱者須將通信處詳細註明，如中途改變地址，請即來函通知該局，否則如有遺失，恕不負責．

本 期 目 次

頁 數

幾何證題法概論……………………………………余介石 (1—3)

算術基本觀念之診斷測驗(初步報告)…魯淑音 (4—10)

三角雜題例解……………………………………段調元 (11—16)

一元方程式的圖解………………………………李緒文譯(17—22)

分點定理之應用…………………………………龍季和 (23—27)

算學週遊記………………………………………范寄萍譯(28—31)

算盤開方法………………………………………胡希約 (32)

自由講座…………………………………………………(33)

問題欄……………………………………………………(34—39)

國立中央大學二十四年度入學試驗

算學試題解答……………………………………………(40—43)

中等算學參考書目………………………………愼 其 (44—48)

幾何證題法概論*

余 介 石

1. 幾何學的方法　幾何學所用的方法，叫做演繹法，即以若干基本原理爲根據，依邏輯的步驟以推究圖形性質。這原是算學一科共同方法，但在幾何學中更爲明顯。

演繹法即逐步的推理，每一步皆須有根據；如此窮源溯流，必有止境。換言之，即必須有出發點方可。幾何之出發點，乃若干無證明之原理，普通認爲不證自明者，其實乃一種規約，爲研究之入手處也。就此點而論，算學之與自然科學，根本適得其反。

2. 幾何學的性質　如上所述，可知幾何學中所論，非爲親知（即吾人感官所體驗之知識）而爲推知（即推理所得之知識）。幾何學中之圖形，只是抽象觀念，而非具體實物。實物雖可與概念相比擬，但不可混爲一談。譬如無大小之點，無粗細之線，無厚薄之面，皆絕不能自實物中得之。但是這些觀念，與實物性質極相近，可說是實物之理想的標準；因此由概念推得的知識，在實際仍能應用，蓋二者相差之程度甚微，已達於可以忽略不計之境也。故就抽象性論，幾何有超越的基礎，其眞僞不因物質情形而變動；但就應用性言，仍有很大的効力。

3. 直接推理法　由一已知爲眞的命辭，推證他一命辭的眞確性，是曰直接推理。在邏輯中所述的直接推理法，有換位（即將命辭的前提與結論互換）與換量（即將前提和結論中的肯定語與否定語互換）二種。應用於算學命辭，即得四種形式如下：

（一）主命辭　如有 A（前提），則有 B（結論）。

（二）逆命辭　如有 B（前提），則有 A（結論）——換位。

（三）轉命辭　如無 A（前提），則無 B（結論）——換量。

---

* 本文多取材於拙著新課程標準適用高中幾何學（中華書局出版）

(四)逆轉命辭　如無 B (前提),則無 A (結論)——位與量均換。

各種命辭的關係及其眞僞的關聯性,具見普通幾何學,兹不具論,或參看拙著算學通論第二篇亦可。

4. 思想三律　邏輯中有所謂思想三律,即指推理的準則,非謂吾人運用思想時心理方面的歷程。幾何學旣爲推知之學,故必須依據思想律,今略述如下:

(一)同一律　即謂吾人就一對象下斷語時,其主詞與表詞必有同性;以公式表之,即爲"A 是 A"。

(二)矛盾律　任何斷語,不能與其矛盾語並立,是曰矛盾律。其公式爲"A 不是非 A",意即謂不能指一對象爲 A,而同時又爲非 A 也。

(三)排中律　矛盾律謂 A 與非 A 不能並立,排中律則謂 A 與非 A,必有一是,不能並廢。其公式爲"A 或非 A,必居其一"。

合矛盾與排中二律,可知一理之正反兩方面,只能有一方面成立(因不能並立),但必有一方面成立(因不能並廢)。

5. 間接推理法　由一命辭推知他一命辭時,如須以第三命辭爲介,則爲間接推理法.間接推理的方式,常以三段論法表出,其式如下:—

一切的甲均是 A (大前提)

今乙爲甲　　(小前提)

所以乙是 A　　(結　論)

這種方式,實即同一律的應用.如用方程式表之,即

$$甲=A,\quad 乙=甲,\quad \therefore\quad 乙=A.$$

在幾何的推理中,每步的大前提是公理,公設,定義,定理或作圖題等;小前提是題設爲已知或已證明爲眞的事項,推出的結論,又爲推證下一步時的小前提,如此直到達於所求證的結論始止。

6. 証法總論　間接推理法,就其性質言,可概括爲直接與間接二種。

(一)直接證法　以定理中所設已知事項爲小前提,依上述間接推理法,逐步推

證，以達於所求証的結論，是為直接證法。這種證法為積極的，幾何中定理，大多數皆用此證法。

（二）間接證法　這種證法應用雖不如（一）之廣，但是許多重要基本問題，往往不能施以直接証法，非恃此不能解。

間接證法的性質為消極的，因其論證不從題理的正面着手。按矛盾排中二律，便知一理的正反二面，必有且只有一方面成立，所以遇正面不易着手的問題，如能否決其反面，卽可襯証其正面必定成立。

7. 結論　如上所述，証題的方法，大別為直接推理與間接推理兩種，然直接推理，無由判結果的眞妄。由間接推理中之間接證法，雖可得二結果：

（一）一定理的逆轉命辭必眞，

（二）離接命辭的逆命辭必眞；

然其効用範圍皆極有限。故直接推理法，不過指示定理變化的方式，而少判別眞妄的能力，因之證題方法，不得不恃間接推理。其中直接證法，更可大別為（1）疊合法，（2）直接法，（3）歸納法，（4）極限法；間接證法亦可別為（1）歸謬法，（2）窮舉法，（3）定一法。他日有暇，當更詳述之。

算術基本觀念之診斷測驗

——初步報告(續)——

魯淑音

測驗試題演算無誤人數統計表(表二)

(附列普通錯誤表)

題數	算式	答案	試題無誤人數	試題無誤人數百分比	錯答舉例	備註
	整數加減					
1.	969 +37	1066	1654	98.5%	906，1096。	加法進位錯誤
2.	2009 +102	2111	1647	98.2%	2101，2112	
3.	375 +9627	10002	1602	95.5%	答案各異	
4.	58 +0	58	1656	98.7%	0	
5.	2563 472 8197 +68	11300	1346	80.2%	11292，10300	
6.	47 −17	30	1621	96.6%	37，20	
7.	56 −56	0	1669	99.5%	100	
8.	325 −287	38	1652	98.4%	138	
9.	400 −247	153	1648	98.2%	152	
10.	5327 −249	5078	1605	95.6%	5068	

題數	算式	答案	試題無誤人數	試題無誤人數百分比	錯答舉例	備註
	小數加減					
1.	42.005+3.2	45.205	1563	93.1%	45.007	不明小數加法
2.	0.002+0.20	0.202	1594	95.0%	0.0220, 0.0202	
3.	251.4+1265	1516.4	1510	89.9%	15164, 1526.4	小數點疏忽
4.	9.005+8	17.005	1493	89.1%	9.013, 17005	
5.	61.56+328.6	390.16	1413	84.2%	3901.6, 410.16	
6.	50−0	50	1675	99.8%	5,	$5\cancel{0}-\cancel{0}=5$
7.	8.65−0.65	8	1649	98.2%	800	普通算術課本內小數加減試題多依小數位置排好故學生遇此種算式時多致發生錯誤
8.	126−1.26	124.74	1379	81.2%	125.26, 000	
9.	0.827−0.825	0.002	1560	92.9%	2, 0.2	
10.	324−18.9	305.1	1417	84.4%	3051, 306.9	
	乘法					
1.	174 ×3	522	1650	98.3%	422, 322	乘法進位錯誤
2.	218 ×203	44254	1443	85.9%	5014, 43254	1. 218 203 654 436 5014 2.加錯
3.	50 ×72	3600	1600	95.3%	3500	
4.	316 ×30	9480	1577	93.9%	9380	
5.	4.3 ×0	0	1585	94.4%	4.3	不認識0之意義
6.	7.3 ×0.2	1.46	1606	95.7%	14.6, 2.16	1.小數點錯誤 2.乘錯
7.	2.16 ×1.5	3.24	1523	90.7%	3.14, 32.40	
8.	3.90 ×.04	0.156	1515	90.2%	15.60, 1.56	
9.	4.003 ×1.87	7.48561	1331	79.3%	748.561, 748561	2.小數點疏忽
10.	5.46 ×742	4051.32	1098	65.4%	406.132, 405132	

題數	算式	答案	試題無誤人數	試題無誤人數百分比	錯答舉例	備註
	除法					
1.	$5/\overline{1530}$	306	1591	94.8%	36	脫落商數中之0
2.	$2/\overline{808}$	404	1665	99.2%	44	
3.	$7/\overline{1127}$	161	1635	97.4%	答案各異	
4.	$400/\overline{420}$	1.05	1389	82.8%	1.5, 1	2.脫落餘數
5.	$7/\overline{5.6}$	0.8	1640	97.7%	8	
6.	$12/\overline{0}$	0	1489	88.7%	12, ∞	不明0及∞之意義
7.	$0.6/\overline{3.24}$	5.4	1341	79.9%	.54, 54	
8.	$8.0/\overline{4.08}$	0.51	1256	74.8%	51	
9.	$3.6/\overline{42.6}$	11.8	1093	65.1%	1.18	
10.	$3.36/\overline{33.6}$	10	1247	74.3%	1, 0.1	
	分數化簡					
1.	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{2}$	1511	90.0%	$\frac{1}{3}$	
2.	$\frac{36}{60}$	$\frac{3}{5}$	1580	94.1%	6, ∞	
3.	$\frac{72}{99}$	$\frac{8}{11}$	1501	89.6%	$\frac{6}{11}$, $\frac{24}{33}$	1.除法錯誤 2.未能化爲最簡
4.	$\frac{78}{78}$	1	1590	94.7%	0, $\frac{36}{36}$	$\frac{\cancel{78}}{\cancel{78}}=0$, 不明上下相銷之意義
5.	$\frac{2418}{6}$	403	1484	88.4%	43	
6.	$\frac{305}{3}$	$101\frac{2}{3}$	1350	80.4%	$10\frac{3}{5}$, $11\frac{2}{3}$	
7.	$\frac{159}{30}$	$5\frac{3}{10}$	1471	87.6%	$\frac{33}{10}$, 5	1.粗心, 2.餘數忽略
8.	$\frac{47}{5}$	$9\frac{2}{5}$	1441	83.9%	$8\frac{7}{5}$, $\frac{47}{5}$.	
9.	$\frac{4006}{203}$	$19\frac{149}{203}$	802	47.7%	$\frac{2002}{101}$, $\frac{2003}{101.5}$	$\frac{\overset{2}{\cancel{4}}00\cancel{6}^{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}0\underset{1}{\cancel{3}}}=\frac{2002}{101}$
10.	$\frac{1590}{20}$	$79\frac{1}{2}$	1304	77.7%	795	

