紹興王自芸譯述
紹興壽孝天校訂
第二編

布利氏新式算學教科書

上海商務印書館出版

原序一

本書已爲二版，可繼續第一編。作中學第二年之算學課本。然著重者。爲平面幾何。

本書取算學各科中性質相近，而可互相發明者貫串之。俾中學算學敎科。漸收改良之效。

本書編纂。獨出心裁。其唯一之宗旨。爲仿照第一編之體例。融合各法。會通發揮。並按中學程度，將應授之事項，悉行編入。選材論理。務擇其要。卷首述讀書法。章末各有提要。所以示學生習課之道。而達溫故知新之的也。

本書並未删改原有之算學格式。然取各科之性質相類者，變而通之。以成完美之法式。至於融會立體幾何。引人注目。尤爲本書之特色。蓋此爲著是書之要旨。且合於近代之教育原理也。

本書第一編，自出版以來。深荷[illegible]讚許。凡用之者。皆收奇效。故本編之能合於應用。同獲良果。無待贅述。而其教育之力。定能超越同等程度之課本。或其他專授平面幾何之課本。是則稍具眼光者。皆所信服也。

一千九百十六年八月，米爾識於芝加高大學。

原序二

著者編是書時。所持之目的。略有數端:

1. 本編繼續第一編之體例將算學各科。會通教授。而著重於幾何學。

2. 本編對於演算各法。及他種算例。皆隨機溫習。以免遺忘。例如教定理時。或授代數新題時。及其他計算之問題中。皆含有溫習演算之性質。

3. 本編將第一年所授之代數,繼續而擴充之。凡第三年以前所應授之事項。冀於是編中盡授之。

本編常用代數記號法。及實用方程演幾何題法。以期明瞭而簡便。代數新題。則隨時增授。至元字之比較消去法及代換消去法。因常見於證題法中。或常用以解習題。故先行教授。用公式演二次方程法。演分數法。及劈因數法。皆爲第一編中所已授者。可作溫習之用。

4. 平面幾何。於本編中授畢。

第一編已授幾何學之基礎。本編所授者。其法較前編稍繁。然理論法優於量法。則已先是說明。

本編授解幾何題之秘訣。故述證題法多種。然何時宜用何法。是在學者之運機靈敏。判斷確當矣。其他普通證題法,想爲學生所已知者。不復贅述。

舊式分幾何作數本。此編則分作數章。每次僅受緊要。俾合中學程度。較諸舊式,費時少,進步多。誠一舉而兩得也。

5. 本編融會平面幾何與立體幾何而並授之。

許多立體幾何與平面幾何之定理,含有密切關係。本編特列出而詳證之。使學生可獲舉一反三之益,所授立體幾何。包含空間中之線與平面諸定理。

6. 本編繼續前編,授三角法。

中學學生。不早讀三角法。實爲教授算學之缺點。本編特先授之。於用幾何法與代數法時。以三角法代之。使學者知三角法之用,較幾何與代數尤爲簡便。

本編授三角法。除依上述之宗旨外。並授下列事項。(a)用三角函數(正弦,餘弦,正切)以解直三角形及其他實用題。(b)此諸函數間之許多基礎關係。

7. 本編無極限之論題。

此種論題。本非古時中學之所有。然以後不盡線與不盡數之問題。漸有發生。而極限之命意,遂始於是。

8. 本編按學生之心理,以實用引起其興趣。

幾何學最切實用。故學者易生嗜習之心。著者即本此旨。著重於幾何。以展發學生學算之興味。教授算學之法。莫善於是。

9. 本編依第一編之體例。凡引授定義。必於適當之時。無先後不均之弊。

定義既授以後。則繼續引用之。使學生知此定義之應用。

總言之。本書包羅廣闊。深合實用。能使學者得算學較廣

之基礎。而算術,幾何,代數,三角,融會教授。相提並挈。非特可免冗煩之溫習。且可節省學生之光陰。用意之美。取材之善。自非舊有之課本可比。

本編習題甚富。教員可選擇其要。令學生演之。凡定理或問題之前。作 ‡ 之記號者。可任意删削。或俟全書讀畢。始補授之。

凡第一年僅授代數者。亦可用此編爲第二年之課本。蓋第一編所授之公理及定理。皆依其次序。錄於卷首。以作第二年學算之預備也。

一千九百十六年九月,布利士力序。

學生讀書法

學生讀書之習慣。較之所習之學科。尤爲重要。今略舉讀書法如下。若執以爲繩準。則學者之腦。可成有力之機具。凡讀書。須以習課之時少。而所習之課精爲主。

1. 定一日讀書之課程。劃定讀算之時刻。如此。可得聚精神辦一事之習慣。

2. 毎習一課。須預備此課應用之物。如課本。劄記簿。尺規。要用之特別紙件等。寫字時。光須由左來。

3. 明曉所讀之課。並將教員授課時所提出之意義。隨時記之。記錄須確當。幷示可供參考之書。凡習課之始。須先提出課中之要目。

4. 常用課本。能助學者引用別書。於當明了書中各標目及各註脚之用意。幷常引用之。

5. 習課不得失時。坐下卽讀。聚精會神。不爲外緣所動。務令專心一致。

6. 凡讀書。當從速讀過一遍。然後再精細覆閱。譬如解題。必先詳讀問題。使知何者爲已知項。何者爲欲求證之未知項。方行著手解題。

7. 讀書貴獨習。故凡解題。不應求助於人。當習用本有之判斷力。因個人獨習。方爲誠實之溫習。

8. 所學之課。當施諸實用。展發之於日常之事。幷以素所熟習之理解釋之。

9.　凡讀一書。須設法以引起其興味。故當搜覓同類之書。以爲參考。并以校課告父兄。又將有興味之課。與之共同討論。

10.　凡舊課。當時常溫習。蓋課中苟有未明之處。可藉溫習補救之。

11.　每日須預備各課。因依時應所需之習慣。爲極端緊要也。

以上各節。乃由美國芝加高大學附設中學所用之學生讀書法引錄。凡學生欲知應學之課。教員欲學生能實用所學。則上列各節。殊爲有用。

目　次

第六章 等比例,劈因數,變數

第七章 相似多邊形

第八章 三角形各邊之關係,二次方程,根數

第九章 三角比,根數,含兩元之方程

第十章 圓形

第十一章 用弧量角法

第十二章 圓內之等比例線段……194

附　　錄

名人像傳

Felix Klein

喀　萊

(I 面之前)

喀　萊　小　傳 (Felix Klein)

喀萊德國之著名數學家也。1849年生於都西爾德(Dusseldorf)。1912年退隱現尚生存於世幼時嘗肄業於德國龐衛(Bonn)。年十七。在該處物理學院。爲物理學家樸魯客(Plücker)之助理。十八歲得博士銜。遂赴柏林(Berlin)。後至哥敦堅(Gottingen)。助樸魯客從事編輯。

喀萊於1871年入哥敦堅大學會明年。在愛爾蘭根(Er)-langen)爲數學教授。其後又教數學於勒不士格。(Leipzig(1880至1886年)與哥敦堅(1886至1912年)兩大學。1893年。應普魯士政府之命。赴芝加高(Chicago)全球勸工場。爲普魯士之大學校代表。1908年。萬國數學教授研究會在意大利羅馬開會喀萊曾被舉爲會長。

喀氏之學徒。散播於美國著名各大學。德人之在美國數學界。佔偕大勢力者。惟喀氏一人。以其研究既深。而誨人不倦也。

喀萊於數學發明頗多不勝枚舉。而教授數學。尤饒經驗。非特善教大學。卽中小學學生亦能循循善誘。故稱之爲今世改良數學教法之巨擘不得謂過也。

哥侖比亞大學附屬師範科之教授斯密司。(Smith)嘗評喀萊曰。：此人除擅長於數學外。有觀察他種優點之能力。今畧舉數端如下。：(1)主張心理研究。(2)主張愼重選題。(3)主張數學與實用之關連。(4)贊許平面幾何與立體幾何之會合。(5)贊許代數與幾何之會合。

或謂喀氏之改革數學教法。其宗旨在使學者能按序解題。有條不紊。若此論者。可謂深知喀萊矣。

布 利 氏
新式算學教科書
第 二 編

第 一 章
已授之假設,定理,求作法
告 學 生

讀本書第一編之學生。當已知許多幾何學實例。本編將更用之以設立他例。今將已授之假設及定理。詳列於下。以便參考。括弧中之號碼。示第一編初次授此假設或此定理之節目。

凡不用第一編者,可用此表爲綱目。依教員之指導。照括弧內所表示之次序。證解各節。然此項實例。本編作爲假設而論。

假 設

1. 經過兩點。祇可有一直線。(20)
2. 直線如有兩點在面內。則全線必在面內。(204)
3. 兩點間最短之線爲直線。(22)
4. 兩直線祇可相交於一點。(25)
5. 一線段或一角。等於其分之和。(33)

6. 一線段或一角。大於其分之任一分。(34)

7. 相等數同加一數。得數相等。(35)

8. 相等數加相等數。得數相等。(36)

9. 相等數同減一數。或同減相等數。較數必等。(41)

10. 等數加不等數。得數不等。兩得數大小之序。以兩不等數而定。(42)

11. 不等數加同序之不等數。得數不等如前序。(43)

12. 等數減不等數。得數不等。其序與前不等數相反。(44)

13. 等數除等數。(除數 0 不在內)商數必等。(78)

14. 相等數同乘一數。或乘相等數。積數相等。(80)

角

15. 凡直角皆相等。(118)

16. 等圓心角。在同圓內或等圓內所割之弧必等。弦亦等。(124)

17. 同圓或等圓內。等弧等弦必為等角所割。(125)

18. 凡圓心角。可以所割之弧量之。(126)

19. 兩角之兩邊。兩兩平行。則兩角相等。或互為補角。(197)

20. 若兩接角之和。等於一平角。則兩外邊必同在一直線內。(177)

21. 直線一旁。同以直角內一點為頂點之諸接角。其和等於一平角。即 180 度。(179)

22. 繞一點全空間諸接角之和。等於一周角。卽360度。(180)

23. 兩直線相交。其對頂角必等。(183)

三角形之角

24. 三角形三內角之和。等於兩直角。卽180度。(112)(198)

25. 於三角形各頂點。取一外角。其和必等於360度。(115)

26. 三角形之外角。等於兩內對角之和。(118)(199)

27. 若三角形之三角。各與別三角形之相當角等。則兩形相似。(233)

28. 等腰三角形之兩底角相等。(280)

29. 等邊三角形。亦爲等角三角形。(281)

30. 若三角形內有兩角相等。則此形爲等腰三角形。(281)

31. 直三角形之兩銳角。互爲餘角。(184)

32. 若直三角形之銳角。爲$30°$及$60°$。則$90°$角之對邊。爲$30°$角對邊之兩倍。(185)

33. 若三角形之兩邊不等。則所對之兩角亦不等。較大之角。與較大之邊相對。(281)

34. 若三角形之兩角不等。則所對之兩邊亦不等。較大之邊。與較大之角相對。(281)

垂線

35. 一點至一直線之垂線。爲此點距線之最短者。(285)

36. 於已知線內已知之一點。祇可作一垂線。(176)

由已知之一點。至已知之一線。祇可作一垂線。

37. 直線之中點垂線內各點。與直線兩端之距必等。(281)

38. 若線外一點。距線之兩端等遠。則此點必在線之中點垂線內。(283)

39. 若線內有兩點。各與別線內兩點相距等遠。則此兩線。必互爲垂線。(283)

平行線

40. 平行線。任何點。相距皆等遠。(192)

41. 於線外一點。祇可作一直線與其線平行。(194)

42. 一線割兩線。若同位角等。則兩線平行。(195)

43. 若兩線同爲一線之垂線。則兩線平行。(195)

44. 兩直線爲一直線所割。若兩內錯角等。則兩直線平行。(195)

45. 兩直線爲一直線所割。若割線同旁之兩內角互爲補角。則兩直線平行。(195)

46. 若兩線各與一線平行。則兩線必互相平行。(195)

47. 若兩平行線爲一直線所割。則其同位角必等。其內錯角亦等。割線同旁之兩內角。必互爲補角。(196)

線段之等比例

48. 任作一線,與三角形之一邊平行。割其餘兩邊。則所割相當之段。比例相等。(244)

49. 平分三角形一角之線。割對邊爲兩段。此兩段之比例,與三角形餘兩邊之比例等。(245)

50. 若三角形之兩邊,依同一之比例截分。則聯兩分點之線,必與第三邊平行。(246)

面積與體積

51. 正方形之面積,等於邊之方。(140)

52. 長方形之面積。等於底乘高。(141)

53. 長立方形之體積。等於長乘寬乘高。(145)

54. 立方形之體積。等於邊之立方。(146)

55. 平行四邊形之面積。等於高乘底。(163)

56. 三角形之面積。等於高乘底之半。(164)

57. 兩邊平行四邊形(即梯形)之面積,等於高乘兩底和之半。(166)

面積之等比例

58. 等比例之中項相乘。等於外項相乘。(259)

59. 兩長方形之面積相比。如其長寬相乘之比。(260)

60. 若兩長方形之底等。則兩形相比。如其高相比。(261)

61. 若兩長方形之高等。則兩形相比。如其底相比。(262)

62. 兩平行四邊形之面積相比。如其高與底相乘之比(263)

63. 兩三角形之面積相比。如其高與底相乘之比(264)

64. 若兩平行四邊形之底等。則兩形相比。如其高相比。(265)

65. 若兩三角形之底等。則兩形相比。如其高相比。(266)

相合三角形

66. 兩三角形。若此形之兩邊及其夾角。等於彼形之兩邊及其夾角。則兩形相合。(邊,角,邊,)(274)

67. 兩三角形。若此形之兩角及中間之邊。等於彼形之兩角及中間之邊。則兩形相合。(角,邊,角,)(275)

68. 兩三角形。若此形之三邊。各等於彼形之三相當邊。則兩形相合。(邊,邊,邊,)(283)

69. 兩直三角形。若此形之弦與一邊。各等於彼形之弦與一邊。則兩形相合。(285)

相似三角形

70. 兩三角形。若其相當邊之比例等。則兩形相似。(236)

軌跡

71. 線之中點垂線。乃距線兩端相等各點所經之路。凡此種爲各點所經之路。名曰軌跡。(284)

72. 角之平分線。爲角內距兩邊等遠各點之軌跡。(304)

切　　線

73. 交切點之半徑。必與切線互爲垂線。(308)

74. 一直線。在半徑之外端。與半徑爲垂線。此線必爲圓之切線。(309)

派達哥拉士氏定理

75. 凡直三角形。句方股方之和。等於弦方。(402)

第二章

證題法

論理學

76. **理論** 本書第一編中。已將代數與幾何許多有用之法例。以量法尋得及證實之。或以理論法證明之。

吾人處世。幾無日不用理論法推斷事理。例如金屬爲導熱最速之品。鉛爲金屬。於是推斷鉛爲導熱最速之品。或信鐵爲金屬中最有用而價最賤之物。因之遂推斷凡最有用之金屬。亦必爲價格最賤之金屬

凡無論何種學識。皆有可引人起推想觀念之性質。論理學者。專論此種性質之科學也。蓋人苟不知理論之正當法。即難免錯誤。惟論理學能指出此種錯誤之點。例如法人皆爲歐產。然歐人未必盡爲法產。其理由可用論理學解之。

理論之錯誤 希臘古儒。因理論之錯誤。嘗謂物能自動。爲必無之理。其說曰。物旣能自動。其轉移之方向。必不出二端。一爲本在之地位。一爲非本在之地位。然人未嘗見物能自至其非本在之地位。且物旣動。必不能永居其本在之地位。故物必不能自動。

學生中或有知以下例題之不確者:

無犬有九尾

一犬較無犬多一尾,

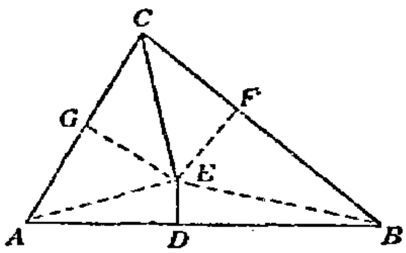
故一犬有十尾。

如此,可知正當之理論法,為用甚廣,蓋藉此法,苟遇不正之議論,即可指出其弱點,而改正之。

幾何學之虛相

77. 用理論解幾何及代數題,有一定之法例。由以下兩題觀之,知解幾何題,須十分留意。

1. 定理: 凡三角形皆為等腰三角形。



第一圖

已知三角形 ABC, 如第一圖。

證 ABC 為等腰三角形。

證: 設 DE 為 AB 之中點垂線,又 CE 為 C 角之平分線,而遇 DE 於 E。

由 E 作 EA 線,及 EB 線,

作 EG 為 AC 之垂線,又 EF 為 CB 之垂線,

於是 $\triangle ADE \cong \triangle BDE$(§69).

故 $AE=BE$.(因相合三角形之相當邊相等).

$\triangle CEG \cong \triangle CEF$(§67).

故 $EG=EF$ 又 $CG=CF$. 何故?

故 $\triangle AEG \cong \triangle BEF$.(弦與一邊) (§69)

故 $GA=FB$.

因　　$CG=CF.$

所以　$CG+CA=CF+FB.$

或　　$CA=CB.$

故 ABC 雖非等腰三角形。似可證之爲等腰三角形。

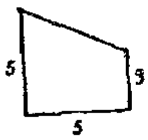
作三角形如第一圖。試求證中之誤點。

2.用幾何法證 $64=65$.

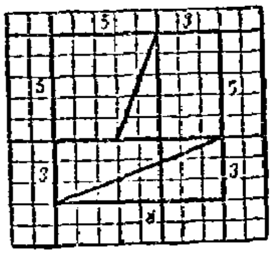
作兩直三角形，令夾直角之兩邊一等於3,

一等於 8.(第二圖)。

第二圖



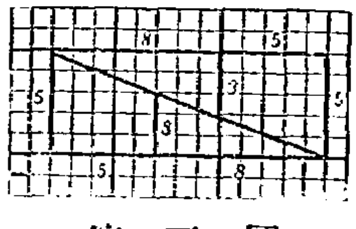
第三圖



第四圖

作兩四邊形。(第三圖) 令兩對邊平行。此兩對邊。一等於 3。一等於 5。置三角形及四邊形如第四圖。即得一正方形。其面積等於 $8\times8=64$。

若置三角形及四邊形如第五圖。則得一長方形。其面積等於 $13\times5=65$。$\therefore 64=65$。作前圖。試求誤點。



第五圖

證題之要

78. 證題之要.　77節中兩題之錯誤。皆由以大約相似者。視爲確實相似而來。蓋凡事物之似實者。不可即信

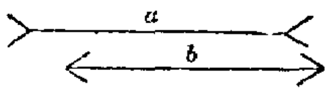
以爲實。而據爲定理也。若一物之外觀如此。卽信以爲如此。且從而推論之。以至於錯誤。是謂"直覺"。

下列各題證幾何學中不可信賴直覺。

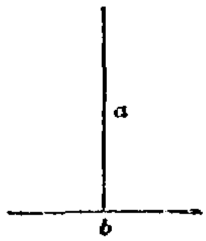
習　題

1. 比較第六圖中 a 線及 b 線之長度。先估計。後用界尺量之。

2. 如第一題,比較第七圖中 a 線及 b 線之長度。後用界尺量之。更正前數。

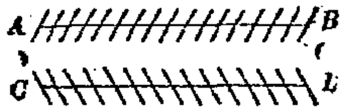


第六圖



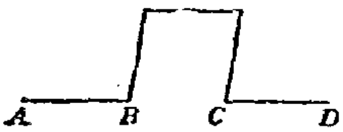
第七圖

3. 第八圖之 AB 及 CD 兩線是否平行?先口答。後用界尺量兩線之距離以驗之。

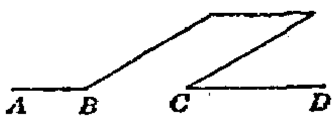


第八圖

4. 第九圖與第十圖之 AB 及 CD 兩線。是否同在一直線內? 用界尺驗之。



第九圖



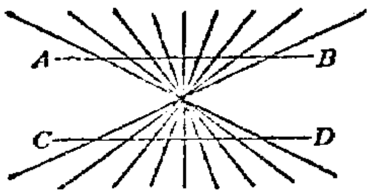
第十圖

5. 第十一圖之諸線。是否皆爲直線? 用界尺驗之。

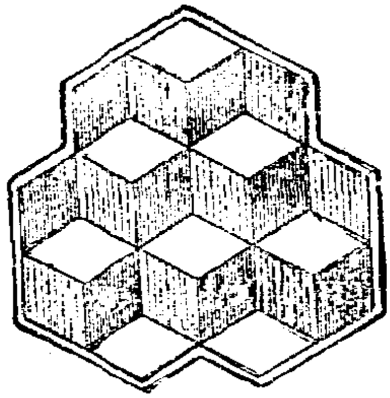
6. 數第十二圖之方塊。再閱之。當多得一塊,或少一塊,

證題法

79. 證題法. 證題無一定之法。惟普通證題法。學



第十一圖


第十二圖

者皆當知之。以免一遇難題。茫無把握。徒耗光陰與精力也。此種普通證題法。本章僅述數則。其餘當於第四章中補論之。

80. 普通方法. 假設. 終結.

1. 先詳讀問題。以明題意。證題時。勿忘題意。多數問題,至少須讀兩遍。

2. 若問題爲幾何題。則當作一普通圖形。例如題之所指爲三角形。則作一不等邊三角形。勿作等邊三角形。或等腰三角形。及直三角形。以免錯誤。蓋證等邊三角形之定理。不能用以證等腰三角形。或直三角形也。

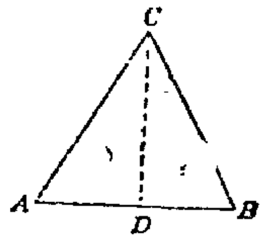
3. 將已知者(假設),及須證者(終結),寫於紙上。所陳述者。皆當指所作之圖而言。

4. 設遇難題。一時不能得正當之證。則當從別題上着想。即求定理之與此題相似者。

如此。若證兩角相等。則自問據何情狀。兩角方能相等。若證兩線平行。則問兩線何時平行。然後選一最相當之定理。

以證所需。故已知之定理，及已解之問題，皆常時常溫習，以備應用。然溫習舊題，必先勉强，而後方成習慣。舊題既熟，則一遇新題，卽知引證矣。

5. 幾何題之終結，有時須於已知圖形上，加作數線，方可得之。例如第十三圖，若$AC=CB$，則作C角之平分線，又證$\triangle ADC\cong\triangle BDC$，方可證$\angle A=\angle B$。


第十三圖

81. 疊合證題法.
此法於§§66, 67中證相合三角形時常用之。其法卽將此形放於彼形之上以指兩形密合。

此法證理簡括，尙合實用，然數學家以爲非妥善之法。因證此法之定理，常不詳細，致學者用此法時，常患無條理之病。

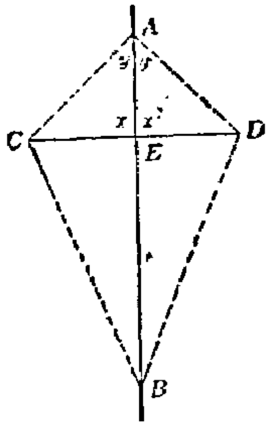
82. 用相合三角形證題法.
凡證兩邊相等，或兩角相等，有時祇須指此兩邊或兩角，爲兩相合三角形之相當部，卽可證明所需。然欲證兩相合三角形，必先於已知形上，加作助線，使欲證之兩等邊，或等角，皆爲兩相合三角形之相當部，觀下節之題，卽知此法之用意。

83. **定理：** 若已知直線上有兩點，各距兩已知點等，則已知直線必爲兩已知點聯線之中點垂線。

已知直線AB(第十四圖)及C及D兩點。

設$AC=AD$, $CB=BD$。

證 $x=x'$, $CE=ED$.



豫先商論: 若$\triangle CAE\cong\triangle DAE$,則$x=x'$,

但所知者爲$AE=AE$, $CA=AD$,

又$\angle ACB=\angle ADE$,(§28)故無須再求他部,即知$\triangle CAE\cong\triangle DAE$.

故必先證$\triangle ACB\cong\triangle ADB$,方得$y=y'$.

第十四圖

證:	理由:
$AC=AD$, $CB=BD$.	設想.
$AB\equiv AB$.	$\triangle ACB$, ADB之公共邊.
故$\triangle ACB\cong\triangle ADB$	邊.邊.邊.(68).
故$y=y'$.	相合三角形之相當部相等.
$AE\equiv AE$	公共邊.
$AC=AD$	假設
故$\triangle ACE\cong\triangle ADE$	邊.角.邊.(67)
故$x=x'$	相合三角形之相當部相等.

84. "故"與"因"之記號. ∴卽爲故,而∵卽爲因。

85. 定理之習慣處置法. 證定理之格式。可分三大部。卽假設,終結,及證論是也. 證論之下。須將理由註明。所謂理由者。不出下列四項: (1)定義。(2)假設。(3)公理。(4)已證之定理。※ 證題末句。須與"終結"之句語同。†

86. 溫習. 常溫舊題。獲益良多。溫題之法。但將圖形及證理之大綱.記憶可也,如此。則每日僅費數分鐘之溫習。

而較諸全章讀畢時。或臨考試時。始行補溫。可事半功倍。

*希波克萊士(Hippocrates)(生於紀元前470年)創用引定理以證定理之法。

證定理之法。爲希臘人所發明。埃及人始創幾何學。然祇求合於日用。不求進步。但知定理之眞確而已。以後。希臘人將此項實例。用科學名詞名之。用證理註之。又因幾何學中。不能全用證理。故設假定理以代之。

凡數學,不用證理,而人皆信其理之眞確者。近世數學家名之曰公理。歐几利得,(Euclid)(生於紀元前300年)名之曰公意。例如"等數加等數。其和必等。"此爲公理。因無論算學,代數,或幾何中。其理皆同也。

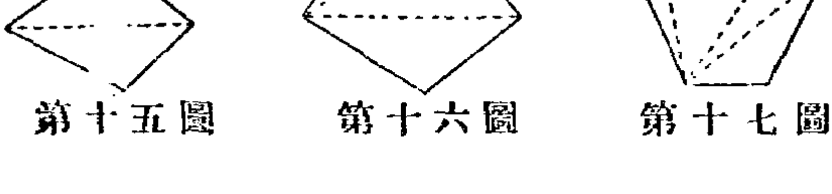
近世數學。凡公理之特別屬於幾何者。稱爲"假定公理"。例如"兩點定一直線。"是爲假定公理。別書著作家。有仍以公理二字,表示假定公理者。

因有不能詳證之命題。故有不能解釋之名詞。如點,線,等類是也。派司區(Pasch)(生於1881年)嘗承認幾何學中不能全用證理之說。

87. 推論法. 數學實例。有時可用推論法求得之。其法即推想他項實例多種。俾知無論何種實例中。皆含一普通之法例。下列之題,指此法之意。

問題: 三角形三內角之和爲180°。問四邊形,五邊形,及各種多邊形,諸內角之和爲幾度?

求多邊形諸內角之和。須先作對角線。介多邊形成諸三角形。



第十五圖 第十六圖 第十七圖

例如四邊形,可分作兩三角形。(第十五圖) 五邊形可分作三三角形。(第十六圖)六邊形可分作四三角形。(第十七圖)餘推類。

下列之表。詳載各種多邊形諸內角之和。

多邊形內三角形之數目。與邊之數目。作何比較?

諸內角之和。與邊之數目。作何比較?

n 邊形諸內角之和為幾度?

試填相當之數目於表內空格。

多邊形之邊數	3	4	5	6	7	10	15	n
三角形之數目	1	2	3	4	5			
諸內角之和	180°	$2\times180°$	$3\times180°$	$4\times180°$	$5\times180°$			

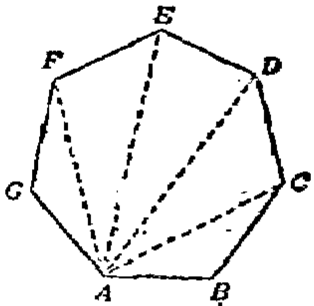
可知推論法。但示數學之實例。未嘗證其理由。已知 n 邊形諸內角之和為 $(n-2)180°$。今當證其是否眞確。證理列后。

88. 定理: n 邊形諸內角之和為 $(n-2)180°$。或 $(n-2)$ 平角。

已知多邊形 $ABCD$…… 共有 n 邊 (第十八圖)。

證此形諸內角之和為 S; $S=(n-2)180°$。

證: 從 A, 作對角線至別角頂。遂分原形作 $(n-2)$ 三角形。何故?



第十八圖

形內諸三角形諸內角之和爲$(n-2)180°$。何故？

然形內諸三角形諸內角之和。等於原形諸內角之和。何故？

故 n 邊形諸內角之和爲$(n-2)180°$。

習　　題

1. 用$S=(n-2)180°$之公式,求六邊形,八邊形,及$2n$邊形諸內角之和。

2. 一多邊形諸內角之和爲$1800°$.試求其邊數。

89. 定理： 設於多邊形之每角頂。各作一外角。則諸外角之和必爲$360°$.即2平角。

已知 n 邊形 $ABCD\cdots\cdots$(第十九圖)其外角爲 $a, b, c, d,\cdots$ 等。

證 $a+b+c+d+\cdots\cdots=360$。即2平角。

豫先商論：

外角與其內接角有何關係？

外角與內角之和如何求法？

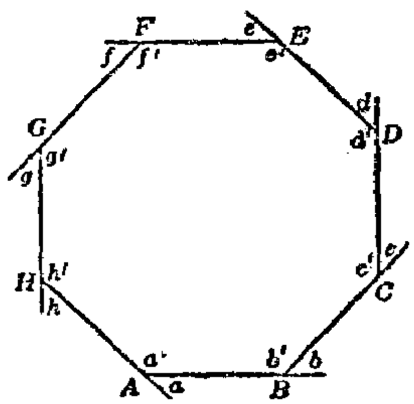
設已知內角之和爲$(n-2)180°$。

如何可求外角之和？

證：　$a+a'=180°$　何故？

$b+b'=180°$　何故？

$c+c'=180°$　何故？



第十九圖

…………等

$\therefore a+b+c\cdots\cdots a'+b'+c'\cdots\cdots=n\cdot 180^\circ=(180n)^\circ$. 何故?

$\because \qquad a'+b'+c'\cdots\cdots=(n-2)180^\circ=(180n)^\circ-360^\circ$,何故?

$\therefore a+b+c\cdots\cdots \qquad =360^\circ$. 何故?

指明多邊形諸外角之和,與邊之多少,毫無關係。

習　　題

1. 證正多邊形之任一內角爲 $\frac{n-2}{n}180^\circ$.

2. 若四邊形有兩角互爲補角,則其餘兩角,亦互爲補角,試證之。

3. n 邊形諸角之和爲幾直角?

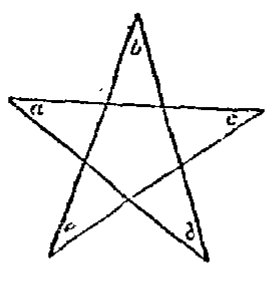
4. 有多邊形三,其諸角之和,一爲36直角,一爲18平角一爲720°,求各形之邊數。

5. 多邊形諸內角之和 S,必爲邊數之函數,試證之。

6. 五點星(第二十圖)諸角頂 a, b, c, d, e 之和爲幾度?

7. 一多邊形諸內角之和,爲諸外角之和之兩倍,問此形有邊若干?

8. 問四邊形,五邊形,及六邊形內,可各作對角線若干?



第二十圖

9. 從 n 邊形之一頂角,可作對角線 $(n-3)$. 試證之。

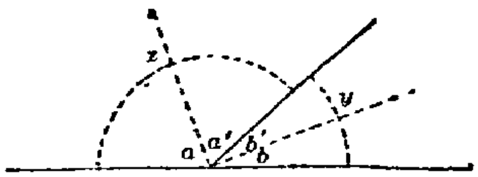
10. n 邊形內可作對角線 $\frac{n(n-3)}{2}$. 試證之。

11. 證多邊形對角線之數N。爲其邊數n之函數。

90. 代數法： 求一數目之值。或求多數之關係時。常用此法。

若兩數之關係。係用代數記號表示者，則欲求之數，可用元字消去法求得之，指明此法之題列下：

代數法例題



第二十一圖

證兩補接角之平分線互爲垂線。

已知第二十一圖之x與y爲接角，

又$x+y=180°$.

又$a=a'$; $b=b'$.

證$a'+b'=90°$.

證：$a+a'+b'+b=180°$.　　何故?

由是a, a', b及b'之間，已得一關係。

今欲求得者。爲a'及b'之值。故於方程$a+a'+b'+b=180°$中，當消去a與b兩字。

$a=a'$　　何故?

$b=b'$　　何故?

若以a'代a，又以b'代b，則a與b兩字即可消去。

由是　$a'+a'+b'+b'=180°$

加似項則$2a'+2b'=180°$

故 $a'+b'\ =90°$ 何故?

91. 前證中之 a 與 b 兩字爲用代換法所消去。其他元字消去法。當於下章詳言之。

習 題

證以下各題:

1. 若兩三角形中。有兩角彼此相等。則第三角亦必彼此相等。且兩形互爲等角三角形。

2. 平分直三角形兩銳角之兩線。互成一角。試求此角。

3. 等腰三角形之一底角爲頂角之 $\frac{1}{4}$。求諸角。

提 要

92. 本章指明論理學之價值。及理論證題法之必要。蓋藉此法。可免依賴直覺至於錯誤之弊。論理學則引人入正當之理想。並可偵查虛想。

93. 本章授下列各項之意義: 假設。終結。證理。

94. 本章所授之證題法爲: 疊合法, 相合三角形法。推論法。代數法。

95. 本章授解題法及證定理法數種。(§80)又詳論按時温題之要。(§86)其餘習課之道。皆詳載卷首學生讀書法。

96. 本章證下列各定理。

1. 多邊形諸內角之和爲$(n-2)$平角。

2. 多邊形諸外角之和為360°。

3. 若已知直線上有兩點,各距兩已知點等遠,則已知直線,必為兩已知點聯線之中點垂線。

第三章

消元法

97. 消元法. 用加減消去數目之法。本書第一編中已略言之。由§90觀之。知方程系中可用代換等數法,以消去數目。此法雖有多種。然所要者。為無論何種問題中皆可應用之法。今當略溫以前所授者。然後從而推究他法。

98. 加減消元法. 觀下列方程系之解法。即可知此法之大概。

例題

設　$9x-8y=1.$

又　$15x+12y=8.$

題為求 x 與 y.

將第一方程乘3,第二方程乘2,即得

$27x-24y=3.$

$30x+24y=16.$

二者相加,則 y 項消去,得

$57x=19.$

$\therefore x=\frac{1}{3}.$

以 $\frac{1}{3}$ 代 x 於方程 $9x-8y=1$

則得　$3-8y=1.$

$8y=2.$

$$y=\tfrac{1}{4}.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} x=\tfrac{1}{3} \\ \\ y=\tfrac{1}{4} \end{array}\right\}\text{此爲方程系之答數.}$$

用加減消去數目之法如下:

1. 用相當之數目乘一方程。或兼乘兩方程。使兩方程中。有一未知數之係數相同。

2. 加減係數相同之未知數以消去之,然用減用加。當視未知數前面之記號等與不等而定。

習題

用加減消元法解下列各題:

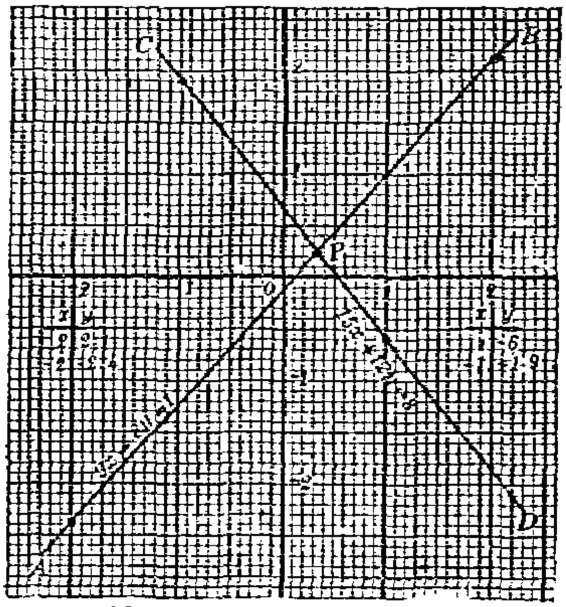
1. $\begin{cases} 27x-5y=26 \\ 18x+7y=131. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7m+5n=81 \\ 9m-2n=62. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2.7a+3.5b=2.4 \\ 2.7a-3.5b=.3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{7}{5} \\ \dfrac{3}{2}x+\dfrac{2}{3}y=3\dfrac{1}{5}. \end{cases}$

99. 用圖線解方程系法. 凡函兩變數(如 x 與 y)之一次方程皆可作直線圖代表之,作此項方程之圖線。須先求方程之解數兩三數。各作點。表於圖上。後用直線聯此諸點。



第二十二圖

一次方程系之解得數。在兩線之交點距 x 線與 y 線

之間。(x 線即橫線。y 線即縱線)。第二十二圖之 AB 線,代表 $9x-8y=1$; CD 線代表 $15x+12y=8$;兩線之交點 P,代表方程系之解得數 $x=\frac{1}{3}$,及 $y=\frac{1}{4}$。其意謂 P 與 y 線及 x 線之距離。即爲方程內 x 與 y 之數值。且可滿足 $9x-8y=1$,及 $15x+12y=8$ 之方程系。

習　　　　題

用圖線解以下各方程系:

1. $\begin{cases}3x-4y=14\\5x+2y=32.\end{cases}$　　‡3. $\begin{cases}x-2y+4=0\\x+y=5.\end{cases}$

2. $\begin{cases}9x+6y=51\\4x+3y=24.\end{cases}$　　‡4. $\begin{cases}3x-2y=9\\2x-3y=4.\end{cases}$

凡題前作 ‡ 之記號者。皆非必要之題。教員可隨意删去之。

100. 代換消元法　設有一未知數。可用他數代之.則用此法甚爲便利。

例如　$x-2y=7$,則 $x=7+2y$.　何故?

下題示此法之用意。

例　　　　題

用代換消元法解下方程系:

$$7w-2z=46\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$w+z=13\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解(2)之 z,　　$z=13-w$.

於(1),以 $13-w$ 代 z,

則　$7w-2(13-w)=46.$　此將 z 消去。

故　$w=8.$　何故?

又　$z=5.$　何故?

$\therefore$答數為$\begin{cases} w=8 \\ z=5. \end{cases}$

故用代換消元法解方程系,須先解一方程。以一未知數代他未知數,然後將所得之結果。再代換於第二方程中。解之卽得答數。*

習　題

用代換消元法解從下列各題所得之方程:

1. 等腰三角形之一底角 x,等於頂角 y 之兩倍。求諸角。

2. 兩數之較為14,其和為100,問兩數為何?

3. 一人將 \$3200 分存兩銀行。利息一為百分六。一為百分五。若每年所得之總息為 \$180。問兩銀行中各存款若干?

解下方程:

4. $\begin{cases} 9R-2r=44 \\ 6R-r=31. \end{cases}$　‡5. $\begin{cases} x+2y=17 \\ 3x-y=2. \end{cases}$

*奈端(Newton)(1642至1727年)首先用此法解方程。

6. $\begin{cases}8x+5y=44\\2x-y=2.\end{cases}$　　†7. $\begin{cases}9x=2y+84\\7x+y=73.\end{cases}$

8. $\begin{cases}7x=63-4y\\x=5y-30.\end{cases}$　　9. $\begin{cases}2x=y+\frac{3}{4}\\6x+6y=5.\end{cases}$

10. r 角與$3s$角互爲補角。$r-s=20°$.求 r, s, 及 $3s$。

11. x 角與 y 角互爲餘角。兩角之較爲$10°$.求 x 及 y。

12. 一等邊三角形之邊,用 $x+3y$, $2x-y$, 與14表示之。求 x 及 y。

13. 一等角三角形之角度數,用 $7x+2y$, $3(3x-2y)$ 與60表示之。求 x 及 y。

†14. 一等角三角形之三邊,用 $7x+2y$, $5(x+2y)$ 與 $8x-3y+2$ 表示之。求 x 及 y。

15. 一人買空地兩塊。其一之每方步值 $ 42。其二之每方步值 $ 56。今兩地共有140方步。計價 $ 6780。問此人買地各若干方步?

16. 某商人有咖啡兩種。一種每磅值洋三角。一種每磅值洋三角半。今欲將兩種咖啡混作一種。合成20磅。每磅售洋三角二分。問每種須用幾磅?

17. A 與 B 離鎮前行。A 出發之時間,較 B 早三小時。每小時可行 $2\frac{1}{2}$ 里。B 每小時可行 4 里。問 B 於何時何處能追及 A?

†101. **比較消元法.** 若兩方程中有一未知數之

係數相同。則用此法。頗爲合宜。例如

$$\begin{cases}4x=3\\ 4x=5+2y.\end{cases}$$

此兩方程中 x 之係數相同。故 $5+2y=3$. 何故？

又 $y=-1$.

習　題

用比較消元法解下列各題。能不用鉛筆起稿最好。

1. $\begin{cases}p+w=12\\ p-w=-4.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y=3\\ x=5-3y.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x=my+n^2\\ x=ny+m^2\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{x}{5}+y=5\\ \dfrac{x}{5}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3y}{5}.\end{cases}$

5. $\begin{cases}2F+3K=7.5\\ 6F+3K=-2.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x+y=560\\ x-3y=0.\end{cases}$

函兩元之方程式題

102. 工程題： 解下列各題。最好口述。

1. 某工程需工作十天，方可落成。問一天內作工多少？3天內作工多少？ 10天內作工多少？

2. 若 x 天內可完全落成。問一天內作工多少？3天內作工多少？ 10天內作工多少？

3. 若完工期限爲 y 天。問一天內作工多少？ 3天內作工多少？ 10天內作工多少？

4. A 作工 3 天。B 2 天。兩人共作之工爲$\frac{14}{15}$.若 A 作工 2 天。B 作工 3 天。則共作之工爲$\frac{9}{10}$.若每人單獨工作。各需時幾日?

設 x 爲 A 單獨工作時所需之日數。

y 爲 B 單獨工作時所需之日數。

則$\frac{1}{x}$爲 A 每日所作之工。

$\frac{1}{y}$爲 B 每日所作之工。

如此,$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{14}{15}$ (1)

$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{9}{10}$. (2)

此兩方程之未知數爲$\frac{1}{x}$與$\frac{1}{y}$。非 x 與 y 也。

方程中之分數不能刪去。但$\frac{1}{x}$與$\frac{1}{y}$當先消去之。

如此 $\frac{6}{x}+\frac{4}{y}=\frac{28}{15}$

$\frac{6}{x}+\frac{9}{y}=\frac{27}{10}$

減, $-\frac{5}{y}=-\frac{25}{30}$

如此, $\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$

$y=6$

於(1),以 6 代 y 則 $x=5$。

$\therefore$答數爲$\begin{cases}x=5\\y=6.\end{cases}$

習題

解下列方程系。並覆證之。然不得删去分數。

1. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{8}{15}\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{15}.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{y}=5\\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=3.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{10}{x}-\dfrac{9}{y}=\dfrac{1}{20}\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{1}{6}.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{11}{30}\\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{6}{y}=-\dfrac{3}{28}.\end{cases}$

‡5. $\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=2\\ \dfrac{12}{x}-\dfrac{25}{y}=3.\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=5\\ -\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=-17.\end{cases}$

‡7. $\begin{cases}\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{24}{143}\\ \dfrac{13}{x}-\dfrac{11}{y}=\dfrac{1}{30}\end{cases}$

‡8. $\begin{cases}\dfrac{7}{x}+\dfrac{9}{y}=\dfrac{22}{105}\\ \dfrac{15}{x}-\dfrac{21}{y}=-\dfrac{4}{21}.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12}\\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=0.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{2}{x}-\dfrac{7}{y}=2\\ \dfrac{3}{y}=6.\end{cases}$

‡11. $\begin{cases}\dfrac{11}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{6}\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{31}{24}.\end{cases}$

‡12. $\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{13}{60}\\ \dfrac{9}{x}+\dfrac{20}{y}=\dfrac{7}{12}.\end{cases}$

雜題

103. 解下列各題:

1. 某童之年歲。長於其妹17月5日。21日以後。其年歲當爲其妹之兩倍。問二人各幾歲?

2. 咖啡兩種。其一每磅值洋三角二分。其二每磅值洋二角五分。今欲用 3:2 之比例。將兩種咖啡混和。使值洋 \$ 8.00 問每種須用幾磅?

3. 長方形兩邊之比爲 3:8。設周爲 283, 試求兩邊之長度。

4. 有款兩宗。分存兩銀行。第一宗之利息爲百分3。第二宗之利息爲百分$3\frac{1}{2}$。兩欵之總利每年共爲\$ 52.60.若第一宗之利息爲百分$3\frac{1}{2}$。第二宗之利息爲百分3。則每年之總利。共爲\$ 52.70. 問兩款之數目各爲若干?

5. 有數目二,若第一數之反數乘3.與第二數之反數乘4相加.則等於5. 若第一數之反數乘7.減第二數之反數乘6.則等於4. 問兩數爲何?

提 要

104. 此章添授用圖線法及消元法以解方程系。

此章初次授:

代換消元法。

比較消元法。

第四章

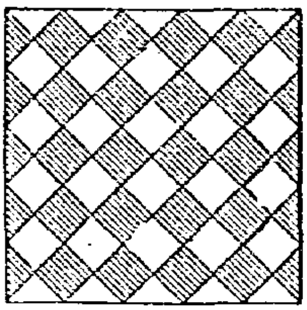
四邊形 角柱表面 二面角

平行四邊形

105. 平行四邊形. 四邊形之對邊兩兩平行者。為平行四邊形。(見第二十三圖。)

第二十三圖

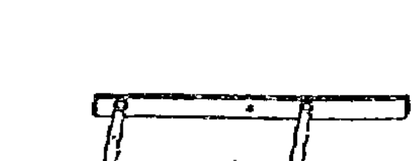
106. 平行四邊形之功用. 多種圖形。皆仿平行四邊形而成。圖形家以花磚鋪地。有時亦仿平行四邊形。如第二十四圖。



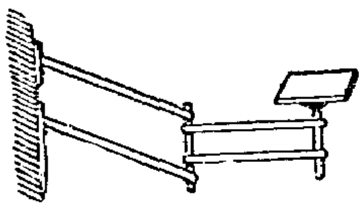
第二十四圖

試舉他種仿平行四邊形所成之物。則桌面,檯面,黑板,窗牖,牆壁,圖畫,鏡框等,皆是也。

圖之用平行界尺所作者。皆仿平行四邊形。(參觀 § 124) 平行界尺者。作平行線所用之尺也,如第二十五圖。



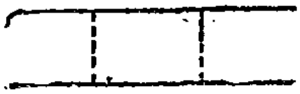
第二十五圖



第二十六圖

第二十六圖之壁架。亦仿平行四邊形而作。此項壁架。在壁上搖動。平而不側。

測量家依平行四邊形之性質。以置平行線。如第二十七圖。或引一線過障物。如第二十八圖。(見 § 125)


第二十七圖

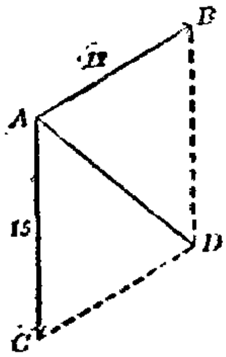

第二十八圖

平行四邊形在物理學中之用。可於下題見之:

一輪船向南行。每小時可行15英里。然風力極大。致此船每小時向東北倒行12英里。問一小時後。此船行幾英里,又所行之方向爲何?

設第二十九圖之 AB, 指向東北行之12英里。AC 指向南行之15英里。則以實驗所得。知此船所行之方向及速率。皆可以一線代表之。其法如下:

以 AB 及 AC 爲鄰邊。作一平行四邊形 $ABDC$。從 A 至對角 D, 作 AD 線。AD 即爲代表船行之方向及速率之線。解此題以前。當先知在已知線上求作平行四邊形之法。



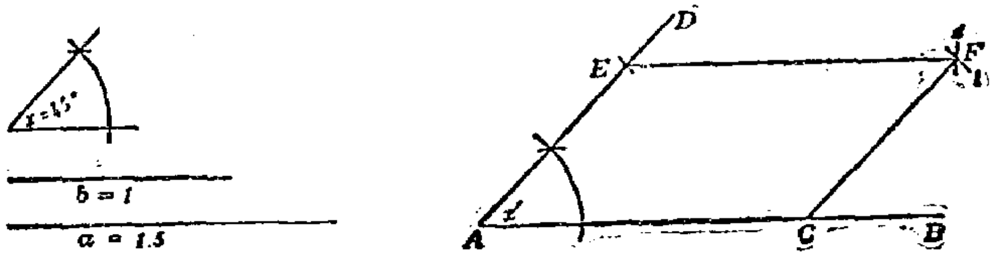
第二十九圖

107. 平行四邊形之求作法: 已知平行四邊形之兩鄰邊及夾角。求作其形。

已知 a, b, 兩線。及 x 角。如第三十圖。

求作一平行四邊形。令兩鄰邊一等於 a。一等於 b。夾角等於 x。

作法: 設 $a=1.5$ 吋; $b=1$ 吋; $x=45°$。



第 三 十 圖

作 AB 線.

於 AB 上截 $AC=a$.

由 A 作 AD 線及 AB 線,令互成 x' 角,而與 x 角相等.

於 AD 上截 $AE=b$.

以 C 為中心,以 b 為半徑,作弧 1.

以 E 為中心,以 a 為半徑,作弧 2,與弧 1 相交於 F.

作 EF 及 CF.

$ACFE$ 為求作之平行四邊形.

證 $ACFE$ 確為一平行四邊形。須根據於平行四邊形之性質。容後述。(見 § 124)。

習 題

1. 已知平行四邊形之邊 $a=2$ 吋。$b=1.5$ 吋。又 $\angle x=50°$。求作其形。又將此形與同班學友所作者比較之。

2. 兩平行四邊形之兩隣邊及夾角,兩兩相等。何以此兩形及各邊,比較相似?

3. 設兩平行四邊形有兩隣邊及夾角。兩兩相等。證此兩形彼此相合。

疊合證法: 將此形放於彼形之上,指明兩形密合。

4. 將§106之輪船題。於方格紙上作平行四邊形解之。量AD及$\angle CAD$(第二十九圖)。

5. 設有20磅重之力。射於一物。向東北隅。30磅重之力。射於其上向西北。用圖線表示此兩力。問幾磅重之單獨力射於其上。則此物動狀。與兩力齊集時同? 又此物行動之方向爲何?

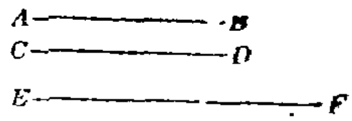
108. 讀平行四邊形以前。當先温習平行線之實例。今當同時商論兩種緊要證題法。此兩法。爲第二章所未授者。

109. 反證法. 證下定理,即知此法:

定理: 若兩線各與第三線平行。則三線皆平行。

已知$AB \parallel EF$,又$CD \parallel EF$,如第三十一圖.

證$AB \parallel CD$.



第三十一圖

證: 設AB與CD不平行,

則苟引長之,可令相遇於P點.

因兩交線必相遇於一點.(§ 4)

然$PA \parallel FE$　假設.

又$PC \parallel FE$　假設.

故兩線皆與FE平行,且同過P點.

然於線外一點,祇可作一直線與其線平行. (§ 41) 故此事全不合理.

故AB與CD不平行之設想,全屬誤謬.

故$AB \parallel CD$.

於此,可知反證法含下列之 I II III IV 各級,

I. 先立一設想。使與定理相反。

如此,若證 $a=b$,當設想 $a\neq b$;證 AB 與 CD 平行,當設想 AB 與 CD 不平行。

II. 用正當之理論,證所立之設想全不合理。

例如前題中之不合理處。爲兩線可同與一線平行。且可同過一已知點。

III. 如此,則知所立之設想,全屬誤謬。

凡用正當之理論證題。必不致得誤謬之結果。欲得正當之結果。則僅有兩法: (1)證題之冒頭。即幾何中所謂假設者。須正當。(2)理論須完全。

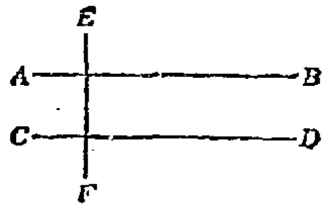
若終結全屬誤謬。則必因所立之設想不正,或因理論不充足,或因二者具備所致。 若終結爲誤謬,然理論頗充足。則必因假設不正所致。

IV. 正當之終結已得,定理已證明。

110. 定理: 若兩線皆爲一線之垂線。則兩線平行。

已知 $AB\perp EF$, $CD\perp EF$. (第三十二圖)

證 $AB\parallel CD$.



第三十二圖

證(反證法):

設想 AB 與 CD 不平行,

則 AB 與 CD 相交於 P 點. 何故?

由是 $PA\perp EF$,又 $PC\perp EF$. 何故?

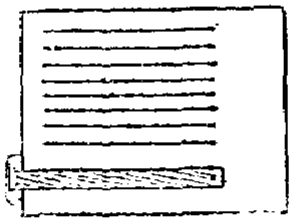
然此事全不合理. 何故?

故 AB 與 CD 不平行之設想屬於誤謬.

故 $AB \parallel CD$.

習題

1. 根據以上定理。苟用丁字規作平行線。當甚爲簡便.(見第三十三圖)試證之。



第三十三圖

2. 指明兩線有何情形。則互相平行?

3. 用 § 110 之法。作兩平行線。

4. 指出教室中之垂線二。但以不同在一平面者爲限。問此兩線是否平行?

111. §§ 109 至 110 中之證題法。名曰背理法。*其法爲先立一設想。使與定理相反。後用正當之理論。證定理之不謬。而所立之設想爲背理。此法爲用至廣。以其非特爲幾何學中所常見。卽吾人處世。亦無日不用以證事理也。

112. 解析法.** 觀以下各題。卽知此法。

定理: 若一線割兩線。令兩內錯角相等。則兩線平行。

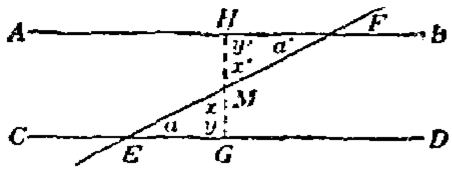
---

*游道射士。(Eudoxus)(紀元前 408 年)嘗用背理法以證題。游氏爲塞射渴司(Cyzicus)學校創辦人。生與伯拉圖(Plato)同時。據波爾(Ball)云。背理法之原理。早已有用之者。然郝波克萊士(Hipprocrates)(生於紀元年 470 年)以此法配合應用。特別注意之。於是有郝氏發明此法之說。

** 伯拉圖(Plato)(紀元前 429 至 348 年)發明此法。

已知AB與CD爲EF所割,又$a=a'$.(第三十四圖)

證:$AB \parallel CD$.



第三十四圖

豫先商論:

證$AB \parallel CD$,當先問: 兩線何時平行?

AB與CD同爲一線之垂線時,AB與CD平行.(§ 110)

作GH線,令與一已知線垂直,又證GH垂於他已知線.

設$\angle GHF$爲直角,則GH垂於AB.

今HGE爲直角,故苟能證$\angle GHF=\angle HGE$,即知$\angle GHF$亦爲直角.

苟能證$\triangle MHF \cong \triangle MGE$,即知以上所述者,皆極眞確.

今於$\triangle MHF, MGE$中,僅知$x=x'$;又$a=a'$,故不得言兩形爲相合三角形.然設取M點,令$EM=MF$,則兩形中已有三部相等;故$\triangle MHF \cong \triangle MGE$.

既證$\triangle MHF \cong \triangle MGE$,苟倒述此節所論各步,即可證$AB$與$CD$平行.其法如下:

證: 平分EF於M,

由M作MG線,令與CD垂直.又引長GM令遇AB於H.

證$\triangle EGM \cong \triangle MHF$.(角.邊.角.)(§ 67)

$\therefore y=y'$. 何故?

然$y=$直角. 何故?

$\therefore y'=$直角. 何故?

$\therefore AB$及CD同與GH垂直.

$\therefore AB \parallel CD.$

由是可知解析法含下列四步。

I　問：終結有何種情形則眞確?於答言中。擇一近理者用之。例如證AB與CD平行。則問：兩線何時平行?答言爲(1)若兩線同與一線垂直。則兩線平行。(2)若兩線同與一線平行。則兩線平行。於答言中擇一適當者用之。苟能立第二步實例。卽知終結爲眞確。

II　如前法。立第三步設想。苟能證此爲確實。則第二步設想亦必眞確。

III　續用此法。冀得末句。確爲已知之實例.

IV　由末句起。倒述前法。詳證各步。至全題悉解乃止。

113. 解析證題法： §112中第四步爲證題。第一第二第三各步之理論。皆爲解析。解析之用。爲使學者得一眞確之理論。藉以解題。並使學者知證題之法。凡解定理。祇有證題一步列入。餘可删去。

114. 逆定理. 若此定理之假設。爲彼定理之終結。此定理之終結爲彼定理之假設。則此定理卽爲彼定理之逆定理。

試述以下各定理之逆定理:

1. 若三角形有兩邊相等。則對邊之兩角必等。

2. 圓內等弧與等弦相對.

下列各定理之逆定理是否眞確?

若兩角皆爲直角。則等。

若兩平行四邊形之底及高皆等。則兩形相等。

凡忠實之人皆快樂。

若三角形有兩角相等。則對角之邊亦等。

凡因定理眞確。不可卽信其逆定理亦必眞確。蓋逆定理有確有不確也。故必須用證論以決之。

115. 證逆定理之法: 證逆定理是否眞確。常用下列二法:

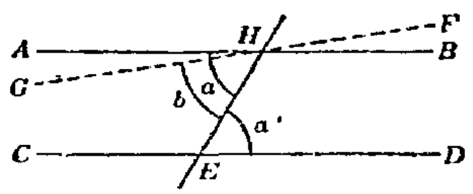
1 設原定理之各步證論可倒述者。卽用此證爲解析。將原定理逐步倒證。直至假說。設此句爲逆定理之終結。卽知逆定理已證明。

2. 反證法.

116. 定理: 若一線割兩平行線。則兩內錯角相等。
(此爲§112之逆定理)

已知 $AB \parallel CD$,又 EH 割 AB 及 CD,如第三十五圖.

證 $a=a'$.



第三十五圖

證(反證法):

設 $a \neq a'$.

作 GF 線令 $b=a'$.

則 $GF \parallel CD$.　　何故?

然 $AB \parallel CD$.　　何故?

然 AB 及 GF 同與 CD 平行,爲必無之理. 何故?

故 $a\neq a'$ 之設想屬於誤謬.

故 $a=a'$

習 題

設兩平行線中有一線,與一第三線垂直,則第二線亦與第三線垂直. 試證之.

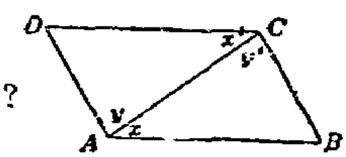
117. 平行四邊形之性質. 平行四邊形之許多功用,§106中已畧言之.今當證下列各理: 若四邊形爲平行四邊形,則

1. 對角線分此形作兩相合三角形.
2. 對邊相等.
3. 對角相等.
4. 兩隣角互爲補角.
5. 兩對角線互相平分.

118. 定理: 平行四邊形之對角線,分原形成兩相合三角形.

已知平行四邊形 $ABCD$,又其對角線 AC.(第三十六圖)

證 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$.



第三十六圖

解析: 兩三角形有何情形則相合?

證兩角相等,當用何法.又如何證 $z=x'$?

證:	理由:
$AC\equiv AC$.	公邊.

$DC \parallel AB$.	設想 $ABCD$ 爲平行四邊形.
$\therefore x=x'$.	若兩平行線爲一線所割。則兩內錯角相等。
$AD \parallel BC$.	假說.
$\therefore y=y'$.	若兩平行線爲一線所割。則兩內錯角相等。
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$.	角.邊.角.

119. 定理： 平行四邊形之對邊相等。(相合三角形法)用§118證之。

120. 定理： 平行四邊形之對角相等。

用§118證 $\angle D=\angle B$。(第三十六圖)

又作對角線 DB,證 $\angle A=\angle C$.

121. 定理： 平行四邊形之隣角。互爲補角。

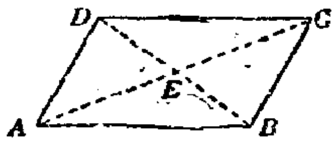
鄰角者。兩平行線爲一線所割而成之同旁兩內角也。用§47證之.

122. 定理： 平行四邊形之兩對角線。互相平分。

已知平行四邊形 $ABCD$,

及對角線 AC, BD.(第三十七圖)

證 $AE=EC$, $DE=EB$.



第三十七圖

解析： 如何可證兩線相等? 用何法證 $AE=EC$?

證： 證 $\triangle DEC \cong \triangle AEB$.

則 $AE=EC$, $BE=ED$. 何故?

習　題

1. 若平行四邊形有一角爲直角。則其餘諸角。亦皆爲直角。試證之。

2. 若平行四邊形有兩隣邊相等。則諸邊皆等。試證之。

3. 證平行線所割之平行線相等。

4. 證平行線到處相距恆等.

5. 一平行四邊形之兩對邊。以 x^2+x 及 $6(3-x)$ 表示之。其他兩邊。以 y^2-y 及 $3(5-y)$ 表示之。求 x 與 y, 及邊之長度。

16. 一平行四邊形之兩對角, 以 x^2+6 及 $7(x+2)$ 表示之。求 x 及形內諸角。

123. 四邊形爲平行四邊形之形狀。

四邊形有下列各情形者。爲平行四邊形。今當證之。

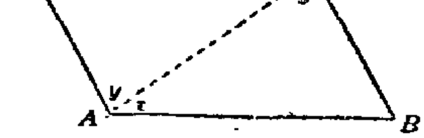
1. 對邊兩兩平行。
2. 對邊兩兩相等。
3. 兩對邊平行而相等。
4. 對角相等。
5. 兩對角線互相平分。

124. 定理: 若四邊形之對邊兩兩相等。則此形爲平行四邊形。

已知四邊形 $ABCD$,(第三十八圖)

$AB=DC$, $AD=BC$

證 $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.



第三十八圖

證： 作 AC 線.

證 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$,(邊.邊.邊.)

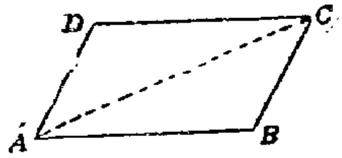
則 $x=x'$; $y=y'$. 何故?

故 $AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$. 何故?

125. **定理：** 若四邊形有兩對邊平行而相等。則此形為平行四邊形。

已知四邊形 $ABCD$,(第三十九圖) $AB=DC$; $AB \parallel DC$.

證 $ABCD$ 為平行四邊形.



第三十九圖

證：

證 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$,(邊.角.邊.)

則 $AD=BC$. 何故?

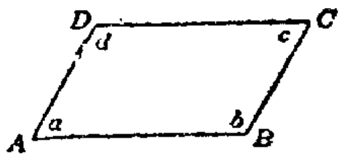
用 §124 之定理,證 $ABCD$ 為平行四邊形.

126. 下列各定理之證法。皆為代數法。

定理： 若四邊形之對角相等。則此形為平行四邊形。

已知四邊形 $ABCD$ (第四十圖), $a=c$; $b=d$.

證 $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.



第四十圖

解析： 兩線有何情形,則平行?

a, b, c,與 d 有何關係? 由此關係如何能證 $AB \parallel DC$?

證：	**理由：**
$a+b+c+d=360°$.	何故?
$a=c$.	何故?

$b=d.$ 何故?

$\therefore a+d+a+d=360^\circ.$ 消去 b 及 c

$2a+2d=360^\circ.$ 加似項

故 $a+d=180^\circ.$ 何故?

故 $AB \parallel DC.$ 何故?

依此證 $AD \parallel BC.$

127. 若四邊形之對角線互相平分。則此形爲平行四邊形。

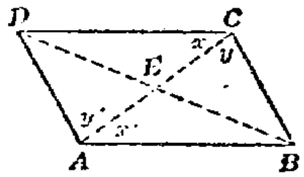
作對角線 AC 及 BD.(第四十一圖)

證 $\triangle DEC \cong \triangle AEB,$

則 $DC=AB.$

依此證 $AD=BC.$

故 $ABCD$ 爲平行四邊形.



