



改訂
查 理 斯 密
小 代 數 學

連江陳文譯

商務印書館印行

民國二十一年一月二十九日
 敝公司突遭國難總務處印刷
 所編譯所書棧房均被炸燬附
 設之涵芬樓東方圖書館尙公
 小學亦遭殃及盡付焚如三十
 五載之經營墮於一旦迭蒙
 各界慰問督望速圖恢復詞意
 懇摯銜感何窮敝館雖處境艱
 困不敢不勉爲其難因將需要
 較切各書先行覆印其他各書
 亦將次第出版惟是圖版裝製
 不能盡如原式事勢所限想荷
 鑒原謹布下忱統祈垂督

上海商務印書館謹啓

版 權 所 有 翻 印 必 究

丙午年三月初版
 民國二十一年國難後第一版
 八月印行
 民國二十二年國難後第四版
 四月印行

(三九)

查理 斯密 小代數學

ELEMENTARY ALGEBRA

每冊定價大洋貳元肆角

外埠酌加運費匯費

原著者 O SMITH

譯述者 陳文

出版者 科學會編譯部

印刷者兼 上海河南路 商務印書館

發行所 上海及各埠 商務印書館

目 次

第一編	定義	1—12
第二編	正量及負量	13—15
	加法	15—22
	減法	22—28
	括弧	28—31
第三編	乘法	32—59
第四編	除法	60—75
	雜題 I.	75—79
第五編	一次方程式	80—89
第六編	一次方程式之問題	90—102
第七編	一次聯立方程式	103—118
第八編	一次聯立方程式之問題	119—126
	雜題 II.	126—131
第九編	因數	132—155
第十編	最高公因數	156—170
第十一編	最低公倍數	171—178
第十二編	分數	179—214
第十三編	分數方程式	215—223
	雜題 III.	223—227
第十四編	二次方程式	230—262
第十五編	三次以上之方程式	263—271
第十六編	二次之聯立方程式	272—289
第十七編	二次方程式之問題	290—298

	雜題 IV.	298—305
	方程式之雜題	305—313
第十八編	方乘及方根	314—322
	平方根	322—331
第十九編	分指數及負指數	332—343
第二十編	根數	344—355
第二十一編	比	356—361
	比例	362—371
	變數法	372—379
	雜題 V.	379—384
第二十二編	等差級數	385—399
第二十三編	等比級數	400—415
第二十四編	調和級數	416—423
	單簡級數	423—429
	雜題 VI.	430—437
第二十五編	排列, 班次	438—451
第二十六編	二項式定理	452—478
第二十七編	對數	479—490
	複利及年金	490—495
第二十八編	雜定理及雜例	496—511
	立方根	512—522
第二十九編	紀數法	523—530
	問題之答	531—600
附 錄	I. 希臘文字之發音	1
	II. 英華學語對照表	2—6

改訂第二十三版弁言

是書自丙午出版後。從未修改。亥豕魯魚。初版。已不能免。而每排版一次。所增訛字。不知凡幾。各處翻印者。其錯誤更不諗若何。今就本版計。採用者仍復年盛一年。雖賴賢教師依據舊版或原本隨時更正。其間耗費時日。已不可以數紀。譯者屢欲重校而未有暇。本年六月。承沂水柴君紫章以勘誤表見寄。一時改正者凡數百事。已非譯者意料所及。及用原本重校。其間錯誤更有出柴君勘誤表外者。因以一月之力。亟亟校正。並改訂數十事。另行排版。悉心校對。區區之意。要以無誤爲的。雖然。昔人有言。校書如掃落葉。隨掃隨落。既竭目力。莫敢自信。海內賢達。匡厥不逮。所深望也。

中華民國四年十一月

譯者識

是書原本，(1912年增補本)卷末增有函數之圖表一編。(僅10頁)然此原爲解析幾何學之事。學者必習解析幾何學。始能明瞭。本會譯有溫特渥斯解析幾何學。及斯密氏改勒解析幾何學原理。較爲完備。且是書習完。正宜進習解析幾何學。故不復增入。

譯者又識

例 言

本書原爲英國岡布理智大學教授查理斯密君所著。然本書所用原本。乃日本長澤龜之助英文增補本。故與原書稍有不同處。惟實較宜於我國學者。故不妨借用。

本書原名 Elementary Algebra。本當譯爲初等代數學。余甲辰在日本西京偶於坊間。得此英文本。已從事翻譯。嗣後或譯或輟。至翌年三月。聞已有人出版。余譯之尤爲遲緩。六月甫脫稿。則余同姓樂書氏已有漢文譯本。余乃置之敝篋中。久擬不復刊行。今歸國多暇。偶於書肆中得一樂書氏本。見其語法。與余迥然不同。似又不妨重出。特更用今名。以避混淆。區區之意。當爲識者所諒。

是書之善。久爲學界所公認。不待余深贊。然余所以終不能釋然舍之者。厥有三端。

初等代數學之教科書。說理宜顯。立法宜密。舉例宜詳。設題宜有層次。欲求具此數美如本書者。已不可復得。余雖畢世亦無此等學力編成。一也。

余庚子辛丑間。嘗閱算書。如代數難題。決疑數等。

倘有不解處。常鬱鬱終日。不能自得。今僅行年廿六。腦力已不堪復用。偶翻閱舊籍。余昔日自以爲心得者。今又多具於是書。(代數難題原爲岡布理智大學課題。故其法出於是書者尤多。)竊欲紹介來茲。以免陷余覆轍二也。

能爲余所譯大代數學之先導三也。

附誌之。以告閱是書者。

爲余校閱者。爲余友科學會會員諸君。然何君崇禮。曾君汝環。最與有力。余所深謝。

光緒三十二年三月

譯 者 識

原 序

本書編纂。原欲取便於初學。務以最單簡之方法。解釋代數學之原理。因特注意原則運算之解說。及法則之證明。故力求異於時用諸書。然謂新法難解。則非余所敢信。

初等教科之著述。原欲導學者於路。故其要在指明基礎之理法。使無不注意之患。苟以簡略爲便。則大失教育本旨。余因力避此患。

本書欲成爲通然完備之初等教科書。故二項式定理。以正整指數爲限。其由本式難求出之級數及展開式。不在本書之範圍內。

余將速出一極完全之代數書。(譯者曰卽余所譯之大代數學)然本書實能爲之先導。

本書之例題。曾經用意選擇配置。故能解明或實演一切要理。且就代數式之操縱。更能推廣其應用。又因求種種適當之利益。更參以近數年來在岡布理智 (Cambridge) 大學所課之一切試驗。兼依地方試驗長之許可。將曾在大學所設地方試驗之題。凡合於問題之用者。概行收入。又雜題之例。通全書間

置之。余自信爲善法。

厚余而爲余校閱驗例，兼與有力之助言者，爲余友某某諾氏。余所深感。然余所鳴謝，當在女士「白揚」及大學「畢固」君。

一千八百八十六年正月

查理斯密識於

「西德黎」專門學校

第 二 版 原 序

本書第二版與第一版大異。蓋本書全篇通加訂正。又首次諸編從新編纂。較第一版單簡。並增補例題若干。且增以對數及記數法二編。俾學者足用。凡所增改。皆以應本書之必需爲望。今附鉛版此後印刷。要以稍加訂正爲止。

校正印刷及演算問題者。爲余友某某諾氏。余所深感。然余所鳴謝。當歸於大學「卡邊達」君及「格朗列」君。

一千八百九十年四月

查理斯密識於

「西德黎」專門學校

查 理 斯 密

小 代 數 學

第 一 編

定 義

1. 代數學 代數學者論數理之學科也。

算術以數字顯數。故一數字祇有一值。其意義以一種爲限。如 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9。其意義祇爲一, 二, 三, 四, 五, 六, 七, 八, 九。

代數學以數字及文字顯數。數字之值。與算術同。文字之值。可爲無論如何之數。

代數學所用之文字。爲小羅馬文字。即

a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v,
w, x, y, z, 二十六字母。然因便利起見。恆書其草
體。即

abcdefghijklmnopqrstuvwxyz

又有時兼用大羅馬文字及小希臘字。

大羅馬文字。如 A B C D E F G H I J K L M N
O P Q R S T U V W X Y Z

小希臘文字。如 $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \omicron \pi \rho$
 $\sigma \tau \upsilon \phi \chi \psi \omega$ (此等字之發音。載於附錄) 然常用
者不過三十餘字。即

$a, b, c \dots \dots l, m, n \dots \dots p, q, r \dots \dots x, y, z.$

A, B, C $\dots \dots$ L, M, N $\dots \dots$ P, Q, R $\dots \dots$ X, Y, Z.

$\alpha, \beta, \gamma \dots \dots \theta, \iota, \mu \dots \dots \pi, \rho, \sigma \dots \dots \chi, \psi, \omega.$

據算術理。凡二數相乘。無論用如何之次第。其結果恆等。然此二數。若以二文字代之。則上所述之性質。其式為 $a \times b = b \times a$ 。理尤易曉。故代數學較算術簡。

代數學之文字。雖為任意之值。然在一演式中。其所代之數恆等。如 a 加 a 。無論 a 為如何之數。其數恆為 a 之二倍。

2. 符號 代數學所用之符號。與算術所用之符號同。惟有時宜將算術之符號擴張其義者。則臨時說明。茲不先及。

3. 加號 即 $+$ (讀爲「不拉式」(Plus)或讀爲加)置於數字或文字所代之數左,示加此數於左邊之數內。

如 $6+3$,加號在 3 左,故示將 3 加入左邊之 6 內,約言之,即加 3 於 6 ,又 $6+3+2$,即以 3 加於 6 ,其結果爲 $3+6$,再以 2 加於 $3+6$,約言之,即加 2 於其結果。

同理, $a+b$,即以 a 所顯之數加於 b 所顯之數,約言之,即加 b 於 a 。

4. 減號 即 $-$ (讀爲「買那式」(Minus)或讀爲減)置於某數左,示由左邊之數內減去某數。

如 $6-3$,示由 6 內減去 3 ,同理, $a-b$,示由 a 內減去 b ,又 $a-b+c$,示由 a 內減去 b ,更加 c 於其結果。

凡加減之運算,皆始於左而次及於右。

5. 乘號 即 \times (讀爲「因都」(Into)或讀爲乘)置於兩數之間,示以右數乘左數。

如 6×3 ,示以 3 乘 6 ,同理, $a\times b$,示以 b 乘 a ,又 $a\times b\times c$,示以 b 乘 a ,更以 c 乘其結果。

乘法之符號。其在二文字間或數字與文字間者。往往省其號而並記之。又有以點代之者。

如 ab 或 $a \cdot b$ 。其意義與 $a \times b$ 同。又 $2abc$ 或 $2 \cdot a \cdot b \cdot c$ 其意義與 $2 \times a \times b \times c$ 同。

6. 除號 即 \div (讀爲「禪」(by) 或讀被……除) 置於兩數之間。示左數被右數除。

如 $6 \div 3$ ，示 6 被 3 除。同理， $a \div b$ ，示 a 被 b 除。又 $a \div b \times c$ ，示 a 被 b 除。更以 c 乘其結果。

除法之演算。恆在被除數下畫一橫線。更書除數於其下。以顯之。

如 $a : b$ 。可代以 $\frac{a}{b}$ 。

乘除之運算。亦始於左而次及於右。

7. 積及因數 諸數相乘。其結果謂之連乘積。或單稱爲積。此諸數謂之積之因數。

如 $2abc$ 爲積。 $2, a, b, c$ ，各爲積之因數。

8. 係數 分積之因數爲二項。其中之一項。各爲他一項之係數。

如 $3abx$ ， 3 爲 abx 之係數。又 $3a$ 爲 bx 之係數。又 $3ab$ 爲 x 之係數。

又積之因數中之數字稱爲他諸因數之數字係數。

如 $3abx$, 3 乃 abx 之數字係數。

題 問 I.

求以下各式之數值。

1. $7+6+4=17$ 2. $5-3+4=6$ 3. $11+7-12-6=0$

4. $7 \times 6 \times 4$ 5. $5 \div 3 \times 4$ 6. $11 \times 7 \div 12 \div 6$

設 $a=1, b=2, c=3, d=4$, 求次之各式之數值。

7. $c-b$.

8. $d-a$.

9. $7a-3b$.

10. $10b-6c$.

11. $5a-2b+6c-4d$.

12. $13a-6b+7c-5d$.

13. $18b-3c-4d+9a$.

14. $20ab-3cd$.

15. $4da-2bc$.

16. $abc+cd+cd+cd+dab$.

設 $a=6, b=2, c=5, d=0$, 求以下各式之數值。

17. $3ac+2bc+ca$.

18. $7ad+9bc-3ca$.

19. $a \times c + b$.

20. $a+c \times b$.

21. $2c \div a \div b$.

22. $ad+bc$.

23. 有 $3x, 4bx, 5bcx, 16abcx$, 問 x 之係數如何。

24. 有 $4xy, 5axy, 7abxy, 19abcxy$, 問 xy 之係數如何。

又數字係數如何。

9. 乘方 凡積由一因數幾次自乘而成者。不拘其次數如何。均謂之此數之乘方。或單謂之方。

如 aa 爲 a 之 2 乘方。 aaa 爲 a 之 3 乘方。 $aaaa$ 爲 a 之 4 乘方。餘倣此。

又 aa 及 aaa 附以特名。即 aa 爲 a 之 平方。 aaa 爲 a 之 立方。

10. 指數 aa, aaa 等。更有簡略之記法如次。即 aa 記爲 a^2 。 aaa 記爲 a^3 。 $aaaa$ 記爲 a^4 。 $aaaa \dots$ 記爲 a^n (但 $aaaa \dots$ 爲因數 a 自乘 n 次之乘方)。 a 之右肩上所記之小數字或小文字。即示 a 之自乘之次數。

如 $aaabb$ 記爲 a^2b^2 。他準此。

小數字及小文字。乃指出因數次數之記號。故謂之指數。

如 a^n 乃指出因數 a 自乘 n 次。(即 a 之 n 乘方) 故 n 爲指數。

因數 a 爲 1 次者。不必記爲 a^1 。但記爲 a 。

11. 方根 某數之平方等於 a 。則某數謂之 a

之平方根。用記號 $\sqrt[2]{a}$ 記之。然 $\sqrt[2]{a}$ 常略為 \sqrt{a} 而 2 字從省。

如 2 之平方等於 4。故 2 為 $\sqrt{4}$

某數之立方等於 a 。則某數謂之 a 之立方根。用記號 $\sqrt[3]{a}$ 記之。

如 $3 = \sqrt[3]{27}$ 因 $3^3 = 27$ 故。

括而言之。某數之 n 方(但 n 為任意之整數)等於任意之數 a 。則某數謂之 a 之 n 乘根。用 $\sqrt[n]{a}$ 顯之。

符號 $\sqrt{\quad}$ 原由臘丁文 Radix 之首字 r 變化而成故謂之根號。

不能詳求之根。謂之根數。或謂之無理數。

如 $\sqrt{7}$ 及 $\sqrt[3]{4}$ 。即根數。或無理數。

如根數 $\sqrt{7}$ 。依算術求平方之法。雖能求其略近值。然在代數學內。則無庸求其略近值。何則。因以 $\sqrt{7}$ 自乘即為 7 故也。

12. 等號及不等號 符號 = (讀為「伊奇勒」(Equal)或讀為等於)置於兩數之間。示兩數相等。

如 $5+7=12$ 。即 5 加 7 等於 12。

符號 $>$ 置於兩數之間。示左數較右數大。

如 $a > b$ 即 a 較 b 大。

符號 $<$ 置於兩數之間，示左數較右數小。

如 $a < b$ 即 a 較 b 小。

又符號 \therefore 為何則或因字之略號。

符號 \therefore 為故字或所以之略號。

13. 代數式及項 以代數記號(即文字, 數字及符號)集合者謂之代數式, 或單謂之式。

代數式中以 $+$ 或 $-$ 連結之各部分, 謂之項。

如 $2a - 3bx + 5cy^2$ 為 $2a$, $-3bx$, 及 $5cy^2$ 三項結合之代數式。

14. 同類項 兩項中所含之文字, 彼此相同, 且各文字之乘方相等, 此二項謂之同類項。

如 $3ab^2x^3$ 與 $5ab^2x^3$ 為同類項。

又 $3a^2bx^3$ 與 $7a^2b^2x^3$, 其二項中所含之文字, 雖彼此相同, 然非同類項, 何則, 因二項中各文字之乘方, 彼此不相同故也。

15. 單項式及多項式 僅含一項之式, 謂之單項式, 含二項以上之式, 謂之多項式。

如 $5ab^2cx$ 為單項式, $a+b$ 為多項式。

由二項成之式。每謂之二項式。由三項成之式。每謂之三項式。

單項式及多項式。有時稱為單式及複式。

16. 括弧 取一代數式為一項則以括弧括之。而演算時。須先計括弧內諸項。然後計括弧外諸項。

括弧有(), { }, []三種。

如 $(a+b)c$ 為加 b 於 a ，更以 c 乘其結果。又 $(a+b)^3$ 為加 b 於 a 。而作其結果之立方。

又 $(a+2b)(c+3d)$ 為加 $2b$ 於 a ，並加 $3d$ 於 c ，而以第二之結果。乘第一之結果。

有時在所括之數上。畫一線以代括弧。此線名為括線。

如 $a+\overline{b-c}$ 與 $a+(b-c)$ 同。又 $\sqrt{\overline{a+b}}$ 與 $\sqrt{(a+b)}$ 同。
若無括弧及括線。則根號單屬於緊接其號之第一數。

如 $\sqrt{2a}$ 為 a ，乘 2 之平方根而 $\sqrt{2a}$ 則為 $2a$ 之平方根。

又 $\sqrt{a+x}$ 為加 x 於 a 之平方根。而 $\sqrt{a+x}$ 則為 a 與 x 之和之平方根。

注意
線括
弧

分數中在分子與分母間之線其用與括線同何則。因 $\frac{a+b}{12}$ 與 $\frac{1}{12}(a+b)$ 同故。

〔注意〕一代數式之各項。與在一括弧內之各項同。故以全體相加減。爲學者所當注意。

如 $a+bc-d\div e+f$ 式。在加法前當先以 c 乘 b 。在減法前。當先以 e 除 d 。故此式恰如 $a+(bc)=(d\div e)+f$

設 $a=4, b=3, c=1, d=0$ 。求次之四式之數值。

$$(1) 2a-bc+cd-6b\div a+\frac{2c}{a}, \quad (2) (a+b)^3(2b-3c)^2,$$

$$(3) a^3+b^3+c^3, \quad (4) \sqrt[3]{7a^3+(b+c)^3+d^3}.$$

此演算如次。

$$(1) 2a-bc+cd-6b\div a+\frac{2c}{a}$$

$$=2\times 4-3\times 1+1\times 0-6\times 3\div 4+\frac{2\times 1}{4}$$

$$=8-3+0-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

$$(2) (a+b)^3(2b-3c)^2=(4+3)^3(2\times 3-3\times 1)^2=7^3\times 3^2$$

$$=343\times 9=3087.$$

$$(3) a^3+b^3+c^3=4^3+3^3+1^3=64+3+1=68.$$

$$(4) \sqrt[3]{7a^3+(b+c)^3+d^3}=\sqrt[3]{7\times 4^3+4^3+0^3}$$

$$=\sqrt[3]{7\times 64+64+0}=\sqrt[3]{(448+64)}$$

$$=\sqrt[3]{512}=8.$$

問題 II.

1. 書 2^4 , 3^3 , 4^2 , 4^4 , $\sqrt{64}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{125}$, $\sqrt[6]{625}$, $\sqrt[5]{32}$ 之數值。

若 $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=5$. 求次之六式之數值。

2. a^2+b^2 . 3. c^2+d^2 . 4. $6a^2-2b^2$.
 5. $4b^2-c^2+5d^2$. 6. $a^2b^2+c^2d^2$ 7. $ab^2c^2-a^2bc$.

若 $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=5$. 求次之五式之數值。

8. $\frac{d^3}{5} - \frac{c^3}{3} + \frac{a^2b^2}{27}$. 9. $\frac{1}{9}bc + \frac{1}{8}ca + \frac{1}{7}ab$.
 10. $10c^2d^3 - 16a^2b^2$. 11. $\frac{1}{3}a^2b^2c^2 - \frac{1}{9}ab^2c^2d$.
 12. $\frac{ab^3c^4}{16} - \frac{a^4bc^2d}{27}$.

若 $a=5$, $b=3$, $c=1$, $d=0$. 求次之五式之數值。

13. $(2a+5b)(3b-6c)$. 14. $(a+2b)(c+2d)$.
 15. $(3a-4b)^2 - 2(3b-6c)^2 + 2(ad+bc)^2$.
 16. $4a^3+4b^3+4c^3 - 3(b+c)(c+a)(a+b)$.
 17. $5(a+c)^2(b-c)^2 - \frac{1}{25}(a-2d)^2(b+3c)^2$.
 18. 若 $x=2$ 又 $x=3$. 證 x^2-5x+6 等於零.
 19. 若 $x=2$ 又 $x=3$ 又 $x=\frac{1}{2}$. 證 $2x^3-11x^2+17x-6$

等於 0.

若 $a=5, b=4, c=\frac{1}{2}$ 。求次之七式之數值。

20. $\sqrt{a^2-b^2}$.

21. $\sqrt{5a}$.

22. $\sqrt{2bc+3a}$.

23. $\sqrt[3]{bc+a^2}$.

24. $\sqrt[3]{(2a^2+b^2-8c^2)}$.

25. $\sqrt[3]{(4a^2-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-1)}$.

26. $\sqrt{(a+b)}\sqrt[3]{(3ab+2bc)}$.

27. 若 $x=5, y=8, a=6, b=4$,

求 $(a+b)^2(x+y)^2-4(ax+by)(bx+ay)$ 之數值。

28. 若 $a=9, b=12, c=15, s=18$ 。問次式之數值幾何。

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

29. 若 $a=9, b=12, c=15$ 。及 $2s=a+b+c$,

求 $\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$ 之數值。

30. 若 $a=8, b=5, c=3$ 。問次式之數值幾何。

$$\sqrt{\{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4\}}.$$

31. (1) $a=6, b=3$, (2) $a=9, b=4$, (3) $a=12, b=7$.

證 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 。

32. (1) $a=3, b=2$, (2) $a=6, b=3$, (3) $a=5, b=2$.

證 $a^3-b^3, (a-b)(a^2+ab+b^2), (a-b)^3+3ab(a-b)$, 及

$$(a+b)^3-3ab(a+b)-2b^3 \text{ 皆互相等。}$$

第二編

正量及負量

17. 名數量 無論如何之量。皆以同類單位之倍數計算。其計算時。恆有種種區別。如計算金額有收入。支出。又有利益損失。如計算運動。一直線上。有相反對之二向。又如計算時刻有過去未來。又有特別之時前或時後。諸如此類。不遑枚舉。故凡量必有相反對之二種類。

18. 數之性質 凡名數量。無論為如何種類。 $+4$ 。俱顯其量增四單位。又 -4 。俱顯其量減四單位。

如計算人之財產則 $+4$ 。為其財產增四圓。即顯其人之所有金四圓。或貨金四圓。又 -4 。為其財產減四圓。即顯其人之負債金四圓。反之。如計算人之負債。則 $+4$ 。為增其負債。即顯其人之借債金四圓。又 -4 。為減其負債。即顯其人之所有金四圓。或貨金四圓。

又計算人之利益。則 $+4$ ，爲增其全利益。即顯四單位之利益。又 -4 ，爲減其全利益。即顯四單位之損失。反之。計算人之損失。則 $+4$ ，顯四單位之損失。又 -4 ，顯四單位之利益。

又由特別之點測方向之距離。則 $+4$ ，爲顯正方向四單位之距離。又 -4 ，顯反對方向四單位之距離。

19. 反對之種類 依以上諸例。 $+$ 及 $-$ 號。原用以區別量之正反對之種類者。即 $+4$ ，無論顯如何之量。而其 -4 ，必與之相反對。故在代數學內。 $+$ 及 $-$ 號。有全然相異之二意義。即一爲原來示加法，減法，演算之符號。一爲區別量之正反對之種類之符號是也。

20. 正符號及負符號 量前有 $+$ 符號者。謂之正量。量前有 $-$ 符號者。謂之負量。又 $+$ 謂之正符號。 $-$ 謂之負符號。

21. 性質之號 $+$ 及 $-$ 符號，置於量前，以示量之性質時。每謂之性質之符號。

又 $+$ 爲性質之符號時。往往從省。當某項之前無

+ 及 - 時。則 + 從省。

〔注意〕 代數學所用之符號雖多。然符號之名稱。多指 + 及 - 二符號言。如言某量之符號。即指在某量前之 + 或 -。又言變某式之符號。即變某代數式中在各項前之符號 + 爲 -，- 爲 +。

22. 絕對值 量之大小與符號 + 及 - 無關係者。謂之絕對值。

如昇 4 尺。降 4 尺。若不論上下之性質。其絕對值相等。

同理 +4 與 -4，若不論其單位如何。其絕對值亦相等。

加 法

23. 定義 求二量或諸量集合之結果。其法謂之加法。其結果謂之和。

正量生加。負量生減。故加一正量。則加其絕對值。加一負量。則減其絕對值。

如以 +4 加於 +6 得 $+6+4=+10$

而以 -4 加於 +6，則得 $+6-4=+2$

同理以 $+b$ 加於 a 得 $a+b$

以 $-b$ 加於 a 得 $a-b$

即 $a+(+b)=a+b$, $a+(-b)=a-b$.

故任意之項相加有次之法則,

〔法則〕 加任意之項。其符號不變。惟記此項於被加式之次。

〔例〕 如有人向前進 65 步。又由此向前進 -37 步。(即退後 37 步)問此人距原處幾步。

所求之步數乃代數學所謂二次步數之和。因欲得所求之和故加 -37 於 65, 而此演算, 以 $65+(-37)$ 顯之。由上文得 $65-37=28$ 。

當 a 及 b 已有數時。 $a+b$ 及 $a-b$ 之數值。自能求出。然必先知 a 及 b 之數。然後能求 $a+b$ 及 $a-b$ 之數。故 $a+b$ 與 $a-b$, 不能先求。凡在代數學內。謂加 $+b$ 於 a 。則單書為 $a+b$ 。謂加 $-b$ 於 a 。則單書為 $a-b$ 。於是加法遂完全。

24. 負數之結果 如 b 較 a 大。則 $a-b$ 不能為算術上之運算。何則。以無論如何之數。俱不能由較此數小之數減之故也。

設 $a=3$, $b=5$ 。則 $a-b$ 爲 $3-5$ 。而 3 原不能減去 5。然減 5 與減 3 又減 2 同。故 $3-5=3-3-2=-2$ 。此 -2 有二種之意義。(一) 爲由他代數式中減去 2 之式。(二) 爲表反對性質之二單位。然 -2 爲演算最後所得之結果。實屬於第二種。

然有時依量之種類。以得負結果爲無意義。

如計算邑之人口。若得負結果。則與人口之理不合。又得分數之結果亦然。

問題 III.

求次之各數之和

- | | | |
|------------------------------|--------------------------|-----------------|
| 1. 4 與 -3 | 2. 3 與 -2 | 3. 6 與 -3 |
| 4. 7 與 -8 | 5. 3 與 -11 | 6. -3 與 -9 |
| 7. 6, -2 與 7 | 8. -3, -2 與 5 | 9. $2a$ 與 $-3b$ |
| 10. $-3a$ 與 $-2b$ | 11. $5a$, $-6b$ 與 $-2c$ | |
| 12. $-3a$, $-4b$, 與 $7c$. | | |

25. 法則 依加法之性質。二以上之代數式不關於正負如何。故知加法無論用如何之次第相加。其結果恆等。

如計算人之家產其家產之各種(負債可視為負家產)無論用如何之次第記之其家產恆等。

又以代數式爲一全體加之與區分各項各別加之相同。而加任意之項。惟附記於式之次。其符號不變。

故得次之法則。

〔法則〕 加二以上之代數式。惟將式之各項依次加之。其符號不變。

如 $a+b$ 與 $c+d$ 之和爲 $a+b+c+d$ 。

又 $a-b+c$ 與 $d-e+f$ 之和爲 $a-b+c+d-e+f$ 。

26. 運算 所加諸項中有同類項。則加法之演算終當集爲一項得三例如次。

〔第壹例〕 諸同類項之符號相同。則其和與諸項同符號。且與諸項爲同類項。而其係數。爲諸項數字係數之算術和。

如以 $2a$ 與 $5a$ 次第相加。無論 a 爲如何之數。俱與加 $7a$ 同。

又以 $2ab$ 與 $5ab$ 次第相減。與減 $7ab$ 同。即

$$-2ab - 5ab = -7ab$$

〔第貳例〕 兩同類項之符號相異，則其和與兩項爲同類項，其係數等於兩項數字係數之算術差，而其符號與大項之符號同。

$$\text{如 } +5a - 3a = +3a - 3a + 2a = +2a$$

$$\text{又 } +3ab - 5ab = +3ab - 3ab - 2ab = -2ab$$

〔第參例〕 若爲正負種種之同類項，則將其中之正項悉依第壹例集爲一項，又負項亦悉依第壹例集爲一項，更由第貳例，集其所集得之兩項，則得所求之和。

如是，有數同類項，均可集爲一項。

如 $2a + 3b$ 與 $a - 5b$ 相加。

其和爲 $2a + 3b + a - 5b$ 。而此各項，可無論用如何之次第，故交換之，得 $2a + a + 3b - 5b$ 集其同類項，得

$$3a - 2b$$

又如求 $6a^2 - 6ab + 4b^2$ $2b^2 - ab - a^2$ ， $5ab - 9b^2 - 4a^2$ 之和。

其和爲 $6a^2 - 6ab + 4b^2 + 2b^2 - ab - a^2 + 5ab - 9b^2 - 4a^2$

$$= 6a^2 - a^2 - 4a^2 - 6ab - ab + 5ab + 4b^2 + 2b^2 - 9b^2$$

茲將 $6a^2$ ， $-a^2$ ， $-4a^2$ 三項，以心算集之，得 a^2 。同樣集他二種之同類項，得 $-2ab$ ， $-3b^2$ 。

故所求之和爲 $a^2 - 2ab - 3b^2$

27. 初學運算法 初學者或將各種之同類項列爲縱行加之亦可。

即如前例。可用下式記之。但 $2b^2$ 與 $5ab$ 之前無符號。故須置 + 號。與各種之同類項。以心算加之。

$$\begin{array}{r} 6a^2 - 6ab + 4b^2 \\ - a^2 - ab + 2b^2 \\ \hline -4a^2 + 5ab - 9b^2 \\ \hline a^2 - 2ab - 3b^2 \end{array}$$

問題 IV.

將次之各式集其同類項。而單簡之。〔1 至 6〕。

1. $2a + b + 3c + 2b + 3a + 2c + 5a + c.$

2. $6a - 3b + 2c - 4a - 3c + 2b.$

3. $5a^2 - 3a + 6 - 4a^2 + 6a + 3.$

4. $7a^3 - 4a + 9 - 3a^2 + 2a + 7 - 3a^3 - 16.$

5. $5a^3 - 4a^2b + 3ab^2 - 5a^3 - 4a^2b - 3b^3.$

6. $3a^2 + 6ab - 4b^2 - 2a^2 - 4ab + 3b^2 - a^2 - 2ab + b^2.$

加次之各式〔7 至 28〕。

7. $a + b$ 與 $a - b.$

8. $2x - y$ 與 $2x + y.$

9. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ 與 $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

10. $\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b$ 與 $\frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a.$

11. $a^2 - a$ 與 $a^3 + a$.
12. $a + a^2 + 4a^3$ 與 $2a^3 - a^2 - 4a$.
13. $m^2 + mn + n^2$ 與 $m^2 - mn - n^2$.
14. $3p^2 + 5pq - 6q^2$ 與 $5q^2 - 4p - 3p^2$.
15. $3a^2 - 2ab + b^2$ 與 $a^2 - 2ab - \frac{1}{2}b^2$.
16. $2a + b - 3c$, $2b + c - 3a$ 與 $2c + a - 3b$.
17. $4a - 3b - c$, $4b - 3c - a$ 與 $4c - 3a - b$.
18. $4a^2 - 3ab + b^2$, $4ab - 3b^2 + a^2$ 與 $4b^2 - 3a^2 + ab$.
19. $a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$, $b - \frac{1}{3}c + \frac{1}{4}a$ 與 $c - \frac{1}{4}a + \frac{1}{5}b$.
20. $4x - 2y + 1$, $-3x + 2 - y$ 與 $x + 3y - 3$.
21. $-4a - b + 2$, $2 + 8a - 5b$ 與 $-a - 4b - 2$.
22. $x^3 - 2x^2y - 2xy^2$, $x^2y - 3xy^2 - y^3$ 與 $3xy^2 - 2y^3 - x^3$.
23. $a^3 + 4b^3 - 5c^3 + 3abc$, $b^3 + 4c^3 - 5a^3 + 6abc$ 與 $c^3 + 4a^3 - 5b^3 - 9abc$.
24. $5a^3 - 2a^2b + 9ab^2 + 17b^3$, $-2a^3 + 5a^2b - 4ab^2 - 12b^3$,
 $b^3 - 4ab^2 - 5a^2b - a^3$ 與 $2a^2b - 2a^3 - 6b^3 - ab^2$.
25. $\frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2b + 3b^3$, $a^3 - \frac{1}{3}ab^2 - \frac{2}{3}b^3$ 與 $\frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{4}b^3$.
26. $3x^3 - 4x + 5$, $2x^2 - 6x + 7$, $6x^3 - 2x^2 - 2x$ 與 $3 + 8x - 4x^3$.
27. $x^3 - 3ax^2 + 5a^2x - a^3$, $2x^3 + 4ax^2 - 6a^2x$,
 $6ax^3 - 3a^2x + a^3$ 與 $-2x^3 + 4a^2x - 5a^3$.

28. $3x^2+y^2-3yz-z^2$, $2xy-3y^2+3yz$ 與

$$-4x^2-2xy+y^2+z^2.$$

29. 若 $x=b+2c-3a$, $y=c+2a-3b$, $z=a+2b-3c$
證 $x+y+z=0$.

30. 若 $a=5x-3y-2z$, $b=5y-3z-2x$, $c=5z-3x-2y$
證 $a+b+c=0$.

減 法

28. 定義 減法者。與加法反對之運算也。故減正量則生減。減負量則生加。由是減一正量。則減其絕對值。減一負量。則加其絕對值。

故由 +10 減 +4。當減去四單位。

即 $+10-4=+6$

又由 +10 減 -4。當增加四單位。

即 $+10+4=+14$

由是 $+10-(+4)=+10-4=+6$

又 $+10-(-4)=+10+4=+14$

同樣 $+a-(+b)=+a-b$

$$+a-(-b)=+a+b$$

故減任意之項。有次之法則。

〔法則〕 減任意之項。則變其符號。附記於被減式之次。

29. 證明 減法之法則。其證明如次。

減法者。與加法反對之運算也。故以同量同時相加減。原量無變更。即 a 與 $a-b+b$ 同。而由 $a-b+b$ 減 $+b$ 。餘 $a-b$ 。故由 a 減 $+b$ 。餘 $a-b$ 。

又由 $a+b-b$ 減 $-b$ 。餘 $a+b$ 。故由 a 減 $-b$ 。餘 $a+b$ 。

$$\text{即} \quad a - (-b) = a + b$$

〔例〕 (1) 由 -4 減 3 (2) 由 3 減 -4

(3) 由 4 減 -6 (4) 由 $-b$ 減 a (5) 由 $-b$ 減 $-a$

$$(1) \quad -4 - (+3) = -4 - 3 = -7$$

$$(2) \quad 3 - (-4) = 3 + 4 = 7 \quad (3) \quad 4 - (-6) = 4 + 6 = 10$$

$$(4) \quad -b - (+a) = -b - a \quad (5) \quad -b - (-a) = -b + a$$

30. 法則

減法者。與加法反對之運算也。而以任意之代數式爲一全體加之。與區分各項各別加之相同。故以一代數式爲一全體減之。與依次減其各項同。因得次之法則。

〔法則〕 由他之任意之代數式減任意之代數式。則變其減式之符號。依次附記之。

如由 $3a-4b+c$ 減 $2a+b-4c$, 其結果爲

$$\begin{aligned} 3a-4b+c-2a-b+4c &= 3a-2a-4b-b+c+4c \\ &= a-5b+5c \end{aligned}$$

31. 運算 有時將減式置於被減式下, 並將各同類項列成豎線, 而以心算變下式之符號, 然後組合其同類項。

如前款之例, 其記法如次。

$$\begin{array}{r} 3a-4b+c \\ 2a+b-4c \\ \hline a-5b+5c \end{array}$$

但此之結果諸項, 原爲以心算合 $3a$ 與 $-2a$, $-4b$ 與 $+b$, $+c$ 與 $-4c$ 而得者。

更舉其例如次。

由 $4a^3+a^2b-ab^2$ 減 $3a^3-4a^2b+2ab^2-b^3$

$$\begin{array}{r} 4a^3+a^2b-ab^2 \\ 3a^3-4a^2b+2ab^2-b^3 \\ \hline a^3+5a^2b-3ab^2+b^3 \end{array}$$

此結果之諸項, 爲合 $4a^3$ 與 $-3a^3$, 與 a^2b 與 $+4a^2b$, $-ab^2$ 與 $-2ab^2$, 0 與 $+b^3$ 而得者。

32. 正量或負量 以上顯量之文字原以

正數值爲限。然永存此制限。實不便利。故以後非言明以正量爲限者。則各文字。可爲無論正負之任意數值。

任意之文字。既可顯正量或負量。則前有 + 符號之項。其實不必爲正量。前有一符號之項。其實不必爲負量。

雖然。凡前有 + 符號者。仍稱爲正項。凡前有一符號者。仍稱爲負項。何則。蓋項之數值。雖不能定其爲正。或爲負。而由外形上視之。其項固爲正項或爲負項故也。

33. 任意量之加減法 今加項或減項。

其實不必爲正或爲負。則能爲加減之演算與否。不可不察。

設 b 爲正量。證 23 及 28 款之結果。即

$$+(+b) = +b, \quad +(-b) = -b, \quad -(+b) = -b, \quad -(-b) = +b,$$

而 b 爲負量。此定則亦合理。

今設 b 爲負量等於 $-c$ 。但 c 爲正。則

$$+b = +(-c) = -c, \quad -b = -(-c) = +c$$

何則。以 c 爲正故也。

由是。以 $-c$ 代 $+b$ 。以 $+c$ 代 $-b$ 。得

$$+(-c) = -c, +(+c) = +c, -(-c) = +c, -(+c) = -c.$$

而此四式無論 c 爲如何之正數值。俱合理。即 b 爲無論如何之負數值。俱合理。故上所述之定則合理。於是得次之定則。

項，無論爲正量或負量。可用全然相同之方法相加減。

34. 代數差 任意二量 a 與 b 之代數差云者。由 a 減 b 所得之結果也。

如 5 與 4 之代數差爲 $5-4=1$ 。

又 4 與 5 之代數差爲 $4-5=-1$ 。

二量之代數差。以二量之次序爲準。與算術差(即由大數減小數者)不同。

a 減 b 之算術差以記號 $a \sim b$ 顯之。

(定義) a 與 b 之代數差 $a-b$ 爲正。則 a 較 b 大。

依此定義。則 1, 2, 3, 4 等數。次第大 1。-1, -2, -3, -4 等數。次第小 1。又 7, 5, 1, 0, -5, -7, 其大遞降。

問題 V.

求次之各二式之差[1 至 18]。

1. $a+b$ 與 $a-b$.

2. $3a-2b$ 與 $2a-3b$.

3. $2x-y$ 與 $2x+y$.

4. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y$ 與 $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y$.

5. $4x-3x^2$ 與 $3x-4x^2$.

6. $1-2x^2$ 與 x^2-2 .

7. $2c+4b-3a$ 與 $4a-2b+3c$.

8. $2b^2+4ab-3a^2$ 與 $4a^2-2ab+3b^2$.

9. x^2+6x-7 與 $3x^2-4x+2$.

10. $3x^3-2x+5$ 與 $3x^3-2x^2+5$.

11. $b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{3}a$ 與 $a-\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}c$.

12. $\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}x^2$ 與 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{2}y^2$.

13. $a+2b$ 與 $a-2b$.

14. $3a-7b$ 與 $7a-3b$.

15. a^2+ab+b^2 與 a^2-ab+b^2 .

16. x^2-3xy 與 $3x^2-4xy$.

17. $3x^3+5x^2y+4xy^2$ 與 $4x^2y+6xy^2+7y^3$.

18. $2x^3-7x^2y+9xy^2-4y^3$ 與 $4x^3-x^2y+9xy^2-4y^3$.

19. $2a-3b$ 加如何之式則其和爲 $4a-6b$.

20. a^2+b^2 加如何之式則其和爲 $2a^2-ab$.

21. $5ab-2bc+3ca$ 加如何之式則其和爲 $7ab+2ca$.

22. $a^2+3b^2+2c^2$ 加如何之式。則其和爲 b^2-3a^2 。
23. 由 $3a-4b$ 減 $a+7b$, $-4a-6b$ 與 $6a-5b$ 之和。
24. 由 $3x^2-2x+7$ 減 x^2-x+9 , $2x^2+7x-6$ 及 $3x^2-4x-5$ 之和。
25. 以 $a^2-4ab-3b^2$, $ab-4b^2-3a^2$ 及 b^2-4a^2-3ab 之和由 $2a^2+2b^2+2c^2$ 減之。

括 弧

35. 加號括弧解法 欲示加一任意代數式之總體。則以此代數式置於括弧內。且置 + 符號於括弧左。然依加法理。加任意之代數式。其符號不變。惟附記於被加式之次。於是括弧之前置有 + 符號。其括弧。可隨時解去。

如
$$+(2a-b+c)=2a-b+c$$

反之。一式中之若干項。可用前有 + 號之括弧括之。

如
$$a-2b+c+2d-3e+f$$

可書爲
$$a+(-2b+c)+(2d-3e+f)$$

或
$$a-2b+(c+2d)+(-3e+f)$$

括弧內第一項之符號爲 +。則依前例。概從省。

36. 減號括弧解法 欲示減一代數式之總體。則以此代數式置於括弧內。且置一符號於括弧左。然依減法理。減任意之代數式。則變其符號。依次記於被減式之次。如是括弧前置有一符號。必悉變括弧內各項之符號。其括弧始可解去。

$$\text{如} \quad -(2a-b+c) = -2a+b-c$$

反之。一式中之各項。必悉變各項之符號。始可以前有一號之括弧括之。

$$\begin{aligned} \text{如} \quad & a-2b+c+2d-3e-f \\ & a-(2b-c)-(-2d+3e+f) \end{aligned}$$

37. 複雜括弧解法 有時括弧之內。又有括弧。則此諸括弧須用種種之形。以免混雜。

$$\text{如} \quad a-[b+\{c-(d+e)\}]$$

乃示加 $\{ \}$ 括弧內之全量於 b ，然後由 a 減之。而 $\{ \}$ 括弧內之量。原 d 與 e 相加。而取其和以減 c 。

如括弧有數雙。可依 35 及 36 款。每次解其一雙。至解盡為止。而初學者以由內面依次解之為佳。

$$\begin{aligned} \text{如} \quad & a-[b+\{c-(d+e)\}] = a-[b+\{c-d-e\}] \\ & = a-[b+c-d-e] = a-b-c+d+e \end{aligned}$$

問 題 VI.

解以下各式之括弧並集其同類項而單簡之。

1. $(a+b) - (a-b)$.
2. $a-b - (a+b)$.
3. $a - (b+c) + (b-c-a)$.
4. $3x - (y-2x) + (z+y-5x)$.
5. $x - \{y - (z-x)\}$.
6. $a - [a - \{a - (2a-a)\}]$.
7. $1 - [2 - \{3 - (4-5)\}]$.
8. $a+b - [a-b + \{a+b - (a-b)\}]$.
9. $5 - [4 + \{5 - (4 + \overline{5-4})\}]$.
10. $x - [y - \{z - (x - \overline{y-z})\}]$.
11. $3x - \{2y + 5z - \overline{3x+y}\}$.
12. $\{2x - (5y - \overline{3z+7})\} - [4 + \{x - (3y + 2z + 5)\}]$.
13. $[2a - \{3b + (4c - \overline{3b+2a})\}]$.
14. $s - (y-s) + \{2s - \overline{3y-5x}\}$.
15. $a - 2b - \{3a - (b-c) - 5c\}$.
16. $a - [3b + \{3c - (d-b) + a\} - 2a]$.
17. $3a - [2b - \{4c - 12a - (4b - 8c)\} - (6b - 12c)]$.

$$18. \{2x + (3y - 7z) + (3x - 2y + 9z)\} \\ - \{(y - 5x) - (3x - y - 2z) + 8z\}.$$

$$19. a^2 - (3ab - 4b^2) - (2a^2 - 3ab + 6b^2) \\ - \{5b^2 - (3ab - 7a^2 - b^2)\}.$$

$$20. (m^2 - n^2) - \{3mn - (5n^2 - m^2)\} \\ + [n^2 - \{3mn - (5m^2 - 6n^2)\} + 8mn].$$

第 三 編

乘 法

38. 定義 在算術中。乘法之定義如次。

曰。求若干個某數之和。(即以一數爲他數所含諸單位之數)其算法謂之乘法。

如以 4 乘 5。乃求四個五之和。(即以五爲四之單位數)設乘數爲分數。則乘法之定義不得不變更。因原定義祇能乘整數故也。故更得乘法之定義如次。

(定義) 以第二數乘第一數。則以第一數爲第二數之單位。

$$\text{如 } 4 \text{ 爲 } 1+1+1+1$$

$$\therefore 5 \times 4 \text{ 爲 } 5+5+5+5$$

又以 $\frac{3}{4}$ 乘 $\frac{5}{7}$ 。則先分 1 爲四等分。連取三次得 $\frac{3}{4}$ 。再以 $\frac{5}{7}$ 代此式中之一。即分 $\frac{5}{7}$ 爲四等分。得 $\frac{5}{7 \times 4}$ 。連取三次。得 $\frac{5 \times 3}{7 \times 4}$ 。

$$\begin{aligned} \text{又依同理 } (-5) \times 4 &= (-5) + (-5) + (-5) + (-5) \\ &= -5-5-5-5 = -20 \end{aligned}$$

依上之定義，則乘負數亦無困難。

設以 -5 乘 4 ，如下。

減 5 一次，與減 1 五次同。

$$\text{故} \quad -5 = -1 - 1 - 1 - 1 - 1$$

$$\therefore 4 \times (-5) = -4 - 4 - 4 - 4 - 4 = -20$$

又以 -4 乘 -5 ，則

$$-4 = -1 - 1 - 1 - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore (-5) \times (-4) &= -(-5) - (-5) - (-5) - (-5) \\ &= +5 + 5 + 5 + 5 = +20 \end{aligned}$$

此外無論整數，分數，正數，負數，其方法準此，故有次之法則。

〔法則〕 求兩數量之積，可先乘其絕對值，然後察視因數之符號。

$$\text{即} \quad \underline{a \times b = +ab \dots\dots\dots(1)}$$

$$\underline{(-a) \times b = -ab \dots\dots\dots(2)}$$

$$\underline{a \times (-b) = -ab \dots\dots\dots(3)}$$

$$\underline{(-a) \times (-b) = +ab \dots\dots\dots(4)}$$

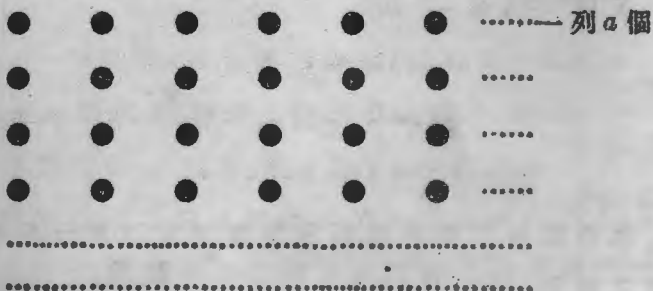
決定積之符號之法，謂之符號之法則，如次。

〔符號之法則〕 同號得正，異號得負。

39. 積之因數 積中諸因數。無論用何次序。

其結果恆等。又任取一數。(無論整數,分數)以他數乘之,其結果與以任取之數乘他數之結果同。算術中已證明,今更證之如次。

先設二數爲整數。以 a 及 b 表之。



b 列

如圖依次序排列諸黑點。而設每橫行中諸黑點之數爲 a 。諸縱行之數爲 b 。故計算此黑點之總計。先由橫行計之。則爲 b 倍 a , 即 $a \times b$ 。又由縱行計之。則爲 a 倍 b , 即 $b \times a$ 。

由是 a 及 b 俱爲整數。可證

$$a \times b = b \times a$$

次兩數爲分數。設爲 $\frac{5}{7}$ 與 $\frac{3}{4}$ 。

則依 38 款，得 $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{7 \times 4}$

及 $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7}$

而依上之證明，得 $\frac{5 \times 3}{7 \times 4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7}$

由是 $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$

故 a 及 b 爲正數。(無論整數分數) 恆得 $ab = ba$ 。而 $ab = ba$ 無論 a 與 b 爲如何之數值。皆能證其合理。故此公式。無論 a 與 b 爲正數，爲負數，爲整數，爲分數。俱能證其合理。何則。依前款。凡積之絕對值。與符號無關。又積之符號。與因數之次序無關。

如是。 a 及 b 無論爲如何之數。次之公式。恆能證其合理。 $ab = ba \dots \dots \dots (1)$

若於前圖黑點之位置置 c 。則 c 之總計爲 ab 。又第一列 c 之數爲 a 。如是者有 b 列故 a 與 b 爲整數。則 c 之 ab 倍。與將 c 之 a 倍取 b 次同。故以任意之二整數次第乘之。與以其積乘之同而此理不獨 a 與 b 爲整數始然。又不獨 a 與 b 爲正數始然。前已證明。茲不復贅。故 a, b, c 爲如何之數值。次之公式恆合理。

$$a \times b \times c = c \times (ab) \dots \dots \dots (2)$$

由(1)及(2)。無論因數若干個。其積之因數無論用何次第。結果俱無變更。

40 單項式之積 積中諸因數既不拘次第如何。故依此理求積。可少簡約。

如 $3a \times 4a = 3 \times 4 \times a \times a = 12a^2,$

$$(-3a) \times (-4b) = +3a \times 4b = +3 \times 4 \times ab = 12ab,$$

$$(ab)^2 = ab \times ab = a \times a \times b \times b = a^2b^2,$$

$$(\sqrt{2a})^2 = \sqrt{2a} \times \sqrt{2a} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times a \times a = 2a^2.$$

積之因數雖不拘次第如何。然用數字所表之因數恆置諸積首。而文字依 A, B, C 之次序列之。

41. 指數之法則 由定義

$$a^2 = aa, a^3 = aaa, a^4 = aaaa \text{ 等}$$

由是 $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = a^5 = a^{2+3}$

又 $a^3 \times a^5 = aaa \times aaaaa = a^8 = a^{3+5}$

及 $a \times a^4 = a \times aaaa = a^5 = a^{1+4}$

依上數例。則同文字兩個乘方之積之指數。等於其因數兩指數之和可知。此理無論指數為如何之整數。俱能合理。得證明如次。

由定義得 $a^m = aaaa \dots \dots$ 至 m 因數止。

及 $a^n = \text{aaaa} \dots \text{至 } n \text{ 因數止}$

$$\begin{aligned} \therefore a^m \times a^n &= (\text{aaa} \dots \text{至 } m \text{ 因數止}) \times (\text{aaa} \dots \text{至 } n \text{ 因數止}) \\ &= \text{aaa} \dots \text{至 } m+n \text{ 因數止} \end{aligned}$$

由定義得 $= a^{m+n}$

故 m 及 n , 無論爲如何之正數值, 必能得

$$\underline{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

此結果名爲指數之法則。

42. 單項式之積 依以上諸款所述之結果, 則求任意之單項式與他單項式之積, 得方法如次。

(1) 二量之符號俱正或俱負, 則積之符號爲正。二量之符號一正, 一負, 則積之符號爲負。

(2) 積之因數無論用如何之次第, 俱無差異。

(3) 同量任意兩個乘方之積之指數, 等於其因數兩指數之和。

[例 1] 以 $6a^2b^3$ 乘 $3a^2b^2$ 。

$$3a^2b^2 \times 6a^2b^3 = 3 \times 6 \times a^2 \times a^2 \times b^2 \times b^3 \quad \text{由 (2)}$$

$$= 18a^{2+2}b^{2+3} = 18a^4b^5 \quad \text{由 (3)}$$

[例2] 以 $-5ab^5$ 乘 $-3a^2b$ 。

$$(-3a^2b) \times (-5ab^5) = +3a^2b \times 5ab^5 \quad \text{由 (1)}$$

$$= 3 \times 5 \times a^2 \times a \times b \times b^5 \quad \text{由 (2)}$$

$$= 15a^{2+1}b^{1+5} = 15a^3b^6 \quad \text{由 (3)}$$

[例3] 以 $-5a^5b$ 乘 $2a^2b^3c^4$ 。

其二單項式之積。可用心算求之。故其結果。可直書出。即先書其結果之符號。次書數字係數之積。然後取二式中所含之各文字。令其指數為二因數中同文字之指數之和。

故 $2a^2b^3c^4$ 與 $-5a^5b$ 之積為 $-10a^7b^4c^4$

[例4] 求 $2a^2b$ 之立方。

此立方為 $2a^2b \times 2a^2b \times 2a^2b = 8a^6b^3$

問 題 VII.

求以下各二式之積[1乃至19]。

1. $3a, 6a.$ 2. $5a^2, 7a.$ 3. $2a^3, 5a^2$

4. $ab, a^2b^3.$ 5. $3a^2b, 2ab^2.$ 6. $4ab^3, 7a^4b^2.$

7. $3a^2bc^3, 6ab.$ 8. $5ab^3c^2, 3ab^2.$ 9. $2a^3b^2c, abc.$

10. $2a, -4b.$ 11. $3b, -4a.$ 12. $a^2, -a.$

13. $-6a^3b, 4ab.$ 14. $-2ab^3, -7a^5b^2.$

15. $-3a^2bc^2, 6ab^2c^5$ 16. $-3ab^2c, 2ab^2c^3$.
17. $-2xy^4, -5x^4y^3$, 18. $2ax^2y^3z, -5a^2xy^4z^2$.
19. $6a^3b^2c^3x^5y^4z, -12ab^3c^4x^2y^3z^5$.
20. 求 $(-a)^2, (-a)^3, (-a)^4$.
21. 求 $(-x^2)^2, (-x^2)^3, (-x^2)^4$.
22. 求 $(-ab)^2, (-ab)^3, (-ab)^4$.
23. 求 $(a^2b^3)^2, (a^2b^3)^3, (a^2b^3)^4$.
24. 求 $(-2a^3b^4)^2, (-2a^3b^4)^3, (-2a^3b^4)^4$.
25. 求 $3ab^2c^3, -2a^3bc^4, -4a^2b^3c^5$ 之各平方。
26. 求 $a^2, -a^4, ab$ 及 $-a^2b$ 之各立方。
27. 求 $2ab^2, -3a^3b^3, -4ab^5, -7a^2b^5c^4$ 之各立方。
28. 求 $(-a)^2 \times (-b)^3, (-2a)^3 \times (a^2)^2, (-ab^2)^3 \times (-a^2b)^5$
 $(a^2b^2)^3 \times (-ab^3)^4$.

若 $a=2, b=-3, c=-1, d=0$. 求以下各式之數值。

29. $6ab$. 30. $4abc$.
31. $8a^2b^2c^2$. 32. $ab+bc+ca$.
33. $a^3+b^3+c^3+d^3$. 34. $a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2$.
35. $3a^2b^2c^3+5b^2c^4$. 36. $2ab^2+3bc^2+4cd^2$.
37. $(a+b)(c+d)$. 38. $(a-b)^2(c-d)^2$.
39. $(a^2+bc)(b^2+cd)$. 40. $(a-b)^2(c-a)^2$.

43. 多項式 由是進言多項式之乘法。

先設任意之多項式爲 $a+b+c+\dots$ 但 a, b, c 等爲正或負之任意量。

如 $3x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - 7xyz$ 式由 23 款知與 $3x^2y - (-\frac{1}{2}xy^2) + (-7xyz)$ 同。故令 $3x^2y$ 爲 a , $-\frac{1}{2}xy^2$ 爲 b , $-7xyz$ 爲 c 。則上式爲所求之形明甚。

故欲就任意之代數式證明其定理。唯就 $a+b+c+\dots$ 式證明之可也。(但 a, b, c, \dots 爲正或負之任意量)。

44. 多項式與單項式之積 先以 $(a+b)c$ 證之。但 a, b, c 爲任意之數值。

若 c 爲正整數。而 a, b 爲任意之數值。則

$$\begin{aligned} (a+b)c &= (a+b) + (a+b) + (a+b) + \dots \text{至 } c \text{ 項止} \\ &= a+b+a+b+a+b+\dots \\ &= a+a+a+\dots \text{至 } c \text{ 項止} \\ &\quad + b+b+b+\dots \text{至 } c \text{ 項止} \\ &= ac+bc \end{aligned}$$

是故 c 爲正整數。則

$$(a+b)c = ac+bc$$

除法爲乘法之反對。故 c 爲正整數。則

$$(a+b) \div c = a \div c + b \div c$$

而乘法與除法之運算。其可用以乘除 $a+b$ 者。俱可用以乘除 a 與 b 。故以 $\frac{m}{n}$ 乘 $a+b$ 。其結果與以 $\frac{m}{n}$ 分乘 a 與 b 同。

故 c 無論爲如何之正數值。恆能得

$$(a+b)c = ac + bc$$

而此式不獨 c 爲正數值。始能合理。即 c 爲負數值亦能合理。

何則。若

$$(a+b)c = ac + bc$$

∴

$$-(a+b)c = -ac - bc$$

∴

$$(a-b)(-c) = a(-c) - b(-c)$$

是故不拘 a, b, c 之數值如何。恆得

$$(a+b)c = ac + bc$$

45. 法則 不拘 a, b, c 之數值如何。恆得

$$(a+b)c = ac + bc$$

故以 $x+y$ 代 a ，亦能合理。

是故 $\{(x+y)+b\}c = (x+y)c + bc = xc + yc + bc$

$$\therefore (x+y+b)c = xc + yc + bc$$

同樣 $(x+y+z+p+\dots)c = xc + yc + zc + pc + \dots$

但此理無論 $x+y+z+p+\dots$ 式中有若干項皆同。

〔法則〕 單項式與多項式之積。爲以單項式分乘多項式各項所得諸積之和。

〔例1〕 以 a 乘 a^2+a^3 。

此結果爲 $a^2 \times a + a^3 \times a = a^3 + a^4$

〔例2〕 以 c 乘 $a-b$ 。

此結果爲 $a \times c + (-b) \times c = ac - bc$

〔例3〕 以 $x-1$ 乘 $-3x^2$ 。

$-3x^2 \times (x-1) = (x-1) \times (-3x^2) = -3x^3 + 3x^2$

問 題 VIII.

求以下各二式之積。(1 至 14)

1. $a+b$ 與 3.

2. $2a-b$ 與 4.

3. $3a-4b$ 與 6.

4. a^2+a 與 a .

5. a^3-a 與 a^3 .

6. a^2+1 與 $3a^3$.

7. $4a^2-5a+1$ 與 a^4

8. $2a^2-3a-4$ 與 $-3a^3$.

9. $2a^2-3ab+2b^2$ 與 a^2b^2 .

10. $bc+ca+ab$ 與 abc .

11. $2x^3-3x^2+5x-4$ 與 $-5x^2$.

12. $4-3x^2+3x^3-4x^4$ 與 $-6x^3$.

13. $-5ab$ 與 $3a^2-2ab+7b^2$.

14. $-6a^3b^4$ 與 $2a^2-3a^2b-5b^2$.

化以下各式爲簡式。[15 至 23]。

15. $2(a-b)+4(a+b)$. 16. $\frac{1}{2}(b-2c)-\frac{1}{3}(c+2b)$.

17. $c(a+b)-c(a-b)$. 18. $7a(b-c)-2b(a-c)$.

19. $a^2b^2(c^2-d^2)+c^2d^2(a^2-b^2)+b^2c^2(d^2-a^2)$

20. $2\{3ab-4a(c-2b)\}$.

21. $3a-2\{b-\{2c-6a-2(b-2c)\}-3(b-2c)\}$.

22. $4a^3-[(2b^3-3c^3)-6bc(b+c)+3c(c^2+2b^2)]$.

23. $7ac-2\{2c(a-3b)-3(5c-2b)a\}$.

46. 多項式之積 由是更揭乘法之通例
(即任意多項式之乘法)如次。

如求 $(a+b+c+\dots) \times (x+y+z+\dots)$

據 43 款此積必能包含一切代數式之乘法。

今設 $x+y+z+\dots$ 爲 M 。則依前款得

$$(a+b+c+\dots)M = aM + bM + cM + \dots$$

$$= Ma + Mb + Mc + \dots \dots \dots (39 \text{ 節})$$

$$= (x+y+z+\dots)a + (x+y+z+\dots)b + (x+y+z+\dots)c + \dots \dots \dots$$

$$= ax + ay + az + \dots + bx + by + bz + \dots \\ + cx + cy + cz + \dots$$

故 $(a+b+c+\dots)(x+y+z+\dots) = ax + ay + az + \dots \\ + bx + by + bz + \dots + cx + cy + cz + \dots$

〔法則〕 任意兩多項式之積。爲以乘數各項乘被乘數各項所得諸積之和。

〔例〕 如 $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$

又 $(2a+5b)(3a+2b) = 2a \times 3a + 5b \times 3a + 2a \times 2b \\ + 5b \times 2b \\ = 6a^2 + 15ab + 4ab + 10b^2 \\ = 6a^2 + 19ab + 10b^2$

又求 $(a-b)(c-d)$

先記爲 $\{a+(-b)\}\{c+(-d)\}$ 。則其積爲

$$ac + (-b)c + a(-d) + (-b)(-d)$$

而此積依 38 款等於 $ac - bc - ad + bd$

〔注意〕 以上所舉兩代數式乘法之法則。其所謂項均包括項前之符號在內。

47. 要例 以下三式在代數學內。最爲緊要。學者宜熟記。

(1) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ba + ab + bb$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

〔定例〕 任意兩數量和之平方。等於其平方和。加其積之二倍。

$$\begin{aligned} (2) \quad (a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = aa + (-b)a + a(-b) \\ &\quad + (-b)(-b) = a^2 - ab - ab + b^2 \\ \therefore (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

〔定例〕 任意兩數量差之平方。等於由其平方和減其積之二倍。

$$\begin{aligned} (3) \quad (a+b)(a-b) &= aa + ab + (-b)a + (-b)b \\ &= a^2 + ab - ab - b^2 \\ \therefore (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

〔定例〕 任意兩數量之和與差之積。等於其平方之差。

48. 演算 乘方之演算。以下式爲便。

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab - b^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 \\ \hline a^4 + 2a^3b - a^2b^2 \\ \quad - 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 \\ \quad \quad + a^2b^2 + 2ab^3 - b^4 \\ \hline a^4 \quad \quad - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4 \end{array}$$

置乘數於被乘數之下。並在其下畫一橫線。以乘數之第一項 a^2 ，乘被乘數之各項 a^2 ， $+2ab$ ， $-b^2$ 。其

積爲 $a^4 + 2a^3b - a^2b^2$ 。記爲一橫列。次以乘數之第二項 $-2ab$ ，乘被乘數之各項。其積又記爲一橫列。但與前列同類之項。須記在一縱行。次又以乘數之末項 b^2 ，乘被乘數之各項。記其積爲第三之橫列。其與前二列之同類項。須同在一縱行。如是加此三列。諸部分之積。即得所求之結果。而此三列諸部分之同類項。俱同在一縱行。故易記其和。

49. 雜例 依前款之書法。更舉其例如次。

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 \quad - b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + \sqrt{2}b \\ a - \sqrt{2}b \\ \hline a^2 + \sqrt{2}ba \\ - \sqrt{2}ba - 2b \\ \hline a^2 \quad - 2b \end{array} \quad \begin{array}{r} a + b + c \\ a + b + c \\ \hline a^2 + ab + ac \\ + ab \quad + b^2 + bc \\ + ac \quad + bc + c^2 \\ \hline a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \end{array}$$

問 題 IX.

求以下各二式之積。

1. $x+2y$ 與 $x-2y$.
2. $a-3b$ 與 $a+3b$.
3. $2x+3y$ 與 $3x-2y$.
4. $5a+4b$ 與 $a-b$.

5. $x+7$ 與 $x+6$. 6. $x-7$ 與 $x-6$.
7. $x+7$ 與 $x-6$. 8. $a+9$ 與 $a-5$.
9. $2x-4$ 與 $2x+6$. 10. $3x-7$ 與 $2x-1$.
11. $2y+5b$ 與 $3y-4b$. 12. $3m^2-1$ 與 $3m^2+1$.
13. $2m^2+5n^2$ 與 $2m^2-5n^2$. 14. $a+\frac{1}{2}b$ 與 $a-\frac{1}{2}b$.
15. $2a+\frac{1}{3}b$ 與 $3a+\frac{1}{4}b$. 16. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b$ 與 $\frac{1}{4}a-\frac{1}{5}b$.
17. x^2+x+1 與 $x-1$. 18. x^2-x+1 與 $x+1$.
19. a^2+ab+b^2 與 $a-b$ 20. a^2-ab+b^2 與 $a+b$.
21. $4a^2+6ab+9b^2$ 與 $2a-3b$.
22. $16p^2+2Cpq+25q^2$ 與 $4p-5q$.
23. $x^3-3ax^2+2a^2x$ 與 $x+3a$.
24. $a^3-4a^2b+6ab^2$ 與 a^2+4ab .
25. x^3-3x^2+2x+1 與 x^2+3x+2 .
26. x^3+x^2-2x+1 與 x^2-x+2 .
27. x^2+xy+y^2 與 x^2-xy+y^2 .
28. $a^4+a^2b^2+b^4$ 與 $a^4-a^2b^2+b^4$.
29. $2x^3-3x^2y+2xy^2+y^3$ 與 $x^3+3xy+2y^2$.
30. $x^3-4x^2y+6xy^2-3y^3$ 與 $3x^2-4xy+5y^2$.

50 多項式之列法 於數項成立之式
內若諸項函有文字同而乘方異者則以最高次乘

方置爲第一項。而以次之高次乘方置爲第二項。以下依次置之。其不函文字者。置於最後。此全式謂之該文字之遞降乘方。

如 $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ 式。爲 a 之遞降乘方。同理又謂之 b 之遞昇乘方。

51. 被乘數及乘數之列法 被乘數與乘數之各項。無論用如何之次序列之。雖能求其積。然必以兩者俱依遞降乘方或遞昇乘方列之爲便。不然。則各種之同類項。不能同在一縱行。故換列之。多費周折而依上之方法列之。則同類項自同在一縱行。不生混雜。故求兩代數式之積。若非俱依遞降乘方或遞昇乘方列之者。則運算之前。須先如法列之。

52. 乘元 凡項爲 n 文字之積者。謂之 n 乘元。或謂之 n 次項。惟數字因數。不算入乘元之數。

如 abc 爲三乘元或三次項。又 $5a^2b^2c$ 即 $5aabbcc$ 爲五乘元或五次項。

53. 次 代數式之次數。以其式中最高次項之次數計之。亦有僅取一特別文字計之者。

如 ax^2+bx+c 稱爲 x 之二次式。

又 ax^2y+bxy^2 爲 x 及 y 之三次式。

一式之各項爲同次項者其式謂之等次式。

如 $a^3+3a^2b+5b^3$ 爲三次之等次式。

問題 X.

將以下各式依 a 之遞降方乘整列。[1至6]

1. a^2+b^2-2ab 2. $2-4a^2+5a+6a^3$.

3. $a^3+b^3+c^2b+ab^2$. 4. $5a^2-4-6a^3-2a$.

5. $a^3+b^3+c^3-3abc$.

6. $a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2$

7. 問以上各式之次數何如又孰爲等次式在

次之各式內將 x 各同方乘用括弧括之。[8至12]

8. $x^2+ax+bx+ab$. 9. $x^2-ax-bx-ab$.

10. $x^3+ax^2+bx^2+cx^2+bcx+cax+abx+acb$.

11. $ax^2+bx^2+cx^2+bcx+cax+abx+acb$.

12. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

13. 化 $(b+c-a)x+(c+a-b)x+(a+b-c)x$ 爲簡式。

14. 化 $(b-c)x+(c-a)x+(a-b)$ 爲簡式。

15. 化 $\{(b-a)x+(c-d)y\} + \{(a+b)x+(c+d)y\}$ 爲簡式

54. 等次式之積 任意兩等次式之積，亦爲等次式。何則，凡積中諸項，乃以乘數內各項乘被乘數內各項而得。而在兩單項式之積內，其所含乘方之次數，原爲兩單次式內諸元次數之和。故乘式中之各項爲等次式。被乘式各項亦爲等次式。則其積內各項，不得不爲等次式。

相乘之兩式，其爲等次式與否，學者宜注意。若兩式俱爲等次式，則所得之積，亦必爲等次式。若兩等次式之積非等次式，則知其演算有誤。

55. 公式 今更揭乘法之三要例如次。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \dots\dots\dots (3)$$

(定義) 用記號所表一般之結果，謂之公式。

前記之三公式，無論 a 及 b 爲如何之數，皆能合理。故以任意之代數量，或任意之代數式代 a 及 b 。

其結果亦恆合理。

代入公式所得之結果如下例。

先以 $-b$ 代 (1) 式之 b 。則

$$\{a + (-b)\}^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2,$$

即 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

故 (2) 實含於 (1) 之中

又 以 $b+c$ 代 (1) 之 b 。則

$$\{a + (b+c)\}^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2,$$

$$\therefore \{a+b+c\}^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2.$$

故 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \dots (4)$

又以 $-c$ 代 (4) 之 c 。則

$$\{a+b+(-c)\}^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2a(-c) + 2b(-c);$$

$$\therefore (a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc.$$

又以 $b+c$ 代 (3) 之 b 。則

$$\{a + (b+c)\} \{a - (b+c)\} = a^2 - (b+c)^2.$$

以下所舉之積可直求出。

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2)^2 - (b^2)^2 = a^4 - b^4.$$

$$(a-b+c)(a+b-c) = \{a - (b-c)\} \{a + (b-c)\}$$

$$= a^2 - (b-c)^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - b^2 + 2bc - c^2,$$

$$(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=a^4+a^2b^2+b^4.$$

56. 任意各項式之平方 求數量和之平方。既示於前款及第49款。而三以上諸數量和之平方。可用相同之法求之。

如求 $(a+b+c+d+\dots)(a+b+c+d+\dots)$

依上之證明。則任意兩代數式之積。等於以乘數各項。乘被乘數各項。諸部分積之和。故以乘數之第一項 a 。乘被乘數之第一項 a 。得 a^2 。同理得 b^2, c^2, d^2, \dots

又以乘數中之任意項 b 。乘被乘數中與此項相異之項 d 。則所得之項為 bd 。而以乘數中之 d 。乘被乘數中之 b 。其所乘得亦為 bd 。故有 $2bd$ 。同理得兩式中各異項之積。 $2ab, 2ac, \dots$ 。由是所求之平方為 $a^2+b^2+c^2+d^2+\dots+2ab+2ac+\dots+2bc+2d+\dots$

(法則) 凡若干數量和之平方。等於各數量平方之和。加諸兩相異數量積之二倍。

(例1) 求 $a+b+c$ 之平方。

此式各項之平方為 a^2, b^2, c^2 。而各相異二量之積為 ab, ac, bc 。

故 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

〔例2〕 求 $a+2b-3c$ 之平方。

所求之平方 $= a^2 + (2b)^2 + (-3c)^2 + 2a(2b) + 2a(-3c)$
 $+ 2(2b)(-3c) = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab - 6ac - 12bc$

〔例3〕 求 $(a-b+c-d)^2$ 。

$(a-b+c-d)^2 = a^2 + (-b)^2 + c^2 + (-d)^2 + 2a(-b) + 2ac$
 $+ 2a(-d) + 2(-b)c + 2(-b)(-d) + 2c(-d)$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd.$

以上諸例。學者苟能熟練。則演算時可省略中間諸算式。而直書其最後之結果。又使兩相異項盡括無遺。則以取式中之一項。與此項後之諸項連書之爲便。

問題 XI.

書以下各式之平方。(1至24)

1. $2a+b$
2. $4a+3b$
3. $3a-b$
4. $5a-6b$
5. a^2-5ab
6. $2a^2-3ab$
7. $-3xy+2y^2$
8. $4x^2-7y^2$
9. $a-b-c$
10. $2a+2b-c$
11. $4a+2b-3c$
12. $2a-5b-3c$
13. x^2+x+1
14. x^2-x+1
15. x^2-xy+y^2
16. $x^4+x^2y^2+y^4$
17. $a-b-c+d$

18. $a-2b-3c+3d$. 19. $3a+2b-4c+d$.
 20. $5a+b-4c-3d$.
 21. x^3+x^2+x+1 . 22. x^3-x^2+x-1 .
 23. $2x^3-x^2y+xy^2-3y^3$. 24. $2x^3-x^2y+2xy^2-y^3$.

求以下各二式之積 [25 至 36]

25. $x-y+z$ 與 $x-y-z$. 26. $x-2y+4z$ 與 $x-2y-4z$.
 27. $3x-y-5z$ 與 $3x+y-5z$ 28. $-x+2y-3z$ 與
 $x+2y-3z$.
 29. x^2+xy+y^2 與 x^2-xy+y^2 30. $3x^2-xy+2y^2$ 與
 $3x^2+xy+2y^2$.
 31. x^2-x+7 與 x^2-x-7 . 32. $2x^2-3x+7$ 與
 $2x^2+3x+7$.
 33. $a+b+c+d$ 與 $a+b-c-d$.
 34. $2a-3b+2c-4d$ 與 $2a-3b-2c+4d$.
 35. $2a+3b+c-2d$ 與 $2a-3b-c-2d$
 36. $a-3b-4c+d$ 與 $a+3b-4c-d$.

57. 連乘法 凡求諸代數式之連乘積。必先於諸式中任取其兩式。以求其積。所得之積。又以第三式乘之。以下依次屢乘。最後所得之結果。乃連乘積。

〔例一〕 求 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 之連乘積。

此演算如次

$$\begin{array}{r}
 x+a \\
 x+b \\
 \hline
 x^2+ax \\
 \quad bx \qquad +ab \\
 \hline
 x^2+(a+b)x+ab \\
 x+c \\
 \hline
 x^3+(a+b)x^2+abx \\
 \quad cx^2+c(a+b)x+abc \\
 \hline
 x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc
 \end{array}$$

若 $a=b=c$ 。則 $(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ 。

上之結果， x 之相同方乘之係數，用括弧括之。又依 x 之遞降方乘整列，乃整列代數式之通法。

〔例二〕 求 $x^2+a^2, x+a, x-a$ 之連乘積。

因子無論用何次序，其積無變更，故

$$\begin{aligned}
 \text{所求之積} &= (x+a)(x-a)(x^2+a^2) = (x^2-a^2)(x^2+a^2) \\
 &= x^4-a^4
 \end{aligned}$$

〔例三〕 求 $(x-a)^2(x+a)^2$ 。

因子無論用何次第，其積無變更，故

$$\begin{aligned}
 (x-a)^2(x+a)^2 &= (x-a)(x+a)(x-a)(x+a) \\
 &= \{(x-a)(x+a)\}^2 \\
 &= (x^2-a^2)^2 = x^4-2x^2a^2+a^4
 \end{aligned}$$

58. 二項式之乘方 用公式求二項式任意之乘方。其法稱為二項式之定理。詳於後編。今惟記二項式之平方及立方之公式。

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

問 題 XII

求以下各式之積。[1 至 26]

1. $3a^2 + ab - b^2$ 與 $a^2 - 2ab - 3b^2$.
2. $x^2 - xy - 3y^2$ 與 $3x^2 + xy - y^2$.
3. $5x^2 - 4x^2y + 3xy^2$ 與 $x^2 + 4xy + 6y^2$.
4. $x^2 - 7x^2y + 3xy^2$ 與 $x^2 + 7x^2y - 3x^2y^2$.
5. $3x^3 - 7x^2 + 5x - 3$ 與 $2x^3 + 7x^2 - 5x + 4$.
6. $a^3 + 3a^2 - 7a + 6$ 與 $3a^3 - a^2 + 5a - 4$.
7. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy + y^2$ 與 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - y^2$.
8. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy + 12y^2$ 與 $12x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2$.
9. $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$ 與 $a + b + c$.
10. $4a^2 + 9b^2 + c^2 - 3bc - 2ca - 6ab$ 與 $2a + 3b + c$.
11. $a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca - ab$ 與 $a + b - c$.

12. $9a^2 + b^2 + 9c^2 + 3bc - 9ca + 3ab$ 與 $3a - b + 3c$.

13. $x^2 + xy + y^2$ 與 $y^2 - xy + x^2$.

14. $a^2 - 2ab + 4b^2$ 與 $4b^2 + 2ab + a^2$.

15. $ax + a^2x^2 + a^3x^3$ 與 $a^2x^2 - ax + 1$.

16. $x^2 + 1, x + 1, x - 1$.

17. $a^2 + x^2, a + x, a - x$.

18. $x^2 + 4y^2, x + 2y, x - 2y$.

19. $9x^2 + 25y^2, 3x + 5y, 3x - 5y$.

20. $x^4 + y^4, x^2 + y^2, x + y, x - y$.

21. $(a^2 + b^2)^2, (a + b)^2, (a - b)^2$.

22. $(x^2 + x + 1)^2$ 與 $(x^2 - x + 1)^2$.

23. $x^2 - xy + y^2, x^2 + xy + y^2$ 與 $x^4 - x^2y^2 + y^4$.

24. $a^4 - a^2b^2 + b^4, a^2 + ab + b^2, a^2 - ab + b^2$.

25. $x^2 - ax + a^2, x^2 + ax + a^2, a + x, a - x$.

26. $x + y + z, -x + y + z, x - y + z, x + y - z$.

解以下諸括弧 [27 至 32],

27. $(2a + 3b)^2$. 28. $(2a - 3b)^2$. 29. $(3a - 2b)^2$.

30. $(a + b + c)^2$ 31. $(a - b + c)^2$. 32. $(a - b - c)^2$.

33. 證次之三式

(1) $(2x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 4x^2 + (x + 1)^2 + 1$.

$$(2) \quad (2x+1)^2 + (x+2)^2 = (x-2)^2 + 4x(x+3) + 1.$$

$$(3) \quad (x^2+x+1)^2 + (x^2-x+1)^2 = 2(x^4+3x^2+1).$$

$$\begin{aligned} \vee 34 \quad \text{證 } a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b) \\ &= (a+b) - 3ab(a+b) - 2b^3. \end{aligned}$$

35. 證次之式

$$\begin{aligned} (x+y)(x+z) + (y+z)(y+x) + (z+x)(z+y) \\ - (x+y+z)^2 = yz + zx + xy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 36. \quad \text{證 } (b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 - 3(b-c)(c-a)(a-b) \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 37. \quad \text{化 } (x+y+z)^2 - (-x+y+z)^2 + (x-y+z)^2 \\ - (x+y-z)^2 \text{ 爲簡式} \end{aligned}$$

38. 化次式爲簡式

$$\begin{aligned} (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) - yz(y+z) - zx(z+x) \\ - xy(x+y). \end{aligned}$$

證以下各式 [39 至 45],

$$39. \quad (b+c)(c+a)(a+b) + abc = (a+b+c)(bc+ca+ab).$$

$$40 \quad \text{若 } x=2y+5z \text{ 則 } x^3 = 8y^3 + 125z^3 + 30xyz.$$

$$\vee 41. \quad \text{若 } x=b+c-2a, y=c+a-2b, z=a+b-2c \text{ 則}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0$$

$$42. \quad a^3 + b^3 + c^3 + 3(b+c)(c+a)(a+b) = (a+b+c)^3.$$

$$43. \quad a^2(b+c)^2 + b^2(c+a)^2 + c^2(a+b)^2 + 2abc(a+b+c) \\ = 2(bc+ca+ab)^2.$$

$$44. \quad (a+b)^3 + 3c(a+b)^2 + 3c^2(a+b) + c^3 \\ = (b+c)^3 + 3a(b+c)^2 + 3a^2(b+c) + a^3.$$

$$45. \quad \{(a+b)x^2 - (a^2+b^2)x + a^3+b^3\} \\ \{(a-b)x^2 - (a^2-b^2)x + a^3-b^3\} \\ = (a^2-b^2)x^4 - 2(a^3-b^3)x^3 + 3(a^4-b^4)x^2 - 2(a^5-b^5)x + a^6-b^6.$$

第 四 編

除 法

59. 除法 乘法者。知兩因數而求其積。

除法者。知其兩因數之積及一因數而求他之一因數。故以 b 除 a 。即求在 $b \times c = a$ 關係式內之 c 。

60. 除法之法則 除法者。乘法之反對運算也。乘法連乘。可用任意之次第。(39款)故除法連除。亦可用任意之次第。

如
$$a \div b \div c = a \div c \div b$$

又依第 39 款。以任意之諸量。依次除之。與一次以其積除之同。

如
$$a \div b \div c = a \div (bc)$$

61. 乘除之法則 以任意之次第連除其所得之式無異。則以任意之次第或乘或除。其所得式亦無異。

如
$$a \times b \div c = a \div c \times b$$

何則。因
$$a = a \div c \times c$$

$$\begin{aligned} \therefore a \times b &= a \div c \times c \times b \\ &= a \div c \times b \times c \quad (\text{據 39 款}) \end{aligned}$$

故此各邊以 c 除之。則得 $a \times b \div c = a \div c \times b$ 由是二量之積。以第三量除之。與以第三量除其二量中之一量。而後以他一量乘之。其結果相同。

62. 分數式 除法之演算。每在被除式下畫一橫線。而書其除數於橫線下以示除。

如 $\frac{a}{b} = a \div b$ 。又有時以 a/b 代 $\frac{a}{b}$

若以 $\frac{a}{b}$ 式示 $a \div b$ 之分數。則 a 稱為分子。 b 稱為分母。

在 $a \times b \div c = a \div c \times b$ 式內。

設 $a=1$ 。則 $1 \times b \div c = 1 \div c \times b$

即 $b \div c = \frac{1}{c} \times b = b \times \frac{1}{c}$

故以任意之量 c 除。與以 $\frac{1}{c}$ 乘同。

63. 指數之除法 因 $a^3 \times a^2 = a^5$ 又 $a^5 \times a^3 = a^{10}$ 故依反對之理得 $a^5 \div a^2 = a^3 = a^{5-2}$ 又 $a^{10} \div a^3 = a^{10-3} = a^7$ 其他仿此。

由是以某文字之低方乘。除同文字之高方乘。則

其商之指數，等於被除數及除數上兩指數之差。

64. 除法之符號定則 在第38款已證得

$$a \times (-b) = -ab$$

$$\therefore (-ab) \div (-b) = a \quad \text{又} \quad (-ab) \div a = -b$$

又已證得 $(-a) \times (-b) = +ab$ 又 $(+a) \times (+b) = +ab$

$$\therefore (+ab) \div (-a) = -b \quad \text{又} \quad (+ab) \div (+a) = +b$$

由是。被除數與除數之符號相同。則其商之符號爲正。被除數與除數之符號相異。則其商之符號爲負。故除法之符號定則。與乘法之符號定則同。

65. 單項式之除法 依以上諸款之結果。可用任意之單項式除他之單項式。而其所謂結果蓋如次。

(1) 被除數與除數之符號相同。則商之符號爲正。被除數與除數之符號不相同。則商之符號爲負。

(2) 乘法與除法之演算。可用任意之次第。

(3) 以某文字之低方乘。除同文字之高方乘。則其商之指數。等於被除數與除數上兩指數之差。

(例1) 以 $6a^2b^3$ 除 $18a^4b^5$

$$18a^4b^5 \div 6a^2b^3 = 18 \div 6 \times a^4 \div a^2 \times b^5 \div b^3$$

$$= 3a^4 \cdot 2b^5 \cdot 3 \quad \text{依 (2)}$$

$$= 3a^2 b^2 \quad \text{依 (2)}$$

〔例 2〕 以 $-5ab^5$ 除 $15a^3b^6$

$$\begin{aligned} 15a^3b^6 \div (-5ab^5) &= -15 \div 5 \times a^3 \div a \times b^6 \div b^5 \\ &= -3a^{3-1}b^{6-5} \quad \text{依 (1) 與 (2)} \\ &= -3a^2b \end{aligned}$$

〔例 3〕 以 $-7a^3b^2c^4$ 除 $-5a^7b^5c^4$

以單項式除單項式。可用心算求之。而直書其結果。書結果時。當先書其結果之符號。次書以除數之數字係數。除被除數之數字係數所得之商。最後乃書被除數中之各文字。其指數等於被除數與除數各文字上指數之差。

如 $(-5a^7b^5c^4) \div (-7a^3b^2c^4) = +\frac{5}{7}a^4b^3$ 其所以不書 c 者。因 $c^4 \div c^4 = 1$ 故也。

若在上例求 $c^4 \div c^4$ 之商。則依第 63 款之定則。其結果為 c^0 。於此處多不知其意味如何。然 $c^4 \div c^4$ 稍知除法者。易知為 1。

66. 以單項式除多項式之法 以單項式除多項式。其所得之商。等于以單項式分除多項

式中各項所得諸商之和。

$$\text{如 } (a+b+\dots) \div x = a \div x + b \div x + \dots$$

因欲證明故以 x 乘之則

$$(a+b+\dots) \div x \times x = a+b+\dots;$$

$$\therefore (a \div x + b \div x + \dots) \times x = a \div x \times x + b \div x \times x + \dots \quad [44 \text{ 款}]$$

$$= a + b + \dots$$

是故 $(a+b+\dots) \div x = a \div x + b \div x + \dots$

〔例 1〕 以 a 除 $a^3 + 2a^2$

此結果爲 $a^3 \div a + 2a^2 \div a = a^2 + 2a$ 。

〔例 2〕 以 ax 除 $a^2x^2 - 3ax$

此結果爲 $a^2x^2 \div ax + (-3ax) \div ax = ax - 3$ 。

〔例 3〕 以 $3x$ 除 $12x^3 - 5ax^2 - 2a^2x$

此結果爲 $12x^3 \div 3x + (-5ax^2) \div 3x + (-2a^2x) \div 3x$

$$= 4x^2 - \frac{5}{3}ax - \frac{2}{3}a^2.$$

問 題 XIII.

於次之各題以後式除前式。

1. $10a, -5a.$

2. $-10b, 2b.$

3. $-2x, -3x.$

4. $a^2, -a.$

- | | |
|---|-------------------------------|
| 5. $8ab, -2b.$ | 6. $-4ab, 3a.$ |
| 7. $12a^2b^3, -ab^2.$ | 8. $-6x^2y^2, -4xy.$ |
| 9. $-3x^4y^3, 2xy^3.$ | 10. $25a^7b^6c^4, -5a^6bc^4.$ |
| 11. $-27a^9b^{11}c^4, -6a^9b^8.$ | 12. $abcd, -ab.$ |
| 13. $a^2b^3c^4d^7, -2ab^2cd^5.$ | 14. $8a^4x^2y^3z, 6ax^3y^4.$ |
| 15. $-3a^2b^6cx^7y^9, -2abcx^3y^5$ | 16. $3x^2-5ax, x.$ |
| 17. $5y^4-6y^3, -y^2.$ | 18. $4a^6-5a^5+2a^4, a^4.$ |
| 19. $12a^3+9a^4-6a^5, -3a^2.$ | |
| 20. $15a^4b^6-7a^3b^7+9a^2b^4, -3a^2b^3.$ | |

67. 多項式之除法 由是攷究除法之通例。即以多項式除多項式之法。

除法之目的。原在求如何之代數式。以除數乘之。則生被除數。

如以 $2a+b$ 除 $8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3$ 。必先將被除數與除數之公共文字。依遞降乘方或遞昇乘方列之。然後所得之商。乃亦依同樣之乘方序列。

如本式。乃依 a 之遞降乘方列之。而被除數 a 之最高次項。原為除數與商中 a 之最高次項之積。由是 $8a^3 \div 2a = 4a^2$ ，是為商之第一項。抑以 $4a^2$ 乘除數

由被除數減之。則餘數爲 $4a^2b + 4ab^2 + b^3$ 。又此餘數。原爲除數與其商之他諸項之積。故餘數之第一項 $4a^2b$ 。必爲除數之第一項與其商之次項之積。由是 $4a^2b \div 2a = 2ab$ 。是爲商之第二項。又以 $2ab$ 乘除數。由前之餘數減其積。則第二之除數爲 $2ab^2 + b^3$ 。同樣 $2ab^2 \div 2a = b^2$ 。是爲商之第三項。而以 b^2 乘除數。由第二之餘數減之。適盡無餘。是即經第三回減法之後。不復更有餘式。故被除式必等於以上諸減式之和。然今依次減三次。原爲以 $4a^2 + 2ab + b^2$ 乘除數之數。故合之則爲除數與 $4a^2 + 2ab + b^2$ 之積。即與被除數等。

故所求之商爲 $4a^2 + 2ab + b^2$

此演算如次

$$\begin{array}{r}
 2a+b) 8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3 \quad (4a^2+2ab+b^2) \\
 \underline{8a^3+4a^2b} \\
 4a^2b+4ab^2+b^3 \\
 \underline{4a^2b+2ab^2} \\
 2ab^2+b^3 \\
 \underline{2ab^2+b^3} \\
 0
 \end{array}$$

依上例。以多項式除多項式。其法如次。

(1) 被除數與除數俱當依其公共文字之遞降

或遞昇乘方整列。

(2) 以除數之第一項除被除數之第一項。其所
得者爲商之第一項。

(3) 以商之第一項乘除式。由被除式減之。

(4) 以餘數爲新被除數。依前法屢求之。

68. 雜例 更舉二三例如次。

〔例1〕 以 $1-x$ 除 $3x^3-4x^2+2x-1$ 。

先將除數諸項之次序。換爲 $-x+1$

$$\begin{array}{r}
 -x+1) 3x^3-4x^2+2x-1 \quad (-3x^2+x-1 \\
 \underline{3x^3-3x^2} \\
 \quad -x^2+2x-1 \\
 \quad \underline{-x^2+x} \\
 \qquad \quad x-1 \\
 \qquad \quad \underline{x-1} \\
 \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}$$

〔例2〕 以 a^2+b^2 除 $a^4-a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4$ 。

$$\begin{array}{r}
 a^2+b^2) a^4-a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4 \quad (a^2-ab+b^2 \\
 \underline{a^4+a^3b^2} \\
 \quad -a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4 \\
 \quad \underline{-a^3b} \qquad \quad -ab^3 \\
 \qquad \qquad \quad +a^2b^2 \qquad \quad +b^4 \\
 \qquad \qquad \quad \underline{+a^2b^2} \qquad \quad +b^4 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}$$

〔例3〕 以 a^2-ab+b^2 除 $a^4+a^2b^2+b^4$ 。

$$\begin{array}{r}
 a^2 - ab + b^2 \Big| a^4 \qquad + a^2 b^2 \qquad + b^4 (a^2 + ab + b^2) \\
 \underline{a^4 - a^2 b + a^2 b^2} \qquad \qquad \qquad \\
 \qquad + a^3 b \qquad \qquad \qquad + b^4 \\
 \underline{\qquad + a^3 b - a^2 b^2 + ab^3} \qquad \qquad \qquad \\
 \qquad \qquad \qquad + a^2 b^3 - ab^3 + b^4 \\
 \underline{\qquad \qquad \qquad + a^2 b^3 - ab^3 + b^4}
 \end{array}$$

如是將被除數之各項離置者。因欲 a 之遞降乘方不變。且使同類項同在一縱行故也。然不如是。或將各除數依 a 之遞降乘方整列亦可。

69. 公式 次之公式俱甚緊要。故宜熟記。(但此等公式證之甚易)

$$(x^2 + 2ax + a^2) \div (x + a) = x + a,$$

$$(x^2 - a^2) \div (x - a) = x + a,$$

$$(x^2 - 2ax + a^2) \div (x - a) = x - a,$$

$$(x^3 - a^3) \div (x - a) = x^2 + ax + a^2,$$

$$(x^3 + a^3) \div (x + a) = x^2 - ax + a^2,$$

$$(x^4 - a^4) \div (x - a) = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3,$$

$$(x^4 + a^4) \div (x + a) = x^3 - ax^2 + a^2x - a^3.$$

問 題 XIV.