題數	算式	答案	試題無誤人數	試題無誤人數百分比	錯答舉例	備註
	分數加減					$1.\ \frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$,
1.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	1537	91.6%	$\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$, 5	2.將兩分數相乘 $3.\ \frac{3}{6}+\frac{2}{6}=3+2=5$
2.	$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{12}$	1373	81.8%	$\frac{4}{7}$, $\frac{7}{12}$, 13	不明作法
3.	$\frac{1}{12}+\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1354	80.7%	$\frac{3}{15}$, 9	
4.	$\frac{3}{5}+\frac{3}{4}$	$1\frac{7}{20}$	1435	85.5%	$\frac{6}{20}$, $\frac{6}{9}$, 6	
5.	$\frac{2}{15}+\frac{4}{6}$	$\frac{4}{5}$	1246	74.2%	$\frac{6}{90}$, $\frac{6}{21}$	
6.	$26\frac{4}{8}+\frac{1}{4}$	$26\frac{3}{4}$	1128	67.2%	$26\frac{5}{12}$, $\frac{106}{8}$	
7.	$36\frac{1}{3}+17\frac{1}{2}$	$53\frac{5}{6}$	1096	65.3%	$53\frac{3}{6}$, $\frac{144}{5}$	1.分數加錯 $2.\ \frac{109}{3}+\frac{35}{2}=\frac{144}{5}$
8.	$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1403	83.7%	$\frac{1}{1}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{6}$	$1.\ \frac{2-1}{3-2}=\frac{1}{1}$. $2.\ \frac{4}{6}-\frac{2}{6}=\frac{2}{6}$
9.	$\frac{3}{15}-\frac{1}{5}$	0	1093	65.1%	$\frac{12}{15}$,	正確答案中以$\frac{0}{15}$佔多數
10.	$\frac{1}{2}-\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	1354	80.6%	0, ∞, $\frac{1}{1}$	$1.\ \frac{1}{2}-0=0$, $2.\ \frac{1-0}{2-2}=\frac{1}{0}=\infty$
11.	$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	1419	84.5%	1, $\frac{0}{20}$	$1.\ \frac{5}{20}-\frac{4}{20}=1$
12.	$35\frac{3}{4}-5\frac{1}{2}$	$30\frac{1}{4}$	1041	62.0%	$3\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$	1.將0忽略
13.	$27\frac{2}{3}-27\frac{2}{4}$	$\frac{1}{6}$	1073	63.9%	−27	83−110=−27
14.	$14\frac{3}{12}-\frac{1}{4}$	14	938	55.8%	$14\frac{0}{12}$, $14\frac{1}{12}$	
15.	$220\frac{1}{3}-22\frac{1}{3}$	198	961	57.2%	$198\frac{0}{3}$	

題數	算式	答案	試題無誤人數	試題無誤人數百分比	錯答舉例	備註
	分數乘除					
1.	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1483	88.3%	$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{2}{6}$	1. $\frac{1}{2}\times\frac{3}{1}=\frac{3}{2}$， 2. $\frac{2}{1}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 算法錯誤
2.	$\frac{2}{2}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1371	81.7%	答案各異	
3.	$\frac{1}{5}\times\frac{0}{2}$	0	949	56.3%	$\frac{1}{10}$	正確答案中以$\frac{0}{10}$佔多數
4.	$\frac{20}{2}\times\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	1397	83.2%	$\frac{80}{2}$，5	1. $\frac{20}{2}\times\frac{4}{1}=\frac{80}{2}$
5.	$\frac{12}{8}\times\frac{8}{8}$	$1\frac{1}{2}$	1404	83.6%		
6.	$\frac{66}{5}\times\frac{15}{6}$	33	1428	85.1%	$\frac{75}{396}$，	$\frac{15}{6}\times\frac{5}{66}=\frac{75}{396}$
7.	$6\times3\frac{5}{8}$	$21\frac{3}{4}$	875	52.1%	$18\frac{5}{8}$，$9\frac{5}{4}$	1. 以6乘整數未乘分數 2. $\overset{3}{\cancel{6}}\times3\frac{5}{\cancel{8}\,4}=9\frac{5}{4}$
8.	$1\frac{1}{3}\times2\frac{2}{4}$	$3\frac{1}{3}$	1057	62.9%	$2\frac{2}{12}$	
9.	$\frac{50}{6}\div5$	$1\frac{2}{3}$	1168	60.6%	$1\frac{1}{3}$	
10.	$\frac{4}{3}\div\frac{3}{4}$	$1\frac{7}{9}$	1060	63.1%	1，0	$\frac{4}{3}\div\frac{4}{3}=1$， $\cancel{\frac{4}{3}}/\cancel{\frac{4}{3}}=0$
11.	$\frac{4}{3}\div\frac{20}{3}$	2	1200	71.5%	答案各異	
12.	$\frac{8}{3}\div\frac{4}{5}$	$3\frac{1}{3}$	1213	72.2%	仝上	
13.	$\frac{7}{6}\div\frac{8}{12}$	$1\frac{3}{4}$	1121	66.8%	$\frac{84}{48}$，	$\frac{7}{6}\times\frac{12}{8}=\frac{84}{48}$
14.	$1\frac{1}{2}\div\frac{1}{7}$	$10\frac{1}{2}$	1096	65.3%	$\frac{14}{3}$	$\frac{2}{3}\times\frac{7}{1}=\frac{14}{3}$ 不明分數除法
15.	$3\frac{1}{4}\div4\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	968	57.6%	1	$13\div13=1$

題數	算式	答案	試題無誤人數	試題無誤人數百分比	錯答舉例	備註
	化分數	爲小數及百分數				
1.	$\frac{9}{100}$	0.09=9%	907.5	54.1%	0.09=09%, 9= 9%	不明百分法
2.	$\frac{8}{8}$	1 =100%	931	55.4%	0=0%,1=1%	
3.	$\frac{5}{4}$	1.25=125%	821.5	48.9%	$1\frac{1}{4}=1\frac{1}{4}\%$	
4.	$\frac{1}{4}$	0.25=25%	692.5	41.3%	0.25=0.25%	
5.	$\frac{5}{6}$	0.833=83.3%	697.5	41.6%	0.84=0.84%	
	應用題					
1.	火藥成分裏木炭占$\frac{1}{20}$,問 1000 斤火藥裏含有木炭多少? 答 50斤		993	59.1%	40, 500, 5	除法錯誤
2.	雞兎合計頭數 57,足數 144 問雞兎各有多少? 答 雞42,兎15		677.5	40.4%	答案各異	算法錯誤

(附註) 根據本表結果而論,學生之困難可歸納於下列數點:

(1) 無基本算術之觀念。

例: (i) $\frac{8}{8}=0=0\%$,不知上下相銷之意義。

(ii) $\begin{array}{r}4\cdot3\\ \times0\\ \hline 0\cdot0\end{array}$; $\frac{3}{15}-\frac{1}{5}=\frac{0}{15}$. 如此作答之人數已過半數,雖不能指爲錯誤,然亦足表示學生不認識之意義.

(iii) $\begin{array}{r} 7\cdot3 \\ \cdot2 \\ 14\cdot6 \end{array}$，顯係不知小數點之用法。

(2) 不知基本算式之作法.

例：(i) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$； (ii) $6\times3\frac{5}{8}=18\frac{5}{8}$； (iii) $\frac{\overset{4}{\cancel{20}}+4}{\cancel{30}6}=\frac{8}{6}$.

對各種算式法則，雖已學過而無深刻之觀念，故遇此等試題，卽有顯著之錯誤。

(3) 不知利用簡便算法。

例：(i) $\begin{array}{r} 218 \\ \underline{203} \\ 654 \\ 000 \\ \underline{436} \\ 44254 \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 316 \\ \underline{30} \\ 000 \\ \underline{948} \\ 6480 \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} 56 \\ \underline{-56} \\ 00 \end{array}$

用如此作法者幾佔全數三分之一；又如

$$\frac{12}{8}\times\frac{8}{8}=\frac{96}{64},$$

未能看出$\frac{8}{8}$卽等於一。

(4) 應用題極感困難。對於問題之意義雖能明瞭，而解題方法則感困難。如第二題，大半數皆用代數公式計算，做對答案者僅百分之四十而已.

（待　　續）

三角雜題例解

段調元

（續三卷六期）

［例解四］ 有方程式

$$(2\cos\varphi-1)x^2-4x+4\cos\varphi+2=0,$$

內中 φ 代 0° 與 90° 間之角。

1. 求 φ 應在何限內，方程式始有實根；

2. 討論 φ 在此限內時實根之情形；

3. 將兩根之積化作三角函數之乘積式。

解。(1) 欲方程式有實根，須

$$4-(2\cos\varphi-1)(4\cos\varphi+2)\geq 0$$

由是得

$$\cos\varphi\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故知 φ 應在 30° 與 90° 之間。

(2) φ 既爲銳角，則方程式兩根之乘積 P 及和 S

$$P=\frac{2(2\cos\varphi+1)}{2\cos\varphi-1},\qquad S=\frac{4}{2\cos\varphi-1}$$

應與 $2\cos\varphi-1$ 爲同號。 即當 $\cos\varphi>\frac{1}{2}$, $\varphi<60^\circ$ 時 P, S 均爲正，當 $\varphi>60^\circ$ 時 P, S 均爲負。 故於 $30^\circ<\varphi<60^\circ$ 時，方程式之兩根均爲正；$60^\circ<\varphi<90^\circ$ 時，兩根之號相反，而負根之絕對値大於正根。 當 $\varphi=30^\circ$ 時，方程式之兩根相等，各爲

$$x=\frac{2}{2\cos 30^\circ-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1.$$

當 $\varphi=60^\circ$ 時，$\cos\varphi=\frac{1}{2}$，方程式約爲一次式而

$$x=\cos\varphi+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=1.$$

若 $\varphi=90^\circ$，則方程式變爲

$$x^2+4x-2=0,$$

其二根爲 $-2\pm\sqrt{6}$。

(3)　兩根之乘積可書爲

$$P=\frac{2(\cos\varphi+\frac{1}{2})}{\cos\varphi-\frac{1}{2}}=2\frac{\cos\varphi+\cos 60^\circ}{\cos\varphi-\cos 60^\circ}$$

但
$$\cos\varphi+\cos 60^\circ=2\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\cos\varphi-\cos 60^\circ=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\therefore\quad P=2\cot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\varphi}{2}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

[例解五]　証無論 x 爲何數，均有

$$\text{arc}\tan\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\text{arc}\sin\sqrt{\frac{x-a}{2a}}.^{*}$$

證。　設左式之値爲 z，則

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\tan z=\frac{\sin z}{\sqrt{1-\sin^2 z}};\ \text{即}\quad \frac{x-a}{x+a}=\frac{\sin^2 z}{1-\sin^2 z}.$$

就 $\sin^2 z$ 解之得

$$\sin^2 z=\frac{x-a}{2a},\ \text{而}\quad \sin z=\pm\sqrt{\frac{x-a}{2a}}.$$

但因 $\tan z>0$，$0<z<\pi/2$，故 $\sin z$ 亦爲正數，而

$$z=\text{arc}\sin\sqrt{\frac{x-a}{2a}}.$$

*　$\text{arc}\tan x$ 及 $\text{arc}\sin x$ 爲正切弧及正弦弧之反圓函數符號，英文書多寫作 $\tan^{-1}x$ 及 $\sin^{-1}x$，因恐誤會爲正切及正弦之反商，故不取。　又式中 $x\geq a$。

