數學研究小叢書

會計數學入門

余介石 著
余子颺

謝　霖 校

中華書局印行

(1304

數學研究小叢書

會計數學入門

撰述者： 余介石
（金陵女子文理學院教育部數學講座）

余子颺
（國立禮樂館會計主任）

主編者： 中等算學研究會

校閱者： 謝霖
（光華大學校長）

中華書局印行

民國三十五年二月發行
民國三十五年二月初版

◎數學研究小叢書 會計數學入門（全一册）

定價國幣一元四角

（郵運匯費另加）

著者　余介石　余子颺
校者　謝霖
發行人　中華書局有限公司代表　姚戟楣
印刷者　中華書局永寧印刷廠　上海澳門路四六九號
發行處　各埠中華書局

（一三〇四三）（滬印）

$2.40

謝霖甫先生序

會計之道首重算學，盡人皆知。算學之書籍，繁者多而簡者少，讀者有時苦之。余介石先生，為適於實用，或備應試起見，編成會計數學入門一種，印刷流通，以為南針，爰述數語，為介紹焉。

謝霖

民國三十二年三月

發刊旨趣

本叢書取材，或切實用，或備應試，要皆不踰中等數學範圍，求便於中學生之課外閱讀，及一般人士之公餘瀏覽也。方今萬事艱辛，編印困難，購讀亦復非易，故篇幅務簡，內容務精，以期書價抑低，披閱稱便，或亦物資與精力節約之一道。各書編述，非出一手，體裁出入，自所不免。然本會有一貫計劃以聯繫之，并請專家分別校訂，以求充實正確。旨趣如此，能力所限，雖不能至，心嚮往之，則無時或已。方家大雅，幸有以教之。

此册從淺顯處，論投資所需之會計數學，已習初中代數及半者，卽能閱讀。是科專著，如劉覺民之實用投資數學(中華)如褚鳳儀之投資數學及李鴻壽之會計數學(商務)，或切實用，或務宏博，要皆善本。然卷帙繁重，初學力所不逮。本册則精選主要問題，作具體透澈之研討。由是入門，得見宮室之美，編述者始願爲不虛矣。

民國三十二年雙十節　編者識

會計數學入門

目　次

(一)緒論　頁數

1.範圍……………………………… 1
2.指數與對數……………………… 2
3.等比級數………………………… 4
4.內插法，數值表………………… 5
5.利息之類別……………………… 8

(二)單貼現

6.基本公式………………………… 9
7.基本問題…………………………12
8.等值問題…………………………15

(三)複利

9.基本公式…………………………19
10.名率,實率………………………22
11.繼續複利，利力……………… 24
12.複利現值及基本問題………… 26
13.複貼現………………………… 30
14.等值問題……………………… 32

(四)年金

15.基本事項……………………… 35
16.年金終値與現値……………… 37
17.問題例解……………………… 39
18.複雜年金之一………………… 42
19.複雜年金之二………………… 46
20.遞增（減）年金……………… 48
21.年金別體……………………… 53

(五)應用

22.投資…………………………… 56
23.債務清償……………………… 56
24.債劵發行……………………… 59
25.債劵價格……………………… 61
26.債劵收益……………………… 63
27.折舊…………………………… 67
28.資本折化成本，
投資年費………………………… 70
29.鑛產估價……………………… 72
30.合組使用期…………………… 73

附　錄

等值日期問題之討論 ……… 75
重要參考書目 ……………… 76

附表

一、複利終值表(整期)：$(1+i)^n$ ……………………77
二、複利現值表：$(1+i)^{-n}$ ……………………77
三、複利終值表（零期）：$(1+i)^{\frac{1}{p}}$ ……………………78
四、實率化名率表：$j_p=p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]$ ……………………78
五、名率 i 對利力 δ 比值表 ……………………78
六、複利率 i 與貼現率 d 互化表……………………78
七、年金終值表：$s_{\overline{n}|}i=\frac{(1+i)^n-1}{i}$ ……………………79
八、年金現值表：$a_{\overline{n}|}i=\frac{1-(1-i)^{-n}}{i}$ ……………………80
九、年金週期付款表：$1/a_{\overline{n}|}i$ ……………………81
十、複雜年金首期終值表：$s^{\frac{p}{1}}_{\overline{\ }|i}$ ……………………81
十一、遞增(減)年金終值表：$\sum s_{\overline{n}|}$ ……………………82
十二、遞增(減)年金現值表：$\sum a_{\overline{n}|}$ ……………………82
十三、利息計算之常用對數表……………………82

會計數學入門

一　緒論

1.範圍

「會計」一詞，始見於孟子，萬章篇有『會計當而已矣』一語。焦循正義釋之曰『零星算之爲計，總合算之爲會』。今世取以譯英語Accounting，蓋指貨財之管理與稽核也。故就廣義言之，舉凡企業所涉之計算，皆會計數學之範圍，故亦曰投資數學（Mathematics of Investment）。其所引用之數學，大抵爲下列諸端：

（一）複名數（Denominate Numbers）　如貨品之計量，貨幣之換算。

（二）百分法　如損益，折扣，租稅，運輸等方面問題，無一非百分法之應用。

（三）利息　原係百分法之一目，但在會計數學內，佔主要之地位。且複利涉及指數，非復百分法所能限。

（四）級數　會計數學所用之級數，雖僅有等比級數（Geometric Series）一種，然一切基本問題，莫不恃此。年金（Annuity）一事，實其中心觀念，是卽由複利爲項所構成之等比級數也。

（五）機率（Probability）　機率乃一種特殊之比率，卽論一事成敗之可能性者也。社會科學，生物科學所用之主要數

理爲統計學（Statistics），機率即此科之生命也。會計數學中需用機率之處在保險（[illegible]surance）方面。

（六）統計　商業統計所注重之特題爲商業循環（Business Cycle），操奇計贏者之指針也。

又會計數學，重數字之計算，故以對數（Logarithm）爲重要工具。然僅有此倘病未盡便利之能事，故對主要諸式如複利終值（Final Value），現值（Present Value），年金終值，現值等，莫不特製成數值表以供運用。

循此以論，不特過駁雜，抑亦太廣泛，故普通皆分爲四部。

（Ⅰ）商業算術　包括（一）（二）及單利之實際計算各法。

（Ⅱ）會計數學　以複利及年金爲主，旁及其各方面之應用，如分期清償，資產估價，折舊，債劵等問題。

（Ⅲ）保險數學　即加機率因素於年金所生之問題，可以入壽保險爲代表。其主要事項爲生命年金（Life Annuity）。此雖爲一專科，但一般會計數學，亦多附論及之。

（Ⅳ）商業統計　討論統計主要法則，而側重商業上之應用。

本書內容從狹義，其範圍如（Ⅱ），但爲求便初學計，只及主要而單純之事項，其中所引用之數學，亦略加申述。

2.指數與對數

指數式表示一數自乘若干次，如

$5\times 5=5^2$.　　$a\cdot a\cdot a=a^3$,　　$c\cdot c\cdots$(n個因子)$=c^n$

式中右角上數字表示自乘之次數者曰指數。據此義言，則指數以正整數爲限。但數理上，指數意義，有擴充之必要，其規定如下（參看後文§9與§12）：

負指數 $5^{-2}=\frac{1}{5^2}$， $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$

分指數 $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$， $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$

$$C^{\frac{2}{3}}=C^{0.666\ldots\ldots}=\sqrt[3]{C^2}$$

數學家已證明--數得以 1 外他正數之指數式表示。爲實際應用故，當取此正數爲10，如

$$2=10^{0.301\cdots\cdots\cdots}，\ 20=10^{1.301\cdots\cdots\cdots}，\ 0.2=10^{-10+.301\cdots\cdots}$$

苟以指數代原數入算，則按指數律，可以加代乘，以減代除，以乘代羃，以除代根，而化繁爲簡。故爲布式明晰計，宜重視指數，書於便利之地位。數學家於是創對數之記法，書上三式爲：

$$\log_{10}2=0.301\cdots\cdots\cdots,\quad \log_{10}20=1.301\cdots\cdots\cdots,$$
$$\log_{10}0.2=0.301\cdots\cdots\cdots-1$$

讀曰『2之常用對數爲0.301』等。10—數稱爲對數之底，實際供計算用者僅限此種，故不妨略去底，而簡記之爲：

$$\log 2=0.301\cdots\cdots\cdots,\log 20=1.301\cdots\cdots\cdots,\log 0.2=-1+0.301\cdots\cdots$$

積，商，羃，根之指數定律，吾人當已熟知之，記以對數式，即得對數運算定律，茲對照並列於次：

指數律	對數律
$10^m = X,\ 10^n = Y$	$m = \log X, \quad n = \log Y$
$X\cdot Y = 10^m\cdot 10^n = 10^{m+n}$	$\log(X\cdot Y) = m + n = \log X + \log Y$
$\frac{X}{Y} = \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$	$\log\frac{X}{Y} = m - n = \log X - \log Y$
$X^k = (10^m)^k = 10^{km}$	$\log(X^k) = km = k\log X$
$\sqrt[k]{X} = \sqrt[k]{10^m} = 10^{\frac{m}{k}}$.	$\log\sqrt[k]{X} = \frac{1}{k}m = \frac{1}{k}\log X$

茲舉下例，聊見一斑：

0.00314×124	$\log 0.00314 = 0.4914 - 3$
$= 10^{0.4914-3} \times 10^{2.0934}$	$\log 124 \quad = 2.0934 \quad (+$
$= 10^{0.4914-3+2.0934}$	$2.5848 - 3$
$= 10^{0.5848-1}$	$\log 0.3844 = 0.5848 - 1$
$= 0.3844$	$\therefore \quad 0.00314 \times 124 = 0.3844$

讀者當可恍然於對數式之何以較爲明晰矣。

會計學至少需用五位對數，乃至於六位七位者。此等表大抵在20面以外，本書限於篇幅，未能附載。然其檢表法，初與四位表，大體相若，故亦不復及之。

3.等比級數

若干數量，或有限，或無窮，依一定規則排列之，如：

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots\cdots, \quad a_n, \cdots\cdots$$

則稱曰級數。如此中任一項與其相隣前項之比爲定值，即

$$a_2/a_1 = a_3/a_2 = \cdots\cdots = a_{n+1}/a_n = \cdots\cdots = r$$

斯成等比級數，常記以簡語G.P.在此 r 曰公比(Common Ratio) a_1曰首項，當項數有限，例如止於a_n 時，則稱之爲末項，而 n 爲項數。盡取諸項求和得總和，記以S.

一G.P.中之a, r, n, a_n, S 五要件間有二主要關係：

按G.P.之基本性質，$a_2=a_1 r$, $a_3=a_2 r=a_1 r^2$, ……

推之 $a_n=a_1 r^{n-1}$，此其一。

因是 $S=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$

$=a_1+a_1 r+\cdots\cdots+a_1 r^{n-2}+a_1 r^{n-1}$

故 $rS= \quad a_1 r+\cdots\cdots+a_1 r^{n-1}+a_1 r^n$

相減，$S-rS=a_1-a_1 r^n$，即$S(1-r)=a_1(1-r^n)$

$$S=a_1\frac{1-r^n}{1-r}\text{，此其二。}$$

4. 內插法(*Interpolation*)，數值表(*Table*)

計算問題，在由已知量推求未知量，則必未知量對諸已知量間，有一定關係，故其值始可視已知量之值決定。數學中即稱此未知量爲諸已知量之函數(Function)，而稱已知量曰元(Argument)。例如已知一G.P.中之a, r, n 即可據上述關係式二以求S，故S爲a, r, 及n三元之函數，數學上以$S=f(a, r, n)$記之。符號$f(a,r,n)$讀爲「含a, r, n之函數f」。又如息金I，乃本金P，利率i，時期n之函數，即$I=f(P,i,n)$。爲便於計算起見，吾人每取常須用及之函數，製爲數值表，如複利表(本書附表一)，即其一例。然紙面僅有縱橫二向，故僅能列一元或二元函數對於其元之相關數值，是爲一項(Single entry）表或二項（Double entry）表。於元數多於二時，勢須先固定其一元之值，例如息金 I 常與本金 P 成正比，而對 i 與 n 之關係則較複雜，故複利表乃本金 1 元照複利率 i 經 n 期之息金。標 i 於上項橫行，n 於左列直行，由已知之 i 及 n 值，檢其交义處，卽爲所求息金。例如複利率 $1\frac{1}{2}\%$，十四年終之 1 元息金，可在附表一中頂上標明 $1\frac{1}{2}\%$ 之第二直行內，與左列標 14 橫行之交义處，檢得此值爲 1.2318. 其他各表查法同此。

於此有一困難，卽所標各元之值，不能將一切可能情形，盡行列入。例如複利表中 i 項未列 $1\frac{1}{6}\%$，n項未列月數（爲年數之分數），遇有需要時，勢須由其隣近值間推出之，是曰內插法。其最簡之法乃依比例計算，舉例釋之如次。

［例一］ 就複利表求 n 值使 $(1+7\%)^n=(1.07)^n=2$.

［解］ 就附表一項標 7% 之直行中，覓二相隣值使 2 介於其間者，

$$\left.\begin{array}{ll} n=10, & (1.07)^{10}=1.9672 \\ n=11, & (1.07)^{11}=2.1049 \end{array}\right\} \quad 1.9672<2<2.1049$$

按比例推算之法，乃假定元值之差與函數值之差成比例。

n	$(1.07)^n$
10	1.9672
?	2.
11	2.1049

$$11-10:?-10=2.1049-1.9672:2-1.9672,$$

$$?-10=\frac{2-1.9672}{2.1049-1.9672}=\frac{0.0328}{0.1377}=0.23,$$

$$\therefore \quad ?=10.23$$

［例二］ 就複利現值表求 i，使$(1+i)^{-12}=0.6157$。

［解］ 先從附表二左列標 12 之橫行中，覓得適當二相隣值如次：

i	$(1+i)^{-12}$
0.04	0.6246
?	0.6157
0.05	0.5568

$$\frac{0.05-0.04}{?-0.04}=\frac{0.5568-0.6246}{0.6157-0.6246}=\frac{0.0578}{0.0089}$$

$$?-0.04=\frac{-0.0089}{-0.0678}\times(0.05-0.04)$$

$$=0.0013 \quad \therefore \quad ?=0.0413$$

亦可如次演算：

i	$(1+i)^{-12}$
0.04	0.6246
?	0.6157
0.05	0.5568

$$\frac{0.05-0.04}{0.05-?}=\frac{0.5568-0.6246}{0.5568-0.6157}$$

$$0.05-?=\frac{-0.0589}{-0.0678}\times 0.01=0.0067,$$

$$\therefore \quad ?=0.05-0.00067=0.0413.$$

［例三］ 解方程式 $10(1+i)[(1+i)^{120}-1]-1824i=0.$

［解］ 此 121 次方程式，若以代數法求解，卽窮數日之力亦未易得。

令　$f(i)=(1+i)\frac{(1+i)^{120}-1}{i}-182.4,$

則所求之 i 乃能使 $f(i)$ 爲零之值 此中$\frac{1}{i}[(1+i)^{120}-1]$稱年金終值，有已製成之數值表。但本書所附之表七甚簡，n 值止於25未達 120，故不足應用。可查劉覺民編實用投資數學第七表。

假設 i 之值甚微，則可以 1 代$1+i$，故當在表中覓取與 182.4

相近之值，在上書273頁左列標120之橫行中，得二適當值爲 $\frac{7}{12}\% = 0.00583$ 及 $\frac{3}{4}\% - 0.0075$.

i	$\frac{1}{i}\left[(1+i)^{20}-1\right]$	$(1+i)\frac{1}{i}\left[(1+i)^{20}-1\right]$	f(i)
0.00583	173.0848	174.09	174.09−182.4=−8.31
?		182.4	0
0.00750	193.5143	194.96	194.96−182.4=12.56

$$\frac{0.00750-0.00583}{?-0.00583}=\frac{194.96-174.09}{182.4-174.09} \text{或}=\frac{12.56-(-8.31)}{0-(-8.31)}$$

$$?-0.00583 : 0.00167 = 8.31 : 20.87,$$

$$\therefore \quad ? = 0.00583+\frac{8.31}{20.87}\times 0.00167$$

$$= 0.00583+0.00066=0.65\%.$$

[註] 本題見開明高中代數(民國三十年版) 257 頁第 7 題

5. 利息之類別

利息有單利(Siomple Interest)，期利 (Periodic Interest)與複利(Compound Interest)之分。單利僅對本金 (Principal) 依利率(Rate of Interest)計息；期利則分期計息，未付之息，仍須依同一利率，計其單利；複利亦分期計息，且於分期末，將息併入本金，爲次期之新本金而計算之。單利之公式甚簡，設本公金爲P，利率爲i，時間長（年數，月數或日數）爲t, 息金爲I, 本息和爲A, 則

$$I=Pit, \qquad A=P+I=P(1+it).$$

期利不難準此求之。其實際計算之若干便捷法則，詳商業算術中，本書從略。

利率乃單位時間內，息金對本金之百分比，此單位時期可爲年，月或日；因有年利率，月利率與日利率之別。依各國習慣，普通所言者，皆指年利率。利率常以分釐等詞表之，分卽十之一之意，例如利率一分二釐，卽每年息金爲本金之12%；但在月利率及日利率，除特殊情況下，絕少達十分之一者，故習慣上，「分」指百分之一，如謂月利率一分二釐乃1.2%，日利率一釐乃0.1%；若高利貸竟達月利率10%者，俗稱之爲大一分。