在以下各題內俱用後式除前式。

1. $x^2 - 5x + 6, x - 2.$

2. $x^3 + 5x - 24, x + 8.$

3. $x^2 - 23x + 132, x - 11.$ 4. $x^2 - 4x - 77, x + 7.$
 5. $3x^2 - 4x - 4, x - 2.$ 6. $3x^2 - 11x + 10, 3x - 5.$
 7. $a^2 - b^2, a - b.$ 8. $x^2 - 9y^2, x - 3y.$
 9. $x^2 - 16y^2, x + 4y.$ 10. $9x^2 - 64y^2, 3x + 8y^2.$
 11. $x^2 - 4y^4, x - 4y^2.$ 12. $\frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{16}a^6, \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}a^3.$
 13. $3x^2 + 8x + 4, 6x + 12.$ 14. $x^2 - \frac{1}{12}x - 1, 4x + 3.$
 15. $a^3 - b^3, a - b.$ 16. $8a^3 + 27b^3, 2a + 3b.$
 17. $a^3x^3 + b^3y^3, ax + by.$ 18. $8a^6x^6 - 125y^6, 2a^2x^2 - 5y^2.$
 19. $x^3 - 8x - 3, 3 - x.$ 20. $2x^3 - 5x^2 + 4, 2 - x.$
 21. $2x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 5x + 6, 3 - x.$
 22. $x^4 + 2x^2 - x + 2, 1 - x + x^2.$

70. 例解 式中諸項之整列法最宜注意。今舉其例於次。

[例1] 以 $a - 2b - 3c$ 除 $2a^2 - 2b^2 - 3c^2 - 5bc - 5ca - 3ab.$

如本例。凡含二文字以上之式。不獨當依 a 之遞降乘方列之。更當依他文字列之。如 b 皆置於 c 前。是也。故列得諸項如次。

$$\begin{array}{r}
 a-2b-3c \quad 2a^2-3ab-5ac-2b^2-5bc-3c^2(2a+b+c) \\
 \underline{2a^2-4ab-6ac} \\
 \quad ab+ac-2b^2-5bc-3c^2 \\
 \quad \underline{ab \quad -2b^2-3bc} \\
 \quad \quad +ac \quad -2bc-3c^2 \\
 \quad \quad \underline{+ac \quad -2bc-3c^2}
 \end{array}$$

(例2) 以 $a+b+c$ 除 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 。

先將被除數依 a 之遞降乘方整列且 b 皆在 c 前。

$$\begin{array}{r}
 a+b+c \quad a^3-3abc+b^3+c^3(a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2) \\
 \underline{a^3+a^2b+a^2c} \\
 \quad -a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3 \\
 \quad \underline{-a^2b-ab^2-abc} \\
 \quad \quad -a^2c+ab^2-2abc+b^3+c^3 \\
 \quad \quad \underline{-a^2c \quad -abc-ac^2} \\
 \quad \quad \quad +ab^2-abc+ac^2+b^3+c^3 \\
 \quad \quad \quad \underline{+ab^2 \quad +b^3+b^2c} \\
 \quad \quad \quad \quad -abc+ac^2-b^2c+c^3 \\
 \quad \quad \quad \quad \underline{-abc \quad -b^2c-bc^2} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad ac^2+bc^2+c^3 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \underline{ac^2+bc^2+c^3}
 \end{array}$$

如用括弧括之上之演算。尤覺簡便。如次

$$\begin{array}{r}
 a+b+c \quad a^3-3abc+b^3+c^3(a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2)) \\
 \underline{a^3+a^2(b+c)} \\
 \quad -a^2(b+c)-3abc+b^3+c^3 \\
 \quad \underline{-a^2(b+c)-a(b+c)^2} \\
 \quad \quad a(b^2-bc+c^2)+b^3+c^3 \\
 \quad \quad \underline{a(b^2-bc+c^2)+(b+c)(b^2-bc+c^2)}
 \end{array}$$

(例3) 以 $a-b$ 除 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 。先將

被除數依 a 之遞降乘方整列如次

$$\begin{array}{r} a-b \left) \begin{array}{l} a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + b^2c - bc^2 \\ a^2(b-c) - ab^2 - bc^2 \end{array} \right. \left(\begin{array}{l} a(b-c) - a(b-c) \\ -a^2(b-c) + ab^2 - bc^2 \end{array} \right) \\ \hline \begin{array}{l} -a^2(b-c) + ab^2 - bc^2 \\ -a^2(b-c) + ab^2 - bc^2 \end{array} \end{array}$$

71. 除法定義之擴張 依第 67 款所述除法之演算。其用第一回之減法時。減式中所含 a 之最高次項。必與被除數中所含 a 之最高次項相同。故第一回減得之餘數。其式中 a 之最高次數必較被除數中 a 之最高次數低。由是每一餘數。其式中 a 之最高次數。必較前一餘數中 a 之最高次數低。依是屢除。必至無餘數而後已。即有餘數。其餘數中 a 之最高次數。必較除數中 a 之最高次數低。則被除式之 a 必至不能整除。

故除法之定義。必擴張然後便。

〔定義〕 以 B 除 A 云者。求 $B \times C = A$ 代數式之 C。或 A 與 $B \times C$ 之差。其特別文字之次數較除數 B 內此特別文字之次數低時。而求其 C 也。

〔例 1〕 若以 $x+a$ 除 $x^2+3ax+a^2$ 。則如次。

$$\begin{array}{r}
 x+a)x^2+3ax+a^2(x+2a \\
 \underline{x^2+ax} \\
 +2ax+a^2 \\
 \underline{+2ax+2a^2} \\
 -a^2
 \end{array}$$

故 $(x^2+3ax+a^2) \div (x+a) = x+2a$ 餘數為 $-a^2$ 記之
如次

$$x^2+3ax+a^2 = (x+2a)(x+a) - a^2$$

又改換被除數與除數之次序。則

$$\begin{array}{r}
 a+x)a^2+3ax+x^2(a+2x \\
 \underline{a^2+ax} \\
 2ax+x^2 \\
 \underline{2ax+2x^2} \\
 -x^2
 \end{array}$$

故除法有餘數者。若變其被除數與除數之次序。
則其結果恆不相同。是無他。第一式之所求。蓋為以
如何之式乘除數至含 x 之項止。乃能與被除數相
合。而第二式之所求。乃為以如何之式乘除數。至含
 a 之項止。乃能與被除數相合。故也。

是故以一式除他式。苟兩式俱依相同之次序整
列。則其求得之商恆有一定可知。

問 題 XV.

以下各題俱以後式除前式。

1. $x^4+x^2+1, x^2+x+1.$ ~~$=x^2$~~
2. $1+x^4+x^8, 1-x^2+x^4.$
3. $x^4+4x^2+16, x^2+2x+4.$
4. $16x^4+36x^2+81, 4x^2-6x+9.$
5. $x^4+2x^2+x+2, x^2+x+1.$
6. $2x^4-x^3+x^2+1, 1-x+x^2.$
7. $x^5-4x^3+2x-4, 2-x.$
8. $x^6-3x^2-52, 2-x.$
9. $1-x+5x^2-3x^4, 1-2x+3x^2.$
10. $x^6+2x^5-4x^4-2x^3+12x^2-2x-1, x^2+2x-1.$
11. $1-4x^3+3x^4, (1-x)^2.$
12. $1-5x^4+4x^5, (x-1)^2.$
13. $35+4x-16x^2+19x^3-6x^4, 7+5x-3x^2.$
14. $3x^5-12x^4+17x^3-9x^2+1, (1-x)^3.$
15. $x^5-5x^2+5x-1, 1+x^2-2x.$
16. $16x^6-97x^4-84x^2+77x+8, 4x^2+11x+1.$
17. $1+2x^5+x^6+2x^7, 1+x+x^2.$
18. $x^{10}+x^5+1, x^2+x+1.$
19. $6x^5-7x^4y+x^3y^2+20x^2y^3-22xy^4+8y^5, 2x^2-3xy+4y^2.$

$$20. \quad 8y^5 - 22xy^4 + 20x^2y^3 + x^3y^2 - 7x^4y + 6x^5, 4y^2 - 3xy + 2x^2$$

$$21. \quad x^2 - y^2 - xz + yz, x - y.$$

$$22. \quad x^2 - y^2 + 2xz - 2yz, x - y.$$

$$23. \quad a^2 - b^2 + ac - bc, a + b + c.$$

$$24. \quad x^2 - y^2 - z^2 + 2yz, y - z - x.$$

$$25. \quad a^2 - 4b^2 - c^2 - 4bc, 2b + c - a.$$

$$26. \quad a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 12bc - 6ca + 4ab, 3c - 2b - a.$$

$$27. \quad 2a^2 - 2b^2 - 2c^2 - 4bc + 3ca + 3ab, a + 2b + 2c.$$

$$28. \quad 3a^2 - 16b^2 - 4c^2 + 20bc - 11ca + 8ab, a + 4b - 4c.$$

$$29. \quad x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz, x + y - z.$$

$$30. \quad 8x^3 - y^3 + z^3 + 6xyz, y - z - 2x.$$

$$31. \quad 27a^3 - 8b^3 + c^3 + 18abc, 3a - 2b + c.$$

$$32. \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - c^3, a + b + c.$$

$$33. \quad a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2, a + b + c.$$

$$34. \quad (x+1)^3 + y^3, x + y + 1.$$

$$35. \quad (x^2 - yz)^3 + 8y^2z^3, x^2 + yz.$$

$$36. \quad (a^2 - 2yz)^3 - 27y^2z^3, x^2 - 5yz.$$

$$37. \quad 9a^2 + 8ab + b^2 - 4c^2 - 4cd - d^2, 3a + b - 2c - d.$$

$$38. \quad x^3 + (4ab - b^2)x - (a - 2b)(a^2 + 3b^2), x - a + 2b.$$

39. $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$, $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$
40. $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$, $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$

雜題 I.

(A.) 1. 設 $x = -1, y = 0, z = 1$. 問次式之數值幾何。

$$(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2$$

2. $3a^2 - 2ca - 2ab, 2b^2 + 3bc + 3ba, c^2 - 2ac - 2bc$ 相加。

3. 證 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc - a(a^2 - bc) - b(b^2 - ca) - c(c^2 - ab) = 0$.

4. 以 $\frac{1}{2}x + 3$ 乘 $2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

$$\text{以 } \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy + y^2 \text{ 乘 } \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2$$

5. 化 $(x+1)(x+2)(x+3) - (x-1)(x-2)(x-3)$ 爲簡式。

6. 以 $1 - 2x + x^2$ 除 $2 - 12x^5 + 10x^6$.

(B.) 1. 設 $a = 11, b = 3, c = 6$ 問 $c^2 + b(c+a)$ 及 $\sqrt{2bc} - a$ 之數值幾何。

2. 由 $5b^4 - 3ab^3 + 4a^2b^2$ 減 $5a^4 - 3a^3b + 4a^2b^2$

3. 化 $x - (1 - \sqrt{1-x})$, $3x - \sqrt{7-4x}$ 及 $b - 2a -$

$\{c - a - (b - a + c)\}$ 爲簡式。

4. 以 $x^2 + \frac{1}{2}$ 乘 $9x^2 - 1$, 以 $a + b - c$ 乘 $a + b + c$.

5. 證 $2(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2$.

6. 以 $x + y - 1$ 除 $x^3 - 3x^2 + 3x + y^3 - 1$.

(C) 1. 設 $a = 4, b = 3, c = -2$

求 $\frac{\sqrt{a^2 + 2bc}}{a} + \frac{\sqrt{b^2 + ca}}{b} + \frac{\sqrt{c^2 + ab}}{c}$ 之數值幾何。

2. $3a^2b - 5ab^2 + 7b^3, 2a^3 - \frac{1}{2}a^2b + 5ab^2 - \frac{4}{3}b^3$ 相加。

3. 以 $ax^2 + x + a$ 乘 $ax^2 - x + a$ 又乘 $2a + b - 3c$ 之平方。

4. 化 $(x + y)^2 - (x + y)(x - y) - \{x(2y - x) - y(2x - y)\}$ 爲簡式。

5. 二代數式之積爲 $x^6 + x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + y^6$ 其一爲 $x^2 + xy + y^2$ 求他之一式。

6. 證以下二式。

$$(1) a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0,$$

$$(2) a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) +$$

$$(b - c)(c - a)(a - b) = 0.$$

(D.) 1. 設 $a=1, b=2, c=-3$ 求以下二式之數值

$$6a+3b+4c, a^3+b^3+c^3-3abc.$$

2. 化 $3\{x-2(y-z)\} - [4y + \{2y - (z-x)\}]$ 爲簡式。

3. 加如何之式於 $(a+b+c)^2$ 則其和爲

$$(a-b-c)^2$$

4. 以 $a-b$ 乘 a^3+b^3 而以 $a+b$ 除其結果。

5. 以 $x+z$ 除 x^3+z^3 之結果。而求以 $x+y+z$

除 $(x+y)^3+z^3$ 之商。

6. 證

$$(1) (x+y)(x-y) + (y+z)(y-z) + (z+x)(z-x) = 0,$$

$$(2) (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$$

$$= 2(x-y)(x-z) + 2(y-z)(y-x) + 2(z-x)(z-y).$$

1. 設 $a=3, b=4, c=5, d=6$.

求 $\frac{2\sqrt{(a^2+b^2)} + \sqrt[3]{(a^2+b^2-c^2+6d^2)}}{d-c+b-a}$ 之數值。

2. 化以下二式爲簡式。且以其兩結果相乘。

$$4x - (y-x) - 3\{2y - 3(x+y)\},$$

$$2x - 3y - 4(x-2y) + 5\{3x - 2(x-y)\}.$$

3. 證 $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ 且設 $a=1, b=-2$

時該結果合理否。

4. 求在 $x^2 - (a-b)x - ab$ 與 $x^2 + (a+b)x + ab$ 之積內 x^2 之係數。

5. 以 $a+b$ 除 $(2a+3b)^2$ 及 $(3a+2b)^2$ 之差。

又以 $a-b$ 除 $(2a-3b)^2$ 及 $(3a-2b)^2$ 之和。

6. 證 $(a+b+c-d)(a+b-c+d)$

$$+ (a-b+c+d)(-a+b+c+d) = 4(ad+cd).$$

(F.) 1. 設 $a=3, b=4, c=5, d=-4$

求 $\frac{(a+b)(c+d) - (b+c)(d+a)}{ab+bc-cd-da}$ 之數值。

2. 求 $(a-x)(a-\frac{1}{2}y)(a-\frac{1}{3}z)$ 。

3. 設以 $x+4$ 能除盡 x^2+7x+c 問 c 之數值幾何。

4. 以 $x+y-z$ 除 $x^2-y^2-z^2+2yz$ 且求在以 $x-\frac{1}{2}y$ 除 $8x^4+xy^3-y^4$ 所得之商中 x 之係數。

5. 證 $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$ 。

6. 證 $(b-c)^2 + (a-b)(a-c) = (c-a)^2 + (b-c)(b-a) = (a-b)^2 + (c-a)(c-b)$ 。

(G.) 1. 化 $5x-3[2x+9y-2\{3x-4(y-x)\}]$ 爲簡式。

2. 由 $2a^2-4ab+2b^2$ 減 $6a^2-4ab+7b^2$ 並由其餘數減 $4a^2-6ab+5b^2$ 。

3. 以 $a+b+1$ 乘 $a^2+b^2+1-ab-a-b$.
4. 以 $a+b-2c$ 除 $a^3+b^3-8c^3+3a^2b+3ab^2$.
5. 二代數式之積為 x^7-64x 其一為 x^2-2x+4 . 問他一式如何.
6. 證

$$(1+x+x^2)(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)(1-x^4+x^8) = 1+x^2+x^{16},$$

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) + (b-c)(c-a)(a-b) \\ (a+b+c) = 0.$$



第 五 編

一 次 方 程 式

72. 方程式 書等號於兩代數式之間。以表兩代數式相等。謂之方程式。相等之兩式。謂之方程式之兩節。或謂之兩邊。

方程式無論文字之值如何。其兩邊恆相等。此方程式謂之恆等方程式。然恆等方程式。通稱為恆等式。而兩式相等以文字之特別值為限者。始謂之方程式。

如 $a+a=2a$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 。無論 a 與 b 數值如何。其式恆相等。故為恆等式。

而 $5a+2=12$ 。惟 a 之值為 2 始相等。故為方程式。

(注意) 方程式內。有已知量及未知量二種。已知量。倘不知其算術上之數值。則以羅馬字最初之文字 a, b, c 等顯之。未知量原為所求之量。恆以羅馬字最終之文字 x, y, z 中之一顯之。(倘此三者不足。可用 u, v, w 等。)

73. 方程式解法 凡解方程式云者。求其能使方程式合理之未知量之值也。未知量之此等值。其合於方程式者。謂之方程式根。

74. 一次方程式 在僅有一未知量 x 之方程式內。其 x 僅為一乘方者。謂之一次方程式。 x 之最高乘方為 x^2 者。謂之二次方程式。餘仿此。

本編專攷究含一未知量之一次方程式。

75. 公理 解方程式。須依次之公理。

(1) 加等量於等量。(或同量)其和相等。

$$\text{如 } a=b \text{ 則 } a+c=b+c$$

(2) 由等量減等量。(或同量)其差相等。

$$\text{如 } a=b \text{ 則 } a-c=b-c$$

(3) 以等量乘等量。(或同量)其積相等。

$$\text{如 } a=b \text{ 則 } ac=bc$$

(4) 以等量除等量。(或同量)其商相等。

$$\text{如 } a=b \text{ 則 } a \div c = b \div c$$

在第(4)公理內。其等量不得為 0。如 $2 \times 0 = 3 \times 0$ 然以 0 除其兩邊。不得謂之 $2=3$ 。

76. 移項 如 $a+b=c-d$ 依公理(2)。加 $-b$ 於兩邊。其式仍相等。

$$\therefore a+b-b=c-d-b,$$

即 $a=c-d-b.$

是即將 b 項由方程式之一邊消却。同時顯於他邊。其符號由正變為負。

又加 d 於最後所得之方程式之兩邊。則依公理(1)。得

$$a+d=c-d-b+d,$$

$$\therefore a+d=c-b.$$

是又將 d 項由方程式之一邊消却。同時顯於他邊。其符號由負變為正。

其他準此。由是 方程式之任意項。若變其符號。則可由此邊移於彼邊。

以此邊之項移於彼邊。謂之移項。

77. 各項符號之變更 方程式中各項之符號。可悉變更。何則。依公理(3)。兩邊以 -1 乘之。其式仍相等。然以 -1 乘其兩邊。與以 -1 乘其各項同。而依此乘法。則各項之符號。皆已變更故也。

78. 解法 解一次方程式之法, 觀以下數例。
易於明瞭。

(例1) 解 $8x+7=4x+27$,

移 $4x$ 與 7 , 則 $8x-4x=27-7$,

合其同類項, 則 $4x=20$,

此兩邊以 x 之係數 4 除之, 則 $x=5$ 。

(例2) 解 $5x-7=7x-15$,

移項, 則 $5x-7x=-15+7$,

合其同類項, 則 $-2x=-8$,

此兩邊以 x 之係數 -2 除之, 則 $x=4$ 。

(例3) 解 $\frac{x}{2}+2=\frac{x}{4}+\frac{5}{2}$,

以分母之最小公倍數 4 乘各項, 即通去分母得

$$2x+8=x+10,$$

移項則 $2x-x=10-8$,

$$\therefore x=2.$$

(例4) 解 $\frac{1}{4}(x+1)-\frac{1}{3}(x-1)=1$,

因欲去分母, 故以 12 乘之, 得

$$\frac{12}{4}(x+1)-\frac{12}{3}(x-1)=12,$$

即 $3(x+1)-4(x-1)=12$,

$$\therefore 3x+3-4x+4=12,$$

移項則 $3x-4x=12-3-4,$

$$\therefore -x=5;$$

變其符號即 $x=-5.$

〔例5〕 解 $ax+b^2=bx+a^2,$

移項則 $ax-bx=a^2-b^2,$

即 $(a-b)x=a^2-b^2,$

以 x 之係數 $a-b$ 除之。則 $x=(a^2-b^2) \div (a-b)=a+b.$

〔注意〕 解方程式既得其結果。而欲驗其結果之正否。則以此結果代原方程式之未知量試之。

如以 5 代例(1)之 x 。則

$$8 \times 5 + 7 = 4 \times 5 + 27,$$

即 $40 + 7 = 20 + 27.$

易知其合理。

又以 $a+b$ 代例(5)之 x 。則

$$a(a+b)+b^2=b(a+b)+a^2,$$

即 $a^2+ab+b^2=ba+b^2+a^2.$

是爲恆等式。

79. 解法之次序 由以上諸例。得解一次

方程式之次序如次。

先去方程式之分母，或他之用代數記號所示之運算。(如第4例解括弧之類)

次凡含未知量之項，悉移於方程式之一邊，而其他之諸項，悉移於他邊。

次凡含未知量之項，悉合爲一項，而以未知量之係數除其兩邊。

如是，則得所求之根。

(注意) 因欲學者明了解式，且養成其精密之思想，故宜如前例，示原方程式之變形，而明其方法。

又學者於解式各行之始，往往記以等號，欲與前行之變化連續，是大不合理，宜警戒。

80. 雜例 更舉其例如次。

(例1.) 解 $(x-1)(x-2)+5=(x+1)^2$,

去括弧，則 $x^2-3x+2+5=x^2+2x+1$,

移項，則 $x^2-3x-x^2-2x=1-2-5$,

$$\therefore -5x=-6,$$

以 -5 除之，則 $x=\frac{6}{5}$ 。

(例2.) 解 $3(x-1)-\{3x-(2-x)\}=5$,

去括弧。則 $3x-3-3x+2-x=5,$

$$\therefore 3x-3x-x=5+3-2,$$

$$\therefore -x=6,$$

即 $x=-6.$

〔例 3.〕 解 $3x^2-1=(3x+2)(x-5),$

去括弧。則 $3x^2-1=3x^2-13x-10,$

移項。則 $3x^2-3x^2+13x=-10+1,$

是故 $13x=-9,$

$$\therefore x=-\frac{9}{13}.$$

〔例 4.〕 解 $a(x-a)+b(x-b)=2ab,$

去括弧。則 $ax-a^2+bx-b^2=2ab,$

移項。則 $ax+bx=a^2+2ab+b^2,$

即 $(a+b)x=(a+b)^2,$

$$\therefore x=(a+b)^2 \div (a+b) = a+b.$$

問 題 XVI.

解以下各方程式。

1. $3x+4=x+10.$

2. $x+7=4x+4.$

3. $5x-12=6x-8.$

4. $7x+19=5x+7.$
5. $3(x-2)=2(x-3).$
6. $5(x+2)=3(x+3)+1.$
7. $x-(4-2x)=7(x-1).$
8. $5(4-3x)=7(3-4x).$
9. $2(x-3)=5(x+1)+2x-1.$
10. $4(1-x)+3(2+x)=18.$
11. $2(x-2)+3(x-3)+4(x-4)-20=0.$
12. $2(x-1)-3(x-2)+4(x-3)+2=0.$
13. $5x+6(x+1)-7(x+2)-8(x+3)=0.$
14. $x+\frac{1}{2}x=10.$
15. $\frac{x}{5}-\frac{x}{4}=1.$
16. $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}=3.$
17. $\frac{1}{2}(x+1)-\frac{2}{3}(x-1)=3.$
18. $\frac{1}{2}(2-x)-\frac{1}{3}(5x+21)=x+3.$
19. $\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x-4)=10$
20. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+4}{4}+8=0.$
21. $\frac{x-5}{2}-\frac{x-4}{3}=\frac{x-3}{2}-(x-2).$
22. $\frac{x+1}{3}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}=16.$

23. $2x - [3 - \{x + (x-1)\} - 5] = 8.$
24. $1 - 2\{x - 3(1+x)\} = 0.$
25. $(x+1)(x+2) = (x-2)(x-4).$
26. $(x-1)(x-2) = (x-3)(x-4).$
27. $2x^2 = (x+1)^2 + (x+3)^2.$
28. $3x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2.$
29. $(x-2)(x-5) + (x-3)(x-4) = 2(x-4)(x-5).$
30. $(x-1)^2 + 4(x-3)^2 = 5(x+5)^2.$
31. $5(x+1)^2 + 7(x+3)^2 = 12(x+2)^2.$
32. $(x-1)(x-4) = 2x + (x-2)(x-3).$
33. $(x-1)^3 + (x-2)^3 + (x-3)^3 = 3(x-1)(x-2)(x-3).$
34. $\frac{x+\frac{1}{2}}{2} - \frac{2x-\frac{1}{2}}{5} + 1\frac{1}{4} = 0.$
35. $\frac{3x+5}{8} - \frac{21+x}{2} = 5x-15.$
36. $.5x + 3.75 = 5.25x - 1.$
37. $.25x + 4 - .375x = .2x - 9.$
38. $.15x + 1.2 - .875x + .375 = .0625x.$
39. $1.2x - \frac{1}{2}(.18x - .5) = .4x + 8.9.$
40. $a(x-a) = b(x-b).$
41. $2(x-a) + 3(x-2a) = 2a.$

42. $\frac{1}{2}(x+a+b) + \frac{1}{2}(x+a-b) = b.$

43. $(a+b)x + (a-b)x = a^2.$

44. $(a+b)x + (b-a)x = b^2.$

45. $\frac{1}{2}(a+x) + \frac{1}{2}(2a+x) + \frac{1}{2}(3a+x) = 3a.$

46. $\frac{xa}{b} + \frac{xb}{a} = a^2 + b^2.$

47. $(a+bx)(b+cx) = ab(x^2-1).$

48. $(a^2+x)(b^2+x) = (ab+x)^2.$

49. $a(x+a) + b(b-x) = 2ab.$

50. $(x+a+b)^2 + (x+a-b)^2 = 2x^2.$

51. $(x-a)(x-b) + (a+b)^2 = (x+a)(x+b).$

52. $(x+a+b+c)(x+a-b-c)$
 $= (x-a-b+c)(x-a+b-c).$

53. $ax(x+a) + bx(x+b) = (a+b)(x+a)(x+b).$

54. $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = 3(x-a)(x-b)(x-c).$

$$\begin{aligned} & \cancel{54} \quad x^3 - 3x^2a + 3xa^2 + a^3 + x^3 - 3x^2b + 3xb^2 + b^3 + x^3 \\ & - 3x^2c + 3xc^2 + c^3 = \cancel{3x^3} - 3ax^2 - 3x^2b + 3abx - 3x^2c \\ & + 3axc + 3xbc - 3abc \end{aligned}$$

第 六 編

一 次 方 程 式 之 問 題

81. 問題 本編專攷究一次方程式之問題。

問題之中。有已知量與未知量兩種。以其所固有之關係連絡。則未知量之數值。即可由此等關係求出。

解問題之法。在將已知量與未知量之關係。用代數記號表之。(即方程式)如是。其所得方程式之根。即為所求未知量之值。

82. 一次方程式之問題 本編之問題。

單為備有一未知量。且其已知量與未知量之關係。在代數上宜以一次方程式顯者。

舉其問題之例如次。

(例1.) 有某數。其數之二倍。較其數之二分之一多27。問某數幾何。

設 x 為某數。則其二倍為 $2x$ 。其二分之一為 $\frac{x}{2}$ 。

依題意。 $2x$ 較 $\frac{x}{2}$ 大 27

故得方程式。 $2x = \frac{x}{2} + 27$

去分母。即 $4x = x + 54$

移項。則 $4x - x = 54$

即 $3x = 54$

$$\therefore x = 18$$

故所求之數爲 18。

[例 2] 有甲乙二人。甲有銀 400 圓。乙有銀 75 圓。問甲與乙若干。則甲所有爲乙所有之四倍。

設 x 爲甲與乙之圓數。如是。則甲所有爲 $400 - x$ 圓。乙之所有爲 $75 + x$ 圓。而比較其所有數。則甲爲乙之四倍。故得次之方程式。

$$400 - x = 4(75 + x)$$

即 $400 - x = 300 + 4x$

移項。則 $-x - 4x = 300 - 400$

即 $-5x = -100$

以 -5 除之。則 $x = 20$

故甲與乙之數爲 20 圓。

[注意] x 常顯某數量。而一問題之各量。皆以同

一之單位顯之。如本例銀皆以圓計是也。

(例3.) 有一線長20尺。分爲二部分。其一部分爲他部分之二倍。問各部長幾何。

設小部分之尺數爲 x 。而合二部分爲20尺。故大部分之尺數爲 $20-x$ 。依題意。大部分爲小部分之二倍。故得方程式。

$$20-x=2x$$

$$\therefore 20=3x$$

即 $3x=20$

是故 $x=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$

故一部分爲 $6\frac{2}{3}$ 。他之一部分爲 $13\frac{1}{3}$ 。

(例4.) 某人有貨幣十二個。此貨幣中。有五圓金貨若干。壹圓銀貨若干。而此貨幣之價。合計28圓。問各種貨幣之數幾何。

設 x 爲五圓金貨之數。則 $12-x$ 爲壹圓銀貨之數。五圓金貨之價爲 $5x$ 圓。壹圓銀貨之價。爲 $12-x$ 圓。而二種貨幣之價。合計28圓。故得次之方程式。

$$5x+(12-x)=28$$

Handwritten notes:
 $24+x=20$
 $3x=20$
 $x=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$
 以...
 方...
 ...

$$\text{即} \quad 5x - x = 28 - 12$$

$$\text{故} \quad 4x = 16$$

$$\therefore x = 4$$

故爲五圓金貨四個。壹圓銀貨八個。

〔例5.〕 有父子。父之年六倍於子之年。而自今四年之後。父之年四倍於子之年。問父子之年各幾何。

設 x 爲子之年數。則父之年數爲 $6x$ 。又自今四年之後。子之年爲 $x+4$ 。父之年爲 $6x+4$ 。

$$\text{茲按題意。} \quad 6x+4=4(x+4)$$

$$\text{即} \quad 6x+4=4x+16$$

$$\text{是故} \quad 6x-4x=16-4$$

$$\text{即} \quad 2x=12$$

$$\therefore x=6$$

由是子爲6年。父爲36年。

〔例6.〕 有甲乙二工。若個人獨做一工程。甲12時間完成。乙4時間完成。今甲做此工程。經若干時以乙代之。共6時間完成。問甲做工之時間幾何。

設 x 爲甲做工時間之數。則 $6-x$ 爲乙做工時間之數。

甲做此工程12時間完成。故一時間祇做其工程之 $\frac{1}{12}$ 。

故甲所做之工。爲此工程之 $\frac{x}{12}$ 。

又乙做此工程4時間完成。故一時間祇做其工程之 $\frac{1}{4}$ 。

故乙所做之工程爲此工程之 $\frac{1}{4}(6-x)$ 。

然甲與乙共始完成此工程。故得次之方程式。

$$\frac{1}{12}x + \frac{1}{4}(6-x) = 1$$

以12乘之。則得 $x+3(6-x)=12$

即 $x+18-3x=12$

移項。 $-2x=-6$

$$\therefore x=3$$

故甲之做工時間爲3時間。

〔例7.〕求鐘之兩針。在三時與四時間相重之時刻。

設三時後經 x 分。爲兩針相重之時刻。

兩針在三時上。時針在分針前15分。

故分針轉至 x 分時。時針漸漸至 $x-15$ 分。

然分針之速度。爲時針速度之十二倍。故無論何

時分針迴轉之間隔。恆為時針迴轉間隔之十二倍。

$$\text{故} \quad x = 12(x - 15)$$

$$\text{即} \quad x = 12x - 180$$

$$\therefore 11x = 180$$

$$\text{即} \quad x = \frac{180}{11} = 16\frac{4}{11}$$

故所求之時間為3時 $16\frac{4}{11}$ 分。

問題 XVII.

- (1) 有二數。其和為 200。其差為 2。問二數各幾何。
- (2) 有二數。其和為 56。其差為 20。問二數各幾何。
- (3) 分 25 為二部分。使其差為 5。
- (4) 分 100 為二部分。使其差為 45。
- (5) 問加 40 於何數。其和為原數之三倍。
- (6) 問由何數減 14。其差為原數之三分之一。
- (7) 有二數。其差為 15。其一數為他數之四倍。問二數各幾何。
- (8) 二數之差為 10。其一數為他數之三倍。問二

數各幾何。

(9) 二數之和為38。其一數較他數之二倍多2。問二數各幾何。

(10) 二數之和為31。其一數較他數之半少2。問二數各幾何。

(11) 某數之四分之一較其五分之一多2。問某數幾何。

(12) 某數之三分之一較其七分之一多80。問某數幾何。

(13) 有某數由其四倍減35。其餘數與由35減某數之餘數等。問某數幾何。

(14) 有某數由其八倍減7。其餘數與由27減去某數之餘數等。問某數幾何。

(15) 某數之四分之一與五分之一之差之四倍。較其三分之一與七分之一之差多4。問某數幾何。

(16) 某數之七分之一與八分之一之差之五十倍。較某數之半分多44。問某數幾何。

(17) 分100為二部分。使其一部分之三倍與他一部分之五倍之和為410。

(18) 分100為二部分。使其一部分之二倍。等於

他部分之三倍。

(19) 二數之差爲 20。其一數之半分。等於他一數之五分之一。問二數各幾何。

(20) 二數之和爲 36。其差爲大數之半分。問二數各幾何。

(21) 有甲乙二人。甲有銀 100 圓。乙有銀 20 圓。問甲與乙若干圓。則乙所有爲甲所有之半。

(22) 有一壇。長比廣長八丈。若長與廣各增二丈。則其面積增六十方丈。問此壇之長與廣各幾丈。

(23) 甲乙二人。共有金 80 圓。若甲由乙再取其原有金之一倍。則甲之所有金。爲乙之所有金之三倍。問甲原有金幾何。

(24) 有甲乙丙三人。共有金若干圓。甲之所有金。爲總額之半。乙之所有金。爲總額之三分之一。丙之所有金爲 50 圓。問甲與乙之所有金各幾何。

(25) 有甲乙二人。共有銀 75 圓。甲之所有較乙之所有多 5 圓。問各銀幾何。

(26) 甲乙丙三人之所有金。合計 360 圓。甲較乙多 5 圓。乙較丙多 20 圓。問三人之所有金各幾何。

(27) 甲乙丙三人之所有金。合計 65 圓。甲較乙。

多 15 圓。乙較丙少 5 圓。問三人之所有金各幾何。

(28) 甲,乙,丙三人之所有金合計 100 圓。甲之所有金。較乙之所有金少 5 圓。丙之所有金。等於甲,乙二人所有金之和。問三人之所有金各幾何。

(29) 有銀 300 圓。分給男子 10 人,女子 20 人,兒童 40 人。男子一人之所得。較兒童一人之所得多 7 角 5 分。女子一人之所得。等於兒童二人之所得。問當各得幾何。

(30) 有銀 15 圓。分給男子三人,女子五人,兒童二十人。男子一人之所得。較女子一人之所得多壹圓。兒童一人之所得。為女子一人所得之半。問當各得幾何。

(31) 有父子二人。父之年為 40。子之年為 10。問父年為子年之三倍時。為今後若干年。

(32) 有甲乙二人。甲之年為 70。乙之年為 50。求甲年二倍於乙年之時。

(33) 有父子二人。問其年齡。父年當子年之三倍。而今後 10 年。父年當子年之二倍。問父子之年各幾何。

(34) 或問年歲於某某。某答曰。我有一女。今後五年。

我年四倍於我女之年。今後十年。我年三倍於我女之年。問某之年幾何。

(35) 有金若干圓。分給於甲、乙、丙三人。甲與乙之所得。合計 60 圓。甲與丙之所得。合計 65 圓。乙與丙之所得。合計 75 圓。問三人之所得各幾何。

(36) 甲、乙、丙、丁四人。各有金若干圓。而甲與乙之所有金之和為 49 圓。甲與丙之所有金之和為 51 圓。乙與丙之所有金之和為 53 圓。甲與丁之所有金之和為 47 圓。問四人之所有金各幾何。

(37) 以銀二圓四角買牛肉。若牛肉之價廉二成。則能多買六斤。問牛肉每斤之價幾何。

(38) 以銀四圓八角買雞卵。若其價貴二成。則雞卵之數較前少 80 個。問雞卵二十個之價幾何。

(39) 某人臨終時。遺其財產於妻及兒及女。仍從遺命。妻取其遺產之半分。兒取其三分之一。女取其餘。但知女之所得。為金 2000 圓。問遺產之額幾何。

(40) 某人臨終時。遺其財產於長子次子末子三人。仍從遺命分配。長子之所得。為次子所得之二倍。次子之所得。為末子所得之二倍。而長子所得與末子所得之差為 750 圓。問所得各幾何。

(41) 銀包中入銀貨28個。其價合計22.20圓。其中若干個爲壹圓銀貨。而半圓之銀貨之數。爲壹圓銀貨數之五分之一。其餘爲五仙銀貨。問各貨幣之數幾何。

(42) 銀包中入銀貨36個。其價合計11圓。其中若干個爲壹圓銀貨。而半圓銀貨之數。爲壹圓銀貨數之三倍。其餘爲五仙銀貨。問各貨幣之數幾何。

(43) 問鐘之兩針。在五時與六時間相重之時。

(44) 問鐘之兩針。在九時與十時間成直角之時。

(45) 二數之差爲3。其平方之差爲99。問二數各幾何。

(46) 酒精與水混合。酒爲全量之半分加25升。水爲全量三分之一減5升。問酒與水各幾升。

(47) 有兵一千人。屯在某地。備60日間之糧。然10日後。急增屯在之兵。故所備之糧僅支20日。問所增之兵數幾何。

(48) 有一傭夫。傭36日。豫約做工之日給洋5角。停工之日轉罰洋3角。至期日之終。共得洋11.60圓。問工之日數幾何。

(49) 有金若干圓。分給甲、乙、丙三人。甲取較全數

之三分之一多10圓。乙取較甲取後餘數之半分多15圓。而丙取其餘。得金70圓。問金若干圓為幾何。

(50) 一銀包中存銀貨若干圓。今分給甲、乙、丙三人。甲取較全數之半分多一。乙取較餘數之半分多一。丙取其餘為六。問銀包中所存之銀貨幾何。

(51) 有金若干圓。今取比半額多20圓。次取出比殘額三分之一多30圓。次又取出比殘額五分之一多40圓。更無殘餘。問金若干圓為幾何。

(52) 某酒館。因宴會備每人每份二十四人之筵席。而筵席之定價。每份當得利一成二分五釐。然其中有3人不到。其餘21人。依通常之定價支給。故某酒館尚虧本一圓。問每份筵席之定價幾何。

(53) 有甲乙二工。做一工程。甲30日完成。乙20日完成。今甲先做此工程。若干日之後。以乙代之。然全體工程。始終25日完成。問甲做工之日數幾何。

(54) 有甲乙二工。甲20日完成之工程。乙30日完成。今甲先做此工程。若干日之後。以乙代之。乙比甲多做10日。此工程始完成。問甲做工之日數幾何。

(55) 有兵卒一隊。擺中空之方陣二個。但一為三列。一為五列。而其一方陣。恰能容他之一方陣。且兩

方陣之人數相等。問兵卒之人數幾何。

$$(x+6)^2 - (x+16)^2 = (x+10)^2 - x^2$$

兩邊同取平方根得 $(x+6) - (x+16) = (x+10) - x$

三邊同減 x 得 $-10 = 10$ 此式不成立



設兵卒之人數為 x ，則方陣之每邊長為 \sqrt{x}

兩方陣之差為 $(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{x+16})^2 = (\sqrt{x+10})^2 - x$

即 $(x+6) - (x+16) = (x+10) - x$

化簡得 $-10 = 10$ 此式不成立

故兵卒之人數為 x ，則方陣之每邊長為 \sqrt{x}

兩方陣之差為 $(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{x+16})^2 = (\sqrt{x+10})^2 - x$

即 $(x+6) - (x+16) = (x+10) - x$

化簡得 $-10 = 10$ 此式不成立

故兵卒之人數為 x ，則方陣之每邊長為 \sqrt{x}

兩方陣之差為 $(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{x+16})^2 = (\sqrt{x+10})^2 - x$

即 $(x+6) - (x+16) = (x+10) - x$

化簡得 $-10 = 10$ 此式不成立

故兵卒之人數為 x ，則方陣之每邊長為 \sqrt{x}

兩方陣之差為 $(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{x+16})^2 = (\sqrt{x+10})^2 - x$

即 $(x+6) - (x+16) = (x+10) - x$

化簡得 $-10 = 10$ 此式不成立

故兵卒之人數為 x ，則方陣之每邊長為 \sqrt{x}

兩方陣之差為 $(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{x+16})^2 = (\sqrt{x+10})^2 - x$

即 $(x+6) - (x+16) = (x+10) - x$

化簡得 $-10 = 10$ 此式不成立

第七編

一次之聯立方程式

(即一次之多元方程式)

83. 聯立方程式 一方程式有兩未知量，則適合其方程式之兩未知量之值，俱無定限。

如在 $x-3y=24$ 式內，設 $y=0$ ，則 $x=24$ ，設 $y=1$ ，則 $x=27$ ，設 $y=2$ ，則 $x=30$ ，此等數值俱合於此方程式，故設 y 等於 k ，則 $x=24+3k$ ，而 k 為任意之數，故 y 及 x 亦可為任意之數，故無定限。

適合於各方程式之兩未知量之值，雖無定限，然有兩方程式時，則此兩未知量之值必適合於兩方程式然後可，詳而言之，即兩未知量之值，當各有限。

〔定義〕 未知量之數值，適合於二以上諸方程式，則此等方程式謂之聯立方程式。

48. 二元方程式之次數 含兩未知量 x 及 y 之方程式，其次數以式中 x 及 y 之最高次項之次數為準。

同樣含三未知量之方程式。其次數以式中 x, y, z 之最高次項之次數爲準。

如 $4x+5y=20$ 爲一次方程式。 $3x^2-2xy=7$ 爲二次方程式。又 $ax^2+by^2+c=0$ 與 $x+y=xy$ 亦爲二次方程式。

85. 一次聯立方程式之解法 本編專論解一次聯立方程式之法。

如聯立方程式爲含兩未知量之任意兩聯立方程式。則由此兩聯立方程式。消去一未知量。得僅含一未知量之第三方程式。更由第三方程式。求其所含一未知量之數值。

86. 加減消去法 解一次之兩聯立方程式之法如次。

設含兩未知量之兩聯立方程式爲

$$3x+5y=22\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$7x-4y=20\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 7 乘第(1)方程式之兩邊。3 乘第(2)方程式之兩邊。則此兩方程式變爲

$$21x+35y=154$$

$$21x - 12y = 60$$

因此兩方程式內。 x 之係數相等。故若由第一方程式之各邊減第二方程式中相當之邊。則消去 x 得僅有 y 之第三方程式。

即 $47y = 94$

由是 $y = 2$

以 y 所得之數值。代入第(1)方程式。則得

$$3x + 10 = 22$$

故 $3x = 22 - 10$ 即 $x = 4$

上法爲先求 y ，後求 x 者。若欲先求 x ，後求 y 。則以4乘第(1)方程式。5乘第(2)方程式。則兩方程式變爲

$$12x + 20y = 68$$

$$35x - 20y = 100$$

因此兩方程式內。 y 之係數。其絕對值相等而符號相反。故以第二方程式之各邊。加於第一方程式相當之邊。則消去 y 。得僅含 x 之第三方程式。

即 $47x = 188$

故 $x = 4$

以 x 所得之數值。代入兩方程式中之(1)式。即得

y 之數值。

依前例。得解兩一次聯立方程式之法如次。

〔解法〕 因欲兩方程式內有一未知量係數之絕對值相等。故以適宜之數乘各方程式並將兩方程式。依加法或減法。去其一未知量。得僅含一未知量之第三方程式。此第三方程式。可用第五編之法解之。

依上法去其未知量。謂之消法。

87. 例解 更舉數例如次。

〔例 1.〕 解 $3x+2y=13$, $7x+3y=27$

以 3 與 2 乘此兩方程式。則變為

$$9x+6y=39,$$

及 $14x+6y=54.$

由第一減第二則

$$-5x=-15,$$

$$\therefore x=3$$

以 x 之此數值代入方程式之第一式內。

則 $9+2y=13$

$$\therefore y=2.$$

故 $x=3, y=2$ 爲所求之數值。

(例2.) 解 $2x-3y+14=0, -4x+5y=26$.

茲移爲 $2x-3y=-14$, (1)

及 $-4x+5y=26$. (2)

以2乘第一方程式。則

$$4x-6y=-28.$$

加於第二方程式內。則

$$-y=-2,$$

即 $y=2$.

然由第一方程式得

$$2x-6=-14,$$

即 $2x=-14+6=-8,$

$$\therefore x=-4.$$

由是所求之數值爲

$$x=-4, y=2.$$

(例3.) 解 $\frac{5x}{3}-\frac{y}{4}=9, 6x-\frac{7y}{4}=29$.

因欲去此兩方程式之分母。故以12與4乘之得

$$20x-3y=108,$$

$$24x-7y=116.$$

在此方程式內以7乘第一式。以3乘第二式。則得

$$140x - 21y = 756,$$

$$72x - 21y = 348.$$

依減法 $68x = 408;$

$$x = 6.$$

然 $120 - 3y = 108,$

故 $y = 4.$

問 題 XVIII.

解以下各方程式。

1. $7x + 4y = 1, 9x + 4y = 3.$

2. $3x + 5y = 19, 5x - 4y = 7.$

3. $x - 11y = 1, 111y - 9x = 99.$

4. $8x - 21y = 5, 6x + 14y = -26.$

5. $34x - 15y = 4, 51x + 25y = 101.$

6. $36x - 15y = 93, 65x + 17y = 113.$

7. $19x + 85y = 350, 17x + 119y = 442.$

8. $8x - 11y = 0, 25x - 17y = 139.$

9. $3x - 11y = 0, 19x - 19y = 8.$

10. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, \frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = 3.$

Handwritten notes and solutions for the first three problems:

$7x + 4y = 1$
 $9x + 4y = 3$
 $x = 1, y = 1$

$3x + 5y = 19$
 $5x - 4y = 7$
 $x = 3, y = 2$

$x - 11y = 1$
 $111y - 9x = 99$
 $x = 100, y = 98$

$8x - 21y = 5$
 $6x + 14y = -26$
 $x = 9355, y = 9345$

$$11. \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{x}{5} - \frac{3y}{10} = \frac{1}{2}.$$

$$12. \quad \frac{x}{3} + 3y + 14 = 0, \quad \frac{x}{5} + 5y + 4 = 0.$$

$$13. \quad \frac{x}{5} + 5y = -4, \quad \frac{y}{5} + 5x = 4.$$

$$14. \quad \frac{x+2}{3} + 4y = 2, \quad \frac{y+11}{11} - \frac{x+1}{2} = 1.$$

$$15. \quad \frac{2x+3y}{5} + \frac{y+8}{7} = 2, \quad \frac{2x-5y}{3} + \frac{x+7}{4} = 1.$$

$$16. \quad 4x - \frac{1}{3}(y+3) = 5x-3, \quad 2y + \frac{1}{3}(2x-5) = \frac{21y+37}{6}.$$

$$17. \quad \frac{x}{2} - \frac{1}{3}(y-2) - \frac{1}{4}(x-3) = 0,$$

$$x - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{3}(x-2) = 0.$$

$$18. \quad \frac{x-2}{3} - \frac{y+2}{4} = 0, \quad \frac{2x-5}{5} - \frac{11-2y}{7} = 0.$$

$$19. \quad \frac{x-2}{3} - \frac{y+5}{2} = 0, \quad \frac{2x-7}{3} - \frac{13-y}{16} = 0.$$

88. 代入消去法 86 款解兩方程式之法。

可代以次之方法。

(例) 解 $3x-5y=2, 5x-2y=16.$

由第一方程式得 $3x=5y+2,$

故 $x = \frac{1}{3}(5y+2)$

以 x 之此值, 代入第二方程式

$$\frac{5}{3}(5y+2) - 2y = 16$$

是為僅含一未知量之一次方程式。

解之則得 $y=2$ 。因 $y=2$

故
$$x = \frac{1}{3}(5y+2) = \frac{1}{3}(10+2) = 4$$

3. 比較消去法 本例亦可依次方解之。

由第一方程式得 $3x=5y+2$ 。即 $x = \frac{1}{3}(5y+2)$ 。

又由第二方程式得 $5x=2y+16$ 。即 $x = \frac{1}{5}(2y+16)$

故令此兩 x 之值相等。則得

$$\frac{1}{3}(5y+2) = \frac{1}{5}(2y+16)$$

由是得 $y=2$ 。如前可得 $x=4$ 。

89. 雜例 以下所示。雖為聯立方程式之特例。然代數式中。時時遇之。

[例 1.] 解 $57x+25y=3772$, $25x+57y=1143$

在本例。如用 86 款之法。直計其數。未免繁雜。故因此兩方程式。其 x 與 y 之係數。原為彼此互換者。故將此兩方程式相加或相減。其 x 與 y 之係數恆相等。即如次

兩方程式相加

$$82x+82y=4920$$

$$\therefore x+y=60$$

兩方程式相減 $32x-32y=2624$

$$x-y=82$$

而由 $x+y=60$, $x-y=82$ 兩方程式。可直得 $x=71$
 $y=-11$ 。

(例2.) 解 $(x-1)(y-2) - (x-2)(y-1) = -2$

$$(x+2)(y+2) - (x-2)(y-2) = 32$$

解括弧。則第一方程式爲

$$\cancel{xy} - \cancel{y} - \cancel{2x} + \cancel{2} - \cancel{xy} + \cancel{y} + \cancel{2x} - \cancel{2} = -2,$$

即

$$\cancel{-y} + y = -2 \dots \dots \dots (1)$$

第二方程式爲

$$xy + 2x + 2y + 4 - xy + 2x + 2y - 4 = 32$$

即

$$4x + 4y = 32 \dots \dots \dots (2)$$

以4除此方程式之各項。則

$$\cancel{x} + y = 8 \dots \dots \dots (3)$$

(1)與(3)相加 $2y=6 \quad \therefore y=3$

由(3)減(1) $2x=10, \quad \therefore x=5$

(例3.) 解 $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 8, \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = 13$

此兩方程式可視爲含未知量 $\frac{1}{x}$ 與 $\frac{1}{y}$ 之一次

聯立方程式。

故此兩方程式以5與3乘之。則得

$$\frac{15}{x} + \frac{20}{y} = 40,$$

及

$$\frac{15}{x} + \frac{18}{y} = 39.$$

故依減法

$$\frac{2}{y} = 1, \quad \therefore y = 2.$$

然後依第一方程式

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{2} = 8,$$

$$\frac{3}{x} = 8 - 2 = 6,$$

$$\therefore 3 = 6x, \text{ 即 } x = \frac{1}{2}.$$

故 $x = \frac{1}{2}, y = 2$ 爲所求之數值。

〔例4〕 解 $ax + by = 2ab, bx - ay = b^2 - a^2$ 。

以 a 乘第一方程式。 b 乘第二方程式。則得

$$a^2x + aby = 2a^2b,$$

及

$$b^2x - aby = b^3 - a^2b.$$

由是依加法

$$a^2x + b^2x = a^2b + b^3,$$

即

$$(a^2 + b^2)x = b(a^2 + b^2).$$

$$\therefore x = b.$$

以 x 之數值代入原方程式之第一式。得

$$ab + by = 2ab.$$

$$\therefore y = a$$

故 $x = b, y = a$ 爲所求之值。

[例 5.] 解 $5x + 3y - 13 = 3x - 2y + 7 = 2x + 6y - 4$

$$5x + 3y - 13 = 3x - 2y + 7$$

故 $2x + 5y = 20 \dots\dots\dots (1)$

又 $3x - 2y + 7 = 2x + 6y - 4$

故 $x - 8y = -11 \dots\dots\dots (2)$

依 86 款之法解(1)與(2)。則得 $x = 5, y = 2$ 。

問 題 XIX.

解以下各方程式

1. $17x + 23y = 86, 23x + 17y = 74.$

2. $15x + 19y = 18, 19x + 15y = 50.$

3. $51x - 14y = 287, 14x - 51y = -157.$

4. $29x + 85y = 31, 13x - 43y = 95.$

5. $x + 2y = 3, 1.7x + .01y = .345.$

6. $.5x + y = 2.75, 3.4x + .02y = 1.75.$

7. $3x - 4y + 2 = 5x - 6y - 2 = 7x + 2y + 4.$

8. $4x - 6y - 3 = 7x + 2y - 4 = -2x + 3y + 24.$

$$9. \quad 3x + \frac{7}{2}y - 2 = 11y - \frac{2x}{5} = 20.$$

$$10. \quad 5x + \frac{y}{5} - 1 = 3y + \frac{x}{3} - 2 = 4.$$

$$11. \quad \frac{7+x}{3} = \frac{9+y}{5} = \frac{11+x+y}{7}.$$

$$12. \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{x+y}{4}.$$

$$13. \quad (x+1)(y+5) = (x+5)(y+1).$$

$$xy + x + y = (x+2)(y+2).$$

$$14. \quad xy - (x-1)(y-1) = 6(y-1), \quad x-y=1.$$

$$15. \quad \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = 2, \quad \frac{18}{x} + \frac{8}{y} = 10.$$

$$16. \quad \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 7, \quad \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 11.$$

$$17. \quad \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 3, \quad \frac{6}{x} - \frac{2}{y} = 1.$$

$$18. \quad \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 9, \quad \frac{7}{x} - \frac{2}{y} = 5.$$

$$19. \quad x + \frac{3}{y} = \frac{7}{2}, \quad 3x - \frac{2}{y} = \frac{26}{3}.$$

$$20. \quad 2x - \frac{3}{y} = 3, \quad 8x + \frac{15}{y} + 6 = 0$$

$$21. \quad \frac{3}{x} - 3y = 8, \quad \frac{7}{x} + y = 5.$$

$$22. \quad \frac{7}{x} - 9y = 57, \quad \frac{5}{x} + 2y = 7$$

23. $x+y=2a, x-y=2b.$
24. $x-\frac{5}{y}+7=3x-\frac{9}{y}-11=7x+21.$
25. $ax+by=(a+b)^2, ax-by=a^2-b^2.$
26. $ax+by=a^2+b^2, bx+ay=2ab$
27. $x-y=a-b, ax-by=2a^2-zb^2.$
28. $ax+by=a^2-b^2, bx+ay=a^2-b^2.$
29. $b^2x-a^2y=0, bx+ay=a+b.$
30. $x+y=a+b, ax-by=b^2-a^2.$
31. $bx-ay=b^3, ax-by=a^3.$
32. $ax-by=a^2+b^2, x+y=2a.$
33. $a^2x+b^2y=c^2, a^3y+b^3y=c^3.$
34. $ax+by=1, bx+ay=1.$
35. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1, \frac{b}{x}+\frac{a}{y}=1.$
36. $(a+b)x+(a+c)y=a+b, (a+c)x+(a+b)y=a+c.$
37. $(a+b)x-(a-b)y=3ab, (a+b)y-(a-b)x=ab.$

90. 含三未知量以上之聯立方程式

有含三未知量^數之三聯立方程式。則於三方程式中由各相異兩方程式之二組。(第一與第二,及第一與第三,或第一與第二,及第二與第三,或第一與第三,

及第二與第三) 消去其中之一未知量。由是得含兩未知量之兩方程式。更由含兩未知量之兩方程式。消去其第二之未知量。

同樣。有含四未知量以上之四以上諸方程式。則由各相異兩方程式之三以上諸組。消去其中之一未知量。更由所生之方程式。取其兩兩相異之組。消去其第二之未知量。以下如法逐次消去其未知量。

(例1.) 解以下三方程式。

$$2x + 4y + z = 7 \dots\dots\dots (1)$$

$$3x + 2y + 2z = 8 \dots\dots\dots (2)$$

$$5x - 4y + 4z = 9 \dots\dots\dots (3)$$

由此三方程式之(1)與(2)及(1)與(3)兩組消去 z 。

則 $x + 6y = 6 \dots\dots\dots (4)$

$$3x + 20y = 19 \dots\dots\dots (5)$$

由(4)與(5)得 $x=3, y=\frac{1}{2}$ 。以是代入原方程式之第一式。則

$$6 + 2 + z = 7, \quad z = -1.$$

故 $x=3, y=\frac{1}{2}, z=-1$ 為所求之數值。

(例2.) 解以下三方程式。

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 5,$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3,$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 1.$$

第一及第二兩方程式相加。則

$$\frac{2}{z} = 8, \quad \therefore z = \frac{1}{4}.$$

第一與第三兩方程式相加。則

$$\frac{2}{y} = 6, \quad \therefore y = \frac{1}{3}.$$

第二與第三兩方程式相加。則

$$\frac{2}{x} = 4, \quad \therefore x = \frac{1}{2}.$$

(例 3.) 解以下四方程式。

$$u + x + y + z = 10 \dots\dots\dots (1)$$

$$u + 2x + 3y + 4z = 30 \dots\dots\dots (2)$$

$$5u - 4x + 3y - 2z = -2 \dots\dots\dots (3)$$

$$2u + 3x - 5y - z = -11 \dots\dots\dots (4)$$

由此四方程式之(1)與(2), (1)與(3), 及(1)與(4)三組消去 z 。則

$$3u + 2x + y = 10,$$

$$7u - 2x + 5y = 18,$$

$$3u + 4x - 4y = -1.$$

如前解之。即得

問 題 XX.

1. $y+z=14, z+x=18, x+y=24.$
2. $y+z=2a, z+x=2b, x+y=2c.$
3. $x+y+z=1, 2x+3y+z=4, 4x+9y+z=16.$
4. $5x+3y+7z=2, 2x-4y+9z=7, 3x+2y+6z=3.$
5. $2x-y+z=4, 5x+y+3z=5, 2x-3y+4z=20.$
6. $x+2y-3z=6, 2x+4y-7z=9, 3x-y-5z=8.$
7. $x+2y+3z=4, 2x+3y+4z=6, 3x+4y+5z=8.$
8. $3x+2y+5z=21, 2x-3y+4z=11, x+3y+7z=20.$
9. $10x-2y+4z=5, 3x+5y-3z=7, x+3y-2z=2.$
10. $x+y+z=1, \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+4z=1, \frac{5x}{3}+\frac{3}{4}-\frac{z}{2}=0.$
11. $ax+by=1, by+cz=1, cz+ax=1.$
12. $cy+bz=bc, az+cx=ca, bx+ay=ab.$
13. $u+x+y+z=4, u+2x+3y+4z=10,$
 $4u-3x+2y-z=2, u+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=2\frac{1}{12}$
14. $z-y-x-u=2, u+\frac{x}{2}+\frac{y}{5}+\frac{z}{10}=4,$
 $x-u+\frac{z}{2}-y=1, 10u+5x+2y-z=20.$

第八編

一次聯立方程式之問題

91. 問題 本編專論一次聯立方程式之問題。含二以上諸未知量。且已知量與未知量之關係。宜用一次方程式顯者。其問題之例如次。

等六編所載之問題雖多含兩未知量。然其所得之關係。極其單簡。故其中之一未知量易由他一未知量求出。故但作含一未知量之方程式。由是求得一未知量。則他未知量自易於求。本編則有兩方程式始能求。

今舉一次聯立方程式之問題如次。

(例1) 有二數。其大者較小者之二倍多3。其大者之二倍較小者多27。問二數各幾何。

設 x 為大數。 y 為小數。依題意

$$x-2y=3 \text{ 及 } 2x-y=27.$$

以2乘第一方程式。則

$$2x-4y=6.$$

由第二方程式之兩邊減此方程相當之兩邊。則

$$3y-21 \quad \therefore y=7$$

然依第一方程式。

$$x-3+2y=3+14=17$$

故二數為 17 與 7。

(例 2.) 有兩位數。其數等於兩數字和之七倍。而十位數較單位數多 4。問此數幾何。

設 x 為十位之數字。 y 為單位之數字。則此數等於 $10x+y$ 。因十位之 x 。原為 10 之 x 倍故也。

又數字之和為 $x+y$

$$10x+y=7(x+y)$$

即 $10x+y=7x+7y$

$$\therefore 3x=6y \quad \text{即 } x=2y$$

又 $x=y+4$

是故 $2y=y+4 \quad \text{即 } y=4$

$$\therefore x=8$$

故所求之數為 84。

(例 3.) 某分數之分子加 1。則等於 $\frac{1}{2}$ 。其分母增 1。則等於 $\frac{1}{3}$ 。然則其分數如何。

設分數之分子為 x 。分母為 y 。按題意。得

$$\frac{x+1}{y}=\frac{1}{2} \quad \text{及} \quad \frac{x}{y+1}=\frac{1}{3}$$

以 y 乘第一方程式得 $z+1=\frac{y}{2}$

以 $y+1$ 乘第二方程式得 $z=\frac{1}{3}(y+1)$

將此兩方程式相當之兩邊相減得

$$1=\frac{y}{2}-\frac{1}{3}(y+1)$$

由是得 $y=8$ 。而因 $y=8$ 。故

$$z=\frac{y}{2}-1=4-1=3$$

故分數為 $\frac{3}{8}$

〔例4.〕 有一工程。男子一人。與兒童一人共做。15日完成。男子七人兒童九人共做。2日完成。然則男子一人獨做。幾日完成。

設 x 為男子一人完成之日數。 y 為兒童一人完成之日數。

如是。男子一人。每日做其工程之 $\frac{1}{x}$ 。兒童一人每日做其工程之 $\frac{1}{y}$ 。

按題意。男子一人。兒童一人。每日做其工程之 $\frac{1}{15}$

故
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}$$

又男子七人。兒童九人。每日做其工程之 $\frac{1}{2}$ 。

故
$$\frac{7}{x}+\frac{9}{y}=\frac{1}{2}$$

以 9 乘第一方程式。用第二方程式減之。得

$$\frac{9}{x} - \frac{7}{x} = \frac{9}{15} - \frac{1}{2}$$

即 $\frac{2}{x} = \frac{1}{10}$ 即 $\frac{1}{x} = \frac{1}{20}$

$\therefore x = 20$

即男子一人獨做此工程。20日當完成。

問 題 XXI.

(1) 有甲、乙、二人，共有銀 50 圓。而甲費其所有之半。乙費其所有之三分之二。則共有銀 20 圓。然則各有銀幾何。

(2) 有兩位之數。若以 9 加之其數字適相反。則兩數字之差必為 1。求證。

(3) 某人買牝牛 8 匹，羊 50 匹。共費銀 225 圓。今賣之。牝牛獲利二成。羊獲利一成。共成得銀 $257\frac{1}{2}$ 圓。然則牝牛與羊各一匹之價幾何。

(4) 有貨物 28000 斤。以荷車與運送車二種載之。需荷車 15 輛與運送車 12 輛。或荷車 24 輛。運送車 8 輛。然則荷車與運送車之載量各幾何。

(5) 有甲、乙、二工共做一工程。30 日成就。今甲、乙、共做。12 日後。乙因他事休業。僅甲一人獨做。後經 24

日成就。然則一人獨做各幾日成就。

(6) 某分數之分子增 1，並由分母減 1，則其分數之數值為 1。又分子增分母，並由分母減分子，則其分數之數值為 4。問此分數如何。

(7) 有某分數，四倍其分子，並增 3 於分母，其分數為原分數之二倍。又增 2 於分子，並四倍其分母，則其分數為原分數之半。問原分數如何。

(8) 某書之第一版紙數 600 頁，分為上下兩冊。然其第二版下冊之紙數省去四分之一。上册之紙數增 30 頁。於是上下兩冊之紙數相等。然則第一版上下各冊之紙數如何。

(9) 有甲、乙二人，各有金若干圓。今甲由乙受取 10 圓，則其所有金甲二倍於乙。又乙由甲受取 10 圓，則其所有金乙三倍於甲。然則甲乙之所有金各幾何。

(10) 某農夫賣其收穫之小麥 3 斗，燕麥 5 斗，得銀 18.75 圓。又在相同之市場，賣小麥 5 斗，燕麥 3 斗，得銀 19.25 圓。然則小麥 1 升之價幾何。

(11) 有三矩形，其面積皆相等。第二較第一之長長 6 步，幅狹 4 步。又第三較第一之長長 8 步，幅狹 5 步。然則其面積如何。

(12) 有甲,乙,二工。共做一工程。15日成就。今甲,乙,共做。6日後。甲因他事休業。僅乙一人獨做。其後更經24日成就。然則甲一人獨做此工程當幾日成就。

(13) 某人有股票二種共若干枚。每枚之額面。俱爲百圓。一種年息三分五厘。一種年息四分。而依此兩種股票。一年間獲利100圓。今年息三分五厘者每股賣108圓。年息四分者。每股賣120圓。共得3672圓問各種股票之金額。

(14) 有兩位之數。若其數等於兩數和之七倍。則其兩數字中之一字。必等於他一字之二倍。求證。

(15) 有兩位之數。其數等於兩數字和之四倍。求其一切相當之數。

(16) 有銀1000圓。分配甲,乙,丙,丁,四人。乙之所得爲甲所得之半。丙之所得。較丁之所得多甲所得之三分之一。又乙之所得增100圓。等於丙丁二人所得之和。然則四人之所得各幾何。

(17) 有兩位之數。其數字之一。等於他數字之兩倍。若倒轉其數字之位置。則其所得之數較原數多36。問此數如何。

(18) 有兩個兩位之數。其一數之兩數字。爲他一

數兩數字之倒置者。而此兩數之和為99，其差為45。問各數字如何。

(19) 有某分數。其分母與分子之差為12。而分子分母各增5。則其分數等於 $\frac{3}{4}$ 。問某分數如何。

(20) 男子十人兒童八人每日之工錢為444圓。而男子四人。之工錢。較兒童六人之工錢多12分。然則兒童一人之工錢如何。

(21) 某佃戶租田兩種。各種每畝之租價3圓。其租價合計1350圓。若每畝之租價一種減5角。他一種減1圓。則租價合計1000圓。問各種田地之畝數如何。

(22) 某人有銀貨十個。其價為一圓。而其種類為二角，一角，五仙。今以五仙之銀貨與一仙之銅貨換。以一角之銀貨與五仙之銀貨換。則其數為三十個。問各貨幾何。

(23) 法國鐵道票之價。以旅行之距離為比例。且旅人所攜之行李以25「啓羅克蘭」為限。逾限則每一「啓羅克蘭」須支運費若干。其運費以距離為比例。今某旅人。攜行李50「啓羅克蘭」。旅行200哩。車費及運費。共支25「佛郎」。其後又攜行李35「啓羅克蘭」。旅

行 150 哩。車費及運費。共支 $16\frac{1}{2}$ 「佛郎」。然則攜行李 100「啓羅克蘭」。旅行 100 哩。須支車費及運費若干。

(24) 有甲、乙二人。甲所有「邊士」之數。二倍於「先令」之數。乙所有「先令」之數。二倍於「邊士」之數。而乙較甲多 8「邊士」。若合此二人之所有金。則「邊士」之數。較「先令」之數多 1。問二人之所有金各幾何。但 1 「先令」=12「邊士」

(25) 某學校試驗。其落第者占受驗生之四分之一。而及第點之最下限。較受驗生總數之平均點少 2。又較及第生之平均點少 11。而二倍於落第生之平均點數。問及第點之最下限如何。

雜 題 II.

[A.] 1. 設 $a=1, b=2, c=-3, d=0$ 。求次式之數值。

$$\frac{ab+27c-2cd}{b+c+d} + \frac{a^3+b^3-c^3}{a^2+b^2-c^2}$$

2. 由 $2b-3(b-\overline{a-})$ 減 $2a-3(a-\overline{b-a})$

3. 證以下二式。

$$(x+3)(y+3)-3(x+1)(y+1)+3(x-1)(y-1) \\ - (x-3)(y-3)=0.$$

$$(x+2)(y+2) - 4(x+1)(y+1) + 6xy - 4(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2) = 0.$$

4. 有 $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 4x + 2$ 以 $x^2 - 3x + 3x - 1$ 除之。

5. 解次之方程式。

$$(1) \quad \frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{4} + \frac{x+3}{5} = 4.$$

$$(2) \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 5, \quad 2x + \frac{y}{3} - 17 = 0$$

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} ax - by = a^2 - b^2 \\ bx - ay = b^2 - a^2 \end{array} \right\}$$

6. 有橙若干個。分給甲、乙、丙、三童子。甲得總數之半多10。乙得較甲取後四分之一多10。丙取其餘。而丙所得之數為20。然則橙之總數幾何。

(B.) 1. 設 $a=1, b=2, c=\frac{1}{2}$, 求次式之數值。

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (b-c)(c-a)(a-b).$$

2. 由 $(2a-b)^2$ 與 $(a-2b)^2$ 之和。減 $2(a-b)$ 之平方。

3. 證下兩式。

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n,$$

$$n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n.$$

4. 以 $x^2 - 2x + 1$ 除某代數式。得商數 $x^2 + 2x + 1$ 。餘數 $x + 1$ 。問某代數式如何。

5. 解次之方程式。

$$(1) \quad 3(x+3)^2 + 5(x+5)^2 = 8(x+8)^2.$$

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{3}(x-y) &= 8 \\ \frac{1}{4}(x+y) - \frac{1}{5}(x-y) &= 11 \end{aligned} \right\}$$

$$(3) \quad \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1, \quad \frac{7}{x} - \frac{8}{y} = \frac{1}{6}$$

6. 某人有銀票 100 圓。僅要一圓銀貨與半圓銀貨兩種。而其總數為 110 個。然則各銀貨之數幾何。

(C.) 1. 化 $a - [a + b - \{a + b + c - \overline{a + b + c + d}\}]$ 為簡式。

2. 求 $a + b$ 與 $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ 之和、差、及積。

3. 證次之二式。

$$ab - 3(a-1)(b-1) + 3(a-2)(b-2) - (a-3)(b-3) = 0,$$

$$ab - 4(a-1)(b-1) + 6(a-2)(b-2) - 4(a-3)(b-3)$$

$$+ (a-4)(b-4) = 0.$$

4. 以 $a + b + c$ 除 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 。而依其結果不須更用除法。直書以 $2x + 2y + z$ 除 $8x^3 + 8y^3 + z^3 - 12xyz$ 所得之商。

5. 解次之方程式。

$$(1) \quad x = \frac{1}{3}(5y+2), \quad y = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$(2) \quad ax+by=a^2 \quad bx+ay=b^2$$

6. 甲,乙,二人。各射三十箭。其中的之數。乙二倍於甲。又不中的之數。甲三倍於乙。然則中的與不中的之數各幾何。

(D.) 1. 設 $a=1, b=3, c=-5, d=0$ 。求次式之數值。

$$abc(ab+bc+cd+da) \div (a+b)(a+c)(a+d)$$

2. 化 $(a+b)^2 - [2a^2 - \{(a-b)(a+2b) - b(a-b)\}]$ 爲簡式。

3. 求 $x+a, x+b, x+c$ 之連乘積。而依其結果書 $a-x, a-y, a-z$ 之連乘積。

4. 以 $5a^2bc^3$ 除 $75a^2b^3c^5 - 15a^3b^4c^3$ 。又以 $a+b+2c$ 除 $a^3 - 2b^2 - 6c^2 + ab - ac + 7bc$ 。

5. 解次之方程式。

$$(1) \quad \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{3}(x-2) + \frac{1}{4}(x-3) = 0$$

$$(2) \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{x+y}{9}$$

$$(3) \quad \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 22, \quad \frac{7}{x} - \frac{4}{y} = 20$$

6. 有花壇。其形爲正方形。若每邊短一尺。則其面積減 69 平方尺。然則此花壇爲幾平方尺。

[E.] 1. 化 $b^2 + \{b(a-c) + ac\} - a\{b - \overline{a-c}\} + b(c - \overline{b-a}) - ab$ 爲簡式。

2. 由何數減 $3a^2 + 2ab - ac$, $3b^2 + 2bc - ab$, 及 $3c^2 + 2ca - bc$ 之和。則其餘數爲 $a^2 + b^2 + c^2$ 。

3. 證 $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 + 2(x+y)(x+z) + 2(y+z)(y+x) + 2(z+x)(z+y) = 4(x+y+z)^2$ 。

4. 有 $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 以 $\frac{1}{2}x + 2$ 除之。
又有 $acx^2 + (ad - bc)x^2 - (ac + bd)x + bc$ 以 $ax - b$ 除之。

5. 解以下三方程式。

$$(1) (x-1)(x+2) = x^2 + 3.$$

$$(2) 2x + .4y = 1.2, 5x + .2y = 1.8.$$

$$(3) (a-b)x = (a+b)y, x+y = 2a.$$

6. 二數差之二倍。較其小數多 1。而較其大數少 2。然則此二數如何。

[F.] 1. 設 $x=3, y=-5, z=7$ 。求 $3(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ 之數值。

2. 求 $a^4 + x^4, a^2 + x^2, a + x, a - x$ 之連乘積。

3. 證 $(1-a)(1-b) + a(1-b) + b = 1$ 又

$$(1-a)(1-b)(1-c) + a(1-b)(1-c) + b(1-c) + c = 1$$

4. 以 $2y^2 + 3y - 1$ 除 $4y^4 - 9y^2 + 6y - 1$ 。又以 $a + b - c$ 除 $a^2 + 2b^2 - 3c^2 + bc + 2ac + 3ab$ 。

5. 解次之方程式。

$$(1) \quad (a+x)(b+x) = (c+x)(d+x)$$

$$(2) \quad 3x - 7y = 4, \quad 7x - 9y = 2$$

6. 茶 12 斤。珈琲 3 斤。其價合計 4.20 圓。珈琲 12 斤。茶 3 斤。其價合計 3.30 圓。問各一斤之價幾何。



Handwritten signature or initials, possibly 'F. S. H. H.' or similar, written in cursive.

第 九 編

因 數

92. 定義 代數式中。其各項之分母無文字者。謂之整式。

如 $a+b$ 及 $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}b^2$ 俱為整式。

式中任意項之分母。不含任意之特別文字。則此式在此文字為整式。

如 $\frac{x^2}{a} + \frac{x}{a+b}$ 在 x 為整式。

式中之任何項。不含平方根或他根。謂之有理式。

93. 因數分割法 本編專詳求有理整式諸因數之法。而示其單簡之例。

算術所謂數之因數。單指整數之因數而言。同樣所謂代數式之因數。即單指能除盡本代數式之有理整式而言。

94. 單項因數 任意之文字。(或文字之集

合體)苟爲代數式諸項所共有,則其式之各項必能以此文字或文字之集合體除盡。故其式之全體,亦必能以此文字(或文字之集合體)除盡。

$$\text{如} \quad ab+ac=a(b+c)$$

$$a^2b+ab^2=ab(a+b)$$

$$3ax^3y+6ax^2y^2=3ax^2y(x+2y^2)$$

觀以上諸式,則單項因數之有無,可一望而知。故有單項因數,則全式可直書爲單項因數與他因數之積。(如前例)因而以下所論之式,其單項因數具從省。

問題 XXII.

求以下各式之因數。

- | | | |
|------------------------------------|--|-----------------|
| 1. $x^2+x.$ | 2. $a^2-ab.$ | 3. $ab-bc.$ |
| 4. $2ax+\frac{1}{2}x^2$ | 5. $4x^3-3x^2.$ | 6. $a^3-2a^2b.$ |
| 7. $x^4-5x^3y+20x^2y^2.$ | 8. $a^6-a^4x+a^2x^2.$ | |
| 9. $6ax^4-5a^3x^2+20a^2x^3.$ | 10. $3a^2x^4y^2-\frac{1}{2}a^2x^3y^3.$ | |
| 11. $11a^2bc^2-\frac{1}{2}ab^2c^3$ | 12. $p^2q^3r^4-7p^6q^5.$ | |

95. 用公式求因數之法 代數式與乘

法已知之結果同形。則其同數。可直求出。今舉其最緊要之例如次。

96. 緊要公式之用法 如已知。

$$\underline{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

$$\underline{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

由是。任意二量各平方之和。並加其積之二倍而成之三項式。等於二量和之平方。而由二量各平方之和。減其積之二倍而成之三項式。等於二量差之平方。

是故三項式為完全之平方與否。不難知之。何則。即觀其中之二項為平方。而他之一項。為前二項積之平方根之二倍與否。定之可也。但平方之二項。須俱為正。又中項無論為正為負俱可。

如 $a^2 + 6ab + 9b^2$ 即 $a^2 + 2a(3b) + (3b)^2$ 原為 a 與 $3b$ 之各平方。及 a 與 $3b$ 之積二倍而成者。

$$\text{故} \quad a^2 + 6ab + 9b^2 = (a + 3b)^2$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad 4ab - a^2 - 4b^2 &= -(a^2 - 4ab + 4b^2) \\ &= -\{a^2 - 2a(-b) + (2b)^2\} \\ &= -(a - 2b)^2 \end{aligned}$$

今舉其例如次。

$$16a^4 + 8a^2 + 1 = (4a^2)^2 + 2(4a^2) + 1 = (4a^2 + 1)^2,$$

$$x^3 - 4x^2y^3 + 4xy^4 = x(x^2 - 4xy^3 + 4y^4)$$

$$= x\{x^2 - 2x(2y^3) + (2y^3)^2\}$$

$$= x(x - 2y^3)^2$$

〔注意〕 $a^2 - 2ab + b^2$ ，原等於 $(a - b)^2$ ，亦可視為等於 $(b - a)^2$ 。何則依符號之定則。 $(b - a)^2$ ，可變為 $\{-(a - b)\}^2$ ，即等於 $(a - b)^2$ 故也。

由是，一式等於兩因數之積。此式必更等於符號相反之原兩因數之積。

問 題 XXIII.

求以下各式之因數。

1. $4x^2 + 4x + 1.$

2. $9x^2 - 6x + 1.$

3. $1 - 8x^2 + 16x^4.$

4. $4a^2 - 12ab + 9b^2.$

5. $9a^4 + 24a^2b^2 + 16b^4.$

6. $x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2.$

7. $4a^2x^2 + 4abxy + b^2y^2.$

8. $25a^4x^2 - 30a^2b^2xy + 9b^4y^2.$

9. $3a^2 + 6ab + 3b^2.$

10. $5a^4 - 10a^2b + 5b^2.$

11. $a^3 - 6a^2b + 9ab^2.$

12. $3a^5 - 30a^4b^2 + 75a^3b^4.$

13. $4x^2y^2 - x^4 - 4y^4.$

14. $8x^3 - 4x^2 - 4.$

15. $4xy^2 - 4x^2y^2 + x^2y$. 16. $x^2y^2 + x^2y + \frac{1}{2}xy^2$.

17. $(a+b)^2 + 4c(a+b) + 4c^2$.

18. $(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)x^2 + x^4$.

19. $4x^2y^2 + 4(a+b)xy + (a+b)^2$.

20. $9(a+b)^2 - 6c(a+b) + c^2$.

92. 兩平方差之公式 為 $a^2 - b^2 = (a+b)$

$(a-b)$ 由是知任意二量之平方差等於二量之和與差之積

如 $a^2 - 4b^2$ 即 $a^2 - (2b)^2$, 故等於 $(a+2b)(a-2b)$

又 $9x^2 - 4xy^2$ 即 $x\{(3x)^2 - (2y)^2\}$ 故等於 $x(3x+2y)(3x-2y)$

今舉其例如次。

$$\begin{aligned} 8axy - 18a^2x^2y^3 &= 2axy(4 - 9a^2x^2y^2) = 2axy\{2^2 - (3axy)^2\} \\ &= 2axy(2 - 3axy)(2 + 3axy), \end{aligned}$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a+b)(a-b),$$

$$\text{及 } 79^2 - 71^2 = (79+71)(79-71) = 150 \times 8 = 1200,$$

多項式之差亦可用單項式之平方差之法求之。

$$\text{如 } (a+b)^2 - c^2 = \{(a+b)+c\}\{a+b\}-c\}$$

$$= (a+b+c)(a+b-c).$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab),$$

及 $(2a - b + 2c)^2 - (a + 4b + c)^2$

$$= \{(2a - b + 2c) + (a + 4b + c)\} \{(2a - b + 2c) - (a + 4b + c)\}$$

$$= (3a + 3b + 3c)(a - 5b + c) = 3(a + b + c)(a - 5b + c).$$

問題 XXIV.

求以下各式之因數。

1. $a^2 - 9.$

2. $16 - l^2.$

3. $25a^2 - b^2.$

4. $x^2 - 9y^2.$

5. $16x^2 - 9y^2.$

6. $64a^2 - 49b^2.$

7. $4a^2 - 81b^2.$

8. $x^2 - 9y^2.$

9. $36a^4 - 49b^2.$

10. $4a^2b^2 - 9c^2.$

11. $9a^2x^2 - 49b^2y^2.$

12. $49a^2b^2c^2 - 36x^2y^2z^2.$

13. $4xy^2 - 9x^3.$

14. $8ab^2 - 18a^3.$

15. $3a^5 - 108a^3.$

16. $7a^5 - 28a^3.$

17. $8x^3y - 32xy^3.$

18. $7abc^2 - 7a^2b^3.$

19. $x^4 - y^4.$

20. $x^4 - 16y^4.$

21. $81a^4 - 16b^4.$

22. $625a^4 - 256x^4.$

23. $x^4y^4 - a^4b^4.$

24. $a^4b^4 - 81c^4d^4.$

25. $81x^4y^4 - 1.$

26. $16a^4b^4c^4 - 1.$

27. $16-81x^4y^4$. 28. x^3-y^3 .
29. $a^3-b^3c^3$. 30. $a^{10}-a^3$.
31. $(a+b)^2-c^2$. 32. $(a+b)^2-4c^2$.
33. $4(x+y)^2-1$. 34. $9(x-y)^2-4$.
35. $(x+y)^2-(x-y)^2$ 36. $(2a+b)^2-(2b+a)^2$.
37. $x^2-(x-y)^2$. 38. $a^2-(2b-a)^2$.
39. $4(a+l)^2-(a-b)^2$. 40. $9(x+y)^2-4(x-y)^2$.
41. $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$. 42. $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$.
43. $(3a+b-2c)^2-(a+3b-c)^2$
44. $(a-2b+3c)^2-(a-c)^2$.
45. $(3x^2+x-2)^2-(x^2-x-2)^2$.

98. 立方之和及差之公式

爲 $\frac{x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)}$

及 $\frac{x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)}$ [69款]

由是知任意二量之立方和能以二量之和除盡。

又任意二量之立方差能以二量之差除盡。

如 $8a^3+27b^3$ 即 $(2a)^3+(3b)^3$, 能以 $2a+3b$ 除盡。而其商爲 $(2a)^2-(2a)(3b)+(3b)^2$, 即 $4a^2-6ab+9b^2$ 。

又 $27x^3-8$ 即 $(3x)^3-2^3$ 。等於次式。

$$(3x-2)\{(3x)^2+2(3x)+2^2\}=(3x-2)(9x^2+6x+4).$$

他例如次。

$$a^2b^2-\frac{1}{4}c^2=(ab-\frac{1}{2}c)(a^2b^2+\frac{1}{4}abc+\frac{1}{4}c^2),$$

$$\begin{aligned} \text{及 } a^6-b^6 &= (a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2). \end{aligned}$$

多項式之立方和或差亦可用同樣之法解之。

$$\text{例如 } (a+b)^3-c^3=\{(a+b)-c\}\{(a+b)^2+(a+b)c+c^2\}$$

$$\begin{aligned} \text{及 } (x-2y)^3-(y-2x)^3 &= \overline{(x-2y)-(y-2x)}\{(x-2y)^2+(x-2y)(y-2x)+(y-2x)^2\} \\ &= (3x-3y)(3x^2-3xy+3y^2) \\ &= 9(x-y)(x^2-xy+y^2). \end{aligned}$$

問題 XXV.

求以下各式之因數。

1. $a^2-8b^2.$

2. $8a^3+b^3.$

3. $8c^2-125x^2.$

4. $a^2-125x^6.$

5. $4a^2+32b^3.$

6. $27x^3-\frac{1}{4}y^3.$

7. $x^2y^2+\frac{1}{17}a^2b^2.$

8. $8a^6b^6+x^6.$

9. $2xy^3-\frac{1}{4}x^4.$

10. $9a^4b^2-\frac{1}{4}ab^5.$

11. $3a^4b+24ab^4.$

12. $40a^2bc-5b^4c^4.$

13. $a^6 - 64$.

14. $64a^6 - 729b^6$.

15. $x^{12} - a^6b^6$.

16. $(x+2y)^2 - y^2$.

17. $(x+2y)^2 + (y+2x)^2$.

18. $(2y-x)^2 - (2x-y)^2$.

19. $(x-3y)^2 - (y-3x)^2$.

20. $(2y-x)^2 + (2x-y)^2$.

99. 三項式之兩因數 由乘法得

$$\underline{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.}$$

由是推上式之理。若有 $x^2 + px + q$ 形之式。其為 $x+a$ 與 $x+b$ 二因數之積者則其所得之式必與 $x^2 + (a+b)x + ab$ 同。

故 $p = a+b, q = ab$

由是知 a 與 b 之和為 p 。而其積為 q 。

如求 $x^2 + 7x + 12$ 之因數。

設此因數為 $x+a, x+b$ 。則 $ab = 12, a+b = 7$ 。由是依二數之積為 12。其和為 7 者求之。

分解 12 為諸因子。則得 12 與 1, 6 與 2, 4 與 3, 而 4 與 3 之和為 7。故

$$x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3)$$

又 $x^2 - 7x + 10$ 亦可分解為因數。因可依數之積為 10。而其和為 -7 者求之故也。

此二數之積爲 $+10$ 。故二數俱爲正，或俱爲負。然二數之和爲 -7 。故知此二數俱爲負。

分解 10 爲兩負因數。則爲 -10 與 -1 。又 -5 與 -2 ，而 -5 與 -2 之和爲 -7 。故

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$$

又分解 $x^2 + 3x - 18$ 爲因數。當依二數之積爲 -18 而其和爲 3 以求之。

今二數之積爲 -18 。故二數必一爲正，一爲負。分解 -18 爲因數。則爲 -18 與 1 ， -9 與 2 ， -6 與 3 ， -3 與 6 ， -2 與 9 ， -1 與 18 。而此中 6 與 -3 之和爲 3 故。

$$x^2 + 3x - 18 = (x + 6)(x - 3)$$

問 題 XXVI.

求以下各式之因數。

1. $x^2 + 4x + 3.$

2. $x^2 - 4x + 3.$

3. $x^2 - 6x + 8.$

4. $x^2 - 8x + 15.$

5. $x^2 - 11x + 18.$

6. $x^2 + 9x + 20.$

7. $x^2 + 2x - 3.$

8. $x^2 + 4x - 5.$

9. $x^2 + x - 6.$

10. $x^2 - x - 6.$

11. $x^2+2x-35.$

12. $x^2-3x-10.$

13. $x^2+5x-14.$

14. $x^2-x-132.$

15. $x^2+18x+72.$

16. $x^2-5x-84.$

17. $x^2-25x+150.$

18. $x^2+5x-150.$

19. $x^2+11x-180.$

20. $x^2-x-156.$

21. $x^2-31x+240.$

22. $x^2-17x-200.$

23. $x^2-34x+288.$

24. $x^2-35x-200.$

100. 三項式因子之係數 由乘法得

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+cb)x + bd$$

由是推上式之理。若 px^2+qx+r 形之式。其為 $ax+b$, $cx+d$ 兩因數之積者。則其式必與 $acx^2+(ad+bc)x+bd$ 同。

是故 $ac=p$, $bd=r$, $ad+bc=q$ 。故在單簡之式內。可由觀察求得適當於此等關係之 a, b, c, d 之數值。如求 $3x^2-16x+5$ 之因數。

$3x^2$ 僅為 $3x$ 與 x 相乘而得者。又 5 僅為 5 與 1 , 或 -5 與 -1 , 相乘而得者。而中央之項為負。故宜用 -5 與 -1 。

於是當於 $(3x-5)(x-1)$ 與 $(3x-1)(x-5)$ 兩式中而

選其一。而積中 x 之係數為 -16 。故當取 $(3x-1)(x-5)$ 。
故所求之因數為 $3x-1$ 與 $x-5$ 。

又，求 $5x^2+32x-21$ 之因數。

$5x^2$ ，僅為 $5x$ 與 x 相乘而得者。解末項 -21 為因數。有 -21 與 1 ， -7 與 3 ， -3 與 7 ， -1 與 21 四種。故分解初項與末項而得之因數為 $(5x \mp 21)(x \pm 1)$ ， $(5x \mp 7)(x \pm 3)$ ， $(5x \mp 3)(x \pm 7)$ ， $(5x \mp 1)(x \pm 21)$ 。就中其中中央之項為 $32x$ 者。惟 $(5x-3)(x+7)$ 。

01. 二次之三項式 求 $x^2-5xy+4y^2$ 之因數。

其法與求 x^2-5x+4 之因數之法同。

何則。因求 $x^2-5xy+4y^2$ 之因數。必竟依二數之積為 $4y^2$ ，其和為 $-5y$ 求之故也。如是。知其二量為 $-4y$ 與 $-y$ 。

$$\therefore x^2-5xy+4y^2 = (x-4y)(x-y)$$

同樣。求 $3x^2-16xy+5y^2$ 之因數。其法與求 $3x^2-16x+5$ 之因數之法同。如是。此兩式中。若已知其一式之因數。則他式之因數。可直書出。

如已知 $x^2+32x-21 = (x-3)(x+7)$

則 $5x^2+32xy-21y^2 = (5x-3y)(x+7y)$ 可直書出。

問 題 XXVII.

求以下各式之因數。

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1. $3x^2 - 10x + 3.$ | 2. $3x^2 - 17x + 10.$ |
| 3. $2x^2 + 11x + 12.$ | 4. $2x^2 + 3x - 2.$ |
| 5. $3x^2 + 7x - 6.$ | 6. $4x^2 + x - 3.$ |
| 7. $5x^2 - 38x + 21.$ | 8. $3x^2 + 11x - 20.$ |
| 9. $7x^2 - 33x - 54.$ | 10. $5x^2 - 38x + 48.$ |
| 11. $7x^2 + 75x - 108.$ | 12. $9x^2 + 180x - 75.$ |
| 13. $4x^2 + 21x - 18.$ | 14. $4x^2 + 4x - 15.$ |
| 15. $6x^2 + 55x - 50.$ | 16. $10x^2 + 3x - 1.$ |
| 17. $182x^2 + x - 1.$ | 18. $4x^2 - 5x + 1.$ |
| 19. $12x^2 + 50x - 50.$ | 20. $7x^2 + 123x - 54.$ |
| 21. $24x^2 - 30x - 75.$ | 22. $x^2 + 4xy + 3y^2.$ |
| 23. $x^2 - 6xy + 8y^2.$ | 24. $x^2 - 11xy + 18y^2.$ |
| 25. $x^2 + 5xy - 14y^2.$ | 26. $x^2 - 25xy + 150y^2.$ |
| 27. $x^2 - 35xy - 200y^2.$ | 28. $3x^2 - 17xy + 10y^2.$ |
| 29. $7x^2 - 83xy - 54y^2.$ | 30. $24x^2 - 70xy - 75y^2.$ |
| 31. $x^2 - 13x^2 + 36.$ | 32. $x^4 - 25x^2y^2 + 144y^4.$ |

33. $36x^4 - 97x^2y^2 + 36y^4$. 34. $x^3 - 3x^2 - 18x$.
 35. $x^3y - x^2y^2 - 2xy^3$. 36. $15x^4y - 4x^3y^2 - 4x^2y^3$.
 37. $75xy^2 - 130x^2y^4 - 9x^3y^6$.

