

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 12

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 12.1. Bestimme die Anzahl der Teiler der Zahlen

$1, 2, 3, \dots, 20$.

Übungsaufgaben

AUFGABE 12.2. Sortieren Sie in Ihrem Kopf die Formulierungen „ a teilt b “, „ c ist ein Teiler von d “, „ e ist ein Vielfaches von f “, „ g wird von h geteilt“, „ i kann man durch j teilen“, „ k ist durch ℓ teilbar“.

AUFGABE 12.3. Es sei n eine natürliche Zahl. Zeige, dass $n^2 - 1$ ungerade oder aber durch 8 teilbar ist.

AUFGABE 12.4. Es sei n eine natürliche Zahl. Zeige, dass $n^2 - n$ stets gerade ist.

AUFGABE 12.5. Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen 25, 30, 36 sowie all ihrer positiven Teiler.

AUFGABE 12.6. Es sei M eine Menge von n Äpfeln und P eine Menge von t Personen. Begründe, dass man die Apfelmenge genau dann gerecht auf die Personen aufteilen kann, wenn t ein Teiler von n ist.

AUFGABE 12.7. Bringe die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl n durch eine natürliche Zahl t mit dem Begriff der Produktmenge in Zusammenhang.

AUFGABE 12.8.*

Wir betrachten die Gesamtmenge aller Finger und aller Zehen eines Menschen. Man gebe für jede Faktorzerlegung

$$20 = a \cdot b$$

eine möglichst natürliche Zerlegung dieser 20 Körperteile in a Teilmengen mit je b Elemente an.

AUFGABE 12.9. Es sei M eine Menge mit m Elementen und t eine natürliche Zahl. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) t ist ein Teiler von m .
- (2) Es gibt eine Zerlegung von M in disjunkte Teilmengen M_1, M_2, \dots, M_n , wobei sämtliche beteiligten Teilmengen M_i genau t Elemente besitzen.
- (3) Es gibt eine Zerlegung von M in t disjunkte Teilmengen.

AUFGABE 12.10. Interpretiere Aufgabe 12.9 für den Fall $t = 2$.

AUFGABE 12.11. Es seien a, b, c natürliche Zahlen und es gelte, dass bc ein Vielfaches von ac sei. Ferner sei $c \neq 0$. Zeige, dass dann b ein Vielfaches von a ist.

AUFGABE 12.12. Es seien $a \leq b$ natürliche Zahlen, die beide von c geteilt werden. Zeige, dass auch die Differenz $b - a$ von c geteilt wird.

AUFGABE 12.13. Es sei n eine natürliche Zahl und r sei die kleinste natürliche Zahl mit $r^2 \geq n$. Zeige, dass bei einer Faktorzerlegung $n = ab$ stets $a \leq r$ oder $b \leq r$ gilt.

AUFGABE 12.14. Es seien a, b positive natürliche Zahlen. Stifte eine Bijektion zwischen der Menge aller Vielfachen von a und der Menge aller Vielfachen von b .

AUFGABE 12.15.*

Es seien drei verschiedene Zahlen $a, b, c > 1$ gegeben. Wie viele Teiler besitzt das Produkt $a \cdot b \cdot c$ minimal?

AUFGABE 12.16. Es sei

$$Z = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$$

die Menge aller Zweierpotenzen. Definiere eine Bijektion

$$\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow Z$$

derart, dass $k \leq n$ genau dann gilt, wenn $\varphi(k)$ die Zahl $\varphi(n)$ teilt.

AUFGABE 12.17. Erläutere, warum die Formulierung „Die 0 teilt die 0, man kann die 0 aber nicht durch die 0 teilen“ sich zwar paradox anhört, aber korrekt ist. Tipp: Verwende die Konzepte Relation und Abbildung (bzw. Verknüpfung).

AUFGABE 12.18. Beschreibe Analogien zwischen der Größergleichbeziehung und der Teilerbeziehung auf den natürlichen Zahlen.