第四十一圖

128. 四邊形之種類. 四邊形可分類如下:

平行四邊形. 四邊形之對邊兩兩相等者。爲平行四邊形。

長斜方形. 平行四邊形之角斜者,爲長斜方形,

菱形. 長斜方形之四邊皆等者。爲菱形。

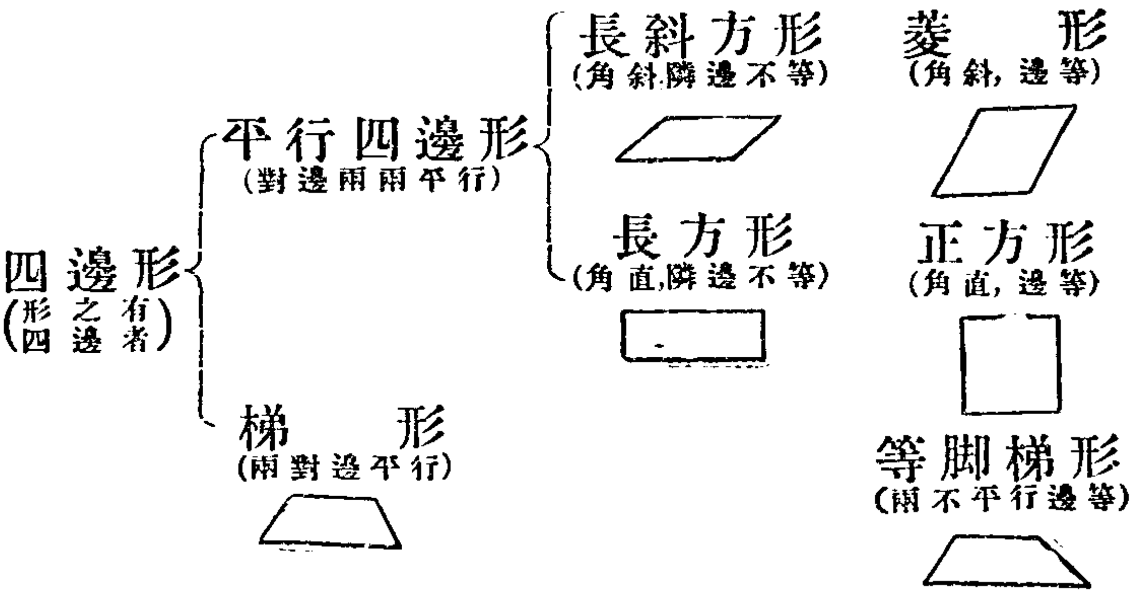
長方形. 平行四邊形之角爲直角者,名長方形。

正方形. 長方形之四邊皆等者。爲正方形,

梯形. 四邊形有兩對邊平行者。爲梯形。

等脚梯形. 梯形之不平行邊相等者。爲等脚梯形梯形之平行邊曰底。

四邊形之分類可於下表別之:



習　　題

證下列各題:

1. 若長方形之兩隣邊相等。則四邊皆等。

2. 若平行四邊形之兩對角線相等。則此形爲長方形。或爲正方形。

3. 長方形之兩對角線相等。

4. 正方形之兩對角線相等。

5. 菱形之兩對角線。互作中點垂線。

6. 正方形之兩對角線。互作中點垂線。

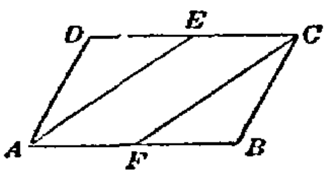
7. 若平行四邊形之兩對角線互作中點垂線。則此形爲菱形。或爲正方形。

8. 長方形或正方形之外可作一圓。

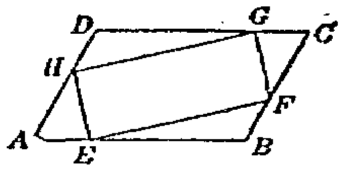
9. 若平行四邊形之角。為對角線所平分。則此形為菱形。或為正方形。

‡10. 若平行四邊形兩對邊之中點，各與其對角相聯。則交成一平行四邊形。(第四十二圖)

‡11. 於第四十三圖之平行四邊形。有 $AE=BF=CG=DH$。試證 $EFGH$ 為平行四邊形。



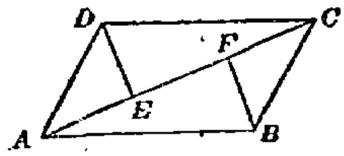
第四十二圖



第四十三圖

‡12. 設於平行四邊形內。從不在一對角線之兩角頂，作垂線至他對角線。則所作之兩垂線相等。
即 $DE=BF$ (第四十四圖)。

13. 設有兩點同在一線旁。各距此線等，則經過此兩點之線。與原有之線平行。



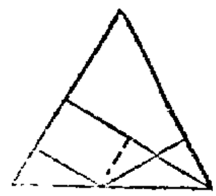
第四十四圖

‡14. 平行四邊形兩對角之平分線，互相平行。

‡15. 平行四邊形諸角之平分線。交成一長方形。

‡16. 長方形諸角之平分線，交成一正方形。

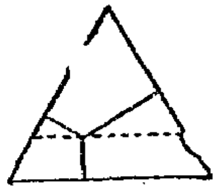
‡17. 從等腰三角形之底上一點至兩等邊。各作垂線。此兩垂線之和，等於一等邊距對角之高度。
(第四十五圖)


第四十五圖

‡18. 從三角形內一點至三邊。各作垂

線.證此三垂線之和.等於三角形之高度。

(第四十六圖)



第四十六圖

求作題

129. 求作下列各形:

1. 已知長方形之一邊及對角線.求作其形。

2. 已知菱形之一邊及一角.求作其形。

3. 已知正方形之對角線.求作其形。

4. 已知菱形之兩對角線.求作其形。

問題

130. 用代數法解下列各題:

1. 長方形之兩對角線.一為 x^2-x.一為 $2(2x+7)$.求 x 及兩對角線。

2. 平行四邊形之兩對角線互相分割.其一之兩段為 x^2+x 及 $2(5x-7)$.其二之兩段為 t^2+2t 及 $8(3-t)$.求 x, t, 及兩對角線之長度。

3. 菱形之兩對角線互相分割.其一之兩段為 x^2 及 $3(2x+9)$.其二之兩段為 y^2 及 $2(y+4)$.求 x, y, 及兩對角線。

4. 菱形之對角線.交成四角.其兩角為 x^2-10 及 $10(2x-11)$.求 x 及四角。

二次方程

131. 用劈因數法或配方法.解下列各方程。

1. $x^2=5x-4$.　　*2.* $x^2+1=2(x+18)$.

3. $x^2-x=3x-4$. 4. $x^2-4=x+16$.

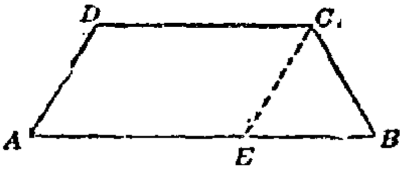
梯　　　形

132. 證以下各題:

1. 若梯形之底上兩端兩角相等。則其形必爲等脚梯形。

作 $CE \parallel DA$.(第四十七圖).

證 $CE=CB$.



第四十七圖

2. 若梯形之兩不平行邊相等則底上兩端兩角亦必等。

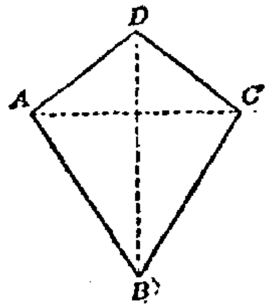
𠙶　　　形

133. 𠙶形. 四邊形有隣邊兩兩相等者。爲𠙶形。例如第四十八圖。若 $AD=DC$, $AB=BC$。則 $ABCD$ 爲𠙶形

證以下各題:

1. 𠙶形之兩對角線互作垂線。

2. 𠙶形有兩角相等。卽 $\angle A=\angle C$。

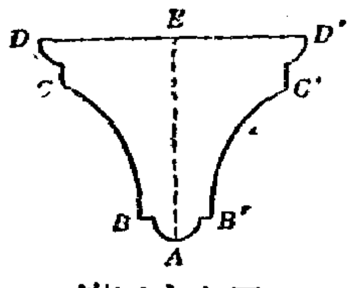


第四十八圖

對　　　稱

134. 對稱之軸: 聯一形各相當部之線之中點垂線謂之對稱之軸,例如第四十九圖,

AE 爲 $DCBAB'C'D'$ 之對稱之軸,



第四十九圖

習 題

1. 一線段對稱之軸爲何?

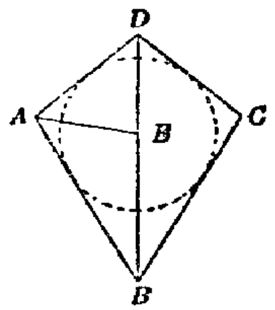
2. 試作一對稱之軸於一已知角內。

3. 試作一對稱之軸於等邊三角形內。

證以下各題:

4. 第五十圖之風形對角線BD。爲一對稱之軸。

5. 第五十圖之A角平分線。(即A角之對稱之軸)與對角線BD相交於E點。又E距AD與AB等。故可用以爲中心。在風形內作一圓。



第五十圖

6. 等脚梯形之底之中點垂線。爲一對稱之軸。

用疊合法證之。

7. 等脚梯形一底之中點垂線。與一不平行邊之中點垂線相交於一點。此點距梯形之四角皆等。故可用以爲中心。於形外作一圓。

8. 菱形之兩對角線。皆爲對稱之軸。故菱形內可作一切圓。

軌 跡

135. 解下列各題:

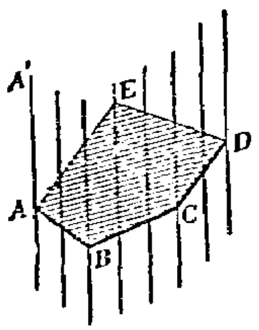
1. 車輪在直路上旋轉時。其中心在何處?

2. 平面內有一點,距一已知線有定遠。試求此點之軌跡。

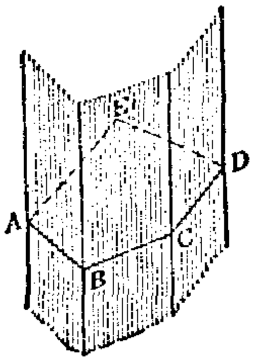
3. 平面內有一點。距兩平行線恆等。試求此點之軌跡。

角柱表面

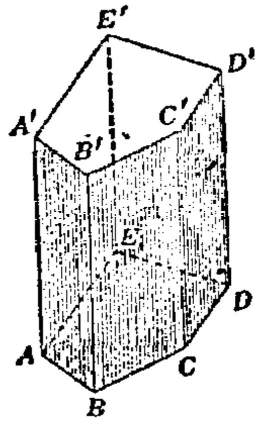
136. 角柱之表面. 角柱. 已知多邊形 $ABCD$……,如第五十一圖。又直線 AA'(不在形內)移動自如。然常與第一步位 AA' 平行。又常與多邊形接觸,AA' 因之產一角柱之表面。(第五十二圖)



第五十一圖



第五十二圖



第五十三圖

設第五十二圖之形 $ABCD$……,移至 $A'B'C'D'$……,如第五十三圖。然仍與第一步位平行。又 $A, B, C,$…… 諸點沿 AA', BB', CC'……,諸線而動。則所成之形為角柱。

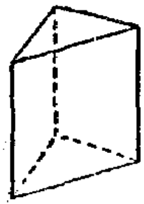
137. 角柱之底. 側面. 兩平行多邊形 $ABCD$……,及 $A'B'C'D'$…… 皆為角柱之底。在兩底中間之表面為側面。

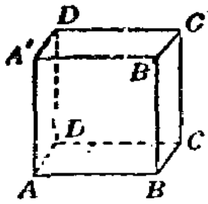
138. 側面. 湊合側面之諸四邊形,皆為角柱之側面。指出教室中之一角柱,並別其底及側面。

習　　題

1. 證角柱之側面爲平行四邊形。

2. 據 §136 之法。如何能產一三角形之角柱？角柱之底成三角形者。爲三角形之角柱。如第五十四圖。





第五十四圖第五十五圖

3. 以平行四邊形爲底。指明如何作平行六面體。如第五十五圖。

4. 設第五十五圖之側面。爲平行四邊形。問關於 $ABCD$ 之母線 AA'。當在何處？

空間中之線與平面

139. 平面之決定. 讀本書第一編者。當已知下列之幾何立體：立方體。平行六面體。角柱。圓錐。角錐。圓柱。球。(§§ 203 至 13) 讀此項立體時。當已知下列各名詞：平面。表面。平面之垂線。平行之平面等。

用一立方體解明上列各名詞。

多種平面。常包含一立方體之稜。或經過兩點。用一立方體證明此理。或用門上之鉸鏈代兩點。用門代平面以證之亦可。

若一平面經過空間中兩點。則此平面可在兩點所定之直線上旋轉。成多數之平面。但欲平面之位置有定度。除令其在已知之直線上經過外。可令其過一不在已知線上之定點。

定空間中平面之位置。有下列各情形:

1. 一直線與一點。點不在線內。

2. 三點不同在一直線內。

蓋苟用一直線聯兩點。即得第一條。

3. 兩交叉直線。

蓋任取一線,又於第二線上取一點,(非交點)。即得第一條。

4. 兩平行線。

蓋兩平行線同在一平面中。且祇有一平面可含此兩線中之一線及第二線上之一點。(第一條)。

習題

1. 用一立方體詳證以上四條。

2. 用教室內之線及點詳證以上四條。

140. 兩直線之相關位置: 空間中兩直線。可有下列各相關位置,

1. 兩線可相交,(若引長之)。

2. 兩線可平行。

3. 兩線可不平行又不相交。

習題

1. 選立方體正當之稜,以證上列三例。

2. 試求教室中可用以證上列三例者。

141. 一直線與一平面之相關位置. 一直線與一平面。可有下列各相關位置:

1.　直線引長。可與平面相交。

2.　直線可與平面平行。卽直線與平面。無論引長至何處。不致相遇於一點。

3.　直線與平面。可公有兩點。故直線全在平面內。

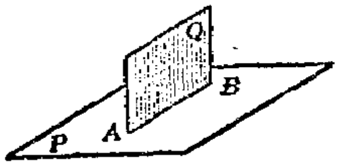
將以上各例。於立方體上詳證之。又於教室內。指出直線及平面以證之。

142.　空間內平面之表示.　凡平面。可以平面圖形表示之。如長方形。平行四邊形等。(第五十六圖)。然此種圖形。徒能表示平面之位置。其本形則廣大無限也。

第五十六圖

143.　定理:　若兩平面相交。則相交之處。爲一直線。

已知兩相交平面 P,及 Q,如第五十七圖.



第五十七圖

證 P, 與 Q, 相交於一直線.

證(反證法):

設 P,與 Q,相交之處 AB,不爲一直線,

則 AB 上當有三點,不同在一直線內.

因此三點皆在相交之處,故亦同在 P,與 Q,內.

故 P 與 Q 兩形密合.　何故?

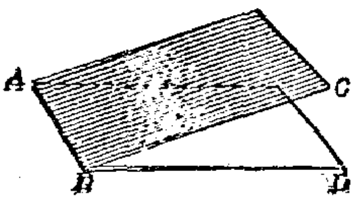
然 P,與 Q, 爲異形之平面,故設想兩形相交之處,不爲一直線全屬誤謬.

故 P,與 Q,相交於一直線.

二 面 角

144. 二面角. 兩平面相交。則成二面角。平面曰面。相交之線曰稜。在教室內及立方體上。指出二面角。

二面角。常以稜上兩點及每面上一點名之。



第五十八圖

例如第五十八圖之二面角。可用 $C-AB-D$ 代表之。然有時徒以稜上兩點名之。如 AB。

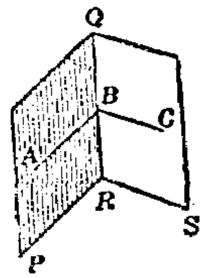
145. 二面角之大小. 一平面繞平面內之一直線旋轉。可成一二面角。故二面角之大小。當視旋轉之次數而定。不可依面之廣度而定也。

146. 平面角. 由二面角之稜上一點。於兩面上各作一線與稜作垂線。則所成之角。為二面角之平面角。

例如第五十九圖之 ABC 為 $P-QR-S$ 之平面角。

平面角可作於稜上之任一點。

§389中。當證平面角皆等。

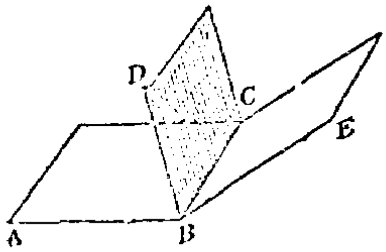


第五十九圖

147. 二面角之種類. 二面角有直,有平,有銳,有鈍,有曲,有斜,如其平面角之為直,為平,為銳,為鈍,為曲,為斜,蓋二面角之形。可據平面角而定也。若兩二面角公有一邊,及一面。則兩角互為接角。

例如第六十圖之 $A-BC-D$ 與 $D-BC-E$ 爲二面接角。若兩平面角互爲餘角。或互爲補角。則兩二面角亦互爲餘角。或互爲補角。

148. 垂直平面. 若兩平面互作二面直角。則兩平面爲垂直平面。



第六十圖

在教室內及立方體上。指出垂直平面。

提 要

149. 本章授下列各名詞之意義:

平行四邊形。	楔形。	二面角之
長斜方形。	角柱之表面。	平面角。
菱形。	角柱。	垂直平面。
長方形。	角柱之底。	解析。
正方形。	側表面。	逆定理。
梯形。	側面。	對稱之軸。
等脚梯形。	二面角。	軌跡。

150. 此章證下列各定理。

1. 若兩平行四邊形。有兩隣邊及一夾角相等。則兩形爲相合平行四邊形。

2. 已知平行四邊形之兩隣邊及一夾角。卽可求作其形。

3. 若兩線同與一綫作垂線。則兩線平行。

4. 若一線割兩線,令兩內錯角相等。則兩線平行。

5. 若兩平行線爲一線所割。則兩內錯角相等。

6. 若四邊形爲平行四邊形。則

   1. 對角線分此形作兩相合三角形。
   2. 對邊相等。
   3. 對角相等。
   4. 兩隣角互作補角。
   5. 兩對角線互相平分。

7. 四邊形可作平行四邊形者。爲

   1. 對邊兩兩平行。
   2. 對邊兩兩相等。
   3. 兩對邊平行而相等。
   4. 對角兩兩相等。
   5. 兩對角線互相平分。

8. 若兩平面相交。則相交之處。爲一直線。

151. 四邊形可分種類如下:

- 四邊形
  - 平行四邊形
    - 長斜方形——菱形.
    - 長方形——正方形.
  - 梯形——等脚梯形.

152. 此章授下列兩證題法: (1)反證法。 (2)解析法。

153. 解二次方程可用因數分解法。或配方法。

154. 下列各項。定空間內平面之位置。

1. 一直線與一點。點不在線內。

2. 三點不同在一直線內。

3. 兩交叉直線。

4. 兩平行直線。

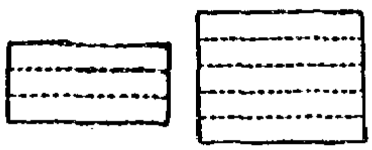
第五章
等比例線段
等比例線段之用法

155. **線段之量法.** 量線段者。所以求此線段爲別線段(名單位線段)之幾倍也。a 線段所容 b 線段之數目。謂之 a 以 b 爲單位之數值。或曰 a 度以 b 之數值。

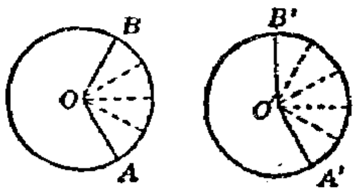
156. **兩線段之比例.** 用同一單位量兩線段。所得兩線段數値之比例。謂之兩線段之比例。求兩線之比例。尙有別法。容於§162中述之。

157. **等比例.** 兩比例相等之方程如$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,$\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$,$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$謂之等比例。有數目四。其數值皆爲等比例。此四數。謂之按比例之數目。

如此。設第六十一圖中兩長方形之比例爲$\frac{3}{5}$。其高度之比例亦爲$\frac{3}{5}$。則長方形與其高度。互作等比例。



第六十一圖



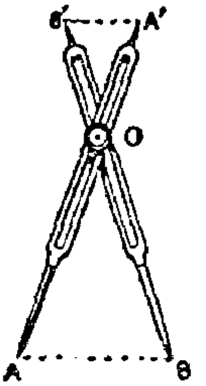
第六十二圖

指明第六十二圖之AOB及$A'O'B'$兩中心角。與截弧互作等比例。

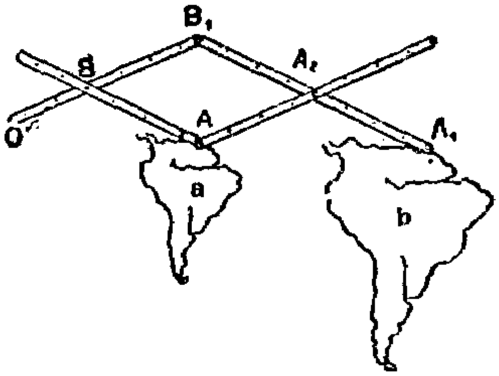
158. **等比例線段之用法.** 第六十三圖爲比例規。卽用以作縮圖之器具也。

例如作 $OB'=\frac{2}{3}OB$。作 $OA'=\frac{2}{3}OA$。又將規之兩脚張開，令 AB 等於一已知線。則 $A'B'=\frac{2}{3}AB$。

此法隨等比例線之一性質而來。



第六十三圖

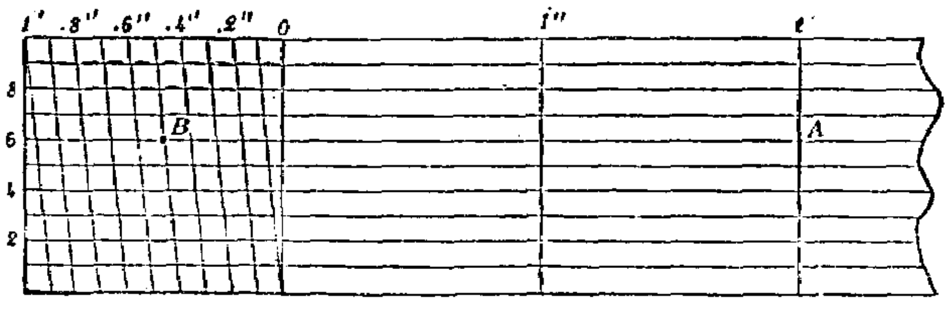


第六十四圖

第六十四圖之摹圖器。可用以作比例尺圖，及放大或縮小地圖與各種圖形等。此器有尖頭橫木四。成平行四邊形 BB_1A_2A。依等比例線段之性質。若作 $\frac{OB}{OB_1}$ 令等於 $\frac{B_1A_2}{B_1A_1}$。則 $O, A,$ 及 A_1 諸點。必同在一直線內。而 $\frac{OA}{OA_1}=\frac{OB}{OB_1}$。

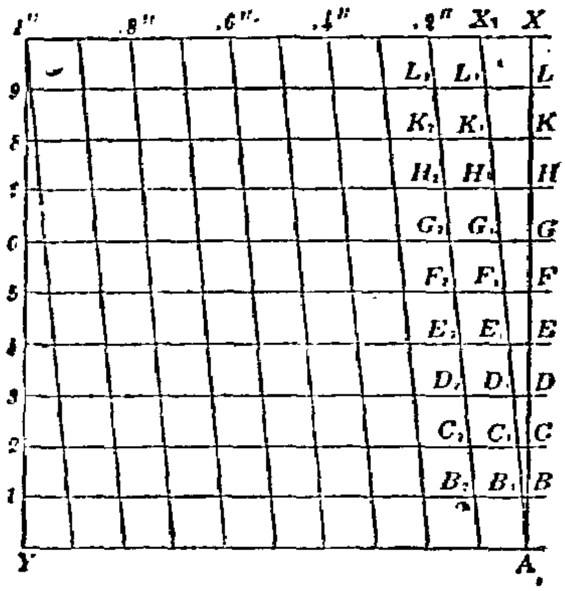
定置 O 點，不使移動。用 A 描 a 形。則 A_1 上之鉛筆作 b 形。b 形實為 a 形之放大圖。亦即 OB 形放大至 OB_1 形也。

第六十五圖之斜線尺。亦依等比例線之性質而成。用此尺可量一吋之百分之長度，



第六十五圖

第六十六圖爲第六十五圖放大時之一部，



第六十六圖

由§167觀之，　$\frac{BB_1}{XX_1}=\frac{AB}{AX}=\frac{1}{10}$.

故，　$BB_1=\frac{1}{10}XX_1$,

$CC_1=\frac{2}{10}XX_1$,

又，　$DD_1=\frac{3}{10}XX_1$　等.

因，　$XX_1=\frac{1}{10}AY=\frac{1''}{10}$,

知　$BB_1=.01''$, $CC_1=.02''$, $DD_1=.03''$等,

故　$BB_2=.1''+.01''=.11''$,

$CC_2=.1''+02''=.12''$,

$DD_2=.1''+.03''=.13''$　等.

習　　題

1. 問第六十五圖中AB之長度爲何?

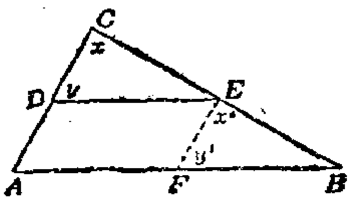
2. 任作一線。後用第六十五圖之斜線尺。量此線至一吋之百分。

等比例線段

159. 定理： 若一線平分三角形之一邊。又與第二邊平行。則此線平分第三邊。

已知 $\triangle ABC$, $CD=DA$, $DE \parallel AB$, (第六十七圖)

證 $CE=EB$.



第六十七圖

解析： 如何能證兩線相等?

作 $EF \parallel CA$.

若 $\triangle DEC \cong \triangle FBE$,則 $CE=EB$.

證： $AFED$ 爲平行四邊形. 何故?

$\therefore FE=AD$.　　何故?

證　$FE=CD$.

證　$x=x'$, $y=y'$.

$\therefore \triangle DEC \cong \triangle FBE$.　　何故?

$\therefore$　$CE=EB$.　　何故?

習　　題

1. 證第六十七圖之 DD, DA, CE,與 EB 成等比例。

2. 證 $DE=\frac{1}{2}AB$. 試編此題爲定理式。

3. 設 $CD=3$,　$DA=3$,　$CE=4$,　又 $EB=x-2$. 求 x 及 EB 之長。

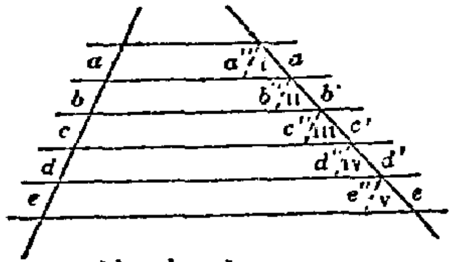
4. 設 $CD=1$,　$DA=1$,　$CE=\frac{3x-1}{4}-\frac{4x-5}{5}$, 又 $EB=\frac{7x+5}{10}-4$. 求 x 及 CE 與 EB 兩線之長。

160. 定理： 若三(或三以上)平行線截一割線。令成相等之線段。則此諸平行線。可截各割線。亦成相等之線段。

證(相合三角形法)：作助線 $a'' \parallel a$, $b'' \parallel b$. 如第六十八圖

證 $\triangle \mathrm{I} \cong \triangle \mathrm{II} \cong \triangle \mathrm{III}$, 等

則 $a'=b'=c'$ 等.　　何故?

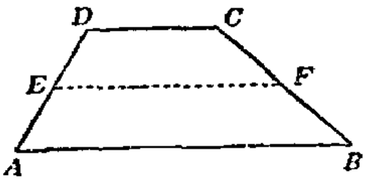


第六十八圖

習　　題

1. 證第六十八圖之 $a, b, c, \cdots$ 諸線段。與 $a', b', c', \cdots\cdots$ 諸線段成等比例。

2. 梯形中有一線經過一不平行邊之中點。又與底邊平行。證此線平分他不行邊。用§160證之。



第六十九圖

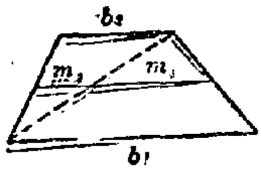
161. 梯形之中線. 梯形兩不平行邊之中點聯線。謂之梯形之中線。

習　　題

證梯形之中線。等於兩底之和之半。

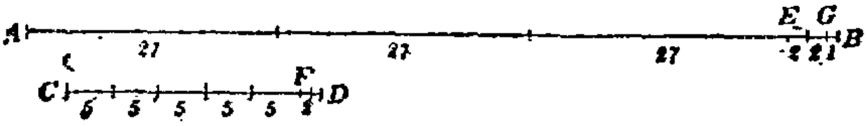
指明 $m_1=\frac{1}{2}b_1$;　$m_2=\frac{1}{2}b_2$ (第七十圖)

$\therefore m=m_1+m_2=\frac{1}{2}(b_1+b_2)$.


第七十圖

162. 線段之比例. 兩線段之比例。可用規求之。其法如下:

設欲求 AB 與 CD 兩線段之比例。(第七十一圖)



第七十一圖

今設AB與CD兩線,同有一公度,(因有時兩線不能同有一公度。如§165中所指示各條.)求AB與CD兩線公準個,其法如下:

先以短線CD度AB,所餘為EB,較小於CD。

次以EB為度,量CD,所餘為FD,較小於EB。

再以FD為度,量EB,所餘為GB,又以GB量FD,無餘,則GB即為AB與CD兩線之公準個。

以GB為準個,量得$AB=86$, $CD=27$。

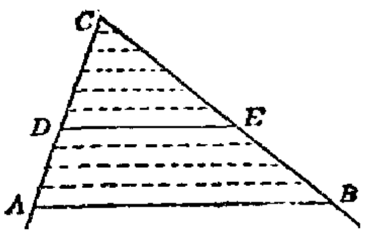
故$\frac{AB}{CD}=\frac{86}{27}$。

163. 定理: 若兩平行線割兩交割線,則一割線上所截之線段,與別割線上所截之相當段成等比例。

已知$AB \parallel DE$,又AD交BE於C. (第七十二圖)

證$\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}$, $\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{EB}$, $\frac{DA}{CA}=\frac{EB}{CB}$.

證: 求比例$\frac{CD}{DA}$,須於長線CD上截短線DA,設有餘段,則於AD上截之,再有餘段,則於第一次餘段上截之,依此截割,必致無餘,而末次之餘段,即為CD與DA之公準個。



第七十二圖

設CD含此項公準個m又DA含n.

則$\frac{CD}{DA}=\frac{m}{n}$. (第七十二圖之$\frac{CD}{DA}=\frac{6}{4}$)

求$\frac{CE}{EB}$之法如下:

從CA之諸分點作AB之平行線.

所作之線,當分CE作m段,EB作n段. 何故?

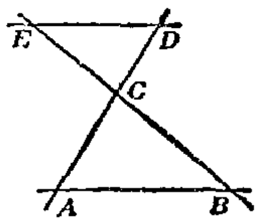
又此諸段相等. 何故?

故$\frac{CE}{EB}=\frac{m}{n}$. 何故?

$\therefore\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}$. 何故?

依此可證$\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{CB}$; $\frac{DA}{CA}=\frac{EB}{CB}$.

習 題



第七十三圖

1. 一線平行於三角形之一邊,證此線分餘兩邊成等比例。用§163證之.

12. 用第七十三圖證§163之定理.

164. 可盡形. §163之定理,謂CD與DA同有一公度。凡兩形同有一公度者,謂之可盡形。

165. 不盡形. 形非皆同有公度也,凡形之無公度者,謂之不盡形。

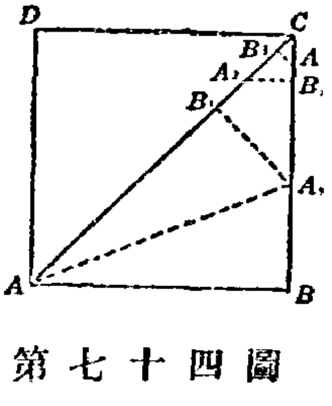
例 題

正方形之邊及對角線,爲不盡形。此觀下列證理卽知:

因$AB<AC$,(第七十四圖)故於AC上可截AB,所餘爲B_1C.於B_1作$B_1A_1\perp AC$.

用相合三角形法,證$B_1A_1=A_1B$.

因$B_1C<A_1C$,所以A_1C上可截B_1C所餘爲B_2C.如此,BC上可截B_1C,所餘爲B_2C.



第七十四圖

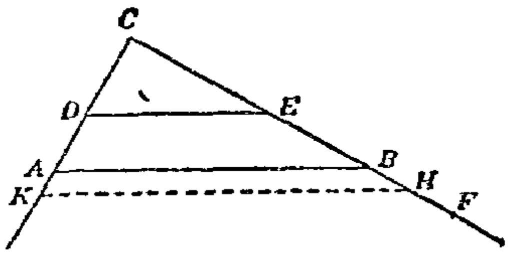
依此,可證 B_1C 上可截 B_2C 二次,所餘爲 B_3C;B_2C 上可截 B_3C 二次,仍有所餘.

每次但將前法重複,餘段雖較小然仍不絕,故此法可繼續行之無限止.

故 AB 與 AC 無公準個.

§254 中,當授 $\frac{AC}{AB}=\sqrt{2}$ 謂之無理數. 無理數者,數之不能以整數或分數(其項爲整數)表示者也.

‡166. §163 中定理之不盡形. 因有許多未證之定理。皆需不盡形之證。今當略述其綱要於此,證題用反證法。



第七十五圖

設 $\frac{DA}{CD}\neq\frac{EB}{CE}$, (第七十五圖)

則 $\frac{DA}{CD}>\frac{EB}{CE}$ 或 $\frac{DA}{CD}<\frac{EB}{CE}$.

設 $\frac{DA}{CD}>\frac{EB}{CE}$.

引長 EB,作 F 點,令 EF 之長度,足成 $\frac{DA}{CD}=\frac{EF}{CE}$……………(1).

如此,則 B 與 F 之間,可定一 H 點,令 CE 與 EH 爲可盡.

作 $HK \parallel BA$,

則 $\frac{DK}{CD}=\frac{EH}{CE}$.

因 $DA<DK$,

所以 $\frac{DA}{CD}<\frac{EH}{CE}$ ……………………………………………(2).

以(2)與(1)比,卽得 $\frac{EF}{CE}<\frac{EH}{CE}$.

$\therefore EF<EH$.

然此爲必無之理,故設想 $\frac{DA}{CD}>\frac{EB}{CE}$,屬於誤謬.

依此,可證 $\frac{DA}{CD}$ 不小於 $\frac{EB}{CE}$,

故 $\frac{DA}{CD}=\frac{EB}{CE}$.

167*. 定理: 若多數平行線爲兩割線所割,則第一割線之諸線段,與第二割線之相當段成等比例.

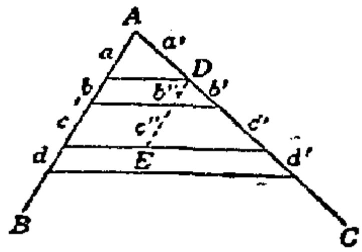
指明 $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$(§ 163).

作 $DE \parallel AB$.

證 $\frac{b''}{c''}=\frac{b'}{c'}$.

然 $b=b''$,又 $c=c''$. 何故?

$\therefore \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$; 等.



第七十六圖

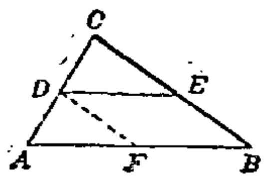
習題

若兩已知線爲兩平行線所割,則平行線之諸段,與已知線之相當段成等比例,試證之.

須證 $\frac{CD}{CA}=\frac{DE}{AB}$. (第七十七圖)

作 $DF \parallel CB$,

則 $\frac{CD}{CA}=\frac{BF}{BA}=\frac{DE}{AB}$. 何故?



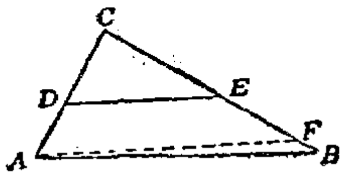
第七十七圖

※亞奇米德(Archimedes)先證此定理.

168. 定理： 若兩線割兩已知交線。令兩已知線之相當段成等比例。則兩線平行。(§ 163之逆定理)。

已知 $\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}$ (第七十八圖)

證 $AB \parallel DE$.



第七十八圖

證(反證法)：

設 AB 與 DE 不平行，

作 $AF \parallel DE$.

則 $\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EF}$,　　何故?

然 $\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}$.　　何故?

$\therefore \frac{CE}{EF}=\frac{CE}{EB}$.　　何故?

$\therefore CF \cdot EB = CE \cdot EF$.　　何故?

$\therefore EB=EF$.　　何故?

然此事不合理.　　何故?

故設想 AB 與 DE 不平行之屬於誤謬.

故 $AB \parallel DE$.

習　題

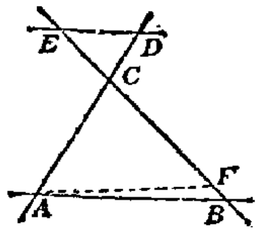
證下列各題:

1. 若 $\frac{CA}{CD}=\frac{CB}{CE}$,(第七十八圖)則 $DE \parallel AB$。

2. 三角形任兩邊之中點聯線與第三邊平行。

先證兩邊成等比例。然後用§ 168證之。

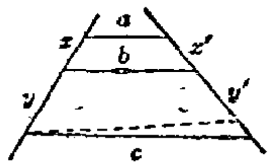
3.　用第七十九圖證§168.



第七十九圖

4.　第八十圖中$a\parallel b$;又$\frac{x}{y}=\frac{x'}{y'}$.

證$c\parallel b$.

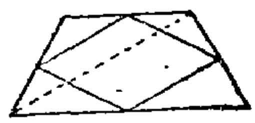


第八十圖

5.　梯形之中線。與底平行。

6.　若四邊形之諸頂角。爲三角形諸邊之中點。及三角形之一頂角。則原形爲平行四邊形。

7.　四邊形諸邊之中點。可作平行四邊形之諸角頂。(第八十一圖)


第八十一圖

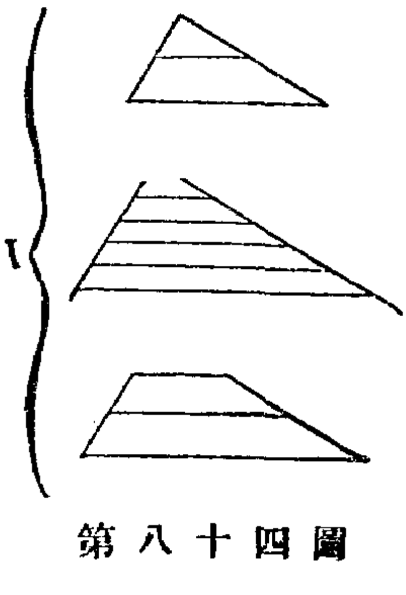
先作對角線。後用習題2證之。

169. 關於等比例線段各定理之提要(§§ 159—68).

1.　若一線平分三角形之一邊。又與第二邊平行。則此線必平分第三邊。(見第八十二圖)

2.　若一割線爲多數平行線所截。成相等之線段。則各割線上所截之線段皆等。(第八十三圖)

3.　設從梯形一不平行邊之中點作一線。令與梯形之底平行。則此線平分他不平行邊。(第八十四圖)


第八十二圖　第八十三圖

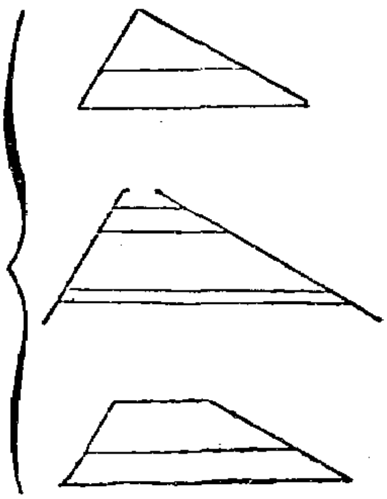
第八十四圖

4. 設三角形內有一線。與一邊平行。則此線分其他兩邊成等比例。(第八十五圖)

5. 若多數平行線割兩割線。則第一割線之諸段。與第二割線之諸相當段成等比例。(見第八十六圖)

6. 梯形底邊之平行線。分兩不平行邊成等比例。(見第八十七圖)

II



第八十五圖　第八十六圖

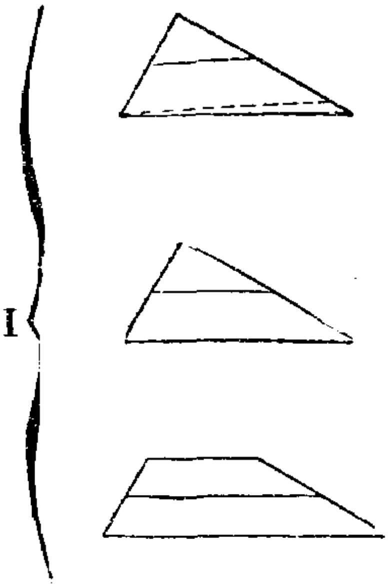
第八十七圖

7. 若兩線割兩交線。令交線之相當線段成比例。則兩線平行。(見第八十八圖)

8. 三角形任兩邊之中點聯線。與第三邊平行。(第八十九圖)

9. 梯形之中線與底平行。(見第九十圖)

III



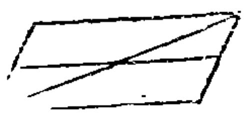
第八十八圖　第八十九圖

第九十圖

習　　題

1. 若四邊形兩對邊之中點聯線與對角線互相平分。則此形為平行四邊形。

2. 證平行四邊形之中線與對角線相交於一公點。(第九十一圖)

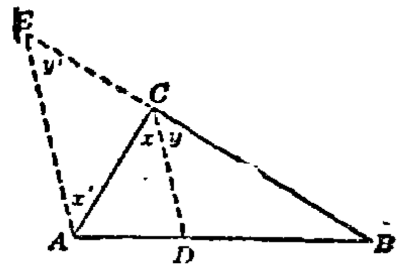


第九十一圖

170. 定理： 三角形一內角之平分線。內分對邊作線段。與隣邊成等比例。

已知 $\triangle ABC$, $x=y$(第九十二圖)

證 $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}$.



第九十二圖

證： 引長 BC,

作 $AE \parallel DC$,

則 $\frac{AD}{DB}=\frac{EC}{CB}$. 何故？

$x=x'$. 何故？

$y=y'$. 何故？

$x=y$, 何故？

$\therefore x'=y'$. 何故？

$\therefore EC=CA$. 何故？

$\therefore \frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}$. 何故？

習　　題

1. 一線經過三角形之頂角。又分此角之對邊作線段與其餘兩邊成等比例。證此線平分兩邊所夾之角。

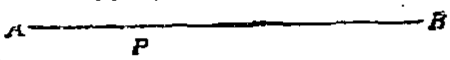
2. 第九十二圖之 $AC=8$, $CB=10$, $AB=9$. 求 AD 及 DB 之長。

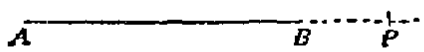
3. 第九十二圖之 $AC=5$, $CB=4$, $DB=3$. 求 AD 及 AB 之長。

4. 設 $CA=8$, $CB=16$, $AB=12$. (第九十二圖) 求 AD 及 DB。

171. 線段之外分. AB上之P點分AB成AP與PB兩段,(第九十三圖)。設以AB之方向爲正,BA之方向爲負。則$(+AP)+(+PB)=(+AB)$。設P在AB之外分。如第九十四圖。則AP爲正,PB爲負。然$(AP)+(PB)=(+AB)$仍屬眞確。因此方程式,AP與PB謂之AB之部分。AB則謂之以P外分。如此,AB之外分,猶內分然。其兩部分之量法,一爲由A至P。一爲由P至B。

第九十三圖





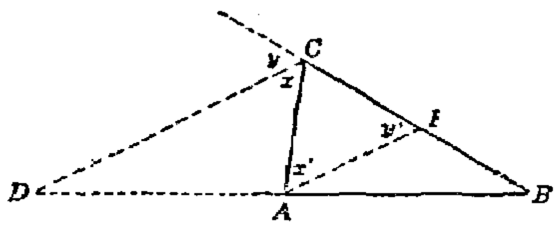
第九十四圖

172. 定理: 三角形一外角之平分線,外分對邊作線段,且與別兩邊成等比例。*

已知$\triangle ABC$, $x=y$.

證 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AC}{CB}$.

證理與§170同.



第九十五圖

173. 調和分割. 依同一之比例,截分一線之外分及內分,謂之調和分割。

習　　題

證三角形一內角之平分線與同頂外角之平分線,調和分割此角之對邊。

---

*學派司(Pappus)設想此定理。派達哥拉士(Pythagoras)同時之人首創線之調和分割法,(見屈六基(Tirpfke)之初等數學史第二卷82頁),

求 作 題

174. 第四項比例. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$之比例中。d 爲 a, b, 及 c 之第四項比例。

習 題

1. 已知三線段。求作其第四項比例。

已知線段 a, b, c,

求作 a, b, c,之第四項比例。

a) 代數解法: 設 x 爲第四項比例,量 a, b, c, 將所得之數,代於 $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$.

解此方程得 x,

作 x 長之線.

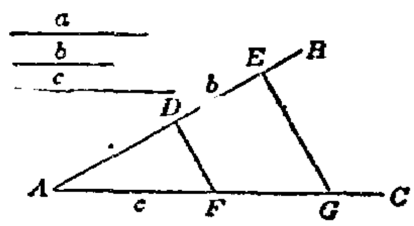
此卽爲第四項比例.

b) 幾何解法: 於兩交線之一線上如 AB,截 $AD=a$, $DE=b$,(第九十六圖).

於 AC 線上,截 $AF=C$.

作 DF 線.

作 $EG \parallel DF$.



第九十六圖

則 FG 卽爲第四項比例. 用§163證之.

欲驗求作是否眞確,須量四線至小數兩位,以驗四數是否成等比例.

2. 用方程式,求 1, 2, 8, 之第四項比例。

3. 解 x: 設 $\frac{x}{57}=\frac{4}{13}$。

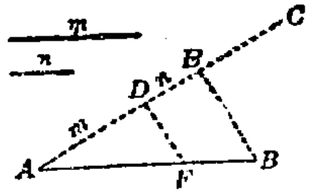
175. 第三項比例. 等比例 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 中。c 為 $a, b,$ 之第三項比例。

習　　題

求作兩線段之第三項比例: (a) 用代數解法(依§174之第一題中(a)之法); (b)用幾何解法如§174之(b)。

176. 求分一線段令成已知比例. 內分線段 AB。令成 $\frac{m}{n}$ 之比例。其意為於 AB 上求一 P 點。使 $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$ 也(見§171)。外分 AB 令成 $\frac{m}{n}$ 之比例,其意為於 AB 之引長線上。求一 P' 點,令 $\frac{AP'}{P'B}=\frac{m}{n}$ 也,(見§171)

習　　題



第九十七圖

1. 內分一線段。令成 $\frac{m}{n}$ 之比例。

設 AB(第九十七圖)為已知線段.

作 AC 線.令過 A 點,又截 $AD=m, DE=n$.

作 EB 線。又作 DF 線,令過 D 點,並令 $DF \parallel EB$.

則 F 內分 AB,成 $\frac{m}{n}$ 之比例. 量線段,即知其眞確.

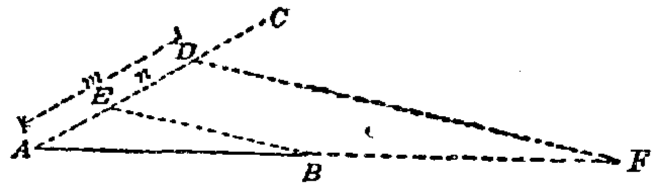
試述證理.

2. 用§170之理。內分一線段,令成 $\frac{m}{n}$ 之比例。

3. 外分一線段。令成 $\frac{m}{n}$ 之比例。

作 $AD=m$,(第九十八圖) $DE=n$, 作 EB 線,又作 $DF \parallel EB$.

則 $\frac{AF}{FB}=\frac{m}{n}$. 試證之.



第九十八圖

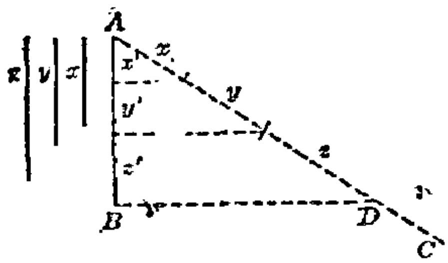
4. 用§172之理,指明外分一線段之法。

5. 一線 $AB=18$ 內分或外分於 P 點,設 $AP=2$; 3; 6; 9; 20; 30;問 $\frac{AP}{PB}$ 之比爲何?

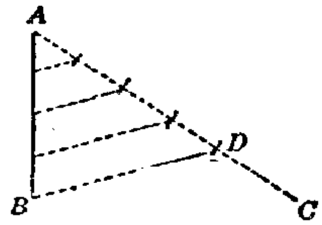
6. 求分一線 AB,令與已知線段 x, y, z 成等比例。

於第九十九圖之 AC 線上,截 x, y, z 諸線段,又作 BD 線.從各分點作 BD 之平行線,則 $\frac{x'}{y'}=\frac{x}{y}$. 何故?

$\frac{y'}{z'}=\frac{y}{z}$. 何故?



第九十九圖



第一百圖

7. 求分一線,令其各分段相等。

求作法與第六問同,但將 x, y, z 改爲相當段可也.

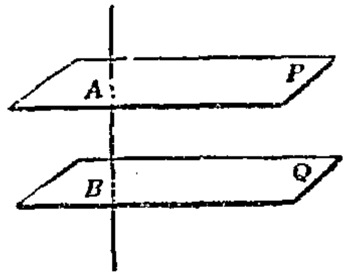
空間中之線與平面

177. 平面之垂線. 設有一直線,交一平面,且垂於經過交點,而全在平面內之各直線,則交平面之直線,謂之平面之垂線。

指明教室門之直棱。與地板作垂線。

指明立方體之一棱。與其一面作垂線。

178. 定理: 若兩平面同與一線垂直。則兩平面平行。



第一百零一圖

已知P與Q兩平面。各與AB垂直。

證$P \parallel Q$。*

證(反證法):

設P與Q不平行。則引長P。可使之遇Q於C。設想作CA與CB兩線。

則CA全在平面P內。 何故?

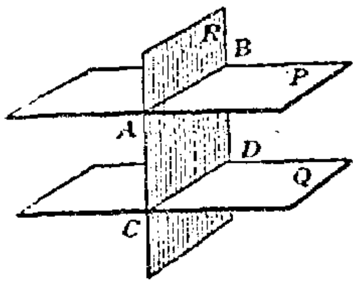
又CB全在平面Q內。 何故?

$\therefore CA$與CB皆與AB垂直。(§177)

然此事不合理。因一線與一點之間。祇可作一垂線。

故設想屬於誤謬。而P與Q平行。

179. 定理: 若兩平行平面為一第三平面所割。則相交處之線。互相平行。



第一百零二圖

已知平面$P \parallel$平面Q。又平面R交平面P於AB。交平面Q於CD。如第一百零二圖。

證$AB \parallel CD$。

證(反證法):

* 凡證空間中之線與平面諸定理時。若設想教室中之線與平面。代表定理之各情形。則殊爲有用。如此。天花板,地板,及牆壁之交線等。皆可代表此定理之各情形。

設AB與CD不平行。

則引長AB與CD,可使彼此相遇於E點。因此兩線同在平面R也。又E在AB與CD兩線上。故E亦在P與Q兩平面內。

何故?

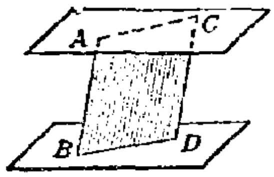
然此與$P\parallel Q$相反。

故設想爲誤謬而$AB\parallel CD$。

180. 定理: 平行線段爲平行平面所截者必相等.

證第一百零三圖之$ACDB$爲平行四邊形,

則$AB=CD$. 何故?



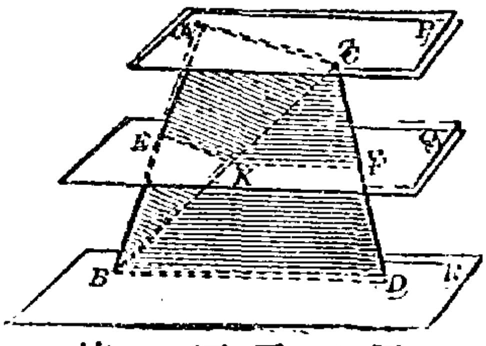
第一百零三圖

181. 定理: 若三(或三以上)平行平面。爲兩割線所割。則兩割線之相當段成等比例。

已知平面$P\parallel Q\parallel R$爲AB與CD所割,(第一百零四圖)

證$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}$.

證: 作CB,割Q於K.通過AB, BC又BC, CD各作平面,割P, Q, R,諸平面於AC,EK,KF,BD.



第一百零四圖

$P\parallel Q$,　何故?

$\therefore AC\parallel EK$.　何故?

$Q\parallel R$,　何故?

$\therefore KF\parallel BD$.　何故?

$$\therefore \frac{AE}{EB}=\frac{CK}{KB}.$$ 何故?

又 $$\frac{CK}{KB}=\frac{CF}{FD},$$ 何故?

$$\therefore \frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}.$$ 何故?

提　要

182. 此章授下列各名詞之意義:

等比例。

斜線尺，摹圖器，比例規，

梯形之中線，

可盡形與不盡形。

線段之內分與外分。

調和分割。

第四項比例，第三項比例。

平面之垂線，

183. 此章證下列各定理:

1. 若一線平分三角形之一邊，又與第二邊平行，則此線平分第三邊，

2. 若三或三以上平行線，截一割線，令成相等之線段，則此諸平行線，可截各割線，亦成相等之線段。

3. 若兩平行線割兩交割線，則一割線上所截之線段與別割線上所截之相當段成等比例。

4. 若多數平行線，割兩割線，則一割線上所截之線段，與別割線上所截之相當段成等比例。

5. 若兩線割兩已知交線，令兩已知線之相當段成等比例，則兩線平行。

6. 三角形兩邊之中點聯線。與第三邊平行。

7. 三角形一內(外)角之平分線。內(外)分對邊作線段。與隣邊成等比例。

8. 若兩平面同與一線垂直。則兩平面平行。

9. 若兩平行平面爲一第三平面所割。則相交處之線。互相平行。

10. 平行線段爲平行平面所截者。必相等。

11. 若三或三以上平行平面。爲兩割線所割。則兩割線之相當段成等比例。

184. 此章授下列各求作法:

1. 求作三已知線段之第四項比例。

2. 求作兩線段之第三項比例。

3. 內分或外分一線段。令成比例。

4. 求分一線。令與已知線段成等比例。

5. 求分一線。令各分段相等。

第六章

等比例 劈因數 變數

基礎定理

185. 由本書第一編。已知解題中等比例之必要。本編第五章。授等比例線段。此章則以授等比例之性質爲目的。

186. 定理： 等比例之中項相乘。等於外項相乘。

證： 將方程 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 之兩端各乘 bd.

上列定理。頗爲緊要。蓋用以察驗等比例。最爲簡便。且易於消去分數。此項方程式。頗似等比例式。

習　題

用§186之定理。解下列各題：

1. 下列各題。何者爲等比例？

$$\frac{15}{9}=\frac{10}{6};\quad \frac{8}{15}=\frac{4}{7};\quad \frac{6}{18}=\frac{7}{21};\quad \frac{4}{7}=\frac{12}{20}.$$

2. 消去下列各方程之分數。然無須解方程：

$$\frac{4}{x}=\frac{20}{3};\quad \frac{180-x}{x}=\frac{5}{14};\quad \frac{2+x}{3-x}=\frac{5+x}{8-x};$$

$$\frac{x-y}{10}=\frac{7}{x^2+xy+y^2};\quad \frac{8}{u+v}=\frac{u^2-uv+v^2}{2};$$

$$\frac{x+2}{x-4}=\frac{x+6}{x-7};\quad \frac{x-1}{x^2+3x+4}=\frac{x+2}{2x^2-4x+7}.$$

3. 解方程 $\frac{x}{2}=\frac{12}{8}$.

187. 下列各習題。指出等比例可從表示乘積相等之方程得之，

習　題

1. 一方程爲 $8\cdot7=14\cdot4$。其四因數,則分別整列之如下。有成方程者。有僅與方程相似者。試用察驗等比例之法。指出何者爲等比例。

$$1.\ \frac{8}{14}=\frac{4}{7}.\quad 3.\ \frac{4}{7}=\frac{8}{14}.\quad 5.\ \frac{8}{7}=\frac{14}{4}.\quad 7.\ \frac{8}{4}=\frac{7}{14}.$$

$$2.\ \frac{7}{4}=\frac{14}{8}.\quad 4.\ \frac{14}{8}=\frac{7}{4}.\quad 6.\ \frac{7}{14}=\frac{8}{4}.\quad 8.\ \frac{8}{14}=\frac{7}{4}.$$

2. 第一題之各等比例。由 4, 7, 8 及 14 組合而成。惟排列此四數。有一定之秩序。以方程 $8\cdot7=14\cdot4$ 之第幾位爲中項。則成等比例? 取第幾位爲外項。可成等比例?

3. 由 $3\cdot28=4\cdot21$,組成等比例四式。每次用察驗等比例法證之。

4. 由 $a\cdot12b=3a\cdot4b$,組成等比例四式。並察驗之。

從第一第四兩題。得下定理:

188. 定理: 設有兩因數之乘積、等於別兩因數之乘積。則任取一乘積之兩因數爲中項。別乘積之兩因數爲外項。卽得等比例。

已知　$ad=bc$,

證　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

證: 以 bd 除方程 $ad=bc$ 之兩端.

習　題

1. 設 $ad=bc$。證下列各式皆爲等比例:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},\quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c},\quad \frac{c}{a}=\frac{d}{b},\quad \frac{c}{d}=\frac{a}{b}.$$

2. 列成等比例:

(1) $5a-10b=4x^2-3xy$.

(2) $16a^2-2axy=ax+ay-az$.

(3) $(x+y)^2=m^2-2mx+x^2$.

(4) $K^2+8K+16=b^2-6b+9$.

(5) $16a^2-25b^2=36-25y^2$.

(6) $a^2-b^2=c^2-d^2$.

(7) $p^4-16=a^2-64$.

(8) $ax+ay+az=br+bs+bt$.

(9) $5m^2+10mn-15n^2=9a^2-4ab-13b^2$.

(10) $6x^2+13x+2=a^2+2a+1$.

(11) $x^2-5x+6=y^2+3y-28$.

劈 因 數

189. 温習: 筆算中有察驗整除性法,藉以知 2, 3, 5, 9, 11 等,是否爲一數之約數,由本書第一編。則知求多項式之因數法,今略言之如下。

多項式: 公獨項因數如 $ax+ay$. 此處之公因數爲多項式之一因數。欲求别因數,但將多項式除以公因數卽得。

如此, $ax+ay=a(x+y)$.

求以下各式之因數:

1. $3x+3y$.
2. $cx^2+dx^3+fx^4$.
3. $5a^3b+24a^4c-10a^5d$.
4. $3a^2b-12ab^2$.
5. $8x^3y^3+4x^2y^3$.
6. $3x^2y^2-2xy-3xy^3$.
7. $15a^3x-10a^3y+5a^3z$.
8. $32a^3b^3-ab^6$.

二項式: 兩平方之較如x^2-y^2.此處之因數爲兩平方根之較乘兩平方根之和。

如此, $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$.

求以下各式之因數:

1. $1-144x^2y^2$.
2. $\frac{x^2}{y^2}-1$.
3. x^6-25y^2.
4. $(b+c)^2-a^2$.
5. $(a+b)^2-(c+d)^2$.
6. $9a^2-16$.
7. $16a^2-25$.
8. $1-r^4$.
9. $4x^2-9y^2$.
10. a^4-b^4.
11. x^6-y^6.

三項式: (1)平方數三項式,如$x^2+2xy+y^2$,又$x^2-2xy+y^2$.

每式中有兩相等因數。卽兩平方項平方根之和。設其餘項之號爲+。或兩平方項平方根之較。設其餘項之號爲−。

如此, $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$.

$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$.

求以下各式之因數:

1. $4m^2-12am+9a^2$.
2. $a^2-8a+16$.
3. $9+30x+25x^2$.
4. $36x^2+25y^2-60xy$.
5. $25+80r+64r^2$.
6. $c^2-16c+64$.
7. x^4+30x^2+225.
8. $121a^2+198ay+81y^2$.

(2)三項式之如 ax^2+bx+c 者。其因數當以試驗法得之。

例如 $3x^2+17x+10$ 之因數,其一為 $\left\{\begin{matrix}3x+2\\x+5\end{matrix}\right.$ 乘之知 $3x^2+17x+10=(3x+2)(x+5)$.

求以下各式之因數:

1. $2x^2+11x+12$.
2. $8c^2+4bc-12b^2$.
3. $3x^2-17x+10$.
4. $11a^2-23ab+2b^2$.
5. $8y^2-31y+21$.
6. $5x^2-38x+21$.
7. $7k^2+123k-54$.
8. $5m^2-29mn+36n^2$.

190. 有因數之多項式增論:

習　　題

1. 依下列之表示先乘,後立一法例,藉以得多項式乘積之捷法如下:

1. $(x+y)(x^2-xy+y^2)$.
2. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$.
3. $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
4. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
5. $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$.
6. $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$.
7. $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$.
8. $(3a^2+5b^2)(9a^4-15a^2b^2+25b^4)$.
9. $(7a^3-4b^2)(49a^6+28a^3b^2+16b^4)$.
10. $(2a^2b^2-3c^2)(4a^4b^4+6a^2b^2c^2+9c^4)$.

2. 立一法例,以求兩立方之和之因數。

3. 立一法例,以求兩立方之較之因數。

4. 求 $64a^3+27b^3$ 之因數。

此式爲兩立方之和。$64a^3=(4a)^3$; $27b^3=(3b)^3$.

故一因數爲 $64a^3$ 及 $27b^3$ 之立方根之和,卽 $(4a+3b)$.

第二因數可由第一因數求得之,其法如下: 首項方卽 $(4a)^2=16a^2$; 減兩項之相乘積,卽 $-(4a)(3b)=-12ab$; 加末項方卽 $(3b)^2=9b^2$.

$$故\ 64a^3+27b^3=(4a+3b)(16a^2-12ab+9b^2).$$

5. 求 $8x^3-125y^3$.

以乘法指明下式:

$$8x^3-125y^3=(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2).$$

解明從因數 $2x-5y$ 之兩項,如何可得因數 $4x^2+10xy+25y^2$

6. 由 $x^2-y^2=m^3+n^3$, 列成等比例。(用 § 188)

7. 由 $p^3-q^3=a^2-b^2$, 列成等比例。

劈下列各題之因數,宜多用心算推之:

8. a^3+b^3.

9. a^3-b^3.

10. $8x^3-y^3$.

11. m^3+27n^3.

12. $8c^3-d^3$.

13. $343+x^3$.

14. x^3+64.

15 $x^3+\frac{1}{8}$.

16. ax^3-8ay^3.

17. $216-27a^3$.

18. $125x^3+8y^3$.

19. $27a^3+64b^3$.

20. $512c^3-27d^3$.　　24. $(m+n)^3-x^3$.

21. k^3x^3+343.　　25. $(w+3)^3-t^3$.

22. $729a^6+216c^6$.　　26. $(5m-n)^3+c^3$.

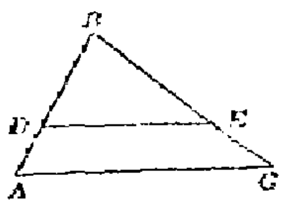
23. $(a+b)^3+c^3$.　　27. $(s+2t)^3+27x^3$.

從已知等比例所得之等比例

191. 等比例,可從他等比例求得之;其法如下:

習　　題

1. 用 2 公分(生的米突)之長度爲單位,量 AB, DB, DA, EB, EC,及 BC (第一百零五圖),又以除法指明



第一百零五圖

(1) $\dfrac{BD}{DA}=\dfrac{BE}{EC}$.　(3) $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{EC}{EB}$.

(2) $\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{DA}{EC}$.　(4) $\dfrac{BA}{BD}=\dfrac{BC}{BE}$.　(5) $\dfrac{BA}{DA}=\dfrac{BC}{EC}$.

2. 用實驗等比例法,察下列各題:

(1) $\dfrac{4}{7}=\dfrac{12}{21}$.　(4) $\dfrac{4+7}{4}=\dfrac{12+21}{12}$.

(2) $\dfrac{4}{12}=\dfrac{7}{21}$.　(5) $\dfrac{4+7}{7}=\dfrac{12+21}{21}$.

(3) $\dfrac{7}{4}=\dfrac{21}{12}$.　(6) $\dfrac{7-4}{4}=\dfrac{21-12}{12}$.

3. 第二題第一比例諸項之位置,須作何改變,則成第二比例? 第二比例謂之由第一比例交替而成,

4. 第一比例,須作何改變,則成第三比例? 第三比例,謂之由第一比例逆變而成。

5. 第一比例。作何改變。則成第四比例? 第四比例。謂之由第一比例相加而成。

6. 第一比例。須作何改變。則成第五比例?

7. 第一比例。作何改變。則成第六比例? 第六比例。謂之由第一比例相減而成。

192. 交替: 以交換一已知等比例之中項或外項。而成第二等比例。則第二等比例謂之由已知等比例交替而成。

習 題

1. 交替等比例,$\frac{15}{27}=\frac{10}{18}$.

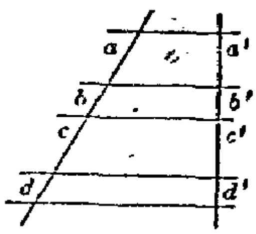
2. 交替 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

3. 指明若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 又 $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$.

證此當先用§186之定理,後用§188.

4. 指明若 $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ 又 $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$ 等,(第一百零六圖)

則 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ 等.



第一百零六圖

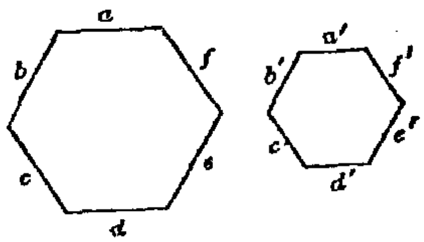
5. 若第一百零七圖之兩等邊多邊形之邊數相等。則其相當邊成等比例。試證之。

指明 $\frac{a}{b}=1$ 又 $\frac{a'}{b'}=1$.

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$. 何故?

$\therefore \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$. 何故?

依此，$\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ 等.



第一百零七圖

193. 逆變： 以顛倒一已知等比例之比，而成第二等比例。則第二等比例謂之由已知等比例逆變而成。

見§191，第2, 1, 8，問.

習　　題

1. 逆變 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 以成等比例。

2. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，證 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

用§§186, 188之定理以證之.

194. 前項. 後項. 比例 $\frac{AB}{CD}$ 或 $\frac{a}{b}$ 中，AB 與 a 謂之前項。CD 與 b 謂之後項。

195. 加. 減. 定理： 等比例中各取其比之和(或較)。比其前項或後項。亦成等比例。

如此，由 $\frac{8}{5}=\frac{16}{10}$，可得等比例

$$\frac{8+5}{5}=\frac{16+10}{10},\text{ 又 }\frac{8-5}{5}=\frac{16-10}{10}.$$

若取其和。則所成之比例。謂之由已知比例相加而成，若取其較。則謂之相減而成。

已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

證 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

解析:

1. 設 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$,
2. 則 $(a+b)d=(c+d)b$. 何故?
3. $\therefore ad+bd=cb+bd$. 何故?
4. $\therefore ad=cb$. 何故?
5. $\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 何故?

此證可倒述上列各級而得之。其式如下:

證:

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 何故?
2. $ad=cb$. 何故?
3. $ad+bd=cb+bd$. 何故?
4. $(a+b)d=(c+d)b$. 何故?
5. $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. 何故?

注意得此證之法。當先設想欲證者爲眞確。後用正當之理論。推斷一眞實之理。此眞實之理卽爲假設。因各級皆可倒述。故由設想起。倒述各級。以至於終結。卽可得證。

此末段方爲定理之證。

依此,證 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

196. 定理: 等比例中。各取其比之和。比其比之較。可成等比例。

如此，若 $\frac{7}{3}=\frac{21}{9}$，則 $\frac{10}{4}=\frac{30}{12}$.

習　　題

設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 則 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ 用解析法如§195以證之.