102. 普通二次式之因數 有 $px^2 + qx + r$

形之式。(但 p, q, r 俱為已知數) 其因數雖可視察求得。然分解 p 與 r 為因數。其分法有種種。極其繁雜。

何則。分解 p 與 r 為兩因數。若其分法有種種。則分解初項與末項所得之因數。恆有數組。如是。由此數組中。選擇其適於中央之項者。良非易易。

如用此法求 $2310x^2 - 2419x - 9009$ 之因數。殆不可得。

又如 $x^2 + 6x + 7$ 。原為不能分解有理因數之式。而代數式中往往遇之。故如此例。殆依視察求其因數。實所不能。

故求二次式之因數之法。必須於無論如何之式。皆能適用。然後始足稱為通法。今示於次。

103. 配隅法 如 $x^2 + 2ax + a^2$ 為完全之平方。

即 $(x+a)^2$ 。故某式祇有首次兩項。則因欲配此式為完全平方。須加 a 之平方(即加 x 之係數之半之平方)。

[增] 配成完全平方之法。謂之配圓法。

如 x^2+6x ，欲配成完全平方。則加 $\left(\frac{6}{2}\right)^2$ 。其所加得之式爲 x^2+6x+9 。即 $(x+3)^2$ 。

同樣。如 x^2+5x 欲配成完全平方。則加 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ 。其所加得之式爲 $x^2+5x+\frac{25}{4}$ ，即 $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$ 。

又 x^2-7x 。欲配成完全平方。則加 $\left(-\frac{7}{2}\right)^2$ 。其所加得之式爲 $x^2-7x+\frac{49}{4}$ ，即 $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2$ 。

又 x^2+ax ，無論 a 爲如何之數。欲配成完全平方。則加 $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 。其所加得之式爲 $x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 。

因 $x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2$ 故也。

104. 例解 由是求 ax^2+bx+c 之因數。則其法無論如何之式。皆能適用。

此問題。在將 a 之有理整式之兩因數求出。故在求 x 之兩一次因數。雖然。其算術的之數。或其式中所含之他文字。不必爲有理整式。

先舉其例如次。

[例1.] 求 x^2+6x+8 之因數。

依前款。 x^2+6x 加 3^2 則得完全之平方。

由是加 3^2 。且同時減之。得

$$\begin{aligned}x^2+6x+8 &= x^2+6x+9-9+8 \\ &= (x+3)^2-1\end{aligned}$$

此式最後之形。原為兩平方之差。故其因數為 $x+3+1$ 及 $x+3-1$ 。即 $x+4$ 及 $x+2$ 。

故 x^2+6x+8 之因數。為 $x+4$ 及 $x+2$ 。

[例 2.] 求 $x^2-3x-28$ 之因數。

x^2-3x 加 $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$ 即 $\frac{9}{4}$ 。則得完全之平方。

由是加 $\frac{9}{4}$ 且同時減之。則

$$\begin{aligned}x^2-3x-28 &= x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-28 \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{121}{4} \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2\end{aligned}$$

此末式之因數為 $x-\frac{3}{2}+\frac{11}{2}$ 與 $x-\frac{3}{2}-\frac{11}{2}$ 。

故所求之因數為 $x+4$ 與 $x-7$ 。

[例 3.] 求 x^2+6x+7 之因數。

x^2+6x 加 3^2 。則得完全之平方。

$$\begin{aligned}x^2+6x+7 &= x^2+6x+9-9+7 \\ &= (x+3)^2-2\end{aligned}$$

$$= (x+3)^2 - (\sqrt{2})^2$$

此末式之因數爲 $x+3+\sqrt{2}$ 與 $x+3-\sqrt{2}$ 。是即所求之因數。

〔例 4.〕 求 $3x^2-10x+3$ 之因數。

$$3x^2-10x+3=3\left(x^2-\frac{10}{3}x+1\right)$$

$x^2-\frac{10}{3}x$ ，加 $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$ ，即 $\frac{25}{9}$ ，則得完全之平方。

由是

$$\begin{aligned} x^2-\frac{10}{3}x+1 &= x^2-\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+1 \\ &= \left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{16}{9} \\ &= \left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

此末式之因數爲 $x-\frac{5}{3}+\frac{4}{3}$ 與 $x-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$ 即 $x-\frac{1}{3}$ 與 $x-3$ 。

由是 $3x^2-10x+3=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)$ 或 $(3x-1)(x-3)$ 。

依上所說諸例。則求二次式之因數。須先變其式爲兩平方之差。

故求 ax^2+bx+c 之因數。其法如次。

Important Equation

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$x^2+\frac{b}{a}x$, 加 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 即 $\frac{b^2}{4a^2}$. 則成完全之平方. 即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

因而加 $\frac{b^2}{4a^2}$ 於括弧內之式. 且同時減之. 得

$$\begin{aligned} a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) &= a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\} \\ &= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right\} \\ &= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}^2 \end{aligned}$$

括弧內之式之因數. 依第97款. 爲

$$x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)} \text{ 及 } x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}$$

由是得公式 $\underline{ax^2+bx+c}$

$$= a\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}$$

105. 公式用法 以前款所求得之公式. 代各題之演算. 則以各題特別之數值. 代入 a, b, c , 即得.

〔例 1.〕 求 $x^2+7x+12$ 之因數.

茲 $a=1, b=7, c=12.$

是故

$$\begin{aligned} x^2+7x+12 &= \left\{x+\frac{7}{2}+\sqrt{\left(\frac{7}{4}-12\right)}\right\} \left\{x+\frac{7}{2}-\sqrt{\left(\frac{7}{4}-12\right)}\right\} \\ &= (x+\frac{7}{2}+\frac{1}{2})(x+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}) \\ &= (x+4)(x+3). \end{aligned}$$

〔例2.〕 求 $5x^2+32xy-21y^2$ 之因數.

茲 $a=5, b=32y, c=-21y^2$

是故 $\frac{b}{2a} = \frac{32y}{10} = \frac{16y}{5},$

$$\begin{aligned} \text{及 } \sqrt{\left\{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right\}} &= \sqrt{\left\{\left(\frac{16y}{5}\right)^2 + \frac{21y^2}{5}\right\}} \\ &= \sqrt{\left\{\frac{256y^2+105y^2}{25}\right\}} = \frac{19y}{5}. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} 5x^2+32xy-21y^2 &= 5\left\{x+\frac{16y}{5}+\frac{19y}{5}\right\} \left\{x+\frac{16y}{5}-\frac{19y}{5}\right\} \\ &= 5(x+7y)\left(x-\frac{3y}{5}\right) \\ &= (x+7y)(5x-3y). \end{aligned}$$

106. 虛因數 於104款之公式。以1代 a , 2代 b , 4代 c , 則得 x^2+2x+4 之因數。

是等之因式。爲 $x+1+\sqrt{(1-4)}$ 與 $x+1-\sqrt{(1-4)}$

即 $x+1+\sqrt{-3}$ 與 $x+1-\sqrt{-3}$ 。

然無論正數，負數，其平方皆為正。由是，問何數之平方為 -3 ，則無以答之。因其不能為正數，亦不能為負數。故也。

雖然，如 $\sqrt{-3}$ 式，代數學屢用之。而問 $\sqrt{-3}$ 之意味，則但答以 $\sqrt{-3} \times \sqrt{-3} = -3$ 而已。

負數之平方根，謂之虛數。故 $x+1+\sqrt{-3}$ 與 $x+1-\sqrt{-3}$ ，謂之 x^2+2x+4 之虛因數。

回顧 104 款，則 ax^2+bx+c 之因數，如 $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ 為負。

則可視為虛數。

107. 將諸項整列，集合而求得之因數。 有許多代數式，可將諸項整列集合，而求其因數。

整列，集合，雖無定法，然依式中所有文字之方乘幣列，多能看出其因數。若有僅為單次項之文字，則直括之為因數。

[例 1.] 求 x^3-3x^2+x-3 之因數。

$$x^3-3x^2+x-3 = x^2(x-3) + (x-3) = (x-3)(x^2+1)$$

[例 2.] 求 $ax+by+bx+ay$ 之因數。

依 x 之方乘整列如次。

$$x(a+b) + ay + by = x(a+b) + y(a+b) = (a+b)(x+y).$$

〔例 3.〕 求 $ax^2 - x + a - 1$ 之因數。

依 a 之方乘整列。則得 $a(x^2 + 1) - (x + 1)$

而 $x + 1$ 爲此式之一因數。

〔例 4.〕 求 $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ 之因數。

依 a 之乘方整列。則得

$$a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(b-c)$$

則 $b-c$ 爲一因數。因而所得之式爲

$$= (b-c) \{a^2 - a(b+c) + bc\}$$

$$= (b-c)(a-b)(a-c)$$

〔例 5.〕 求 $a^2 - 3b^2 - c^2 - 2ab + 4bc$ 之因數。

此式爲 a ，或 b ，或 c ，之二次式。

故依 104 款推求。則其所得之式。

$$= a^2 - 2ab - 3b^2 - c^2 + 4bc$$

其含 a 之項惟 $a^2 - 2ab$ ，若加 b^2 則成完全之平方。

故此式變爲。

$$a^2 - 2ab + b^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc = (a-b)^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc$$

$$= (a-b)^2 - (2b-c)^2 = \{(a-b) - (2b-c)\} \{(a-b) + (2b-c)\}$$

$$= (a-3b+c)(a+b-c).$$

108. 雜公式 又 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 式。亦屢應用於他例。故須知其因數。即

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

容易證明。

再 x^4+x^2+1 式亦屢應用於他項。而求之。則先變爲 $(x^2+1)^2-1$ 。易知其兩因數爲 x^2+1+x ，與 x^2+1-x ，而 x^2+x+1 ，及 x^2-x+1 ，原可更分解爲兩一次因數。而因一次因數中。含有虛數。故不復分解。蓋通例然也。

揭因數之雜題於次。即爲本編之結局。

問 題 XXVIII.

求以下各式之因數

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1. $16x^4-625y^4$. | 2. $81a^4-16b^4$. |
| 3. x^5-81x . | 4. $1+27a^3$. |
| 5. $27+8x^3$ | 6. $27x^4+8x$. |
| 7. $(a+b)^2-(c-d)^2$. | 8. $(a+b)^2-4(c-d)^2$. |
| 9. $(a+b)^2-(a+c)^2$. | 10. $(x+y)^4-(x-y)^4$. |
| 11. $(a+b+c)^2-4c^2$ | 12. $(a+b-3c)^2-9c^2$. |

13. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$
14. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2$
15. $(x^3+3x)^2-(3x^2+1)^2$
16. $(x^2+5xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2$
17. $(a+b+c+a)^2-(a-b+c-d)^2$
18. $(3a+2b+c)^2-(a+2b+3c)^2$
19. $(2x+3y)^3+(3x+2y)^3$
20. $(a+3b)^3-(2a+b)^3$
21. $x^3-4xy-4y^3$
22. $x^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)cy+y^2$
23. $x^3+\frac{1}{4}x^2+x$
24. $6x^2-5xy-6y^2$
25. $x^4-\frac{4}{3}x^2y-x^2y^2$
26. $72(x^2-1)-17x$
27. x^4-5x^2+4
28. $x^4-13x^2y^2+36y^4$
29. $ab(x^2+y^2)+x(a^2+b^2)$
30. $ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)$
31. $(a+b)^2-5c(a+b)+6c^2$
32. $(x+y)^2-7z(x+y)+10z^2$
33. $(a+b)^2-8(a+b)(c+d)+15(c+d)^2$
34. $x(x+2)-y(y+2)$
35. $x(x+4)-y(y+4)$
36. x^3-5x^2+x-5
37. x^3+x^2-4c-4
38. $2x^3-3x^2-2x+3$
39. $5x^3-x^2-5x+1$
40. $ax^3+x+a+1$
41. $ax^3+bx+a+b$

42. $x^2 + bx^2 - a^2x - a^2b.$ 43. $bx^2 + ax^2 + bx + a.$
44. $ax^2 + by^2 + (a+b)xy.$ 45. $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1.$
46. $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1.$ 47. $ac + bd - ad - bc.$
48. $ac^2 + bx^2 - ad^2 - bc^2.$ 49. $x^2 - y^2 + xz - yz.$
50. $a^2 - b^2 - (a-b)^2.$ 51. $a^4 + a^2b^2 - b^2c^2 - c^4.$
52. $a^2 - b^2 + bc - ca.$ 53. $a^2 - a - c^2 + c.$
54. $1 + bx - (a^2 + ab)x^2.$ 55. $1 - abx^3 + (b - a^2)x^2.$
56. $a^2c^2 + acd + abc + bd.$
57. $a^2x + abx + ac + b^2y + aby + bc.$
58. $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - 2(ac - bd).$
59. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$
60. $(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 - (2ac - 2bd)^2.$
61. $x^4 - 2x^2 + 1.$ 62. $x^4 - 7x^2y^2 + y^4.$
63. $x^4 - 11x^2y^2 + y^4.$ 64. $x^4 - 3x^2 + 1.$
65. $(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15.$
66. $(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 12) - 280.$
-

第 十 編

最 高 公 因 數

109. 公因數 凡一代數式能除盡他二以上諸代數式。則此一代數式。謂之他二以上諸代數式之公因數。

如 a 為 ab 與 ac 之公因數。

最高公因數。公因數中之最高次者。謂之最高公因數。

如 a 與 a^2 俱為 a^2b 與 a^2c 之公因數。而 a^2 為 a^2b 與 a^2c 之最高公因數。

最高公因數。通例略為 H.C.F.

由是求某式之 H.C.F. 其法如次。

110. 單項式之最高公因數 二以上諸單項式之 H.C.F. 可由視察求得。

如求 a^2b^2c 與 $a^2b^3c^4$ 之 H.C.F.

其第一式能用 a ，或 a^2 ，或 a^3 除盡。而高於 a^2 之

方乘不能除盡。又第二式。能用 a 。或 a^2 。除盡。而高於 a^2 之方乘不能除盡。故 a 之方乘。其能除盡此兩式且其方乘為最高次者。惟 a^2 。又 b 之方乘。其能除盡此兩式者惟 b^2 。而高於 b^2 之方乘不能除盡。又 c 之方乘。其能除盡此兩式者惟 c 。而高於 c 之方乘不能除盡。

由是 a^3b^2c 與 $a^2b^3c^4$ 之 H.C.F. 為 a^2b^2c 。

又求 $ab^3c^3d^2$ 與 $a^3c^5d^3$ 之 H.C.F.

a 之最高方乘。其能除盡此兩式者惟 a 。而 b 之方乘。俱不能除盡此兩式。又 c 之最高方乘。其除盡此兩式者惟 c^3 。又 d 之最高方乘其能除盡此兩式者惟 d^2 。

由是所求之 H.C.F. 為 ac^3d^2 。

又 a^2bc^4 。 $a^2b^3c^6d$ 。 $a^4bc^4d^2$ 。皆能以 a^2, b, c^4 除盡。故此三式之 H.C.F. 為 a^2bc^4 。

依上諸例。凡二以上諸單項式之最高公因數。乃取諸式中公有之各文字。附以各文字最低方乘之指數而得。

若各式有數字係數。則求其算術上之最大公約數。即代數上 H.C.F. 之數字係數。

問 題 XXIX.

求以下各題之 H.C.F.

1. a^3b^2 與 a^2b^3 .
2. abc^2 與 a^2bc^3 .
3. $9ab^3$ 與 $6a^2b$.
4. $4x^3y$ 與 $10xy^3$.
5. $24a^3b^2c^4$ 與 $60a^2b^4c^6$.
6. $a^2b^3c^5$ 與 $3b^5c$.
7. $9a^2b^3x^4y^5$ 與 $8x^3y^6$.
8. $\frac{2}{3}a^3b^3c^8$ 與 $2b^3c^6$.
9. $42axy^2z^3$ 與 $77b^3y^4$.
10. ab^3, a^2bc 與 abc^2 .
11. $3x^2y^2z^3, 15xy^2z^2$ 與 $10x^2y^2z^2$.
12. $ab^2c^3x^4, a^4bc^2x^3$ 與 $a^3b^2cx^2$.

111. 知多項式之因數即知其 H.C.F.

知二以上諸多項式之因數，則其 H.C.F. 可直求出。

其 H.C.F. 乃取諸多項式中公有之因數，附以各因數最低方乘之指數而得。

如求 $(x-a)^2(x+b)^3$ 與 $(x-a)^2(x+b)^4$ 之 H.C.F.

此兩式俱能以 $(x-a)^2$ 除盡，而高於 $(x-a)^2$ 之方乘俱不能盡。又此兩式俱能以 $(x+b)^3$ 除盡，而高於 $(x+b)^3$ 之方乘不能除盡。

由是 H.C.F. 為 $(x-a)^2(x+b)^3$

又 $c^2b(a-b)^2(a+b)^3$ 與 $ab^2(a-b)^2(a+b)^4$ ，俱能以 a ，
又 b ，又 $(a-b)^2$ ，又 $(a+b)^3$ 除盡。

故其 H.C.F. 爲 $ab(a-b)^2(a+b)^3$

以下諸例。其因數可由視察求得。故其 H.C.F. 可
直書出。

〔例1〕 求 $a^4b^2 - a^2b^4$ 與 $a^4b^3 + a^3b^4$ 之 H.C.F.

$$a^4b^2 - a^2b^4 = a^2b^2(a^2 - b^2) = a^2b^2(a+b)(a-b)$$

又 $a^4b^3 + a^3b^4 = a^3b^3(a+b)$

故其 H.C.F. 爲 $a^2b^2(a+b)$

〔例2.〕 求 $a^3 + 3a^2b + 2ab^2$ 與 $a^4 + 4a^3b + 3a^2b^2$ 之 H.C.F.

$$a^3 + 3a^2b + 2ab^2 = a(a^2 + 3ab + 2b^2) = a(a+b)(a+2b),$$

及 $a^4 + 4a^3b + 3a^2b^2 = a^2(a^2 + 4ab + 3b^2) = a^2(a+b)(a+3b)$.

故其 H.C.F. 爲 $a(a+b)$

〔例3〕 求 $3a^3 + 2a^2 - a$ 與 $5a^4 + 3a^3 - 2a^2$ 之 H.C.F.

$$3a^3 + 2a^2 - a = a(3a^2 + 2a - 1) = a(3a - 1)(a + 1),$$

及 $5a^4 + 3a^3 - 2a^2 = a^2(5a^2 + 3a - 2) = a^2(5a - 2)(a + 1)$.

由是 H.C.F. 爲 $a(a+1)$.

問題 XXX.

求以下各題中兩式之 H.C.F.

1. $x^2(x-a)^2$ 與 $x^2(x-a)^2$.
2. a^2-b^2 與 $(a+b)^2$.
3. $3ab(a+b)^2$ 與 $2(a-b)(a+b)^2$.
4. $b^4c^6(b+c)^2$ 與 $b^6c^3(b+c)^2$.
5. $a^4b^2+ab^5$ 與 $a^6-c^2b^4$.
6. a^2b+3b^3 與 $a^6-9a^2b^4$.
7. $a^2x^3+2a^3x^2$ 與 $a^2x^4-4a^4x^2$.
8. $a^3x^2-4a^4x^4$ 與 $a^6x^2-16a^2x^4$.
9. x^2+3x+2 與 x^2+6x+8 .
10. $x^2+3x^2y+2xy^2$ 與 $x^4+6x^2y+8x^2y^2$.
11. $3x^2-4x+1$ 與 $4x^2-5x+1$.
12. $3a^2-4ab+b^2$ 與 $4a^4-5a^2b+a^2b^2$.

112. 兩多項式之最高公因數 高於二次之多項式之因數，雖非普通之法所能求，然任意二式之最高公因數，可用次之方法求之，即求二數之最大公約數，與算術上之方法同。

〔法則〕 將兩式俱依某公有文字之遞降方乘整理，而以本文字之低次式除其高次式，(若兩式為同次式，則無論以何為除數均可)若有餘數，則命之為新除數，而以前之除數為被除數，依此方法次第除之。

至無餘數然後止。如是。最後之除式。即爲兩式之

H.C.F.

如求 x^3+x^2-2 與 x^3+2x^2-3 之 H.C.F.

$$\begin{array}{r}
 x^3+x^2-2 \quad x^3+2x^2-3 \quad (1) \\
 \underline{x^3+x^2-2} \\
 x^2-1 \quad x^3+x^2-2(x+1) \\
 \underline{x^3-x} \\
 x^2+x-2 \\
 \underline{x^2-1} \\
 x-1 \quad x^2-1(x+1) \\
 \underline{x^2-x} \\
 x-1 \\
 \underline{x-1} \\
 0
 \end{array}$$

故所求之 H.C.F. 爲 $x-1$ 。

〔注意〕 上之法則。惟用以求多項之 H.C.F. 故單項之 H.C.F. 宜依觀察求之。

如求 $a^2x^4+a^2x^3-2a^2x$ 與 $abx^5+2abx^4-3abx^3$ 之 H.C.F.

$$a^2x^4+a^2x^3-2a^2x = a^2x(x^3+x^2-2),$$

$$\text{及 } abx^5+2abx^4-3abx^3 = abx^3(x^2+2x^2-3)$$

故單項因數之 H.C.F. 爲 ax 。又已知 x^3+x^2-2 與 x^3+2x^2-3 之 H.C.F. 爲 $x-1$ 。

故所求之 H.C.F. 爲 $ax(x-1)$ 。

113. **證明** 兩代數式不含單項因數。則其 H.C.F. 可依前款之法則求之。今得證明如次。

設 A 及 B 為兩多項式。各依某公有文字之遞降方乘整列。且依此公有文字。B 之次數。恆較 A 之次數高。

又以 A 除 B 。設其所得之商為 Q 。餘數為 R 。則求 A 與 B 之 H.C.F. 其演算之第一段如次。

$$\begin{array}{r} A) B(Q \\ \underline{AQ} \\ R \end{array}$$

$$\text{則} \quad B = AQ + R \dots\dots\dots (1)$$

$$R = B - AQ \dots\dots\dots (2)$$

而任意之代數式。其各項能以他式除盡。則其全體。亦能以他式除盡。由是從 (1) 式。知 B 能以 A 與 R 之任一公因數除盡。

故 A 與 R 之任一公因數。恆為 B 與 A 之公因數。

又 B 與 A 之任一公因數。恆為 $B - AQ$ 之一因數。而由 (2) 式。又為 R 之一因數。

故 B 與 A 之任一公因數。恆為 A 與 R 之公因

數。

由是 B 與 A 之 H. C. F. 恆與 A 與 R 之 H. C. F.

同。

又以 R 除 A。設其餘數為 S。則依同理。R 與 S 之 H. C. F. 恆與 A 與 R 之 H. C. F. 同。故即為所求之 H. C. F. 餘做此。

故任一除數與其相當被除數之 H. C. F. 俱得為所求之 H. C. F.

若依此方法。至某階段。除至更無餘數。則最後之除數。必為相當被除數之一因數。而此除數。即為此除數與其相當被除數之 H. C. F. 可知。故即為所求之 H. C. F.

依除法之性質。次第除得之餘數。必次第為低次式。故依前法求至某階段。若除至無餘。則其 H. C. F. 固已求得。若次第求之。至得無公有文字之除數。是即所求之兩式原無公有文字之 H. C. F.

上法惟用以求多項之 H. C. F. 既說於前。故演算中所顯之任一式。無論以如何之單項式乘之。或除之。其所求之 H. C. F. 俱不變。因其乘法或除法。不及影響於多項因數故也。

(例 1.) 求 $x^3+4x^2-8x+24$ 與 x^4-x^3+8x-8 之 H.C.F.

此兩式中俱無單項因數。故可依 112 款求之。

$$\begin{array}{r}
 x^3+4x^2-8x+24 \quad x^4-x^3+8x-8 \quad (x-5) \\
 \underline{x^4+4x^3-8x^2+24x} \\
 -5x^3+8x^2-16x-8 \\
 \underline{-5x^3-20x^2+40x-120} \\
 28x^2-56x+112
 \end{array}$$

其餘數 $28x^2-56x+112=28(x^2-2x+4)$ 。而數字因數 28。非所求二式之因數。學者易知。故棄之。以 x^2-2x+4 爲新除數。續行其演算。

$$\begin{array}{r}
 x^2-2x+4 \quad x^3+4x^2-8x+24 \quad (x+6) \\
 \underline{x^3-2x^2+4x} \\
 6x^2-12x+24 \\
 \underline{6x^2-12x+24} \\
 0
 \end{array}$$

故其 H.C.F. 爲 x^2-2x+4 。

(例 2.) 求 $x^3-4a^2x+15a^3$ 與 $x^4+a^2x^2+25a^4$ 之 H.C.F.

$$\begin{array}{r}
 x^3-4a^2x+15a^3 \quad x^4+a^2x^2+25a^4 \quad (x) \\
 \underline{x^4-4a^2x^2+15a^3x} \\
 5a^2x^2-15a^3x+25a^4
 \end{array}$$

$$\text{今} \quad 5a^2x^2-15a^3x+25a^4=5a^2(x^2-3ax+5a^2).$$

乘單項因數 $5a^2$ ，以 $x^2-3ax+5a^2$ 爲新除數。續行演算。

$$\begin{array}{r} x^2 - 3ax + 5a^2 \quad x^3 - 4a^2x + 15a^3(x + 3a) \\ x^3 - 3ax^2 + 5a^2x \\ \hline 3ax^2 - 9a^2x + 15a^3 \\ 3ax^2 - 9a^2x + 15a^3 \end{array}$$

故 $x^2 - 3ax + 5a^2$ 爲所求之 H. C. F.

(例 3.) 求 $x^5 - y^5$ 與 $x^7 - y^7$ 之 H. C. F.

$$\begin{array}{r} x^5 - y^5 \quad x^7 - y^7 \quad (x^2) \\ x^7 - x^2y^5 \\ \hline x^5y^5 - y^7 \end{array}$$

用此餘數爲除數之前。先乘其單項因數 y^5 。故除數爲 $x^2 - y^2$

$$\begin{array}{r} x^2 - y^2 \quad x^5 - y^5(x^3 + xy^2) \\ x^5 - x^3y^2 \\ \hline x^3y^2 - y^5 \\ x^3y^2 - xy^4 \\ \hline xy^4 - y^5 \end{array}$$

乘此餘數之單項因數 y^4 。則

$$\begin{array}{r} x - y \quad x^2 - y^2(x + y) \\ x^2 - xy \\ \hline xy - y^2 \\ xy - y^2 \\ \hline \end{array}$$

故 $x - y$ 爲所求之 H. C. F.

(例 4.) 求 $2x^2 - 5x + 2$ 與 $x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ 之 H. C. F.

依此照除。則商得分數。殊屬不便。故以 2 乘

$x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ 。而以單項因數乘除絕不及影響於多項之公因數。前款既證明。又此演算之中途。復有用爲乘者。其理亦同。而此演算。概記爲次形。

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - (x+2) \quad x^3 + 4x^2 - 4x - 16 \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 2x^3 + 8x^2 - 8x - 32 \quad (x) \\
 \underline{2x^3 - 5x^2 + 2x} \\
 13x^2 - 10x - 32 \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 26x^2 - 20x - 6 \quad (13) \\
 \underline{26x^2 - 65x + 26} \\
 45 \mid 45x - 90 \\
 \underline{x-2) 2x^2 - 5x + 2(2x-1} \\
 \underline{2x^2 - 4x} \\
 \underline{-x + 2} \\
 \underline{-x + 2}
 \end{array}$$

故 $x-2$ 爲所求之 H.C.F.

114. 諸多項式之 H.C.F. 求三以上諸式之 H.C.F. 其因數不能由視察求得者。代數式中。時時有之。然三以上諸式。其各公有之一因數。恆爲任意二式之 H.C.F. 之一因數。由是。於諸式中先求其任意兩式之 H.C.F. 次求此結果(即兩式之 H.C.F.) 與第三式之 H.C.F. 逐次如此。其最後所得之 H.C.F. 即爲所求之 H.C.F.

如求 $x^3 + x^2 - x - 1$, $x^3 + 3x^2 - x - 3$, $x^3 + x^2 - 2$ 之 H.C.F.

首次兩式之 H.C.F. 爲 $x^2 - 1$ 。

$x^2 - 1$ 與第三式之 H.C.F. 爲 $x - 1$ 。

故 $x - 1$ 爲所求之 H.C.F.

115. 簡法 若兩式首項之數字係數過大，則將兩式依遞昇方乘整列，可直求其 H.C.F.

如求 $7x^4 + 2x^3 - x^2 + 8x + 1$ 與 $9x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ 之 H.C.F. 則變化此兩式爲

$$1 + 8x - x^2 + 2x^3 + 7x^4 \text{ 及 } 1 + 6x + 3x^2 - 2x^3 + 9x^4$$

可直求其 H.C.F.

116. 釋名 兩式之最高公因數，亦有稱爲最大公約數 (G.C.M.) 者。然此名稱，殊不適當。

今舉一例，即足證其不當。如 a^2 爲兩式之因數，則 a 亦爲兩式之因數，自不待言。而以 a^2 與 a 較， a^2 原爲高次。然 a 乃顯無論如何之數，故絕不能謂 a^2 大於 a 。蓋 a 如爲正而小於一，則 a^2 轉恆小於 a 故也。

由是，以一式與他式比，就文字論，祇能見其高，不能見其大。故祇能謂之高，不能謂之大。

又兩式之最高公因數，亦不能稱兩式之數值(以數代其文字)之最大公約數。

又以所選特別之數值，代式中之文字，而使其數為整數者，亦然。

如 $2x^2+15x+13$ 及 $6x^2+17x+11$ 之 H. C. F. 為 $x+1$ 。然設 x 為 $\frac{1}{2}$ 。則此二式之數值俱為 21。故其 G. C. M. (最大公約數)之數值，亦為 21。然 H. C. F. 之數值，却為 $\frac{3}{2}$ 。

問題 XXXI.

求以下各題中兩式之 H. C. F.

1. x^2-5x+4 與 x^2-5x^2+4 .

2. $x^2-5xy+4y^2$ 與 $x^4-5x^2y+4xy^2$.

3. $2x^2-5x+2$ 與 $4x^3+12x^2-x-3$.

4. $2x^3-5xy+2y^2$ 與 $4x^3+12x^2y-xy^2-3y^2$.

5. x^4+3x^2-10 與 x^4-3x^2+2 .

6. $x^6+3x^4y-10x^2y^2$ 與 $x^4-3x^2y+2y^2$.

7. $2a^3-5a+2$ 與 $2a^3-3a^2-8a+12$.

8. $2b^3-5b+2$ 與 $12b^3-8b^2-3b+2$.

9. x^2-3x+2 與 x^3-3x+2 .

10. $x^4y^4 - 3x^2y^2 + 2$ 與 $x^4y^4 - 3x^2y^2 + 2$.
11. $x^3 - 3a^2x - 2a^3$ 與 $x^3 - ax^2 - 4a^3$.
12. $2a^3 + 3a^2b - b^3$ 與 $4a^3 + ab^2 - b^3$.
13. $a^3 + b^3$ 與 $a^4 + a^2b^2 + b^4$.
14. $8a^3 + 1$ 與 $16a^4 + 4a^2 + 1$.
15. $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3$ 與 $x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2y^3$.
16. $2x^2 + 5x^2 + x - 8$ 與 $3x^2 - 4x^2 + 9x - 8$.
17. $8x^3 + x^3 + x - 2$ 與 $2x^3 - x^2 - x - 3$.
18. $x^3 - 4x + 15$ 與 $x^4 + x^2 + 25$.
19. $3x^2 - 38x + 119$ 與 $x^3 - 19x^2 + 119x - 245$.
20. $3x^3 - 3x^2y + xy^2 - y^3$ 與 $4x^2y - 5xy^2 + y^3$.
21. $12x^2 - 15xy + 3y^2$ 與 $6x^3 - 6x^2y + 2xy^2 - 2y^3$.
22. $2x^2 - 14x + 20$ 與 $4x(x^2 + 5) - 25(x + 1)(x - 1)$.
23. $16x^4 + 4x^2 + 1$ 與 $8x^4 - 16x^3 + x - 2$.
24. $a^2 - 4x^2 + 12x - 9$ 與 $a^2 + 2a - 4x^2 + 8x - 3$.
25. $21 - 7x + 3x^2 - x^3$ 與 $35 + 19x^2 + 2x^4$.
26. $2x^4 + 9x^3 + 14x + 3$ 與 $2 + 9x + 14x^2 + 3x^4$.
27. $x^3 + 3x^3 - x - 3$ 與 $x^4 + 4x^3 - 12x - 9$.
28. $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$ 與 $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 12x + 5$.
29. $y^3 - 2y^3 + 3y - 6$ 與 $y^4 - y^3 - y^2 - 2y$.

30. $y^4 - 3yz^3 + 20z^4$ 與 $5y^4 - 3y^2z + 64z^4$.
31. $2x^3 - 11x^2 + 11x + 4$ 與 $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 12x - 4$.
32. $2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ 與 $3x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 2x + 2$.
33. $x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1$ 與 $2x^4 - 2x^2 + x - 1$.
34. $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ 與 $x^7 - 3x^6 + x^5 - 4x^2 + 12x - 4$.
35. $x^3 + (m-3)x^2 - m(2m+3)x + 6m^2$ 與
 $x^3 + (5m-3)x^2 + 3m(2m-5)x - 18m^2$.
36. $mn(x^3 + y^2) + xy(m^2 + n^2)$ 與
 $mn(x^3 + y^3) + xy(m^2y + n^2x)$.

第十一編

最低公倍數

117. 公倍數 凡一代數式用他二以上諸代數式除之。各能除盡。則此一代數式。謂之他二以上諸代數式之公倍數。

最低公倍數。諸公倍數中之最低次者。謂之最低公倍數。

最低公倍數。通例略為 L.C.M.

由是求諸式之 L.C.M. 其法如次。

118. 單項式 L.C.M. 二以上諸單項式之最低公倍數。可由視察求得。

如求 a^3b^2c 與 $a^2b^3c^4$ 之 L.C.M. 此兩式中。a 之最高方乘為 a^3 。由是兩式之任一公倍數。必含因數 a^3 。又同理。兩式之任一公倍數。必含因數 b^3 。又必含因數 c^4 。故任一公倍數。必含因數 $a^3b^3c^4$ 。由是。最低次方之公倍數為 $a^3b^3c^4$ 。

又求 a^3bc^4 , $a^2b^3c^6d$, $a^4bc^3d^2$ 之 L.C.M. 此三式中。a

之最高方乘爲 a^4 。由是此三式之任一公倍數。必含因數 a^4 。又同理。此三式之任一公倍數。必含因數 b^3, c^3, d^2 。故任一公倍數必含因數 $a^4b^3c^3d^2$ 。由是所求之 L.C.M. 爲 $a^4b^3c^3d^2$ 。

依上諸例。凡二以上諸單項式之 L.C.M. 乃悉取諸式中所用之各文字。附以各文字之最高方乘之指數而得。

若各式有數字係數。則求其算術上之最小公倍數。即得代數上 L.C.M. 之係數。

問 題 XXXII.

求以下各題中諸式之 L.C.M.

- | | |
|---|---|
| 1. a^3b^3 與 a^2b^3 . | 2. abc^2 與 a^2bc^3 . |
| 3. $9ab^3$ 與 $6a^2b$. | 4. $4x^3y$ 與 $10xy^3$. |
| 5. $24a^3b^3x^4$ 與 $60a^2b^4x^4$. | 6. $a^2b^3x^3$ 與 $3b^5x$. |
| 7. $9a^3b^2x^4y^5$ 與 $8x^3y^6$. | 8. $\frac{1}{4}a^3b^2c^3$ 與 $2b^3c^6$. |
| 9. $42axy^2z^3$ 與 $77b^3y^4$. | 10. ab^3, a^2bc 與 abc^2 . |
| 11. $3x^2yz^3, 15xy^2z^2$ 與 $20x^2y^2z^2$. | |
| 12. $ab^2c^3x^4, a^4bc^2x^3$ 與 $a^3b^2cx^2$. | |

119. 知多項式之因數。即知其 L.C.M

二以上諸多項式之因數。則其 L.C.M. 可直求出

其 L.C.M. 乃悉取各式中所用之各因數。附以各因數最高方乘之指數而得。

如求 $(x-a)(x-b)^2(x-c)^3$ 與 $(x-a)^4(x-h)(x-c)$ 之 L.C.M. 則此兩式之任一公倍數。必含因數 $(x-a)^4$ 。又同理。此兩式之任一公倍數必含因數 $(x-b)^2, (x-c)^3$ 。故任一公倍數。必含因數 $(x-a)^4(x-b)^2(x-c)^3$ 由是。最低次方之公倍數為 $(x-a)^4(x-b)^2(x-c)^3$ 。

[例 1.] 求 $a^4b^2 - a^2b^4$ 與 $a^4b^3 + a^3b^4$ 之 L.C.M.

$$\begin{aligned} \text{因} \quad a^4b^2 - a^2b^4 &= a^2b^2(a^2 - b^2), \\ &= a^2b^2(a+b)(a-b). \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad a^4b^3 + a^3b^4 = a^3b^3(a+b)$$

故其 L.C.M. 為 $a^3b^3(a+b)(a-b)$ 。

[例 2.] 求 $a^3 + 3a^2b + 2ab^2$ 與 $a^4 + 4a^3b + 3a^2b^2$ 之 L.C.M.

$$a^3 + 3a^2b + 2ab^2 = a(a+b)(a+2b),$$

$$\text{及} \quad a^4 + 4a^3b + 3a^2b^2 = a^2(a+b)(a+3b).$$

故 L.C.M. 為 $a^2(a+b)(a+2b)(a+3b)$ 。

如上例。L.C.M. 用因數之積顯之。最為便利。故不須解去括弧。

〔例 3.〕 求 $x^2+2x+1, x^2-2x-3, x^2+4x+3$ 之 L.C.M

$$x^2+2x+1=(x+1)^2,$$

$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3),$$

及 $x^2+4x+3=(x+1)(x+3).$

故 L.C.M. 爲 $(x+1)^2(x-3)(x+3).$

問 題 XXXIIL

求以下各題中諸式之 L.C.M.

1. $(1-x)(a-2x)$ 與 $(a-2x)(x-3x).$
2. $ax^2(a-x)(a-2x)$ 與 $a^2x(a-2x)(a-3x).$
3. a^2-b^2 與 $(a+b)^2.$
4. $6ab(a+b)^2$ 與 $4a^2(a^2-b^2).$
5. x^2+3x+2 與 $x^2+5x+4.$
6. $x^2+3xy+2y^2$ 與 $x^2+5xy+4y^2.$
7. x^2-4x+3 與 $x^2-5x+6.$
8. $3x^2-4xy^2+y^4$ 與 $6x^2-5xy^2+y^4.$
9. $(a+b)^2, (a-b)^2$ 與 $a^2-b^2.$
10. $(x+2y)^2, (x-2y)^2$ 與 $x^2-4y^2.$
11. $x^2+7x+12, x^2+6x+8,$ 及 $x^2+5x+6.$
12. $x^2-7xy+12y^2, x^2-6xy+8y^2,$ 及 $x^2-5xy+6y^2.$

120. 多項式之 L.C.M. 若多項之因數不能由視察求得。則欲求其 L.C.M. 不可不用求 H.C.F. 之法則。(見 112 款)

如求 x^3+x^2-2 與 x^3+2x^2-3 之 L.C.M. 兩式之 H.C.F. 爲 $x-1$ 。

而由除法知 $x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$,

及 $x^3+2x^2-3=(x-1)(x^2+3x+3)$ 。

然 x^2+2x+2 與 x^2+3x+3 不復有公因數。故所求之 L.C.M. 爲 $(x-1)(x^2+2x+2)(x^2+3x+3)$ 。

121. 最低公倍數之定理 設 A 與 B 爲任意之兩代數式。H 爲其 H.C.F. L 爲其 L.C.M.

又設以 H 除 A, B 所得之商爲 a, b。則得

$$A = H \times a$$

$$B = H \times b$$

因 H 爲 A 與 B 之最高公因數。故 a 與 b 決不復有公因數。由是 A 與 B 之 L.C.M. 爲 $H \times a \times b$ 。

則 $L = H.a.b \dots \dots \dots (1)$

從 (1) 式得 $L = Ha \times \frac{Hb}{H} = A \times \frac{B}{H} \dots \dots \dots (2)$

又 $L \times H = Ha \times Hb = A \times B \dots \dots \dots (3)$

從(2)式知求任意兩代數式之 L.C.M. 則以其 H.C.F. 除其一式, 而以他式乘之, 即得。

又從(3)式知任意兩式之積, 等於其 H.C.F. 與 L.C.M 之積。

122. 諸多項式之 L.C.M. 求三以上諸式之 L.C.M. 若其因數, 不能由視察求得, 則於諸式中, 先求其兩式之 L.C.M. 次求其結果與第三式之 L.C.M. 逐次求之, 最後所得之 L.C.M. 即為諸式之 L.C.M.

問 題 XXXIV.

求以下各題中諸式之 L.C.M.

1. $3a^2bc, 27a^3b^2c^2, 6ab^2c.$
2. $a^4b^2, b^3c, a^2c^3.$
3. $4a^3, 6a^2b, 8ab^2.$
4. $2a^2, 6ab^3, 4a^3b^2.$
5. $x^2(x-y)^2, y^2(x+y)^2, xy(x^2-y^2).$

6. $a^3 + a^2b, a(a-b), a^2 - b^2$.
7. $xy^2 - y^3, x^2y^2 + xy^2, x^2y - y$.
8. $2axy(x-y), 3ax^2(x^2-y^2), 4y^2(x+y)^2$.
9. $6(x^2-9), 9(x+3), 15(x-4), 10(x^2-x-12)$.
10. $4a+4b, 6a^2-24b^2, a^2-3ab+2b^2$.
11. $4ab^3+4b^3d, a^2b^2-b^2d^2, 8a^2bd-8abd^2$.
12. $x^2-10x+24, x^2-8x+12, x^2-6x+8$.
13. $x^2-9x-10, x^2-7x-30, x^2+4x+3$.
14. $2x^2-8, 3x^2-9x+6, 6x^2+18x+12$.
15. $x^2-3x+2, 2x^2-x-6, 3x^2-2x-1$.
16. $6x^2+x-2, 21x^2+17x+2, 14x^2-5x-1$.
17. $3x^2-10xy+3y^2, 3x^2-4xy+y^2, x^2-4xy+3y^2$.
18. $x^3+2x^2-3x, 2x^3+5x^2-3x$.
19. $x^2y^2-9y^2, x^2y-xy-6y, x^3+x^2-6x$.
20. $x^3-a^3, x^3+a^3, x^4+a^2x^2+a^4$.
21. $x^2-1, x^3+x^2+x+1, x^3-x^2+x-1$.
22. $9x^3-x-2$ 與 $3x^3-10x^2-7x-4$.
23. $x^3-ax^2-a^2x+a^3$ 與 $x^3+ax^2-a^2x-a^3$.
24. x^3+x^2-4x-4 與 $x^3+6x^2+11x+6$.
25. x^4-x^3+8x-8 與 $x^3+4x^2-8x+24$.

26. $a^2+6a^2+11a+6$ 與 $a^2+10a^2+29a+20$.

第十二編

分 數

123. 分數 依算術之定義。分數 $\frac{5}{7}$ 者。分單位爲7等分。而取其部分5次也。同樣。分數 $\frac{a}{b}$ (但 a 與 b 俱爲正整數)者。分單位爲 b 等分而取其部分 a 次也。

124. 代數分數 依前款之定義。其分子。分母。必俱爲正整數。由是決不能有如 $\frac{-4}{-3}$ 之分數。何則。以不能謂爲分單位爲 $-\frac{2}{5}$ 分而取其部分 $\frac{3}{4}$ 次故也。

如是。必分數 $\frac{a}{b}$ 之文字俱以正整數值爲限。或變更 $\frac{a}{b}$ 之定義然後可。而文字之數值。原不能以整數爲限。故必不用分數之形。或變更分數之定義然後可。然分數之形。終不能不用。故變更分數之定義。爲必要焉。

依前款之定義。則以 b 乘 $\frac{a}{b}$ 。必爲將所取之 a 部

更取 b 次。如是得 ab 部。而此各部集至 b 倍，必復成爲單位。故 ab 部。可爲 a 單位。

$$\text{故 } \frac{a}{b} \times b = a \dots \dots \dots (1)$$

以 b 除其各邊。則得

$$\frac{a}{b} = a \div b \dots \dots \dots (2)$$

而分數 $\frac{a}{b}$ ，以 b 乘之。則得 a 。即可立爲定義。何則，因此新定義。若 a 與 b 爲正整數。即與前款之定義符合。故也。又用此定義。則文字更不必以正整數值爲限。

同樣。則分數 $\frac{a}{b}$ ，爲以 b 除 a 所得之商。亦可立爲定義。

由是。前款之定義。不適用於代數分數。可代以次之定義。

〔定義 1.〕 代數分數 $\frac{a}{b}$ 者。以 b 乘之則得 a 之量也。但 a 與 b 得爲任意之數值。

〔定義 2.〕 代數分數 $\frac{a}{b}$ 者。以 b 除 a 所得之商也。前曾證分數之形 $\frac{a}{b}$ ，可作 $a \div b$ 之意味用。

125. 餘論 推究代數分數之性質。更不可不

知者一事。即代數分數之加減乘除。或化爲單簡之式。其法全與算術分數同。

126. 定理 分數之分子與分母以相同之數乘之。其值不變。

今不拘 a, b, m 之數值如何。

求證 $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$,

設 $x = \frac{a}{b}$, 則 $x \times b = \frac{a}{b} \times b$,

依定義得 $\frac{a}{b} \times b = a$,

$$\therefore xb = a.$$

兩邊以 m 乘之得 $xbm = am$,

以 bm 除之則 $x = am \div bm$,

即 $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$.

即分數之分子與分母各以相同之數乘之。其值不變。

127. 定理 依前款分數之分子與分母。各以相同之數乘之。其值不變。故反推其理。分數之分

子與分母。各以相同之數除之。其值亦不變。

由是。分數之分子與分母中。去其公有之因數。可化為簡式。

如 $\frac{a^2y}{x^2y}$ 之分子與分母中。各去其公有之因數 y 。則得最簡之分數 $\frac{a^2}{x^2}$ 。

分數之分子與分母中。更無公因數者。其分數謂之最簡項。又謂之簡式。

128. 化分數為最簡項 欲化某分數為最簡項。則將某分數之分子與分母。各以其最高公因數除之。何則。因如是則與原分數等值。且分子與分母更不含公因數。故也。

〔例 1〕 化 $\frac{3ax^2y}{6a^2xy}$ 為最簡項。

此分子與分母 H.C.F. 為 $3axy$ 。

$$\text{因而 } \frac{3ax^2y}{6a^2xy} = \frac{3ax^2y \div 3axy}{6a^2xy \div 3axy} = \frac{x}{2a}.$$

〔例 2.〕 化 $\frac{a^2b^3}{a^3b^4}$ 為最簡項。

此分子分母之 H.C.F. 為 a^2b^3 。

$$\text{因而 } \frac{a^2b^3}{a^3b^4} = \frac{a^2b^3 \div a^2b^3}{a^3b^4 \div a^2b^3} = \frac{1}{a^1b^1}.$$

(例 3.) 化 $\frac{2a^3b^2xy^4}{3ab^3x^2y^2}$ 爲最簡項。

此分子與分母之 H.C.F. 爲 ab^2xy^2 。

因而 $\frac{2a^3b^2xy^4}{3ab^3x^2y^2} = \frac{2a^3b^2xy^4 \div ab^2xy^2}{3ab^3x^2y^2 \div ab^2xy^2} = \frac{2a^2y^2}{3bx}$ 。

129. 別法 欲化分數爲最簡項，則以分數之分子與分母，各以其最高公因數除之固已。然亦可代以用任意之公因數屢次除之，至分數化爲最簡項，然後止。

如 $\frac{a^4b^3c^2}{a^2b^4c^4} = \frac{a^2b^3c^2}{b^2c^4} = \frac{a^2c^2}{bc^2} = \frac{a^2}{bc}$ 。

上之演算，更得簡式如下。

$$\frac{a^4b^3c^2}{a^2b^4c^4} = \frac{a^2}{bc}$$

問題 XXXV.

化以下諸分數爲最簡項。

1. $\frac{a^2b}{ab^3}$

2. $\frac{x^2y^3}{x^3y^2}$

3. $\frac{2a^2bc^2}{4a^3b^2c}$

4. $\frac{6a^5b^3c^4}{4a^7b^5c^4}$

5. $\frac{x^4y^3z^2}{x^3y^2z^3}$

6. $\frac{12x^4y^2z^3}{16x^2y^3z^3}$

$$7. \frac{15a^3b^2c^7x^5}{25a^2b^4c^6x^3} \quad 8. \frac{12ab^2c^3d^4}{150a^4b^3c^2d} \quad 9. \frac{3a^5x^3yz^4}{5ab^4xy^2z}$$

$$10. \frac{5a^3b^4c^5xy^2}{7b^4c^3xy^3} \quad 11. \frac{14ab^2c^4xy^2z^5}{21a^5b^2cx^3y^2z} \quad 12. \frac{3a^3bc^4x^5y^2z}{4a^2b^3cx^3y^4z^3}$$

130. 化多項式之分數爲簡式 多項

式之分數若其分子與分母可由視察而知其因數，則分解其分子與分母爲最低次之因數，使各公有之因數，一望即知，則可直去之而化爲簡式。

(例1.) 化 $\frac{a^2-ax}{a^2-x^2}$ 爲簡式。

$$\frac{a^2-ax}{a^2-x^2} = \frac{a(a-x)}{(a-x)(a+x)} = \frac{a}{a+x}$$

(例2.) 化 $\frac{x^4-x^2}{x^4-1}$ 爲簡式。

$$\frac{x^4-x^2}{x^4-1} = \frac{x^2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x^2}{x^2+1}$$

(例3.) 化 $\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$ 爲簡式。

$$\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6} = \frac{(x-5)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x-5}{x-3}$$

(例4.) 化 $\frac{x^2-ax}{a^2-x^2}$ 爲簡式。

$$\frac{x^2-ax}{a^2-x^2} = \frac{x(x-a)}{(a-x)(a+x)}$$

而 $s-a=-(a-x)$ 由是。分子及分母。各以 $a-x$ 除之。則得等值之分數 $\frac{-x}{a+x}$ 。

又。或分子與分母。各以 $x-a$ 除之。則得

$$\frac{x}{-(a+x)} \text{ 依除法符號之定法。} \frac{-x}{a+x} \text{ 及 } \frac{x}{-(a+x)}$$

俱等於 $-\frac{x}{a+x}$ 。故分子或分母爲負符號。通例記

$$\text{爲 } -\frac{x}{a+x}.$$

〔注意〕 變分子各項。與分母各項。之符號。其值不變。何則。因此同於以 -1 乘其分子與分母。故也。

問題 XXXVI.

化以下各式爲簡式。

1. $\frac{2ab}{a^2+ab}$.

2. $\frac{x^2y^2}{x^2-x^2y^2}$.

3. $\frac{a^2-ab}{a^2+ab}$.

4. $\frac{x^2+ax}{x^2-a^2}$.

5. $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$.

6. $\frac{x^2-x^2y^2}{(x+xy)^2}$.

7. $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$.

8. $\frac{x^4+x^2}{x^4-1}$.

9. $\frac{4x-16}{x^2-16}$.

10. $\frac{2x^3-4x^4}{x^2-4x^4}$.

11. $\frac{x-2}{4-x^2}$

12. $\frac{a-3}{9-a^2}$

13. $\frac{a^2x^2-x^4}{x^4-a^4}$

14. $\frac{x^4-a^2}{a^2-ax^2}$

15. $\frac{x^2-ax^2}{x^2-a^4}$

16. $\frac{a^2x^2y^2-x^4y^4}{x^4y^4-a^4}$

17. $\frac{5ax-15a^2}{x^2-9a^2}$

18. $\frac{3x^2-12ax}{48a^2-3x^2}$

19. $\frac{a^2-2ax+x^2}{a^2-x^2}$

20. $\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{a^4-b^4}$

21. $\frac{x^2-1}{x^2-1}$

22. $\frac{x^4-1}{x^2-1}$

23. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$

24. $\frac{1-5a+6a^2}{1-7a+12a^2}$

25. $\frac{x^2-9x+20}{x^2+6x-55}$

26. $\frac{1-9y^2+20y^4}{1+6y^2-55y^4}$

27. $\frac{x^2-8xy+7y^2}{x^2-3xy-28y^2}$

28. $\frac{1-a^2b^2+7a^4b^4}{1-3a^2b^2-8a^4b^4}$

29. $\frac{(a^2-x^2)(a+x)}{(a^2+x^2)(a-x)}$

30. $\frac{(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2)}$

31. $\frac{a^4-b^4}{(a^2-b^2)(a+b)}$

32. $\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{(a^2-b^2)(a^2-b^4)}$

131. 最高公因數之應用 若分數中分子與分母之因數不能由觀察求得，則依第十編求

其最高公因數。因而以此最高公因數除其分子與分母。則分數亦能化為簡式。

如化 $\frac{x^3-23x+10}{5x^3-23x^2+4}$ 為簡式。

分子及分母之 H. C. F. 為 x^2-5x+2

因得 $x^3-23x+10=(x^2-5x+2)(x+5)$,

及 $5x^3-23x^2+4=(x^2-5x+2)(5x+2)$ 。

由是原分數等於 $\frac{x+5}{5x+2}$

問題 XXXVII.

化以下各式為最簡項。

1. $\frac{x^3-3x+2}{2x^3-3x^2+1}$

2. $\frac{3x^2-8x+5}{x^3-4x^2+5x-2}$

3. $\frac{x^3+3x^2-20}{x^4-x^2-12}$

4. $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3+5x^2+6x}$

5. $\frac{2x^2+ax^2+4a^2x-7a^3}{x^3-7a^2x+8a^2x-2a^3}$

6. $\frac{2x^3+3x^2+4x-3}{6x^3+x^2-1}$

7. $\frac{x^3-3x-2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$

8. $\frac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3-x^2-2x+1}$

9. $\frac{x^4+2x^3-3x^2-7x-2}{2x^4+x^3-6x^2-5x-1}$

$$10. \frac{x^4 - 20x^2 - 15x + 4}{x^4 + 9x^3 + 19x^2 - 9x - 20}$$

132. 化分數爲公分母(即通分) 分數之分子與分母以相同之數乘之其值不變。(126款)故若干個異分母之分數各可化爲同分母等值之分數。

此演算全與算術同。如次

先求諸分母之 L. C. M. 次以諸分數中之一分母除之。並以所得之商乘其分子與分母。即得。又他之分數其法相同。如是。則各分數與原分數等值。且俱以諸分母之 L. C. M. 爲分母。

化分數爲公分母之法。謂之通分。

如化 $\frac{x}{a^2b(x+a)}$, $\frac{y}{ab^2(x-a)}$, $\frac{z}{ab(x^2-a^2)}$ 爲公分母。

分母之 L. C. M. 爲 $a^2b^2(x^2-a^2)$, 此 L. C. M. 以 $a^2b(x+a)$, $ab^2(x-a)$, $ab(x^2-a^2)$, 各式除之, 則其商爲 $b(x-a)$, $a(x+a)$, ab

$$\text{故 } \frac{x}{a^2b(x+a)} = \frac{x \times b(x-a)}{a^2b(x+a) \times b(x-a)} = \frac{bx(x-a)}{a^2b^2(x^2-a^2)}$$

$$\frac{y}{ab^2(x-a)} = \frac{y \times a(x+a)}{ab^2(x-a) \times a(x+a)} = \frac{ay(x+a)}{a^2b^2(x^2-a^2)}$$

$$\frac{z}{ab(x^2-a^2)} = \frac{z \times ab}{ab(x^2-a^2) \times ab} = \frac{abz}{a^2b^2(x^2-a^2)}$$

〔注意〕上之演算。不獨可取諸分母之最低公倍數爲公分母。亦可取諸分母之任意公倍數爲公分母。然取其最低公倍數。則甚簡便云。

133. 分數之加法及減法 同分母兩分數之和。(或差)恆以兩分子之和(或差)爲分子。而以公分母爲分母。此理易由66款推得。

若兩分數爲異分母。則先依前款通分之法。化爲同分母等值之分數。然後依上法求其和(或差)。即以所通得之兩分子之和(或差)爲分子。而以所通得之公分母爲分母。

如
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a+b}{x}$$

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = \frac{a-b}{x}$$

又
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{a \times y}{y \times x} + \frac{b \times x}{y \times x} = \frac{ay}{xy} + \frac{bx}{xy} = \frac{ay+bx}{xy}$$

及
$$a + \frac{b}{y} = \frac{ay}{y} + \frac{b}{y} = \frac{ay+b}{y}$$

三以上諸分數相加，或幾個分數，其中或加或減者，亦可依前法求之，即先化各分數為公分母，然後以化得之分子或加或減，即得。

$$\text{如 } \frac{a}{x} + \frac{b}{x} - \frac{c}{x} = \frac{a+b-c}{x},$$

$$\begin{aligned} \text{及 } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} - \frac{c}{z} &= \frac{a \times yz}{x \times yz} + \frac{b \times xz}{y \times xz} - \frac{c \times xy}{z \times xy} \\ &= \frac{ayz}{xyz} + \frac{bxz}{xyz} - \frac{cxy}{xyz} = \frac{ayz + bxz - cxy}{xyz}. \end{aligned}$$

〔注意〕分數與文字或數字之間，其不復更用符號者，當知為省略乘法之符號而然。如 $2\frac{a}{b}$ ，原與 $2 \times \frac{a}{b}$ 同，然非 $2 + \frac{a}{b}$ ，因與算術之 $2\frac{1}{2}$ 異故也。

〔例 1.〕求 $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a}$ 之值。

分母之 L.C.M. 為 $(x-a)(x+a)$

$$\begin{aligned} \text{因 } \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} &= \frac{x+a}{(x-a)(x+a)} + \frac{x-a}{(x+a)(x-a)} \\ &= \frac{x+a+(x-a)}{x^2-a^2} = \frac{2x}{x^2-a^2}. \end{aligned}$$

〔例 2.〕求 $\frac{a}{a-c} + \frac{ax}{x^2-a^2}$ 之值。

凡用為加減之分數，其諸分母，皆當依其特別文字之遞降方乘或遞昇方乘整列，如本例依 x 之遞

降方乘整列，則

$$\frac{ax}{x^2-a^2} = \frac{ax}{-(a^2-x^2)} = \frac{-ax}{a^2-x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{a}{a-x} + \frac{-ax}{a^2-x^2} &= \frac{a(a+x)}{a^2-x^2} + \frac{-ax}{a^2-x^2} \\ &= \frac{a(a+x)-ax}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2} \end{aligned}$$

〔例3〕 化 $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4}$ 爲簡式

分數所以難於一次相加者，多以分母悉非同次式故。如本例，其諸分母實難於一次通分，然

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x) + (1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$\text{則 } \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(1+x^2) + 2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{4}{1-x^4}$$

$$\text{終得 } \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{4(1+x^4) + 4(1-x^4)}{(1-x^4)(1+x^4)} = \frac{8}{1-x^8}$$

〔例4〕 求 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$ 之值。

在本例，不宜化諸分母爲公分母，但用二分數依次求之，其簡算乃便。如次。

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2-4}$$

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{2(x^2-4)+4(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{6x-12}{x^4-5x^2+4}$$

(例 5.) 求 $\frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{1}{x^2-7x+12}$ 之值。

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)},$$

$$\frac{1}{x^2-7x+12} = \frac{1}{(x-3)(x-4)},$$

故分母之 L.C.M. 爲 $(x-2)(x-3)(x-4)$ 。

$$\begin{aligned} \text{由是 } & \frac{x-4}{(x-2)(x-3)(x-4)} - \frac{x-2}{(x-2)(x-3)(x-4)} \\ &= \frac{(x-4) - (x-2)}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{-2}{(x-2)(x-3)(x-4)} \\ &= -\frac{2}{(x-2)(x-3)(x-4)}. \end{aligned}$$

(例 6.) 求 $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)}$
 $+ \frac{1}{(c-a)(c-b)}$ 之值。

此種問題，必將諸分母之因數 a ，悉移於 b 前或移於 c 前。又 b 悉移於 c 前。似此更換。然後初學者易求。

故換 $b-a$ 爲 $-(a-b)$ ，換 $c-a$ 爲 $-(a-c)$ 。又換 $c-b$ 爲 $-(b-c)$ 。則

$$\frac{1}{(b-a)(b-c)} = \frac{1}{-(a-b)(b-c)} = -\frac{1}{(a-b)(b-c)},$$

$$\frac{1}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{\{-(a-c)\}\{-(b-c)\}} = \frac{1}{(a-c)(b-c)}.$$

由是化次式爲簡式，即

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{-1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)}.$$

分母之 L.C.M. 爲 $(a-b)(a-c)(b-c)$.

$$\text{因而 } \frac{1}{(a-b)(a-c)} = \frac{b-c}{(a-b)(a-c)(b-c)},$$

$$\frac{-1}{(a-b)(b-c)} = \frac{-(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)},$$

$$\frac{1}{(a-c)(b-c)} = \frac{a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)},$$

由是

$$\frac{b-c-(a-c)+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 0.$$

問題 XXXVIII.

化以下各分數爲最低公分母。[1 至 14].

1. $\frac{2}{3x}, \frac{4}{5x}, \frac{7}{30x}$.

2. $\frac{1}{2ax}, \frac{1}{6bx}, \frac{1}{8cx}$.

3. $\frac{a}{bc}, \frac{b}{ac}, \frac{c}{ab}$.

4. $\frac{bc}{a}, \frac{ca}{b}, \frac{ab}{c}$.

6. $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{2x+2}$.

8. $\frac{3}{2x-2}, \frac{4}{3x-3}$.

7. $\frac{5}{5x+15}, \frac{3}{6x+18}$.

9. $\frac{1}{x+1}, \frac{3}{2x+2}, \frac{5}{x^2-1}$.

9. $\frac{6}{5x-5}, \frac{2}{3x+3}, \frac{4}{x^2-1}$.

10. $\frac{1}{x-a}, \frac{1}{a-x}, \frac{a^2}{x^2-a^2}, \frac{x^2}{a^2-x^2}$.

11. $\frac{2x}{x-b}, \frac{b}{2b-a}, \frac{3x^2}{4(a^2-b^2)}, \frac{5b^2}{6(l^2-a^2)}$.

12. $\frac{1}{x+1}, \frac{2x}{(x+1)^2}, \frac{3x^2}{(x+1)^3}$.

13. $\frac{1}{(x-a)(x-b)}, \frac{1}{(b-x)(c-x)}, \frac{1}{(x-c)(x-a)}$.

14. $\frac{1}{(a-b)(a-c)}, \frac{1}{(b-c)(b-a)}, \frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

化以下各式爲單項。[15至25]

15. $a-1+\frac{2}{a+1}$.

16. $a+x+\frac{x^2}{a-x}$.

17. $x+2y+\frac{4y^2}{x+2y}$.

18. $\frac{a-b}{a^2b}+\frac{a-b}{ab^2}$.

19. $\frac{a-5b}{5}-\frac{a-3b}{3}$.

20. $\frac{6a-5b}{2}-\frac{4a-7b}{2}$.

21. $\frac{a-3b}{4} + \frac{3a-b}{5}$

22. $2\frac{x-y}{3} - 3\frac{x+y}{4}$

23. $3\frac{x-2y}{6} - 3\frac{y-2x}{4}$

24. $\frac{x}{4} - \frac{x-4}{3} + \frac{x-5}{8}$

25. $\frac{2x-3y}{3} + \frac{x+2y}{4} - \frac{3x-2y}{5}$

化以下各式爲簡式 [26 至 65]

26. $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$

27. $\frac{a}{a-b} + \frac{a}{a-b}$

28. $\frac{x}{x-a^2} + \frac{a}{a^2-x^2}$

29. $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$

30. $\frac{1}{z-x} - \frac{4}{4-x^2}$

31. $\frac{1}{y+a} + \frac{6}{a^2-y}$

32. $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$

33. $\frac{1}{x-4y} - \frac{1}{x-5y}$

34. $\frac{1}{3x-2y} - \frac{1}{x-2y}$

35. $\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}$

36. $\frac{a+2b}{a-2b} - \frac{a-2b}{a+b}$

37. $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$

38. $\frac{a}{a-2b} + \frac{2ab}{(a-2b)^2}$

39. $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} + \frac{4x^2}{x^2-y^2}$

40. $\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

41. $\frac{a}{a-1} - 1 - \frac{1}{a(a-1)}$

$$42. \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{x+6}{x^2+4}$$

$$43. \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x+3}{2(x^2+1)}$$

$$44. \frac{3-x}{1-3x} - \frac{3+x}{1+3x} - \frac{1-16x}{9x^2-1}$$

$$45. \frac{a}{a-x} + \frac{a}{a+x} + \frac{2a^3}{a^2+x^2}$$

$$46. \frac{a}{a-x} + \frac{a}{a+x} + \frac{2a^3}{a^2+x^2} + \frac{4a^4}{a^4+x^4}$$

$$47. \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$$48. \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}$$

$$49. \frac{1}{a} - \frac{2}{a+1} + \frac{1}{a+2}$$

$$50. \frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x+3}$$

$$51. \frac{1}{a} - \frac{3}{a+1} + \frac{3}{a+2} - \frac{1}{a+3}$$

$$52. \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x-1} + \frac{6}{x} - \frac{4}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

$$53. \frac{1}{a} - \frac{4}{a+1} + \frac{6}{a+2} - \frac{4}{a+3} + \frac{1}{a+4}$$

$$54. \frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{2}{x^2-4x+3} + \frac{1}{x^2-3x+2}$$

$$55. \frac{1}{x^2+5ax+6a^2} - \frac{2}{x^2+4ax+3a^2} + \frac{1}{x^2+3ax+2a^2}.$$

$$56. \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} - \frac{2(x-2)}{(x-3)(x-1)} + \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}.$$

$$57. \frac{1}{x(x-1)} + \frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{x(x+1)}.$$

$$58. \frac{2a}{(a-2a)^2} - \frac{x-a}{x^2-5ax+6a^2} + \frac{2}{x-3a}.$$

$$59. \frac{3+2a}{2-a} - \frac{2-3a}{2+a} + \frac{1(a-x^2)}{a^2-4}$$

$$60. \frac{x+ay}{x-ay} - \frac{x-ay}{x+ay} + 2 \frac{x^2+a^2y^2}{x^2-a^2y^2}.$$

$$61. \frac{x^2-3x}{x^2-1} - \frac{x+3}{x+1} - \frac{4x}{1-x}.$$

$$62. \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1+x-x^2}{1-x^2}.$$

$$63. \frac{1}{x+3y} + \frac{6y}{x^2-9y^2} - \frac{1}{3y-x}.$$

$$64. \frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2} + \frac{y^2-(z-x)^2}{(y+z)^2-x^2} + \frac{z^2-(x-y)^2}{(z+x)^2-y^2}.$$

$$65. \frac{a^2-(b+c)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{b^2-(c+a)^2}{(b+c)^2-a^2} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(c-a)^2-b^2}$$

134 分數之乘法 任意之兩代數分數相

乘其法如次。

設兩分數爲 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$. 則

$$x = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}.$$

以 $b \times d$ 乘之則

$$\begin{aligned} x \times b \times d &= \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times b \times d \\ &= \frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d. \quad (\text{據 30 款}) \end{aligned}$$

然 $\frac{a}{b} \times b = a$, 及 $\frac{c}{d} \times d = c$,

$$\therefore xbd = ac,$$

以 bd 除之, 則 $x = \frac{ac}{bd}$.

即 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

故求任意兩代數分數之積, 則以兩分子之積爲分子, 兩分母之積爲分母.

數分數之積, 亦可依此法求之.

$$\text{如 } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}.$$

$$\text{又 } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{a} = \frac{acd}{bda} = \frac{c}{b}.$$

$$\text{又 } \frac{x+1}{x+2} \times \frac{x+2}{x+3} \times \frac{x+3}{x+1} = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+1)} = 1.$$

〔定義〕 有兩分數其一分數之分子，各爲他一分數之分母互謂之反數。

如 $\frac{b}{a}$ 爲 $\frac{a}{b}$ 之反數。又 $\frac{1}{a}$ 爲 $\frac{a}{1}$ (即 a) 之反數。

135. 分數之數法 設 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 爲任意兩分數，如

$$x = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

則
$$x \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

$$\therefore x \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

然
$$x \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = x,$$

$$\therefore x = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

故以任意之分數除者，恆與乘其反數同。

〔例 1.〕 以 $\frac{x}{a}$ 除 $\frac{x^2}{a^2}$.

$$\frac{x^2}{a^2} \div \frac{x}{a} = \frac{x^2}{a^2} \times \frac{a}{x} = \frac{x}{a}.$$

〔例 2.〕 以 ab 除 $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} \div ab = \frac{a}{b} \times \frac{1}{ab} = \frac{1}{b^2}$$

【例 3.】以 $\frac{x^2 - a^2}{x + a}$ 除 $\frac{x - a}{x^2 + a^2}$ 。

$$\begin{aligned} \frac{x - a}{x^2 + a^2} \div \frac{x^2 - a^2}{x + a} &= \frac{x - a}{x^2 + a^2} \times \frac{x + a}{x^2 - a^2}, \\ &= \frac{1}{(x^2 - ax + a^2)(x^2 + ax + a^2)} = \frac{1}{x^4 + a^2x^2 + a^4} \end{aligned}$$

問 題 XXXIX.

化以下各分數為最簡之形 [1 至 12].

1. $\frac{2a}{3c} \times \frac{3c}{4a}$.

2. $\frac{5a^2}{6bc} \times \frac{3b^2}{10ca}$.

3. $\frac{a}{c} \div \frac{c}{d}$.

4. $\frac{2a^2}{bc} \div \frac{3ab}{c^2}$.

5. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{bd}{ac}$.

6. $\frac{a^2}{ba} \times \frac{b^2}{ca} \times \frac{c^2}{ab}$.

7. $\frac{b}{a} \times \frac{b}{c} \div \frac{c}{a}$.

8. $\frac{a^2}{b^2} \times \frac{b^2}{c^2} \div \frac{c^2}{a^2}$.

9. $\frac{2a}{bc} \times \frac{2b}{ca} \times \frac{2c}{ab}$.

10. $\frac{2x^2}{3yz} \times \frac{3y^2}{5zx} \times \frac{5z^2}{2xy}$.

11. $\frac{3ax^2}{5b^2} \div \frac{6ay^2}{10b^2x}$.

12. $\frac{5a^2bc}{3b^2c^2a} \div \frac{5a^2bc^2}{3ab^2c^2}$.

13. $\frac{3a^2b}{5x^2y}$ 以何式乘之則其積爲 $\frac{2a}{5x}$.

14. $\frac{x^2y}{a^2z^2}$ 以何式除之則其商爲 $\frac{b^2x}{a^2z}$.

以下各式用最簡之形顯之 [15 至 32].

15. $\frac{x-y}{x^2+xy} \times \frac{x+y}{xy-y^2}$. 16. $\frac{a+b}{a^3-a^2b} \times \frac{ab-b^2}{ab+a^2}$.

17. $\frac{x^2+2x}{x^2-9} \times \frac{x^2-3x}{x^2-4}$. 18. $\frac{x^2-y^2}{x^2-4y^2} \times \frac{x-2y}{x+y}$.

19. $\frac{x^2+8x^2}{x+4} \div \frac{x+3}{x^2+4x}$. 20. $\frac{a+4b}{a^2+5ab} \div \frac{ab+4b^2}{a^2+5a^2b}$.

21. $\frac{x-1}{x-2} \times \frac{x-2}{x-3} \times \frac{x-3}{x-4}$.

22. $\frac{x+1}{(x+2)^2} \times \frac{x+2}{(x+3)^2} \times \frac{x+3}{(x+1)^2}$.

23. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} \times \frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}$.

24. $\frac{x^2-1}{x^2+3x-10} \times \frac{x^2-25}{x^2-3x-4}$.

25. $\frac{x^2-a^2}{x^2-4a^2} \times \frac{x+2a}{x-a}$. 26. $\frac{a^3-x^3}{a^3+x^3} \div \frac{(a-x)^3}{a^3-x^3}$.

27. $\frac{a+x}{(a-x)^2} \times \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2} \times \frac{a^4-x^4}{(a-x)^2}$.

28. $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \times \frac{(a^2-b^2)^2}{a^4-b^4} \div \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$.

$$29. \frac{(a-b)^2 - c^2}{(a-c)^2 - b^2} \times \frac{b^2 - (c-a)^2}{c^2 - (a-b)^2}$$

$$30. \frac{x^2 - (y+z)^2}{x^2 - (y-z)^2} \div \frac{y^2 - (x+z)^2}{y^2 - (x-z)^2}$$

$$31. \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \times \frac{x-y}{x+y} \div \frac{x^4 - x^2y^2 + y^4}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$$

$$32. \left(1 - \frac{2xy}{x^2 + y^2}\right) \div \left(\frac{x^2 - y^2}{x-y} - 3xy\right)$$

136. 繁分數 由是更舉繁分數之例。如次。

(例 1) 化 $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ 為簡式。

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

(例 2.) 化 $\frac{\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}}$ 為簡式。

$$\frac{\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}} = \frac{(a+x)(a+x) - (a-x)(a-x)}{(a-x)(a+x)} = \frac{4ax}{a^2 - x^2}$$

及

$$\frac{\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x}} = \frac{(a+x)(a+x) + (a-x)(a-x)}{(a-x)(a+x)} = \frac{2a^2 + 2x^2}{a^2 - x^2}$$

由是所設之分數等於下式

$$\frac{4ax}{a^2-x^2} \div \frac{2a^2+2x^2}{a^2-x^2} = \frac{4ax}{a^2-x^2} \times \frac{a^2-x^2}{2a^2+2x^2} = \frac{2ax}{a^2+x^2}$$

(例3.) 化 $\frac{x}{x+2 - \frac{x+1}{x}}$ 爲簡式。

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+2 - \frac{x+1}{x}} &= \frac{x}{x - \frac{(x+2)x}{(x+2)x - (x+1)}} = \frac{x}{x - \frac{x^2+2x}{x^2+x-1}} \\ &= \frac{x(x^2+x-1)}{x(x^2+x-1) - (x^2+2x)} = \frac{x(x^2+x-1)}{x^3-3x} = \frac{x^2+x-1}{x^2-3} \end{aligned}$$

(例4.) 化 $\frac{\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc}}{1 - \frac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}}$ 爲簡式。

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} &= \frac{(a-b)(1+bc) + (b-c)(1+ab)}{(1+ab)(1+bc)} \\ &= \frac{a-b+abc-b^2c+b-c+ab^2-abc}{(1+ab)(1+bc)} = \frac{a-c+ab^2-bc^2}{(1+ab)(1+bc)} \\ 1 - \frac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)} &= \frac{(1+ab)(1+bc) - (a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)} \\ &= \frac{1+ab+bc+ab^2c-ab-b^2c+ac-bc}{(1+ab)(1+bc)} = \frac{1+ac+b^2+ab^2c}{(1+ab)(1+bc)} \end{aligned}$$

由是所設之分數等於下式

$$\frac{a-c+ab^2-cb^2}{(1+ab)(1+bc)} \div \frac{1+ac+b^2+ab^2c}{(1+ab)(1+bc)}$$

$$= \frac{a-c+ab^2-cb^2}{1+ac+b^2+ab^2c} = \frac{(a-c)(1+b^2)}{(1+ac)(1+b^2)} = \frac{a-c}{1+ac}$$

問 題 XL.

化以下各式爲簡式

$$1. \left\{ \frac{x+2a}{a-2x} - \frac{a+2x}{x-2a} \right\} \times \left\{ \frac{3}{2a-x} - \frac{1}{a-x} \right\}.$$

$$2. \left\{ \frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x} \right\} \div \left\{ \frac{x}{1+x} - \frac{1-x}{x} \right\}.$$

$$3. \left(\frac{x^2-y^2}{y} - \frac{y^2}{x} \right) \left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \right) \div \left(\frac{x^2+y^2}{y} \right) \left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} \right).$$

$$4. \frac{2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} + \frac{y}{1 - \frac{y}{x}} - \frac{x}{1 - \frac{x}{y}}.$$

$$5. \frac{x}{1 + \frac{x}{y}} + \frac{y}{1 + \frac{y}{x}} - \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

$$6. \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2}{x+y} + \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}{x-y}.$$

$$7. \frac{\frac{a+b}{a+2b} + \frac{b}{a}}{a+b} - \frac{b}{a+2b}$$

$$8. \frac{x^2-x + \frac{x-1}{x+1}}{x + \frac{1}{x+1}}$$

$$9. \frac{\frac{x+2}{2x+3} - \frac{4x+5}{5x+6}}{\frac{2x+3}{3x+4} - \frac{3x+4}{4x+5}}$$

$$10. \frac{\frac{1+x}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1+x^3}}{\frac{1+x^2}{1+x^3} - \frac{1+x^3}{1+x^4}}$$

$$11. \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \frac{1}{3x - \frac{1}{x}}}$$

$$12. x^2 - \frac{x^2}{1 + \frac{1-x}{x + \frac{1}{x}}}$$

$$13. \frac{1}{x + \frac{1}{1 + \frac{a+1}{3-a}}}$$

$$14. \frac{1}{x^2 - \frac{x^2+1}{x + \frac{1}{x-1}}}$$

137. 要例 次所證明之定理極其緊要。

(定理 1.) 若 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \dots$ 諸分數互相等。則

諸分數各等於次之分數。即

$$\frac{pa+qc+re+\dots}{pb+qd+rf+\dots}$$

設相等之各分數等於 x 。則得

$$\frac{a}{b} = x, \frac{c}{d} = x, \frac{e}{f} = x, \text{ 等等}$$

因而 $a = bx, c = dx, e = fx, \text{ 等等}$

$$\therefore pa = pz, qc = qdx, re = rz \text{ 等等}$$

故依加法

$$pa + qc + re + \dots = pbz + qdx + rz + \dots \\ = (pb + qd + r + \dots)z$$

$$\therefore \frac{pc + ce + re + \dots}{pb + qa + rz + \dots} = z = \frac{a}{b} = \dots$$

又特別之例。相等之分數 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ 等。各等於

$$\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$$

(定理 2.) 不等之諸分數 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ 若分母

俱爲正。則分數 $\frac{a+c+\dots}{b+d+\dots}$ 較 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \dots$

諸分數中之最小者大。而較其最大者小。

設 $\frac{a}{b}$ 爲諸分數中之最大者。令 $\frac{a}{b} = x$ 。則

$$\frac{c}{d} < x, \frac{e}{f} < x \text{ 等等}$$

故 b, d, f, \dots 皆爲正。則得

$$a = bx, c < dx, e < fx, \text{ 等等}$$

故依加法

$$a + c + e + \dots < bx + dx + fx + \dots \text{ 即 } (b + d + f + \dots)x$$

$$\frac{a+c+\dots}{b+d+f+\dots} < x$$

由是 $\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$ 較諸分數中之最大者小。

依同樣之理。可證 $\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$ 較諸分數中之最小者大。

(例 1.) 設 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 求證 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

設 $\frac{a}{b} = x$ 則 $\frac{c}{d} = x$

由是 $a = bx$ 又 $c = dx$

由是 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{bx+b}{bx-b} = \frac{b(x+1)}{b(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$

又 $\frac{c+d}{c-d} = \frac{dx+d}{dx-d} = \frac{d(x+1)}{d(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$

因而 $\frac{a+b}{a-b}$ 與 $\frac{c+d}{c-d}$ 俱等於 $\frac{x+1}{x-1}$ ，自不得不互相等。

(例 2.) 設 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 求證 $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$

令 $\frac{a}{b} = x$ 則 $\frac{c}{d} = x$ ，由是 $a = bx$ ， $c = dx$ 。

故 $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{b^2x^2+b^2}{d^2x^2+d^2} = \frac{b^2(x^2+1)}{d^2(x^2+1)} = \frac{b^2}{d^2}$ 。

又 $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = \frac{b^2x^2-b^2}{d^2x^2-d^2} = \frac{b^2(x^2-1)}{d^2(x^2-1)} = \frac{b^2}{d^2}$ 。

由是 $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$ 。

(例 3.) 設 $\frac{cy+bx}{l} = \frac{ax+cx}{m} = \frac{bx+ay}{n}$

求證 $\frac{2bcx}{-al+bm+cn} = \frac{2cay}{al-bm+cn} = \frac{2abz}{al+bm-cn}$

依定理 1, 其所設之分數各等於。

$$\frac{-a'cy+bx)+b(ax+cx)+c(bx+ay)}{-al+bm+cn} = \frac{2bcx}{-al+bm+cn}$$

同法證得各分數等於。

$$\frac{2cay}{al-bm+cn} \text{ 或 } \frac{2abz}{al+bm-cn}$$

問 題 XLI.

化以下各式爲簡式 [1 至 56].

1. $\frac{6x^4y^6z^7}{9x^3y^4z^5}$

2. $\frac{18a^2b^6c^7x}{241b^4c^5x^3}$

3. $\frac{a^5b^7c^9r^8y^3z^7}{a^3b^6c^7x^5y^7z^5}$

4. $\frac{x^2-6xy+5y^2}{x^3-5x^2y+4xy^2}$

5. $\frac{x^3-10x^2y-11xy^2}{x^2y-8xy^2-9y^3}$

6. $\frac{(a^2-b^2)(a^3-b^3)}{(a-b)(a^4-b^4)}$

7. $\frac{(a^2-b^2)(a^6-b^6)}{(a+b)^2(a-b)}$

8. $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^4+4x^3-12x-5}$

9. $\frac{3r^4+5r^3-7r^2+2r+2}{2r^4+3r^3-2r^2+12r+5}$

$$10. \frac{2x^4 + 9x^3y + 14xy^3 + 8y^4}{3x^4 + 14x^3y + 9xy^3 + 2y^4}.$$

$$11. \frac{2x^3 - 11x^2y + 11xy^2 + 4y^3}{2x^4 - 3x^2y + 7x^2y^2 - 12xy^3 - 4y^4}.$$

$$12. \frac{2x+y}{3} - 3 \frac{x-y}{5}. \quad 13. \frac{5x-2y}{4} - \frac{4y-2x}{6}.$$

$$14. \frac{1}{4-x} + \frac{4}{x^2-16}. \quad 15. \frac{1}{3-x} + \frac{3}{x^2-9}.$$

$$16. \frac{x}{x-2y} - \frac{x^2}{(2y-x)^2}.$$

$$17. \frac{a}{a-4b} + \frac{4ab}{(4b-a)^2}.$$

$$18. \frac{1}{a+4} - \frac{1}{a+5} + \frac{1}{a+6} - \frac{1}{a+7}.$$

$$19. \frac{1}{a} - \frac{3}{a+3} + \frac{3}{a+6} - \frac{1}{a+9}.$$

$$20. \frac{x^2-y^2}{x^2-9y^2} \times \frac{x+3y}{x-y}. \quad 21. \frac{x^2-y^2}{x^2-4y^2} \div \frac{y-x}{2y-x}.$$

$$22. \left\{ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 - \frac{1}{ab} - \frac{4}{(a-b)^2} \right\} \div \left\{ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 - \frac{1}{ab} \right\}$$

$$23. \left(\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x-8} \right) \times \left(\frac{x-3}{3x-8} - \frac{2}{x+2} \right).$$

$$24. \frac{(x-y)^4 - xy(x-y)^2 - 2x^2y^2}{(x-y)(x^2-y^2) + 2x^2y^2}$$

$$25. \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{x}.$$

$$26. \frac{1}{6a-2b} + \frac{1}{3a+2b} - \frac{3}{6a+2b}.$$

$$27. \frac{1}{8a+2b} - \frac{1}{2b-8a} + \frac{b}{16a^2-b^2}.$$

$$28. \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \times \frac{a-b}{a^2+b^2} \div \frac{a^2-a^2b^2+b^4}{a^4+a^2b^2+b^4}.$$

$$29. \frac{\frac{m^2+n^2}{n} - m}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} \times \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}.$$

$$30. \frac{\left\{1 + \frac{a}{a+b} + \frac{a^2}{(a+b)^2}\right\} \left\{1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right\}}{\left\{1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right\} \left\{1 + \frac{c}{a+b}\right\}}.$$

$$31. \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} - \frac{4xy^2}{x^2-y^2}.$$

$$32. \left\{1 + \frac{2b^2}{a(u-3b)}\right\} \left\{1 + \frac{b}{2b-u}\right\}.$$

$$33. \frac{x^2+y^2}{xy(y-x^2)} - \frac{y}{x^2+xy} + \frac{x}{xy-y^2}.$$

$$34. \frac{a+b}{a+5b} + \frac{a^2-b^2}{25b^2-a^2} - \frac{b-a}{a-5b}.$$

$$35. \frac{a-h}{a-3b} + \frac{a+h}{a+3b} - \frac{b^2-a^2}{9b^2-a^2}.$$

$$36. \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x-5}{x^2-7x+10} + \frac{1}{2} \times \frac{x-6}{x^2-9x+18}$$

$$37. \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-4} - \frac{x-6}{(x-2)(x-5)}$$

$$38. \frac{3}{x-4} - \frac{2}{x-5} - \frac{x-7}{(x-6)(x-3)}$$

$$39. \left\{ x-y - \frac{1}{x-y + \frac{x+y}{x-y}} \right\} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

$$40. \left\{ x+y - \frac{1}{x+y - \frac{x+y}{x+y}} \right\} \times \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}$$

$$41. \left\{ 1 - \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+2x^2}{1-x^2} \right\} \times \frac{x+1}{2x+1}$$

$$42. \frac{x-2 - \frac{1}{x-2}}{\frac{4}{x-2}} \times \frac{x-4 - \frac{4}{x-4}}{\frac{1}{x-4}}$$

$$43. \frac{6}{x^2+2x-8} - \frac{7}{x^2+x-12} + \frac{1}{x^2-5x+6}$$

$$44. (x^2+y^2) \left\{ \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right\} \times \frac{1}{x^2-xy+y^2}$$

$$\div \left\{ \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right\}$$

$$45. \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} - 1 \right) \frac{c^2}{a^2+b^2} \div \frac{4ab(a+b)}{a^2-ab+b^2}$$

$$46. \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right)^2$$

$$-\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right).$$

$$47. \left\{ \frac{1}{3x^2 - 14xy + 15y^2} + \frac{2}{3x^2 - 2xy - y^2} \right\}$$

$$\div \left\{ \frac{x+y}{x-3y} - \frac{x-y}{x+3y} \right\}.$$

$$48. \frac{b-c}{a+x} + \frac{c-a}{b+x} + \frac{a-b}{c+x} + \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(a+x)(b+x)(c+x)}.$$

$$49. \left\{ \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 - 2\frac{a-b}{a+b} + 1 \right\} \div \left\{ \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 - 2\frac{a+b}{a-b} + 1 \right\}.$$

$$50. \left\{ \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 + 3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + 3\frac{a-b}{a+b} + 1 \right\}$$

$$\div \left\{ \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3 + 3\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + 3\frac{a+b}{a-b} + 1 \right\}.$$

$$51. \frac{16}{x-17} - \frac{21}{x-9} - \frac{16}{x+4} + \frac{21}{x+7}.$$

$$52. \frac{11}{x-5} - \frac{7}{x-7} - \frac{11}{x+2} + \frac{7}{x+4}.$$

$$53. \frac{x+7}{x+1} + \frac{x+8}{x+2} - \frac{x+9}{x+3} - \frac{x+10}{x+4}.$$

$$54. \frac{(a+b-c)^2 - d^2}{(a+b)^2 - (c+d)^2} + \frac{(b+c-a)^2 - d^2}{(b+c)^2 - (a+d)^2}$$

$$+ \frac{(c+a-b)^2 - d^2}{(c+a)^2 - (b+d)^2}$$

$$55. \frac{1}{axy} - \frac{1}{a(x-a)(y-a)} + \frac{1}{y(x-a)(y-a)}.$$

$$56. \frac{a+x}{x(x-y)(x-z)} + \frac{a+y}{y(y-z)(y-x)} + \frac{a+z}{z(z-x)(z-y)}$$

$$57. x = \frac{ab}{a+b} \text{ 求 } \frac{a-2x}{b-2x} \text{ 之值。}$$

$$58. a+b = \frac{4cd}{c+d} \text{ 求次式之值。}$$

$$\frac{a+b+2c}{a+b-2c} + \frac{a+b+2d}{a+b-2d}$$

$$59. \text{ 若 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 則}$$

$$(1) \frac{a-b}{a-2b} = \frac{c-d}{c-2d}$$

$$(2) \frac{a^2}{(a+b)^2} = \frac{c^2}{(c+d)^2}$$

$$(3) \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{c^2-d^2}{c^2+d^2}$$

$$(4) \frac{pa^2+qab+rh^2}{la^2+mab+nb^2} = \frac{pc^2+qed+ra^2}{lc^2+mcd+nd^2}$$

$$60. \text{ 若 } \frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a}, \text{ 則 } x+y+z=0.$$

$$61. \text{ 若 } \frac{y+z}{ay+bx} = \frac{z+x}{az+bx} = \frac{x+y}{ax+by}, \text{ 則各分數}$$

$$= \frac{2}{a+b}$$

$$62. \text{ 設 } a, b, c, \text{ 不等, 而 } \frac{b-c}{x} = \frac{c-a}{y} = \frac{a-b}{z}.$$

求證 $x+y+z=0$ 及 $ax+by+cz=0$.

63. 若 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{b+c}{2(b-c)} = \frac{c+a}{3(c-a)}$ 求證 $8a+9b+5c=0$.

64. 若 $\frac{bx-cy}{b-c} = \frac{cx-az}{c-a}$ 求證各等於 $\frac{ay-bz}{a-b}$.

65. 若 $\frac{a}{2y+2z-3x} = \frac{b}{2z+2x-3y} = \frac{c}{2x+2y-3z}$

求證 $\frac{x}{a+2b+2c} = \frac{y}{b+2c+2a} = \frac{z}{c+2a+2b}$.



第十三編

分數方程式

138. 分數方程 本編專解有分數式之方程式

〔例1.〕 解 $\frac{x-1}{5} - \frac{3x-1}{8} = \frac{43-5x}{6}$

以諸分母 L.C.M. 120. 乘此方程式之兩邊而方程式仍不失其相等。如是。去分母。則得

$$24(x-1) - 15(3x-1) = 20(43-5x),$$

$$\therefore 24x - 24 - 45x + 15 = 860 - 100x.$$

移項。則 $24x - 45x + 100x = 860 + 24 - 15,$

$$79x = 869.$$

由是

$$x = \frac{869}{79} = 11.$$

〔例2.〕 解 $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{3}{x+5}.$

諸分母之 L.C.M. 爲 $(x-3)(x+3)(x+5)$

以此 L.C.M. 乘方程式之兩邊。則 [見 148 款]

$$(x+3)(x+5)+2(x-3)(x+5)=3(x-3)(x+3).$$

$$\therefore x^2+8x+15+2x^2+4x-30=3x^2-27.$$

移項則 $x^2+2x^2-3x^2+8x+4x=-27-15+30.$

$$\therefore 12x=-12,$$

即 $x=-1.$

(例3.) 解 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+5}.$

本例不宜以諸分母之 L.C.M. 乘之。故得便法
如次。

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+5}=0,$$

$$\therefore \frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}+\frac{x+5-(x+7)}{(x+5)(x+7)}=0,$$

即 $\frac{2}{(x+1)(x+3)}-\frac{2}{(x+5)(x+7)}=0,$

$$\therefore (x+1)(x+3)=(x+5)(x+7),$$

即 $x^2+4x+3=x^2+12x+35,$

$$\therefore 4x-12x=35-3,$$

即 $-8x=32,$

$$\therefore x=32 \div (-8) = -4.$$

(例4.) 解次之方程式

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+5}{x+7} = \frac{x+1}{x+3} + \frac{x+3}{x+5}$$

而 $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$, $\frac{x+5}{x+7} = 1 - \frac{2}{x+7}$,

$$\frac{x+1}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3}, \quad \frac{x+3}{x+5} = 1 - \frac{2}{x+5}$$

故 $1 - \frac{2}{x+1} + 1 - \frac{2}{x+7} = 1 - \frac{2}{x+3} + 1 - \frac{2}{x+5}$,

$$\therefore \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+7} = \frac{2}{x+3} + \frac{2}{x+5}$$

此方程式與前例同。

〔例5.〕 解方程式

$$\frac{4x+5}{x+1} + \frac{x+5}{x+4} = \frac{2x+5}{x+2} - \frac{x^2-10}{x+3} + x$$

依除法 $\frac{4x+5}{x+1} = 4 + \frac{1}{x+1}$, $\frac{x+5}{x+4} = 1 + \frac{1}{x+4}$,

$$\frac{2x+5}{x+2} = 2 + \frac{1}{x+2} \quad \text{及} \quad \frac{x^2-10}{x+3} = x-3 - \frac{1}{x+3}$$

由是 $4 + \frac{1}{x+1} + 1 + \frac{1}{x+4} = 2 + \frac{1}{x+2}$
 $- \left(x-3 - \frac{1}{x+3} \right) + x$

$$\therefore \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$$

$$\therefore \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$$\therefore \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+4)-(x+3)}{(x+3)(x+4)}$$

即
$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+3)(x+4)}$$

$$\therefore (x+1)(x+2) = (x+3)(x+4),$$

即
$$x^2+3x+2 = x^2+7x+12,$$

$$\therefore x^2+3x-x^2-7x=12-2,$$

$$\therefore -4x=10,$$

$$\therefore x = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}.$$

問 題 XLII.