利率計算之單位時間，普通均以年論，但投資時期決不以此爲限。故日利雖非吾人所習見，銀行計算時，往往須化年利率爲日利率，是故與一年究作若干日計之問題有關。以一年爲360日者曰便息(Ordinary Interest)，美，法，德諸國採之，故亦曰美國銀行利息；以一平年爲365日，一閏年爲366日者，曰實息(Exact Interest)，我國及英，日諸國採之。設 i 爲年利率，則 $\frac{i}{360}$ 爲便息之日利率，$\frac{i}{365}$（平年）及 $\frac{i}{366}$（閏年）爲實息之日利率。由是易明同一年利率化爲日利率時，便息高於實息。

二 單貼現

6. 基本公式

預先支取未到期之款項，必須認付此時期之息金。故實得者，乃自該款額減去息金之差，是爲貼現，依單利計算者曰單貼現(Simple-Discount)。款項原額A,曰面值(Face Value)亦稱到期值(Maturity Value)；息金I，曰貼現息(Discount)；計算息金之利率d,曰貼現率(Rate of Discount)；自預取至到期之日數t,曰貼現期(Period of Discount)，面值減去貼現息之差P,即預取之淨收額(Proceeds)，亦可稱爲A之現值(Present Value)。此諸量間之關係，依單利計之，則得次二式：

$$I=Adt;\quad P=A-I=A-Adt=A(1-dt)$$

〔註〕 有時未到期款項，附帶利息，則到期值爲面值與息金之和，而大於面值。又實際上，貼款人除扣貼現息外，尙須加收手續費等項，則以現值減去此項費用後之餘款爲淨收額。本書除特別說明之處外皆論不帶息之情形，亦不計入手續費，俾問題較簡。

單貼現與單利，似係一事，實則不然。緣單利須於到期取息，而貼現則爲預付利息，取此款時已先行扣除．故二者之差異，即在息金支付之早遲。蓋貼現時先扣之息金，在貼現期內尙可按利率生息，較期終取息所得多也。玆以例明之如下。

〔例〕 有二月後到期之期票，面值5000元，月利率五釐，即0.5%．

（一）求貼現時所扣之貼現息與淨收之現值。

（二）如以所得現值經營，所獲利益，恰合月利率0.5%之數，則二個月後之本利和，是否仍爲5000元？

（三）貼款人所得之息合於月利幾釐？

（四）依同一月利率，存款若干，二月卽可得本利和5000元？

〔解〕（一）$I=Adt=5000\times\frac{5}{1000}\times 2=50$元，

$$P=5000-50=4950\text{元}$$

（二）按單利算法，得

$$4950\times\left(1+\frac{5}{1000}\times 2\right)=4950\times 1.01=4999.5\text{元}$$

（三）貼款人貼出4950元，而二月後得5000元，設所求利率爲i,則

$$4950\times(1+2i)=5000,$$

$$i=\frac{1}{2}\left(\frac{5000}{4950}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{50}{4950}=0.505\%$$

（四）設x爲所求存款元數，則

$$x\left(1+\frac{5}{1000}\times 2\right)=5000,\quad \therefore X=\frac{5000}{1.01}=4950.5\text{元}$$

如以此數爲本題中5000元之現値，則稱爲依單利計算之現値，結果視依貼現計算之値爲高。然此法中須以小數爲除數，不似貼現方法之便利。且貼款者亦無不希冀得較優之利益，故皆捨此就彼。

單貼現通常只適用於短期期票，因貼款人實際利益，大於同一利率之單利，長期則貼現人虧損過大，甚且可有不合理之結果。例如年利率一分之單利，十年末之息金與本金等；苟以此種期票依貼現法計之，則貼款人毋需貼款。若十年以上之期

票，持票人反須倒貼，有是理乎？

7. 基本問題

旣明單利與單貼現之基本公式，則若干相涉問題，皆不難以已知量代入公式中，而解所得方程式，不必逐題各立公式。因問題變化萬千，非可盡立，且式繁者計算亦殊不便，未必勝於解方程式也。

〔例一〕 二月後到期之期票，依貼現法以月利率0.5%計算，得現值4950元，求其面值。

〔解〕 在公式 $P=A(1-dt)$中，

$$P=4950,\quad d=0.5\%=\frac{5}{1000},\quad t=2.$$

故 $$4950=A\left(1-\frac{5}{1000}\times 2\right)=A\times 0.99$$

$$\therefore A=\frac{4950}{0.99}=5000\text{元}$$

〔例二〕 同上題，但依單利法，得現值4950.5元，求面值。

〔解〕 在公式 $A=P(1+it)$中，

$$P=4950.5,\quad i=\frac{5}{1000},\quad t=2.$$

$$\therefore A=4950.5\times\left(1+\frac{5}{1000}\times 2\right)=4950.5\times 1.01$$

$$=5000\text{元}$$

〔例三〕 面值5000元之期票，依貼現法以月利率0.5%計算，得現值4950元，求貼現期。

〔解〕 在公式 $P=A(1-dt)$中，

$$A=5000,\quad P=4950,\quad d=\frac{5}{1000},$$

故 $$4950=5000\left(1-\frac{5}{1000}t\right)=5000-25t$$

是以 $25t=5000-4950=50,\quad \therefore\ t=\frac{50}{25}=2$月。

〔例四〕 同上題，但知貼現期爲二月，而不知貼現率，應如何求之？

〔解〕 仍用同一公式，以$A=5000, P=4950,\ t=2$代入，

得 $$4950=5000(1-d\times 2)=5000-10000d$$

卽 $$10000d=5000-4950=50,$$

$$\therefore d=\frac{50}{10000}=\frac{0.5}{100}=0.5\%$$

〔例五〕 三個月期之單貼現月率0.6%化爲單利月率若干？同期之單利月率0.6%化爲單貼現月率若干？

〔解〕 設有面值爲A元之三個月期票，依單貼現月率0.6%求現值P，則得

$$P=A\left(1-\frac{6}{1000}\times 3\right)=A\left(1-\frac{18}{1000}\right)$$

命所求之單利月率爲i，本問題乃知面值爲A元之期票，依單利貼現，得 $P=A\left(1-\frac{18}{1000}\right)$ 元，而求貼現率，故照例四解之，得

$$A=P(1+3i)=A\left(1-\frac{18}{1000}\right)(1+3i),$$

卽 $$1+3i=\frac{1}{1-\frac{18}{1000}}=\frac{1000}{982},$$

$$\therefore\quad i=\frac{1}{3}\left(\frac{1000}{982}-1\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{982}=0.00609=0.609\%$$

化單利月率爲單貼現率月率之法，亦可倣此求之，即得

$$1-3d=\frac{1}{1+\frac{18}{1000}}=\frac{1000}{1018},$$

$$\therefore\quad d=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1000}{1018}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{18}{1018}=0.591\%$$

〔注意〕 本題乃求二種不同貼現法中利率之比，即依年利率論，結果亦同。申言之，三個月期之單貼現率（未指明單位時間者，即指年利率）6%化爲單利率6.09%；反之單利率6%化爲單貼現率5.91%。

〔註〕 解法中之A，可爲任何值，不能確定，但立式時須先設此，是爲補助未知數。

〔例六〕 以月貼現率0.8%收入五個月後期票一紙。復按單利方法，依同一利率，向他人貼現，因而獲利15.4元，求此期票之面值元數。

〔解〕 設$x=$所求元數，則收入時所付之現值爲

$x\left(1-\frac{8}{1000}\times 5\right)$元。如讓出時所得之現值元數爲P，則

$x=P\left(1+\frac{8}{1000}\times 5\right)=P\times 1.04$，故 $P=\frac{x}{1\cdot 04}$。

據題意得方程式 $\frac{x}{1\cdot 034}-0.96x=15.4$

$$x=15.4\div\left(\frac{1}{1.04}-0.96\right)=\frac{15.4}{0.96154-0.96}$$

$$=\frac{15.4}{0.00154}=10000\text{元}$$

8. 等值(*Equivalent Values*)問題

二期票在同一日期，按同一利率，依單利方法或單貼現方法貼現，如獲得相等之現值，則稱等值票，此日期曰等值日。表示等值關係之方程式曰等值方程式(Equation of Values)。二組期票，各含若干張者，亦可推論之。

主要之等值問題有三：

(Ⅰ)將一期票換爲不同時到期之新票，求新票之到期值。

(Ⅱ)將一期票，換爲面值不相等之新票，求新票到期之日數。

(Ⅲ)二面值不相等之期票，求其有相等現值之日期。

其結果每因貼現方法之不同而異，樹立方程式之關鍵，在於比較二者之現值。分別舉例釋之如次：

〔例一〕 以面值9000元，三個月後到期之期票，依單貼現率6%(年利率)換得一紙80日後之新票。求後者之到期值。

〔解〕 爲計算簡易起見，取以一年爲360日之便息。先求原票之現值，得

$$P=A(1-dt)=9000\left(1-\frac{6}{100}\times\frac{3\times30}{360}\right)$$

$$=9000\left(1-\frac{5.4}{360}\right)\text{元}$$

設所求新票之到期值元數爲 x，則其現值，亦當與上數相等，而得等值方程式

$$x\left(1-\frac{6}{100}\times\frac{80}{360}\right)=9000\left(1-\frac{5.4}{360}\right).$$

$$x=\frac{9000\left(1-\frac{5.4}{360}\right)}{1-\frac{4.8}{360}}=\frac{9000(360-5.4)}{360-4.8}=8984.80\text{元}$$

〔例二〕 同上題，但已知新票之到期值爲 8984.80 元，求其到期日數。

〔解〕 仍先求原票現值，得 $P=9000\left(1-\frac{5.4}{360}\right)$元

次設到期日數爲t,則有等值方程式

$$8984.8\left(1-\frac{6}{100}\times\frac{t}{360}\right)=9000\left(1-\frac{5.4}{360}\right),$$

$$1-\frac{t}{6000}=\frac{9000}{8984.8}\left(1-\frac{5.4}{360}\right)=\frac{9000\times354.6}{8984.8\times360}=0.9867$$

$$\therefore\quad t=6000(1-0.9867)=6000\times0.0133=80\text{日}$$

〔例三〕 面值7900元之七個月期票，與面值7800元之四個月期票，依年利率 5 %貼現，按單貼現法及單利法分別計之，各求其等值期。

〔解〕 先依單貼現法計之，令 x 爲二票等值時距今月數。是時七個月期票現值爲 $7900\left\{1-\frac{5}{100}\times\frac{1}{12}(7-x)\right\}$，四個月期票之現值爲 $7800\left\{1-\frac{5}{100}\times\frac{1}{12}(4-x)\right\}$，故得等值方程式

$$7900\left\{1-\frac{5}{100}\times\frac{1}{12}(7-x)\right\}=7800\left\{1-\frac{5}{100}\times\frac{1}{12}(4-x)\right\},$$

$$7900\left(1-\frac{5}{100}\times\frac{7}{12}+\frac{5}{100}\cdot\frac{x}{12}\right)$$

$$=7800\left(1-\frac{5}{100}\times\frac{4}{12}+\frac{5}{100}\cdot\frac{x}{12}\right),$$

$$\frac{5}{100}(7900-7800)\frac{x}{12}=$$

$$\frac{5}{100}\left(7900\times\frac{7}{12}-7800\times\frac{4}{12}\right)=(7900-7800)\text{，}$$

$$\therefore\quad x=12\left[\frac{7900\times\frac{7}{12}-7800\times\frac{4}{12}}{7900-7800}-\frac{100}{5}\right]$$

$$=12\left(\frac{55300-31200}{1200}-20\right)=1\text{月}$$

再依單利法計，得等值方程式

$$\frac{7900}{1+\frac{5}{100}\times\frac{1}{12}(7-x)}=\frac{7800}{1+\frac{5}{100}\times\frac{1}{12}(4-x)}$$

$$\therefore\quad x=12\left[\frac{7900\times\frac{4}{12}-7800\times\frac{7}{12}}{7900-7800}+\frac{100}{5}\right]$$

$$=12\left(\frac{31600-54600}{1200}+20\right)=10\text{月}$$

但此二期票十月後均已逾期，故實際上本題無解。

〔註一〕　如卽時按單貼現法求現值，則七個月期票與四個月期票之現值依次爲：

$$P_1=7900\left(1-\frac{5}{100}\times\frac{7}{12}\right)=7495\text{元，}$$

$$P_2=7800\left(1-\frac{5}{100}\times\frac{4}{12}\right)=7495.4\text{元。}$$

若求二月後（卽等值期後一個月）者，卽得：

$$P_1'=7900\left(1-\frac{5}{100}\times\frac{5}{12}\right)=7735.4\text{元，}$$

$$P_2'=7800\left(1-\frac{5}{100}\times\frac{2}{12}\right)=7735\text{元。}$$

可見在等期値前，七個月期票價值較小，在此期後則較大。

因等值方程式爲一次，故等值期至多只有一次。

如卽時按單利法求二者現值，則依次得

$$P_1'' = \frac{7900}{1+\frac{5}{100}\times\frac{7}{12}} = 7676.1\text{元，}$$

$$P_2'' = \frac{7800}{1+\frac{5}{100}\times\frac{4}{12}} = 7672.1\text{元。}$$

故依單利法貼現，七個月票期價值反較大，且等值期在二者到期之後。可見在貼現期間，前者之價值常較大於後者。

是則二期票之價值往往與貼現方法及比較之時有關，未可率爾相比較也。

〔註二〕 如答案爲負，則在若干月前業已等值。

〔注意〕 依二法分別計得之等值期月數之和，恰與二期票貼現期之和相等，卽1+10=7+4，此并非偶然巧合，而可證其必如是。因之如依一種貼現法有解，易另一法計之必無解。蓋有解云者，必等值期小於或等於二貼現期中較短之月數，而將與適所述之事實相刺謬也。此理之證明卽專籍亦鮮論及，爰附於本書之末，以供參考。

〔例四〕 面值2010元之六個月期票，與面值1970元之二個月期票，依月利率0.5%貼現，試依二法計算分求其等值期。

〔解〕 照上題立式，則依單貼現法與單利法分別得

$$x = \frac{2010\times 6 - 1970\times 2}{2010-1970} - \frac{1}{0.005} = \frac{1206-394}{4} - 200 = 3\text{月。}$$

$$x' = \frac{2010\times 2 - 1970\times 6}{2010-1970} + \frac{1}{0.005} = \frac{402-1182}{4} + 200 = 5\text{月。}$$

對二個月期票，均已逾期，故均爲無解。

〔註〕 由上題知等値期問題對二貼現法，至多僅有一得解，由本題可知有時二法均無解。

以上諸問題，均可推廣於二組期票，通常所遇者，爲一期票對於一組期票之等値關係。立式之理，雖與上述之簡單情形無殊，而演算則較繁。且在依單利貼現法時之等値期問題，將涉及高次方程式之解法，尤非初學所能明，卽專籍亦難縷述，故本書從略。

三　複利

9. 基本公式

複利相續二次付息時間之長短，稱複利期 (Conversion Pəriod)，與利率之單位時間，不必相同。例如普通多採年利率，而複利期可爲一年，半年，一季或一月。一年內複利期次數，每以m記之。如(5%，m=2)，指利率(注意不說明單位時間者，卽年利率）5%，每年付息二次，亦卽複利期爲半年。又如 ($7\frac{1}{2}$%，m=4) 指利率七釐半，每年付息四次，亦卽複利期爲一季。

設有本金 P 元，每複利期利率 i ，至 n 期終之本利和 (Amount) A (亦曰終値 Final Value)，可如下求之：

第一期終之本利和$=P+Pi=P(1+i)$卽第二期開始時之新本金，

第二期終之本利和$=P(1+i)+P(1+i)i$

$=P(1+i)(1+i)=P(1+i)^2$

即第三期開始時之新本金。

如是類推，至n期終，得 $A=P(1+i)^n$，

計算時須先化成複利期率i。

〔例〕 本金5000元，照(6%，m=2)生息，求四年後之本利和。

〔解〕 $i=6\%\div2=3\%$，$n=4m=8$

$\therefore\ A=5000(1+3\%)^8=5000\times1.2668=6334$元。

〔註〕 如照(6%，m=1)生息，則本利和爲

$5000(1+6\%)^4=5000\times1.2625=6312.5$元。

如照單利率6%生息，則本利和爲

$5000(1+6\%\times4)=5000\times1.24=6200$元。

可見同一利率與時期，複利所得必大於單利，而付息次數愈多時，所得亦愈大。

若投資時期，不爲複利期之整倍數，則計算不滿一期之部分，有二種方法。爲簡便計，此零期中之息，依單利求之。另一法則視零期爲一整期幾分之幾而取分指數。

〔例〕 求上例中四年二個月後之本利和。

〔解〕 四年之部分，已求得爲6334元如上。

(一)二個月之息，如採簡便手續，以單利計，則得

$$6334\left(1+6\%\times\frac{2}{12}\right)=6334\times1.01=6397.34\text{元}。$$

(二)取分指數，則本利和爲：

$$5000(1+3\%)^{8\frac{1}{3}}=[5000(1+3\%)^{8}](1+3\%)^{\frac{1}{3}}$$

$$=6334\cdot\sqrt[3]{1.03}=6334\times1.0099=6396.6\text{元}。$$

在分指數之意義，乃因二月爲複利期三分之一，故分一整期爲3小期，但使取小期爲複利期之計算結果，一整期末之終値，仍與不分成小期之情形相同。設每一小期終之本利和爲本金P之k倍，則應有