197. 加與減. 等比例 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ 謂之由 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 加減而成。

習　　題

加減下列各比例。令成他比例。

1. $\frac{2m+3n}{2m-3n}=\frac{2s+3t}{2s-3t}$.

$$\frac{2m+3n+2m-3n}{2m+3n-2m+3n}=\frac{2s+3t+2s-3t}{2s+3t-2s+3t}\text{或}\frac{4m}{6n}=\frac{4s}{6t}\text{或}\frac{m}{n}=\frac{s}{t}.$$

2. $\frac{a}{b}=\frac{s}{t}$.

3. $\frac{x-a+b}{x+a-b}=\frac{a-b-x}{a+b+x}$.

4. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=3$.

求 x:

5. $\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}}$.

先加減，後解。

198. 定理: 若兩或兩以上之比例相等。則諸前項之和，與諸後項之和相比。等於任一前項與其後項相比。

依此定理則從 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\cdots\cdots$ 可得

$$\frac{2+4+8+\cdots\cdots}{3+6+12+\cdots\cdots}=\frac{2}{3}.$$

已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\cdots\cdots$,

證 $\frac{a+c+e+g+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots$

證:
$$\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{a}{b}. & \text{何故?}\\ \frac{c}{d}=\frac{a}{b}. & \text{何故?}\\ \frac{e}{f}=\frac{a}{b}. & \text{何故?}\\ \frac{g}{h}=\frac{a}{b}.\ \text{等.} & \text{何故?}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}ab=ab. & \text{何故?}\\ cb=ad. & \text{何故?}\\ eb=af. & \text{何故?}\\ gb=ah. & \text{何故?}\end{cases}$$

加 $(a+c+e+g+\cdots\cdots)b=a(b+d+f+h+\cdots\cdots)$,

$\therefore \frac{a+c+e+g\cdots\cdots}{b+d+f+h\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 等. 何故?

習　　題

證下列各題:

1. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 則 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$; $\frac{a^3}{b^3}=\frac{c^3}{d^3}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$.

2. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 則 $\frac{2a}{3b}=\frac{2c}{3d}$; $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$.

用解析法證下列各題:

3. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{3a+b}{b}=\frac{3c+d}{d}$.

4. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則 $\frac{a}{c}=\frac{a+5b}{c+5d}$.

5. 設 $\frac{x}{y}=\frac{s}{t}$，則 $\frac{3y+2t}{4y}=\frac{3x+2s}{4x}$.

6. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，則 $\frac{a+2c}{b+2d}=\frac{c+3e}{d+3f}=\frac{e+5a}{f+5b}$.

7. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則 $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a^2d}{b^2c}$.

解析: 設 $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a^2d}{b^2c}$,

則 $ab^2c+b^2c^2=a^2bd+a^2d^2$. 何故?

因 $bc=ad$, 何故?

又 $b^2c^2=a^2d^2$, 何故?

$\therefore ab^2c=a^2bd$. 何故?

$\therefore bc=ad$. 何故?

倒述解析各級,卽可得證.

8. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則 $\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{ab+cd}{ab-cd}$.

9. 設 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，則 $\frac{a^2+b^2}{a}=\frac{b^2+c^2}{c}$.

10. 設 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，則 $\frac{a+c}{b^2+c^2}=\frac{a-c}{b^2-c^2}$.

11. 設 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，則 $\frac{a^2+ab}{a}=\frac{b^2+bc}{c}$.

12. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，則 $\frac{a+c}{b+d}=\frac{c+e}{d+f}=\frac{e+a}{f+b}$.

199. 由 §§ 192—98, 知下列各等比例, 可從 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 得之:

1. $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 又 $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$,　交替.

2. $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$,　逆變.

3. $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$ 又 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$,　加.

4. $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$ 又 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$,　減.

5. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$,　加減.

6. $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.　§198: 諸前項之和。與諸後項之和相比。等於任一前項與其後項相比。

習　題

1. 分40令成3:5之比例。

2. 分44令成2/3:4/5之比例。

3. 分m令成$a:c$之比例。

4. 有一分數。等於2/3。其分母大於其分子5。求分數。

5. 一分數等於2/3。若兩項各加3。則等於7/10。求分數

欲求之分數。屬於 $\frac{2x}{3x}$ 式，　何故?

則 $\frac{2x+3}{3x+3}=\frac{7}{10}$。何故?　試解之。

6. 一分數等於2/5。若分母加5。分子減5。則等於3/10。求原分數。

†7. 解下列各題。設原分數等於5/7:

1. 若兩項各加 1,則等於8/11。求原分數。

2. 若兩項各減 1,則等於7/10。求原分數。

3. 若分子加 1,分母減 1,則等於4/5。求原分數。

4. 若分子減 1,分母加 1,則等於7/11。求原分數。

8. 從$\frac{1}{x}=\frac{2}{y}=\frac{3}{7}$,求 x 及 y。

等比例與變數之關係

200. 正變. 若兩數同變,而其比例不變,則一數可謂與別數正變,或一數隨別數而變。

如此,若$\frac{y}{x}$之比例爲常數,y 與 x 恆同變,則 y 可稱爲與 x 正變。 $\frac{y}{x}=c$ 之代數方程,與謂 y 與 x 正變之意同。指明 y 爲 x 之函數。

201. 正變與等比例之關係. 設 y 與 x 正變,又 x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3,等爲 x 與 y 之相當同數。

因 $y=cx$,所以 $\frac{y}{x}=c$, 又 $\frac{y_1}{x_1}=c$, $\frac{y_2}{x_2}=c$, $\frac{y_3}{x_3}=c$ 等,

故,$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$。

由此方程,若已知其餘三數,可定 x_1, y_1, x_2, y_2,各數。

習　　題

1. 已知一長方形地之廣度,其面積與長度正變。地長30呎,面積爲2100方呎,若面積爲10500方呎,問其長爲幾尺?

因面積與長度正變,

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{l_1}{l_2}.$$

$$A_1=2100.$$

$$A_2=10500.$$

$$l_1=30.$$

故 $$\frac{2100}{10500}=\frac{30}{l_2}.$$

解方程得 l_2

2. 某項生絲之價。與其碼數正變。若100碼值$61.25.試求90碼之價。

3. 銅絲100呎。重35磅。問175磅重之銅絲。長若干呎?

4. y 隨 x 而變。若 $x=10$。則 $y=80$。設 $x=18$。問 y 等於多少?

202. 倒變. 若兩數之此數變。彼數亦變。而此數與彼數之相當同數所成之乘積不變。則此數可謂與彼數倒變。

$xy=c$ 之代數方程。與謂 y 與 x 倒變之意同。

203. 倒變與等比例之關係. 設 y 與 x 倒變。又 x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; 等爲 x 與 y 之相當同數。

因 $xy=c$,所以 $x_1y_1=c$, $x_2y_2=c$, $x_3y_3=c$,等.

故 $x_1y_1=x_2y_2$.

若已知 x_1, x_2, y_1, y_2 四數中之三數。則第四數即可由此方程得之。

習 題

1. 自由車抽氣管中空氣之容積。與其唧子上之壓力倒變。若壓力重18磅。則容積爲16立方吋。設容積爲2立方吋。問壓力重幾磅?

2. 一汽箭中蒸汽之壓力。與其容積倒變，若每方吋壓力重100磅。則容積爲50立方吋。設容積爲75立方吋。問每方吋壓力重幾磅?

3. x 與 y 倒變。若 $x=\frac{2}{3}$；則 $y=\frac{3}{4}$。設 $x=1\frac{1}{2}$。求 y。

204. 史略： 等比例。猶別種數學然。於其原理未明以前。早已有人用之。歷二千餘年來所研究之等比例兩種，一爲關於數目之等比例。一爲關於線段及面積之等比例。

關於數目之等比例。爲數學中最早之一種。古代著名數學書亞米斯集。(The Book of Ahmes) 於紀元前1700年。爲埃及書家所書。其中以等比例爲一要目。他如加爾其亞。(Chaldes) 腓尼士亞。(Phoenicia) 印度。(Hindu) 中國。(China) 及希臘 (Greek) 古書中。等比例亦俱佔要位。而希臘，阿拉伯。(Arab) 印度。謨阿。(Moor) 羅馬。(Rome) 及上中古之歐洲學者。亦無不讚賞等比例之理。中古時之幾何學，及商業算學中。始推廣其理。直至五十年前。則單比例與複比例遂用以構造多數之高等算學。

希臘人首先考察關於線段及面積之等比例原理。然等比例之本源。則得自埃及(Egypt) 或巴比倫 (Babylon) 也。兌

剌士(Thales)(紀元前640年至546年)用等比例於不覺。派達哥拉士(Pythagoras)(紀元前529以後)同時之人。用之至廣。亞企泰斯(Archytas)(紀元前428年至347年)擴張其理論。伯拉圖(Plato)(紀元前429年至348年)知其理頗詳細。游道射士(Eudoxus)(紀元前408年至355年)改編其式。務求完美。歐几利得(Euclid)(紀元前300年)之幾何學初義第五編與第六編之半。詳論關於線段與面積之等比例。其式則依游道射士也。

凡於數學界稍佔聲譽者。皆嘗盡力於等比例。以其在幾何學中。最合實用。且他種數學要素。亦多依之而成者也。

提　要

205. 本章所授各項如下.

交替。	正變。
逆變。	倒變。
等比例用加。	前項。
等比例用減。	後項。
加減。	

206. 本章所證各定理如下:

1. 等比例之中項相乘。等於外項相乘。

2. 若兩因數之乘積。等於別兩因數之乘積。則任取一乘積之兩因數爲中項。別乘積之兩因數爲外項。即得等比例。

3. 用交替法,逆變法,加法,減法,或加減法並用,則由一等比例可得別等比例。

4. 若兩或兩以上之比例相等,則諸前項之和,與諸後項之和相比,等於任一前項與其後項相比。

207. 本章劈下列各式之因數:

I. 多項式: 公有一因數者如 $ax+ay$。

II. 二項式: 兩平方之較如 x^2-y^2。

兩立方之較如 a^3-b^3。

兩立方之和如 a^3+b^3。

III. 三項式: 完全平方如 $x^2\pm2xy+y^2$。

其式爲 ax^2+bx+c 者。

208. 本章指示變數與等比例之關係。

第　七　章

相　似　多　邊　形

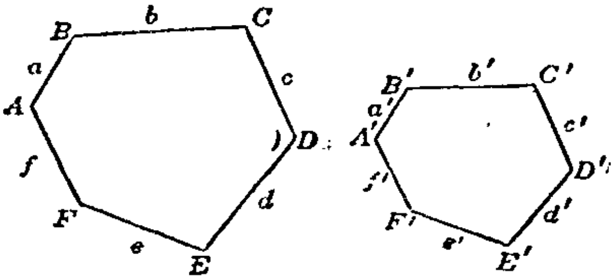
相似三角形之用法

209. 相似三角形與多邊形. 由本書第一編,知相似三角形有下列兩性質:

(1)相當邊之比例相等。

(2)相當角相等。

多邊形同有此兩性質,故相似多邊形可界說之爲相當邊比例相等,相當角相等之多邊形。多邊形$ABCDEF \backsim A'B'C'D'E'F'$之意,(第一百零八圖)可依下列兩式,以記號表示之:



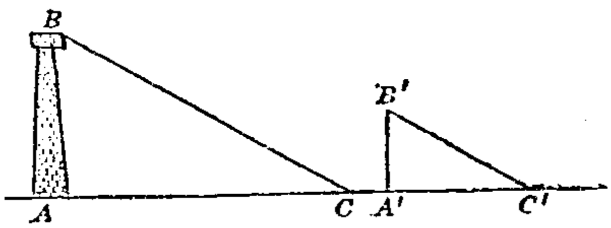
第一百零八圖

$$\begin{cases} 1.\ \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\dfrac{d}{d'}=\dfrac{e}{e'}=\dfrac{f}{f'}. \\ 2.\ \angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',\text{等}. \end{cases}$$

210. 相似三角形之用法. 多種問題,可用相似三角形解之。其法見下列各習題。

1. 求煙囪之高。

設第一百零九圖之AB爲煙囪,AC爲其影。又$A'B'$爲一直竿,$A'C'$爲其影,設日光之射線互相平行。指明$\angle C=\angle C'$。



第一百零九圖

因三角形ABC與三角形$A'B'C'$有兩角各等。故可證之爲相似三角形(§217)。

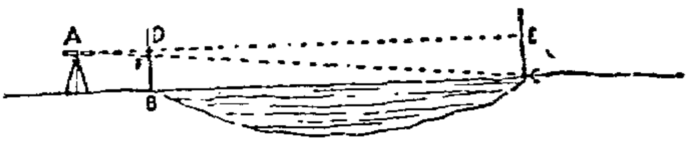
$$故\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}. \qquad 何故?$$

$$AB=AC\cdot\frac{A'B'}{A'C'}. \qquad 何故?$$

用此方程爲公式。試求一煙囪之高。設已知其影爲 108 呎。又同時一 4 呎長之直竿之影長 9 呎。

2. 測河之闊。

用望遠鏡A望河隔岸。置直立測桿於B與C。(第一百十圖)取桿上之表記於E與D。移望遠鏡俯視C點。取表記於F。比較DF與EC之長。



第一百一十圖

$EC \parallel DF$(見§373)。

$\therefore$三角形AFD與三角形ACE相似。

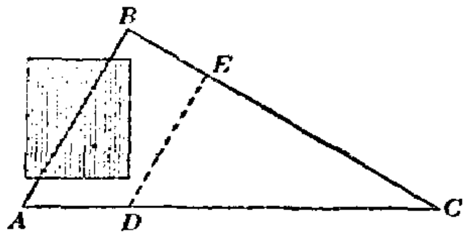
因已知三角形一邊之平行線與別兩邊成一三角形且與已知三角形成相似形,(§214)

$$故\frac{AE}{AD}=\frac{EC}{DF}.$$

$\therefore AE=\dfrac{AD\cdot EC}{DF}.$ 此式以已知之長度AD, EC, DF,表示AE.

從AE減AD,卽得ED.

8.　測一不易近接之距離。



第一百十一圖

設第一百十一圖之AB爲應測之距離。

從一選定之點C量BC與AC。

於AC上作D點。

於BC上定E點,令$\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}$.　量$DE$。

三角形CDE與三角形CAB可證之爲相似形。

因設有兩三角形。此形兩邊之比例等於彼形兩邊之比例。又兩邊所夾之角各等。則兩三角形相似。(§218)

$$故\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DC}.$$

$$AB=\frac{DE\cdot AC}{DC}.$$

如此,因已知DE, AC,與DC。故DE與AC之乘積除DC。即得AB。

†211. 用圖線求兩數目之商。

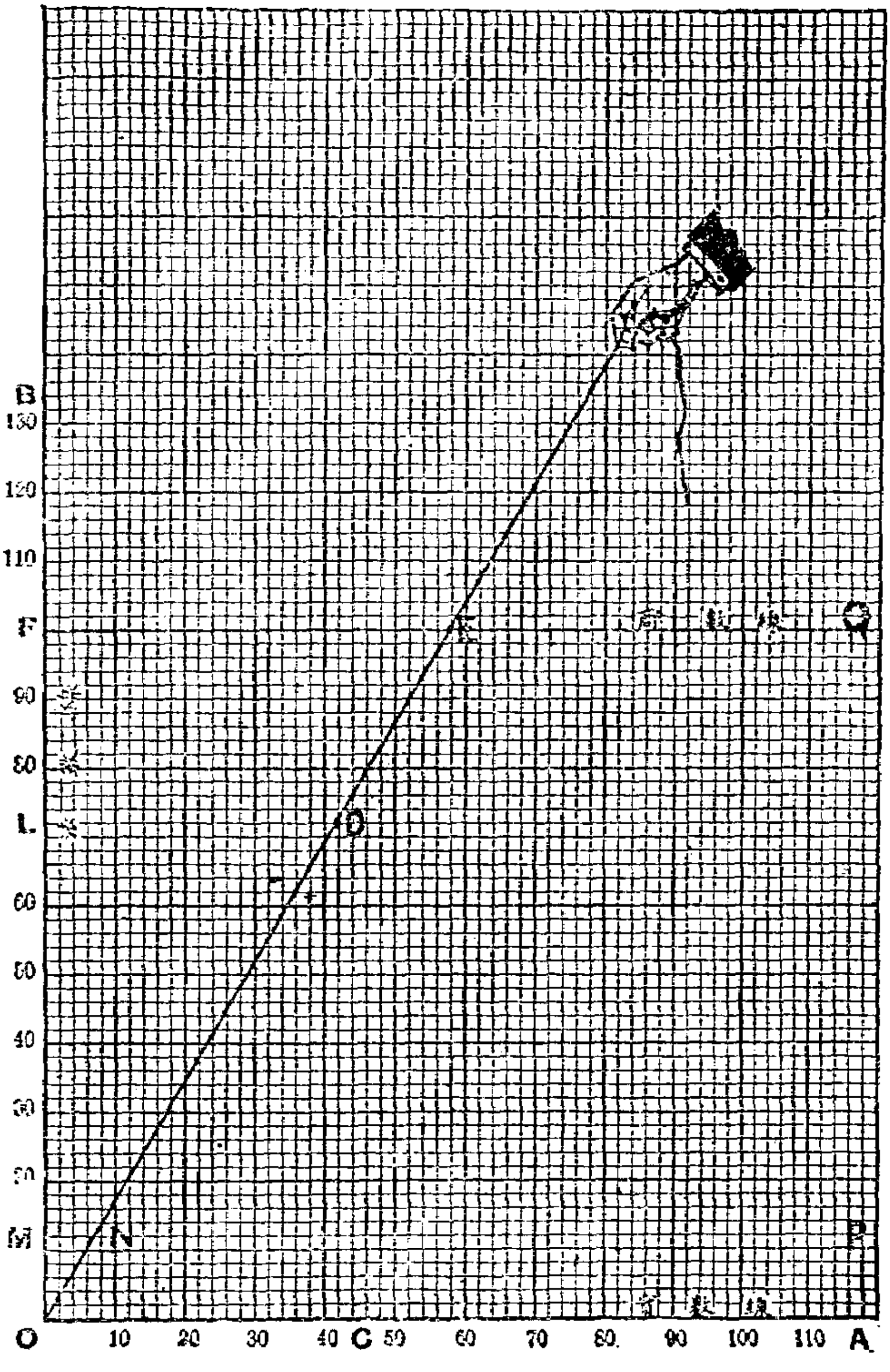
有許多器具。可用以乘除數目。或開方。第一百十二圖。則據相似三角形之理。以求數目之商。

設OA爲實數線。OB爲法數線。

題爲42除以72。　設以一大方之邊代10.

截$OC=42$;又由C直截$CD=72$.

將繫於O點之繩引直,令過D點,過商數線FQ於E.



第一百十二圖

則 $\frac{FE}{100}$ 代商數 $\frac{42}{72}$.

因，OFE 與 OLD 兩三角形相似.

故，$\frac{FE}{LD}=\frac{OF}{OL}$.

於是，$\frac{FE}{OF}=\frac{LD}{OL}$.　　何故?

又　$\frac{FE}{100}=\frac{42}{72}$.

因 FE 約 $=58$ 所以 $\frac{42}{72}$ 約 $=.58$.

習　　題

1.　用第一百十二圖求下列之商數至小數兩位:

$\frac{76}{125}$, $\frac{64}{88}$, $\frac{45}{96}$, $\frac{57}{79}$.

2.　以 MP 為商數線求商數 $\frac{42}{72}$.

因　$\triangle OMN \backsim \triangle OLD$,

所以　$\frac{MN}{LD}=\frac{OM}{OL}$.

$\therefore\ \frac{MN}{OM}=\frac{LD}{OL}$.　何故?

$\frac{MN}{10}=\frac{42}{72}$.

由是。欲得商數 $\frac{42}{72}$，可取 MN 之 $\frac{1}{10}$，其數約為 .6.

依此法求商數 $\frac{68}{22}$.

3.　某校第一年級之數學班，有學生 130 人。考試時其中 21 人得 A 等。29 人得 B 等。35 人得 C 等。27 人得 D 等。18 人

不及格。問全班中百分之幾人得 A 等？ B 等？ C 等？ D 等？又百分之幾不及格？

設百分之 x 得 A 等.

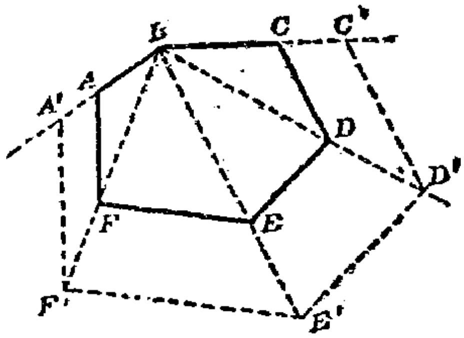
則，　$21=\frac{x}{100}\cdot 130.$

於是，$\frac{x}{100}=\frac{21}{130}.$

由第一百十二圖知 $\frac{21}{130}$ 約 $=.16.$

故約百分之16人得 A 等.

212. 相似多邊形之求作法.



第一百十三圖

設第一百十三圖之 $ABCDEF$ 爲已知多邊形.

求作一多邊形，與 $ABCDEF$ 相似.

作法： 由一頂角如 B，作對角線至別頂角，又引長之.

於 BA 上之任一點如 A'，作 $A'F' \parallel AF$.

作 $F'E' \parallel FE, E'D' \parallel ED, D'C' \parallel DC.$

則 $A'B'C'D'E'F'$ 爲求作之形.

證： 證 $\angle D=\angle D', \angle E=\angle E'$，等.

指明 $\frac{CD}{C'D'}=\frac{BD}{B'D'}=\frac{DE}{D'E'}$ 等. (§ 214)

於是 $\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EF}{E'F'}$ 等. 何故？

213. 相應部. 相似多邊形之相當邊爲相應邊,其相當角,相當對角線,相當高度,相當中線,爲相應角,相應對角線,相應高度,相應中線。

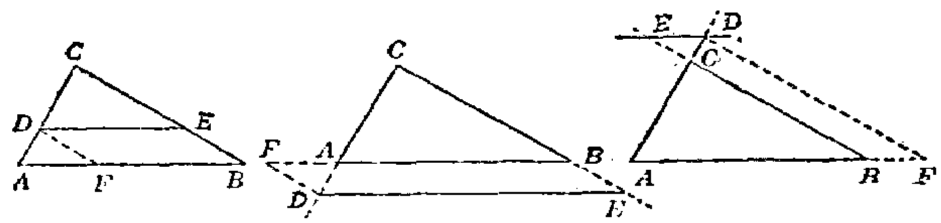
習　　題

1. 指明凡相合多邊形皆彼此相似。

2. 指明凡多邊形之同與一形相似者,彼此相似。

相似形之定理

214. 定理: 三角形一邊之平行線,及餘兩邊所成之三角形,與原三角形相似。



第一百十四圖

已知 $\triangle ABC$ 又 $DE \parallel AB$(第一百十四圖)

證 $\triangle DEC \backsim \triangle ABC$

解析: 兩三角形須有何種情形則彼此相似? 更切則問 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEC$ 中須指明何項則知兩形相似?

證: 證 $\triangle DEC$ 與 $\triangle ABC$ 中諸角彼此相等.

因 $DE \parallel AB$, 何故?

$$\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}.$$ 何故?

作 $DF \parallel BC$,

則 $\frac{FB}{AB}=\frac{DC}{AC}$. 何故?

$DFBE$ 為平行四邊形. 何故?

$\therefore DE=FB$. 何故?

以 DE 代其等邊 FB,

則 $\frac{DE}{AB}=\frac{DC}{AC}$.

此式可作 $\frac{CD}{CA}=\frac{DE}{AB}$

由是 $\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}=\frac{DE}{AB}$. 何故?

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEC$. 何故?

215. 兩三角形成相合形時之各種情形:

幾何學中用相合三角形證定理及解問題之要。學者當已知之。相合三角形之定義中。有六種情形如下:

1. 相當角各等。

$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$.

2. 相當邊各等。

$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$.

然證兩三角形相合。無須全證以上六項。但有下列各情形已足:

1. 此三角形之兩邊及夾角。等於彼三角形之兩邊及夾角,

2. 此形之兩角及中間之邊。與彼形之兩角及中間之邊相等。

3. 兩形之三邊兩兩相等。

如此,則證兩三角形彼此相合。頗爲簡單。

216. 兩三角形成相似形時之各種情形:

相似三角形之定義中有五種情形如下:

1. 相當角相等,或——

$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$.

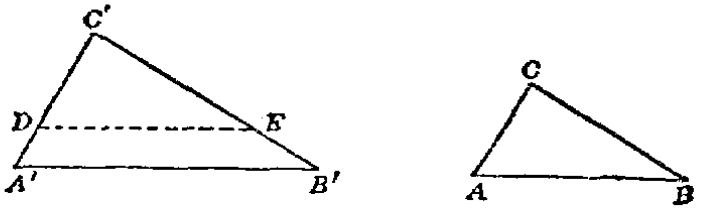
2. 相當邊成等比例,或——

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$, 由此得 $\frac{c}{c'}=\frac{a}{a'}$.

猶證相合三角形然,凡證兩三角形彼此相似。無須全證以上五項。但有下列三項之任一項已足。

1. 兩對相當角兩兩相等。
2. 兩對相當邊成等比例。又夾角相等。
3. 相當邊各成等比例。

217. 定理: 兩三角形。若此形之兩角。與彼形之兩相當角兩兩相等。則兩形相似。



第一百十五圖

已知 $\triangle ABC, A'B'C'$; $A=A'$ 又 $C=C'$.

證 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

證:　　　　理由:

於$C'A'$上截$C'D=CA$,

作　$DE \parallel A'B'$.

則,　$\triangle DEC' \backsim \triangle A'B'C'$.　§ 214

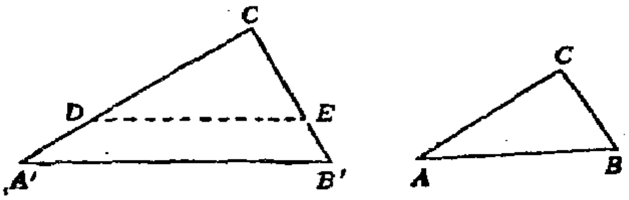
$\triangle DEC' \cong \triangle ABC$.　角.邊.角.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.　何故?

習　題

兩直三角形。若此形中一銳角。等於彼形中一銳角。則兩形相似,

218. 定理: 兩三角形。若此形兩邊之比例。等於彼形兩邊之比例。又此兩邊所夾之角。彼此相等。則兩形相似。



第一百十六圖

已知$\triangle ABC$及$A'B'C'$; $C=C'$又$\frac{CA}{C'A'}=\frac{CB}{C'B'}$(第一百十六圖

證　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

證:　　　　理由:

於$C'A'$上截$C'D=CA$.　用求作法

於$C'B'$上截$C'E=CB$.　用求作法

則　$\frac{C'D}{C'A'}=\frac{C'E}{C'B'}$.　何故?

$\therefore\quad DE \parallel A'B'$.　　何故?

$\therefore\ \triangle DEC' \backsim \triangle A'B'C'$.　　何故?

然　$\triangle DEC' \cong \triangle ABC$,　　邊,角,邊

$\therefore\ \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.　　何故?

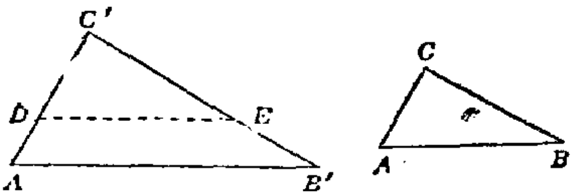
習　題

1. 兩直三角形。若此形夾直角兩邊之比。等於彼形兩相當邊之比。則兩形相似。

2. 三角形任兩邊之中點。若以一線聯之。則成第二個三角形。與第一三角形相似。

3. 兩等腰三角形。若此形中一角與彼形中一角相等。則兩形相似。

219. 定理: 兩三角形。若其相當邊各成等比例。則兩形相似。



第一百十七圖

已知 $\triangle ABC$ 及 $A'B'C'$; $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$, (第一百十七圖)

證 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

證:　　　　**理由:**

於 $C'A'$ 上截 $C'D=CA$.

於 $C'B'$ 上截 $C'E=CB$.

則 $\dfrac{C'D}{C'A'}=\dfrac{C'E}{C'B'}$, 何故?

$\therefore \triangle DEC' \backsim \triangle A'B'C'$. (§218)

$\therefore \dfrac{C'D}{C'A'}=\dfrac{DE}{A'B'}$. 何故?

然 $\dfrac{C'D}{C'A'}=\dfrac{AB}{A'B'}$, 何故?

$\therefore \dfrac{DE}{A'B'}=\dfrac{AB}{A'B'}$. 何故?

$\therefore DE=AB$. 何故?

$\therefore \triangle DEC' \cong \triangle ABC$. 邊。邊,邊.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$. 何故?

問題與習題

試證下列各題:

1. 若兩三角形之各相當邊互相平行。或互作垂線。則兩形相似。

若此角之兩邊。與彼角之兩邊,互相平行。或互作垂線。則兩角相等。或互爲補角。

如此,(1) $A=A'$, 或(2) $A+A'=2$直角。

(3) $B=B'$, 或(4) $B+B'=2$直角。

(5) $C=C'$ 或(6) $C+C'=2$直角.

指明(2),(4),(6)三方程,不能同時眞確。

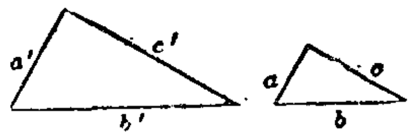
指明(2),(4),(6)中。不能有兩方程同時眞確,

故(1),(3),(5)中。至少有兩方程眞確。可見兩形互爲等角三角形。用§217證之。

12. 兩平行四邊形。若此形中一角與彼形中一角相等。又夾此角之兩邊各成等比例。則兩形相似。

13. 兩長方形。若此形兩隣邊之比。等於彼形兩相當邊之比，則兩形相似。

4. 相似三角形之周相比。等於任兩相應邊相比。

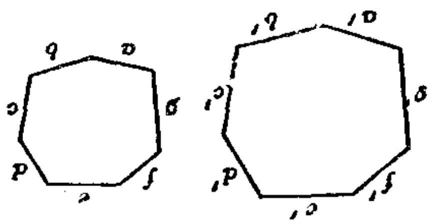


第一百十八圖

因第一百十八圖之兩三角形彼此相似，

故　$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$，何故?

$\therefore\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$．何故?


第一百十九圖

5. 相似多邊形之周相比，等於任兩相應邊相比。

因第一百十九圖之兩多邊形彼此相似，

故　$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$，等　　何故?

$\therefore\frac{a+b+c+\text{等}}{a'+b'+c'+\text{等}}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$　何故?

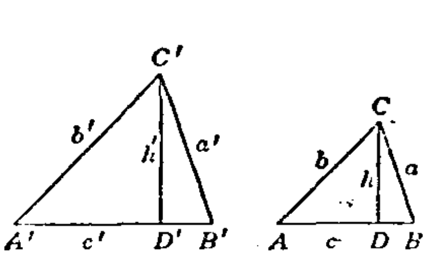
6. 相似三角形中各相應高度之比，等於各相應邊之比，或周之比，

證$\triangle ADC\backsim\triangle A'D'C'$,(第一百二十圖)

則$\frac{b}{b'}=\frac{h}{h'}$．　　何故?

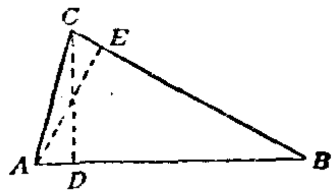
然$\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$．　　何故?

$\therefore\frac{h}{h'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$．　　何故?



第一百二十圖

‡7.　三角形各高之比,等於各底之反比。



第一百二十一圖

證$\triangle DBC \backsim \triangle ABE$(第一百二十一圖)。

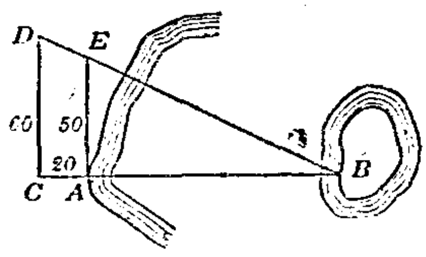
‡8.　兩相似三角形之相應中線之比,等於任兩相應邊之比,或周之比。

‡9.　相似三角形內相應角之平分線之比,等於兩相應邊之比,或周之比。

‡10.　一4呎長之直桿,其影為$5\frac{1}{2}$呎。同時一尖閣之影為220呎。問尖閣高幾呎?

‡11.　一人在窗口見地上有一點。此點與一桿之頂及窗檻同在一直線內。設此點距桿底2呎8吋。桿高3呎。而距窗下一點$24\frac{1}{2}$呎。問窗離地幾呎?

‡12.　第一百二十二圖之A為河岸。B為一島。今有一童,欲知BA之距離。遂在BA線上。於離A20碼之C點,作$CD \perp CB$。令$CD=60$桿。(每桿$=5\frac{1}{2}$呎)。於A作AB之垂線。遇DB於E。量AE知等於50桿。試求BA之距離。



第一百二十二圖

‡13.　梯形一底之中點與對角線交點之聯線引長之。平分他一底。

14.　一三角形之地。其邊約為125桿,54桿,112桿,今將此地作一圖形,最長之邊為3呎。問圖中三角形之餘兩邊,各長若干?

15. 一梯形高 6。其兩底一長 18。一長 60。設將兩不平行邊引長。令相交於一點。問所成之三角形。離兩底各高若干?

‡*16.* 一三角形高 12 吋。其底長 72 吋。離底 8 吋有一線。與底平行。又成一梯形。求此形之上底。

‡*17.* 一三角形之兩邊。一爲 14 吋。一爲 3.5 吋。所夾之角爲 75°。又一三角形之兩邊。一爲 20 吋。一爲 5 吋。所夾之角亦爲 75°。證兩三角形相似。

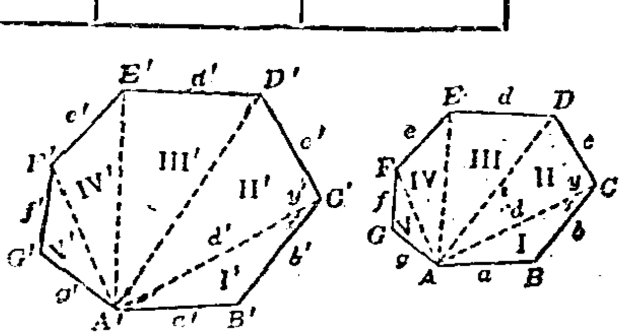
18. 一三角形之周爲 15 公分。(卽生的米突)。一相似三角形之邊爲 4.5,6.4,與 7.1 公分。求第一三角形之各邊。

19. 兩相似三角形之周。一爲 x^2+3x+2。一爲 16。設其兩相應邊一爲 $3x$。一爲 8。試求 x。

‡*20.* 兩相似三角形之周 p 與 p'。及兩相應邊 a 與 a'。皆列下表。求 x, y, 及 k。

p	p'	a	a'
x^2+1	x	$2\frac{1}{2}$	1
$3k^2+9k$	27	35	4
4	y^2-2y+1	1	4

220. 定理: 相似多邊形之各相應對角線。可分多邊形作同位之相似三角形。



第一百二十三圖

已知多邊形$ABCD$,等$\backsim$多邊形$A'B'C'D'$,等(第一百二十三圖)。由A及A'作諸對角線.

證$\triangle \mathrm{I} \backsim \triangle \mathrm{I}'$,$\triangle \mathrm{II} \backsim \triangle \mathrm{II}'$,等。

證:	理由:
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$,	何故?
$B=B'$,	何故?
$\therefore\ \triangle \mathrm{I} \backsim \triangle \mathrm{I}'$.	何故?
$\therefore\ x=x'$.	何故?
$\because\ C=C'$,	何故?
$\therefore\ y=y'$.	何故?
$\frac{b}{b'}=\frac{d}{d'}$.	何故?
$\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.	何故?
$\therefore\ \frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$.	何故?
$\therefore\ \triangle \mathrm{II} \backsim \triangle \mathrm{II}'$,等	何故?

提　要

221. 此章所證之定理如下:

1. 三角形一邊之平行線,及餘兩邊所成之三角形。與已知三角形相似。

2. 兩三角形。若此形之兩角。與彼形之兩相當角兩兩相等,則兩形相似,

3. 兩三角形。若此形兩邊之比例，等於彼形兩邊之比例，又此兩邊所夾之角。彼此相等。則兩形相似。

4. 兩三角形。若其相當邊各成等比例。則兩形相似。

5. 相似多邊形之周相比，等於任兩相應邊相比，

6. 相似多邊形之各相應對角線，可分多邊形作同位之相似三角形。

222. 本章授求作一多邊形令與一已知多邊形相似之法。

223. 數目之商數，可用方格紙及繩求得之。

弗 而 馬

(115 面 之 前)

弗而馬小傳(Pierre de Fermat)

弗而馬。法國人。1601年生於都羅士(Toulouse)之隣境。1665年卒於喀司忒拉司。(Castress)數學史家閼德。(Cantor)及其他名人。稱之爲十七世紀之法國大數學家。當時數學人才蔚起。故十七世紀。爲法國數學家最發達之時代。

弗氏之父。爲皮革商。不令弗氏入學。延師課之。弗年長。赴都羅士讀法律。1631年。爲其地之議員。任事勤慎。不敢稍怠。其性喜靜。謙讓知禮。又好算學。有暇輒孜孜於是。故其業雖爲律師與議院中人。而其名則得自算學。

弗氏著作極少。終其一生。僅刊一書。然常與當代之數學名人。書函往來。討論算學。凡有發明。皆詳述於信。或書於散紙。或傍註於書籍。其聲名亦藉此與起。弗氏既歿。其子薩慕爾。(Samuel)遂選其要者。而付刊焉。然察弗氏之本意。似無付刊之必要。故其記錄。雜亂無序。究不知其所載者。發明於何時。或係原有者也。

弗氏之算草。大半遺失。無從查考。然其演算之無秩序。必可斷言。因其書中傍註。嘗載一未竟之定理。下有"吾已得此定理之奇確證法。惜書邊太狹。不及詳述。"等語也。當時之數學家。無不展其心智於此定理。然其結果。終遭失敗。法國理化學院。曾於1850年及1853年。懸賞3000法郎。徵求其證。而終不可得。

此定理。後人稱之曰"弗氏大定理。"或曰"弗氏之最後定理。"(參觀本編§234)弗氏之定理。後之數學家嘗證之。然頗費盡心思。而奧妙不能證者。尚有所見云。

第　八　章

三角形各邊之關係　二次方程

根　數

直三角形之相似性

224. 定理：直三角形，由頂角至弦之垂線，分直三角形作兩部，彼此成相似形，並各與原形相似。

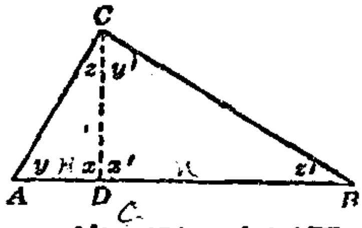
已知 $\triangle ABC$ 之 C 爲直角，又 $CD \perp AB$，（第一百二十四圖）

證 $\triangle ADC \backsim \triangle BDC \backsim ABC$。

證：　$x=x'$，　何故？

$y=y'$，　何故？

$\therefore \triangle ADC \backsim \triangle BDC$，何故？

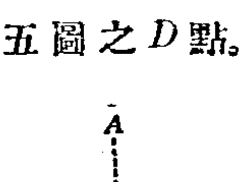


第一百二十四圖

證 $\triangle ADC$ 與 ABC 互爲等角三角形，故彼此相似，

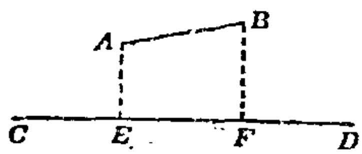
依此，證 $\triangle BDC \backsim \triangle ABC$。

225. 一點之射影. 一已知線上一點之射影，即爲由此點至此線之垂線之底，例如第一百二十五圖之 D 點，即爲 BC 上 A 點之射影。



第一百二十五圖

226. 一線段之射影. 欲在一線上（如 CD），作一線段（如 AB）之射影，須由 AB 之兩端各作垂線至 CD，則 EF 即爲 CD 上 AB 之射影。（第一百二十六圖）

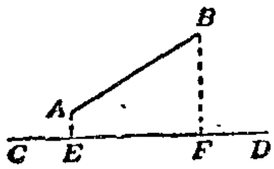


第一百二十六圖

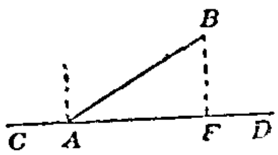
簡言之。凡線上一已知線段之射影。亦爲一線段。其端點則爲已知線段兩端點之射影。

習　　題

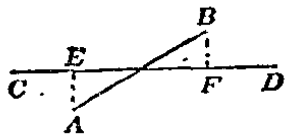
1. 於下列各圖。指定 CD 上 AB 之射影。(第127至129圖)。



第一百二十七圖



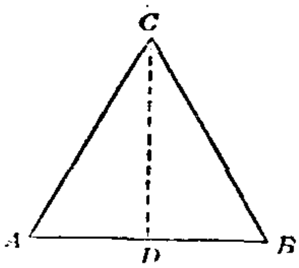
第一百二十八圖



第一百二十九圖

試作一圖。令一線段與其射影相等。

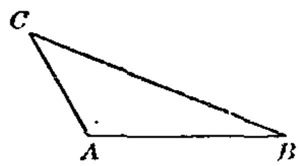
2. 於第一百三十圖之三角形 ABC 中。指定 AB 上 AC 之射影; AB 上 BC 之射影。



第一百三十圖

3. 於第一百三十圖之三角形 ABC 中。在 AC 上試作 BC 之射影;又在 BC 上試作 AB 之射影。

4. 求作一鈍三角形 ABC。(第一百卅一圖)於 BC 上試作 AB 之射影; AB 上試作 AC 之射影; AB 上試作 BC 之射影; AC 上試作 AB 之射影。



第一百三十一圖

227. 等比例中項. 等比例 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 中。b 爲 a 與 c 之等比例中項。

習　　題

1.　求 4 與 9 之等比例中項。

以 x 代等比例中項,即得 $\frac{4}{x}=\frac{x}{9}$.

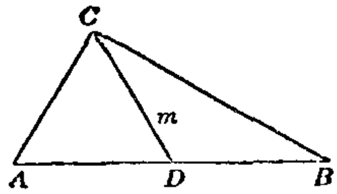
$\therefore x^2=4\cdot 9.$　　何故?

$\therefore x=\pm\sqrt{4\cdot 9}.$

$\therefore x=\pm 2\cdot 3.$　　何故?

或 $x=+6,-6.$　　覆證兩答數.

2.　於第一百三十二圖之三角形 ABC。試求 AB 上中線 m 之射影。



第一百三十二圖

根　　數

228. 根數.　一數之指示根謂之根數。例如 $\sqrt{5}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{16}, \sqrt{a+b^2}$ 皆根數也。

229. 根數之約法.　求一根數之值。最便利莫如變改根號內數目之式。其法如下:

$$\text{I.}\begin{cases}\sqrt{25\cdot 16}=5\cdot 4, \text{因}\ (5\cdot 4)\ (5\cdot 4)=25\cdot 16.\\ \sqrt{36\cdot 9}=6\cdot 3, \text{因}\ (6\cdot 3)\ (6\cdot 3)=36\cdot 9.\end{cases}$$

如此,求 $\sqrt{25\cdot 16}$ 與 $\sqrt{36\cdot 9}$ 之值。當先開各因數之平方根,後將得數相乘。

簡言之。凡求乘積(如 ab)之平方根。可取其因數,(如 a 與 b)之平方根乘之。其積即爲答數。此法可用方程式簡括之如下。

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

藉此理，可用視察法求得大數目之平方根，其法如下：

$$\text{II.}\begin{cases}\sqrt{3136}=\sqrt{4\cdot784}=\sqrt{4\cdot4\cdot196}=\sqrt{4\cdot4\cdot4\cdot49}\\ \qquad =\ 2\cdot2\cdot2\cdot7=56\cdot\\ \sqrt{4225}=\sqrt{5\cdot845}=\sqrt{5\cdot5\cdot169}=\ 5\cdot13=65.\end{cases}$$

設有一根數，其根號內之數目非平方數，則上述之法，仍可合用。例如

III. $\sqrt{50}=\sqrt{5\cdot5\cdot2}=5\sqrt{2}$.

2 之平方根爲 1.414+…., 所以 $\sqrt{50}=7.070+\cdots$。

依此，$\sqrt{8a^3}=\sqrt{4a^2\cdot2a}=2a\sqrt{2a}$,

又 $\sqrt{108}=\sqrt{9\cdot12}=\sqrt{9\cdot4\cdot3}=6\sqrt{3}$.

習　　題

1. 約下列各根數至最簡之式：

(1) $\sqrt{75}$.	(5) $\sqrt{128a^2b^2}$.	(9) $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$.
(2) $\sqrt{27}$.	(6) $\sqrt{162x^2y^2}$.	(10) $\sqrt{4a^2-20ab+25b^2}$.
(3) $\sqrt{a^5b^3}$.	(7) $\sqrt{243ab^2}$.	(11) $\sqrt{9a^3-9a^2b}$.
(4) $\sqrt{20x^2y}$.	(8) $\sqrt[3]{16}$.	(12) $\sqrt{(a+b)(a^2-b^2)}$.

2. 求 2 與18之等比例中項； 10與90； 8 與200； 20與180。

3. 求 a^2 與 b^2 之等比例中項； c^2 與 d^2。

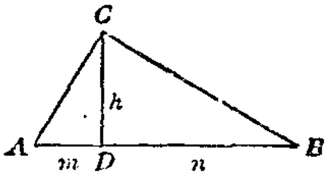
4. 求 $x^2+2xy+y^2$ 與 $x^2-2xy+y^2$ 之等比例中項。

5.　指明 a 與 b 之等比例中項爲 a 與 b 相乘積之平方根.

230.　定理：　直三角形。由直角之頂至弦之垂線。爲弦之兩段之等比例中項。

其意即爲證 $\frac{m}{h}=\frac{h}{n}$ (第一百卅三圖)

證此題。當知相似三角形內等角之對邊互爲相應邊。故成等比例。



第一百三十三圖

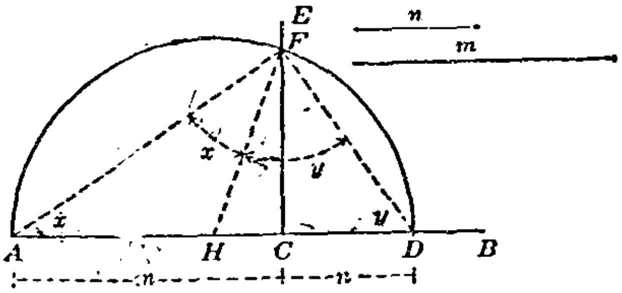
231.　第230節。指示兩線段之等比例中項。可用幾何法求得之。(詳細見下列第一題)

求　作　題

1.　求作兩線段之等比例中項。

已知線段 m 與 n.(第一百卅四圖)

求作 m 與 n 之等比例中項.



第　一　百　三　十　四　圖

求作法：　於一線上如 AB,截 $AC=m$, $CD=n$.

作 $CE\perp AB$.

以 AD 爲直徑,作圓形 AFD,令遇 CE 於 F.

則 FC 爲 m 與 n 之等比例中項.

證：　作 AF, DF,又中線 HF,

指明 $\angle AFH=\angle A=x$,

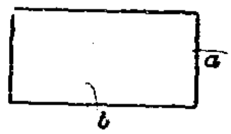
指明 $\angle HFD=\angle D=y$,

則 $2x+2y=180°$. 何故?

∵ $\angle AFD=90°$. 何故?

∴ $\dfrac{m}{FC}=\dfrac{FC}{n}$. 何故?

2. 求作一正方形。命與一已知長方形相等。



第一百卅五圖

設第一百卅五圖之a與b為長方形之邊。

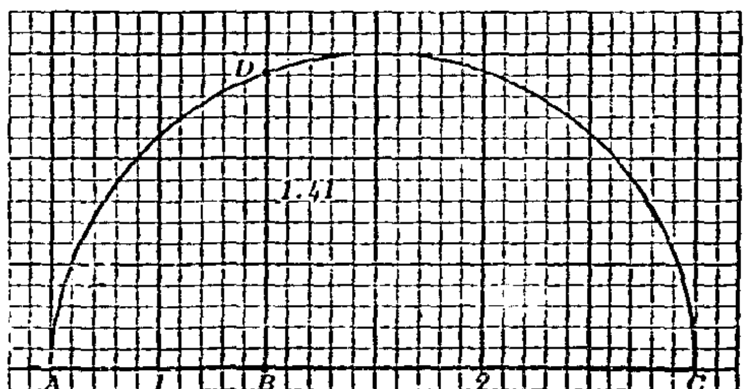
求作 a 與 b 之等比例中項。

以 a 與 b 之等比例中項為邊,作一正方形。

證正方形之面積,等於已知長方形之面積.

3. 求作一數目之平方根。

(1)求 2 之平方根,於方格紙上作 2 之兩因數如 2 與 1,(第一百卅六圖),其法與第一題作m與n同. (用 1=2 公分(生的米突)之比例).



第一百三十六圖

AB與BC之等比例中項BD,代表 2 之平方根. 何故?

量BD至小數兩位.

求 2 之平方根至小數兩位以覆證之.

(2) 用幾何法求 6, 5, 及 8 之平方根.

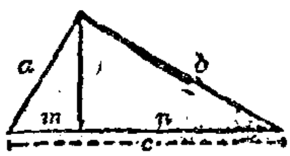
習　題

設於一圓內直徑上之任一點作一垂線至圓周。則此線爲直徑兩段之等比例中項。試證之。

直三角形各邊之關係

232. 定理: 直三角形直角兩旁之任一邊。爲在弦上此邊之射影,與全弦之等比例中項。

須證 $\frac{m}{a}=\frac{a}{c}$, 又 $\frac{n}{b}=\frac{b}{c}$.(第一百卅七圖)



第一百三十七圖

證此當用相似三角形之相應邊互成等比例之理.

藉此定理,可得一幾何學中最緊要之定理:

233. 派達哥拉士氏定理: 凡直三角形。句方股方之和。等於弦方。

證: $\frac{m}{a}=\frac{a}{c}$,　何故?

又 $\frac{n}{b}=\frac{b}{c}$,　何故?

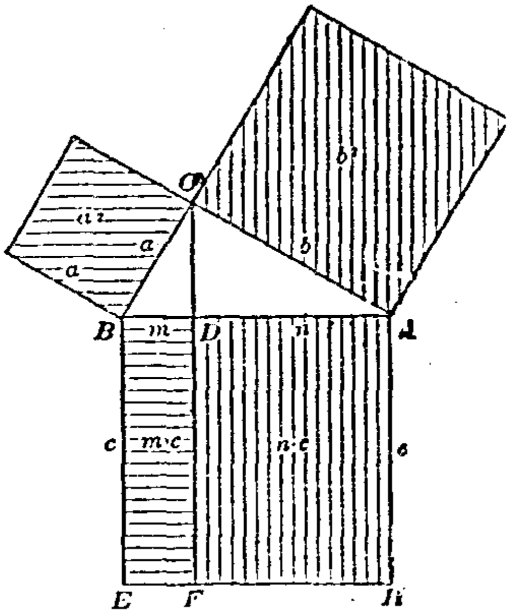
$\therefore\ a^2=mc.$　何故?

$b^2=nc.$　何故?

$\therefore\ a^2+b^2=(m+n)c.$ 何故?

或 $a^2+b^2=c^2.$

證中最後四級,解以下各項:



第一百三十八圖

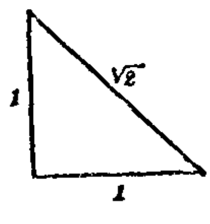
方程 $a^2=m\cdot c$ 之意。爲 BC 之平方。如一百三十八圖。等於長方形 $BEFD$。此形之邊。爲 m 與 c。注意長方形 $BEFD$ 之邊。爲 m 與 BE。但 m 爲 AB 上 BC 之射影。BE 卽 C。其長等於弦 AB。

依此,$b^2=n\cdot c$ 之意。爲 AC 之平方等於長方形 $FHAD$。此形之邊,一爲 n(卽 AB 上 AC 之射影)一爲 AH,其長等於弦 C。

故 AC 方 BC 方之和等於此兩長方形之和或弦方。

此說可用以作§462 歐几利得證派達哥拉氏定理之綱要。

234. 史略: 相傳派達哥拉士既得此定理之全證。大喜過望。遂屠百牛。以祭司美術文學音樂等之衆神。報其鼓勵之德。斯項發明。自應有此大祭。蓋數學之有無理數。實始於是也。

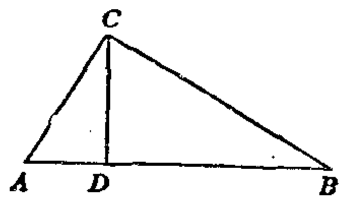


派氏嘗先證某等腰直三角形之弦方等於 $\sqrt{2}$(見圖)。遂得斷定無理數之實在。其弟子偶得整數幾組。用以代 a, b, c 則方程 $a^2+b^2=c^2$ 悉解。遂覺愉快非常。其最簡單之組爲 3, 4, 5,三數。此項數目。因名曰派達哥拉士數。其後則 a, b, c,之無論何組整數值。皆用以代入於方程 $a^3+b^3=c^3$, $a^4+b^4=c^4$等。簡言之。卽 $a^n+b^n=c^n$。設 $n>2$。

大數學家弗而馬。生於1601至1665年。於其記錄中云。方程$x^n+y^n=z^n$。除$n=2$,他組整數皆不能代x, y, z,及n以解之。又自謂已確得此定理之奇異證法。惜未見其提及隻字也。實則此定理殊爲簡單。但當時無人能得其證。雖有一德國協會懸賞100,000馬克。($20,000)徵求此證。或有能證此定理之不確者。亦可得此巨獎。然仍無人享受耳。

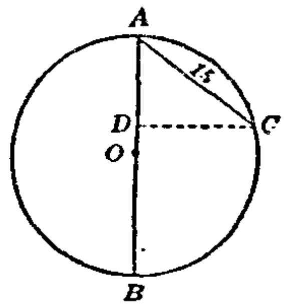
習　　題

1. 第一百卅九圖之三角形ABC。$\angle ACB$爲直角,又$CD \perp AB$。$AD=2, DB=30$。求AC與CB之長。



第一百三十九圖

2. 設第一百四十圖之圓形之半徑爲12.5。求直徑AB上弦AC之射影。但此直徑經過弦之一端。

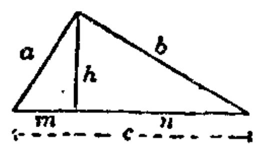


第一百四十圖

3. 於第一百四十一圖之直三角形ABC中。試求c, m, n,及h。設$a=12$,又$b=5$。

求b, m, n,及h,設$a=8$,又$c=10$。

求a, b, c,及h,設$m=9\frac{3}{5}$,又$n=5\frac{2}{5}$。

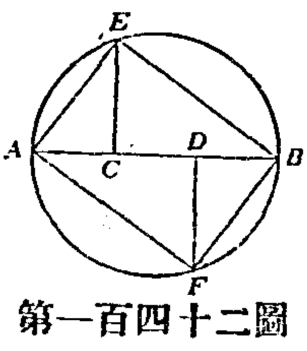


第一百四十一圖

4. 於圓木上截最大之一段。試求截面之各邊。

設第一百四十二圖之圓形爲圓木之直截面。求各邊之法如下:

三分AB於C與D(§176,習題7)。



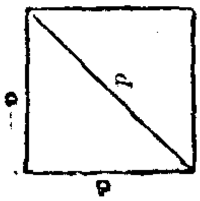
第一百四十二圖

作$CE\perp AB$又$DF\perp AB$.

作四邊形$AFBE$,卽爲欲求之截面.

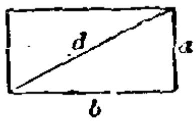
設圓木之直徑爲15吋,求AE與AF之長。

5. 證正方形之對角線等於2之平方根與其一邊之相乘積。(第一百四十三圖)



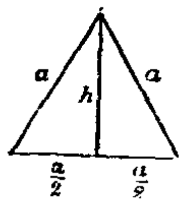
第一百四十三圖

6. 證長方形之對角線等於兩隣邊平方之和之平方根。(第一百四十四圖)



第一百四十四圖

7. 等邊三角形之高,試以邊表示之。(第一百四十五圖)



第一百四十五圖

8. 第一百四十六圖爲一圓窗。其最大圓之半徑爲6。試求最小圓之半徑x。

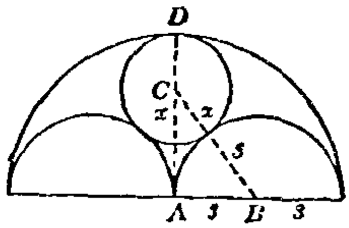
直三角形ABC之邊爲$3, x+3$,及$6-x$。

何故?

$$\therefore (x+3)^2=(6-x)^2+9.$$

$$x^2+6x+9=36-12x+x^2+9.$$

$$\therefore\ x=2.$$



第一百四十六圖

二次方程*

235. 解二次方程法提要. 前編中解二次方程常用下列三法:

(1)圖線法。

(2)劈因數法。

* 參看§238之史略。

(3)配方法。

圖線法呈方程之答數於目前。又可定其畧數。

劈因數法。至爲簡單。然遇三項式之因數不可得時。卽不合用。

配方法。可得恰合求數。然其法太長。故覺不便。

因此。別立一法。非特簡單明瞭。且可用以解無論何種之二次方程。

凡二次方程之含有一未知數者。皆可作準式如

$$ax^2+bx+c=0:$$

式中 a 代 x^2 諸項聯合時 x^2 之係數；b 爲 x 之係數；c 爲常數，卽不含 x 之一項，或諸項之和。

例如 $5x^2+3x-4=0$ 中，$a=5$，$b=3$，$c=-4$.

習　　題

整理下列各方程。使成準式 $ax^2+bx+c=0$，又定係數 a, b 及 c 之值：

1. $x^2+4x-5=0$.　　*3.* $c^2=4c+1$.

2. $y^2-2y=11$.　　*4.* $a^2=7a-7$.

將下列各方程改作準式：

5. $ax^2+bx=b+ax$.　　*7.* $2z^2+ab=2az+bz$.

6. $2y^2+4ay+2ab=-by$.　　*8.* $s^2+a^2=2as-2$.

236. 方程 $ax^2+bx+c=0$ 之答數. 因二次方程皆可作準式 $ax^2+bx+c=0$。故苟解此式，卽可得各種二次方程之答數。今當推演一公式，俾可用以求各種二次方程之答數。

試述以下各級之理由:

$$ax^2+bx+c=0.$$

$$ax^2+bx \quad =-c.$$

$$x^2+\frac{b}{a}x \quad =-\frac{c}{a}.$$

配方於左邊。即加$\frac{b^2}{4a^2}$於方程之兩端。則得——

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

或 $$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2},$$

或 $$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

所以 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \quad =\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

又 $$x+\frac{b}{2a} \quad =\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

或 $$x+\frac{b}{2a} \quad =\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

所以 $$x \quad =\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

237. 通常之二次方程公式. 方程$ax^2+bx+c=0$中。x之值已求得為 $$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

此為通常之二次方程公式.二者可聯合作一式如下:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

習　　題

用二次方程公式解以下各方程,其中設 a, b, c,爲已知數。他字母爲未知數:

1. $3x^2+5x-2=0$.

此題之 $a=3$, $b=5$, $c=-2$.

將此數值代於公式,則

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm7}{6}=\frac{1}{3},\ or\ -2.$$

2. $2x^2+5x+2=0$.

3. $6x^2-11x+5=0$.

4. $2r^2-r-6=0$.

5. $2x^2+x=15$.

6. $1.4x^2+5x=2.4$.

7. $1\frac{1}{3}x^2+x-11.2=0$.

8. $.6x^2-1.4x=3.2$.

9. $x^2+\frac{3}{2}x=1$.

‡10. $r^2-9r-36=0$.

11. $t^2+15t=-44$.

‡12. $x^2-72=6x$.

‡13. $3m^2=6-7m$.

14. $6+11x=-18x^2-20$.

15. $14y^2+2y=28y-10y^2+5$.

‡16. $11R^2-10R=24-10R^2$.

17. $6p^2-13p=10p-21$.

‡18. $8l^2-12l+3=0$.

19. $s^2-2as+a^2+2=0$.

20. $t^2-3abt+2a^2b^2=0$.

21. $a-y^2=(1-a)y$.

22. $cy^2+1y+r=0$.

23. $y^2+my+n=0$.

24. $8y^2+8cy+2c^2=-19c^2-6y^2$.

‡25. $28b^2=-17by+3y^2$.

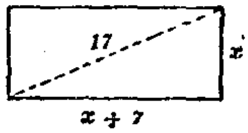
26. $12m^2-16am-3a^2=0$.

27. $ax^2+(b-a)x-b=0$.

28.　$2y^2+(4a+b)y=-2ab$.　†29.　$2z^2-(2a+b)z+ab=0$.

解以下各題:

30.　一長方形之對角線為17吋。(第一百四十七圖)一邊較他邊長7吋。試求各邊之長。

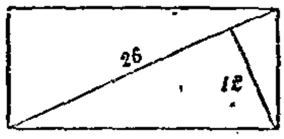


第一百四十七圖

31.　一長方形之對角線。較一邊長8準個。較他邊長9準個。問對角線長若干?

32.　一33呎長之梯。依一房屋而立。梯脚距屋14呎。問此屋與梯頂相交之點。離地幾呎?

33.　一長方形之對角線為26(第一百四十八圖)。對角線與頂角之距離為12。求垂線所分對角線兩段之各長度。



第一百四十八圖

34.　設擲一球。使其直上至y點。球行之速率。為每秒鐘100呎。計行x秒鐘。y之高以公式$y=100x-16x^2$表示之。若球直升至144呎。應需時幾秒?

作函數$100x-16x^2$之圖線。並藉此圖線說明此方程之解答之意義。

238.　史略：　解一純二次方程如$x^2=25$。實卽開一平方也。開數目之平方。於初有史學時。其法已明於世。故古代數學士。於未知二次方程之前。已有用純二次方程解題者。

凡不知解二次方程之法者。必不能著歐几利得之第十册幾何學初義。然是書泰半為歐氏原著。故歐氏詳知此法。

可斷言也。歐氏從未用代數法解一個二次方程。惟嘗證此項方程之幾何學定理。歐氏爲希臘人。希臘幾何學家。不喜計算法。如解二次方程者。蓋若輩對於實用數目計算之科學。頗不愛悅。伯拉圖(紀元前429至348年)嘗曰。計算爲孩童之事。哲學家不爲也。

觀亞奇米德計算之精。以爲亞氏必知解二次方程之代數法。然其著作中。未嘗言及也。

海倫(Heron)(紀元前第一世紀爲一科學工程師及測量家。嘗解無數二次方程。頗爲正確。又解一題。屬於二次式。若以近時記號表之。爲

$$\frac{11}{14}d^2+\frac{29}{7}d=S_{\circ}$$

S 爲一已知數。d 爲一圓之直徑。 海氏立一極正當之法例。其式卽近代之

$$d=\frac{\sqrt{154S+841}-29.}{11}$$

可知當海倫之時。代數法例與幾何學。完全有別。與幾何學之面積或直線各定理。極無關係。而成此分別。歷時頗久。

解二次方程之法。次見於第柯番佗士(Diophantus)(紀元後第三第四世紀)之算學中。第氏辨別三種準式如下:

1. $ax^2+bx=c$;　2. $ax^2=bx+c$;　3. $ax^2+c=bx$

希臘人不知負數。故此三式須分別處置。不能編作一式如

$$x^2+px+q=0$$

蓋編此式必用負數及複數。然古代之人。無此學識。直至紀元前第十七世紀。始有人能解悟此理。

印度人首先聯此三式作一式。勃喇買蛤泰(Brahmagupta)(生於紀元後598年)之法例。爲其先輩阿耶倍泰(Aryabhatta)(生於紀元後476年)所知者。以近代之式表之。爲

$$ax^2+bx=c,\ 故\ x=\frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}.$$

此式與第柯番佗士之第一式契合。於此可見印度之代數學。或得諸希臘。

其後有印度學者葛利得哈喇,(Cridhara)將此式改作

$$x=\frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}。$$

東阿拉伯人阿楷啓。(Alkarchi)(約紀元後1010年)爲阿拉伯之大代數學家。創二次式之高次方程式如

$$ax^{2n}+bx^n=c;\quad ax^{2n}=bx^n+c;\quad ax^{2n}+c=bx^n;$$

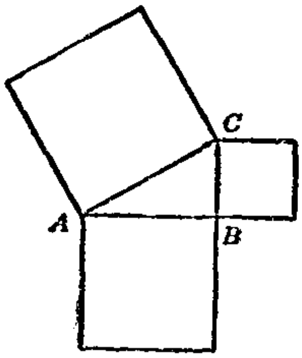
然仍須約作三準式。而後解之。

歐洲中古數學家。在卡但(Cardan)(1501至1576年)以前。尚不能解釋負數之意義。故每解二次方程。必將解法分作無數特式。有時竟至24式之多。每式另用一法計算。其後卡但漸知負數。而意大利之思想家學校。亦從事推想此理。因此乃得下式:

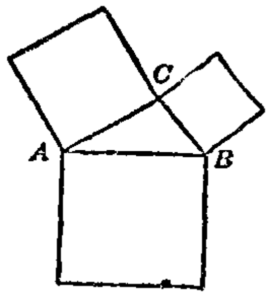
$$x^2+px+q=0;\ 設此式之\ p>0,\ q>0,$$

派達哥拉士氏定理之概說

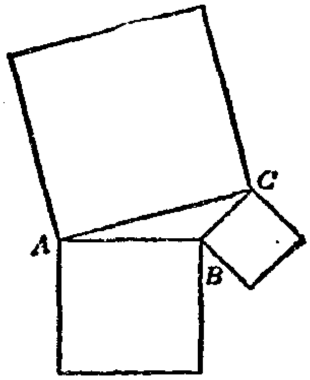
239. 第一百四十九圖之直三角形 ABC。設 ABC 角逐漸縮小。而 AB 及 BC 兩邊之長不變。則 AB 與 BC 之平方。其形亦不變。然因 AB 與 BC 之 A, C, 兩端中間之距離縮短。故



第一百四十九圖



第一百五十圖



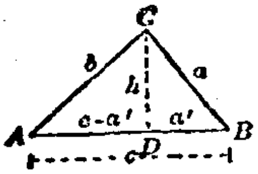
第一百五十一圖

AC 之平方亦遂縮小。(第一百五十圖)。故三角形中銳角對邊之平方。小於其他兩邊平方之和。

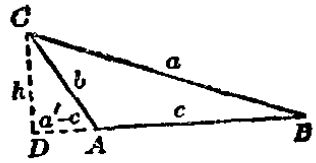
依此。若放大第一百四十九圖之直角 ABC 如第一百五十一圖。則鈍角 B 對邊之平方。大於其他兩邊平方之和。

以下兩定理。指明三角形中一邊之平方。與其他兩邊平方之和相差多少。

240. **銳角對邊之平方.** 設 $\angle B$ 爲三角形 ABC 之銳角。(第一百五十二圖)。



第一百五十二圖



第一百五十三圖

作CD垂直於AB. 以 a' 表示 c 上 a 之正射影.