解以下各方程式

1.
$$\frac{x-2}{5} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-7}{10}.$$

2.
$$\frac{3x-1}{11} - 2\frac{x-1}{5} = \frac{2-x}{10}.$$

3.
$$\frac{y}{6} - \frac{x-2}{5} = \frac{y}{5} - 3\frac{x-3}{4}.$$

4.
$$\frac{x-2}{3} - 3\frac{x-1}{5} = x - 5\frac{x-2}{6}.$$

5.
$$\frac{1-3x}{2} + \frac{3x+1}{2} = \frac{2}{1-3x}.$$

$$6. \frac{3-4x}{6} - \frac{5-8x}{12} = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$7. \frac{3x-1}{4} - 2\frac{x+1}{x-3} = 2 - \frac{3-6x}{8}.$$

$$8. \frac{2x}{5} - 3\frac{x-1}{x+1} = 3 - \frac{1-4x}{10}.$$

$$9. \frac{1}{4x+6} + \frac{1}{6x+4} = \frac{2}{2x+3}.$$

$$10. \frac{1}{3x+9} + \frac{2}{5x+1} = \frac{2}{x+3}.$$

$$11. \frac{1}{4x+12} - \frac{3}{4x+1} = \frac{4}{2x+6}.$$

$$12. \frac{3}{2x+3} + \frac{5}{4x+6} = \frac{7}{6x+8}.$$

$$13. \frac{4x}{x+1} - \frac{x}{x-2} = 3.$$

$$14. \frac{3x}{x+6} - \frac{x}{x+5} = 2.$$

$$15. \frac{6x}{x-7} - \frac{x}{x-6} = 5.$$

$$16. \frac{2x}{x+3} - \frac{4x}{x+7} + 2 = 0.$$

$$17. \frac{1}{x+4} + \frac{2}{x+6} = \frac{3}{x+5}.$$

$$18. \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2} = \frac{1}{x+3}.$$

$$19. \frac{5}{2} \frac{1}{x+4} - \frac{3}{2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+6}$$

$$20. \frac{3}{2} \frac{1}{x+2} - \frac{5}{4} \frac{1}{x+3} - \frac{1}{4x} = 0,$$

$$21. \frac{2x+5}{3x-7} = \frac{2x-7}{3x-5}.$$

$$22. \frac{6x-2}{8x-5} = \frac{3x+7}{4x+8}$$

$$23. \frac{x-9}{3x-7} = \frac{2x-5}{6x-4}.$$

$$24. \frac{3-2x}{x-5} = \frac{2x-7}{4-x}.$$

$$25. \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{8}{x}$$

$$26. \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{8}{x+1}.$$

$$27. \frac{x-1}{x+3} - \frac{x+2}{x-4} + \frac{10}{x} = 0.$$

$$28. \frac{3x}{x+2} - 3 \frac{x-1}{x-2} + \frac{9}{x+1} = 0.$$

$$29. 3 \frac{x-1}{x+1} + 2 \frac{x+1}{x-1} = 5.$$

$$30. 5 \frac{x-2}{x+2} - 2 \frac{x-3}{x+3} = 3.$$

$$31. \frac{8x}{x^2-1} = \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4}$$

$$32. \frac{12x}{x^2-9} + \frac{2}{x+3} = \frac{2}{x-3}$$

$$33. \frac{4}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{-1}{1-x}$$

$$34. \frac{3}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} = \frac{2}{3-x}$$

$$35. \frac{2x+1}{2x-1} - \frac{8}{4x^2-1} = \frac{2x-1}{1+2x}$$

$$36. \frac{6x+5}{3x-1} + \frac{5}{1-9x^2} = \frac{8+3x}{1+3x}$$

$$37. \frac{1}{x-5} + \frac{3}{2x-6} = \frac{5}{(x-3)(x-5)}$$

$$38. \frac{1}{2x-4} + \frac{3}{x-5} = \frac{7x+1}{(x-2)(x-5)}$$

$$39. \frac{6}{2-3x} + \frac{10}{6-5x} + \frac{4}{10+x} = 0$$

$$40. \frac{6}{3x-1} + \frac{7}{3-7x} - \frac{1}{5+x} = 0$$

$$41. \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8}$$

$$42. \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}$$

$$43. \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+8}$$

$$44. \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-0} = \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-8}$$

$$45. \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+1}.$$

$$46. \frac{x}{x-2} + \frac{x-9}{x-7} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-8}{x-6}.$$

$$47. \frac{2x+1}{x+1} + \frac{2x+9}{x+5} = \frac{2x+3}{x+2} + \frac{2x+7}{x+4}.$$

$$48. \frac{2x-3}{2x-4} - \frac{2x-4}{2x-5} = \frac{2x-7}{2x-8} - \frac{2x-8}{2x-9}.$$

$$49. \frac{x+7}{x+5} + \frac{x+9}{x+7} = \frac{x+6}{x+4} + \frac{x+10}{x+8}.$$

$$50. \frac{16x-13}{4x-3} + \frac{40x-43}{8x-9} = \frac{32x-30}{8x-7} + \frac{20x-24}{4x-5}.$$

$$51. \frac{x-7}{x-5} - \frac{x-8}{x-6} = \frac{2x-7}{2x-5} - \frac{2x-11}{2x-9}.$$

$$52. \frac{7}{x-9} - \frac{11}{x-4} = \frac{7}{x+2} - \frac{11}{x+3}.$$

$$53. \frac{16}{x-17} - \frac{21}{x-9} = \frac{16}{x+4} - \frac{21}{x+7}.$$

$$54. \frac{x+a}{x-b} + \frac{x+b}{x-a} = 2.$$

$$55. \frac{x+a}{x-a} - \frac{x-b}{x+b} = \frac{2(a+b)}{x}.$$

$$56. \frac{ax}{a+x} + \frac{bx}{b+x} = a+b.$$

$$57. \frac{a+c}{x+2b} + \frac{b+c}{x+2a} = \frac{a+b+2c}{x+a+b}.$$

$$58. \frac{x-b}{x-a} - \frac{x-a}{x-b} = \frac{2(a-b)}{x-a-b}.$$

雜 題 III.

[A.] 1. 問 $x^3 - 3x^2y + 3xy^2$ 以何式加之則其和為 $3x^2y - 3xy^2 + y^3$.

證下式

$$\begin{aligned} & x(y+z)^2 + y(z+x)^2 + z(x+y)^2 - 4xyz \\ &= (y+z)(z+x)(x+y). \end{aligned}$$

3. 求 (1) $x^4 - y^4$, (2) $a^2 - b^2 + 2a - 2b$,

(3) $x^2 - 3x - 28$ 之因數。

4. 求 $x^4 + 9x - 20$ 及 $5x^4 + 9x^3 - 64$ 之最高公因數。

又 化 $\frac{x^4 + 9x - 20}{5x^4 + 9x^3 - 64x}$ 為簡式

5. 解以下各方程式

$$(1) \frac{x-1}{2} + \frac{2x-7}{3} = x-2,$$

$$(2) \begin{aligned} 3x - 4y + 2 &= 5x - 6y - 2 \\ &= -7x + 2y + 4, \end{aligned}$$

$$(3) \frac{a}{x+b} + \frac{b}{x+a} = \frac{a+b}{x}$$

6. 有甲,乙二人。甲由其所有金中與乙拾圓。則甲之所有金。爲乙之三倍。若乙由其所有金中與甲五圓。則甲之所有金。爲乙之四倍。問甲乙之所有金各幾何。

(B) 1. 設 $a=5$, $b=3$, $c=-6$ 或 $a=-3$, $b=-2$, $c=4$ 。求 $a(a+b)(a+b+c) - a(a-b)(a-b-c)$ 之數值。

2. 證以下二式

$$a^2 + 3(a-2b)^2 = 3(a-b)^2 + (a-3b)^2,$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = \left(ab - \frac{1}{ab}\right) \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right).$$

3. 求 (1) $x^3 - 4x^2 + 4x$, (2) $2x^2 - 5x + 2$,

(3) $x^3 - x^2 + x - 1$ 之因數。

4. 化 $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} - \frac{6}{x^2-9}$ 爲簡式。且證

次式

$$\left(y - \frac{a^2 - xy}{y-x}\right) \left(x + \frac{a^2 - xy}{y-x}\right) + \left(\frac{a^2 - xy}{y-x}\right)^2 = a^2.$$

5. 解次之各方程式

$$(1) \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x-3},$$

$$(2) \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1, \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = \frac{a}{b}.$$

6. 有分數。其分子加 2, 則爲 $\frac{1}{5}$, 由其分

母減 2，則爲 $\frac{1}{6}$ 問原分數如何。

(C.) 1. 證次之二次

$$(x-1)^2(y^2+1)-(x^2+1)(y-1)^2=2(x-y)(xy-1),$$

$$(x+y)(x+z)-x^2=(y+z)(y+x)-y^2=(z+x)(z+y)-z^2.$$

2. 任意兩數之積，恆等於其和之平方與其差之平方之差之四分之一。求證。

3. (1) $1+18x-63x^2$, (2) $3x^2y-24y^4$,

(3) $(x^2+3x)^2-(3x^2+1)^2$ 之因數如何。

4. 化以下二式爲簡式

$$\frac{x^2-10x+21}{x^2-40x-21},$$

及 $\frac{1}{(x-3)(x-2)} - \frac{x-4}{(x-1)(x-3)} + \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}.$

5. 解次之各方程式

$$(1) \frac{x-2}{2} - \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{6} - \frac{x-3}{8} = 0,$$

$$(2) ax+by=c, a^2x+b^2y=c^2.$$

6. 甲、乙二人，共有銀 100 圓。甲費其所自有之半。乙費其所有之三分之一。則二人之所有合計 55 圓。然則各有銀幾何。

(D) 1. 設 $a=3, b=-3, c=4$ 求次式之數值

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} - (a-b-c)^2.$$

2. 證次之二式

$$(x-5)(x-4) - 3(x-2)(x-1) + 3(x+1)(x+2) \\ - (x+4)(x+5) = 0$$

$$\text{及 } 1+n+\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \\ = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3).$$

3. 求次之三式之因數

$$(1) \quad x^3 + x^2y - 6xy^2,$$

$$(2) \quad x^3 + ax^2 - a^2x - a^3,$$

$$(3) \quad x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1.$$

4. 化

$$(1) \quad \frac{a-x}{a+x} + \frac{4ax}{a^2-x^2} + \frac{a+x}{a-x}.$$

$$(2) \quad \frac{1}{x-4} - \frac{2}{x-5} + \frac{1}{x-6} \text{ 爲簡式}$$

5. 解次之各方程式

$$(1) \quad \frac{3x+1}{4} - 2(6-x) = \frac{5x-4}{7} - \frac{x-2}{3}.$$

$$(2) \quad 3y + \frac{9}{x} + 6 = 0, \quad y + \frac{5}{x} = 8.$$

6. 有狐被犬追者。狐在犬前 60 步。狐每行三步犬行二步。而犬行三步之距離。等於狐行七

步之距離。問犬行若干步。始能捕得此狐。

(E.) 1. 證次之二式

$$(m+n)(m+n-1) = m(m-1) + 2mn + n(n-1),$$

及 $(m+n)(m+n-1)(m+n-2)$

$$= m(m-1)(m-2) + 3m(m-1)n$$

$$+ 3mn(n-1) + n(n-1)(n-2).$$

2. 以 $x-y$ 除 x^4-y^4 ，而依其結果直記以 $x+y-2x$ 除 $(x+y)^4-16x^4$ 所得之商。

3. 求 $5x^2+24x-5$ 及 $a^3-2abc-ab^2-ao^2$ 之因數。

4. 求以下三式之 L.C.M.

$$8a^3-18ab^2, 8a^3+8a^2b-6ab^2 \text{ 及 } 4a^3-8ab+3b^2.$$

5. 證次之二式

$$(1) \quad 1 + \frac{a}{x-a} + \frac{bx}{(x-a)(x-b)}$$

$$= \frac{x^2}{(x-a)(x-b)},$$

$$(2) \quad 1 + \frac{a}{x-a} + \frac{bx}{(x-a)(x-b)}$$

$$+ \frac{cx^2}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

16. 某債戶。儘其財產。償還欠債。每 100

圓僅償 25 圓。若其財產五倍於前。其欠債之額。爲前之三分之二。則償完欠債。尙餘 140 圓。問欠債之額幾何。

(F.) 1. 證 $a = -1$, $b = -3$, $c = -5$ 問次式之數值幾何。

$$\{a - (b - c)\}^2 + \{b - (c - a)\}^2 + \{c - (a - b)\}^2.$$

2. 有 $x^3 - 2a^2x^2 + a^3$, 以 $x^2 + ax^2 + a^2x + c^3$ 除之。

3. 求 $x^3 - 1$, $(x - 1)^2$, $(x + 1)^2$, $x^3 - 1$, $x^3 + 1$ 之 L.C.M.

4. $\frac{1}{2x+y}$, $\frac{1}{2x-y}$, $\frac{3x}{y^2-4x^2}$ 相加。

又證 $\frac{(x-a)(y-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-b)(y-b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-c)(y-c)}{(c-a)(c-b)} = 1.$

(5. 解次之各方程式

$$(1) \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{2}{x+a+b},$$

$$(2) \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 18 \\ 3x + 7y - z = 2 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

(6. 田之地租每畝 1.5 圓。牧場之地租每

畝 2 圓。兩地租合計 550 圓。若田之地租，每畝下落 5 角。牧場之地租，每畝下落 2 角 5 分。兩地租合計 387.5 圓。問此兩種地之面積總計幾何。

先 設 式 求 二

設田之地租每畝為 x 圓，牧場之地租每畝為 y 圓。

由題意可知，兩地租合計 550 圓，即：

$$x + y = 550$$

若田之地租每畝下落 5 角，即 0.5 圓，牧場之地租每畝下落 2 角 5 分，即 0.25 圓。兩地租合計 387.5 圓，即：

$$0.5x + 0.25y = 387.5$$

由以上兩式，可求得田之地租每畝為 200 圓，牧場之地租每畝為 350 圓。

設田之地租每畝為 x 圓，牧場之地租每畝為 y 圓。

由題意可知，兩地租合計 550 圓，即：

$$x + y = 550$$

若田之地租每畝下落 5 角，即 0.5 圓，牧場之地租每畝下落 2 角 5 分，即 0.25 圓。兩地租合計 387.5 圓，即：

$$0.5x + 0.25y = 387.5$$

由以上兩式，可求得田之地租每畝為 200 圓，牧場之地租每畝為 350 圓。

第十四編

二 次 方 程 式

139. 方程式之因數 積中有壹因數為零(即0),其積始能為零,積中無壹因數為零,其積決不能為零。

如 ab , 必 a 為零, 或 b 為零, ab 始能為零, 故知 ab 為零, 則知 a , 或 b 必為零。

又 abc , 必 a 為零, 或 b 為零, 或 c 為零, abc 始能為零, 故知 abc 為零, 則知 a , 或 b , 或 c 必為零。

因數之數, 無論若干, 俱準此。

同樣, 有 $(x-2)(x-4)$ 式, 必 $x-2$ 為零, 或 $x-4$ 為零, 其式始能為零, 而因此積為零, 知必有壹因數為零。

如方程式 $(x-2)(x-4)=0$

必 $x-2=0$ 或 $x-4=0$ 即 $x=2$ 或 $x=4$, 始能適合, 其他決不能適合。

故此方程式之根為 2 與 4。

又方程式 $(x-3)(x-4)(x-5)=0$

必 $x-3=0$, 或 $x-4=0$, 或 $x-5=0$, 始能適合。其他決不能適合。

故欲此方程式合理。必 x 爲 3, 或 4, 或 5。

即 3, 4, 5, 爲方程式 $(x-3)(x-4)(x-5)=0$

之根。

故方程式 $(x-a)(x-b)(x-c)\dots\dots\dots=0$

必 $x-a=0$, 或 $x-b=0$, 或 $x-c=0$, 等等。

140. 應用 依前款諸例。任何次之方程式,

若其一邊爲壹次因數之積。而他之一邊爲零。則其方程式立解。

今舉其例如次

[例 1.] 解 $(x-1)(x+1)=0$

此方程式必 $x-1=0$ 或 $x+1=0$, 始能適合。其他決不能適合。

由是 $x-1=0$ 或 $x+1=0$

即 $x=1$ 或 $x=-1$

故此方程式之根爲 1 或 -1。

[例 2.] 解 $x(x+1)(x+2)=0$

此方程式。必 $x=0$ ，或 $x+1=0$ ，或 $x+2=0$ 始能適合。其他決不能適合。

由是 $x=0$ ，或 $x+1=0$ ，或 $x+2=0$

即 $x=0$ ，或 $x=-1$ ，或 $x=-2$

故此方程式之根為 $0, -1, -2$ 。

〔例 3.〕 解 $x(2x-1)(2x+3)=0$

此方程式。必 $x=0$ ，或 $2x-1=0$ ，或 $2x+3=0$ ，始能適合。其他決不能適合。

由是 $x=0$ ，或 $2x-1=0$ ，或 $2x+3=0$

即 $x=0$ ，或 $x=\frac{1}{2}$ ，或 $x=-\frac{3}{2}$

故此方程式之根為 $0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ 。

141. 因數分割法之應用 依移項例。任何方程式其各項可悉移於一邊。故方程式恆將各項記於等號 $=$ 之一邊。其他之一邊書零。
故依前款。則知 解任何次方程式之問題。與求同次式之因數之問題同。

由是。解僅含一未知量之方程式。其法如次。

即。先將方程式之各項。悉書於等號 $=$ 之一邊。其

他之一邊書零。

次分解全式爲因數。並令此等因數各等於零。而所得之值。卽爲所求之根。

下示諸例。其因數分解。可由視察求得。

[例 1.] 解方程式 $x^2 - 3x = 0$

$$x^2 - 3x = x(x - 3)$$

故 $x(x - 3) = 0,$

由是 $x = 0$ 或 $x - 3 = 0,$

故所求之根爲 0 與 3。

[例 2.] 解方程式 $x^2 - 9 = 0$

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

故 $(x - 3)(x + 3) = 0,$

由是 $x - 3 = 0,$ 或 $x + 3 = 0,$

故所求之根爲 3 與 -3。

[例 3.] 解方程式 $x^2 - 2 = 0$

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

故 $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0,$

由是 $x - \sqrt{2} = 0,$ 或 $x + \sqrt{2} = 0,$

故 $\sqrt{2}$ 與 $-\sqrt{2}$ 爲此方程式所求之根。

[例 4.] 解方程式 $x^2 - 4x = 0$

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$$

故 $x(x-2)(x+2) = 0,$

由是 $x = 0,$ 或 $x - 2 = 0,$ 或 $x + 2 = 0.$

故 0, 2, -2 爲此方程式所求之根。

[例 5.] 解方程式 $9x^2 = 4x$

移項。則 $9x^2 - 4x = 0,$

即 $x(9x - 4) = 0$ 即 $x(3x - 2)(3x + 2) = 0.$

由是 $x = 0$ 或 $3x - 2 = 0$ 或 $3x + 2 = 0,$

即 $x = 0,$ 或 $x = \frac{2}{3},$ 或 $x = -\frac{2}{3}.$

[例 6.] 解 $x^2 + 6 = 5x$

移項。則 $x^2 - 5x + 6 = 0,$

即 $(x-2)(x-3) = 0,$

由是 $x - 2 = 0,$ 又 $x - 3 = 0.$

故 2 與 3 爲所求之根。

問 題 XLIII.

解以下各方程式

1. $(x-1)(x+2) = 0.$

2. $(x-3)(x-4) = 0$

3. $(x+1)(x+2) = 0.$

4. $(2x+1)(2x-1) = 0$

5. $(3x-1)(3x+1)=0.$ 6. $(2x-5)(x-4)=0.$
7. $x(x-2)(x+3)=0.$ 8. $x(x+2)(x-4)=0.$
9. $x(x-3)(x+4)=0.$ 10. $x(2x-1)(3x+4)=0.$
11. $x(5x-2)(6x-7)=0.$
12. $x(x-3)(3x+7)=0.$
13. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)=0.$
14. $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=0.$
15. $(3x-1)(5x+1)(5x-2)(2x+7)=0.$
16. $(2x-3)(3x-4)(4x-5)(5x+6)=0.$
17. $x^2-x=0.$ 18. $x^2-2x=0.$
19. $x^2+3x=0.$ 20. $2x^2-3x=0.$
21. $2x^2-5x=0.$ 22. $3x^2+x=0.$
23. $x^2=5x.$ 24. $2x^2=x.$
25. $3x^2=5x.$ 26. $5x^2=-6x.$
27. $x^2=bx.$ 28. $ax^2=bx.$
29. $6x^2=x^2+5.$ 30. $5(x^2+5)=3(x^2+25).$
31. $5(x^2+4)=4(x^2+9)$ 32. $2(x^2+7)=7(x^2+2).$
33. $5(x^2+3)-(x-5)(x+5)=76.$
34. $7(x^2-1)-(x+3)(x-3)=56.$
35. $3x^2+(5x+2)^2=20x+32.$

36. $17+3x=\frac{1}{2}(x+5)^2-28.$
37. $x^2-5x+6=0.$ 38. $x^2-7x+12=0.$
39. $x^2-12x+20=0.$ 40. $x^2-9x+20=0.$
41. $x^2-11x+28=0.$ 42. $x^2-25x+150=0.$
43. $x^2-5x-84=0.$ 44. $x^2-x-156=0.$
45. $x^2+5x-150=0.$ 46. $x^2+2x=3.$
47. $x^2+4x=45.$ 48. $x^2-3x=10.$
49. $x^2+11x^2-180x=0.$ 50. $x^3-x^2=132x.$

142. 二次方程式 式中所含之未知量。其最高方乘為二乘方者。謂之二次方程式。

如 $x^2=4$, $3x^2+4x=7$, $ax^2+bx+c=0$. 各為二次方程式。

將二次方程式之諸項，悉移於等號之一邊。則其形為

$$ax^2+bx+c=0$$

但 a, b, c , 俱顯已知數。

由是解任意之二次方程式。其法為何。不難舉出。解如上所舉之二次方程式。其難事，在求左邊之因數。而欲求此因數。則依第 104 款所載求因數之法，

變此式爲兩平方之差。即能求得。

此法可依某例示之。惟讀此等諸例之前。不可不翻 104 款一讀。

[例 1.] 解 $x^2 + 12x + 35 = 0$

$x^2 + 12x$ 加 x 之係數之半之平方。 (即 6 之平方)
即成完全平方故加 6^2 , 且同時減之。則其方程式爲

$$x^2 + 12x + 6^2 - 6^2 + 35 = 0.$$

即 $(x+6)^2 - 1 = 0.$

$$\therefore \{(x+6)+1\}\{(x+6)-1\} = 0.$$

由是 $x+7=0$, 或 $x+5=0$,

故 $x=-7$, 或 $x=-5$.

[例 2.] 解 $3x^2 = 10x - 3$

移項。則 $3x^2 - 10x + 3 = 0$

以 x^2 之係數 3 除之。則 $x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$

x 之係數之半爲 $-\frac{5}{3}$, 故 $x^2 - \frac{10}{3}x$ 加 $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$ 則

成完全之平方。

因而加 $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$ 即 $\frac{25}{9}$, 且同時減之。則得

$$x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} - \frac{25}{9} + 1 = 0.$$

$$\therefore \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} = 0.$$

即 $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 0.$

$$\therefore \left\{x - \frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right\} \left\{x - \frac{5}{3} - \frac{4}{3}\right\} = 0.$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 3) = 0.$$

由是 $x - \frac{1}{3} = 0$ 或 $x - 3 = 0$. 故 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = 3$

〔注意〕有許多方程式，雖非完全平方，然其因數往往可依 99 款及 100 款之法徑然求出。學者苟能遇題檢查，則習久自精，大得便宜。

〔例 3.〕解 $4x - x^2 = 2$

移項，則 $4x - x^2 - 2 = 0$

變各項之符號，使 x^2 之係數為 1，則

$$x^2 - 4x + 2 = 0.$$

加 x 之係數之半之平方 4 且同時減之，則

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 2 = 0,$$

$$\therefore (x - 2)^2 - 2 = 0,$$

即 $(x - 2)^2 - (\sqrt{2})^2 = 0,$

$$(x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2}) = 0.$$

由是 $x-2+\sqrt{2}=0$, 又 $x-2-\sqrt{2}=0$

故 $x=2+\sqrt{2}$, 又 $x=2-\sqrt{2}$.

問題 XLIV.

解以下各方程式

1. $x^2-4x=45$.

2. $x^2-6x=91$.

3. $(x-3)^2=x+3$.

4. $(x-4)^2=x-2$.

5. $(x-1)(x-2)=20$.

6. $(x+1)(x+3)=2(x+3)$.

7. $4x+3=x(x+2)$.

8. $4x-3=x(2-x)$

9. $(x+1)^2=(x-1)^2+26$.

10. $(x-1)^2=(x+1)^2-56$.

11. $9x^2+6x+1=0$.

12. $9x^2+16=24x$.

13. $x^2+150=58x$.

14. $x^2=2x+99$.

15. $3x^2+3=10x$.

16. $3x^2+11x=20$.

17. $4x^2+21x=18$.

18. $6x^2+55x=50$.

19. $24x^2=30x+75$

20. $x^2-200=35x$.

21. $19x^2-30x+2=0$.

22. $17x^2+8=70x$.

23. $51x^2+19x=10$.

24. $110x^2-21x+1=0$.

25. $21x^2-13x=20$.

26. $21x^2+23x=20$.

27. $6x^2+6=18x$.

28. $6x^2=5x+1$.

29. $9x^2 - 63x + 68 = 0$. 30. $16x^2 + 3 = 16x$.
31. $29x^2 - 41x - 138 = 0$. 32. $29x^2 + 11x = 138$.
33. $x^2 - 16 = 215 - 10x$. 34. $(x+2)^2 = 4(x-1)^2$.
35. $(x+6)^2 = 16(x-6)^2$. 36. $(x+8)^2 = 9x^2$.
37. $(x-7)^2 = 49(x+2)^2$. 38. $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$.
39. $x^2 + 3a^2 = 4ax$. 40. $x^2 + 2ab = b^2 + 2ax$.
41. $4x^2 + 4ax = b^2 - a^2$. 42. $x^2 + 2ax = b^2 + 2ab$.

143. 普通解法 解方程式 $ax^2 + bx + c = 0$

先以 x^2 之係數 a 除此方程式。則

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

加 x 之係數之半之平方。(即 $\frac{1}{2} \times \frac{b}{a}$ 之平方) 且同時減之。則

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

首三項為完全平方即 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

由是 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0.$

即 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left\{ \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)} \right\}^2 = 0$

由 97 節

$$\left\{x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)}\right\} \left\{x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)}\right\} = 0.$$

$$\text{故 } x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)} = 0.$$

$$\text{或 } x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)} = 0.$$

$$\text{即 } x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)}$$

$$\text{或 } x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)}.$$

由是 二次方程式祇有二根。

144. 公式用法 一切問題，俱可用前款之公式，以代演算。即以特別方程式之數值，代其 a, b, c ，是也。

如 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 之根爲

$$-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)}$$

故欲求 $3x^2 - 10x + 3 = 0$ 之二根，則用此公式，以 3 代 a ，-10 代 b ，3 代 c ，即得。

由是 $3x^2 - 10x + 3 = 0$ 之二根爲

$$-\frac{-10}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{100}{36} - \frac{3}{3}\right)}$$

即 $\frac{10}{6} + \frac{8}{6}$ 由是二根為 3 與 $\frac{1}{3}$

145. 等根 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$, 據 143 款, 恆有

$$-\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)} \text{ 及 } -\frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)}$$

若 $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$ 則二根俱為 $-\frac{b}{2a}$, 故互相等。

然在本款, 此二次方程式不宜謂為祇有一根, 宜謂為有二等根。

$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ 非零, 則易知二根不等。

由是 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根互相等, 其關係在

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0 \text{ 即 } \underline{b^2 - 4ac = 0}$$

$b^2 - 4ac = 0$, 則 $ax^2+bx+c=0$ 式, 就 x 論, 恆為完全平方。何則, 因 ax^2+bx+c 即 $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$, 苟 $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$, 則原式為 $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, 故也。

146. 無理根 依 143 款之公式, 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根, 若 $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ 非完全平方則為無

理數。

又二次方程式之兩根中。若其一根爲無理數。則
兩根俱爲無理數。

147. 虛根 若 $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ 爲負。則 $\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)}$ 爲
虛數。(依 106 款)

由是 $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ 爲負，即 $b^2 - 4ac$ 爲負。則 $ax^2 + bx +$
 $c = 0$ 之兩根爲虛數。

又二次方程式之兩根中。若其一根爲虛數。則兩
根俱爲虛數。

148. 增根及欠根 方程式之兩邊。各以相
同之數乘之。不失其相等。故合於原方程式之一切
數值。俱合於所生之方程式。然以含未知量之任意
整式乘原方程式。則其乘得之新方程式。其合於原
方程式之未知量之數值固合於新方程式。而令乘
式爲零之任意數值。亦合於新方程式。故有乘式之
增根。

如方程式 $x^2 = 9$ 。其合理之數值爲 $x = 3$ 或 $x =$
 -3 若此方程式之兩邊。各以 $x - 2$ 乘之。則得新方

程式如次。

$$\text{即 } x^2(x-2) = 9(x-2)$$

則此新方程式。於合理之數值 $x=3$, $x=-3$, 外。別增一合理之數值 $x=2$ 。

由是，方程式之兩邊爲整式。若以含未知量之任意整式乘之。必生增根。

方程式中有分數者。若其分母含未知量。則以諸分母之最低公倍數。乘此方程式。決不生增根。何則。因此方程式之兩邊。各以其最低公倍數之任一因數除之。則復爲分數。故也。

雖然。以諸分母之最低公倍數。乘時。最當注意。否則所生之方程式。必含所謂增根。(即非原方程式所有之根)

$$\text{如 方程式 } \frac{2x}{x-1} - \frac{10}{x^2-1} = \frac{7}{x+1}$$

以諸分母之 L. C. M x^2-1 乘其兩邊。則得

$$2x(x-1) - 10 = 7(x-1)$$

而令乘式爲零之數值。不合於此新方程式。故雖以 x^2-1 乘。仍不生增根。

$$\text{然方程式 } \frac{x^2-3x}{x^2-1} + 2 + \frac{1}{x-1} = 0$$

若以諸分母之 L. C. M. x^2-1 乘之則得

$$x^2-3x+2(x^2-1)+x+1=0$$

即 $(3x+1)(x^2-1)=0$

故此根爲 $-\frac{1}{3}$ 與 1。然此第二之根 1。實非原

方程式之根。乃以 x^2-1 乘之所生之增根也。

何則。因 $\frac{x^2-3x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-3x+x+1}{x^2-1}$

$$= \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \frac{x-1}{x+1}$$

故此方程式與 $\frac{x-1}{x+1}+2=0$ 爲等值。

而此最後之方程式。祇有一根。即 $x=-\frac{1}{3}$ 。故也。

(注意) 方程式之兩邊。以含未知量之任意因數除之。其所生之方程式。恆缺原方程式所應有之根。是謂欠根。宜令用爲除數之式等於零求之。

如方程式 $(x^2-4)(x+2) = (x^2-4)(2x-1)$

以 x^2-4 除其兩邊。則 $x+2=2x-1$

由是得 $x=3$ 而原方程式之根不獨爲 $x=3$ 。

故其欠根。宜令 x^2-4 等於零求之。

問 題 XLV.

解以下各方程式

1. $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$.

2. $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$.

3. $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{10}{3}$.

4. $\frac{x+5}{4} - \frac{4}{x+5} = \frac{3}{2}$.

5. $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} = \frac{13}{6}$.

6. $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{29}{10}$.

7. $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2} = \frac{3}{5}$.

8. $\frac{7}{x+4} + \frac{1}{4-x} = \frac{5}{3}$.

9. $\frac{x}{x-2} + \frac{4}{x+1} = 3$.

10. $\frac{5}{x+1} - \frac{10}{x+10} = \frac{2}{3x-3}$.

11. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3+x} + \frac{1}{2+3x} = 0$.

12. $\frac{1}{3} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+11} = 0$.

13. $3\frac{x-1}{x+1} - 2\frac{x+1}{x-1} = 5$.

14. $\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-3} = \frac{15}{x+3}$.

15. $\frac{4x+3}{9} = \frac{6x-13}{18} - \frac{7x-46}{5x+3}$.

16. $\frac{2x-3}{4} = \frac{x-5}{12} + \frac{5x-16}{x-1}$.

$$17. \frac{2x-1}{2x+1} + \frac{13}{11} = \frac{3x+5}{3x-5}$$

$$18. \frac{2x-2}{2x-3} + \frac{3-3x}{3x-2} = \frac{5}{8x-12}$$

$$19. \frac{8x}{x-2} - \frac{4}{x+8} + \frac{4}{2-x} = 0.$$

$$20. \frac{5x}{x-3} - \frac{6}{x+2} + \frac{19}{3-x} = 0.$$

$$21. \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{5x}{x^2-1}.$$

$$22. \frac{1}{x^2-3x} + \frac{1}{x^2+4x} = \frac{9}{2x^2}.$$

$$23. \frac{1}{x^2-3x} - \frac{1}{9-x^2} = \frac{13}{16x}.$$

$$24. \frac{1}{3x-6} + \frac{5}{4-x^2} + \frac{7x}{72(x+2)} = 0.$$

$$25. \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{1-x} = \frac{7}{8} - \frac{1}{x+1}.$$

$$26. \frac{1}{x^2-4} - \frac{3}{2-x} = 1 + \frac{1}{3x+6}.$$

$$27. \frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}.$$

$$28. \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x}.$$

$$29. \frac{x}{x-3} - \frac{x-3}{x} + \frac{x}{x+3} - \frac{x+3}{x} = \frac{2}{3}$$

$$30. \frac{x+3}{x+1} + \frac{x-6}{x-4} = \frac{x+4}{x+2} + \frac{x-5}{x-3}.$$

$$31. \frac{x-3}{x-4} - \frac{x-4}{x-5} = \frac{x-6}{x-7} - \frac{x-7}{x-8}.$$

$$32. x^2 + 2a^2 = 3ax.$$

$$33. 9x^2 - 6ax = a^2 - b^2.$$

$$34. a(x^2 - 1) + x(a^2 - 1) = 0.$$

$$25. a(x^2 + 1) = x(a^2 + 1). \quad 36. x^2 - 2(a-b)x + b^2 = 2ab.$$

$$37. x^2 + 2(b-c)x + c^2 = 2bc.$$

$$38. (b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0.$$

$$39. (a+b)x^2 + cx - a - b - c = 0.$$

$$40. abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0.$$

$$41. bcx^2 + (b^2 + c^2)x + bc = 0.$$

$$42. (a^2 - b^2)(x^2 - 1) = 4abc.$$

$$43. (b^2 - a^2)(x^2 + 1) = 2(a^2 + b^2)x.$$

$$44. x + \frac{1}{a} = a + \frac{1}{x}. \quad 45. \frac{a}{a+x} + \frac{a}{a-x} = 4.$$

$$46. \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

$$47. \frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

$$48. \frac{a^2}{x-b} + \frac{b^2}{x-a} = a+b.$$

$$49. \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}. \quad 50. \frac{1}{x+a+b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

$$51. \frac{1}{x-a-b} = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

$$52. \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b}.$$

$$53. \frac{x}{x+a} + \frac{x}{x+b} = \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b}.$$

$$54. \frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} = \frac{x-a}{x+a} + \frac{x-b}{x+b}.$$

$$55. \frac{a}{x+a} + \frac{b}{x+b} = \frac{a-c}{x+a-c} + \frac{b+c}{x+b+c}.$$

149. 無理方程式 凡方程式含有未知量之平方根或他之方根者，謂之無理方程式。

欲化無理方程式為有理方程式，則移其無理項於等號之一邊，然後將方程式之兩邊各自乘，若其所得之式，仍含有無理項，則依此方法，幾度解之，至無理項悉變為有理項然後止。

〔例1.〕解方程式 $\sqrt{(x^2-9)} + x = 9$

移項，則 $\sqrt{(x^2-9)} = 9-x$

兩邊各自乘，則 $x^2-9 = (9-x)^2$

$$\therefore 18x = 90 \quad \therefore x = 5$$

〔例2.〕解方程式 $\sqrt{(2x+8)} - 2\sqrt{(x+5)} = 2$

兩邊各自乘，則

$$2x+8+4(x+5)-4\sqrt{(2x+8)} \times \sqrt{(x+5)} = 4,$$

$$\text{即 } 6x+24-4\sqrt{(2x+8)}\sqrt{(x+5)}=0;$$

$$\therefore 3x+12=2\sqrt{(2x+8)}\sqrt{(x+5)};$$

將最後之方程式兩邊各自乘。則

$$9x^2+72x+144=4(2x+8)(x+5);$$

$$\therefore x^2-16=0.$$

由是 $x=4$ 或 $x=-4$.

〔注意〕 以 4 代原方程式之 x 。則

$$\sqrt{16}-2\sqrt{9}=2, \quad \text{即 } 4-6=2.$$

自不合理。

又以 -4 代 x 。則 $\sqrt{0}-2\sqrt{1}=2$.

亦不合理。

即 x 之兩根之數值。俱不合於命題之方程式。

雖然。此不過由外形上視之耳。其中蓋別有原因也。此錯誤之原因有二。凡各代數量。皆有正負兩平方根。而 $\sqrt{(2x+8)}$ 與 $\sqrt{(x+5)}$ 。今皆設為正。一也。根號不能指其僅為正。或僅為負。故所求方程式之根號。正負俱難定。二也。

能解此理。則知 $x=4$ 。實合於所求之方程式。

何則。因 $\pm\sqrt{16}-2(\pm\sqrt{9})=2$,

即 $\pm 4 - (\pm 6) = 2$.

而取下層之符號，即能合理故也。

解無理方程式時，其中所含之根號，或用其正號，或用其負號，各當申明。

〔例 8.〕 解方程式

$$\sqrt{(2x+7)} + \sqrt{(3x-18)} + \sqrt{(7x+1)} = 0$$

移項，則 $\sqrt{(2x+7)} + \sqrt{(3x-18)} = -\sqrt{(7x+1)}$ 。

兩邊各自乘，則

$$2x+7+2\sqrt{(2x+7)}\sqrt{(3x-18)}+3x-18=7x+1,$$

移項且以 2 除之，則

$$\sqrt{(2x+7)}\sqrt{(3x-18)} = x+6.$$

兩邊各自乘，則

$$(2x+7)(3x-18) = (x+6)^2;$$

$$\therefore 5x^2 - 27x - 162 = 0.$$

由是 $x=9$ 或 $x=\frac{18}{5}$ 。

問 題 XLVI.

解以下各方程式

1. $\sqrt{(x-3)} = 3.$

2. $\sqrt{(x-7)} = 4.$

3. $\sqrt{(3x+1)} = 4.$

4. $5\sqrt{(x+7)} = 4\sqrt{(3x-2)}.$

5. $3\sqrt{(x+3)} = 2\sqrt{(3x+6)}$.
6. $\sqrt{(x+5)} = 2\sqrt{(3x+4)}$.
7. $3\sqrt{(x+7)} = 5\sqrt{(3x-2)}$.
8. $\sqrt{(x+2)} = x$.
9. $\sqrt{(x+20)} = x$.
10. $x + \sqrt{(x+1)} = 5$.
11. $x - \sqrt{(x+2)} = 4$.
12. $x - 2 + 3\sqrt{(x-2)} = 0$.
13. $x - 5 + 2\sqrt{(x-5)} = 0$.
14. $\sqrt{(9+4x)} = 2x - 3$.
15. $3x = 5 + \sqrt{(30x-71)}$.
16. $2x - 5\sqrt{x} = 3$.
17. $x + 3 + \sqrt{(x+3)} = 6$.
18. $2x + 1 = \sqrt{(6x+3)}$.
19. $7x = \sqrt{(3x-11)} + 33$.
20. $\sqrt{(x+10)} + \sqrt{(x+1)} = 1$.
21. $\sqrt{x} + \sqrt{(5x+1)} = 5$.
22. $\sqrt{x} + \sqrt{(5x+1)} = 2$.
23. $\sqrt{(2x+9)} - \sqrt{(x+4)} = 1$.
24. $\sqrt{(7x+1)} - \sqrt{(3x+10)} = 1$.
25. $\sqrt{(2x+11)} - \sqrt{(2x-5)} = 2$.
26. $\sqrt{(4x+1)} - \sqrt{(x+3)} = 2$.

$$27. \quad \sqrt{(8x+5)} - 2\sqrt{(2x+1)} = 1.$$

$$28. \quad \sqrt{(x+1)} + \sqrt{(x+20)} - 2\sqrt{(x+11)} = 0.$$

$$29. \quad \sqrt{(4x+1)} - \sqrt{(x+3)} = \sqrt{(x-2)}.$$

$$30. \quad \sqrt{(2x+4)} + \sqrt{(3x+7)} = \sqrt{(12x+9)}.$$

$$31. \quad \sqrt{(6x+1)} + \sqrt{2(1-x)} = \sqrt{(7x+6)}.$$

$$32. \quad 2\sqrt{(2x+3)} - \sqrt{(5x+1)} = \sqrt{2(x-1)}.$$

$$33. \quad \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}.$$

$$34. \quad \sqrt{(x+1)} + \frac{1}{\sqrt{(x+1)}} = 2.$$

$$35. \quad \sqrt{(x+1)} + \sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{(1+x)}}.$$

$$36. \quad \sqrt{(3+x)} + \sqrt{x} = \frac{5}{\sqrt{x}}.$$

$$37. \quad \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)} = \sqrt{(x+4)} + \frac{3}{\sqrt{(x+4)}}.$$

$$38. \quad \sqrt{(a-x)} + \sqrt{(b-x)} = \sqrt{(a+b-2x)}.$$

$$39. \quad \sqrt{(ax+b^2)} + \sqrt{bx+a^2} = a-b.$$

$$40. \quad \sqrt{(a+x)} + \sqrt{(b+x)} = \sqrt{(a+b+2x)}.$$

$$41. \quad \sqrt{(a-x)} + \sqrt{(b-x)} = \sqrt{(2a+2b)}.$$

150. 二次方程式之根與其係數之關係 x^2+px+q 恆以 $(x-a)(x-\beta)$ 顯之。前既詳言

之矣。(見 104 款)

$$\text{又若 } x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$$

則 α 與 β 爲方程式 $x^2 + px + q = 0$ 之根 (見 139 款)

$$\text{然若 } x^2 + px + b = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$\text{則 } \alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q,$$

由是於原方程式 $x^2 + px + q = 0$

其二根之和爲 $-p$ 二根之積爲 q 。

方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 之兩邊。各以 a 除之如次。

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

由是方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 之根爲 α, β , 則

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ 及 } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

上述之二次方程式。其根與其未知量各乘方諸係數之關係。極其緊要。

三次或三次以上之方程式亦有相似之關係(參考大代數學 129 款)

[別法] 143 款, 已求得 $ax^2 + bx + c = 0$ 之二根爲

$$-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left\{ \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right\}}$$

設此二根爲 α, β , 則

$$\alpha = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left\{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right\}},$$

$$\beta = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\left\{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right\}}.$$

相加得 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$.

相乘得 $\alpha\beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = \frac{c}{a}$.

151. 已知根之方程式 就通例論。所設之方程式雖有不能求其根者，然依反面之理推之，已有根而作其方程式。實甚易易。

如，求作以4與5爲根之方程式。

其所求之方程式，必爲令 $x=4$ ，或 $x=5$ ，則其方程式合理。即其所求之方程式惟 $x-4=0$ ，或 $x-5=0$ ，始能適合。其他決不能適合。

由是。所求之方程式。必爲 $(x-4)(x-5)=0$ 。何則。因此方程式，惟 $x-4=0$ ，或 $x-5=0$ ，始能合理。其他決不能合理。故也。

相乘而去其括弧。則得方程式如次。

$$x^2 - 9x + 20 = 0.$$

(注) 方程式 $x^2 - 9x + 20 = 0$ ，爲有4及5兩根之方

程式固已。然欲證明此方程式。除所與之兩根 4 及 5 外別無他根。且證明除所與之兩根 4 及 5 外別無他根者。惟本方程式。不得不設方程式必有根之說為合理。(不加證明故曰設)。

設 $x^3+7x^2-2=0$ 為無根之方程式。則

$$(x^2-9x+20)(x^3+7x^2-2)=0$$

即 $(x-4)(x-5)(x^3+7x^2-2)=0$

此方程式。亦除所與之兩根 4 及 5 外別無他根。而與 $x^2-9x+20=0$ 方程式同。於理不合。

「方程式必有根」之理。可用理論方程式證明之。而理論方程式。屬於高等數學之部分非初等之書所宜載。

又求作以 2, 3, -4 為根之方程式。

其所求之方程式。惟 $x-2=0$, 或 $x-3=0$, 或 $x+4=0$, 始能合理。其他決不能合理。故其方程式如次。

$$(x-2)(x-3)(x+4)=0$$

即 $x^3-x^2-14x+24=0$

同樣。以 0, -1, $-\frac{1}{2}$ 為根之方程式為

$$x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$$

即
$$x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = 0$$

152. 雜例 更解二三要例。以爲本論之結局

〔例1.〕問以方程式 $x^2+5x-7=0$ 之根之平方爲根之方程式如何。

設 α, β 爲所設方程式之根。則 α^2, β^2 爲所求之方程式之根。

由是所求之方程式爲

$$(x-\alpha^2)(x-\beta^2)=0$$

即
$$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

故求 $\alpha^2 + \beta^2$ 與 $\alpha^2\beta^2$ 可也。

依45款 $\alpha + \beta = -5$

又 $\alpha\beta = -7$

由是 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-5)^2 - 2(-7)$
 $= 25 + 14 = 39$

又 $\alpha^2\beta^2 = 49$

代入(1)式。則得所求之方程式如次。

$$x^2 - 39x + 49 = 0$$

〔注意〕 先求所設方程式之根。然後作其根之平方。亦可得所求之方程式。然以用 150 款之法為最當。

〔例 2.〕 設 a, β 為方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 之根。求作以 $\frac{a}{\beta}$ 與 $\frac{\beta}{a}$ 為根之方程式。

$$\text{所求之方程式為 } \left(x - \frac{a}{\beta}\right) \left(x - \frac{\beta}{a}\right) = 0,$$

$$\text{即 } x^2 - \left(\frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a}\right)x + 1 = 0,$$

$$\text{而 } \frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a} = \frac{a^2 + \beta^2}{a\beta},$$

$$\text{依 150 款 } a + \beta = -\frac{b}{a}, \quad a\beta = \frac{c}{a},$$

$$\text{由是 } a^2 + \beta^2 = (a + \beta)^2 - 2a\beta = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a},$$

$$\therefore \frac{a^2 + \beta^2}{a\beta} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2}{ac} - 2$$

$$\text{由是所求之方程式為 } x^2 - \left(\frac{b^2}{ac} - 2\right)x + 1 = 0,$$

$$\text{或以 } ac \text{ 乘之。則 } acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0,$$

(例3.) 證無論 x 爲如何之數值。 x^2-4x+5 俱不能爲零.並求此式之最小數值。

$$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$$

$(x-2)^2$ 恆爲正.故 $1+(x-2)^2$ 式除 $x-2=0$ 外,其值恆大於1.而 $x-2=0$,則此式等於1.

故 x^2-4x+5 , 決不能爲零.而其最小數值爲1.

問 題 XLVII.

求作下記各根之方程式 [1 至 15.]

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. 2 與 -2. | 2. 3 與 -4. |
| 3. -3 與 -2. | 4. $\frac{1}{2}$ 與 $-\frac{1}{2}$. |
| 5. $\frac{1}{3}$ 與 $-\frac{1}{3}$. | 6. $-\frac{1}{2}$ 與 $-\frac{1}{3}$. |
| 7. 0 與 3. | 8. 0 與 -4. |
| 9. 5, -3, 0. | 10. $\sqrt{2}$ 與 $-\sqrt{2}$. |
| 11. $\sqrt{5}$ 與 $-\sqrt{5}$. | 12. 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$. |
| 13. $2-\sqrt{3}$ 與 $2+\sqrt{3}$. | |
| 14. $5-\sqrt{7}$ 與 $5+\sqrt{7}$. | |
| 15. $a-\sqrt{b}$ 與 $a+\sqrt{b}$. | |
| 16. 求以下各方程式兩根之積 | |

(1) $x^2+4x+1=0$, (2) $x^2+7x-2=0$

(3) $3x^2+5x-7=0$, (4) $5x^2-x-1=0$,

(5) $9ax^2+3bx+4c=0$,

17. 求以下各方程式兩根之和

(1) $x^2-4a^2=0$, (2) $x^2+3x-5=0$,

(3) $x^2-5x+3=0$, (4) $2x^2-x-7=0$,

(5) $6ax^2+7bx+8=0$.

18. 設 $ax^2+bx+c=0$, 之根為 α, β , 證

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{b}{c} = 0.$$

19. 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根為 α, β 證以下

諸式 (1) $\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$, (2) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{b^2-2ac}{ac}$

(3) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$.

20. 有方程式 $x^2+4x+2=0$ 求其根之平方之和。21. 有方程式 $x^2+4px+p^2=0$ 求其根之平方之和。22. 證方程式 $x^2+ax+b=0$ 兩根之平方和等於方程式 $x^2+3ax+b+4a^2=0$ 兩根之平方和。23. 有方程式 $3x^2+4x+a=0$, 問 a 為何數。其二根始互相等。24. 有方程式 $4x^2+(1+a)x+1=0$, 問 a 為何數。其二根始互相等。25. 方程式 $100x^2+60x+a=0$, 其一根為他根之二倍。問 a 之值數幾何。

26. 方程式 $x^2+px+q=0$, 若 $9q=2p^2$, 則其一根爲他根之二倍。求證。
27. $2x^2-5x+3=0$ 之根爲 α, β , 則以 $\frac{\alpha}{\beta}$ 與 $\frac{\beta}{\alpha}$ 爲根之方程式必爲 $6x^2-13x+6=0$, 求證。
28. $2x^2-15x+4=0$ 之根爲 α, β , 則以 $\frac{\alpha}{\beta}$ 與 $\frac{\beta}{\alpha}$ 爲根之方程式必爲 $8x^2-209x+8=0$, 求證。
29. $x^2-11x+22=0$ 之根爲 α, β , 問以 $\alpha+\beta$ 與 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 爲根之方程式如何。
30. $x^2+7x+9=0$ 之根爲 α, β , 問以 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ 與 $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ 爲根之方程式如何。
31. $x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$ 之根各爲 $x^2+px+q=0$ 之根之平方。求證。
32. $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ 之根, 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之根之平方。其關係如何。
33. $px^2+qx+r=0$ 之根爲 α, β 。則以 $\alpha+\beta$ 與 $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ 爲根之方程式必爲 $px^2+(pr+q^2)x+qr=0$ 求證。
34. $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 α, β 。則以 $\alpha\beta$ 與 $\frac{1}{\alpha\beta}$ 爲根之方程式必爲 $acx^2-(a+c)x+ac=0$, 又以 $\alpha+\beta$

與 $\frac{1}{\alpha+\beta}$ 爲根之方程式必爲 $abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab = 0$,

求證。

35. 設 $x^2 + ax + b = 0$ 之兩根之差, 等於 $x^2 + px + q = 0$ 之兩根之差。證 $a^2 - 4b = p^2 - 4q$ 。

36. $x^2 + px + q = 0$ 之根爲 α, β 。則以 $(\alpha + \beta)^2$ 與 $(\alpha - \beta)^2$ 爲根之方程式, 必爲 $x^2 - 2(p^2 - 2q)x + p^2(p^2 - 4q) = 0$, 求證。

37. $x^2 + px + q = 0$ 之根爲 α, β 。則以 $\alpha + \frac{1}{\beta}$ 與 $\beta + \frac{1}{\alpha}$ 爲根之方程式, 必爲 $qx^2 + p(1+q)x + (1+q)^2 = 0$, 求證。

38. $ax^2 + bx + c = 0$ 之根爲 α, β , 則方程式 $(2b^2 + ac)x^2 + 3abx + a^2 = 0$ 之根爲 $\frac{1}{\alpha+2\beta}$ 及 $\frac{1}{\beta+2\alpha}$, 求證。

第十五編

三次以上之方程式

153. 高次方程式 高於二次之方程式。其普通之解法。非學者所能驟識。原在本書之範圍外。故本編惟解其特別之例。

〔例1.〕 解 $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

此方程式。其所含未知量之相異乘方。祇有兩根。且其一種爲他一種之平方。故可依142款解二次方程式之法解之。

$$x^4 - 6x^2 + 9 - 9 + 8 = 0,$$

即 $(x^2 - 3)^2 - 1 = 0.$

由是 $\{(x^2 - 3) - 1\}\{(x^2 - 3) + 1\} = 0,$

$\therefore x^2 - 4 = 0,$ 由是得 $x = \pm 2.$

又 $x^2 - 2 = 0,$ 由是得 $x = \pm\sqrt{2}.$

故此方程式之四根。爲 $\pm 2, \pm\sqrt{2}.$

〔例2.〕 解 $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = 0.$

本例亦與前例同。其含未知量者。祇有兩項。且其

一項爲他一項之平方。

解此種方程式。宜將式中諸項。悉移於等號之左邊。而此左邊之式。更依前編之法。分解爲兩因數。

本例之因數。可由視察求得。

何則。因 $A^2+4A-12=(A+6)(A-2)$ 故所設之方程式。宜變爲下式。即

$$\{(x^2+x)+6\} \{(x^2+x)-2\}=0$$

由是。 $x^2+x+6=0$ 或 $x^2+x-2=0$

而 $x^2+x+6=0$ 之根爲 $-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{-23}}{2}$

$x^2+x-2=0$ 之根爲 1 與 -2

由是。所設之方程式。有次之四根。

$$1, -2, -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{-23}$$

[例 3.] 解 $\frac{x^2}{x+2} + \frac{x+2}{x^2} = \frac{37}{6}$

本例含 x 之二項。其一項爲他一項之反數。

若設 $y = \frac{x^2}{x+2}$ 則 $\frac{x+2}{x^2} = \frac{1}{y}$, 故

$$y + \frac{1}{y} = \frac{37}{6}$$

以 $6y$ 乘之。則 $6y^2 - 37y + 6 = 0$

即 $(6y-1)(y-6) = 0$

由是 $y = \frac{1}{6}$ 或 $y = 6$

即 $\frac{x^2}{x+2} = \frac{1}{6}$ 或 $\frac{x^2}{x+2} = 6$

於第一式得 $6x^2 - x - 2 = 0$, 此根爲 $\frac{2}{3}$ 與 $-\frac{1}{2}$

於第二式得 $x^2 - 6x - 12 = 0$, 此根爲 $3 \pm \sqrt{21}$

由是。所設之方程式。有次之四根。

$$\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 3 \pm \sqrt{21}$$

(例4.) 解 $4x^3 - 6x + 3\sqrt{(2x^2 - 3x + 7)} = 30$

此等方程式。根號內 x^2 與 x 之係數比等於根號外 x^2 與 x 之係數比。故其解法如次。

解此方程式。宜設 $\sqrt{2x^2 - 3x + 7} = y$

如是 $2x^2 - 3x + 7 = y^2$

$$2x^2 - 3x = y^2 - 7$$

而 $4x^2 - 6x = 2y^2 - 14$

由是。據所設之方程式。得

$$2y^2 - 14 + 3y = 30.$$

即 $2y^2 + 3y - 44 = 0,$

即 $(y - 4)(2y + 11) = 0,$

由是 $y = 4,$ 或 $y = -\frac{11}{2}$

$$\therefore y^2 = 16, \text{ 或 } y^2 = -14.$$

$$y^2 = 2x^2 - 3x + 7$$

$$1. \quad 2x^2 - 3x + 7 = 16,$$

$$\text{即} \quad 2x^2 - 3x - 9 = 0,$$

$$\text{即} \quad (2x+3)(x-3) = 0,$$

$$\therefore x = 3, \text{ 又 } x = -\frac{3}{2}.$$

$$2. \quad 2x^2 - 3x + 7 = -14,$$

$$\text{即} \quad 2x^2 - 3x - 21 = 0,$$

$$\text{此根爲 } \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{195}}{4}$$

154. 視察法 含 x 之有理整式。若以任意之特別數值 a 代 x ，而其式爲零。則 $x-a$ 爲其式之一因數。證見後編。(267 款)

如 $x^3 - 7x + 6$ ，以 2 代 x ，而其式爲零。故據上之定理。 $x-2$ 爲其一因數。而由除法。得

$$x^3 - 7x + 6 = (x-2)(x^2 + 2x - 3)$$

又 $x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ ，設 $x=1$ ，則其式爲零。故 $x-1$ 爲其一因數。而由除法。得

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = (x-1)(x^2 - 3x - 1)$$

155. 應用 依前款所述之定理。已知方程式之一根。則能令其方程式為低次式。

〔例1.〕有方程式 $x^3 - 7x + 6 = 0$ ，已知其一根為 2。求其他根。

$x^3 - 7x + 6$ ，設 $x = 2$ ，而其式為零。故 $x - 2$ 為其一因數。

而由除法。知 $x^3 - 7x + 6 = (x - 2)(x^2 + 2x - 3)$

由是 $(x - 2)(x^2 + 2x - 3) = 0$

故所設方程式之他根，可由

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

即 $(x + 3)(x - 1) = 0$ 求得。

故三次方程式 $x^3 - 7x + 6 = 0$ ，其三根 2, -3, 1，而 -3, 1 即所求之他根。

〔例2.〕解方程式 $x^3 - 1 = 0$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

故 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

由是 $x = 1$ 又 $x^2 + x + 1 = 0$ 。

此根為 $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)}$

由是方程式 $x^3 - 1$ 有三根。其一根為實數。而他

之二根爲虛數。

$$\text{故 } 1 - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)} - \frac{1}{2} - \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)} \text{ 三量之}$$

立方等於 1。即 1 之立方根，爲上所述之三量。

$$\text{〔注意〕 } a^3 \text{ 之三立方根爲 } a \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)} \right\} a,$$

$$\left\{ -\frac{1}{2} - \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)} \right\} a.$$

〔例 3.〕 $x^4 - 25x^2 + 30x - 9$ 與 $x^4 - 8x^2 + 19x^2 - 14x + 3$ 俱爲零。問 x 之數值幾何。

此兩式若 x 爲相同之數值。(即 $x=a$) 而其式俱爲零。則 $x-a$ 爲此兩式之因數。

而任意二式之公因數。可用求 H.C.F. (即最高公因數) 之常法求得。

在本例。其 H.C.F. 如次

$$x^2 - 5x + 3$$

而 $x^2 - 5x + 3$ ，爲此式之因數。即其最高公因數。由是惟由 $x^2 - 5x + 3 = 0$

所求得 x 之數值。能使兩式俱爲零。其他決不能使兩式俱爲零。故所求之數值。即 $x^2 - 5x + 3 = 0$ 之根。

$$\text{其根差如次 } \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

問題 XLVIII.

求以下各方程式之根 [1 至 27.]

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$

2. $x^4 - 2x^2 - 8 = 0.$

3. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$

4. $x^4 - 7x^2 - 18 = 0.$

5. $\frac{x^2 - 1}{9} + \frac{1}{x^2} - 1 = 0.$

6. $x^2 + \frac{100}{x^2} = 29.$

7. $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + \frac{1}{a^2}.$

8. $x^2 - \frac{1}{x^2} = a^2 - \frac{1}{a^2}.$

9. $x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 + \frac{1}{a^4}.$

10. $(x^2 - x)^2 - 8x^2 - x + 12 = 0.$

11. $(x^3 + x)^2 - 22(x^2 + x) + 40 = 0.$

12. $(x^2 + x)(x^2 + x + 1) = 42.$

13. $\frac{x^2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2} = 2.$

14. $\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x} = \frac{5}{2}$

15. $\frac{x^2}{x-1} + \frac{x-1}{x^2} = \frac{17}{4}.$

16. $(x^2 + x + 1)\left(x^2 + x - \frac{3}{2}\right) + 1 = 0.$

17. $(x^3 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12.$

$$18. \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 12.$$

$$19. \frac{x^2+2}{x^2+4x+1} + \frac{x^2+4x+1}{x^2+2} = \frac{5}{2}.$$

$$20. x^2+x+1 = \frac{42}{x^2+x}.$$

$$21. 2x^2-4x-\sqrt{x^2-2x-3}=9.$$

$$22. x^2+\sqrt{x^2+8x+7}=28-3x.$$

$$23. 2x^2+6x=1-\sqrt{(x^2+8x+1)}.$$

$$24. x^2+\sqrt{(4x^2+24x)}=24-6x.$$

$$25. 2(2x-8)(x-4)-\sqrt{(2x^2-11x+15)}=60.$$

$$26. x^2+(x-2)(x-3)+\sqrt{2x^2-5x+6}=6.$$

$$27. (x+5)(x-2)-36=\sqrt{(x+4)(x-1)}.$$

解下記之各三次方程式但各已知其一根。

[28 至 33]

$$28. x^3-2x+1=0, [x=1].$$

$$29. x^3-5x+4=0, [x=1].$$

$$30. x^3-49x+120=0, [x=3].$$

$$31. x^3-3x^2-7x+21=0, [x=8].$$

$$32. x^3-2x^2-7x-4=0, [x=-1].$$

$$33. 5x^3-15x^2+8x+14=0, [x=2].$$

34. 問 x 之數值幾何。則 $x^3 - 2x^2 + 9$ 與 $x^3 - 4x + 15$ 俱爲零。

35. 方程式 $2x^3 + 21x^2 + 34x - 105 = 0$ 與 $2x^3 - x^2 - 76x - 105 = 0$ 有共通之一根試證之。

36. 解次之各方程式

(1) $x^3 - 21x + 20 = 0,$

(2) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0,$

(3) $x^3 - x^2 - 22x + 40 = 0,$

(4) $x^3 - 3x^2 - 60x - 100 = 0,$

(5) $x^3 - 19x + 30 = 0,$

(6) $2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 = 0,$

(7) $4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 = 0.$



第 十 六 編

二 次 之 聯 立 方 程 式

156. 二次聯立方程式 今解說二次聯立方程式。

二次聯立方程式。至少必有一式爲二次式。
第一類。含二未知量之兩方程式。其一爲一次式。
其一爲二次式者。

如解方程式 $x+2y=5$, $x^2+y^2=9$

由第一方程式。得 $x=5-2y$

以 x 之此值。代入第二方程式。得

$$(5-2y)^2+2y^2=9$$

$$\therefore 6y^2-20y+16=0$$

$$\therefore 3y^2-10y+8=0$$

即 $(3y-4)(y-2)=0$

由是 $y=\frac{4}{3}$ 或 $y=2$

若 $y=\frac{4}{3}$ 則 $x=5-2y=5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}$

若 $y=2$, 則 $x=5-2y=5-4=1$

故 $x=\frac{7}{3}, y=\frac{4}{3}$, 又 $x=1, y=2$,

「但此結果不宜記爲 $x=\frac{7}{3}$, 或 $1, y=\frac{4}{3}$, 或 2 . 因此書法甚易混亂故也。」

依上例。則兩聯立方程式一爲一次方程式。一爲二次方程式者。其解法如次。

先由一次方程式。用他之未知量與已知量之項。表其一未知量之數值。然後以此數值。代入二次方程式。即得一未知量之二次方程式。而求一未知量之二次方程式之根。即爲所求之未知量之值。

(例 1.) 解方程式 $3x+4y=5, 2x^2-xy+y^2=22$

由第一方程式得 $x=\frac{5-4y}{3}$,

以此代入第二方程式。則

$$2\left(\frac{5-4y}{3}\right)^2 - y\left(\frac{5-4y}{3}\right) + y^2 = 22$$

$$\therefore 53y^2 - 95y - 148 = 0,$$

$$\text{即 } (y+1)(53y-148) = 0,$$

$$\text{由是 } y = -1, \text{ 或 } y = \frac{148}{53}.$$

若 $y = -1$ 則 $x = \frac{5-4y}{3} = 3$.

若 $y = \frac{148}{53}$ 則 $x = \frac{5-4y}{3} = -\frac{109}{53}$.

故 $y = -1, x = 3$ 或 $y = \frac{148}{53}, x = \frac{109}{53}$.

〔例2.〕 解 $xy + x = 25, 2xy - 3y = 28$.

以2乘第一方程式,而以第二方程式減之,則

$$2x + 3y = 50 - 28 = 22.$$

由是 $y = \frac{22-2x}{3}$.

以此代入第一方程式,則

$$x\left(\frac{22-2x}{3}\right) + x = 25$$

$$\therefore 2x^2 - 25x + 75 = 0$$

由是 $x = 5$, 或 $x = \frac{15}{2}$, 而與此相當之 y 之數

值為 4 與 $\frac{7}{3}$.

〔例3.〕 解 $2x^2 - 3x - 4y = 47, 3x^2 + 4x + 2y = 89$

以2乘第二方程式,則

$$6x^2 + 8x + 4y = 178.$$

加此於第一方程式,則 $8x^2 + 5x = 225$

由是 $x=5$ 或 $x=-\frac{45}{8}y$ 之數值以此代入所設之一方程式。即得。

問題 XLIX.

解以下各方程式

1. $x+y=6, x^2-y^2=24.$
2. $x-y=10, x^2+y^2=58.$
3. $3x+3y=10, xy=1.$
4. $2x+3y=0, 4x^2+9xy+9y^2=72.$
5. $2x-5y=0, x^2-3y^2=13.$
6. $x+y=15, 4x-4y=xy.$
7. $2x-y=5, x+3y=2xy.$
8. $3x-31=5y, x^2+5xy+25=y^2.$
9. $8x+2y=5, x^2-4xy+5y^2=2.$
10. $2x-7y=25, 5x^2+4xy+3y^2=28.$
11. $x+y=2, \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=6.$
12. $x+2y=7, \frac{3}{x}+\frac{6}{y}=5.$
13. $x+y=5, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}.$

$$14. \quad x-y=1, \quad \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}.$$

$$15. \quad 2x-y=4, \quad \frac{8}{x}+\frac{4}{y}=1.$$

$$16. \quad 7x-3y+7=0, \quad \frac{5}{x}-\frac{14}{y}=6.$$

$$17. \quad xy+x=15, \quad xy-x=8.$$

$$18. \quad xy+2x=5, \quad 2xy-y=3.$$

$$19. \quad x^2-y=29, \quad x^2+x+y=49$$

$$20. \quad x^2+3x-2y=4, \quad 2x^2-5x+3y+2=0.$$

157. 兩二次聯立方程式 第二類 兩式俱爲二次式者。

兩方程式俱爲二次式，則有能解者，有不能解者。何則，因消去一未知量，其求他未知量之方程式多高於二次，而高於二次之方程式除特別之例外，恆不能解故也。

如欲由方程式 $x^2+x+y=3$ 與 $x^2+y^2=5$ 求其 x, y ，由第一方程式 $y=3-x-x^2$ 以 y 之此值代入第二方程式則

$$x^2+(3-x-x^2)^2=5$$

$$\text{即 } x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 4 = 0$$

而此方程式爲四次式，故本書中無解此之方法。

158. 等次方程式 兩方程式，雖俱爲二次式而含未知量之項，若悉爲二次項，則恆能解之，舉其例如次。

〔例1.〕解方程式 $x^2 + 3xy = 28$, $xy + 4y^2 = 8$ 以第二方程式之兩邊，除第一方程式相當之兩邊，則

$$\frac{x^2 + 3xy}{xy + 4y^2} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

由是 $2(x^2 + 3xy) = 7(xy + 4y^2)$,

$$\therefore 2x^2 - xy - 28y^2 = 0,$$

即 $(2x + 7y)(x - 4y) = 0$.

由是 $x = 4y$, 又 $x = -\frac{7}{2}y$.

1. $x = 4y$ 則由第二方程式

$$4y^2 + 4y^2 = 8, \quad y = \pm 1.$$

故 $x = 4y = \pm 4$.

2. $x = -\frac{7}{2}y$ 則由第二方程式

$$-\frac{7}{2}y^2 + 4y^2 = 8, \quad \therefore y = \pm 4.$$

故 $x = -\frac{7}{2}y = \mp 14$.

故根有四種數值，即

$$x=4, y=1, x=-4, y=-1, x=14, y=-4,$$

$$x=14, y=4.$$

以上, $2x^2 - xy - 28y^2$ 之因數, 可由視察求得. 若爲不能由視察求者, 則宜用 104 款求因數之法求之.

[例 2.] 解 $x^2 - 3xy = 0, 5x^2 + 3y^2 = 48$

第一方程式爲 $x(x - 3y) = 0$

由是 $x=0$, 或 $x=3y$

若 $x=0$, 則由第二方程式 $3y^2=48 \therefore y=\pm 4$

若 $x=3y$ 則由第二方程式 $45y^2 + 3y^2 = 48$

$$\therefore y = \pm 1, \text{ 然則 } x = \pm 3$$

159. 別法 含等次項之兩式, 固可用前款之法解之, 然此種方程式, 有時以用特別之法解之爲便.

如解 $x^2 + y^2 = 74, 2xy = 70$

由加法得 $x^2 + 2xy + y^2 = 144,$

即 $(x+y)^2 - 12^2 = 0.$

$$\therefore (x+y-12)(x+y+12) = 0.$$

由是 $x+y=12 \dots\dots\dots (1)$

又 $x+y=-12 \dots\dots\dots (2)$

又依所設之方程式由減法得

$$x^2 - 2xy + y^2 = 4,$$

即 $(x-y)^2 - 2^2 = 0,$

$$\therefore (x-y-2)(x-y+2) = 0.$$

由是 $x-y = 2 \dots\dots\dots (3).$

又 $x-y = -2 \dots\dots\dots (4)$

由(1)與(3),得 $x=7, y=5$

由(1)與(4),得 $x=5, y=7$

由(2)與(3),得 $x=-5, y=-7$

由(2)與(4),得 $x=-7, y=-5$

故其根有四種數值。其兩種為 $x = \pm 7, y = \pm 5$, 又兩種為 $x = \pm 5, y = \pm 7$, 然無論何種其所取之上下符號。俱各相應。即 x, y 之數值或俱取正號或俱取負號。是也。

又取前款之方程式, 即 $x^2 + 3xy = 28, xy + 4y^2 = 8$, 相加, 則

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = 36,$$

即 $(x+2y)^2 - 6^2 = 0,$

$$\therefore x+2y = 6 \dots\dots\dots (1).$$

或 $x+2y = -6 \dots\dots\dots (2),$

(1) 與 (2) 爲一次聯立方程式。可取其一式配以所設方程式中之一式。合爲一組。依 156 款之法解之。

問 題 L.

解以下各方程式

1. $x^2 - 2xy = 0, 4x^2 + 9y^2 = 225.$
2. $2x^2 - 3xy = 0, y^2 + 5xy = 34.$
3. $x^2 + 3xy = 45, y^2 - xy = 4.$
4. $x^2 - xy = 63, y^2 + xy = 22.$
5. $x^2 + xy = 24, 2y^2 + 3xy = 32.$
6. $x^2 - 3xy = 10, 4y^2 - xy = -1.$
7. $x^2 + xy - 2y^2 = -44, xy + 3y^2 = 80.$
8. $x^2 + 3xy = 7, y^2 + xy = 6.$
9. $x^2 - 3y^2 = 13, 3x^2 - y^2 = 71.$
10. $3xy + x^2 = 10, 5xy - 2x^2 = 2.$
11. $x^2 + 3xy = 54, xy + 4y^2 = 115.$
12. $x(x + y) = 40, y(x - y) = 6.$
13. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3, 2x^2 + y^2 = 6.$
14. $x^2 - 2xy + 5 = 0, (x - y)^2 - 4 = 0$

15. $x^2 + 5y^2 = 84, 3x^2 + 17xy - y^2 = -84.$
16. $x^2 - 7xy - 9y^2 = 9, x^2 + 5xy + 11y^2 = 5.$
17. $4x^2 - 3xy = 10, y^2 - xy = 6.$
18. $x^2 + 3xy = 40, 4y^2 + xy = 9.$
19. $x^2 + xy + y^2 = 7, 6x^2 - 3xy + y^2 = 6.$
20. $2x^2 - 2xy + 3y^2 = 18, 3x^2 - 2y^2 = 19.$
21. $x + y + 1 = 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}.$
22. $x + y + 3 = 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{6} = 0.$
23. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{5}{3}, \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 0.$
24. $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 5, \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{5}{6}.$
25. $(x+1)(y+1) = 10, xy = 3.$
26. $(x+3)(y+1) = 4, xy + 1 = 0.$

160. 雜例 以下所舉諸例。乃各就其方程式。示以相當之解法。

[例 1.] 解次之兩方程式

$$x - y = 2 \dots\dots\dots$$

$$x^2 - y^2 = 386 \dots\dots\dots$$

由 (1) $x=y+2$.

以此代入(2)式,則

$$(y+2)^2 - y^2 = 386,$$

即 $6y^2 + 12y + 8 - 386 = 0$.

$$\therefore y^2 + 2y - 63 = 0.$$

由是 $y=7$, 又 $y=-9$.

若 $y=7$ 則 $x=y+2=9$.

若 $y=-9$ 則 $x=y+2=-7$.

故 $x=9, y=7$ 或 $x=-7, y=-9$.

別法 以(1)式之兩邊除(2)式相當之兩邊,則

$$x^2 + xy + y^2 = 193 \dots \dots \dots (3).$$

作(1)式之平方,則 $x^2 - 2xy + y^2 = 4$

由減法得 $3xy = 189,$

$$\therefore xy = 63 \dots \dots \dots (4).$$

(3)(4)兩式相加,得 $(x+y)^2 - 16 = 0,$

$$\therefore x+y = \pm 16 \dots \dots \dots (5).$$

故由(1)式與(5)式,易求得 x, y .

[例2.] 解 $x-3y=2, x^2-9y^2=8$

以第一方程式除第二方程式相當之兩邊,則

$$x+3y=4,$$

而由 $x+3y=4$ 及 $x-3y=2$

得 $x=3, y=\frac{1}{3}$.

〔例 3.〕 解次之兩方程式

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7 \dots\dots\dots(1).$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 25 \dots\dots\dots(2).$$

依 89 款 (例 3) 視 $\frac{1}{x}$ 與 $\frac{1}{y}$ 爲未知量。

作 (1) 之兩邊之平方。

$$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = 49 \dots\dots\dots(3).$$

由 (2) 與 (3) $\frac{2}{xy} = 49 - 25 = 24 \dots\dots\dots(4).$

由 (2) 與 (4) $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = 25 - 24 = 1,$

即 $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 = 1,$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \pm 1 \dots\dots\dots(5).$$

由 (1) 與 (5) 求 $\frac{1}{x}$ 與 $\frac{1}{y}$ 之數值。

〔例 4.〕 解次之二方程式

$$x^2 - xy + y^2 = 61 \dots\dots\dots(1).$$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 1281 \dots\dots\dots (2).$$

以(1)之兩邊除(2)之相當邊。則

$$x^2 + xy + y^2 = 21 \dots\dots\dots (3).$$

依(1)與(3), 由減法得

$$2xy = -40,$$

即 $xy = -20 \dots\dots\dots (4).$

由(1)與(4) $x^3 - 2xy + y^3 = 81,$

$$\therefore x - y = 9 \dots\dots\dots (5).$$

或 $x - y = -9 \dots\dots\dots (6).$

由(3)與(4) $x^2 + 2xy + y^2 = 1,$

$$\therefore x + y = 1 \dots\dots\dots (7).$$

又或 $x + y = -1 \dots\dots\dots (8).$

以方程式(5)與(6)中之一式。與方程式(7)與(8)中之一式合為一組。則得四種數值。如次

$$x = \pm 5, y = \mp 4, x = \pm 4, y = \mp 5.$$

〔例5〕 解次之兩方程式

$$x^2 - 2xy = 3y \dots\dots\dots (1).$$

$$2x^2 - y^2 = 9y \dots\dots\dots (2).$$

以3乘(1)式之兩邊。即

$$3x^2 - 6xy = 9y \dots\dots\dots (3).$$

由是 $2x^2 - 9y^2 = 3x^2 - 6xy,$

$$\therefore x^2 - 6xy + 9y^2 = 0,$$

即 $(x - 3y)^2 = 0.$

$$\therefore x = 3y$$

以此代入(2)式, 則

$$2(3y)^2 - 9y^2 = 9y$$

即 $9y^2 - 9y = 0,$

$$\therefore y(y - 1) = 0,$$

由是 $y = 0,$ 又 $y = 1.$

若 $y = 0$ 則 $x = 3y = 0,$

若 $y = 1$ 則 $x = 3y = 3.$

故 $x = 0, y = 0,$

或 $x = 3, y = 1.$

[例 6.] 解 $x - y = 2, x^5 - y^5 = 242$

設 $x = z + 1$ 即 $y = z - 1.$

由是

$$\begin{aligned} x^5 - y^5 &= (z+1)^5 - (z-1)^5 = z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 \\ &\quad + 5z + 1 - (z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z - 1) \\ &= 10z^4 + 20z^2 + 2. \end{aligned}$$

由是 $10z^4 + 20z^2 + 2 = 242,$

$$\therefore z^4 + 2z^2 = 24,$$

$$\therefore (z^2 - 4)(z^2 + 6) = 0.$$

由是 $z = \pm 2$, 或 $z = \pm\sqrt{-6}$.

若 $z = \pm 2$, 則 $x = 3$ 或 $x = -1$, 而 $y = 1$ 或 $y = -3$.

若 $z = \pm\sqrt{-6}$, 則 $x - 1 \pm\sqrt{-6}$, $y = -1 \pm\sqrt{-6}$.

〔例 7.〕 解次之三方程式

$$xy + xz = 27 \dots\dots\dots (1).$$

$$yz + yx = 32 \dots\dots\dots (2).$$

$$zx + zy = 35 \dots\dots\dots (3).$$

(1)式與(2)式相加, 得 $2xy + xz + yz = 59 \dots\dots (4).$

(3)式與(4)式相減, 得 $2xy = 24,$

$$\therefore xy = 12 \dots\dots\dots (5).$$

由是, 由(1)式 $xz = 15 \dots\dots\dots (6).$

而由(2)式 $yz = 20 \dots\dots\dots (7).$

(5)式與(6)式相乘, 得 $x^2yz = 180 \dots\dots\dots (8).$

(7)式與(8)式相除, 得 $x^2 = 180 \div 20 = 9,$

$$\therefore x = \pm 3.$$

由是, 由(5)式 $y = 12 \div (\pm 3) = \pm 4.$

而由(6)式 $z = 15 \div (\pm 3) = \pm 5.$

故 $x = \pm 3, y = \pm 4, z = \pm 5.$

但此結果。其所取之符號。宜各相當。即悉取正號。
或悉取負號。

別法 (1), (2), (3) 相加

$$2xy + 2xz + 2yz = 94.$$

$$xy + xz + yz = 47 \dots \dots \dots (4).$$

依(4)與(3), 由減法, 得 $xy = 12 \dots \dots \dots (5).$

依(4)與(2), 由減法, 得 $xz = 15 \dots \dots \dots (6).$

依(4)與(1), 由減法, 得 $yz = 20 \dots \dots \dots (7).$

作(5), (6), (7), 之連乘積。則

$$x^2y^2z^2 = 12 \times 15 \times 20 = 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2.$$

由是 $xyz = \pm 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots \dots \dots (8).$

以(7).(6).(5), 各式除(8)式。依次得。

$$x = \pm 3, y = \pm 4, z = \pm 5.$$

問題 LI.

1. $x - y = 3, x^2 - y^2 = 279.$

2. $x - y = 2, x^2 - y^2 = 98.$

3. $x + y = 7, x^2 + y^2 = 91.$

4. $x + y = 1, x^2 + y^2 = 61.$

5. $x^2 + xy + y^2 = 13, x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91.$

6. $x^2 - xy + y^2 = 9, x^4 + x^2y^2 + y^4 = 243.$
7. $xy(x+y) = 240, x^3 + y^3 = 280.$
8. $xy(x-y) = 12, x^3 - y^3 = 63.$
9. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 20.$
10. $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1, \frac{2}{x^2} + \frac{3}{xy} + \frac{1}{y^2} = 5.$
11. $\frac{3}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 1, \frac{5}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{2}{y^2} = 3.$
12. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4y^2} = 3, \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{4y^2} = 9.$
13. $x+y=1, x^2y^2+13xy+12=0.$
14. $x+y=5, 4xy=12-x^2y^2.$
15. $x^2-xy+y=-6, y^2-xy-x=12.$
16. $x^2+xy-y=9, y^2+xy-x=-3.$
17. $x+\frac{1}{y}=3, y+\frac{1}{x}=\frac{4}{3}.$
18. $x+\frac{1}{y}=\frac{18}{7}, y+\frac{1}{x}=\frac{7}{4}.$
19. $2x^2-xy+y=2y, 2c^2+4xy=51.$
20. $x^2+1=9y, x^2+x=6y.$
21. $2x^2+5y^2=115, 3c^3+7y^3=186.$
22. $x^2y+xy^2=180, x^2y^2=400.$

$$23. \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \quad (x^2 - xy + y^2)(x - y)^2 = 28.$$

$$24. \quad x^2 + 3xy + y^2 + 4(x + y) = 13,$$

$$3x^2 - xy + 3y^2 + 2(x + y) = 9.$$

$$25. \quad xy + \frac{x}{y} = \frac{5}{3}, \quad xy + \frac{y}{x} = \frac{5}{6}.$$

$$26. \quad \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} = \frac{20}{3}, \quad xy + \frac{x}{y} = \frac{5}{3}.$$

$$27. \quad ax = by, \quad (x - a)(y - b) = ab.$$

$$28. \quad a(x - a) = b(y - b), \quad xy = ax + by.$$

$$29. \quad x - \frac{b^2}{y} = \frac{a^2}{x} - y = a - b.$$

$$30. \quad yz = 4 \quad zx = 9, \quad xy = 16.$$

$$31. \quad x^2yz = 6, \quad y^2zx = 12, \quad z^2xy = 18.$$

$$32. \quad x(x + y + z) = 8, \quad y(x + y + z) = 12, \quad z(x + y + z) = 5.$$

$$33. \quad x(y + z) = 6, \quad y(z + x) = 12, \quad z(x + y) = 10.$$

$$34. \quad (x + y)(x + z) = 2, \quad (y + z)(y + x) = 3, \quad (z + x)(z + y) = 6.$$



第十七編

二次方程式之問題

161. 問題 本編所舉之問題，俱為二次方程式之問題。(即已知量與未知量之關係，在代數上，宜用二次方程式顯之者)

解問題時，已知量與未知量之代數的關係，(即方程式中之關係)其不合於問題之本意者，往往有之。

抑考其理，則方程式之根單為數。其數苟合於此方程式，則無論為正，為負，為整數，為分數，皆無差謬。然在問題中，其數實各有制限，而其制限或明言，或暗含不能一定，要非演式布算時所能顯。如求人數之問題，此數自不得不為整數，然在方程式中，要不能顯其制限也。

由是，解問題時，宜依(初)[次][終]三次序。

[初] 將已知量與未知量之關係，用代數記號顯之，立為方程式。

[次] 解所立之方程式，而求其未知量之數值。

〔終〕 檢定所得之數值，取其合於命題之本意者。去其不合於命題之本意者。

今舉二次方程式諸問題之例。如次。

〔例1.〕 今有兒童一羣。不知其數。但云其數之11倍。較其數之平方之2倍多5。問兒童之數幾何。

令兒童之數爲 x 。則 $11x = 2x^2 + 5$

$$\therefore 2x^2 - 11x + 5 = 0$$

即 $(2x-1)(x-5) = 0$

由是 $x = 5$ 或 $x = \frac{1}{2}$

即兒童之數爲5。而 $\frac{1}{2}$ 之數值爲不合理。

〔例2.〕 有棒長若干尺。但知其長之11倍。較其長之平方之2倍多5。問棒長幾尺。

本題之數。可由前方程式求得。然在本例決不能棄其分數之結果。因棒長可爲五尺。亦可爲一尺之半(即五寸)也。

〔例3.〕 有兩位之數。其數等於兩數字之積之2倍。而十位之數字。較其單位之數字少3。問此數如何。

設十位之數字爲 x 。則單位之數字爲 $x+3$ 。故

此數等於 $10x + (x+3)$ 。由是。依題意

$$10x + (x+3) = 2x(x+3)$$

$$\therefore 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

即 $(x-3)(2x+1) = 0$

由是 $x=3$ 或 $x=-\frac{1}{2}$

然數字必為正整數。由是其第二之數值（即 $-\frac{1}{2}$ ）

不合於理。

故數字為 3 與 6。而所求之數為 36。

〔例 4.〕 某人有銀若干圓。其圓數之平方。較其圓數之三十倍多 1000。問所有之圓數幾何。

設所有之圓數為 x 。則由題意

$$x^2 = 30x + 1000$$

$$\therefore x^2 - 30x - 1000 = 0$$

即 $(x-50)(x+20) = 0$

由是 $x=50$ 或 $x=-20$

負數為負債之意。故此二數值。均為合理。

由是某人所有為五十元。或負債二十元

〔例 5.〕 某數與其平方根之和為 42。問某數幾何。

設此數為 x 。則

$$x + \sqrt{x} = 42$$

即 $\sqrt{x} = 42 - x$

兩邊各自乘，且移項，則

$$x^2 - 85x + 1764 = 0$$

此根為 36 與 49

然數之平方根，宜視為算術上之平方根。故 49，不合於問題之本意。

〔例 6.〕 有父子二人。其年數之和為 100，而其年數之積之十分之一，較父之年多 180。問父子之年各幾何。

設父之年數為 x ，則子之年數為 $100 - x$

由是，按題意

$$\frac{1}{10}x(100 - x) = x + 180$$

$$\therefore x^2 - 90x + 1800 = 0$$

由是 $x = 60$ 或 $x = 30$

其第二之數值，雖為正整數。然不合理。何則。以子年較父年多故也。

由是父為 60 歲。子為 40 歲。

問 題 LII.

1. 有二數。其一數爲他數之三倍。其積爲 243。問二數如何。
2. 二數之和爲 18，其積爲 77。問二數如何。
3. 二數之差爲 20，其平方之和爲 650。問二數如何。
4. 分 25 爲二部分。但其積須爲 156。
5. 分 27 爲二部分。但其積須爲 3208。
6. 由 36 減某數所得之餘數。與由 30 減某數所得之餘數。其積爲 891。問某數如何。
7. 矩形之地。長較闊多 10 丈。其面積爲 1131 丈。問其長闊各幾何。
8. 某數及反數之和。與某數及反數之差。其積爲 $8\frac{3}{4}$ 。問某數幾何。
9. 某人買球。以金 20 圓所買之球數。等於買球 125 個之圓數。問金 20 圓所買之球數幾何。
10. 某人買卵。12 仙所買之卵數。等於買卵 27 個之仙數。問 12 仙所買之卵數幾何。
11. 有二桶。一容水若干升。一容酒若干升。其升數酒爲水之半。今由各桶六升。以汲出之水入諸盛酒之桶。汲出之酒入諸盛水之桶。則酒與水之比例相

等。問酒與水之升數幾何。

12. 會費 80 圓。須若干人均派。今因四人不出會費。故其餘之人。每人須多派一圓。問會員總數幾何。

13. 某人以銀二百四十圓。買某物若干件。除兩件不賣外。其餘賣出時每件獲利二圓。共得銀二百五十二圓。問所買之物若干件。

14. 某人以 1875 圓。買鐵路股票若干股。其中除 15 股不賣外。其餘賣出時每股獲利 4 圓。共得洋 1740 圓。問原買股票若干紙。

15. 今有船逆流而上。撐至某處。需 $8\frac{4}{7}$ 分。而依水力流至原處之鐘數。較撐於靜水中。行相同距離之鐘數多 7 分。問順流而下。撐至原處。需時幾何。

16. 今有船。在靜水中。每點鐘行八里。今有某河八里間。一上一下共費二點鐘四十分。求水流之速度。

17. 有火車甲乙二列。甲列比乙列。每點鐘之速度多 15 英里。如行 36 英里。則甲列比乙列先 12 分鐘到。問甲乙兩列之速度各幾何。

18. 設有人赴七里遠之某處。既行一里後。其每時之定速增一里。可比預定之鐘數快半點鐘到。問所費之時幾何。

19. 甲,乙二工,共做一工程。須若干日完成。若令此二工各做此工程之半。則甲比前早一日完成。乙比前遲二日完成。問甲乙共做此工程須幾日完成。

20. 像片每「打」之原價若干。今每「打」貴3角。故洋2圓1角所買之枚數。比前少7枚。問原價幾何。

但一「打」爲十二

21. 雞卵每「打」之價若干。今以1角2分所買之個數比前多兩個。則每「打」減洋1分。問雞卵每「打」之價幾何。

22. 某婦人以洋3角6分買雞卵。不知其個數。但云若所買之雞卵少一「打」。則每「打」之價貴洋3分。問此婦人所買之雞卵幾何。

23. 有沙糖甲,乙兩種。其每14斤之價。甲種比乙種貴2角1分。而以洋2.40圓所買得各種之斤之數。甲種比乙種少8斤。問各種14斤之價幾何。

24. 十二個蘋果之價之分數。比洋12分所買蘋果個數之二倍多2。問洋1.08圓。能買蘋果若干個。

25. 有二分數。其和爲 $\frac{5}{6}$ 。其差與其積等。問二分數如何。

26. 有甲,乙兩府。相距25里。今有二人。同時由此

兩府相向而行。其一人每行一里。較他一人快 18 分。而二人行後。經五點鐘始相會。問每點鐘之速度各幾何。

28. 以兵一聯隊。作為矩形之陣。其長為幅之二倍。若由此兵數中。減去 206 名。則能作為厚三列之空中方陣。且其外面一列之兵數。與原矩形陣之長之兵數等。問一聯隊之兵數幾何。

29. 有矩形及正方形。其面積相等。且正方形之一邊。較矩形之一邊短六寸。若矩形之闊增一寸。其長減二寸。則與原面積相等。問矩形之長及幅各幾何。

30. 矩形之一對角線與長邊。合為短邊之五倍。而長邊較短邊長 35 尺。問矩形之面積幾何。

31. 有一矩形。若由其長邊減三尺。其短邊減一尺。則其面積為原面積之半。又其長邊增九尺。其短邊減二尺。則其面積與原面積等。問長邊、短邊各幾何。

32. 有 A, B 兩列車。由 P 驛向 Q 驛發。同時又有 C, D 兩列車。由 Q 驛向 P 驛發。A 列在距 P 驛 120 英里之處與 C 列會。又在距 P 驛 140 英里之處與 D 列會。B 列在距 Q 驛 126 英里之處與 C 列會。又在

P, Q 兩驛之中央與 D 列會。然則 P, Q 兩驛間之距離幾何。

雜 題 IV.

(A.) 1. $12x - [3y - 9y - \{2x - 3y - (x + 5y)\}]$ 爲簡式。

2. 以 $a - 5b + 2c$ 乘

$$a^2 + 25b^2 + 4c^2 + 5ab - 2ac + 10bc$$

3. 以 $x - a + 2b$ 除

$$x^3 + (4ab - b^2)x - (a - 2b)(a^2 + 3b^2)$$

4. 求以下各式之因數

$$(1) (2x + y - z)^2 - (x + 2y + 4z)^2,$$

$$(2) x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1,$$

$$(3) x^2y^2z^2 - x^2z - y^2z + 1.$$

5. 化次之二式爲簡式

$$(1) \frac{x^3 + 4x^2 - 8x + 24}{8 - 8x + x^2 - x^4},$$

$$(2) \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} - 2 \frac{x-2}{(x-3)(x-1)} + \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}.$$

6. 解次之方程式

$$(1) \frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} = \frac{3}{x-c},$$

$$(2) 4x^2 - 25x - 21 = 0,$$

$$(3) x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}.$$

7. 證 $x^2 - 5x + 7$ 決不小於 $\frac{1}{2}$.

8. 依次兩數之立方，其差為 919。問各數幾何。

[B.] 1. 化 $(x+3)^3 - 3(x+2)^3 + 3(x+1)^3 - x^3$ 為簡式

$$2. \text{證 } (x-a)^2 + (y-b)^2 + (a^2 + b^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1) \\ = (xa + by - 1)^2 + (bx - ay)^2.$$

3. 以 $x^2 - 2ax + a^2$ 除 $x^3 - 2a^2x^2 + a^3$.

4. 求 $8x^3 + 27$, $16x^4 + 36x^2 + 81$, $6x^2 - 5x - 6$ 之最低公倍數。

5. 化次之二式為簡式。

$$(1) \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{x^2+1},$$

$$(2) \frac{\{(a+b)(a+b+c)+c^2\}\{(a+c)^2-c^2\}}{\{(a+b)^2-c^2\}(a+b+c)}.$$

6. 解次之各方程式。

$$(1) \quad (6-x)(1+2x) + 3x(x+5) \\ = (x+1)^2 - x,$$

$$(2) \quad 5x^2 + 7x = 160,$$

$$(3) \quad x^2 + xy = 10, \quad y^2 - xy = 3.$$

7. 方程式 $x^2 - 5x + 2 = 0$, 其兩根之平方之和爲 21 求證。

8. 某音樂會。設通常位與特別位兩種。其所賣之票。各得洋 60 圓。而特別票之價較通常票之價貴 1 角 5 分。通常票之額較特別票之額。多 360 枚。然則所賣之票數統計幾何。

(C.) 1. 化 $12a - 3\{b - 2(a - 3b) - 2a\}$ 爲簡式

2. 以 $a^3 - 2a^2b - ab^2 - 2b^3$ 乘

$$a^3 + 2a^2b - ab^2 + 2b^3$$

3. 以 $2y^2 - xy - 4x^2$ 除

$$24x^4 - 10x^3y - 8x^2y^2 + 10xy^3 - 4y^4$$

4. 求 $9x^2 + 9x + 2$ 及 $4(ab - cd)^2$

$$- (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \text{ 之因數}$$

5. 化 $\frac{x + \frac{y-x}{1+xy}}{1 - \frac{x(y-x)}{1+xy}}$ 爲簡式

$$\text{又證 } \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} + \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{abc} = 0.$$

6. 解次之各方程式。

$$(1) \frac{x-1}{3} - \frac{x-3}{5} = 7 + \frac{x+2}{6}.$$

$$(2) x+y=2a, x^2+y^2=2a^2.$$

7. 求 $x^2+6x+12$ 之最小數值。及 $6x-x^2-4$ 之最大數值。

8. 甲、乙二人，共有貨幣十八個，然僅為一角銀貨與一仙銅貨兩種，而甲所有之銀貨數，三倍於銅貨數，乙所有之銀貨數與所有之銅貨數相等，又甲比乙多 7 仙，然則二人之所有各幾何。

$$\begin{aligned} \text{[D.] 1. 證 } (b+c)^2 - a^2 + (c+a)^2 - b^2 + (a+b)^2 - c^2 \\ = (a+b+c)^2. \end{aligned}$$

2. 將 $(1+x)^4 + 2(1-x+x^2)$ 依 x 之遞昇方乘整列。

3. 順次之兩數，其兩平方之差，恆較小數之二倍多 1。

$$4. \text{ 設 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0, \text{ 求證}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2.$$

5. 求以下三式之最低公倍數

$$x^2 - 5x - 14, x^2 - 4x - 21, x^3 - 3x^2 - 25x - 21.$$

又此三式同時爲零。 x 之數值如何。

6. 解以下各方程式

$$(1) \quad \frac{4}{x} - \frac{3}{y} + 5 = \frac{6}{x} + \frac{3}{y} = 10.$$

$$(2) \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{x - a - b}.$$

$$(3) \quad x + y = 3, 3x^2 - 11y^2 = 1.$$

7. 設 $ax^2 + bx + c = 0$ 之二根爲 x_1, x_2

$$\text{求證 } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{b^2 - 2ac}{ac}.$$

8. 桶盛火酒 6 斗。汲出若干升。以水入之。使補其虛處。又汲出較前所汲出之量多 1 斗 4 升。又以水入之。使補其虛處。是時桶中所載火酒與水之量相等。然則初次所汲出之升數如何。

(E.) 1. $x = 4\frac{1}{2}$ 永次式之數值。

$$\frac{x}{2} - \left\{ \frac{2x-3}{3} - \frac{3x-1}{4} \right\} \div \frac{x-1}{2}$$

2. 證次之二式

$$(a+b)^4 - (a^2 - b^2)^2 = 4ab(a+b)^2,$$

$$2(a-b)(a-c) + 2(b-c)(b-a) + 2(c-a)(c-b) \\ = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2.$$

3. 以 $a+b$ 除 $(a+2b-3c+d)^2$
 $-(2a+b+3c-d)^2.$

4. 求 $6x^2-5ax-6a^2$ 及 $4x^2-2ax^2-9a^2$ 之
L.C.M.