$k^3=P(1+3\%)=P\times1.03\qquad\therefore k=\sqrt[3]{1.03}$

由是知§2中分指數之規定，能合於此種實際解釋。

整指數之乘冪已難求，卽用對數，尙有煩費之感，分指數之乘冪卽開高次方，尤非用對數不可。二者實際計算，均苦不便。是以吾人均採已製成之複利終値表，分整期$(1+i)^n$（見本書附表一）者，與零期$(1+i)^{\frac{1}{p}}$（見本書附表三）者二種，以利檢查。此種表以位數多而詳盡爲貴，本書限於篇幅，僅能附載簡表以示其用法而已。

〔註〕 分一期爲數小期以計算息金時，自當始終取一種利息計算法，或同按單利率，或同按複利率。其利率之改換，務使息金多寡，不因分期與否而變，始爲公允。例如在單利法改年利率6%爲季（三月）利率，則得$\frac{1}{4}\times6\%=1.5\%$。本金100元，依年利率計得本利和$100(1+6\%)=106$元。依季利計仍得本利和$100(1+4\times1.5\%)=106$元。如在複利法改年利率6%爲季利率，亦取$\frac{1}{4}\times6\%=1.5\%$，則複利期一年本金100元之本

利和爲112元，複利期三月者爲$100(1+1.5\%)^4=100\times1.0614$ $=106.14$元，即上文所言付息次數愈多，所得亦愈大也。爲公允計，須取附表三檢得$(1+6\%)^{\frac{1}{4}}=1.0146$，故季利率爲$0.0146=1.46\%$，即$(5.84\%，m=4)=(6\%，m=1)$。按此本利和爲

$$100(1.0146)^4=100\left[(1.06)^{\frac{1}{4}}\right]^4=100\left[\sqrt[4]{1.06}\right]^4=100\times1.06$$

$=106$元，故無出入。此一問題，下節當更闡述之。

10.名率(*Nominal Rate*)實率(*Effective Rate*)

由上節之例，可知同一複利率，複利期數愈多，單位時間（普通爲一年）之終所得愈大。故吾人生一問題曰，複利率j每年分p期支付與利率i每年一付之實得相當時，j與i之關係如何？在此之j稱爲名率，i稱爲實率。

設本金爲P元，則一年終照$(j,m=p)$生息之本利和爲$P\left(1+\frac{j}{p}\right)^p$，照$(i,m=1)$生息之本利和爲$P(1+i)$，因有方程式

$$P\left(1+\frac{j}{p}\right)^p=P(1+i) \quad 或 \quad \left(1+\frac{j}{p}\right)^p=1+i$$

$$\therefore i=\left(1+\frac{j}{p}\right)^p-1， \qquad j=p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]$$

由j求i，可利用整期複利終值表，由i求j，則須用零期複利終值表。

〔註〕 通常所言利率皆指名率，遇複利期未特加說明時，皆每年支付一次，即$m=1$時，可不必註明。

〔例一〕 求(6%，m＝4)之相當實率，

〔解〕 $i=(1+\frac{1}{4}.6\%)^4-1=(1+0.015)^4-1$

$=1.0614-1=0.0614=6.14\%$

〔例二〕 照(49%，m＝7)生息，與照(48%，m＝24)生息孰優？

〔解〕 名率之高下，并不能定實得息金之厚薄，須化爲實率比較之。

$$i=\left(1+\frac{1}{7}\times 49\%\right)^7-1=(1.07)^7-1=1.6058-1$$

$$=60.58\%$$

$$i'=\left(1+\frac{1}{24}\times 48\%\right)^{24}-1=(1.02)^{24}-1=1.6084-1$$

$$=60.84\%$$

即名率高之一種，實率反低。

〔例三〕 每季一付之名率若干，即可與實率6%相當？

〔解〕 $j=4\left[(1+6\%)^{\frac{1}{4}}-1\right]=4(1.0147-1)=0.0588$

$=5.88\%$

〔註〕 j之值又可由巳製成之數值表中檢出之，j值與期數p有關，故以j_p記之。由本書附表四，即可逕行檢出6%下之$j_4=5.87\%$，此結果與上式算出者，末位差1，乃因$(1+6\%)^{\frac{1}{4}}$之值僅取至第四位小數，而略去其後各位，故與4相乘之積，因四捨五入之關係，對末位發生影響。凡由製成之表所査出之值，各位皆正確，若由計算求之，不特較費手續，且最末位值甚或末二位值，每生誤差。

11. 繼續複利 (*Continuously Convertible Interest*) 利力 (*Force of Interest*)

同一名率，期數愈多，實率愈大。試取年利率六釐之名率而求每年一付(m=1)，每半年一付 (m=2)，每季(三月)一付(m=4)，每月一付(m=12)，每星期一付 (m=52)，每日一付(m=365)之實率 i，則得下表：

m	1	2	4	12	52	365
i	.06000	.06090	.06136	.06168	.06180	.06185

事實上期數之多有限，而理論上則可以無窮。實際上雖決無逐時逐分逐秒付息之理，然不妨懸想此種情形，而設期數 m 無窮增大，以究實率之增加，有無限止。吾人須知一變量雖漸次增加，未必即大至無限，莊子所謂『一尺之棰，日取其半，雖萬世不能盡』，取者雖日有所增益，終限於此一尺之棰，不得更越雷池一步也。在高等數學中，業已證明 m之值愈大，則 $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ 愈近於定值2.71828………，且其差可小於極微細之任何值。今列表若干$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ 之值，即可見之。

m	$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$	與2.718之差
2	2.250	0.468
3	2.370	0.348
5	2.488	0.230
10	2.594	0.124
20	2.653	0.065
40	2.685	0.033
100	2.705	0.013
200	2.712	0.006
1000	2.717	0.001

此定值曰自然對數之底 (Base of Natural Logarithm)，常以e表之。以

數學術語記其事，則曰「當 m 值無窮增大時，$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ 所趨之極限值（Limit）爲 2.71828……」更以符號∞記無窮大，以 lim 爲極限之略號，則可列爲一算式如下：

$$e=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=2.71828\cdots\cdots$$

〔註〕 一數無窮增大時，其倍數或若干分之一亦然。因無窮增大者，其值變大之程度，可超於任何數之謂也。又在此所論，限於正數之情形。

據是理則不難得 $\lim\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$ 設 $n=\frac{m}{j}$，因 j 爲固定值，故 m 無限增大時，n 亦然。在此處 $m=nj$，且 $\frac{j}{m}=\frac{1}{n}$，故

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^m=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nj}$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^j=e^j$$

如是期數無限增加之複利，曰繼續複利，其名率（卽上式之 j）曰利力，常以希臘字母 δ（讀曰 delta）表之，亦卽 $\lim_{p\to\infty} j_p=\delta$ 也。δ 與實率 i 之關係如下：

$$1+i=e^\delta \qquad \therefore\ i=e^\delta-1$$

若欲由實率 i 求利力 δ，先求出 1/loge=2.3026……，而改上式爲對數式，得

$$\log(1+i)=\log(e^\delta)=\delta\log e$$

$$\therefore\ \delta=\frac{\log(1+i)}{\log e}=2.3026\ \log(1+i)$$

〔例一〕 求實利率6%之利力。

〔解〕 $\delta=2.3026\log(1.06)=2.3026\times0.02531=0.0583$

〔注意〕 本題卽謂名率5.83%之繼續複利，亦不過與實率6%相當，若名率5.5%者則尙不逮。可見期數無窮增加，所益甚微，此或不易率爾臆料者也。但在高利貸，所益可甚巨。

〔例二〕 本金1000元，利率7%，依繼續複利生息，求十年終之本利和。

〔解〕 $A=1000\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\frac{7}{100}\right)^{10m}$

$$=1000\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{7}{100}\cdot10}\qquad m=n\cdot\frac{7}{100}$$

$$=1000\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{7}{10}}$$

$$=1000e^{\frac{7}{10}}=1000\sqrt[10]{e^{7}}$$

高次開方極煩，故須用對數計算

$$\log A=\log 1000+\frac{7}{10}\log e=3+\frac{7}{10}\times0.4343=3.304,$$

$\therefore\ A=2003.8$元。

12. 複利現値及基本問題

今欲 n 於期後得款 A 元，如照每期複利率 i 之複利生息，問需卽投資若干元，是爲 A之複利現値，設此現値爲 P 元，則

$$A=P(1+i)^n，\qquad \therefore P=\frac{A}{(1+i)^n}=A(1+i)^{-n}$$

複利終值指n期後之本利和，現值則爲達所預定額之時間前n期之款額，自當以負指數記之，可見§2中負指數之規定，亦饒有實際意義也。複利現值亦有製成之表可查，見本書附表二。

現值卽複利問題之一例，其他相關問題，均不難按基本公式立方程式以解之。

〔例一〕 航空獎券每張20元，未中獎者，十年後還本，幷給紅利6元。如照利率(12%，m=2)計息，求未中獎者之現值。

〔解〕 $P=26\left(1+\frac{1}{2}\frac{12}{100}\right)^{-2\cdot 10}=26(1+0.06)^{-20}$

$=26\times 0.3118=8.11$元

〔註〕 一般小兌換店，每以劵額十分之一，收購未中獎之劵，可見獲利極巨。

〔例二〕 照利率(8%，m=2)生息，須一次儲蓄若干元，方可於五年後得本利和10000元。

〔解〕 $P=10000\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{100}\right)^{-2\cdot 5}=10000(1+0.04)^{-10}$

$=6755.6$元

〔註〕 此卽銀行中之整存整付儲蓄，有由存款額計終值與由預定終值求應存款額二種。前者可查複利終值表，本題屬後者，須查複利現值表。但銀行中爲易使存款人明瞭及便於計算起見，皆於存款章程中，載有此二種之整存整付儲蓄表，其利率視年數而定，愈久者愈高，今錄中國銀行者如下：

年期	存入1000元到期合本利合計元數	預計到期得本利1000元應存元數	利率	
1	1071.22	933.51	7	% m=2
2	1153.07	867.25	7.25	
3	1247.17	801.81	7.5	
4	1355.46	737.75	7.75	
5	1480.24	675.56	8	
6	1624.27	615.66	8.25	
7	1790.87	558.39	8.5	
8	1946.33	513.79	8.75	
……	…………	…………	……	

〔注意〕 複利表中末列之利率，須以對數直接計算。

〔例三〕 照利率(7%，m=1)生息，問若干年後，方可使本利和倍於本金？

〔解〕 於公式 $A=P(1+7\%)^n$ 中，令 $A=2P$ 得

$$2=(1.07)^n，卽\log2=\log(1.07)^n=n\log1.07$$

$$\therefore\quad n=\frac{\log 2}{\log 1.07}=\frac{0.30103}{0.02938}=10.25年$$

〔註〕 本題亦可按內插法求其差近值，見§4例一。其所得值較由對數求出之確值稍小，但求至二位小數時，其差不逾於利率之半，證見 Hart: Math of Investment 附錄 Note 5.

〔例四〕 如例二附表中未註明利率，試求六年期者。

〔解〕 設所求年率爲i，則得 $1624.27=1000\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2\cdot6}$

$$\log\left(1+\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{12}\log 1.62427=\frac{1}{12}\times 0.21066=0.01756,$$

$$1+\frac{i}{2}=1.04125 \qquad \therefore\ i=2\times 0.04125=8.25\%$$

〔註〕 如按內插法，先查複利終値表，得

$\frac{i}{2}$	$(1+\frac{i}{2})^{12}$
0.04	1.6010
?	1.6243
0.05	1.7959

$$\frac{\frac{1}{2}i-0.04}{0.05-0.04}=\frac{1.6243-1.6010}{1\cdot 7959-1\cdot 6010}=\frac{0.0233}{0.1949}$$

$$\therefore\ i=2\left[0.04+\frac{0\cdot 0233}{0.1949}\times 0.01\right]=2\times 0.00412=8.24\%$$

在一般言之，對數法自較精確。

〔例五〕 航空獎券，每期發行額1,000,000張，每張價 20 元，經售費需券價之$\frac{1}{10}$，中獎張數111,173,獎金共5,000,000元。未中獎之券，10年後還本，另付紅利 6 元。設複利期爲半年，求政府所担負之利率。

〔解〕 每期收入淨餘爲

$$20\times 1,000,000-20\times 1,000,000\times\frac{1}{10}-5,000,000$$

$$=13,000,000\text{元。}$$

十年後還本及紅利爲

$$(1,000,000-111,173)\times(20+6)=23,109,502\text{元。}$$

設所求利率爲i,則

$$23,109,502=13,000,000\left(1+\frac{1}{2}i\right)^{2\cdot 10}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{20}[\log 23,109\ 502-\log\ 13,000,000]$$

$$=\frac{1}{20}\text{〔}7.363791-7.113943\text{〕}=0.012492,$$

$1+\frac{1}{2}i=1.029$, $i=0.058$,卽利率爲(5.8%，$m=2$)，

〔註〕 可與例一比較。

13. 複貼現(*Compound Discount*)

求一未到期期票之複利現値，爲複貼現之一法。其另一法則爲依貼現法計算。二者之別，一如單利情形，在於息金之扣除，在每期之終或其首耳。今進求依複貼現法計算之公式。

n期終之値爲A,貼現率爲d，則可推得現値如下：

期終前一期之現値$=A-Ad=A(1-d)$，

卽期終前二期淨收値，

期終前二期之現値$=A(1-d)-A(1-d)d$

$=A(1-d)(1-d)=A(1-d)^2$

卽期終前三期之淨收値，

如是類推，至n期前，得 $P=A(1-d)^n$

關於複貼現之問題，均以上列二公式爲基礎，由題意列成方程式解之。

〔例一〕 四年後到期之期票，依複貼現率(6%，m=2)計算，得現値 509.4 元，求其面値

〔解〕 在公式 $P=A(1-d)^n$ 中，

$$P=509.4,\ d=\frac{0.06}{2},\quad n=2\times4=8.$$

故 $$509.4=A(1-0.03)^8=A\times0.7837.$$

$$\therefore \quad A=\frac{509.4}{0.7837}=650\text{元}.$$

〔例二〕同上題，但知面值爲650元，現值爲509.4元，複利週期爲半年(卽$m=2$)，求貼現率。

〔解〕 仍用同一公式，得方程式　$509.4=650(1-d)^8$.