則 $$b^2=h^2+(c-a')^2.$$ 何故?

又 $$a^2=h^2+a'^2.$$

減以上二式,$b^2-a^2=(c-a')^2-a'^2=c^2-2ca'+a'^2-a'^2$,

故 $$b^2-a^2=c^2-2ca'.$$

求 b^2, $$b^2=a^2+c^2-2ca'.$$

此指 $2ca'$ 為 a^2+c^2 大於 b^2 之數.

故已證明下定理:

定理: 三角形中銳角對邊之平方。等於從他兩邊平方之和減去兩邊之一邊與在其上之又一邊正射影相乘積之兩倍。

習 題

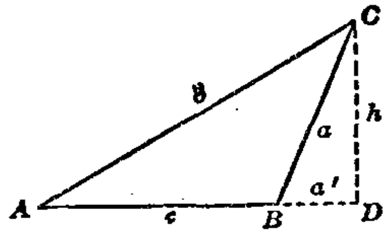
1. 求一百五十二圖之 a';設 a, b, c, 等於 2, 4, 5; 7, 10, 8

2. 用一百五十三圖試證 § 240 之定理.

241. 鈍角對邊之平方.

定理: 三角形中鈍角對邊之平方。等於就他兩邊平方之和。再加兩邊之一邊與在其上之又一邊正射影相乘積之兩倍。

已知 $\triangle ABC$ 之 $\angle ABC$ 為鈍角.(第一百五十四圖)



第一百五十四圖

證 $b^2=a^2+c^2+2ca'$,

證: $b^2=h^2+(c+a')^2.$ 何故?

$a^2=h^2+a'^2$,　　　何故?

故$b^2-a^2=c^2+2ca'^2+a'^2-a'^2$,

故　$b^2=a^2+c^2+2ca'$.

習　　題

一鈍角之對邊爲 b; c' 爲在 a 上 c 之正射影(第一百五十五圖)。

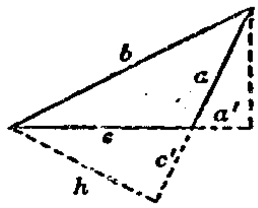
求 a' 及 c' 設 a, b, c, 等於

1. 5, 15, 12.

2. 6, 12, 8.

†3. 7, 11, 8.

4. s^2-1, s^2+2, $2s$.



第一百五十五圖

每次比較 $2a'c$ 與 $2ac'$.

提　　要

242. 本章授以下各項:

一點之射影。	二次方程公式。
一線段之射影。	根數。
等比例中項。	約根數至最簡之式。

243. 本章所證各定理如下:

I. 示三角形各邊關係之定理:

1. 凡直三角形,句方股方之和,等於弦方。

2. 三角形中銳角對邊之平方,等於從他兩邊平方之和,減去兩邊之一邊與在其上之又一邊正射影相乘積之兩倍。

3. 三角形中鈍角對邊之平方。等於就他兩邊平方之和。再加兩邊之一邊與在其上之又一邊正射影相乘積之兩倍。

II. 關於等比例中項之定理:

1. 直三角形。由直角之頂至弦之垂線。爲弦上兩段之等比例中項。

2. 直三角形直角兩旁之任一邊。爲在弦上此邊之射影與全弦之等比例中項。

3. 由圓形直徑上之任一點作一垂線至圓周。此線爲直徑兩段之等比例中項。

III. 直三角形之相似性:

直三角形。由頂角至弦之垂線。分直三角形作兩部。彼此成相似形。並各與原形相似。

244. 本章所授之求作法如下:

1. 求作兩線段之等比例中項。

2. 求作一正方形令與一已知長方形相等。

3. 求作一數目之平方根。

245. 二次方程。可用圖線法。劈因數法。配方法。或下公式解之:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

式中 a, b, c, 爲下方程之係數——

$$ax^2+bx+c=0.$$

246　約根數至最簡之式，可用下法：

凡求乘積之平方根，可取乘積之因數之平方根而乘之，此法可用方程式表之如下：

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

第　九　章

三角比　根數　含兩元之方程

三　角　比

247. 求角及距離. 派達哥拉士定理中有云。若兩直三角形。有此形之銳角等於彼形之銳角。則兩形相似。又謂任一直三角形之兩銳角互爲餘角。藉此兩理。可得求未知角及距離之法。

此兩理爲三角學之基礎。三角學則非特有用於高等數學。亦有用於精密之科學也。

習　題

1. 指明凡直三角形之各有一銳角彼此相等者，必爲相似之直三角形。

2. 於方格紙上，作一直三角形。令一角等於30°。量各邊至小數兩位。又求30°角之對邊與弦之比。

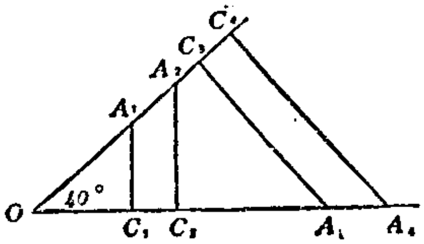
3. 證凡直三角形有30°角者。此比不變。

4. 於習題 2，求60°角之對邊與弦之比至小數兩位。將答數與同班學友所得者比較之。

5. 證凡直三角形有60°角者。此比不變。

6. 於有45°角之直三角形，求45°角之對邊與弦之比至小數兩位。

7. 證凡直三角形有45°角者。此比不變。



第一百五十六圖

8. 用半圓規作一40°角。(第一百五十六圖)。由此角各邊上諸點如A_1, A_2, A_3。作垂線至他邊。量A_1C_1及A_1O,又求其比。

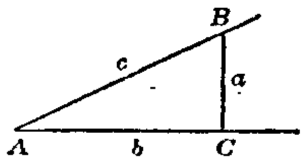
9. 證第一百五十六圖之各三角形,其40°角之對邊與弦之比皆同。

第9題指明第一百五十六圖各邊之長雖變。其比不變

第一百五十六圖中40°角之對邊與弦之定比謂之40°角之正弦。

248. 一角之三角比.

第一百五十七圖之A角爲一已知角。設由此角之任一邊上一點B。作一垂線至他邊。則成三角形ABC。



第一百五十七圖

此三角形頂角A之對邊與弦之比謂之A角之正弦。(寫作:$sinA$)

$$即\quad sinA=\frac{a}{c}.$$

頂角A之隣邊與弦之比,謂之A角之餘弦。(寫作:$cosA$)。

$$即\quad cosA=\frac{b}{c}.$$

對邊與隣邊之比。謂之A角之正切。(寫作:$tanA$)

$$即\quad tanA=\frac{a}{b}.$$

更簡捷言之卽:

$$\sin A=\frac{對邊}{弦},\quad 或\ \frac{a}{c}.$$

$$\cos A=\frac{隣邊}{弦},\quad 或\ \frac{b}{c}.$$

$$\tan A=\frac{對邊}{隣邊},\quad 或\ \frac{a}{b}.$$

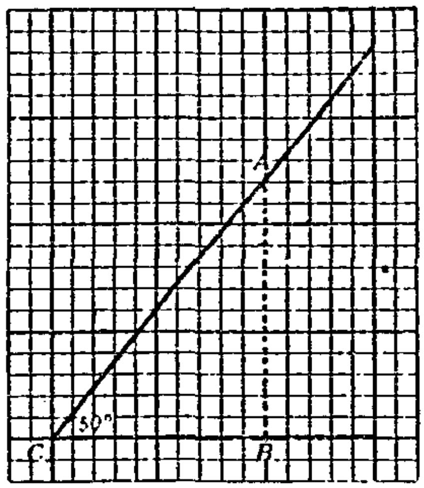
249. 以圖定三角比之値.

一已知角之三角比値。可用含此角之直三角形求得之。其法如下:

習　題

1. 求 $\sin 50°$ 之數値。

於方格紙上,用半圓規作一 $50°$ 角,(第一百五十八圖)。作 $AB\perp CB$。量 AB 及 AC。求比例 $\frac{AB}{AC}$ 之値。卽爲欲求之數。



第一百五十八圖

2. 求 $\sin 20°$; $\sin 45°$; $\sin 60°$; $\sin 70°$ 之各數値。

3. 由 $1°$ 至 $90°$ 諸角之三角比値。皆列第 139 面之表。試將第 1, 2 題之答數與表中之數比較之。

250. 用表求三角比値.

第 139 面之表。具 $1°$ 至 $90°$ 諸整數角之三角比値。雖僅至小數四位。然已合應用。

若答數須極準。則所用之表。當具角度分數之三角比値方可。

正弦，餘弦，正切表

(1° 至 90° 諸角)

角	Sin	Cos	Tan	角	Sin	Cos	Tan
1°	.0175	.9998	.0175	46°	.7193	.6947	1.0355
2	.0349	.9994	.0349	47	.7314	.6820	1.0724
3	.0523	.9986	.0524	48	.7431	.6691	1.1106
4	.0698	.9976	.0699	49	.7547	.6561	1.1504
5	.0872	.9962	.0875	50	.7660	.6428	1.1918
6	.1045	.9945	.1051	51	.7771	.6293	1.2349
7	.1219	.9925	.1228	52	.7880	.6157	1.2799
8	.1392	.9903	.1405	53	.7986	.6018	1.3270
9	.1564	.9877	.1584	54	.8090	.5878	1.3764
10	.1736	.9848	.1763	55	.8192	.5736	1.4281
11	.1908	.9816	.1944	56	.8290	.5592	1.4826
12	.2079	.9781	.2126	57	.8387	.5446	1.5399
13	.2250	.9744	.2309	58	.8480	.5299	1.6003
14	.2419	.9703	.2493	59	.8572	.5150	1.6643
15	.2588	.9659	.2679	60	.8660	.5000	1.7321
16	.2756	.9613	.2867	61	.8746	.4848	1.8040
17	.2924	.9563	.3057	62	.8829	.4695	1.8807
18	.3090	.9511	.3249	63	.8910	.4540	1.9626
19	.3256	.9455	.3443	64	.8988	.4384	2.0503
20	.3420	.9397	.3640	65	.9063	.4226	2.1445
21	.3584	.9336	.3839	66	.9135	.4067	2.2460
22	.3746	.9272	.4040	67	.9205	.3907	2.3559
23	.3907	.9205	.4245	68	.9272	.3746	2.4751
24	.4067	.9135	.4452	69	.9336	.3584	2.6051
25	.4226	.9063	.4663	70	.9397	.3420	2.7475
26	.4384	.8988	.4877	71	.9455	.3256	2.9042
27	.4540	.8910	.5095	72	.9511	.3090	3.0777
28	.4695	.8829	.5317	73	.9563	.2924	3.2709
29	.4848	.8746	.5543	74	.9613	.2756	3.4874
30	.5000	.8660	.5774	75	.9659	.2588	3.7321
31	.5150	.8572	.6009	76	.9703	.2419	4.0108
32	.5299	.8480	.6249	77	.9744	.2250	4.3315
33	.5446	.8387	.6494	78	.9781	.2079	4.7046
34	.5592	.8290	.6745	79	.9816	.1908	5.1446
35	.5736	.8192	.7002	80	.9848	.1736	5.6713
36	.5878	.8090	.7265	81	.9877	.1564	6.3138
37	.6018	.7986	.7536	82	.9903	.1392	7.1154
38	.6157	.7880	.7813	83	.9925	.1219	8.1443
39	.6293	.7771	.8098	84	.9945	.1045	9.5144
40	.6428	.7660	.8391	85	.9962	.0872	11.4301
41	.6561	.7547	.8693	86	.9976	.0698	14.3006
42	.6691	.7431	.9004	87	.9986	.0523	19.0811
43	.6820	.7314	.9325	88	.9994	.0349	28.6363
44	.6947	.7193	.9657	89	.9998	.0175	57.2900
45	.7071	.7071	1.0000	90	1.0000	.0000	∞

習　　題

從表中求以下各比例之值。

$\sin 2°$.	$\cos 11°$.	$\tan 20°$.
$\sin 42°$.	$\cos 63°$.	$\tan 85°$.

將所得之結果寫作方程式。

251. 三角函數. 細察第139面之表。留意諸角由$1°$變至$90°$時。其三角比值作何變遷。因每有一變於角，必有一相當變於其比。故三角比亦名三角函數。

設A從$0°$增至$90°$。試於表中求$\sin A$之變遷，

依此。試求$\cos A$之變遷。

若已知一角之一函數值。則此角之他函數及度數。可用代數法決定之。若有一表。則可於表中求得之。§262中所授者。爲代數法。下爲圖線法：

252. 已知一角之一函數值。求此角之他函數值之圖線法：

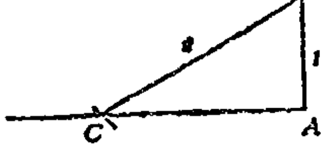
習　　題

1. 已知一角之正弦等於$\frac{1}{2}$。試求此角之他函數值及度數。

求作一直角A(第一百五十九圖)

於A角之一邊。截$AB=1$.

以B爲中心，半徑等於2，作一圓弧，令遇AC於C.



第一百五十九圖

量AC，又求C角之餘弦及正切.

用半圓規求$\angle C$之度數.

2. 試求一角之度數.設其正弦爲$\frac{7}{8}$; .2; .75又求其他函數之值.

3. 試求兩未知角之度數及其他兩函數之值,設$\cos B=0.6$;

設$\tan A=\frac{4}{3}$.

30°, 60°角諸函數之恰合數值.

253. 30°及60°角諸函數之恰合數值. 因30°, 45°,及60°諸角。常用於多數問題中。故學者當牢記其諸函數之恰合數值。詳細見下列習題:

習　　題

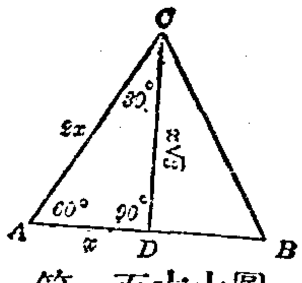
1. 求作一直三角形。令其一角成30°。當先作一等邊三角形。(見第一百六十圖)。又從頂角作垂線至一邊。令分三角形成兩相似形。

指明三角形ADC之銳角爲60°與30°.

指明弦爲30°角之對邊之兩倍.

由是:若以x代AD,則AC必爲$2x$.

指明$CD=x\sqrt{3}$.



第一百六十圖

2. 用第一百六十圖求$\sin 30°$之值。

$$\sin 30°=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.\quad \text{何故?}$$

3. 求$\sin 60°$之值。

$$\sin 60°=\frac{x\sqrt{3}}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

4. 求$\cos 30°$之值。

5. 求 $\cos 60°$之值。

6. 求 $\tan 30°$之值。

$$\tan 30° = \frac{x}{x\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

7. 求 $\tan 60°$之值。

根　　數

254. 有理化分母. 於習題 6, 嘗以 $\sqrt{3}$ 乘 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 之分子與分母,使分數 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 變為 $\frac{1}{3}\sqrt{3}$。如此,則分數之值並不更改,然其分母已變爲有理數,此法名曰有理化分母。有理化分母之目的,在得一分數式,容易以筆算計算也。

習　　題

有理化下列各分數之分母:

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　4. $\frac{12}{7\sqrt{3}}$　　7. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$

2. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$　　5. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$　　8. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{z}}$

3. $\frac{6}{\sqrt{a}}$　　6. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$　　9. $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$

有理化分母於 $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$。嘗以 $2+\sqrt{3}$ 乘分子與分母。

例如 $$\frac{3}{2-\sqrt{3}} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{6+3\sqrt{3}}{4-3} = 6+3\sqrt{3}.$$

10. $\frac{5}{2+\sqrt{5}}$　　11. $\frac{6}{3-\sqrt{5}}$　　12. $\frac{4}{\sqrt{2}-1}$

13. $\frac{7}{3+2\sqrt{5}}$　　14. $\frac{3-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}$　　15. $\frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

於以下各題,有理化分母,又求分數之畧値至小數兩位:

16. $\frac{8+\sqrt{6}}{8-\sqrt{6}}$　　18. $\frac{5+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}}$

17. $\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$　　19. $\frac{1}{3-\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

20. 解次方程,求 x 之値。

$$5x=\sqrt{3}(1+2x).$$

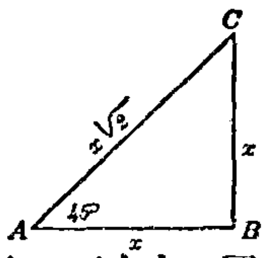
將解答化作分數,其分母須爲有理數,

45°角諸函數之恰合數値

255. 45°角諸函數之恰合數値. 凡求作一45°角。可作一等腰直三角形如第一百六十一圖。

習　　題

1. 於第一百六十一圖之等腰直三角形 ABC。指明 $A=C=45°$。



第一百六十一圖

2. 以 x 代第一百六十一圖等腰直三角形 ABC 之兩等邊。又指明 $AC=x\sqrt{2}$。

3. 試求45°角諸函數之値。但各答數之分母當爲有理數。

256. 30°,45°,60°角諸函數恰合數値之提要. 以下爲記憶此項數値之簡法。

爲勻配起見。將 $\frac{1}{2}$ 寫作 $\frac{1}{2}\sqrt{1}$。故

$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{1}$, $\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

餘弦之值與上相同。惟其次序則相反。

由是：$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{1}$, $\cos 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

此可整列之成一表如下：

角 / 函數	30°	45°	60°
$\sin$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$

觀§262,當知正切之函數值無須牢記於心。蓋三角諸函數之間有一單簡之關係。甚易計算也。然讀此項關係以前。當先知函數之各種實用法。

三角函數之實用法

257. 三角形之決定法. 凡直三角形有以下各部兩兩相等者。爲相合形：

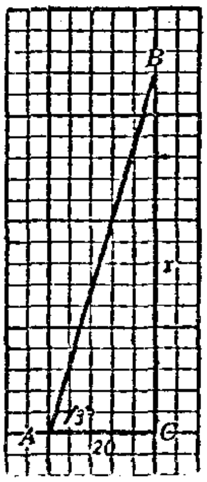
1. 夾直角之兩邊。
2. 一邊及一銳角，
3. 弦及其他一邊。

換言之。若已知一直三角形之直角。又知其他兩部。(然此兩部中至少有一邊)則此三角形可以完全決定。或可由已知之諸部求作之。其未知諸部。可用比例尺作圖法。或用其角之正弦.餘弦,正切等法求得之。詳細見下列習題，

習　　題

1.　一旗柱之繩,牽至距柱脚20呎,與地成角73°。求旗柱之高。

I.　**圖線解法:**　用界尺及半圓規。作第一百六十二圖之直三角形。量 x, 知其略數為66呎。



第一百六十二圖

II.　**三角解法:**　用 $\angle A$ 之正切卽得:

$\frac{x}{20}=\tan 73°=3.2709$.(由第139面之表得之)

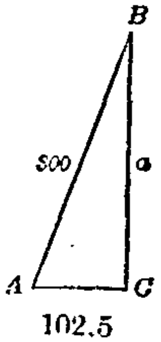
故 $x=20\times 3.2709=65.418.$

答數65.418為誤引,雖 BC 之長已求準至小數三位。因此數由 AC 相乘而得,乃 AC 之長為20,未嘗有小數一位,故小數.418無甚意義,可删去之,故 BC 長65呎。

2.　一氣球上升。今以260呎長之繩繫之於地,與地成角67°,設繫球之繩甚直,求氣球高若干?

用 A 角之正弦求之

3.　一風箏之線,繫於一杙 A。如第一百六十三圖,線長300尺。杙距正當風箏 B 下之 C 點 $102\frac{1}{2}$ 呎。設風箏之線甚直。求風箏高若干?



第一百六十三圖

求風箏與杙所成之高度角,

I.　**圖線解法:**　作直三角形 ABC, 如第一百六十三圖又量 a 及 A.

II.　三角解法：

$$\cos A = \frac{102.5}{300} = .3$$

由第139面之表得 $\cos 72^\circ = .3090.$

又　　$\cos 73^\circ = .2924.$

∴風箏之高度角約爲72°或73°.

因　$\frac{a}{300} = \sin 72^\circ = .9511$,(由第139面之表得之)

故　$a = 300 \times .9511 = 285$

III.　代數解法：a 之數値可由下方程得之.

$$a = \sqrt{300^2 - 102.5^2} \qquad \text{何故?}$$

4.　一直柱長8呎。影落平地長9呎。求影尖之高度角。

5.　某飛機在空中。從 A 點測之得60°。正當飛機之下有一點 C 距 A 點300碼。求飛機之高

6.　一山高 $500\sqrt{3}$ 呎。設其頂與平地上一點最短之距離爲1000呎。求山頂與此點所成之高度角。

7.　某路每隔50呎高起1呎。問此路之高度角若干?

8.　某路與平地成角6°。問此路沿平地距離100呎之處。高起幾尺。

9.　一塔高140呎。上有電射光燈。若燈光作低度角20°。則照見一船。問此船距塔脚若干呎?

10.　船一艘。經某塔。塔高120呎。上有電射光燈。當船距塔脚400呎時。問燈光須低若干度。方可照見該船。

11. 某巖之頂高 150 呎。某船之低度角為25°。求此船距巖若干呎。

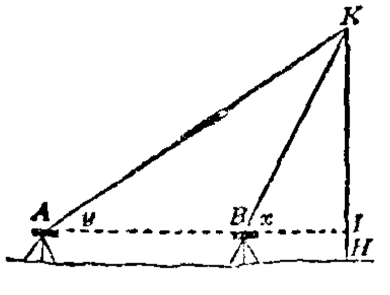
12. 一飛機正在 C 鎮上時。測得 B 鎮之低度角為10°。設 B 距 C $2\frac{1}{4}$ 哩。問飛機高若干?

†*13.* 從一600呎高之飛機,觀一150呎高之飛機。其低角度為39°。求兩飛機之距離。

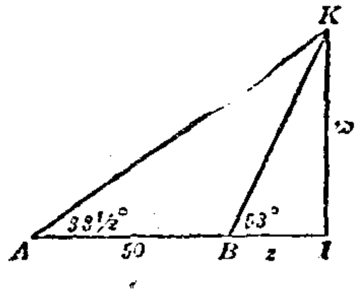
14. 二人相距1200呎。同觀一飛機。飛機正在二人中間之直線上。一人求得飛機之高度角為35°。同時第二人求得飛機之高度角為55°。求飛機之高。

15. 某塔之頂有旗柱一枝,於地平面距塔脚50呎處。求得柱頂之高度角為35°。又求得塔頂之高度角為20°。求柱長若干。

16. 某童欲求一製造廠煙囱之高 HK。先在 B, A 兩點以量角器求得 x 與 y 兩角。設量角器在三脚架上。距地$3\frac{1}{2}$呎。A 及 B 與煙囱同在一平面內。A 距 B 50呎。而地面甚平。又 $x=63°$, $y=33\frac{1}{2}°$,則煙囱應高若干?(第一百六十四圖)



第一百六十四圖



第一百六十五圖

第一百六十五圖中,　$w/z=\tan 63°=1.9626$.　(1)

$$\frac{w}{50+z}=\tan 33\tfrac{1}{2}^\circ=.6620. \quad (2)$$

(1)與(2)爲聯立方程,其中w與z爲未知數,用代換法消去w,即得 $w=1.9626z$(由(1))。 (3)

以(3)代換於(2)則

$$\frac{1.9626z}{50+z}=.6620. \quad (4)$$

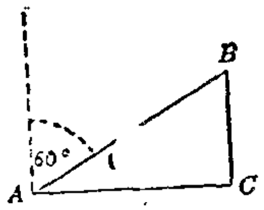
求(4)之z. 代換z之值於(3),即得w之值.

指明煙囱之高可不用角而用影之長求得之。又兩法可互作覆證之用。

17. 某河向正東而流,其北有樹一株。從河之南堤一點A。求得樹頂之高度角爲45°。距A之南70碼有點B。從此點求得樹頂之高度角爲30°.試求河之闊。

18. 從離地20呎之窗,求得某塔脚之低度角爲15°。又塔頂之高度角爲37°。問塔應高若干?

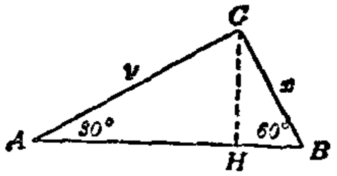
‡19. 某村莊B(第一百六十六圖)在某村莊C之正北。某軍隊駐紮於A點,距C之正西8哩。B在A之東北60°。今見一飛機由C飛至B。費十五分時之久。求飛機平行時之平均速率。



第一百六十六圖

‡20. 某人欲量一河之廣袤。河向東流。此人於岸上選一點A。見隔岸有樹一株C,在此點之東北60°。又向A之東行300碼,得一B點。見C在B之西北30°。求此河CH之闊。

(第一百六十七圖)



第一百六十七圖

指明 $x=150$; $y=260$.

121. 兩飛機同時在某城 C 出發。飛機 A 向南飛。平均每小時飛15哩。飛機 B 向西飛。於三刻後在飛機 A 之西北51½°。問此時兩飛機相距幾哩?又飛機 B 平均每小時行幾哩?

122. 某氣球正在一直路之上;測得路上兩屋之低度角,一為34°。一為64°。設兩屋相距65碼。問氣球高若干?

123. 某燈塔建於石上。海上有船,在塔頂測之。得低度角為12°。在石上測之,低度角為8°。燈塔高45呎;求船距石之遠

124. 從一飛機觀一55呎高之旗柱。測得柱頂與柱脚之低度角為45°與67°。求飛機之高。

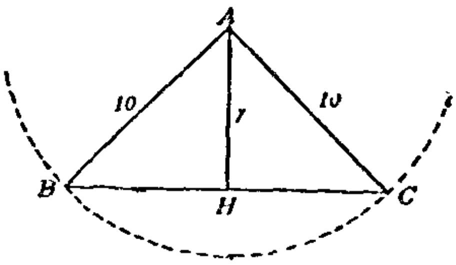
258. 關於等腰三角形之問題.

關於等腰三角形之問題,可用兩直三角形解之,此兩直三角形。可從等腰三角形之頂角作一垂線至對邊卽得之。

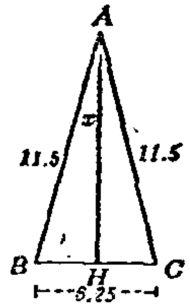
問　　題

1. 一大礮距一直路7哩。若礮彈能達遠10哩,問此路受彈之處長若干?

指明第一百六十八圖之 BAC 為等腰三角形。AH 平分 BC。於直三角形 ABH 中,求 BH 之長度。



第一百六十八圖



第一百六十九圖

2. 張規之兩脚至6.25公分。(生的米突)設脚長11.5公分。問兩脚張開時成角幾度？

於第一百六十九圖之等腰三角形中。作垂線AH。

3. 張規之兩脚。使成角50°。若脚長12.5公分。問兩尖點相距若干？

作等腰三角形之垂線。

14. 某礮彈能達遠11哩。一直路上受彈之處長13哩。問此礮距路幾哩？

15. 自鳴鐘之擺長20吋。搖動時成角6°。求擺端所到最遠兩點之距離。

16. 自鳴鐘之擺長25吋。擺端所到最遠兩點之距離爲6吋。求此擺搖動時成角幾度？

7. 兩救火員。用一軟水管澆焚燒之牆。此管放水120呎。牆脚距救火員所立之地100呎。求水能達牆上最遠之距離若干？

三角函數之關係

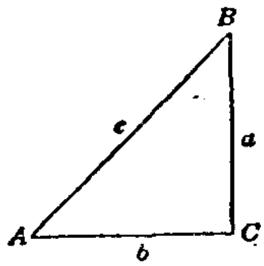
259. 凡角之正弦。餘弦。及正切諸關係。可用單簡之公式指明之。

習　　題

1. 設A爲任一銳角。試證$(sin A)^2+(cos A)^2=1$

從第一百七十圖知　$\sin A=\frac{a}{c}$.　(1)

$\cos A=\frac{b}{c}$.　(2)



第一百七十圖

(1)與(2)之平方爲　$(\sin A)^2=\frac{a^2}{c^2}$.　(3)

$(\cos A)^2=\frac{b^2}{c^2}$.　(4)

(3)加(4)得, $(\sin A)^2+(\cos A)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}$.　(5)

$\because\ a^2+b^2=c^2$,

$\therefore (\sin A)^2+(\cos A)^2=1$.　(6)

$(\sin A)^2$通常寫作$\sin^2A$; 依此$(\cos A)^2$及$(\tan A)^2$寫作$\cos^2A$及$\tan^2A$

2. 於第一百七十圖,證$\sin^2B+\cos^2B=1$。

3. 用公式$\sin^2x+\cos^2x=1$,指明

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}.^*$$

又　$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

4. 從第一百七十圖,指明

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.$$

$$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}.$$

260. 三角恆等式.

*此處根號以前不用雙符號,蓋角之負正弦或負餘弦,無甚意識.

$$\sin^2A+\cos^2A=1. \qquad (1)$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}. \qquad (2)$$

此兩基礎關係。無論 A 爲何數。必屬眞確。故謂之恆等式。有時寫作,

$$\sin^2A+\cos^2A\equiv1;\quad \tan A\equiv\frac{\sin A}{\cos A}.$$

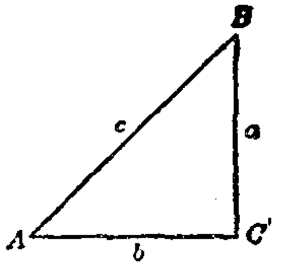
261. 恆等式之記號: $\equiv$之記號讀作恆等於。

習　　題

1. 於第一百七十一圖指明

1. $\sin A=\cos B$　　2. $\cos A=\sin B$

此卽,一角之正弦。爲其餘角之餘弦。



第一百七十一圖

2. 於第一百七十一圖,指明

$$\tan A=\frac{1}{\tan B}$$

此卽,一角之正切。爲其餘角之反正切。

262. 已知一函數值,用代數法求他函數之值. 下列習題,指明 $\sin^2A+\cos^2A\equiv1$,與 $\tan A\equiv\frac{\sin A}{\cos A}$ 之兩基礎恆等式。可用以求兩函數之值。設已知第三函數值。

習　　題

於以下各題試求兩函數之值,設已知

(1) $\tan B=\frac{3}{7}$

解法:

$$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{3}{4}.$$　何故？　(1)

又 $\sin^2 B+\cos^2 B=1.$　(2)

(1)與(2)可作聯立方程解之，未知數為 $\sin B$ 與 $\cos B$, $\sin B$ 可用代換法消去之如下：

由(1)，　$\sin B=\frac{3}{4}\cos B.$　(3)

代換(3)於(2)得，$\frac{9}{16}\cos^2 B+\cos^2 B=1.$　(4)

消去(4)之分數式，得 $9\cos^2 B+16\cos^2 B=16.$　(5)

$25\cos^2 B=16.$　(6)

$\cos^2 B=\frac{16}{25}.$　(7)

$\cos B=\frac{4}{5}.$　(8)

由(3)，　$\sin B=\frac{3}{5}.$

(2) $\cos B=\frac{1}{3}.$　(6) $\cos B=m.$　(10) $\cos B=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$

(3) $\sin B=\frac{1}{4}.$　(7) $\sin B=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$　(11) $\tan B=\sqrt{3}.$

(4) $\tan B=\frac{4}{3}.$　(8) $\cos B=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$　(12) $\tan B=\frac{1}{3}\sqrt{3}.$

(5) $\sin B=0.5.$　(9) $\sin B=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$　(13) $\tan B=s.$

263.　§262中習題1至13，指明 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ 及 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 兩基礎三角關係之用法，其餘三角關係，當於第十章中溫習筆算及代數分數後補授之。

含二未知數之二次方程

264. §262之習題 1 解下方程系：

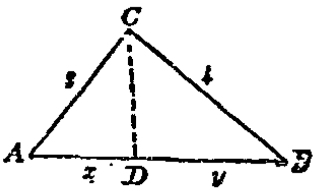
$$\begin{cases} \sin B = \frac{3}{4}\cos B \\ \sin^2 B + cs^2 B = 1. \end{cases}$$

此方程系中。$\sin B$ 與 $\cos B$ 為未知數。解時以 $\frac{3}{4}\cos B$ 代 $\sin B$ 於第二方程。遂得消去 $\sin B$。凡方程系之有兩未知數。而其一為一次，其二為二次者。通常皆用此法解之。

多種問題。常含兩未知數之方程系。而其一為一次。其二為二次。下列各題，授此項方程系之解法。

例　　題

第一百七十二圖之三角形 ABC。一邊等於 3。一邊等於 4。試從 C 求作一線。令成兩等周之三角形。



第一百七十二圖

解析： 設想問題已解，又設 CD 為從 C 所求作之線，欲定 D 之位置，當然須先定 AD.

解法： 以 x 代 AD 之長，y 代 BD 之長。

則　　$3+x+CD=4+y+CD,$　　何故？

故，　　$x-y=1.$　　何故？　　(1)

$AB^2=(x+y)^2=3^2+4^2=25,$　　何故？

故　　$x^2+2xy+y^2=25.$　　(2)

x 與 y 之值，為(1)與(2)之方程系解答.

於(1)求 x 之值而代於(2)，

$(1+y)^2+2(1+y)y+y^2=25.$　　(3)

$$y^2+y-6=0.$$

$$\therefore\begin{cases}y_1=2.\\x_1=3.\end{cases}\qquad 又\begin{cases}y_2=-3.\\x_2=-2.\end{cases}$$

$x=-2$, $y=-3$ 可滿足方程(1)與(2)。然不能滿足問題之情形。故此兩數當删去之。而 3 與 2 遂爲 x 與 y 之值。

由以上解法。可知含兩未知數之方程系。若其一方程第一次。又一方程爲二次者。可解之如下:

先解一次方程。求一未知數 x 或 y。後將求得之數代入於二次方程中。如此可再得一二次方程。含其他未知數 y 或 x 如(3)。又解此方程。

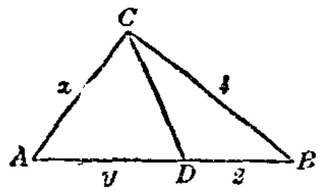
所得 y 或 x 之値,可代入於一次方程中如(1)。以求他未知數之相當數。

注意上列之方程系解法。即爲代換消元法。

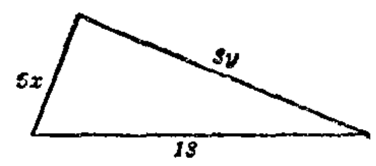
習　　題

1. 求作一直三角形。令其周等於30,弦等於13.

2. 第一百七十三圖之直三角形 ABC 中。ACD 與 BCD 之周相等。又 $CB=4$, $DB=2$. 求 AC 及 AD 之長。



第一百七十三圖



第一百七十四圖

3. 第一百七十四圖之直三角形之邊爲 $5x$,$3y$ 及 13, 又 $x+y=5$. 求作其形。

4. 解$\begin{cases}x^2+y^2=25\\y-x=1.\end{cases}$　　6. 解$\begin{cases}m^2+mn+n^2=63\\m-n=3.\end{cases}$

5. 解$\begin{cases}r^2+4s^2=25\\r+2s=7.\end{cases}$　　7. 解$\begin{cases}2m^2-mn+3n^2=54\\m+n=7.\end{cases}$

用圖線法及消元法解二次方程.

265. 函兩未知數之二次方程題,可用圖線解之如下:

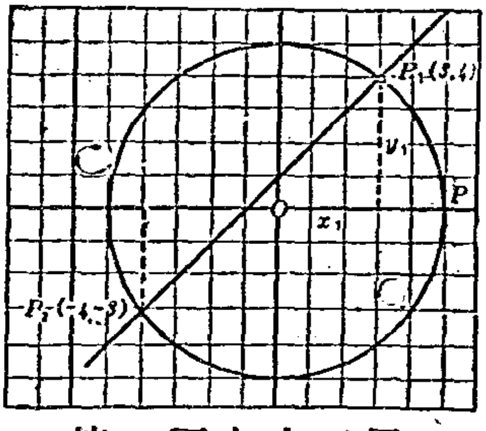
習　　題

1. 用圖線法解 $x^2+y^2=25$,及 $y-x=1$.

設想 x 之數值,而解 $x^2+y^2=25$ 以求 y,即得 $x^2+y^2=25$ 之各解答:

$$\begin{cases}x=0\\y=\pm5\end{cases}\begin{cases}x=3\\y=\pm4\end{cases}\begin{cases}x=4\\y=\pm3\end{cases}\begin{cases}x=5\\y=0\end{cases}\begin{cases}x=-3\\y=\pm4\end{cases}\begin{cases}x=-4\\y=\pm3\end{cases}\begin{cases}x=-5\\y=0.\end{cases}$$

將此諸得數表於圖上而作圖線如第一百七十五圖。知 $x^2+y^2=25$之圖線爲圓,其中心爲起點。其半徑爲 $\sqrt{25}$ 或 5。



第一百七十五圖

$x^2+y^2=25$ 爲圓,可於下見之:

此方程之圖線上任一點之縱橫線之平方和爲25。例如

$$OP_1{}^2=x_1{}^2+y_1{}^2=25,$$

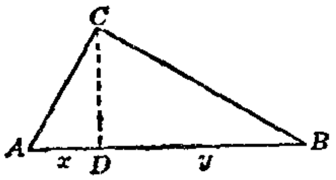
故　　$OP_1=5.$

又凡線上各點,若與一已知點等遠者,其線爲圓。故$x^2+y^2=25$之圖線爲圓,其半徑爲 5。

此圓與方程$y-x=1$之直線圖相交之點爲$P_1(3,4)$,及$P_2(-4,-3)$。

如此$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4\\y=-3\end{cases}$ 爲x與y之數值.

2. 第一百七十六圖之三角形ABC中。$AB=5$, $CD=\frac{12}{5}$, $\angle C=90^\circ$。求作其形。



第一百七十六圖

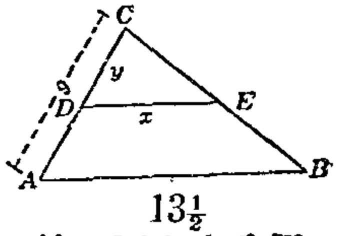
第一百七十七圖

3. 第一百七十七圖之長方形之周等於34。試求各邊之長。

4. 用代換消元法解下列方程系,又作圖線證明之:

1. $\begin{cases}x^2=58-y^2\\y=10-x.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x^2+y^2=40\\x-3y=0.\end{cases}$



第一百七十八圖

5. 於第一百七十八圖之三角形ABC中。作DE與AB平行。令DE爲AC與DC之等比例中項。

6. 解以下各方程系:

1. $\begin{cases}xy=18\\x-2y=0.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}3xy-5y+1=0\\x-2y=0.\end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x+4y=-1. \end{cases}$

‡4. $\begin{cases} x^2+4y^2=32 \\ 5x+6y=8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2r^2-rs=6s \\ r+2s=7. \end{cases}$

‡6. $\begin{cases} 2a^2+b^2-33=0 \\ 2a=9-b. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2-y^2=25 \\ x-y=10. \end{cases}$

‡8. $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ x+y=9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=1. \end{cases}$

‡10 $\begin{cases} 2a+b=5 \\ 3a^2-7b^2=5 \end{cases}$

提　　要

266. 本章授三角比,正弦,餘弦及正切之界說。

267. 一已知角之三角比值,可用 (1) 表, (2) 圖線求得之。

268. 30°, 45°, 及 60° 諸角正弦之恰合數值為 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}$, 及 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. 30°, 45°, 及 60°諸角餘弦之恰合數值為 $\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{2}$, 及 $\frac{1}{2}$。

正切之數值可從下關係求得之。

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$$

269. 許多關於求距離之問題。本可用圖線法解得者。亦可用三角函數計算之。

270. 此章證以下之基礎三角恆等式:

$$\sin^2 A+\cos^2 A\equiv 1.$$

$$\tan A \equiv \frac{\sin A}{\cos A}.$$

271. 若已知一函數之值。則可得他函數之值。其法爲(1)用表。(2)用圖線。(3)用代數法。卽用§270之恆等式。

272. 函兩未知數之方程系。若一方程爲一次。又一方程爲二次。則用代換消元法解之。

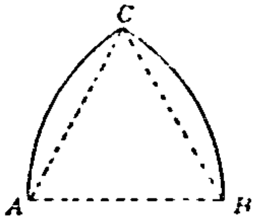
273. 分數之無理分母。可用一同數乘分子與分母。以化去之。

第十章

圓形

圓形性質之温習及擴充

274. 哥德拱門. 圖畫中圓形之用，已見第一百七十九圖，圖爲一等邊之哥德拱門，常見於近代之建築。如教堂之窗，通常皆作此形。



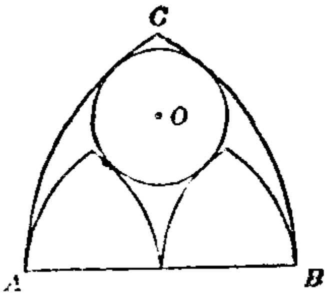
第一百七十九圖

ABC 爲一等邊三角形。設以 A 與 B 爲中心。AB 爲半徑，作 AC 弧與 CB 弧，卽得此形。

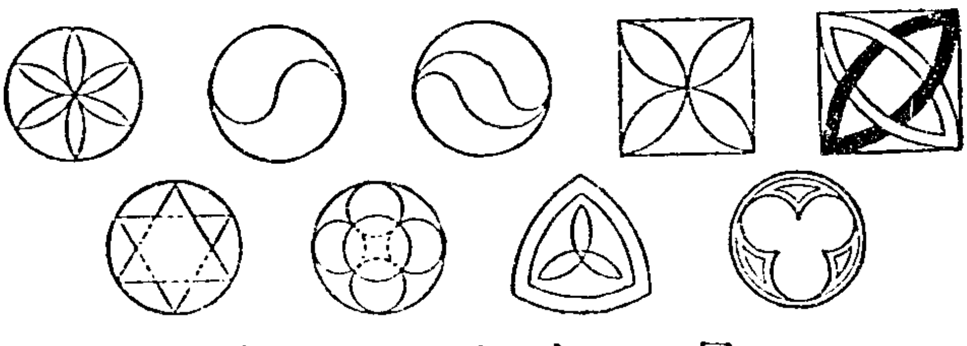
習題

1. 第一百八十圖爲三哥德拱門。而以一圓所聯者，試用界尺與規求作此形。

求此圓 O 之中心，當以 A 與 B 爲中心。又半徑等於 $\frac{1}{4}AB$。§289 中第三題，當證此圖之諸圓，互作切圓。



第一百八十圖



第一百八十一圖

2.　細察第一百八十一圖之各圖形。然後用界尺與規求作各形。

3.　於圓形內,圓形上,圓形外任取各點。又將此各點與中心之距離。與圓形之半徑相比較。

習題3指明圓周內,圓周上,或圓周外之各點。依其距中心之近遠。必小於,等於,或大於半徑。

275. 同心圓. 在同一中心。用不等之半徑。作圓形多個。凡圓形之有同心者。謂之同心圓。

習　題

於紙上作圓形二。令其半徑相等。設割其一而置之於第二形上。令兩中心密合。則全形亦當密合。

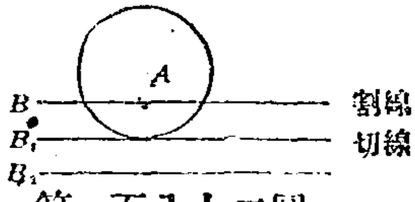
若兩形不密合。則何故?

兩圓。若其半徑相等。全形必等。又凡等圓。其半徑必等。

276. 半圓. 優弧. 劣弧. 於紙上割一圓形。沿直徑摺之。問此形兩部之大小若何?

此節指明圓之直徑必分圓爲兩相等部。* 每部謂之半圓。若分圓爲兩不等部。則一名優弧。一名劣弧。

277. 割線. 切線. 作一圓如 A。(第一百八十二圖)。放界尺於圓上而移動之。留意尺邊之各位置如 B, B_1, B_2,等。問圓與直線可公有幾點?



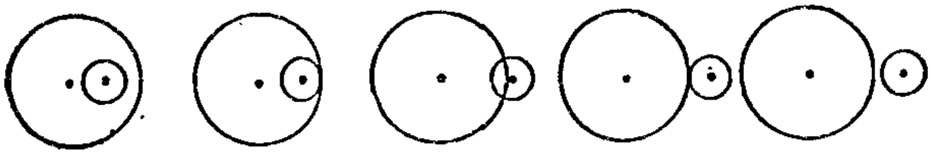
第一百八十二圖

* 據樸羅謁拉司(Proclus)云此定理爲兌喇士(Thales)所發明。

直線之截圓周於二點者爲割線，

直線之僅過圓周於一點者爲切線。

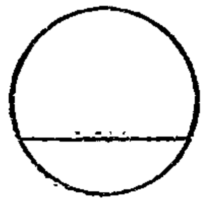
278. 兩形公有之點數. 藉移動一圓於他圓之上。可指明兩圓必截於兩點。或遇於一點。或不能公有一點。



第一百八十三圖

279. 弦. 聯圓周上兩點之線爲弦。(如第一百八十四圖)

280. 弧之記號. ⌒爲弧之記號。故AB弧可寫作$\widehat{AB}$。



第一百八十四圖

作等圓二。置一圓於他圓之上。令兩中心密合。若一圓之$\widehat{AB}$。等於他圓之$\widehat{CD}$。則兩弧可密合。

問AB與CD兩弦作何比較?

試於已知圓內求作兩等弧，

281. 定理： 同圓或等圓。其相等之中心角必截等弧。又凡等弧。必爲相等之中心角所截。

若兩弧密合。則兩中心亦必密合。其逆定理可依此證之。

282. 對弦. 聯一弧兩端點之弦。與弧相對。

283. 定理： 同圓或等圓。其等弧必對等弦；又其逆理爲等弦必對等弧。

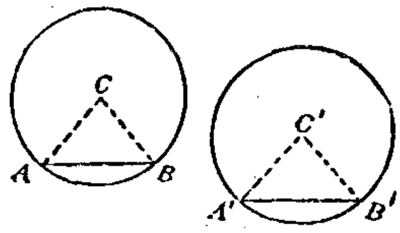
此定理可用疊合法證之。

證逆定理時,作 $CA, CB, C'A'$ 及 $C'B'$ 諸線.(第一百八十五圖).

證 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

則 $\angle C = \angle C'$. 何故?

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$. 何故?



第一百八十五圖

直徑 弦 弧

284. 定理: 圓內之線,其通過圓心而又垂於一弦者,必平分此弦及其對弧.

已知 $\odot O$,* CD 通過中心 O, 割 AB 於 E; 又 $CD \perp AB$.(第一百八十六圖).

證 $\overline{AE} = \overline{EB}$; $\widehat{AD} = \widehat{DB}$; $\widehat{AC} = \widehat{CB}$.

證: (相合三角形法).

作 AO 及 OB.

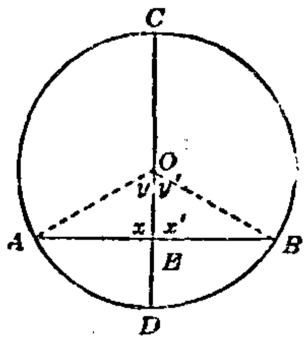
證 $\triangle AEO \cong \triangle BEO$.

故 $\overline{AE} = \overline{EB}$, 何故?

又 $y = y'$, 何故?

指明 $\widehat{AD} = \widehat{DB}$.

又 $\widehat{AC} = \widehat{CB}$.



第一百八十六圖

上列定理,為包括以下各情形諸定理之一:

1. 一線通過圓心。

2. 一線垂於一弦。

---

* 記號 $\odot$ O 即一圓,其中心為 O. ⓢ 為諸圓之記號.

3. 一線平分一弦。

4. 平分一劣弧。

5. 平分一優弧。

設任取以上二項爲假設。以所餘三項之任一項爲終結。卽成一定理。此種定理。下列習題當論及之。

習　題

1. 平分一弦之直徑。必垂於此弦。並平分其對弧。試證之。

2. 設有一直線。平分一弦。及一對弧。則此線必過圓心，垂於此弦。又平分其他對弧。試證之。

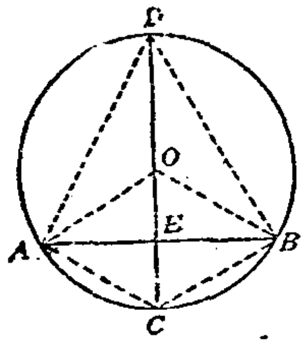
證 $\triangle ACE \cong \triangle BCE$（第一百八十七圖）

則 $CD \perp AB$. 何故?

故 CD 過 O.（因一線之中點垂線上各點。距線之兩端等）。(§71)

指明 $\overline{AD} = \overline{DB}$,

$\therefore$ $\widehat{AD} = \widehat{DB}$, 何故?



第一百八十七圖

3. 若分一圓作弧之弦爲直徑。則此兩弧之中點聯線。必平分於此弦。且垂於此弦。試證之。

4. 平分一弧之直徑。必爲對弧之弦之中點垂線。試證之。

5. 一弦之中點垂線。必過圓心。又平分其對弧。試證之。

‡6. 設有一直線。垂於一弦。又平分一對弧。試證此線必通過圓心。並平分此弦。及其他對弧。

7. 平分一弦之直徑。必平分一中心角。但此角爲至弦兩端之兩半徑所成。

8. 試平分一已知弧。

9. 設已知一圓。試求其中心。

10. 設已知一弧。試求中心並作其圓。

11. 試作一圓。令過不同在一直線上之三點。

12. 指明內接多邊形諸邊之中點垂線。相交於一公點。

13. 試作三角形之外接圓。

‡14. 圓內有一點。試作一弦過此點。令此點平分所作之弦。

15. 用已知半徑作一圓。令過兩已知點。

16. 若三等分一圓。又以弦聯結諸分點。則成一等邊三角形。試證之。

17. 若聯結一圓內兩垂直徑之各端點。則成何形?

‡18. 設有一線。垂於一切線內之切點。試證此線必通過圓心。

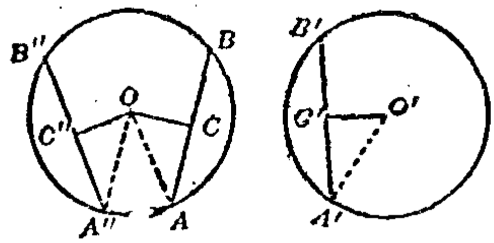
19. 試於圓周上之一已知點。求作一切線。

‡20. 求作一切線至一已知圓。又與一已知線平行。

285. **定理:** 同圓或等圓。其相等之弦。必距中心等。又逆定理。凡距中心相等之弦。必等。

已知$\odot O=\odot O'$, $\overline{AB}=\overline{A'B'}=\overline{A''B''}$.

$OC\perp AB$, $O'C'\perp A'B'$, $OC''\perp A''B''$.(第一百八十八圖)



第一百八十八圖

證$OC=OC''=O'C'$.

證(相合三角形法):

作OA, OA'', 及$O'A'$,

證$AO=A'O'=A''O$.

證$\triangle AOC\cong\triangle A''OC''\cong\triangle A'O'C'$.

則　$OC=OC''$, 又$OC=O'C'$.

逆定理: 若$OC''=O'C'=OC$,

證$\overline{AB}=\overline{A'B'}=\overline{A''B''}$.

證$\triangle OAC\cong\triangle OA''C''\cong O'A'C'$,

則$AC=A'C'=A''C''$; 又$AB=A'B'=A''B''$.

習　　題

1. 設兩弦相交,而與從交點至中心之聯線成等角,則兩弦必等。試證之。

2. 設圓心與兩等弦之距離爲

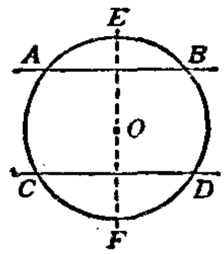
1. x^2+3x及$4(15-x)$.　　†3. $x(x-3)$及$4(3x-9)$.

2. $x(x+4)$及$3(2x+5)$.　　†4. $3x^2+4x$及$12(1-x)$.

試求x及圓心與弦之各距離。

286. 定理： 弧之夾於兩平行割線者必等。又逆定理，若兩割線夾等弧，而不在圓內相交，則彼此平行。

I. 已知 $\odot O$，又 $AB \parallel CD$，割圓於 A 與 B，又於 C 與 D，(第一百八十九圖)。



第一百八十九圖

證 $\widehat{AC}=\widehat{BD}$，

證： 作 $OE \perp AB$，

引長 EO 至 F。

則， $OF \perp CD$。 何故？

$\widehat{CE}=\widehat{DE}$。 何故？

$\widehat{AE}=\widehat{EB}$。 何故？

$\therefore$ $\widehat{AC}=\widehat{BD}$。 何故？

II. 已知 $\widehat{AC}=\widehat{BD}$，(第一百八十九圖) AB 與 CD 不在圓內相交。

證 $AB \parallel CD$，

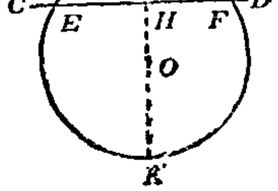
證：作 $OE \perp AB$ 又引長 EO 至 F。

證 $\widehat{EC}=\widehat{ED}$， 何故？

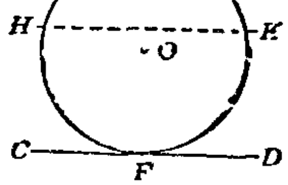
則 $EF \perp CD$。 何故？

$\therefore$ $AB \parallel CD$。 何故？

III. 設一線如 AB，為圓之切線，試證上定理，(第一百九十圖)。



第一百九十圖

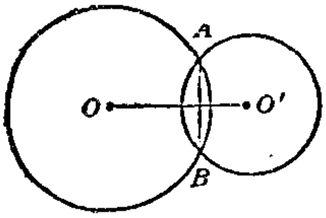


第一百九十一圖

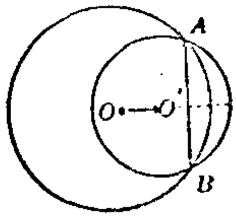
IV.設兩平行線皆爲圓之切線,試證上定理(第一百九十一圖)。

作 $HK \parallel AB$,然後用 III 之理證之,

287. 定理: 設兩圓相交,則兩圓心之聯線,必平分兩圓之公弦。又此線與此弦互作垂線。



第一百九十二圖



第一百九十三圖

設 Ⓢ O 與 O' 相交,AB 爲其公弦,

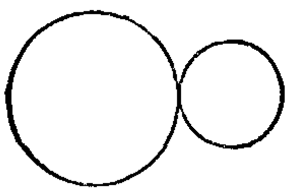
證 $OO' \perp AB$.

證此當用 § 39.

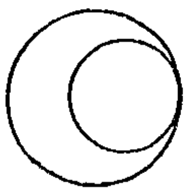
切 圓

288. 切圓. 若兩圓相遇,又同與一切線相遇於一點,則兩圓謂之切圓。此點則謂之切點,或謂之兩圓之觸點,

若一圓全在他圓之外,如第一百九十四圖,則兩圓謂之外切。



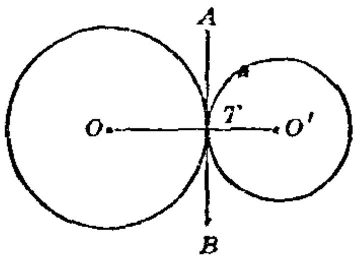
第一百九十四圖



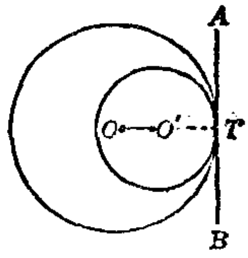
第一百九十五圖

若一圓全在他圓之內,如第一百九十五圖,則兩圓謂之內切。

289. 定理：設兩圓相切，其中心與切點，同在一直線內。



第一百九十六圖



第一百九十七圖

I. 設第一百九十六圖之O與O'為兩外切圓之中心，T為切點。

設O, O'與T同在一直線內。

證OTO'為一直線。

則OT與$O'T$同在一直線內明矣。　何故？

II. 用第一百九十七圖證此定理。

習　題

1. 於已知圓之一已知點，試作一切圓。問此種切圓，可作幾個？

2. 試作一圓，令過一已知點，又與一已知圓相切。

3. 兩圓，若其中心之距離等於其兩半徑之和，則兩圓互相外切，試證之。

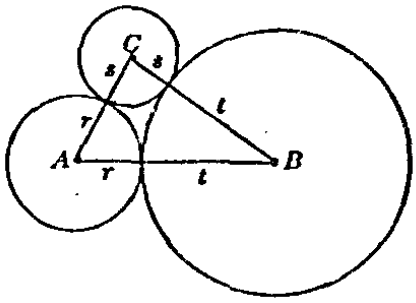
4. 兩切圓，其中心之距離為$2\frac{1}{2}$吋，一圓之半徑為$\frac{3}{4}$吋。試求作此兩圓。

5. 三圓之半徑為1吋，$1\frac{1}{2}$吋；及$\frac{3}{4}$吋，試作此三圓，令互相外切。

6. 以一已知點爲中心。試作一圓。與一已知圓相切。

7. 以已知之半徑。求作一圓。與兩已知圓相切。

18. 以三角形之各頂角爲中心。試作切圓三。(見第一百九十八圖)。用代數法指明其一圓之半徑。等於三角形周界之半減去一邊。



第一百九十八圖

290. 史略： 圓之理論。關於弦,切線,割線者。較歐几利得之時尤古。此種理論。多半爲派達哥拉士所首先發明。亞企泰斯 (Archytas) 於二倍立方之問題求作法中。嘗設想一定理。謂切線與半徑所成之角爲直角。創用圓之相等切線之定理者。爲亞奇米德。此定理卽爲"從圓外一點所作圓之兩切線相等"。海倫,(紀元前第一世紀)則起始命之爲一自立定理。

逆定理"圓心必在兩切線所成之角之平分線內"。初見於攀派司(Pappus)所著之 Synagoge 第七册,(攀氏約生於紀元後第三世紀之末年)。亞奇米德嘗著一書。詳論圓之切線。又阿波羅義士 (Apollonius) 之所謂切觸問題者。爲作一圓。但須具以下三項。(1),過一已知點。(2),切一已知直線與一已知圓。攀派司於其第四册 Synagoge 中。論及求作三已知圓之外切圓。又述一頗有趣味之問題。題爲經過一直線內三點。作三直線。令成已知圓之內接三角形。

提要

291. 本章所授各項如下:

同心圓。	割線,
弧。	切線。
半圓,	弦。
優弧,	對弦。
劣弧。	切圓。

本章又授以下各記號: — 爲弦, ⌒ 爲弧, ⊙爲圓, Ⓢ爲諸圓。

292. 本章所指示之定理如下:

1. 圓周內,圓周上,或圓周外之各點。依其距中心之近遠,必小於,等於,或大於半徑。

2. 凡圓之半徑相等者。其全形必等。又凡等圓,其半徑必等。

3. 二直徑分圓作兩相等部。

4. 同圓或等圓。其相等之中心角截等弧,又凡等弧。必爲相等之中心角所截。

293. 本章證以下各定理;

1. 同圓或等圓,其等弧必對等弦,又逆定理爲等弦必對等弧。

2. 若任取以下兩項爲假設,則其餘三項必眞確:

1. 一線過中心。

2. 一線垂於一弦。

3. 一線平分一弦。

4. 平分一劣弧。

5. 平分一優弧。

3. 同圓或等圓。其等弦必距中心等。又其逆定理爲凡距中心相等之弦必等。

4. 弧之夾於兩平行割線者必等。又其逆定理爲若兩割線夾等弧而不在圓內相交，則彼此平行。

5. 設兩圓相交。則兩中心之聯線必平分其公弦。且彼此互作垂線。

6. 兩切圓之中心與切點。必同在一直線內。

7. 若有下列各項之一，則兩弧相等：

(1)對弦爲直徑。

(2)截弧之中心角相等。

(3)對弦相等。

(4)弧爲平行弦，平行割線，及平行切線所截。

8. 若有下列各項之一，則兩弦相等：

(1)弦對等中心角。

(2)弦對等弧。

(3)弦距中心等。

第十一章

用弧量角法

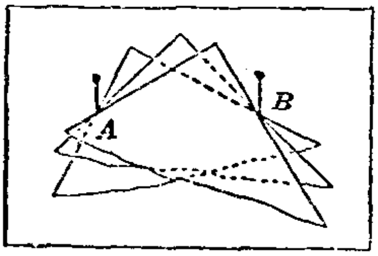
量角度之準個

294. 量角度之準個. 此章以前量角以度,分,秒,直角,與平角爲準個。如此若一角大45°。則其角度卽爲45。若以直角爲準個。則此角之量度爲$\frac{1}{2}$。若以平角爲準個。則其量度爲$\frac{1}{4}$。

設角之兩邊遇一圓。或割一圓。則此角可以兩邊所截之弧量之。以下當指明此理。

習　　題

1. 從厚紙上割一直角而移動之。令其邊常遇兩定點。如A與B。(一百九十九圖)。作此。可插兩針於紙上。如A與B。使直角之邊常遇此針。留意此角移動時之各位置。問其頂如何移動?



第一百九十九圖

2. 用一銳角。重複第一題。又用一鈍角。再重複此題。

3. 作一半圓。從圓周上諸點作線至直徑之兩端。令成多角。此諸角之頂。皆遇圓周。用半圓規量此諸角。問其大小若何?

4. 作一圓。於其內作一弦。令割一弧，較大於半圓。又從弧上諸點作線。至弦之兩端，用量法比較過弧之諸角。

5. 用小於半圓之弧。重複第 4 題。

內　接　角

295. 內接角. 若一角之頂過圓周，又其邊皆為弦，則此角為內接角。

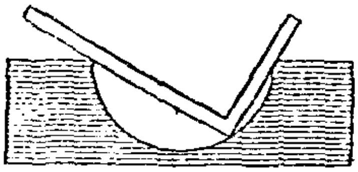
習　　題

1. § 294 之 4 與 5 兩題。指明凡截同弧之內接角皆等。又此角之為銳，直，或鈍。因弧之小於，等於，或大於半圓而異。

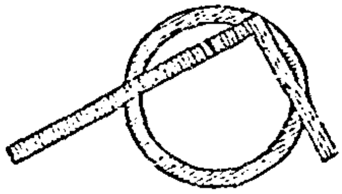
若弧由一極小形變作一圓，則內接角作何變遷?

2. 指明木匠之規尺。如何可用以驗圓穴之準否。(見第二百圖)。

3. 指明木匠之規尺。如何可用以平分一環。(見二百零一圖)

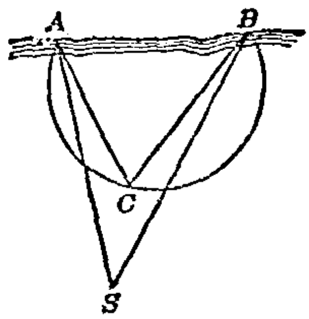


第二百圖



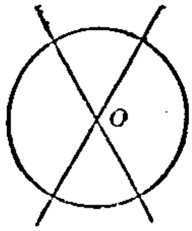
第二百零一圖

4. 第二百零二圖之圓，代表一危巖。凡經過 AB 岸之船隻，皆當遠避之。船在圓外。則無危險。指明船 S 可保無虞。須由船上所測得之 ASB 角，小於已知角 ACB。

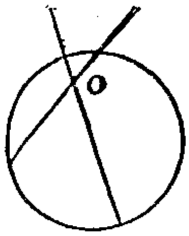


第二百零二圖

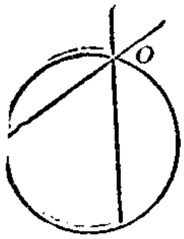
296. 設兩線相交、又割一圜、或遇一圜、則此兩線之各位置。可作圖表示之。如第二百零三至二百零九圖。



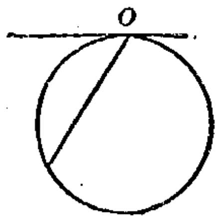
第二百零三圖



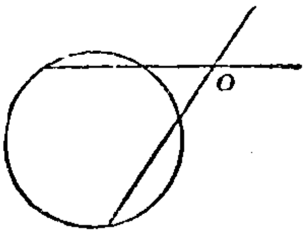
第二百零四圖



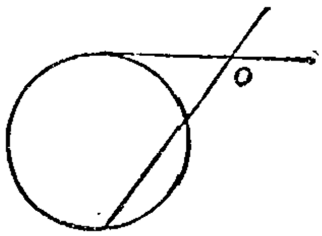
第二百零五圖



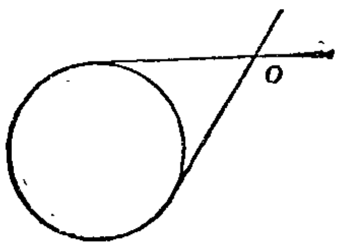
第二百零六圖



第二百零七圖



第二百零八圖



第二百零九圖

第二百零三圖中。兩線相交於圜之中心。卽其角爲兩半徑所成。

第二百零四圖中。兩線相交於圜內。惟不在中心。卽其角爲兩弦所成、

移動交線。使角頂遇圜周、則此角成一內接角。如第二百零五圖、

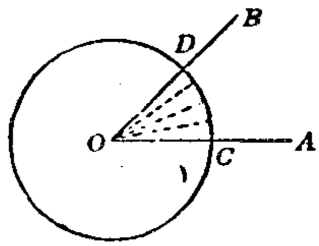
定置角之一邊。不使移動。而轉移他邊。使成切線。卽得第二百零六圖。此圖之角爲一切線與一弦所成。

第二百零七圖指示兩線相交於圜外。其角爲兩割線所成。

旋轉角之邊於O。(第二百零七圖)。令邊成切線、卽得第二百零八與二百零九圖、

下列定理。指示第二百零三圖至二百零九圖之交線所作之角。其角度如何可以截弧表示之。

297. 中心角之角度. 設第二百一十圖之$\angle AOB$為中心角。今等分之令成諸等角。又任取其一為準個。則等角之數目卽為中心角之量度。問$\angle AOB$之量度為何?



第二百一十圖

指明$\widehat{CD}$分作諸等部.

任取$\widehat{CD}$之一等部為準個,

求$\widehat{CD}$之量度為何?

大概若中心角之量度為m,則截弧之量度亦為m.何故?

簡言之。中心角與截弧之量度相同,或——

中心角可用截弧量之。

習　　題

1. 求作一中心角。用半圓規量其度數之整數或分數。問截弧中有弧度若干? 又截弧之量度為何?