5. 化 $\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y}\right) \frac{1}{y^2-x^2} + \frac{x}{xy-y^2} - \frac{y}{x^2+xy}$

爲簡式

6. 解次之各方程式

$$(1) \frac{x+a}{x-b} + \frac{x+b}{x-a} = 2.$$

$$(2) (x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) \\ + (x-3)(x-1) = 11.$$

$$(3) x + \frac{1}{y} = \frac{21}{10}, y + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}.$$

7. $\frac{x}{a} + \frac{a}{x}$ 與 $\frac{c}{a} + \frac{a}{c}$ 相等。問 x 之值幾何。

8. 有人乘三輪車行 180 里。其速度每點鐘相等。若每時之速度少三里。須多費三點鐘。問每時之速度幾何。

(F.) 1. 加以下四式

$$3a^3 - 4a^2b + 2ab^2, 3a^2b - 4ab^2 + 2b^3, 3ab^2 - 4b^3 + 3a^3,$$

$$3b^3 - 4a^3 + 2a^2b.$$

2. 證 $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$
 $= (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2.$

3. 以 $x^2 + 3x + 2$ 除 $2 + 11x + 11x^2 + x^3 - x^4$.

4. 求 $x^3 - x^2 - 2x + 2$ 與 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$

之最高公因數。

又問使兩式爲零。 x 之數值幾何。

5. 化次之二式爲簡式

$$(1) \frac{2}{x(x-2)} + \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{3}{x(3-x)}.$$

$$(2) \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}}.$$

6. 解次之各方程式

$$(1) \frac{x+3}{5} - \frac{6-x}{10} = x - \frac{7}{10}.$$

$$(2) \frac{x+y}{a+b} + \frac{x-y}{a-b} = 2, ax+by = a^2+b^2.$$

$$(3) \frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = 2 \frac{x+3}{x-3}.$$

7. 求方程式 $x^2 - 7x + 9 = 0$ 兩根之平方差。

8. 有某數，其數較其平方根多 156 問其數如何。

方程式之雜題

$$1. (x-1)(x-4) + (x-3)(x-5) = 2(x-3)^2.$$

$$2. \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{3}(x-4) + \frac{1}{4}(x-5) = 0$$

$$3. \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-5} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4}.$$

$$4. 15x + 17y = 79, 17x + 15y = 81.$$

5. 某人騎行至某地，每點鐘之速為 8 里，而歸時因繞道至他處，其路較往路遠 3 里，其每時之速為 9 里，而歸路所費之時，較往路所費之時多 $7\frac{1}{2}$ 分，然則往路及歸路之長各幾里。

$$6. \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{3}(x-5) + \frac{1}{4}(x-1) = 0.$$

$$7. 3(x+1)(x-3) + (x+7)(3x-13)$$

$$= 3(2x-5)(x-1)$$

$$8. \frac{2x+9}{x+2} + \frac{3x-2}{x+3} = \frac{5x+14}{x+4}.$$

$$9. \frac{x}{7} + \frac{y}{8} = 82, \frac{x}{8} + \frac{y}{7} = 83.$$

10. 茶 1 斤 砂糖 5 斤，其價合計 4 角 5 分，若茶價

貴二成。砂糖價貴二成五分。則前之斤數。其價總計 5 角 5 分。然則茶價幾何。

$$11. \frac{1}{3}(6x+3) + \frac{1}{11}(7x+6) + \frac{1}{18}(9x+2) = 2x+1.$$

$$12. \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$$

$$13. \frac{x+3}{x+1} + \frac{x-6}{x-4} = \frac{x+4}{x+2} + \frac{x-5}{x-3}.$$

$$14. x+y=2, (a+b)x+(b-a)y=2b.$$

15. 某人養雞一羣。五月中所得之卵。比四月中所得之卵多 100 個。而五月中每日平均所得之卵數。比四月每日平均所得之卵數多 3。然則某人五月中得卵幾何(西曆四月為 30 日。五月為 31 日)。

$$16. 3x-3[4x-2(2x-5)] = 9-2[3x-5(x-5)].$$

$$17. \frac{5}{x} - \frac{6}{y} = 2, \frac{4}{x} + \frac{12}{y} = 3.$$

$$18. 15x^2+34x+15=0.$$

$$19. \frac{x+2}{x-4} - \frac{x-3}{x-5} = 1.$$

20. 父子三人。父年為次子之三倍。而七年之後。父年為長子之二倍。又長子比次子長五歲。然則父子三人現在之年各幾何。

$$21. \frac{1}{2}(x+1)(x+3) = \frac{1}{3}(x+5)(x+2) + \frac{1}{6}(x-1)(x-4).$$

$$22. (b+c)(x-a) - (c+a)(x-b) = (a+b)(x-c).$$

$$23. 17x - 19y = 4, 27x - 29y = 24.$$

$$24. \frac{2x-3}{x-3} + \frac{3x+8}{2x+1} = 5.$$

25. 有客二人同搭火車，共帶行李 360 斤。依鐵路規則，每人許行李若干斤，不取運費。若踰此限，則每斤須取運費若干。今此二人，共收運費 4 角。若一人攜帶，則須繳運費 6 角 5 分。問不取運費者為若干斤。

$$26. \frac{3x-1}{5} + \frac{5x+1}{6} = \frac{9x+1}{8} - \frac{1-x}{3}.$$

$$27. \frac{x+y}{3} = 2x-y-2, \frac{2y-x}{2} = y-x+5.$$

$$28. (a+b)x + (a-b)y = a^2 - b^2,$$

$$(a-b)x + (a+b)y = a^2 + b^2.$$

$$29. \frac{3}{3-x} + \frac{8}{8-x} = 3.$$

30. 某人有子五人，其年等於諸子之年之和。而五年之前，等於諸子之年之和之二倍。問某人現年幾何。

$$31. \frac{2x}{x+1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{3x+19}{x+5}.$$

$$32. \frac{1}{2}(x-2) = \frac{1}{4}(1-y), 36x+3y+4=0.$$

$$33. \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{1-x} = \frac{7}{8} - \frac{1}{x+1}.$$

$$34. \sqrt{x} + \sqrt{5x+1} = 2.$$

35. 兩人乘腳踏車。同時由 A, B 兩地起行。一人由 B 地至 A 地。他一人依同路由 A 地至 B 地。兩人在途中相會後。一人經 3 點鐘。一人經 1 點鐘 20 分。各達其地。問起行後經幾何時相會。

$$36. \frac{5x+8}{5x-1} + \frac{9}{1-25x^2} = \frac{1+10x}{1+5x}.$$

$$37. 3y - \frac{2}{x} = 5y - \frac{3}{x} + 9 = 4y - \frac{7}{x}.$$

$$38. \frac{4x-7}{3x-4} + \frac{2x+1}{x-7} = 18\frac{1}{4}.$$

$$39. \sqrt{4x+4} - \sqrt{x+8} = \sqrt{x-4}$$

40. 有金若干圓。分給 A, B, C 三人。A 之所得。等於 B, C 二人所得之和之九分之一。B 之所得。等於 C, A 二人所得之和之三分之一。C 之所得。比 A, B 二人所得之和多 6 圓。問三人之所得各幾何。

$$41. \frac{x}{4} \left(3 - \frac{8}{x} \right) - \left(7 - \frac{3x}{4} \right) = 5 - \frac{15}{64}x.$$

$$42. \frac{x+3}{x-3} - \frac{x-2}{x-4} = 1$$

$$43. x+2=\sqrt{\{1+x\sqrt{8-x}\}}.$$

$$44. 3x-2y=12, 9x^2-4y^2=576.$$

45. 某人以所有金買股票。得息 $2\frac{1}{2}$ 分。若每低價 $7\frac{1}{2}$ 圓。則息比前多 $\frac{1}{2}$ 分。問每股之實價幾何。但每股之額面為 100 圓。

$$46. \frac{4x^3+4x^2+8x+1}{2x^2+2x+3} = \frac{2x^2+2x+1}{x+1}.$$

$$47. \frac{1}{10}(5x+6) - \frac{1}{21}(11y-5) = 11,$$

$$\frac{1}{25}(55y-12) = \frac{7x}{5} - 37.$$

$$48. \frac{12}{x} + \frac{10}{x-1} = 6\frac{1}{2}.$$

$$49. \sqrt{x} + \sqrt{x+4} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

50. 某鐵路。有急行車一隊由甲地向乙地發。又同時有緩行車一隊由乙地向甲地發。而此兩車隊。在途中相遇後。一經 45 分。一經 1 點鐘 20 分。各達其地。求各車隊通過兩地間之時。

$$51. \frac{x-\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\right) = \frac{23}{10(x-1)}.$$

$$52. 5x+2y-1=3x-y+14=x+19y+6.$$

$$53. \sqrt{(x^2-a^2)} = 2 - \frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

$$54. \quad 3x^2 - 2xy + 4y^2 = 36, \quad 4x^2 - y^2 = 7.$$

55. 有依次連續之三整數。其最大數與最小數兩立方之和。較中數之立方之二倍多42。問三數各幾何。

$$56. \quad \frac{x-1}{3} - \frac{x-12}{5} = \frac{2x-1}{3} + \frac{9-x}{21}.$$

$$57. \quad \frac{x-3}{2} + \frac{x-2}{3} = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2}.$$

$$58. \quad ax - by = a^2 - b^2 - 2ab, \quad bx + ay = 2ab + a^2 - b^2.$$

$$59. \quad x^2 + xy + y^2 = 9, \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 = 243.$$

60. 某人買物品若干件。以五分之息賣其半。又以一成之息賣其三分之一。其餘每件賣洋2角7分。其全利益為1 $\frac{1}{3}$ 分。問每件之買價幾何。

$$61. \quad (a+b)(x+a-b) + (a-b)(x-a-b) + 2a(x-2c) = 0.$$

$$62. \quad \frac{3x-2}{2x-5} - \frac{2x-3}{3x-2} = \frac{2}{3}.$$

$$63. \quad 2x^2 - 3\sqrt{(x^2 + 2x + 14)} + 4x - 49 = 0.$$

$$64. \quad 2x^2 + 3xy = 8, \quad y^2 - 2xy = 20.$$

65. 某人以58圓買羊若干頭。其中失去五頭。以12圓賣其餘之四分之一。獲利益五分。問某人共買羊若干頭。

$$66. \quad \frac{1}{5x-1} - \frac{x+5}{1-25x^2} = \frac{3}{1+5x}$$

$$67. (a+b)x+by=ax+(a+b)y-a^2+b^2.$$

$$68. \sqrt{(x-a)}+\sqrt{(x-b)}=\frac{b}{\sqrt{(x-a)}}+\frac{a}{\sqrt{(x-b)}}.$$

$$69. x^2+y^2=xy+7, x^2-y^2=xy-1.$$

70. 某人以 12 圓買物品若干件除十件不賣外。其餘每件獲利 6 仙。共賣銀 12 圓。問所買之物品若干件。(但一圓爲 100 仙)

$$71. \frac{1}{3}(3x+1)-\frac{1}{4}(2x-3)=\frac{1}{10}(6x-1)-\frac{1}{6}(7x-3).$$

$$72. \frac{x}{c}-\frac{c}{x}=\frac{c}{a}-\frac{a}{c}.$$

$$73. \sqrt{(x+1)}+\sqrt{2x}=\sqrt{(6x+1)}.$$

$$74. x^2-xy+3y=11, y^2-xy-3x+1=0.$$

75. 某人有幣 160 個。其價合計 19 圓。其中有二角銀貨，一角銀貨，五仙白銅貨三種。若五仙白銅貨之數爲原數之二倍。二角銀貨之數爲原數之半。一角銀貨之數爲原數之三倍。則其價合計 29.80 圓。問三種貨幣之價各幾何。

$$76. \frac{3x+1}{5}-\frac{1-5x}{8}=\frac{x+1}{3}-\frac{2-9x}{7}$$

$$77. \frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{29}{10}$$

$$78. (x-a)(y-b) = ab, bx = ay.$$

$$79. x^2 = 2y + 24, y^2 = 2x + 24.$$

80. 有紙若干枚。其面積合計 1120 平方尺。以之糊室之四壁適足。但室縱比橫多 8 尺。若此室較前高四尺。則前之紙僅能糊二小壁。一大壁。問此室縱橫各若干尺。

$$81. \frac{x+4a+b}{x+a+b} + \frac{4x+a+2b}{x+a-b} = 5.$$

$$82. (a-x)^3 + (b-x)^3 = (a+b-2x)^3.$$

$$83. (x-5)^2 + (y-6)^2 = 2(xy-40), x=y+1.$$

$$84. 4xy = 96 - x^2y^2, x+y=6.$$

85 有一兩輪車行 78 丈時。小輪比大輪多轉 135 次。若兩輪之圓周各增一尺。則行 21 丈時。小輪比大輪多轉 27 次。問兩輪之周圍各若干尺。

$$86. \frac{2x-3}{2x-4} - \frac{2x-4}{2x-5} = \frac{2x-6}{2x-7} - \frac{2x-7}{2x-8}.$$

$$87. 2x(a-b-2x) + (a-1)(b-1) = 0.$$

$$88. \sqrt{6x+1} + \sqrt{2(1-x)} = \sqrt{7x+6}.$$

$$89. xy(x+y) = 30, z^3 + y^3 = -91.$$

90. 矩形之田。其面積 2420 方尺。其周圍 198 尺。問各邊之長幾何。

$$91. \frac{x+3}{2x+1} + \frac{3x+7}{2x-2} = \frac{2x+1}{x-2}.$$

$$92. x+2y+3z=4, x+3y+2=4z, x+2x+3=4y.$$

$$93. \sqrt[3]{(a-x)} + \sqrt[3]{(x-b)} = \sqrt[3]{(a-b)}.$$

$$94. (x-3)^2 + (y-3)^2 = 34, xy - 3(x+y) = 6.$$

95. 某鐵路。有車兩隊。同時由A,B兩地開行。一由A地至B地。一由B地至A地。而A,B兩地之距離為100英里。此兩車隊。在開行後一點鐘15分相會。且一車隊比他車隊快一點鐘20分到。問兩車隊之速度各幾何。

$$96. \frac{ax-by}{3} = \frac{(2a+b)x - (a+2b)y}{7} = a^2 - b^2.$$

$$97. 13x^2 + 12 = 80x.$$

$$98. (x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 4.$$

$$99. x^2(y+1) + y^2(x+1) = 109, xy = 12.$$

100. 有A,B二人。A於早間10點鐘由P地向Q地行。B於早間10點鐘24分。由Q地向P地行。此二人在距Q地6里處相會。B至P地留一點鐘。A至Q地留2點鐘54分。各就歸途。於晚間6點鐘54分。在P地與Q地之中央相會。問由P至Q之距離幾何。

第 十 八 編

方 乘 及 方 根

162. 累乘法及開方法 求量之方乘。謂之累乘法。又，求量之方根。謂之開方法。開方法為累乘法之還原。

本編專示累乘法及開方法之例。

163. 乘法之指數法則 設 m 及 n 為任意之正整數。則

依定義。

$$a^m = \underbrace{aaaa \cdots}_{\text{至 } m \text{ 因數止}}$$

$$a^n = \underbrace{aaaa \cdots}_{\text{至 } n \text{ 因數止}}$$

$$\begin{aligned} \therefore a^m \times a^n &= (\underbrace{aaaa \cdots}_{\text{至 } m \text{ 因數止}}) \\ &\quad \times (\underbrace{aaaa \cdots}_{\text{至 } n \text{ 因數止}}) \\ &= \underbrace{aaaa \cdots}_{\text{至 } m+n \text{ 因數止}} \\ &= a^{m+n} \quad (\text{據定義}) \end{aligned}$$

由是 m 及 n 為正整數，則

$$\underline{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

即同量之任意兩方乘。其積之指數。爲其因數兩指數之和。此結果謂之指數之法則。

依指數之法則得

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$$

無論因數若干。俱準此。

由是 $\underline{a^m \times a^n \times a^p \times \dots = a^{m+n+p+\dots}}$

即同量之任意諸方乘。其積之指數。爲其因數諸指數之和。

164. 除法之指數法則

$$a^m \div a^n = \frac{a \times a \times a \times a \times \dots \text{至 } m \text{ 因數止}}{a \times a \times a \times a \times \dots \text{至 } n \text{ 因數止}}$$

此式。若 m 較 n 大。則分母之 n 因數。與分子之 n 因數相消。而分子餘 $m-n$ 因數。

故 m 較 n 大。則

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

若 n 較 m 大。則分子之 m 因數與分母之 m 因數相消。而分母餘 $n-m$ 因數。

故 m 較 n 小。則 $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$

165. 自乘法之指數法則 設 m 及 n 爲

正整數。試求 $(a^m)^n$

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \dots \text{至 } n \text{ 因數止。}$$

$$= a^{m+m+m+\dots \text{至 } n \text{ 項。}}$$

$$= a^{mn}$$

由是 $(a^m)^n = a^{mn}$

即將某方乘之量作新方乘。當以新指數乘原指數爲其指數。

166. 因數之方乘 求 $(ab)^m$

據定義得 $(ab)^m = ab \times ab \times ab \times \dots \text{至 } m \text{ 因數。}$

$$= (aaa \dots \text{至 } m \text{ 因數}) \times (bbb \dots \text{至 } m \text{ 因數})$$

[39款]

$$= a^m \times b^m.$$

依定義

由是 $(ab)^m = a^m b^m.$

同樣 $(abc)^m = abc \times abc \times abc \times \dots \text{至 } m \text{ 因數。}$

$$= (aaa \dots \text{至 } m \text{ 因數}) \times (bbb \dots \text{至 } m \text{ 因數})$$

$$\times (ccc \dots \text{至 } m \text{ 因數})$$

$$= a^m \times b^m \times c^m$$

由是 $(abc)^m = a^m b^m c^m.$

凡作 m 方乘之式。無論其因數若干。皆準此。

即積之 m 方乘爲其因數諸 m 方乘之積。

167. 單項式之方乘 單項式最普通之

形爲 $a^x b^y c^z \dots\dots\dots$

今求 $(a^x b^y c^z \dots\dots\dots)^m$ 則

$$(a^x b^y c^z \dots\dots\dots)^m = (a^x)^m (b^y)^m (c^z)^m \dots\dots [166 \text{ 款}]$$

$$= a^{xm} b^{ym} c^{zm} \dots\dots\dots [165 \text{ 款}]$$

即任意單項式之方乘。惟將式中諸因數之指數。

各以新指數乘之。

168. 分數之方乘 次所示者。尤爲緊要

之例。

求 $\left(\frac{a}{b}\right)^m$

據定義 $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \dots\dots\dots$ 至 m 因數。

$$= \frac{a \times a \times a \dots\dots\dots \text{至 } m \text{ 因數}}{b \times b \times b \dots\dots\dots \text{至 } m \text{ 因數}} [134 \text{ 款}]$$

$$= \frac{a^m}{b^m}$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

169. 負數量之方乘 正量之各方乘皆爲正。負量之各方乘。遞爲正負。

此理依符號之法則。易知其然。

$$\text{因 } (-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2$$

$$(-a)^3 = (-a)^2(-a) = (+a^2)(-a) = -a^3$$

$$(-a)^4 = (-a)^3(-a) = (-a^3)(-a) = +a^4$$

以下仿此

$$\text{故得 } (-a)^{2n} = +a^{2n} \text{ 及 } (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$$

由是無論正量、負量、其各偶數方乘之符號皆爲正。而各奇數方乘之符號皆與原量之符號同。

170. 二項式之方乘 在乘法中。已證得

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{及 } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

若再以 $a+b$ 乘之。得

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

又以 $a+b$ 乘之。則得 $(a+b)^5$ 。而依此累乘。自可得 $a+b$ 之任何方乘。然此方法。用於高次方乘(如 $(a+b)^{10}$)時。則演算甚煩。故後編別立二項式之定理一編。

明之。依此定理。則二項式之任何方乘。可直書出。故本款但言求平方及立方之法。

上之公式。無論 a 及 b 之值如何。恆合乎理。故任意二項式之平方及立方。可直書出。

$$\begin{aligned} \text{如} \quad (a^4 - b^4)^2 &= (a^4)^2 + 2(a^4)(-b^4) + (-b^4)^2 \\ &= a^8 - 2a^4b^4 + b^8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{及} \quad (5a^2 - 3b^2)^3 &= (-a^2)^3 + 3(5a^2)^2(-3b^2) + 3(5a^2)(-3b^2)^2 \\ &\quad + (-3b^2)^3 = 125a^6 - 225a^4b^2 + 135a^2b^4 - 27b^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad (a+b+c)^3 &= \{a+(b+c)\}^3 \\ &= a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3. \end{aligned}$$

171. 多項式之方乘 累乘法更有一要件。即求多項式之平方。然已述於第56款。

問題 LIII.

書以下各式之值。

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1. $(a^5)^6$. | 2. $(a^6)^3$. |
| 3. $(-a^2)^5$. | 4. $(-a^3)^2$. |
| 5. $(-2a^5)^4$. | 6. $(-3a^4)^5$. |
| 7. $(-ab^2)^4$. | 8. $(a^2b^4)^5$. |

- | | |
|--|--|
| 9. $(-ab^4)^7$. | 10. $(-3a^2b^5c)^2$. |
| 11. $(-ab^2c^3)^4$. | 12. $(-5a^2b^3c^4)^2$. |
| 13. $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^3$. | 14. $\left(-\frac{a^2}{bc^2}\right)^5$. |
| 15. $\left(-\frac{a^3}{b^4c^5}\right)^6$. | 16. $(2a^4+3b^7)^2$. |
| 17. $(a^5-2b^4)^2$. | 18. $(-ax^4+by^3)^2$. |
| 19. $(-a^2+2ab)^2$. | 20. $(a^2+b^2)^3$. |
| 21. $(a^3+b^3)^4$. | 22. $(2a^2-3b^2)^2$. |
| 23. $(3a^3-2b^2)^3$. | 24. $(a^2+b^3+c^2)^2$. |
| 25. $(a^3-2b^3+3c^3)^2$. | 26. $(a^2-4b^2-3c^2)^2$. |
| 27. $(x^2-3x-6)^2$. | 28. $(3x^2-x-5)^2$. |
| 29. $(2x^2+5x-1)^2$. | 30. $(3x^2-6x-6)^2$. |
| 31. $(1+x+x^2+x^3)^2$. | 32. $(x^3-x^2+x-1)^2$. |
| 33. $(x^3+x^2-2x-2)^2$. | 34. $(a+2b+3c+4d)^2$. |
| 35. $(2a-b+c-2d)^2$. | 36. $(x^2+x+1)^2$. |
| 37. $(x^2-x+2)^2$. | 38. $(3x^2-5x+1)^2$. |

172. 方根 由是舉開方法之例。

已知 a^2 之兩平方根為 $\pm a$ 。又 a^3 之立方根有三個。[見 155 款] 即一根為 a 。而他二根為虛數。

由是方乘與方根之間。有一極異之點。即用作 n 方乘之式。祇有一個。而求其方根。則必多於一個。是也。

173. 方根之法則 一代數式之 n 方乘。但 n 為任意之正整數) 等於某已知代數式。則此一代數式。謂之已知代數式之 n 方根。

於 166 款。已證得積之 m 方乘為其因數諸 m 方乘之積。依此理反推之。則積之 m 方根為其因數諸 m 方根之積。

(註) 積之因數。無論用何次第。俱無變更。於 39 款。已證其合理。然所證明。其因數以整數。或分數為限。而根數未能確定。(即 \sqrt{a} 及 \sqrt{b} 根數恆得 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{b} \times \sqrt{a}$ 。未嘗確定。) 欲確定根數。宜從代數學之本則證之。見大代數學 162 款。)

如
$$\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$$

及
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

又於 167 款。已證得單項式之 n 方乘。惟將式中諸因數之指數。各以 n 乘之。

依此理反推之。則將式中諸因數之指數。各以 n

除之。即得該式之 n 方根。何則。因以除其指數後所得之結果。再作 n 方乘。則仍爲原式故也。

如 $\sqrt[n]{a^4}$ 之一值爲 $a^{\frac{4}{n}}$ 。 $\sqrt[n]{a^{63}b^{12}c^9}$ 之一值爲 $a^{\frac{63}{n}}b^{\frac{12}{n}}c^{\frac{9}{n}}$ 。又 $\sqrt[n]{a^{24}b^{12}}$ 之一值爲 $a^{\frac{24}{n}}b^{\frac{12}{n}}$ 。

非完全平方式之平方根。又。非完全立方式之立方根。俱不能運算。

如 a 之平方根。惟記以 \sqrt{a} 。又 a^2 之立方根。惟記以 $\sqrt[3]{a^2}$ 。餘倣此。

平 方 根

174. 平方根 由是論多項式平方根之求法。完全平方之任何三項式。其平方根之求法。已詳於 96 款。

即。欲求三項式之平方根。則先將全式依某文字之遞降方乘。或遞昇方乘。整列。然後取其首尾兩項之平方根。若原式之中項爲正。則附以相同之符號。若原式之中項爲負。則附以相異之符號。

如求 $4a^6 - 12a^4b^3 + 9b^6$ 之平方根。

其首尾之兩方根爲 $\pm 2a^3$ 及 $\pm 3b^3$ 。

而原式之中項爲負。故所求之平方根。爲

$$\pm(2a^4 - 3b^2)$$

〔注意〕 此後各式之平方根，僅取第一項為正號者，而欲求他一根，則悉變各項之符號即得。

$$\sqrt{(49a^{10} + 28a^5 + 4)} = 7a^5 + 2,$$

$$\sqrt{(1 + 6xy^3 + \frac{2}{4}x^2y^6)} = 1 + \frac{1}{2}xy^3,$$

$$\sqrt{\{a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2\}} = a + b + c.$$

175. 視察法 某式所含特別文字之方乘，若祇有二種，則依文字之遞昇方乘或遞降方乘列之，可變為三項式。

如 $a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$ 式 a^2 與 a 之外，更無 a 之他方乘，故依 a 之遞降方乘整列，則

$$a^2 + 2a(b+c) + (b^2 + c^2 + 2bc)$$

由是任意之方程式，若特別文字之異方乘祇有兩種，則可變為三項式，而完全平方之任何三項式，其平方根可直書出，故完全平方之多項式，若某特別文字之異方乘祇有兩種，則其平方根，可由視察求得。

如求 $a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$ 之平方根。

此式依 a 之遞降方乘整列，則變為

$$a^2 + 2a(b+c) + (b^2 + 2bc + c^2),$$

即 $a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2,$

即 $\{a + (b+c)\}^2.$

故 $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab)} = a + b + c.$

又求 $x^4 + 4y^4 + 9z^4 + 4x^2y^2 - 6x^2z^2 - 12y^2z^2$ 之平方根。

此式依 x 之遞降方乘整列。則變為

$$x^4 + 2x^2(2y^2 - 3z^2) + 4y^4 + 9z^4 - 12y^2z^2,$$

即 $x^4 + 2x^2(2y^2 - 3z^2) + (2y^2 - 3z^2)^2,$

即 $\{x^2 + (2y^2 - 3z^2)\}^2,$

故 $\sqrt{(x^4 + 4y^4 + 9z^4 + 4x^2y^2 - 6x^2z^2 - 12y^2z^2)}$
 $= x^2 + 2y^2 - 3z^2.$

又求 $a^2 + 2abx + (b^2 + 2ca)x^2 + 2bcx^3 + c^2x^4$ 之平方根。

依 a 之方乘列此式則

$$a^2 + 2a(bx + cx^2) + b^2x^2 + 2bcx^3 + c^2x^4,$$

即 $a^2 + 2a(bx + cx^2) + (bx + cx^2)^2,$

即 $\{a + (bx + cx^2)\}^2.$

故所求之平方根為 $a + bx + cx^2.$

又求下式之平方根。

$$x^6 - 2x^5 + 3x^4 + 2x^3(y-1) + x^2(1-2y) + 2xy + y^2.$$

此式唯含 y^2 及 y ，故依 y 之方乘整列。得

$$y^2 + 2y(x^3 - x^2 + x) + (x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2)$$

今此式若爲完全平方。則其末項當爲 y 之係數之半之平方。

$$\text{而 } x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 = (x^3 - x^2 + x)^2$$

容易證明。故所設之式等於

$$y^2 + 2y(x^3 - x^2 + x) + (x^3 - x^2 + x)^2$$

故所求平方根爲 $y + x^3 - x^2 + x$ 。

依上所述凡完全平方之式。無論其項數若干。若此式某特別文字之異方乘。祇有兩種。則其平方根。可由視察求得。

問題 LIV.

書以下各式之平方根

1. $9x^2 - 30xy + 25y^2$.
2. $25x^4 - 30x^2y^2 + 9y^4$.
3. $4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4$.
4. $4x^{10} - 12x^5y^3 + 9y^6$.
5. $x^3 - 6x^2y^4 + 9y^5$.
6. $9x^{12} - 6x^6y^3 + y^6$.
7. $\frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{2}x^3y^3 + \frac{1}{4}y^6$.
8. $\frac{1}{4}x^6y^6 - \frac{1}{2}x^4y^3 + \frac{1}{4}$.
9. $25x^3y^6 - 40a^2b^3x^4y^3 + 16a^4b^6$.
10. $\frac{x^4}{a^2} + 8x^2y^3 + 16a^2y^6$.
11. $9\frac{b^2x^4}{a^2} - 24x^2y^3 + 16\frac{a^2y^4}{b^2}$.

$$12. \frac{9}{x^3} - 42\frac{a^5}{x^2} + 49a^{10}.$$

$$13. a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 12bc + 6ca + 4ab.$$

$$14. 4a^2 + b^2 + 9c^2 + 6bc - 12ca - 4ab.$$

$$15. 4a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 4c^2a^2 + 4a^2b^2.$$

$$16. 25a^4 + 9b^4 + 4c^4 - 12b^2c^2 + 20c^2a^2 - 30a^2b^2.$$

176. 多項式之平方根 因示任何代數式之平方根之求法。故先取一代數式作平方。然後依反面之運算。以釋其法。

如 $x^2 + 2xy + 3y^2 \dots\dots\dots (1).$

其平方為 $x^4 + 4x^2y + 10x^2y^2 + 12xy^3 + 9y^4 \dots\dots (2).$

但此兩式為依 x 之遞降方乘整列者。而

$x^2 + 2xy + 3y^2$ 之平方。可記為下式

$$\begin{aligned} \{x^2 + (2xy + 3y^2)\}^2 &= x^4 + 2x^2(2xy + 3y^2) \\ &+ (2xy + 3y^2)^2 \dots\dots\dots (3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{(x^2 + 2xy) + 3y^2\}^2 &= (x^2 + 2xy)^2 \\ &+ 2(x^2 + 2xy)3y^2 + (3y^2)^2 \dots (4). \end{aligned}$$

(2) 式之第一項。原為 (1) 式第一項之平方。

由是。欲求 (2) 式平方根內之第一項。則取其第一項之平方根即得。即 x^2 。

又由(3)式減 x^4 (即根之第一項之平方)則餘式內含 x 最高方乘之項爲 $2x^2 \times 2xy$ 。是即根之第一項與第二項之積之二倍。

如是,由(2)式減根之第一項之平方,復以根之第一項之二倍,除其餘式之第一項,即得根之第二項。

又由(4)式減 $(x^2+2xy)^2$ (即根中已求得之部分之平方)則餘式內含 x 最高方乘之項爲 $2x^2 \times 3y^2$ 。是即根之第一項與第三項之積之二倍。

故根中已求得之部分之平方,由(2)式減之,復以根之第一項之二倍,除餘式之第一項,可得根之次項。

今由所設之式,減 $x^2+2xy+3y^2$ 之平方,適盡無餘。故 $x^2+2xy+3y^2$ 爲所求之根。

由是,更考究其通法。

如求 $(A+B)^2$ 之平方根, A 顯根之若干項, B 顯其餘之部分。而 A 及 B 之諸項,俱依其文字之遞降方乘或遞昇方乘整列,從而 A 內各項,較 B 內之任意項,恆爲高次項或爲低次項。

今已知 A 之諸項,欲求 B 之諸項。

則由 $(A+B)^2$ 減 A^2 其餘式爲 $(2A+B)B$.

而依代數式之列法。則餘式中之最高次項。或最低次項。必爲 A 之第一項與 B 之第一項之積之二倍。

由是。欲求根之次項。(即 B 中最高次或最低次之項。) 則由全式減根中已求得之部分之平方。再以根之第一項之二倍。除其餘式之第一項。即得。

根之第一項。恆爲所設式之第一項之平方根。理極易明。因而求得根之第一項時。依次用上法求之。即得根之他項。

如求 $x^4+4x^2y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4$ 之平方根。

$$\begin{array}{r} x^4+4x^2y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4 \quad (x^2+2xy+3y^2) \\ \underline{(x^2)^2 = x^4} \\ (x^2+2xy)^2 = x^4+4x^2y+4x^2y^2 \\ \underline{(x^2+2xy+3y^2)^2 = x^4+4x^2y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4} \end{array}$$

先將所設之式依某文字之遞降方乘。或遞昇方乘。整列。

由是。取所設式之第一項之平方根。可得根之第一項 x^2 。次由所設式減 x^2 之平方。再以 $2x^2$ 除其餘式之第一項。如是可得根之第二項 $2xy$ 。又將 x^2+2xy 之平方。(即 $x^4+4x^2y+4x^2y^2$) 由所設式減之。再以 $2x^2$ 除

其餘式之第一項 $6x^2y^2$ 。則得根之第三項 $3y^2$ 。

今將 $x^2+2xy+3y^2$ 之平方。由所設式減之。適盡無餘。故 $x^2+2xy+3y^2$ 爲所求之根。

以 x^2, x^2+2xy 等之平方。置於所設式之下。使同類項同在一縱行。則由所設式減此等之平方。其餘式可一望而知。

177. 簡法 前款之法。須各作平方。未免煩難。故代以簡法。即求代數式之平方根。咸以下法爲通例。今取前例解之如次。

$$x^4+4x^3y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4(x^2+2xy+3y^2).$$

$$\begin{array}{r} x^4 \\ 2x^2+2xy \overline{) 4x^3y} \\ \quad 4x^3y+4x^2y^2 \\ 2x^2+4xy+3y \overline{) 6x^2y^2} \\ \quad \underline{6x^2y^2+12xy^3+9y^4} \end{array}$$

根之第一項爲 x^2 。由所設式減 x^2 之平方。則其餘式之第一項爲 $4x^3y$ 。

將根中已求得之部分二倍之。而以其第一項。除
餘式之第一項則得根之第二項 $2xy$ 加此第二項
於 $2x^2$ 而將其和置於除數之位置上。並以根之第

二項 $2xy$ 乘其和，而以其積減餘式 $4i^2y + \dots$ ，則更得餘式 $6x^2y^2 + \dots$

依此方法累求，可以次得根之各項。

依上之演算，在第二級之終，始合減 $(x^2 + 2xy)^2$ 何則因 $(x^2 + 2xy)^2 = (x^2)^2 + (2x^2 + 2xy)2xy$ 故也。

同樣在各階級之終，即為根中所求得至某項止之部分之平方可知。

問 題 LV.

求以下各式之平方根

1. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$
2. $4x^4 - 8x^3 + 4x + 1.$
3. $9x^4 - 36x^3 + 72x + 36.$
4. $1 - xy - \frac{1}{2}x^2y^2 + 2x^3y^2 + 4x^4y^4$
5. $4x^4 + 4x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}.$
6. $x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}.$
7. $x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4.$
8. $16 - 96x + 216x^2 - 216x^3 + 81x^4.$
9. $1 + 4x + 10x^2 + 12x^3 + 9x^4.$
10. $4x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + \frac{1}{4}.$

11. $(1+2x^7)^2 - 4x(1-x)(1+2x).$

12. $x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4.$

13. $9x^6 - 12x^5 + 22x^4 + x^3 + 12x + 4.$

14. $x^6 - 22x^4 + 34x^3 + 121x^2 - 374x + 289.$

15. $a^2 - ax + \frac{1}{4}x^2 + 8a - 4x + 16.$

16. $x^2 + 2x^7 + x^6 - 4x^5 - 12x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 16x + 16.$

17. $16x^2 - 96x + 216 - \frac{216}{x} + \frac{81}{x^2}.$

18. $x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}.$

19. $x^4 + 2x^3(y+z) + x^2(y^2+z^2+4yz) + 2xyz(y+z) + y^2z^2.$

20. $2x^2(y+z)^2 + 2y^2(z+x)^2 + 2z^2(x+y)^2 + 4xyz(x+y+z).$



第 十 九 編

分 指 數 及 負 指 數

178. 總論 以上所論之指數。恆設之爲正整數。蓋依第10款之定義。原不得不然。何則。因從其定義爲 $a^{\frac{m}{n}}$ 式。即全無意義故也。

然擴張 a^n 之義意。則 n 宜包含分數及負數在內。

代數記號。無論其數值如何。恆以從同一之定則爲要。故 n 非正整數時。亦不須別加解釋。即 a^n 於任何例。其指數之本則。恆能使 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 合理。

且此爲有意義之制限。而此制限。於任何例。皆足定 a^n 之意義無庸選擇。

如問 $a^{\frac{1}{2}}$ 合於指數法則。其意義若何。

$$\text{今 } a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a$$

故 $a^{\frac{1}{2}}$ 爲其平方爲 a 之量。即 $a^{\frac{1}{2}}$ 之意義恆爲 \sqrt{a} 。

又問 a^{-1} 合於指數法則。其意義若何。

$$\text{今 } a^3 \times a^{-1} = 3-1 = a^2 \quad \therefore a^{-1} = a^2 \div a^3 = \frac{1}{a}$$

故 a^{-1} 之意義為 $\frac{1}{a}$

由是考其通例。

179. 分指數之例 n 為任意之正整數。問

$a^{\frac{1}{n}}$ 之義意若何。

由指數法則。

$$\begin{aligned} & a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \dots \dots \text{至 } n \text{ 因數} \\ & = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots \text{至 } n \text{ 項}} \\ & = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a \end{aligned}$$

由是, $a^{\frac{1}{n}}$ 為其 n 方乘為 a 之量。

$$\text{即 } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

180. 分指數之第二例 m 及 n 為任意

之正整數。問 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義如何。

依指數法則

$$\begin{aligned} & a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times \dots \dots \text{至 } n \text{ 因數} \\ & = a^{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \dots \text{至 } n \text{ 項}} \\ & = a^{\frac{mn}{n}} = a^m \end{aligned}$$

故 $a^{\frac{m}{n}}$ 為 a^m 之 n 方根。

即 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

又 $a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \dots$ 至 m 因數

$$= a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots} \text{ 至 } n \text{ 項}$$

$$= a^{\frac{m}{n}}$$

故 $a^{\frac{m}{n}}$ 可視為 $a^{\frac{1}{n}}$ 之 m 方乘。而依 179 款

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

故 $a^{\frac{m}{n}}$ 可視為 a 之 m 方乘之 n 方根。又可視為 a 之 n 方根之 m 方乘。以式顯之。如次

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m$$

〔注意〕 精言之。則某量之 n 方根。若非算術上之方根。不能言 $\sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m$ 如 $\sqrt[2]{(a^4)}$ 有二值為 $\pm a^2$ 而 $(\sqrt[2]{a})^4$ 祇有一值為 $+a^2$ 。是也。

181. 零指數 問 a^0 之意義如何

由指數法則 $a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m$

$$\therefore a^0 a^m \div a^m = 1$$

故 a 之值不拘如何。 a^0 恆等於 1。

182. 負指數 m 為任意之正整數 a^{-m} 之意義如何。

由指數法則 $a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0$

而由前款 $a^0 = 1$

$$\therefore a^m \times a^{-m} = 1$$

故 $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ 及 $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$

由是變任意量指數之符號。則可由分數之分子變爲分母。或由分數之分母變爲分子。

如 $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $\frac{a}{b} = ab^{-1} = \frac{1}{a^{-1}b}$,

及 $\frac{a^2b^2}{x^2y} = a^2b^2x^{-2}y^{-1} = \frac{1}{a^{-2}b^{-2}x^2y}$.

183. 指數雜例 以上諸款因指數之本則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$, 恆能合理。故 n 設以任意之正負數值時。 a 恆應之有一定之意義。據此所得之意義。故不論 m 及 n 之數值如何。恆能證明

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}$$

及 $(ab)^n = a^n b^n$ 均爲合理。(見大代數學 168 款)

由是指數爲分數或負數者。可與指數爲正整數者。同法求得。

如

$$(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} b^{\frac{1}{3} \times 2} = a^1 b^{\frac{2}{3}}$$

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = a^0 = \sqrt[2]{a}$$

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{-\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}} = a^0 = 1$$

$$(a^{-\frac{1}{2}})^6 = a^{-\frac{1}{2} \times 6} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

$$a^{-2} \div a^{-4} = a^{-2 - (-4)} = a^2$$

$$\sqrt[3]{(a^3 b^{-3} c^4)} = \sqrt[3]{(a^3)} \cdot \sqrt[3]{(b^{-3})} \cdot \sqrt[3]{(c^4)}$$

$$= a^1 b^{-1} c^{\frac{4}{3}} = ab^{-1}c^{\frac{4}{3}}$$

問題 LVI.

求以下各式之值。[1 至 10].

1. $8^{\frac{1}{3}}$

2. $4^{-\frac{1}{2}}$

3. $16^{-\frac{1}{2}}$

4. $(\frac{1}{27})^{-\frac{1}{3}}$

5. $(\frac{1}{27})^{-\frac{1}{3}}$

6. $(\frac{1}{27})^{-\frac{1}{3}}$

7. $(27)^{-\frac{1}{3}}$

8. $(100)^{-\frac{1}{2}}$

9. $(\frac{1}{1000})^{-\frac{1}{3}}$

10. $(\frac{1}{125})^{-\frac{1}{3}}$

化以下各式為簡式 [11 至 35].

11. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}}$

12. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$

13. $a^{-\frac{1}{2}} \times a.$ 14. $a \times a^{-\frac{1}{2}}.$
15. $a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ 16. $(a^{\frac{1}{2}} b)^2.$
17. $(a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}})^2$ 18. $(a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}})^3.$
19. $(a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}.$ 20. $(a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}.$
21. $\{(a^{-2})^2\}^{\frac{1}{2}}.$ 22. $\{(a^{-\frac{1}{2}})^2\}^{-\frac{1}{2}}.$
23. $\{(a^{-\frac{1}{2}})\}^{-\frac{1}{2}}.$ 24. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{3}{4}} \times a^{\frac{1}{4}}.$
25. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{4}} \times (a^2)^{-\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}})^5.$
26. $x^{p+q} \times x^{p-q} \div x^{2p}.$
27. $(x^{p-r})^p \times (x^{p-q})^q \times (x^{p-q})^r.$
28. $\frac{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}} \div \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}.$ 29. $\frac{(xy)^{c+d}}{x^a y^b}.$
30. $\frac{(xyz)^{a+b+c}}{x^{a+b} y^{b+c} z^{c+a}}.$
31. $\frac{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} (b^{\frac{1}{2}})^6}{(b^{\frac{1}{2}})^3 a^{\frac{1}{2}}} \div \frac{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{(b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}.$
32. $a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right\}^2 \div \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}.$
33. $x^{3p+q} \times x^{p-4r} \times (x^2)^{q-2r} \div x^{4p-3q}.$

$$34. \left\{ x^{\frac{p-q}{pq}} \right\} \left\{ y^{\frac{q-r}{qr}} \right\}^p \left\{ z^{\frac{r-p}{rp}} \right\}^q \div x^{\frac{p-q}{r}} + y^{\frac{q-r}{p}} + z^{\frac{r-p}{q}}$$

$$35. \left[\left\{ x^{\frac{p-q}{r}} \right\}^{\frac{q-r}{p}} \right]^{\frac{r-p}{q}} \times x^{\frac{p-q}{r}} + y^{\frac{q-r}{p}} + z^{\frac{r-p}{q}}$$

將以各下式用分數指數顯之。且化之爲簡式。

[36 至 44]

$$36. \sqrt[3]{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt[5]{a}. \quad 37. \sqrt[3]{(a^2y)} \sqrt[5]{(ay^2)}.$$

$$38. \sqrt[3]{(a^2x^5)} \times \sqrt{(a^3x)}. \quad 39. \sqrt{a^3} \times \sqrt[3]{a^7} \times a^{-\frac{1}{2}} \div a^{\frac{3}{4}}.$$

$$40. \sqrt[3]{a^7} \times \sqrt[5]{a^2} \times a^{-\frac{1}{2}} \div a^{\frac{1}{4}}.$$

$$41. \sqrt[4]{a^2} \sqrt[3]{\{a^6 \sqrt{(a^{-2})}\}}.$$

$$42. \sqrt[5]{(a^3b^{10}c^5)} \div \sqrt[3]{(ab^6c^3)}.$$

$$43. \sqrt{(a^2b^{-2})} \div \sqrt[3]{(a^{-1}b^5)}.$$

$$44. \sqrt[3]{(a^6b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}})} \times b^{-\frac{2}{3}} \times (c^{\frac{1}{2}}a^4)^{-\frac{1}{2}}.$$

以根號與正指數顯以下各式 [45 至 48].

$$45. a^{\frac{1}{2}} - a^{-2} \quad 46. a^{-1}b^{-\frac{1}{2}}.$$

$$47. a^{\frac{1}{2}}b^{-1} - a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} \quad 48. a^{-2}b^{-\frac{1}{2}} + 3^{-2}a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}.$$

184. 多項式之應用

以下諸例雖適用 以下諸例雖適用 前述之原理。然指數之加減等。實可用心算求之。

(例 1.) 以 $a^{\frac{1}{2}} - 1 + a^{-\frac{1}{2}}$ 乘 $a^{\frac{1}{2}} + 1 + a^{-\frac{1}{2}}$.

$$a^{\frac{1}{2}} + 1 + a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{a^{\frac{1}{2}} - 1 + a^{-\frac{1}{2}}}$$

$$a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + 1$$

$$-a^{\frac{1}{2}} - 1 - a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{1 + a^{-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}}$$

$$a^{\frac{3}{2}} \quad + 1 \quad + a^{-\frac{3}{2}}$$

(例 2.) 以 $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}$ 除 $a + b + c - 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$.

$$a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}} \quad a - 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} + b + c \quad (a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}))$$

$$+ b^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{3}{2}}$$

$$\underline{a + a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}})}$$

$$-a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}) - 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} + b + c$$

$$\underline{-a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}) - a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}})^2}$$

$$a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}) + b + c$$

$$\underline{a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}) + (b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}})(b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}})}$$

(例 3.) 求 $x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{5}{2}} + 4x - 4x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$ 之平方根

$$x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{5}{2}}, \quad 4x - 4x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})$$

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = x^{\frac{1}{2}}$$

$$(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}})^2 = x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 4x$$

$$(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{8}})^2 = x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{1}{8}} + 4x - 4x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{8}}$$

問題 LVII.

求以下各題中兩式之積。[1至15].

1. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$.

2. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$.

3. $x^{\frac{1}{2}} + 1, x^{\frac{1}{2}} - 1$.

4. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$.

5. $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} + 1, x^{\frac{1}{2}} - 1$.

6. $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$.

7. $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$.

8. $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}$.

9. $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{8}} - x^{-\frac{1}{8}}, x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{8}}$.

10. $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{8}} - x, x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{8}}$.

11. $x^n + x^{\frac{n}{2}} + 1, x^{-n} + x^{-\frac{n}{2}} + 1$.

12. $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}, x^{-2n} + x^{-n} y^{-n} + y^{-2n}$.

13. $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}$.

14. $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}ab^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}b - \frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}$.

$$15. \quad 81x^{\frac{1}{2}} - 27x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}y + y^{\frac{1}{2}}, \quad 3x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}.$$

將以下各題用後式除前式 [16 至 26]

$$16. \quad a-b, a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}. \quad 17. \quad x^3-y^3, x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}.$$

$$18. \quad x^{\frac{3n}{2}}-y^{\frac{3n}{2}}, x^{\frac{n}{2}}-y^{\frac{n}{2}}.$$

$$19. \quad x^2+y^2, x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}. \quad 20. \quad x-243y^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{3}}-3y^{\frac{1}{3}}.$$

$$21. \quad y^4+b^2y^2+b^4, y-l^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+b.$$

$$22. \quad x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{3}{2}}+2+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}, x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}-1+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}.$$

$$23. \quad a^{\frac{5}{2}}+a^2b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}-ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{5}{2}}, a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}.$$

$$24. \quad a^{\frac{4}{3}}-2+a^{-\frac{2}{3}}, a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}.$$

$$25. \quad (x-x^{-1})-2(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})+2(x^{\frac{6}{5}}-x^{-\frac{6}{5}}), x^{\frac{1}{5}}-x^{-\frac{1}{5}}.$$

$$26. \quad x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{7}{3}}, x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$27. \quad \text{化 } (ab^{-2}c^5)^{\frac{1}{2}} \times (a^7b^4c^{-1})^{\frac{1}{3}} \times (a^{-5}bc^2)^{\frac{1}{6}}. \text{ 爲簡式}$$

$$28. \quad \text{化 } (a-4b^{\frac{2}{3}})(a+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})(a-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}). \text{ 爲簡式}$$

爲簡式

$$29. \quad \text{證 } 1 - \frac{a^2+b^2-a^2-b^2}{a^2b^2-a^2b^{-2}} = \frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}.$$

$$30. \quad \text{證 } \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+1} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-1} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+1} = 2+x^{\frac{3}{2}}.$$

31. 將 $4x^2 - 5x - 4 - 7x^{-1} + 6x^{-2}$ 與 $3x - 4 + 2x^{-1}$ 之積。
用 $3x - 10 + 10x^{-1} - 4x^{-2}$ 除之。

32. 化 $\frac{1}{1-x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{1+x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+x}$ 爲簡式。

33. 以 $(a+b)^{\frac{1}{2}} - (a-b)^{\frac{1}{2}}$ 乘 $(a+b)^{\frac{3}{2}} + (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{3}{2}}$

34. 書以下三式之平方根

$$(1) x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + 1. \quad (2) 4x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}},$$

$$(3) ax^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}x.$$

35. 求 $4x^2a^{22} - 12xa^{-1} + 25 - 24x^{-1}a + 16x^{-2}a^2$ 之平方根。

36. 求 $25x^2y^{-2} + \frac{1}{4}y^2x^{-2} - 20xy^{-1} - 2yx^{-1} + 9$ 之平方根。

37. 求次之平方根

$$x^{\frac{2}{3}} - 2a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}$$

38. 求 $x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 4x + 2x^{\frac{3}{4}} - 4x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{4}}$ 之平方根

39. 解次之各方程式

$$(1) x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1 = 0. \quad (2) x - 8x^{\frac{1}{3}} + 12 = 0.$$

$$(3) x^{\frac{2}{3}} - 26x^{\frac{1}{3}} - 27 = 0. \quad (4) x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 4.$$

$$(5) 4x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}} = 4.$$



第 二 十 編

根 數

185. 定義 根數云者。不能開盡之算術的根數也。

如 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt[3]{4}$ 俱為根數。

如 \sqrt{a} 代數式。 a 為能開盡之數值。(即其實非根數)亦往往稱為根數。

同根號之根數。名為同次根數。

如 $\sqrt{2}$ 與 $6^{\frac{1}{2}}$ 稱為二次根數。又 $\sqrt[3]{4}$ 與 $5^{\frac{1}{3}}$ 稱為三次根數。故如 $\sqrt[n]{5}$ 稱為 n 次根數。

化兩根數為同次之無理因數。謂之相似之根數。

如 $2\sqrt{2}$ 及 $5\sqrt{2}$ 為相似之根數。

演算根數之法則。可由已證明之原理推得。

〔注意〕 算術的數前有根號者。唯顯算術上之根。代數式前有根號者。恆顯諸根中任意之一根。

如 \sqrt{a} 雖有二值。然 $\sqrt{2}$ 唯顯算術上之根。若欲顯正負兩根。則不可不記為 $\pm\sqrt{2}$

186. 根數之變化 任意之有理數俱可變為根數之形。

如 $a = \sqrt{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[n]{a^n}$,

及 $2 = \sqrt{2^2} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[n]{2^n}$,

又 $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(\sqrt{2^2})} = \sqrt[6]{2^2}$.

又 $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

故其式如次

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = \sqrt{(3^2 \times 2)} = \sqrt{18},$$

$$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(2^3 \times 5)} = \sqrt[3]{40},$$

及 $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

反之 $\sqrt{18} = \sqrt{(9 \times 2)} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2},$

$$\sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{(3^3 \times 5)} + \sqrt[3]{(2^3 \times 5)}$$

$$= 3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5},$$

及 $\sqrt{a^2} + \sqrt{ab^2} = a\sqrt{a} + b\sqrt{a} = (a+b)\sqrt{a}.$

187. 化二根為同次根數 任意之根數可化為同次根數。

此理可直由 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{a^m}$ 推得。

如化 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt[3]{5}$ 為同次根數。

因 $\sqrt{2} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt[3]{2^3}$ 及 $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\sqrt{5^2}} = \sqrt[6]{5^2}$
 故仍與 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt[3]{5}$ 等值。且成同次之根數。爲
 $\sqrt[6]{8}$ 及 $\sqrt[6]{25}$

又化 $\sqrt[n]{a}$ 及 $\sqrt[m]{b}$ 爲同次根數。

因 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[nm]{a^m}$ 及 $\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{b^n}} = \sqrt[nm]{b^n}$

由是所求之根數。爲 $\sqrt[nm]{a^m}$ 及 $\sqrt[nm]{b^n}$

〔例 1.〕 化 $\sqrt[3]{3}$ 及 $\sqrt[5]{5}$ 爲同次根數

4 與 6 之最小公倍數爲 12。

由是 $\sqrt[3]{3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3}} = \sqrt[12]{27}$ 及 $\sqrt[5]{5} = \sqrt[6]{\sqrt{5^2}} = \sqrt[12]{25}$

故 $\sqrt[12]{27}$ 及 $\sqrt[12]{25}$ 爲所求之根數。

〔例 2.〕 問 $\sqrt[3]{14}$ 與 $\sqrt{6}$ 孰大

先化此二根數爲與此等值。且爲同次之根數。

即 $\sqrt[3]{14} = \sqrt[3]{14^2} = \sqrt[6]{196}$ 及 $\sqrt{6} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{216}$

故 $\sqrt{6}$ 較 $\sqrt[3]{14}$ 大

188. 根數之乘除 依次之公式。可直記
 同次兩根數之積。

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

若根數之次數不同。則先化爲同次根數。然後單
 簡其積。

〔例1.〕 以 $\sqrt{20}$ 乘 $\sqrt{5}$

$$\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{(5 \times 20)} = \sqrt{100} = 10.$$

〔例2.〕 以 $\sqrt[3]{3}$ 乘 $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{(2^3 \times 3^2)} = \sqrt[6]{72}.$$

〔例3.〕 以 $\sqrt{6}$ 除 $\sqrt[3]{2}$

$$\sqrt[3]{2} \div \sqrt{6} = \sqrt[6]{2^2} \div \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{(2^2 \div 6^3)} = \sqrt[6]{\frac{1}{18}}$$

〔例4.〕 以 $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ 乘 $4\sqrt{3}+4\sqrt{2}$

此演算如次

$$\begin{array}{r} 4\sqrt{3}+4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3}-2\sqrt{2} \\ \hline 8 \times 3 + 8\sqrt{6} \\ - \sqrt{6} - 8 \times 2 \\ \hline 24 \qquad -16 = 8. \end{array}$$

問題 LVIII.

化以下各式爲簡式[1至27]

1. $\sqrt{27} + \sqrt{48}$.
2. $\sqrt{50} + \sqrt{98}$.
3. $\sqrt{45} + 2\sqrt{125}$.
4. $2\sqrt{180} - \sqrt{405}$.
5. $2\sqrt{28} - \sqrt{63}$.
6. $5\sqrt{208} - 3\sqrt{325}$.
7. $3\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{625}$.
8. $3\sqrt[3]{72} - 2\sqrt[3]{243}$.
9. $4\sqrt[3]{448} - 15\sqrt[3]{7}$.
10. $\sqrt{512} - \sqrt{50} - \sqrt{98}$

11. $3\sqrt{12} - \sqrt{27} + 2\sqrt{75}$.

12. $\sqrt{147} - 2\sqrt{27} - \sqrt{3}$.

13. $5\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{8} + \frac{1}{\sqrt{18}}$.

14. $\sqrt{15} \times \sqrt{60}$.

15. $\sqrt{12} \times \sqrt{24}$.

16. $2\sqrt{\frac{1}{3}} \times 3\sqrt{\frac{1}{3}}$.

17. $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{36}$.

18. $\sqrt{12} \times \sqrt{27} \times \sqrt{75}$.

19. $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{9}$.

20. $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{75} \times \sqrt[3]{30}$.

21. $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{18}$.

22. $\sqrt{10} \times \sqrt[3]{200}$.

23. $\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8}$.

24. $\sqrt{18} \div \sqrt{50}$.

25. $\sqrt{63} \div \sqrt{112}$.

26. $\sqrt{20} \times \sqrt{96} \div \sqrt{30}$.

27. $\sqrt[3]{147} \div \sqrt[3]{35} \times \sqrt[3]{735}$.

28. $\sqrt{3}, \sqrt[3]{(5\frac{1}{2})}$, 孰大

29. 將 $\sqrt{50}, \sqrt[3]{314}, \sqrt[4]{2402}$, 依大小之次序排列。

30. 以 $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ 乘 $\sqrt{6} - \sqrt{3}$.

31. 以 $3\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$ 乘 $2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$.

32. 以 $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \sqrt{6}$ 乘 $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$.

33. 以 $1 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5}$ 乘 $1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$.

34. 求 $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ 之平方

35. 問 $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}, -\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5},$

 $\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}, \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$, 之連乘積如何。

189. 化無理分母 分數之分母有根數，可去之化爲有理分母。今舉數例明之如次。

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{5} \sqrt{5},$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{3}{7} \sqrt{14},$$

$$\begin{aligned} \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} &= \frac{(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2\sqrt{5}+5+2+\sqrt{5}}{5-1} \\ &= \frac{1}{4}(7+3\sqrt{5}), \end{aligned}$$

$$\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} = \frac{(a-\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} = \frac{a^2-2a\sqrt{b}+b}{a^2-b}.$$

$a \pm \sqrt{b}$ 式以 $a \mp \sqrt{b}$ 乘之，則成有理式。又 $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ 式以 $\sqrt{a \mp \sqrt{b}}$ 乘之，則成有理式。學者最宜注意，使分數之分母爲有理，則求其數值甚便。

190. 定理 下所示者，皆緊要之命題。

若 $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b}$ 而 a 與 a' 爲有理數， \sqrt{b} 與 \sqrt{b} 爲無理數，則 $a = a'$ ， $b = b'$

何則。 $a - a' + \sqrt{b} = \sqrt{b}$

作兩邊之平方且移項則

$$2(a-a')\sqrt{b} = b - b' - (a-a')^2$$

由是。若 \sqrt{b} 之係數非零。則無理式與有理式相等。於理不合。

故上之方程式。其 \sqrt{b} 之係數必為零。故 $a=a$ 而 $a=a$ 。則由所設之關係得 $\sqrt{b}=\sqrt{\beta}$ 。即 $b=\beta$

由是。有理數與二次根數之和或差。等於他有理數與二次根數之和或差。則兩有理數。兩無理數各互相等（即兩有理數相等。及兩無理數相等。）

〔注意〕 $a+\sqrt{b}=a+\sqrt{\beta}$ 。唯 \sqrt{b} 與 $\sqrt{\beta}$ 。實際為無理數。始能決定 $a=a$ 及 $b=\beta$ 。如由 $3+\sqrt{4}=2+\sqrt{9}$ 之關係。必不能決定 $3=2$ 。及 $4=9$

191. 無理數之平方根 二項式由有理數與二次根數而成。則其平方根。可記為較前稍簡之形。其演算如次。

設 \sqrt{b} 為根數。求 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{a+\sqrt{\beta}}\dots\dots\dots(1)$$

作兩邊之平方則

$$a+\sqrt{b}=a+\beta+2\sqrt{a\beta}.$$

而 \sqrt{b} 為根數。故兩邊之有理部及無理部各相等 [190 款]

由是
$$\left. \begin{aligned} a &= a + \beta \\ b &= 4a\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

是故 [150 款]. a 與 β 爲方程式 $x^2 - ax + \frac{b}{4} = 0$ 之兩根。

而是等之二根爲

$$\left\{ \frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2} \right\} \text{ 及 } \left\{ \frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2} \right\}.$$

$$\underline{\underline{\text{故 } \sqrt{(a \times \sqrt{b})} = \sqrt{\left\{ \frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2} \right\}} + \sqrt{\left\{ \frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2} \right\}} \dots\dots (3)}}}$$

若 $\sqrt{(a^2 + b)}$ 非有理。則 (3) 式之右邊比左邊繁。故 $a^2 - b$ 非完全平方。則上方之演算失其効力。而能合於此關係者蓋鮮。故此法之用。亦甚隘狹。

如求 $a + \sqrt{b}$ 之平方根。由 (2) 式。知二數之和爲 a 。其積 $\frac{b}{4}$ 。如法求之。固可得其平方根。然有理之二數合於此關係。則此二數。概可由視察求得。

(例 1.) 求 $\sqrt{(15 + 2\sqrt{56})}$

$$\sqrt{(15 + 2\sqrt{56})} = \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$$

作兩邊之平方則

$$15+2\sqrt{56}=a+\beta+2\sqrt{a\beta}.$$

令有理之項及無理之項各相等。則

$$a+\beta=15, a\beta=56.$$

易知適合於此關係之二數為7及8。

故 $\sqrt{(15+2\sqrt{56})}=\sqrt{7}+\sqrt{8}.$

〔例2.〕 求 $\sqrt{(6-\sqrt{35})}$

$$\sqrt{(6-\sqrt{35})}=\sqrt{a}-\sqrt{\beta}$$

兩邊自乘。則 $6-\sqrt{35}=a+\beta-2\sqrt{a\beta}.$

故令有理之項與無理之項各自相等。則

$$a+\beta=6, a\beta=\frac{35}{4}.$$

由觀察或解此兩方程式得

$$a=\frac{7}{4}, \beta=\frac{1}{4}.$$

故 $\sqrt{(6-\sqrt{35})}=\sqrt{\frac{7}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}.$

問 題 LIX.

化以下各式分母為有理式 [1至14].

1. $\frac{3}{\sqrt{7}}.$

2. $\frac{2}{\sqrt{5}}.$

3. $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}.$

4. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$

5. $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$

6. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

7. $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

8. $\frac{15+14\sqrt{3}}{15-2\sqrt{3}}$

9. $\frac{\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

10. $\frac{\sqrt{5}-3\sqrt{12}}{2\sqrt{6}+\sqrt{12}}$

11. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

12. $\frac{3}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

13. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} + \frac{3}{\sqrt[3]{2}+1}$

14. $\frac{4}{\sqrt[3]{9}-1} + \frac{5}{\sqrt[3]{9}+1}$

化以下各式為簡式 [15 至 20]

15. $\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$

16. $\frac{1}{(2-\sqrt{3})^3} + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^3}$

17. $\frac{(3+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})}$

18. $\frac{2\sqrt{15}-3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{15}+\sqrt{2}}$

19. $\frac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(8+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$

20. $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^2$

21. 證 $\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

22. 化 $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
 $+ \frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

爲簡式。

23. 化 $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

爲簡式。

24. 證 $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 7\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

25. 化 $\frac{2\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$ 爲簡式。

26. 求 $\frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{2-1}}$ 之值至小數三位止。

27. 求 $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ 之值至小數三位。

求以下各式之平方根 [28 至 35].

28. $6+\sqrt{20}$.

29. $16+6\sqrt{7}$.

30. $12-6\sqrt{3}$.

31. $28-5\sqrt{12}$.

32. $101-28\sqrt{13}$.

33. $117+36\sqrt{10}$.

34. $280+56\sqrt{11}$.

35. $4\frac{1}{2}+1\sqrt{2}$.

36. 化 $3\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ 爲簡式

37. 化 $6-4\sqrt{3}+\sqrt{16-8\sqrt{3}}$ 爲簡式

求以下各式之平方根 [38 至 41].

38. $11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})$.

39. $2x+2\sqrt{x^2-1}$. 40. $2a+2\sqrt{a^2-x^2}$.

41. $3x-1+2\sqrt{2x^2+x-6}$.

化以下各式爲簡式 [42 至 46].

42. $\frac{1}{\sqrt{16+6\sqrt{7}}}$. 43. $\frac{1}{\sqrt{15+2\sqrt{56}}}$.

44. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}$.

45. $\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$.

46. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

47. 證 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{45}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}=3.632\dots\dots$

48. 設 $x=2+\sqrt{5}$ 求 x^2-4x+5 之數值

49. 設 $x^2=x+1$ 證 $x^3=2x+1$ 及 $x^5=5x+3$.

50. 設 $x^2=3x+5$ 證 $x^3=14x+15$ 及 $x^4=57x+70$.



第二十一編

比, 比例 (變數法)

192. 定義 二量大小之關係。以一量所含他量之倍數測之。名爲二量之比。

異種之名數。不能相比。如里與斤。錢與時。其大小不能相比較。是也。

欲顯 a 與 b 之比。則以 $a:b$ 記之。而 a 稱爲比之第一項。 b 稱爲比之第二項。

又比之第一項及第二項。或稱爲前率及後率。比之第一項大於第二項。則其比大於一。第一項小於第二項。則其比小於一。第一項等於第二項。則其比等於一。

有時大於一之比。謂之伸比。小於一之比。謂之縮比。又等於一之比。有時謂之等比。

193 比之值 量之大小。恆以數顯之。而欲求某數含他數之幾倍。則以他數除某數即得。

故 $a:b$ 等於 $\frac{a}{b}$

由是比可用分數顯之。

194. 比之性質 以相同之數乘分數之分子與分母其值不變。[126款]

由是。以相同之數乘比之兩項。其值亦不變。

如 $2:3, 6:9$, 及 $2m:3m$ 皆互相等。又 $4:5, 7:9, 11:15$, 各等於 $36:45, 35:45, 33:45$ 。

由是 $4:5, 7:9, 11:15$, 其比之大遞降。

195. 比之性質 加相同之數於比之兩項。其值恆變。

如 $4:5$ 之兩項各加 $1, 10, 100$, 則得

$$5:6, 14:15, 104:105$$

此等新比。與所設之比異且各比互相異。

何則。因

$$\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}, \quad \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}, \quad \frac{14}{15} = 1 - \frac{1}{15}$$

$$\frac{104}{105} = 1 - \frac{1}{105}$$

故加相同之數於比之兩項。其所加之數愈大。則

所得之新比愈近於 1。是即以下一般命題之特例也。

196. 定理 任意之比其兩項各加相同之數則數值較近於一。

如加 x 於 $a:b$ 之兩項。則得 $a+x:b+x$ 。

今求證 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$ 之數值近於 1。

$$\text{因 } \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b},$$

$$\text{又 } \frac{a+x}{b+x} - 1 = \frac{a-b}{b+x}.$$

而 $\frac{a-b}{b+x}$ 之絕對值恆較 $\frac{a-b}{b}$ 之絕對值小。何則。因此兩分數之分子相同。而第一之分母。大於第二之分母。故也。以上即本命題之證。

又 a 大於 b 。則 $\frac{a}{b}$ 、 $\frac{a+x}{b+x}$ 俱大於 1。而 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$ 近於 1。故 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$ 小。

由是。大於一之比之兩項各加相同之數則其值減小。

若 a 小於 b 。則 $\frac{a}{b}$, $\frac{a+x}{b+x}$ 俱小於 1。然 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$

近於 1。故 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$ 大。

由是。小於一之比之兩項。各加相同之數。則其值增大。

又若 x 甚大。則分數 $\frac{a-b}{b+x}$ 甚小。故 $\frac{a+x}{b+x}$ 與 1 之差 $\frac{a-b}{b+x}$ 若 x 變至極大。則其值可變至極小。即

x 極大。則 $\frac{a+x}{b+x}$ 之極限值為 1。

197. 複比 有時須用次之定義。

有諸比。其諸前項之積與諸後項之積之比。謂之諸比之複比。

如 $ac:bd$ 為 $a:b$ 及 $c:d$ 之複比。

又 $a^2:b^2$ 。謂之 $a:b$ 之二乘比。或謂 $a:b$ 之平方比。

$a^3:b^3$ 。謂之 $a:b$ 之三乘比。或謂 $a:b$ 之立方比。

$\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 謂之 $a:b$ 之平方根比。

198. 不可通約數 二量之比，恆有不能以二整數之比顯之者。如正方形之對角線與其一邊之比是也。何則。此比之值為 $\sqrt{2}$ 。而 $\sqrt{2}$ 固不能求相等之分數。故也。

二量之比。不能用二整數之比顯之者。謂之不可通約數。

兩不可通約數之比。雖不能求其精密之值。然亦可依所欲求得之程度。求其近似之值。故就可通約數所證明之諸定理。就不可通約數。亦能證明其合理。

問 題 LX

1. 將 $5:6$, $7:8$, $41:48$, $31:36$ 諸比。依大之遞降列之。

2. $3+x:4+x$ 等於 $5:6$ ，問 x 之數值幾何。

3. $15+x:17+x$ 等於 $\frac{1}{2}$ ，問 x 之數值幾何。

4. 問 $3:4$ 之兩項，各加何數。其比始等於 $25:32$ 。

5. 有二數。其比為 $5:6$ ，其和為 121 ，問二數各幾何。

6. 有二數。其比為 $3:8$ ，其平方之和為 3577 ，問

二數各幾何。

7. 設 $\frac{4x+5y}{3x-y}=2$, 求 x 與 y 之比

8. 設 $4x^2+y^2=4xy$, 求 $x:y$

9. 設 $x^2+6y^2=5xy$, 求 $x:y$

10. 某比之兩項各加 2, 則為 2:3, 又其兩項各減 1, 則為 1:2. 問某比幾何。

11. 有二數, 其和, 與其差, 與其平方之和, 為 7:1:75 問二數各幾何。

12. 問 9:23 之兩項, 各加如何之最小整數, 其比始為 7:11。

13. 書 2:3 及 15:16 之複比, 又書 5:6 及 18:25 之複比。

14. 試書 $2x:3y$ 之平方比。

15. 設 $x+1:x+4$ 為 3:5 之平方比, 求 x 。

16. 有二人, 其年齡之比為 3:4. 而在三十年前, 其比為 1:3. 問此二人現在之年齡幾何。

17. 比之一項, 各減他一項之反數, 則其兩餘數之比, 與原比等, 求證。

18. 若 a 及 x 為正, 且 $a > x$. 則 $a^2-x^2:a^2+x^2$ 較 $a-x:a+x$ 大, 求證。

比 例

199. 定義 有四量。其第一與第二之比。等於第三與第四之比。名爲比例量。

如 $a : b = c : d$ ，即 a, b, c, d 爲比例量。

比例量之記法爲 $a : b :: c : d$ 。宜讀爲「 a 比 b 若 c 比 d 。」

成比例之四量中。其第一及第四。謂之外項。第二及第三謂之內項。

200. 定理 四量 a, b, c, d 成比例。則

由定義 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

兩邊各以 bd 乘之。則

$$ad = bc$$

即兩外項之積等於兩內項之積。

依此理反推之。若 $ad = bc$ ，則 a, b, c, d 爲比例量。

何則。若 $ad = bc$

則 $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \quad \therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

即 $a : b = c : d$

故 $a:b=c:d$ 則 $ad=bc$

又反之 $ad=bc$ 則 $a:b=c:d$

201. 推論 若 $ad=bc$, 則有四個比例式

$$a:b=c:d,$$

$$a:c=b:d,$$

$$b:a=d:c,$$

$$b:d=a:c,$$

皆能合理。由前款易知。

由是上之四個比例式中。若任取其一式能合理。則四個比例式皆能合理。

202. 定理 若 $a:b=c:d$

則 $a+b:a-b=c+d:c-d$

何則。因 $(a+b)(c-d)=(a-b)(c+d)$

即 $ac+bc-ad-bd=ac-bc+ad-bd$

即 $bc=ad$

所以 $a+b:a-b=c+d:c-d$

而 $a:b=c:d$, 原適於 $bc=ad$ 之關係。故可證本定理。

又本定理亦可用 137 款例 1 之理證之。

203. 連比例 有諸量。其第一與第二之比等於第二與第三之比。又等於第三與第四之比。以次如是。則此諸量。謂之成連比例之量。

如 $a : b = b : c = c : d$ 等等

即 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots\dots\dots$

則 a, b, c, d 成連比例。

若 $a : b = b : c$ ，則 b 謂之 a 與 c 之比例中項。 c 謂之 a 與 b 之比例末項。

204. 連比例之性質 若 a, b, c 為連比例。則

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\therefore b^2 = ac \quad \text{即} \quad b = \sqrt{ac}$$

即有所設之二量。其比例中項。恆等於其積之平方根。

又 $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \times \frac{a}{b}$,

即 $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{c}$.

故 $a : c = a^2 : b^2$

即三量成連比例。則第一與第三之比。等於第一與第二之平方比。

205. 雜例 依 137 款。二量之比。用一文字顯之。尤為便利。

(例 1.) 若 $a : b = c : d$.

則 $a^2 + ab : b^2 + cd = b^2 - 2ab : a^2 - 2cd$.

令 $\frac{a}{b} = x$ 又 $\frac{c}{d} = x$.

由是得 $a = bx$ 及 $c = dx$.

$$\therefore \frac{a^2 + ab}{c^2 + cd} = \frac{b^2x^2 + b^2x}{d^2x^2 + d^2x} = \frac{b^2(x^2 + x)}{d^2(x^2 + x)} = \frac{b^2}{d^2}$$

又 $\frac{b^2 - 2ab}{d^2 - 2cd} = \frac{b^2 - 2b^2x}{d^2 - 2d^2x} = \frac{b^2(1 - 2x)}{d^2(1 - 2x)} = \frac{b^2}{d^2}$

由是 $\frac{a^2 + ab}{c^2 + cd} = \frac{b^2 - 2ab}{d^2 - 2cd}$

即 $a^2 + ab : c^2 + cd = b^2 - 2ab : d^2 - 2cd$.

(例 2.) 若 $a : b = c : d = e : f$

證 $a^3 + c^3 + e^3 : b^3 + d^3 + f^3 = ace : bdf$.

設 $\frac{a}{b} = x$ 則得 $\frac{c}{d} = x$, 及 $\frac{e}{f} = x$.

故 $a = bx, c = dx$ 及 $e = fx$,

$$\therefore \frac{a^2 + c^2 + e^2}{b^2 + d^2 + f^2} = \frac{b^2 x^2 + d^2 x^2 + f^2 x^2}{b^2 + d^2 + f^2} = x^2$$

又 $\frac{ace}{bdf} = \frac{bx \cdot dx \cdot fx}{bdf} = x^3$.

故 $\frac{a^3 + c^3 + e^3}{b^3 + d^3 + f^3} = \frac{ace}{bdf}$

則 $a^3 + c^3 + e^3 : b^3 + d^3 + f^3 = ace : bdf$.

[例3.] 若 $x:2b+2c-a = y:2c+2a-b = z:2a+2b-c$.

則 $a:2y+2z-x = b:2z+2x-y = c:2x+2y-z$. 求證

$$\text{令 } \frac{x}{2b+2c-a} = \frac{y}{2c+a-b} = \frac{z}{2a+2b-c}$$

令此等之各分數為 λ . 則

$$x = \lambda(2b+2c-a), y = \lambda(2c+2a-b),$$

$$z = \lambda(2a+2b-c),$$

故 $2y+2z-x = 9a\lambda$

同樣 $2z+2x-y = 9b\lambda$ 及 $2x+2y-z = 9c\lambda$

由是 $\frac{a}{2y+2z-x} = \frac{b}{2z+2x-y} = \frac{c}{2x+2y-z}$

206. 幾何學之定義 幾何學之比例定

義。如次。

有四量。取第一與第三。以任意之等倍數倍之。又取第二與第四。以任意之等倍數倍之。若第一之倍數。較第二之倍數。或大。或等。或小。從而第三之倍數。恆較第四之倍數。或大。或等。或小。則四量可為比例。

若四量 a, b, c, d 適合於比例之代數學的定義。則

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

故無論 m 及 n 之數值如何。恆得

$$\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$$

由是 $\begin{matrix} > \\ ma=nb & \text{從而} & mc=nd \\ < \end{matrix}$

故 a, b, c, d 亦適合於比例之幾何學的定義。

其次 a, b, c, d 適合於比例之幾何學的定義。

若 a 與 b 為可通約之數時。故 $a : b = m : n$ (但 m 與 n 為整數) 則

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore na = mb$$

然據定義 $\begin{matrix} > \\ na=mb & \text{從而} & nc=ma \\ < \end{matrix}$

由是 $na = mb$

故 $nc = md$

$$\therefore \frac{c}{d} = \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$

故 a, b, c, d 亦適合於比例之代數學的定義。

若 a 與 b 爲不可通約之數。則不能求得有二整數 m 與 n 之 $a:b = m:n$ 。(即 a 與 b 不能通約。則 m 與 n 不能成整數。如 m 與 n 必爲整數。則不能得 $a:b = m:n$)

然若取 a 之任意倍數 na 。則 na 當在 b 之以及次連續之倍數 mb 與 $(m+1)b$ 之間。

$$na > mb \quad \text{及} \quad na < (m+1)b$$

由是依定義得 $nc > md$ 及 $nc < (m+1)d$

$$\therefore \frac{c}{d} > \frac{m}{n} \quad \text{及} \quad \frac{c}{d} < \frac{m+1}{n}$$

由是 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ ，俱在 $\frac{m}{n}$ 與 $\frac{m+1}{n}$ 之間。

故 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 之差小於 $\frac{1}{n}$ ，而 n 可爲任何大。故

$\frac{a}{b}$ 不得不等於 $\frac{c}{d}$ 。

問題 LXI.

1 若 $a:b::c:d$ 求證以下各式

$$(1) ac:bd::c^2:d^2, \quad (2) ab:cd::a^2:c^2,$$

$$(3) a^2:c^2::a^2-b^2:c^2-d^2.$$

2. 若 $a:b=c:d$ 求證次式

$$2a+3c:3a+2c=2b-3d:3b-2d.$$

3. 若 $a:b::a+c:b+d$ 則 $c:d::c+a:d+b$. 求證

4. 若 $a:b=c:d$ 則

$$la+mb:pa+qb=lc+md:pc+qd. \text{ 求證}$$

5. 若 $3a-5b:3c-5d=5a+3b:5c+3d$ 則

$$a:b=c:d \text{ 求證}$$

6. 求 a^2b 與 ab^3 之比例中項,

7. 求 $(a+b)^2$ 與 $(a-b)^2$ 之比例中項.

8. 求 a 與 a^2 之比例末項又求 $(a-b)^2$ 與 a^2-b^2 之比例末項.

9. 若 $a:b::c:d$ 則 $ab+cd$ 爲 a^2+c^2 與 a^2+d^2 之比例中項求證.

10. 若 $a:b::c:d$ 求證次式.

$$(1) a, a+c::a+b:a+b+c+d,$$

$$(2) \quad a^2+ab+b^2 : a^2-ab+b^2 : c^2+cd+d^2 : \\ c^2-cd+d^2,$$

$$(3) \quad a+b : c+d : \sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{c^2+d^2},$$

$$(4) \quad \sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{c^2+d^2} : \sqrt[3]{a^3+b^3} : \sqrt[3]{c^3+d^3},$$

$$(5) \quad a^2c+ac^2 : b^2d+bd^2 : (a+c)^3 : (b+d)^3.$$

$$(6) \quad \sqrt[n]{a^n+b^n} : \sqrt[n]{c^n+d^n} : \sqrt[n]{a^n-b^n} : \sqrt[n]{c^n-d^n}.$$

11. 若 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ 求證 $\frac{x+y}{a+b} = \frac{y+z}{b+c} = \frac{z+x}{c+a}$.

及 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2$.

12. 若 $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$ 求證

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

13. 若 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = 2\frac{ac}{bd}$ 求證 $a : b = c : d$.

14. 若 $lx(my-mz)$, $my(lz-nx)$, $nz(mx-ly)$ 相等而非零求證 $mn+nl+lm=0$ 及 $yz+zx+xy=0$.

15. 若 $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$ 求證

$$(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z = 0.$$

16. 若 $a : b = c : d = e : f$ 求證

$$a^3+a^2c+ace : b^3+b^2d+ddf : ace+ac^2+c^3 : bdf+bd^2+d^3.$$

17. 若 $a : x :: b : y :: c : z$ 求證

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 : x^4 + x^2y^2 + y^4 :: b^4 + b^2c^2 + c^4 : y^4 + y^2z^2 + z^4$$

18. 若 $a : b = pa - qc : pb - qd$ 求證

$$c : d = pa + qc : pb + qd.$$

19. 若 $a : b = c : d$ 求證 $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} : \frac{c^3}{d} + \frac{d^3}{c} = ab : cd.$

20. 若 $4a - b : 4a + b :: 1 : 2$ 求 $7a + 3b : 7a - 3b$ 之數值.

21. 若 $xy + 3 : xz + 1 = y^2 + 3 : yz + 1$ 求證 $x = y$

又 $y = 3z.$

22. 若 $a + b - c : c + d + a = a - c : 2d$ 求證

$$b : a - c = a + c - d : 2d.$$

23. 若 $x - z : y - z = x^2 : y^2$ 求證

$$x + z : y + z = x^2 + 2xy : y^2 + 2xy.$$

24. 若 $a(y - z) + b(z - x) + c(x - y) = 0$ 求證

$$y - z : b - c = z - x : c - a = x - y : a - b.$$

25. $a : b :: c : d$ 求證

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 : (a + b)^2 + (c + d)^2 ::$$

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 : (a + b + c + d)^2.$$

變 數 法

207. 變數 如賣某物品。每斤價若干。則其價與其重量之關係。必重量為二倍。其價亦為二倍。重量為半分。其價亦為半分。逐次如此。其任意兩價之比。必恆等於相當兩重量之比。

二量有此關係。則二量中之一量。謂之因他一量變。

定義有二量。其一量之任意兩數值之比。等於他一量之相當數值之比。則謂之第一量。因他一量變。

如設一量中所度得之兩數為 a_1, a_2 之比。他量中所度得相當之兩數為 b_1, b_2 之比。則

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{從而} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

由是。二量之相當數值。恆為常比。

208. 記號 [因變]一語。可用記號 \propto 代之。

如 $A \propto B$ 。宜讀為[A因B變]。

若 $a \propto b$ 。則 $a : b$ 為常數。而此常數之比為 m 。

則 $\frac{a}{b} = m \quad \therefore a = mb$

欲求常數 m 。則於任何例。知 a 與 b 相當之一對數值可也。

如 $a \propto b$ 。若知 $b=2$ 時。 $a=10$ 。則

$$a = mb \quad \text{即} \quad 10 = m \times 2 \quad \therefore m = 5$$

由是 $a = 5b$

209. 反變數 有二量。其一量從他一量之反數而變。則謂之第一量。因第二量反變。

如 $a \propto \frac{1}{b}$ 即 $a = m \frac{1}{b}$ 即 $ab = m$ 則 a 因 b 反變
一量從他二量之積而變。則謂之第一量。因後二量合變。

如 $a \propto bc$ 即 $a = mbc$ 則 a 為與 b, c 合變。

有第一量與「第二量,及第三量之反數,之積」之比。若其比為常數。則謂之第一量。因第二量正變,因第三量反變。

如 $a \cdot b \times \frac{1}{c}$ 為常數。即 $a = m \frac{b}{c}$ 但 m 為常數。如是。則 a 因 b 正變。因 c 反變。

依上所示之定義變數法雖有種種不同。而其常數 m 。苟知其任意之一對數值。恆能決定。

如 a 因 b 正變, 因 c 反變。設 b 爲 2, c 爲 9, a 爲 6 則其式如次

$$a = m \frac{b}{c} \quad \therefore 6 = m \frac{2}{9}$$

$$\text{如是 } m = 27 \quad \therefore a = 27 \frac{b}{c}$$

210 定理 如 a 唯與 b 及 c 有關係。若 c 爲常數。則 a 因 b 變。又 b 爲常數。則 a 因 c 變。若 b 與 c 俱爲變數。則 a 因 bc 變。

設 $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ 爲相當之三種數值。

然 c 在第一種與第二種中相同。故

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \dots\dots\dots (1)$$

又 b' 在第二種與第三種相同。故

$$\frac{a'}{a''} = \frac{c}{c''} \dots\dots\dots (2)$$

由是。從 (1) 式與 (2) 式。

$$\frac{a}{a'} \times \frac{a'}{a''} = \frac{bc}{b'c''}$$

$$\text{即 } \frac{a}{a''} = \frac{bc}{b'c''}$$

此即證明本定理之式

今舉其命題之例如次。

如買牛肉一方。若其重量〔W〕爲常數。則牛肉之價〔C〕。因每斤之價〔P〕變。若每斤之價〔P〕爲常數。則牛肉之價〔C〕。因重量〔W〕變。由是。依上之定理。若重量〔W〕與每斤之價〔P〕俱爲變數。則牛肉之價〔C〕因重量〔W〕。與每斤之價〔P〕。之積變。

即若 W 爲常數。則 $C \propto P$

而 P 爲常數。則 $C \propto W$

若 P 與 W 俱爲變數。則 $C \propto PW$

又有三角形。若其高〔H〕爲常數。則其面積〔A〕。因其底〔B〕變。若其底〔B〕爲常數。則其面積〔A〕。因其高〔H〕變。又若其底〔B〕與其高〔H〕俱爲變數。則其面積〔A〕因其底〔B〕與高〔H〕之積變。

即 H 爲常數。則 $A \propto B$

B 爲常數。則 $A \propto H$

而 B 與 H 俱爲變數。則 $A \propto BH$

又如氣體之壓力。若絕對溫度〔T〕爲常數。則氣體之壓力〔P〕。因密度〔D〕變。若密度〔D〕爲常數。則氣體之壓力〔P〕因絕對溫度〔T〕變。若密度〔D〕與絕對溫度〔T〕俱爲變數。則氣體之壓力〔P〕因密度〔D〕與

絕對溫度 (T) 之積變。

即 $P \propto DT$

〔例 1.〕 若 $A \propto B$ 又 $A \propto C$, 則 $B \propto C$

何則。因 $A \propto B$ 故 $A = mB$ 但 m 爲常數。

而 $A \propto C$ 故 $A = nC$ 但 n 爲常數。

由是 $B = \frac{n}{m}C$ 但 $\frac{n}{m}$ 爲常數。故 $B \propto C$

〔例 2.〕 若 $C \propto WP$ 則 $W \propto \frac{C}{P}$

何則。因 $C \propto WP$, 故 $C = mWP$ 但 m 爲常數。

由是 $W = \frac{1}{m} \frac{C}{P}$ 但 $\frac{1}{m}$ 爲常數。故 $W \propto \frac{C}{P}$

〔例 3〕 氣體之壓力。恆與密度及絕對溫度合變
而密度爲 1。溫度爲 300。則壓力爲 15。今密度爲 3。
溫度爲 320。問其壓力幾何。

$$P \propto TD$$

故 $P = mTD$

但 m 爲常數

故按題意 $15 = m \times 300 \times 1$

$$\therefore m = \frac{1}{20}$$

$$\therefore P = \frac{1}{20} TD$$

由是 $D=3$. $T=320$ 則

$$P = \frac{1}{20} \times 320 \times 3 = 48$$

題 題 LXII.

1. A 因 B 變. 而 $B=3$, 則 $A=5$. 今 $B=5$. 問 A 爲幾何.
2. W 因 P 反變. 而 $P=15$, 則 $W=4$, 今 $P=12$. 問 W 爲幾何.
3. 若 $yccy$, 又 $yocz$ 則 $xzocy^2$, 求證.
4. 若 x^2ocy , 又 x^2ocy , 則 $xzocy$, 求證.
5. 若 $xoc\frac{1}{y}$, $-yoc\frac{1}{z}$, 則 $xocz$, 求證.
6. A 與 B, C 合變. 而 $B=2$, $C=6$, 則 $A=4$, 今 $B=2$, $C=9$, 問 A 爲幾何.
7. A 因 B 正變. 因 C 反變. 而 $B=3$, $C=4$, 則 $A=2$, 今 $A=6$, $C=3$, 求 B 之數值.
8. 圓之面積因其半徑之平方變. 而半徑 10 尺其圓之面積爲 314,159 平方尺. 然則半徑 12 尺之圓面積幾何.
9. 球之體積. 因其半徑立方變. 而球之半徑 1 尺.

則其體積爲 4,188 立方尺。問球之半徑 3 尺。其體積幾何。

10. 墜體由靜止墜落。因墜落之時間變。而在二秒末之速度爲 64 尺。問在五秒末之速度幾何。

11. 物體墜落之距離。因墜落時間之平方變。而某物體三秒間落 144 尺。然則二秒間墜落幾尺。

12. 已知圓之面積。因其半徑之平方變。求證半徑 5 尺之圓。等於半徑 3 尺與半徑 4 尺兩圓之和。

13. 氣體之體積。因絕對溫度正變。因壓力反變。而壓力爲 15, 溫度爲 280, 則體積爲 1 立方尺。問壓力爲 20, 溫度爲 300。則其體積幾何。

14. $a^2 - b^2$ 因 c^2 變。而 $a=5$, $b=3$, 則 $c=2$, 然則 a, b, c , 間之方程式如何。又求證 b 爲 $a-2c$ 與 $a+2c$ 之比例中項。

15. 直圓錐之體積。與其高及底半徑之平方合變。而高 7 尺。底之半徑 3 尺。則體積 66 立方尺。問高 9 尺。底半徑 14 尺。其體積幾何。

16. 球之體積。因其半徑之立方變。今有三個球彈其半徑爲 6, 8, 10, 寸。若熔之爲一球其半徑幾何。

17. 海中望遠。目力所及之距離。因眼高之平方根

變。而眼高 9 尺。所望見之距離爲 27 里。今眼高 49 尺。問所望見之距離幾何。

雜 題 V.

[A] 1. 若 $\frac{2a}{3} = \frac{3b}{4} = \frac{c}{2} = 1$ 求 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ 之數值。

2. 以 $3b^3 + 4a^3 - 2ab^2$ 除 $6a^2b^3 - 12a^4b + 3b^5 + 2a^3b^2 + 4a^5 - 11ab^4$

3. 求 $1-x-x^2+x^5$ 與 $1-x^4-x^6-x^7$ 之 H.C.F.