故　$1-d=\sqrt[8]{\frac{509.4}{650}}=\sqrt[8]{0.7837}=0.97 \quad \therefore d=0.03.$

所得乃半年期之利率，應化爲年利率，得：

$$2\times 0.03=0.06=6\%$$

〔註〕 求八次方根，雖可由四次開平方得之，然不若用對數求之便捷。

〔例三〕 求將複貼現率(6%，$m=1$)與(6%，$m=4$)分別化爲相等複利期之複利率。

〔解〕 設有面值爲A元之n年期票，則倣§7例五，得方程式

$$A\left(1-\frac{6}{100}\right)^n = A\left(1+i\right)^{-n}\text{，卽}1-\frac{6}{100}=\frac{1}{1+i}\text{，}$$

$$1+i=\frac{1}{1-\frac{6}{100}}=\frac{100}{94}\text{，}$$

$$\therefore i=\frac{100}{94}-1=\frac{6}{94}=6.38\%$$

卽　複貼現率(6%，$m=1$)＝複利率(6.38%,$m=1$)

同法得題中第二問之相關方程式

$$A\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{100}\right)^{4n}=A\left(1+\frac{i}{4}\right)^{-4n}\text{，}$$

即
$$1-\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{100}=\frac{1}{1+\frac{i}{4}},$$

$$1+\frac{i}{4}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{100}},\ i=4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{100}}-1\right)$$
$$=\frac{24}{394}=6.09\%,$$

即　複貼現率(6％，m＝4)＝複利率(6.09％，m＝4)。

〔註〕 注意本題中A及年數n均補助未知數，故二種複貼現利率之比，與貼現期無關，此另與單貼現不同之處。又同一利率，因複利期之多寡，結果不同。

複利率與複貼現率之比為一定，與貼現期無關，此亦與單貼現不同之處。如複利週期非一年，須化為期利率比較。本書附有 m＝1 時此二率之互化表（第五表），可直接查出。例如複利率6％＝複貼現5.66％，但複利率（6％，m＝2），應求3％者之二倍，卽等於複貼現率(5.82％，m＝2)。

14. 等值問題

複貼現中無等值期問題，因二不同期票，旣定利率之後，無論依複貼現法，抑依複利法貼現，或常為等值，或決不等值也。此理之證，見本書附錄。因是二期票常可依複貼現比較其價值之大小，此單貼現中所無之問題也。可參看§8例三下之註一。其他問題之解法，多與單貼現中相當問題類似，今例釋如下：

〔例一〕 面值 9000 元之三年後期票，依利率6％貼現，換取一面值10000元之期票，試分別求二種貼現法之到期日。

解〕 設x爲到期日之年數，則依複貼現法，得等值方程式：

$$10000(1-0.06)^{x}=9000(1-0.06)^{3}\cdot(0.94)^{x-3}=0.9$$

$$\therefore\quad x=3+\frac{\log 0.9}{\log 0.94}=3+\frac{-1+0.95424}{-1+0.97313}$$

$$=3+\frac{-0.04576}{-0.02687}=4.7\text{年}$$

依複利法，則 $$\frac{10000}{(1+0.06)^{x}}=\frac{9000}{(1+0.06)^{3}},$$

$$(1.06)^{3-x}=0.9,$$

$$\therefore\quad x=3-\frac{\log 0.9}{\log 1.06}=3-\frac{-0.04576}{0.02531}=4.8\text{年}$$

〔例二〕 有一面值1000元三年後期票，帶複利（6%，m=4)，按複貼現率(7%，m=1)換得一紙二年後期票，求其面值。

〔解〕 此帶息期票之到期值爲$1000\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{100}\right)^{3\cdot 4}$，故

$$1000(1.015)^{12}(1-0.07)^{3}=P(1-0.07)^{2}$$

$$\therefore P=1000\times(1.015)^{12}\times 0.93$$

$$=1000\times 1.1956\times 0.9\ =1111.9\text{元}$$

〔例三〕 面值1000元之一年半期票，與面值1104元之四年期票，按複利率(6%，m=2)貼現法比較，孰者價值較大？如複利期爲半年，複貼現率應爲若干，方可使此二票等值？

〔解〕 在今後k年（k爲泛定數）時二票現值之比爲：

$$\frac{1104}{\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{100}\right)^{2(4-k)}} : \frac{1000}{\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{100}\right)^{2(1\frac{1}{2}-k)}}$$

$$=1.104\times\left(1+\frac{3}{100}\right)^{2[(1\frac{1}{2}-k)-(4-k)]}$$

$$=1.104\div(1.03)^5=1.104\div1.159<1.$$

故面值 1000 元者價值較高。如按複利率$(i,m=2)$，可使之等值，則當有

$$\frac{1104}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2(4-k)}} : \frac{1000}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2(1\frac{1}{2}-k)}}=\frac{1\cdot104}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{5}}=1$$

卽 $$\left(1+\frac{i}{2}\right)^{5}=1.104,$$

檢複利終值表，得 $i=2\times2\%=4\%$，

是故按複利率(6 %，m＝2)貼現，則面值 1000 元之一年半期票常較面值 1104 元之四年期票爲高；如按複利率(4 %，m＝2) 則二者始終相等。於此例亦可見複貼現中無等值期問題。

〔例四〕 某君出立期票三紙：(1)面值 10000 元之十年無息期票；(2)面值 2000 元，帶複利(4%，m＝4)之五年期票；(3)面值3000元，帶複利(6%,m＝2)之四年期票。今欲改爲面值相等之三年與六年無息期票各一紙，如按複利率(5%,m＝1)貼現，試求面值元數。

〔解〕 設所求面值元數爲 x，幷設五年末爲共同比較期計期。由上題可知結果與此泛空之比較期幷無關係。爲便於說明計，立一表如下：

	到期日	利率	到期值（元數）	貼現	比較期在到期日	現值（元數）
原期票	10 年	無息	10000	一律按複利率 5%	前 5 年	$10000(1.05)^{-5}$
	5 年	4%，m=4	$2000(1.01)^{20}$		0 年	$2000(1.01)^{20}$
	4 年	6%，m=2	$3000(1.30)^{8}$		後 1 年	$3000(1.03)^{8}(1.05)^{1}$
新期票	6 年	無息	X		前 1 年	$X(1.05)^{-1}$
	3 年	無息	X		後 2 年	$X(1.05)^{2}$

故得等值方程式

$$x\left[(1.05)^{-1}+(1.05)^{2}\right]$$

$$=10000(1.05)^{-5}+2000(1.01)^{20}+3000(1.03)^{8}(1.05)^{1}$$

$$\therefore x=\frac{10000\times 0{,}7835+2000\times 1\cdot 2202+3000\times 1\cdot 2668\times 1\cdot 05}{0.9524+1{,}2763}$$

$$=\frac{7835+2440\cdot 4+3990\cdot 4}{2.2287}=\frac{14265\cdot 8}{2.2287}=6400.9\text{元}$$

〔註〕　如易一比較期如六年末，則比較期距到期日，在前者一律近一年，在後者一律遲一年，諸票現值均除去一因子 $(1.05)^{-1}$，亦即於等值方程式二端消去公共因子 $(1.05)^{-1}$，故 x 值不受此泛定比較期之影響。

四　年金

15. 基本事項

每隔一定時期，陸續收付款項，即為年金。付款期限有定

者，曰確定年金(Annuity Certain)，其期限不能預定者，曰無定年金(Contingent Annuity)，如人壽保險之付費，遇投保人死亡而終止，稱生命年金(Life Annuity)者，卽其重要之例，因投保人何時死亡不能預定也。本書所論，以確定年金爲限，生命年金之硏討，於保險數學中究之。

每次所付之款額，曰週期付款(Periodic Payment)，陸續二次付款期間之時日，曰付款週期(Payment Interval)。週期付款爲定數者曰定額年金(Constant Annuity)，否則或逐次遞加款數，或逐次遞減之，而稱遞增(Increasing)或遞減(Decreasing)年金。

又付款方法有在週期開始者，曰現期年金(Annuity Due)，有在週期之末者，曰通常年金(Ordinary Annuity 或 Annuity Immediate)。

年金概以複利計算，付款週期之長短，未必卽與複利週期相同，其一致者曰單純年金(Simple Annuity)，否則曰複雜年金(Compound Annuity)。

年金類別旣繁，演算之道，宜取其便於立式之一種爲主，然後推行於其他。此主要者，卽單純，定額之通常年金，簡稱爲年金；而略去此三種形容詞，否則當特加指明。

自最初付款週期至最後一次之末，曰期限(Term)。歷次付款至期限末之本利和，曰年金終値，其在首期按複利法貼現之淨收額曰現値。每年內所付各次款項之和(不計入息金)曰年租(Annual Rent)，倣此，某時期內付之和，可稱之爲期租。

例如銀行計息多係每半年一次，零存整取儲蓄之每半年一

付者，爲單純現期年金，因存入在每期之首也。其每一月，或每三月，或每年一付者，爲複雜現期年金。若整存零取儲蓄，每半年一取者，爲單純通常年金，因取款在每期之末也；此種儲蓄於期限之首一次存入之款額，即其年金現值。於此所論，概爲定額者。

16. 年金終值與現值

每期末付款1元，期利率i，至n期終之年金終值，常以符號 $S_{\overline{n|}\,i}$ 記之，其求法公式爲一切問題之基礎。

首期末至n期終，共n－1期，所付1元至期終之本利和爲$(1+i)^{n-1}$；同理，第二期末所付者之本利和爲$(1+i)^{n-2}$；推之末期終所付者，尙未及生息。故在期限終止時，諸本利和之總額，乃一等比級數。按§3第二公式，得

$$S_{\overline{n|}\,i}=(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots\cdots+(1+i)+1$$

$$=\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)-1}=\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

此終值之現值，以符號 $a_{\overline{n|}\,i}$ 表之，按同一期利率i，依複利法貼現，則有

$$a_{\overline{n|}\,i}=S_{\overline{n|}\,i}(1+i)^{-n}=\frac{1}{i}[(1+i)^{n}-1](1+i)^{-n}$$

$$=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

此二量間有一基本關係如次：取第二式兩端倒數，

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}\,i}}=\frac{(1+i)^{n}}{S_{\overline{n|}\,i}}$$；但就第一式，

$$iS_{\overline{n}|i}=(1+i)^n-1\text{，即}(1+i)^n=1+iS_{\overline{n}|i}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}=\frac{1+iS_{\overline{n}|i}}{S_{\overline{n}|i}}=\frac{1}{s_{\overline{n}|i}}+i$$

〔註〕 $S_{\overline{n}|i}$ $a_{\overline{n}|i}$及$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$皆有表可檢，見附表七，八，九。$S_{\overline{n}|i}$，$a_{\overline{n}|i}$各讀爲「s附n角i」及「a附n角i」；亦作$S_{\overline{n}|}$（按i），$a_{\overline{n}|}$（按i），或竟簡作$S_{\overline{n}|}$，$a_{\overline{n}|}$，本書爲排印上便利計，記爲$S_{n\rceil i}$與$a_{n\rceil i}$。

上述皆通常年金之情形，即期者不難由此推出。設以$S'_{n\rceil i}$及$a'_{n\rceil i}$表此種終值與現值。即期年金於各期初付款，故諸本利和，皆應加計一期複利，亦即當以$1+i$遍乘之，故

$$S'_{n\rceil i}=(1+i)S_{n\rceil i}=(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$=\frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)}{i}=\frac{(1+i)^{n+1}-1-i}{i}$$

$$=\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1=S_{n+1\rceil i}-1$$

此式可直接解釋之如次：每期所存之款，可視爲上一期末所存者。如此則成一$n+1$之通常年金，但無最後一次付款，因之須減去1元。

再求現值$a'_{n\rceil i}$，可暫置首期初所付1元勿論，而視第二期初存入之1元爲首期末所存，以後各期倣此，則爲一相當之$n-1$期年金。故所求現值，即此$n-1$期年金與首期初付1元之和，因之　　$a'_{n\rceil i}=1+a_{n-1\rceil i}$

此式亦可倣終值貼現之理求之，即得

$$a'_{n\rceil i}=S'_{n\rceil i}(1+i)^{-n}=(1+i)S_{n\rceil i}(1+i)^{-n}$$

$$=(1+i)\,a_{n\rceil i}=(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$=\frac{1}{i}\left[1+i-(1+i)^{-n+1}\right]=1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$$

$$=1+a_{n-1\rceil i}$$

如注意卽期年金較通常者當加計一期複利之關係，可知

$$a'_{n\rceil i}=(1+i)\,a_{n\rceil i}$$

此種關係，實卽期年金與通常年金互化之樞紐，特一再提及之。

17. 問題例解

〔例一〕期限五年之零存整取儲蓄，每六月一存者，照複利率(8%，m=2)生息。如每次存款1元，求五年末本利和：

〔解〕本題爲卽期年金終值，每年利率爲$\frac{1}{2}\times 8\%=4\%$，共10期。

$S'_{10\rceil 0.04}=S_{11\rceil 0.04}-1=13.4864-1=12.4864$元。

〔例二〕按上題儲蓄，期滿得1000元，求每月應存元數。

〔解〕設所求元數爲x，則$1000=xS'_{10\rceil 0.04}=12.49x$，

$$\therefore x=\frac{1000}{12.49}=80.09\text{元}。$$

〔例三〕期限五年之整存零付儲蓄，每六個月一取者，照複利率(8%，m=2)生息。如欲每次取1元，求期首應一次存

入之元數。

〔解〕 此爲通常年金現值問題，每期利率$\frac{1}{2}\times 8\% = 4\%$，共10期。

$$a_{10\urcorner 0.04} = 8.1109\text{元}。$$

〔註〕 如求一次存入1000元後，每六個月所取之元數，可做例二解法，得

$$X = \frac{1000}{a_{10\urcorner 0.04}} = 1000\times 0.12329 = 123.29\text{元}。$$

在此有第九表可査$\frac{1}{a_{n\urcorner i}}$之值，故得以乘代除，便於計算。

按此亦卽欠債1000元，分五年平均還淸，每六個月付款一次，按複利率(8%，m=2)計算時每次付款數。故$\frac{1}{a_{n\urcorner i}}$數值表稱爲分期付款表。

〔例四〕 零存整付儲蓄，每六個月存入1元，照複利率(10%，m=2)生息，若干年後方可得67.76元？

〔解〕 設x爲所求年數，則共爲2x期，期利率爲$\frac{1}{2}\times 10\% = 0.05$，故

$$S'_{2x\urcorner 0.05} = S'_{2x+1\urcorner 0.05} - 1 = 69.76.$$

卽 $S_{2x+1\urcorner 0.05} = 70.76$。

如有較詳之$S_{n\urcorner i}$表，立可査得$2x+1=31$.

卽 $x = 15$年。

今以對數法解之，化方程式爲 $\frac{(1.05)^{2x+1}-1}{0.05}=70.76,$

即 $(1.05)^{2x+1}=1+0.05\times 70.76=1+3.538=4.538,$

$(2x+1)\log 1.05=\log 4.538,$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2}\left[\frac{\log 4.538}{\log 1.05}-1\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{0.65686}{0.02119}-1\right]$$

$$=\frac{1}{2}(31-1)=15\text{年。}$$

〔註〕 如表中不能直接查出，亦可用內插法，實與§12例三之情形相同。所得近似值，每小於由對數法求出之確值。但求至二位小數時，其差不逾於利率之半。

〔例五〕 整存零付儲蓄，定期十年，每期複利二次，期首一次存入1300.79元，以後每半年即可取100元，求利率。

〔解〕 設所求年利率爲 i，則半年利率爲 $\frac{i}{2}$，期數爲20,

$$a_{\overline{20}|\frac{1}{2}i}=\frac{1-\left(1+\frac{1}{2}i\right)^{-20}}{\frac{1}{2}i}=\frac{1300.79}{100}=13.0079,$$

此爲一21次之方程式，雖非不可解，但非數小時之計算不可得。本書又未附詳表，否則亦可查得 $\frac{1}{2}i=4.5\%$，$i=9\%$，今以內插法求差近值。先查出

$a_{\overline{20}|0.04}=13.5903$, $a_{\overline{20}|0.05}=12.4622$,

$\frac{1}{2}i$	$a_{\overline{20}\rceil\frac{1}{2}i}$
0.04	13.5903
?	13.0029
0.05	12.4622

$$\frac{\frac{1}{2}i-0.04}{0\cdot05-0\cdot04}=\frac{13.0079-12.4626}{13.5903-12\cdot4622}$$

$$=\frac{0.5457}{1\cdot1281}=0.48$$

$$\therefore\ i=2[0.04+0.48\times0.01]=2\times0.0448=8.96\%$$

〔例六〕 零存整付儲蓄，每六月一存，定期十年以上之利率如爲（12%，m=2），問須歷若干期方可使本利和倍於存入本金之和？

〔解〕 設 x 表所求年數，本題須求方程式

$$S'_{\overline{2x}\rceil0\cdot06}=S_{\overline{2x+1}\rceil0\cdot06}-1=4x$$

卽 $$\frac{(1.06)^{2x+1}-1}{0\cdot06}=4x+1,$$

乃所謂超越（Transcendental）方程式，非代數方法所能解。在此僅可用內插法求差近值，查表列式如次：

x	2x+1	$S_{\overline{2x+1}\rceil0\cdot06}-(4x+1)$
10	21	39.9927−41=−1.0073
10	21+y	0
$10\frac{1}{2}$	22	43.3923−43=0.3923

$$y=\frac{1,0073}{[illegible]\cdot3923--(--1\cdot0073)}$$

$$=\frac{[illegible].0073}{[illegible]\cdot3996}=0.72,$$

2[illegible]1=21.72,

$\therefore$ x=10.36年

18. 複雜年金之一

複雜年金可分二類，一爲複利週期內付款若干次者，一爲若干複利週期始付一次者。換言之，前者之一付款週期爲一複利週期若干分之一，後者之一付款週期，爲一複利週期之若干

倍。本節先論第一類。

每期期租1元，分p次付款，每期按名率i生息至n期末之年金終值，常以符號$S^{p}_{\overline{n|}i}$表之，其現值以符號$a^{p}_{\overline{n|}i}$表之。但此中右角上之p，并非指數，下同。如遇乘冪，可記以$(a_{\overline{n|}i})^{p}$，但此絕無用及之時，故不虞其混淆。

$S^{p}_{\overline{n|}i}$之公式，可與單純者之情形（§16）比較卽得。在此每次付款元數爲$\frac{1}{p}$，每期之利率爲$(1+i)^{\frac{1}{p}}-1$，付款期數共爲np，注意$S_{\overline{n|}i}$公式中分母i，由$(i+1)-1$而得。易其中$1+i$以$(1+i)^{\frac{1}{p}}$，易n爲np，并以$\frac{1}{p}$乘之，卽有

$$S^{p}_{\overline{n|}i}=\frac{1}{p}\frac{\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}\right]^{np}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}=\frac{1}{p}\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$$