由是題式兩端之值均爲 z，故相等。

［例解六］ 證 $\arctan\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$ 與 $2\arctan x$ 之差，爲一常數。

證. 設 $\arctan\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}=z$, $\arctan x=u$, 則 $x=\tan u$, 而

$$\tan z=\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}=\frac{\tan^2 u-2\tan u-1}{\tan^2 u+2\tan u-1}$$

$$=\frac{\sin^2 u-2\sin u\cos u-\cos^2 u}{\sin^2 u+2\sin u\cos u-\cos^2 u}=\frac{\cos 2u+\sin 2u}{\cos 2u-\sin 2u}.$$

因 $\sin(\pi/4)=\cos(\pi/4)$，故上式又可書爲

$$\tan z=\frac{\sin(\pi/4)\cos 2u+\cos(\pi/4)\sin 2u}{\cos(\pi/4)\cos 2u-\sin(\pi/4)\sin 2u}$$

$$=\frac{\sin(\pi/4+2u)}{\cos(\pi/4+2u)}=\tan(\pi/4+2u)$$

$$\therefore\quad z-2u=\frac{\pi}{4}$$，爲一常數。 (證訖)

若 $\arctan x$ 之值不限於 $-\pi/2$ 與 $\pi/2$ 之間，則 $z-2u=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$。

［例解七］ 設 $(b+a\cos x)\sin x>0$，試証

$$y_1=\arctan\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{b+a\cos x} \qquad (1)$$

$$y_2=\arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x} \qquad (2)$$

$$y_3=2\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) \qquad (3)$$

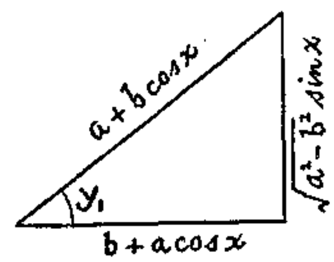
三者之值相等。

證。由(1)式 $\tan y_1=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{b+a\cos x}$。

題設 $(b+a\cos x)\sin x>0$，卽 $b+a\cos x$ 與 $\sin x$ 同號，故 $\tan y_1>0$ 而 y_1 爲銳角。

因 $(b+a\cos x)^2+(a^2-b^2)\sin^2 x$

$=(a+b\cos x)^2$，故由右圖易見



$$\cos y_1=\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x},$$

卽 $$y_1=\operatorname{arc}\cos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x},$$

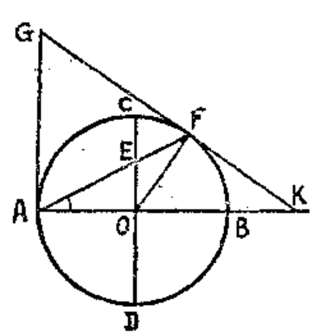
於是 $y_2=y_1$ 得以証明。又

$$\tan\frac{y_1}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos y_1}{1+\cos y_1}}=\sqrt{\frac{(a-b)(1-\cos x)}{(a+b)(1+\cos x)}}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2},$$

卽 $$y_1=2\operatorname{arc}\tan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)$$

故 y_3 亦與 y_1 相等。若反圓函數之値不限制，則 $y_1,\ y_2,\ y_3$，三者差一常數相等。

［例解八］ 作一以 O 爲心 R 爲半徑之圓，並引 AB, CD 兩垂直直徑，自 A 作一直線過 OC 之中點 E 而交圓周於 F，又於 A，F 兩點各作切線互交於 G，引長 GF 交 AB 於 K。求 AF, AG, OK 之長及 AFG 三角形之面積。



解. 命 $\angle OAF=\alpha$，則 $\angle BOF=\angle AGF=2\alpha$，$\angle GAF=\angle AFG=\pi/2-\alpha$；因

$$\tan\alpha=\frac{1}{2},\quad\therefore\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}。$$

由是

$$AF=2\,OA\cos\alpha=2R\cos\alpha=\frac{4R}{\sqrt{5}}。$$

又　$AG : AF = \sin AFG : \sin AGF$

$$= \sin(\pi/2-\alpha) : \sin 2\alpha = \cos\alpha : 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

故　$$AG = \frac{AF}{2\sin\alpha} = \frac{4R}{\sqrt{5}} \div \frac{2}{\sqrt{5}} = 2R.$$

最後　$$OK = \frac{OF}{\cos 2\alpha} = \frac{R}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{5R}{3}.$$

又　$\triangle AFG$之面積$= \frac{1}{2} AF \cdot AG \sin GAF$

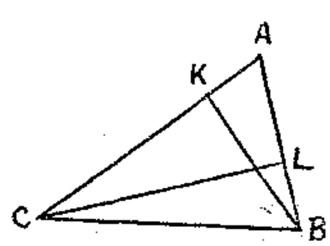
$$= \frac{1}{2} \times \frac{4R}{\sqrt{5}} \times 2R\sin(\pi/2-\alpha)$$

$$= \frac{4R^2}{\sqrt{5}}\cos\alpha = \frac{8R^2}{5}.$$

［例解九］　三角形 ABC 中$\angle B$爲$\angle C$之二倍；已知 $BC=a$，及由 B 至 AC 之垂線 BK，由 C 至 AB 之垂線 CL 間有下之關係：

$$BK^2 + CL^2 = ma^2.$$

求未知角$\angle ABC = x$，並視 m 爲參數而討論之，且指出 m 爲何數時，此三角形爲等腰三角形及直三角形。



解。由圖易知

$$BK = a\sin\frac{x}{2},\qquad CL = a\sin x.$$

依題意　$$BK^2 + CL = a^2\left(\sin^2\frac{x}{2} + \sin^2 x\right) = ma^2. \tag{1}$$

因 $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos x)$，$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$，(1)式化爲

$$2\cos^2 x + \cos x + 2m - 3 = 0; \tag{2}$$

解之得　$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{25-16m}}{4}. \tag{3}$$

由題設關係知 $m>0$，由 (3) 知 $m\leq 25/16$；故 m 之值在 0 與 25/16 之間。但 m 之每一值，相當 (2) 式中有二根，此二根有時均合題，有時不均合題，玆分別論之。

三角形內角之和為 180°，故 x 之最大值為 120°，此時 $\cos x=-\frac{1}{2}$，因之必須

$$0<x<120^\circ, \quad \text{及} \quad -\tfrac{1}{2}<\cos x<1,$$

始為合題之解。今由(2)知兩根之和為 $-\frac{1}{2}$，故可分三款論之：

(i) $3/2<m\leq 25/16$. 此時 (2) 式常數項為正，故兩根皆負而大於 $-\frac{1}{2}$，兩解均合題。在 $m=25/16$ 時，$\cos x=-\frac{1}{4}$，$x=104^\circ 28' 40''$。

(ii) $m=3/2$. 此時 $\cos x=0$ 或 $-\frac{1}{2}$，$x=90^\circ$ 或 120° 祇前一解合題。

(iii) $0\leq m<3/2$. 此時(2)式常數項為負，而兩根異號。因 $25-16m$ 之值大於 1，由(3)知此負根之值小於 $-\frac{1}{2}$，不合題，故祇其正根為合題之解。在 $m=0$ 時，$\cos x=1$ 或 $-\dfrac{3}{2}$，$x=0^\circ$，亦不合題。

欲三角形為等腰，其可能情形有二：

1° $A=C=x/2$，卽 $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=180^\circ$，$x=90^\circ$；此時 m 之值為 3/2，見上之討論。

2° $A=B=x$，卽 $x+x+\frac{x}{2}=180^\circ$，$x=72^\circ$；此時 m 之值為

$$\frac{3}{2}-\cos^2 72^\circ-\frac{1}{2}\cos 72^\circ=\frac{5}{4}.$$

欲三角形為直三角形，其可能情形亦有二：

1° B 為直角，卽 $x=90^\circ$，此時 $m=3/2$ 已見上。

2° A 為直角，則 $B+C=90^\circ$，而 $x=60^\circ$，此時 m 之值為

$$\frac{3}{2}-\cos^2 60^\circ-\frac{1}{2}\cos 60 =1.$$

一元方程式的圖解法

F. Klein 原著*　　李緒文譯

在高中代數內，大都有方程式的圖解法一章，講解一元方程式和二元聯立方程式實根的求法。下面所述，專限於一元方程式，按照其中含有一個或兩個參變量而分段敘述。 我想這篇文字對於高中同學們也許有些可以參考的地方，所以把牠節譯出來。——譯者。

一・ 含有一個參變量的方程式

1。 設

(1)　$$f(x, \lambda)=0$$

爲變量 x 的實代數方程式，含有一個參變量 λ。 如以第二變量 y 代替 λ 成

(2)　$$f(x, y)=0,$$

其所表爲 xy 平面上的一個曲線(圖1)。 這曲線和平行於 x 軸的直線 $y=\lambda$ 交點之横位標，就正是(1)式的實根。 如果(2)式不很複雜，將牠的圖形簡略地描出後，我們用一根直尺放在和 x 軸平行的位置上下移動，立刻可以看出(1)式實根個數的多寡，是怎樣在隨着 λ 而改變了。 如(1)式只含有 λ 的一次項，應用此法特別有效. 這類方程式，總可化成

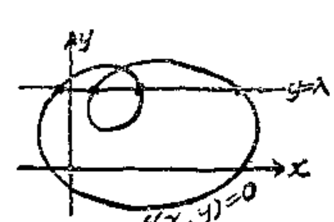


圖 1

(3)　$$\varphi(x)-\lambda\cdot\psi(x)=0$$

---

* Klein, F. Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint, 原爲德籍，經 E. R. Hedrick 及 C. A. Coble 譯爲英文，北平師大附中算學叢刻社有翻印本，爲中學算學教師所不可少之參考書。本文係其中論代數部分之一片段。——編者。

的形狀。 如 φ 和 ψ 都是有理函數，則 $y=\varphi(x)/\psi(x)$ 所表的曲線，一定很易描畫。在此等情形下，我們利用這個方法常能夠計算各實根的近似值。

例一。 二次方程式

$$x^2+ax-\lambda=0 \tag{4}$$

中將 λ 改為 y 得 $y=x^2+ax$ 為一拋物線。直線 $y=\lambda$ 和這拋物線交點的橫位標，就是(4)的實根。按照各橫線截這曲線於兩點，一點，或竟不截的各種位置，很容易斷定 λ 取何值時(4)式有兩個，一個或沒有實根(圖二)。

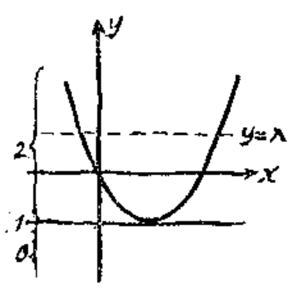


圖 2

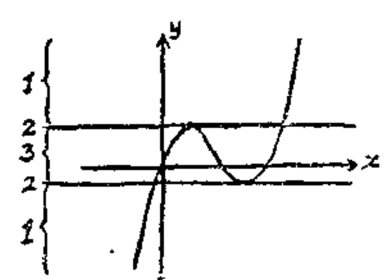


圖 3

例二。 三次方程式

$$x^3+ax^2+bx-\lambda=0 \tag{5}$$

中之 λ 改為 y 得 $y=x^3+ax^2+bx$ 為一立方拋物線，其形狀隨 a, b 的數值不同而有差異．現在假定 $x^2+ax+b=0$ 有兩個實根，牠的形狀，便如圖 3 所示． 在這圖上可以看出(5)式有一個兩個或三個實根時 $y=\lambda$ 所在的地位． 至於能使(5)式有重根的 λ，有兩個數值，也是可以從圖上一望而知的。