Die folgende Aufgabe beschreibt, wie sich in Lemma 12.3 unter den gegebenen Teilbarkeitsvoraussetzungen die Brüche (wir haben also nach wie vor keine rationalen Zahlen) verhalten.

AUFGABE 12.19. (1) Für jede natürliche Zahl a gilt $\frac{a}{1} = a$ und bei $a \neq 0$ gilt auch $\frac{a}{a} = 1$.

(2) Für jede natürliche Zahl $a \neq 0$ gilt $\frac{0}{a} = 0$.

(3) Gilt $a|b$ und $b|c$, so gilt auch $a|c$ und es ist (bei $a, b \neq 0$)

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b}.$$

(4) Gilt $a|b$ und $c|d$, so gilt auch $ac|bd$ und es ist (bei $a, c \neq 0$)

$$\frac{bd}{ac} = \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}.$$

(5) Gilt $a|b$, so gilt auch $ac|bc$ für jede natürliche Zahl c , und es ist (bei $a, c \neq 0$)

$$\frac{bc}{ac} = \frac{b}{a}$$

(6) Gilt $a|b$ und $a|c$, so gilt auch $a|(rb+sc)$ für beliebige natürliche Zahlen r, s , und es ist (bei $a \neq 0$)

$$\frac{rb+sc}{a} = r\frac{b}{a} + s\frac{c}{a}.$$

Die folgende Aufgabe sollte man in Analogie zu Lemma 10.14 sehen.

AUFGABE 12.20. Es seien a, b, c, d natürliche Zahlen. Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Es sei b ein Teiler von a . Dann ist

$$b \cdot c \cdot \frac{a}{b} = c \cdot a$$

für $b \neq 0$.

- (2) Es sei b ein Teiler von a und d ein Teiler von c mit $b, d \neq 0$. Dann ist

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$$

Insbesondere gelten, wenn b ein Teiler von a ist, die Beziehungen (mit $b, c \neq 0$)

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

und

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b} \cdot c.$$

- (3) Es sei $b \neq 0$ ein Teiler von $a \neq 0$ und a ein Teiler von bc . Dann ist $\frac{a}{b}$ ein Teiler von c und es ist

$$\frac{c}{\frac{a}{b}} = \frac{cb}{a}.$$

AUFGABE 12.21.*

Es gibt 24 Schokoriegel und 16 Äpfel. Auf wie viele Kinder kann man diese Sachen gerecht verteilen?

AUFGABE 12.22. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von 105 und 150.

AUFGABE 12.23. Es sei t ein Teiler von n . Was ist der größte gemeinsame Teiler von t und n und was ist das kleinste gemeinsame Vielfache von t und n ?

AUFGABE 12.24. Es seien a, b, c ganze Zahlen. Zeige für den größten gemeinsamen Teiler die Gleichung

$$\text{GgT}(a, b, c) = \text{GgT}(\text{GgT}(a, b), c).$$

AUFGABE 12.25.*

Prof. Knopfloch und Dr. Eisenbeis basteln einen Adventskalender mit 24 Türen für ihren Neffen Willem, der sich für Hunde und für Primzahlen interessiert. Dr. Eisenbeis legt in die Fächer zu den geradzahligem Tagen jeweils ein lustiges Hundebild. Prof. Knopfloch legt in die Fächer zu den ungeradzahligem Tagen jeweils eine bunt gemalte Primzahl, und zwar in aufsteigender natürlicher Reihenfolge.

- (1) Welche Primzahl befindet sich hinter dem 23. Türchen?
- (2) Hinter welchem Türchen befindet sich die 23?
- (3) Für welche Türchen stimmt die Nummer der Türe mit dem Inhalt überein?
- (4) Ist die Summe aller verwendeten Primzahlen gerade oder ungerade?

AUFGABE 12.26. Berechne den Ausdruck

$$n^2 + n + 41$$

für $n = 0, 1, 2, \dots$. Handelt es sich dabei um Primzahlen?

AUFGABE 12.27. Zeige, dass man jede natürliche Zahl $n \geq 12$ als Summe

$$n = a + b$$

schreiben kann, wobei sowohl a als auch b zusammengesetzte Zahlen sind.