4. 化 $\frac{a^2-a^2b^{-2}-1+b^{-2}}{a+ab^{-1}+1+b^{-1}}$ 爲簡式

5. 某人以 10.5 圓買鴨 15 羽。鵝 12 羽。而問其價則 1.8 圓所買之鴨數。較 2 圓所買之鵝數多 2，然則鴨一羽之價幾何。

6. 方程式 $x^2 - px + q = 0$ 之兩根差。等於方程式 $x^2 - 3px + 2p^2 + q = 0$ 之兩根差。求證。

7. 問 3:4 之兩項加如何之最小整數。則能使此比較 19:21 大。

8. 若 $a+b, b+c, c+a$ 爲連比例則

$b+c:c+a::e-a:a-b$. 求證。

(B) 1. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$, 求次式之數值。

$$(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \div (x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{a-x^2}).$$

2. 以 $(a-1)x - a^2 - a - 1$ 乘

$$x^2 + (a-1)x + a + 1.$$

3 求以下三式之因數。

$$(1) x^3 - 13x^2y + 42xy^2,$$

$$(2) (a+2b+3c)^2 - 4(a+b-c)^2,$$

$$(3) x^2 - 4xy + 4y^2 - 9.$$

4 化 $\frac{x}{x-2y} + \frac{3x}{x+2y} + \frac{4xy}{4y^2-x^2}$ 爲簡式。

5. 解以下各方程式。

$$(1) \frac{10}{x} - \frac{3}{x+2} = \frac{10}{x+1},$$

$$(2) \left. \begin{array}{l} x+y+\sqrt{(x+y)}=12 \\ x^2-y^2 \quad \quad \quad =21 \end{array} \right\}$$

6 設 $x + \frac{1}{y} = 1, y + \frac{1}{z} = 1$, 求證 $z + \frac{1}{x} = 1$

及 $xyz + 1 = 0$ 。

7. 求 $9x^6 - 12x^4y^2 + 30x^2y^4 + 4x^2y^4 - 20xy^6 + 25y^6$

之平方根。

8. 二數之和與其差, 與其平方之和, 爲

3:1:15, 問此二數各幾何。

9. 若 $a:b::c:d$, 求證

$$la+mb:lc+md::\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}.$$

(C) 1. 由 $3\{b+2(a-c)-5(a-b)\}$ 減 $a-2(b-c)$.

2. 以 $a-b+\frac{b^2}{a}-\frac{a^2}{b}$ 乘 $a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}$.

3. 以 $27(a-b)$ 乘 $\frac{a^2+b^2}{9(a^2-b^2)}$, 而以 $\frac{3a-4b}{a^2-b^2}$

除 $\frac{9a^2-16b^2}{a+b}$.

4. 若 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, 求證

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$$

5. 求 $a^{\frac{1}{2}}+4ay^{\frac{1}{2}}+10a^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+12a^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}}+9y^{\frac{1}{2}}$ 之平

方根。

6. 若 $x=2+\sqrt{2}$, 求證 $(x-1)(x-2)=x$.

7. A, B 同時由兩府起程, 相向而行。七點鐘相會。但 A 較 B 每點鐘遲行二里。又 B 較前每點鐘速行一里。A 每點鐘行前速之半。當九點鐘相會。問兩府之距離幾何。

8. 若 $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$, 求證

$$\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}.$$

(D) 1. 求證 $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right)^2 - \left(\frac{a^3+b^3}{a+b}\right)^2 = 4ab(a^2+b^2)$

2. 以 $x^2 - (a+b)x + ab$ 除

$$x^4 - 2bx^3 - (a^2 - b^2)x^2 + 2a^2bx - a^2b^2$$

3. 求 $x^2 - 7x + 12$, $3x^2 - 6x - 9$, $2x^2 - 6x^2 - 8x$

之 L.C.M.

4. 化 $\frac{\frac{y}{x} - \frac{y}{y+z}}{\frac{1}{xz} + \frac{1}{zy+z^2}} \left\{ 1 + \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz} \right\}$ 爲簡式

式

5. 解以下各方程式

(1) $\frac{5x+7}{2} - \frac{2x-7}{3} = 8x+14$,

(2) $\left. \begin{array}{l} y^2 - xy = 15 \\ x^2 + xy = 14 \end{array} \right\}$.

6. 有馬車。行 2 里 336 步。前輪較後輪多回轉 64 回。而行 29 里 120 步。前後兩輪回轉數之和爲 7010。問輪周各幾何。

7. 以 $2x^{\frac{1}{2}} - 15y^{\frac{1}{2}}$ 除

$$2x^{\frac{3}{2}} - 15xy^{\frac{1}{2}} + 17x^{\frac{1}{2}}y - 15y^{\frac{3}{2}}$$

8. $a : a$, $b : \beta$, $c : \gamma$ 皆相等。則此各比等於

$a+b+c : a+\beta+\gamma$ 求證

[E] 1. 化 $2\{x-2a-\frac{1}{3}(x-a)+a\}-\frac{1}{3}\{(x-a)-(a-b)+y-b\}$ 爲簡式

2. 以 $ax+2(b-c)y$ 除

$$2a^2x^2-2(3b-4c)(b-c)y^2+abxy$$

3. 求以下各式之因數

(1) $4a^2b^4-16a^4b^2,$

(2) $x^2-26x-87,$

(3) $3x^2-xy-10y^2.$

4. 證 $\frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$

$$= \left(\frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y} \right)^2.$$

5. 某人買某物品若干個。共金額 50.40 圓。若以此金額。能較前多買六個。則每個廉 1 角 5 分。問買物品幾何。

6 以 $\sqrt{(x-a)}-\sqrt{a}+\sqrt{x}$ 乘

$$\sqrt{(x-a)}+\sqrt{a}-\sqrt{x}$$

7. 證 $x^2-\frac{1}{y^2}$ 與 $y^2-\frac{1}{x^2}$ 之比例中項爲

$$xy-\frac{1}{xy}$$

8. 若 $a : b :: c : d$, 證

$$a^2 + b^2 : c^2 + d^2 :: (a+b)^2 : (c+d)^2.$$

(F) 1. 以 $a+b-c+d$ 乘 $a-b+c-d$.

2. 以 $a+b+c$ 除

$$c^3 + b^3 + c^3 + 3(b+c)(c+a)(a+b).$$

3. 求 $x^3 - 19x + 30$ 與 $5x^3 - 19x^2 + 36$ 之 H.C.F.

又問此二式以何數代 x 則俱爲零。

4. 證 $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{8ab(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2}$.

5. 解次之各方程式。

$$(1) \quad \frac{6x-7}{9x+6} - \frac{5(x-1)}{12x+8} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} 4x+6y=3 \\ 4x^2+9xy+9y^2=11 \end{array} \right\}$$

6. 化 $\frac{2\sqrt{\frac{1}{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$ 及

$$\left\{ x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{y} \right) \div x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \right\} \text{ 爲簡式.}$$

7. 求 $x^{12} - 6x^{10} + 13x^8 - 14x^6 + 10x^4 - 4x^2 + 1$ 之

平方根。

8. 若 $a : b :: c : d$, 求證 $a^3 c^3 : b^3 d^3 :: a^5 + c^5 : b^5 + d^5$.

第二十二編

等 差 級 數

211. 定義 諸數量之級數其任意一項與其前項之差恆相等。謂之等差級數

如 $b-a=c-b=d-c$ 則 a, b, c, d, \dots 等爲等差級數
(恆略記爲 ΔP .)

等差級數。其各項與其前項之差。謂之公差。
次所示者。爲等差級數之例。

1, 3, 5, 7, 等

2, 6, 10, 14, 等

9, 8, 7, 6, 等

3, -1, -5, -9, 等

此等差級數之公差。在第一列爲 2, 第二例爲 4,
第三列爲 -1, 第四列爲 -4

212. 等差之項 令等差級數之初項爲 a ,
公差爲 d , 則

第二項爲 $a+d$

第三項爲 $a+2d$

第四項爲 $a+3d$

遞次如此。 d 之係數較項之係數恆少1。

由是第 n 項爲 $a+(n-1)d$

故知 A.P. 之初項與公差則能求其任意之項。

如 A.P. 之初項爲 5, 公差爲 3, 則

第 9 項爲 $5+(9-1)3=29$

第 27 項爲 $5+(27-1)3=83$

213. 各項及公差 知 A.P. 任意之二項。

則能求其初項與公差故能決定此級數。

如 A.P. 之第 10 項爲 25, 第 15 項爲 5, 求決定此級數。

設初項爲 a , 公差爲 d , 則第 10 項爲 $a+9d$ 第 15 項爲 $a+14d$

由是得 $a+9d=25$

及 $a+14d=5$

由減法得 $5d=-20 \quad \therefore d=-4$

而 $a=25-9d=25-9(-4)=61$

故此級數爲 61, 57, 53, ……………等

(例) A.P. 之第 12 項爲 15, 第 19 項爲 36, 求第 30 項。

設初項爲 a , 公差爲 d

然第 12 項爲 $a+11d$, 第 19 項爲 $a+18d$,

由是. 按題意 $a+11d=15$

及 $a+18d=36$

由減法 $7d=21 \quad \therefore d=3$

然 $a=15-11d=15-33=-18$

由是 第 30 項 $-a+29d=-18+29 \times 3=69$

214. 等差中項 三量爲等差級數. 則其中央之量謂之他二量之等差中項。

如 a, b, c , 爲 A.P. 則 b 爲 a 與 c 之等差中項。

由等差級數之定義. $b-a=c-b$

$$\therefore b = \frac{1}{2}(a+c)$$

即任意二量之等差中項. 爲二量和之半.

215. 諸等差中項 若干數量成等差級數則除首尾兩項外. 其他之各項. 皆爲首尾兩項之

等差中項。

所設任意兩數量之間，可插入等差中項若干。

如 10 與 25 之間，欲插入四個等差中項，此例題。乃求 10 與 25 間，有四項之等差級數，故 10 爲 A.P. 之初項，25 爲其第六項。

設公差爲 d 則 第 6 項 爲 $10+5d$

$$\therefore 10+5d=25 \quad \therefore d=3$$

故此級數爲 10, 13, 16, 19, 22, 25, 而所求 10 與 25 間之四個等差中項，如次

$$13, 16, 19, 22,$$

由是，更究其通例。(即 a 與 b 間插入等差中項 n 個之法)

此例乃求 a 與 b 間有 n 項之等差級數。(即 A.P.)

故 a 爲 A.P. 之初項， b 爲其第 $(n+2)$ 項。

設 d 爲公差，則第 $(n+2)$ 項 爲 $a+(n+1)d$

$$\therefore a+(n+1)d=b,$$

$$\therefore (n+1)d=b-a.$$

$$\therefore d=\frac{b-a}{n+1}.$$

故此級數，如次

$$a, a + \frac{b-a}{n+1}, a + 2\frac{b-a}{n+1}, \dots, a + n\frac{b-a}{n+1}, b.$$

而所求之等差中項。如次

$$a + \frac{b-a}{n+1}, a + 2\frac{b-a}{n+1}, a + 3\frac{b-a}{n+1}, \dots, a + n\frac{b-a}{n+1}$$

$$\text{即 } \frac{na+b}{n+1}, \frac{(n-1)a+2b}{n+1}, \\ \frac{(n-2)a+3b}{n+1}, \dots, \frac{a+nb}{n+1}.$$

問題 LXIII.

1. 求以下各等差級數之第30項

(1) 3, 5, 7, 等 (2) 1.5, 9, 等

(3) 12, 9, 6, 等 (4) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, 等

(5) $a+b, a, a-b$, 等

2. 求以下各級數之末項

(1) 3, 6, 9, 等。至24項止

(2) 5, 9, 13, 等。至30項止

(3) 6, 5, 4, 等。至10項止

(4) 14, 46, 78, 等。至12項止

(5) $6, 8\frac{1}{2}, 11\frac{1}{2}$, 等。至14項止

(6) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$, 等。至 25 項止

3. A.P. 之第 10 項爲 6 第 6 項爲 10 求其初項
4. A.P. 之第 12 項爲 15 第 20 項爲 25 求其公差
5. A.P. 之第 7 項爲 5 第 12 項爲 30 求其公差
6. A.P. 之第 3 項爲 40 第 13 項爲 25 求其初項
7. A.P. 之初項爲 7 第 3 項爲 13 問第 10 項幾何
8. A.P. 之初項爲 20 第 6 項爲 10 問第 12 項幾何
9. A.P. 之第 3 項爲 10 第 14 項爲 54 求其第 20 項
10. A.P. 之第 7 項爲 5 第 5 項爲 7 求其第 12 項
11. 問級數 5, 8, 11, 等之第幾項爲 65
12. 問級數 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, 等之第幾項爲 18
13. 問級數 9, 13, 17, 等之第幾項爲 229
14. 問級數 $16a-8b, 15a-7b, 14a-6b$, 等之第幾項爲 $8a$
15. 書 (1) 7 與 13, (2) 9 與 -9, (3) $a+b$ 與 $a-b$ 之等差中項。
16. 求於 8 與 29 間插入六個等差中項
17. 求於 50 與 80 間插入八個等差中項
18. 求於 269 與 295 間插入七個等差中項
19. 求於 67 與 43 間插入十五個等差中項

20. 求於 84 與 $40\frac{1}{2}$ 間插入二十五個等差中項
21. 求於 $5a-6b$ 與 $5b-6a$ 間插入十個等差中項
22. 求於 $a-5b$ 與 $b-5a$ 間插入八個等差中項
23. a, b, c, d 爲 A.P. 求證 $a+d=b+c$
24. A.P. 之初項與第四項之和爲 19 又第三項與第六項之和爲 31 問初項幾何。
25. A.P. 之第二項與第五項之和爲 32 又第三項與第八項之和爲 48 問初項幾何
26. A.P. 之第三項與第四項之和爲 187 又第七項與第八項之和爲 147 問第二項幾何
27. A.P. 之第二項與第二十項之和爲 2 又第九項與十五項之和爲 8 問第六項與第七項之和幾何。
28. A.P. 之各項以相同之數加之其各和仍爲 A.P. 求證。
29. A.P. 之各項以相同之數乘之其各積仍爲 A.P. 求證。
30. 於 A.P. 之各項每間一項取去一項則其餘之各項仍爲 A.P. 求證。
31. A.P. 之相連續兩項間各插入其等差中項則

全部仍爲 A.P. 求證。

32. 四數爲 A.P. 其第一與第二之積。恆較第二與第三之積小。

216. 等差級數若干項之和

設初項爲 a ，公差爲 d ，項數爲 n ，末項爲 l ，則 l 爲第 n 項。故 $l = a + (n-1)d$ 。

由是若 S 爲所求之和，則

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (l-2d) + (l-d) + l.$$

逆推之，則

$$S = l + (l-d) + (l-2d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a.$$

$$2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots \text{至 } n \text{ 項} = n(a+l).$$

$$\therefore S = \frac{n}{2}(a+l) \dots \dots \dots (1)$$

然 $a+l = a + \{a + (n-1)d\} = 2a + (n-1)d$

$$\therefore S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} \dots \dots \dots (2)$$

(1) 與 (2) 兩公式俱極緊要。故宜熟記。又 a, d, n, S 中。任知其三數。則由公式 (2)，可求其他一數。

〔例 1.〕 求級數 $5+8+11+\dots$ 至 20 項之和。

此題 $a=5, d=3, n=20,$

$$\therefore S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\} = \frac{20}{2} \{10 + 19 \times 3\} = 670$$

〔例2.〕由1起,連續各奇數之和,爲項數之平方數,求證。

奇數之級數爲 $1+3+5+7+\dots\dots\dots$

此題 $a=1, d=2,$ 由是 n 項之和如次。

$$\begin{aligned} S &= \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\} \\ &= \frac{n}{2} \{2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2} \times 2n = n^2 \end{aligned}$$

即由一起, n 個連續奇數之和爲 n^2

〔例3.〕有等差級數 20 項之和爲 410, 而初項爲 30, 問公差幾何。

$$S=410, a=30, n=20 \text{ 代入 } S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$410 = \frac{20}{2} \{60 + 19d\}$$

由是得 $d = -1$

〔例4.〕級數 $11+12+13+\dots\dots\dots$ 之和爲 410, 其項數如何。

$$\text{以 } a=11, d=1, S=410, \text{ 代入 } S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$\text{則} \quad 410 = \frac{n}{2} \{22 + (n-1)\},$$

$$\therefore n^2 + 21n - 820 = 0,$$

$$\text{即} \quad (n-20)(n+41) = 0,$$

$$\therefore n = 20, \text{ 或 } n = -41.$$

知 a, S, d , 求 n . 須解二次方程式. 而 n 爲項數. 必爲正整數. 且祇爲一數. 故所解得之二根. 必有一根不合理.

在本例. 宜棄去 -41 , 唯以 20 爲 n 之數值.

[注意] $n = -41$, 可說明其理如次. 有某級數. 由初項順次取之. 其項數 n 常爲正整數. 又由末項逆次取之. 其項數 n 常爲負整數. 故 n 爲負數. 有時亦合理.

[例 5.] 級數 $24 + 21 + 18 + \dots$ 之和爲 105 . 問項數幾何.

$$\text{以 } a=24, d=-3, S=105 \text{ 代入 } S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\},$$

$$105 = \frac{n}{2} \{48 + (n-1)(-3)\},$$

$$\therefore 210 = n\{48 - 3n + 3\},$$

$$\therefore n^2 - 17n + 70 = 0.$$

由是 $n=7$ 或 $n=10$,

n 之兩數值,俱為正整數。故俱合於題意。

n 雖為兩種數值,而 A.P. 之和仍相同。故用 n 之大數值較用 n 之小數值時。其所增加諸項之和恆等於零。於本例。其所增加之項為 3, 0, -3, 其和原等於零。

問題 LXIV.

求以下各級數之和。[1至17].

1. $2+4+6+\dots$ 至 20 項止。
2. $15+14\frac{1}{2}+14+\dots$ 至 16 項止。
3. $1+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}+\dots$ 至 12 項止。
4. $-5-1+3+\dots$ 至 20 項止。
5. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\dots$ 至 7 項止。
6. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\dots$ 至 61 項止。
7. $10+1^2+2^2+\dots$ 至 7 項止。
8. $\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\dots$ 至 15 項止。
9. $3\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+\dots$ 至 n 項止。
10. $1\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}+2\frac{1}{6}+\dots$ 至 n 項止
11. $8+7\frac{1}{2}+6\frac{1}{2}+\dots$ 至 19 項止。

12. $4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{3} + 3\frac{1}{6} + \dots$ 至 31 項止。

13. $5 + 6.2 + 7.4 + \dots$ 至 21 項止。

14. $\frac{1}{\sqrt{2+1}} + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2-1}} + \dots$ 至 7 項止。

15. $\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \frac{n-3}{n} + \dots$ 至 n 項止。

16. $n+1 + (2n+3) + (3n+5) + \dots$ 至 n 項止。

17. $(a+b)^2 + (a^2+b^2) + (a-b)^2 + \dots$ 至 n 項止。

18. A.P. 之第三項為 15 而第二十項為 $23\frac{1}{2}$ 求由第一項至二十項之和。

19. A.P. 之第五項為 37, 而第十三項為 81. 求由第一項至二十四項之和。

20. 有由 25 起之連續奇數. 試求其二十項之和。

21. 至 99 止之連續奇數. 試求其四十項之和。

22. 於 5 與 50 間. 插入等差中項 29 個. 試求其和。

23. 於 10 與 100 間. 插入等差中項 40 個. 試求其和。

24. A.P. 之初項為 3, 末項為 107 而項數為 27. 求其中央之項及各項之和。

25. A.P. 之初項為 7, 末項為 1015, 而項數為 71, 求其中央之項及各項之和。

26. A.P. 之初項爲 8, 末項爲 -4 . 而項數爲 19, 求其級數之和。
27. 級數 3, 5, 7, \dots , 試求由第七項至二十項之和。
28. 級數 6, 9, 12, \dots , 試求其由第五項至三十五項之和。
29. A.P. 之初項爲 2, 其前十項之和爲 155. 問公差幾何。
30. A.P. 之初項爲 6, 其前二十五項之和爲 25. 求其公差。
31. A.P. 前十項之和爲 100, 其第六項爲 11, 問初項幾何。
32. A.P. 前二十八項之和爲 133, 而第五項爲 0, 問公差幾何。
33. 級數 3, 8, 13, \dots , 其連續十項之和爲 705, 問初項幾何。
34. 級數 5, 8, 11, \dots , 其連續二十五項之和爲 1025. 問初項幾何。
35. 級數 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ 之和爲零. 問項數如何。
36. 級數 15, 12, 9, \dots 之和爲 45. 問項數如何。

37. $1 - \frac{1}{a}, 1 - \frac{3}{a}, 1 - \frac{5}{a}, \dots$ 之和爲 $-6a$ 。問項數如何。
38. 級數 $-8, -7, -6, \dots$ 之和爲 42。問項數如何。
39. A. P. 之初項爲 1, 末項爲 99, 而各項之和爲 450。問項數幾何。
40. A. P. 之項數爲 20, 末項爲 62, 而和爲 670, 問公差幾何。
41. A. P. 之第九項爲 136, 由第一項至十九項之和爲 2527, 求由第一項至四十項之和。
42. A. P. 之第八項爲 6。問十五項之和幾何。
43. A. P. 之第十八項爲 15。問三十五項之和幾何。
44. A. P. 之第 $n+1$ 項爲 100, 求 $2n+1$ 項之和。
45. 若 A. P. 之項數爲任意之奇數, 則其初項, 中項, 末項, 亦爲 A. P. 求證。
46. 級數 8, 16, 24, 等若干項之和加 1。其結果爲奇數之平方。求證。
47. 求 100 與 200 間一切奇數之和。
48. 求 101 與 999 間一切偶數之和。
49. 求 100 與 500 間一切 3 之倍數之和。
50. 某人初年蓄金 20 圓。由次年起。遞次多蓄 10

圓。問經過幾年。則此人之蓄金爲1700圓。

51. A.P. 十項之和爲145。其第四項與第九項之和爲第三項之五倍。求決定其級數。

52. A.P. 之項數爲 $2n+1$ ，則其奇數項之和與偶數項之和之比。爲 $n+1:n$ ，求證

53. A.P 之項數爲21，末三項之和爲117。中央三項之和爲90，求此級數。

54. 等差級數87, 85, 83, 等 n 項之和。等於等差級數3, 5, 7, 等 n 項之和。求 n 之數值。

55. 等差級數43, 45, 47, 等 n 項之和。等於45, 43, 41, 等 $2n$ 項之和。求 n

56. 分80爲四部分。但其四部爲A.P. 而第一與第四之積須等於第二與第三之積之三分之二。

57. 有數四爲A.P. 其平方之和爲120，而第一與第四之積，較第二與第三之積少8。問此四數幾何。

58. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ，爲A.P. 則 $(s-a)^2, (s-b)^2, (s-c)^2$ ，亦A.P. 求證。但 $2s=a+b+c$

59. a, b, c ，爲A.P. 則 $a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$ 亦爲A.P. 求證。

第二十三編

等 比 級 數

217. 定義 諸數量之級數。其任意一項與其前項之比恆相等。謂之等比級數。

例若 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$ 等等。則 a, b, c, d 等爲等比級數。

[略記爲 G.P.]

等比級數其各項與其前項之比。謂之公比。

以下所示。爲等比級數之例。

1, 3, 9, 27, 等

4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, 等

$\frac{1}{2}$, -1, $\frac{1}{2}$, -1, 等

此等比級數之公比。在第一列爲 3, 第二列爲 $\frac{1}{2}$, 第三列爲 $-\frac{1}{2}$ 。

218. 等比之項 設等比級數之初項爲 a , 公比爲 r , 則

第二項爲 ar ,

第三項爲 ar^2 ,

第四項爲 ar^3 ,

逐次如此。 r 之指數其數恆較項數少1。

由是第 n 項爲 ar^{n-1} 。

故知 G.P. 之初項與公比。則能求其任意之項。

如 G.P. 之初項爲 5, 公比爲 3, 則

第四項爲 $5 \times 3^{4-1} = 5 \times 3^3$

第十項爲 $5 \times 3^{10-1} = 5 \times 3^9$

219. 各項及公比 知 G.P. 之任意兩項。則能求其初項與公比。故能決定此級數。

如 G.P. 之第 5 項爲 $\frac{8}{9}$, 第 7 項爲 $\frac{32}{81}$ 求決定此級數。

設初項爲 a , 公比爲 r 。則第 5 項與第 7 項爲 ar^4 與 ar^6 。

由是得 $ar^4 = \frac{8}{9}$

及 $ar^6 = \frac{32}{81}$

由除法 $r^2 = \frac{4}{9}$ 。

$$\therefore r = \pm \frac{2}{3}$$

然 $a \times \frac{16}{81} = \frac{8}{9}$ 故 $a = \frac{9}{2}$

故此級數為 $\frac{9}{2}, \pm 3, 2, \pm \frac{4}{9}$ 等等

〔例〕 G.P. 之第 4 項為 189, 而第 6 項為 1701,
求第 8 項。

設初項為 a , 公比為 r 。

然第 4 項為 ar^3 , 第 6 項為 ar^5 。

由是, 按題意得

$$ar^3 = 189 \quad \text{及} \quad ar^5 = 1701$$

由除法 $r^2 = 9 \quad \therefore r = \pm 3$

然 $a = 189 \div (\pm 3)^3 = \pm 7$

由是, 第 8 項為 $ar^7 = \pm 7(\pm 3)^7 = 15309$

220. 等比中項 三量為等比級數, 則其中
中央之量, 謂之他二量之等比中項。

如 a, b, c 為 G.P. 則 b 為 a 與 c 之等比中項。

由等比級數之定義 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

$$\therefore b^2 = ac$$

$$\therefore b = \pm\sqrt{ac}$$

即任意二量之等比中項爲其積之平方根。

成連比例之諸量(203款)亦爲等比級數。宜注意。

221. 諸等比中項 若干數量爲等比級數則除首尾兩項外。其他之各項。謂之首尾兩項之等比諸中項。

所設二量之間。可插入等比中項若干。

如欲在5與80間。插入三個等比中項。此題乃求5與80間有三個等比中項之等比級數。(即G.P.)故5爲G.P.之初項。80爲其第五項。

設公比爲 r 。則第五項爲 ar^4

$$\text{故 } 5r^4 = 80 \quad \therefore r^4 = 16 \quad \therefore r = \pm 2$$

因而此級數爲5, ± 10 , 20, ± 40 , 80,

故所求之中項爲 ± 10 , 20, ± 40 。

由是究其通法。(即於 a 與 b 間插入等比中項 n 個之法)

此例乃求 a 與 b 間有 n 項之G.P.故 a 爲G.P.之初項。 b 爲其第 $n+2$ 項。

設 r 爲公比。則第 $n+2$ 項爲 ar^{n+1}

$$\therefore ar^{n+1} = b$$

$$\therefore r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

由是所求之中項爲 $ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^n$

但
$$\underline{r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}}$$

問 題 LXV.

1. 求以下各等比級數之第六項

(1) 9, 3, 1, 等.

(2) 2, -3, $\frac{1}{2}$, 等.

(3) a^2, ab, b^2 , 等.

2. G.P. 之初項爲 3, 第三項爲 4, 問第五項幾何.

3. G.P. 之第三項爲 1, 第六項爲 $-\frac{1}{8}$, 問第十項幾何.

4. G.P. 之第四項爲 .016, 第七項爲 .000128, 問初項幾何.

5. G.P. 之第六項爲 156, 第八項爲 7644, 問第七項幾何.

6. G.P. 之第三項爲 2.25, 第七項爲 11.390625, 問

第五項幾何。

7. G.P.之第三項爲4,第六項爲 $-\frac{1}{4}$,問第十項幾何。

8. G.P.之第四項爲 $\frac{1}{16}$,第七項爲 $-\frac{1}{4}$,問第六項幾何。

9. 求(1)4與9,(2)7與252.(3) a^3b 與 ab^3 之等比中項。

10. 於1與-8間插入兩個等比中項,又於12與 $\frac{3}{4}$ 間插入三個等比中項,又於 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{11}{12}$ 間插入四個等比中項。

11. 於3與.000192間插入五個等比中項。

12. 於 a^3b^{-6} 與 $a^{-2}b^4$ 間插入四個等比中項。

13. G.P.之第三項與第四項之和爲40,而第六項與第七項之和爲2560,問初項幾何。

14. G.P.之第一項與第二項之和爲72,而第三項與第四項之和爲8,問第一項幾何。

15. a, b, c, d 爲G.P.求證 $ad=bc$

16. G.P.之各項各以相同之數乘之,其積亦爲G.P.求證。

17. G.P.各項之反數亦爲G.P.求證。

18. G.P. 之各項每間一項取去一項。則其餘之各項亦爲 G.P. 求證。

19. G.P. 之相連續兩項間。各插入其等比中項。則全體亦爲 G.P. 求證。

20. 距 G.P. 之初項與末項爲等距離之任意二項。其積等於初項與末項之積。求證。

222. 級數之和

求等比級數若干項之和。
設初項爲 a ，公比爲 r ，項數爲 n ，末項爲 l ，則 l 爲第 n 項。故 $l = ar^{n-1}$

由是設 S 爲所求之和。則

$$S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

以 r 乘之。則

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

故由減法 $S - Sr = a - ar^n$,

即 $S(1-r) = a(1-r^n)$,

$$\therefore S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

上之公式亦可用他之記法。

何則。 $l = ar^{n-1}$

故
$$S = \frac{a - r^n}{1 - r}$$

〔例1.〕 求級數 1, 2, 4, 等十項之和。

今 $a = 1, r = 2, n = 10.$

$$\therefore S = a \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2^{10} - 1 = 1023.$$

〔例2.〕 求級數 $2 - 3 + \frac{9}{2} - \dots$ 六項之和

今 $a = 2, r = -\frac{3}{2}, n = 6.$

$$\therefore S = a \frac{1 - r^n}{1 - r} = 2 \frac{1 - (-\frac{3}{2})^6}{1 - (-\frac{3}{2})}$$

$$= 2 \frac{1 - \frac{3^6}{2^6}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{4}{5} \left(1 - \frac{3^6}{2^6} \right) = -8 \frac{5}{16}.$$

223. 無窮級數之和 任意之等比級數

取其項數極多時。其和似極大。然實不然。可舉一例以明之。

今有長二寸之線。分之爲二等分。去其一部分。又分其一部分爲二等分。去其一部分。逐次如此。如是依次所取去之寸數爲 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ 等等。然取去各部分

之和決不能過於2寸。而所餘之部分。分爲二等分。愈多次。則其限愈小。故所取去各部之和。其與二寸之差。可爲不可思議之小。

由是 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ 之和。取至無窮限。可設爲等於2。

依 222 款。
$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

若 r 爲真分數。則其正負無論如何。其 r^n 之絕對值。必從 n 之增加而減少。且 n 之數值增至無窮大。則 r^n 可爲不可思議小。

由是。 r 之絕對值小於一。則級數之和與 $\frac{a}{1-r}$ 之差。必因項數增加而減小。故限數取至極多。則可爲不可思議小。故等比級數 $a + ar + ar^2 + \dots$ 若 r 之絕對值小於一。則其無窮項數之和爲 $\frac{a}{1-r}$ 。

(例 1.) 求 (1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ 與 (2) $9 - 6 + 4 - \dots$ 之無窮項數之和。

於 (1) 式 $a=1, r=\frac{1}{2},$

$$\therefore S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

於 (2) 式 $a=9, r=-\frac{2}{3},$

$$\therefore S = \frac{a}{1-r} = \frac{9}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{9}{\frac{5}{3}} = \frac{27}{5}$$

〔例2.〕 求 $.234$ 之數值

$$.234 = .23444\cdots = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{4}{10^5} \cdots$$

$$\frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} \text{ 至無窮項} = \frac{\frac{4}{10^3}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \times \frac{4}{10^3} = \frac{4}{900}$$

$$\text{由是 } .234 = \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{900} = \frac{211}{900}$$

〔例3.〕 等比級數之第二項爲 -8 而至無窮項之和爲 18 求此級數。

設初項爲 a , 公比爲 r 則第二項爲 ar 而至無窮項之和爲 $\frac{a}{1-r}$.

$$\text{由是得 } ar = -8,$$

$$\text{及 } \frac{a}{1-r} = 18,$$

$$\text{故由除法 } r(1-r) = \frac{-8}{18},$$

$$\therefore r^2 - r = \frac{4}{9},$$

$$\therefore r = -\frac{1}{3}, \text{ 或 } r = \frac{4}{3}.$$

若 $r = -\frac{1}{3}$ 則 $a = \frac{-8}{r} = 24$

故此級數爲 $24, -8, \frac{8}{3},$

$r = \frac{4}{3}$ 之數值爲不合理。何則。因 r 之絕對值非小於一。則不能用公式 $S = \frac{a}{1-r}$ 。求其等比級數之和故也。

問 題 LXVI.

求以下各級數之和 [1 至 10]..

1. $8+12+18+27+\dots$ 至 n 項。
2. $12+9+6\frac{3}{4}+\dots$ 至 6 項。
3. $a + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \dots$ 至 n 項。
4. $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} + \dots$ 至 8 項。
5. $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots$ 至 6 項。
6. $12-9+6\frac{3}{4}-\dots$ 至無窮項。
7. $4+1.2+.36-.108+\dots$ 至無窮項。
8. $4+.8+.16+\dots$ 至無窮項。
9. $a^2+ab+b^2+\dots$ 至 n 項。

10. $3-2+\frac{1}{3}-\dots\dots\dots$ 至無窮項。
11. 求自2至4096, 2之各連續方乘之和。
12. 求級數 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\dots\dots\dots$ 至無窮項之和至小數四位止。
13. 求 $4x^2-12x+9$ 與 $9x^2+12x+4$ 之等比中項。
14. 設 G.P. 之項數為 n 而 n 為任意之奇數。則此 n 項之積。等於中項之 n 乘方求證。
15. G.P. 之第二項為 $\frac{1}{2}$ 。而至無窮項之和為 4 求其 G.P.
16. G.P. 之第二項為 -4 。而至無窮項。其和為 9 求其 G.P.
17. 某 G.P. 之前十項之和等於前五項之和之 33 倍。求其公比。
18. 等比級數至無窮項之和為初項之 n 倍則公比為 $1-\frac{1}{n}$ 求證。
19. G.P. 之公比為正。而小於 $\frac{1}{2}$ 則任意一項較以下之各項之和。求證。
20. G.P. 之第六項為第三項之 8 倍而前二項之和為 24 求此級數。

21. 求級數 $\frac{a}{a+b} + \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \dots$

至無窮項之和。

22. 求級數 $1 + \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{a}\right)^3 + \dots$

至無窮項之和。

23. 若 $S_1 = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{2n}$,

及 $S_2 = a - ar + ar^2 - ar^3 + \dots + ar^{2n}$

則 $S_1 S_2 = a^2 + a^2 r^2 + a^2 r^4 + \dots + a^2 r^{4n}$ 求證。

24. 求級數 $\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + \dots$ 至無窮項之和。

25. G.P. 之第六項為 $\frac{1}{33614}$ 而第二項為 $\frac{1}{14}$ 求其至無窮項之和。

26. 三數為 G.P. 且其和為 14 而其平方之和為 84 問三數幾何。

27. G.P. 之第一, 第二, 第三, 三項之和為 42 而第四項較第一項多 126, 問此級數如何。

28. G.P. 之第一, 第二, 第三, 三項之和與第三, 第四, 第五, 三項之和之比為 1:4 而第五項為 8, 問此級數如何。

29. a, b, c, d 為 G.P. 則 $a+b, b+c, c+d$, 又 a^2+b^2 ,

b^2+c^2, c^2+d^2 亦為 G. P. 求證。

30. a, b, c , 為 G. P. 之第 p , 第 q , 第 r , 三項則
 $a^{q-r}b^{-p}c^{r-p}=1$ 求證。

31. 若 $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$ 則 a, b, c , 為 G. P.

224. 餘論 級數不言明諸項之關係者(即不詳其種類者)往往有之。然知其若干項。即於單簡之例。恆能定其關係。

如於級數 3, 9, 15, 等。 $9-3=6, 15-9=6$, 故此級數為等差級數。

又於級數 3, 9, 27, 等。 $9-3=6, 27-9=18$, 故此級數非等差級數。而欲試此級數為等比級數與否。則 $\frac{9}{3}=\frac{27}{9}$, 故此級數為等比級數。其公比為 3。

問題 LXVII.

求以下各級數之和 [1 至 10]。

1. 2, 2.7, 2.4 等至 21 項。
2. 2, 18, 162 等至 7 項。
3. 1, .2, .04 等至無窮項。
4. $a, b, \frac{b^2}{a}$ 等至 n 項。

5. .3, .03 .003 等至無窮項。
6. $3+4.3+5.6+\dots$ 至11項。
7. $a + \frac{4a+b}{8} + \frac{5a+2b}{8} + \dots$ 至19項。
8. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\dots$ 至8項。
9. $3\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots$ 至無窮項。
10. $2\frac{1}{2}+6\frac{1}{2}+15\frac{1}{2}+\dots$ 至5項。
11. 試將以下各級數加至六項而求其和。又加至無窮項而求其和。
- (1) $2\frac{1}{2}+6\frac{1}{2}+10+\dots$ (2) $9+5+1+\dots$
- (3) $4-3+\frac{1}{2}-\dots$ (4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$
- (5) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$
12. 等比級數之項數為奇數。則其初項與中項與末項亦為等比級數。求證。
13. A. P. 之前七項之和為49。而次之八項之和為176。問此級數如何。
14. 有等比級數其第一項與第三項之等差中項。為第二項之五倍。求其公比。
15. 等差級數之第四項為第二項與第七項之等比中項。則第六項為第二項與第十四項之等比

中項求證。

16. 等比級數之初項爲 a 。末項爲 l 。而其 n 項之連乘積爲 P 求證 $P^2 = (al)^n$

17. 成 G.P. 之三數。其連乘積爲 216。而各兩數之積之和爲 156。求此三數

18. 求分 25 爲五部。但其五部爲 A.P. 其最小者與最大者兩平方之和。較他之三平方之和少一。

19. 求於 6 與 16 之間插入二數。而使前三數爲 A.P. 後三數爲 G.P.

20. 設 a, b, c 爲等比級數。 x, y 爲 a, b 及 b, c 間之等差中項求證。

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ 及 } 2 = \frac{a}{x} + \frac{c}{y}.$$



第二十四編

調和級數及簡單之級數

225. 定義 諸數量之級數。任意取其連續之三項。其第一與第二，及第二與第三，兩差之比。等於第一與第三之比。謂之調和級數。

〔例〕 若 $a-b : b-c :: a : c$

$b-c : c-d :: b : d$ 等等

則 $a, b, c, d,$ 等為調和級數。(略記為 H. P.)

226. 調和反商 $a, b, c,$ 為調和級數。則

$$a-b : b-c :: a : c$$

由是 $c(a-b) = a(b-c)$

即 $ca - bc = ab - ac$

兩邊以 abc 除之。則

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$$

而 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c},$ 原為等差級數。

故成調和級數諸量之反商恆爲等差級數。

由是調和級數諸量之關係，可由等差級數之關係推得。

227. 調和中項 三量成調和級數，則其中中央之量，爲他二量之調和中項。

若 a, b, c 爲調和級數，則 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 爲等差級數。

$$\therefore \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$$

$$\therefore \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

$$\therefore b = \frac{2ac}{a+c}$$

即任意二量之調和中項爲其和除其積之二倍。

228. 三種級數之中項 設任意二量 a 與 b 之等差中項，等比中項，調和中項，爲 A, G, H ，

$$\text{則 } A = \frac{1}{2}(a+b), \quad G = \sqrt{ab}, \quad H = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\text{由是 } A \times H = \frac{1}{2}(a+b) \times \frac{2ab}{a+b} = ab. \quad \therefore AH = G^2.$$

由是 G 爲 A 與 H 之等比中項。

故任意二量之等比中項。又爲二量之等差中項
與調和中項之等比中項。

229. 諸調和中項 調和級數之問題。多

可用此調和級數諸反數之等差級數解之。

如欲於任意二量 a 與 b 間。插入 n 個調和中項。

此不可不於 $\frac{1}{a}$ 與 $\frac{1}{b}$ 間。先插入 n 個等差中項。而

由 215 款。如次

$$\frac{1}{a} + \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{n+1}, \frac{1}{a} + 2\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{n+1}, \text{ 等}$$

故 $\frac{1}{a}, \frac{1}{a} + \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{n+1}, \frac{1}{a} + 2\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{n+1}, \dots, \frac{1}{b}$

即 $\frac{1}{a}, \frac{(nb+a)}{(n+1)ab}, \frac{(n-1)b+2a}{(n+1)ab}, \dots, \frac{1}{b}$

爲 A.P. 由是。此反數爲 H.P.

故所求之調和中項如下。

$$\frac{(n+1)ab}{nb+a}, \frac{(n+1)ab}{(n-1)b+2a}, \text{ 等等}$$

(注意) 求調和級數若干項之和。無一定之公

式是宜注意。

230. 三種級數之關係

a, b, c , 爲 A.P. 則 $a-b : b-c :: a : a$,

a, b, c , 爲 G.P. 則 $a-b : b-c :: a : b$,

a, b, c , 爲 H.P. 則 $a-b : b-c :: a : c$.

第一與第三。由 A.P. 及 H.P. 之定義易證明。而第二由乘法易證明。

[例1.] 調和級數之第二項爲 2。第四項爲 6。求此級數。

於此調和級數。其相當等差級數之第二項爲 $\frac{1}{2}$ ，第四項爲 $\frac{1}{6}$ ，

由是設 a 爲初項 d 爲公差。則

$$a+d=\frac{1}{2}, \text{ 及 } a+3d=\frac{1}{6},$$

故 $a=\frac{1}{3}$ 及 $d=-\frac{1}{6}$ 。

因得等差級數如次。

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \text{ 等}$$

故調和級數如次。

$$\frac{1}{3}, 2, 3, 6, \text{ 等}$$

[例2.] 設 a, b, c , 爲 G.P. 求證 $a+b, 2b, b+c$ 爲

11. P.

若
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{2b},$$

則
$$b(b+c) + b(a+b) = (a+b)(b+c),$$

即
$$b^2 + bc + ab + b^2 = ab + b^2 + ac + bc.$$

$$\therefore b^2 = ac.$$

故 $a+b, 2b, b+c$ 當為 H.P 而 $b^2=ac$, 即 a, b, c , 為 G.P.

問題 LXVIII.

- 1 調和級數之各項,以相同之數乘之,則其各積亦為調和級數。
- 2 求於 1 與 7 之間插入五個調和中項。
- 3 求於 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{3}$ 之間插入四個調和中項。
- 4 二量之等差中項為 1。則其調和中項為等比中項之平方。求證。
- 5 設 a^2, b^2, c^2 , 為等差級數。求證 $b+c, c+a, a+b$ 為調和級數。
- 6 設 x, y, z , 為 H.P 求證 $(y+z-x)^2, (z+x-y)^2, (x+y-z)^2$ 為 A.P

7. 設 x, y, z , 爲 H.P. 求證 $\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}$ 亦爲 H.P.

8. x, y, z , 爲 H.P.

求證 $\frac{x}{y+z-x}, \frac{y}{z+x-y}, \frac{z}{x+y-z}$ 亦爲 H.P.

9. a, b, c, d 爲 H.P. 求證

$\frac{a}{b+c+d}, \frac{b}{c+d+a}, \frac{c}{d+a+b}, \frac{d}{a+b+c}$ 亦爲 H.P.

10. a, b, c , 爲 H.P. 則 $2a-b, b, 2c-b$ 當爲 G.P. 求證。

11. a, b, c , 爲 H.P. 求證 $a, a-c, a-b$ 亦爲 H.P.

12. $(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2), a^4+a^2b^2+b^4, (a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)$ 求證此三式爲 H.P.

13. 設 x, a_1, a_2, y , 爲 A.P. x, g_1, g_2, y , 爲 G.P. x, h_1, h_2, y , 爲 H.P. 求證次式。

$$\frac{g_1 g_2}{h_1 h_2} = \frac{a_1 + a_2}{h_1 + h_2}$$

14. a, b, c , 爲 H.P. 求證。

$$\frac{b+a}{b-a} + \frac{b+c}{b-c} = 2$$

15. a, b, c , 爲 G.P. 則 $\frac{2}{a+b}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b+c}$ 當爲 A.

P. 求證。

16. 證 a, b, c , 爲 A.P. 又 b, c, d , 爲 H.P. 則

$$a:b=c:d.$$

17. 若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c}$ 證 $b=a+c$ 又證 a, b, c ,

爲調和級數。

18. a, b, c, d , 爲 H.P. 證

$$3(b-a)(d-c) = (c-b)(d-a).$$

19. a, b, c , 爲 H.P. 證

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c}.$$

20. 三數爲 A.P. 而兩外項之積爲中項之五倍。又兩大數之和爲小數之三倍 求此各數。

21. $\frac{a+b}{1-ab}, b, \frac{b+c}{1-bc}$, 爲 A.P. 則 $a, \frac{1}{b}, c$ 爲 H.P.

求證。

22. a, b, c , 爲 A.P. a^2, b^2, c^2 , 爲 H.P. 求證, $-\frac{a}{2}$,

b, c , 爲 G.P. 又證 $a=b=c$.

23. 三數爲 A.P. 而最大數加 1 爲 G.P. 則最小數等於公差之平方求證。

24. x, a, b, y , 爲 A.P. x, u, v, y , 爲 H.P. 求證

$$av = bu = xy$$

25. a_1, a_2, a_3, a_4 , 爲 H.P. 求證,

$$a_1a_3 + a_2a_4 = 3a_1a_2$$

26. a, b, c , 爲 A.P. a, c, b , 爲 G.P. 求證 b, a, c , 爲 H.P.

231. 單簡之級數 上所舉三種級數之外更有他種級數。其諸項可用單簡之法則求之。

舉其二三例如次。

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$$

及
$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

232. 解法 求單簡級數 n 項之和。其法如次。

級數 n 項之和。常以 S_n 示之。又至無窮項之和。常以 S_∞ 示之。

〔例 1〕 求級數 $1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + n$ 項之和。

$$\text{今 } S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1)n + n(n+1).$$

$$\text{設 } \Sigma = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots$$

$$+ (n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2).$$

(但 Σ 爲總數之號)

將各項退一項列之。則

$$\Sigma = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (n-2)(n-1)n$$

$$+ (n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2).$$

由前式減後式。而各項依所列之位置減之。則

$$0 = 1.2.3 + 3.2.3 + 3.3.4 + \dots$$

$$+ 3(n-1)n + 3n(n+1) - n(n+1)(n+2).$$

因而

$$3\{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots$$

$$+ (n-1)n + n(n+1)\} = n(n+1)(n+2);$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

【例 2.】求級數 $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots$ n 項之和。

$$\text{今 } S_n = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots$$

$$+ (n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2).$$

$$\text{設 } \Sigma = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + \dots$$

$$+ (n-1)n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2)(n+3)$$

如前法則

$$\Sigma = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \dots + (n-2)'n-1n'(n+1)$$

$$+(n-1)n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n+2)(n+3).$$

由是用減法將各項依所列之位置減之。則

$$0=1.2.3.4+4.2.3.4.+4.3.4.5.+ \dots +4(n-1)n(n+1)$$

$$+4n(n+1)(n+2)-n(n+1)(n+2)(n+3),$$

$$\therefore 4\{1.2.3+2.3.4+3.4.5+ \dots +n(n+1)(n+2)\}$$

$$=n(n+1)(n+2)(n+3),$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

〔注意〕 此級數與前之級數皆為級數中緊要之例。其性質分為三項，即(1)各項中因數之數相同。(2)任意一項之因數皆為A.P.(3)各項之第一因數以次為A.P.

又上法因欲得所求之和。故先用「 Σ 」級數。但此 Σ 級數雖與原級數同形。然各項之末。皆多附一因數。

〔例3.〕 求級數 $1^2+2^2+3^2+\dots$ n 項之和。

$$\text{今} \quad S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

$$\text{然} \quad n^2 = n(n+1) - n,$$

$$\therefore S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$$

$$-1 - 2 - 3 - \dots - n$$

由例1

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$$

又 $1+2+3+\dots\dots\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

由是 $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1)$
 $= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$.

〔例4.〕 求級數 $1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3$ 之 n 項之和。

今 $S = 1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3$.

而 n 爲任何數 $4n^3 = \{n(n+1)\}^2 - \{(n-1)n\}^2$.

由是 $4 \cdot 1^3 = (1 \cdot 2)^2$.

$$4 \cdot 2^3 = (2 \cdot 3)^2 - (1 \cdot 2)^2,$$

$$4 \cdot 3^3 = (3 \cdot 4)^2 - (2 \cdot 3)^2,$$

$$\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$4(n-1)^3 = \{(n-1)n\}^2 - \{(n-2)(n-1)\}^2.$$

$$4n^3 = \{n(n+1)\}^2 - \{(n-1)n\}^2.$$

由是用加法得

$$4\{1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3\} = \{n(n+1)\}^2.$$

$$\therefore 1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

此結果亦可用相異之形記之。

何則因 $1+2+3+\dots\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

故 $1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3 = (1+2+3+\dots\dots+n)^2$,

即由一起連續之 n 整數。其各立方之和。等於其和之平方。

〔例 5.〕 求級數 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + n$ 項之和

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \dots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\Sigma = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

然 $\Sigma = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$

故由減法

$$0 = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots - \dots$$

$$- \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n+1}.$$

由是 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$

n 爲無窮大則 $\frac{1}{n+1}$ 爲零

由是級數 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$ 之無窮項之

和爲 1

〔例 6.〕 求級數 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + n$

項之和。

試作 Σ 級數。但此 Σ 級數。與原級數同形而各分母之末皆省去一因數。如前法得其 n 項之和為

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

〔例 7.〕 求級數 $1+2x+3x^2+4x^3+\dots+n$ 項之和。

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + (n+1)x^n.$$

$$\text{然 } Sx = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + (n+1)x^{n+1}.$$

故由減法

$$S(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - (n+1)x^{n+1}.$$

$$\text{然 } 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

$$\text{故 } S(1-x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}.$$

$$\therefore S = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - (n+1) \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

問 題 LXIX.

求以下各級數至 n 項之和而能求無窮項之和者則須求其無窮項之和。

1. $2.4 + 4.6 + 6.8 + \dots$

2. $3.5 + 5.7 + 7.9 + \dots$

3. $1.4 + 4.7 + 7.10 + \dots$

4. $2.5 + 5.8 + 8.11 + \dots$

5. $1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + \dots$

6. $2.7.12 + 7.12.17 + 12.17.22 + \dots$

7. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots$

8. $\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots$

9. $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \dots$

10. $\frac{1}{2.5.8} + \frac{1}{5.8.11} + \frac{1}{8.11.14} + \dots$

11. $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \dots$

12. $\frac{1}{(1+x)(1+2x)} + \frac{1}{(1+2x)(1+3x)}$
 $+ \frac{1}{(1+3x)(1+4x)} + \dots$

13. $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots$

14. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots$

15. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots$

16. $aa + b + a + b(a+2b) + (a+2b)(a+3b) + \dots$

雜 題 VI.

[A] 1. 化 $(y+3)(y^2-1) - 3(y+1)(y^2-9) + 3(y-1)(y^2-9) - (y-3)(y^2-1)$ 爲簡式。

2. 證次式。

$$\frac{(2y-x)^2 - (2x-y)^2}{3(y-x)} + \frac{(2y-x)^2 + (2x-y)^2}{x+y} = 10x^2 - 16xy + 10y^2.$$

3. 求 $3x^3 - 13x^2 + 23x - 21$ 與 $6x^3 + x^2 - 44x + 21$ H.C.F. 又問此二式 x 爲何數則俱爲零。

4. 解以下各方程式。

$$(1) 3x + \frac{2}{y} - 1 = 12x + \frac{5}{y} + 14 = \frac{1}{y} - 2x - 14$$

$$(2) x^2 - (a+b+2c)x + (a+b+c)c = 0.$$

5. 某人買牛 9 匹。羊 20 匹。費洋 230 圓。賣時牛獲利 2 成五分。羊獲利 2 成。共得利洋 35 圓。問每匹之原價各幾何。

6. 方程式 $x^2 + 4x + 3 = 0$ 之根爲 α, β 今以 $\frac{\alpha + \beta}{\alpha}$ 與 $\frac{\alpha + \beta}{\beta}$ 爲根之方程式。爲 $3x^2 - 16x + 16 = 0$ 求證。

7. 以 $a^{\frac{1}{3}}+2b^{\frac{1}{3}}$ 乘 $a^{\frac{2}{3}}b^{-1}-2a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+4-8a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+16a^{-\frac{2}{3}}b$

8. 化 $\frac{5+4\sqrt{3}}{5-4\sqrt{3}}$ 之分母爲有理之數。並化 $\sqrt{25+4\sqrt{34}}$ 爲簡式。

9. 求級數 $5-3\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}-\dots$ 至八項之和。又求無窮項之極限。

10. 於 100 與 300 間插入等差中項二十個而求其和。

(B) 1. 化 $3\{x-2(y-z)\}-[4y+2\{x-\overline{y-z}\}]$ 爲簡式。

2. 求以下二式之因數。

$$mnx^2+m^2xy+n^2xy+mny^2 \text{ 及 } x^3-x^2y+xy^2-y^3.$$

3. 二數之和等於 4 則其差爲其平方差之四分之一求證。

4. 解以下各方程式。

$$(1) \frac{a}{x+a} + \frac{b}{x+a} = 1$$

$$(2) \sqrt{12x-3} + \sqrt{x+2} + \sqrt{7x-13} = 0.$$

5. $x^2-8x+22$ 決不小於 6 求證。

6. 求 $a^6 + 2a^3b^2 - 2a^3c + b^4 - 2b^2c + c^2$ 之平方根

7. $a : b :: c : d$ 求證

$$a^2 + b^2 : c^2 + d^2 :: (a+b)^2 : (c+d)^2$$

8. 求以下各級數之和。

(1) $5 - 1 - 7 - \dots$ 至 20 項。

(2) $2\frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3} + \dots$ 至無窮項。

9. 求小於 1000 能以 7 除盡之一切數之和。

10. 有一路與鐵道平行。火車之速為每點鐘 37.5 英里。而人與火車同方向進行。則見火車六秒鐘經過。又此人以同速由反對之方向進行。則見火車四秒鐘經過。問此火車之長幾何。

(C) 1. $x=0, y=1, z=1\frac{1}{2}$ 求 $\frac{\sqrt{(y^2+z)}}{\sqrt{(x+y)}} - \frac{z-x(y-z)}{x-z(y-z)}$

之數值。

2. 以 $4x^2 + 3xy - 2y^2$ 除 $4x^4 - 9x^2y^2 + 12xy^3 - 4y^4$

3. 連續二整數之和之平方。較其積之四倍多一。試證明之。

4. 求 $x^2 - 6ax + 9a^2$, $x^2 - ax - 6a^2$ 及 $3x^2 - 12a^2$ 之 L.C.M.

5. 化 $\frac{2}{a-2} + \frac{1}{1-a} + \frac{1}{a+1} - \frac{2}{a+2}$ 爲簡式。

6. 有火車駛行若干英里。若每點鐘之速增 5 英里。則省時 40 分。又每點鐘之速減 5 英里。則多費一點鐘。問火車行幾英里。又其速度幾何。

7. 化 $2 + \sqrt{8} + \sqrt{2} - \sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{(16+6\sqrt{2})}$ 爲簡式。

8. 任意之比。其兩項以相同之數加之。則較前比近於一。求證。又證 $ma+nc : mb+nd$ 在 $a:b$ 與 $c:d$ 之間。

9. 求以下各級數之和。

(1) $21+15+9+\dots$ 至 8 項

(2) $5+2+.8+\dots$ 至無窮項

10. 有二數其等差中項爲 17。其等比中項爲 15。問二數各幾何。

(D) 1. 化 $\{x(x+a) - a(x-a)\} \{x(x-a) - a(a-x)\}$ 爲簡式。

2. 證以下二式。

$$(n+1)^4 - n^4 = (2n+1)(2n^2+2n+1),$$

及 $(a+b^4-a^4-b^4=4ab(a+b)^2-2a^2b^2$.

3. 化 $\left\{1-\frac{3x-20}{x^2-6x}\right\}\left\{1-\frac{8x-42}{x^2-5x}\right\}$ 爲簡式。

4. 解以下各方程式。

$$(1) \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 21, \quad \frac{5}{x} + \frac{7}{y} = -11.$$

$$(2) 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 33, \quad x^2 - y^2 = 16.$$

5. 有兩位之數。其單位之數字較十位之數字大。而兩數字之平方之差等於本數。又將兩數字倒置。其所生之數爲數字之和之七倍。問本數幾何。

6. 有方程式 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 。求作以此方程兩根之立方爲兩根之方程式。

7. 求 $x^6 - 2x^2 + 8 + x^{-2} - 8x^{-4} + 16x^{-6}$ 之平方根。

8. $a : b :: c : d$ 求證 $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2$

9. 求以下各級數之和。

$$(1) \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots \text{至 } 10 \text{ 項。}$$

$$(2) 9 - 6 + 4 - \dots \text{至無窮項。}$$

10. 將連續之奇數。分爲若干組即 1; 3,

5; 7, 9, 11; 13, 15, 17, 19. 等逐次如此。求證第 n 組諸數之和為 n^2 。

(E) 1 化 $x^2 - 2xy + y^2 - (x^2 + xy + y^2) - \{x(-2y + x) + y^2\}$ 為簡式。

2. 以 $2a^2 + 4b^2 - 3ab$ 除 $6a^4 + 4b^4 - a^3b + 13ab^3 + 2a^2b^2$ 。

3. $3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$, $4a^2 - 5ab + b^2$ 之 H.C.F. 及 L.C.M.

4. 化 $\frac{\frac{4}{x-1} + \frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$ 為簡式。

5. $x^2 + mx + n = 0$ 之兩根為 α 及 β 。求以 m 及 n 之項。作 $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ 。

又以 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 驗其結果。

6. 使 $3x^2 + 5x + 3$ 為最小數求 x 之數值。又證此式之最小數值為 $\frac{11}{3}$ 。

7. a, b, c, d , 為連比例。求證 $\left(\frac{a-b}{b-c}\right)^2 = \frac{a}{d}$ 。

8. 求 $4x^{\frac{1}{2}} - 12xy^{\frac{1}{2}} - 7x^{\frac{3}{2}}y + 24x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + 16y^2$ 之平方根。

9. 求以下各級數之和。

(1) $-3-2-1\cdots$ 至 n 項。

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots$ 至無窮項。

10. 有二列車，其一長 72 碼，他之一長 60 碼，此二列車由平行道相向而行，則相會至全通過費時 4 秒，又第一列車之速為原速之二倍，則經過祇需 3 秒，問各列車每時之速幾何。

(F) 1. 化 $(x+y+z)^2 - (-x+y+z)^2 + (x-y+z)^2 - (x+y-z)^2$ 為簡式。

2. 以 $a-b-c$ 除 $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - c^3$

3. $x=a+d, y=b+d, z=c+d$ 求證次式，

$$x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$$

4. 化 $\frac{1}{a-2x} + \frac{2a}{4x^2-a^2} - \frac{1}{a+2x}$ 為簡式。

5. 解以下各方程式。

(1) $2x+4y-3z=22, 4x-2y+5z=18,$

$$5x+y-2z=14.$$

(2) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-5}{x-6} - \frac{x-6}{x-7}$

(3) $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}, x^2+y^2=90.$

6. 證 $x^6 - 4x^5 + 14x^4 - 32x^3 + 49x^2 - 60x + 36.$

式,其 x 無論以如何之整數代入,其結果恆為平方數。

7. 化 $\frac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}}$ 為數之計算中最便之

形而其值求至小數四位。

8. $x:a$ 較一大或小從而 $a-x:a+x$ 恆較 $a^2-x^2:a^2+x^2$ 大或小求證。

9. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 因 $x+y$ 反變。則 x^2+y^2 因 xy 變。
求證。

10. 設等比級數之 n 項, $2n$ 項, $3n$ 項之和為 a, b, c , 求證 $a^2+b^2=a(b+c)$

第二十五編

排 列 及 班 次

233. 定義 由 n 物中每次取其 r 個。依種種之次序列之。其列法，謂之由 n 物中每次取 r 個之排列。

由是。每兩列中。非物同而所列之次序亦同者則兩排列相異。

如有四物以 a, b, c, d ，四文字顯之。

若由此等四物中。每次取其一。則其排列有四種。

即 $a, b, c, d,$

若由此等四物中。每次取其兩個則其排列有十二種。

即 $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc,$

由是。求每次取三個之排列全數。如次。

於每次取兩個之排列中。取其任意之一排列。(如 ab) 附以各本排列中所無之一文字。(如 c 或 d 以次

附迄。則所生之各排列皆相異。何則。因所取每次取兩個之排列。既各不同。而所附之一文字。又各相異。故也。

又每次取兩個之排列。既各附以相異之文字。則三文字之排列。更無遺漏。

由是。由四物中每次取三個之排列數。等於由四物中每次取兩個之排列數之二倍。 $12 \times 2 = 24$ 。

同樣。由 n 物每次取 r 個之排列數。亦能求得。

由 n 物中每次取 r 個之排列數恆以 ${}_nP_r$ 記號顯之。

234. 排列之公式 由相異之 n 物中。每次取 r 個求其排列數。(但 n 與 r 俱為任意之整數。而 n 大於 r)

相異之 n 物。以 a, b, c, \dots 顯之。

今由 n 物中。每次取其一個。則其排列數為 n

即 ${}_nP_1 = n$

又。若於由 n 文字每次取 $r-1$ 文字之排列中。取其任意之一排列。附以各本排列中所無之一文字 (即本排列所無 $n-(r-1)$ 文字中之任意一文字) 則

得由 n 物每次取 r 個之排列。

如是。可由每次取 $r-1$ 個之排列。得每次取 r 個之排列 $n-(r-1)$ 種。即 $n-r+1$ 種。

$$\text{由是。} \quad {}_n P_r = {}_n P_{r-1} \times (n-r+1)$$

上之關係無論 r 爲如何之值。恆能合理。故以次得。

$${}_n P_{r-1} = {}_n P_{r-2} \times (n-r+2),$$

$${}_n P_{r-2} = {}_n P_{r-3} \times (n-r+3),$$

$$\dots = \dots$$

$${}_n P_3 = {}_n P_2 \times (n-2),$$

$${}_n P_2 = {}_n P_1 \times (n-1),$$

$$\text{又} \quad {}_n P_1 = n$$

將上記各式上相當邊連乘。而消去兩邊公有之因數。則得 $\underline{{}_n P_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}$

但右邊因數之數爲 r 。

若每次取 n 個。則 r 等於 n 。

$$\text{因而} \quad {}_n P_n = n(n-1)(n-2)\dots 3. 2. 1.$$

定義。連乘積 $n(n-1)(n-2)\dots 3. 2. 1$ 以 $n!$ 或

$[n]$ 顯之。讀爲「級乘數 n 」

$$\text{如 } 4! \text{ 即 } \underline{4} = 4. 3. 2. 1.$$

〔例1〕 童子六人立爲一列。其立法有幾種。

所求之數 $= {}_6P_6 = 6.5.4.3.2.1 = 720$

〔例2〕 於數目字 1, 2, 3, 4, 5, 中。任取三字爲一數。可成幾種數。

所求之數 $= {}_5P_3 = 5.4.3 = 60$

〔例3〕 證 ${}_{10}P_4 = {}_7P_7$

${}_{10}P_4 = 10.9.8.7$ 及 ${}_7P_7 = 7.6.5.4.3.2.1$

235. 問題 n 物中有若干同種類之物。求其每次悉取之排列數。

設此 n 文字中。a 字有 p 個。b 字有 q 個。c 字有 r 個。……

所求之排列中。其任意之一排列。皆有 p 個 a 字。若變此 p 個 a 字爲 p 個相異文字。則此 p 個相異文字。其排列有 $p!$ 種。

由是。設所求之排列數爲 P 。若於其每排列中變其 p 個 a 字爲 p 個相異文字。(但不變爲 b, c。而每排列中之 b, c 亦不變爲他字)

則每排列之新排列。當有 $p!$ 種 故排列之全數。當變爲 $P \times p!$ 種。

同樣。於此等之新排列中。其任意之一排列。皆有 q 個 b 字。若變此 q 個 b 字為 q 個相異文字。則此 1 個相異文字。其排列當有 $q!$ 種。

由是。諸新排列中之每排列。其排列當各變為 $q!$ 種。故排列之全數。當變為

$$P \times p! \times q!$$

逐次變更。至無相同之文字時。則排列之全數。當變為

$$P \times p! \times q! \times r! \times \dots\dots\dots$$

然相異 n 物之排列數為 $n!$

$$\text{由是} \quad P \times p! \times q! \times r! \times \dots\dots\dots = n!$$

$$\therefore P = \frac{n!}{p!q!r! \times \dots\dots\dots}$$

〔例 1.〕 問 a, a, a, b, b, c 六字。其排列法有幾種。

$$\text{所要之數} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

〔例 2.〕 問以數目字 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4 可作之數有幾種。

$$\text{所求之數} = \frac{7!}{4!2!1!} = 105$$

236. 定義 由 n 物每次取其 r 個。不拘排

列之次序如何，單以湊合爲主，其列法，謂之「由 n 物中每次取 r 個」之班次。

由是，每兩班中，非由全然相同之物成者，則兩班次相異。

如有四物，以 a, b, c, d 四文字顯之。若由此等四物中，每次取其一個，則其班次有四種，即 a, b, c, d 。又每次取其兩個，則其班次有六種，即 ab, ac, ad, bc, bd, cd 。又每次取其三個，則其班次有四種，即 abc, abd, acd, bcd 。又四物悉取，則其班次祇有一種，即 $abcd$ 。

由 n 物中每次取 r 個之班次數，恒以 ${}_n C_r$ 記號顯之。

237. 班次之公式 由相異之 n 物中，每次取其 r 個，求其班次數。

於相異 r 物之班次中，其排列當有 $r!$ 種，故依文字之次序變換，則

$${}_n C_r \times r! = {}_n P_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

$$\text{由是 } {}_n C_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r}$$

依下所示之法，則由 n 物中每次取 r 個，其班次數

可不依排列之數求得。

相異之 n 物。以 a, b, c, d, \dots 等 n 個文字顯之。

於由 n 文字每次取 r 個之班次中。其所含一特別文字之班數。必等於由所餘 $n-1$ 文字每次取 $r-1$ 文字之班數。

〔註〕如由 a, b, c, d 四文字中每次取三個。其班次為 abc, abd, acd, bcd 。於此班次中。其所含一特別文字之班數。皆為三。然由 a, b, c 三 (即 $4-1$) 文字每次取兩 (即 $3-1$) 個。其班數亦為三。即 ab, ac, bc 。故兩相等。以下仿此。

由是。每次取 r 個之班次全數中。當含有各文字 ${}_{n-1}C_{r-1}$ 回。故文字之總數為 ${}_{n-1}C_{r-1} \times n$ 。然在 ${}_nC_r$ 之各班中。其文字之數為 r 。故文字之總數為 ${}_nC_r \times r$ 。

$$\text{由是。} \quad r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$$

上之關係。無論 n 與 r 為如何之位。恆能合理。故

$$(r-1) \times {}_{n-1}C_{r-1} = (n-1) \times {}_{n-2}C_{r-2},$$

$$(r-2) \times {}_{n-2}C_{r-2} = (n-2) \times {}_{n-3}C_{r-3},$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$2 \times {}_{n-r+2}C_2 = (n-r+2) \times {}_{n-r+1}C_1,$$

$${}_{n-r+1}C_1 = n - r + 1.$$

由是將上記各式之相當邊連乘而消去兩邊公有之因數。則

$$r! \times {}_n C_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1),$$

$$\text{即 } {}_n C_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

以 $(n-r)!$ 乘上式右邊之分子與分母。則

$$\begin{aligned} {}_n C_r &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!}. \end{aligned}$$

〔例1.〕 由15名學生中選出3名。其方法有幾種。

$$\text{所求之數} = {}_{15}C_3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$$

〔例2.〕 某縣會缺議員四人。而有候補者六人。其選舉法可每次選一人或二人。或三人。或四人。問選舉法有幾種。

每次選舉四人。其法有 ${}_6C_4$ 種。

每次選舉三人。其法有 ${}_6C_3$ 種。

每次選舉二人。其法有 ${}_6C_2$ 種。

每次選舉一人。其法有 ${}_6C_1$ 種。

故其選舉法之全數。為

$${}_0C_4 + {}_0C_3 + {}_0C_2 + {}_0C_1 = 15 + 20 + 15 + 6 = 56$$

238. 推論 依前款所得之公式

$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \therefore {}_nC_{n-r} = {}_nC_r$$

故由 n 物中每次取 r 個。其所得之班數。等於由 n 物每次取 $n-r$ 個之班數。

然上之命題。依次說解之。理尤易明。

即由 n 物中取去 r 物。則所餘者為 $n-r$ 物。而由 n 物中取互相異之 r 物。則所餘之 $n-r$ 物。當亦各互相異。由是。相異 r 物之班數。必與相異 $n-r$ 物之班數等。

239. 定理 證 ${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$

先由 $n+1$ 物每次取 r 物。分其所得班次之全數為二部分。一部分為含有特別之一物者。一部分為非含有特別之一物者。其非含有特別物者之班數。恆等於由所餘 n 物中每次取 r 物之班數。即 ${}_nC_r$ 。而含有特別物者之班數必為由所餘 n 物中每次取 $r-1$ 物之班數。即 ${}_nC_{r-1}$ 。

由是。 ${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}$

上之定理，亦可由公式證之。如次。

$$\begin{aligned} {}_nC_r + {}_nC_{r-1} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r} \{(n-r+1) + r\} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r} = {}_{n+1}C_r \end{aligned}$$

240. ${}_nC_r$ 之最大值 由 237 款

$${}_nC_r = \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \cdots \times \frac{n-r+1}{r}$$

$$\therefore {}_nC_r = {}_nC_{r-1} \times \frac{n-r+1}{r}$$

由是 $\frac{n-r+1}{r} \geq 1$ 即 $r \leq \frac{1}{2}(n+1)$ ，從而 ${}_nC_r \geq {}_nC_{r-1}$ 。

故若 $r < \frac{1}{2}(n+1)$ ，則 n 物之班數，恆從 r 之增加而加大。

若 $r = \frac{1}{2}(n+1)$ ，則 ${}_nC_r = {}_nC_{r-1}$ 然 n 非奇數，則 r 不能等於 $\frac{1}{2}(n+1)$

若 $r > \frac{1}{2}(n+1)$ ，則 n 物之班數，恆從 r 之增加而減

少。

故 n 爲偶數。則 ${}_nC_r$ 在 $r = \frac{1}{2}n$ 時爲最大。而 n 爲奇數。則 $r = \frac{1}{2}(n+1)$ 時 ${}_nC_r = {}_nC_{r-1}$ 而此等兩值俱爲最大。

〔例1.〕 求 ${}_8C_r$ 之最大值。

其最大值在 $r = \frac{1}{2}n = 4$ 時。而此值爲

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

〔例2.〕 求 ${}_{11}C_r$ 之最大值。

其最大值在 $r = \frac{1}{2}(n+1) = 6$ ，或 $r-1 = 6-1 = 5$ 時

而此等值爲 $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462$

問 題 LXX.

1. 求 ${}_{10}P_8$ 之排列數。
2. 求 ${}_{10}P_4$
3. 求 ${}_8P_8$
4. 問用 1,2,3,4,5 五個數目字。能作成幾種數。
5. 於數目字 1,2,3,4,5,6 中。任取一字或二字乃至六字作數。能作成幾種數。
6. 試將兒童十人列爲一行。但中有特別二人不

許並立。問不同之列法有幾種。

7. 將相異之物若干個每次悉取。其排列數為 720。問物若干個。

8. 將英語 *success*, *mississippi* 及 *algebraic* 之文字。每次悉取。其所生之排列數各幾何。

9. 並 $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ 九個文字為一列。其法有幾種。

10. 英語 *essences* 之文字。每次悉取。其所生之排列幾何。

11. 又前題以 e 為始，以 s 為終。其排列幾何。

12. ${}_nP_5 = {}_nP_4 \times 2$ 問 ${}_nP_n$ 幾何。

13. ${}_nP_6 = {}_nP_4 \times 12$ 問 n 之值幾何。

14. 求 ${}_{16}C_4$, ${}_{15}C_{12}$, ${}_{20}C_{18}$

15. ${}_nC_5 = {}_nC_{10}$ 求 ${}_nC_2$

16. ${}_nC_{10} = {}_nC_{11}$ 求 ${}_nC_3$

17. 於數目字 0, 1, 2, 3, 4, 中。每次取三個。問能作三位之數幾何。

18. ${}_nC_3 = {}_nC_2 \times 12$ 求 n

19. ${}_nC_3 = {}_nC_4 \times 24$ 求 n

20. 以 1, 2, 3, 4, 5, 五個數目字。依種種之次序列之。

問較 23000 大之數有幾。

21. 某街有郵便箱五個。問以三封信投之。其投法有幾種。

22. 一仙銅貨二枚。一角銀貨三枚。五圓金貨四枚。問能作相異之金額幾種。

23. 一仙銅貨四枚。一角銀貨六枚。半元銀貨五枚。問能得幾種相異之金額。

24. 證 ${}_{n+2}C_{r+1} = {}_n C_{r+1} + 2{}_n C_r + {}_n C_{r-1}$

25. 於 ${}_n C_4$ ，其含有特別一物之班數。與不含有特別一物之班數同。求證。

26. 於 ${}_{12}C_4$ ，其含有特別一物之班數。爲其班次全數之三分之一。求證。

27. 於 ${}_{32}C_n$ ，其含有特別一物之班數。爲其班次全數之三分之一。求證。

28. 某地方。缺委員六人。而有候補者十人。由此等候補者中選出六人。其方法有幾種。

29. 某議院。有候補者五人。欲於其中選舉三人。其投票時。可選舉一人。或二人。或三人。問選舉之法有幾種。

30. 有兵一哨。兵卒八十名。兵官三名。欲於其中選

出兵卒三名，兵官一名。其選法有幾種。

31. 某蹴球會欲於三十人中選出十一人打球。其法有幾種。又欲同時選出兩班。每班十一人對打。其選法有幾種。

32. 某跳舞會。欲於男子五人女子四人中。選出男子二人，女子二人，共跳舞。其選法有幾種。

33. 某蹴球會。貴紳六人，貴婦四人。欲選出貴紳二人，貴婦二人共蹴。其方法有幾種。

34. 八人共坐一圓桌。其坐法有幾種。

35. 一平面上有 n 點。無三點同在一直線內者。今將此諸點。各二點聯為一直線。問直線之數幾何。

又將各直線引長。能生三角形若干。



第二十六編

二 項 式 定 理

241. 連乘積 任意兩多項式之積。爲以一式之各項，乘他一式之各項，所得諸積之和。已證明於第46款。

如是。欲求三式之連乘積。必以一式之各項。乘他兩式之積之各項。故所求之連乘積。爲第一式各項，與第二式各項，與第三式各項，相乘所得諸積之和。

同樣。若干式之連乘積。爲第一式各項，第二式各項，第三式各項，……等，相乘所得諸積之和。

如由 $(a+b)(a+b)(a+b)$ 之各因數中。各取其一個文字。以此三文字相乘。可得連乘積之一項。而逐次如此。可得連乘積之一切項。

今各因數中。皆可取 a 一次。而其方法。祇有一種。故 a^3 爲連乘積之一項。

又可取 a 二次，取 b 一次。而其取法有三種。何則。因三個因數中皆有 b 。由一個因數內取 b ，而由他

兩個因數內取 a ，總共取得三次故也。故得 $3a^2b$

又可取 a 一次。取 b 二次。而其方法有三種。故得 $3ab^2$

終可由各因數取 b 。而其方法祇有一種。故得 b^3 。

由是。所求之連乘積爲 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 故

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

242. 二項式定理 今設因數 $a+b$ 有 n 個。

即 $(a+b)(a+b)(a+b)\dots\dots\dots$

若由此各因數中。各取其一文字。以此諸文字相乘。可得連乘積之一項。逐次如此。可得連乘積之一切項。

今由各因數取 a 。其方法祇有一種。故 a^n 爲連乘積之一項。

又由一因數取 b 。由所餘之 $n-1$ 因數取 a 。而能取一個 b 之數。與由 n 物中取 1 物之班數等。故其方法爲 ${}_nC_1$ 種。

由是 ${}_nC_1 a^{n-1}b$ 爲連乘積之一項。

又由任意之二因數取 b 。由所餘之 $n-2$ 因數取 a 。而由二因數中取 b 之次數與由 n 物中取 2 物之

班數等。故其方法爲 ${}_nC_2$ 種。

由是 ${}_nC_2 a^{n-2} b^2$ 爲連乘積之一項。

又由一般任意之 r 因數 [r 爲不大於 n 之任意正整數] 取 b 。由所餘之 $n-r$ 因數取 a 。而由 r 因數取 b 之次數，與由 n 物中取 r 物之班數等。故其方法有 ${}_nC_r$ 種。

由是 ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ 爲連乘積之一項。

又內各因數取 b 。而其取法祇有一種。故 b^n 爲連乘積之一項。而此項與在 ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ 中， $n=r$ 所得之結果同。蓋以 ${}_nC_n = 1$ 故也。

故 $(a+b)(a+b)(a+b)\cdots$ 至 n 因數

$$= a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \cdots + b^n$$

由是， n 爲任意之正整數。則

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \cdots + b^n$$

此公式名爲二項式定理。右邊之級數。名爲 $(a+b)^n$ 之展開式。

若將右邊之 ${}_nC_1, {}_nC_2, \cdots$ 。以其值 [237 款] 代入。則得

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r}b^r + \dots + b^n$$

是爲二項式定理之通例。

243. 公項 欲於 $(a+b)^n$ 之展開式。求其任意之項。則於

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} a^{n-r}b^r$$

設其 r 爲適當之數值。可得其任意之項。故上式名爲展開公項。而此項爲距首第 $(r+1)$ 項。

244. 公式用法 於二項式之展開公式

$$\text{設 } n=2 \text{ 則 } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

若設 $n=3$ 則

$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1}a^2b + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

若設 $n=4$ 則

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}a^2b^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}ab^3 + b^4 \\ = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

以 $2x$ 代 a , 以 $-3y$ 代 b , 且設 $n=5$ 則

$$\begin{aligned}(2x-3y)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4(-3y) + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}(2x)^3(-3y)^2 \\ &+ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(2x)^2(-3y)^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(2x)(-3y)^4 + (-3y)^5 \\ &= 32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5.\end{aligned}$$

245. 歸納的證明法 二項式定理. 亦可

依次法證明之。

設 n 為任意之正整數. 求證

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dots \\ &+ \frac{n!}{r!(n-r)!}a^{n-r}b^r + \dots + b^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{即 } (a+b)^n &= a^n + {}_n C_1 a^{n-1}b + {}_n C_2 a^{n-2}b^2 + \dots \\ &+ {}_n C_{r-1} a^{n-r+1}b^{r-1} + {}_n C_r a^{n-r}b^r + \dots + b^n\end{aligned}$$

先設此式為合理. 而以他之因數 $a+b$ 乘之. 並於其積中集其含有 a 及 b 同方乘之諸項. 則

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + (1 + {}_n C_1)a^n b + ({}_n C_1 + {}_n C_2)a^{n-1}b^2 + \dots \\ &+ ({}_n C_{r-1} + {}_n C_r)a^{n-r+1}b^r + \dots + b^{n+1}.\end{aligned}$$

$$\text{今 } 1 + {}_n C_1 = 1 + n = {}_{n+1} C_1,$$

$${}_nC_1 + {}nC_2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = {}_{n+1}C_2$$

又不論 r 之值如何。

$${}_nC_{r-1} + {}nC_r = {}_{n+1}C_r \quad [239 \text{ 款}]$$

由是 $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + {}_{n+1}C_1 \cdot a^n b + {}_{n+1}C_2 \cdot a^{n-1} b^2 + \dots$
 $+ {}_{n+1}C_r \cdot a^{n+1-r} b^r + \dots + b^{n+1}$ 。

故若此定理於 n 之任意值能合理。則於 n 多 1 之數值亦能合理。

如 $n=1$ ，此定理合理。由是 $n=2$ ，此定理亦合理。而 $n=2$ 合理。則 $n=3$ 此定理亦合理。餘倣此。故 n 為正整數。此定理恒合理。

上之證明法。代數學屢用之。稱為歸納法。

246. 相等係數 依二項式定理展開 $(a+b)^n$ 。則距首第 $r+1$ 項，與距末第 $r+1$ 項為

$${}_nC_r a^{n-r} b^r \text{ 及 } {}_nC_{n-r} a^r b^{n-r}$$

然無論 r 之值如何。恒能得。

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r} \quad [238 \text{ 款}]$$

由是。於 $(a+b)^n$ 之展開式。其任意兩項若一項與首項之距離。等於他一項與末項之距離。則兩項之

係數相等，故此展開式中各項之係數由首項順讀，與由末項逆讀，全然相同。

247. 別記法 於 242 款之公式。設 $a=1$, $b=x$, 則

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{n!}{r!(n-r)!} x^r + \dots + x^n$$

是乃二項式定理中最通用之式。又上之定理。能包括一切二項式。故宜注意。

如欲求 $(a+b)^n$ 則

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \left\{ a \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right\}^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a} \right)^n \\ &= a^n \left(1 + n \frac{b}{a} + \dots \right) = a^n + na^{n-1}b + \dots \end{aligned}$$

248. 最大項 依二項式定理展開 $(a+b)^n$ 。

則其第 $r+1$ 項。為以 $\frac{n-r+1}{r}x$ 乘其第 r 項。

$$\text{今 } \frac{n-r+1}{r}x = \left(\frac{n+1}{r} - 1 \right)x \text{ 而 } \frac{n+1}{r} \text{ 從 } r \text{ 之增}$$

加而減少。由是。若 r 增加。從而 $\frac{n-r+1}{r}x$ 當減少。若無論 r 之數值如何。其 $\frac{n-r+1}{r}x$ 恆小於 1。則其第 $r+1$ 項當較第 r 項小。故展開式之第 r 項為最大。必

$$\frac{n-r+1}{r}x < 1 \text{ 及 } \frac{x-r-1+1}{r-1}x > 1$$

$$\text{由是 } r > \frac{(n+1)x}{x+1} \text{ 及 } r < \frac{(n+1)x}{x+1} + 1$$

若 $r = \frac{(n+1)x}{x+1}$ ，則 $\frac{n-r+1}{r}x = 1$ ，而在此例。其最大者雖不祇一項。然第 r 項與第 $r+1$ 項相等。且較他之任意項大。

於 $(1+x)^n$ 之展開式。其諸項之絕對值。不因 x 之符號變更。由是 $(1+x)^n$ 之第 r 項為最大。則 $(1-x)^n$ 之第 r 項亦為最大。

〔例 1〕 設 $x = \frac{1}{2}$ ，試於 $(1+x)^{10}$ 之展開式中求其最大項。

$r > \frac{1}{2}$ 及 $r < \frac{1}{2} + 1$ ，則第 r 項為最大。由是第三項為最大。

〔例 2〕 設 $x = \frac{1}{2}$ ，試於 $(2+3x)^{12}$ 之展開式中。求其最大項。

$$(2+3x)^{12} = \{2(1+\frac{3}{2}x)\}^{12} = 2^{12}(1+\frac{3}{2}x)^{12}$$

故 $r > \frac{12}{2}$ 及 $r < \frac{12}{2} + 1$, 則第 r 項為最大。

故最大為第六項。

二項展開式之最大係數, 其求法詳於 [240 款].

問 題 LXXI.

書以下各式之展開式 [1 至 6].

1. $(x+a)^6$.
2. $(1-x^2)^5$.
3. $(3x-2y)^4$.
4. $(2a+3a^2)^4$.
5. $(2x^2-1)^4$.
6. $(y-x)^7$.
7. 求 $(a-3b)^{10}$ 之第三項。
8. 求 $(2x-x^2)^{12}$ 之第五項。
9. 求 $(2a-\frac{1}{2})^8$ 之第六項。
10. 求 $(1-x)^{10}$ 之第七項。
11. 求 $(1+x)^{20}$ 之第十八項。
12. 求 $(1-x)^{22}$ 之第二十一項。
13. 展開 $(a+\sqrt{b})^4+(a-\sqrt{b})$.
14. 展開 $(a+\sqrt{b})^5+(a-\sqrt{b})^6$.
15. 展開 $(a+\sqrt{b})^8+(a-\sqrt{b})^8$.
16. 求 $(1+x)^8$ 之中央項。

17. 求 $(1+x)^{10}$ 之中央項。
18. 求 $(2x-3y)^5$ 之中央項。
19. 於 $(1+x)^{m+n}$ 之展開式證 x^m 及 x^n 之係數相等。
20. 展開 $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^6$
21. 求 $\left(4x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{16}$ 展開式中之第十一項。
22. 求 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{20}$ 展開式中之第十七項。
23. 求 $\left(x^2 - \frac{a^3}{x}\right)^{2n}$ 展開式中 x^n 之係數。
24. 書 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ 展開式中之中央二項。
25. 問 $(a+x)^5$ 展開式中有最大係數之項否。
26. 求 $(a+x)^9$ 展開式中最大係數之項。
27. 設 $x = \frac{1}{2}$ 求 $(1+2x)^{20}$ 展開式中之最大項。
28. 設 $x = \frac{1}{3}$ 求 $(1+3x)^{15}$ 展開式中之最大項。
29. 設 $x = \frac{1}{4}$ 求 $(3+4x)^{12}$ 展開式中之最大項。
30. 於 $(5x+7)^{23}$ 之展開式中。有同係數連接之二項。試舉之。
31. 書 $(ax-b)^n$ 展開式中 x^n 之係數。
32. 證 $(1+x)^{2n}$ 展開式中 x^n 之係數為 $(1-x)^{2n-1}$

展開式中 x^n 之係數之二倍。

33. 證 $(1+x)^{2n}$ 之中央項爲 $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!} 2^n x^n$ 。

34. 用二項式定理求 99^4 及 999^3 。

249. 係數之性質 由是考究二項展開式中係數之性質。

先將二項式定理，記如下

$$(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_r x^r + \cdots + c_n x^n.$$

但 $c_0 = c_n = 1, c_1 = c_{n-1} = n, c_r = c_{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

(I.) 於上之公式設 $x=1$ 則

$$2^n = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_r + \cdots + c_n.$$

故 $(1+x)^n$ 展開式中諸係數之和爲 2^n 。

(II.) 又設 $x=-1$ 則

$$(1-1)^n = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots,$$

$$\therefore 0 = (c_0 + c_2 + c_4 + \cdots) - (c_1 + c_3 + c_5 + \cdots)$$

故二項展開式中奇數項諸係數之和等於偶數項諸係數之和。

(III.) 因 $c_r = c_{n-r}$ [246 款] 故二項式定理可記爲次之二式。

$$(1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_r x^r + \dots + c_n x^n,$$

$$\text{又} \quad (1+x)^n = c_n + c_{n-1} x + c_{n-2} x^2 + \dots \\ + c_{n-r} x^r + \dots + c_1 x^{n-1} + c_0 x^n.$$

將兩式之相當邊相乘。而右邊兩級數之積中。其 x^n 之係數等於

$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2,$$

$$\text{由是} \quad c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_r^2 + \dots + c_n^2.$$

$$\text{即等於} \quad (1+x)^n \times (1+x)^n \quad [\text{見 } 272 \text{ 款}].$$

$$\text{即}(1+x)^{2n} \text{ 中 } x^n \text{ 之係數而此係數爲 } \frac{(2n)!}{n!n!}.$$

$$\text{故} \quad (1+x)^n \text{ 展開式中諸係數之平方之和等於} \\ \frac{(2n)!}{n!n!}.$$

$$[\text{例 1.}] \text{ 證 } c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots + rc_r + \dots + nc_n = n2^{n-1},$$

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots + rc_r + \dots + nc_n$$

$$= n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$+ r \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} + \dots + n = n \left\{ 1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \dots + 1 \right\} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

$$[\text{例 2.}] \quad \text{證 } c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \dots + (-1)^n \frac{c_n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

$$c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{4}c_3 + \dots + (-1)^n \frac{c_n}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{3} \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{1}{4} \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \left\{ (n+1) - \frac{(n+1)n}{1.2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} \right.$$

$$- \dots + (-1)^n \left. \right\} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left\{ 1 - (n+1) + \frac{(n+1)n}{1.2} \right.$$

$$- \dots + (-1)^{n+1} \left. \right\} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} (1-1)^{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

250 異因數之連乘積 求 n 個二項

因數 $x+a, x+b, x+c$ 等之連乘積。

此例以用次之記法爲便。

每次取一個文字，其所得之和爲 $a+b+c+\dots$ 。

以 S_1 記之。

又每次取兩個文字，其所得一切積之和爲 $ab+ac+ba+\dots$ ，以 S_2 記之。

又括言之，每次取 r 個文字，其所得一切積之和，以 S_r 記之。

今由 $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\cdots$ 之諸二項因數中各取其一個文字相乘。可得連乘積之一項。逐次如此。可得連乘積之一切項。

今由各因數取 x 。其方法祇有一種。故 x^n 爲連乘積之一項。

又由 a, b, c, \dots 取其任意之一文字。而由所餘 $n-1$ 因數取 x 。如是得 $ax^{n-1}, bx^{n-1}, cx^{n-1}, \dots$ 諸項。集之則爲 S_1x^{n-1} 。

又由 a, b, c, \dots 取其任意之二文字。而由所餘 $n-2$ 因數取 x 。如是得 $abx^{n-2}, acx^{n-2}, \dots$ 諸項。集之則爲 S_2x^{n-2} 。

又括言之。由 a, b, c, \dots 取其任意之 r 文字。而由所餘 $n-r$ 因數取 x 。如是得 $S_r x^{n-r}$ 。

由是 $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\cdots$

$$= x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \cdots + S_r x^{n-r} + \cdots$$

但末項爲 a, b, c, \dots 等一切文字之積。即 $abcd\cdots$

若 a, b, c 等之符號變。則 S_1, S_3, S_5, \dots 之符號恆從之而變。然 S_2, S_4, S_6, \dots 之符號仍不變。

由是 $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdots$

$$= x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} + \cdots$$

$$+ (-1)^r S_r x^{n-r} + \dots + (-1)^n abcd \dots$$

251. 多項式定理 依 22 款之法。求 $(a+b+c+\dots)^n$ 之展開式。

$(a+b+c+\dots)(a+b+c+\dots)(a+b+c+\dots) \dots$
之連乘積。爲第一因數之各項，與第二因數之各項，與第三因數之各項，等相乘所得諸積之和。若因數之數爲 n 。則所求展開式之各項當爲 n 次。故各項不得不爲 $a^r b^s c^t \dots$ 之形。但 $r, s, t \dots$ 爲零或正整數。且 $r+s+t+\dots = n$ 。

然欲作 $a^r b^s c^t \dots$ 項，可由 n 因數之任意之 r 因數取 a 。再由所餘 $n-r$ 因數中任意之 s 因數取 b 。又由所餘之 $n-r-s$ 因數中任意之 t 因數取 c 。逐次如此。可取得全項。而由 n 因數中任意之 r 因數取 a 。其所能取之次數爲 ${}_n C_r$ 種。又由 $n-r$ 因數中任意之 s 因數取 b 。其所能取之次數爲 ${}_{n-r} C_s$ 種。又由 $n-r-s$ 因數中任意之 t 因數取 c 。其所能取之次數爲 ${}_{n-r-s} C_t$ 種。餘倣此。由是。可得 $a^r b^s c^t \dots$ 項之係數。即在所求之展開式內此項之係數。爲

$${}_n C_r \times {}_{n-r} C_s \times {}_{n-r-s} C_t \times \dots$$

$$\text{即 } \frac{n!}{r!(n-r)!} \times \frac{(n-r)!}{s!(n-r-s)!} \times \frac{(n-r-s)!}{t!(n-r-s-t)!} \times \dots$$

$$= \frac{n!}{r!s!t!\dots}$$

由是在 $(a+b+c+\dots)^n$

展開式中之公項爲

$$\frac{n!}{r!s!t!\dots} a^r b^s c^t \dots$$

但 r, s, t, \dots 爲零, 或爲正整數。而 $r+s+t+\dots = n$ 。

[例 1.] 求 $(a+b+c)^3$ 中 abc 之係數。

今 $n=3, r=s=t=1$ 。故所求之係數爲 $\frac{3!}{1!1!1!} = 6$ 。

[例 2.] 求 $(a+b+c)^5$ 中 a^4b, a^3b^2 及 a^2b^2c 之係數。

所求之係數爲 $\frac{5!}{4!1!} a^4b, \frac{5!}{3!2!} a^3b^2$ 及 $\frac{5!}{2!2!1!} a^2b^2c$

之係數, 即 5, 10 及 30。

問題 LXXII.