2. 作一圓,並截一弧,求其弧度。問弧之量度為何?

3. 僅用尺與規。分一圓作 2 等弧, 4 等弧, 8 等弧,

4. 僅用尺與規。求作 90°之弧,又 45°, 60°, 30°, 15°, 75°, 105°, 165°之各弧,並指明如何三等分一 90°之角及一 45°之角?

5. 求分一圓作三弧,令成比例 1 : 2 : 3。

用代數法求各弧之度數。然後用半圓規作諸弧,

6. 一圓分作 4 弧。其比例為 1:4:6:7,試求各弧之度數。

7.　一圓之周長63吋。中心角截一弧長7吋。問此角大幾度?

8.　同圓或等圓之兩中心角。與其邊所截之弧有同比。

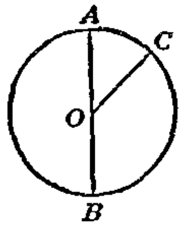
指明此理。設兩角之量度爲m與n。

指明截弧之量度亦爲m與n。

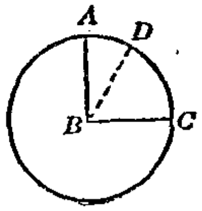
則各比爲$\frac{m}{n}$。　何故?

9.　第二百十一圖之AB爲一直徑。$\angle AOC$與$\angle BOC$之度數以x^2+4x與$3x^2+12x$表示之。試求x之值及AC弧與CB弧之弧度。

‡10.　第二百十二圖之$\angle ABC$爲一直角，$\angle ABD=(2x^2-3)^\circ$。又$\angle DBC=(10x^2-15)^\circ$。試求$x$之值，及AD弧與$DC$弧之度數。



第二百十一圖



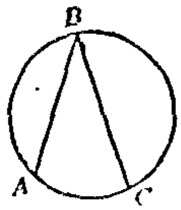
第二百十二圖

298.　內接角之角度.

作一內接角如ABC。(第二百十三圖)用半圓規量AbC角。並求$\widehat{AC}$之弧度。

問內接角之角度與弧度作何比較?

下列定理。指示如何可用截弧代內接角之角度:



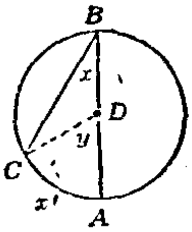
第二百十三圖

定理：　一內接角。可用其邊所截之弧之半量之。

設第二百十三圖之內接角ABC截$\widehat{AC}$,

證 $\angle ABC$ 可用 $\frac{1}{2}\widehat{AC}$ 量之。證此定理。當如下三項設想：

I. 圓之中心在角之一邊，如第二百十四圖。



第二百十四圖

證：　作半徑 CD.

以 x, y, 及 x' 表示 ABC, ADC, 及 $\widehat{AC}$ 之角度，

又指明 $\angle BCD = x$.

於是得——

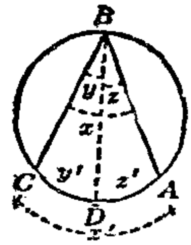
$x + x = y$.　何故？

解 x,　$x = \frac{1}{2}y$.

然　$y = x'$.　何故？

$\therefore x = \frac{1}{2}x'$　何故？

II. 圓之中心在角內，如第二百十五圖。



第二百十五圖

證：　作直徑 BD.

$x = y + z$.　何故？

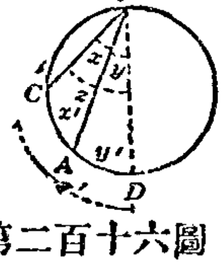
$y = \frac{y'}{2}$.　I

$z = \frac{z'}{2}$.　I

$\therefore x = \frac{y' + z'}{2}$.　何故？

或　$x = \frac{1}{2}x'$.

III. 圓之中心在角外，如第二百十六圖。



第二百十六圖

證：　作直徑 BD,

$z = x + y$.　何故？

$\therefore x=z-y.$　何故?

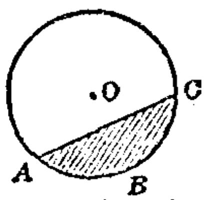
然　$z=\frac{z'}{2}$,　何故?

又　$y=\frac{y'}{2}$.　何故?

$\therefore x=\frac{z'-y'}{2}$.　何故?

或　$x=\frac{1}{2}x'$.

299. 圓之弓形. 弦及對於其弦之弧所包之圖形。爲圓之弓形。例如第二百十七圖之ABC。爲圓O之弓形。



第二百十七圖

習　題

證以下各題:

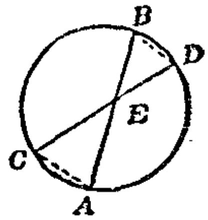
1. 凡同弓形之內接角皆等。

2. 凡內接於半圓形之角。皆爲直角。

3. 設有一角。內接於弓形。而弓形小於半圓。則角大於直角。

4. 設有一角。內接於弓形。而弓形大於半圓。則角小於直角。

5. 設第二百十八圖之AB與CD兩弦。交於圓內。指明$\triangle AEC$與BED互爲等角三角形。故彼此成相似形。

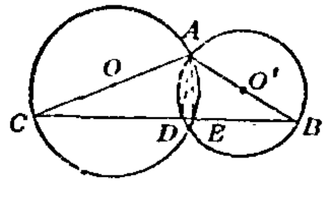


第二百十八圖

16. (數學疑問)求下定理之證中錯誤:

從不在一已知線內之一點。可作兩垂線至此線。

第二百十九圖之 O 與 O' 兩圓相交。今從其一交點 A，作直徑 AB 與 AC。又作 CB，割兩圓於 D 與 E。作 AE 與 AD，由是 $\angle AEC$ 內接於半圓，故爲直角。



第二百十九圖

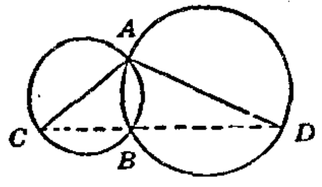
$$\therefore AE \perp CB.$$

依此，$\angle ADB$ 爲直角.

$$\therefore AD \perp CB.$$

7. 設有三角形。其諸頂角皆遇圓周。則此形謂之內接三角形。今有一內接三角形。其兩角爲 82° 與 76°。問對三邊之弧。各爲幾度?

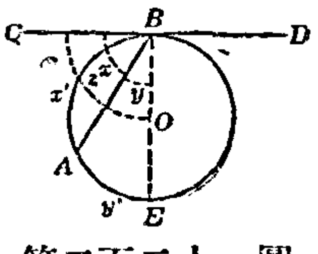
8. 兩圓相交於 A 與 B 如第二百二十圖。AC 與 AD 爲其直徑。試證 C, B，與 D 皆在一直線內.



第二百二十圖

300. 定理： 切線與經過切點之弦所成之角。可用其截弧之半量之。

設第二百二十一圖之 CD 爲圓形 O 之切線，又 AB 爲從切點所作之弦。



第二百二十一圖

證 $\angle ABC$ 可以 $\widehat{AB}$ 之半量之.

證： 作直徑 BE.

以 x, y，及 z 表示 $\measuredangle ABC$, EBA，及 EBC 之角度，又以 x', y'，及 z' 表示 BA, AE，及 BAE 諸弧之角度，卽得以下各關係:

$$z = x + y, \qquad \text{何故?}$$

$\therefore x=z-y$.　　何故？

然　$y=\frac{1}{2}y'$,　　何故？

又, $z=\frac{1}{2}z'$,因 $z=90°$, 又 $z'=180°$,

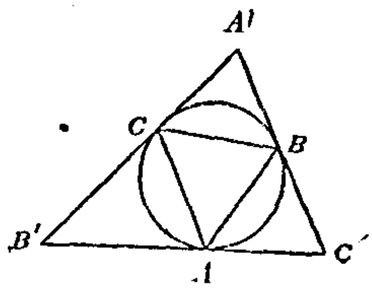
$\therefore x=\frac{1}{2}z'-\frac{1}{2}y'=\frac{1}{2}(z'-y')$.何故？

$\therefore x=\frac{1}{2}x'$.　　何故？

習　　題

1. 第二百二十二圖之三角形 ABC。內接於一圓。又 $\angle A=57°$。$\angle B=66°$。設於 A, B, 與 C, 作三切線。成外切三角形 $A'B'C'$。求 A', B', 與 C' 諸角。

2. 第二百二十二圖之外切三角形 $A'B'C'$。其兩角爲 70° 與 80°。求內接三角形 ABC 中三角之度數。

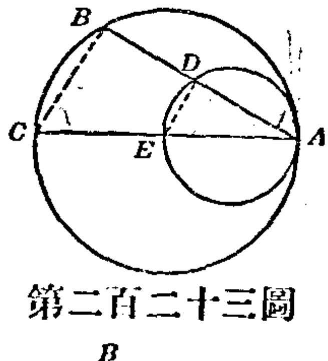


第二百二十二圖

3. 一內接四邊形之諸頂角分圓周作弧。成比例 3：4：5：6。求四邊形之諸角。

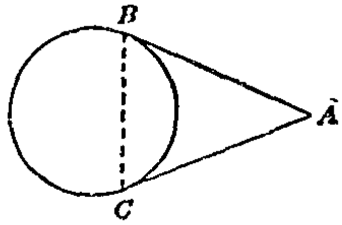
4. 設從二百二十三圖之兩內切圓之切點作兩弦。令遇圓於 B, C, D, 與 E。試證 $BC \parallel DE$。

作兩圓之公切線。



第二百二十三圖

5. 從一點至一圓之兩切線相等。試證之。(第二百二十四圖)

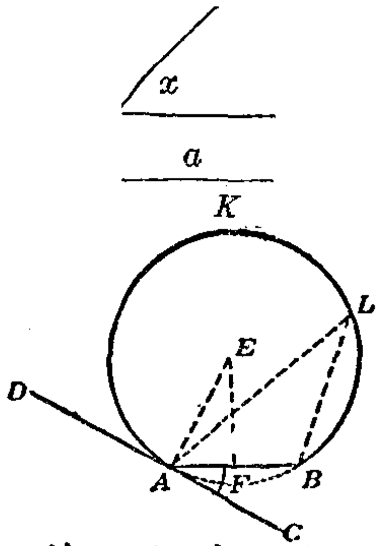


第二百二十四圖

求　作　題

301. 求作以下各題：

1. 以一已知線段爲弦。試作一弓形於其上。令此形之內接角等於一已知角。



第二百二十五圖

已知線段 a, 又一角等於 x.(第二百二十五圖).

以 a 爲弦,試於其上作一弓形,使形內可作一接角,等於 x.

作法: 作 $AB=a$.

於 A, 作 $\angle CAB=x$.

作 $AE\perp DC$.

作 FE 爲 AB 之中點垂線.則 FE 必遇 AE 於 E. 何故?

以 E 爲中心, EA 爲半徑,作一圓.則此圓必通過 B. 何故?

AKB 卽爲求作之弓形.

證: 設 $\angle ALB$ 爲 AKB 之任一內接角,

則 $\angle ALB=\frac{1}{2}\widehat{AB}$. 何故?

$\angle BAC=\frac{1}{2}\widehat{AB}$. 何故?

$\therefore \angle ALB=\angle BAC$. 何故?

$\therefore \angle ALB$ 等於 x. 何故?

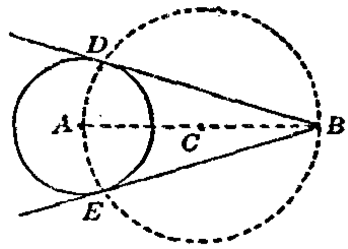
用半圓規。驗作法準否。

2. 如第一題作圖。設已知角爲一鈍角。

3. 在一已知線段上。作一弓形。可含一 60°之內接角。又可含 30°, 120°,45°,及 135°之諸角。但求作時,僅可用界尺與規。

4. 從圓外一點。求作一切線至圓。

設 A 為已知圓之中心,B 為圓外之已知點.(第二百二十六圖)



第二百二十六圖

從 B 點至 A 圓試作一切線.

作法: 求 AB 之中點.

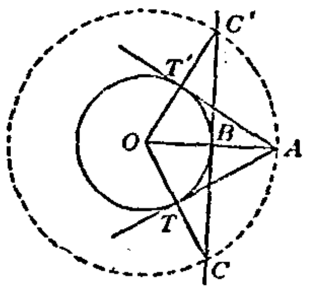
以 AB 為直徑作一圓,令割 A 圓於 D 與 E.

作 BD 及 BE.

則 BD 與 BE 即為求作之切線。

證: 作 AD,指明 $\angle ADB$ 為直角,又 BD 為至 A 圓之切線.何故?

5. 歐几利得幾何學第三册第十七定理。與第四題同。解法見第二百二十七圖。



第二百二十七圖

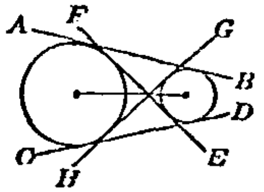
其已知圓為 O,已知點為 A.

作一同心圓。令過 A 點.以 OA 聯結 O 與 A。作 CC' 垂於 OA。令過已知圓上之 B 點。又聯 C 與 C' 至 O。聯結交點 T 與 T' 至 A。則 AT 與 AT 為求作之切線。試證之。

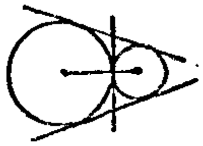
屈六基(Tropfke)謂第4題之求作法。初見於1583年芬克(Thomas Finck)所著之幾何學。書名 Geometriae rotundi。十八世紀之初等幾何學。有依芬克之法者。亦有依歐几利得之法者。問讀是書者寧取何法? 何故?

6. 作一公切線至外方相離之兩圓。

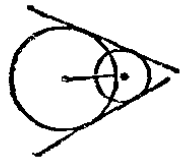
於兩圓可作之公共切線。當依兩圓之位置而定。若一圓全在他圓之外方。如第二百二十八圖。則可作之公切線有四。卽兩外切線 AB 與 CD。又兩內切線 EF 與 GH。



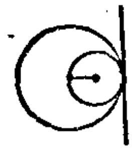
第 百二十八圖



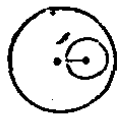
第二百二十九圖



第二百三十圖



第二百三十一圖



第二百三十二圖

若兩圓外切。則可作外切線二。內切線一。如第二百二十九圖。

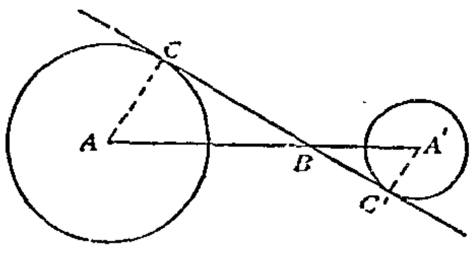
若兩圓相交。則僅可作外切線二。如第二百卅圖。

若兩圓內切。則僅可作外切線一。如第二百卅一圖。

若一圓全在他圓內。則無公共切線可作。如第二百卅二圖。

注意每圖中。凡通過兩圓中心之線。皆爲對稱之軸。

設外方相離之兩圓。其中心爲 A 與 A'。如第二百三十三圖。



第二百三十三圖

I. 作一公共內切線.

作法: 作 AA'.

分 AA' 作線段,令其比等於兩半徑之比。(§176)又設 B 爲其分點.

從 B 求作 BC,令爲 A 圓之切線.(依第 4 題之法)。

BC 爲求作之內切線.

證: 作 AC. 作 $A'C' \perp CB$.

若能證$A'C'$等於A'圓之半徑,則BC爲A'圓之切線(§74)

以R與R'代圓形A與A'之半徑.

$$\frac{AB}{BA'}=\frac{R}{R'}.$$　　作法.

證　$\triangle ABC \backsim \triangle A'BC'$,

$$\therefore \frac{AB}{BA'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{R}{A'C'}.$$　　何故?

$$\therefore \frac{R}{R'}=\frac{R}{A'C'}.$$　　何故?

證　$A'C'=R'$,

$\therefore$　BC爲圓A'之切線,　何故?

指明如何求作其他公共內切線.

II. 作外切線.

作法:　作AA'.(第二百三十四圖)

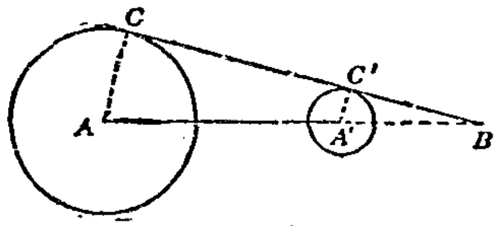
外分AA於B,令其比等於兩半徑之比.(§176)

作BC爲A圓之切線.

BC爲求作外切線之一.

指明如何求作其他外切線.

證與I同.

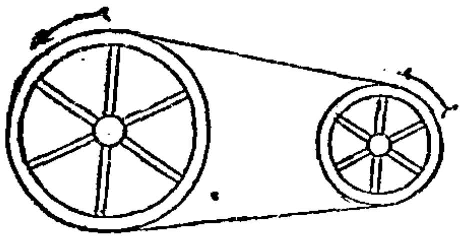


第二百三十四圖

於§§302, 303得兩圓內外公共切線之圖解.

302. 循環運動. 循環運動,可用調帶轉過兩輪而傳達之。如第二百三十五與二百三十六圖。

兩輪之半徑,一為 R,長 12 吋,一為 r,長 5 吋,用調帶聯之,如第二百三十五圖.



第二百三十五圖

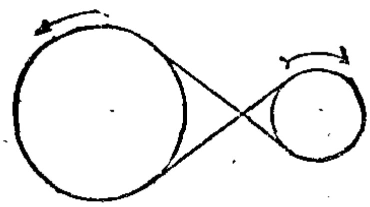
兩輪中心之距離 a,為 32 吋.

用 1 至 16 之比例尺作此圖.

從下公式求調帶之長度 l.

$$l=\pi(R+r)+2a.$$

第二百三十六圖之輪,用交义調帶聯之,



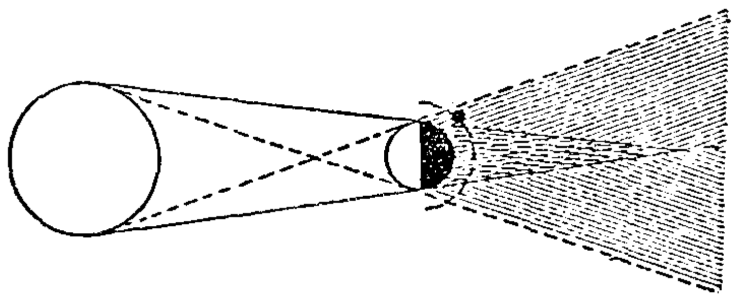
第二百三十六圖

用下公式,求調帶之長度、

$$l=2\sqrt{(R+r)^2+a^2}+\pi(R+r).$$

注意若聯兩輪如第二百三十六圖,則兩輪依相反方向轉動.

303. 月蝕. 月蝕發現於月過地球影之時。若月在影之暗部。則謂之全蝕,(見第二百三十七圖).



第二百三十七圖

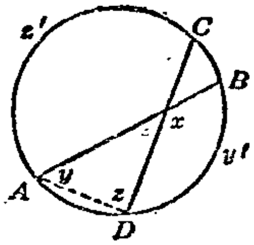
此部夾於地球及地球與日之兩公共外切線之間。

若月在半明部。則謂之分蝕,然此部當依公共內切線而定。

求地球影之長。設地球與日之距離爲93,000,000哩。日之直徑爲866,500哩。又地球之直徑爲8,000哩。

304. 定理：若兩弦相交於圓內。則所成之任一角。皆以兩截弧之和之半量之。

作AD,(第二百三十八圖).



第二百三十八圖

指示 $x=y+z$,

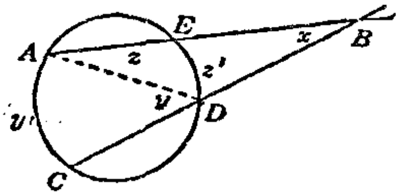
$y=\frac{1}{2}y'$.

$z=\frac{1}{2}z'$.

$\therefore x=\frac{1}{2}(y'+z')$.

305. 定理：若兩割線相遇於圓外。則所成之角。以兩截弧之較之半量之。

作AD.(第二百三十九圖)



第二百三十九圖

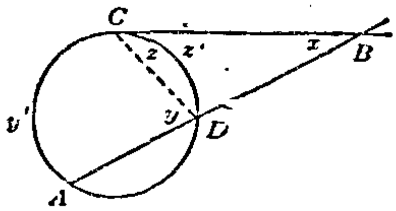
指示 $y=x+z$.

又　$x=y-z$.

仿 §304 證完,

306. 定理：一切線遇一割線於圓外。所成之角。以兩截弧之較之半量之。

作CD.(第二百四十圖)



第二百四十圖

則　$y=x+z$.

$x=y-z$.

$y=\frac{1}{2}y'$.

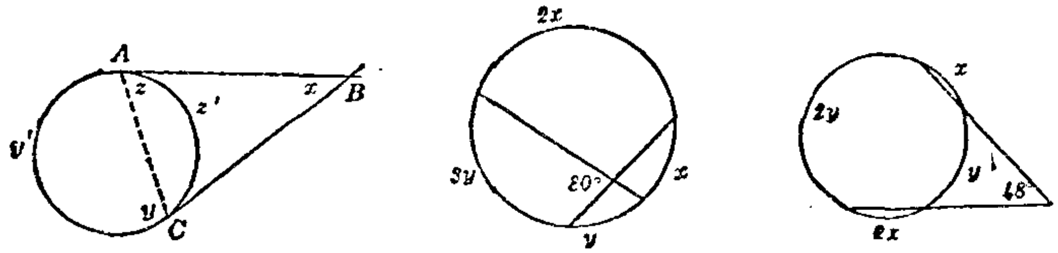
$z=\frac{1}{2}z'$.

$\therefore x=\frac{1}{2}(y'-z')$.

307. 定理: 兩切線所成之角。以兩截弧之較之半量之。

指示 $y=x+z$,(第二百四十一圖)

$$x=y-z=\frac{1}{2}(y'-z').$$



第二百四十一圖　第二百四十二圖　第二百四十三圖

習　題

1. 有弧與角。表示於二百四十二圖。試求 x 與 y。

2. 有弧與割線間之角。表示於二百四十三圖。試求 x 與 y。

3. 設兩切線成角60°。問其分圓作何弧?

†4. 設兩切線互成一直角。問其分圓作何弧?

5. 兩切線夾圓之兩弧。設一弧爲他弧之四倍。問兩切線成角幾度?

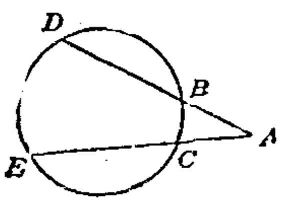
†6. 兩割線相遇於圓外。成角76°。設一弧爲243°。試求他弧。

7. 外切四邊形與圓周之切點。分周作弧。成比例 7:8:9:12。試求四邊形之諸角。

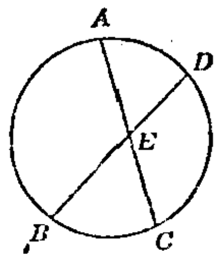
8.　兩切線在圓外成角70°。問其所夾之弧，何者較大？

9.　設兩割線中間之角爲30°。如第二百四十四圖。DE 弧之度數以$\dfrac{6x^2+29x+30}{2x+3}$代表之。$BC$ 弧之度數以$\dfrac{2x^2-7x-15}{x-5}$代表之。求 x 及兩弧之度數。

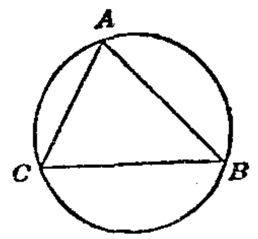
約分數至最低之項。



第二百四十四圖



第二百四十五圖



第二百四十六圖

10.　設二百四十五圖之$\angle AED$爲60°。BC 弧以$\dfrac{x^2+8x+15}{x+3}$代表之。AD 弧以$\dfrac{x^2+12x-45}{x+15}$代表之，求兩弧之度數。

11.　證三角形三角之和爲兩直角。

設第二百四十六圖之 ABC 爲一任三角形.

設於形外作一外接圓.

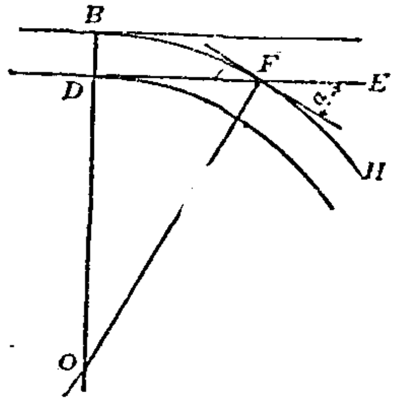
則三內接角以 AB, BC, 與 CA 三弧之和之半量之.

然 AB, BC, CA 三弧之和爲一全圓.

$\therefore$ 全圓之半或180°，爲三角形三角之和.

12.　欲置轉轍軌於鐵路上，遂於兩軌相交之處，置一軌叉，使車輪之凸棱，可行於一軌之上，而經過他軌，指明第二

百四十七圖曲形之切線,與直軌 DE 所成轍叉之角 a。等於 BF 弧之中心角 FOB。



第二百四十七圖

雜　　題

308. 從下列各題。選幾問演之:

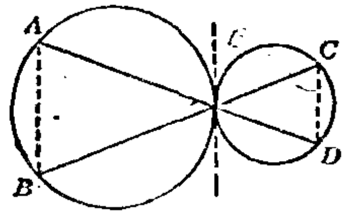
1. 設以三角形之任兩邊爲直徑作兩圓。其周必割第三邊。試證之。

2. 設以等腰三角形之一等邊爲直徑作一圓。其周必割三角形之底於其中點。

3. 設作一圓。令外接於等腰三角形。又作三切線。令過三角形之諸頂。則切線成一等腰三角形。

4. 一點可移動。然聯此點至 C 與 D 兩定點之兩線。成角常等。試求此點之軌跡。

5. 試證內接於圓之平行四邊形爲長方形。



第二百四十八圖

6. 作兩直線。令過外切兩圓之切點。如第二百四十八圖。設此兩線遇圓於 A, B, C, D 諸點。試證 $AB \parallel CD$。

7. 兩圓相交於 A 與 B。設有一變割線。經過 A 點。又割圓周於 C 與 D。試證割線無論在何處。CBD 角不變。

8. 作一直線過外切兩圓之切點。使其兩端達圓周。試證至此兩端所作之兩半徑必平行。

9. 已知內接正五角形之兩對角線相交於形內。試求其所夾之角度。

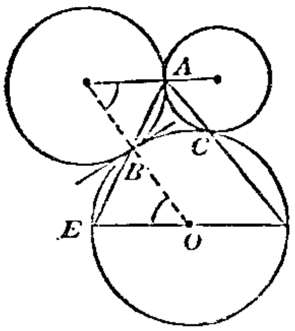
10. 於三角形 ABC。作垂線 BD, AE。試證 $\angle ABD=\angle AED$。以 AB 為直徑。作半圓。

11. 三角形一邊之長度及位置為一定。其對角為已知。而其他兩邊。則可變易。試求變頂之軌跡。

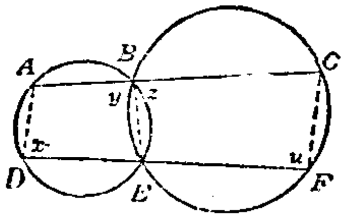
12. 兩圓外切於 P。其公切線遇兩圓周於 A 與 B。試證 $\angle APB=90°$。

13. 兩圓外切。有一線經過其切點。交圓周於 A 與 B。試證 A 之切線。與 B 之切線平行。

14. 第二百四十九圖之三圓互切於 A, B, 與 C。而 AB 與 AC 兩線遇第三圓於 E 與 D。試證 E, O, 與 D。同在一直線內。



第二百四十九圖



第二百五十圖

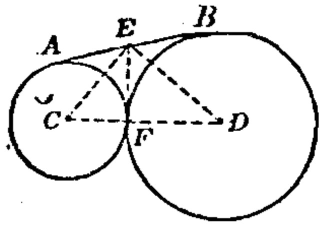
15. 經過第二百五十圖之兩圓之交點。作 AC 與 DF。試證 $AD \parallel CF$。

證　$x+y=180$,　$u+z=180$.

$\because$　$x=z$,　　$y=u$.

$\therefore$　$x+u=180$.

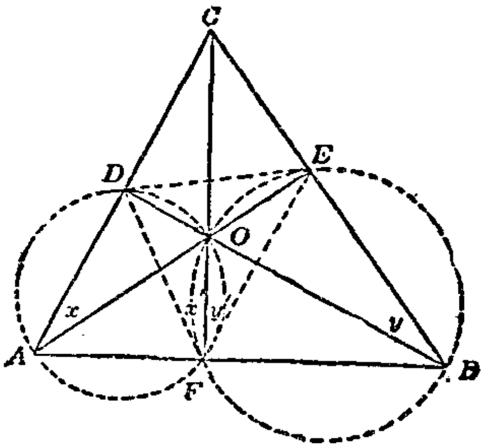
16. 試證第二百五十一圖中兩外切圓之公共外切線。爲兩圓直徑之等比例中項。



第二百五十一圖

證 $AE=EB=EF$,且爲 CF 與 FD 之等比例中項。

17. 聯結 $\triangle ABC$ 中諸垂線之脚。成三角形 DEF。(第二百五十二圖)。試證諸垂線必平分 $\triangle DEF$ 之諸角。



第二百五十二圖

指示 $x=y$, (二者皆爲 $\angle ACB$ 之餘角)

以 AO 與 BO 爲直徑,作圓.

指示 $x'=x$ 又 $y'=y$.

$\therefore x'=y'$.

18. 設從圓之中心作一線。令至兩切線之交點。試證此線平分切線所成之角。

提　要

309. 此章所授各項如下:

內接角。	內接與外切。
圓之弓形。	多邊形。

310. 本章指示下定理之眞實:

1. 一中心角。以其截弧量之。

2. 同圓或等圓之兩中心角。與其邊所截之弧有同比。

311. 本章所證各定理如下:

1. 一內接角。可用其邊所截之弧之半量之。

2. 切線與經過切點之弦所成之角。可用其截弧之半量之。

3. 若兩弦相交於圓內。其所成之任一角。皆以兩截弧之和之半量之。

4. 若兩割線相遇於圓外。其所成之角。以兩截弧之較之半量之。

5. 一切線遇一割線於圓外。其所成之角。以兩截弧之較之半量之。

6. 兩切線所成之角。以兩截弧之較之半量之。

312. 本章所授求作法如下:

1. 以一已知線段爲弦。求作一弓形於其上。令此形之內接角。等於一已知角。

2. 從圓外一點。求作一切線至圓。

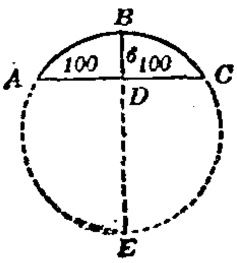
3. 求作公共內外切線。至外方相離之兩圓。

第十二章

圓內之等比例線段

313. 某鐵路測量家,欲知一圓形軌道 ABC 之半徑,(第二百五十三圖)。遂量弦 AC。又量 BD。卽 AC 之中點垂線之一段。而爲 AC 及 ABC 弧所截成者。設 $AC=200$ 呎,又 $BD=6$ 呎。如何可求其半徑?

若能設立 AD, DE, DC, 與 DB 之關係。則解此題甚易。



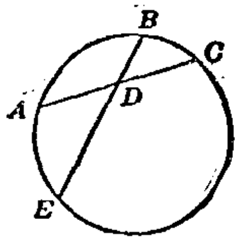
第二百五十三圖

求此關係。須作圓如第二百五十四圖。又作弦 AC。割弦 BE 於 D。量 AD, DE, DC, 與 DB 至小數兩位。又比較 $AD\cdot DC$ 與 $ED\cdot DB$。

注意兩弦各段之乘積,約略相等。

設有差數,則相差多少?

此指下列定理:



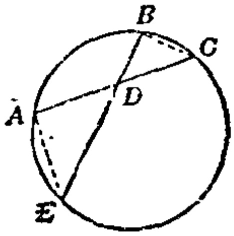
第二百五十四圖

314. **定理:** 設圓內有兩弦相交,則此弦之兩段相乘。等於彼弦之兩段相乘。

述此定理之假設及終結。證之如下:

證: 作 BC 與 AE,(第二百五十五圖)

證 $\triangle ADE \backsim \triangle BDC$。



第二百五十五圖

指明 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{DE}{DC}$.

$AD\cdot DC=DE\cdot DB$.　　何故?

習　題

1. 用§314之定理。解§313之問題。

2. 用§314之定理。求作一正方形。令等於一已知長方形。

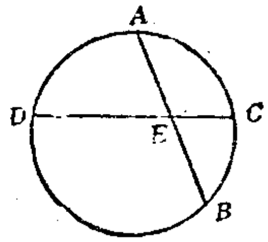
先作一圓。令其大足容一弦。此弦等於已知長方形兩隣邊之和。

又作一半徑至其分點。何弦經過此點。則爲此點所平分?

3. 指示第2題如何可用以求數目之平方根。用此法求 6; 5; 10 之平方根。

4. 兩弦相交。其一之兩段。爲 $x+5$ 與 $x-6$。又一之兩段。爲 $x+2$,與 $x-5$。求 x 及各弦之長。

5. 第二百五十六圖之圓之 DC 弦。割 AB 弦於其中點 E。設 ED 較 EC 長 4 吋。又 $AB=16$ 吋。試求 ED 與 EC 之長。約至 $\frac{1}{100}$ 吋。



第二百五十六圖

6. 兩交割弦之各段列下。求 x。

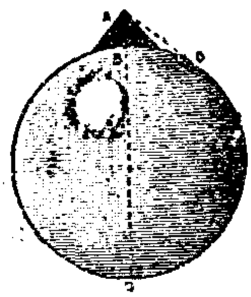
	第一弦		第二弦	
1……	$x-4$	$x+8$	$x+3$	$x-4$
2……	$x+2$	$x+6$	$x-4$	$x+18$
‡3……	$2x+5$	$x+1$	$x+2$	$3x+2$
‡4……	$2x+2$	$3x-5$	$x+1$	$x+5$

17.　某曲形鐵路上有 A 與 B 兩點。其距離為 $2a$ 呎，設弦 AB 之中點。距曲形之中點為 b 呎。試求半徑。

18.　試求第 7 題之半徑。設 $a=100,\ b=4$；$a=150,\ b=5.6$。

9.　某人立於山頂上。距海平面 2 哩。望某方向。問可遠望若干哩?

設第二百五十七圖之 AB 代表山之高度，又 AD 為應求之距離。



第二百五十七圖

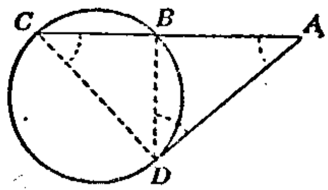
設地球之直徑為 8000 哩，若能設立 AB，AD，AC 之關係，即可得 AD。

下定理指示此關係：

315. 定理： 若從圓外一點，作一切線與一割線。則切線為全割線與其圓外一段之等比例中項。

述假設與終結。

證： 作 DB 與 DC，(第二百五十八圖)



第二百五十八圖

指明 $\triangle ABD \backsim \triangle ACD$。

$$\therefore \frac{AC}{AD}=\frac{AD}{AB}.$$　何故?

習　　　題

1.　用 § 315 之定理。解 § 314 之第 9 題。

2.　若已知長方形之兩隣邊。指明 § 315 之定理。如何可用以求作其他相等之長方形。

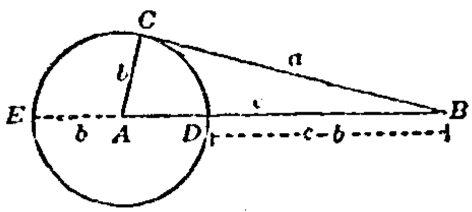
3. 用§315之定理。指明如何可求作一正方形。令等於一已知長方形。

4. 指明§315之定理。如何可用以求數目之平方根。

5. 設從圓外一點作兩切線至圓。則此兩切線相等，用§315之定理證之。

6. 從圓外一點。作一切線與一割線。量全割線。知爲切線之三倍。設割線之在圓外者爲10呎。求切線與割線之長度。

7. 用第二百五十九圖。證直三角形句方股方之和。等於弦方。



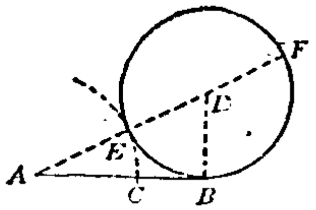
第二百五十九圖

設 ABC 爲直三角形，$\angle C=90^\circ$.

指明 $BE\cdot BD=\overline{BC}^2$.

故 $(c+b)(c-b)=a^2$，或 $c^2=a^2+b^2$.

8. 求分一線段作兩部。令較大部。爲全線與較小部之等比例中項。



第二百六十圖

設 AB 爲已知線段(第二百六十圖)，

求 C 點，令 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{CB}$.

作法： 作 $BD\perp AB$ 於 B。令 $BD=\dfrac{AB}{2}$.

以 D 爲中心，以 DB 爲半徑，作圓 D.

作 AD，割圓 D 於 E 及 F.

於 AB 上截 $AC=AE$.

C爲求作之點.

此可證之如下:

證: $\frac{AF}{AB}=\frac{AB}{AE}$. 何故?

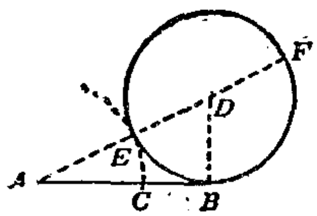
$\therefore \frac{AF-AB}{AB}=\frac{AB-AE}{AE}$, (§ 195)

$\therefore \frac{AF-EF}{AB}=\frac{AB-AC}{AC}$, 何故?

$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{CB}{AC}$, 何故?

$\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{CB}{AC}$, 何故?.

$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$. 何故?



第二百六十圖

第 8 題可用以作內接正十邊形.(§ 443)

316. 中比與外比.* 一線段分作中比與外比。卽其較大部。爲全線與較小部之等比例中項。

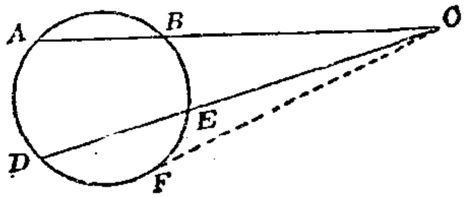
*求分一線作中比與外比之通行法。據阿拉伯某評論家云。始於海倫。分線之定理。有名稱多種。伯拉圖(Plato)名之曰"分割"。羅倫之(Lorentz)(1781)名之曰'連分法"。

關木訥(Campanus)(十二世紀後半世)稱連分法爲"奇異之幾何作法"。柏嘯盧(Paciolo)(1445—1514)更重視此法。嘗著一書。純論連分法之問題。而名其書曰"神聖等比例"。

其後此種奇特之奧理。有過柏嘯盧之想像。而無不及。賴默思(Ramus)(1515—72)以連分之三線段而結三位圈。開潑樓(Kepler)(1571—1630)則特設完全表記式。十九世紀中葉時。有一種格物學發現。專以改良數學法例於各種學科爲宗旨。遂有一種普通效力。歸之連分法乃取名曰"黃金分割"。

黃金分割。非特爲尺度關係之軌範。亦爲"美麗之原則"。如於着色,建築,及塑造術等。

317. 定理： 若從圓外一點作兩割線至凹弧。則此割線與其圓外一段相乘。等於彼割線與其圓外一段相乘。



第二百六十一圖

證： 從 C 作切線 CF 至圓。(第二百六十一圖)。

指明 $CA \cdot CB = \overline{CF}^2$ 又 $CD \cdot CE = \overline{CF}^2$。

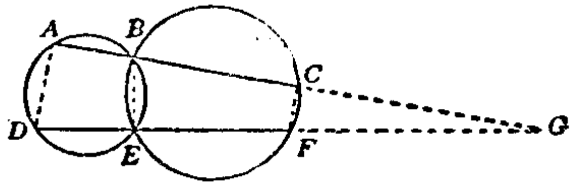
習　　題

1. 從圓外一點至圓。有兩割線。爲圓周割成兩弦。設此兩弦與其圓外兩段之比。爲 $\frac{5}{3}$ 與 $5(=\frac{5}{1})$。又第一割線長 8 呎。求第二割線之長。

2. 表中各題。皆關於從圓外一點至圓之兩割線。如第 1 題。試求第二割線之長。

	第一割線兩段之比例	第二割線兩段之比例	第一割線之長度
1……	5 : 2	3 : 1	28呎
2……	3 : 1	5 : 2	28呎
‡3……	4 : 1	5 : 4	625呎
‡4……	4 : 1	4 : 3	25呎
‡5……	7 : 2	7 : 3	36呎

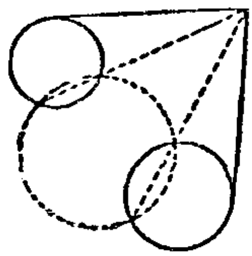
3. 求作兩線。令過兩相交圓之公點。並遇圓於 A, B, C 與 D, E, F。如第二百六十二圖。試證 $AD \parallel CF$。



第二百六十二圖

指明 $\frac{GA}{GC}=\frac{GD}{GF}$.

4. 求一點。令從此點至兩已知圓之切線相等。指明求此點之法若何?(見第二百六十三圖)


第二百六十三圖

5. 試於圓外定一 A 點。令從 A 至圓之兩切線之和。等於從 A 至圓周上最遠一點之距離。

提　　要

318. 本章所證之定理如下:

1. 設圓內有兩弦相交。則此弦之兩段相乘。等於彼弦之兩段相乘。

2. 若從圓外一點。作一切線與一割線。則切線爲全割線與其圓外一段之等比例中項。

3. 若從圓外一點。作兩割線至凹弧。則此割線與其圓外一段相乘。等於彼割線與其圓外一段相乘。

319. 本章所授之求作法如下:

求分一線段成中比與外比。

第 十 三 章

演 算 分 數 法

320. 此後問題中,當常遇分數,故應熟練演算分數之法,本章以溫習及推廣此法爲宗旨。

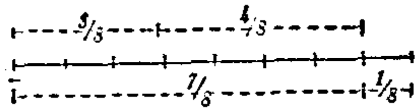
分 數 加 減 法

321. 加減有同分母之分數

習　　題

1. 從二百六十四圖指明

$$\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{7}{8}.$$



第二百六十四圖

2. 用圖指明

$$\frac{7}{9}-\frac{4}{9}=\frac{3}{9}.$$

3. 試立一法則,以加減有同分母之分數。依此法則聯合以下各式,使成簡單之分數:

(1) $\frac{2}{7}+\frac{5}{7}$.　　(5) $\frac{7}{9}-\frac{4}{9}-\frac{8}{9}+\frac{6}{9}$.

(2) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$.　　(6) $\frac{7}{2}-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}-\frac{11}{2}$.

(3) $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}$.　　(7) $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.

(4) $\frac{1}{13}+\frac{5}{13}-\frac{3}{13}+\frac{7}{13}$.　　(8) $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$.

(9) $\frac{m}{x}+\frac{n}{x}+\frac{k}{x}$.

(10) $\frac{r}{y}-\frac{s}{y}+\frac{t}{y}-\frac{v}{y}$.

(11) $\frac{3}{a+b}+\frac{5}{a+b}-\frac{7}{a+b}$.

(12) $\frac{1}{16m}-\frac{19x}{16m}-\frac{31y}{16m}-\frac{43x}{16m}$.

(13) $\frac{c-ax}{4s}+\frac{c+3ax}{4s}$.

(14) $\frac{3a}{5b}-\frac{3a-8b}{5b}$.

(15) $\frac{10x}{17a}+\frac{12x}{17a}-\frac{5x}{17a}$.

(16) $\frac{5a-b}{x-y}-\frac{2a-3b}{x-y}$.

(17) $\left(\frac{61a}{17b}+\frac{48c}{17b}\right)-\left(\frac{49a}{17b}+\frac{57c}{17b}\right)$

(18) $\frac{17y+18z}{27x}-\frac{22y+11z}{27x}$.

(19) $\left(\frac{29x}{10}-\frac{13y}{10}\right)+\left(\frac{33x}{10}-\frac{19y}{10}\right)$.

(20) $\frac{2x+15y}{6k}+\frac{9x-8y}{6k}-\frac{7x-3y}{6k}$.

(21) $\frac{23a+8b}{12x}-\frac{19a-28b}{12x}-\frac{17b-8a}{12x}$.

322. 加減有異分母之分數

習　題

1. 化 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{3}{5}$ 使其分母爲15。

2. 化 $\frac{2}{7}$ 與 $\frac{3}{4}$ 使成有同分母之分數。

3. 加 $\frac{5}{6}$ 與 $\frac{7}{8}$。

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{5\cdot4}{6\cdot4}+\frac{3\cdot7}{3\cdot8}=\frac{5\cdot4+3\cdot7}{6\cdot4}=\frac{41}{6\cdot4}=\frac{41}{24}.$$

4. 從 $\frac{8}{9}$ 減 $\frac{4}{7}$。

$$\frac{8}{9}-\frac{4}{7}=\frac{7\cdot8}{7\cdot9}-\frac{9\cdot4}{9\cdot7}=\frac{7\cdot8-9\cdot4}{9\cdot7}=\frac{20}{63}.$$

323. §322中習題1至4。指示加(或減)有異分母之分數。當先變分數之式爲有同分母之分數。然後寫分子之和(或較)於公母之上。又約所得之分數。爲最簡之式。

習題

將以下各題。依其加減之記號而加減之。惟宜多用心算推解。又約諸得數爲最簡之式。其法即以公因數除分子及分母。

1. $\frac{4}{15}+\frac{7}{20}-\frac{5}{9}-\frac{3}{4}+\frac{11}{18}$.

2. $\frac{2}{3}-\frac{3}{8}+2\frac{3}{4}-1\frac{7}{12}$.

3. $\frac{11}{14}-\frac{3}{4}-\frac{5}{3}+\frac{16}{21}$.

4. $x+\frac{5x}{22}-\frac{7x}{33}+\frac{x}{6}$.

5. $2\frac{2}{3}x+4\frac{7}{10}x-8x+3\frac{5}{18}x+\frac{14}{15}x$.

6. $\left(\frac{3}{4a}+\frac{7}{5a}\right)-\left(\frac{7}{6a}-\frac{5}{18a}-\frac{2}{5a}\right)$.

7. $\frac{a}{cx}+\frac{b}{cy}$.

8. $\frac{1}{c}-\frac{b}{ca}$.

9. $\frac{x}{12ab}-\frac{z}{6b}$.

10. $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}$.

11. $\frac{a}{x^2y}+\frac{b}{xy^2}$.

12. $\frac{a+b}{x}+\frac{a-b}{3x}$.

13. $\frac{a-2b}{3x}-\frac{4a-5b}{5x}$.

14. $\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}$.

15. $\frac{2}{xy}-\frac{3y^2}{xy^3}+\frac{xy^5+y^3}{x^2y^6}$.

16. $\frac{a}{a-1}-\frac{ab}{a(a-1)}$.

‡17. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)}$.

18. $\frac{1}{2x-3y}+\frac{x+y}{4x^2-6xy}$.

19. $\frac{b}{a+2b}+\frac{ab}{3ad+6bd}$.

‡22. $5a+\frac{2a}{3}$.

20. $\frac{a}{x}+b$. 寫 $b=\frac{b}{1}$.

23. $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}$.

21. $\frac{x}{y}-a$.

‡24. $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{y}$.

25. $\frac{5x-4y+3z}{x}+\frac{2x+3y-4z}{3y}$.

‡26. $\frac{7a+3b-4c}{a}-\frac{2b+4a-3c}{b}$.

27. $\frac{x}{x^2y}-\frac{4}{x^2y^2}+\frac{z}{xy^2}$.

‡32. $\frac{3a}{c+d}-\frac{a}{c-d}-\frac{2ac}{c^2-d^2}$.

28. $\frac{2}{3}-\frac{5}{a+b}$.

33. $\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}$.

29. $\frac{a+b}{a}+\frac{a}{a-b}$.

34. $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$.

30. $\frac{(a+b)^2}{4ab}-1$.

35. $\frac{1}{2a+3b}-\frac{1}{3a+2b}$.

31. $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x+3}{x-1}-\frac{x-3}{x+1}$.

36. $\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2-y^2}$.

37. $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b+c}$.

38. $\frac{3x}{4a(x+y)}-\frac{5y}{3a(x+y)}-\frac{7z}{2ax+2ay}$.

39. $\frac{9}{2x+4y}-\frac{7}{3x+6y}+\frac{2}{5x+10y}$.

40. $\frac{4}{(a+1)(a+2)}-\frac{3}{(a+2)(a+3)}+\frac{2}{(a+3)(a+1)}$.

41. $\dfrac{x+4}{(x+2)(x+3)}-\dfrac{x+2}{(x+3)(x+4)}+\dfrac{x}{(x+4)(x+2)}$.

†42. $\dfrac{x+y-z}{(x+z)(y+z)}+\dfrac{x-y+z}{(x+y)(y+z)}-\dfrac{x+y+z}{(x+y)(x+z)}$.

43. $\dfrac{5x+7m}{4x+12m}-\dfrac{25x}{6x+18m}+\dfrac{7x}{2x+6m}$.

44. $\dfrac{5x}{x+y}+\dfrac{xy}{x^2-y^2}-\dfrac{4y}{y-x}$.

令 $y-x=-(x-y)$.

†45. $\dfrac{3a^2}{a^2-1}+\dfrac{2a+1}{2a-2}-\dfrac{2a-1}{2a+2}$.

46. $\dfrac{2x+3}{x-6}-\dfrac{x^2-11x+18}{x^2-36}-\dfrac{x-6}{x+6}$.

†47. $\dfrac{36}{25x^2-9}-\dfrac{4}{5x-3}+\dfrac{3}{5x+3}$.

48. $\dfrac{x+ma}{bm-x}+\dfrac{x-ma}{bm+x}-\dfrac{m^2ab}{b^2m^2-x^2}$.

49. $\dfrac{5x-6y}{6x^2+6xy}+\dfrac{x+18y}{10xy-10y^2}-\dfrac{38x^2-2xy+15y^2}{15x^3-15xy^2}$.

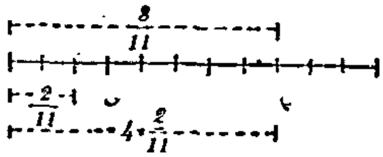
†50. $\dfrac{x^2-y^2}{(x+y)^2}+\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

51. $\dfrac{3}{2x-3}-\dfrac{4x+12}{4x^2-9}-\dfrac{6}{4x^3+12x+9}$.

†52. $\dfrac{2x}{x+2y}-\dfrac{3y}{4x+8y}-\dfrac{2x^2+3xy-2y^2}{x^2+4xy+4y^2}$.

53. $\dfrac{1}{3x+2}+\dfrac{3}{5x-1}+\dfrac{2}{(3x+2)(5x-1)}$.

分　數　乘　法



第二百六十五圖

324.　$4\cdot\frac{2}{11}$即爲

$$\frac{2}{11}+\frac{2}{11}+\frac{2}{11}+\frac{2}{11}=\frac{8}{11}.$$

如此，$4\cdot\frac{2}{11}=\frac{4\cdot 2}{11}$。(見二百六十五圖)

習　題

1.　解$c\cdot\frac{a}{b}$之意義。

2.　將方程$c\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b}$譯成語句。

3.　$\frac{3}{4}$乘 8；乘 12；乘 5；乘 25；乘 a；乘 xy.

4.　$\frac{1}{4}$乘$\frac{1}{2}$；$\frac{1}{3}$乘$\frac{1}{5}$；$\frac{2}{3}$乘$\frac{1}{5}$；$\frac{1}{a}$乘$\frac{1}{3}$；$\frac{1}{a}$乘$\frac{2}{3}$；

$\frac{1}{a}$乘$\frac{1}{b}$.

($\frac{1}{2}$乘$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$之$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$與$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$皆同).

5.　$\frac{3}{4}$乘$\frac{5}{7}$；乘$\frac{4}{5}$；乘$\frac{3}{5}$；乘$\frac{4}{3}$；乘$\frac{a}{5}$；乘$\frac{a}{3}$；乘$\frac{a}{b}$.

6.　試述兩分數相乘之法則。又與下例相比較：

凡諸分數相乘。可將諸分子相乘。爲諸分數乘積之分子。又將諸分母相乘。爲諸分數乘積之分母。

因諸分數之乘積。常須化爲最簡之式，故分子與分母之公因數。可於未乘以前。先除出之。

7. $\frac{12}{35}$乘$\frac{15}{14}$.

$$\frac{12}{35}\cdot\frac{15}{16}=\frac{12\cdot15}{35\cdot16}=\frac{3\cdot3}{7\cdot4},\text{等}.$$

8. $\frac{7x}{9y}$乘$15y^2$.

$$\frac{7x}{9y}\cdot15y^2=\frac{7x\cdot15y^2}{9y}=\frac{7x\cdot5y}{3},\text{等}.$$

9. $\frac{7x}{2x^2-2}$乘$(2x+2)$.

$$\frac{7x}{2x^2-2}(2x+2)=\frac{7x(2x+2)}{2x^2-2}=\frac{7x\cdot2(x+1)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{7x}{x-1}.$$

10. $\frac{56x^2}{55y^2}$乘$\frac{10y}{21x}$.

$$\frac{56x^2}{55y^2}\cdot\frac{10y}{21x}=\frac{56x^2\cdot10y}{55y^2\cdot21x},\text{等}.$$

11. $\frac{3x+3y}{2x-2y}$乘$\frac{2x^2-2y^2}{3x^2+3y^2}$.

$$\frac{3x+3y}{2x-2y}\cdot\frac{2x^2-2y^2}{3x^2+3y^2}=\frac{(3x+3y)(2x^2-2y^2)}{(2x-2y)(3x^2+3y^2)}=\frac{3(x+y)2(x+y)(x-y)}{2(x-y)3(x^2+y^2)},\text{等}.$$

325. §324中。習題7至11指示乘諸分數。可將諸分子之乘積。寫於諸分母之乘積之上。然後簡約所得之分數。

習題

以下各乘積。須寫作最簡之式。且當於最少之時間內演

而乘:

1. $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{8}$

2. $\frac{68}{102}\cdot\frac{95}{133}$

3. $\frac{1}{a}\cdot ac$

4. $\frac{1}{a^2}\cdot a^3$

5. $\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{x}$

6. $\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{d}$

7. $\frac{7xyz}{3bc}\cdot 9abc$

8. $\frac{ab}{xy}\cdot\frac{yz}{bc}$

9. $\frac{2ab}{3xy}\cdot\frac{5ax}{6by}$

10. $\frac{15ab}{16xy}\cdot\frac{24xyz}{25bc}$

11. $\frac{3ab}{4xy}\cdot\frac{5bc}{6yz}\cdot\frac{7xz}{8ac}$

12. $\frac{2a^2x}{3b^2y}\cdot\frac{6by^2}{7ax^2}\cdot\frac{5b}{4a}$

13. $\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

14. $\frac{27x}{8y+8x}\cdot\frac{x+y}{3}$

15. $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a-b}$

16. $\frac{6(x-y)}{5xy^2}\cdot\frac{15x^2y^3}{8(x-y)}$

17. $\frac{a^2-ab}{x^2-xy}\cdot\frac{x^2+xy}{al+ab}$

18. $\frac{x^2-xy}{3a+3b}\cdot\frac{(a+b)^2}{(x-y)^2}$

19. $\frac{18x^2+12xy+2y^2}{3x^3-27xy^2}\cdot\frac{5x^2y-15xy^2}{36x^2y-4y^3}$

20. $\frac{9a^2bx-9a^2by}{8cx^2u-8cx^2v}\cdot\frac{4xy^2v-4xy^2u}{15ab^2y-15ab^2x}$

21. $\frac{6ma+6mb}{35na-35nb}\cdot\frac{7as-7bs}{9ar+9br}$

22. $\frac{27pqm-27pqn}{35abx-35aby}\cdot\frac{7bpx-7bpy}{9anq-9amq}$

23. $\frac{x^2-4}{x-4}\cdot\frac{x+4}{x^4+4x+4}$

分數除法

326. 以一分數除一數目。其意卽爲求一數目。使此數乘除數，可得實數，

如此，$6\div\frac{4}{9}$之意，爲求何數乘$\frac{4}{9}$卽爲6，因$\left(6\cdot\frac{9}{4}\right)\cdot\frac{4}{9}$爲6，

所以$6\cdot\frac{9}{4}$爲求得之數，故$6\div\frac{4}{9}=6\cdot\frac{9}{4}$。

習題

1. 用上列之同理以$\frac{5}{7}$除下列各數：3； 11； a。

2. 依此指明$\frac{7}{8}\div\frac{5}{3}=\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{5}$。

3. 指明$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$。

4. 譯問題3之方程作語句，

327. **反數.** 設兩數之乘積爲1，則兩數互爲反數，

1. 試述4, 3, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$之反數.

2. 試將問題4之語句與下例相比：

凡以分數除他數，可將實數乘反除數，換言之，卽將實數乘除數之反數，

習題

1. $25x^2$除以$\frac{15x}{y}$.

$$25x^2\div\frac{15x}{y}=25x^2\cdot\frac{y}{15x}=\frac{25x^2y}{15x},等.$$

2.　$\dfrac{62x^2}{35p^2}$除以$\dfrac{93xy}{55ap}$.

$$\frac{62x^2}{35p^2}\div\frac{93xy}{55ap}=\frac{62x^2}{35p^2}\cdot\frac{55ap}{93xy}=\frac{62x^2\cdot 55ap}{35p^2\cdot 93xy},\text{等.}$$

3.　約 $\dfrac{\dfrac{ab}{4}}{\dfrac{b^2}{2a}}$ 至最簡之式:

$$\frac{\dfrac{ab}{4}}{\dfrac{b^2}{2a}}=\frac{ab}{4}\times\frac{2a}{b^2},\text{等.}$$

求以下各除法之答數並約之至最簡之式:

4.　$\dfrac{3}{5}\div\dfrac{2}{7}$.

5.　$\dfrac{4}{7}\div\dfrac{6}{11}$.

6.　$\dfrac{7}{9}\div\dfrac{6}{7}$.

7.　$\dfrac{3}{8}\div\dfrac{7}{5}$.

8.　$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{x}$.

9.　$\dfrac{c}{x}\div\dfrac{d}{f}$.

10.　$x\div\dfrac{y}{x}$.

11.　$ab\div\dfrac{xy}{z^2}$.

12.　$12x^3\div\dfrac{16x^3}{7y}$.

13.　$25a^6\div\dfrac{10a^2}{9x^2}$.

14.　$18x^2y^7z^4\div\dfrac{15x^3y^8z}{ab}$.

15.　$(-ab)\div\dfrac{3d}{5ab}$.

16.　$\dfrac{16a^3b^2}{27x^5y^3}\div\dfrac{8a^3b}{9x^2y^4}$.

17.　$\dfrac{20x^2y^3}{21a^4c^5}\div\dfrac{4axy}{3a^2b^2c^2}$.

18.　$\dfrac{40a^7b^5c^6}{22m^3x^4z^5}\div\dfrac{35a^6b^6c^6}{88m^6xz^7}$.

19.　$\dfrac{(a-1)^2}{a+1}\div\dfrac{a^2-1}{a}$.

20. $\frac{x^2-1}{4mn}\div\frac{x+1}{2n}$.　　21. $\frac{x+4}{x-4}\div\frac{x^2+16}{x^2-16}$.

22. $(32x^3y^2z^2-40x^2y^3z^2)\div\frac{8x^3y^3z^3}{a^3b^2}$.

23. $\frac{24(x-1)^2}{70(a^2-b^2)}\div\frac{30(x-1)}{28(a-b)^2(a+b)}$.

24. $\frac{14x^2-7x}{12x^3+24x^2}\div\frac{2x-1}{x^2+2x}$.　　26. $\frac{(a+b)^2}{a-b}\div(a^2-b^2)$.

25. $\frac{3(x^2-4y^2)}{4(a^2-b^2)}\div\frac{x-2y}{a+b}$.　　27. $\frac{3x^2-3}{x+y}\div\frac{1+x}{x^2-y^2}$.

複分數

328. 複分數. 凡分數,若其分子或分母亦爲分數,或分子與分母皆爲分數,則謂之複分數,例如 $\frac{6}{\frac{2}{3}}$, $\frac{3\frac{1}{3}}{2}$, 及 $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{9}}$ 等,皆爲複分數。

簡約上列最後之分數,其法有二。

(1) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{4}\times\frac{9}{5}$, 等,或 (2) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{9}}=\frac{\frac{3}{4}\cdot4\cdot9}{\frac{5}{9}\cdot4\cdot9}=\frac{3\cdot9}{5\cdot4}$, 等.

於第二法中,複分數之分子與分母,皆乘相同之數,此相同之數卽 4 與 9 之小公倍 ($l.\ c.\ m.$)。有時用此法,較用第一法尤爲便利。

習題

簡約以下之複分數:

1. $\frac{\frac{x-1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$.

$$\frac{\frac{x-1}{x}}{x-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x-1}{x}\cdot x}{\left(x-\frac{1}{x}\right)x}=\frac{x-1}{x^2-1},\text{ 等.}$$

2. $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$.　　4. $\dfrac{\frac{4x}{5}+x}{\frac{4}{5}}$.　　6. $\dfrac{\frac{3x}{4}+\frac{7y}{15}}{\frac{5z}{6}}$.

3. $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$.　　5. $\dfrac{x}{\frac{x}{y}+1}\div\dfrac{y}{\frac{x}{y}-1}$　　7. $\dfrac{\frac{x}{y}}{z}\cdot\dfrac{\frac{z}{y}}{x}\cdot\dfrac{y}{\frac{x}{b}}$.

演算以下各題:

8. $\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)\left(\frac{n}{m}-\frac{p}{q}\right)$.

9. $\left(\frac{8x^3}{y^3}-\frac{y^3}{27x^3}\right)\div\left(\frac{2x}{y}-\frac{y}{3x}\right)$.

10. $\left(\frac{2x+5y}{3x+y}-\frac{5x+2y}{x+3y}\right)\div\left(\frac{2x-3y}{2x}+\frac{7x-3y}{2x+6y}\right)$.

分數方程

329. 解下列各方程:

1. $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=\frac{x}{6}+4$.

將各項乘分母之小公倍,卽12.

$$\frac{12x}{3}+\frac{12x}{6}=\frac{12x}{6}+12\cdot4.$$

簡約之,卽得$4x+3x=2x+48$,解此式甚易。

2. $\frac{15x}{2}-\frac{x}{4}=2\frac{1}{3}$.

3. $5x-\frac{3-2x}{2}=2x+2\frac{1}{2}.$

4. $.05(20x-3.2)=.8(4x+.12)-11.256.$

各項乘100卽可消去分數，

5. $1.4x-1.61-\frac{.21x+.012}{.8}=1.3x.$

6. $\frac{1-2x}{.25}-\frac{2x-.5}{12.5}+\frac{2x-\frac{1}{3}}{5}=\frac{6.35-.5x}{3}.$

7. $5x-13=\frac{2x-5}{4}+\frac{x+4}{4}.$

8. $\frac{5x^2-3x+12}{7}=10\frac{(3x+1)(x-10)}{42}.$

†9. $\frac{\frac{x}{3}+\frac{1}{2}}{5}-\frac{x-\frac{x}{3}}{2}=-\frac{3}{2}.$

†10. $15x-\frac{6x+1}{2}-\frac{x-1}{3}=-6.$

11. $2x-\frac{6x^2-2x+1}{6}+\frac{2x^2-3x}{2}=-1.$

12. $\frac{10x}{2x-2}-\frac{10x}{3x-3}=4.$　　13. $\frac{x-4}{x-2}=\frac{x-1}{x+3}.$

$l.\ c.\ m.=2\cdot 3(x-1).$

因習題13至20，皆爲等比例，故定理"中項相乘，等於外項相乘，"可用以消去分數。

14. $\frac{3x-1}{4x+2}=\frac{3x+1}{4x+5}.$　　†16. $\frac{x+2}{x+4}=\frac{x+8}{x+4}.$

†15. $\frac{x+3}{x-1}=\frac{x-1}{x-3}.$　　17. $\frac{x+1.1}{x-1.4}=\frac{x-1.7}{x+.3}.$

18. $\dfrac{10x-2}{10x+6}=\dfrac{4x+5}{4x+\frac{1}{2}}$.

19. $\dfrac{x+5}{x-3}=\dfrac{5x-19}{x-3}$.

20. $\dfrac{4-x}{1-x}=\dfrac{15-x}{3-x}$.

‡21. $\dfrac{5x-3}{5x+3}=\dfrac{x+1}{x+3}$.

330. 分數法則之提要.

試述下式所表示之法則:

1. $\dfrac{m}{d}+\dfrac{n}{d}=\dfrac{m+n}{d}$

2. $\dfrac{m}{d}-\dfrac{n}{d}=\dfrac{m-n}{d}$

3. $\dfrac{m}{d}\pm\dfrac{n}{d}=\dfrac{m\pm n}{d}$

4. $\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot d\pm c\cdot b}{b\cdot d}$

5. $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y}{x}=1$

6. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{\frac{b}{a}}$

7. $n\cdot\dfrac{x}{y}=\dfrac{n\cdot x}{y}$

8. $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{x}{y}=\dfrac{a\cdot x}{b\cdot y}$

9. $\dfrac{a}{b}\div n=\dfrac{a\div n}{b}$

10. $\dfrac{a}{b}\div n=\dfrac{a}{b\cdot n}$

11. $n\div\dfrac{a}{b}=n\cdot\dfrac{b}{a}$

12. $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$

關於分數方程之題

331. 運動題: 解下列各題:

1. 鎗聲於閃光後3·4秒。始達耳端。若聲音每秒行1080呎。問開鎗之處遠若干?

此題中,光行1080呎之時間。爲數極小。無須計算。

2. 每年光之行程。爲地球距太陽之63,000倍。設地球距北斗星爲地球距太陽之2,898,000倍。問北斗星之光。照及地球須時若干?

3. 火車兩列。各行一軌。由 P 至 Q。一軌較他軌長15哩。短軌上之車。行 6 小時卽到。長軌上之車。每小時少行10哩。行 $8\frac{1}{2}$ 小時始到。試求兩軌之長度。

短軌上之車:

$$\begin{cases} d=x, \\ t=6, \\ \therefore r=\dfrac{x}{6}. \end{cases}$$

長軌上之車:

$$\begin{cases} d=x+15, \\ t=8\frac{1}{2}, \\ \therefore r=\dfrac{x+15}{8\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

$$\therefore \frac{x}{6}-10=\frac{x+15}{8\frac{1}{2}}.$$

(d 代所行之距, t 代所行之時, r 代所行之速率)

4. 某盜乘一汽車。意欲逍遙。車行每小時28哩。閱十五分時。巡警以汽車追之。速率每小時32哩。問何時盜爲巡警追及?