AUFGABE 12.28.*

Bestimme die Primfaktorzerlegung von 1728.

AUFGABE 12.29. Bestimme die Primfaktorzerlegung von 1025.

AUFGABE 12.30.*

Es sei n eine natürliche Zahl. Wann ist die Zahl $n^2 - 1$ eine Primzahl?

AUFGABE 12.31. Finde die kleinste Zahl N der Form $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1$, die keine Primzahl ist, wobei p_1, p_2, \dots, p_r die ersten r Primzahlen sind.

AUFGABE 12.32. Finde einen Primfaktor der Zahl $2^{25} + 1$.

AUFGABE 12.33. Finde einen Primfaktor der folgenden drei Zahlen

$$2^{33} - 1, 2^{91} - 1, 2^{13} + 1.$$

AUFGABE 12.34.*

Man gebe zwei Primfaktoren von $2^{35} - 1$ an.

AUFGABE 12.35. Welche natürliche Zahlen haben bezüglich der Addition die zur Primeigenschaft (die ja unter Bezug auf die Multiplikation definiert ist) analoge Eigenschaft? Gilt die eindeutige Zerlegung in „Primsummanden“?

AUFGABE 12.36. Es sei G eine Menge und $M = \mathfrak{P}(G)$. Wir betrachten auf M den Durchschnitt \cap als Verknüpfung mit der Gesamtmenge G als neutralem Element.

- (1) Was bedeutet in diesem Fall die Teilbarkeitsbeziehung, die analog zur Teilbarkeit in \mathbb{N} zu definieren ist?
- (2) Was sind die „Primelemente“ in M ?
- (3) Gibt es stets eine Faktorzerlegung in Primelemente?

AUFGABE 12.37. Zeige, dass in einem kommutativen Halbring durch

$$x \geq y \text{ genau dann, wenn } \exists z(x = y + z)$$

eine reflexive und transitive Relation gegeben ist. Zeige durch geeignete Beispiele, dass diese weder antisymmetrisch noch total sein muss.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 12.38. (3 Punkte)

Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen 12, 15, 16, 20 sowie all ihrer positiven Teiler.

AUFGABE 12.39. (2 Punkte)

Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl mit zwei Faktorzerlegungen

$$n = ab = cd.$$

Es sei $a \geq c$. Zeige, dass dann $b \leq d$ sein muss.

AUFGABE 12.40. (2 Punkte)

Es sei $b \neq 0$ ein Teiler von a und $d \neq 0$ ein Teiler von c . Zeige, dass bd ein Teiler von $ad + cb$ ist und dass

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

gilt.

AUFGABE 12.41. (3 Punkte)

Zum neunten Geburtstag ihres Enkels Mustafa backt Oma Müller für die Geburtstagsparty ihre beliebten Geburtstagskekse. Mustafa hat 9 Kinder aus seiner Klasse eingeladen, mit ihm werden es maximal 10 Kinder sein. Es ist aber nicht klar, ob alle kommen. In jedem Fall will Oma Müller sicher sein, dass jedes Kind genau gleich viele Kekse bekommt. Wie viele Kekse backt sie? (die Lösung, gar keine Kekse zu backen, würden die Kinder nicht verstehen.)



AUFGABE 12.42. (3 Punkte)

Finde einen Primfaktor der Zahl $2^{25} - 1$.

AUFGABE 12.43. (4 Punkte)

Zeige, dass es außer 3, 5, 7 kein weiteres Zahlentripel der Form $p, p + 2, p + 4$ gibt, in dem alle drei Zahlen Primzahlen sind.

AUFGABE 12.44. (2 Punkte)

Finde fünf natürliche Zehnerintervalle $\{10a, \dots, 10(a + 1)\}$, die jeweils vier Primzahlen enthalten.

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Koulourakia.jpg , Autor = Benutzer Glane23 auf Commons,
Lizenz = CC-by-sa 2.0 7
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor
bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9