在n=1時，

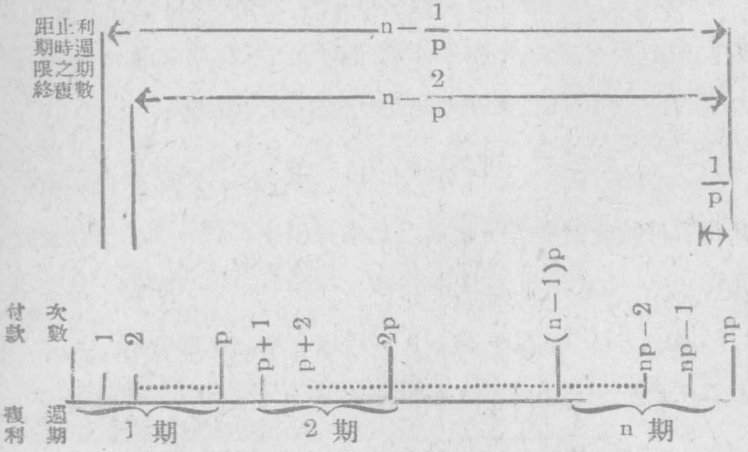
$$S^{p}_{\overline{1|}i}=\frac{i}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}=\frac{i}{j_{p}},$$

又　$$S_{\overline{n|}i}=\frac{(1+i)^{n}-1}{i},$$

$$\therefore S^{p}_{\overline{n|}i}=\frac{i}{j_{p}}S_{\overline{n|}i}=S^{p}_{\overline{1|}i}S_{\overline{n|}i}$$

式中之$\frac{i}{j_{p}}$卽$S^{p}_{\overline{1|}i}$亦已有製成之數值表，見本書附表十。

上式又可用級數直接證明。每一複利週期期租 1 元，分 p 次支付，共 n 期；故每次付 $\frac{1}{p}$ 元，共付 np 次。茲圖示各次付款時距年金期限終止時之複利週期，如下：



故得各次所付款至期限終止時之本利和如次表：

次數	1	2	…	n p−1	np
本利和	$\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}$	$\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}$	…	$\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}$	$\frac{1}{p}$

是則其總和爲 $\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}+\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}+\cdots\cdots$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{p}(1+i)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{p}$$

乃一等比級數，首項爲 $\frac{1}{p}$，公比爲 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$，項數爲np

$$\therefore S^{p}_{n\rceil i}=\frac{1}{p}\frac{[(1+i)^{\frac{1}{p}}]^{np}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}=\frac{1}{p}\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}=\frac{i}{j_p}S_{n\rceil i}.$$

將 $S^{p}_{n\rceil i}$ 按期利率 i 以複利法貼現，複利週數爲 n ，卽得現值

$$a^{p}_{n\rceil i}=S^{p}_{n\rceil i}(1+i)^{-n}=\frac{i}{j_p}S_{n\rceil i}(1+i)^{-n}=\frac{i}{j_p}\imath_{n\rceil i}$$

「注意〕 本節至 §21 中 i 指每一複利期間之實率，非復年利名率(§ 10 註)。

〔例一〕 每季之末存款 1 元，照複利率 (8%，m=2) 生息，至第五年終，可得本利和若干元？

〔解〕 每一複利期間，存款二次，卽 p=2 ；每年複利二次，五年共 10 次，卽 n=10 ；期利率爲 $\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{100}=\frac{4}{100}$，故

$$S^{2}_{10\rceil 0.04}=\frac{0.04}{j_2}S_{10\rceil 0.04}=1.0099\times 12.0061=12.125.$$

此乃每期存 1 元之結果，今每季 1 元，卽每期存 2 元，故所求之本利和爲 2 × 12.125=24.25 元。

〔註〕 銀行中之零存整付儲蓄，每三個月一付者，乃在期首存入，而爲卽期複雜年金。其對上例通常之關係，仍如單純年金之情形(參看 § 16)，只須加計一期複利(注意爲零期)，

卽得 $(1+0.04)^{\frac{1}{2}}S^{2}_{10\rceil 0.04}=1.0198\times 24.25=24.73$元。

〔例二〕 按上註所言之零存整付儲蓄，欲期終得1000元，求每季應存之元數。

〔解〕 設所求元數爲x，則24.73x＝1000，

故 $$X=\frac{1000}{24\cdot 73}=40.44\text{元}$$ 。

〔例三〕 整存零付儲蓄，每季一付，期限五年，按複利率（8%，m＝2）計算。欲每次取100元，須一次整存若干元？

〔解〕 如例一，p＝2，n＝10，i＝0.04，每期（二季）共取200元，

$$200\times a^{2}_{10\rceil 0.04}=200\times\frac{0\cdot 04}{j_2}\times a_{10\rceil 0.04}$$

$$=200\times 1.0099\times 8.1109=163.82\text{元}。$$

19. 複雜年金之二

茲再進述第二類。每k期(複利週期)付款1元，陸續付n次之年金終值及現值，以符號S_{nkli}及a_{nkli}分別記之，讀爲「S附nk直i」等。其公式求法，仍同上節。卽就$S_{n\rceil i}$及$a_{n\rceil i}$之公式中，易1＋i爲$(1+i)^k$而有

$$S_{nkli}=\frac{(1+i)^{nk}-1}{(1+i)^k-1}=\frac{(1+i)^{nk}-1}{i}\Big/\frac{(1+i)^k-1}{i}$$

$$=S_{nk\rceil i}\Big/S_{k\rceil i}$$

$$a_{nkli}=\frac{1-(1+i)^{-nk}}{(1+i)^k-1}=\frac{1-(1+i)^{-nk}}{i}\Big/\frac{(1+i)^k-1}{i}$$

$$=a_{nk\rceil i}\Big/S_{k\rceil i}$$

此二式有一甚美妙之證明。設想每k期末付款1元，改

爲每期末平均支付，則應爲 $\frac{1}{S_{k\rceil i}}$ 元，如是立可得之。

〔注意〕 如不用對數，宜按表七以化商爲積，即

$$S_{nkli}= S_{nk\rceil i}\left(\frac{1}{a_{k\rceil i}}-i\right) a_{nkli}= a_{nk\rceil i}\left(\frac{1}{a_{k\rceil i}}-i\right)。$$

〔註〕 $a_{nk\rceil i}$ 一般均用符號 $a_{nk\cdot k}$ 記之。

〔例一〕 五年期整存零付儲蓄，照複利率（8％，m=2）生息。如欲每年可取款 1000 元，求應一次存入本金元數。

〔解〕 在此 $k=2$，$n=5$，$i=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{100}=0.04$，所求元數爲

$$1000\cdot a_{10\rceil 0.04}=1000\ a_{10\rceil 0.04}\left(\frac{1}{a_{2\rceil 0.04}}-0.04\right)$$

$$=1000\times 8.1109\times(0.5302-0.04)$$

$$=8110.9\times 0.4902=397.6\text{元}。$$

〔例二〕 零存整付儲蓄，期限及複利率同上題，每年存入 100 元，期終可得本利和若干元？

〔解〕 此乃即期年金，故當加計一年複利$(1+0.04)^2$，得

$$100(1.014)^2S_{10|0.04}$$

$$=100\times 1.0816\times S_{10\rceil 0.04}\left(\frac{1}{a_{2\rceil 0.04}}-0.04\right)$$

$$=108.16\times 12.0061\times 0.4902=63,63\text{元}。$$

〔註〕 各種儲蓄法，均視期限之長短，定利率之高下，而分別製成數值表，今摘錄中國銀行者如次（利率與 §12 例一註中所載者情形相同）：

	零存整付（每次存1元到期之本利和元數）				整存零付（存入1000元每次可取元數）			
年期	每月一存	每三月一存	每六月一存	每年一存	每月一取	每三月一取	每六月一取	每年一取
1	12.45	4.17	2.10	1.07	86.48	260.93	526.40	1071.22
2	25.87	8.67	4 7	2.22	44.83	135.31	273.06	556.02
3	40.40	13.55	6.83	3.48	31.05	93.73	189,21	385.52
4	56.27	18.87	9.52	4.85	24.23	73.17	147.76	301.24
5	73.70	24.73	12.48	6.36	20.21	61.04	123.29	251.51
6	92.97	31.20	15.75	8.03	17.58	53.12	107.32	219.08
7	114.40	38.40	19.40	9.90	15.76	47.61	96.23	196.56
8	136.89	45.94	23.21	11.84	14.31	43.25	87.41	178.53
……	……	……	……	……	……	……	……	……

各公式中僅有一量未知之時，均可解相當方程式而得之；故期限，利率等問題，大抵可做單純年金情形解決，惟立式更繁，計算愈難，本書限於篇幅，不復縷述。

20. 遞增(或遞減)年金

此種年金中，如增減之數逐年不同，則惟有分別計算。今僅論所增減款額爲一定數之情形。

設首期所付款數爲 f ，每期增加之數爲 d （在增減年金，可取 d 爲負數 ）期，利率爲 i ， 經 n 期後之年金終值，以

$\left(A_s\right)_{\overline{n}|i}$記之・其終値以$\left(A_a\right)_{\overline{n}|i}$記之。吾人可視爲於首期開始一週期付款爲 f 之 n 期年金，以後逐期增加一週期付款爲 d 之年金，而期數則逐漸減 1，因每期均較上期增加 d 元，而期限數則較少 1 次也。故得終値公式。

$$\left(A_s\right)_{\overline{n}|i}=fS_{\overline{n}|i}$$
$$+d\left[S_{\overline{n-1}|i}+S_{\overline{n-2}|i}+\cdots\cdots+S_{\overline{2}|i}+S_{\overline{1}|i}\right]$$

次求其現値，試設同時另有一遞減年金，首期存 n d 元，逐次減少 d 元。此遞減年金，可視爲首期同時開始 n 個年金，付款數均爲 d 元，而期數則自 n－1 起逐漸減 1 次。是故此 n 個年金之現値總和爲

$$d\left(a_{\overline{n}|i}+\cdots\cdots+a_{\overline{2}|i}+a_{\overline{1}|i}\right)$$

此遞增遞減二年金之和，卽一付款數爲 f ＋ n d 之定額年金；二者現値之和，卽此定額年金之現値，而爲$(f+nd)a_{\overline{n}|i}$，故

$$\left(A_a\right)_{\overline{n}|i}+d\left(a_{\overline{n}|i}+\cdots\cdots+a_{\overline{2}|i}+a_{\overline{1}|i}\right)$$
$$=\left(t+nd\right)a_{\overline{n}|i}$$

$$\therefore\left(A_a\right)_{\overline{n}|i}=\left(f+nd\right)a_{\overline{n}|i}$$
$$-d\left[a_{\overline{n}|i}+\cdots\cdots+a_{\overline{2}|i}+a_{\overline{1}|i}\right]$$

〔註〕　求現値時，勿誤如終値情形，分作一款數爲 f 之 n 期年金，及款數爲 d 元之 n－1 個年金，期數爲 n－1，n－2，

……2，1者，而求現值之和，如

$$f\, a_{n\rceil i} + a\left[a_{n-1\rceil i} + a_{n\ 2\rceil i} + \cdots\cdots + a_{2\rceil i} + a_{1\rceil i} \right]$$

因如此則式中 $d\, a_{n-1\rceil i}$, $d\, a_{n-2\rceil i}$, ……$d\, a_{1\rceil i}$ 乃在第二，第三，……及末期開始時之現值，未可作為首期開始之現值也。

諸終值 S 與現值 a 之二和數，亦已有製成之數值表，但本書限於篇幅，僅能各附一略表（附表十一及十二），茲特化為另一形式，以利計算。

$$S_{n-1\rceil i} + \cdots + S_{2\rceil i} + S_{1\rceil i}$$

$$= \frac{1}{i}\left[(1+i)^{n-1} - 1 + \cdots + (1+i) - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{i}\left[(1+i)^{n-1} + \cdots + (1+i)^{2} + (1+i) - n \right]$$

$$= \frac{1}{i}\left[S_{n\rceil i} - n \right],$$

$$a_{n\rceil i} + a_{n-1\rceil i} + \cdots + a_{2\rceil i} + a_{1\rceil i}$$

$$= \frac{1}{i}\Big[1-(1+i)^{-n} + 1-(1+i)^{-n+1} + \cdots +$$

$$1-(1+i)^{-1} \Big]$$

$$= \frac{1}{i}\left\{ n-(1+i)^{-n}\left[1+(1+i)+\cdots+(1+i)^{n-1} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{i}\left\{ n-(1+i)^{-n} \frac{1-(1+i)^{n}}{1-(1+i)} \right\} = \frac{1}{i}\left[n - \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$=\frac{1}{i}\Big[n-a_{n\rceil i}\Big]$$

$$\therefore\ \Big(A_s\Big)_{n\rceil i}=fS_{n\rceil i}+\frac{d}{i}\Big[S_{n\rceil i}-n\Big],$$

$$\Big(A_a\Big)_{n\rceil i}=(f+nd)\,a_{n\rceil i}-\frac{d}{i}\Big[n-a_{n\rceil i}\Big]$$

$$=f\,a_{n\rceil i}+\frac{d}{i}\Big[a_{n\rceil i}-n(1-i\,a_{n\rceil i})\Big]$$

$$=f\,a_{n\rceil i}+\frac{d}{i}\Big[a_{n\rceil i}-n(1+i)^{-n}\Big]$$

由是可知

$$\Big(A_a\Big)_{n\rceil i}=(1+i)^{-n}fS_{n\rceil i}+\frac{d}{i}\Big[S_{n\rceil i}-n\Big](1+i)^{-n}$$

$$=(1+i)^{-n}\Big(A_s\Big)_{n\rceil i}$$

卽終値現値間關係，仍與單純之情形一致。

〔例一〕 期限10年，首次付1000元，逐年遞減10元之年金，如照複利6%計算，求其終値與現値。

〔解〕 本題中 $f=1000$，$d=-10$（因係遞減），$n=10$，$i=0.06$．先求終値，

$$\Big(A_S\Big)_{10\rceil 0.06}$$

$$=1000\,S_{10\rceil 0.06}+\frac{-10}{0.06}\Big(S_{10\rceil 0.06}-10\Big)$$

$$=1000\times 13.1808-\frac{10}{0.06}\times 3.1808$$

$$=12650.7\text{元}。$$

次求現値，

$$\left(A_a\right)_{10\rceil 0.06}$$

$$=1000\,a_{10\rceil 0.06}+\frac{-10}{0.06}\left(a_{10\rceil 0.06}-10\times 1.06^{10}\right)$$

$$=1000\times 7.3601-\frac{10}{0.06}(7.3601-5.5839)$$

$=7064.1$元。

〔註〕 如用附表十一及十二，則可得

$$\left(A_s\right)_{10\rceil 0.06}$$

$$=1000\times 13.1808+(-10)\left(S_{9\rceil 0.06}+\cdots+S_{1\rceil 0.06}\right)$$

$$=13180.8+(-10)\times 53.01325$$

$=13180.8-530.13=12650.67$元。

$$\left(A_a\right)_{10\rceil 0.06}$$

$$=\left[1000+10\times(-10)\right]\times 7.3601$$

$$-(-10)a_{10\rceil 0.06}\quad +\cdots+a_{10\rceil 0.06}\Big)$$

$$=900\times 7.3601+10\times 43.99855$$

$=6624.09+439.99=7064.08$元。

〔例二〕 上海銀行對教育界人士優待借款，金額2000元，分4個月平均還本，息金每月按複利率0.5%計算，於最後一次結算，求息金總數。

〔解〕 $\left(A_S\right)_{4\rceil 0.005}$

$$= 10 \times 4.0301 - 5000 \times 0.0301 - 40.30 - 15.05$$
$$= 25.25\text{元}$$

或 $$= 10\, S_{\overline{4|}\,0.005} + (-2.5)\left[S_{\overline{3|}\,0.005} + S_{\overline{3|}\,0.005} + S_{\overline{1|}\,0.005}\right]$$
$$= 10 \times 4.0401 - 2.5 \times 6.020 = 40.30 - 15.05$$
$$= 25.25\text{元}$$

〔註〕 直接求之，則爲

$$10(1.005)^3 + 7.5(1.005)^2 + 5(1.005) + 2.5$$
$$= 10.101 + 7.57. + 5.025 + 2.5 = 25.25$$

21. 年金別體

年金限期無窮者，曰永久年金(Perpetuity),一定複利週期內，付款週期無限增大者，曰繼續年金(Continous Annuity)，展緩若干期方開始付款者，曰緩期年金(Deferred Annuity)。茲分別求其公式如次，

期限愈多，終值愈大且無限止，故$S_{\overline{\infty|}i}$爲無限。但

$$a_{\overline{\infty|}i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n|}i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$$

因$(1+i)^n$隨n無限增大，故$(1+i)^{-n} = \frac{1}{(1+i)^n}$之極限爲0故也。欲年數永久不絕，必現值按利率 i 所生之息，足以支付週期付款之數方可，如是則上式之意義至爲明顯。

