**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2022**

# Analysis II

## Arbeitsblatt 31

### Übungsaufgaben

Aufgabe 31.1. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Funktion und $b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Folge $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, genau dann gegen $b$ konvergiert, wenn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$

gilt, wenn also die Funktion für $x \to +\infty$ den Grenzwert $b$ besitzt.

Aufgabe 31.2. Es sei $[a, +\infty[$ ein rechtsseitig unbeschränktes Intervall und $f, g\colon [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ seien Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ existieren. Zeige, dass folgende Beziehungen gelten.

(1) Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert für $x \to +\infty$, und zwar ist

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x)\,.$$

(2) Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert für $x \to +\infty$, und zwar ist

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to+\infty} g(x)\,.$$

(3) Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, +\infty[$ und $\lim_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient $f/g$ einen Grenzwert für $x \to +\infty$, und zwar ist

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)}\,.$$

Aufgabe 31.3. Sei $I$ ein Intervall, $r$ ein (uneigentlicher) Randpunkt von $I$ und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_a^r f(t)\,dt$$

nicht vom gewählten Startpunkt $a \in I$ abhängt.

Aufgabe 31.4. Sei $I = ]r,s[$ ein beschränktes offenes Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die sich auf $[r,s]$ stetig fortsetzen lässt. Zeige, dass dann das uneigentliche Integral

$$\int_r^s f(t)\,dt$$

existiert und mit dem bestimmten Integral

$$\int_r^s f(t)\,dt$$

übereinstimmt.

Aufgabe 31.5. Formuliere und beweise Rechenregeln für uneigentliche Integrale (analog zu Lemma 23.15).

Aufgabe 31.6. Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{t(t-1)},$$

die auf

$$\mathbb{R} \setminus \{0,1\} = [-\infty, 0[ \cup ]0,1[ \cup ]1, +\infty]$$

definiert ist. Entscheide für jedes Teilintervall und jeden (uneigentlichen) Randpunkt, ob das uneigentliche Integral existiert oder nicht.

Aufgabe 31.7.*

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x^2-3x+5}{x^4+2x^3+5x+8}\,dx$$

existiert.

Aufgabe 31.8. Bestimme das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt\,.$$

Aufgabe 31.9. Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

Aufgabe 31.10. Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

Aufgabe 31.11.*

a) Sei

$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine monoton fallende stetige Funktion. Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty f(t)\,dt$$

existiert. Zeige, dass

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

ist.

b) Man zeige durch ein Beispiel, dass die Aussage in a) für eine stetige, nicht monoton fallende Funktion nicht gelten muss.

Aufgabe 31.12.*

Es sei

$$f\colon ]0,1] \longrightarrow [0,\infty[$$

eine stetige, streng fallende, bijektive Funktion mit der ebenfalls stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon [0,\infty[ \longrightarrow ]0,1].$$

Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(t)\,dt$ existiert. Zeige, dass dann auch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f^{-1}(y)\,dy$ existiert und dass der Wert dieser beiden Integrale übereinstimmt.

Aufgabe 31.13. Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$$

existiert.

Aufgabe 31.14. Berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}\,dt\,.$$

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 31.15. (2 Punkte)

Berechne die Energie, die nötig wäre, um die Erde, ausgehend von der jetzigen Lage relativ zur Sonne, unendlich weit von der Sonne zu entfernen.

Aufgabe 31.16. (4 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x^3 - 3x + 5}{x^4 + 2x^3 + 5x + 8}\, dx$$

existiert.

Aufgabe 31.17. (8 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

existiert.

(Versuche nicht, eine Stammfunktion für den Integranden zu finden.)

Aufgabe 31.18. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine unbeschränkte, stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

derart, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)\, dt$ existiert.

Aufgabe 31.19. (5 Punkte)

Es sei $I = [a, b]$ ein beschränktes Intervall und es sei

$$f\colon\ ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge in $I$ mit dem Grenzwert $a$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in $I$ mit dem Grenzwert $b$. Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\, dt$ existiert. Zeige, dass die Folge

$$w_n = \int_{x_n}^{y_n} f(t)\, dt$$

gegen das uneigentliche Integral konvergiert.

# Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5