二． 含有兩個參變量的方程式

2。 方程式中含有幾個參變量時，例如兩個參變量的方程式，當圖解時就需要技巧，可是結果應用較廣，也較有興趣。 我們還是限定方程式中，只含有參變量 λ, μ 的一次項，其中未知數則以 t 表之，如

$$\varphi(t)+\lambda\cdot\chi(t)+\mu\cdot\psi(t)=0. \tag{6}$$

其中 φ, χ, ψ 都是 t 的有理整函數。現在的問題就是要決定這方程式的實根。

如 x, y 是正交經緯制中的點位標，每一直線的方程式必可寫成

(7) $$y+ux+v=0$$

的形狀。$(-u)$ 是這直線的斜度，$(-v)$ 是牠的縱截距。定了 u, v 的數值，也就定了這直線的位置；所以 u, v 可以叫做線位標。點位標和綫位標如果看作對偶的關係，那麼(7)式就表示直綫 (u, v) 和點 (x, y) 位置相連的關係。換言之，也就是說這點在這線上和這線通過這點的意思。

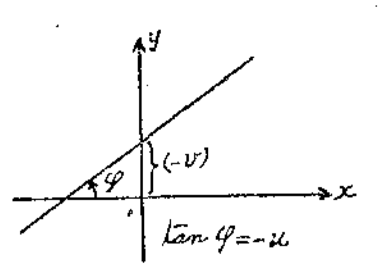


圖 4

爲說明(6)式的幾何意義起見，就從比較(6)，(7)兩式入手． 這有兩個根本不相同的方法；現在分述於下。

3. 第一法． 試就方程式

(8a) $$y=\frac{\varphi(t)}{\psi(t)},\quad x=\frac{\chi(t)}{\psi(t)},$$

(8b) $$u=\lambda,\qquad v=\mu,$$

觀之。 以 t 爲變量，(8a)所表是 xy 平面上的有理曲線，叫做 (6) 式的模範曲線 (normal curve)。 因爲曲線上每一點，相當於 t 的一值，所以在曲線上以 t 的數值刻成尺度。 由 (8a) 算出許多點的位標，在方格紙上精確地作出模範曲線和牠上面 t 的尺度。 (8b)中每對 λ, μ 的數値定一直線。由上節所云，(6)式所示的關係，便是曲線上的 t 點應在此直線上。 所以祗要定出直線 (λ, μ) 和模範曲線的一切實交點，再從該曲線上的尺度讀出這些交點上的 t 的數値，就是(6)式的一切實根。 凡方程式的形狀如 (6) 式的，模範曲線都是一樣，一次作好之後，不論 λ, μ 之値如何，皆可應用。 這些方程式，每個所含的 λ, μ，如上所述，定一直綫。 λ, μ 的値既可任意，全 xy 平面上的直線都包括在內，不像在第一節中祗用那些橫線了。

例三。 二次方程式

(9) $$t^2+\lambda t+\mu=0$$

的模範曲線為拋物線

$$y=t^2,\ x=t;\qquad 即\quad y=x^2,$$

如圖5所示。t的尺度也附在上面。(9)式的實根，可由這拋物線和直線$y+\lambda x+\mu=0$的交點一一讀出。例如圖中所示方程式$t^2-t-1=0$的兩根，一在$\frac{3}{2}$與2之間，一在$-\frac{1}{2}$與-1之間，約為1·6和-0·6。

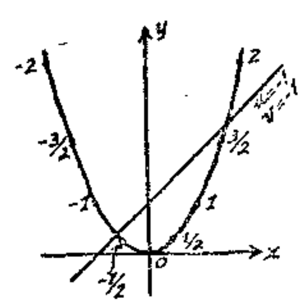


圖5

現在我們可以看到這方法勝過第一節那方法的優點，是一切二次方程式，都以這拋物線為其模範曲線。利用這平面上一切直綫，就可以解所有的二次方程式。假設有許多二次方程，要待解決，用這方法，便毋須乎一一圖解了。

例四。 一切三次方程式，都可化為

(10) $$t^3+\lambda t+\mu=0$$

的形狀。 我們祇要能圖解這方程式，就可圖解一切三次方程式. 此時模範曲線，為立方拋物線

$$y=t^3,\ x=t;\quad 即\quad y=x^3,$$

如圖6所示。 圖中表示$t^3-t-1=0$祇有一個介於1與2之間的實根。

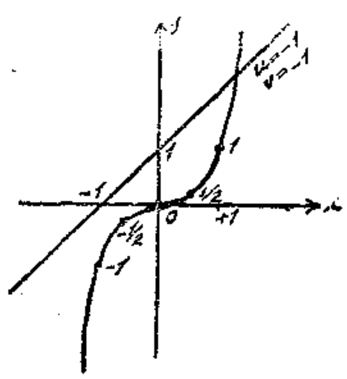


圖6

第5 6兩圖，如果放大些精密些去描畫，不難求到各實根的近似值至小數點後第三四位。

4。 第二法。 應用對偶定理於第一法，又得一種方法。換言之，即將點位標與線位標互換。 試將(7)式倒過來寫為

$$v+xu+y=0,$$

再和(6)式比較．令

(11a) $$v=\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \qquad u=\frac{\chi(t)}{\psi(t)},$$

(11b) $$x=\lambda, \qquad y=\mu.$$

如 t 爲變量，(11a)就表示 xy 平面上的一簇直線。這簇直線包絡成一曲線，即(6)式的模範曲線。因爲牠是用變量 t 的有理函數爲線位標表示的，所以一定是有理曲線。每一切線和切點由 t 之一值而決定，所以曲線上仍附有 t 之尺度。按着(11a)可作許多切線，使模範曲線很精確明顯地表示出來，且曲線上 t 之尺度，也都寫出來，以備應用。按(11b)所示，參變量 λ，μ 每對數值，決定 xy 平面上一點。由(6)式的關係，模範曲線的切線 t 必經過這(λ, μ)點。所以祇要定出從點(λ, μ)到模範曲線所作的切線，再從圖上讀出這些切線所相當的變量 t 之值，就是(6)式的實根。凡同此形狀的方程式，必具有同樣的模範曲線，與各方程式內 λ，μ 的數值，毫無關係。這些方程式所含有的 λ，μ，各表平面上一點。

例五。依這方法，例三中那二次方程式 $t^2+\lambda t+\mu=0$ 的模範曲線，爲直線簇 $v=t^2$，$u=t$ 的包絡線，也是以原點的頂點的一個抛物線(圖 7)。由點(λ, μ)至抛

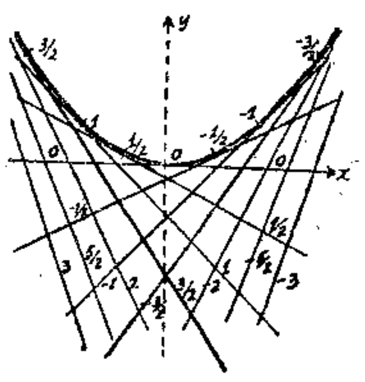


圖 7

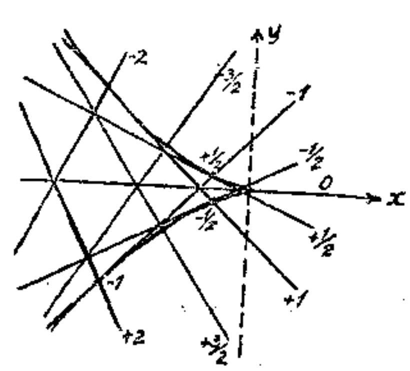


圖 8

物線的切線相當的 t 之數值，就是(9)式的實根。

例六。 例四中三次方程式 $t^3+\lambda t+\mu=0$ 的模範曲線，爲直線簇 $v=t^3$, $u=t$ 的包絡線。這是一個三級曲線，在原點處有一尖點，如圖 8 所示。

以上兩例的模範曲線，都是由線位標方程式作出，不大方便，我們可用另法求出牠們的點位標方程式。

三項方程式

$$(12)\qquad t^m+\lambda t^n+\mu=0$$

的模範曲線，其切線的線位標爲 $v=t^m$, $u=t^n$，所以可用

$$(13)\qquad f(t)=t^m+xt^n+y=0$$

代表(12)的模範曲線的切線簇。 我們既將模範曲線看作一組直線的包絡形，所以這形就是(13)式中每一直線 t 和他緊鄰直線 $t+dt$ 的交點的軌跡。 因之由(13)式和牠的導來函數

$$(14)\qquad f'(t)=mt^{m-1}+nxt^{n-1}=0$$

兩方程式中消去參變量 t 就得模範曲線的點位標方程式。或者由(13)，(14)兩式，將 x, y 寫成 t 的函數：

$$x=-\frac{m}{n}t^{m-n},\qquad y=\frac{m-n}{n}t^m$$

而得模範曲線的點位標參變方程式組。 例 5，6 中所舉兩方程式，其模範曲線的點位標參變方程組，依此法求得爲

$$\begin{cases}x=-2\,t,\\ y=-3\,t^2,\end{cases}\qquad 和 \qquad \begin{cases}x=-3\,t^2,\\ y=2\,t^3.\end{cases}$$

這就是圖 7 和圖 8 中所描畫的兩曲線。

分點定理之應用

龍季和

1. 平面解析幾何中之分點定理云：若 $P(x,y)$，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 在一直線上，且 $P_1P:PP_2=m:l$，則

$$(1)\qquad x=\frac{lx_1+mx_2}{l+m},\qquad y=\frac{ly_1+my_2}{l+m}.$$

此定理之逆理亦眞，蓋自(1)式消去 $m:l$，卽得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y},$$

此爲直綫方程式明甚。卽云若平面上三點 P，P_1，P_2 之坐標有(1)之關係，則此三點在一直綫上，且 $P_1P:PP_2=m:l$。

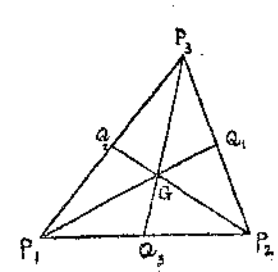
2. 利用此定理及其逆理，得以證明若干幾何定理，玆分述之如次：—

定理一。 三角形之三中綫相交於一點。

證。 設三角形頂點 P_1，P_2，P_3 之坐標各爲 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)；其對邊中點 Q_1，Q_2，Q_3 之坐標各爲 $(\overline{x_1},\overline{y_1})$，$(\overline{x_2},\overline{y_2})$，$(\overline{x_3},\overline{y_3})$，則依(1)

$$(2)\qquad \overline{x_1}=\frac{x_2+x_3}{2},\qquad \overline{y_1}=\frac{y_2+y_3}{2};$$

及兩組相似之式。今設有一點 G，其坐標爲



$$(3)\quad x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\; y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

則因(3)可書爲

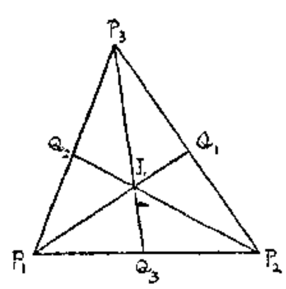
$$x=\frac{x_1+2\times\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+2\overline{x_1}}{1+2},\quad y=\frac{y_1+2\times\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+2\overline{y_1}}{1+2};$$

由前述之逆定理，立知 G 在 P_1Q_1 中線上。將(3)式變換書之，同樣可證 G 在 P_2Q_2 及 P_3Q_3 之上。由是三中線相交於一點，得以証明。

再 G 點將每一中綫分爲二段使其比爲 2 : 1，祗觀上式便明，故有

系。　　$P_iG : GQ_i=2 : 1,\qquad i=1, 2, 3.$

定理二。 三角形之三內角等分線相交於一點.