展緩m期後支付n期之年金終值與現值，各以符號$m|S_{\overline{n|}i}$

及 $m\,|\,a_{n\rceil i}$ 記之，而讀為「m直S附n角i」等。開始付款期之展緩，與終值無關，即 $m|S_{n\rceil i}=S_{n\rceil i}$.
因終值係在期末結算也。但現值須就期首計之，不復相同。設無展緩之舉，則必於期首先開始一m期年金，繼之以展緩者，合為一 m+n 期之年金，而有

$$a_{m\rceil i}+m|\,a_{n\rceil i}=a_{m+n\rceil i},$$

$$\therefore\quad m|\,a_{n\rceil i}=a_{m+n\rceil i}-a_{m\rceil i}.$$

繼續年金終值與現值，以符號 $\overline{S}_{n\rceil i}$ 及 $\overline{a}_{n\rceil i}$ 記之，讀為「S頂橫附n角i」等。其公式應由第一類複雜年金(§18)推出。

$$\overline{S}_{n\rceil i}=\lim_{p\to\infty}S^{p}_{n\rceil i}=\lim_{p\to\infty}\frac{i}{j_p}S_{n\rceil i}=\frac{i}{\delta}S_{n\rceil i}$$

同理，$\overline{a}_{n\rceil i}=\lim_{p\to\infty}a^{p}_{n\rceil i}=\frac{i}{\delta}a_{n\rceil i}$

式中 δ 表利力，因按§11，$\lim\limits_{p\to\infty}j_p=\delta$ 故也。

〔註〕比值 $\frac{i}{\delta}$ 見本書附表五。

〔例一〕有一團體，欲每月得經常費用100元，銀行年利率為(6%，m=2)，求應一次存入元數。

〔解〕改6%，m=2為月利率i，得 $1+i=(1.06)^{\frac{1}{6}}$

$i=0.0098$，故得所求元數為

$$100\times a_{\infty\rceil 0.0098}=100\times\frac{1}{0.0098}=10204\text{元。}$$

〔例二〕期限10年之年金，展緩2年開始支付，年利率為(10%，m=2)，求其每1元之現值。

〔解〕 期數共爲20，而展緩4期，卽 $m=4$，$m+n=20$，期利率 $i=\frac{1}{2}\times10\%=5\%$，故得

$$4|\ a_{\overline{16}|0.05}=a_{\overline{20}|0.05}-a_{\overline{4}|0.05}$$

$$=12.4622-3.5460=8.92\text{元。}$$

〔註〕 如一人欲於其子入學之二年前，預籌十年學費，俾每年終得支100元。設複利率爲(10%，m=2)，則當一次存入8.92元。

〔例三〕 年租1000元，期限5年，按年利率(4%，m=2)生息，求其繼續年金現值。

〔解〕 複利週期爲半年，期數爲10，其總額爲500元，利率爲$\frac{1}{2}\times4\%=2\%$檢附表五，得$i=0.02$時，$i/\delta=1.00990$，故所求現值元數乃

$$500\times\bar{a}_{\overline{10}|0.02}=500\times1.0099\times a_{\overline{10}|0.02}$$

$$=504.95\times8.9826=4535.76.$$

〔例四〕 某一事業，每間20年需款2500元，如依年利率(7%，m=1)計，求應一次存入之元數。

〔解〕 此乃複雜永久年金之又一例，按§19及本節

$$\lim_{n\to\infty}a_{nkli}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{\overline{nk}|i}}{S_{\overline{k}|i}}=\frac{1}{S_{\overline{k}|i}}\lim_{n\to\infty}a_{\overline{nk}|i}$$

$$=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{S_{\overline{k|}i}}$$

即　$2500\times\frac{1}{0.07}\times\frac{1}{S_{\overline{20|}0.07}}=\frac{2500}{0.07}\left(\frac{1}{a_{\overline{20|}0.07}}-0.07\right)$

查附表九，　$=\frac{2500}{0.07}\left(0.0944-0.07\right)$

$$=\frac{2560\times0.0244}{0.07}=871.43\text{元。}$$

五　應用

22. 投　資

現代工商業發達，經濟組織日趨完密，企業投資，有恃精確之計算者亦愈甚。銀行存款，則涉及複利及年金問題；債券購售，則須明價格與利率之關係；工業商業之經營，則清償，折舊，估值，使用期諸端，不可不講求。防患未然，則當知保險之理。本書篇幅有限，勢難一一詳及，除儲蓄計算已於§§12,17,18,19中舉例說明，保險問題，不在本書範圍內。玆對投資各方面，擇要以例釋明，如以次諸節。

23. 債務清償

債務之清償，如一次支付，則可以複利計算，甚屬簡易。否則常採分期清償（Amortization）法，於一定時限內，分期攤還其本息。如本金於期終一次清償，而按期付息，則欠款人可逐期另行投資，使期終累積之數與應付本金相等，是曰償本基

金(Sinking Fund)法。若債款利率與投資利率相同，二法結果實同；如投資利率較高，債務人擔負自較輕。

〔例一〕 借款1500元，複利率(5%，m=1)，於五年內等分攤還本息，求每次應還款項，并作分期清償表(Amortization Table)。

〔解〕 設x爲每年應清還之元數，則

$$1500=x\ a_{\overline{5|}0.05}$$

用附表九，得 $x=1500\times0.2310=346.5$元。

分　期　清　償　表

年數	歲首本金元數	歲末息金元數	歲末還款元數	歲末所還本金元數
一	1500.00	75.00	346.50	271.50
二	1228.00	61.43	346.50	285.07
三	943.43	47.17	346.50	299.33
四	644.10	32.21	346.50	314.29
五	329.81	16.49	346.50	330.01

（說　明）

以首二行爲例：

$$\begin{array}{rr} 346.50 & 1500.00 \\ -)\ 75.00 & -)\ 271.50 \\ \hline 271.50 & 1228.50 \end{array}$$

餘倣此。

〔注意〕 末行首尾二數原應相等，在此 330.01 較大於 329.81，乃因用表太簡之故，是以實際上必須六七位小數之表。

〔註〕 以後各表數字，除註明者外，皆指元數。

〔例二〕 同上題，但只知每期所付爲較完整之款額350.00元，問若干年方可清償？并求末次所付之數。

〔解〕 設n爲所求年數，則當求合於下式之最小n值：

$$350\ a_{\overline{n|}0.05}>1500;\qquad a_{\overline{n|}0.05}>\frac{1500}{350}=4.28\cdots$$

檢第八表，

$$a_{\overline{4}|0.05}=3.5460<4.28\cdots<a_{\overline{5}|0.05}=4.3295,$$

故知 $n=5$。在四年終時，複利本利和爲

$1500\times(1.05)^4$

$=1823.25$元，

歷期所付 350 元之年金終值爲

$350\,a_{\overline{4}|0.05}$

$=1508.54$元。

是則第五年初所餘本金應爲

$1823.25-1508.54$

$=314.71$元。

而息金按 5 %計算，得

$314.71\times5\%=15.74$元。

分 期 清 償 表

年數	歲首本金	歲末息金	歲末還款	歲末所還本金
一	1500.00	75.00	350.00	275.00
二	1225.00	61.25	350.00	288.75
三	936.25	46.81	350.00	303.19
四	633.06	31.65	350.00	318.35
五	314.71	15.74	330.45	314.71
總計	4609.02	230.45	1730.45	1500.00

此表說明同例一者。核算法如次：

$4609.02\times5\%=230.45,$

$230.45\times1500.00=1730.45,$

〔例三〕 同前題，但本金於五年終一次清付，欠款人投資利率爲(5%，m=1)，求每年所擔負之數，幷作基金累積表。

〔解〕 設每年應投基金爲 X元

$$x\,S_{\overline{5}|0.05}=1500,$$

$$x=\frac{1500}{S_{\overline{5}|0.05}}=1500\left(\frac{1}{a_{\overline{5}|0.05}}-0.05\right)$$

$$=1500(0.2310-0.05)=271.5\text{元},$$

每期息金爲

$$\begin{array}{r} 1500 \\ 0.05(\times \\ \hline 75元 \end{array}$$

擔負爲

$$\begin{array}{r} 271.5 \\ 75\ \ (+ \\ \hline 346.5元 \end{array}$$

（說明）

$$\begin{array}{r} 550.58 \\ 27.83 \\ 271.50(+ \\ \hline 835.91 \end{array}$$

償本基金累積表

付款期	期初基金	期末息金	每期投資	期末基金
一	0	0	271.50	271.50
二	271.50	13.58	271.50	556.58
三	556.58	27.83	271.50	855.91
四	855.91	42.80	271.50	1170.21
五	1170.21	58.51	271.50	1500.22

〔註〕 與例一比較，可見二法之結果實同。如投資利率較高，設爲(6%，m=1)，則每期投資額爲

$$1500\left(\frac{1}{a_{\overline{5}|0.06}}-0.06\right)=1500\times 0.1774=266.1元，$$

故債務人担負較輕。在此種條件下，償本基金法始較有利，是固不待言者，但減輕担負究若干，則非由計算不克知之矣。

24. 債券發行

政府或私人企業，每因籌款，有發行債券(Bonds)之舉。券面所載之本金，稱曰面額(Par或Par Value)，其息金曰債息(Dividend)，清債時付還之數曰兌換額(Redemption Value)。兌換額常等於面額，稱爲平値(At Par)；發行人爲吸收資金之故，亦有所使兌換額較高者，則曰超値(At a Premium)，超出之値曰酬款(Premium)。

債券因酬款有無，償本次數，而有種種類別，所涉問題，

各有差異，非篇幅短少如本書者所能具論。今僅就簡易主要之例，分別列舉，以見一斑而已。

〔註〕　我政府發行之國內債券有二種；分期抽籤還本者曰公債；分期還本，使利隨本減者曰庫劵。

〔例一〕　債劵面額1500元，利率(5%，m=1)，五年後一次平値還本，如投資利率爲(6%，m=1)，求每年應付之償本基金。

〔解〕　同上節例三註，讀者試自製償本基金累積表。

〔例二〕　同上節例一，但每年平均還本300元，求作分期清償表。

分　期　清　償　表

年數	歲首負債餘額	歲末息金	歲末還本	每年担負總額數
一	1500.00	75.00	300.00	375.00
二	1200.00	60.00	300.00	360.00
三	900.00	45.00	300.00	345.00
四	600.00	30.00	300.00	330.00
五	300.00	15.00	300.00	315.00

〔解〕　本題因息隨本減，故每年担負依一相等之差數漸減。

〔註〕　如視末行各數爲一遞減年金，而求現值(§20)，則

$$\left(A_a\right)_{\overline{5}|0.05}$$

$$=375\,a_{\overline{5}|0.05}+\frac{-15}{0.05}\left[a_{\overline{5}|0.05}-5(1.05)^{-5}\right]$$

$$=375\times4.3295-300\times0.412=1500\text{元}。$$

〔例三〕　同上題，設每劵面值10元，分五年平均償還，求每年償還額，并作分期清償表。

〔解〕　按上節例一，得每年償還額爲346.5元。但每劵面

値10元，應記明每年收囘張數，故支付不得爲零畸之數，分期淸償表遂與前稍異。茲以平均償還款額，儘量收囘債劵，尾數歸入下期。又因債劵收囘一部，息金隨之而減，卽以此於次期作收囘債劵之用，故每期收囘張數漸增。茲據此原則，分製債劵收囘表及分期淸償表如次：

債劵收囘表

	元	收囘張數	
平均償還額	346.50		
	75.00		
	271.50	27	1.50
5%	13.58		285.00
	265.08	28	6.58
5%	14.25		299.33
	299.33	30	5.91
5%	14.96		314.29
	314.29	23	0.20
5%	15.71		330.00
	330.00	33	.20

分期淸償

年數	歲末收囘債劵	歲末還本	歲首負債餘額	歲末息金	歲末付本息總數
一	27張	270	1500	75.0	335.0
二	28	280	1230	61.5	341.5
三	30	300	950	47.5	347.5
四	32	320	650	32.0	352.5
五	33	330	330	16.5	346.5

左表中平均償還額包含本息；故減去息金，卽爲還本之數。再依利率5% 生息，所得款連上期餘款合計，作次期收囘債劵之用。如

271.50－270 ＝ 1.50

1.50＋285.08＝286.58

286.58－280 ＝6.58，餘倣此。

25. 債劵價格

債息之利率與投資利率多寡及複利週期未必相同，此外又有超値關係，故其價格與面値並非一致。爲計算簡便計，茲僅

述複利週期一致者之例。

〔例一〕 面額 1000 元之債券，利率爲(6%，m=2)，三年後以 110% 之超值還本，如投資率爲(4%，m=2)，求此債券之價格。

〔解〕 購此券者三年後可得$1000\times\frac{110}{100}=1100$元，且半年有債息$1000\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{100}=30$元。 故其價格， 即1000元依投資利率(4%，m=2)之複利現值與30元之年金現值之和。

$$\therefore\ 1100\times(1.02)^{-6}+30\,a_{\overline{6}|0\cdot02}$$
$$=1100\times0.8880+30\times5.6014=1144.84\text{元。}$$

〔註〕 價格高於面額之故，乃因有酬款 100 元，且債息利率較高，每期可多得息金 1000 (0.03－0.02)=10 元，是以超出之值，應卽此二者現值之和，卽

$100\times(1.02)^{-6}+10\,a_{\overline{6}|0\cdot02}=88.80+56.01=144.81$元本此計算曰超貼法 (Premium Discount Method)，較上爲簡便。

價格高於面額，並非購券人之之損失，就下表可見：

超值清償表

期數	投資金息	債息	清償超值	每期投資實額
				1144.84
一	22.90	30.00	7.10	1137.74
二	22.75	30.00	7.25	1130.49
三	22.61	30.00	7.39	1123.10
四	22.46	30.00	7.54	1115,56
五	22.30	30.00	7.69	1107.81
六	22.16	30.00	7.84	1099.97

（說明）

$1144.84\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{100}\right)$

$=22.90$元。

$30-22.90-7.10$元。

$1144.84-7.10=1137.74$元。餘同。

〔註一〕 憑投資率高於債息率時，價格較低，可按同一之理計算，幷得貼值累積表。

〔註二〕　投資實額亦曰簿記價值(Book Valuc)。

〔注意〕　依上理製成債券價格表，如Spargue之 Complete Bond Table，甚爲便利，玆附其一部份於次：

平　值　債　券　價　格　表

〔面額1元，債息利率(5%，m=2)〕

兌現期 投資率	十　年	十年半	十一年	十一年半
4%	1.08176	1.08506	1.08829	1.09146
$4\frac{1}{2}$%	1.03991	1.04148	1.04301	1.04451
5%	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$5\frac{1}{2}$%	0.96193	0.96051	0.95914	0.95700
6%	0.92561	0.92203	0.92032	0.91778

〔例二〕　產業一所原價 15000 元。成交時付現金5000元，餘額按複利率5%，每年平均付還本息，至 10 年末淸償。至第四年末，原業主按複利率 6% 轉讓此約於他人，求其售價。

〔解〕　先求此約所得分期淸償額之元數，

$$10000\times\frac{1}{a_{\overline{10}|0.05}}=10000\times0.1295=1295\text{元}。$$

今本約距淸償期尙有 6 年，故當求上年之年金現值，卽得售價爲：

$$1295\,a_{\overline{6}|0.06}=1295\times4.9173=6368\text{元}。$$

26. 債券收益

購券人雖自訂有一定之投資率，以求債券價值，然與債券市價未必相合。故由掛牌之市價，以反求投資率，亦甚重要。此種投資率，亦曰收益率（Yield Rate）。

〔例一〕 航空獎券每張20元，未中獎者，十年後還本，并給紅利6元。小兌換店以十分之一之代價，收未中獎之券，而倍其值出售，求購券者之收益率。

〔解〕 設所求收益率爲 i，則以 $20\times\frac{1}{10}\times 2=4$ 元之代價，十年後可得26元。故

$$4(1+i)^{10}=26\,,\ 10\log(1+i)=\log\frac{26}{4}\,,$$

即 $$\log(1+i)=\frac{1}{10}\times 0.81291=0.08129\,,$$

$$1+i=1.2057,\quad \therefore\ i=20.57\%$$

〔例二〕 面額1000元之平值債券，利率爲（5%，m=2），距兌現期十年半，掛牌市價爲105，即每100元作105元，試求其收益率。

〔解〕 設收益率爲 i，而計期終之收益，爲面額本金與債息之年金終值二者之和，得

$$1050(1+i)^{21}=1000+1000\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}\times S_{21\rceil i}\,,$$

即 $$1050(1+i)^{21}-1000-25\ \frac{(1+i)^{21}-1}{i}=0$$

乃一22次之方程式，解之匪易。今利用上節之債券價格表，作內插法。

$$\left.\begin{array}{l|l} 4\% & 1.08506 \\ 4\%+x & 1.05000 \\ 4\tfrac{1}{2}\% & 1.04148 \end{array}\right. \qquad \frac{(4\%+x)-4\%}{4\frac{1}{2}\%-4\%}=\frac{1.05000-1.08506}{1.04148-1.08506}=\frac{-0.03176}{-0.04185}$$

$$x=0.005\times\frac{0.03176}{0.04185}=0.004,\quad\therefore\quad i=0.044=4.4\%$$

〔註〕 劉覺民編實用投資數學§64載有一求近似値之平均値法，頗簡便。（此法之證明，見Hart: Math. of Investment 附錄之 Note 11）當債息率與收益率甚相近，且兌現期不過長時，結果頗正確可用。

今卽以本題爲例，釋明此法。此債劵每期息金25元，而購價上每期平均損失$\frac{50}{21}=2.38$元，故實得22.62元。面額與價格平均爲$\frac{1}{2}(1000+1050)=1025$元，故$\frac{i}{2}=\frac{22.62}{1025}=2.21\%$，卽$i=4.42\%$.