5. A 距 B 100哩。火車一列。由 A 開行。於離 B 二十哩之處。車忽遇事。速率減半。致抵 B 時。較預定之時間遲 1 小時。求遇事以前。車行之速率。

解此題。當求車行之平均速率。遇事前之速率。及遇事後之速率諸關係。

6. 一人傍鐵路而行。速率每小時 4 哩,今爲一火車追及。車長208碼.每小時行30哩。問火車經過此人。費時若干?

7. 兩童繞圓周而走。周長 100呎。若相背而走。則每隔 8 秒相遇。若同方向而走。則每隔25秒並肩。求各童之速率。

332. 百分法及利息題.

解以下各題:

1. 某資產家。以所收租金之百分 8 納稅,若稅加百分 11。問租金應加百分之幾。則其進款與前相同?

A 代所收之租金,指明租稅未增時之進款爲 $\frac{92}{100}A$,又稅既增後之進款爲 $\frac{89}{100}\left(A+\frac{x}{100}A\right)$.

如此,$\frac{89}{100}\left(A+\frac{x}{100}A\right)=\frac{92}{100}A$.

各項以 A 除。解之卽得 x.

2. 某人需磚 40,500 塊建屋,然通常百分之 3.5 皆損。問應定磚多少?

3. 某人購屋一座。計 \$ 6,200。其稅爲 \$ 77。煤賬爲 \$ 72。又每年以 \$ 50 爲修理費。若貨幣値百分 5。問每月之租金應若干?

4. 某人以 \$ 3,000 作兩股投資。其一之利息爲百分五。其二爲百分六。每年所得之總利爲 \$ 157。問每股若干?

333. 重量減少題.

一物體在空氣中秤之。重 2 磅,若繫之以索而浸諸水中。則其重量必不及 2 磅.在物理學上。可證明物體所失之重量。與其所排除之水重相等。

1. 金一塊,在空氣中重 97 兩。在水中重 92 兩。又.銀一塊。在空氣中重 21 兩。在水中重 19 兩。今二者混和。在空氣中重 320 兩。在水中重 298 兩。問金與銀各重幾兩?

解法:(1)設 x 爲金之兩數.

(2)則 $320-x$ 爲銀之兩數.

(3)因97兩之金減少5兩。故1兩中減少$\frac{5}{97}$兩.

(4)因21兩之銀減少3兩。故1兩中減少$\frac{3}{21}$兩.

(5)故 x 兩金中減少之重量,爲$\frac{5x}{97}$兩,又 $320-x$ 兩銀中減少之重量,爲$\frac{3(320-x)}{21}$.

(6)然則$\frac{5x}{67}+\frac{3(320-x)}{21}=22$爲全塊中減少之重量.

(7)此方程之解答。卽爲欲求之數。

2. 鉛與鐵各一磅。在水中秤之。則鉛減少$\frac{5}{57}$磅。鐵減少$\frac{2}{15}$磅。若鉛與鐵混和。在空氣中重159磅。在水中重143磅。問鉛與鐵各重幾磅?

3. 若金38兩。在水中秤之。則減少2兩。又銀30兩。在水中秤之。減少3兩。問金與銀各重幾兩相混和,則在空氣中重106兩。在水中重99兩?

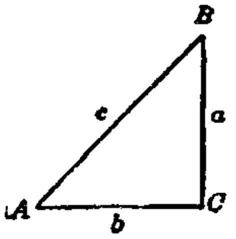
14. 若金$19\frac{1}{4}$磅。又銀$10\frac{1}{2}$磅。在水中秤之。各減少1磅。相混和。則在空氣中重20磅。在水中重$18\frac{3}{4}$磅。問金與銀各重幾磅?

三角關係

334. 下列各題。可用以練習演算分數。

證以下三角恆等式:

1.　$1+\tan^2 A \equiv \frac{1}{\cos^2 A}$



第二百六十六圖

解析:　設 $1+\tan^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}$

則　$1+\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{b^2}$(見第二百六十六圖)

$\therefore \frac{b^2+a^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}$　何故?

以 c^2 代 b^2+a^2〔因 $c^2=a^2+b^2$〕

故 $\frac{c^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}$,即為恆等式。

由 $\frac{c^2}{b^2}\equiv\frac{c^2}{b^2}$ 起,倒述解析之各級,即可證明 $1+\tan^2 A\equiv\frac{1}{\cos^2 A}$.

第 2 題至第 18 題中,倒述解析各級,無甚困難,故證中可以從略。

2.　$\cos A\equiv\frac{\sin A}{\tan A}$

3.　$\tan A\cdot\frac{\cos A}{\sin A}\equiv 1$.

4.　$\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\tan A}\equiv\frac{1}{\sin A}$

5.　$\cos A\cdot\tan A\cdot\frac{1}{\sin A}\equiv 1$

6.　$\sin A\cdot\frac{1}{\tan A}\equiv\cos A$

‡7.　$\frac{1}{\tan^2 A}\equiv\frac{1}{\sin^2 A}-1$

8.　$\frac{\sin A+\cos A}{1+\tan A}=\cos A$

‡9.　$\frac{1}{\sin A}-\sin A\equiv\cos A\cdot\frac{1}{\tan A}$

10.　$\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\sin A}\equiv\tan A+\frac{1}{\tan A}$

11.　$\sqrt{1-\sin^2 A}\equiv\sin A\cdot\frac{1}{\tan A}$

設 $\sqrt{1-\sin^2 A}=\sin A\cdot\frac{1}{\tan A}$

則 $\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}=\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}$

$\therefore \sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2}}=\frac{b}{c}$

$\therefore \sqrt{\frac{b^2}{c^2}}=\frac{b}{c}$

或 $\frac{b}{c}=\frac{b}{c}$

12. $tanA\cdot cosA\equiv\sqrt{1-cos^2A}$

‡13. $1+\frac{1}{tan^2A}\equiv\frac{1}{sin^2A}$

14. $(1+\frac{1}{tan^2A})(1-cos^2A)\equiv 1$.

15. $(1+tan^2A)(1-sin^2A)\equiv 1$.

‡16. $\frac{1}{cosA}+tanA\equiv\frac{cosA}{1-tanA\,cosA}$.

17. $\frac{1}{cosA}-sinA\cdot tanA\equiv cosA$.

‡18. $\left[\frac{1}{cosA}+\frac{1}{sinA}\right]\left[1-\frac{1}{tanA}\right]\equiv\left[\frac{1}{cosA}-\frac{1}{sinA}\right]\left[1+\frac{1}{tanA}\right]$.

提　　要

335. 本章所溫習及擴充演算分數之法則如下:

1. 加減有同分母之分數。
2. 加減有異分母之分數,
3. 乘分數。
4. 除分數。

5. 簡約複分數。

336. 解分數方程式,須先以分母之小公倍乘各項。然後約各項至最簡之式,

337. 本章證明許多三角恆等式。

第十四章

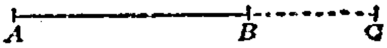
不等式

不等式之公理與定理

338. 不等式之公理與定理之溫習及擴充.

1. 一線段或一角。大於其分之任一分。(§6)

此公理。適用於全形或其諸分爲正之時。因設第二百六十七圖之線段 AC 爲正。則 CB 爲負。又 $AC+CB=AB$。因此 AC 與 CB 謂之 AB 之分。而 AC 大於 AB。



第二百六十七圖

2. 不等數加等數。得數不等。兩得數大小之序。以兩不等數而定。

例如	$8>3$
又	$4=4$
故	$12>7.$

3. 不等數加同序之不等數。得數不等如前序。

例如	$9>2$
又	$4>3$
故	$13>5.$

4. 設有三數。第一數大於第二數。第二數大於第三數。則第一數必大於第三數。

因，若 $a>b$，又 $b>c$ 則 $a+b>b+c$.

兩端各減 b，則 $a>c$.

欲得最後之不等式,可用以下各公理:

5. 不等數減等數,得數不等。兩得數大小之序。以兩不等數而定。

例如 $10>4$

又 $3=3$

故 $7>1$

6. 等數減不等數,得數不等。其序與前不等數相反。(§ 12)

例如 $12=12$

又 $8>2$

故 $4<10$.

7. 不等數乘正等數,得數不等。其序以前不等數而定。

例如
$$\begin{array}{r} 10<15 \\ 2=2 \\ \hline \therefore 20<30. \end{array}$$

8. 不等數乘負等數,得數不等。其序與前不等數相反。

例如
$$\begin{array}{r} 12<15 \\ -3=-3 \\ \hline -36>-45. \end{array}$$

9. 不等數除以正等數,得數不等。其序以前不等數而定,

例如
$$\begin{array}{r} 20<30 \\ 2=2 \\ \hline 10<15. \end{array}$$

10.　不等數除以負等數。得數不等。其序與前不等數相反。

例如

$$\begin{array}{r} 50>40 \\ \underline{-2=-2} \\ -25<-20. \end{array}$$

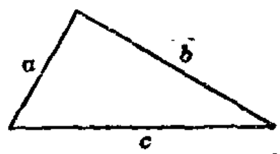
11.　兩點間最短之距離。爲聯兩點之直線。(§3)

以下各定理表示不等式:

12.　三角形兩邊之和。大於第三邊。又此兩邊之算術差數。小於第三邊。

此定理之第一節,根據於11。

第二節根據於5.　因,設第二百六十八圖中,　$a+b>c$,



第二百六十八圖

則　$c<a+b$.

兩邊各減 a, 則 $c-a<b$.

依此指明　$b-a<c$; 又 $c-b<a$.

13.　一點至一直線之垂線。爲此點距線之最短者。(§35)試證之。

14.　若三角形之兩邊不等。則相對之兩角亦不等。較大之角。與較長之邊相對。(§33)試證之。

15.　若三角形內兩角不等。則相對之兩邊亦不等。較長之邊。與較大之角相對。(§34)試證之。

16.　不在一線之中點垂線內各點。距線之兩端點不等(§71)試證之。

17.　一線之中點垂線。爲距線兩端點等遠之諸點之軌跡。(§71)試證之。

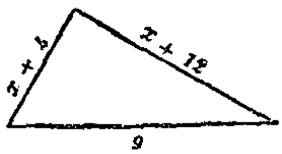
18.　不在一角之平分線內各點。距角之兩邊不等。(§72)試證之。

19.　一角之平分線。爲角內距兩邊等遠之諸點之軌跡。(§72)試證之。

用不等式解問題法

339.　許多問題，可以列出不等式之關係。此種不等式。可用不等式之公理解之，與用相等式之公理解方程同。

以下各習題，指明以不等式解問題之法。



第二百六十九圖

習　　題

1.　表示第二百六十九圖之三角形諸邊間之關係。

2.　習題 1 之 x 爲何？

$$x+4+9>x+12,\quad \text{何故？}$$

$$\therefore\quad 13>12.\quad \text{何故？}$$

$\therefore x=$任意數值，卽 x 之任意數值可以滿足不等式。

$$9+x+12>x+4,\quad \text{何故？}$$

$$\therefore\quad 21>4.\quad \text{何故？}$$

$\because x=$任意數值，

$$x+12+x+4>9.$$

$$2x+16>9.$$

$$2x>-7.$$

$$x > -3\tfrac{1}{2}.$$

∴x之任意數値。凡大於$-3\tfrac{1}{2}$者。皆可滿足此三個不等式。何故?

3.　x須爲何值,則表中a, b, c,可代表三角形三邊之長,

a……………	$x-5$	$2x+3$	$x+5$	7	$2x$
b……………	$x+7$	$2x+2$	$8-x$	$x-3$	5
c……………	16	21	1	9	$4x-7$

4.　某三角形之兩邊爲9吋與24吋。問第三邊限於何數以內?

設以x代第三邊,

則 $x+9>24.$　　何故?

$x+24>9.$　　何故?

$9+24>x.$　　何故?

求x之數値,以解此三個不等式.

5.　某俱樂部之會計部,有銀\$50。今欲置器具,須銀\$80與\$90之間,問會計部應籌款若干?

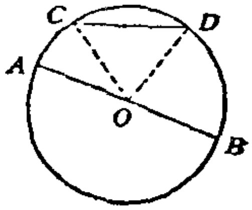
設想x爲應籌之款。

10.　一二十世紀之有限快車,欲於20小時內。由紐約開至芝加高。(Chicago)(約1000哩)設先5小時每小時行45哩,後7小時每小時行57哩,問以後應每小時行幾哩。方可不逾定時?

17. 於 2 哩賽跑時。A 之平均速率爲每小時 6 哩。B 爲 $5\frac{3}{4}$ 哩。問 A 可讓 B 幾呎?

8. 證直徑大於圓之任一弦。

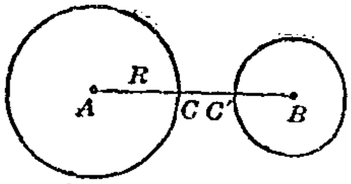
指明第二百七十圖之 $AB=CO+OD>CD$。



第二百七十圖

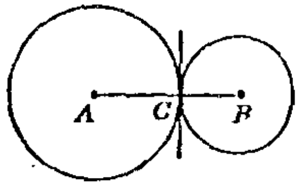
9. 證以下各題:

(a) 兩圓,若一圓全在他圓之外方。則兩圓兩中心之距離。大於兩半徑之和。(第二百七十一圖)



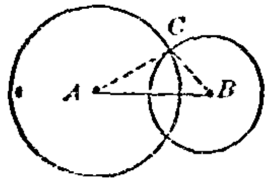
第二百七十一圖

(b) 兩外切圓兩中心之距離。等於兩半徑之和。(第二百七十二圖)



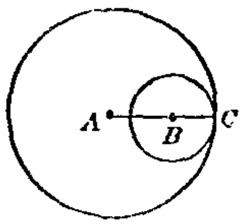
第二百七十二圖

(c) 兩交圓兩中心之距離。小於兩半徑之和。而大於其較。(第二百七十三圖)



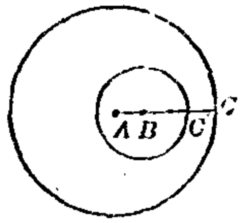
第二百七十三圖

(d) 兩內切圓兩中心之距離。等於兩半徑之較。(第二百七十四圖)



第二百七十四圖

(e) 兩圓。若一圓全在他圓之內方。則兩圓兩中心之距離。小於兩半徑之較。(第二百七十五圖)



第二百七十五圖

10. 證三角形之一外角。大於任一遠內角。

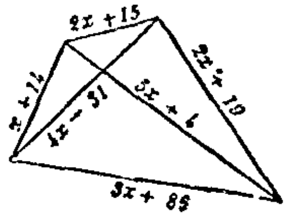
用 § 26 證之。

11. 證第二百七十六圖之 x 大於 y。

12. 證四邊形兩對角線之和。小於其周。而大於其周之半。

第二百七十六圖

13. 第二百七十七圖之四邊形之對角線。以 $5x+4$ 與 $4x-31$ 代表之。用習題12之關係。求 x 之整數值。



第二百七十七圖

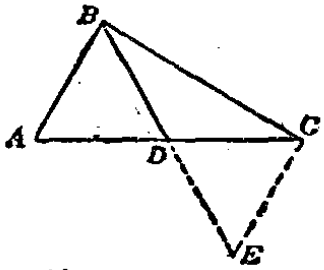
14. 聯三角形一角頂與其對邊中點之線。爲三角形之一中線。

證三角形一邊上之中線,小於他兩邊之和之半.

於第二百七十八圖,引長 BD,令 $DE=BD$;又作 EC.

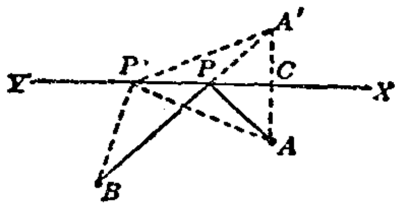
則 $BE<BC+CE$.

證 $CE=BA$.



第二百七十八圖

15. 設有兩鑛。一在 A。一在 B。如第二百七十九圖。試於河 XY 之邊上。求 P 點。令由 P 至 A 與 B 之間。可置最短之水管。



第二百七十九圖

作 $AA'\perp XY$,又作 $CA'=CA$.

作 CA' 遇 XY 於 P,

P 爲求得之點.

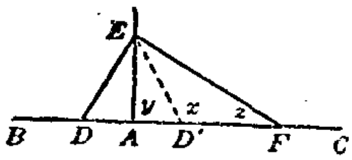
指明 $BP'A>BPA$.(P' 爲河邊上之他一點.)

不等式之定理

340. 定理： 從一線之垂線內一點，作兩斜線至此線，若其射影不等，則兩斜線亦不等。

設 $EA\perp BC$，又 $AF>AD$.（第二百八十圖）

證 $EF>ED$.



第二百八十圖

證： 截 $AD'=AD$ 又作 ED'.

則 $x>y$.

因 $y=90°$,

$\therefore x>90°$.

$\therefore z<90°$.

$\therefore x>z$.

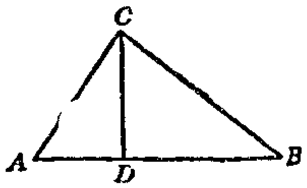
$\therefore EF>ED'$.

$\therefore$ $EF>ED$.

341. 定理： 從一線之垂線內一點，有兩斜線至此線，設此兩斜線不等，則其射影亦不等。

已知 $CB>CA$, $CD\perp AB$,（第二百八十一圖）

證 $DB>DA$.



第二百八十一圖

證（反證法）：

1. 設 $DB=DA$，則 $CB=CA$, 何故？

此與已知者相反.

$DB\neq DA$.*

※ 記號 $\neq$ 之意爲不等於

2. 設 $DB<DA$,

則指明 $CB<CA$.

此爲必無之理. 何故? 故 DB 不小於 DA.

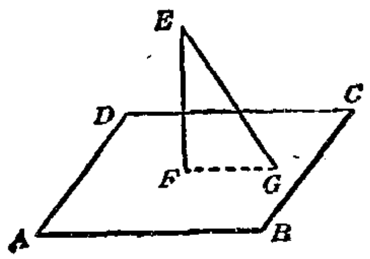
3. 因 DB 不等於 DA,又不小於 DA,所以 $DB>DA$.

以下諸定理中。點與線未必皆同在一平面內。故讀證論以前。常於敎室內選點與線。以說明書中之圖。若此項練習日久成爲習慣。則思想自清矣。

342. 定理: 從一點至一平面。以垂線爲最短之距離。

設第二百八十二圖之 $ABCD$,代表一平面,又 E 爲不在平面內之任一點.

設 EF 垂於 $ABCD$,又 G 爲 $ABCD$ 內 F 點以外之任一點.



第二百八十二圖

作 EG.

證 $EF<EG$.

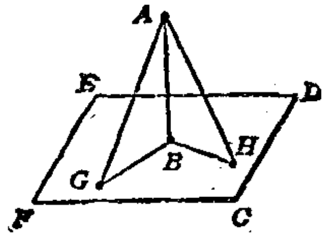
證: 三角形 EFG 中,$EF\perp FG$.

因垂於一平面之線。與平面內經過此線之腳之任一線作垂線。

$\therefore EF<EG$.(§ 35).

343. 一點與一平面之距離. 一點至一平面之垂線。其長爲此點與平面之距離。

344. 定理: 設從一點至一平面。有諸斜線。遇平面於距垂線腳等遠之諸點。則此諸斜線皆等。



第二百八十三圖

已知 $AB \perp CDEF$,又 A 爲 AB 上之任一點.(第二百八十三圖)

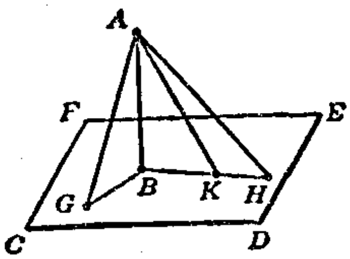
$BG=BH$.*

證 $AG=AH$.

證: 指明 $\triangle ABG \cong \triangle ABH$.

345. 定理: 設從一點至一平面。有諸斜線。遇平面於距垂線脚不等遠之諸點。則此諸斜線。皆不等。較遠之線較長。

已知平面 $CDEF$, $AB \perp CDEF$, 又 $BH>BG$, (第二百八十四圖)



第二百八十四圖

證 $AH>AG$.

證: 截 BG 於 BH,作 $BK=BG$.

則 $AK=AG$, 何故?

$AH>AK$, § 340

$AH>AG$. 何故?

346. 定理: 設從一點至一平面。有諸等斜線。則此諸線。必遇平面於距垂線脚等遠之諸點。 試證之。

347. 定理: 設從一點至一平面。有兩不等斜線。其較長者。遇平面於距垂線脚較遠之點。

設 $AH>AG$,(第二百八十四圖)

截 $BK=BG$. 則 $AK=AG$ (§ 346)

※ BG 與 BH 爲平面 $CDEF$ 上 AG 與 AH 之射影.(見 §§ 353—355)

$\therefore\ AH>AK$,

$\therefore\ BH>BK$ (§ 341).

$\therefore\ BH>BG$.　何故?

習題

已知一平面之垂線上一點 A。求此平面內距 A 有定遠之諸點之軌跡。

348. 定理: 若由三角形內一點。作兩線至一邊之兩端。則此兩線之和。小於他兩邊之和。

已知 $\triangle ABC$,(第二百八十五圖)又形內一點 P.

證 $AP+PC<AB+BC$.

證: 引長 AP 使割 BC 於 D.

現有 $AP+PD<AB+BD$.　何故?

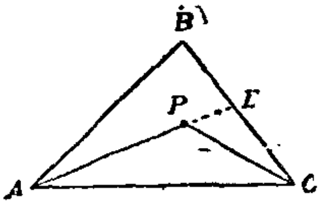
$PC<PD+DC$.　何故?

加, $AP+PD+PC<AB+BD+PD+DC$.

兩端各減 PD,

$AP+PC<AB+BD+DC$.

$\therefore AP+PC<AB+BC$.　何故?

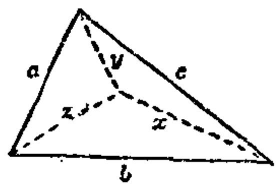


第二百八十五圖

習題

1. 三角形內一點與諸角頂之聯線之和。小於三角形之周。然大於周之半。(第二百八十六圖)

用 § 338, 習題 12, 與 § 348 證之.

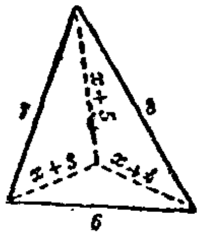


第二百八十六圖

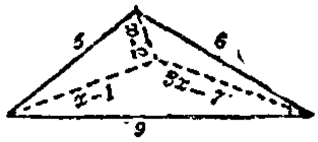
2. 於第二百八十七圖與第二百八十八圖中。測 x 限於何數以內。

用習題1求之。

問 x 之數值爲何,設欲求得其整數?



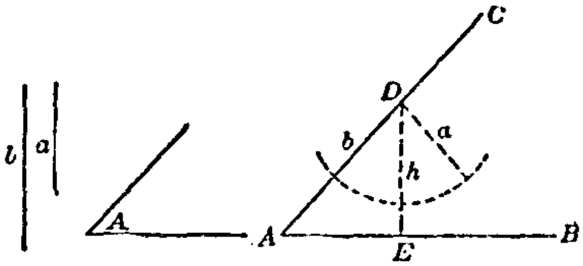
第二百八十七圖



第二百八十八圖

3. 求作三角形 ABC。設已知其邊 a 與 b。又其一邊之對角 A。(第二百八十九圖)

作法: 於無定長之線 AB 上,求作一角,令等於 A,於此角之一邊上如 AC,截 $AD=b$。



第二百八十九圖

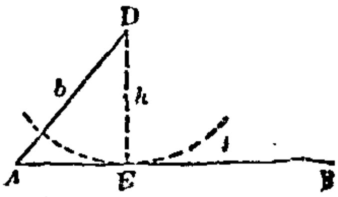
以 D 爲中心,又 a 爲半徑,作一圓。

此圓或割 AB 於兩點或僅觸 AB,或不遇 AB。

商論: 今常設想 $\angle A$ 爲銳角。

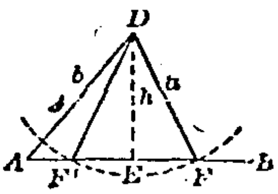
1. 若 $a<h$,即 a 短於自 D 至 AB 之垂線,則所作之圓,不遇 AB,故不能成三角形,即此題無解法。(第二百八十九圖)

2. 若 $a=h$,則此圓觸 AB,故可作一三角形,即 $\triangle ADE$(第二百九十圖)。



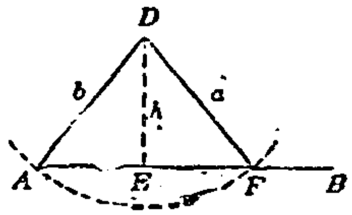
第二百九十圖

3. 若 $a>h$,又 $<b$,則此圓割 AB 於 F 與 F' 兩點,故可作兩三角形,即 $\triangle ADF$ 與 $\triangle ADF'$。(第二百九十一圖)



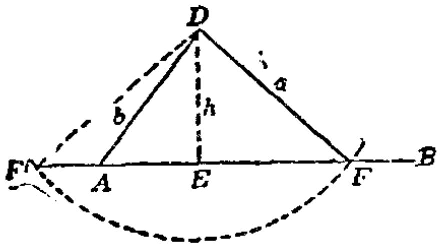
第二百九十一圖

4. 若 a 等於 b,則此圓遇 AB 於 A,又於 F.故可作一三角形,即 $\triangle ADF$.(第二百九十二圖)



第二百九十二圖

5. 若 $a>b$,則此圓遇 AB 於 F 與 F' 兩點,但 $\triangle ADF$ 為欲求之形.(第二百九十三圖)



第二百九十三圖

4. 試以 b 與 A 之項,表示垂線之長 h。

此題即指示 $h=b\sin A$。

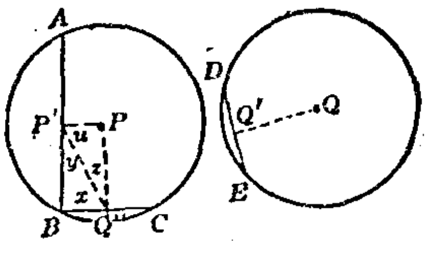
於直三角形 ADE,試求 $\sin A$.(見§248)

349. 定理: 同圓或等圓,弦之不等者,與中心距離亦不等.其小者,與中心之距離遠.又逆定理為弦之與中心距離不等者必不等.距中心較遠者較小。

已知 $\odot P=\odot Q$.(第二百九十四圖.)

AB 弦 $>DE$ 弦, $PP'\perp AB$, $QQ'\perp DE$.

證 $PP'<QQ'$.



第二百九十四圖

證: 置 $\odot Q$ 於 $\odot P$ 之上,令 Q 在 P 之上,D 在 B 之上,又 DE 弦在 BC 之位置上;則 Q' 當在 Q'' 之位置上.

作 $P'Q''$.

$AB>DE$,　　何故?

$\therefore AB>BC$.

$PP' \perp AB$. 何故?

$P'B = \frac{1}{2}AB$. 何故?

$QQ' \perp DE$. 何故?

$PQ'' \perp BC$.

$BQ'' = \frac{1}{2}BC$. 何故?

則 $P'B > BQ''$, 何故?

$\therefore\ x > y$. 何故?

因 $x + z = y + u$, 何故?

$\therefore\ z < u$. 何故?

$\therefore PP' < PQ''$. 何故?

$\therefore PP' < QQ'$. 何故?

逆定理: 已知$\odot P = \odot Q, PP' \perp AB; QQ' \perp DE; PP' < QQ'$. (第二百九十四圖)

證 $AB > DE$.

證: 倒述前證各級.

習　題

1. 從下列各部求作三角形:

(1) $b = 145$	$a = 178$	$A = 41°$
(2) $a = 6$	$b = 3.5$	$A = 63°$
(3) $a = 140$	$b = 170$	$A = 40°$
(4) $b = 28$	$a = 23$	$A = 65°$

於未作三角形時。用§348中習題4之公式,比較 a, b, 與 h 之長。計算每次可求作三角形凡幾。

12. 求作習題1之諸三角形。試察是否與從公式計算所得之結果相合。

3. 商論§348之習題3。設A角爲直角或爲鈍角。

4. 證同圓內正內接十邊形之一邊，小於正內接五邊形之一邊。然十邊形之邊。大於五邊形之邊之半。

5. 若內接多邊形之邊數愈多。則其一邊之長度愈短。

6. 設正內接多邊形之邊數愈多。則邊與圓之中心距離愈遠。試證之。

350. 定理： 設兩三角形有兩邊兩兩相等。然兩邊所夾之角。此形大於彼形。則對此角之第三邊。亦此形大於彼形。

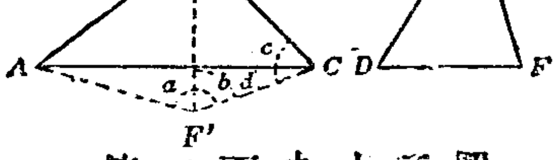
已知$\triangle ABC$與DEF。(第二百九十五圖。)

$AB=DE$; $BC=EF$; $\angle B>\angle E$.

證 $AC>DF$.

證： 置$\triangle DEF$於$\triangle ABC$之上，令DE落於AB之上，D在A之上，E在B之上，又EF在AB之同一邊如BC，則EF必在$\angle ABC$之內．何故？ F之地位有三．

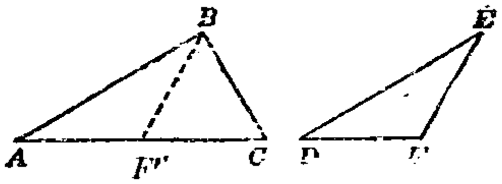
1. F在AC之下如F'。(第二百九十五圖。)



第二百九十五圖

則	$a>b$,	何故?
	$b=c$,	何故?
∴	$a>c$,	何故?
	$c>d$,	何故?
∴	$a>d$.	何故?
∴	$AC>AF'$ 又 $AC>DF$.	何故?

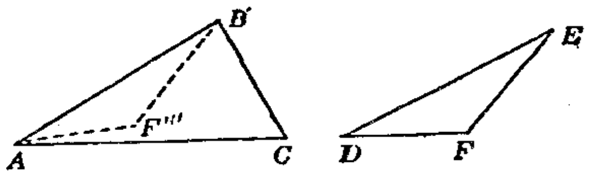
II. F 在 AC 內如 F''.(第二百九十六圖.)



第二百九十六圖

則	$AC>AF''$.	何故?
	$AC>DF$.	何故?

III. F 在 AC 之上如 F'''.(第二百九十七圖.)



第二百九十七圖

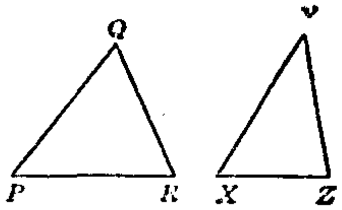
則	$AF'''+F'''B<AC+CB$.	何故?
	$F'''B=\quad CB$.	何故?
∴	$AF'''\quad <AC$.	何故?
又	$DF<AC$.	何故?

351. 定理: 設兩三角形有兩邊兩兩相等。若其第三邊。此形大於彼形。則第三邊所對之角亦此形大於彼形。

已知$\triangle PQR$與XYZ.(第二百九十八圖.)

$PQ=XY$; $QR=YZ$; $PR>XZ$.

證$\angle Q>\angle Y$.



第二百九十八圖

解析: 設$Q=Y$,則兩三角形若何?又PR與XZ若何?

如此,設$PR>XZ$,則$Q=Y$否?

設$Q<Y$,則PR與XZ若何?　何故?

設$PR>XZ$,則$Q<Y$否?

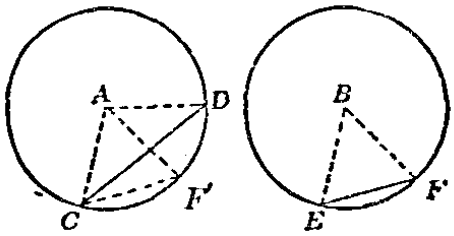
設$PR>XZ$,則Q角與Y角當作何比較?

用反證法述全證.

352. 定理: 同圓或等圓。對不等弦之弧不等。其大小之序與弦同。又逆定理爲對不等弧之弦不等。其大小之序與弧同。

已知$\odot A=\odot B, \overline{CD}>\overline{EF}$.(第二百九十九圖.)

證CD弧$>EF$弧,



第二百九十九圖

證: 作半徑AC, AD, BE與BF.

指示$\angle CAD>\angle EBF$.(§351)

置$\odot B$於$\odot A$之上,令EB落於CA之上,E在C之上,B在A之上,又F在C之同一邊如D.

則BF當在AD與AC之間如AF'. 何故?

如此$\widehat{EF}$落於$\widehat{CF'}$之上,又F'落於圓周上又在C與D之間.

則　CF'弧$<CD$弧,　何故?

又　CF'弧$=EF$弧，　何故？

$\therefore EF$弧$<CD$弧.　何故？

逆定理： 已知$\odot A=\odot B$,$\overset{\frown}{CD}>\overset{\frown}{EF}$.(第二百九十九圖)證$CD$弦$>EF$弦.

證： 作半徑AC, AD, BF,與BE；又置$\odot B$於$\odot A$之上，令EB與CA密合.

因$\overset{\frown}{CD}>\overset{\frown}{EF}$,故$F$點當在$C$與$D$之間,卽在$F'$.又$BF$線當與$AC$在$AD$之同一邊如$AF'$.

則　$\angle CAF'<\angle CAD$,　何故？

又　$\angle CAF'=\angle EBF$,　何故？

又　$\angle CAD>\angle EBF$,　何故？

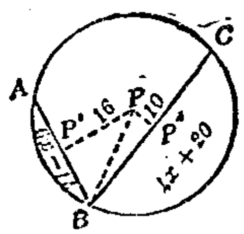
指明$\overline{CD}>\overline{EF}$(§ 350).

習　題

1.　AB弦與BC弦之長,(第三百圖)為$6x-14$,與$4x+20$;又PP'線與PP''線為16與10.測x及兩弦之長。

$P'B=3x-7$,　何故？

$P''B=2x+10$.　何故？



第三百圖

則,$(3x-7)^2+16^2=\overline{PB}^2$,　何故？

又　$(2x+10)^2+10^2=\overline{PB}^2$.　何故？

$\therefore (3x-7)^2+16^2=(2x+10)^2+10^2$.

或$9x^2-42x+49+256=4x^2+40x+100+100$.

$5x^2-82x+105=0$.

$$\therefore\quad x=\frac{82\pm\sqrt{82^2-4\cdot5\cdot105}}{10}.$$

$$x=\frac{82\pm68}{10}=15\text{ 或}(1\tfrac{2}{5}).$$

則 $AB=76$.

$CB=80$.

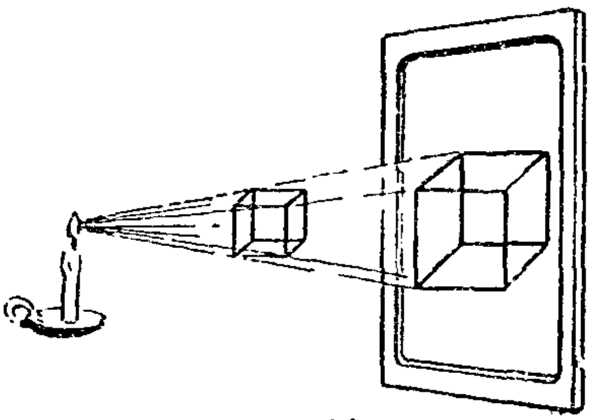
指明§349中之定理,如何可用此兩答數證實之?

2. 第三百圖之 AB, BC, PP' 與 PP'' 諸線,以 l_1, l_2, d_1, 與 d_2, 代表之。試測以下各題之未知數。又每次以§349覆證之。

	l_1	l_2	d_1	d_2
1…………	$2a-7$	$4a-14$	2	1
2…………	6	12	$a+11$	$3a+4$
3…………	$x+3$	$x+5$	6	4
4…………	$4t+14$	$10t-2$	6	3

空間中之線與平面

353 平面上立體之射影. 設一幾何立體之模型,如銅絲製成之立方體。在燭光與黑板之中間(第三百零一圖),則立方體之影。當現於黑板上,將立方體所有之緊要之線與點。悉畫於板上。若依此影作一圖,則可意想模型之式樣。而此影即爲立方體之射影。



第三百零一圖

若置燭光(射影之中心)於極遠之處。則射影線近於平行。與日光為射影之中心時同。則射影線可與黑板之平面作垂線,或斜線。

今當設想射影線互相平行時之射影。及垂於平面時之射影。

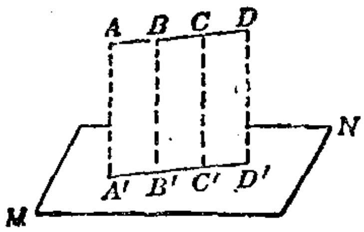
354. 平面上一點之射影. 由一已知點至一已知平面之垂線之脚,為平面上此點之射影。

試於教室內選擇數點。如煤氣管之尖端。或書案之角等。又指示此諸點在地板上,側牆上,壁隅上,及天花板上之射影。

355. 定理: 平面上不垂於平面之直線,其射影亦為一直線。

第三百零二圖之AA', BB', CC'諸射影線皆平行。故在經過AD之平面內。

如此則AD內諸點之射影。在平面AD'與MN之交線內。



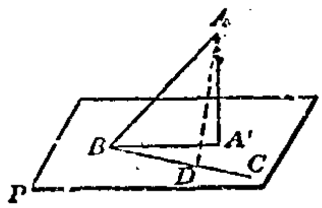
第三百零二圖

356. 定理: 平面上垂於平面之直線,其射影為一點。何故?

357. 定理: 一已知線與平面上此線之射影所成之銳角。較小於此線與平面內他一線所成之角。但此他一線。須經過已知線與平面之交點者。

已知AB線過平面P於B,又BA'為P上AB之射影.設BC為平面P內經過B之他一線.(第三百零三圖)

證$\angle A'BA<\angle CBA$.



第三百零三圖

證：於BC上截$BD=BA'$,

則　$AB=AB$,

$BA'=BD$,

又,　$AA'<AD$,(§342)

$\therefore\angle A'BA<\angle DBA$.(§351)

習　　題

1. 求AB之射影之長(第三百零三圖)以AB與$\angle ABA'$項表示之。

2. 求平面上一線之射影之長,設此線長10呎,與平面成角60°。

用習題1中所得之公式求之。

3. 習題2中AB之長與其射影之長,作何比較?

提　　要

358. 本章授以下各名目之意義:

一點與一平面之距離。	平面上一點之射影。
三角形之中線。	平面上一線段之射影。
平面上立方體之射影。	

359. 本章溫習與擴充以前所授之不等式公理與定理。

360. 本章指示不等式可用以解問題。

361. 本章所證之定理如下:

1. 直徑大於圓之任一弦。

2. 三角形之一外角。大於任一遠內角。

3. 從一線之垂線內一點。作兩斜線至此線，若其射影不等。則兩斜線亦不等，

4. 從一線之垂線內一點。有兩斜線至此線，設此兩斜線不等。則其射影亦不等，

5. 若由三角形內一點。作兩線至一邊之兩端。則此兩線之和，小於他兩邊之和。

6. 同圓或等圓弦之不等者，與中心距離亦不等。其小者。與中心之距離遠，又其逆定理。

7. 兩三角形。有兩邊兩兩相等。若兩邊所夾之角。此形大於彼形。則對此角之第三邊，亦此形大於彼形。又其逆定理。

8. 同圓或等圓。對不等弦之弧不等。其大小之序。與弦同。又其逆定理，

362. 以下各定理中之點與線不同在一平面內。

1. 從一點至一平面，以垂線爲最短之距離。

2. 設從一點至一平面，有諸斜線。遇平面於距垂線脚等遠之諸點。則此諸斜線皆等。

3. 設從一點至一平面。有諸斜線。遇平面於距垂線脚不等遠之諸點。則此諸斜線皆不等。較遠之線較長。

4.　設從一點至一平面。有諸等斜線，則此諸線。必遇平面於距垂線脚等遠之諸點。

5.　設從一點至一平面。有兩不等斜線，其較長者，遇平面於距垂線脚較遠之點。

6.　平面上不垂於平面之直線。其射影亦爲一直線，

7.　平面上垂於平面之直線。其射影爲一點。

8.　一已知線與平面上此線之射影所成之銳角，較小於此線與平面內他一線所成之角，但此他一線。須經過已知線與平面之交點者。

363.　本章所授之求作題如下:

求作三角形 ABC。設已知 a 與 b 兩邊，及其一邊之對角 A。

第十五章

空間之線與面　角　球體

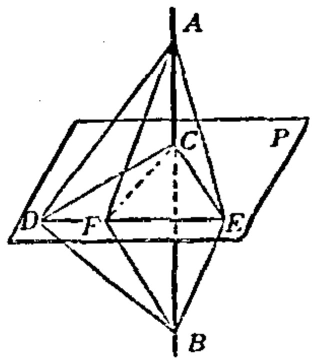
空間中之線與平面

364. 定理： 若一線垂於兩交線。則此線垂於兩交線所成之平面。†

已知AB線交平面P於C，如第三百零四圖。

$AC\perp CD$，又$AC\perp CE$。

證$AC\perp P$。



第三百零四圖

證：設CF爲平面P內之任一線，且經過C點。

作直線DE，令交CD，CF，與CE。

作AD，AF，AE諸線。

截$CB=CA$，又作BD，BF，BE諸線。

指示平面ADB內，DC爲AB之中點垂線。

如此$DA=DB$。因一線之中點垂線內任一點距線之兩端等。

依此指示$EA=EB$。

指示$\triangle DEA\cong\triangle DEB$。

指示$\triangle ADF\cong\triangle BDF$。（邊，角，邊）

$\therefore AF=BF$。

※ 如欲減少課程。此章可刪去之。

† 創始於歐几利得。可西(Cauchy)簡約之。

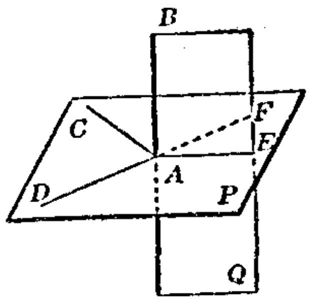
因 $FA=FB$,又 $CA=CB$,所以 FC 垂於 AB.蓋設在已知線上有兩點,各距一線之兩端等,則已知線為此線之中點垂線.

因已指明 AB 垂於 CF,而 CF 代表 P 內之任一線,且經過 C 點,所以 AB 垂於 P.

365. 求作題： 求作一平面,令過一已知線內之已知點,並垂於此線.

求作兩線,令垂於已知線內之已知點.又作一平面令經過此諸線,此即為欲求之平面,試證之.

366. 定理： 過一已知線內一已知點,垂直於此線之諸線,皆在過此點垂直於此線之平面內.



第三百零五圖

已知 AB 如第三百零五圖,又 $AC\perp AB$, $AD\perp AB$, $AE\perp AB$.

證 AC, AD, AE 諸線,皆同在一平面內.

證(反證法)：

設 P 為 AC 與 AD 所定之平面.

則 $P\perp AB$.　何故?

設 AE 代表垂於 AB 內 A 點之任一線.

設想 AE 不在平面 P 內,則 AE 與 AB 所定之平面 Q,當交平面 P 於一直線如 AF.

故平面 Q 內之 $AF\perp AB$　何故?

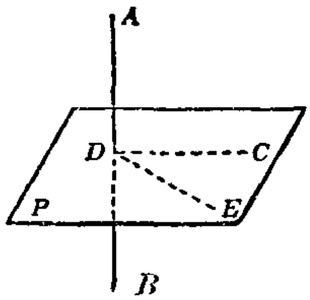
又　$AE\perp AB$.　何故?

但平面內(如平面 PQ)祇可作一線垂於一巳知線內之巳知點,今最後兩句與此定理相反,故設想屬於誤謬,而 AE 在平面 P 內.

367. 定理: 垂於一巳知線內一巳知點。祇可求作一平面。

指明此定理根據於§ 366.

368. 定理: 由一巳知線外一巳知點。祇可求作一平面。垂直於此線。



第三百零六圖

巳知 AB 線,(第三百零六圖)

又 C 點不在 AB 內.

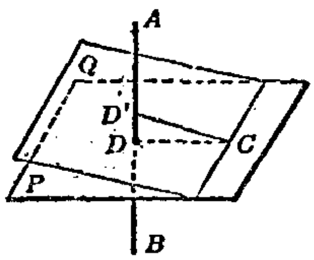
求作一平面,令經過 C 點,又垂於 AB.

作法: 作 $CD\perp AB$.

作 $DE\perp AB$.

求作 CD 與 DE 所定之平面 P.

此即爲欲求之平面. 何故?



第三百零七圖

又 P 爲由 C 垂於 AB 之獨一平面.

設平面 Q (第三百零七圖) 垂於 AB,交 AB 於 D',則 CD' 與 CD 皆垂於 AB. 此爲必無之理. 何故?

369. 求作題: 於一巳知平面內一巳知點。求作一垂線於平面。

巳知平面 P 內一點 A.(第三百零八圖)

試於 A,求作一垂線至平面 P.

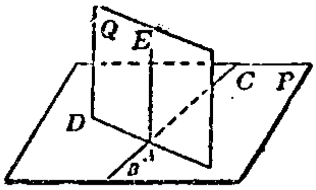
作法：　於平面 P 內作 BC，令經過 A.

於 A，求作平面 $Q\perp BC$，交平面 P 於 AD.

於平面 Q，求作 $AE\perp AD$.

AE 卽爲欲求之垂線.

證此，指明 $AE\perp AD$，又 $AE\perp AB$.



第三百零八圖

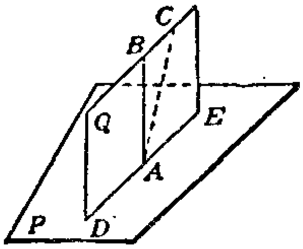
370. 定理：　於一已知平面內一已知點。祇可求作一垂線。

已知 $AB\perp P$ 如第三百零九圖.

證 AB 爲至 P 內 A 點之獨一垂線。

證：　設想 AB 不爲 P 內 A 點之獨一垂線.

則 AC 爲 P 內 A 點之他垂線.



第三百零九圖

作平面 Q，令經過 AB 與 AC，又割 P 於 DE.

指明 AB 與 AC 皆同在 Q 內.又皆垂於 DE.

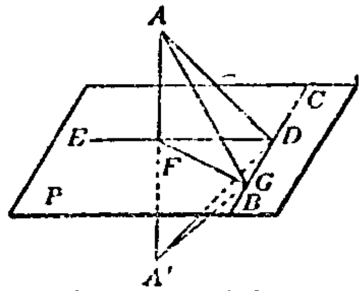
此爲必無之理，故設想「AB 不爲 P 內 A 點之獨一垂線」。屬於誤謬.

371. 求作題：　由一平面外一點。求作一垂線至平面。

已知平面 P，又一點 A。但此點不在 P 內如第三百一十圖.

試由 A 至 P 求作一垂線.

作法：　於 P，作一線如 BC.



第三百一十圖

作 $AD \perp BC$.

於 P,作 $DE \perp BC$.

作 $AF \perp DE$.

AF 爲欲求之線.

證： 於平面 P 內,作 FG 線,令經過 F,又遇 BC 於 G.

引長 AF,又作 $FA'=FA$.

作 $A'G$, $A'D$, 又 AG.

指明 $BC \perp$ 平面 ADF.

指明 $AD=A'D$.

指明 $\triangle ADG \cong \triangle A'DG$.

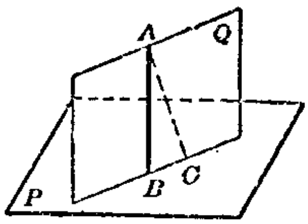
$\therefore AG=GA'$ 何故?

$\therefore FG$ 爲 AA' 之中點垂線. 何故?

指明 $AF \perp P$.

372. 定理： 由一已知平面外一已知點,祇可求作一垂線至平面。

試述假設與終結.



第三百十一圖

證(反證法)：

設想 AB(第三百十一圖)不爲由 A 至 P 之獨一垂線.

設 AC 爲由 A 至 P 之他垂線.

作 AB 與 AC 所定之平面 Q,令交 P 於 BC.

於平面 Q, AB 與 AC 皆垂於 BC,但此爲必無之理.

故設想爲謬,而 AB 爲由 A 至 P 之獨一垂線.

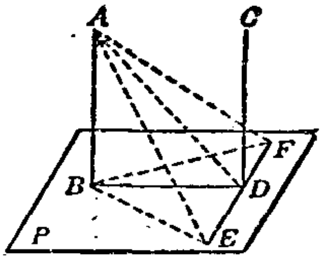
373. 定理: 垂於同一平面之諸線。彼此平行。

已知 AB 線與 CD 線皆垂於平面 P.(第三百十二圖)

證 $AB \parallel CD$.

證: 作 BD.

於 P,作 $EF \perp BD$, 又截 $DE=DF$.



第三百十二圖

$BE=BF$. (一線之中點垂線內各點。距此線之兩端等。)

$\therefore AE=AF$. (§344)

指明 AD 爲 EF 之中點垂線,

由是 EF 垂於 DA,又垂於 DB 與 DC.

故 DB, DA, DC 皆在同一平面內. 何故?

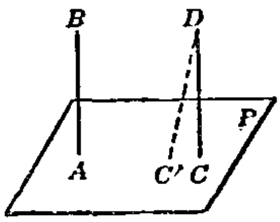
$\therefore AB$ 與 CD 亦在此平面內.蓋一線,若有兩點在平面內.則全線亦在平面內.

因 AB 與 CD 皆垂於 BD,所以 $AB \parallel CD$.

374. 定理: 兩平行線。若此線垂於一平面。則彼線亦垂於此平面。

設 AB 平行於 CD.(第三百十三圖)

又 AB 垂於 P.



第三百十三圖

設 CD 不垂於平面 P, 如第三百十三圖,

則 P 內可作 $DC' \perp P$.

則 $DC' \parallel BA$,又 $DC \parallel BA$.　何故?

此爲必無之理。　　何故?

證完此定理。

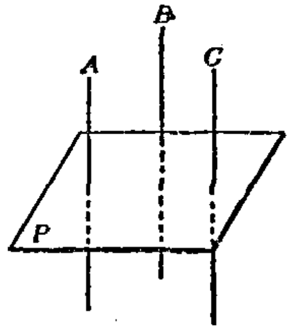
375. 定理: 同與一線平行之兩線。彼此平行。

設 $A \parallel B$ 又 $C \parallel B$(第三百十四圖)

證 $A \parallel C$.

證: 作平面 $P \perp B$. 則 $A \perp P$,又 $C \perp P$. 何故?

$\therefore A \parallel C$.　　何故?



第三百十四圖

376. 定理: 若兩線平行。則含此線而不含彼線之平面。與彼線平行。

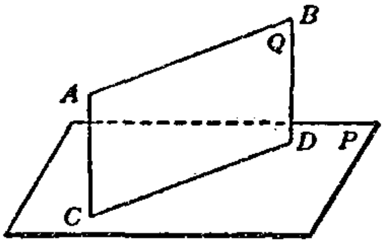
已知 $AB \parallel CD$,(第三百十五圖)

又平面 P 含 CD 而不含 AB.

證 $AB \parallel P$.

證: 設 AB 與 P 不平行,

則 AB 當遇 P 於 E 點.



第三百十五圖

指明 E 在平面 P 與平面 Q 內.

則 E 必在其交線 CD 上.

如此 AB 與 CD 相遇.

此與假設 $AB \parallel CD$ 相反,故設想 AB 與 P 不平行爲謬.

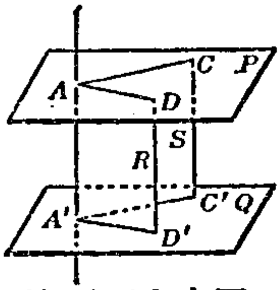
377. 定理: 兩平行平面。若此平面垂於一線。則彼平面亦垂於此線。

已知平面 $P \parallel Q$.(第三百十六圖)

又平面 $P\perp AA'$。

證平面 $Q\perp AA'$

證：　作平面 R 與 S,令經過 AA' 又遇 P 於 AC 與 AD, 遇 Q 於 $A'C'$ 與 $A'D'$.



第三百十六圖

則 $AC \parallel A'C'$,

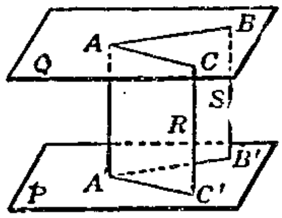
又　$AD \parallel A'D'$。　　何故?

AA' 垂於 AC 與 AD.　　何故?

$\therefore AA'$ 垂於 $A'C'$ 與 $A'D'$.　何故?

$\therefore AA'\perp Q$.　　何故?

378. 定理：　設有兩交線,與一已知平面平行。則過兩線之平面,亦與已知平面平行。



第三百十七圖

已知 AB 線與 AC 線。

又 AB,AC 與平面 P 平行。

證 $Q \parallel P$.

證：　作 $AA'\perp P$.

作平面 R,令通過 AA' 與 AC,又作平面 S,令通過 AA' 與 AB.

則　　$AA'\perp A'B'$ 與 $A'C'$.　　何故?

　　$AC \parallel A'C'$,因若 AC 遇 $A'C'$ 則 AC 必遇 P.

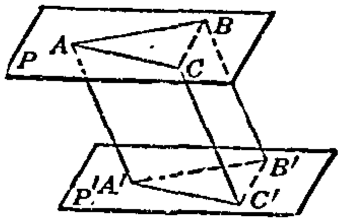
又　　$AB \parallel A'B'$.

$\therefore$　$AA'\perp AB$ 與 AC.　　何故?

$\therefore$　$AA'\perp Q$.　　何故?

用反證法及 §368 指明 $Q \parallel P$.

379. 定理: 設有兩角。不同在一平面。然其邊平行。且所行之方向同。則兩角相等。其平面平行。



第三百十八圖

已知 A' 與 A 兩角.(第三百十八圖)

又 $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$.

證 $\angle A=\angle A'$,又 $P \parallel P'$.

證: 作 AA'.又截 $AB=A'B'$, $AC=A'C'$.

作 BC 與 $B'C'$.

作 CC' 與 BB'.

因 AB 與 $A'B'$ 平行而相等,故 $ABB'A'$ 爲平行四邊形,又 AA' 與 BB' 平行而相等.

又 AA' 與 CC' 平行而相等.

$\therefore CC'$ 與 BB' 平行而相等. 何故?

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. 何故?

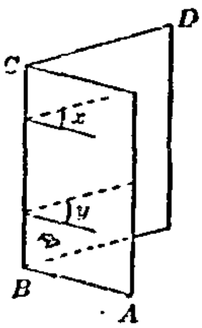
$\therefore \quad \angle A=\angle A'$.

P 與 $A'C'$ 平行,又與 $A'B'$ 平行.(§376)

$\therefore P \parallel P'$.(§378).

二 面 角

380. 定理: 凡二面角之諸平面角皆等。



第三百十九圖

指明平面角 x 與 y 之邊皆平行。(第三百十九圖)

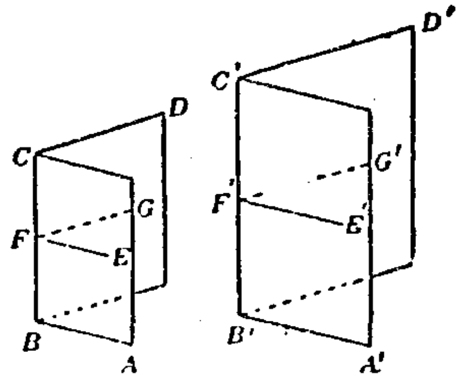
然後用 §379 證之.

381. **定理：** 兩二面角相等,如其平面角相等。又逆定理,若兩二面角相等,則其平面角相等。

已知二面角 BC 與 $B'C'$,又其平面角 $EFG=E'F'G'$.

證 $BC=B'C'$.

證： 置二面角 BC 於二面角 $B'C'$ 之上,令 $\angle EFG$ 與 $\angle E'F'G'$ 密合.



第三百二十圖

作此甚易,因 $\angle EFG=\angle E'F'G'$.

由是,則 CF 當與 $C'F'$ 密合.　何故?

$\therefore A$ 面落於 A' 面之上,又 D 面落於 D' 面之上.　何故?

如此,兩二面角密合,故相等.

學生可自證逆定理.

多數二面角之定理,與角之定理相似,可用同法證之者,詳見以下習題.

證以下習題:

1. 凡直二面角皆等。

2. 若兩相交平面互作兩二面接角,則其和爲180°。

3. 對頂二面角相等。

4. 二面角,爲同二面角或等二面角之餘角或補角者,皆等。

5. 設有兩平行平面,爲一平面所割,則——

內錯二面角相等。

相當二面角相等。

同旁之內二面角互爲補角。

6. 試述習題 5 之逆定理而證明之。

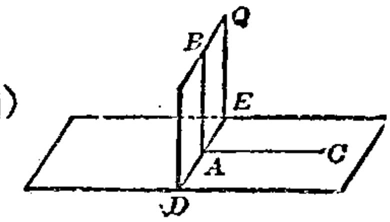
7. 兩對頂二面角之平分平面，互爲垂直。

382. 定理： 若一線垂於一平面。則經過此線之各平面。皆垂於此平面。

已知 $AB\perp$ 平面 P.(第三百二十一圖)

又 Q 爲經過 AB 之任一平面.

證 $Q\perp P$.



第三百二十一圖

證： 於平面 P,作 $AC\perp DE$,但 DE 爲 P 與 Q 之交線.

$BA\perp DE$. 何故?

$\therefore \angle BAC$ 爲 $B-ED-C$ 之平面角. 何故?

$\because BA\perp AC$, $\angle BAC$ 爲直角,

$\therefore Q\perp P$. 何故?

習 題

設有一線，垂於一已知平面，則經過此線。可作無限數之平面，皆垂於此已知平面，試指明之。

383. 定理： 若兩平面互爲垂直。則此平面內之線。其垂於兩平面之交線者。必垂於彼平面。

已知 $P\perp Q$, $AB\perp CD$.

證 $AB\perp Q$.

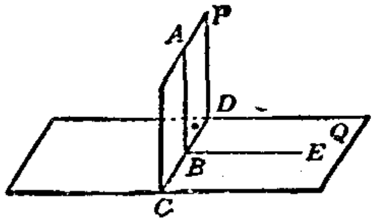
證：　於平面Q，作$BE\perp CD$.

則$\angle ABE$爲$A-DC-E$之平面角.

$\therefore \angle ABE$爲直角. 何故?

$\therefore AB\perp BE$.

$\therefore AB\perp Q$.　何故?



第三百二十二圖

習　　題

證以下各題:

1. 若兩平面互爲垂直。則在交線內一點垂於此平面之線。必在他平面內。

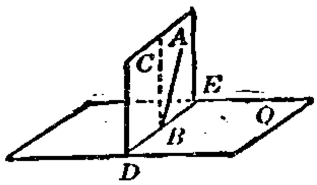
設AB，(第三百二十三圖)垂於Q，又設P亦垂於Q.

設AB不在P內，則平面P內可作CB，垂於DE.

$CB\perp Q$. (§ 383)

但$AB\perp Q$於同點B.

此爲必無之理.故設想爲謬。



第三百二十三圖

2. 兩平面互爲垂直。若由此平面內一點。作彼平面之垂線。則此線必在此平面內。

用反證法證之。

384. 定理： 若一平面垂於兩平面。則必垂於兩平面之交線。

已知平面P垂於Q，又垂於R.(第三百二十四圖)

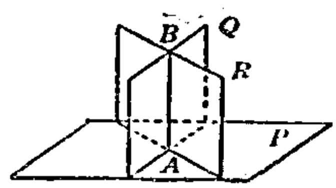
證$P\perp$交線AB.

證： 於A,(卽P, Q,與R之公共點)作一線垂於P.

此線必在平面Q內,　何故?

因此理,此線必在平面R內.

故此線爲Q與R之交線.



第三百二十四圖

如此Q與R之交線爲平面P之垂線.

此定理如何可用以驗門上釘鉸鏈之線是否與地板垂直? 試驗時,祇可用木匠之規尺.

385. **定理：** 若一線不垂於一已知平面。則經過此線。祇有一平面。可垂於已知平面。

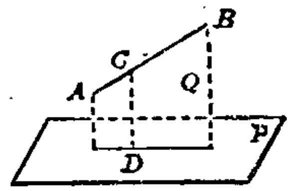
已知AB不$\perp P$.(第三百二十五圖)

證經過AB祇可求作一平面垂於P.

作法： 由AB上一點C,作$CD \perp P$.

作AB與CD所定之平面Q.

此爲欲求之平面.



第三百二十五圖

證$Q \perp P$.

Q爲經過AB又垂於P之獨一平面.

因設經過AB又垂於P可作他平面.

則P可垂於兩平面之交線AB,而與假設相反矣.

習　　　題

證以下各題:

1.　若一平面垂於二面角之棱。則必垂於其面。

2. 經過二面角內一點。可作一平面。垂於二面角之各面。

3. 設有三線。互相垂直於同一點。則每線垂於其他兩線所定之平面。

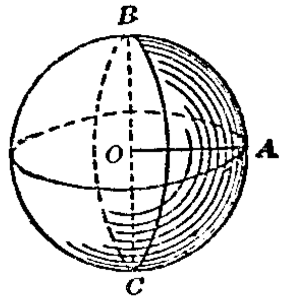
球　　體

386. 球體. 中心. 半徑. 直徑.

球體者。有面周圍之體也。設於體內有一點。距面之諸點恆等。則此點謂之中心。(第三百二十六圖)。

由中心至球面之直線。謂之半徑。(如 OA)。

直徑者。通過中心而以球面爲界之直線也。(如 BC)。

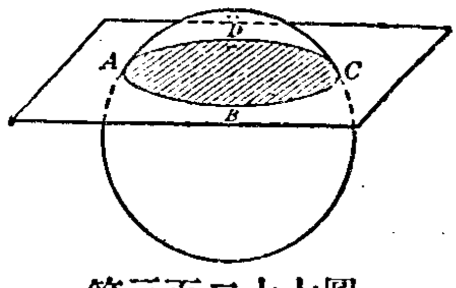


第三百二十六圖

設就直徑旋轉半圓。可引成球體。

387. 基本定理:

1. 同球體之半徑皆等。
2. 同球體之直徑皆等。
3. 等球體之半徑皆等。
4. 半徑相等之球體皆等。



第三百二十七圖

388. 球體之截面. 平面與球面之交界。謂之球體之截面。(如曲線 $ABCD$) (第三百二十七圖)

389. 定理: 球體之截面。爲一平面所截成者。爲一圓。

已知球體 O 爲平面 P 所割,成截面 ABC.

證 ABC 爲圓.

證: 設 A 與 B 爲截面 ABC 上之兩點.

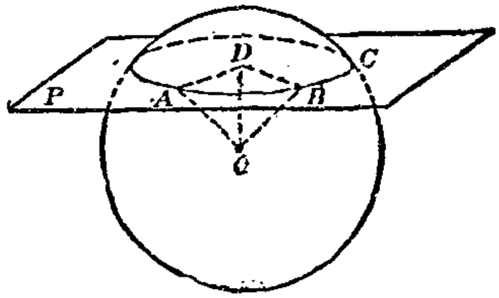
作半徑 OA 與 OB.

作 $OD\perp$ 平面 P.

作 AD 與 DB.

則 $DA=DB$.(見§346)

$\therefore$ ABC 爲圓.因 ABC 上諸點距 D 皆等也.

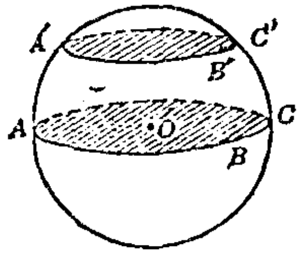


第三百二十八圖

390. 大圓. 小圓. 極. 軸. 設有一平面。經過球體之中心。而成截面。則此截面謂之大圓。(如第三百二十九圖之 ABC。)

設有一截面,其平面不經過中心。則此截面謂之小圓。(如第三百廿九圖之 $A'B'C'$。)

設有一直徑。垂於球體之圓之平面,則此直徑爲圓之軸.其兩端爲圓之極,



第三百二十九圖

習　　題

1. 試求一球體之平面截面之面積。設球之半徑爲 10。平面距圓心 6 準個。

指明以下各定理爲眞確。

2. 圓之軸經過中心。

3.　一球體之直徑。其經過圓之中心者。垂於此圓之平面。

4.　一球體之諸大圓皆等。

5.　兩大圓互相平分。

6.　設球面上有兩點。但非直徑之端點。則經過此兩點。祇可求作一大圓。

幾點可定一平面?

設欲於球體上定一圓。則第三點當揀何點?

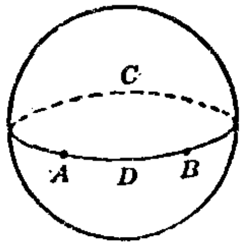
何時則兩已知點與球體之中心。不能定一平面?

7.　各大圓平分其球體。

因球面上諸點距中心皆等。故球面之兩部。其為大圓所分者。可使之彼此密合。

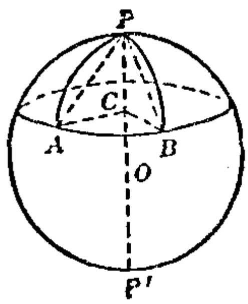
391.　兩點間之球面距離.　若一大圓。經過兩點。則其劣弧之長度。為兩點間之球面距離。

如此，$\widehat{ADB}$ 為 A 與 B 之球面距離.



第三百三十圖

392.　定理:　在球體之圓上諸點。距其同極皆等。



第三百三十一圖

已知球體 O 之 AB 圓上兩點 A 與 B;

P 與 P' 為 AB 圓之極，(第三百卅一圖)

證 $\widehat{PA}=\widehat{PB}$.

證:　設 PP' 軸交 AB 之平面於 C,

則 C 為 AB 圓之中心.　何故?

$\therefore CA=CB$. 何故?

$\therefore \overline{PA}=\overline{PB}$. 何故?

$\therefore \widehat{PA}=\widehat{PB}$. 何故?

393. 極距. 由小圓之近極至圓上任一點之球面距離。爲圓之極距。

大圓之極距,爲至兩極之球面距離。

394. 象限 大圓長度之四分一爲象限。

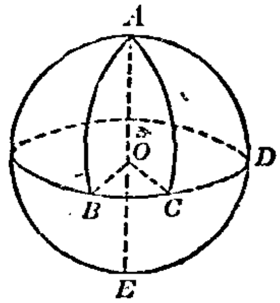
395. 定理: 大圓之極距爲一象限。試證之。

396. 定理: 設球面上有一點。與面上兩已知點之距離各爲一象限。則此點爲經過兩已知點之大圓之極。

已知 A,B,C 三點在球面上。(第三百卅二圖) $AB=$ 一象限; $AC=$ 一象限;

BCD 爲一大圓弧.