證以下各題。但 c_0, c_1, c_2, \dots 爲在 $(1+x)^n$ 展開式中 x^0, x^1, x^2, \dots 之係數。

1. $c_1 - 2c_2 + 3c_3 - \dots + (-1)^{n-1}nc_n = 0$ 。

2. $c_0 - 2c_1 + 3c_2 - \dots + (-1)^n(n+1)c_n = 0$ 。

3. $c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \dots + \frac{1}{n+1}c_n = \frac{1^{n+1}-1}{n+1}$ 。

$$4. \frac{c_1}{c_0} + 2 \frac{c_2}{c_1} + 3 \frac{c_3}{c_2} + \dots + n \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{2} n(n+1).$$

$$5. \frac{c_0}{1} + \frac{c_2}{3} + \frac{c_4}{5} + \frac{c_6}{7} + \dots = \frac{2^n}{n+1}.$$

$$6. c_0 + c_1 x + 2c_2 x^2 + \dots + r c_r x^r + \dots + n c_n x^n \\ = 1 + n x (1+x)^{n-1}.$$

$$7. c_0 c_1 + c_1 c_2 + c_2 c_3 + \dots + c_{n-1} c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}.$$

$$8. c_0 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_4 + \dots + c_{n-2} c_n = \frac{(2n)!}{(n+2)!(n-2)!}.$$

9. 證 $c_0^2 - c_1^2 + c_2^2 - \dots + (-1)^n c_n^2$, 若 n 為奇數則等於 0. 若 n 為偶數則等於 $\frac{n!}{(\frac{1}{2}n)!(\frac{1}{2}n)!}$.

$$10. c_0^2 + 2c_1^2 + 3c_2^2 + \dots + (n+1)c_n^2 = \frac{(n+2)(2n-1)!}{(n-1)!n!}.$$

$$11. c_1^2 + 2c_2^2 + 3c_3^2 + \dots + n c_n^2 = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}.$$

$$12. c_1 - \frac{1}{2} c_2 + \frac{1}{3} c_3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} c_n \\ = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

$$13. \frac{1}{x} - \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{x+2} - \dots + (-1)^n \frac{c_n}{x+n} \\ = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

14 證若 $(1+x)^n$ 之展開式中有中央之一項。則其係數為偶數。

252. 就任意之指數證二項式定理
在247款設 n 為任意之正整數。已證得。

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{n(n-1) \dots \dots (n-r+1)}{r} x^r + \dots \dots \dots$$

上之結果。惟 x 小於一時。 n 之數值。始無論如何皆能合理。

又 n 為正整數。其右邊之級數。雖至第 $n+1$ 項止。然 n 非正整數。則此級數決無底止。何則。因 n 非正整數。則 $n, n-1, n-2, \dots \dots$ 等。無一數為零故也。

253. 分指數及負指數之例 指數非正整數。則在證二項式定理之前。當舉其應用之二三例。

〔例1.〕 依二項式定理展開 $(1+x)^{-1}$ 於公式。設 $n=-1$ 。則

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{-1} &= 1 + (-1)x + \frac{(-1)(-2)}{1 \cdot 2} x^2 \\
 &+ \frac{(-1)(-2)(-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{(-1)(-2)\dots(-r)}{r!} x^r + \dots \\
 &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^r x^r + \dots
 \end{aligned}$$

[例 2.] 展開 $(1+x)^{-2}$

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{-2} &= 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-3)}{1 \cdot 2} x^2 \\
 &+ \frac{(-2)(-3)(-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{(-2)(-3)\dots(-r-1)}{r!} x^r + \dots \\
 &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (-1)^r (r+1) x^r + \dots
 \end{aligned}$$

[例 3.] 展開 $(1+x)^{-3}$

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{-3} &= 1 + (-3)x + \frac{(-3)(-4)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \\
 &+ \frac{(-3)(-4)(-5)\dots(-r-2)}{r!} x^r + \dots \\
 &= \frac{1}{1 \cdot 2} \{ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 - 4 \cdot 5x^3 + \dots \\
 &+ (-1)^r (r+1)(r+2)x^r + \dots \}.
 \end{aligned}$$

[例 4.] 展開 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
 (1-x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + (-\frac{1}{2})(-x) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2} (-x)^2 \\
 &+ \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-x)^3 + \dots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!} (-x)^r
 \end{aligned}$$

$$+\dots = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.3.6}x^3 + \dots + \frac{1.3.5\dots(2r-1)}{2.4.6\dots 2r}x^r + \dots$$

254. 阿列爾(Euler)氏之證明 二項式定理。更有 Euler 氏之證明。

因欲使二項式之級數單簡。故將

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \dots \text{之級數。以 } f(n) \text{ 顯之。}$$

$$\text{因而 } \underline{f(n) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \dots} \quad (1)$$

$$\underline{f(m) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots} \quad (2)$$

$$\underline{\text{及 } f(m+n) = 1 + (m+n)x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}x^2 + \dots} \quad (3)$$

將(1)式及(2)式右邊之級數相乘。而將其積依 x 之遞昇方乘列之。則其結果。無論 m 及 n 之值如何。而式中所含之 m 及 n 。皆為同樣之形。然 m 及 n 為正整數。則知 $f(m)$ 為 $(1+x)^m$ 。 $f(n)$ 為 $(1+x)^n$ 。故在此例。 $f(m)$ 與 $f(n)$ 之積為 $(1+x)^{m+n}$ 。又因 $m+n$ 為正整數。故 $(1+x)^{m+n}$ 為 $f(m+n)$ 。是故 m 與 n 為正整數。則 $f(m) \times f(n)$ 之積為 $f(m+n)$ 。而積之形無論 m 與 n 之值如何。恆相同。故 m 及 n 之值。無論為何

種數恆知

$$f(m) \times f(n) = f(m+n) \dots\dots\dots (a)$$

而將(a)式屢代之得

$$\begin{aligned} f(m) \times f(n) \times f(p) \times \dots\dots &= f(m+n) \times f(p) \times \dots\dots \\ &= f(m+n+p+\dots\dots). \end{aligned}$$

令 $m=n=p=\dots\dots = \frac{r}{s}$ 但 r 及 s 爲正整數

$$f\left(\frac{r}{s}\right) \times f\left(\frac{r}{s}\right) \times \dots \text{至 } n \text{ 因數} = f\left(\frac{r}{s} + \frac{r}{s} + \dots \text{至 } s \text{ 項}\right)$$

$$\therefore \left\{f\left(\frac{r}{s}\right)\right\}^s = f(r)$$

然因 r 爲正整數。故 $f(r) = (1+x)^r$

$$\therefore (1+x)^r = \left\{f\left(\frac{r}{s}\right)\right\}^s \quad \therefore (1+x)^{\frac{r}{s}} = f\left(\frac{r}{s}\right)$$

此指數原爲任意之正分數。是卽就分指數證明二項式之定理也。

今二項式之定理對於任意之正指數合理。故此定理對於負指數亦合理。何則。由(a)式。

$$f(-n) \times f(n) = f(-n+n) = f(0).$$

由是易知 $f(0)$ 爲 1。故

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{(1+x)^n} [n \text{ 爲正故}] = (1+x)^{-n}$$

是故 $(1+x)^{-n} = f(-n)$. 是即就任意之負指數證明二項式之定理也。

[例1.] n 為任意之正整數。求證在 $(1-x)^{-n}$ 及 $(1+x)^{2n-2}$ 展開式中兩 x^{n-1} 之係數相等。

是等之項為

$$\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-n+2)}{(n-1)!}(-x)^{n-1}$$

$$\text{及 } \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}x^{n-1}.$$

而前者為

$$\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}x^{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}x^{n-1}.$$

[例2.] 依二項式定理求 $\sqrt{101}$

$$\begin{aligned} \sqrt{101} &= \sqrt{100\left(1+\frac{1}{100}\right)} = 10\left(1+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 10\left\{1 + \frac{1}{2} \times .01 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1 \cdot 2} \times .0001 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right. \\ &\quad \left. \times .000001 + \cdots\right\} \\ &= 10\{1 + .005 - .0000125 - .0000000625\} = 10.04987462 \cdots \end{aligned}$$

[例3.] 將 $(1-2x+4x^2)^{-2}$ 之展開式依 x 之遞昇方乘列之。求 x^2 之係數。

$$(1-2x+4x^2)^{-2} = \{1-2x(1-2x)\}^{-2}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + (-2)(1-2x) + \frac{(-2)(-3)}{1 \cdot 2} \{-2x(1-2x)\}^2 \\
&\quad + \frac{(-2)(-3)(-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \{-2x(1-2x)\}^3 + \dots \\
&= 1 + 4x(1-2x) + 12x^2(1-2x)^2 + 32x^3(1-2x)^3 + \dots \\
&= 1 + 4x + 4x^2 - 16x^3 + \dots
\end{aligned}$$

[例 4.] 展開 $(1+x+x^2+x^3)^{-2}$ 爲 x 遞昇方乘之數。則 x^5 及 x^7 之係數爲零。求證。

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2+x^3)^{-2} &= \left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^{-2} = (1-x)^2(1-x^4)^{-2} \\
&= (1-2x+x^2)(1+2x^4+3x^8+4x^{12}+\dots).
\end{aligned}$$

255. 指數式之定理 指數式之定理者。將 a^x 展開爲 x 之遞昇方乘之級數之理也。

$$\text{以 } f(m) \text{ 顯級數 } 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \dots + \frac{m^r}{r!} + \dots$$

$$\text{則 } f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

此級數之右邊常以 e 顯之。然易知 e 在 2 與 3 之間。何則。因 e 大於 2。而小於

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

即小於 3 故也。

e 之實值。可求得 2.71828.....

可從下記三個級數

$$f(m) = 1 + m + \frac{m^2}{2!} + \dots + \frac{m^r}{r!} + \dots$$

$$f(n) = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^s}{s!} + \dots$$

$$\text{及 } f(m+n) = 1 + (m+n) + \frac{(m+n)^2}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{(m+n)^p}{p!} + \dots \quad \text{察之。}$$

於 $f(m) \times f(n)$ 中 $m^r n^s$ 之係數為 $\frac{1}{r!s!}$ 於 $f(m+n)$ 中

$m^r n^s$ 之項唯在 $\frac{(m+n)^{r+s}}{(r+s)!}$ 之間。依指數為正整數

之二項式定理。其係數為 $\frac{1}{(r+s)!} \cdot \frac{(r+s)!}{r!s!}$ 即

$$\frac{1}{r!s!}$$

由是 m 及 n 無論為如何數。其在 $f(m) \times f(n)$ 及 $f(m+n)$ 內兩 $m^r n^s$ 之係數。無論 r 與 s 之值如何皆相同。故 m 與 n 之值不拘如何。恆得

$$f(m) \times f(n) = f(m+n) \dots \dots \dots (a)$$

以 (a) 式屢代之則

$$\begin{aligned} f(m) \times f(n) \times f(p) \times \dots &= f(m+n) \times f(p) \times \dots \\ &= f(m+n+p+\dots) \end{aligned}$$

由是 x 為任意之正整數。由是

$$f(1) \times f(1) \times f(1) \text{ 至 } x \text{ 因數} = f(1+1+1+\dots \text{至 } x \text{ 項})$$

$$\therefore \{f(1)\}^x = f(x) \text{ 即 } e^x = f(x)$$

次設 x 為正分數 $\frac{p}{q}$ ，但 p 與 q 為正整數。

$$\text{然 } f\left(\frac{p}{q}\right) \times f\left(\frac{p}{q}\right) \times f\left(\frac{p}{q}\right) \times \dots \text{至 } q \text{ 因數。}$$

$$= f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \dots \text{至 } q \text{ 項}\right),$$

$$\therefore \left\{f\left(\frac{p}{q}\right)\right\}^q = f(p) = e^p \text{ [} p \text{ 為正整數],}$$

$$\therefore f\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}}$$

由是 x 為正恆得 $e^x = f(x)$ 。

終設 x 為負。令等於 $-y$ 。

$$\text{然由 (a) 式 } f(-y) \times f(y) = f(0),$$

而 $f(0)$ 等於 1

$$\text{由是 } f(-y) = \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{e^y} \text{ [} y \text{ 為正, 故] } = e^{-y}.$$

故 x 之值不拘如何。

$$e^x = f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

而 $a = e^\lambda$ 時 $a^x = e^{\lambda x}$,

$$\therefore a^x = 1 + x\lambda + \frac{x^2\lambda^2}{2!} + \frac{x^3\lambda^3}{3!} + \dots$$

但 λ 爲 $a = e^\lambda$

問題 LXXIII.

1. 展開 $(1-x)^{-4}$ 至五項。
2. 展開 $(1+2x)^{-4}$ 至五項。
3. 展開 $(2-x)^{-3}$ 至六項。
4. 展開 $(1-3x)^{-\frac{1}{2}}$ 至五項。
5. 展開 $(1-5x)^{\frac{1}{2}}$ 至五項。

求下記各式展開之公項。[6至12],

6. $(1-x)^{-5}$.
7. $(1-x)^{-8}$.
8. $(1-x)^{\frac{1}{2}}$.
9. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$.
10. $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$.
11. $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$.
12. $(1+3x)^{-\frac{1}{2}}$.

13. 從 x 之遞昇方乘展開 $\frac{a}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ 求 x^6 之係

數。

14. 展開 $(1-3x)^{\frac{1}{2}}$ 至五項。並用簡式書其公項。

於下二式之展開內。求 x^2 及 x^4 之係數。

15. $(1-2x+3x^2)^{-1}$.
16. $(1-x+3x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

17. 求 $(1+3x)^{\frac{1}{2}}$ 之第一負項。
18. 求 $(1+3x)^{\frac{1}{3}}$ 之第一負項。
19. 依二項式定理。求次之各式至小數四位。
(1) $\sqrt{100}$, (2) $\sqrt[3]{180}$, (3) $\sqrt[4]{630}$.
20. 於次式之展開內。求 x^6 及 x^8 之係數。
 $(1+x+x^2+x^3)^3$.
21. 從 x 之遞昇方乘展開 $(1+x+x^2)^{-1}$ 證 x^2 及 x^6 之係數為零。
22. 從 x 之遞昇方乘展開 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{-3}$ 證 x^4 及 x^9 之係數為零。



第二十七編

對數

256. 定義 作某數之若干乘方,使等於他一數,則指若干乘方之指數,謂之他一數之某底對數。(即以某數為底之對數。)

如 $a^x = y$ 則 x 為 y 之 a 底對數。以 $x = \log_a y$ 顯之。
(按,依舊譯諸書用 $x = \text{對}_a y$ 顯之亦可。 \log 即 logarithm 之略,譯為對數。)

由是推究對數之基本性質,並考對數之求法,因欲使其計算簡便,故多用近似法,今示如次。

257. 對數之性質 下所示者為對數之基本性質。

(1) 無論 a 之數值如何,恆得 $a^0 = 1$,故知 $\log_a 1 = 0$
即無論對數之底如何,1之對數皆為0。

(2) 若 $\log_a x = p$ 及 $\log_a y = q$

則 $x = a^p$ 及 $y = a^q$ 。

$$\therefore x \times y = a^p \times a^q = a^{p+q},$$

$$\therefore \log_a(xy) = p+q = \log_a x + \log_a y.$$

同樣可證明 $\log_a(x \cdot z \cdot \dots) = \log_a x + \log_a y + \log_a z + \dots$

即積之對數爲其因數之對數之和。

(3) 若 $\log_a x = p$ 及 $\log_a y = q$

則 $x = a^p$ 及 $y = a^q$

$$\therefore x \div y = a^p \div a^q = a^{p-q},$$

$$\therefore \log_a(x \div y) = p - q = \log_a x - \log_a y.$$

即商之對數爲被除數及除數之對數之代數差。

(4) 若 $x = a^p$ 則無論 m 之數值如何。

$$x^m = a^{pm}$$

是故 $\log_a x^m = \log_a a^{pm} = p \times m = \log_a x \times m.$

即某數任意之乘方，其對數爲某數之對數與其方指數之積。

(5) $\log_a x = p$ 及 $\log_b x = q$

然 $x = a^p$ 及 $x = b^q.$

由是 $a^p = b^q$

故 $a = b^{\frac{q}{p}}$ 及 $b = a^{\frac{p}{q}}$

是故 $\log_a a = \frac{q}{p}$ 及 $\log_b b = \frac{p}{q}$

$$\therefore \log_p a \times \log_q b = \frac{q}{p} \times \frac{p}{q} = 1.$$

又由 $q = p \log_p a$

得 $\log_b x = \log_a x \times \log_p a.$

由是任意數之 b 底對數，等於以常乘數 $\log_p a$ 乘本數之 a 底對數。

(例 1.) 求 $\log_2 8, \log_8 2, \log_{10} 1000, \log_{10} \sqrt[3]{100}$

$$8 = 2^3, 2 = 8^{\frac{1}{3}}, 1000 = 10^3, \sqrt[3]{100} = 10^{\frac{1}{3}}.$$

故 $\log_2 8 = 3, \log_8 2 = \frac{1}{3}, \log_{10} 1000 = 3, \log_{10} \sqrt[3]{100} = \frac{1}{3}.$

(例 2.) 知 $\log_{10} 2 = .3010300$ 及 $\log_{10} 3 = .4771213$

求 $\log_{10} 6, \log_{10} 40, \log_{10} 12, \log_{10} 15, \log_{10} \sqrt[3]{2880}$

$$\begin{aligned} \log_{10} 6 &= \log_{10} (2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= .3010300 + .4771213 = .7781513. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} 40 &= \log_{10} (4 \times 10) = \log_{10} 2^2 + \log_{10} 10 \\ &= 2 \times .3010300 + 1 = 1.6020600. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} 12 &= \log_{10} (2^2 \times 3) = 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= 2 \times .3010300 + .4771213 = 1.0791813. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} 15 &= \log_{10} \left(\frac{3 \times 10}{2} \right) = \log_{10} 10 + \log_{10} 3 - \log_{10} 2 \\ &= 1 + .4771213 - .3010300 = 1.1760913. \end{aligned}$$

$$\log_{10} \sqrt[3]{2880} = \frac{1}{3} \log_{10} 2880 = \frac{1}{3} \log_{10} (10 \times 2^8 \times 3^2)$$

$$= \frac{1}{3}(\log_{10} 10 + 5 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3)$$

$$= \frac{1}{3}(1 + 1.5051500 + .9542426) = 1.1531308.$$

問 題 LXXIV.

求以下各對數。[1 至 2].

1. $\log_{10} 1$ 2. $\log_{10} 10000$.

3. $\log_{10} .01$. 4. $\log_{10} .001$.

5. $\log_{10} \sqrt{.01}$. 6. $\log_{10} \sqrt[3]{100}$.

7. $\log_2 32$. 8. $\log_4 32$.

9. $\log_{\sqrt{2}} 2$. 10. $\log_4 8\sqrt{2}$.

11. $\log_9 3\sqrt{3}$. 12. $\log_4 \sqrt[3]{64}$.

13. 知 $\log_{10} 2 = .3010300$ 及 $\log_{10} 3 = .4771213$ 求 $\log_{10} \frac{1}{3}$, $\log_{10} 60$, $\log_{10} 4500$ 及 $\log_{10} \sqrt[3]{25}$.

14. 知 $\log_{10} 3 = .4771213$ 及 $\log_{10} 5 = .6989700$ 求 $\log_{10} 3.75$, $\log_{10} 1.28$ 及 $\log_{10} \frac{3^3 \times 5^3}{2^4}$.

15. 知 $\log_{10} 5 = .6989700$ 及 $\log_{10} 6 = .7781513$ 求 $\log_{10} 324$, $\log_{10} 1.458$ 及 $\log_{10} .00432$.

16. 知 $\log_{10} 5 = .6989700$ 及 $\log_{10} 7 = .8450980$ 求 $\log_{10} 1.25$, $\log_{10} 1.28$ 及 $\log_{10} \frac{2^3 \times 7^4}{5^5}$.

17. 知 $\log_{10}12=1.0791813$ 及 $\log_{10}18=1.2552726$ 求 $\log_{10}8$ 及 $\log_{10}9$.

18. 知 $\log_{10}24=1.3802113$ 及 $\log_{10}36=1.5563026$ 求 $\log_{10}72$ 及 $\log_{10}5/432$.

258. 對數級數 $a=e^\lambda$ 即 $\lambda=\log_e a$

$$a^x = e^{\lambda x} = e^{x \log_e a}$$

故依 255 款

$$a^x = e^{x \log_e a} = 1 + x \log_e a + \frac{1}{2!} (x \log_e a)^2 + \frac{1}{3!} (x \log_e a)^3 + \dots$$

今設 $a=1+y$ 則

$$(1+y)^x = 1 + x \log_e (1+y) + \frac{1}{2!} \{x \log_e (1+y)\}^2 + \dots$$

y 之絕對值小於 1 則可由二項式定理展開

$(1+y)^x$

$$\text{然 } 1 + xy + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} y^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \dots$$

$$= 1 + x \log_e (1+y) + \frac{1}{2!} \{x \log_e (1+y)\}^2 + \dots$$

故使在方程式兩邊中 x 之係數等。則得

$$\log_e (1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$

是名爲對數級數。

259. 對數之算法 凡求任意數之對數略近值。若欲簡便。則不用前款之對數級數。須求其速斂之級數。

於對數級數

$$\log_0(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \dots \dots (1).$$

變 y 之符號。則得

$$\log_0(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \dots \dots \dots (2).$$

故 $\log_0 \frac{1+y}{1-y} = \log_0(1+y) - \log_0(1-y)$ [257 款 III]

$$= \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \right) + \left(y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \dots \right),$$

$$\therefore \log_0 \frac{1+y}{1-y} = 2 \left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots \right) \dots \dots (3).$$

設 $\frac{1+y}{1-y}$ 爲 $\frac{m}{n}$ 則 $\frac{m-n}{m+n}$ 爲 y 。從(3)式得

$$\log_0 \frac{m}{n} = 2 \left\{ \frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^5 + \dots \right\} \dots \dots (4).$$

於是計算 e 底對數，較爲簡便，即如次

於公式(4)，設 $m=2, n=1$ ，則

$$\log_e 2 = 2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots \right\},$$

由是易得 $\log_e 2 = .693147\dots\dots$

由既求得 $\log_e 2$ 故

$$\text{由(4)式得 } \log_e \frac{3}{2} = 2 \left\{ \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \dots \right\},$$

$$\therefore \log_e 3 - \log_e 2 = .405465\dots\dots$$

由是 $\log_e 3 = \log_e 2 + .405465\dots\dots$

$$= .693147\dots\dots + .405465\dots\dots = 1.09861$$

逐次如此，則任意數之 e 底對數，能依所求程度，求其稍精密之數。

260. 「納白爾」(Napierian) 對數。 e 底對數，謂之「納白爾」對數。

凡高等數理所用之對數，皆爲「納白爾」對數。然計算近似數所用之對數，恆爲10底對數。其理則10底對數同於常數進位之底。故此對數較他對數稍密。因而10底對數名爲常用對數。

求 e 底對數之法，既示於前，而 e 底對數既能求

得。則以一定不易之因數 $\log_{10}e$ ，即 $\frac{1}{\log_e 10}$ ，乘之。則得 10 底對數。此一定不易之因數。名爲對數率。其值爲 .43429.....

常 用 對 數

261. 常用對數 以下所論之對數。皆爲常用對數。故 $\log_{10}a$ 單記爲 $\log a$ 。其 10 底從省。

若兩數之數目字全然相同。惟小數點之數目字異。則其一數。必等於以 10 之某乘方乘他數。由是由 275 款 II，知此等兩數之對數差。恆爲整數。

$$\text{如 } \log 421.5 = \log 4.215 + \log 100 = 2 + \log 4.215.$$

又已知 $\log 2 = .30103$ 則

$$\log .02 = \log (2 \div 100) = .30103 - 2.$$

依上之性質。常用對數之小數部分。恆以正數記之。

如 $\log .02$ 不記爲 -1.69897 而記爲 $\bar{2}.30103$

即此 $(-)$ 符號。唯屬於對數之整數部分。故以此記於其數字之上。

定義 記對數之法。在令其小數部分爲正。故此

對數之小數部分，稱爲假數，而整數部分名爲指標。

262. 指標 任何數之對數指標，皆可由觀察書出。

先設此數大於一，且其整數部分之位數爲 n ，則易知此數雖小於 10^n ，然必不小於 10^{n-1} ，故此數之對數，在 n 與 $n-1$ 之間，從而此對數，爲加小數若干於 $n-1$ ，所得之數。

由是，大於一諸任意數之對數指標，恆較其整數部分之數字少 1。

如 235 雖大於 10^2 ，然必小於 10^3 ，是故 $\log 235$ 爲 2 十小數，故指標爲 2。

次設此數小於一，且其第一有效數字前之零（即 0）數爲 n ，則易知此數雖小於 10^{-n} ，然不小於 10^{-n-1} 。

由是對數之小數部分須爲正，故此數之對數爲 $-(n+1)$ 十小數，則其指標爲 $-(n+1)$ 。

由是，小於一之諸數，若以小數顯之，則其對數之指標爲負，且較在第一有效數字前之零數多一。

如 .02 雖大於 10^{-2} ，然必小於 10^{-1} 。

由是 $\log .02 = -2$ 十小數，故其指標爲 -2 。

又.00042 雖大於 10^{-4} 然必小於 10^{-3} 。

故 $\log .00042 = -4 +$ 小數, 故指標為 -4 。

263. 反證 依前款之法反之。若已知任意數之對數指標假數, 及其次序。則由指標可知小數點之位置。

如知 $\log 1.1467 = .0594498$ 則知以 3.0594498 為對數之數為 1146.7 又可知以 $\bar{4}.0594498$ 為對數之數為 $.00011467$ 。

264. 對數表 將由 1 至 99999 各數之對數計算至小數七位。謂之「七位對數表」。然計算上。多用五位之對數表已足。

凡對數表。均祇載假數。因如前款所述之指標。均能由視察求出故也。

對數之用法有二。一為有真數求對數。一為有對數求真數。

I. 有真數求對數。

若真數之位數不多於五。則其對數俱載在表中。故能徑然檢得。若為六位數且皆為有效數字。則欲求

其對數不得不依比例差之原理。所謂比例差之原理云者。即二數之差與其各數比較。極其微小。此二數之差。殆與其對數之差成比例。是也。

欲利用比例差之原理。故先舉一例以示其方法如何。

〔例〕 求 1.14673 之對數。

檢表得 $\log 1.1467 = .0594498$ 及 $\log 1.1468 = .0594877$
因知兩對數之差為 .0000379 而 1.14073 與 1.1467 之差為 1.1468 與 1.1467 之差之 $\frac{1}{10}$ 。

由是欲求 $\log 1.14673$ 則在 $\log 1.1467$ 上。加 $\log 1.1467$ 與 $\log 1.1468$ 之差之十分之三。即

$$.0000379 \times \frac{3}{10} = .0000113$$

由是 $\log 1.14673 = .0594498 + .0000113 = .0594611$ 。

II. 有對數求真數。

如有對數 2.0594611 求其真數。

檢表得 $\log 1.1467 = .0594498$ 及 $\log 1.1468 = .0594877$ 而所設對數中之假數在是等二個假數之間。

而 .0594498 與所設對數之差為 .0000113 而 1.1467 及 1.1468 之對數之差為 .0000379。

由是依比例差之原理。則以 .0594611 爲對數之數。如次。

$$1.1467 + \frac{1}{114} \times .0001 = 1.1467 + .00003 = 1.14673.$$

〔注意〕 於比例差之近似法。其所取得之數字唯有一個。

如是 .0594611 爲 $\log 1.14673$ 故 2.0594611 爲 $\log 114.673$ 。

〔例〕 求 $\sqrt[3]{100}$ 但已知 $\log 4.6415 = .6666584$,
 $\log 4.6416 = .6666677$ 。

$$\log \sqrt[3]{100} = \frac{1}{3} \log 100 = \frac{1}{3} = .6666666,$$

$$\text{今} \quad \log 4.6416 = .6666677,$$

$$\log 4.6415 = .6666584.$$

$$\text{由是} \quad \log \sqrt[3]{100} - \log 4.6415 = .0000082,$$

$$\text{及} \quad \log 4.6416 - \log 4.6415 = .0000093.$$

$$\text{故} \quad \sqrt[3]{100} = 4.6415 + \frac{1}{11} \times .0001 = 4.64159.$$

複 利 及 年 金

265. 複利法及年金法 長時間之複利
及有定期之年金。苟用對數。皆易求其近似值。

此種問題不外下記三種(學者於算術之利息及扣算中,已經學習,最易通曉)

I. 於複利中,知本金與利率,與年數,求其本利合計。

設 P 爲本金, n 爲年數, r 爲一年間一圓之利息, A 爲所求之本利合計。

然一年間 P 之利息當爲 Pr , 故在第一年之末,其本利合計當爲 $P(1+r)$ 。

此 $P(1+r)$, 爲第二年當附利息之本利, 故在第二年之末, 其本利合計爲 $[P(1+r)](1+r)$ 即 $P(1+r)^2$ 。

同樣, 在第三年之末, 其本利合計當爲 $P(1+r)^3$ 。

而在第 n 年之末, 其本利合計當爲 $P(1+r)^n$ 。

故 $A = P(1+r)^n$ 。

〔彙〕 若利息以半年算入本金, 則易知在第 n 年之末, 其本利合計爲 $P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}$ 。

〔例〕 年息五分, 求 25 年間本金 100 圓之本利合計。

100 圓之利息爲 5 圓, 故 1 圓之利息爲 $\frac{1}{20}$ 圓。

由是, 在第一年之末, 每圓之本利合計爲 $(1+\frac{1}{20})$ 。

故在 25 年之末，每圓之本利合計為 $(1 + \frac{1}{20})^{25}$ 圓。

由是，所求之本利合計 A，當為 $100(1 + \frac{1}{20})^{25}$ 圓。

是故 $\log A = \log 100 + 25 \log \frac{21}{20}$ 。

而檢表得 $\log 21 = 1.3222193$ ， $\log 20 = 1.3010300$ 。

由是 $\log A = 2 + 25(1.3222193 - 1.3010300)$

$$= 2.5297325.$$

而檢表得 $\log 338.63 = 2.5297254$ ，

及 $\log 338.64 = 2.5297383$ 。

由是 $\log A - \log 338.63 = .0000071$ ，

及 $\log 338.64 - \log 338.63 = .0000129$ 。

由是 $A = 338.63 + \frac{.01}{.0000129} \times .0000071$ 。

$$= 338.63 + .005 = 338.635.$$

故所求之本利合計為 338.635 圓。

II. 知滿年限時所應支之金額。求其現價。

設 A 為在第 n 年末所應支之金額，P 為其現價，又每年一圓之利息為 r 圓。然在第 n 年末，P 之本利合計當等於 A。

由是，依 I， $P = A(1+r)^{-n}$ 。

〔例〕以每年 5 分之利率計算，問滿百年時可支之金 1000 圓，其現價幾何。

$$P = 1000(1+r)^{-100} = 1000\left(\frac{21}{20}\right)^{-100},$$

$$\text{是故 } \log P = \log 1000 - 100(\log 21 - \log 20)$$

$$= 3 - 100(1.3222193 - 1.3010300)$$

$$= 3 - 2.11893 = .88107.$$

$$\text{而檢表得 } \log 7.6045 = .8810707.$$

故所求之現價為 7.6045 圓。

III. n 年間，每年終可支年金 A 圓，求其現價。

設 1 圓之利息為 r 圓，則依 II.

$$\text{第一年年金之現價爲 } A(1+r)^{-1},$$

$$\text{第二年年金之現價爲 } A(1+r)^{-2},$$

.....

$$\text{第 } n \text{ 年年金之現價爲 } (1+r)^{-n},$$

由是年金全額之現價。如次

$$P = A\{(1+r)^{-1} + (1+r)^{-2} + \dots + (1+r)^{-n}\}$$

$$= A(1+r)^{-1} \frac{1 - (1+r)^{-n}}{1 - (1+r)^{-1}} = \frac{A}{r} \{1 - (1+r)^{-n}\}.$$

〔例〕 問 30 年間每年支年金 100 圓。其現價幾何。但利息為四分。

$$1 \text{ 圓之利息爲 } \frac{1}{100} \text{ 圓。故 } 1+r = 1.04.$$

$$\text{故 } P = \frac{100}{.04} \{1 - (1.04)^{-30}\} = 2500 \{1 - (1.04)^{-30}\}.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \log(1.04)^{-30} &= -30 \log(1.04) = -30 \times .0170333 \\ &= -.510999 = \bar{1}.489001. \end{aligned}$$

檢表得 $\log 3.0832 = .4890017$, 故 $\bar{1}.489001$ 爲 $\log .30832$.

$$\text{故 } P = 2500(1 - .30832) = 2500 \times .69168 = 1729.2 \text{ 圓.}$$

問 題 LXXV.

1. 已知 $\log 2 = .3010300$ 書以 5.3010300 及 5.3010300 爲對數之二數。
2. 知 $\log 1.9911 = .2990931$ 書以 3.2990931 及 4.2990931 爲對數之二數。
3. 知 $\log 46854 = 4.6707467$ 及 $\log 46855 = 4.6707559$ 求 $\log .0468546$.
4. 知 $\log 58961 = 4.7705648$ 及 $\log 58.962 = 1.7705722$ 求 $\log .00589614$.
5. 知 $\log 29 = 1.4623980$, $\log 19611 = 4.2924776$ 及 $\log 19612 = 4.2924997$ 求 $5/29$.
6. 知 $\log 1.9307 = .2857148$ 及 $\log 1.9308 = .2857373$ 求 $3/100$.
7. 知 $\log 2 = .3010300$, $\log 3 = .4771213$.

$\log 17187 = 4.2352001$ 及 $\log 17188 = 4.2352253$ 求 $\sqrt[5]{15}$ 至小數五位。

8. 知 $\log 3.4277 = .5350028$, $\log 32483 = 4.5146561$ 及 $\log 32484 = 4.5116695$ 求 $\sqrt[3]{.034277}$ 至小數六位。

9. 知 $\log 1.05 = .0211893$, $\log 1.3150 = .1189258$, 及 $\log 1.3151 = .1189588$. 求複利中 100 年間, 年息五分, 1 圓之本利合計。

10. 知 $\log 1.04 = .0170333$ 及 $\log 2 = .3010300$. 以金若干圓. 依複利 18 年間. 四分之利息計算. 則利息為本金二倍以上之金額. 試證明之。

11. 知 $\log 1.02 = 0086002$, $\log 1.4859 = .1719896$, 及 $\log 1.4860 = .1720188$. 以 10 年間. 四分之複利. 利息每半年算入本金. 問 500 圓之本利合計幾何。

12. 知 $\log 1.03 = .0128372$, $\log 64186 = 4.8074403$ 及 $\log 64187 = 4.8074471$. 問在 15 年末可支之金 1000 圓. 其現價若何. 但以三分之複利算。



第二十八編

雜定理及雜例(立方根)

266. 定理 有 $x^n - a^n$ 無論 n 爲如何之正整數, 皆能以 $x - a$ 除盡。

$x - a, x^2 - a^2, x^3 - a^3$, 皆能以 $x - a$ 除盡, 既詳於前。

$$\begin{aligned} \text{茲} \quad x^n - a^n &= x^n - ax^{n-1} + ax^{n-1} - a^n \\ &\quad - x^{n-1}(x-a) + a(x^{n-1} - a^{n-1}). \end{aligned}$$

$x - a$ 若能除盡 $x^{n-1} - a^{n-1}$ 則此式亦能除盡

$$x^{n-1}(x-a) + a(x^{n-1} - a^{n-1}), \text{ 即 } x^n - a^n.$$

由是, 若 $x - a$ 能除盡 $x^{n-1} - a^{n-1}$ 則此式亦能除盡 $x^n - a^n$.

然已知 $x - a$ 必能除盡 $x^2 - a^2$.

故 $x - a$ 亦能除盡 $x^4 - a^4$.

而 $x - a$ 能除盡 $x^4 - a^4$ 故亦能除盡 $x^5 - a^5$.

除做此。

由是, 如 $x^n - a^n$, 其 n 爲任意之正整數, 恆能以 $x - a$ 除盡。

$x^n + a^n = x^n - a^n + 2a^n$ 故以 $x-a$ 除 $x^n + a^n$ 則知其餘數為 $2a^n$

故 $x^n + a^n$ 不能以 $x-a$ 除盡。

若變 a 為 $-a$ 。則 $x-a$ 為 $x-(-a) = x+a$ 。

又 $x^n - a^n$ 為 $x^n - (-a)^n$ 而 $x^n - (-a)^n$ ，如 n 為奇數，則成 $x^n + a^n$ ， n 為偶數，則成 $x^n - a^n$ 。

由是 n 為奇數。則

$x^n + a^n$ 能以 $x+a$ 除盡。

而 n 為偶數。則

$x^n - a^n$ 能以 $x+a$ 除盡。

故 n 為正整數。則

$x-a$ 恆能除盡 $x^n - a^n$ 。

$x-a$ 決不能除盡 $x^n + a^n$ 。

$x+a$ ， n 為偶數時能除盡 $x^n - a^n$ 。

$x+a$ ， n 為奇數時能除盡 $x^n + a^n$ 。

以上所述之四例，皆含於第一例。而將此諸例各加證明。學者可自試之。以資練習。

上之結果。可示其商如次。

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1}$$

$$\frac{x^n \pm a^n}{x+a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots \pm a^{n-1}.$$

於第二公式之兩邊。若 n 爲奇數。則取上之符號。
 n 爲偶數。則取下之符號。

問 題 LXXVI.

求以下各式之因數。[至 8].

1. $x^3 - x^2 - x + 1.$

2. $x^6 - x^4 - x^2 + 1.$

3. $1 - x - x^4 + x^5.$

4. $1 - x^2 - x^8 + x^{10}.$

5. $x^2 - y^2 - 2ax - 2by + a^2 - b^2.$

6. $x^3 - y^3 - 3x - y + 2.$

7. $x^3 - 2xy - 8y^2 - 2x + 20y - 8.$

8. $a^2 - b^2 + c^2 - f^2 - 2ac - 2bf.$

8. 書以下各除法之商。

(1) $(x^5 - y^5) \div (x - y),$

(2) $(x^7 + y^7) \div (x + y),$

(3) $(x^8 - y^8) \div (x + y).$

10. n 爲任意之正整數。則 $7^n - 1$ 能以 6 除盡。又 $35^{2n+1} + 1$ 能以 36 除盡。求證。

11. 求證 $(3x^2 - 2x + 1)^3 - (2x^2 + 3x - 5)^3$ 能以 $x^2 - 5x + 6$ 除盡。但不許用除法。

12. 書以 $5a + 5b$ 除 $(2a + 3b)^3 + (3a + 2b)^3$ 所得之商。

13. 以 $a+b+c$ 除 $(2a+4b-4c)^2 + (a-b+7c)^2$ 所得之商。

14. 證 $(1-x)^2$ 爲 $1-x-x^5+x^6$ 之一因數。

15. 證 $(1-x)^2$ 爲 $1-x-x^n+x^{n+1}$ 之一因數。但 n 爲任意之正整數。

16. 證 $(x-1)^2$ 爲 $nx^{n+1}-(x+1)x^n+1$ 及 $x^n-nx+n-1$ 之一因數。但 n 爲任意之正整數。

267. 定理 由是證明緊要之命題。

定理。於含 x 之任意有理整式。若以 f 代 x 而其式爲零。則 $x-f$ 爲此式之因數。

其式依 x 乘方之次序列之。

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$$

依假設 $af^n + bf^{n-1} + cf^{n-2} + \dots = 0$ 。

由是 $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$

$$= ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots - (af^n + bf^{n-1} + cf^{n-2} + \dots)$$

$$= a(x^n - f^n) + b(x^{n-1} - f^{n-1}) + c(x^{n-2} - f^{n-2}) + \dots$$

然依前款 $x^n - f^n, x^{n-1} - f^{n-1}, x^{n-2} - f^{n-2}$, 等皆能以 $x-f$ 除盡。

是故。又 $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$ 能以 $x-f$ 除盡。

268. 別證 前款證明之問題。亦可得證明如次。

以 $x-f$ 除 $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$ 若得不含 x 之餘數。則不能更用除法。而令其商為 Q ，餘數為 R ，則依除法之性質。

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots = Q(x-f) + R$$

而此式之兩邊為恆等式。

因 R 不含 x 。故 x 之值變而 R 不變。然則 $x=f$ 。則 $af^n + bf^{n-1} + cf^{n-2} + \dots = Q(f-f) + R = R$ 。

由是。以 $x-f$ 除含 x 任意之式。其餘數。與以 f 代 x 所得之餘數同。

由是前款之定理。即以 f 代任意式中之 x 。而其式為零。則 $x-f$ 為其式之因數。原包含於此中。

〔例 1.〕 求以 $x-3$ 除 $x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ 所得之餘數。

$$\text{餘數} = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = -2.$$

〔例 2.〕 證 $x-2$ 為 $x^4 - 3x^2 + 2x - 8$ 之一因數。此要件在合於 $2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 8 = 0$ 。

〔例3.〕 求 x^2-3x+2 與 $x-13x+12$ 之 L.C.M.

x^2-3x+2 之因數爲 $x-1$ 與 $x-2$ 。而此二因數之中。 $x-1$ 合於爲 $x^2-13x+12$ 之因數之要件。而 $x-2$ 不合。

故所求之 L.C.M. 爲 $(x-2)(x^2-13x+12)$ 。

〔例4.〕 任意之有理整式。若其 x 各乘方之係數之和爲零。則能以 $x-1$ 除盡。試證明之。

何則。因式之係數爲零。故以 1 代其式中之 x 。則其式爲零。

故 $x-1$ 爲其式之因數。

269. 公因數 以 a 代 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$ 式中之 x 時而其式爲零。則 $x-a$ 爲此式之一因數。既證於前。

若實際行除法。則易知其商之第一項。爲 x 之最高方乘 ax^{n-1}

由是所設之式等於 $(x-a)(ax^{n-1}+\dots\dots\dots)$

又 $x=\beta$ 時爲零。則 $x-a$ 與 $ax^{n-1}+\dots\dots\dots$ 之積。必在 $x=\beta$ 時爲零。而 $x=\beta$ 時。 $x-a$ 原不能爲零。故 $ax^{n-1}+\dots\dots\dots$ 必在 $x=\beta$ 時爲零。由是。 $x-\beta$ 爲

$ax^{n-1} + \dots$ 之一因數若用除法。易知商之第一項
為 ax^{n-2}

由是。原式 $= (x-\alpha)(x-\beta)(ax^{n-2} + \dots)$

同樣。若原式以 $\gamma\delta$ 等代 x 能為零。則

原式 $= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\dots(ax^{n-r} + \dots)$

但 r 為因數 $x-\alpha, x-\beta,$ 等之數。

故所設之式。若以 $\alpha, \beta, \gamma,$ 等 n 個數值代 x 而其式
為零。則其式當為 $x-\alpha$ 等 n 個因數。而他之因數
 $ax^{n-r} + \dots$ 為 a 。

故 原式 $= a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots$

270. 定理 凡 x 之 n 次式。其以數代 x 而
使其式為零者不能多於 n 個。

何則。凡 x 之 n 次式。其含有 x 之因數。不能多於
 n 個。故以數代 x 而使其式為零者。亦祇有 n 個。 n
個之外。別以他字代 x 。其式必不復為零。

如 $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$ 式。若以 n 個數值 $\alpha,$
 $\beta, \gamma,$ 等代其式之 x 能為零。則

原式 $= a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots$

若又於 $\alpha, \beta, \gamma,$ 等之外。設 k 為任意之數。惟與 $\alpha, \beta,$

γ , 等之數值不同。而以 k 代此式之 x 。則 $k-\alpha$, $k-\beta$, 等。原不復爲零。故其連乘積亦不能爲零。如是。則所設之式亦不能爲零。若必謂所設之式能爲零。則必 a 爲 0 然後可。

然 a 爲零。則原式爲 $bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots\dots\dots$ 是爲 x 之 $n-1$ 次式。則原式祇能以 $n-1$ 個數值代 x 爲零。而以 n 個數值代 x 。必有一個數值不能使原式爲零。若必謂能使原式爲零。則必 b 爲零然後可。餘做此。

由是。凡 x 之 n 次式。苟非 x 之一切係數皆爲零。 則以數代 x 而使其式爲零者不能多於 n 個。而一切係數皆爲零。則易知此式無論以如何之數值代 x 皆爲零。

271. 方程式之根 能使 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$ 等於零之 x 之數值。必爲方程式 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots\dots\dots=0$ 之根。

故依 270 款。凡 n 次之方程式。其根不能多於 n 個。但未知量之一切係數皆爲零者。不在此限。

又未知量之一切係數皆爲零。則其方程式。無論以如何之數代 x 。皆能合理。

272. 定理 有 x 之兩 n 次式。

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$$

$$px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \dots$$

若以數代 x 而彼此之值相等者，多於 n 個。則知

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots = px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \dots$$

即方程式

$$(a-p)x^n + (b-q)x^{n-1} + (c-r)x^{n-2} + \dots = 0$$

其根多於 n 個。

是故依前款。 x 各方乘之係數必為零。

故 $a=p$ $b=q$ $c=r$ 等等

由是。凡 x 之兩 n 次式。若以數代 x 而彼此之值相等者多於 n 個。則一式中 x 任意乘方之係數。必等於他一式中 x 同乘方之係數。

273. 推論

有限項之任意兩式若以一切數值代其所含之 x 而彼此之值相等。則此兩式合於前款之關係。何則。因 x 數值之數。大於其最高次之指數故也。

由是。有限項之任意兩式。若以一切數值代其所

含之文字，而彼此之值相等，則其文字之係數恆相等。

此定理於無窮項之兩式，亦能合理。然攷究無窮項，在本書之範圍外。

274. 等勢式 將一式中所含任意之二文字互換其值無變更，則其式稱爲此二文字之等勢式。

如 $a+b$ 與 a^2+b^2 ，爲 a, b 之等勢式。何以故。因此二式，各變 a 爲 b ，變 b 爲 a ，其值皆不變故也。

又 $a+b+c$ 及 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 爲 a, b, c 三文字中任意二文字之等勢式。

三文字之一次等勢式，唯 $pa+pb+pc$ ，但 p 爲數字係數。

275. 輪換次序 式中諸項排列之次序，學者最宜注意。

如 $bc+ca+ab$ 式之列法，乃依 a, b, c 之輪換次序排列者。即將不含 a 之項置爲第一項。其他諸項，可依輪換次序變其文字得之。即變 a 爲 b ，變 b 爲 c ，

變 c 爲 a , 依次得以下諸項。

又 $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ 式亦爲依輪換次序列者。何則。因將 $a^2(b-c)$ 之文字變換。則得 $b^2(c-a)$ 。又將 $b^2(c-a)$ 之文字變換。則得 $c^2(a-b)$ 。故也。

同樣 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 式其第二與第三兩因數。俱由第一因數。以次依輪換次序變得。

276. 雜例 由是。依前諸款所證明之定理。示其例如次。

[例 1.] 證 $(b-c)^5 + (c-a)^5 + (a-b)^5$ 能以

$$(b-c)(c-a)(a-b) \text{ 除盡。}$$

若於 $(b-c)^5 + (c-a)^5 + (a-b)^5$ 式。設 $b=c$ 則

$$(c-a)^5 + (a-c)^5 = 0$$

由是 $b-c$ 爲一因數。而同樣可證得 $c-a$, $a-b$ 亦爲此式之因數。

[例 2.] 證次式

$$(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3 = 24abc.$$

若於 $(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$

$$- (a+b-c)^3 \dots \dots \dots (1)$$

設 $a=0$ 則 b 與 c 無論爲如何之數值易知此式

爲零。

由是 a 爲 (1) 之一因數。

同樣 b, c 亦爲 (1) 之因數。

而 (1) 爲三次式。故此式唯有三個一次因數。由是此式等於 abc 或等於以某數乘 abc 所得之數。

$$\begin{aligned} \text{故 } (a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3 \\ = Labc \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

但 L 無論 a, b, c 如何。其值恆相同。故設 a, b, c 爲特別之數值。可求得 L 之數值。

設 $a=b=c=1$ 則 (2) 式爲

$$3^3 - 1^3 - 1^3 - 1^3 = L, \quad \therefore L = 24.$$

又求 (2) 式左邊 abc 之係數。亦能求出 L 之數值。依 251 款。在 $(a+b+c)^3$ 中 abc 之係數爲 $\frac{3!}{1!1!1!} = 6$ 。而同樣。於他之各立方中。其 abc 之係數爲 -6 。故 abc 之全係數爲 24。而右邊之係數爲 L 。故如前得 $L = 24$

(例 3.) 求 $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ 之因數
若於 $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ 式設 $b=c$ 則

$$c^3(c-a) + c^3(a-c) = 0$$

由是 $b-c$ 爲原式之因數。

同樣，可證明 $c-a$, $a-b$ 亦爲此式之因數。

然所設之式爲四次式。故今求得之三個因數外，當更有一個一次因數。而此因數爲 a, b, c 之等勢式。故必爲 $a+b+c$

由是所設之式等於

$$L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

但 L 爲常數。

設 a, b, c 爲特別之數值。可求得 L 。

或比較 a^3 之係數。則

$$b-c = -L(b-c)$$

由是 $L = -1$ 。

$$\begin{aligned} \text{故 } a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) \\ = -(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c). \end{aligned}$$

〔例4〕 化次式爲簡式

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

分母之 L.C.M 爲 $(b-c)(c-a)(a-c)$

由是所設之式等於

$$\frac{-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

於是分母之因數。其能爲分子之因數與否。不可

不察。察得分子與分母全然相同。故所設之式等於一。

277. 恒等式 下所示者為緊要之恒等式。

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$$

即當注意 $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$

$$= \frac{1}{2}\{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2\}$$

然 $a+b+c$ 為 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 之一因數。故若 $a+b+c=0$ 則知 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ 由是唯 $a+b+c=0$ 始無論 a, b, c 之值如何。恒得 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

即任意三量之和為零。則其立方之和等於其連乘積之三倍。

如 $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 = 3(b-c)(c-a)(a-b).$

$$(b+c-2a)^2 + (c+a-2b)^2 + (a+b-2c)^2$$

$$= 3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c),$$

又 $(x-a)(b-c) + (x-b)(c-a) + (x-c)(a-b) = 0$

故 $(x-a)^2(b-c)^2 + (x-b)^2(c-a)^2 + (x-c)^2(a-b)^2$

$$= 3(x-a)(x-b)(x-c)(b-c)(c-a)(a-b).$$

278. 制限值之求法 欲決定二以上

諸未知量之數值須有與未知量同數之方程式。然未知量之數值有制限者則不然。

如祇有一個方程式 $3x+4y=10$ ，求 x 及 y 之數值。其數值以正整數為限。則此方程式。唯有兩數值適合。即 $x=2$, $y=1$ 。

又由 $(x-a)^2+(y-b)^2=0$ 之關係。求其兩未知量。其數值以實數為限。則知 $x=a$, $y=b$ 何則。因實數之平方必為正。故二正數非各為零。其和決不能為零。此種要例。已述於 190 款。

〔例 1.〕 a, b, c, d 皆為實數。且

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2=4(ab+bc+cd)$$

求證 $a=b=c=d$ 。

試將 $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2-4(ab+bc+cd)$ 式記為二以上諸平方之和。則

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2=0$$

然 $a-b$, $b-c$, $c-d$, 皆為實數。故

$$a=b, \quad b=c, \quad c=d.$$

279. 最大值及最小值 更舉二三要

例如次。

〔例1.〕 有二正量之和求其積之最大值。

設二正量之和為 $2a$ 。然其二量必一為 $a+x$ 。

又一為 $a-x$ 。故其積當為 a^2-x^2 。

因 a 為定數。故欲 a^2-x^2 為最大。必 $x=0$ 。故在此例。其二量互相等。

即有二正量之和若此二量互相等。則其積為最大。

〔例2.〕 有二正量之積。求其和之最小值。

因 $(x+y)^2=4xy+(x-y)^2$ 故 $(x+y)^2$ 決不小於 $4xy$ 。

而 $x=y$ 。則 $(x+y)^2=4xy$

由是。有二正量之積。若此二量互相等。則其和為最小。

〔例3.〕 任意二正量之等差中項。恆較其等比中項大。

設二量為 a, b 。則其等差中項為 $\frac{1}{2}(a+b)$ 。其等比中項為 \sqrt{ab} 。

故欲證 $\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$

則 $(a+b)^2 > 4ab$

則 $(a-b)^2 > 0$

而 $(a-b)^2$ 必為正。故此理易曉。

立 方 根

280. 立方根 由是求任意代數式之立方根。

$$\text{既知 } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

即二項式之立方有四項。又將二項式之立方，從某文字之方乘列之。則其首末兩項之立方根。即為原式之二項。

依此理逆推之。則完全立方之式。若其式祇有四項而依某文字乘方之次序列之。則此式之立方根。即首末兩項之立方根之和。故完全立方之式唯有四項。則其立方根可由觀察求得。

如求 $27a^3 - 54a^2b + 36a^2b^2 - 8a^3b^3$ 之立方根。則此式首末兩項之立方根。為 $3a^2$ 及 $-2ab$

由是所求之立方根。為 $3a^2 - 2ab$

又求 $a^3 - 6a^2b^2 + 12a^2b^4 - 8b^6$ 之立方根。則為 $a^3 - 2b^2$

281. 應用 某式所含特別文字之乘方。祇有三種。則依其文字之乘方列之。可得祇有四項之式。

如 $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 6abc + 3b^2c + 3bc^2$ 式。a 之相異乘方祇有三種。即 a, a^2, a^3 ，故依 a 之乘方之次序列之。即

$$a^3 + 3a^2(b+c) + 2a(b^2+c^2+2bc) + (b^3-c^3+3b^2c+3bc^2),$$

$$\text{即 } a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3$$

故此式合於前款所述之例。而其立方根可直知爲 $a+b+c$

282. 通例 由是述其通例。

今求 $(A+B)^3$ 之立方根。但 A 顯根之若干項。B 顯其餘之各項。將 A, B 之各項。依某文字之遞降乘方或遞昇乘方列之。即 A 之各項。皆較 B 之任意項爲高次或低次。

又已知 A 之諸項。求 B 之諸項。則由 $(A+B)^3$ 減 A^3 。其餘數爲

$$(3A^2 + 3AB + B^2)B$$

而依此列法。可知在餘數中之最高次或最低次之項。爲

$$3 \times (\text{A 之第一項之平方}) \times (\text{B 之第一項})$$

由是。既得立方根之若干項。欲求其次項。即 B 之

最高次或最低次之項)當由全式減根之已知部分之立方。將其餘數之第一項。以根之第一項之平方之三倍除之。

是即由根之第一項求以後各項之法也。而根之第一項。即為所設式之第一項之立方根。理尤易明。

【例】 求 $x^6 - 6x^5y + 21x^4y^2 - 44x^3y^3 + 63x^2y^4 - 54xy^5 + 27y^6$ 之立方根。

$$x^6 - 6x^5y + 21x^4y^2 - 44x^3y^3 + 63x^2y^4 - 54xy^5 + 27y^6$$

$$(x^2)^3 = x^6$$

$$(x^2 - 2xy)^3 = x^6 - 6x^5y + 12x^4y^2 - 8x^3y^3$$

$$(x^2 - 2xy + 3y^2)^3 = x^6 - 6x^5y + 21x^4y^2 - 44x^3y^3 + 63x^2y^4 - 54xy^5 + 27y^6$$

先取所設式之第一項之立方根。即 x^2 即為所求根之第一項。

然由所設之式減 x^2 之立方。其餘數之第一項為 $-6x^5y$ 。以 $3 \times (x^2)^2$ 除之。則得 $-2xy$ 即為根之第二項。

又由所設之式減 $x^2 - 2xy$ 之立方。則其餘數之第一項為 $9x^4y^2$ 。以 $3 \times (x^2)^2$ 除之。則得 $3y^2$ 即為根之第三項。

又由所設之式減 $x^3 - 2xy^2 + 3y^3$ 之立方。適盡無餘。

由是所設之式爲 $(x^2 - 2xy + 3y^2)^3$

故所求之立方根爲 $x^2 - 2xy + 3y^2$

x^2 , $x^2 - 2xy$, 等之立方。置於所設式之下。使同類項成一豎線。則減此等式所得之餘數。容易看出。

不必求屢次之立方。而卽用上之立方。較可省略。然較之前法。不過省略。仍非特別之良法。

283. 多乘根之特例

求某式之四乘根。可取其平方根之平方根。又求其六乘根。可取其平方根之立方根。或取其立方根之平方根。然以取平方根之立方根爲宜。

求某代數式之任意乘根。亦不甚難。

卽求任意式之 n 乘根。有次之定則。但此定則。本於二項式定理。

將其式依某文字之遞降乘方列之。取第一項之 n 乘根。卽爲所求根之第一項。

又旣得根之若干項。欲求其次項。則由全式減根之已知部分之 n 乘方。將其餘式之第一項。以根之第一項之 $n-1$ 乘方之 n 倍除之。則其商卽根之次

項。

〔注意〕 平方根以上之根，除能由視察求得者外，用時甚少。

問 題 LXXVII.

證以下各式〔至8〕。

$$1. \quad a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b).$$

$$2. \quad a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab).$$

$$3. \quad (b-c)^5 + (c-a)^5 + (a-b)^5 = 5(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

$$4. \quad (a+b+c)^4 - (b+c-a)^4 - (c+a-b)^4 - (a+b-c)^4 + a^4 + b^4 + c^4 = 12abc(a+b+c).$$

$$5. \quad a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

$$6. \quad b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a) + a^2b^2(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

$$7. \quad a^3(b^2-c^2) + b^3(c^2-a^2) + c^3(a^2-b^2) = -(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

$$8. \quad a^4(b^2-c^2) + b^4(c^2-a^2) + c^4(a^2+b^2) \\ = -(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b).$$

求以下各式之因數 [9 至 2] .

$$9. \quad bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) + ab(a^2-b^2).$$

$$10. \quad a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 \\ + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

$$11. \quad a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \\ - (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

$$12. \quad a(b+c)(b^2+c^2-a^2) + b(c+a)(c^2+a^2-b^2) \\ + c(a+b)(a^2+b^2-c^2).$$

13. 證 $(x+y+z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1}$ 能以 $(y+z)(z+x)(x+y)$ 除盡。而設 $n=1$ 又 $n=2$ 各求其商。

$$14. \quad \text{證 } (x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x+y) \text{ 又證次式} \\ (x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

化以下各式爲簡式 [15 至 20]

$$15. \quad \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

$$16. \quad \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$17. \quad \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

$$18. \frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b^2(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$$

$$19. \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c+a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$$

$$20. \frac{b+c}{a(a-b)(a-c)} + \frac{c+a}{b(b-c)(b-a)} + \frac{a+b}{c(c-a)(c-b)}$$

證次之各式 [21 至 24].

$$21. \frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)(x+b)} \\ + \frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)} = \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$22. \frac{a}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)(x+b)} \\ + \frac{a}{(c-a)(c-b)(x+c)} = \frac{-x}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$23. \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x+b)} \\ + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x+c)} = \frac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$24. \text{化 } \frac{(b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3 + (a^2-b^2)^3}{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3} \text{ 爲簡式.}$$

證以下各式 [25 至 34].

$$25. (1) \quad a+b = \frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-a}$$

$$(2) \quad a+b+c = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} \\ + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

$$(3) \quad a+b+c+d = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} \\ + \frac{b^4}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-d)(c-a)(c-b)} \\ + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$26. \quad \frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-d)(b-a)} \\ + \frac{c^3}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 1.$$

$$27. \quad \frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{cda}{(b-c)(b-d)(b-a)} \\ + \frac{dab}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)} = -1$$

$$28. \quad \frac{bc}{(a-b)(a-c)}(x-a)^2 + \frac{ca}{(b-c)(b-a)}(x-b)^2 \\ + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}(x-c)^2 = x^2.$$

$$29. \quad (b+c)^2 + (c+a)^2 + (a+b)^2 - (c+a)(a+b) \\ - (a+b)(b+c) - (b+c)(c+a) = a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab.$$

$$30. \quad (b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3 - 3(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2 - 3abc).$$

31. $(b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2$
 $- 3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 4(a^2 + b^2 + c^2 - 3abc).$

32. $(x^2 + 2yz)^2 + (y^2 + 2zx)^2 + (z^2 + 2xy)^2$
 $- 3(x^2 + 2yz)(y^2 + 2zx)(z^2 + 2xy) = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2.$

33. $x^2 + y^2 + z^2 = (yz + zx + xy)$ 則 $x = y = z.$

34. (1) $2(a^2 + b^2) = (a+b)^2$ 則 $a = b.$

(2) $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a+b+c)^2$ 則 $a = b = c.$

(3) $4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a+b+c+d)^2$ 則

$$a = b = c = d.$$

(4) $n(a^2 + b^2 + c^2 + \dots) = (a+b+c+\dots)^2$

則 $a = b = c = \dots$ 但 n 為文字之數。

35. 設 x 為實數且為正。則 $x + \frac{1}{x}$ 之最小數值為
 $2, x + \frac{4}{x}$ 之最小數值為 $4, x + \frac{9}{x}$ 之最小數值為 6 試
 證之。

36. x 為實數。則 $\frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x + 4}$ 不能大於 7 。又不能
 小於 $\frac{1}{7}$ 求證。

37. 若干正量之和為一定。則是等之量皆相等時，
 其連乘積始為最大。

38. 若干正量之連乘積爲一定，則是等之量皆相等時，其和始爲最小。

39. 若 $\frac{yz-x^2}{y+z} = \frac{zx-y^2}{z+x}$ 則此各分數等於 $\frac{xy-z^2}{x+y}$

或等於 $x+y+z$ 求證。

40. 若 $\frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{ac-bd}{a-b-d+c}$ 則 $a=b$ ，又 $c=d$ ，

又 $a+b=c+d$ 。

41. x, y, z 可用次之三方程式決定。

$$(a-\alpha)^2x + (a-\beta)^2y + (a-\gamma)^2z = (a-\delta)^2,$$

$$(b-\alpha)^2x + (b-\beta)^2y + (b-\gamma)^2z = (b-\delta)^2,$$

$$(c-\alpha)^2x + (c-\beta)^2y + (c-\gamma)^2z = (c-\delta)^2,$$

則 $(d-\alpha)^2x + (d-\beta)^2y + (d-\gamma)^2z = (d-\delta)^2.$

但 d 爲任意之數。

42. 方程式 $\frac{a}{x+a} + \frac{b}{x+b} = \frac{c}{x+c} + \frac{d}{x+d}$

有相等根一雙，證 a 或 b 之一，等於 c 或 d 之一，或證

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

又證根爲 $-a, -a, 0$ ，或 $-b, -b,$

0 ，或 $0, 0, -\frac{2ab}{a+b}.$

43. 若 $2(x^2+x'^2-xx')(y^2+y'^2-yy') = x^2y^2+x'^2y'^2$ 則

$x = x'$ 及 $y = y'$.

44. 證 $a(a+d)(a+2d)(a+3d)+d^4$ 為完全之平方。

45. 求以下各式之立方根。

$$(1) \quad x^3 - 24x^2y + 192xy^2 - 512y^3.$$

$$(2) \quad 1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6.$$

$$(3) \quad x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 36x + 8.$$

$$(4) \quad 8x^6 - 36x^5 + 102x^4 - 171x^3 + 204x^2 - 144x + 64.$$

46. 證次式。

$$(y+z)(z+x)(x+y) + xyz = xyz(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

47. a, b, c, x 皆為實數。

若 $(a^2+b^2)x^2 - 2b(a+c)x + b^2+c^2 = 0$ 則 a, b, c 為等比級數而 x 為其公比。試證之。

48. 證 $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots$ 至 n 因數 $= \frac{1-x^{2^n}}{1-x}$ 。

49. $s = a+b+c$ 求證

$$(as+bc)(bs+ca)(cs+ab) = (b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.$$

50. 若 $a+b+c+d=0$ 求證

$$\begin{aligned} (a^3+b^3+c^3+d^3)^2 &= 9(bcd+cd a+dab+abc)^2 \\ &= 9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd) \\ &= 9(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2 \end{aligned}$$

第二十九編

記 數 法

284. 常用記數法 在算術中其任意之數俱用名爲數字之記號以 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 顯之。且左一位之數字。俱顯右一位數字之十倍又單位，十位，百位等，無數時。則以顯空數之零(即 0)補之。

此法謂之常用記數法。其 10 謂之根，或謂之底。

285. 記數法 欲以一定之方法名其數。則除 10 外。可用他之任意之數紀之。因而凡記數法。即依一定之方法者除以 10 爲底外。更可以他之任意數爲底。

如 4235，其 3 顯 3×7 ，2 顯 $2 \times 7 \times 7$ ，4 顯 $4 \times 7 \times 7 \times 7$ ，逐次如此。則數字由某位置移於左一位之位置。即顯其七倍之數。則 4235 謂之以七底記之數。

就通例論。將任意之數 N ，書爲……… $d_3 d_2 d_1 d_0$ 。此

數字 $d_0, d_1, d_2, d_3, \dots$ 等各為零或小於 r 之正整數。而 d_0 顯 d_0 單位, d_1 顯 $d_1 \times r$, d_2 顯 $d_2 \times r \times r$, 等等。則 N 為以 r 底顯之數。

$$\text{故} \quad N = d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + \dots$$

286. 定理 顯任意之正整數, 可用任意之紀數法。

設此數為 N , r 為所求紀數之底。

以 r 除 N , 其商為 Q_1 , 其餘數為 d_0 則

$$N = d_0 + r Q_1$$

以 r 除 Q_1 其商為 Q_2 , 其餘數為 d_1 則

$$Q_1 = d_1 + r \times Q_2 \quad \therefore N = d_0 + r d_1 + r^2 Q_2$$

逐次如此終必得小於 r 之商。

故以 r 除至 N 回則如次。

$$N = d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + \dots + d_n r^n$$

故此數以 r 底記之。則為

$$d_n \dots d_2 d_1 d_0$$

數字 d_0, d_1, d_2, \dots , 各為小於 r 之正整數。

又除 d_n 外。其他俱得為 0。

(例 1.) 以 7 底顯 1062 數。以 7 依次除之。則其底

與餘數如次。

$$\begin{array}{r}
 71062 \\
 7\overline{)151} \quad \text{餘 } 5 = d_0 \\
 \underline{721} \dots\dots\dots 4 = d_1 \\
 3 \dots\dots\dots 0 = d_2
 \end{array}$$

故 1062 以 7 底顯之則成 3045

〔例 2.〕 2645, 由 8 底變爲 10 底。

$$\begin{aligned}
 2645 &= 2 \times 8^3 + 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 5 \\
 &= \{(2 \times 8 + 6)8 + 4\}8 + 5
 \end{aligned}$$

故所求之結果。可依次法得之。以 8 乘 2, 加 6, 更以 8 乘其結果。再加 4, 又以 8 乘之。加 5, 即得。此法能駁一切之例。

〔例 3.〕 以 5 底顯 2156. 答 32111.

〔例 4.〕 以 11 底顯 34239. 答 237;7, 但 ; 爲 10 位。

〔例 5.〕 以 4 底之分散顯 11. 答 $\frac{11}{11}$.

〔例 6.〕 31426, 由 8 底變爲 4 底. 答 3030112.

先將 31426, 如〔例 2〕, 以 10 底顯之。而化其結果爲 4 底。如〔例 1〕, 然此結果亦可得一種演算如次。

$$\begin{array}{r}
 4 \overline{) 31426} \\
 \underline{4 \cdot 05} \quad \text{餘} \quad 2 \\
 4 \overline{) 1461} \dots\dots\dots 1 \\
 \underline{4314} \dots\dots\dots 1 \\
 \underline{463} \dots\dots\dots 0 \\
 4 \overline{) 14} \dots\dots\dots 3 \\
 \underline{3} \dots\dots\dots 0
 \end{array}$$

故所求之數為 303112.

[說明]先以 4 除 $3 \times 8 + 1$ 則得商 6 餘 1 次以 4 除 $1 \times 8 + 4$ 則得商 3 餘 0 餘仿此。

287. 算術上之算法 將用種種底所顯之數依算術之法演之於練習上最相宜。

[例 1.] 加 2345, 6127, 1503 [底為 8]. 答 12177.

[例 2.] 由 4021 減 3154 [底為 6]. 答 423.

[例 3.] 以 456 乘 234 [底為 7]. 答 150663.

[例 4.] 以 315 除 22326 [底為 8]. 答 56.

288. 紀底小數 任意底所紀之小數與常用紀數法之小數相當。

如 r 底之 $.abc\dots\dots$ 等於次式

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} + \dots\dots$$

將所設任意之分數可用任意底之紀底小數顯之。

令所設之分數爲 F ，而以 r 底之紀底小數顯之。

則 $F = .abc \dots\dots$ ，即 $F = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} + \dots\dots$

但 a, b, c 等，各爲零或小於 r 之正整數。以 r 乘之。

則 $F \times r = a + \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} + \dots\dots$

由是則 a 等於 $F \times r$ 之整數部分，而 $\frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} + \dots\dots$

等於其分數部分。

令 $F \times r$ 之分數部分爲 F_1 則

$$F_1 = \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} + \dots\dots$$

又以 r 乘之。則如前 b 等於 $F_1 \times r$ 之整數部分。

故 $a, b, c, \dots\dots$ 可依次求之。

〔例 1.〕 有 $\frac{15}{108}$ ，以 6 底之紀底小數顯之。

$$\frac{15}{108} \times 6 = 3 + \frac{1}{18}, \quad \frac{1}{18} \times 6 = 0 + \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} \times 6 = 2.$$

由是 .302 爲所求之結果。

〔例 2.〕 有 431.45 由 10 底變爲 4 底。

此演算整數部分與小數部分當各別求之。

$$\begin{array}{r}
 4431 \\
 \underline{4107} \dots\dots\dots 3 \\
 426 \dots\dots\dots 3 \\
 \underline{48} \dots\dots\dots 2 \\
 1 \dots\dots\dots 2 \\
 \hline
 .45 \\
 \underline{4} \\
 1.80 \\
 \underline{4} \\
 3.2 \\
 \underline{4} \\
 0.8
 \end{array}$$

故所求之結果爲 $12233.\dot{1}30$

289. 定理 以 r 底顯任意數之數字和，能以 $r-1$ 除盡，則其數能以 $r-1$ 除盡。

令此數爲 N ，其數字之和爲 S ，數字爲 d_0, d_1, d_2 等，則

$$N = d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + \dots\dots\dots + d_n r^n,$$

及
$$S = d_0 + d_1 + d_2 + \dots\dots\dots + d_n.$$

由是 $N - S = d_1(r-1) + d_2(r^2-1) + \dots\dots\dots + d_n(r^n-1)$ 。

然此右邊之各項能以 $r-1$ 除盡。[286 款]。

由是 $N - S$ 能以 $r-1$ 除盡，故 S 能以 $r-1$ 除盡。

則 N 亦能以 $r-1$ 除盡。

本定理之特例，10 底所顯任意數之數字和，能以 9 除盡，則其數亦能以 9 除盡。

290. 定理 由 r 底所顯奇位各數字之和，與偶位各數字之和相減若其兩和之差能以 $r+1$ 除盡，則其數亦能以 $r+1$ 除盡。

$$N = d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + d_3 r^3 + \dots$$

及
$$D = d_0 - d_1 + d_2 - d_3 + \dots$$

則
$$N - D = d_1(r+1) + d_2(r^2-1) + d_3(r^3+1) + \dots$$

然此右邊之各項能以 $r+1$ 除盡。[266 款]。

由是 $N-D$ 恆能以 $r+1$ 除盡。故 D 能以 $r+1$ 除盡，則 N 亦能以 $r+1$ 除盡。

本定理之特例。由 10 底所顯之任意數，取其奇位各數字之和，與偶位各數字之和，若其兩和之差，能以 11 除盡，則其數亦能以 11 除盡。

問 題 LXXVIII.

1. 將 2156, 7213, 192457, 以 6 底顯之。
2. 將 2135, 4210, 30012, 123456 各數，由 7 底變為 10 底。
3. 將 3152 及 23678 由 9 底變為 12 底。
4. 將 23.42 及 123.45 以 5 底顯之。

5. 以 1.25 乘 $2:31$ 。但此二數爲以 6 底顯之數。
 6. 以任意底顯之數 121, 12321, 1234321 俱爲完全平方求證。
 7. $215a14b3$ 能以 9 或 11 除盡。求 a 及 b 之數值。
 8. $516a7245b$ 能以 99 除盡。問 a 及 b 之數值幾何。
 9. 問 314 以如何之底顯之則成 626。
 10. 有以 5 底顯之二位數。若將其數字倒置。則爲原數之二倍。問此數如何。
 11. 有以 8 底顯之二位數。若將其數字倒置。則爲原數之二倍。問此數如何。
 12. 有 7 底顯之二位數。若將其數字位倒置。則爲原數之三倍。問此數如何。
-

問題之答

- I. 1. 17. 2. 6. 3. 0. 4. 168. 5. $6\frac{1}{2}$.
 6. $1\frac{1}{7}$. 7. 1. 8. 3. 9. 1. 10. 2.
 11. 3. 12. 2. 13. 20. 14. 4. 15. 4.
 16. 50. 17. 140. 18. 0. 19. 15.
 20. $2\frac{1}{2}$. 21. $\frac{5}{8}$. 22. 0. 23. $3, 4b, 5bc, 16abc$.
 24. $4, 5a, 7ab, 19abc, 4, 5, 7, 19$.
-

- II. 1. 16, 27 64, 256, 8, 4, 2, 5, 5, 2. 2. 13.
 3. 41. 4. 6. 5. 145. 6. 436. 7. 240.
 8. 5. 9. $3\frac{4}{7}$. 10. 79424. 11. 608.
 12. 672. 13. 75. 14. 11. 15. 27.
 16. 36. 17. 4140. 20. 3. 21. 5.
 22. 17. 23. 3. 24. 4. 25. $4\frac{1}{2}$. 26. 12.
 27. 36. 28. 54. 29. 3. 30. 0.
-

- III. 1. 1. 2. 1. 3. 3. 4. -1.
 5. -8. 6. -12. 7. 11. 8. 0.

9. $2a-3b$. 10. $-3a-2b$. 11. $5a-6b-2c$.
12. $-3a-4b+7c$.

- IV. 1. $12a+3b+6c$. 2. $2a-b-c$.
3. a^2+3a+9 . 4. $4a^3-3a^2-2a$.
5. $-8a^2b+3ab^2-3b^3$. 6. 0. 7. $2a$. 8. $4x$.
9. b . 10. $2b$. 11. a^3+a^2 . 12. $-3a+6a^3$.
13. $2m^2$. 14. $pq-q^2$. 15. $4a^2-4ab-\frac{1}{4}b^2$.
16. 0. 17. 0. 18. $2a^2+2ab+2b^2$.
19. $a+b+c$. 20. $2x$. 21. $3a-10b+2$.
22. $-x^2y-2xy^2-3y^3$. 23. 0. 24. 0.
25. $\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{16}a^2b-\frac{1}{4}ab^2+\frac{1}{4}b^3$. 26. $5x^2-4x+15$.
27. $x^2+7ax^2-5a^3$. 28. $-x^2-y^2$.

- V. 1. $2b$. 2. $a+b$. 3. $-2y$. 4. $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y$.
5. $x+x^2$. 6. $3-3x^2$. 7. $-7a+6b-c$.
8. $-b^2+6ab-7a^2$. 9. $-2x^2+10x-9$.
10. $2x^2-2x$. 11. $-\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}c$. 12. $-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2$.
13. $4b$. 14. $-4a-4b$. 15. $2ab$.
16. $-2x^2+xy$. 17. $3x^3+x^2y-2xy^2-7y^3$.
18. $-2x^3-6x^2y$. 19. $2a-3b$. 20. a^2-ab-b^2 .

21. $2ab - ca + 2bc$. 22. $-4a^2 - 2b^2 - 2c^2$.
 23. $-a$. 24. $-3x^2 - 4x + 9$.
 25. $8a^2 + 8b^2 + 2c^2 + 6ab$.

- VI. 1. $2b$. 2. $-2b$. 3. $-2c$. 4. z
 5. $-y + z$. 6. 0 . 7. 3 . 8. 0 . 9. 1 . 10. 0 .
 11. $6x - y - 5z$. 12. $x - 2y + 5z + 8$.
 13. $4a - 4c$. 14. $6x - 4y + 3z$. 15. $-2a - b + 4a$
 16. $2a - 4b - 3c + d$. 17. $-9a$.
 18. $8x - 7y + 11z$. 19. $-8a^2 + 3ab - 6b^2$.
 20. $5m^2 - n^2 + mn$.

- VII. 1. $18a^2$. 2. $35a^3$. 3. 10^5 . 4. a^3b^4 .
 5. $6a^2b^3$. 6. $28a^5b^5$. 7. $18a^3b^2c^3$. 8. $15a^2b^5c^2$.
 9. $2a^4b^1c^2$. 10. $-8ab$. 11. $-12ab$. 12. $-a^3$.
 13. $-24a^4b^2$. 14. $14a^7b^5$. 15. $-18a^3b^3c^7$.
 16. $-6a^2b^5c^3$. 17. $10x^5y^7$. 18. $-10a^3x^2y^7z^4$.
 19. $-72a^4b^5c^7x^7y^7z^6$. 20. $a^2, -a^3, a^4$.
 21. $x^4, -x^4, x^5$. 22. $a^2b^2, -a^3b^3, a^4b^4$.
 23. $a^4b^6, a^6b^9, a^8b^{12}$. 24. $4a^6b^3, -8a^9b^{12}, 16a^{12}b^{16}$.
 25. $9a^2b^4c^6, 4a^6b^2c^8, 17a^5b^6c^{10}$. 26. $a^6, -a^{12}, a^3b^3, -a^6b^3$.

27. $8a^3b^6, -27a^4b^6, -64a^3b^{15}, -343a^6b^{15}c^{12}.$
 28. $-a^2b^3, -8a^7, a^3b^9, a^{10}b^{18}.$ 29. $-36.$ 30. 21.
 31. 288. 32. $-5.$ 33. $-20.$ 34. 45.
 35. $-63.$ 36. 27. 37. 1. 38. 25.
 39. 63. 40. $-3375.$

- VIII. 1. $3a+3b.$ 2. $8a-4b.$ 3. $18a-24b.$
 4. $a^3+a^2.$ 5. $a^5-a^4.$ 6. $3a^5+3a^3.$
 7. $4a^6-5a^5+a^4.$ 8. $-6a^5+9a^4+12a^3.$
 9. $2a^4b^2-3a^3b^3+2a^2b^4$ 10. $ab^2c^2+a^2bc^2+a^2b^2c.$
 11. $-10x^6+15x^4-25x^3+20x^2.$
 12. $-24x^3+18x^5-18x^6+24x^7.$
 13. $-15a^3b+10a^2b^2-35ab^3.$
 14. $-12a^6b^4+18a^5b^5+30a^3b^6.$
 15. $6a+2b.$ 16. $2b-\frac{7}{4}c.$ 17. $2bz.$
 18. $5ab-7ac+2bc.$ 19. $-a^2b^2d^2+a^2c^2d^2.$
 20. $22ab-8ac.$ 21. $-9a.$ 22. $4a^3-2b^3+6bc^2.$
 23. $33ac+12bc-12ab.$

- IX. 1. $x^2-4y^2.$ 2. $a^2-9b^2.$ 3. $6x^2+5xy-6y^2.$
 4. $5a^2-ab-4b^2.$ 5. $x^2+13x+42.$

6. $x^2 - 13x + 42$. 7. $x^2 + x - 42$.
 8. $a^2 + 4a - 45$. 9. $4x^2 + 4x - 24$.
 10. $6x^2 - 17x + 7$ 11. $6y^2 + 7by - 20$.
 12. $9m^4 - 1$. 13. $4m^4 - 25n^4$. 14. $a^2 - \frac{1}{4}b^2$
 15. $6a^2 + 2ab + \frac{1}{4}b^2$. 16. $\frac{1}{12}a^2 - \frac{35}{144}ab + \frac{1}{12}b^2$.
 17. $x^3 - 1$. 18. $x^3 + 1$. 19. $a^3 - b^3$. 20. $a^3 + b^3$.
 21. $8a^3 - 27b^3$. 22. $64p^3 - 125q^3$.
 23. $x^4 - 7a^2x^2 + 6a^2x$. 24. $a^5 - 10a^3b^2 + 24a^2b^3$.
 25. $x^5 - 5x^3 + x^2 + 7x + 2$. 26. $x^5 - x^3 + 5x^2 - 5x + 2$.
 27. $x^4 + x^2y^2 + y^4$. 28. $a^8 + a^4b^4 + b^8$.
 29. $2x^5 + 3x^4y - 3x^3y^2 + x^2y^3 + 7xy^4 + 2y^5$.
 30. $3x^5 - 16x^4y + 39x^3y^2 - 53x^2y^3 + 42xy^4 - 15y^5$.

- X. 1. $a^2 - 2ab + b^2$. 2. $-6a^2 - 4a^2 + 5a + 2$.
 3. $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$. 4. $-6a^3 + 5a^2 - 2a - 4$.
 5. $a^3 - 3bc + b^3 + c^3$.
 6. $a^3 + a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^3 + b^2c + bc^2 + c^3$.
 7. 二次, 三次, 三次, 三次, 三次, 三次 又 1, 3, 5,
 及 6, 爲等次式.
 8. $x^2 + (a+b)x + ab$. 9. $x^2 - (a+b)x - ab$.

10. $x^3 + (a+b+c)x^2 + (bc+ca+ab)x + abc.$

11. $(a+b+c)x^2 + (bc+ca+ab)x + abc.$

12. $x^2(y-z) - x(y^2-z^2) + yz(y-z).$

13. $(a+b+c)x.$

14. 0.

15. $2bx + 2cy.$

XI. 1. $4a^2 + b^2 + 4ab.$ 2. $16a^2 + 9b^2 + 24ab.$

3. $9a^2 + b^2 - 9ab.$

4. $25a^2 + 36b^2 - 60ab.$

5. $a^4 + 25a^2b^2 - 10a^3b.$

6. $4a^4 + 9a^2b^2 - 12a^3b.$

7. $9x^2y^2 + 4y^4 - 12xy^3.$

8. $16x^4 + 49y^4 - 56x^2y^2.$

9. $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc.$

10. $4a^2 + 4b^2 + c^2 + 8ab - 4ac - 4bc.$

11. $16a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 16ab - 24ac - 12bc.$

12. $4a^2 + 25b^2 + 9c^2 - 20ab - 12ac + 30bc.$

13. $x^4 + 2x^3x + 3x^2 + 2x + 1$ 14. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

15. $x^4 - 2x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 + y^4.$

16. $x^5 + 2x^4y^2 + 3x^4y^4 + 2x^2y^6 + y^8.$

17. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2ac + 2ad + 2bc - 2bd - 2cd.$

18. $4a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 9d^2 - 8ab - 12ac$

$+ 12ad + 12bc - 12bd - 18cd.$

19. $9a^2 + 4b^2 + 16c^2 + d^2 + 12ab - 24ac.$

$$+6ad - 16bc + 4bd - 8cd.$$

20. $25a^2 + b^2 + 16c^2 + 9d^2 + 10ab$

$$-40ac - 30ad - 8bc - 6bd + 24cd.$$

21. $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$

22. $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

23. $4x^6 - 4x^5y + 5x^4y^2 - 14x^3y^3 + 7x^2y^4 - 6xy^5 + 9y^6.$

24. $4x^6 - 4x^5y + 9x^4y^2 - 8x^3y^3 + 6x^2y^4 - 4xy^5 + y^6.$

25. $x^2 + y^2 - 2xy - z^2.$ 26. $x^2 + 4y^2 - 4xy - 16z^2.$

27. $9x^2 + 25z^2 - 30xz - y^2$ 28. $4y^2 + 9z^2 - 12yz - x^2.$

29. $x^4 + x^2y^2 + y^4.$ 30. $9x^4 + 11x^2y^2 + 4y^4.$

31. $x^4 - 2x^3 + x^2 - 49.$ 32. $4x^4 + 19x^2 + 49.$

33. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2.$

34. $4a^2 - 11ab + 9b^2 - 4c^2 + 16cd + 16d^2$

35. $4a^2 - 8ad + 4d^2 - 9b^2 - 6bc - c^2.$

36. $a^2 - 8ac + 16c^2 - 9b^2 + 6bd - d^2.$

XII. 1. $3a^4 - 5a^2b - 12a^2b^2 - ab^3 + 3b^4.$

2. $3x^4 - 2x^2y - 11x^2y^2 - 2xy^3 + 3y^4.$

3. $5x^5 + 16x^4y + 17x^2y^2 - 12x^2y^3 + 18xy^4.$

4. $x^7 - 49x^5y^2 + 42x^4y^3 - 9x^2y^4.$

5. $6x^6 + 7x^5 - 54x^4 + 76x^3 - 74x^2 + 35x - 12.$
6. $3a^6 + 8a^5 - 19a^4 + 36a^3 - 53a^2 + 58a - 24.$
7. $\frac{3}{4}x^4 - x^3y - \frac{1}{4}x^2y^2 + xy^3 - y^4.$
8. $3x^4 - 7\frac{1}{2}x^3y + 143\frac{1}{14}x^2y^2 + 8\frac{1}{2}xy^3 - 3y^4.$
9. $a^3 - 3abc + b^3 + c^3.$ 10. $8a^3 - 18abc + 27b^3 + c^3.$
11. $a^3 + 3abc + b^3 - c^3.$ 12. $72a^3 + 27abc - b^3 + 27c^3.$
13. $x^4 + x^2y^2 + y^4.$ 14. $a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4.$
15. $a^5x^5 + a^3x^3 + ax.$ 16. $x^4 - 1.$ 17. $a^4 \frac{1}{2} x^4.$
18. $x^4 - 16y^4.$ 19. $81x^4 - 625y^4.$ 20. $x^8 - y^8.$
21. $a^8 - 2a^4b^4 + b^8.$ 22. $x^8 + 2x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1.$
23. $x^8 + x^4y^4 + y^8.$ 24. $a^8 + a^4b^4 + b^8.$
25. $a^6 - x^6.$ 26. $2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 2x^2y^2 - x^4 - y^4 - z^4.$
27. $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.$
28. $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3.$
29. $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3.$
30. $a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) + 6abc.$
31. $a^3 - b^3 + c^3 + 3(-a^2b + ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a + ca^2)$
 $- 6abc.$
32. $a^3 - b^3 - c^3 + 3(-a^2b + ab^2 - b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2)$
 $+ 6abc.$
37. $8xz.$ 38. $x^3 + y^3 + z^3.$

- XIII. 1. -2 . 2. -5 . 3. $\frac{2}{3}$. 4. $-a$.
 5. $-4a$. 6. $-\frac{4}{3}b$. 7. $-12ab$. 8. $\frac{3}{2}xy^2$.
 9. $-\frac{3}{2}x^2y$. 10. $-5ab^5$. 11. $\frac{1}{2}b^3c^4$.
 12. $-cd$. 13. $-\frac{1}{3}abc^3d^2$. 14. $\frac{1}{3}a^3x^2y^2z$.
 15. $\frac{3}{2}ab^5x^4y^4$. 16. $3x-5a$. 17. $-5y^2+6y$.
 18. $4a^2-5a+2$. 19. $-4a-3a^2+2a^3$.
 20. $-5a^2b^3+\frac{1}{3}ab^4-3b$.

- XIV. 1. $x-3$. 2. $x-3$. 3. $x-12$.
 4. $x-11$. 5. $3x+2$. 6. $x-2$. 7. $a+b$.
 8. $x+3y$. 9. $x-4y$. 10. $3x-8y^2$.
 11. $x+\frac{1}{2}y^3$. 12. $\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{4}a^3$. 13. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$.
 14. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}$. 15. a^2+ab+b^2 . 16. $4a^2-6ab+9b^2$.
 17. $a^2x^2-abxy+b^2y^2$. 18. $4a^4x^4+10a^2x^2y^2+25y^4$.
 19. $-x^2-3x-1$. 20. $-2x^2+x+2$.
 21. $-2x^2+3x^2-x+2$. 22. x^2+x+2 .

- XV. 1. x^2-x+1 . 2. x^4+x^2+1 . 3. x^3-2x+4 .
 4. $4x^2+6x+9$. 5. x^2-x+2 . 6. $2x^2+x+1$.
 7. $-x^4-2x^3-2$. 8. $-x^5-2x^4-4x^3-8x^2-13x-26$.
 9. $-x^2+x+1$. 10. x^4-3x^2+4x+1 .

11. $3x^2+2x+1.$ 12. $4x^3+3x^2+2x+1.$
 13. $2x^2-3x+5.$ 14. $-3x^2+3x+1.$
 15. $x^3+2x^2+3x-1.$ 16. $4x^4-11x^3+5x^2-11x+8.$
 17. $2x^5-x^4+x^3-x+1.$
 18. $x^3-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1.$
 19. $3x^3+x^2y-4xy^2+2y^3.$ 20. $2y^3-4xy^2+x^2y+3x^2.$
 21. $x+y-z.$ 22. $x+y+2z.$ 23. $a-b.$
 24. $-x-y+z.$ 25. $-a-2b-c.$
 26. $-a-2b+3c;$ 27. $2a-b-c.$
 28. $3a-4b+c.$ 29. $x^2-xy+xz+y^2+yz+z^2.$
 30. $-4x^2-2xy+2xz-y^2-z^2.$
 31. $9a^2+6ab-3ac+4b^2+2bc+c^2.$
 32. $a^2+2ab-ac+b^2-bc+c^2.$
 33. $a^3-a^2b-a^2c-ab^2+2abc-ac^2+b^3-b^2c-bc^2+c^3.$
 34. $(x+1)^3-y(x+1)+y^2.$ 35. $x^4-4x^2yz+7y^2z^2.$
 36. $x^4-x^2yz+7y^2z^2.$ 37. $3a+b+2c+d.$
 38. $x^2+(a-2b)x+a^2+3b^2.$ 39. $a+b+c.$
 40. $a^2+a(b+c)+b^2+bc+c^2.$

雜題 I. A. 1. 6. 2. $3a^2+ab-4ac+2b^2+bc+c^2.$

4. $x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1, \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2y^2 + y^4.$

5. $12x^2 + 12.$

6. $2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + 10x^4.$

B. 1. $87, -5.$

2. $5b^4 - 3b^3a + 3ba^3 - a^4.$

3. $0, 7x - 7, 2b - 2a.$

4. $9x^4 - \frac{1}{y}, a^2 + 2ab + b^2 - c^2.$

6. $x^3 - (y+2)x + y^2 + y + 1.$

C. 1. $-1\frac{1}{2}.$

2. $2a^3 + \frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{5}b^3.$

3. $a^2x^4 + (2a^2 - 1)x^3 + a^2, 4a^3 + b^3 + 9c^2 + 4ab - 12ac$

$-6bc.$

4. $x^3 + 2xy + y^3.$

5. $x^4 - xy^3 + y^4.$

D. 1. $0, 0.$

2. $2x - 12y + 7z.$

3. $-4ab - 4ac.$

4. $a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3.$

5. $x^2 - xz + z^2, (x+y)^2 - (x+y)z + z^2.$

E. 1. $8.$ 2. $14x + 2y, 3x + 15y, 42x^2 + 216xy + 30y^2.$

4. $b^3 - a^3.$

5. $5(b-a), 5(7a^2 - 11ab + 7b^2).$

F. 1. $\frac{1}{2}.$

2. $a^3 - a^2(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z) + a(\frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xz + \frac{1}{2}yz) - \frac{1}{2}xyz$

3. $12.$

4. $x - y + z, 2y^2.$

G. 1. $41x - 51y.$

2. $-8a^2 + 6ab - 10b^2$

3. $a^3 - 3ab + b^3 + 1.$

4. $a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + 4c^2.$

5. $x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x$

-
- XVI. 1. 3. 2. 1. 3. -4. 4. -6.
 5. 0. 6. 0. 7. $\frac{1}{2}$. 8. $\frac{1}{15}$. 9. -2.
 10. -3. 11. $5\frac{1}{2}$. 12. 2. 13. -8.
 14. 6. 15. -20. 16. 5. 17. -5.
 18. $-2\frac{1}{2}$. 19. 12. 20. $-9\frac{1}{15}$. 21. $2\frac{1}{2}$.
 22. 13. 23. 1. 24. $-1\frac{1}{2}$. 25. $\frac{1}{3}$.
 26. $2\frac{1}{2}$. 27. $-1\frac{1}{2}$. 28. $-1\frac{1}{2}$. 29. $4\frac{1}{2}$.
 30. $-1\frac{1}{15}$. 31. -5. 32. -1. 33. 2.
 34. -16. 35. 1. 36. 1. 37. 40.
 38. 2. 39. 20. 40. $a+b$. 41. $2a$.
 42. $b-a$. 43. $\frac{a}{2}$. 44. $\frac{b}{2}$. 45. a .
 46. ab . 47. $-\frac{2ab}{a^2+b^2}$. 48. 0. 49. $b-a$.
 50. $-\frac{a^2+b^2}{2a}$. 51. $\frac{1}{2}(a+b)$. 52. $\frac{bc}{a}$.
 53. $-\frac{1}{2}(a+b)$. 54. $\frac{1}{3}(a+b+c)$.
-

- XVII. 1. 99, 101. 2. 18, 38. 3. 10, 15.
 4. $27\frac{1}{2}$, $72\frac{1}{2}$. 5. 20. 6. 21. 7. 20, 5.
 8. 15, 5. 9. 12, 26. 10. 9, 22. 11. 40.