又李鴻壽：會計數學第四章§9（丙）另有一近似算法，較此稍繁，故不贅。

〔例三〕 有債劵面額500元，債息率（5%，m=1），十年後以110%之超値還本，如掛牌照面額出售，試求購者之收益率。

〔解〕 設收益率爲i而計期終之收益。購價之終値，應爲超値還本數與債息之年金終値二者之和，卽

$$500(1+i)^{10}=500\times\frac{110}{100}+500\times\frac{1}{100}\times S_{\overline{10}|i}$$

卽　$$500(1+i)^{10}-25S_{\overline{10}|i}=550,$$

或　$$500(1+i)^{10}\quad 25\frac{(1+i)^{10}-1}{i}=550,$$

乃11次之方程式，今以用內插法解之。試思債息利率爲5%；十年後，酬金10%，僅合單利率1%，折爲複利率r,則

$$(1+i)^{10}=110\%,\qquad \log(1+r)=\frac{1}{10}\log 1.1=0.00414,$$

$$r=0.96\%$$

故可知收益率，必介於6%與5%之間。以此二值代入，

$$500(1.05)^{10}-25\ S_{10}\rceil_{0.05}=500,$$

$$500(1.06)^{10}-25\ S_{10}\rceil_{0.06}=565.88,$$

$$0.06-0.05:i-0.05=565.88-500:550-500,$$

$$\therefore\ i=0.05+\frac{550-500}{565.88-500}\times 0.01$$

$$=0.05+0.00759=5.759\%$$

再用平均值法求收益率之近似值。此債劵十年後得酬款50元，平均每年爲5元，再加債息25元，共爲30元。面額與兌換額之平均值爲$\frac{1}{2}(500+550)=525$元。據此求收益率，則得

$$i=\frac{30}{525}=5.71\%$$

〔注意〕　由上題可知收益率非5%（債息複利率）+1%(酬款單利率)=6%，因一係複利，一係單利也。亦非5%+0.96%（酬款複利率）=5.96%，因複利收益不與利率成比例也。試在複利表，任取一例，如

$(1.06)^{10}-1=0.7908$,　$(1.03)^{10}-1=0.3439$

可知複利率倍增時，收益不只一倍。

27. 折舊

企業之資產設備，使用後勢必有所損耗，故其實用值價必因之而減，是爲折舊(Depreciation)。求企業之健全者，必須籌措基金，以供折舊之消耗，是爲折舊基金，亦曰置換基金(Replacement Fund)。每年所提供之款額曰置換費(Replacement Charge)。資產至使用期(Life)終之價值，曰殘值(Scrap Value)，原值與殘值之差，曰置換成本(Replacement Cost)。資產因使用每年之實耗，曰折舊費(Depreciation Charge)，亦卽各年換置費及其前者息金之總和。如換置費不計息，則此二者相等，故亦有對之不復區別者。原值與折舊費累積數之差，曰簿記價值，此與§25例一註二所述者，性質雖異，而意義實同。企業資產之折舊乃不可避免之事，不因經營之盈虧而定，故先結純利，再據以提折舊費，乃不明會計原理之過也。

折舊方法頗多，本書僅能取其重要者例釋之。其主要點須知資產原值，使用時期，及期終不能使用時之殘值，方可本折舊之計劃，定方法之取捨。

〔例一〕 某項資產原額3000元，使用期爲6年，期終殘值500元。如每年終平均攤籌置換費，試求此資產逐年之簿記價值，幷作折舊表。

〔解〕此項產業置換成本全額爲：3000－500＝2500元，以6年均攤，置換費爲$\frac{2500}{6}=416.67$元。

準此製成右表，其中每年末之簿記價值，乃自上年者減去折舊費而得。

折 舊 表

年數	年末簿記價值	年末折舊費	折舊費累積	簿記價值遞減之比
一	2583.33	416.67	816.67	0.84
二	2166.66	416.67	833.34	0.81
三	1749.99	416.67	1250.01	0.76
四	1333.32	416.67	1666.68	0.67
五	916.65	416.67	2083.35	0.53
六	499.99	416.67	2500.02	

〔註〕此法名直線法 (Straight Line Method)，對資產原價及折舊費概不計息，每年置換費，即折舊費。其簿記價值逐年減少，而折舊費（即減少之數）一定，故後者對前者之比漸增。因之簿記價值不按定比迭減。如欲使此比值爲一定，則曰常數百分法(Constant Percentage Method)，詳下例。

〔例二〕同上題，按常數百分法製折舊表。

〔解〕設 r 爲簿記價值逐年減少數之比值，即折舊費對簿記價值之比，則逐年簿記價值依次應爲：

$3000(1-r)$,

$3000(1-r),^{2}$

………

至第6年末之簿記價

折 舊 表

年數	年末簿記價值	年末折舊費	折舊費累積	簿記價值遞減之比
一	2225.5	774.5	774.5	均爲0.74182
二	1651.0	574.5	1349.0	
三	1224.7	426.3	1775.3	
四	908.6	316.1	2091.4	
五	674.0	234.6	2326.0	
六	500.0	174.0	2500.0	

値（即殘値）爲 $500=3000(1-r)^6$

$$\therefore\ 1-r=\sqrt{\frac{500}{3000}}=0.74183,$$

$$3000\times0.74183=2225.5,$$

$$3000-2225.5=774.5,$$

依次推算，即得折舊表如上。

〔例三〕 同上題，但每年置換費須如例一之相等，且按年利率 5 %生息。在此注意因計息關係，折舊費大於置換費。

〔解〕 本題乃以終値爲置換成本之年金作置換費，故應爲

$$2500\times\frac{1}{s_{\overline{6}|0.05}}=2500\left(\frac{1}{a_{\overline{6}|0.05}}-0.05\right)$$

$$=2500(0.197-0.05)=367.50\text{元}。$$

據此即可製成右表。因折舊費及其累積數皆在年末，故息金始於第一年末。

$367.50\times5\%$

$=18.38,$

$367.50+18.38$

$=385.88,$

$367.50+385.88$

$=753.38,$

$3000.00-367.50=2632.50.$

折　　舊　　表

年數	折舊費	折舊費累積數	前項息金	簿記價値
	0	0	0	3000.00
一	367.50	367.50	0	2632.50
二	385.88	753.38	18.38	2246.62
三	405.17	1158.55	37.67	1841.45
四	425.43	1583.98	57.93	1416.02
五	446.70	2030.68	79.20	969.32
六	469.03	2499.71	101.53	500.29

餘可推類，至最後簿記價值，合於殘值，卽證明計算無誤。在此相差0.29元，乃所用表值小數位過少之故。

〔註〕 此法曰淸償基金法 (Sinking Fund Method)。與此相類者，尙有分期償淸法 (Amortization Method) 亦曰年金法 (Annuity Method) 或稱投資利息法 (Interest on Investment Method) 者。其歧異之點，乃在其對資產原值，亦計算利息。故置換費與上法同，而折舊費則將資產原值之逐年息金，一幷計入，此二法之計算計劃雖異，但當資產利率與置換費利率等值時，所求得之簿記價值等項，並無差別，故實相同。因之本書亦不贅及。

28. 資本折化成本(*Capitalized Cost*)，投資年費(*Annual Investment Charge*)

吾人創一企業時，如除原本而外，另加資金，以作此後換置費所需之一永久年金，此後企業之進行，卽永可無虞不匱。此永久換置費所需之資金，與原本之和，稱爲資本折化成本。置企業收益不論，而究本金年息與每年換置費之和，則爲投資年費。不同資產之比較，可就此二事之一考之。

〔例一〕 某機器原價3000元，使用期20年，殘值爲500元。設年利率爲7％，求資本折化成本與投資年費。

〔解〕 先求資本折化成本，須注意換置費所需乃一複雜永久年金現值。按§21例四，卽知每20年一次換置費3000－500＝2500元之年金現值爲871.43元。

∴　資本折化成本＝3000＋871.43＝3871.43元。
是卽創業時，只須多籌871.43元，卽可使此機器永不失效。

再論投資年費，易知 3000 元之息金，爲 $3000\times7\%=210$ 元。每20年一次換置費2500元之年金週期付款額，可倣§17之例二求得，爲

$$\frac{2500}{S_{20\rceil 0.07}}=2500\left(\frac{1}{a_{20\rceil 0.07}}\right).$$

$$=2500\times0.0244=61\text{元。}$$

∴　投資年費＝210＋61＝271元。

〔注意〕　資本折化成本每年之息金，卽爲投資年費，如上例中，$3871.43\times0.07=271$。此理甚顯，更可以算式證明。

設原資額爲 C，每 n 年之換置費爲W，利率爲 i，資本折化成本爲K，投資年費爲H。如上所述，

$$K=C+\frac{1}{i}\frac{W}{S_{n\rceil i}},\quad H=Ci+\frac{W}{S_{n\rceil i}},\quad \therefore\quad H=iK$$

是則兩種資產之資本折化成本，與投資年費有一相等，其他亦然。可見此二端，實一事之二方面也。

〔例二〕　某公路每 12 年須修築一次，每方丈材料費爲 60 元。如另用一種材料，使用期可增至 15 年。設按年利率4%計算，問該材料價格爲若干元，方與前者同一合算？

〔解〕　按上述之理，可知不論按資本折化成本或按投資年費計算，其結果爲一致，今卽按前者推求之。設所求價格元數爲 x，則

$$x+\frac{x}{0.04}\frac{1}{S_{15\rceil 0.04}}=60+\frac{1}{0.04}\frac{60}{S_{12\rceil 0.04}},$$

$$x\left(0.04+\frac{1}{S_{15\rceil 0.04}}\right)=60\left(0.04+\frac{1}{S_{12\rceil 0.02}}\right),$$

即
$$\frac{x}{a_{14\rceil 0.04}}=\frac{60}{a_{12\rceil 0.04}}$$

$$\therefore\ x=60\times a_{15\rceil 0.04}\times\frac{1}{a_{12\rceil 0.04}}$$

$$=60\times 11.1184\times 0.1066=71.11\text{元}。$$

29. 鑛產估價

鑛產一類企業，利源逐年漸減，終至於無。故必於收益中提償本基金(Redemption Fund)，備原有投資額之損失，所餘方可爲純利，此種資產之價格，自亦視此爲準。

〔例一〕 有一礦產，值25000元，估計於20年終採畢，所餘僅有機器等殘值5000元。設欲其每年終所獲之等值收益，足以付資本按年利率6%計算之息金，及以年利率4%計算之償本基金，求其收益額。

〔解〕 設 x 爲每年應提償本基金之元數[illegible]在20年應付還者爲

$$25000-5000=20000\text{元},$$

則
$$20000=x\,S_{20\rceil 0.04},$$

$$\therefore\ x=20000\times\frac{1}{S_{20\rceil 0.04}}=20000\left(\frac{1}{a_{20\rceil 0.04}}-0.04\right)$$

$$=672\text{元}$$

即 收益$=25000\times 0.06+672=2172$元。

〔例二〕 已知上題礦產之採取期，採畢時殘值，及每年等

額之收益數。如欲得投資利率6%及償本基金利率4%，試求此礦業之價格。

〔解〕　設P爲所求價格元數，按上題之理，得方程式

$$P\times 0.06+(P-5000)\frac{1}{S_{\overline{20}|0.04}}$$

$$=P\times 0.06+(P-5000)\times 0.0336$$

$$=P(0.06+0.0336)-5000\times 0.0336$$

$$=P\times 0.0936-168=2172,$$

$$\therefore\ P=\frac{1}{0.0936}(2172+168)=\frac{2340}{0.0936}=25000\text{元}。$$

〔例三〕　已知上題之鑛產投資原額，殘值，每年收益及二種利率，則其採取期應爲若干年，始爲合格?

〔解〕　設n爲所求年數，仍依上理，得方程式

$$2172=25000\times 0.06+20000\times\frac{1}{S_{\overline{n}|0.04}},$$

卽
$$\frac{20000}{S_{\overline{n}|0.04}}=\frac{20000\times 0\cdot 04}{(1.04)^n-1}=2172-1500=672,$$

$$\therefore\ S_{\overline{n}|0.04}=\frac{20000}{672}=29.7619,\ \text{或}(1.04)^n=2.1905.$$

按附表七解前式，或用對數法解後式，均得n=20年。

〔註〕　此題中之投資利率或償本基金未知時，亦可解出，讀者不難自求。

30. 合組使用期(*Composite Life*)

一工廠之內資產各部，使用期長短，每非盡同。所謂合組

使用期，非諸使用期之算術平均數，亦非其加權平均數。蓋換置額各部不同，在使用期間，復有息金之關係也。此使用期，乃將資產各部按清償基金法，求換置費，以其總和，依規定利率投資，使積成與各部換置額總和相等之基金，而定其所需之年數。以工廠爲公司債劵擔保時，後者還本期限不能超出此種合組使用期甚明。

〔例〕 某工廠機器有三部份如右表，試按清償基金法，依利率6%，求合組使用期。

部份	使用期	原值元數	殘值元數
1	10年	20500	500
2	20	35750	750
3	16	19000	1000

〔解〕 設各換置額爲W_1，W_2，W_3，總和爲W；換置費爲R_1，R_2，R_3，總和爲R；所求年數爲n，則

$$W_1=20500-\ 500=20000\qquad R_1=\frac{20000}{S_{10\rceil 0.05}}=1518$$

$$W_2=35750-\ 750=35000\qquad R_2=\frac{35000}{S_{20\rceil 0.06}}=931$$

$$W_3=19000-1000=18000\qquad R_3=\frac{18000}{S_{16\rceil 0.05}}=720$$

$$\overline{W=73000}\qquad\qquad \overline{R=\ 3151}$$

$$S_{n\rceil 0.06}=\frac{73000}{3151}=23.127,\quad 卽\frac{(1.06)^n-1}{0{\cdot}06}=23.177$$

故 $(1.06)^n=2.39062$，$\therefore\ n=\dfrac{\log\ 2.3906}{\log\ 10{\cdot}6}=14.9$年。

〔註〕 使用期之平均數爲$\dfrac{10+20+16}{3}=15.3$年，加權平均數爲$\dfrac{10\times20000+20\times35000+16\times18000}{20000+35000+18000}=\dfrac{1188}{73}=16.3$年，均非合組使用期，但差異亦不過大耳。

附　　錄

等值日期問題之討論

(1)單貼現中，由二面值不相等之期票，求其有相等現值之日期，依貼現法與單利法二者計算時，只有一法能得解。

〔證〕 設二票之面值爲A_1與A_2，貼現期爲t_1與t_2，利率爲$d=i$，所求日期爲x(貼現法)或x'(單利法)。按現值相等關鍵，以立等值方程式。

按貼現法，$A_1[1-d(n_1-x)]=A_2[1-d(n_2-x)]$

解此一次方程式，得公式
$$x=\frac{A_1n_1-A_2n_2}{A_1-A_2}-\frac{1}{d}$$

按單利法，
$$\frac{A_1}{1+i(n_1-x')}=\frac{A_2}{1+i(n_2-x)}$$
，式中$i=d$.

解得公式
$$x'=\frac{A_1n_2-A_2n_1}{A_1-A_2}+\frac{1}{i}$$

因之
$$x+x'=n_1+n_2$$

可見x與x'之值，不能均小於n_1及n_2二數中之小者。若求得等值期之數大於原貼現期之數，則有一票須逾期，始克與他一票等值，而無意義矣。

(2)複貼現中，此問題不存在。因二面值不相等之期票，或時時等值，或永不能如是。

〔證〕 依上文表各量，而按複貼現法計之。

按貼現法，
$$A_1(1-d)^{n_1-x}=A_2(1-d)^{n_2-x}$$

$$\therefore \qquad \frac{A_1}{A_2}=\frac{(1-d)^{n_2-x}}{(1-d)^{n_1-x}}=(1-d)^{n_2-n_1}$$

故如已知量合此關係，則二票時時皆等值，否則任何時皆不等值。

按複利法，有 $$\frac{A_1}{(1+i)^{n_1-x}}=\frac{A_2}{(1+i)^{n_2-x}},$$

$$\therefore \qquad \frac{A_1}{A_2}=\frac{(1+i)^{\text{[illegible]}-x}}{(1+i)^{n_2-x}}=(1+i)^{n_1-n_2}$$

故亦有同一結論。

重要參考書目

1. 劉覺民：實用投資數學（中華）。
2. 褚鳳儀：投資數學（商務）。
3. 李鴻壽：會計數學（商務）。
4. W. L. Hart: Math. of Investment.
5. Rietz－Cathorne－Rietz: Math. of Finance.
6. E. B. Skinner: The Math. Theory of Investment.
7. Glover: Tables from Applied Math.