證 A 爲 $\widehat{BCD}$ 之極.



第三百三十二圖

解析: 若 A 爲 BC 弧之極,則直徑 AOE 若何?

如何可指明 $AOE\perp\odot O$ 之平面?

AOB 角與 AOC 角各大若干? 試述此證.

397. 定理: 兩球面之交界爲一圓。但此圓之平面必垂於兩球體之中心線。又其中心必在此線內。

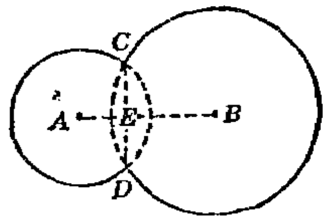
設 AB 爲軸, A 與 B 兩圓繞此軸旋轉,成兩相交球面,(第三百卅三圖)

證兩球面交於一圓，圓心在AB內，其平面垂於AB.

證：　設CD為A圓與B圓之公弦.

則AB為CD之平分垂線.　何故?

因A圓與B圓繞AB旋轉，故C為所成兩球面之公共線.



第三百三十三圖

CE線常在垂於AB過E之平面內.　何故?

$\therefore C$所經之路，為此平面內之圓.　何故?

習　　題

兩球體之半徑，一為12吋，一為5吋。兩中心相距13吋。求與兩球體相交之圓之面積。(哈佛大學)

398. 切線. 切平面. 設一球面與一線(平面)僅有一公點，則此線(平面)謂之切於球面。

399. 定理： 切於一球體之平面，與半徑作垂面於端點。

已知球體A與平面P相切於A.

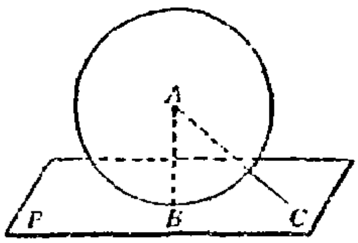
證$P \perp AB$.

證：　設C為P內之任一點，但非B點.

則C在球外.　何故?

$\therefore AC >$ 半徑.　何故?

$\therefore AC > AB$.



第三百三十四圖

如此，AB為由A至平面P之最短距離.　何故?

$\therefore P \perp AB$.

400. **定理:** 設一平面垂於球體一半徑之外端，則切於球體。

證此，當倒述前定理之證論。

提　　要

401. 此章授以下各項之意義:

球體。	大圓，	兩點間之球面距離。
中心。	小圓。	象限，
半徑。	極，	切線。
直徑。	圓之軸，	切平面。
球體之截面。	極距。	

402. 本章所證之定理如下:

1. 若一線垂於兩交線，則此線垂於兩交線所成之平面。

2. 過一已知線內一已知點垂直於此線之諸線，皆在過此點垂直於此線之平面內。

3. 垂於一已知線內一已知點，祇可求作一平面。

4. 由一已知線外一已知點，祇可求作一平面，垂直於此線。

5. 於一已知平面內一已知點，祇可求作一垂線，

6. 由一已知平面外一已知點，祇可求作一垂線至平面。

7. 垂於同一平面之諸線，彼此平行。

8.　兩平行線。若此線垂於一平面。則彼線亦垂於此平面。

9.　同與一線平行之兩線。彼此平行。

10.　若兩線平行。則含此線而不含彼線之平面。與彼線平行。

11.　兩平行平面，若此平面垂於一線，則彼平面亦垂於此線，

12.　設有兩交線。與一已知平面平行。則過兩線之平面，亦與已知平面平行。

13.　設有兩角。不同在一平面，然其邊平行。且所行之方向同，則兩角相等。其平面平行。

14.　凡二面角之諸平面角皆等。

15.　若兩二面角相等。則其平面角相等。

16.　兩二面角相等。如平面角相等。

17.　若一線垂於一平面，則經過此線之各平面。皆垂於此平面。

18.　若兩平面。互爲垂直。則此平面內之線。其垂於兩平面之交線者。必垂於彼平面。

19.　若兩平面互爲垂直。則在交線內一點垂於此平面之線，必在他平面內。

20.　兩平面互爲垂直，若由此平面內一點，作彼平面之垂線，則此線必在此平面內。

21. 若一平面垂於兩平面。則必垂於兩平面之交線。

22. 若一線不垂於一已知平面。則經過此線。祇有一平面。可垂於已知平面。

23. 球體之截面。為一平面所截成者。為一圓。

24. 圓之軸經過中心。

25. 一球體之直徑。其經過圓之中心者。垂於此圓之平面。

26. 一球體之諸大圓皆等。

27. 各大圓平分其球體。

28. 設球面上有兩點。但非直徑之端點。則經過此兩點祇可求作一大圓。

29. 在球體之圓上諸點。距其同極皆等。

30. 大圓之極距為一象限。

31. 設球面上有一點。與面上兩已知點之距離各為一象限。則此點為經過兩已知點之大圓之極。

32. 兩球面之交界為一圓。但此圓之平面。垂於兩球體之中心線。又其中心在此線內。

33. 切於一球體之平面。與半徑作垂面於端點。

34. 設一平面。垂於球體一半徑之外端。則切於球體。

35. 測一實球之直徑。

403. 本章所授求作題如下:

1.　求作一平面，令經過一已知線內一已知點，並垂於已知線。

2.　由一已知線外一已知點，求作一平面，令垂於已知線。

3.　於一已知平面內一已知點，求作一垂線於平面。

4.　由一平面外一點，求作一垂線至平面。

5.　求作一平面，令垂於一已知平面，又通過不垂於已知平面之直線。

第十六章

軌跡 會合線

軌跡

404. 軌跡. 凡點移動時。必經過一路。路之形像。視點之動狀而定。例如石下墜。必沿一直線。灰塵飛揚於空中。其動狀爲一曲線。形似拋物線。如第三百三十五圖。

第三百三十五圖

讀幾何學。知設空間中有各點。皆距一點有定遠。則此各點所經之路爲一圓。又若平面內有各點。與兩定點之距離常等。則各點所經之路。爲一直線。即兩已知點聯線之中點垂線。

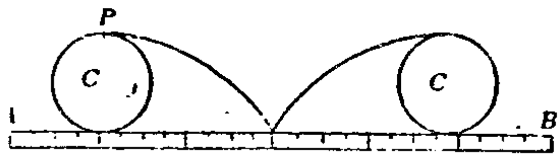
凡可滿足特異情狀之各點之路。而不含他點者。謂之各點之軌跡。*Locus*(即軌跡)爲拉丁字。其意爲路。

405. 軌跡之測定. 測一點之軌跡。當表記此點之位置多個。由此諸點。即可求得軌跡。

如此。若傍路之壁上。表記自由車之踏板之位置多個。可得踏板之軌跡。

習題

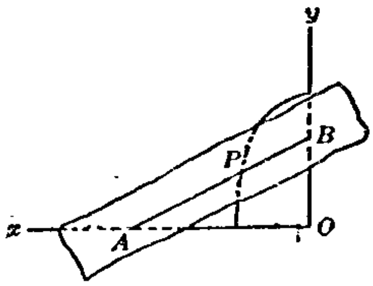
1. 旋轉一圓C。如第三百卅六圖。惟不可沿AB尺之邊滑過。求圓上P點之軌跡。



第三百三十六圖

於紙板上剪一圓。沿界尺旋轉之。用針表記 P 之位置多個。又作一曲線。令經過所得之諸點。P 之軌跡。謂之擺線。

作兩垂線。如第三百三十七圖。又作 AB 線。於 AB 上作 P 點。移動 AB。令 B 沿 OY 滑過。A 沿 OX 滑過。又表記 P 之位置多個。然後作 P 之軌跡。此軌跡爲橢圓之四分一。



第三百三十七圖

3.　設平面內有各點。其距一線之遠已知。問各點之軌跡如何?

4.　平面內有各點。距兩已知平行線恆等。問其軌跡如何?

5.　設空間中有各點。其距一點之遠已知。問各點之軌跡如何?

6.　空間中有各點。距兩已知點恆等。問其軌跡如何?

7.　空間中有各點。距兩平行線恆等。問其軌跡如何?

8.　設空間中有各點。其距一線之遠已知。問各點之軌跡如何?

9.　空間中有各點。距三已知點恆等。問其軌跡如何?(見§411)

406. 軌跡之證明. 滿足已知情狀之點之軌跡。須含滿足此項情狀之各點。而無他點。其例如下。

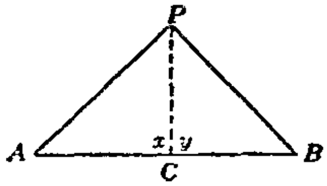
I. 在軌跡上之各點須滿足此項已知情狀。

II. (a)滿足此項情狀之各點。皆在軌跡上。或

(b)不在軌跡上之點。不能滿足此項情狀。

407. 定理： 設平面內有各點距兩已知點等。則各點之軌跡。爲此兩點聯線之中點垂線。

證： I. 指明中點垂線內各點，距兩已知點等。



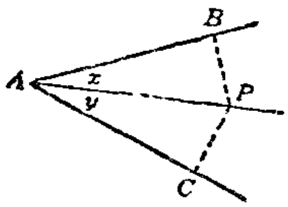
第三百三十八圖

II. 設 $PA=PB$，(第三百三十八圖)從 P 作 PC 線至 AB 之中點 C，

指明 $x=y$。

408. 定理： 設平面內有各點。在一角內。距角之兩邊恆等。則此各點之軌跡。爲角之平分線。

證： I. 指明平分線內各點距兩邊恆等。

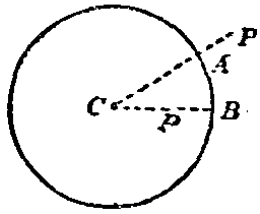


II. 若 $PB\perp AB$ 如第三百卅九圖， 第三百三十九圖

則 $PC\perp AC$ 又 $BP=PC$， 指明 $x=y$。

409. 定理： 平面內有各點距一已知點有已知遠。此各點之軌跡爲圓。其中心爲已知點。其半徑等於已知遠。

證： I. 圓周上各點距已知點爲已知遠，(第三百四十圖)何故？

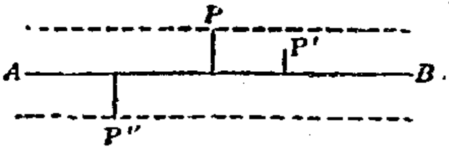


II. 指明不在圓周上之點 P，距已知點 C 不爲已知遠。

第三百四十圖

410. **定理:** 平面內有各點。距一已知線有已知遠。此各點之軌跡含兩線。各與已知線平行。又距已知線有已知遠。

指明情狀 I 與 II 皆滿足於第三百四十一圖。



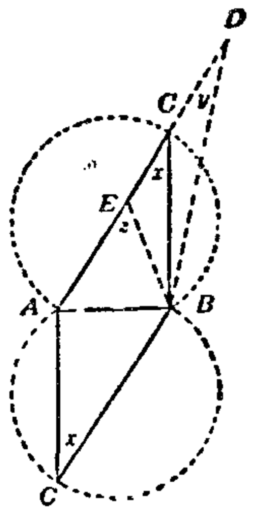
第三百四十一圖

習　　題

1. 平面內有各圓。切一已知線於一已知點。指明各圓之中心之軌跡為一線。垂於已知線內之已知點。

2. 同平面內有各圓。其半徑已知。又切於一已知線。指明各圓心之軌跡含兩線。各與已知線平行。又距已知線有已知遠。

3. 設有一角,其大為 x,其邊經過兩定點 A 與 B。指明此角之頂之軌跡含兩弧,有 AB 為其弦。又 x 為其內接角。(求作法見§301)指明第三百四十二圖中,若圓弧外有一點 D,則 $y<x$。若圓弧內有一點 E,則 $z>x$。

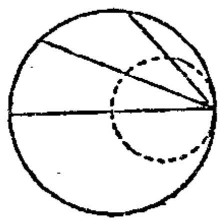


第三百四十二圖

4. 求作一等腰三角形。設已知其底及對底之角。

5. 試求圓內平行弦之中點之軌跡。

6. 試求圓內距中心等遠各弦之中點之軌跡。


第三百四十三圖

7. 設有各弦,同過圓周上一點,試求各弦中點之軌跡。(第三百四十三圖)

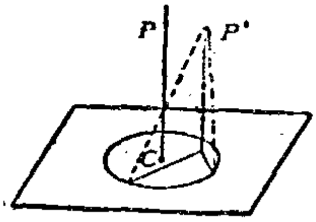
8. 設有各圓。通過兩已知點。試求各圓心之軌跡。

9. 設有各圓。切一已知圓於一已知點。求各圓心之軌跡。

10. 從三角形之頂角至其對邊。各作線。求各線中點之軌跡。

11. 試以一已知半徑作一圓。切於兩交線。

411*. 定理： 設空間中有各點。距圓周上各點恆等。則空間中各點之軌跡爲一線。通過圓心。又垂於圓之平面。

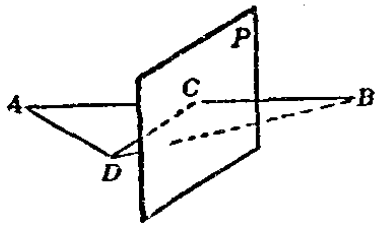


第三百四十四圖

證： I. 指明垂於C點之線內任一點P.距圓周上各點恆等. 用§344證之.

II. 指明不垂於C點之線內任一點P'.距圓周上各點不等. 用§345證之.

412. 定理： 設空間中有各點。距兩已知點恆等。則各點之軌跡。爲一平面。此平面。平分兩已知點之聯線。又垂於聯線。



第三百四十五圖

證： I. 指明平面P內任一點.距A與B等.

II. 設D爲平面P內之任一點.
又設$DA=DB$.

指明$DC\perp AB$. 由是DC必在平面P內。

※ §§ 411—413可删去。設第十五章已删削。

413. **定理**: 二面角內有一點。距兩面各等。此點之軌跡。爲平分此角之平面。

已知二面角 $A-BC-D$(第三百四十六圖)

平面 P 平分此二面角.

證 P 爲距 Q 與 R 兩面等遠各點之軌跡.

證: I. 證平面 P 內任一點, 如 E, 距 Q 與 R 相等, 其法如下:

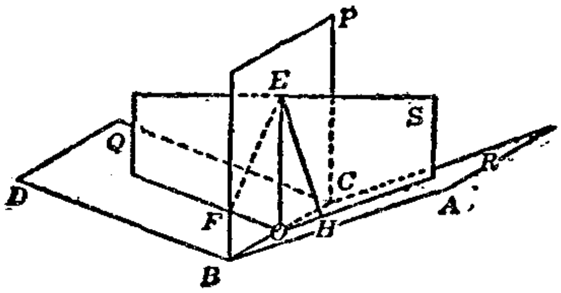
作 $EF\perp Q$, 又 $EH\perp R$.

通過 EF 與 EH 作平面 S.

則 $S\perp Q$, 又 $S\perp R$. (§ 382)

$\therefore S\perp BOC$. (§ 384)

$\therefore BO$ 垂於 FO, EO 及 HO. 何故?



第三百四十六圖

$\therefore \measuredangle FOE$ 與 HOE 爲 P 與 Q, 及 P 與 R 所成之二面角之平面角.　何故?

$\therefore \angle FOE=\angle HOE$.　何故?

證 $\triangle FOE\cong\triangle HOE$.

則　$EF=EH$.

II. 證距 Q 與 R 相等之各點, 在平分平面 P 內, 其法如下:

如 I, 證 $\measuredangle FOE$ 及 HOE 爲二面角 PQ 及 PR 之平面角.

因已知$EF=EH$,故可證

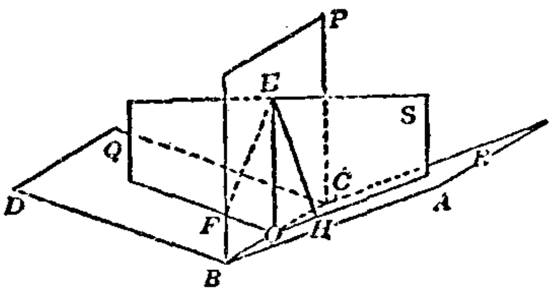
$\triangle FOE\cong\triangle HOE$.(弦與一邊)

$\therefore\angle FOE=\angle HOE$.

$\therefore$二面角PQ=二面角PR.

$\therefore$平面P平分$Q-BC-R$.

故P爲欲求之軌跡.



第三百四十六圖

會　合　線

414. **中線**　聯三角形之一角頂及其對邊中點之線。爲三角形之中線。

415. **三角形之重心**　於紙板上剪一三角形。作此形之三中線。若求作準確。則三中線當相遇於一點。若置一針於此點之下以支三角形。則此形必各部平均。因此。三中線之交點。謂之三角形之重心。

416. **會合線**　設有三線。或有更多數之線。同過一點。則此諸線謂之會合線。

417. **定理**：三角形之三中線。會合於一點。此點在一角頂與其對邊中點聯線內。其距角頂。爲此線之三分二。

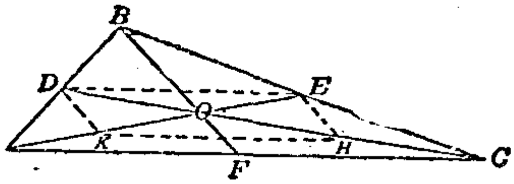
已知$\triangle ABC$.其中線爲AE, BF, CD.(第三百四十七圖)

證AE, BF, CD必會合,又

$AO=\frac{2}{3}AE$.

$BO=\frac{2}{3}BF$.

$CO=\frac{2}{3}CD$.



第三百四十七圖

證：AE必交CD於一點如O.若AE不交CD,則$AE \parallel CD$,又$\angle EAC+\angle DCA=180°$. 指明此爲必無之理.

作KH,聯K(卽AO之中點)至H(卽OC之中點).

作DE, DK, EH諸線.

則$DE \parallel AC$,又$DE=\frac{1}{2}AC$.(§168,習題2;又§159習題2)

依此, $KH \parallel AC$,又$KH=\frac{1}{2}AC$.

$\therefore KHED$爲平行四邊形.(§125)

$\therefore EO=OK=KA$.

又　　$DO=OH=HC$.

$\therefore AO=\frac{2}{3}AE$; 又$CO=\frac{2}{3}CD$.

依此可指明CD與BF遇於一點.此點與角頂之距離.爲由B至F又由C至D之三分二.故此點卽爲O.

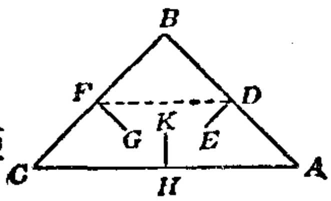
418. 三等分點. 三等分一線之兩點。爲三等分點。如此,三角形之中線之交點。爲各中線之一三等分點。

419. 定理： 三角形各邊之中點垂線。必會合於一點。此點與各角頂相距等。

已知三角形ABC.(第三百四十八圖)

DE, FG, HK,爲AB, BC, CA之中點垂線.

證DE, FG, HK,會合於與A, B, C,等距離之一點.



第三百四十八圖

證： 作 DF.

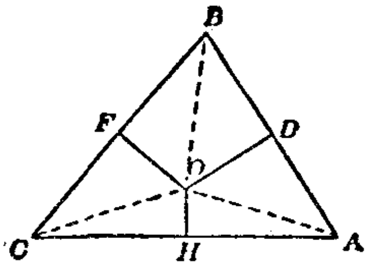
$$\angle EDB=90^\circ.$$

$$\angle GFB=90^\circ.$$

$\therefore \angle EDB+\angle GFB=180^\circ.$

$\therefore \angle EDF+\angle GFD<180^\circ.$ 何故?

$\therefore DE$ 與 FG 必交於一點,如 O.(第三百四十九圖)



第三百四十九圖

若 DE 不交 FG,則

$DE \parallel FG$,又

$\angle EDF+GFD=180^\circ.$

$OC=OB.$ 何故?

$OB=OA.$ 何故?

$\therefore OC=OA.$ 何故?

$\therefore HK$ 必經過 O.(因一線之中點垂線,為距此線兩端等遠之各點之軌跡.)

習　　題

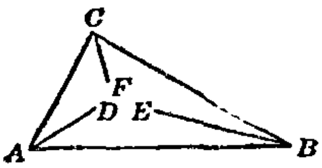
1. 指明第三百四十九圖之 O 點為三角形 ABC 之外接圓之中心。

2. 求作一圓,令外接於一三角形。

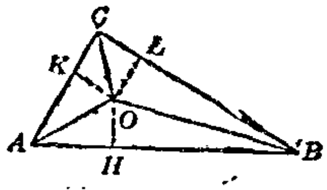
3. 求作一圓,令經過不同在一直線內之三點。

420. 外心. 三角形各邊中點垂線之交點,為三角形之外心.

421. 定理：三角形各角之平分線。必會合於一點。此點與各邊相距等。



第三百五十圖



第三百五十一圖

已知$\triangle ABC$如第三百五十圖，AD, BE, CF為$\angle A, B, C$，之平分線，

證AD, BE, CF會合於與AB, BC, CA等距離之一點。

證：指明AD與BE相交於O。(第三百五十一圖)

作　$OH \perp AB$,　$OK \perp AC$,　$OL \perp BC$.

則　$OH = OK$.　何故？

　　$OH = OL$.　何故？

$\therefore OK = OL$.　何故？

$\therefore CF$必經過O。何故？

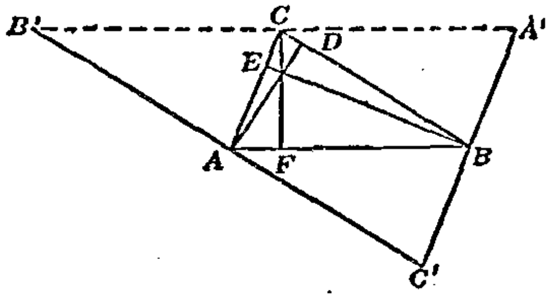
習　題

1. 指明第三百五十一圖之O點，為三角形ABC之內切圓之中心。

2. 試於三角形內求作一切圓。

422. 定理：三角形之三垂線。必會合於一點。

已知$\triangle ABC$如第三百五十二圖. $AD\perp BC$, $BE\perp AC$, 又$CF\perp AB$.



第三百五十二圖

證AD, BE, CF必會合.

證: 作$B'C'\perp AD$; $C'A'\perp BE$; 又$A'B'\perp CF$成$\triangle A'B'C'$.

則　$AB \parallel A'B'$,

　　$BC \parallel B'C'$,

又　$CA \parallel C'A'$.　何故?

指明$B'C=AB=CA'$.

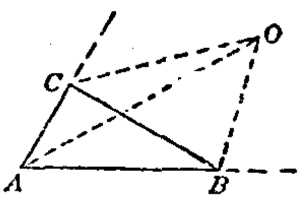
如此, CF為$A'B'$之中點垂線.

依此,指明AD為$B'C'$之中點垂線,又BE為$C'A'$之中點垂線.

$\therefore AD$, BE, CF必會合. 何故?

423. 垂心. 三角形三垂線之交點,謂之三角形之垂心。

424. 內心. 三角形三內角平分線之交點,謂之三角形之內心.



第三百五十三圖

習　　題

指明第三百五十三圖之內角A,與外角B及C之各平分線必會合.

425. 傍心. 三角形兩外角之平分線。與第三內角之平分線之交點,為三角形之傍心。

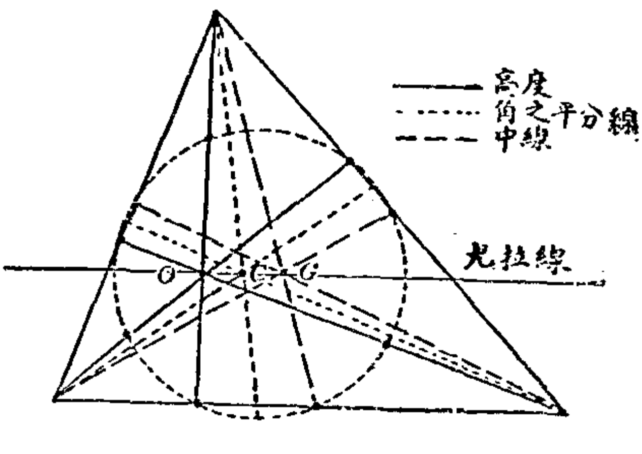
1. 傍心角可有若干?

2. 作一三角形。又求作四圓。令切於三邊。

3. 證外切於圓之四邊形。其各角之平分線。必遇於一點。

426. 史略. 古代之人。雖在歐几利得以前。皆知三角形之中線,垂線,角之平分線,及各邊之中點垂線諸定理。然不十分重視之。又常用內心,外心,垂心,及重心以求作各題。然亦未嘗有所理論。希臘數學家。完全支配此術。故至中古以後。凡歐氏所未論之定理。遂亦有人注意之。十八世紀之初元。則前此所忽略之題。開始有人研究之。1723 年有一題創立。題為求作一三角形。已知其重心 G, 內心 I, 及垂心 O 之各位置。惜無良好之結果。可供記述。

1765 年。尤拉 (Euler) (1707 年至 1783 年)嘗解此題。求得 O, G, I 之互相距離。又求得此三點與外心 C 之距離可以 a, b, c, 各邊表示之。尤氏謂 OCG (見圖) 為一直線。又 $GC=\frac{1}{2}GO$。以後,直線 OCG 遂名曰尤拉線。1821 年。潘思立 (Poncelet) 指明三角形各邊之中點,垂線之脚,及垂線之上段之中點,皆同在一圓周上。



1822年。費爾白 (Feuerbach) (1800年至1834年) 亦求得此圓。並指其中心M'平分CO線。又其半徑等於外接圓半徑之半$(=r/2)$。德人遂名此圓曰費爾白圓。然英國數學家名之曰九點圓。

費氏又指明此圓內切於內圓。外切於傍圓。又尤拉線之OG爲中心M'所分。成比例$2:1$。由費氏之時。以各種見地研究此項各點及性質者。頗不乏人。故能得許多良好數學智識之結果。費爾白圓。則初見於1834年喬珂別 (Jacobi) 所著之幾何學初義云。

提　　要

427. 本章授以下各名詞之意義:

軌跡。	三角形之重心。	外心。
擺線。	會合線。	內心。
橢圓。	三等分點。	傍心。
中線。		垂心。

428. 軌跡之證明含以下所指各條——

I. 在軌跡上之各點。滿足已知情狀。

II. (a)滿足此項情狀之各點。在軌跡上。或

(b)不在軌跡上之點。不能滿足此項情狀。

429. 本章所證之定理如下:

1. 設平面內有各點。距兩已知點等。則各點之軌跡。爲此兩點聯線之中點垂線。

2.　設平面內有各點。在一角內。距角之兩邊恆等。此各點之軌跡。爲角之平分線。

3.　平面內有各點。距一已知點有已知遠，此各點之軌跡爲圓。其中心爲已知點。其半徑等於已知遠。

4.　平面內有各點。距一已知線有已知遠。此各點之軌跡合兩線。各與已知線平行。又距已知線有已知遠。

5.　設空間中有各點。距圓周上各點恆等。則空間中各點之軌跡。爲一線，通過圓心。又垂於圓之平面。

6.　設空間中有各點。距兩已知點恆等。則各點之軌跡，爲一平面。此平面。平分兩已知點之聯線，又垂於聯線。

7.　二面角內有一點。距兩面各等。此點之軌跡，爲平分此角之平面。

8.　三角形之中線必會合於一點，

9.　三角形各邊之中點垂線必會合於一點。此點與各角頂相距等。

10.　三角形各角之平分線必會合於一點。此點與各邊相距等。

11.　三角形之三垂線必會合於一點。

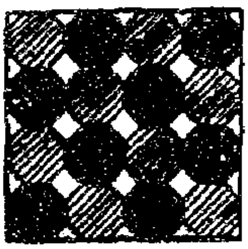
第十七章

內接 外切 圓周長度

正多邊形之求作法

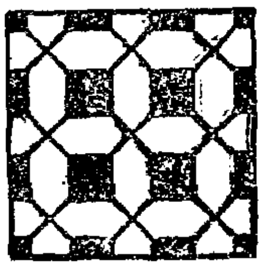
430. 正多邊形. 有等邊等角之多邊形。爲正多邊形。

431. 圖形中之正多邊形. 許多裝飾圖形之式樣。皆爲正多邊形。如方磚所鋪之地。(第三百五十四圖)裝

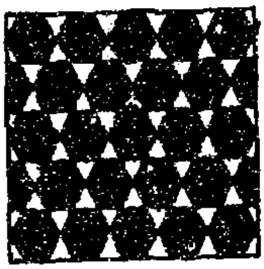


第三百五十四圖

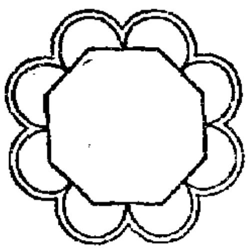
第三百五十五圖



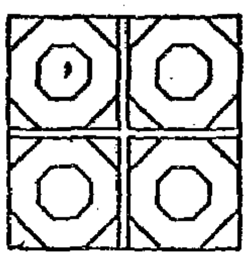
第三百五十六圖



第三百五十七圖



第三百五十八圖



第三百五十九圖

飾之窗牖。(第三百五十五圖)花式之樣物。(第三百五十六至三百五十七圖)紙製之小巾。(第三百五十八圖)天花板之面。(第三百五十九圖)地板之邊。以及各種器具圖形等。

指出第三百五十四圖至三百五十九圖中之正多邊形。

本章第一部之大旨。爲授正多邊形之求作法。

Carl Friedrich Gauss

哥　斯

(241 面之前)

哥斯小傳(Carl Friedrich Gauss)

哥斯。德國人。1777年四月三十日。生於德國之勃倫瑞潟。(Brunswick)1855年二月廿三日。卒於哥敦堅。(Göttingen)其父業泥水匠。不喜其子讀書。加以當時之學校。簡陋無足取。若為常人。必致輟學。然哥斯未嘗以此自障。故卒成著名之大數學家。

哥斯於計算術。精熟無倫。其師裴德爾。(Bartels)贊其才於縣主。縣主悅送其入學。而供給其費用焉。哥幼時。讀語言。成績之優。不亞於數學。年十九。發明作內接正十七邊形之法。由是益努力於數學。其性喜讀高等算學。1795年至1798年。肄業於哥敦堅。在學時。已有發明甚多。可見其數學之才。固度越常人也。1798年。返勃倫瑞潟故里。開堂講學。藉獲微利。

1799年。著述凡代數方程。必有一根。其式為$a+bi$。1801年。有高等算學一書出版。其後又研究天文學。發明求游星軌道之法。成天文學界第一流人物。

1807年。哥為哥敦堅之數學教授。及天文臺監督。從此不求他業。直至於死。其視事也。專心一致。自就斯職以後。從未離天文臺而寄宿焉。某日。因赴柏林之科學會議。不得不離其所司。然其破格。僅此一次而已。其教算學。則解釋詳明。又恐其徒聽講不專。故授課之時。不許同時作記錄。

哥斯之遺著。頗難領悟。以其詳於言而略於書也。其量地學,天文學,電氣學,磁氣學,流電學,數學,及重學之各種記載。皆為當時所發明。數學一科。則多賴哥氏之力。得改良其式。

自哥斯始。德國遂有複數之幾何學統論。及誤差之數學概論。今世所用複數之意。及以＝代相合。亦皆始自哥斯云。

習　　題

1. 指明等邊三角形爲正多邊形.

2. 作一四邊形,令其邊相等而角不等。此項四邊形之名爲何?

3. 作一等角四邊形。此項四邊形之名爲何?

4. 作一四邊形。其角不等。其邊亦不等。

5. 指明正方形爲正多邊形。

6. 作一正五邊形之圖;六邊形;又八邊形之圖。

432. 內接多邊形. 設有一多邊形。其諸角頂皆接於圓。則此形爲內接多邊形。此圓謂之外接於多邊形。

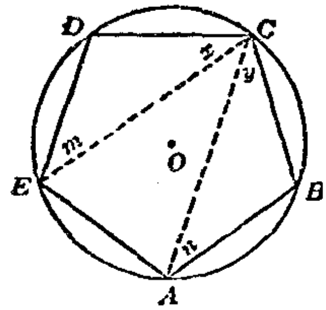
作一內接五邊形;六邊形。

433. 外切多邊形. 設有一多邊形。其諸邊皆切於圓。則此形爲外切多邊形。此圓謂之內切於多邊形。

作一外切多邊形。

434. §§ 435 與 437 中之定理、可用以證內接與外切多邊形皆爲正多邊形。此兩定理指明正內接與正外切多邊形之求作法。根據於分圓作諸等部之問題。

435. 定理: 若分一圓作諸等弧。則對弧之諸弦。成一正內接多邊形.



第三百六十圖

已知圓 O 分作等弧 $AB, BC, CD,$ 等如第三百六十圖,

對弧之諸弦成多邊形 $ABCD\ldots\ldots$

證 $ABCD\cdots\cdots$ 爲正內接多邊形.

證: I. 指明弦 $AB, BC, CD, \cdots$ 皆等.

II. 於三角形 ABC 與 EDC, 指明 $x=y$, $m=n$. (§ 298)

$\therefore \angle D=\angle B$. 何故?

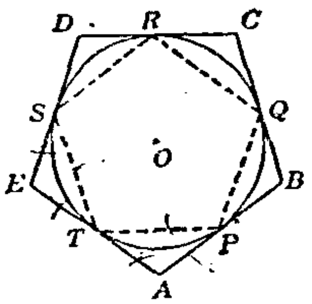
依此指明此多邊形之他角皆等.

故 $ABCD\cdots$ 爲正內接多邊形. 何故?

436. 定理: 一正內接多邊形有 n 邊。設對各邊之弧之中點與多邊形之隣角頂相聯。則成一有 $2n$ 邊之正內接多邊形。試證之。

437. 定理: 若分一圓作諸等弧。則從各分點所作之切線。互成一正外切多邊形。

已知圓 O.(第三百六十一圖)



第三百六十一圖

$\widehat{PQ}=\widehat{QR}=\widehat{RS}$ 等; AB, BC, CD 等切於圓 O, 成外切多邊形 $ABCD\cdots\cdots$

證 $ABCD\cdots\cdots$ 爲正多邊形.

證: 作 $PQ, QR, RS, \cdots\cdots$, 等

證 $\triangle PBQ, QCR, RDS$, 等爲相合等腰三角形.

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C$, 等.

因 $AP=BQ$, 何故?

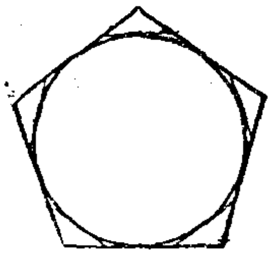
又 $PB=QC$, 何故?

$\therefore AB=BC$. 何故?

依此指明 $BC=CD=DE$, 等

故 $ABCD\cdots$ 爲正多邊形。

438. **定理：** 一圓內切於一正多邊形。若於其隣切點間諸弧之中點。作圓之切線。則所成之正外切多邊形。其邊數爲原形之兩倍。試證之。(見第三百六十二圖)



第三百六十三圖

習　　題

1. 證等邊之內接多邊形爲正多邊形。

指明圓可分作諸等弧，又用§435證之。

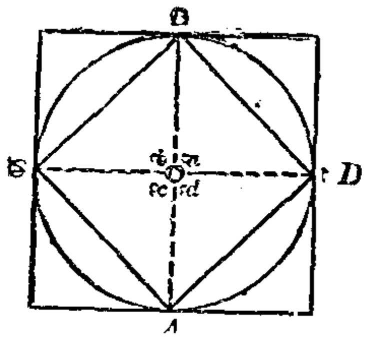
2. 證等角之外切多邊形爲正多邊形。

指明圓可分作諸等弧。又用§437證之。

439. **求作題：** 於已知圓內求作一內接正方形。

已知圓 O。(第三百六十三圖)

於圓 O 內，求作一內接正方形。



第三百六十三圖

解析： 因正方形爲正四邊形，故苟能分圓作四等弧，卽可作內接正方形。

一圓可分作四等弧，如分其中心四面之平面作四等角。

因 O 之四面之角，其和爲 $360°$，故四等角必各爲 $90°$。

試述求作四直角於 O 之法。

作法： 作直徑 AB。

作直徑 $CD \perp AB$。

作 AD, DB, BC,與 CA.

則 $ADBC$ 爲欲求之正方形.

證: $a=b=c=d=90°$. 何故?

$\therefore \widehat{AD}=\widehat{DB}=\widehat{BC}=\widehat{CA}$. 何故?

$\therefore$ $ADBC$ 爲正四邊形,卽正方形. 何故?

440. 求作題: 於已知圓外求作一外切正方形。

求作如§439.又作切線於 A, B, C,與 D.

習　　題

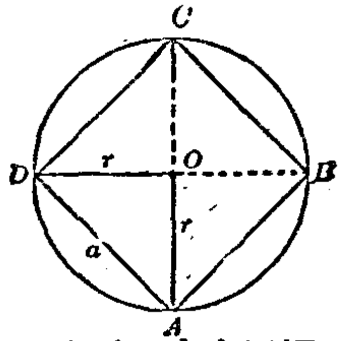
1. 以 a 代表內接正方形之邊。以 r 代表半徑。

證 $a=r\sqrt{2}$。

此題可以代數法或三角法解之:

(a)證此,可應用派達哥拉士氏定理於 $\triangle AOD$ 之邊.(第三百六十四圖)

(b)用45°之正弦以求應得之關係.



第三百六十四圖

注意方程 $a=r\sqrt{2}$ 表示內接正方形之邊與半徑正變之說。

指明 a 爲 r 之函數。

2. 外切正方形之邊 a。試以半徑 r 表示之。

3. 內接與外切正方形之周。試以半徑表示之。又以直徑表示之。

4. 指明正方形兩對角線之交點。爲內切圓與外接圓之中心。

5. 指明如何求作正 8 邊形; 16 邊形; 32 邊形等。

6. 指明習題 5 中各多邊形之邊數。常以公式 2^n 表示之。n 爲正整數。等於或大於 2。

441. 求作題: 於已知圓內。求作一內接正六邊形。

解析: 問圓當分作若干等弧?

截此諸弧之中心角各大若干?

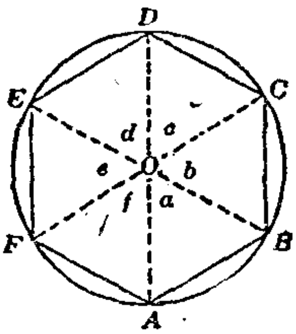
試述求作 90°角之簡法.

作法: 以 A 爲中心, AO 爲半徑,如第三百六十五圖作一弧 割圓於 B.

以 B 爲中心,半徑相同,作弧於 C.

依此,作弧於 D, E,與 F.

作多邊形 $ABCDEF$ 卽爲欲求之六邊形.



第三百六十五圖

證: 作 OA, OB, OC, 等

證 $a=b=c=d=e=f=60°$.

證 $\widehat{AB}=\widehat{BC}\cdots\cdots=\widehat{FA}$.

則多邊形 $ABCDEF$ 爲正六邊形明矣. 何故?

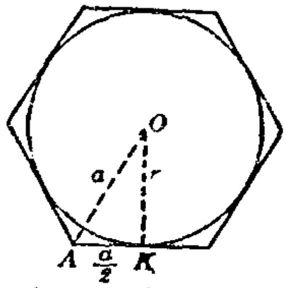
442. 求作題: 於已知圓外作一外切正六邊形.

習 題

1. 表示內接正六邊形之邊 a 與半徑 r 間之關係。

2. 外切正六邊形之邊.試以半徑表示之。

作OA與OK,如第三百六十六圖,



第三百六十六圖

指明三角形AOK爲60°–30°之直三角形.

如此,$AO=2\cdot AK=a$.

求a與r間之關係.

先用派達哥拉士氏定理;

次用30°之正切求之.

指明外切正六邊形之邊與半徑正變.

指明邊爲半徑之函數.

3.　作一內接等邊三角形,外切等邊三角形。又作內接與外切12邊形與24邊形等。

4.　指明習題3中各多邊形之邊數,表示於公式$3\cdot 2^n$中。n爲正整數或零。(2^0之值見下習題7)

5.　指明$\frac{a^5}{a^3}=a^2$;　$\frac{a^7}{a^3}=a^4$;　$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$;　m爲大於n,又m與n皆爲正整數,

6.　指明$\frac{a^2}{a^2}=1$;　$\frac{a^3}{a^3}=1$;　$\frac{a^m}{a^m}=1$.

7.　設$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$,又$m=n$;指明$\frac{a^m}{a^m}=a^0$

至今尙未得a^0式之界說。如欲習題6與7之結果相符。當界說a^0爲1。

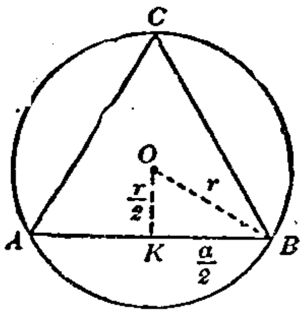
8.　述2^0, 3^0, x^0,$(a+b)^0$,$(2x-y+z)^0$之值。

9.　以半徑r表示內接等邊三角形之邊.

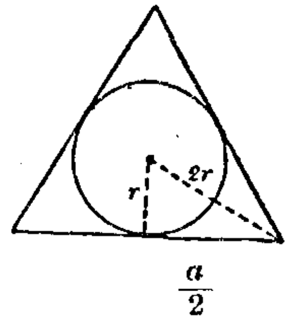
指明 OK (第三百六十七圖)爲 $\frac{r}{2}$ (見習題 2).

求應得之關係,先用派達哥拉士氏定理,次用 $60°$ 之正切.

用變數之語詞,表示所得之結果.



第三百六十七圖



第三百六十八圖

10. 指明外切等邊三角形之邊爲 $2r\sqrt{3}$。(第三百六十八圖)

(1)用派達哥拉士氏定理證之.

(2)用正切函數證之.

11. 以半徑 r,表示

(a)內接與外切正六邊形之周,

(b)內接與外切等邊三角形之周。

指明周與半徑正變.

443. 求作題: 於已知圓內作一內接正十邊形。

解析: 分圓作若干等弧?

截此諸弧之中心角各大若干?

作法: 36° 角之求作法,根據於分一線作中比與外比之題.(見 § 315,習題 8)

作半徑AO.(第三百六十九圖)

分AO作中比與外比於B,令

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{BA}.$$

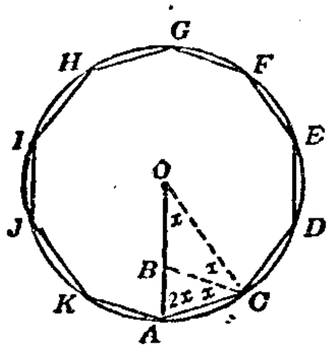
以A爲中心,OB爲半徑,作一弧於C.

用此同半徑,又中心C,作一弧於D.

依此,作弧於E, F, G, H, I, J, K.

作AC, CD, 等

多邊形$ACD\cdots\cdots K$爲欲求之形.



第三百六十九圖

證: 作BC與OC.

因$\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OB}{BA}$,

$\therefore \dfrac{OA}{AC}=\dfrac{AC}{BA}$. 何故?

即$\triangle BCA, AOC$中,此形之兩邊與彼形之兩邊成等比例.

指明夾角A同在兩形中.

$\therefore \triangle BCA \backsim \triangle AOC$. 何故?

$\therefore \dfrac{BC}{OA}=\dfrac{CA}{OC}$. 何故?

$\therefore OC\cdot BC=OA\cdot CA$. 何故?

$\therefore BC=CA$. 何故?

$\therefore BC=OB$. 何故?

以x代$\angle AOC$,指明$\angle OCB=x$,又$\angle BCA=x$.

因 $\angle OCA=\angle OAC$,所以 $\angle OAC=2x$.

$\therefore\ 2x+2x+x=180°$. 何故?

$\therefore\qquad x=36°$.

指明多邊形 $ACD\cdots\cdots K$ 爲正十邊形.

習　　題

1. 於圓外求作一外切正十邊形。

2. 指明於已知圓如何可作內接與外切正五邊形。

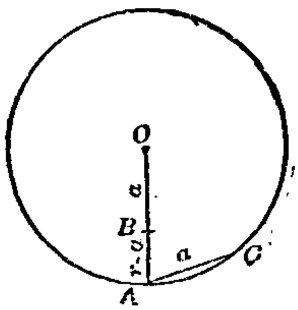
3. 作內接與外切正多邊形。設邊數爲20,40,等。

4. 指明習題3中各多邊形之邊數。可以公式 $5\cdot 2^n$ 代表之。但 n 爲正整數或零。

5. 表示內接十邊形之邊與圓半徑之關係。

以 a 代表 $AC=OB$(第三百七十圖)

又以 r 代表 OA, 則 $BA=r-a$.



第三百七十圖

指明 $\dfrac{r}{a}=\dfrac{a}{r-a}$.

$\therefore\qquad a^2=r^2-ra$.

$\therefore\quad a^2+ra-r^2=0$.

以二次方程公式解之,

$$a=\frac{-r\pm\sqrt{r^2+4r^2}}{2}.$$

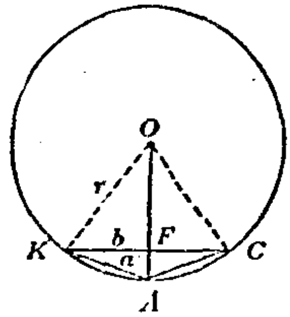
$$a=\frac{-r\pm r\sqrt{5}}{2}=\frac{r}{2}(-1\pm\sqrt{5}).$$

指明根數以前之減號不能用於此題.

$\therefore\ a=\dfrac{r}{2}(\sqrt{5}-1)=\dfrac{r}{2}(1.236)=.618r.$

16. 指明內接正五邊形之邊等於$\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

設KC(第三百七十一圖)爲五邊形之邊,KA與AC爲十邊形之邊.



第三百七十一圖

以b代KF,以r代OK,以a代KA,

則$\overline{OF}^2=r^2-b^2$又$OF=\sqrt{r^2-b^2}$. 何故?

$$\therefore FA=r-\sqrt{r^2-b^2}.$$

$$\text{因 } KF^2=\overline{KA}^2-\overline{FA}^2,$$

$$b^2=a^2-(r-\sqrt{r^2-b^2})^2. \text{ 何故?}$$

將a^2代以等數$\frac{r^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2$(習題5)又解$b$,即得

$$b=\frac{r}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

$$\therefore 2b=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

17. 指明$\sqrt{10-2\sqrt{5}}$之略值爲2.351+.

8. 用正弦函數求內接正五邊形之邊;又十邊形之邊。注意三角法較習題5與6中所用之代數法爲便利。

9. 某人欲將一圓桌面改作五邊形,能最大則最好。設桌面之直徑爲$2\frac{1}{2}$呎,問應割之長度爲若干?

444. 求作題: 於已知圓內求作一內接正十五邊形。

解析: 此圓當分作十五等弧,截此諸弧之中心角各大若干?

注意: $24°=60°-36°$.

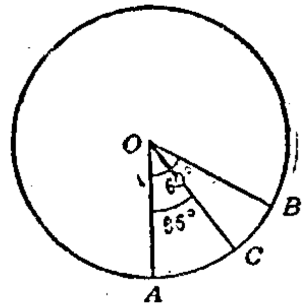
此示下之求作法:

作法: 在 OA 上求作一 $60°$ 角於 O.(第三百七十二圖)

在 OA 上求作一 $36°$角於 O 如 $\angle AOC$.

則 $\angle COB=24°$.

$\therefore CB$ 爲內接正十五邊形之邊.



第三百七十二圖

習 題

1. 指明如何求作正內接與外切多邊形。其邊數爲 30, 60, 120。

‡*2.* 指明習題 1 中各多邊形之邊數。可以公式 $15\cdot2^n$ 表示之。n 爲正整數或零。†

‡*3* 下爲求作正十邊形與五邊形之實用法:

作法: 作直徑 AB.(第三百七十三圖)

作 $OC\perp AB$.

---

† 德國數學家哥斯。(Gauss) (1777 至 1855 年) 嘗證設用一無表記之直尺及一規。可分一圓作(2^k+1)等部。k 爲可使 2^k+1 成質數之數。

以 n 代 2^k+1,則得下理.

設 $k=1$, $n=3$, 爲質數

設 $k=2$, $n=5$, 爲質數

設 $k=3$, $n=9$, 非質數

設 $k=4$, $n=17$, 爲質數

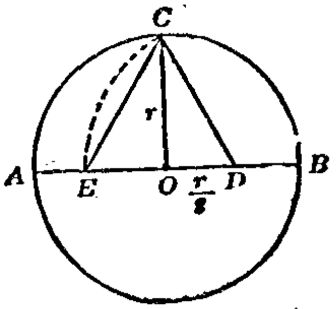
設 $k=5$, $n=33$, 非質數

平分OB於D.

用D爲中心,DC爲半徑,作CE弧.

作直線CE.

三角形EOC之各邊,等於正六邊形,五邊形及十邊形之邊.



第三百七十三圖

證: I.　$CO=r$又等於內接正六邊形之邊.

II.　$\overline{CD}^2=r^2+\frac{r^2}{4}$.

$$\therefore CD=\frac{r}{2}\sqrt{5}.$$

$$EO=ED-OD=CD-OD=\frac{r}{2}\sqrt{5}-\frac{r}{2}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$$

如此,EO爲十邊形之邊.

(見§443,習題5.)

III.　$\overline{EC}^2=r^2+\overline{EO}^2=r^2+\frac{r^2}{4}(6-2\sqrt{5})=\frac{4r^2+6r^2-2r^2\sqrt{5}}{4}$.

$EC=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,卽五邊形之邊.

(見§443,習題6)

4.　求內接於圓之十邊形之邊,設圓之半徑爲8; 10; 15; a.

†5.　一內接五邊形之邊爲18.8吋.試求外切圓之半徑.

6.　一內接十邊形之邊爲14.83吋.試求外切圓之半徑.

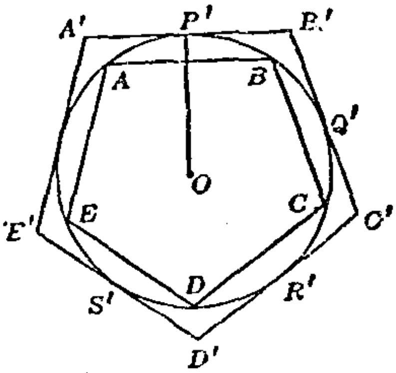
†7.　圓內有一已知正多邊形。若從對各邊之弧之中點作切線.則所作之切線與各邊平行。且成一外切正多邊形。試證之。

證 $AB \parallel A'B'$.(第三百七十四圖)

作半徑 OP' 至 $A'B'$ 之切點.

指明 AB 與 $A'B'$ 皆垂於 OP'.

證 $A'B'C'D'E'$ 爲正多邊形,當先指明 $\widehat{P'Q'} = \widehat{Q'R'} = \widehat{R'S'}$,等.



第三百七十四圖

8. 於第三百七十四圖。證 O, B, 與 B' 諸點同在一直線內。

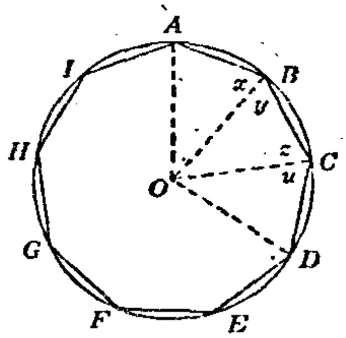
證 B 與 B' 在 $\angle P'OQ'$ 之平分線內。

9. 試編習題 8 爲定理。

445. 定理: 於任一已知正多邊形外。可作一外接圓。

已知正多邊形 $ABCD\cdots\cdots$,(第三百七十五圖)

求作一圓令外接於 $ABCD\cdots\cdots$



第三百七十五圖

作法: 求作一圓令經過 A, B,與 C. 此即爲欲求之圓.

證: 證 ABC 圓經過 D, E,等.

$x+y=z+u$. 何故?

$y=z$. 何故?

$\therefore x=u$. 何故?

證 $\triangle AOB \cong \triangle COD$.

$\therefore AO = OD$ 又此圓經過 D.

依此,可指明此圓經過 E, F,等.

446. 定理：於任一已知正多邊形內。可作一內切圓。

已知正多邊形 $ABC\cdots$,(第三百七十六圖)

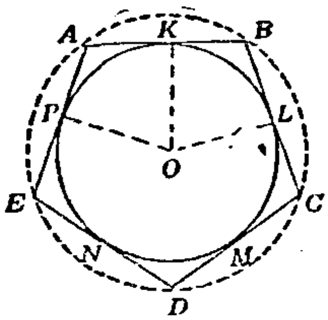
於 $ABC\cdots\cdots$ 內作一內切圓.

作法：求作外接圓之中心 O.

作 $OK\perp AB$.

以 O 爲中心,OK 爲半徑,作 $KLM\cdots$ 圓.

此爲欲求之圓.



第三百七十六圖

證：作外接圓 $ABC\cdots$

作 $OP\perp AE$.

因 AB 弦 $=AE$ 弦,所以 $OK=OP$. 何故?

如此 KLM 圓經過 P. 何故?

$\therefore AE$ 切於此圓.

依此指明 ED,DC,等皆切於 $KLM\cdots$ 圓.

447. 定理：一內接正 $2n$ 邊形之周。大於同圓內之正 n 邊形之周。

448. 定理：一外切正 $2n$ 邊形之周。小於同圓外之正 n 邊形之周。

449. §§ 447 與 448 中兩定理。指明以下兩事。

1. 一內接正多邊形之周增加。如其邊數增加。

2. 一外切正多邊形之周減少。如其邊數增加。

圓周之長度

450. 設增加內接與外切正多邊形之邊數。則其周互

相接近。而表示兩周之小數逐漸符合。又設邊數愈增。則其周愈接近。相同之小數位亦愈多。

證圓周長度大於任一內接多邊形之周。其法甚易。今設圓周長度小於任一外切多邊形之周。

則圓周長度。在任一內接多邊形之周與任一外切多邊形之周之間。

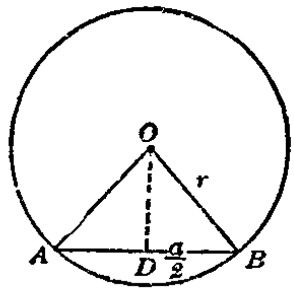
圓周之長度。可用三角法求得之。其法甚簡。

設 AB 爲一內接正 n 邊形之邊.(第三百七十七圖)

作 $OD\perp AB$.

指明 $\angle DOB=\left(\frac{360}{2n}\right)^\circ$.

指明 $sin\left(\frac{360}{2n}\right)^\circ=\frac{\frac{a}{2}}{r}$, a 表示多邊形之邊, r 表示外接圓之半徑.



第三百七十七圖

如此, $a = sin\left(\frac{360}{2n}\right)^\circ d$. 何故?

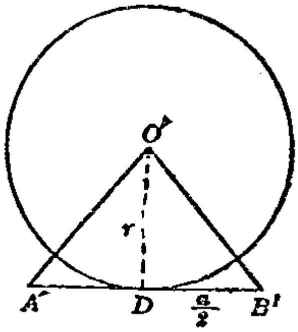
$\therefore$ 周 $p=n\left[sin\left(\frac{360}{2n}\right)^\circ\right]l$. 何故?....(A)

從三百七十八圖,指明外切多邊形之周 P, 爲

$P=n\left[tan\left(\frac{360}{2n}\right)^\circ\right]d$ ....(B)

用公式 (A) 與(B)。可計算內接與外切多邊形之周。並可測圓周之略值。

照公式試計算各多邊形之周。並將所得之結果。與表中所列者比較之。



第三百七十八圖

邊數	內接多邊形之周	圓周長度 l	外切多邊形之周
3	2.5980 .... ·d	$2.5d<l<5.2d$	5.1963 ...... ·d
4	2.8284 .... ·d	$2.8d<l<4.0d$	4.0000 ...... ·d
5	2.9390 .... ·d	$2.9d<l<3.7d$	3.6325 ...... ·d
6	3.0000 .... ·d	$3.0d<l<3.5d$	3.4644 ...... ·d
7	3.0359 .... ·d	$3.0d<l<3.4d$	3.3691 ...... ·d
8	3.0614 .... ·d	$3.0d<l<3.4d$	3.3137 ...... ·d
12	3.1058 .... ·d	$3.1d<l<3.3d$	3.2153 ...... ·d
18	3.1248 ...... ·d	$l=3.1d$,(約略數)	3.1734 ...... ·d
90	3.1410 .... ·d	$l=3.141d$,(約略數)	3.141........ ·d

上列之表。指示表兩周之小數。如何因多邊形邊數之增加。遂逐漸相符。

下表所列小數至六位止。故指示兩周之接近。更爲顯明。

P_4* $=4.000000$ ...... ·d p_4* $=2.828427$ ...... ·d

$P_6=3.464121$ ...... ·d $p_6=3.000000$ ...... ·d

$P_8=3.313708$ ...... ·d $p_8=3.061467$ ...... ·d

$P_{12}=3.215390$ ...... ·d $p_{12}=3.105828$ ...... ·d

$P_{16}=3.182598$ ...... ·d $p_{16}=3.121445$ ...... ·d

$P_{24}=3.159659$ ...... ·d $p_{24}=3.132623$ ...... ·d

$P_{32}=3.151725$ ...... ·d $p_{32}=3.136548$ ...... ·d

※附註之小字,表示多邊形之邊數。

$P_{48}=3.146086\ldots\ldots\cdot d$ $p_{48}=3.139350\ldots\ldots\cdot d$

$P_{64}=3.144118\ldots\ldots\cdot d$ $p_{64}=3.140331\ldots\ldots\cdot d$

$P_{96}=3.142714\ldots\ldots\cdot d$ $p_{96}=3.141032\ldots\ldots\cdot d$

$P_{128}=3.142224\ldots\ldots\cdot d$ $p_{128}=3.141277\ldots\ldots\cdot d$

$P_{192}=3.141873\ldots\ldots\cdot d$ $p_{192}=3.141452\ldots\ldots\cdot d$

$P_{256}=3.141750\ldots\ldots\cdot d$ $p_{256}=3.141514\ldots\ldots\cdot d$

$P_{348}=3.141662\ldots\ldots\cdot d$ $p_{348}=3.141557\ldots\ldots\cdot d$

最後之兩周。有小數三位相符。故有直徑 d 之圓，其周之長在此兩周之間。其數值當求至小數三位時。等於$3\cdot141\cdots d$。

因內接與外切多邊形之邊數增加時。其周之長度互相接近。故二者與圓周之長度。亦逐漸接近，然一多邊形之周之長度與圓周之長度。無論如何接近。必尚有一他多邊形之周與圓周之長度更爲接近。又無論以何數表示一周與圓周之較。必尚可求一他多邊形。其周與圓周之較。小於此數。故內接與外切多邊形之周。接近於圓。以圓爲極限。

設多邊形之邊數愈增加。則此極限愈接近，已詳見上表。然此極限。不能切實測定之。

若繼續增加邊數，則由表中求得

$P_{8192}=3.1415928\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot d.$

$p_{8192}=3.1415926\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot d.$

由此。可見圓之在 P_{8192} 與 p_{8192} 之間者。可以 $C=3.141592\cdots d$ 表示之。其謬誤僅爲百萬分之一。

故圓周之長度。爲其直徑之倍數。然此數不能用切實之數字表示。又乘 d 之數 3.141592……,常用 π 代表之。

(π 爲 περιφέρεια 之第一字母。此字之意爲圓周。)

故 $C=\pi d$,

又 $C=2\pi r$

爲圓周之公式而用直徑與半徑所表示者。通常之用。可作 $\pi=3.14$ 或 $\pi=\frac{22}{7}$.此值當求至小數兩位時。亦等於 3.14。

451. 史略: π 之性質及其數值之測定。爲一著名之幾何題。

亞米斯(Ahmes)定 $\pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2$,

亞奇米德(紀元前212至287年)求得 π 之值爲

$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{10}{70}$,其法爲先求 P_{96} 與 p_{96} 之值。

都利默(Ptolemy)(紀元後150年)計算得 $\pi=3+\frac{8}{60}+\frac{8}{60^2}=3.14166$。

十六世紀之末。偉熱他(Vieta)(紀元後1579年)求 π 之值至小數十位。又柯倫(Ludolph van Ceulen)(1540年至1610年)求 π 之值至小數20位,32位,35位。其後此值竟求至小數700位之多。30位之值爲 3.141592653589793238462643383279+

(見第十一版大英百科全書中"圓"欄。)

藍褒(Lambert)(1728至1777年)指 π 不能以整數切實表示之,故爲無理數。

凌𠐊蔓(Lindemann) (1882年)證π屬於超越數,此種數目、不能以有理係數滿足任一代數方程式。

習 題

1. 一圓周之長度爲100吋。求其半徑。

2. 指明兩圓周之比等於兩半徑之比,或兩直徑之比。

3. 加里福尼亞有一大樹。其周圍約爲100呎。求其直徑。

4. 有一機器之節動輪,其半徑爲 9 呎,若此輪每一分時旋40轉。問其外邊上一點。每一分時行幾呎?

5. 用一線繫某人之頭。量之得$22\frac{3}{4}$吋。若其帽之大小。以等於此長度之圓之直徑爲準。問其帽爲幾吋?

6. 學生試量己頭。計算應用之帽之大小。

7. 某馬戲班藝員。乘一高輪自由車。若縱輪每一旋轉。車行62.8呎,問輪高若干?

8. 一圓形之池,其周爲2640.1碼,求其直徑。

452. 史略. 自有數學歷史以來,正多邊形卽用於裝飾品上。十八世紀以前。希臘人僅知分圓作四等部所得之正多邊形。卽正方形。八邊形等。然當時十二邊形已見於亞洲屬民進貢至埃及國王之物品上。自十九世紀伊始。六輻之車輪。卽見於壁上之凸景。但鮮有四輻或八輻者。圓之六倍分之學識,由巴比倫傳入埃及。然不知始於何日。加爾其亞人,則有用六及六之倍數之偏好。

希臘人改良正多邊形之學識。又派達哥拉士氏學徒再

從事於埃及人與巴比倫人之學。而以根原之考究。遂得擴充其說。彼等曾教如何計算諸 n 邊形之中心角。又嘗用正凹五角形(五角星)爲祕密之記號。且已曾研究五邊形。然未知能否求作此形也。當游道射士之時。(紀元前408至355年)凡分一線作中比與外比。則希臘數學家恆執牛耳。正十邊形之求作法根據於此。

古巴比倫人。先知內接正六邊形之邊。等於圓之半徑。郝波克萊氏。(紀元前440年)述此性質爲一著名之定理。常用之正多邊形邊數計算法。則明於海倫之時。(紀元前第一世紀)

安得福(Antipho)(紀元前430年)開始用內接正多邊形以求圓之面積及長度。勃立沙(Bryso)生於安得福同時。改良安氏之法。亞奇米德則大加擴充之。亞氏有一法。藉之可從 n 邊形計算 $2n$ 邊形之邊。又藉正多邊形。遂得限 π 於 $3\frac{1}{7}$ 與 $3\frac{10}{71}$ 之間。

亞奇米德以後。直至十三世紀。正多邊形之學理。未見有改良之處。鈕慕蘭利司(Jordanus Nemorarius)(紀元後1237)異於後代學者之所爲。未嘗藉正多邊形以配圓之方。然嘗求內接與外切正 n 邊形與 $2n$ 邊形之周與面積間之關係。

提　　要

453. 本章授以下名詞之意義:

正多邊形。外切多邊形。內接多邊形。

454. 下定理可用以證內接或外切多邊形皆爲正邊形：

1. 若分一圓作諸等弧。則對弧之諸弦成一正內接多邊形。

2. 一正內接多邊形有 n 邊。若對各邊之弧之中點與多邊形之隣角頂相聯。則成一有 $2n$ 邊之正內接多邊形。

3. 若分一圓作諸等弧。則從各分點所作之切線。互成一外切正多邊形。

4. 一圓內切於一正多邊形。若於其隣切點間諸弧之中點。作圓之切線。則所成之正外切多邊形。其邊數爲原形之兩倍。

455. 此章所證之定理爲：

1. 圓內有一已知正多邊形。若從對各邊之弧之中點作切線。則所作之切線與各邊平行。且成一外切正多邊形。

2. 於任一已知正多邊形外。可作一外接圓。

3. 於任一已知正多邊形內。可作一內切圓。

4. 一內接正 $2n$ 邊形之周。大於同圓內之正 n 邊形之周。

5. 一外切正 $2n$ 邊形之周。小於同圓外之正 n 邊形之周。

456. 此章授求作以下之內接或外切多邊形之法：

正方形，六邊形，十邊形，十五邊形.

欲作其他之內接與外切正多邊形。可分圓之弧作兩或兩以上之等部。又用直線相繼聯圓之各分點。

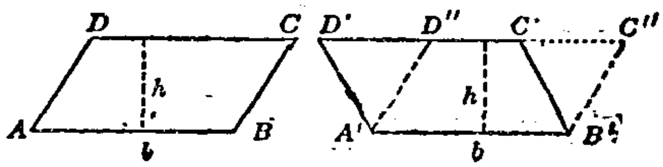
457. 一內接或外切正多邊形之邊與周。可用圓之半徑表示之。邊及周與半徑正變。

458. 圓之長度。可用下公式表示之。

$C=\pi d$, 或 $C=2\pi r$.

第十八章
面積 字母方程 劈因數
面積之比較

459. 定理: 等底及等高之平行四邊形必相等。*



第三百七十九圖

已知平行四邊形 $ABCD$ 及 $A'B'C'D'$.(第三百七十九圖)此兩形之高 h 及底 b 皆相等.

證 $ABCD=A'B'C'D'$.

證: 設想 $ABCD$ 置於 $A'B'C'D'$ 之上,而 AB 與 $A'B'$ 密合.此事如何可行?

則 DC 與 $D'C'$ 必落在同一線內.(因兩形之高相等.)

證 $\triangle D'D''A' \cong \triangle C'C''B'$.(邊.角.邊.)

然 $\underline{D'A'B'C'' \equiv D'A'B'C''}$.

$\therefore A'B'C''D''=A'B'C'D'$.

(等數減等數得數相等)

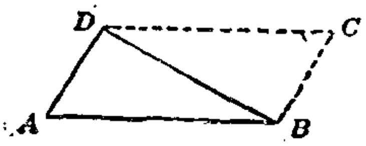
$\therefore ABCD=A'B'C'D'$. 何故?

460. 定理: 平行四邊形等於同底同高之長方形。

用 § 459 中定理證之.