證。 設三角形 $P_1P_2P_3$ 之邊長爲 p_1, p_2, p_3, 其內角等分綫各交對邊於 Q_1, Q_2, Q_3, 仍如前設各點之坐標，則因

$$P_2Q_1 : Q_1P_3=p_3 : p_2,$$

故有

$$(4)\quad \overline{x_1}=\frac{p_2x_2+p_3x_3}{p_2+p_3},\quad \overline{y_1}=\frac{p_2y_2+p_3y_3}{p_2+p_3}.$$

設於 P_1Q_1 上取一點 I, 使

$$P_1I : IQ_1=p_2+p_3 : p_1,$$

則 I 之坐標應爲

$$x=\frac{p_1x_1+(p_2+p_3)\overline{x_1}}{p_1+p_2+p_3},\quad y=\frac{p_1y_1+(p_2+p_3)\overline{y_1}}{p_1+p_2+p_3}.$$

以(4)代入得

$$x=\frac{p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3}{p_1+p_2+p_3},\quad y=\frac{p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3}{p_1+p_2+p_3}.$$

由此式之對稱性，易知 I 點亦在 P_2Q_2 及 P_3Q_3 上，故三內角等分線均過 I 點，且

$$P_2I : IQ_2=p_3+p_1 : p_2,\qquad P_3I : IQ_3=p_1+p_2 : p_3.$$

3. 分點定理又得推廣至同平面上之四點 $P(x, y)$，$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P_3(x_3, y_3)$；且

$$(5) \qquad x=\frac{lx_1+mx_2+nx_3}{l+m+n}, \quad y=\frac{ly_1+my_2+ny_3}{l+m+n},$$

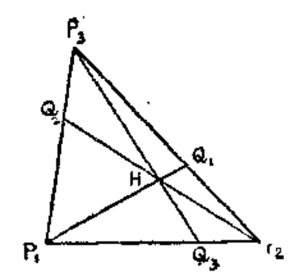
式中

$$l:m:n=\Delta PP_2P_3:\Delta PP_3P_1:\Delta PP_1P_2.*$$

此推廣無逆定理，蓋平面上任四點之坐標皆有(5)之關係也。

Céva 定理。 由平面上任一點 H,作綫聯三角形 $P_1P_2P_3$ 諸頂點，延長之以交對邊於 Q_1，Q_2，Q_3，則

$$\frac{P_1Q_3\cdot P_2Q_1\cdot P_3Q_2}{Q_3P_2\cdot Q_1P_3\cdot Q_2P_1}=1.$$



證。 如前設各點之坐標，再利用上之分點推廣定理於極限情形，令 H 趨近於 Q_3 爲其極限，則

$$\bar{x}_3=\frac{lx_1+mx_2+nx_3}{l+m+n}, \quad \bar{y}_3=\frac{ly_1+my_2+ny_3}{l+m+n}$$

內

$$l:m:n=\Delta Q_3P_2P_3:\Delta Q_3P_3P_1:\Delta Q_3P_1P_2$$
$$=\Delta Q_3P_2P_3:\Delta Q_3P_3P_1:0.$$

但

$$\Delta Q_3P_3P_1:\Delta Q_3P_2P_3=P_1Q_3:Q_3P_2,$$

$$\therefore \quad \frac{P_1Q_3}{Q_3P_2}=\frac{m}{l}$$

同理

$$\frac{P_2Q_1}{Q_1P_3}=\frac{n}{m}, \qquad \frac{P_3Q_2}{Q_2P_1}=\frac{l}{n}.$$

邊邊相乘卽得

$$\frac{P_1Q_3\cdot P_2Q_1\cdot P_3Q_2}{Q_3P_2\cdot Q_1P_3\cdot Q_2P_1}=1.$$

* 參看龍季和：分點定理之推廣，本刊三卷一期

4. 立體解析幾何所論分點定理，祇於(1)式之後加一

$$z=\frac{lz_1+mz_2}{l+m}$$

一式。此其逆定理亦真，蓋消去 $m:l$ 後，卽得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{z-z_1}{z_2-z},$$

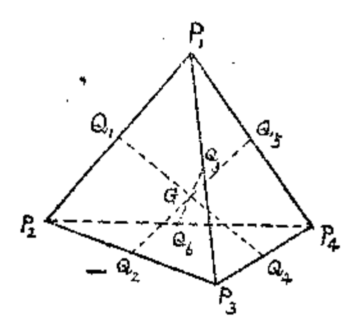
此可變為

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

顯然為空間之直線方程式也。

定理三。四面體三雙對稜中點之聯線交於一點，此點卽諸聯線之中點。

證。設 $P_1P_2P_3P_4$ 為四面體，其坐標為 (x_i,y_i,z_i)，$i=1,2,3,4$，又各稜中點為 $Q_j(\overline{x_j},\overline{y_j},\overline{z_j})$，$j=1,2,3,4,5,6$，如右圖所示，則 Q_1，Q_4 之坐標各為



$$\overline{x_1}=\frac{x_1+x_2}{2},\ \overline{y_1}=\frac{y_1+y_2}{2},\ \overline{z_1}=\frac{z_1+z_2}{2};$$

$$\overline{x_4}=\frac{x_3+x_4}{2},\ \overline{y_4}=\frac{y_3+y_4}{2},\ \overline{z_4}=\frac{z_3+z_4}{2}.$$

設 Q_1Q_4 之中點為 G，則 G 之坐標為

$$(6)\quad x=\frac{\overline{x_1}+\overline{x_4}}{2}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\ y=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\ z=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}.$$

若將此式書為 $x=\frac{\overline{x_2}+\overline{x_5}}{2}$ 等等，則見 G 為 Q_2Q_5 之中點，同樣又可證其為 Q_3Q_6 之中點，故如定理所云。

定理四． 由四面體各頂點至對面重心之聯線交於 G，且各被 G 分成 3 : 1 之比．

證． 設 $R_1(x_1{}', y_1{}', z_1{}')$ 爲 $\triangle P_2P_3P_4$ 之重心，$R_2(x_2{}', y_2{}', z_2{}')$，$R_3(x_3{}', y_3{}', z_3{}')$ 及 $R_4(x_4{}', y_4{}', z_4{}')$ 各爲 $\triangle P_3P_4P_1$，$\triangle P_4P_1P_2$，$\triangle P_1P_2P_3$ 之重心，則由(3)有

$$x_1{}'=\frac{x_2+x_3+x_4}{3},\quad y_1{}'=\frac{y_2+y_3+y_4}{3},\quad z_1{}'=\frac{z_2+z_3+z_4}{3}$$

等等． 但(6)式可書爲

$$x=\frac{x_1+3\times\dfrac{x_2+x_3+x_4}{3}}{1+3}=\frac{x_1+3x'_1}{1+3},$$

等等，因知 G 在 P_1R_1 上，且

$$P_1G : GR_1=3 : 1.$$

同理可證 G 在 P_2R_2，P_3R_3，P_4R_4 上，且

$$P_2G : GR_2=P_3G : GR_3=P_4G : GR_4=3 : 1.$$

25.10.19 於文化城．

× × × × × ×

算學週遊記

Helen Abbot Merrill 著　范寄萍譯

（三）新乘法

乘法是從加法推演而來，在乘法表未發明以前，已經知道連算方法，如 6 乘以 3 就是三個 6 相加，$6+6+6=3\times 6$。任意二整數的乘法，固然可以由加法求得，但如 465 乘以 342，要把 465 寫 342 次再加起來，是多麼討厭的工作！研究算學的人，最喜是方法簡便，所以乘法表便應此需要而生。其實我們祇要知道以 10 和 100 乘一數的結果，這題的算法便可簡單許多，佈式如下：

$$
\begin{array}{rcrcr}
46500+46500+46500 & = & 139500 & = & 300\times 465 \\
4650+4650+4650+4650 & = & 18600 & = & 40\times 465 \\
465+465 & = & 930 & = & 2\times 465 \\
\hline
 & & 159030 & = & 342\times 465
\end{array}
$$

現在有一種新的方法，只要明瞭以 2 乘，以 2 除的意義，便可以得着結果。這是俄國農人所用的算法，所以叫做 Russian Peasants' Method, 茲舉例述之：

例。27 乘以 38。

$$
\begin{array}{rr}
\boxed{27} & 38 \\
54 & 19 \\
108 & 9 \\
\boxed{216} & 4 \\
\boxed{432} & 2 \\
864 & 1 \\
\hline
1026 &
\end{array}
$$

又如 47 乘以 89

$$
\begin{array}{rr}
47 & 89 \\
\boxed{94} & 44 \\
\boxed{188} & 22 \\
376 & 11 \\
752 & 5 \\
\boxed{1504} & 2 \\
3008 & 1 \\
\hline
4183 &
\end{array}
$$

在 38 的下面，連續用 2 除而書出其商，如有餘數，一概棄去，最後的商一定是 1。在 27 的下面，連續用 2 乘而對着書出其積。將積行中與商行中偶數相對之數圈去，餘下的數相加起來，得 1026 卽為 27 與 38 的乘積。右例亦是一樣。

這種算法乍看很覺得希奇，其實祇要留心看第二行，再參酌本書第二節所述記數法的道理，便可以豁然大悟了！

第二行的算法完全寫出來應該是：　　第一行的意思却是：

2	38	餘數 0	$27=1\times27$,
2	19	1	$54=2\times27$,
2	9	1	$108=2^2\times27$,
2	4	0	$216=2^3\times27$,
2	2	0	$432=2^4\times27$,
	1		$864=2^5\times27$,

左邊的意思，便是說用二進法記數時，38 應為 100，110，卽 2^5+2^2+2。所以我們所做的工作，很明顯的是用 2^5+2^2+2 去乘 27。第一行內所圈去的數，恰好是 27 的 2^4，2^3，及 1 倍，正與第一行餘數為 0 處相對，這便是因用二進法記 38 時，沒有 2^4，2^3 及 2^0 各項的緣故。讀者可取他例試試。

農人們雖會用這種方法，恐怕從來不曉得二進法。不過一種方法，明瞭他的理由後，興趣總要濃厚得多。

有一種遊戲，和這種運算法則，很有關係。請你的朋友任意想一個數，再看下表中那幾行有這個數，將行數告訴你，你就能說出他所想的數。

Ⅰ	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
Ⅱ	2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	22	23	26	27	30	31
Ⅲ	4	5	6	7	12	13	14	15	20	21	22	23	28	29	30	31
Ⅳ	8	9	10	11	12	13	14	15	24	25	26	27	28	29	30	31
Ⅴ	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

例如他告訴你那數出現在第 1，3，5 等行，你便把這幾行的第一個數相加得 1+4+16=21，他所想的數便是 21。這個道理是很容易的，明白了表的做法便知道了。

表的做法：第一行從 1 起，每隔一數寫一數；第二行從 2 起連寫二數，以後每隔二數再連寫二數；第三行從 4 起連寫四數，以後每隔四數再連寫四數；如此類推，可寫任意多少行。讀者如果把這表內一切數都用二進法寫出，一定可以看見第一行內的數，末一位都是 1，第二行內的數，倒數第二個都是 1，第三行內的數，倒數第三個都是 1，如此類推。21 一數在二進法是 10101，所以他只在第 1，3，5 三行之內。但是第 1，3，5 三行第一數在二進法內各爲 1，100，10000，加起來便是 10101。這就是此種遊戲的原理了。如果所想的數大於 31，那麼上表便不夠用，必須另添一行，而每行的數都寫到 63 爲止。再要大的數，再加行數和每行的數便可。

上節習題 14 中那個藥材商，如果把此表放在天秤旁邊，他就很容易知道要用多少重的法碼若干個去衡度所求物的重量。你能知道這是什麼道理嗎?