最後一書爲詳盡之數值表，前六書亦均附載相當精密之表。如欲單購一對數表，則以下書爲便：

8. 余介石：五位數學用表（中華）。

附　　表

（一）複利終值表（整期）：$(1+i)^n$

n \ i	1%	1½%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
1	1,0100	1,0150	1,0200	1,0300	1.0400	1.0500	1.0600	1.0700
2	1,0201	1,0302	1,0404	1.0609	1.0816	1.1025	1.1236	1,1449
3	1,0303	1.0457	1,0612	1,0927	1.1249	1.1576	1,1910	1.2250
4	1,0406	1.0614	1.0824	1.1255	1.1699	1.2155	1,2625	1.3108
5	1.0510	1,0773	1.1041	1 1593	1,2167	1.2763	1.3382	1.4026
6	1.0615	1.0934	1.1262	1.1941	1.2653	1.3401	1.4185	1 5007
7	1.0721	1.1098	1.1487	1.2299	1,3159	1.4071	1.5036	1.6058
8	1.0829	1.1265	1.1717	1.2668	1.3686	1.4775	1.5938	1.7182
9	1,0937	1,1434	1,1951	1.3048	1,4233	1,5513	1.6895	1.8385
10	1.1046	1.1605	1.2190	1.3439	1.4802	1 6289	1,7908	1.9672
11	1,1157	1.1779	1,2434	1.3842	1.5395	1.7103	1,8983	2,1049
12	1.1268	1,1956	1,2682	1.4258	1.6010	1.7959	2.0122	2.2522
13	1.1381	1.2136	1.2936	1.4685	1.6651	1.8856	2,1329	2.4098
14	1.1495	1.2318	1.3195	1.5126	1.7317	1.9799	2.2609	2.5785
15	1.1610	1.2502	1.3459	1.5580	1.8069	2.0789	2.3966	2.7590
16	1.1726	1.2690	1,3728	1,6047	1.8730	2.1829	2.5404	2,9522
17	1.1843	1.2880	1,4002	1.6528	1.9479	2.2920	2.6928	3.1588
18	1.1961	1.3073	1.4282	1.7024	2.0258	2.4066	2.8543	3,3799
19	1.2081	1,3270	1,4568	1,7535	2.1068	2.5270	3,0256	3,6165
20	1.2202	1.3469	1,4859	1.8061	2.1911	2.6533	3.2071	3,8697

（二）複利現値表：$(1+i)^{-n}$

n \ i	1%	1½%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
1	0.9901	0.9852	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346
2	0.9803	0.9707	0.9612	0.9426	0.9246	0.9070	0.8900	0.8734
3	0.9706	0.9563	0.9423	0.9151	0.8890	0.8638	0.8396	0.8163
4	0.9610	0.9422	0.9238	0.8885	0.8548	0.8227	0.7921	0.7629
5	0,9515	0.9283	0.9057	0.8626	0.8219	0.7835	0.7473	0.7130
6	0,9420	0.9145	0.8880	0.8375	0.7903	0.7462	0.7050	0.6663
7	0.9327	0,9010	0,8706	0,8131	0.7599	0.7107	0.6651	0.6227
8	0.9235	0.8877	0.8535	0.7894	0.7307	0.6768	0.6274	0.5820
9	0.9143	0.8746	0,8368	0.7664	0.7026	0.6446	0,5919	0.5439
10	0.9053	0.8617	0,8203	0.7441	0.6756	0.6139	0.5584	0.5083
11	0,8963	0.8489	0,8043	0.7224	0.6496	0.5847	0.5268	0.4751
12	0,8874	0.8364	0.7885	0.7014	0,6246	0.5568	0.4970	0.4440
13	0.8787	0.8240	0.7730	0.6810	0.6006	0.5303	0.4688	0.4150
14	0.8700	0.8118	0.7579	0.6611	0.5775	0.5051	0.4423	0.3878
15	0.8613	0.7999	0.7430	0.6419	0.5553	0.4810	0.4173	0.3624
16	0.8528	0.7880	0.7284	0.6232	0.5339	0.4581	0.3936	0.3387
17	0.8444	0.7764	0.7142	0.6050	0.5134	0.4363	0.3714	0.3166
18	0.8360	0.7649	0.7002	0.5874	0.4936	0.4155	0.3503	0.2959
19	0.8277	0.7536	0.6864	0.5703	0.4746	0.3957	0.3305	0.2765
20	0.8195	0.7425	0.6730	0.5537	0.4564	0.3769	0.3118	0.2584

（三）複利終値表（零期）： $(1+i)^{\frac{1}{p}}$

p＼i	1%	1½%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
2	1.0050	1.0075	1.0100	1,0149	1.0198	1.0247	1.0296	1.0344
3	1.0033	1.0050	1.0066	1,0099	1.0132	1.0164	1.0196	1.0228
4	1.0025	1.0037	1.0050	1,0074	1.0099	1.0123	1.0147	1.0171
6	1.0017	1.0025	1.0033	1,0049	1.0066	1.0082	1.0098	1.0113
12	1.0008	1.0012	1.0017	1,0025	1.0033	1.0041	1,0049	1.0057
13	1.0008	1.0011	1.0015	…………	…………	…………	…………	…………
26	1.0004	1.0006	1.0008	1,0011	1,0015	1.0019	1.0022	1.0026
52	…………	…………	…………	1,0006	1.0008	1.0009	1.0011	1.0013

（四）實率化名率表： $i_p = p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right]$

p＼i	1%	1½%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
2	.00998	.01494	.01990	.02978	.03961	.04939	.05913	.06882
3	.00997	.01493	.01987	.02970	.03948	.04919	.05884	.06843
4	.00996	.01492	.01985	.02967	.03941	.04909	.05870	.06823
6	.00996	.01491	.01984	.02963	.03935	.04899	.05855	.06804
12	.00995	.01490	.01982	.02960	.03928	.04889	.05841	.06785
13	,00995	.01490	.01982	…………	…………	…………	…………	…………
26	…………	.01489	.01981	.02958	.03925	.04884	.05833	.06775
52	…………	…………	…………	.02957	.03924	.04881	.05830	.06770
1/2	.01005	.01511	.02020	.03045	.04080	.05125	.06180	.07245
1/4	.01010	.01534	.02061	.03138	.04246	.05387	.06562	.07162
1/12	.01057	…………	…………	…………	…………	…………	…………	…………

（五）名率i對利力δ比値表

i	δ	i：δ
0.02	0.019802	1.00990
0.025	0.024693	1.01245
0.03	0.029559	1.01493
0.04	0.039221	1.01987
0.05	0.048790	1.02480
0.06	0.058261	1.02971
0.07	0.067659	1.03460

（六）複利率i與貼現率d互化表

i	d	d	i
.01	.0099	.01	[illegible]
.015	.0138	.015	[illegible]
.02	.0196	.02	.020[illegible]
.03	.0291	.03	.0309
.04	.0385	.04	.0413
.05	.0475	.05	.0526
.06	.0566	.06	.0638
.07	.0654	.07	.0753

（七）年金終值表：$S_{\overline{n}|}\,i=\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$

i / n	1%	$1\frac{1}{2}$%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0100	2.0150	2.0200	2.0300	2.0400	2.0500	2.0600	2.0700
3	3.0301	3.0452	3.0604	3.0909	3.1216	3.1525	3.1836	3.2149
4	4.0604	4.0909	4.1216	4.1836	4.2465	4.3101	4.3746	4.4399
5	5.1010	5.1523	5.2040	5.3091	5.4163	5.5256	5.6371	5.7507
6	6.1520	6.2296	6.3081	6.4684	6.6330	6.8016	6.9753	7.1533
7	7.2135	7.3230	7.4343	7.6625	7.8993	8.1420	8.3938	8.6540
8	8.2857	8.4328	8.5830	8.8923	9.2142	9.5491	9.8975	10.2598
9	9.3685	9.5593	9.7546	10.1591	10.5828	11.0266	11.4913	11.9780
10	10.4622	10.7027	10.9497	11.4639	12.0061	12.5779	13.1808	13.8164
11	11.5668	11.8633	12.1687	12.8078	13.4864	14.2068	14.9716	15.7836
12	12.6825	13.0412	13.4121	14.1920	15.0258	15.9171	16.8699	17.8885
13	13.8093	14.2368	14.6803	15.6178	16.6268	17.7130	18.8821	20.1406
14	14.9474	15.4504	15.9739	17.0863	18.2919	19.5986	21.0151	22.5505
15	16.0969	16.6821	17.2934	18.5989	20.0236	21.5786	23.2760	25.1290
16	17.2579	17.9324	18.6393	20.1569	21.8245	23.6575	25.6725	27.8881
17	18.4304	19.2014	20.0121	21.7616	23.6975	25.8404	28.2129	30.8402
18	19.6147	20.4894	21.4123	23.4144	25.6454	28.1324	30.9057	33.9990
19	20.8109	21.7967	22.8406	25.1169	27.6712	30.5390	33.7600	37.3790
20	22.0190	23.1237	24.2974	26.8704	29.7781	33.0660	36.7856	40.9955

（八）年金現值表：$a_{\overline{n}|}i=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

i n	1%	$1\frac{1}{2}$%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
1	0.9901	0.9852	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346
2	1.9704	1.9559	1.9416	1.9135	1.8861	1.8594	1.8334	1.8080
3	2.9410	2.9122	2.8839	2.8286	2.7751	2.7232	2.6730	2.6243
4	3.9020	3.8544	3.8077	3.7171	3.6299	3.5460	3.4651	3.3872
5	4.8534	4.7826	4,7135	4.5797	4.4518	4.3295	4,2124	4.1002
6	5.7955	5.6972	5.6014	5.4172	5.2421	5.0757	4.9173	4.7665
7	6.7282	6.5982	6.4720	6.2303	6.0021	5.7864	5.5824	5.3893
8	7.6517	7.4859	7.3255	7.0197	6.7327	6.4632	6.2098	5.9713
9	8.5660	8.3605	8.1622	7.7861	7.4353	7.1078	6.8017	6.5152
10	9.4713	9.2222	8.9826	8.5302	8.1109	7.7217	7.3601	7.0236
11	10.3676	10.0711	9.7868	9.2526	8.7605	8.3064	7.8869	7.4987
12	11.2551	10.9075	10.5753	9.9540	9.3851	8.8633	8.3838	7.9427
13	12.1337	11.7315	11.3484	10.6350	9.9856	9.3936	8.8527	8.3577
14	13.0037	12.5432	12.1062	11.2961	10.5631	9.8986	9.2950	8.7455
15	13.8651	13.3432	12.8493	11,9379	11.1184	10.3797	9.7122	9.1079
16	14.7179	14.1313	13.5777	12.5611	11.6523	10.8378	10.1059	9.4466
17	15.5623	14.9076	14.2919	13.1661	12.1657	11.2741	10.4773	9.7632
18	16.3983	15,6726	14.9920	13.7535	12.6593	11.6896	10.8276	10.0591
19	17.2260	16.4262	15.6785	14.3238	13.1339	12.0853	11.1581	10.3356
20	18.0456	17.1686	16.3514	14.8775	13.5903	12.4622	11.4699	10.5940

（九）年金週期付款表

$$1/a_{\overline{n|}}\,i=i/\left[1-(1+i)-^{n}\right]=i+1/S_{\overline{n|}}\,i$$

n \ i	1%	1½%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
1	1.0100	0.0150	1.0200	1.0300	1.0400	1.0500	1.0600	1.0700
2	0.5075	0.5113	0.5150	0.5226	0.5302	0.5378	0.5454	0.5531
3	0.3400	0.3434	0.3468	0.3535	0.3603	0.3672	0.3741	0.3811
4	0.2562	0.2594	0.2626	0.2690	0.2755	0.2820	0.2886	0.2952
5	0.2060	0.2091	0.2122	0.2184	0.2246	0.2318	0.2374	0.2439
6	0.1725	0.1755	0.1785	0.1846	0.1908	0.1970	0.2034	0.2098
7	0.1486	0.1516	0.1545	0.1605	0.1666	0.1728	0.1791	0.1856
8	0.1307	0.1336	0.1365	0.1425	0.1485	0.1547	0.1610	0.1675
9	0.1167	0.1196	0.1225	0.1284	0.1345	0.1407	0.1470	0.1535
10	0.1056	0.1084	0.1113	0.1172	0 1233	0.1295	0.1359	0.1424
11	0.0965	0.0993	0.1022	0.1081	0.1141	0.1204	0.1268	0.1334
12	0.0888	0.0917	0.0946	0.1005	0.1066	0.1128	0.1193	0.1259
13	0.0824	0.0852	0.0881	0.0940	0.1001	0.1065	0.1130	0.1197
14	0.0769	0.0797	0.0826	0.0885	0.0947	0.1010	0.1076	0.1143
15	0.0721	0.0749	0.0778	0.0838	0.0899	0.0963	0.1030	0.1098
16	0.0679	0.0708	0.0737	0.0796	0.0858	0,0923	0,0990	0.1059
17	0.0643	0.0671	0.0700	0.0760	0.0822	0.0887	0.0954	0.1024
18	0.0610	0.0638	0.0667	0.0727	0.0790	0.0855	0.0924	0.0994
19	0.0581	0.0609	0.0638	0.0698	0.0761	0,0827	0.0896	0.0968
20	0.0554	0.0582	0.0612	0.0672	0.0736	0.0802	0.0872	0.0944

（十）複雜年金首期終值表

$$S_{1\urcorner i}^{\,p}={}^{i/}j_{p}=i/p\left[\,(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]$$

p \ i	1%	1½%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
2	1.00249	1.00374	1.00498	1.00744	1.00990	1.01235	1.01478	1.01720
3	1.00333	1.00498	1.00664	1,00993	1.01322	1.01649	1.01974	1.02298
4	1.00374	1.00561	1.00747	1.01118	1.01488	1.01856	1.02223	1,02588
6	1.00416	1,00623	0.00830	1,01243	1.01654	1.02064	1.02472	1.02878
12	…………	1,00686	1.00913	1.01368	1.01820	1,02271	1.02721	1.03169
13	1.00 61	1.00690	1.00920	…………	…………	…………	…………	…………
26	…………	1.00719	1.00958	1,01435	1.01910	1.02384	1.02856	1.03326
52	…………	…………	…………	1,01464	1.01948	1.02432	1,02913	1.03393
1/2	0.99502	0,99256	0.99010	0 98522	0.98039	0.97561	0.97082	0.96618
1/4	0.98512	0,97778	0.97050	0.95611	…………	…………	…………	…………
211	0,94619	…………	…………	…………	…………	…………	…………	…………

(十一)遞增(減)年金終值表

$$\sum s_{\overline{n|}} = s_{\overline{1|}} + s_{\overline{2|}} + \cdots + s_{\overline{n|}}$$

i n	2%	3%	6%
1	1.00000	1.00000	1,00000
2	3,02000	3,03000	3.06000
3	6,08040	6.12090	6,24360
4	10,20201	10.30453	10.61822
5	15.40605	15.61366	16.25531
6	21.71417	22,08207	23.23063
7	29.14845	29.74453	31.62447
8	37.73142	38.63687	41,52193
9	47.48605	48.79598	53.01325
10	58.43577	60.25986	66.19404

(十二)遞增(減)年金現值表

$$\sum a_{\overline{n|}} = a_{\overline{1|}} + a_{\overline{2|}} + \cdots + a_{\overline{n|}}$$

i n	2%	3%	6%
1	0.98039	0,97087	0.94340
2	2.92195	2.88434	2.77679
3	5.80584	5.71295	5,44980
4	9.61357	9.43005	8,91490
5	14,32702	14.00976	13.12727
6	19,92846	19.42695	18.04459
7	26.40045	25,65723	23.62698
8	33,72593	32.67693	29.83677
9	41,88816	40.46304	36.63846
10	50,87075	48.99324	43.99855

(十三)利息計算之常用對數表

i	1+i	log(1+i)	i	1+i	log(1+i)
0 $\frac{1}{2}$ %	1.005	00216606	5 $\frac{1}{2}$ %	1.055	02325246
1 %	1.010	00432137	6 %	1.060	02530587
1 $\frac{1}{2}$ %	1.015	00646604	6 $\frac{1}{2}$ %	1.065	02734691
2 %	1.020	00860017	7 %	1.070	02938378
2 $\frac{1}{2}$ %	1.025	01072387	7 $\frac{1}{2}$ %	1.075	03140846
3 %	1.030	01283722	8 %	1.080	03342376
3 $\frac{1}{2}$ %	1,035	01494035	8 $\frac{1}{2}$ %	1.085	03542974
4 %	1.040	01703334	9 %	1.090	03742650
4 $\frac{1}{2}$ %	1.045	01911629	9 $\frac{1}{2}$ %	1.095	03941412
5 %	1.050	02188930	10 %	1.100	04139269

(免字第195號 32.10.28)