※ 此處之相等,謂面積相等也,或作同面積解亦可。

461. 定理： 三角形等於同底同高之平行四邊形之半。

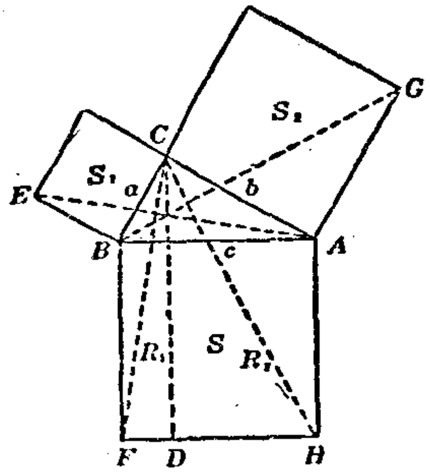


第三百八十圖

用定理「平行四邊形爲其對角線分作兩相合三角形」證之.(第三百八十圖.)

462. 派達哥拉士氏定理： 凡直三角形。句方股方之和。等於弦方。

設 ABC(第三百八十一圖)爲直三角形,而 C 爲直角.又設 S_1,S_2,與 S,代表 a,b,與 c 上之正方形.



第三百八十一圖

證　$S=S_1+S_2$.

證： 作 $CD\perp AB$,分 S 作長方形 R_1 與 R_2.

作 AE 與 CF.

指明三角形 EBA 與正方形 S_1 有等底及等高.

故三角形 $EBA=\frac{1}{2}S_1$.　　何故?　　(1)

依此指明

三角形 $FBC=\frac{1}{2}R_1$.　　(2)

然　$\triangle ABE=\triangle FBC$.　　(3)

因　$EB=BC$,　　何故?

$AB=BF$,　　何故?

又　$\angle ABE=\angle FBC$ 也.何故?

從(1),(2),(3),得 $\frac{1}{2}S_1=\frac{1}{2}R_1$,

故 $$S_1=R_1. \qquad (4)$$

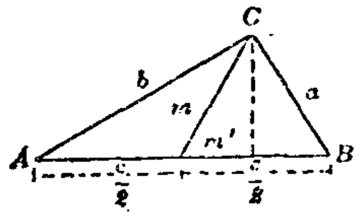
依此作 BG 與 CH,又證 $S_2=R_2$.

故 $$S=S_1+S_2.$$

463. 定理: 三角形兩邊上正方形之和。等於第三邊半邊上正方形之兩倍加第三邊中線上正方形之兩倍。*

已知 $\triangle ABC$ 之 c 邊上有中線 m.

(第三百八十二圖)



第三百八十二圖

證 $a^2+b^2=2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2m^2$.

證: $a^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2-2\left(\frac{c}{2}\right)m'$, §240

$b^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2+2\left(\frac{c}{2}\right)m'$, §241

$\therefore a^2+b^2=2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2m^2$. 何故?

函一個未知數之字母方程習題

1. 指明三角形一邊中線之長度。可藉下公式以他邊表示之。公式爲:

$$m_c=\sqrt{\frac{a^2+b^2-2\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

※擘派司(Pappus)加此定理於初等幾何學。擘氏於紀元後第三世紀之末。授徒於阿來渴瑚特立亞(Alexandria)。

藉此定理。可求三角形之中線。設各邊之長度爲已知。

2. 試求m_c,設 a, b, c, 爲

(1) 6, 10, 8. ‡(2) 5, 13, 12. ‡(3) 9, 15, 12.

3. 試將m_a以三角形ABC之邊a, b, 與 c 表示之.

解下方程,求 x 或 y:

4. $ax-bx=a-b$.

聯合 x 項,得$(a-b)x=a-b$.

兩端各除以$a-b$,則$x=1$.

5. $x^2-c^2=3c^2-2x+x^2$.

6. $x^3-2ax+c=a+3ax+x^3$.

7. $a^2+ax+cx-ac=0$.

8. $-3rx+2cm=-3cx+2rm$.

9. $-b^2x+a^2x=-a+b$.

10. $cx+ax=a^2+c^2+2ac$.

11. $3x-ax=a^2+9-6a$.

12. $s^2x+r^2x-2rsx=r^2-s^2$.

13. $(m+n)x+(m-n)x=2m^2$.

14. $-9(y-a)+6(2y+a)=-2(y+a)$.

‡15. $m(my+n)+n^2=n(my+n)+m^2$.

‡16. $p(x-p)+2pq=(x+q)q$.

17. $\frac{x}{a}+3=\frac{1}{2a}$.

18. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{1}{ab}$.

19. $-\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{-b^2+a^2}{ab}$.

‡20. $\frac{x}{4b}+\frac{-x}{3b}=\frac{6a-8b}{12ab}$.

‡21. $\frac{x}{a}-x=1+\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}$.

22. $\frac{-a+b}{x}+\frac{-a-b}{x}=-a$.

23. $\frac{x}{c}-x=-c+\frac{1}{c}$.

24. $\frac{2x-b}{6x+s}=\frac{x-2s}{3x+b}$.

‡25. $\frac{2x-a}{c}-\frac{x-a}{d}=\frac{a}{c}$.

26. $\frac{cx-d}{dx}+\frac{dx-c}{cx}=2+\frac{c-d}{cdx}$.

‡27. $-\frac{2x+a}{c}-\frac{-x-a}{d}=+\frac{a}{c}$.

‡28. $\frac{x^2-d}{cx}+\frac{d+x}{c}=\frac{2x}{c}-\frac{d}{x}$.

29. $\frac{m}{x-m}=\frac{n}{x-n}$.

‡30. $\frac{x+m}{x-n}=\frac{m+n}{m-n}$.

有字母係數而含兩個未知數之一次方程系

464. 求 x 與 y:

$$\begin{cases} a^2x+b^2y=a+b & (1)\\ abx-aby=b-a & (2)\end{cases}$$

$a\times(1)$, $\quad a^3x+ab^2y=a^2+ab$. $\quad$ (3)

$b\times(2)$, $\quad ab^2x-ab^2y=b^2-ab$. $\quad$ (4)

(加法公理) $(a+ab^2)x=a^2+b^2$. $\quad$ (5)

$$\therefore\ x=\frac{a^2+b^2}{a^3+ab^2}=\frac{a^2+b^2}{a(a^2+b^2)}=\frac{1}{a}.$$

求 y 之值,其法爲先從方程(1)與(2)消去 x 項;後以 $x=\frac{1}{a}$ 代入於方程(2).又覆證所得之結果.

習 題

解以下各方程並覆證之:

1. $\begin{cases} x+y=1 \\ ax+by=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} cx+ny=1 \\ ax-by=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} ax+by=h \\ bx+ay=k. \end{cases}$

4. $\begin{cases} cx+dy=2cd \\ bx-cy=d-c. \end{cases}$

5. $\begin{cases} ax+by=2ab \\ 2bx+3ay=2b^2+3a^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n} \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{k}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c. \\ \frac{d}{x}+\frac{c}{y}=f. \end{cases}$

‡9. $\begin{cases} \frac{m}{x}+\frac{n}{y}=k \\ \frac{n}{x}+\frac{m}{y}=h. \end{cases}$

三角形之面積

465. 因直線所成之各種平面圖形。皆可分作諸三角形。故必須求一公式。俾僅藉已知之各部。可計算三角形之面積。而其他各形。皆可用三角形量之。下公式以底與高表示三角形之面積。

定理： 三角形之面積。等於高乘底之半。(§56)

$$\triangle ABC=\tfrac{1}{2}b\cdot h$$

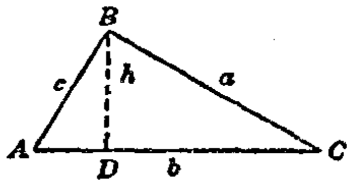
466. 三角形之面積。可以兩邊及其中間之夾角表示之。因從第三百八十三圖知 $\triangle ABC=\frac{1}{2}b\cdot h$

但 $$\sin A=\frac{h}{c},$$

所以 $$h=c\sin A$$

以代換法得 $$\triangle ABC=\tfrac{1}{2}bc\sin A.$$

此可編作定理如下:



第三百八十三圖

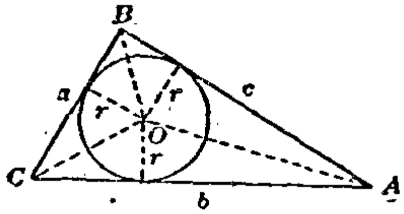
定理: 三角形之面積。等於兩邊與其夾角正弦連乘積之半。

習題

指明有 a 邊之等邊三角形。其面積等於 $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$。

指明有 a 邊之正六邊形。其面積爲 $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$。

467. 內接於圓。或外切於圓之三角形。常有所遇。此項三角形之面積。可以各邊與圓之半徑表示之如下:



第三百八十四圖

設 O,(第三百八十四圖)爲內切圓之中心。

作 OA, OB, OC,分三角形 ABC 作三個三角形。其和爲 $\triangle ABC$。

指明 $$\triangle COA=\tfrac{1}{2}r\cdot b,$$
$$\triangle AOB=\tfrac{1}{2}r\cdot c,$$
$$\triangle BOC=\tfrac{1}{2}r\cdot a,$$

$$\therefore\quad \triangle ABC=\tfrac{1}{2}r(a+b+c).$$

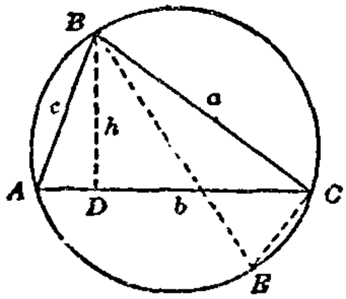
故三角形之面積。等於其半周與內切圓半徑之乘積。

普通常以 S 代表 $\frac{1}{2}(a+b+c)$.

故 $\triangle ABC = rs$.

468. 定理: 三角形之面積。等於三邊之乘積除以外接圓半徑之四倍。

因,設 ABC (第三百八十五圖)為內接三角形.



第三百八十五圖

作直徑 BE.

作 EC.

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} b \cdot h.$$

指明 $\triangle BDA \backsim \triangle BCE$,

故 $\dfrac{h}{a} = \dfrac{c}{2r}$, 何故?

$$\therefore \quad h = \frac{ac}{2r}.$$

以代換法得 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \dfrac{ac}{2r}$,

或, $\triangle ABC = \dfrac{abc}{4r}$.

習　　題

1. 三角形之三邊為 14, 8, 與 12。其外接圓之直徑為 14.1。求三角形之面積。

2. 以 T 表示三角形之面積,則 $T = \dfrac{abc}{4r}$. 解此方程求 r. 又以含 T 之項表示外接於三角形之圓半徑,設此三角形之邊為 17, 10, 與 9; 8, 8, 與 8; 15, 20, 與 25.

3. 若三角形之面積爲$\frac{1}{2}bh$與$\frac{abc}{2d}$。d爲外接圓之直徑。從此兩公式。試再求一公式。將 b 邊上之垂線。以其他兩邊及直徑表示之。

4. 三角形之邊爲12,10,與 8。其面積爲39·7。求外接圓之直徑。

5. 直三角形各角之比爲1:2:3。設弦上之垂線爲 6 呎。試求面積。

†6. 海倫(紀元前第一世紀)述等邊三角形之高與面積爲 $h=a\left(1-\frac{1}{10}-\frac{1}{30}\right)$。又 $A=a^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)$。*

計算海倫式之誤差。

469. 三角形之面積。可僅用三邊表示之如下:

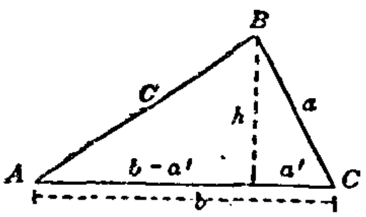
定理: 三角形之面積。若以其邊表示之。則爲

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

已知三角形 ABC,(第三百八十六圖)其邊爲 a, b, c.

證三角形 ABC 之面積等於

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$



第三百八十六圖

證: 面積 $ABC=\frac{1}{2}b\cdot h$. (1)

此係以一邊及其高 h,表示面積.但 h 爲未知數.故設以各邊表示 h,而代 h 於方程(1).

※ h(height)爲高之縮寫。A(area)爲面積之縮寫。

則 $h^2=c^2-(b-a')^2$. 何故? (2)

$h^2=a^2-a'^2$. 何故? (3)

次當消去 a',以其非三邊之一.

用比較法得 $c^2-(b-a')^2=a^2-a'^2$. (4)

故 $c^2-a^2-b^2+2ba'=0$. (5)

解之得 $a'=\dfrac{b^2-c^2+a^2}{2b}$. (6)

以(6)中所求得 a' 之值,代入於(3),卽得

$$h^2=a^2-\left(\frac{b^2-c^2+a^2}{2b}\right)^2. \quad (7)$$

方程(7)係以邊 a, b, 與 c 表示 h^2.

若將 h 之值代入於方程(1),則可得一公式,以 a, b, 與 c 表示 ABC 之面積.欲得更相稱之結果,則當先改(7)中 h^2 值之式,然後代入於(1).

方程(7)之右端爲兩平方之較,故可解之如下.

$$h^2=\left(a+\frac{b^2-c^2+a^2}{2b}\right)\left(a-\frac{b^2-c^2+a^2}{2b}\right)$$

演括弧內所表示之加減法,則得

$$h^2=\frac{2ab+b^2-c^2+a^2}{2b}\cdot\frac{2ab-b^2+c^2-a^2}{2b}$$

$$h^2=\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{2b}\cdot\frac{c^2-(a^2-2ab+b^2)}{2b} \quad \text{何故?}$$

$$h^2=\frac{(a+b)^2-c^2}{2b}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{2b} \quad \text{何故?}$$

或 $$h^2=\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2b}\cdot\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2b}. \quad (8)$$

設 $a+b+c=2s$

從此方程之兩端先減$2c$,後減$2a$,後再減$2b$,則得,

$$\left.\begin{aligned} a+b-c&=2s-2c=2(s-c)\\ b+c-a&=2s-2a=2(s-a)\\ c+a-b&=2s-2b=2(s-b)\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

代(9)於(8)則

$$h^2=\frac{2(s-c)\cdot 2s\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-a)}{4b^2}=$$

$$\frac{4s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2},$$

故 $h=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. 何故? (10)

代(10)於(1),得

$$ABC=\tfrac{1}{2}b\cdot\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

故 $ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. (11)*

習　　題

1. 三角形之邊爲3, 5,與6. 求面積。

用§469之公式(11),得

面積$=\sqrt{7\cdot(7-3)(7-5)(7-6)}=\sqrt{7\cdot4\cdot2\cdot1}=2\cdot\sqrt{14}$ 或7.482略數.

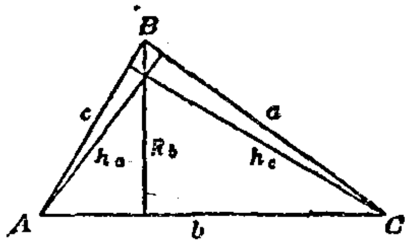
2. 三角形之邊爲34, 20,與18.求面積。

3. 三角形之邊爲10, 6,與 8.求面積。

* 海倫引公式(11)之法爲數學題於紀元前第一世紀。

†4. 三角形之邊爲90, 80,與26.求面積。

†5. 三角形之邊爲70, 58,與16.求面積。



第三百八十七圖

470. 三角形之高度. 以h_a, h_b, h_c表示三角形ABC中a, b, c,各邊之高度如第三百八十七圖.

指明

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (1)$$

(見§469,公式[10]).

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (2)$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (3)$$

從(1),如何可推類得(2)與(3)?

習　　題

1. 三角形ABC中,$a=10$, $b=17$, $c=21$.求h_a.

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s=\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\tfrac{1}{2}(10+17+21)=24$$

$$s-a=14,\quad s-b=7,\quad s-c=3.$$

代入此諸值於公式得

$$h_a=\frac{2}{10}\sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3}=\frac{1}{5}\sqrt{4\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 7\cdot 7\cdot 3}.$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{4\cdot 9\cdot 4\cdot 49}=\frac{1}{5}(2\cdot 3\cdot 2\cdot 7)=\frac{84}{5}=16\frac{4}{5}.$$

2. 求以下各三角形之高度:

(1) $a=35,\quad b=29,\quad c=8$.

(2) $a=70,\quad b=65,\quad c=9$.

‡(3) $a=45,\quad b=40,\quad c=13$.

3. 四邊形之各邊爲:

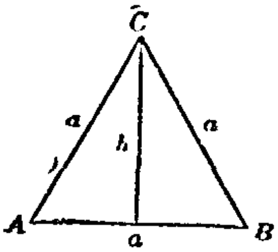
$AB=29$; $BC=8$; $CD=28$; $DA=21$,又直徑 $AC=30$. 求面積及 D 與 AC 之距離。

471. 等邊三角形之面積

等邊三角形之面積。爲一邊平方之四分一乘 3 之平方根。若以記號表示之則爲 $A=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$。

三角形 ABC 之面積。(第三百八十八圖)由公式得

$$\triangle ABC=\tfrac{1}{2}ah$$



第三百八十八圖

指明 $$h^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4},$$

$$\therefore h=\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

以代換法得 $\triangle ABC=\tfrac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

$$\therefore \triangle ABC=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

習　題

1. 求下列等邊三角形之面積。設其邊等於 12; 10; 4; 8; $c+d$; $2mn$。

2. 求等邊三角形之邊。設其面積爲

$\frac{121}{4}\sqrt{3}$; $\quad$ 12;

$25\sqrt{3}$; $\quad$ $10\sqrt{3}$.

在§469中，求得三角形之面積可以各邊表示之。於證公式時。已將多項式$2ab+b^2-c^2+a^2$及$2ab-b^2+c^2-a^2$劈爲因數。於§472至§476。更當溫習此種多項式。及其他常遇之多項式之劈因數法。

劈 因 數 法

以連結法劈多項式因數:

472. 許多多項式之各項。可連結之以指出一個公二項因數。例如下。

1. 劈$3a+3b+5a+5b$之因數，

連結前兩項及後兩項。則

$$\underbrace{3a+3b}+\underbrace{5a+5b}=3(a+b)+5(a+b)=(a+b)(3+5)$$

以乘法覆驗之。

2. 劈$ac+bc+ad+bd$之因數。

$$\underbrace{ac+bc}+\underbrace{ad+bd}=c(a+b)+d(a+b)=(a+b)(c+d).$$

以乘法覆驗之。

3. 劈$14x^3-6x^2-21x+9$之因數。

$$14x^3-6x^2-21x+9=2x^2(7x-3)-3(7x-3)=(7x-3)(2x^2-3).$$

以代換法及乘法覆驗之。

習 題

劈下列各式之因數。又覆證所得之結果。但宜多用心算推解：

1. $ax+bx+am+bm$.
2. $ar+br+as+bs$.
3. $ad+bd+at+bt$.
4. $3a+3b+ay+by$.
5. $ak-bk+al-bl$.
6. $ax^2-bx^2+ay^3-by^3$.
7. $abc+abx+nc+nx$.
8. $a^2k+a^2l+b^2k+b^2l$.
9. $5au-5av+mu-mv$.
10. $m^2a+ma^2+m^3a^2+m^2a^3$.
11. $a^2-ad+ab-bd$.
12. $x^6+5x^4+x^3+5x$.
13. $6x^2-9x-10xy+15y$.
14. $2m^3+m^2+6m+3$.
15. $3ac+3ax-5c-5x$.
16. $9-15r+27r^2-45r^3$.
17. $8gh+12ah+10bg+15ab$.
18. $15z-6-20zw+8w$.
19. $2m^2+3km-14mn-21kn$.
20. $3ax+3ab+2x^2+2bx+b+x$.
21. $4x^3+4x-4x^2z-4z$.
22. $1+r-r^2xy-r^3xy$.
23. x^2-x^3+1-x
24. $(a+m)(c+n)-2n(a+m)$.
25. $(x+y)(a+b)-(x+y)(b+c)$.
26. $m(x+y)^2+(x+y)$.
27. $a^2(2a+1)^2-2a-1$.
28. $a-b+a^2xy-b^2xy$.
29. $(c+d)(c^2+d^2)+2c^2d+2cd^2$.
30. $(x+y)^2(x-y)-(x-y)^2(x+y)$.

約下列分數至最簡之式：

31. $\dfrac{ax+bx+am+bm}{ar+br+as+bs}$.
32. $\dfrac{3u-3v+au-av}{5bu-5bv+2ku+2kv}$.
33. $\dfrac{ax^2-bx^2+ay^2-by^2}{mx^2+my^2+nx^2+ny^2}$.
34. $\dfrac{x^4-2x^3+7x-14}{2x^3-4x^2+6x-12}$.

473. 許多多項式之各項。可連結之以指出其爲兩平方之較。

習　　題

劈以下多項式之因數:

1. $a^2-2ab+b^2-c^2$.

連結前三項,則 $a^2-2ab+b^2-c^2$ 等於

$$(a-b)^2-c^2=(a-b+c)(a-b-c).$$

2. $x^2-6xy+9y^2-16z^2$.
5. $1-a^2-2ab-b^2$.
3. $25x^2+16y^2-4a^2+40xy$.
6. $9m^2-a^2-4ab-4b^2$.
4. $k^2-x^2-2xy-y^2$.
7. $36r^2-4+20t-25t^2$.
8. $x^2+2xy+y^2-a^2-2ab-b^2$
9. $a^2+2a+2bc-b^2-c^2+1$.
10. $9x^2+16y^2-49a^2-4b^2+28ab+24xy$.
11. $9a^2-12ab+4b^2-16x^2-8xy-y^2$.

474. 許多多項式之各項。可連結之以指出其爲完全平方。

習　　題

劈以下多項式之因數:

1. $a^2+2ab+b^2+6a+6b+9$.

連結前三項,及第四項與第五項,而分開末項,則得

$$a^2+2ab+b^2+6a+6b+9=(a+b)^2+b(a+b)+9=(a+b+3)^2.$$

2. $m^2+2mn+n^2+2m+2n+1$.
3. $m^2+2mn+n^2+6am+6an+9a^2$.

4. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

475. 許多多項式之各項，可連結之以成三項式，其因數可用試驗法求得之。

習　　題

劈因數：

1. $x^2+y^2+x-2xy-y-6.$

連結第一，第二，與第四項；又連結第三項與第五項，而分開第六項；則

$$x^2+y^2+x-2xy-y-6=x^2-2xy+y^2+x-y-6$$

$$=(x-y)^2+(x-y)-6\quad=(x-y+3)(x-y-2).$$

2. $a^2+2ab+b^2+3a+3b-10.$

3. $a^2-6ab+9b^2+7ac-21bc-44c^2.$

4. $m^4x+m^2x-650x.$

5. $4x^3+8xy+4y^2+13x+13y+3.$

6. $3c^2-6cd+3d^2-2c+2d-5.$

476. 許多三項式，若先改變其形狀令成完全平方，則其因數卽可求得。

習　　題

劈因數。

1. $x^4+x^2y^2+y^4.$

加 x^2y^2 於三項式 $x^4+x^2y^2+y^4$，則得完全平方如 $x^4+2x^2y^2+y^4$。然此將三項式之值已改變，如欲不改其值，當再從三項式減去 x^2y^2。則 $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2.$

此可寫作: $(x^2+y^2)^2-(xy)^2$ 卽爲兩平方之較,故其因數爲 $(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$。

2.	$a^4-7a^2b^2+b^4$.	*6*.	$a^2x^8+a^2x^4+a^2$.
3.	x^4+x^2+1.	*7*.	$49a^4b^4-53a^2b^2x^2+4x^4$.
4.	$16x^4-17x^2y^2+y^4$.	*8*.	$9x^4-10x^2y^2+y^4$.
5.	$25x^4+31x^2y^2+16y^4$.	*9*.	$4a^4-5a^2b^2+b^4$.

於習題9,欲得兩平方之較,可加減 a^2b^2,以得 $4a^4-4a^2b^2+b^4-a^2b^2$,或加減 $9a^2b^2$,以得 $4a^4+4a^2b^2+b^4-9a^2b^2$。

指明上述兩法皆可得相同之質因數。又指明習題8有兩對因數,然皆爲相同之質因數。

10. 用加減一獨項平方法。劈下列三項式之因數。

1.	x^4+4.	4.	a^4b^4+64.
	加減 $4x^2$.	5.	a^4+324b^4.
2.	$4x^4+1$.	6.	$1024x^4+y^4$.
3.	m^4+4.	7.	$81x^4+4y^4$.

477. 劈因數法之提要. 劈多項式之因數,可依各式所含項數之多少,而分其種類。

I. 若原式係二項式,則屬於下列各種範式:

1. 兩平方之較.如 x^2-y^2.其因數爲 $(x+y)(x-y)$。

2. 兩立方之較如 x^3-y^3.其因數爲 $(x-y)(x^2+xy+y^2)$。

3. 兩立方之和如 x^3+y^3.其因數爲 $(x+y)(x^2-xy+y^2)$。

II. 若原式係三項式,則屬下列各種範式:

1. 完全平方如$x^2\pm2xy+y^2$.其因數爲$(x\pm y)^2$

2. 三項式之如$x^4+x^2y^2+y^4$者。可使之成完全平方。但必須外加一項於原式。例如劈此式之因數。必先改原式爲$x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$。然後可得其因數。如解兩平方之較。

3. 三項式之如ax^2+bx+c者。其因數可用試驗法得之。

III. 多項式之不似 I 與 II 者。可得其因數如下:

1. 以公因數除原式各項。例如$ax+ay$之因數爲$a(x+y)$。

2. 連結原式之各項。令成上式之一。例如連結$ax+bx+ay+by$。即成$(ax+bx)+(ay+by)$。但此式等於$x(a+b)+y(a+b)$。與III之1式同。

依此。則多項式$x^2+2xy+y^2-a^2-2ab-b^2$。可改作$x^2+2xy+y^2-(a^2+2ab+b^2)$。而與 I 之 1 式相同矣。

劈因數雜題

478. 劈下列多項式之因數:

1.	$26xyz+65xy^2$.	8.	$16x^2+49y^2-56xy$.
2.	$7x+35x^2+14x^3$.	9.	$z^2-x^2+2xy-y^2$.
3.	$32-16a+18b^2-9b^2a$.	10.	$a^2-8ab+15b^2$.
4.	$m^2+\frac{3}{4}mn-4mp-3np$	11.	$m^2-4mn-77n^2$.
5.	$121m^2n^2-64p^2q^2$.	12.	$343a^3+125b^3$.
6.	$81x^4y^4-z^4$.	13.	$ab+4a-3b-12$.
7.	$32mn^4-162m$.	14.	$x^2+22x+121$.

15. x^3+x^2-x-1.

16. $(m-n)^2-11(m-n)-12$.

17. x^3-343.

18. $5a+6a^2+1$.

19. $56-15a+a^2$.

20. $x^2y^2+30xy+104$.

21. $8x^2y^2z^2-18z^4$.

22. $8x^9+729$

23. a^6+25a^3+24.

24. m^8-38m^4+105.

25. $64-x^6$.

26. $9x^2+24xy+16y^2$.

27. $3b^2-14ba+8a^2$.

28. $3m^2+4(2m+1)$.

29. $x^2+y^2+2xy-a^2-b^2-2ab$.

30. $m^2+t^2+2mt-x^2-y^2-2xy$.

31. $25a^4-26a^2b^2+b^4$(2對).

32. $4x^4-13x^2y^2+9y^4$(2對).

提　　要

479. 本章證以下各定理:

1. 等底及等高之平行四邊形必相等。

2. 平行四邊形等於同底同高之長方形。

3. 三角形等於同底同高之平行四邊形之半。

4. 凡直三角形。句方股方之和。等於弦方。

5. 三角形兩邊上正方形之和。等於第三邊半邊上正方形之兩倍。加第三邊中線上正方形之兩倍。

6. 三角形之面積。等於高乘底之半。

$$A=\tfrac{1}{2}b\cdot h.$$

7. 三角形之面積。等於兩邊與其夾角正弦連乘積之半。

$$A=\tfrac{1}{2}ab\sin C.$$

8. 三角形之面積。等於其半周與內切圓半徑之乘積。

$$A=\frac{1}{2}p\cdot r.$$

9. 三角形之面積。等於三邊之乘積除以外接圓半徑之四倍。 $A=\frac{abc}{4r}$

10. 三角形之面積。等於

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

11. 等邊三角形之面積。爲一邊平方之四分一乘 3 之平方根。 $A=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$

480. 本章溫習函一個或兩個未知數之字母方程之解法;及多項式之劈因數法。

第　十　九　章

多邊形　圓　面積之等比例

多邊形之面積

481. 長方形之面積. 長方形爲求各種直線形面積之基礎圖形。本書第一編。已授其面積之公式爲:

$$S=b\cdot h.$$

公式中之S表示面積。b爲底,h爲高度。若以定理式言之。則爲:

長方形之面積。等於底乘高。

設b與h爲有理數。則公式$S=b\cdot h$果屬眞確。然設b與h爲無理數。此公式亦合應用。今當指明此理於下:

設$b=\sqrt{12}=3.464101\cdots$, 又$h=\sqrt{27}=5.196152\cdots$, 則下表所指示之長方形面積。其邊之長度常變,但約爲$\sqrt{12}$與$\sqrt{27}$之略數。其小數初爲三位。次四位,五位,以至六位。以至幾近於有理數。由是則公式$S=b\cdot h$。每次皆合應用。

長方形	b	h	$S=b\cdot h$
I…………………	3.464	5.196	17.998944
II…………………	3.4641	5.1961	17.99981001
III…………………	3.46410	5.19615	17.999983215
IV…………………	3.464101	5.196152	17.999995339352

由上表觀之。可知18與 I, II, III, IV 各面積之較漸次縮小。而在 .002, .0002, .00002, .000005 以下。設求 b 與 h 至更多之小數位。則其較當繼續縮小。且可使之小於任一指定數。(無論此數小至若何)故各面積謂之接近18。以18爲極限。若用公式求之。則所得之結果同。例如

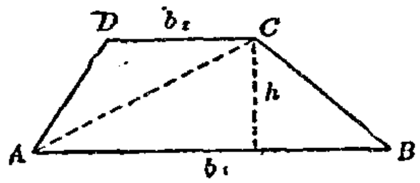
$$S=b\cdot h=\sqrt{12}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{2^2\cdot3\cdot3^3}=18.$$

482. 定理： 平行四邊形之面積。等於底乘高。

試用 § 460 證之。

483. 定理： 梯形之面積。等於高與兩底之和相乘積之半。 試證之。(見第三百八十九圖)

指明梯形之面積等於高乘中線。(見 § 161.)

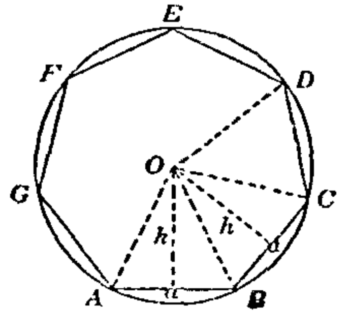


第三百八十九圖

484. 定理： 正內接多邊形之面積。等於半周乘從中心至邊之垂線。(邊心距)

作 AO, BO ……,如第三百九十圖.

以 a 代一邊之長度,以 h 代從中心至邊之垂線,又以 n 代邊數.



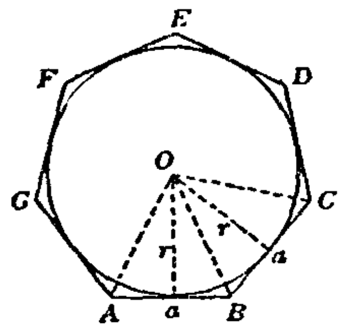
第三百九十圖

則 $\triangle AOB=\dfrac{ah}{2}$,

$\triangle BOC=\dfrac{ah}{2}$, 等. 何故?

$\therefore ABCD\cdots\ =\dfrac{nah}{2}=\dfrac{p\cdot h}{2}.$ 何故?

485. 定理： 正外切多邊形之面積。等於半周乘半徑。



第三百九十一圖

指示第三百九十一圖中

$$\triangle AOB=\frac{ar}{2},$$

$$\triangle BOC=\frac{ar}{2}, \text{ 等.}$$

$$\therefore ABCD\cdots\cdots=\frac{nar}{2}=\frac{p\cdot r}{2}.$$

習　　　題

1. 求內接與外切正方形之面積。而以半徑表示之。(見§440,習題 1 與 2.)

2. 正方形之面積爲16方公分(生的米突)。求內接與外切圓之直徑。

3. 證內接等邊三角形之面積爲$\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$。(見§441,習題9)如此,則內接等邊三角形之面積隨半徑之平方而變。試述其理。

4. 證外切等邊三角形之面積爲$3r^2\sqrt{3}$。

指明面積隨半徑之平方而變。又面積爲半徑之函數。不許作點。信手作此函數之圖線。

5. 證內接正六邊形之面積爲$\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$。

6. 證外切正六邊形之面積爲$2r^2\sqrt{3}$。

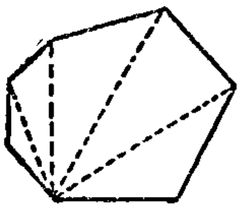
7. 求一正六邊形之面積,設其邊爲 6 吋。

8. 一圓之半徑爲10。求其內接正六邊形之面積。

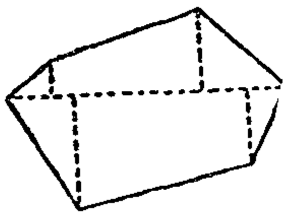
9. 一圓之直徑爲 8。求其內接正六邊形之面積。

10. 證同圓內正六邊形之面積。爲等邊三角形面積之兩倍。

486. **任何多邊形之面積.** 求多邊形之面積。可分形成諸三角形.如第三百九十二圖。或分形成諸三角形。及諸梯形。如第三百九十三圖。



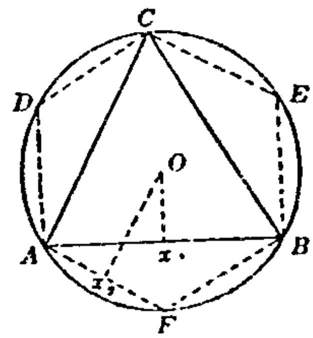
第三百九十二圖



第三百九十三圖

圓之面積

487. 圓內有一已知正多邊形如三角形 ABC。(第三百九十四圖) 若聯對此形各邊之弧之中點至其隣角頂。則所成之內接正多邊形 $AFBECD$。其邊數爲原形之兩倍。(見§436)



第三百九十四圖

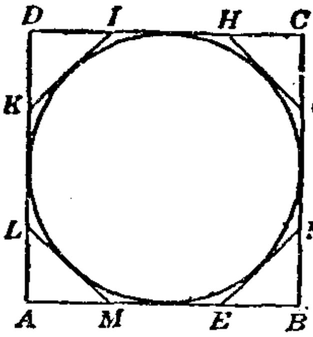
第二多邊形之周。大於第一多邊形之周。何故?

若繼續二倍其邊數。則周與邊數俱增。且可使其周比圓之長度。小於無論何數。故周謂之接近於圓。以圓爲極限。

邊心距 OX 接近於半徑。以半徑爲極限。

多邊形之面積。接近於圓之面積。以圓之面積爲極限。

488.　一圓之諸弧。切於一外切正多邊形$ABCD$之各邊之隣切點如第三百九十五圖。設從此諸弧之中點各作切線。則所成之正外切多邊形$EFGHIKLM$。其邊數爲原形之兩倍。(見§438)



第三百九十五圖

第二多邊形之周。小於第一多邊形之周。何故?

設二倍其邊數之法繼續行之。則周減而邊數增。且可使其周比圓之長度。小於無論何數。由是周接近於圓。以圓爲極限。

多邊形之面積。接近於圓之面積。以圓之面積爲極限。

489.　由§§487與488言之。則圓之面積。爲內接與外切正多邊形邊數增加時。其面積互相接近之公共極限。

此兩面積皆表示於下公式:

$\frac{ph}{2}$ 與 $\frac{Pr}{2}$,（見§§484, 485)。

多邊形之邊數增加時。$\frac{ph}{2}$接近於$\frac{c\cdot r}{2}$以$\frac{c\cdot r}{2}$爲極限。因p接近c。又h接近r故也。

$\frac{Pr}{2}$接近於$\frac{c\cdot r}{2}$以$\frac{c\cdot r}{2}$爲極限。因P接近c故也。

由是。則公共極限之值$\frac{cr}{2}$。可表示圓之面積。

若以文字表之當爲:

定理:　圓之面積。爲其周與半徑相乘積之半。

即 $\frac{1}{2}cr.$*

因 $c=2\pi r$,所以圓之面積爲

$$\pi r^2.$$

指示圓之面積爲半徑之函數,又試作此函數之圖線。

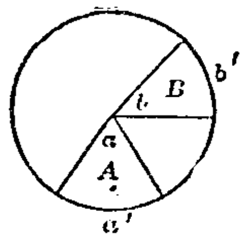
490. 定理: 圓之扇形之面積。等於半徑乘扇形之弧之長度之半。

由§297,知中心角與截弧之量度相同。又兩中心角之比等於兩截弧之比。(§297,習題8.)

故 $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$,(第三百九十六圖).

依此指示等中心角必夾等扇形。又指明兩扇形之比等於其中心角之比。

故 $\frac{a}{b}=\frac{A}{B}$.



第三百九十六圖

以 a 代中心角之度數,又設想圓爲弧,其中心角爲360°

則, $\frac{a}{360}=\frac{a'}{2\pi r}$, 又 $a'=\frac{\pi r a}{180}$ ……………………………… (A)

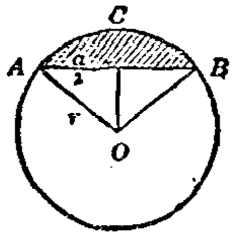
依此, $\frac{A}{\pi r^2}=\frac{a}{360}$. 何故?

$$\therefore \quad A=\frac{\pi r^2 a}{360}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi r a}{180}\cdot r \quad \text{何故?}$$

或 $A=\frac{1}{2}a'\cdot r$ ……………………… (B)

※ 證此定理。爲中學以上之事。故不贅述。

491. 弓形之面積. 求弓形ABC(第三百九十七圖)之面積。可從扇形$AOBC$之面積減去三角形AOB之面積。計算三角形AOB之面積。可用公式$T=\frac{1}{2}r^2\sin O$, (§ 466) 或 $T=\frac{1}{2}a\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$(§ 233).



第三百九十七圖

故求弓形面積之公式爲:

(1) $S=\frac{1}{2}a'r-\frac{1}{2}r^2\sin X$, X爲對弦a之中心角.

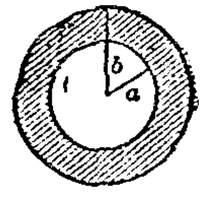
或 (2) $S=\frac{1}{2}a'r-\frac{1}{2}a\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$. 其$a$爲弦之長度, a'爲弧之長度,又r爲圓之半徑.

習　　題

1. 一圓之面積爲64。求其直徑及周。

2. 求圓之直徑,設其面積爲1方吋; 1方呎; 1方碼。

3. 兩同心圓成一環如第三百九十八圖。問此環之面積爲何。設圓之半徑爲5吋與6吋; a吋與b吋?



第三百九十八圖

4. 一圓之長度爲50吋。問其面積爲何?

5. 設一圓之面積爲616方吋。其中心角截一弧長11吋。問此角爲幾度?

6. 一圓之半徑爲100呎,其扇形之弧之長度爲25呎,試求扇形之面積。用§ 490之公式(B)求之。

7. 設一扇形之半徑爲9吋。其面積爲72方吋。試求弧之長度。

8. 設一扇形之面積爲一方呎。其半徑長 r 呎。試求弧之長度。

9. 設一圓之半徑爲 8 吋。試求有弧36°之扇形面積。

用扇形之面積爲圓之面積之 $\frac{1}{10}$ 求之，

10. 求一弓形之面積。設其弧爲36°。又圓之半徑爲12吋。

求三角形之面積時。注意三角形之底爲一正十邊形之邊。(§ 443,習題 5,)或用公式 $\frac{1}{2}ab\sin C$ 求之。

11. 求一弓形之面積。設其弧爲72°。圓之半徑爲20。

12. 一圓之面積爲 15,400 方吋。試求一弓形之面積。設其弧爲60°。

面積之等比例

§§ 492 至 496 之定理。其證法極爲淺易。可使學生自證之。

492. 定理： 兩平行四邊形之比。等於其底與高相乘積之比，即， $\frac{P}{P'}=\frac{bh}{b'h'}$.

493. 定理： 有等底之兩平行四邊形。其面積之比。等於其高之比。即

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{h_1}{h_2}.$$

用交替法得 $\frac{P_1}{h_1}=\frac{P_2}{h_2}$.

如此，若平行四邊形之底不變。而其高常變。因得連接值 $h_1, h_2, h_3, \cdots\cdots$ 等。則 P 得相當值 $P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots$ 等。然 $\frac{P}{h}$ 爲常數。故

$$\frac{P_1}{h_1}=\frac{P_2}{h_2}=\frac{P_3}{h_3}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\text{等}$$

設以 b 代此常比,則得 $P_1=bh_1$, $P_2=bh_2$, $P_3=bh_3$ 等。指示 P 爲 h 之函數。又信手作此函數之圖線。

故 P 爲 h 之正等比例.或 P 隨 h 正變。設其底 b 爲常數。

494. 定理: 兩三角形之比。等於其底與高相乘積之比。

495. 定理: 有等底之兩三角形。其面積之比。等於其高之比。

496. 定理: 有等高之兩三角形。其面積之比。等於其底之比。

習　　題

1. 指明有定底之三角形,其面積隨其高正變。即 h 雖變。而 $\frac{T}{h}$ 不變。

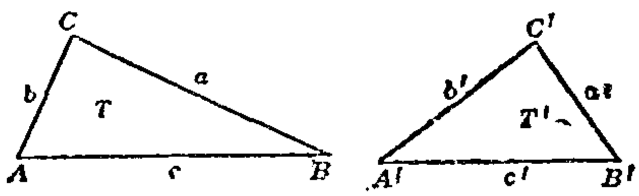
2. 指明等邊三角形之面積。隨一邊之平方正變

3. 指明圓之面積.隨其半徑之平方正變。

497. 定理: 設有兩三角形。此形內一角等於彼形內一角。則兩形面積之比,等於等角旁兩邊乘積之比。

已知 $\triangle ABC$ 與 $A'B'C'$ 中有 $C=C'$,(第三百九十九圖)

證 $\frac{T}{T'}=\frac{ab}{a'b'}$.



第三百九十九圖

證： $T=\frac{1}{2}ab\sin C$， 何故？

$T'=\frac{1}{2}a'b'\sin C'$。 何故？

$\therefore \frac{T}{T'}=\frac{ab}{a'b'}$。 何故？

習 題

1. 兩三角形。各有一角彼此相等。又此角之兩夾邊爲48與75。彼角之兩夾邊爲45與70。試求兩形之相關面積。

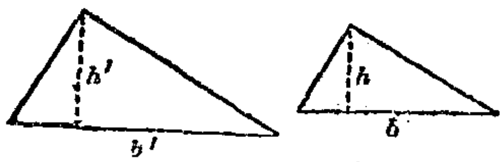
2. 一三角形式之屋。其兩邊爲150呎與130呎。問全屋幾分之幾爲第一邊上之50呎及第二邊上之30呎所夾？

3. 有三角形式之地一塊，設從一隅引長其兩邊，令一爲60呎。一爲80呎。今有一屋佔第一邊上之50呎。問此屋當佔第二邊上之幾呎。則可佔全地之$\frac{3}{4}$？

4. 三角形之兩邊a與b爲9與15。指明過a內一點。而距a與b之公共角頂爲5準個之線當交b邊於何點。則可平分三角形之面積。

498. 定理： 兩相似三角形。其面積之比。等於其相應邊平方之比，

試證之。



第四百圖

指明 $\frac{T}{T'}=\frac{bh}{b'h'}=\frac{b}{b'}\cdot\frac{h}{h'}$，(第四百圖)。

$\frac{h}{h'}=\frac{b}{b'}$。 何故？

$$\therefore\ \frac{T}{T'}=\frac{b}{b'}\cdot\frac{b}{b'}.$$

$$\therefore\ \frac{T}{T'}=\frac{b^2}{b'^2}.$$

習　　題

1.　三角形之一邊爲10吋。又有一相似三角形。其面積爲此形之兩倍。求其相當邊之長。

2.　設有兩相似三角形。其兩相應邊爲 5 與 15。求其面積之比爲何?

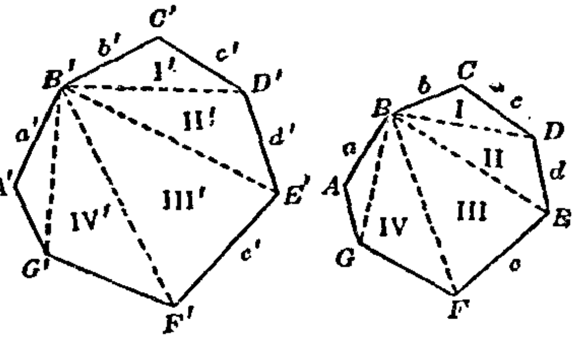
3.　從三角形之一角頂至其對邊,試作一線,令平分此形之面積。

499. 定理: 兩相似多邊形。其面積之比。等於其相應邊平方之比。

已知多邊形 ABC ······ $\backsim$ 多邊形 $A'B'C'$······(第四百零一圖)設 P 代表 ABC····之面積,又 P' 代表 $A'B'C'$······ 之面積.

證 $\dfrac{P}{P'}=\dfrac{d^2}{d'^2}$.

證: 分 ABC···與 $A'B'C'$ ···作諸三角形 I, II, III, 與 I′; II′, III′, 等, 其法即從相應角頂如 B 與 B', 作對角線.



第四百零一圖

則 I$\backsim$I′, II$\backsim$II′, 等.　何故?

$\therefore \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}'}=\frac{c^2}{c'^2}, \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{II}'}=\frac{d^2}{d'^2}$…………等. 何故?

指明 $\frac{c^2}{c'^2}=\frac{d^2}{d'^2}$…………,等. 何故?

$\therefore \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}'}=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{II}'}=\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{III}'}$…………,等. 何故?

$\therefore \frac{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\cdots\cdots}{\mathrm{I}'+\mathrm{II}'+\mathrm{III}'+\cdots\cdots}=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{II}'},=\frac{d^2}{d'^2}$ (§ 498)

$\therefore \frac{P}{P'}=\frac{d^2}{d'^2}.$

習　　題

1. 設有兩相似三角形。其兩相應邊爲 5 與 8。第一形之面積爲150。求第二形之面積。

2. 設有一正方形。較他正方形大 9 倍。問其相應邊之相關長度爲何?

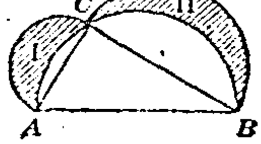
3. 一多邊形之面積。爲一相似形之$6\frac{1}{4}$倍。設較小形之一邊爲 4 呎。求較大形相應邊之長。

4. 設作等邊三角形於直三角形之各邊上。指明弦上之三角形必等於餘兩邊上三角形之和。

5. 設作半圓於直三角形之各邊上。指明弦上半圓之面積。必等於餘兩邊上半圓面積之和。

6. 於直三角形之各邊上作半圓。如第四百零二圖。

指明月形 I 與II之面積和。等於直三角形之面積。(海倫之定理紀元前430年。)



第四百零二圖

7. 於直三角形之各邊上作相似多邊形 P_1, P_2, P_3，如第四百零三圖。

證 P_3，(即弦上多邊形之面積，)等於 P_1 與 P_2 之和.

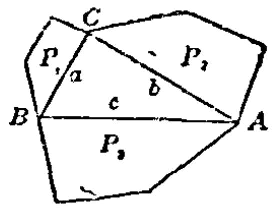
證： $\dfrac{P_1}{P_3}=\dfrac{a^2}{c^2}$， 何故？

$\dfrac{P_2}{P_3}=\dfrac{b^2}{c^2}$， 何故？

$\therefore \dfrac{P_1+P_2}{P_3}=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$. 何故？

$\therefore (P_1+P_2)c^2=P_3(a^2+b^2)$. 何故？

$\therefore P_1+P_2=P_3$. 何故？



第四百零三圖

8. 兩相似六邊形之相應邊為 9 吋與12吋。求第三相似六邊形之相應邊，設第三形之面積，等於前兩形面積之和。

500. 定理：兩圓面積之比，等於其半徑平方之比或其直徑平方之比。

習題

1. 設有兩圓，其半徑為 5 吋與10吋。求其面積之比為何？

2. 兩圓面積之比為2：4，求其直徑之比為何？

3. 兩圓半徑之比為3：5。其面積之和為3850。求其半徑之長度。

4. 兩圓半徑之比為7：24，又有一圓，半徑為50，其面積等於兩圓面積之和，試求先兩圓之半徑。

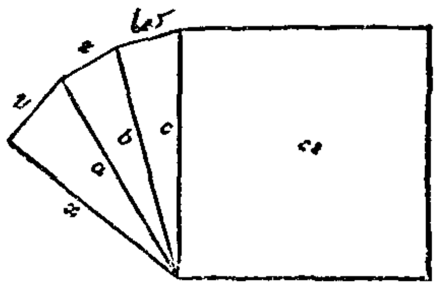
求　作　題

501. 求作以下各題:

1. 求作一正方形。令等於兩或兩以上已知正方形之和。

已知x, y, z, w,爲正方形之邊,

求作一正方形,令等於已知正方形之和。求作法見第四百零四圖。



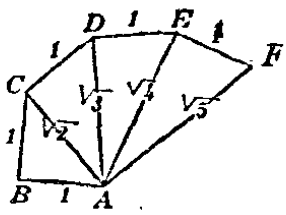
第四百零四圖

證$c^2=x^2+y^2+z^2+w^2$.

2. 求作一正方形。令等於一已知正方形之四倍。

3. 求作一整數之平方根。

求作此題於方格紙上如第四百零五圖.



第四百零五圖

量AC, AD, AE, AF,又開2, 3, 4, 5,之平方根以覆證之.

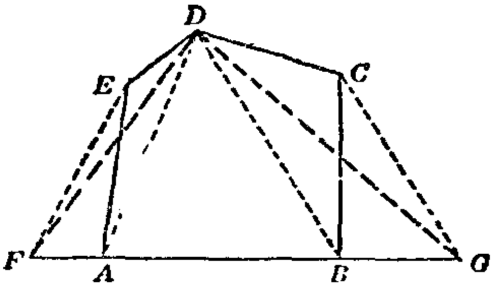
4. 試改變一多邊形。令成等面積之三角形。

作對角線AD(第四百零六圖).

經過E,作$EF \parallel AD$割AB之引長線於F.

作DF,又指明$\triangle DFA=\triangle DEA$.

指明$FBCD=ABCDE$.



第四百零六圖

此將五邊形改爲等面積之四邊形$FBCD$.

作對角線 DB.

作 $CG \parallel DB$.

作 DG.

指明 $\triangle DCB = \triangle DGB$.

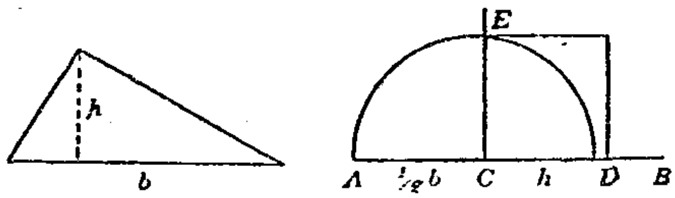
指明 $FBCD = \triangle FGD$. 卽爲欲求之三角形.

$\therefore\ ABCDE = \triangle FGD$.　何故?

5.　作一正方形。令等於一已知三角形。

解析:　因三角形之面積爲 $\frac{1}{2}bh$. 又正方形之面積爲 a^2, 故必使 $a^2 = \frac{1}{2}bh$. 其 b 與 h 爲已知數, 而 a 爲未知數.

由是,此題變爲求作 $\frac{1}{2}b$ 與 h 之等比例中項矣。



第四百零七圖

作法:　於 AB 上(第四百零七圖)截 $AC = \frac{1}{2}b$, 又 $CD = h$

作 $CE \perp AD$.

作半圓於 AD 上.

以 CE 爲邊,作一正方形於其上,卽爲欲求之正方形.

試證之.

6.　指明如何可求作一正方形。令等於一已知多邊形。

雜　題

1502.　解以下各題:

1. 經過平行四邊形之周上一點,試作一線,令平分此形。

2. 求作一等邊三角形令等於一已知三角形。

(1)改變已知三角形爲等面積之三角形,含一角爲60°。

(2)測等邊三角形之邊之長,應用下定理:若兩三角形各有一角相等,則兩邊之比,等於夾等角之兩邊乘積之比。

3. 一三角形之底爲18呎,今有一線,平分此三角形,且與其底平行,試求此線之長。

4. 一線與三角形之底平行,割去一三角形等於原形之$\frac{3}{4}$。若其一邊爲12,問割線離頂角遠若干?

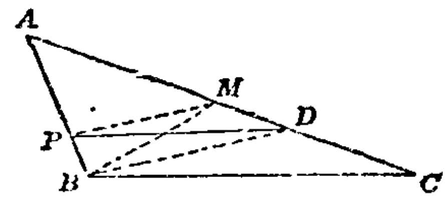
5. 經過三角形之一角頂,試作諸線,分三角形成:

(1)兩部,其一須爲其二之$(a)\frac{2}{3}$, $(b)\frac{1}{2}$, $(c)\frac{5}{9}$。

(2)三部,成比例$2:3:4$。

6. 有一已知點P,在三角形之周上,但不在其角頂,試作一線過此點,令平分三角形之面積。

(見第四百零八圖)



第四百零八圖

作中線BM又PM, $BD \parallel PM$,

又作PD.

則$\triangle PMD=\triangle PMB$, 何故?

$\therefore \triangle ADP=\triangle AMB=\triangle BMC=PDCB$. 何故?

7. 一三角形之邊爲17,10與9。又有一三角形與此形相似。設10之相應邊上之垂線爲$14\frac{2}{5}$。試求第二三角形之各邊。

8. 一正方形之邊爲a(a可爲多邊形之邊,或圓之半徑。)設有一相似形,較原形大k倍。試求其邊,(或半徑)

9. 兩圓之半徑爲25與24。又有一圓,其面積等於兩圓之較,求其半徑。

10. 三圓之半徑爲x, $x-7$, $x+1$。設一圓之面積等於他兩圓面積之和,求x。

11. 兩圓之直徑爲$x+2$與x。其面積之較等於一直徑爲$x-7$之圓。試求x。

12. 一長方形之面積爲60,其對角線爲13。試求其長及寬。

13. 一長方形之周爲46。其面積爲120。試求其長及寬。

14. 一長方形之周爲62。其對角線爲25。試求面積。

15. 一長方形之高與底之比爲8∶15。其對角線爲34呎,試求面積。

16. 一長方形之長寬之比爲$2ab:a^2-b^2$。其對角線爲$a^2c^2+b^2c^2$。試求面積。

17. 計算直三角形ABC之弦上垂線,而以夾直角之兩邊表示之。

18. 菱形之兩對角線爲 $2x-14$ 與 $2x$。其一邊爲 $x+1$。試求 x。

19. 兩相似六邊形之相應邊爲 9 吋與 12 吋。試求一相似六邊形之相應邊設其面積(1)等於前兩形之和。(2)等於前兩形之較。

提　　要

503　本章證以下各定理：

1. 長方形之面積等於底乘高。

2. 平行四邊形之面積等於底乘高。

3. 梯形之面積等於高與兩底之和乘積之半。

4. 正內接多邊形之面積等於半周乘邊心距。

5. 正外切多邊形之面積等於半周乘半徑。

6. 圓之面積爲其周與半徑相乘積之半。卽 $A=\frac{1}{2}cr$。

7. 圓之面積之公式爲 $A=\pi r^2$。

8. 扇形面積之公式爲 $A=\frac{1}{2}a'r$。

9. 圓之弓形之面積。其公式爲 $A=\frac{1}{2}a'r-\frac{1}{2}a\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$。或爲 $A=\frac{1}{2}a'r-\frac{1}{2}r^2\sin X$。

10. 兩平行四邊形面積之比等於其底與高乘積之比。

11. 有等底之兩平行四邊形其比等於其高之比。

12. 兩三角形之比等於其底與高乘積之比。

13. 有等底(高)之兩三角形其面積之比等於其高(底)之比。

14. 設有兩三角形此形內一角等於彼形內一角。則兩形面積之比。等於等角旁兩邊乘積之比。

15. 兩相似三角形其面積之比。等於其相應邊平方之比。

16. 兩相似多邊形其面積之比。等於其相應邊平方之比。

17. 兩圓面積之比。等於其半徑平方之比。

504. 本章授以下各求作法:

1. 求作一正方形。令等於兩或兩以上已知正方形之和。

2. 求作一整數之平方根。

3. 改變多邊形令成三角形。

4. 作一正方形。令等於一已知三角形。

記　　號

=	等於	ⓢ	諸圓形
>	大於	∴	故
<	小於	∵	因
∥	平行	≡	恆等於
⊥	垂於	≐	接近於
∽	相似	+	加
≌	相合	−	減
∠	角	≠	不等於
∠s	諸角	rt.∠	直角
▱	平行四邊形	△	三角形
▭	長方形	△s	諸三角形
⊙	圓形	⌒	弧

公　　式

$a^2+b^2=c^2$: 直三角形各邊之關係.

$a^2+b^2\pm 2ab'=c^2$: 斜三角形各邊之關係.

$c=2\pi r=\pi d$: 圓周之長度.

$b\cdot h$: 平行四邊形之面積.或長方形之面積.

a^2: 正方形之面積

$\frac{1}{2}bh,\ \frac{1}{2}ab\sin C,\ \frac{1}{2}r(a+b+c),\ \frac{abc}{4R},\ \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$:

三角形之面積

$\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$: 等邊三角形之面積.

$hm=\frac{1}{2}h(b+b')$:梯形之面積.

$\frac{1}{2}p\cdot a$: 正內接多邊形之面積.

$\frac{1}{2}p\cdot r$: 正外切多邊形之面積.

$\frac{1}{2}cr=\pi r^2$: 圓形之面積.

$\sin A=\frac{a}{c}$, $\cos A=\frac{b}{c}$, $\tan A=\frac{a}{b}$, $\sin^2 A+\cos^2 A=1$,

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$.

正弦,餘弦,正切表

(1° 至 90° 諸角)

角	Sin	Cos	Tan	角	Sin	Cos	Tan
1°	.0175	.9998	.0175	46°	.7193	.6947	1.0355
2	.0349	.9994	.0349	47	.7314	.6820	1.0724
3	.0523	.9986	.0524	48	.7431	.6691	1.1106
4	.0698	.9976	.0699	49	.7547	.6561	1.1504
5	.0872	.9962	.0875	50	.7660	.6428	1.1918
6	.1045	.9945	.1051	51	.7771	.6293	1.2349
7	.1219	.9925	.1228	52	.7880	.6157	1.2799
8	.1392	.9903	.1405	53	.7986	.6018	1.3270
9	.1564	.9877	.1584	54	.8090	.5878	1.3764
10	.1736	.9848	.1763	55	.8192	.5736	1.4281
11	.1908	.9816	.1944	56	.8290	.5592	1.4826
12	.2079	.9781	.2126	57	.8387	.5446	1.5399
13	.2250	.9744	.2309	58	.8480	.5299	1.6003
14	.2419	.9703	.2493	59	.8572	.5150	1.6643
15	.2588	.9659	.2679	60	.8660	.5000	1.7321
16	.2756	.9613	.2867	61	.8746	.4848	1.8040
17	.2924	.9563	.3057	62	.8829	.4695	1.8807
18	.3090	.9511	.3249	63	.8910	.4540	1.9626
19	.3256	.9455	.3443	64	.8988	.4384	2.0503
20	.3420	.9397	.3640	65	.9063	.4226	2.1445
21	.3584	.9336	.3839	66	.9135	.4067	2.2460
22	.3746	.9272	.4040	67	.9205	.3907	2.3559
23	.3907	.9205	.4245	68	.9272	.3746	2.4751
24	.4067	.9135	.4452	69	.9336	.3584	2.6051
25	.4226	.9063	.4663	70	.9397	.3420	2.7475
26	.4384	.8988	.4877	71	.9455	.3256	2.9042
27	.4540	.8910	.5095	72	.9511	.3090	3.0777
28	.4695	.8829	.5317	73	.9563	.2924	3.2709
29	.4848	.8746	.5543	74	.9613	.2756	3.4874
30	.5000	.8660	.5774	75	.9659	.2588	3.7321
31	.5150	.8572	.6009	76	.9703	.2419	4.0108
32	.5299	.8480	.6249	77	.9744	.2250	4.3315
33	.5446	.8387	.6494	78	.9781	.2079	4.7046
34	.5592	.8290	.6745	79	.9816	.1908	5.1446
35	.5736	.8192	.7002	80	.9848	.1736	5.6713
36	.5878	.8090	.7265	81	.9877	.1564	6.3138
37	.6018	.7986	.7536	82	.9903	.1392	7.1154
38	.6157	.7880	.7813	83	.9925	.1219	8.1443
39	.6293	.7771	.8098	84	.9945	.1045	9.5144
40	.6428	.7660	.8391	85	.9962	.0872	11.4301
41	.6561	.7547	.8693	86	.9976	.0698	14.3006
42	.6691	.7431	.9004	87	.9986	.0523	19.0811
43	.6820	.7314	.9325	88	.9994	.0349	28.6363
44	.6947	.7193	.9657	89	.9998	.0175	57.2900
45	.7071	.7071	1.0000	90	1.0000	.0000	∞

方乘方根表

數	平方數	立方數	平方根	立方根	數	平方數	立方數	平方根	立方根
1	1	1	1.000	1.000	51	2,601	132,651	7.141	3.708
2	4	8	1.414	1.259	52	2,704	140,608	7.211	3.732
3	9	27	1.732	1.442	53	2,809	148,877	7.280	3.756
4	16	64	2.000	1.587	54	2,916	157,464	7.348	3.779
5	25	125	2.236	1.709	55	3,025	166,375	7.416	3.802
6	36	216	2.449	1.817	56	3,136	175,616	7.483	3.825
7	49	343	2.645	1.912	57	3,249	185,193	7.549	3.848
8	64	512	2.828	2.000	58	3,364	195,112	7.615	3.870
9	81	729	3.000	2.080	59	3,481	205,379	7.681	3.892
10	100	1,000	3.162	2.154	**60**	3,600	216,000	7.745	3.914
11	121	1,331	3.316	2.223	61	3,721	226,981	7.810	3.936
12	144	1,728	3.464	2.289	62	3,844	238,328	7.874	3.957
13	169	2,197	3.605	2.351	63	3,969	250,047	7.937	3.979
14	196	2,744	3.741	2.410	64	4,096	262,144	8.000	4.000
15	225	3,375	3.872	2.466	65	4,225	274,625	8.062	4.020
16	256	4,096	4.000	2.519	66	4,356	287,496	8.124	4.041
17	289	4,913	4.123	2.571	67	4,489	300,763	8.185	4.061
18	324	5,832	4.242	2.620	68	4,624	314,432	8.246	4.081
19	361	6,859	4.358	2.668	69	4,761	328,509	8.306	4.101
20	400	8,000	4.472	2.714	**70**	4,900	343,000	8.366	4.121
21	441	9,261	4.582	2.758	71	5,041	357,911	8.426	4.140
22	484	10,648	4.690	2.802	72	5,184	373,248	8.485	4.160
23	529	12,167	4.795	2.843	73	5,329	389,017	8.544	4.179
24	576	13,824	4.898	2.884	74	5,476	405,224	8.602	4.198
25	625	15,625	5.000	2.924	75	5,625	421,875	8.660	4.217
26	676	17,576	5.099	2.962	76	5,776	438,976	8.717	4.235
27	729	19,683	5.196	3.000	77	5,929	456,533	8.774	4.254
28	784	21,952	5.291	3.036	78	6,084	474,552	8.831	4.272
29	841	24,389	5.385	3.072	79	6,241	493,039	8.888	4.290
30	900	27,000	5.477	3.107	**80**	6,400	512,000	8.944	4.308
31	961	29,791	5.567	3.141	81	6,561	531,441	9.000	4.326
32	1,024	32,768	5.656	3.174	82	6,724	551,368	9.055	4.344
33	1,089	35,937	5.744	3.207	83	6,889	571,787	9.110	4.362
34	1,156	39,304	5.830	3.239	84	7,056	592,704	9.165	4.379
35	1,225	42,875	5.916	3.271	85	7,225	614,125	9.219	4.396
36	1,296	46,656	6.000	3.301	86	7,396	636,056	9.273	4.414
37	1,369	50,653	6.082	3.332	87	7,569	658,503	9.327	4.431
38	1,444	54,872	6.164	3.361	88	7,744	681,472	9.380	4.447
39	1,521	59,319	6.244	3.391	89	7,921	704,969	9.433	4.464
40	1,600	64,000	6.324	3.419	**90**	8,100	729,000	9.486	4.481
41	1,681	68,921	6.403	3.448	91	8,281	753,571	9.539	4.497
42	1,764	74,088	6.480	3.476	92	8,464	778,688	9.591	4.514
43	1,849	79,507	6.557	3.503	93	8,649	804,357	9.643	4.530
44	1,936	85,184	6.633	3.530	94	8,836	830,584	9.695	4.546
45	2,025	91,125	6.708	3.556	95	9,025	857,375	9.746	4.562
46	2,116	97,336	6.782	3.583	96	9,216	884,736	9.797	4.578
47	2,209	103,823	6.855	3.608	97	9,409	912,673	9.848	4.594
48	2,304	110,592	6.928	3.634	98	9,604	941,192	9.899	4.610
49	2,401	117,649	7.000	3.659	99	9,801	970,299	9.949	4.626
50	2,500	125,000	7.071	3.684	**100**	10,000	1,000,000	10.000	4.641

中西名詞索引

號碼皆指節目非指頁數

Breslich's Second-Year Mathematic
Commercial Press, Limited

中華民國十一年五月初版
中華民國十一年九月再版

（布利氏新式算學教科書第二編）
（每冊定價大洋壹元肆角）
（外埠酌加運費匯費）

譯述者　紹興王自芸
校訂者　紹興壽孝天
發行者　商務印書館
印刷所　商務印書館　上海北河南路北首寶山路
總發行所　商務印書館　上海棋盤街中市
分售處　商務印書分館　北京　天津　保定　奉天　吉林　龍江　濟南　太原　開封　鄭州　西安　南京　杭州　蘭谿　安慶　蕪湖　南昌　漢口　長沙　常德　衡州　成都　重慶　瀘縣　福州　廣州　潮州　香港　梧州　雲南　貴陽　張家口　新嘉坡

九〇九五自