下面的表原理和上面的不同，但用法是一樣的，例如 21 在第 3，6，7 三行內，這三行的第一數相加 3−9+27=21。在 40 以內的數，這表儘夠用了。

Ⅰ	(1)	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40
Ⅱ	(−1)	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	
Ⅲ	(3)	2	3	4	11	12	13	20	21	22	29	30	31	38	39 40
Ⅳ	(−3)	5	6	7	14	15	16	23	24	25	32	33	34		
Ⅴ	(9)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	32	33	繼續寫至 40		
Ⅵ	(−9)	14	15	16	17	18	19	20	21	22					
Ⅶ	(27)	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	繼續寫至 40		

這表也可幫助那藥材商。放適當的法碼在天平的兩邊盤上，一邊放被衡的物體和法碼，一邊全放法碼，兩邊法碼之差便是物體的重量。通常加在物體一邊的法碼，設爲負數，他一邊的法碼爲正數，求兩者之代數和卽得。

例如7在 9，−3，1 三行內出現，如果被衡物所在一邊上之法碼重3溫司，他一邊上放的是1溫司和9溫司重的法碼，兩邊剛好平衡，那麼此物體的重一定是7溫司了。那位藥物商祇要四個法碼，便可以衡度從1至40溫司的重量。

此原則可利用之以寫出一數爲3之乘羃之代數和。例如 $8=3^2-1$，又如 $74=2\times3^3+2\times3^2+2=(3-1)3^3+(3-1)3^2+(3-1)=3^4-3^2+3-1$。總之以3爲底去寫一個數，只要以3−1代2便可。

前面所說的新乘法，可以推到以3乘以3除的做法。不過以3除一數，餘數可爲1，亦可爲2。在餘數爲2時，可將商數加1，而改餘數爲−1。例如3除14，商4餘2，改爲商5餘−1。下面兩例，不難明瞭：

例。23乘以46			又47乘以89		
$1\times23=23$	46	餘數 1	47	89	餘數−1
$3\times23=\boxed{69}$	15	0	$\boxed{141}$	30	0
$3^2\times23=207$	5	−1	423	10	1
$3^3\times23=621$	2	−1	$\boxed{1269}$	3	0
$3^4\times23=1863$	1	+1	3807	1	1
1058			4183		

自第一行中圈去對着第二行中3之倍數之數，再自餘數爲1各數之和減去餘數爲−1各數之和卽得。

此種新乘法，只有2和3可以採用。因爲2除任何數，如有餘數必爲1，以3除時，餘數爲1或−1。以4除一數，其餘數有三種情形，所以不便應用了。

算盤開方法

胡希約

前由同學某君授與算盤開方法，私自實驗多次，無有不合。竊思其中必有算理存焉，反覆推求，略有所得。爰將其方法及所引證之理論分別述之，以供社會人士之參考，更冀有以發揮予之不逮也。

法將欲開方之數，列於算盤之上，自個位起，依次減去 1，3，5，7……等奇數至全數減完爲止，則其方根可由兩種方法得之。

一。以項數爲方根，卽所減去奇數之個數。例如 225 依次減去，至第 15 個奇數時(卽 29)，此數恰能減盡，故 15 爲 225 之方根。

二。以最後所減奇數加 1 而以 2 除之。如前例 $(29+1)\div2=15$ 是也。

玆證其理。由等差級數公式，知

$$1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2.$$

以文字言之，卽某數 n 之平方，等於一首項爲 1 公差爲 2 項數爲 n 之等差級數之總和。故已知某數之平方，從而遞減去此級數之諸項，斯時級數之項數卽所求之方根也。

至第二法之理亦至簡易。蓋最後一項爲 $2n-1$，故

$$\frac{2n-1+1}{2}=n$$

卽所求之方根。

方法既明，讀者自覺斯法係以連減法代開方，顯可以筆算爲之。作者非不知此，不過連減算法，珠算實速於筆算，在數目不大時，似亦有應用之價値，故縷陳之，幸勿以簡陋而見誚也。

自　由　講　座

李振華君來函：鄙人今夏因來首都觀光之便，在某某大學暑期中等教員講習班數理化組聽講(中略)，高等解析幾何教材及教法班上所出研究題中，鄙人對二題頗有疑義，謹陳如下：

(1) 求內切於四邊形之一般曲線。——按此題條件，似未完全，無從着手。

(2) To show that, any chord of a conic is cut harmonically by the curve, any point on the chord, and the polar of this point with respect to the conic.

按對極線之定義如下：自不在二次曲線上一定點作一割線，求第四點與此定點與二交點成調和點列，則此割線旋轉時，第四點之軌跡，爲定點對二次曲線之對極線。此定義條件，卽爲題中求證事項。鄙人習算有年，向未聞有証明定義之方法。但聞担任敎授爲國內幾何專家，且班上並不考試，卽以研究題爲課外作業，評定成績，想不至有誤；尙乞指敎爲感。

答：第一題條件確不完全，以理度之，"一般曲線"當係一般二次曲線之誤。第二題如用來示所言之定義，卽係錯誤，因定義無可證也。但如對極線另有定義，則此題亦未始不可作爲証題。編者特詢此班中之一友人，據云敎該課者並未言明對極線之定義，但言及，設由定點 A 作割線交二次曲線於 P, Q, 交其對極線於 R，則 $\frac{2}{AR}=\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}$，其意似係以此特性爲定義。就此言之，第二題可成立。唯以此爲研究題，似未免幼稚耳。

又聞該友言，擔任該課之敎授，因要故離校，請人庖代。庖代者所授材料及所出研究題皆採自 Loney: Coordinate Geometry 一書。先生對此課程如有興趣，可購該書一讀。該書已經北平師大附中算學叢刻社翻印，其習題並有詳解，頗便自修之用。謹此附告。　編者。

問題欄

本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，不拘科目，不限難易，以供讀者之研究，藉收觀摩之效。凡本刊讀者，皆可提出問題，及解決本欄內所提出之問題。無論出題或解題，概依收到之先後，次第編號發表，而出題者及解題者之姓名及所在學校或住址，均隨題披露。數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登。來稿務祈繕寫清楚，姓名住址尤須明晰。至解題時所用圖形，務請用黑色墨水精確作好，連帶寄下。

再本欄由武昌珞珈山國立武漢大學劉正經教授負責編輯，關於此類稿件，請直接寄上列地址爲禱。

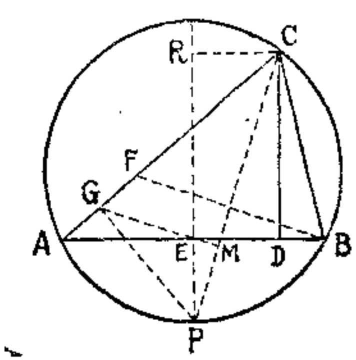
晚到之解答

31•2 山西太原進山中學李從義君。

31•6 前人

32•5 開封王之岐君寄來另一解法如下：

設在$\triangle ABC$中已知頂角 C，高 CD，及 $AC+BC$。作 $\triangle ABC$ 之外接圓，則 C 之分角線遇圓於 AB 弧之中點 P.。自 P 向 AC 引垂線交於 G，則 CG 之長爲 $\frac{1}{2}(AC+BC)$；而直三角形 CPG 爲可作(因$\angle PCG$ 爲 C 角之半也)，PG 爲定長。



次於 CA 上取 $CF=CB$，則 G 必爲 AF 之中點。自 G 向 PC 引垂線 GM，交 AB 於 E，則因 $GE \parallel BF$，E 必爲 AB 之中點，而 PE 之聯線爲圓之直徑。自 C 向此直徑作垂線 CR，則易見 C，R，E，M 共圓。故 $PE\cdot PR=PM\cdot PC=PG^2$。但 $PR=PE+ER=PE+CD$，故

$$PE(PE+CD)=PG^2$$

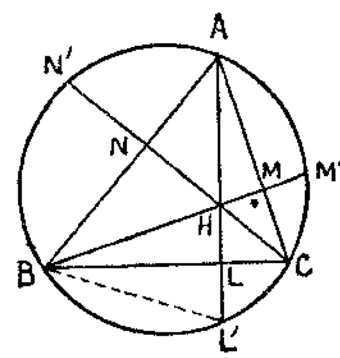
而 PE 爲可作，因得作法如下：

作法。 先作直三角形 CPG。作 $GM\perp PC$。以 PE 之長爲半徑，P 爲中心作弧截 GM 於 E。聯 PE。過 E 作 PE 之垂線交 CG 之延長線於 A，再截取 $EB=EA$，聯 CB 卽得所求之三角形。 証從略。

問 題 已 解 決 者

33·1 自 $\triangle ABC$ 各頂點向對邊作垂線 AL，BM，CN，延長之使交外接圓於 L′，M′，N′，則

$$\frac{AL'}{AL}+\frac{BM'}{BM}+\frac{CN'}{CN}=4.$$



證(太原平民中學胡叢桂)

圖中 $AL=AB\sin B=2R\sin C\sin B$,

R 爲外接圓之半徑. 聯結 BL′，則

$$\angle ABL'=\angle B+\angle CBL'=90^0+B-C,$$

$$AL'=2R\sin ABL'=2R\cos(\overset{B}{R}-C).$$

$$\therefore\ \frac{AL'}{AL}=\frac{2R\cos(B-C)}{2R\sin B\sin C}=\frac{\cos B\cos C+\sin B\sin C}{\sin B\sin B}=1+\frac{\tan A}{\tan A\tan B\tan C}.$$

同理 $\dfrac{BM'}{BM}=1+\dfrac{\tan B}{\tan A\tan B\tan C}$, $\dfrac{CN'}{CN}=1+\dfrac{\tan C}{\tan A\tan B\tan C}$.

$$\therefore\ \frac{AL'}{AL}+\frac{BM'}{BM}+\frac{CN'}{CN}=3+\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A\tan B\tan C}.$$

因 $A+B+C=180^0$, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$,

$$\therefore\ \frac{AL'}{AL}+\frac{BM'}{BM}+\frac{CN'}{CN}=4.$$

別證(長沙省立第一職業學校段桂棠)

設 H 爲 $\triangle ABC$ 之垂心，則 $HL=LL'$.又 $\triangle HBC$ 與 $\triangle ABC$ 同底，故

$$HL : AL = \triangle HBC : \triangle ABC.$$

$$\frac{AL'}{AL} = \frac{AL+LL'}{AL} = 1 + \frac{HL}{AL} = 1 + \frac{\triangle HBC}{\triangle ABC}.$$

同理 $\frac{BM'}{BM} = 1 + \frac{\triangle HCA}{\triangle ABC}$; $\frac{CN'}{CN} = 1 + \frac{\triangle HAB}{\triangle ABC}$.