12. 420. 13. 14. 14. 6. 15. 400.
16. 112. 17. 45,55. 18. 60,40. 19. $18\frac{1}{2}$, $33\frac{1}{2}$.
20. 24, 12. 21. 20圓 22. 18步, 10步.
23. 30圓. 24. A150圓, B100圓.
25. A40圓, B35圓. 26. A130圓, B125圓, C105圓.
27. A30圓, B15圓, C20圓.
28. $A22\frac{1}{2}$ 圓, $B27\frac{1}{2}$ 圓, C50圓.
29. 男子1圓, 女子5角, 童子2.5角.
30. 男子 $1\frac{1}{2}$ 圓, 女子 $\frac{1}{2}$ 圓, 童子 $\frac{1}{2}$ 圓.
31. 5年. 32. 30年前. 33. 父30年, 子10年.
34. 35年. 35. A25圓, B35圓, C40圓.
36. $A23\frac{1}{2}$ 圓, $B25\frac{1}{2}$ 圓, $C27\frac{1}{2}$ 圓, $D23\frac{1}{2}$ 圓. 37. 1角.
38. 2角. 39. 12000圓.
40. 1000圓, 500圓, 250圓.
41. 壹圓銀貨20個, 五角銀貨4個, 五仙銀貨4個.
42. 壹圓銀貨4個, 五角銀貨12個, 五仙銀貨20個.
43. 5時 $27\frac{1}{11}$ 分. 44. 9時 $32\frac{1}{11}$ 分.
45. 18, 15. 46. 酒精85升, 水35升.
47. 1500人. 48. 28日 49. 270圓.
50. 30. 51. 280圓. 52. 3圓. 53. 15日.

54. 8日.

55. 480人,

-
- XVIII. 1. $1, -\frac{1}{2}$. 2. $3, 2$. 3. $100, 9$.
 4. $-2, -1$. 5. $1, 2$. 6. $2, -1$.
 7. $5, 3$. 8. $11, 8$. 9. $\frac{11}{19}, \frac{8}{19}$.
 10. $4, -3$. 11. $1, -1$. 12. $-\frac{411}{8}, \frac{11}{8}$.
 13. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. 14. $-\frac{92}{17}, \frac{11}{17}$. 15. $1, 1$.
 16. $5, -3$. 17. $\frac{23}{7}, \frac{47}{7}$. 18. $5, 2$.
 19. $5, -3$.
-

- XIX. 1. $1, 3$. 2. $5, -3$. 3. $7, 5$.
 4. $4, -1$. 5. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. 6. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. 7. $1, -1$.
 8. $3, -1$. 9. $5, 2$. 10. $\frac{207}{17}, \frac{424}{17}$.
 11. $8, 16$. 12. $5, 7$. 13. $-2, -2$.
 14. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. 15. $\frac{12}{7}, \frac{8}{7}$. 16. $\frac{12}{7}, -19$. 17. $3, 2$.
 18. $\frac{22}{7}, -\frac{11}{7}$. 19. $3, 6$. 20. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.
 21. $\frac{11}{7}, -\frac{11}{7}$. 22. $\frac{1}{2}, -4$. 23. $a+b, a-b$.
 21. $1, -\frac{1}{2}$. 25. $a+b, a+b$. 26. a, b .
 27. $2a+b, a+2b$. 28. $a-b, a-b$.
 29. $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$. 30. $2b-a, 2a-b$.

31. $a^2 + b^2, ab.$

32. $a + b, a - b.$

33. $\frac{c^2(c-b)}{a^2(a-b)}, \frac{c^2(c-a)}{b^2(b-a)}.$

34. $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+b}.$

35. $a + b, a + b.$ 36. $1, 0,$ 37. $a + \frac{b}{2}, a - \frac{b}{2}.$

XX. 1. $14, 10, 4.$ 2. $b + c - a, c + a - b, a + b - c.$

3. $-3, 3, 1.$ 4. $-1, 0, 1.$ 5. $-1, -2, 4.$

6. $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 3.$

7. 此三方程式非聯立者，因合於二方程式之任意數值，不合於第三之方程式，故也。

8. $3, 1, 2.$ 9. 此三方程式自相矛盾。

10. $-\frac{1}{2}, \frac{19}{15}, \frac{7}{30}.$ 11. $\frac{1}{2a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{2c}.$

12. $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}.$ 13. $u = x = y = 1.$

14. $u = 1, x = 2, y = 5, z = 10.$

XXI. 1. 20 圓, 30 圓. 3. $12\frac{1}{2}$ 圓, $2\frac{1}{2}$ 圓.

4. 666 $\frac{2}{3}$ 斤, 1500 斤. 5. A40 日, B120 日.

6. $\frac{1}{3}.$ 7. $\frac{1}{3}.$ 8. 240, 360. 9. 22 圓, 26 圓.

10. 2 角 5 分 11. 480 方步. 12. 24 日.

13. 2400 圓, 900 圓. 15. 12, 24, 36, 48.

16. A450 圓, B225 圓, C237 $\frac{1}{2}$ 圓, D87 $\frac{1}{2}$ 圓.

17. 48. 18. 7, 2. 19. $\frac{11}{2}$. 20. 18分

22. 貳角銀貨1個,壹角銀貨7個,五仙銀貨2個.

23. $17\frac{1}{2}$ 「佛朗」. 24. 3「先令」, 6「辨士」, 4「先令」, 2「辨士」.

25. 50.

雜題 II. A. 1. 1. 2. $7a-7b$. 4. x^2-2x-2

5. (1) 2. (2) $x=6, y=15$ (3) $x=y=a+b$.

6. 60.

B. 1. $4\frac{1}{2}$ 2. a^2+b^2 . 4. x^4-2x^2+x+2 .

5. (1) -6. (2) $x=-162, y=42$. (3) $x=\frac{5}{4}, y=\frac{21}{4}$.

6. 壹圓銀貨90個,五角銀貨20個.

1. $-b-d$.

4. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab,$

$$4x^2+4y^2+z^2-2yz-2zx-4xy.$$

5 (1) $x=-1, y=-1$. (2) $x=a^2+b^2, y=-ab$.

6. A, 中的之數12, 不中的之數18.

B, 中的之數24, 不中的之數6.

D) 1. $-11\frac{1}{2}$. 2. $2ab$.

4. $15^2 \cdot 3c^2 - 3ab^3c, a+2b-3c$.

5. (1) $\frac{7}{2}$ (2) $x=5, y=4$. (3) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$.

6. 1225.

E. 1. a^2 . 2. $4a^2+ab+ac+4b^2+bc+4c^2$.

4. $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$, cx^2+dx-c .

5. (1) 5. (2) $x=\frac{3}{10}$, $y=\frac{3}{5}$. (3) $x=a+b$, $y=a-b$.

6. 8, 5.

F. 1. 130. 2. a^3-x^3 . 4. $2y^2-3y+1$, $a+2b+3c$.

5. (1) $\frac{cd-ab}{a+b-c-d}$. (2) $x=-1$, $y=-1$.

6. 茶 3 角, 珈琲 2 角.

XXII. 1. $x(x+1)$. 2. $a(a-b)$. 3. $b(a-c)$.

4. $x(2a+\frac{1}{2}x)$. 5. $x^2(4x-3)$. 6. $a^2(a-3b)$.

7. $x^2(x^2-5xy+20y^2)$ 8. $a^2(a^4-a^2x+x^2)$.

9. $ax^2(6x^2-5a^2+20ax)$. 10. $a^2x^3y^2(3ax-\frac{1}{2}y)$.

11. $abc^2(11a-\frac{1}{3}bc)$. 12. $p^2q^3(r^6-7p^4q^2)$.

XXIII. 1. $(2x+1)^2$. 2. $(3x-1)^2$. 3. $(1-4x^2)^2$.

4. $(2a-3b)^2$. 5. $(3a^2+4b^2)^2$. 6. $(x+\frac{1}{2}y)^2$.

7. $(2ax+by)^2$. 8. $(5a^2x-3b^2y)^2$. 9. $3(a+b)^2$.

10. $5(a^2-b)^2$. 11. $a(a-3b)^2$. 12. $3a^3(a-5b^3)^2$.

13. $-(x^2-2y^2)^2$ 14. $-(2x^2-2)^2$.

15. $xy(2y-x)^2$. 16. $xy(x+\frac{1}{2}y)^2$.

17. $(a+b+2c)^2$. 18. $(x^2+y^2-z^2)^2$.

19. $(2xy+a+b)^2$. 20. $\{3(a+b)-c\}^2$.

XXIV. 1. $(a-3)(a+3)$. 2. $(4-b)(4+b)$.

3. $(5a-b)(5a+b)$. 4. $(x-3y)(x+3y)$.

5. $(4x-3y)(4x+3y)$. 6. $(8a-7b)(8a+7b)$.

7. $(2a-9b)(2a+9b)$. 8. $(x-3y^2)(x+3y^2)$.

9. $(6a^2-7b^2)(6a^2+7b^2)$. 10. $(2ab-3c)(2ab+3c)$.

11. $(3ax-7by)(3ax+7by)$.

12. $(7abc-6xyz)(7abc+6xyz)$.

13. $x(2y-3x)(2y+3x)$. 14. $2a(2b-3a)(2b+3a)$.

15. $3a^3(a-6)(a+6)$. 16. $7a^5(1-2a^2)(1+2a^2)$.

17. $8xy(x-2y)(x+2y)$. 18. $7ab(c-ab)(c+ab)$.

19. $(x^2+y^2)(x+y)(x-g)$.

20. $(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$.

21. $(9a^2+4b^2)(3a+2b)(3a-2b)$.

22. $(25a^2+16x^2)(5a+4x)(5a-4x)$.

23. $(x^2y^2+a^2b^2)(xy+ab)(xy-ab)$.

24. $(a^2b^2+9c^2d^2)(ab+3cd)(ab-3cd)$.

25. $(9x^2y^2+1)(3xy+1)(3xy-1)$.
 26. $(4a^2b^2c^2+1)(2abc+1)(2abc-1)$.
 27. $(4+9x^2y^2)(2+3xy)(2-3xy)$.
 28. $(x^3+y^3)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.
 29. $(a^4+b^4c^4)(a^2+b^2c^2)(a+bc)(a-bc)$.
 30. $a^2(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1)$.
 31. $(a+b+c)(a+b-c)$. 32. $(a+b+2c)(a+b-2c)$.
 33. $(2x+2y+1)(2x+2y-1)$.
 34. $\{3(x-y)+2\}\{3(x-y)-2\}$. 35. $4xy$.
 36. $3(a+b)(a-b)$. 37. $y(2x-y)$.
 38. $4b(a-b)$. 39. $(3a+b)(a+3b)$.
 40. $(5x+y)(x+5y)$. 41. $(x+b)^2(a-b)^2$.
 42. $4a(b+c)$. 43. $(4a+4b-3c)(2a-2b-c)$.
 44. $4(a-b+c)(2a-b)$. 45. $8x(x+1)^2(x-1)$.

XXV. 1. $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$.

2. $(a2+b)(4a^2-2ab+b^2)$.

3. $(2a-5x)(4a^2+10ax+25x^2)$.

4. $(a-5x^2)(a^2+5ax^2+25x^4)$.

5. $4(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$.

6. $(3x-\frac{1}{2}y)(9x^2+\frac{3}{2}xy+\frac{1}{4}y^2)$.

7. $(xy + \frac{1}{3}ab)(x^2y^2 - \frac{1}{3}abxy + \frac{1}{3}a^2b^2)$.
8. $(2a^2b^2 + x^2)(4a^4b^4 - 2a^2b^2x^2 + x^4)$.
9. $2x(y - \frac{1}{2}x)(y^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}x^2)$.
10. $9ab^2(a - \frac{1}{3}b)(a^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{9}b^2)$.
11. $3ab(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$.
12. $5bc(2a - bc)(4a^2 + 2abc + b^2c^2)$.
13. $(a^3 + 8)(a^3 - 8)$
 $= (a + 2)(a - 2)(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4)$.
14. $(8a^3 + 27b^3)(8a^3 - 27b^3)$
 $= (2a + 3b)(2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.
15. $(x^6 - x^3b^3)(x^6 + a^3b^3)$
 $= (x^2 - ab)(x^2 + ab)(x^4 - abx^2 + a^2b^2)(x^4 + aby^2 + a^2b^2)$.
16. $(x + y)(x^2 + 5xy + 7y^2)$.
17. $3(x + y)\{(x + 2y)^2 - (x + 2y)(2x + y) + (2x + y)^2\}$
 $= 9(x + y)(x^2 + xy + y^2)$.
18. $3(y - x)\{(2y - x)^2 + (2y - x)(2x - y) + (2x - y)^2\}$
 $= 9(y - x)(x^2 - xy + y^2)$.
19. $4(y - x)\{(x - 3y)^2 + (x - 3y)(y - 3x) + (y - 3x)^2\}$
 $= 4(x - y)(7x^2 - 2xy + 7y^2)$.
20. $(x + y)\{(2y - x)^2 - (2y - x)(2x - y) + (2x - y)^2\}$

$$= (x+y)(7x^2 - 13xy + 7y^2).$$

- XXVI.** 1. $(x+1)(x+3)$, 2. $(x-1)(x-3)$.
 3. $(x-2)(x-4)$, 4. $(x-3)(x-5)$.
 5. $(x-2)(x-9)$, 6. $(x+4)(x+5)$.
 7. $(x+3)(x-1)$, 8. $(x+5)(x-1)$.
 9. $(x+3)(x-2)$, 10. $(x-3)(x+2)$.
 11. $(x+7)(x-5)$, 12. $(x-5)(x+2)$.
 13. $(x+7)(x-2)$, 14. $(x-12)(x+11)$.
 15. $(x+12)(x+6)$, 16. $(x-12)(x+7)$.
 17. $(x-10)(x-15)$, 18. $(x+15)(x-10)$.
 19. $(x+20)(x-9)$, 20. $(x+12)(x-13)$.
 21. $(x-15)(x-16)$, 22. $(x-25)(x+8)$.
 23. $(x-16)(x-18)$, 24. $(x-40)(x+5)$.

- XXVII** 1. $(3x-1)(x-3)$, 2. $(3x-2)(x-5)$.
 3. $(2x+3)(x+4)$, 4. $(2x-1)(x+2)$.
 5. $(3x-2)(x+3)$, 6. $(4x-3)(x+1)$.
 7. $(5x+3)(x-7)$, 8. $(3x-4)(x+5)$.
 9. $(7x+9)(x-6)$, 10. $(5x-8)(x-6)$.
 11. $(7x-9)(x+12)$, 12. $(9x-5)(x+15)$.

13. $(4x-3)(x+6)$. 14. $(2x+5)(2x-3)$.
 15. $(6x-5)(x+10)$. 16. $(5x-1)(2x+1)$.
 17. $(13x-1)(11x+1)$. 18. $(x-1)(4x-1)$.
 19. $2(6x-5)(x+5)$. 20. $(7x-3)(x+18)$.
 21. $3(4x+5)(2x-5)$. 22. $(x+y)(x+3y)$.
 23. $(x-2y)(x-4y)$. 24. $(x-2y)(x-9y)$.
 25. $(x+7y)(x-2y)$. 26. $(x-10y)(x-15y)$.
 27. $(x+5y)(x-40y)$. 28. $(3x-2y)(x-5y)$.
 29. $(7x+9y)(x-6y)$. 30. $(6x+5y)(4x-15y)$.
 31. $(x^2-4)(x^2-9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$.
 32. $(x^2-16y^2)(x^2-9y^2) = (x-4y)(x+4y)(x-3y)(x+3y)$.
 33. $(9x^2-4y^2)(4x^2-9y^2)$
 $= (3x-2y)(3x+2y)(2x-3y)(2x+3y)$.
 34. $x(x-6)(x+3)$. 35. $xy(x+y)(x-2y)$.
 36. $x^2y(5x+2y)(3x-2y)$. 37. $xy^2(15+xy)(5-9xy)$.

XXVIII. 1. $(2x-5y)(2x+5y)(4x^2+25y^2)$.

2. $(3a-2b)(3a+2b)(9a^2+4b^2)$.

3. $x(x-3)(x+3)(x^2+9)$. 4. $(1+3a)(1-3a+9a^2)$.

5. $(3+2x)(9-6x+9x^2)$ 6. $x(3x+2)(9x^2-6x+4)$.

7. $(a+b+c-d)(a+b-c+d)$.
 8. $(a+b+2c-2d)(a+b-2c+2d)$.
 9. $(b-c)(2a+b+c)$. 10. $8xy(x^2+y^2)$.
 11. $(a+b+3c)(a+b-c)$. 12. $(a+b)(a+b-6c)$.
 13. $ab(a+2b)(2a+b)$. 14. $4ab(a^2+b^2)$.
 15. $(x+1)^2(x-1)^2$. 16. $12xy(x+y)^2$.
 17. $4(a+c)(b+d)$. 18. $8(a-c)(a+b+c)$.
 19. $5(x+y)(7x^2+11xy+7y^2)$.
 20. $2(b-a)(13a^2+22ab+13b^2)$ 21. $(x-y)(x+\frac{1}{2}y)$.
 22. $(x+ay)(x+\frac{1}{a}y)$. 23. $x(x+\frac{1}{2})(x+\frac{2}{3})$.
 24. $(3x+2y)(2x-3y)$. 25. $x^2(x+\frac{1}{2}y)(x-\frac{1}{2}y)$.
 26. $(9x+8)(8x-9)$. 27. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.
 28. $(x-2y)(x+2y)(x-3y)(x+3y)$.
 29. $(ax+by)(bx+ay)$. 30. $(ax-by)(bx+ay)$.
 31. $(a+b-2c)(a+b-3c)$. 32. $(x+y-5z)(x+y-2z)$.
 33. $\{a+b-3(c+d)\}\{a+b-5(c+d)\}$.
 34. $(x-y)(x+y+2)$. 35. $(x-y)(x+y+4)$.
 36. $(x^2+1)(x-5)$. 37. $(x+1)(x-2)(x+2)$.
 38. $(x-1)(x+1)(2x-2)$. 39. $(5x-1)(x-1)(x+1)$.
 40. $(x+1)\{a(x^2-x+1)+1\}$.

41. $(x+1)\{a(x^2-x+1)+b\}$.
42. $(x+b)(x-a)(x+a)$. 43. $(bx+a)(x^2+1)$.
44. $(x+y)(ax+by)$. 45. $(a^2+1)(b^2+1)$.
46. $(a-1)(a+1)(b-1)(b+1)$. 47. $(a-b)(c-d)$.
48. $(a-b)(c-d)(c+d)$ 49. $(x-y)(x+y+z)$.
50. $2b(a-b)$. 51. $(a-c)(a+c)(a^2+b^2+c^2)$.
52. $(a-b)(a+b-c)$. 53. $(a-c)(a+c-1)$.
54. $(1-ax)(1+ax+bx^2)$. 55. $(1-ax)(1+ax+bx^2)$.
56. $(ac+b)(ac+d)$ 57. $(a+b)(ax+by+c)$.
58. $(a-c+b-d)(a-c-b+d)$.
59. $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.
60. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a-b-c+d)$.
61. $(x^2+5x+1)(x^2-5x+1)$.
62. $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$.
63. $(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$.
64. $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$.
65. $(x^2+4x+3)x^2+4x-5=(x+1)^2x+3(x+5)(x-1)$.
66. $(x^2+7x+26)(x^2+7x-8)$
 $= (x^2+7x+26)(x-1)(x+8)$.

-
- XXIX. 1. a^2b^2 . 2. abc^2 . 3. $3ab$.
 4. $2xy$. 5. $12a^2b^3x^4$. 6. b^3x . 7. x^3y^5 .
 8. b^3c^6 . 9. $7y^2$. 10. ab . 11. xyz^2 . 12. $abcx^2$.
-

- XXX. 1. $x^2(x-a)^3$. 2. $a+b$. 3. $(a+b)^2$.
 4. $b^4c^3(b+c)^2$. 5. $a(a^2+b^2)$. 6. a^2+3b^2 .
 7. $a^2x^2(x+2a)$. 8. $a^2x^2(a^2-4x^2)$. 9. $x+2$.
 10. $x(x+2y)$. 11. $x-1$. 12. $a-b$.
-

- XXXI. 1. $x-1$. 2. $x-y$. 3. $2x-1$.
 4. $2x-y$. 5. x^2-2 . 6. x^2-2y .
 7. $a-2$. 8. $2b-1$. 9. $x-1$.
 10. x^2y^2-1 . 11. $x-2a$. 12. $2a-b$.
 13. a^3-ab+b^2 . 14. $4a^2-2a+1$. 15. x^2-y^2 .
 16. $x-1$. 17. x^2+x+1 . 18. x^2-3x+5 .
 19. $x-7$. 20. $x-y$. 21. $x-y$. 22. $x-5$.
 23. $4x^2-2x+1$. 24. $a-2x+3$. 25. x^2+7 .
 26. x^2+5x+1 . 27. x^2+4x+3 . 28. x^2+3x+1 .
 29. $y-2$. 30. $y^2-3y+4z^2$. 31. $2x^2-3x-1$.
 32. x^2+2x+2 . 33. $x-1$. 34. x^2-3x+1 .
 35. $x^2+(2m-3)x-6m$. 36. $mx+ny$.

- XXXII** 1. a^3b^3 . 2. a^2bc^3 . 3. $18a^2b^3$.
 4. $20x^2y^3$. 5. $120a^3b^4c^5$. 6. $3a^2b^3x^5$.
 7. $72a^2b^3x^4y^5$. 8. $6a^3b^3c^3$ 9. $462ab^3xy^4z^3$.
 10. $a^2b^3c^2$. 11. $30x^2y^3z^3$ 12. $a^4b^3c^2d^4$.

- XXXIII.** 1. $(a-x)(a-2x)(a-3x)$.
 2. $a^2x^3(a-x)(a-2x)(a-3x)$. 3. $(a-b)(a+b)^2$.
 4. $12a^2b(a-b)(a+b)^2$. 5. $(x+1)(x+2)(x+4)$.
 6. $(x+y)(x+2y)(x+4y)$. 7. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
 8. $(3x-y^2)(2x-y^2)(x-y^2)$. 9. $(a^2-b^2)^2$
 10. $(x^2-4y^2)^2$. 11. $(x+2)(x+3)(x+4)$
 12. $(x-2y)(x-3y)(x-4y)$.

- XXXIV.** 1. $54a^3b^3c^2$. 2. $a^4b^3c^3$. 3. $24a^3b^2$.
 4. $12a^3b^3$. 5. $x^2y^2(x^2-y^2)^2$. 6. $a^2(a^2-b^2)$.
 7. $xy^2(x^2-1)$ 8. $12ax^2y^2(x-y)(x+y)^2$.
 9. $90(x-3)(x+3)(x-4)$. 10. $12(a^2-b^2)(a^2-4b^2)$.
 11. $8ab^3d(a^2-d^2)$. 12. $(x-2)(x-4)(x-6)$.
 13. $(x+1)(x+2)(x-10)$. 14. $6(x^2-1)(x^2-4)$.
 15. $(x-1)(x-2)(2x+3)(3x+1)$.
 16. $(2x-1)(3x+2)(7x+1)$.

17. $(x-3y)(x-y)(3x-y)$. 18. $x(x-1)(x+3)(2x-1)$.

19. $xy^2(x^2-4)(x^2-9)$. 20. x^6-a^6 . 21. x^4-1

22. $(x-4)(3x-2)(3x^2+2x+1)$. 23. $(x^2-a^2)^2$.

24. $(x+1)(x+3)(x^2-4)$.

25. $(x-1)(x+2)(x+6)(x^2-2x+4)$.

26. $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)(a+5)$.

XXXV. 1. $\frac{a}{b}$. 2. $\frac{x}{y}$. 3. $\frac{c}{2a^2b^3}$.

4. $\frac{3}{2a^2b^3}$. 5. $\frac{y^4}{x^2}$. 6. $\frac{1}{2}x^3z^5$.

7. $\frac{3ac^4}{5b^2x^3}$. 8. $\frac{5ca^3}{6a^3b}$. 9. $\frac{3a^4x^2z^3}{5b^4y^2}$.

10. $\frac{5a^3c^2}{7y}$. 11. $\frac{2c^4x^4}{3a^4x^4}$. 12. $\frac{3ac^3x^2}{4b^2y^2z^2}$.

XXXVI. 1. $\frac{2b}{a+b}$. 2. $\frac{y^2}{1-y^2}$. 3. $\frac{a-b}{a+b}$.

4. $\frac{x}{x-a}$. 5. $\frac{x-1}{x+1}$. 6. $\frac{1-y}{1+y}$.

7. $\frac{x}{x-2}$. 8. $\frac{x^2}{x^2-1}$. 9. $\frac{4}{x+4}$.

10. $\frac{2x}{1+2x}$. 11. $-\frac{1}{x+2}$. 12. $-\frac{1}{a+3}$.

13. $-\frac{x^2}{x^2+a^2}$ 14. $-\frac{x^2+a}{x}$ 15. $\frac{x^3}{x^2+a^2}$
16. $-\frac{x^2y^2}{x^2y^2+a^2}$ 17. $\frac{5a}{x+3a}$ 18. $-\frac{x}{x+4a}$
19. $\frac{a-x}{a+x}$ 20. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ 21. $\frac{x+1}{x^2+x+1}$
22. $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$ 23. $\frac{x-2}{x-4}$ 24. $\frac{1-2a}{1-4a}$
25. $\frac{x-4}{x+11}$ 26. $\frac{1-4y^2}{1+11y^2}$ 27. $\frac{x-y}{x+4y}$
28. $\frac{1-a^2b^2}{1+4a^2b^2}$ 29. $\frac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}$ 30. $\frac{a-b}{a+b}$
31. $\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}$ 32. $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}$

- XXXVII. 1. $\frac{x+2}{2x+1}$ 2. $\frac{3x-5}{x^2-3x+2}$
3. $\frac{x^2+5x+10}{x^3+2x^2+3x+6}$ 4. $\frac{x+1}{x}$
5. $\frac{2x^2+8ax+7a^2}{x^2-6ax+2a^2}$ 6. $\frac{x^2+2x+3}{3x^2+2x+1}$
7. $\frac{x-2}{x^2+1}$ 8. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+1}$
9. $\frac{x+2}{2x+1}$ 10. $\frac{x^3-5x+1}{x^3+4x-5}$

$$\text{XXXVIII. } 1. \frac{20}{30x}, \frac{24}{30x}, \frac{7}{30x}.$$

$$2. \frac{12bc}{24abcx}, \frac{4ca}{24abcx}, \frac{3ab}{24abcx}.$$

$$3. \frac{a^2}{abc}, \frac{b^2}{abc}, \frac{c^2}{abc}$$

$$4. \frac{b^2c^2}{abc}, \frac{c^2a^2}{abc}, \frac{a^2b^2}{abc}.$$

$$5. \frac{2}{2(r+1)}, \frac{5}{2(x+1)}.$$

$$6. \frac{9}{6(x-1)}, \frac{8}{6(x-1)}$$

$$7. \frac{20}{24(x+2)}, \frac{9}{24(x+2)}.$$

$$8. \frac{2(x-1)}{2(x^2-1)}, \frac{3(x-1)}{2(x^2-1)}, \frac{10}{2(x^2-1)}.$$

$$9. \frac{18(r+1)}{15(x^2-1)}, \frac{10(x-1)}{15(x^2-1)}, \frac{60}{15(x^2-1)}.$$

$$10. \frac{a(x+a)}{x^2-a^2}, \frac{-x(x+a)}{x^2-a^2}, \frac{a^2}{x^2-a^2}, \frac{-x^2}{x^2-a^2}.$$

$$11. \frac{24a(a+b)}{12(a^2-b^2)}, \frac{-6^1(a+b)}{12(a^2-b^2)}, \frac{9a^2}{12(a^2-b^2)}, \frac{-10^1a^2}{12(a^2-b^2)}$$

$$12. \frac{(x+1)^2}{(x+1)^3}, \frac{2x(x+1)}{(x+1)^3}, \frac{3x^2}{(x+1)^3}.$$

$$13. \frac{x-c}{(x+a)(x-b)(x-c)}$$

$$\frac{x-a}{(x-a)(x-b)(x-c)}, \frac{x-b}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$14. \frac{b-c}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

$$\frac{-(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}, \quad \frac{a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$15. \frac{a^2+1}{a+1}, \quad 16. \frac{a^2}{a-x}, \quad 17. \frac{x^2}{x-2y}$$

$$18. \frac{a^2-b^2}{a^2b^2}, \quad 19. \frac{2a}{15}, \quad 20. \frac{11b}{6}$$

$$21. \frac{17a-19b}{20}, \quad 22. \frac{x+17y}{12}, \quad 23. \frac{22x-29y}{12}$$

$$24. \frac{x+6}{12}, \quad 25. \frac{5x-2y}{12}, \quad 26. 1.$$

$$27. 1, \quad 28. \frac{1}{x+a}, \quad 29. -\frac{1}{1+x}$$

$$30. -\frac{1}{2+x}, \quad 31. \frac{1}{x-3}$$

$$32. \frac{1}{(x-3)(x-2)}, \quad 33. -\frac{y}{(x-4y)(x-5y)}$$

$$34. \frac{2x}{(3x-2y)(5x-2y)}, \quad 35. \frac{4x}{1-x^2}$$

$$36. \frac{8ab}{a^2-4b^2}, \quad 37. \frac{x}{(x-2)^2}, \quad 38. \frac{a^2}{(a-2b)^2}$$

$$39. \frac{4y}{x-y}, \quad 40. \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, \quad 41. \frac{1}{a}$$

$$42. \frac{3(x+6)}{x^2-16}, \quad 43. \frac{x+3}{x^2-1}, \quad 44. \frac{1}{1-9x^2}$$

$$45. \frac{4a^4}{a^4-x^4}, \quad 46. \frac{8a^3}{a^3-x^3}$$

47. $\frac{2x^2+10x+14}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

48. $\frac{2}{x(x^2-1)}$

49. $\frac{2}{a(a+1)(a+2)}$

50. $\frac{48}{(x^2-1)(x^2-9)}$

51. $\frac{6}{a(a+1)(a+2)(a+3)}$

52. $\frac{24}{x(x^2-1)(x^2-4)}$

53. $\frac{24}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}$

54. 0.

55. 0.

56. $\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

57. 0.

58. $\frac{x}{(x-2a)^2}$

59. $\frac{1}{a+2}$

60. $2\frac{x+ay}{x-ay}$

61. $\frac{4x^2+3}{x^2-1}$

62. $\frac{4-x}{1-x}$

63. $\frac{2}{x-3y}$

64. 1.

65. 1.

XXXIX. 1. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{ab}{4c^2}$

3. $\frac{ab}{c^2}$

4. $\frac{2ac}{3b^2}$

5. 1.

6. 1.

7. $\frac{b^2}{c^2}$

8. $\frac{a^4}{c^4}$

9. $\frac{8}{abc}$

10. xyx

11. x^2

12. 1.

13. $\frac{2xy}{3ab}$ 14. $\frac{xy}{b^2z}$ 15. $\frac{1}{xy}$
16. $\frac{b}{x^3}$ 17. $\frac{x^2}{(x+3)(x-2)}$ 18. $\frac{x-y}{x+2y}$
19. x^3 20. $\frac{a}{b}$ 21. $\frac{x-1}{x-4}$
22. $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ 23. 1.
24. $\frac{(x-1)(x-5)}{(x-2)(x-4)}$ 25. $\frac{x^2+ax+a^2}{x-2a}$
26. $\frac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}$ 27. 1. 28. $\frac{1}{(a-b)^2}$
29. 1. 30. $\frac{(y+z-x)^2}{(z+x-y)^2}$ 31. $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$
32. $\frac{1}{x^2+y^2}$

-
- XI.** 1. $\frac{5(x+a)}{(x-a)^2}$ 2. $\frac{1}{2x^2-1}$ 3. 1.
4. 0. 5. 0. 6. $\frac{2}{y}$ 7. 1. 8. $x-1$.
9. $\frac{3(4x+5)(3x+4)}{(2x+3)(5x+6)}$ 10. $\frac{1+x^4}{x(1+x^2)}$
11. $\frac{1}{3x^3}$ 12. $\frac{x^2(x-1)}{x+1}$ 13. $\frac{4}{4x-a+3}$
14. 1.

- XLI.**
1. $\frac{2x^2}{3z^2}$ 2. $\frac{3a}{4cx}$ 3. $\frac{a^2b^2c^2}{x^2y^2z^2}$
4. $\frac{x-5y}{x(x-4y)}$ 5. $\frac{x(x-11y)}{y(x-9y)}$ 6. $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+b^2}$
7. $a^4+a^2b^2+b^4$ 8. $\frac{x-1}{x^2-3}$
9. $\frac{3x^2-4x+2}{2x^2-3x+5}$ 10. $\frac{2x^2-xy+3y^2}{3x^2-xy+2y^2}$
11. $\frac{x-4y}{x^2+4y^2}$ 12. $\frac{x+10y}{-15}$ 13. $\frac{57x-66y}{20}$
14. $\frac{x}{16-x^2}$ 15. $\frac{x}{9-x^2}$ 16. $-\frac{2xy}{(x-2y)^2}$
17. $\frac{a^2}{(a-4b)^2}$
18. $\frac{2a^2+22a+62}{(a+4)(a+5)(a+6)(a+7)}$
19. $\frac{162}{a(a+3)(a+6)(a+9)}$ 20. $\frac{x^2+xy+y^2}{x-3y}$
21. $\frac{x+y}{x+2y}$ 22. $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$
23. $\frac{(x-5)^2}{(x-8)(3x-8)}$ 24. $\frac{x^2-4xy+y^2}{x^2+y^2}$
25. $\frac{3}{x(x^3-1)}$ 26. $\frac{3b^2}{(3a+b)(a-b)(3a+2b)}$
27. $\frac{1}{4a-b}$ 28. $\frac{1}{a+b}$ 29. m

30. 1. 31. $\frac{4y}{x+y}$ 32. $\frac{a-b}{a}$
33. $\frac{1}{x+y}$ 34. $\frac{a^2-9b^2}{a^2-25b^2}$ 35. $\frac{a^2-5b^2}{a^2-5b^2}$
36. $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
37. $\frac{12-2x}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}$
38. $\frac{14-2x}{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}$
39. x^2-xy+y^2-1 40. x^2+xy+y^2-1
41. $\frac{1}{1-x}$ 42. 1. 43. 0.
44. $\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$ 45. $\frac{(a-b)^2}{8a(a+b)^2}$ 46. 4.
47. $\frac{x+3y}{8xy(x+y)}$ 48. 0. 49. $\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$
50. $\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$ 51. $\frac{336(11x+5)}{(x-17)(x-9)(x+4)(x+7)}$
52. $\frac{1366}{(x-5)(x-7)(x+2)(x+4)}$
53. $12 \cdot \frac{2x^2+10x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
54. $\frac{a+b+c+3d}{a+b+c+d}$ 55. $\frac{1}{xy(a-x)}$

56 $\frac{a}{xyz}$

57 $-\frac{a}{b}$

58. 2.

XLII.	1.	7.	2.	4.	3.	$\frac{111}{31}$.	4.	-4.
5.	$-\frac{1}{2}$.		6.	$\frac{11}{11}$.		7.	$\frac{33}{11}$.	
8.	$\frac{1}{11}$.		9.	$-\frac{1}{11}$.		10.	$\frac{11}{11}$.	
11.	$-\frac{11}{11}$.		12.	$-\frac{11}{11}$.		13.	1.	
14.	$-\frac{11}{11}$.		15.	$\frac{11}{11}$.		16.	$-\frac{11}{11}$.	
17.	-2.		18.	$-\frac{1}{11}$.		19.	-14.	
20.	2.		21.	$\frac{11}{11}$.		22.	19.	
23.	$\frac{1}{11}$.		24.	$\frac{11}{11}$.		25.	$\frac{1}{11}$.	
26.	-4.		27.	-10.		28.	-10.	
29.	5.		30.	$-\frac{1}{11}$.		31.	$\frac{1}{11}$.	
32.	1.		33.	-2.		34.	-2.	
35.	1.		36.	0.		37.	$\frac{11}{11}$.	
38.	$-\frac{11}{11}$.		39.	$\frac{11}{11}$.		40.	$\frac{11}{11}$.	
41.	-2.		42.	-4.		43.	-6.	
44.	5.		45.	0.		46.	4.	
47.	-3.		48.	$\frac{1}{11}$.		49.	-6.	
50.	1.		51.	$\frac{11}{11}$.		52.	-1.	
53.	$-\frac{1}{11}$.		54.	$\frac{1}{2}(a+b)$.		55.	$\frac{ab}{b-a}$.	

56. $-\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$.

57. $-2(a+b+c)$.

58. $\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

雜題 III. A. 1. $y^3-6xy^2+6x^2y-x^3$.

3. (1) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$, (2) $(a-b)(a+b+2)$,
(3) $(x-7)(x+4)$.

4. $x^2+x-4, \frac{x^2-x+5}{x(5x^2+4x+16)}$.

5. (1) 5, (2) $x=1, y=-1$, (3) $x=-\frac{a+b}{2}$.

6. A 235 圓, B 65 圓.

B. 1. 0, 0. 3. (1) $x(x-2)^2$, (2) $(2x-1)(x-2)$,

(3) $(x^2+1)(x-1)$. 4. $\frac{2}{x+3}$.

5. (1) $\frac{1}{2}$, (2) $x=a, y=0$. 6. $\frac{1}{15}$.

C. 3. (1) $(1-3x)(1+21x)$, (2) $3y(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$,

(3) $(x+1)^2(x-1)^2$.

4. $\frac{x-3}{x^2+7x+3}, \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

5. (1) $\frac{1}{2}$, (2) $x = \frac{c(b-c)}{a(b-a)}, y = \frac{c(a-c)}{b(a-b)}$.

6. A 70 圓, B 30 圓.

- D. 1. 4. 3. (1) $x(x+3y)(x-2y)$,
 (2) $(x-a)(x+a)^2$, (3) $(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$.

4. (1) $\frac{2(x+x)}{a-x}$ (2) $\frac{2}{(x-4)(x-5)(x-6)}$

5. (1) $x=5$, (2) $x=\frac{1}{2}, y=-17$. 6. 72.

E. 2. $x^4+x^2y+xy^2+y^3$,
 $(x+y)^3+2x(x+y)^2+4x^2(x+y)+8x^3$.

3. $(x+5)(5x-1), a(x+b+c)(a-b-c)$.

4. $2a(2a-3b)(2a+3b)(2a-b)$. 6. 240 圓.

F. 1. 59. 2. $x^5-ax^4-a^4x+a^5$.

3. $(x-1)^2(x-1)^2(x^2+x+1)^2(x-x+1)$.

4. $\frac{x}{4x^2-y^2}$. 5. (1) $-\frac{a^2+b^2}{a+b}$,

(2) $x=3, y=-1, z=0$. 6. 350 畝.

XLIII. 1. 1 -2 2. 3, 4 3. -1, -2.

4. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ 5. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 6. $\frac{1}{2}, 4$.

7. 5, 2, -3. 8. 0, -2, 4. 9. 0, 3, -4.

10. 0, $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. 11. 0, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. 12. 0, 3, $-\frac{1}{2}$.

13. 1, 2, 3, 5. 14. 2, 1, -1, -2.

15. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. 16. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

- | | | |
|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| 17. 0, 1. | 18. 0, 2. | 19. 0, -3. |
| 20. 0, $\frac{1}{2}$. | 21. 0, $\frac{1}{3}$. | 22. 0, $-\frac{1}{2}$. |
| 23. 0, 5. | 24. 0, $\frac{1}{2}$. | 25. 0, $\frac{1}{3}$. |
| 26. 0, $-\frac{1}{2}$. | 27. 0, b . | 28. 0, $\frac{b}{a}$. |
| 29. ± 1 . | 30. ± 5 . | 31. ± 4 . |
| 32. 0, 0. | 33. ± 3 . | 34. ± 3 . |
| 35. ± 1 . | 36. ± 9 . | 37. 2, 3. |
| 38. 3, 4. | 39. 2, 10. | 40. 4, 5. |
| 41. 4, 7. | 42. 10, 15. | 43. 12, -7. |
| 44. 13, -12. | 45. 10, -15. | 46. -3, 1. |
| 47. 5, -9. | 48. 5, -2. | 49. 0, 9, -20. |
| 50. 0, 12, -11. | | |

-
- XLIV.** 1. 9, -5. 2. 13, -7. 3. 2, 6.
- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 4. 3, 6. | 5. 6, -3. | 6. 1, -3. |
| 7. 3, -1. | 8. 1, -3. | 9. ± 2 . |
| 10. ± 3 . | 11. $-\frac{1}{2}$. | 12. $\frac{1}{3}$. |
| 13. 3, 50. | 14. 11, -9. | 15. 3, $\frac{1}{2}$. |
| 16. $\frac{1}{2}$, -5. | 17. $\frac{1}{3}$, -6. | 18. $\frac{1}{2}$, -10. |
| 19. $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. | 20. 40, -5. | 21. 2, $\frac{1}{17}$. |

- | | | |
|--|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 22. $4, \frac{2}{17}$. | 23. $\frac{5}{17}, -\frac{2}{17}$. | 2. $\frac{1}{10}, \frac{1}{11}$. |
| 25. $\frac{1}{2}, -\frac{5}{7}$. | 26. $\frac{1}{2}, -\frac{5}{7}$. | 2. $\frac{1}{2}, \frac{5}{7}$. |
| 28. $1, -\frac{1}{2}$. | | 29. $\frac{1}{2}, \frac{17}{8}$. |
| 30. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. | 31. $3, -\frac{46}{17}$. | 32. $2, -\frac{33}{17}$. |
| 33. $11, -21$. | 34. 0.4 . | 35. $10, \frac{18}{5}$. |
| 36. $4, -2$. | 37. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}$. | 38. $a, 2a$. |
| 39. $a, 3a$. | 40. $b, 2a-b$. | |
| 41. $-\frac{1}{2}(a-b), -\frac{1}{2}(a+b)$. | | 42. $b, -2a-b$. |

-
- XLV.**
- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|--|
| 1. $2, \frac{1}{2}$. | 2. $\frac{1}{2}, \frac{5}{7}$. | 3. $6, \frac{1}{2}$. |
| 4. $3, -7$. | 5. $3, -2$. | 6. $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$. |
| 7. $3, -\frac{14}{5}$. | 8. $2, \frac{2}{3}$. | 9. $2 \pm \sqrt{3}$. |
| 10. $5, \frac{22}{7}$. | 11. $-1, -\frac{14}{5}$. | 12. $-5, -15$. |
| 13. $-3, \frac{1}{2}$. | 14. $7, \frac{2}{3}$. | 15. $3, -25.7$ |
| 16. $4, \frac{12}{5}$. | 17. $5, -\frac{1}{2}$. | 18. 2 . |
| 19. $1, -\frac{1}{2}$. | 20. $4, -1$. | 21. $2, \frac{1}{2}$. |
| 22. $4, -\frac{21}{5}$. | 23. $5, -\frac{11}{2}$. | 24. $6, -\frac{42}{5}$. |
| 25. $3, -\frac{1}{2}$. | 26. $5, -\frac{1}{2}$. | 27. $2 \pm 2\sqrt{3}$. |
| 28. $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$. | 29. ± 6 . | 30. 1 . |
| 31. 6 . | 32. $a, 2a$. | 33. $\frac{1}{2}\{a \pm \sqrt{(2a^2 - b^2)}\}$. |

34. $-a, \frac{1}{a}$. 35. $a, \frac{1}{a}$. 36. $-b, 2a-b$.
 37. $c, c-2b$. 38. $1, \frac{a-b}{b-c}$. 39. $1, -\frac{a+b+c}{a+b}$.
 40. $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$. 41. $-\frac{b}{c}, -\frac{c}{b}$.
 42. $\frac{a+b}{a-b}, \frac{b-a}{b+a}$. 43. $\frac{b+a}{b-a}, \frac{b-a}{b+a}$.
 44. $a, -\frac{1}{a}$. 45. $\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$. 46. $a+b, \frac{2ab}{a+b}$.
 47. $a+b, \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$. 48. $a+b, \frac{a^2+b^2}{a+b}$.
 49. $b, \frac{a^2}{b}$. 50. $-a, -b$. 51. a, b .
 52. $c, -\frac{a^2+b^2+ac+bc}{a+b+2c}$. 53. $c, -\frac{ab(2c+a+b)}{ac+bc+2ab}$.
 54. $0, \pm\sqrt{ab}$. 55. $0, -\frac{1}{2}(a+b)$.

- XLVI. 1. 12. 2. 23. 3. 5. 4. 9.
 5. 1. 6. -1. 7. $\frac{11}{11}$.
 8. 2, -1. 9. 5, -4. 10. 3, 8.
 11. 7, 2. 12. 2, 11. 13. 5, 9.
 14. 4, 0. 15. 4, $\frac{1}{4}$. 16. 9, $\frac{1}{9}$.
 17. 1, 6. 18. $1, -\frac{1}{2}$. 19. $5\frac{11}{11}$.

20. 15. 21. 16, $\frac{1}{2}$. 22. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.
23. 0, -4. 24. 5, $\frac{1}{2}$. 25. 7.
26. 6, $-\frac{1}{2}$. 27. $-\frac{1}{2}$. 28. 5.
29. 6. 30. 6, $-\frac{11}{2}$. 31. $\frac{1}{2}, \frac{1}{17}$.
32. 3, $-\frac{11}{2}$. 33. 2, 3. 34. 0.
35. $\frac{1}{2}$. 36. $\frac{11}{2}$. 37. 2, $-\frac{11}{2}$.
38. a, b . 39. 0, $4(a+b)$. 40. $-a, -b$.
41. $\frac{(a-b)^2}{8(a+b)}$.

- XLVII. 1. $x^2-4=0$. 2. $x^2+x-12=0$.
3. $x^2+5x+6=0$. 4. $x^2-\frac{1}{2}=0$.
5. $12x^2-x-1=0$. 6. $6x^2+5x+1=0$.
7. $x^2-3x=0$. 8. $x^2+4x=0$.
9. $x^3-2x^2-15x=0$. 10. $x^2-2=0$.
11. $x^2-5=0$. 12. $x^2-8x=0$.
13. $x^2-4x+1=0$. 14. $x^2-10x+18=0$.
15. $x^2-2ax+a^2-b=0$.
16. (1) 1. (2) -2. (3) $-\frac{1}{2}$. (4) $-\frac{1}{2}$. (5) $\frac{4c}{3a}$
17. (1) 0. (2) -3. (3) 5. (4) $\frac{1}{2}$. (5) $-\frac{7b}{6a}$.

20. 12 21. $14p^2$. 23. $a = \frac{1}{2}$.

24. $a = 3$ 或 $a = -5$. 25. $a = 8$.

29. $2x^2 - 23x + 11 = 0$. 30. $9x^2 - 49x + 49 = 0$.

32. $ac - b^2 = 0$.

XLVIII. 1. $\pm 1, \pm 2$. 2. $\pm 2, \pm \sqrt{-2}$.

3. $\pm 1, \pm 3$. 4. $\pm 3, \pm \sqrt{-2}$.

5. $\pm 1, \pm 3$. 6. $\pm 5, \pm 2$. 7. $\pm a, \pm \frac{1}{a}$.

8. $\pm a, \pm \frac{\sqrt{-1}}{a}$.

9. $\pm a, \pm a\sqrt{-1}, \pm \frac{1}{a}, \pm \frac{\sqrt{-1}}{a}$.

10. 2, -1, 3, -2. 11. -2, 1, 4, -5.

12. -3, 2, $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-27}$. 13. $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

14. 1, $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-15}$. 15. 2, $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-15}$.

16. $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1}$.

17. 1, -2, $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-19}$.

18. 1, $-3 \pm 2\sqrt{2}$. 19. 0, -8, 1, 3.

20. -3, 2, $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-27}$. 21. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \pm \sqrt{5}$.

22. 3, -6, $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{125}$. 23. 0, -3, $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{14}$.

-
24. $2, -8, -3 \pm \sqrt{45}$. 25. $7, -\frac{3}{2}, \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{248}$.
 26. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, 3$. 27. $-8, 5, -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{221}$.
 28. $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}$. 29. $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{17}$.
 30. $3, 5, -8$. 31. $3, \pm \sqrt{7}$.
 32. $-1, 4, -1$. 33. $2, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{10} \sqrt{165}$.
 34. $x = -3$. 35. $x = -5$.
 36. (1) $1, 4, -5$. (2) $3, -3, -2$.
 (3) $2, 4, -5$. (4) $10, -2, -5$.
 (5) $2, 3, -5$. (6) $1, -4, -\frac{1}{2}$.
 (7) $-1, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}$.
-

- XLIX.** 1. $5, 1$. 2. $3, -7, 7, -3$.
 3. $3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3$. 4. $6, -4, -6, 4$.
 5. $5, 2, -5, -2$. 6. $12, 3, -5, 20$.
 7. $3, 1, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$. 8. $7, -2, -\frac{42}{11}, -\frac{512}{11}$.
 9. $1, 1, \frac{1}{7}, \frac{7}{7}$. 10. $2, -3, \frac{174}{11}, -\frac{1011}{11}$.
 11. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{2}{2}$. 12. $1, 3, \frac{21}{2}, \frac{1}{2}$.
 13. $2, 3, 3, 2$. 14. $3, 2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$.
 15. $1, -2, 6, 8$. 16. $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{14}{2}$.
 17. $\frac{7}{2}, \frac{23}{2}$. 18. $1, 3, \frac{5}{2}, 2$.

$$19. 6, 7, -\frac{13}{2}, \frac{13}{4}. \quad 20. -1, -3, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}.$$

$$L. 1. 0, \pm 5, \pm 6, \pm 3^*$$

$$2. \pm 3, \pm 2, 0, \pm\sqrt{34}. \quad 3. \pm 3, \pm 4, \pm 7\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}.$$

$$4. \pm 9, \pm 2, \pm\frac{7}{\sqrt{2}}, \mp\frac{11}{\sqrt{2}}.$$

$$5. \pm 4, \pm 2, \pm 6\sqrt{-2}, \mp 8\sqrt{-2}.$$

$$6. \pm 5, \pm 1, \pm 4, \pm\frac{1}{2}. \quad 7. \pm 14, \pm 8, \pm 1, \pm 5.$$

$$8. \pm 1, \pm 2, \pm 7\sqrt{-\frac{1}{2}}, \pm 3\sqrt{-\frac{1}{2}}.$$

$$9. \pm 5, \pm 2. \quad 10. \pm 2, \pm 1.$$

$$11. \pm 3, \pm 5, \pm 36, \mp\frac{23}{2}.$$

$$12. \pm 5, \pm 3, \pm 4\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}.$$

$$13. \pm 1, \pm 2, \pm\sqrt{3}, 0. \quad 14. \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 3.$$

$$15. \pm 8, \mp 2, \pm\frac{3}{2}\sqrt{21}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{21}.$$

$$16. \pm 2, \mp 1, \pm\frac{13}{7}, \mp\frac{1}{7}. \quad 17. \pm 1, \mp 2, \pm 5, \pm 6.$$

$$18. \pm 5, \pm 1, \pm 16, \mp\frac{1}{2}. \quad 19. \pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{13}{2}$$

$$20. \pm 3, \pm 2, \pm\frac{31}{\sqrt{145}}, \mp\frac{8}{\sqrt{145}}.$$

$$21. 3, -4, -4, 3. \quad 22. 3, -6, -6, 3.$$

$$23. -4, 6. \quad 24. 4, 15, 6, 10.$$

$$25. 3\pm\sqrt{6}, 3\mp\sqrt{6}. \quad 26. 3, -\frac{1}{2}, -1, 1.$$

*俱取上符號或又可取下符號

- LI. 1 7, 4, -4, -7. 2. 5, 3, -3, -5.
- 3 4, 3, 3, 4 4. 5, -4, -4, 5.
5. $\pm 3, \pm 1, \pm 1, \pm 3$. 6. $\pm 3, \pm 3$.
7. 6, 4, 4, 6. 8 4, 1, -1, -4.
9. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. 10 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.
11. $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{59}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{59}$.
12. $\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}$
13. -3, 4, 4, -3. $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{5}$.
14. -1, 6, 6, -1 $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{17}, \frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{17}$.
- 15 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 8, 10$. 16. 3, 0, -7, 5.
17. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. 18. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.
19. 0, 0, 1, 2. $\frac{1}{2}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\frac{1}{2}$. 20. -1, 0, 2, 1. $5\frac{1}{2}$
21. 5, -3.
22. 5, 4, 4, 5. $\frac{1}{2}(-9\pm\sqrt{161}), \frac{1}{2}(-9\mp\sqrt{161})$.
23. $\pm 3, \pm 1, \pm 1, \pm 3. \pm 3\sqrt{-1}, \pm\sqrt{-1}$.
 $\pm\sqrt{-1}, \pm 3\sqrt{-1}$.
24. 1, 1. $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-7}, -\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{-7}$.
25. $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{-14}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{-14}$.
- 26 $\pm\frac{1}{2}, \pm 3. \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}$. 27. 0, 0. $\frac{a^2+b^2}{a}, \frac{a^2+b^2}{b}$

$$28. a+b, a+b, \frac{b}{a}(a-b), \frac{a}{b}(b-a).$$

$$29. a, b.$$

$$30. \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}$$

$$31. \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \sqrt{-1}, \pm 2\sqrt{-1}, \pm 3\sqrt{-1}.$$

$$32. \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm 1.$$

$$33. \pm 1, \pm 4, \pm 2.$$

$$34. 0, \pm 1, \pm 2.$$

$$\text{LII. } 1. \pm 27, \pm 9.$$

$$2. 7, 11.$$

$$3. \pm 25 \text{ 與 } \pm 5.$$

$$4. 12 \text{ 與 } 13.$$

$$5. 38, 42.$$

$$6. 3 \text{ 或 } 63.$$

$$7. 39 \text{ 丈, } 29 \text{ 丈.}$$

$$8. \pm 2.$$

$$9. 50.$$

$$10. 18.$$

$$11. \text{ 水 } 18 \text{ 升, 酒 } 9 \text{ 升.}$$

$$12. 20.$$

$$13. 20.$$

$$14. 75.$$

$$15. 3\frac{2}{7}.$$

$$16. \text{ 每時 } 4 \text{ 里.}$$

$$17. 5 \text{ 與 } 60.$$

$$18. 1\frac{1}{2} \text{ 時.}$$

$$19. 4 \text{ 日.}$$

$$20. 9 \text{ 角}$$

$$21. 9 \text{ 分.}$$

$$22. 48.$$

$$23. 105 \text{ 分與 } 48 \text{ 分}$$

$$24. 72.$$

$$25. 10 \text{ 圓, } 5 \text{ 圓, } 1000 \text{ 圓.}$$

$$26. \frac{1}{2} \text{ 與 } \frac{1}{3}, \text{ 又 } \frac{1}{2} \text{ 與 } -\frac{1}{3}.$$

$$27. \text{ 每時 } 3\frac{1}{2} \text{ 里及 } 1\frac{1}{2} \text{ 里.}$$

$$28. 578.$$

$$29. 18 \text{ 寸, } 8 \text{ 寸.}$$

$$30. 1500 \text{ 平方尺.}$$

$$31. 9 \text{ 與 } 4.$$

$$32. 210 \text{ 哩或 } 144 \text{ 哩.}$$

雜題 IV A. 1 y . 2 $a^3 - 125b^3 + 8c^3 + 30abc$.

3. $x^2 + x(a - 2b) + (a^2 + 3b^2)$.

4. (1) $3(x + y + z)(x - y - 5z)$,

(2) $(x - 1)(x + 1)(y - 1)(y + 1)$,

(3) $(x^2z - 1)(y^2z - 1)$.

5. (1) $\frac{x+6}{2-x-x^2}$ (2) $\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

6. (1) $x = \frac{3ab - 2ac - bc}{a + 2b - 3c}$ (2) $x = 7$ 又 $-\frac{1}{2}$.

(3) $x = 2$ 又 $\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ 又 2 . 8. 17 與 18.

B. 1 (1) 6. 3 $x^4 + 2ax^3 + 3a^2x^2 + 2a^3x + a^4$.

4. $(64a^6 - 729)(3x + 2)$.

5 (1) $\frac{2(x+3)}{x^4-1}$, (2) 1.

6. (1) $x = -\frac{1}{5}$, (2) $x = 5$ 又 $-6\frac{2}{5}$,

(3) $x = \pm 2$, $y = \pm 3$ 又 $x = \pm \frac{5}{\sqrt{2}}$, $y = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$.

8 840. 券

C. 1. (1) $24a - 21b$. (2) $a^6 - 6a^4b^2 - 7a^2b^4 - 4b^6$

3. $4xy - 6x^2 - 2y^2$. 4. (1) $(3x + 2)(3x + 1)$,

(2) $(a + b + c + d)(a - b + c - d)$

$(a + b - c - d)(-a + b + c - d)$.

5. y . 6. (1) $x = -212$, (2) $x = y = a$.
7. 3與5. 8. 6角2仙, 5角5仙.
- D. 2. $3 + 2x + 8x^2 + 4x^3 + x^4$.
5. $(x+1)(x+2)(x+3)(x-7)$, $x=7$.
6. (1) $x = \frac{1}{2}$, $y = 3$. (2) $x = a$ 又 b ,
- (3) $x = 2$, $y = 1$, $x = 6\frac{1}{2}$, $y = -3\frac{1}{2}$. 8. 1斗
- E. 1. $2\frac{1}{2}$. 3. $-3a + 3b - 18c + 6d$.
4. $(6x - 5ax - 6a^2)(2x^2 + 2ax + 3a^2)$. 5. $\frac{1}{x+y}$.
6. (1) $x = \frac{a+b}{2}$. (2) $x = 0$ 又 4 ;
- (3) $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. $x = 1\frac{1}{2}$, $y = 1\frac{1}{2}$.
7. $x = c$ 或 $\frac{a^2}{c}$. 8. 每時 15 里.
- F. 1. $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$. 3. $1 + 4x - x^2$.
4. $x-1$, 1. 5. (1) 0. (2) x .
6. (1) $x=1$, (2) $x=a$ 與 $y=b$.
- (3) $x=0$ 或 $\frac{1}{2}$. 7. $7\sqrt{13}$.
9. 169 或 144.

方程式之雜題. 1. 1. 2. $\frac{11}{2}$. 3. $\frac{1}{2}$. 4. 3, 2.

5. 15 里. 18 里. 6. $\frac{11}{2}$. 7. 5.

- | | | |
|--|------------------------------------|-------------------------|
| 8. 8. | 9. 280, 336. | 10. 25 分. |
| 11. 7. | 12. $a-b$. | 13. 1. |
| 14. $x=y=1$. | 15. 310. | 16. 11. |
| 17. 2, 12. | 18. $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}$. | 19. 6, 7. |
| 20. 51, 22, 17. | 21. 5. | 22. $\frac{bc}{a}$. |
| 23. 17, 15. | 24. $\frac{1}{3}$ 又 6. | 25. 100 斤. |
| 26. 7. | 27. 10, 11. | |
| 28. $\frac{1}{2}(a-b), \frac{1}{2}(a+b)$. | 29. 6, $\frac{1}{2}$. | 30. 45 年. |
| 31. $-\frac{1}{2}$. | 32. $-\frac{1}{2}, 3$. | 33. 3, $-\frac{1}{2}$. |
| 34. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. | 35. 2 時. | 36. 0, 又 2. |
| 37. -1, -5. | 38. 8, $\frac{222}{111}$. | 39. 8. |
| 40. 2 圓, 5 圓, 13 圓. | 41. $\frac{222}{111}$. | 42. 5, 6. |
| 43. 0, -1, -8. | 44. 10, 9. | 45. 99. |
| 46. 2. | 47. $\frac{44}{5}, -11$. | 48. 4, $\frac{9}{18}$. |
| 49. $\frac{1}{2}$. | 50. 1 時, 45 分, 2 時, 20 分. | |
| 51. 3. | 52. 6. 1. | 53. $\pm\sqrt{a^2+1}$. |
| 54. $\pm 2, \pm 3, \mp \frac{32}{\sqrt{345}}, \pm \frac{41}{\sqrt{345}}$. | 55. 6, 7 及 8. | |
| 56. 6. | 57. 0, 5, $\frac{13}{6}$. | 58. $a-b, a+b$. |
| 59. $\pm 3, \mp 3$. | 60. 36 分. | 61. a . |

62. 1. $-\frac{53}{8}$. 6. 5, -7, $-1 \pm \sqrt{69}$.
64. $(\pm 4, \mp 2, \pm \frac{1}{2} \pm 5)$. 65. 29. 66. 1.
67. $a \frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}$, $b \frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}$ 68. $a+b$.
69. $\pm 1, \mp 2, \pm 3, \pm 2$. 70. 50. 71. $-\frac{8}{9}$.
72. $-a, \frac{c^2}{a}$ 3. 0, 8. 74. 4, 7, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$.
75. 貳角銀貨 52 個, 壹角銀貨 74 個, 五仙白銅貨 24 個. 76. $\frac{19}{18}$. 77. 3, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-14}$.
78. 0, 0, $2a, 2b$.
79. 6, 6, -4, -4, $-1 \pm \sqrt{21}$, $-1 \mp \sqrt{21}$.
80. 縱 32 尺, 橫 24 尺, 高 10 尺. 81. $-b$.
82. $a, b, \frac{1}{2}(a+b)$. 83. 7, 6.
84. 4, 2, 2, 4, $3 \pm \sqrt{21}$, $3 \mp \sqrt{21}$. 85. 13.4.
86. 3. 87. $\frac{1}{2}(a-1)$, $\frac{1}{2}(1-b)$.
88. $\frac{1}{2}, \frac{1}{18}$. 89. 5, -6, -6, 5.
90. 44 尺, 55 尺, 91. 0, 7. 92. -1, 1, 1.
93. a, b . 94. 8, 6, 6, 8, 0, -2, -2, 0.
95. 每時 50 里及每時 30 里. 86. $3a-b, 3b-a$.
97. 6, $\frac{2}{3}$. 98. -3, $-\pm \sqrt{5}$.
99. 4, 3, 3, 4, $-\frac{19}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{313}$, $-\frac{19}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{313}$.

100. 15 里

- LIII. 1. a^{16} . 2. a^{16} . 3. $-a^6$. 4. a^6 .
5. $16a^{21}$. 6. $-243a^{30}$. 7. a^4b^3 .
8. $a^{14}b^6$. 9. $-a^7b^{23}$. 10. $-27a^{21}b^{15}c^3$.
11. $a^4b^6c^{20}$. 12. $-125a^6b^7c^{12}$. 13. $\frac{a^6}{b^7}$.
14. $-\frac{a^{15}}{b^5c^{10}}$. 15. $\frac{a^6}{b^{12}c^{18}}$.
16. $4a^6+12a^4b^3+9b^6$. 17. $a^{10}-4a^7b^4+4b^9$.
18. $a^2x^2-2abx^4y^3+b^2y^4$. 19. $a^4-4a^3b+4a^2b^2$.
20. $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6$. 21. $a^9+3a^6b^3+3a^3b^6+b^9$.
22. $8a^6-36a^4b^2+54a^2b^4-27b^6$.
23. $27a^6-54a^4b^2+36a^2b^4-8b^6$.
24. $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$.
25. $a^6+4b^5+9c^4-4a^3b^3+6a^2c^3-12b^2c^3$.
26. $a^4+16b^4+9c^4-8a^2b^2-6a^2c^2+24b^2c^2$.
27. $x^4-6x^3-3x^2+36x+36$.
28. $9x^4-6x^3-29x^2+10x+25$.
29. $4x^4+20x^3+21x^2-10x+1$.
30. $9x^4-35x^3+72x^2+36$.
31. $1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6$.

32. $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1.$

33. $x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 8x + 4.$

34. $a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 16d^2 + 4ab + 6ac + 8ad$

$+ 12bc + 16bd \quad | \quad 24. \&$

35. $4a^2 + b^2 + c^2 + 4d^2 - 4ab + 4ac - 8ad - 2bc + 4bd - 4cd$

36. $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1.$

37. $x^6 - 3x^5 + 9x^4 - 13x^3 + 18x^2 - 12x + 8.$

38. $27x^6 - 135x^5 + 252x^4 - 215x^3 + 84x^2 - 15x + 1.$

LIV. 1. $3x - 5y.$ 2. $5x^2 - 3y^2.$ 3. $2x^2 - 3y^2.$

4. $2x^5 - 3y^5.$ 5. $x^4 - 3y^4.$ 6. $3x^5 - y^5.$

7. $\frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}y^5.$ 8. $\frac{1}{2}x^4y^5 - \frac{1}{2}.$ 9. $5x^4y^5 - 4a^2b.$

10. $\frac{x^2}{a} + 4ay^2.$ 11. $3\frac{bx^2}{a} - 4\frac{ay^2}{b}$ 12. $\frac{3}{x^5} - 7a^5.$

13. $a + 2b + 3c.$ 14. $-2a + b + 3c.$

15. $2a^2 + b^2 - c^2.$ 16. $5a^2 - 3b^2 + 2c^2.$

LV. 1. $x^2 + x + 1.$ 2. $2x^2 - 2x - 1$

3. $3x^2 - 6x - 6.$ 4. $1 - \frac{1}{2}xy - 2x^2y^2.$

5. $2x^2 + x - \frac{1}{2}.$ 6. $x^2 - x + \frac{1}{2}.$

7. $x^2 + xy + y^2.$ 8. $4 - 12x + 9x^2.$

- | | |
|-------------------------|--|
| 9. $1+2x+3x^2$ | 10. $2x^2-x+\frac{1}{2}$ |
| 11. $1-2x-2x^2$ | 12. x^2-2x^2+x-2 |
| 13. $3x^3-2x^2+3x+2$ | 14. $x^3-11x+17$ |
| 15. $a-\frac{1}{2}b+4$ | 16. x^4+x^3-2x-4 |
| 17. $4x-12+\frac{9}{x}$ | 18. $x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}$ |
| 19. $x^2+x(y+z)+yz$ | 20. $2(yz+zx+xy)$ |

LVI. 1. 4. 2. $\frac{1}{2}$. 3. $\frac{1}{2}$. 4. 5. 5. $\frac{1}{2}$.

- | | | |
|--------------------------------------|---|--|
| 6. $\frac{1}{2}$ | 7. $\frac{1}{2}$ | 8. $\frac{1}{2}$ |
| 9. $10 \cdot 0$ | 10. $\frac{6 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 1}$ | 11. $a^{\frac{1}{2}}$ |
| 12. a^2 | 13. $a^{\frac{1}{2}}$ | 14. $q^{\frac{1}{2}}$ |
| 15. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$ | 16. ab^2 | 17. a^3b^{-1} |
| 18. ab^{-2} | 19. $a^{-1}b^{\frac{1}{2}}$ | 20. a^6b^{-1} |
| 21. a^{-2} | 22. a | 23. $a^{\frac{1}{2}}$ |
| 24. 1. | 25. 1. | 26. 1. |
| 27. 1. | 28. $y^{\frac{1}{2}}$ | 29. x^2y^2 |
| 30. $x^2y^2z^2$ | 31. $a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5}}$ | 32. $a^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ |
| 33. x^2a | 34. 1. | 35. 1. |

36. a . 37. ay . 38. $a^{\frac{13}{8}}x^{\frac{13}{8}}$
 39. a . 40. $a^{\frac{1}{2}}$. 41. $a^{\frac{1}{3}}$.
 42. $a^{\frac{1}{2}}$. 43. $a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}$. 44. b^{-1} .
 45. $\sqrt{a} - \frac{1}{a^2}$. 46. $\frac{1}{a^4\sqrt[3]{b}}$.
 47. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{b} - \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}}$. 48. $\frac{1}{a^2\sqrt{b}} + \frac{\sqrt[3]{a^2}}{9\sqrt[3]{b^2}}$.

- LVII. 1. $x-y$. 2. x^2-y^2 . 3. $x^{\frac{1}{2}}-1$.
 4. $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$. 5. $x-1$. 6. $x+y$.
 7. a^2-b^2 . 8. $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$.
 9. x^2-1 . 10. $x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}$.
 11. $x^2+2x^{\frac{3}{2}}+3+2x^{-\frac{1}{2}}+x^{-2}$.
 12. $x^{2n}y^{-2n}+2x^ny^{-n}+3+2x^{-n}y^n+x^{-2n}y^{2n}$.
 13. $a+b+c-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$. 14. $\frac{1}{11}a-2\frac{1}{11}b^2$.
 15. $243a+y^{\frac{1}{2}}$. 16. $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$. 17. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$.
 18. $x^2+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^2$. 19. $x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$.
 20. $x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+9x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+27x^{\frac{1}{2}}y+81y^{\frac{1}{2}}$.
 21. $y^2+b^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+b^2$.

22. $x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}$. 23. $a^2 - ab^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$.
24. $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}$. 25. $x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 1 + 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$.
26. $x^2y^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}} - 1 + x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + x^{-2}y^{\frac{1}{2}}$.
27. $a^2c^{\frac{1}{2}}$. 28. $a^2 - 64b^2$.
31. $4x^2 + 3x + 2 - 3x^{-1}$. 32. $\frac{8}{1-x^2}$.
33. $2b$. 34. (1) $x^{\frac{1}{2}} + 1$, (2) $2x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$,
 (3) $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}$. 35. $2xa^{-1} - 3 + 4x^{-1}a$.
36. $5xy^{-1} - 2 + \frac{1}{2}x^{-1}y$. 37. $x^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}$.
38. $x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$. 39. (1) $1, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$.
 (2) $36, 4$. (3) $81, 1$. (4) $1, 27$.
 (5) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$.

- LVIII. 1. $7\sqrt{3}$. 2. $12\sqrt{2}$. 3. $18\sqrt{5}$.
 4. $3\sqrt{5}$. 5. $\sqrt{7}$. 6. $5\sqrt{13}$.
 7. $8\sqrt{5}$. 8. 0 . 9. $\sqrt[3]{7}$.
 10. $4\sqrt{2}$. 11. $13\sqrt{3}$. 12. 0 . 13. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
 14. 30 . 15. $12\sqrt{2}$. 16. 6 .
 17. 6 . 18. $90\sqrt{3}$. 19. $6\sqrt[3]{4}$.

20. 30. 21. 6. 22. $10\frac{2}{40}$.

23. $4\frac{2}{3}$. 24. $\frac{1}{2}$. 25. 1.

26. 8. 27. $7\sqrt[3]{9}$. 28. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$.

29. $\sqrt{50}$, $\sqrt[3]{344}$, $\sqrt[3]{2402}$. 30. 3.

31. $\sqrt{15}-6$. 32. $19+5\sqrt{6}+6\sqrt{3}+12\sqrt{2}$.

33. $1+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{25}$.

34. $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$. 35. 24.

LIX. 1. $\frac{1}{2}\sqrt{7}$. 2. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. 3. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

4. $\frac{1}{2}\sqrt{30}$. 5. $2\sqrt{2}-2$. 6. $3-2\sqrt{2}$.

7. $5-\sqrt{15}$. 8. $\frac{103+80\sqrt{3}}{71}$.

9. $\frac{19+7\sqrt{15}}{17}$ 10. $\frac{8-7\sqrt{2}}{2}$.

11. $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

12. $\frac{12+9\sqrt{3}+3\sqrt{5}-6\sqrt{15}}{22}$ 13. $2\sqrt[3]{4}+2$.

14. $\sqrt[3]{81}+1$. 15. 14. 16. 52.

17. $\frac{177+52\sqrt{2}}{161}$. 18. $\frac{26-15\sqrt{3}+3\sqrt{10}}{13}$.

19. $\frac{29}{2}$. 20. 98. 21. $\frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

20. ψ .LXII. 1. $8\frac{1}{2}$. 2. 5. 6. 6. 7. $6\frac{1}{2}$.

8. 452.38893 平方尺 9. 113.076

10. 160. 11. $6\frac{1}{2}$ 尺. 13. 4 立方尺.14. $a^2 - b^2 = 4c^2$. 15. 1848 立方尺.

16. 12 寸. 17. 63 里

雜題 V. A. 1. $\frac{1}{11}$. 2. $a^2 - 3ab + b^2$.3. $1 - x^2 - x^4$. 4. $\frac{(a-1)(b-1)}{b}$.

5. 3 角. 7. 7.

B 1. $8\frac{1}{2}$.2. $(a-1)x^2 - 3ax^2 + (a^2 - a^2)x - (a^3 + 2a^2 + 2a + 1)$.3. (1) $x(x-7y)(x-6y)$, (2) $(5c - a)(3a + 4b + c)$,(3) $(x-2y+3)(x-2y-3)$. 4. $\frac{4y}{x+2}$.5. (1) 4 又 $-\frac{1}{4}$ (2) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.7. $3x^2 - 2xy^2 + 5y^3$. 8. 6 與 3.C. 1. $20b - 10a - 8c$. 2. $b^2 - a^2 + \frac{b^4}{a^2} - \frac{a^4}{b^2}$.3. $3\frac{a^2+b^2}{a+b}$, $3a^2 + ab - 4b^2$.

5. $a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{2}}$. 7. 378 里.

D. 2. $x^2 + (a-b)x - ab$. 3. $6x(x+1)(x-3)(x-4)$.

4. $\frac{1}{2}(y+z-x)^2$.

5. (1) $x = -7$, (2) ± 2 , ± 5 . $\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\mp \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

6. $16\frac{1}{2}$ 尺, 與 $13\frac{1}{2}$ 尺. 7. $x - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y$.

E. 1. $\frac{1}{2}(x-y)$. 2. $2ax - (3b-4c)y$.

3. (1) $4a^2b^2(b+2a)(b-2a)$, (2) $(x+3)(x-29)$,

(3) $(3x+5y)(x-2y)$. 5. 42.

6. $2\sqrt{ax} - 2a$.

F. 1. $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2bc + 2cd - 2bd$.

2. $(a+b+c)^2$. 2. $x^2 - 5x + 6.3$ 又 2.

5. (1) $x = -\frac{1}{2}$, (2) $x = 2\frac{1}{2}$, $y = -1\frac{1}{2}$. $x = -1\frac{1}{2}$, $y = 1\frac{1}{2}$.

6. $30 + 13\sqrt{6}y^{-\frac{5}{2}}$. 7. $x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 1$.

LXIII. 1. (1) 61, (2) 117, (3) -75, (4) 6\frac{1}{2}.

(5) $a - 28b$. 2. (1) 72, (2) 121, (3) -3,

(4) 366, (5) $40\frac{1}{2}$, (6) $-19\frac{1}{2}$. 3. 15.

4. \frac{1}{2}. 5. 5. 6. 43.

7. 34. 8. -2. 9. 78.

10. 0. 11. 第 21 項. 12. 第 102 項.

13. 第56項. 14. 第9項.
 15. (1) 10, (2) 0, (3) a . 16. 11, 14, 等.
 17. $53\frac{1}{3}$, $56\frac{2}{3}$ 等. 18. $272\frac{1}{3}$, $275\frac{2}{3}$, 等.
 19. $65\frac{1}{3}$, 64 , $62\frac{2}{3}$, 等. 20. $82\frac{1}{3}$, $80\frac{2}{3}$, 79 , 等.
 21. $4a-5b$, $3a-4b$, $2a-3b$, 等.
 22. $\frac{1}{3}x-4\frac{2}{3}b$, $-\frac{1}{3}a-3\frac{2}{3}b$, $-a-3b$, 等.
 24. 5. 25. 6. 26. 101. 27. -25.

- LXIV. 1. 420. 2. 180. 3. $94\frac{1}{2}$.
 4. 660. 5. 0. 6. $-2104\frac{1}{2}$. 7. 63.
 8. 0. 9. $\frac{1}{15}(45n-5n^2)$. 10. $\frac{1}{21}(7n^2+177n)$.
 11. 0. 12. 0. 13. 357.
 14. $7\sqrt{2}+14$. 15. $\frac{1}{2}(n-1)$. 16. $\frac{1}{2}(n^2+3n^2)$.
 17. $n^2a+b^2-n^2n-1^2ab$. 18. 375.
 19. 1878. 20. 880. 21. 2400.
 22. $6\frac{1}{2}$, 8, 等和 $797\frac{1}{2}$. 23. $12\frac{2}{3}$, $14\frac{1}{3}$, 等和 2200.
 24. 55. 1485 25. 511. 36281. 26. 38.
 27. 680. 28. 2415. 29. 3.
 30. $-\frac{5}{12}$. 31. 1. 32. $\frac{1}{2}$.
 33. 48. 34. 5. 35. 9.

36. 5 又 6. 37. $3a$, 若各項爲正整數則爲 $-2a$.
38. 21. 39. 9. 40. 3.
41. 4060. 42. 90. 43. 525.
44. $200n+100$. 47. 7500. 48. 246950.
49. 39000. 50. 17. 51. 1, 4, 7, 等.
53. 20, 21, 22, 等. 54. 43. 55. 10.
56. 8, 16, 24, 32. 57. $\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$.

- LXV. 1. (1) $\frac{1}{27}$, (2) $-\frac{243}{16}$, (3) $\frac{b^5}{a^3}$.
2. $\frac{12}{5}$. 3. $-\frac{1}{128}$. 4. 2.
5. ± 1092 . 6. 5.0625. 7. $-\frac{1}{32}$.
8. $\frac{1}{128}$. 9. (1) ± 6 , (2) ± 42 , (3) $\pm a^2b^2$.
10. -2, 4, 6, 3, $\frac{1}{2}$, $1, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{27}{8}$.
11. .6, .12, .024, .0048, .00096.
12. $a^2b^{-1}, ab^{-2}, 1, a^{-1}b^2$. 13. $\frac{1}{2}$. 14. 54 又 108.

- LXVI 1. $16\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}$. 2. $48\left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6\right\}$.
3. $\frac{a(r^n-1)}{r^{n-1}(r-1)}$. 4. $\frac{27}{2}\left\{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^6\right\}$.
5. $\frac{4}{9}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^6 - 1\right\}$. 6. $\frac{48}{7}$. 7. $\frac{40}{7}$.

8. 5. 9. $\frac{a^n - b^n}{a^{n-1}(a-b)}$. 10. $\frac{1}{2}$.
11. 8190. 12. 3.4142. 13. $6x^2 - 5x - 6$.
15. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ 等, 又 $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots$ 等. 16. 12, -4, $\frac{1}{2}$, 等.
17. 2. 20. 8, 16, 32, ... 21. $\frac{a}{b}$.
22. a. 24. $\frac{1}{\sqrt{6}}(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2})$. 25. $\frac{1}{17}$ 又 $-\frac{1}{17}$.
26. 2, 4, 8. 27. 2, 8, 32, ... 28. $\frac{1}{2}, \pm 1, 2, \dots$

- LXVII. 1. 0. 2. $\frac{1}{2}(9^7 - 1)$. 3. $\frac{1}{2}$.
4. $\frac{b^2 - a^2}{a^{2-1}(b-a)}$. 5. $\frac{1}{2}$. 6. $104\frac{1}{2}$.
7. $76a + 57b$. 8. $\frac{1}{2} \{ 1 - (\frac{1}{2})^2 \}$. 9. $5\frac{1}{2}$.
10. $\frac{1}{2} \{ (\frac{1}{2})^2 - 1 \}$. 11. $(1, 71\frac{1}{2})$. (2) -6.
- (3) $\frac{1}{4} \{ 1 - (\frac{1}{2})^2 \}$, $\frac{1}{4}$. (4) $\frac{1}{2} \{ (\frac{1}{2})^2 - 1 \}$.
- (5) $\frac{1}{2} \{ 1 - (\frac{1}{2})^2 \}$, $\frac{1}{2}$.
13. 1, 3, 5, ... 14. $5 \pm \sqrt{24}$. 17. 2, 6, 18.
18. 1, 3, 5, 7, 9. 19. 6, 9, 12, 16, 又 6, 1, -4, 16

- LXVIII. 2. $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}$. 3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$.
20. $6\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 4$

- LXIX. 1. $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$.

2. $\frac{1}{4}\{(2n+1)(2n+3)(2n+5)-15\}$.
3. $\frac{1}{3}\{(3n-2)(3n+1)(3n+4)+8\}$.
4. $\frac{1}{4}\{(3n-1)(3n+2)(3n+5)+10\}$.
5. $\frac{1}{4}\{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)+15\}$.
6. $\frac{1}{17}\{(5n-3)(5n+2)(5n+7)(5n+12)+3.2.7.12\}$.
7. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}, \frac{1}{2}$ 8. $\frac{1}{6}-\frac{1}{2(3n+2)}, \frac{1}{6}$.
9. $\frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}, \frac{1}{12}$.
10. $\frac{1}{60}-\frac{1}{6(3n+2)(3n+5)}, \frac{1}{60}$.
11. $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+n+1}, \frac{1}{n+1}$.
12. $\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+n+1}\right\}, \frac{1}{xx+1}$.
13. $2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)$ 2. 14. $\frac{1}{2}n(4n^2-1)$.
15. $n^2(2n^2-1)$.
16. $\frac{1}{3b}\{(a+n-1b)(a+nb)(a+n+1b)-(a-b)aa+b\}$.

雜題 VI. A. 1. 48. 2. $3x-7, x=\frac{1}{3}$.

4. (1) $x=-4, y=\frac{1}{4}$, (2) $x=c$, 又 $x=a+b+c$.

5. 牛 20 圓, 羊 2.50 圓. 7. $ab^{-1}+32a^{-2}b^{\frac{1}{2}}$.

8. $-\frac{1}{12}(78+40\sqrt{3}, \sqrt{8}+\sqrt{17})$. 9. $\frac{2^6}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^6}\right\}$.

10. $109\frac{1}{11}, 119\frac{1}{11}, \dots, 290\frac{1}{11}$, 和 4000.
- B. 1. $x - 8y + 4z$.
2. $(mx + my)(mx + ny), (x - y)(x^2 + y^2)$
4. (1) $x = \pm\sqrt{ab}$, (2) $x = 7$ 又 -2 . 6. $a^2 + b^2 - c$
8. (1) -1040 , (2) $4\frac{1}{2}$. 9. 71071. 10. 88 碼.
- C. 1. 2. $2x^2 - 2xy + 2y^2$.
4. $3(x - 3a)^2 x^2 - 4a^2$. 5. $\frac{6a^2}{(a^2 - 4)(a^2 - 1)}$.
6. 每時 25 哩, 100 哩. 7. 1
9. (1) 0, (2) $8\frac{1}{2}$. 10. 9 與 25.
- D. 1. $x^4 - a^4$. 3. $\frac{(x - 4)(x - 7)}{x^2}$.
4. (1) $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$,
(2) $x = \pm 5, y = \pm 3, x = \pm \frac{13}{2}, y = \pm \frac{1}{2}$.
5. 48. 6. $x^2 - 40x + 8 = 0$.
7. $x^3 - x^{-1} + 4x^{-2}$. 9. (1) $-7\frac{22}{1111}$, (2) $5\frac{1}{2}$.
- E. 1. $-x^2 - xy - y^2$. 2. $3a^2 + 4ab + b^2$.
3. $a - b, (a - b)(4a - b)(3a^2 + b^2)$.
4. $(x + 1)^2$. 5. $-mn$. 6. $x = -\frac{1}{2}$.
8. $2x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 4y$. 9. (1) $\frac{1}{2}n(n - 7)$, (2) $\frac{1}{2}$.
10. $18\frac{1}{2}$ 與 $36\frac{1}{2}$.

3. $81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96ay^3 + 16y^4$.
4. $16a^4 + 96a^5 + 216a^6 + 216a^7 + 81a^8$.
5. $64x^{12} - 192x^{10} + 240x^8 - 160x^6 + 60x^4 - 12x^2 + 1$.
6. $y^7 - 7xy^6 + 21x^2y^5 - 35x^3y^4 + 35x^4y^3$
 $- 21x^5y^2 + 7x^6y - x^7$.
7. $405a^3b^2$. 8. $126720x^{16}$. 9. $-14a^3$.
10. $210x^6$. 11. $1140x^{17}$. 12. $231x^{22}$.
13. $2a^4 + 12a^3b + 2b^2$. 14. $2a^6 + 30a^4b + 30a^2b^2 + 2b^3$.
15. $2a^5 + 56a^3b + 140a^2b^2 + 56a^2b^3 + 2b^4$. 16. $70x^4$.
17. $252x^3$. 18. $90720x^4y^4$.
20. $x^{18} + 8x^{12} + 28x^6 + 56x^4 + 40 + 56x^{-1}$
 $+ 28x^{-2} + 8x^{-12} + x^{-18}$
21. 3003. 22. $\frac{120}{16} \frac{1}{4} x^3$ 23. $(-1)^n \frac{(2n)!}{n!n!} a^{2n}$.
24. $\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} x \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \frac{1}{x}$. 25. 第五項
26. 第五項與第六項. 27. 第九項.
28. 第十一項. 29. 第六項.
30. 第十四項與第十五項.
31. $(-1)^{n-r} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^r b^{n-r}$.
34. 96059601, 997002999.

LXXIII. 1. $1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+\dots$

2. $1-8x+40x^2-160x^3+560x^4-\dots$

3. $\frac{1}{3}\{1+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{3}x^5+\dots\}$.

4. $1+2x+5x^2+\frac{10}{3}x^3+\frac{110}{3}x^4+\dots$

5. $1-3x-3x^2-7x^3-21x^4-\dots$

6. $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{4!}x^r$.

7. $\frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!}x^r$.

8. $\frac{3.5.7\dots(2r+1)}{2^r r!}x^r$.

9. $(-1)^r \frac{3.1.3\dots(2r-5)}{2^r r!}x^r$.

10. $(-1)^r \frac{2.5.8\dots(3r-1)}{3^r r!}x^r$.

11. $\frac{5.7.9\dots(2r+3)}{r!}x^r$.

12. $(-1)^r \frac{4.7.10\dots(3r+1)}{r!}x^r$.

13. $\frac{5}{16x^4}$

14. $1-2x-x^2-\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{3}x^4-\dots$

$-2 \frac{1.4.7\dots(3r-5)}{r!}x^r$.

15. $-4. -11.$

16. $-\frac{31}{16}, \frac{107}{128}$

17. $-\frac{1701}{256}$

18. $-\frac{1729}{768}$

19. 10.4880..., 5.0657..., 5.0099...

20. 10, 3.

LXXIV. 1. 0. 2. 4. 3. -2. 4. -3.

5. -1.

6. $\frac{1}{2}$.

7. 5.

8. $\frac{1}{2}$.

9. 2.

10. $\frac{1}{2}$.

11. $\frac{1}{2}$.

12. $\frac{1}{2}$.

13. -.1760913, 1.7781513, 3.6532126, .2795880.

14. .5740313, .1072100, 1.4210689.

15. 2.5105452, .1637578, -2.3645161.

16. .0969100, .1072100, .7886320.

17. .9030900, .9542426.

18. 1.8573826, .5270968.

LXXV. 1. 200000, .00002. 2. 1991.1, .00019911.

3. $\overline{2.6707522}$.

4. $\overline{3.7705677}$.

5. 1961109.

6. 1.93070.

7. 1.71877.

8. 324838.

9. 131.50 圓.

11. 742.975 圓.

12. 641.862 圓.

LXXVI. 1. $(x+1)(x-1)^2$.

2. $(x^2+1)(x+1)^2(x-1)^2$.

3. $(1-x)^2(1+x)(1+x^2)$.
 4. $(1-x)^2(1+x)^2(1+x^3)(1+x^4)$.
 5. $(x-y-a-b)(x+y-a+b)$.
 6. $(x+y-1)(x-y-2)$.
 7. $(x+2y-4)(x-4y+2)$.
 8. $(a+b-c+f)(a-b-c-f)$.
 9. (1) $x^4+x^2y+x^2y^3+xy^3+y^4$.
 (2) $x^6-x^6y+x^4y^2-x^2y^3+x^2y^4-xy^5+y^6$.
 (3) $x^7-x^6y+x^5y^2-x^4y^3+x^3y^4-x^2y^5+xy^6-y^7$.
 12. $(2a+3b)^2-(2a+3b)(3a+b)(3a+2b)^2$
 13. $3(2a+4b-4c)^2-3(2a+4b-4c)(a-b+7c)$
 $+3(a-b+7c)^2$.

- LXXVII. 9. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.
 10. $4abc$. 11. $2abc$. 12. $2abc(a+b+c)$.
 13. $3.5(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$. 15. $a+b+c$.
 16. 1. 17. $\frac{1}{abc}$. 18. $\frac{bc+ca+ab}{a^2b^2c^2}$.
 19. 0. 20. $\frac{a+b+c}{abc}$. 21. $(b+c)(c+a)(a+b)$.
 45. (1) $x-8y$. (2) $1+x+x^2$. (3) x^2-3x+2 .

$$(4) 2x^2 - 3x + 4.$$

LXXVIII

1. 13552, 53221, 4043001.

2. 761, 1477, 7212, 22875. 3. 140e, 9222.

4. 43.202, 443.21. 5. 34 7. $a=b=1$.6. $a=9, b=6$. 9. 7. 10. 13.

11. 25. 12. 15.

附 錄

I. 希臘文字之發音

A α	Alpha. 「阿華」	N ν	Nu. 「柳」
B β	Beta. 「比達」	Ξ ξ	Xi. 「爾格習」
Γ γ	Gamma. 「敢麻」	Ο ο	Omicron. 「阿米可倫」
Δ δ	Delta. 「典達」	Π π	Pi. 「拍」
E ε	Epsilon. 「耶西倫」	Ρ ρ	Rho. 「羅」
Z ζ	Zeta. 「者達」	Σ σ	Sigma. 「西格馬」
H η	Eta. 「耶達」	Τ τ	Tau. 「精」
Θ θ	Theta. 「底達」	Υ υ	Upsilon. 「亞西倫」
I ι	Iota. 「愛阿達」	Φ φ	Phi. 「腓」
K κ	Kappa. 「卡扒」	Χ χ	Chi. 「啓」
Λ λ	Lambda. 「郎塔」	Ψ ψ	Psi. 「撲洗」
M μ	Mu, 「緋」	Ω ω	Omega. 「阿茂嘉」

II. 英華學語對照表

A		Brackets	括 弧
Absolute Value	絕 對 值	C	
Addition	加 法	Co-factor	係 數
Algebra	代 數 學	Common	
Algebraical		factor	公 因 數
expression	代 數 式	Common	
Algebraical		logarithm	常用對數
difference	代 數 差	Common ratio	公 比
Annuity	年 金	Common scales	
Antecedent	前 率	of notation	常用紀數法
Arithmetical		Common	
mean	等 差 中 項	multiple	公 倍 數
Arithmetical		Compound	
difference	算 術 差	expression	複 式
Arithmetical		Compound	
progression	等 差 級 數	ratio	複 比
Axiom	公 理	Compound	
B		interest	複 利 率
Base	底	Consequent	後 率
Binomial		Continued	
expression	二 項 式	proportion	連 比 例
Binomial		Continued	
theorem	二項式定理	product	連 乘 積

Cube 立方
 Cube root 立方根
 Cubic surd 三次之根數
 Cyclical order 輪換次序

D

Definition 定義
 Degree 次
 Denominator 分母
 Dimension 乘元
 Dividend 被除數
 Division 除法
 Divisor 除數
 Duplicate ratio 二乘比

E

Elimination 消法
 Equation 方程式
 Equation of the first degree 一次方程式
 Equation of the second degree 二次方程式
 Evolution 開方法
 Expansion 展開式
 Exponent 指數

Exponential theorem 指數式定理
 Extremes 外項

F

Factor 因數
 Formula 式
 Fraction 分數

G

General expression 公式
 General term 公項
 Geometric mean 等比中項
 Geometrical Progression 等比級數
 Greatest Common Measure 最大公約數

H

Harmonical Progression 調和級數
 Harmonic mean 調和中項
 Highest Common Factor 最高公因數

Homogeneous expression 等次式	Lowest term 最簡項
I	Lowest
Identical equation 恆等方程式	Common
Identity 恆等式	Denominator 最低公分母
Imaginary quantity 虛數	Lowest
Incommensurable numbers 不可通約之數	Common
Index 指數	Multiple 最低公倍數
Index law 指數之定則	M
Induction 歸納法	Magnitude 大
Integral expression 整式	Mantissa 假數
Involution 累乘法	Mean 中項
Irrational quantity 無理之量	Mean
Irrational equation 無理方程式	proportional 比例中項
L	Member of the equation 方程式之節或邊
Law of signs 符號之定則	Modulus 對數率
Like terms 同類項	Monomial expression 單項式
Logarithm 對數	Monomial factor 單項因數
Logarithmic series 對數級數	Multinomial theorem 多項式定理
	Multinomial expression 多項式
	Multiplication 乘法

N		R	
Negative	負	Radical sign	根 號
Negative		Radix	
quantity	負 量	fraction	紀 底 小 數
Napierian		Ratio	比
logarithm	納伯爾對數	Ratio of	
Numerator	分 子	greater	
Numerical		inequality	伸 比
Coefficient	數 字 係 數	Ratio of less	
P		inequality	縮 比
Permutation	列 法	Rational	
Positive		expression	有 理 式
quantity	正 量	Reciprocal	反 數
Power	乘 方 (乘 冪)	Reduction of	
Problem	問 題	fraction	分 數 化 法
Product	積	Root or Radix	根
Proportion	比 例	S	
Proportional		Scales of	
difference	比 例 差	notation	紀 數 法
Q		Series	級 數
Quadratic		Sign	符 號
expression	二 次 式	Similar surds	相 似 之 根 數
Quadratic		Simple	
equation	二 次 方 程 式	equation	一 次 方 程 式
Quadratic		Simple	
surd	二 次 之 根 數	expression	單 式

Simultaneous equations	聯立方程式	Theorem	定理
Square	平方	Third proportional	比例第三項
Square root	平方根	To solve	解
Sub duplicate ratio	平方根比	Trinomial expression	三項式
Subtraction	減法	Triplicate ratio	三乘比
Sum	和	V	
Surd	根數	Variation	變數法
Symbol	記號	Vary as	因變
Symmetrical expression	對稱式	Vary as inversely as	因反變
T		Vinculum	括線
Term	項		

THE END 畢