因 $\triangle HBC + \triangle HCA + \triangle HAB = \triangle ABC$，將上三式相加，卽得

$$\frac{AL'}{AL} + \frac{BM'}{BM} + \frac{CN'}{CN} = 4.$$

與段君解法相同者尚有太原進山中學李世義君，李君分款討論，在 $\triangle ABC$ 中 A 爲鈍角時，

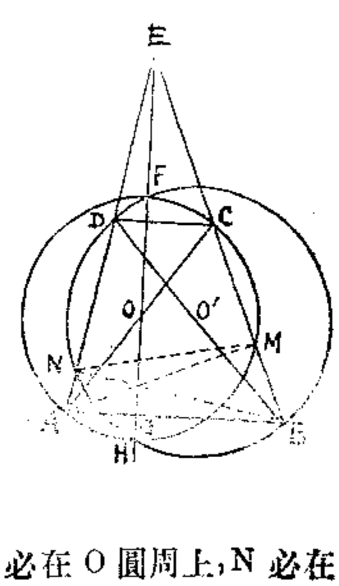
$$\frac{BM'}{BM} = \frac{BM-M'M}{BM} = 1 - \frac{\triangle HAC}{\triangle ABC}, \quad \frac{CN'}{CN} = \frac{CN-N'N}{CN} = 1 - \frac{\triangle HBA}{\triangle ABC}$$

三式相加亦合．又 A 爲直角時更易証明，不贅．

33•2． 求於已知三角形內作互切之三圓，各圓與二邊相切。

尙未收到解答。

33•3． 以梯形之兩對角線爲直徑作圓，則其公共弦之延長線必與兩斜邊之延長線交於一點。



証(香港鐸聲書院何季隆)

如圖，設 O，O' 爲以對角線 AC，BD 爲直徑所作之圓。兩斜邊 AD，BC 之延長線之交點命之爲 E。聯 E 至兩圓第一交點 F，延長之使交 O 圓於 G，O' 圓於 H。

次自 A，B 各向 BC，AD 作垂線 AM 及 BN 則 M 必在 O 圓周上，N 必在 O' 圓周上。因 $\angle AMB = \angle ANB = \angle R$，A，B，M，N 四點共圓，因之

$$\angle CMN = \angle NAB = \angle CDN \text{ 之補角},$$

而 C, D, N, M 四點亦共圓。 由是知 $EC \cdot EM = ED \cdot EN$。

在 O 圓內有　　$EC \cdot EM = EF \cdot EG$;

在 O′ 圓內有　　$ED \cdot EN = EF \cdot EH$.

此兩式左端相等,右端亦必相等,因之 $EG = EH$。故 G, H 兩點重合,且即兩圓之第二交點。

(本題解者尚有長沙第一職業段桂棠君及棗莊職業中學宋樹萱君;段解欠完善,宋解不合,均不錄。)

33·4　有四位數,以 11 除之餘 1,以 13 除之餘 3,以 17 除之餘 7,求此數。

解 1.(湖南沅江鄉村師範晏桂芳)

依題意,以 11 除之餘 1,即爲以 11 除之不足 10 之數;以 13 除之餘 3,即爲以 13 除之不足 10 之數;以 17 除之餘 7,即爲以 17 除之不足 10 之數。由是得知此數爲 11, 13, 17 三數之公倍數減 10,即

$$11 \cdot 13 \cdot 17N - 10 = 2431N - 10.$$

今祇要其爲四位數,故 $N = 1, 2, 3, 4$ 均可,而 2421, 4852, 7283, 9714 皆爲所求。

(以同法解者尚有興化征大中君,太原進山中學李世義君,太原平民中學胡叢桂君,棗莊職業中學宋樹萱君。)

解 2.(太原平民中學胡叢桂)

11 與 13 之最小公倍數爲 143,而 143 之倍數中,以 17 除之餘 7 之最小數即爲 143。又 13 與 17 之最小公倍數爲 221,而 221 之倍數中,以 11 除之餘 1 之最小數即爲 221。再 17 與 11 之最小公倍數爲 187,而 187 之倍數中,以 13 除之餘 3 之最小數爲 2057。 故 $143 + 221 + 2057 = 2421$ 爲以 11, 13, 17 除之各餘 1, 3, 7 之最小數,亦即所求之一數。又 $11 \times 13 \times 17 = 2431$,故四位數之合題者,尚有 4852, 7283, 9714 三數。

解 3.(長沙第一職業學校段桂棠)

13, 17 之公倍數以 11 除之餘 1 者,爲 221。 11, 17 之公倍數以 13 除之餘 1 者,

爲1496。11，13之公倍數以17除之餘1者，爲715。故$221\times1+1496\times3+715\times7=9714$爲所求之一數。

但11，13，17之最小公倍數爲2431，故$9714\div2431=3$，餘2421，爲所求數之最小者。此外4852，7283，9714，均合所求。

解4.（寧波寧波中學黃正乾）

今以11，13，17除此四位數，所得之整數商各設爲x, y, z,四位數爲N,則

$$11x+1=13y+3=17z+7=N.$$

故得方程式　$11x-13y=2\cdots\cdots(1)$　　　$13y-17z=4\cdots\cdots(2)$

由(1)　$x=y+\frac{2y+2}{11}$，$\therefore\ \frac{2y+2}{11}$爲正整數；卽$\frac{12y+12}{11}=y+1+\frac{y+1}{11}$亦爲正整數。由是$\frac{y+1}{11}$必爲正整數，命之爲$p$,則

$$y=11p-1\cdots\cdots(3)\qquad\therefore\ x=13p-1\cdots\cdots(4)$$

次以y之值代入(2)式，得

$z=\frac{143p-17}{17}=8p-1+\frac{7p}{17}$，$\therefore\ \frac{7p}{17}$爲正整數；卽$\frac{35p}{17}=2p+\frac{p}{17}$亦爲正整數，故$p$必爲17之倍數。命$p=17t$,則見

$$x=221t-1,\quad y=187t-1,\quad z=143t-1;\ N=2431t-10.$$

命$t=1$，2，3，4得合題之四解爲2421，4852，7283，9714。

（以同法解者尙有長沙第一職業段桂棠君，蘇州東吳大學何汝鑫君，不另錄。）

33•5　求於已知圓內作內接三角形ABC，使A角等於已知角，且AB，AC切於二已知圓。

尙未收到解答。

提出之問題

37•1　已知定圓周上一定點至圓內接三角形之垂心及重心之距離，及h_a與自圓心至a邊距離之差，求作此三角形（與化徵大中提）。

37·2　已知三角形一角之等分線，及過此角點之高及中線，求作此三角形（開封王之岐提）。

37·3　設有一半徑爲 a 之定圓，與一垂直於此圓之定平面．若有一動圓，半徑亦爲 a，其中心在定圓周上運行，其平面與定平面平行，求運行一周後所成之體積（蘇州東吳大學何汝鑫提）．

37·4　某甲有四子，并畜一猴。某日購栗子一袋，不知多少，但知其個數爲 4 之倍數加 1。甲出門後，其長子將一栗給猴，而取其餘之四分之一。次子，三子，四子亦依次效乃兄所爲。甲返後計算栗子之數，仍爲 4 之倍數加 1。問最初至少有栗子若干（編者提）。

37·5　一組定點（$P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, P_n$）至一直線之距離，分別乘以定數 $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots, m_n$ 後，其代數和爲零時，此直線必過一定點（編者提）。

×　×　×　×　×　×

國立中央大學廿四年度入學試驗算學試題解答

1. 解下列各則(其不通或不可解者,請註明不通或不可解):

(1) 試述對數之定義。

答。若 $x=a^y$,則 y 謂為 x 之 a 底對數,以 $y=\log_a x$ 表之。

(2) 試述平行線之定義。

答。同平面二直線,無論如何延長均不相交,則此二直線謂之平行。

(3) 試述指數之定律。

答。指數定律有四:

(i) $a^m\times a^n=a^{m+n}$;　　(ii) $a^m\div a^n=a^{m-n}$;

(iii) $(ab)^m=a^m\cdot b^m$;　　(iv) $(a^m)^n=a^{mn}$。

(4) 試述排列及組合之定義。

答。從 n 個不同之物中,任取 r 個依種種次序擺列之,謂之排列。從 n 個不同之物中,任取 r 個為一組,組中各物排列之次序不論,但各組之間,至少須有一個不同之物,此種取法,謂之組合。

(5) 試述正多邊形之定義。

答。多邊形之各角相等各邊相等者,謂之正多邊形。

(6) $\log 0=$　　答。不通。

$\log\frac{1}{100}=$　　答。$-\log 100$,如係 10 底,則其值為 -2。

(7) 解方程式 $\sin x\cos x=1$。

答。不可解。因 $\sin x$, $\cos x$ 之值均不大於 1,又不能同時皆等於 1 也。

(8)　三角形任二邊之和………於第三邊。　答。"大"。

六邊形任四邊之和………於其他二邊之和。　答。"無關"。

(9)　球之面積＝　答。$4\pi r^2$，r 爲球半徑.

球之體積＝　答。$\frac{4}{3}\pi r^3$。

(10) 圓周率 π ＝圓周之長：直徑之長＝3·1416 弱.

2。 求 $(x+y+z)(yz+zx+xy)-xyz$ 之因子。

解。 題式當 $y=-z$ 時爲 0，故 $y+z$ 爲一因子。 因原式爲 x, y, z 之對稱式，故知 $z+x$, $x+y$ 皆爲其因子。

$$\therefore\quad (x+y+z)(yz+zx+xy)-xyz=k(y+z)(z+x)(x+y).$$

兩端皆爲三次式，k 必爲常數。 比較 x^2y 之係數，知 $k=1$，故所求因子爲 $(y+z)(z+x)(x+y)$。

3。 解方程式

$$\begin{cases} x+y=1\,, \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^5+y^5=31. \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解。 由(1)有 $y=1-x$，代入(2)式而化簡之，即得

$$x^4-2x^3+2x^2-x-6=0.$$

分括之，
$$(x+1)(x-2)(x^2-x+3)=0.$$

$$\therefore\quad x=-1,\quad 2,\quad \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-11}),\quad \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-11});$$

而
$$y=\ 2,\quad -1,\quad \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-11}),\quad \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-11}).$$

(1)式爲一次，(2)式爲五次，論理應有五組解答，除上四組外，尙應有 x, y 均取無窮大値之一組，但計算上顯不出耳。 讀者應就解析幾何尋繹斯義。

4。 試述二項式定理，並證明之.

答。 二項式定理即

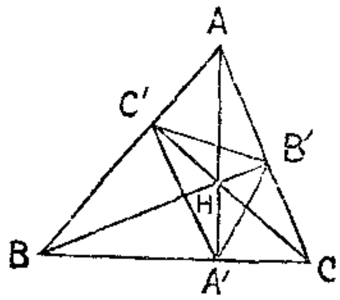
$$(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^{n-r}y^r+\cdots+y^n,$$

證明太繁，具見諸書，茲不贅。

5. 三角形ABC之三垂線爲AA'，BB'，CC'，內切圓半徑爲r，試證

(a) 三角形$AB'C'$，$A'BC'$，$AB'C'$爲相似三角形；

(b) $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{AA'}+\dfrac{1}{BB'}+\dfrac{1}{CC'}$。



解。(a) 設H爲垂心，則$AB'HC'$，$A'BC'H$皆爲圓內接四邊形。因之

$\angle AB'C'=\angle AHC'=\angle A'HC'$之補角$=\angle B$，

故$\triangle AB'C'$與$\triangle ABC$相似。同理$\triangle A'BC'$，$\triangle AB'C'$亦與$\triangle ABC$相似，故彼此亦然。

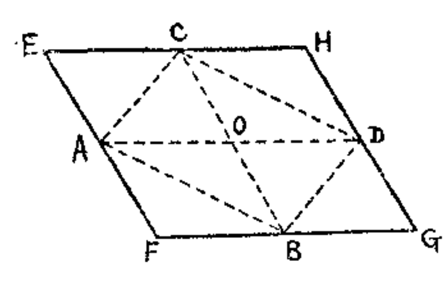
(b) 設$\triangle ABC$之三邊爲a, b, c，則其面積之二倍爲$r(a+b+c)$，又爲$a\cdot AA'$，$b\cdot BB'$，$c\cdot CC'$，故

$$a\cdot AA'=b\cdot BB'=c\cdot CC'=r(a+b+c)$$

$$\therefore\quad a=\frac{r(a+b+c)}{AA'},\quad b=\frac{r(a+b+c)}{BB'},\quad c=\frac{r(a+b+c)}{CC'}$$

三式相加後，兩端以$r(a+b+c)$除之，卽得所求證之式。

6. 已知平行四邊形三邊之中點，求作此平行四邊形。



解。設A，B，C爲所設三點，求作一平行四邊形，使A，B，C爲其三邊之中點。

作法。完成ABDC平行四邊形如圖。過A，D作線平行於BC，過B，C作線平行於AD，此四線所成之平行四邊形EFGH，卽爲所求。

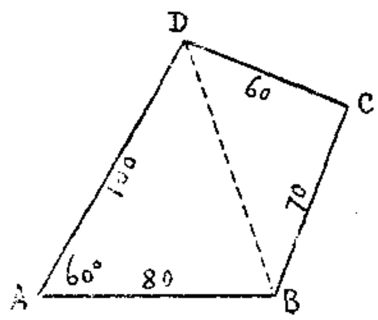
證。因AD，BC爲平行四邊形之對角線，必互爲二等分。由作圖，知

$$FA : AE=BO : OC=1,$$

故A為EF之中點。同理B,C,D各為其他三邊之中點,故EFGH為所求作之平行四邊形。

討論。完成ABCD平行四邊形時,D點有三種不同之位置,因之本題有三種解法,但作圖法皆同。

7. 已知四邊形ABCD之A角為60^0,其四邊之長為AB=80尺,BC=70尺,CD=60尺,DA=100尺,求此四邊形之面積。



解。聯結BD,則

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos 60^0$$

$$=6400+10000-8000=8400$$

而$BD=20\sqrt{21}$尺。所求面積,可分兩部分計算。

$\triangle ABD$之面積$=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin 60^0=2000\sqrt{3}$方尺。

$\triangle CBD$之面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$=\sqrt{(65+10\sqrt{21})(10\sqrt{21}-5)(10\sqrt{21}+5)(65-10\sqrt{21})}$$

$$=\sqrt{2125\times 2075}=25\sqrt{7055}\text{ 方尺。}$$

於是所求面積為$2000\sqrt{3}+25\sqrt{7055}=4844$方尺。

8. 試解$\sin^{-1}x+2\cos^{-1}x=2\pi/3$.

解. 設$\sin^{-1}x=\alpha$,則$\cos^{-1}x=\pi/2-\alpha$,代入題式,即得$\alpha=\frac{\pi}{3}$.

$$\therefore\quad x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

中等算學參考書目

愼 其

次列各書，皆爲中等算學之參考書籍，就作者見聞所及，拉雜書出，不敢謂爲完備。中學教科書，概未列入，唯高等算學教本，可爲中學教師參考者，略錄一二。有 * 號者爲原文書，有△者今已絕版，合併聲明。

一• 總類

余介石:	算學通論	中華
胡樹楷:	數學公式	中華
倪德基:	數學辭典	中華
趙繚:	數學辭典△	羣益
朱言鈞:	數理叢談	商務
徐韞知譯:	算學通論	商務
余介石 孫克定:	算學學習法	中華
錢寶琮:	中國算學史上册	中央研究院
李儼:	中國算學小史	商務
Cajori, F. :	初等算學史(曹丹文譯)	商務
三上義夫:	中國算學之特色(林科棠譯)	商務
小倉金之助:	算學教育根本問題(顧鎬譯)	商務
Schultze, A. :	中等算學教學法(蘇笠夫譯)	商務
Young, W. W. :	算學教授法*	武漢大學西書流通社
鄭太朴譯:	幾何及代數之基本	商務
余介石:	四位算學用表	中華
余介石:	五位算學用表	中華

Chambers, C. :	算學用表*	北平師大附中算學叢刻社
Young, W. W. :	近代算學論文集*	北平師大附中算學叢刻社

按此書已由鄭太朴君譯爲中文，分數册刊行；凡商務萬有小文庫算學小叢書中鄭君所譯各小册皆是。

二• 算術

Weber and Wellstein :	數學全書第一册——算術(鄭太朴譯)	商務
林鶴一:	整數及小數(鄭心南譯)	商務
林鶴一:	整數之性質(崔朝慶譯)	商務
朱鏡涵:	算術分類習題	南京
王爲俊:	算術指導	世界
劉開達:	算術解法指導	南京
許立記:	算術應用問題解法	中華
徐玉祖:	簡便算法	商務
長澤龜之助:	算術辭典(薛德炯吳戴耀譯)	新亞
薛德炯:	算術演習指導	新亞
川島準彥:	算術易誤問題及重要問題*	日本文陽堂
吳在淵:	數論初步	商務

三• 代數

何魯:	二次方程式詳論	商務
何魯,段子燮:	行列式詳論	商務
何魯,段子燮:	虛數詳論	商務
藤澤博士:	續初等代數(黃際遇譯)△	商務寄售
林鶴一:	一次方程式(崔朝慶譯)	商務
林鶴一:	因數分解(黃元吉譯)	商務
山根次郎:	對數及利息算(崔朝慶譯)	商務

汪靜齋等:	代數分類問題	南京
長澤龜之助:	代數辭典(薛德炯吳載耀譯)	新亞
薛德炯:	代數演習指導	新亞
伊藤政治:	代數問題解法根本研究*	日本辭書社
王為恆:	代數指導	世界
Weber and Wellstein :	數學全書第二册——代數(鄭太朴譯)	商務
陳世仁:	算尺原理及用法	商務
Smith 等:	代數習題及測驗(徐守楨譯)	商務
鄭太朴譯:	初等代數解析學	商務
鄭太朴譯:	代數方程及函數概念	商務
上野清:	大代數學講義(王家菼譯)	商務
林鶴一:	級數概論(歐陽祖綸譯)	商務
Wilczynski and Slaught :	威斯二氏大代數(蕭文燦譯)	商務
陳文譯:	初等方程式論	商務
Dickson, L. :	初等方程式論(黃新鐸譯)	商務
Cajori, F. :	方程式論(倪德基譯)	中華
Osgood, W,F. :	無窮級數*△	
Bocher, M. :	高等代數通論(余介石譯)	商務

四• 幾何

歐几里得:	幾何原本(徐光啓譯)	
余介石:	中等幾何研究法△	中算研究會
嚴濟慈:	幾何証題法	商務
柳原吉次:	幾何學軌跡及作圖(崔朝慶譯)	商務
Klein, F. :	幾何三大問題(余介石譯)	商務
Peterson, J. :	幾何作圖題解法及其原理(余介石譯)	中華

劉　宏　謨:	幾何學表解△	南京中學
長澤龜之助:	幾何辭典(薛德炯吳載耀譯)	新亞
長澤龜之助:	續幾何辭典(薛德炯吳載耀譯)	新亞
薛　德　炯:	幾何演習指導	新亞
黃　階　平:	幾何分類習題	南京
魯　生　達:	摺紙幾何學	商務
鄭心南譯:	直線及平面	商務
鄭心南譯:	面積	商務
王邦珍譯:	幾何極大極小問題	商務
王邦珍譯:	幾何定量問題	商務
齊世璜譯:	平行線論	商務
陳懷眞譯:	幾何作圖不能問題	商務
山島次郎:	幾何學根底*	
Askwith :	近世幾何學(方俊譯)	商務
Godfrey and Siddons :	近世幾何*	北平師大附中算學叢刻社
Artshiller—Court :	高等幾何*	北平師大附中算學叢刻社

五· 三　角

長澤龜之助:	三角辭典(薛德炯吳載耀譯)	新亞
薛　德　炯:	三角演習指導△	新亞
王　剛　森:	三角指導	世界
崔朝慶譯:	三角形之性質及其解法	商務
林　鶴　一:	二角和差之三角函數(駱師曾譯)	商務
林　鶴　一:	三角方程式(駱師曾譯)	商務
武田建清:	三角問題解法着眼點*	日本文陽堂

Hobson E.W.:	平面三角學(龔文凱譯)	商務寄售

按此書原文北平師大附中算學叢刻社已有翻印本。

六． 解析幾何

匡 文 濤:	解析幾何學講義	商務
何衍璿袁武烈:	解析幾何(大學叢書)	商務
陳 忠 杰:	平面曲線之示性方程	商務
Smith and Gale:	Elements of Snalytic Geometry*	Ginn
何 魯,段子烈:	初等代數倚數變跡	商務
Osgood and Graustein:	Plane and Solid Analytic Geometry*	Mcmillan

七． 雜 類

劉 薰 宇:	數學的園地	開明
陳 懷 書:	數學遊戲大觀	商務
汪 以 麟:	幻方	商務
徐 蘊 知 譯:	算學的故事	商務
Dudeney, H.E:	Amusements in Mathematics*	Thomas Nelson London

八． 雜 誌

School Science and Mathematics	美國出版
Mathematics Teacher	美國出版
中等算學月刊	本社出版

〔附註〕 胡濬蓀陳伯琴二先生另有"中等算學參考書目"一文，列舉雖不及本文之週詳，但對所舉各書，略有說明。 該文已載於本社出版之"初級高級中學校之算學設備問題"一書中。