MATHEMATISCHE ANNALEN.

37 §.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Leipzig und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XVIII. Band.

Mit 7 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1881.

Inhalt des achtzehnten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung).

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. Gordan zu Erlangen, Prof. C. Neumann zu Leipzig,
Prof. K. VonderMühll zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** und Prof. **Adolph Mayer**
zu Leipzig zu Leipzig.

XVIII. Band. 1. Heft.

Mit 1 lithographirten Tafel.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1881.

Litterarischer Anzeiger
für mathematische, technische und Natur-Wissenschaften.

1881. Dieser Anzeiger wird den drei Zeitschriften des Teubner'schen Verlags: Mathematische Annalen, herausgegeben von *Klein* und *Mayer*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von *Schlömilch*, *Kahl* und *Cantor*, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von *Hoffmann*, beigegeben. No. 1.

I. Notizen über künftig erscheinende Bücher.

Im Verlage von **B. G. Teubner** in Leipzig erscheinen demnächst:

Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus. Von Prof. Dr. F. Neumann zu Königsberg in Pr. gr. 8. geh.

Diese Vorlesungen beginnen mit einfachen Expositionen über die magnetischen Momente, die magnetische Axe, das magnetische Potential, etc., besprechen dabei gelegentlich die bekannte Poisson-Gaufs'sche Methode zur Bestimmung des Erdmagnetismus, und gehen sodann über zur Theorie der magnetischen Induktion, wobei der Reihe nach zuerst der Fall behandelt wird, dafs die inducierenden Kräfte von der Zeit unabhängig sind, sodann der allgemeinere Fall, dafs dieselben gegebenen Funktionen der Zeit sind.

Hierauf werden diese theoretischen Expositionen auf mehrere spezielle Fälle in Anwendung gebracht, namentlich auf den Fall, dafs der inducierte (etwa aus weichem Eisen bestehende) Körper eine Kugel, oder eine Hohlkugel, oder ein Ellipsoid (insbesondere ein Rotations-Ellipsoid) ist; während gleichzeitig als inducierende Ursachen bald der Erdmagnetismus, bald ein gegebener Stahlmagnet, bald endlich ein System elektrischer Ströme in Betracht kommt. Auch schliefsen sich an diese Untersuchungen wichtige Bemerkungen an über experimentelle Methoden, z. B. über die Bestimmung der magnetischen Induktions-Konstante, ferner über die Messung der Inklination (des Erdmagnetismus) mittelst horizontaler Ablenkungen einer Kompafsnadel etc. Daneben wird beiläufig gezeigt, in welcher Weise man einen Multiplikator, durch geeignete Anordnung seiner elektrischen Stromwindungen, in eine wirkliche Tangentenboussole, nämlich in ein Instrument verwandeln kann, bei welchen die trigonometrische Tangente des beobachteten Ablenkungswinkels von der vorhandenen Stromstärke wirklich nur durch einen konstanten Faktor sich unterscheidet. Denkt man sich nämlich ein System elektrischer Kreisströme, die alle auf ein und derselben Kugelfläche liegen, und mit irgend welchen Parallelkreisen dieser Fläche zusammenfallen, so wird man, wie in dem vorliegenden Werk exponiert ist, jene Parallelkreise stets in solcher Weise auszuwählen im Stande sein, dafs die von dem elektrischen Stromsystem auf einen magnetischen Massenpunkt ausgeübte Kraft innerhalb jener Kugelfläche ihrer Stärke und Richtung nach konstant bleibt.

*

Schliefslich wird das allgemeine Problem der magnetischen Induktion auf die Ermittelung einer gewissen „charakteristischen Funktion" reduciert, welche nur noch von der Oberfläche des inducierten Körpers abhängt, und welche daher für das Problem der magnetischen Induktion von derselben fundamentalen Bedeutung sein dürfte, wie die bekannte Green'sche Funktion für die Probleme der elektrischen Induction. C. N.

Über die nach Kreis-, Kugel-, und Cylinder-Functionen fortschreitenden Entwicklungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes. Von Prof. Dr. C. Neumann zu Leipzig. 4. geh.

Die Fourier'sche Reihe steht zur Kreisperipherie in derselben Beziehung, wie die Laplace'sche (nach Kugelfunktionen fortschreitende) Reihe zur Kugelfläche. Und parallel diesen Reihenentwicklungen stehen gewisse Integraldarstellungen, welche aus diesen Reihenentwicklungen dadurch hervorgehen, dafs man den Radius des Kreises resp. der Kugel unendlich grofs werden läst. In der That verwandelt sich in solcher Weise die Fourier'sche Reihe in das Fourier'sche Integral, und andererseits die Laplace'sche Reihe in ein gewisses nach Cylinderfunktionen d. i. nach Bessel'schen Funktionen fortschreitendes Integral, welches zuerst vom Verfasser des vorliegenden Werkes angegeben wurde.

Gleichzeitig aber erleiden, falls man jenen Radius unendlich grofs werden läst, auch die bekannten Integraleigenschaften der Kreisfunktionen und die der Kugelfunktionen bemerkenswerte Umänderungen. In der That verwandeln sich dabei die erstern in gewisse neue Integraleigenschaften der Kreisfunktionen, welche für die Probleme der konformen Abbildung und ebenso für gewisse Aufgaben der Elektrostatik von besonderer Wichtigkeit sind. Und andrerseits verwandeln sich bei jenem Prozefs die Integraleigenschaften der Kugelfunktionen in gewisse bisher verborgen gebliebene Integraleigenschaften der Cylinderfunktionen.

Die soeben angedeuteten Reihen- und Integral-Darstellungen, Eigenschaften etc. werden im vorliegenden Werk zunächst in flüchtigen Zügen (gewissermafsen auf heuristischem Wege) entwickelt. Sodann geht der Verf. über zur strengen Begründung derselben, und sucht hierbei seinen Auseinandersetzungen durch Anwendung der neueren Hülfsmittel, namentlich des wichtigen Du Bois-Reymond'schen Mittelwertsatzes, eine möglichst einfache Gestalt zu verleihen.

Noch sei bemerkt, dafs der Verfasser absichtlich im ganzen Werke auf die gewöhnlich vorkommenden Funktionen (welche Jacobi gesprächsweise die „vernünftigen" nannte) sich beschränkt hat. Demgemäfs hat hat derselbe z. B., was Funktionen einer Variablen betrifft, nur solche Funktionen in Betracht gezogen, bei denen die Anzahl der Unstetigkeitspunkte, und ebenso auch die Anzahl der Maxima und Minima für einen endlichen Spielraum der Variablen eine endliche ist.

II. Erschienene Bücher.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

General-Register der Zeitschrift für Mathematik und Physik 1856—1880. Jahrgang I—XXV. [123 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.60.

Joachimsthal, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Zweite Auflage, bearbeitet von L. Natani. Mit zahlreichen Figuren im Text. [VIII u. 242 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 6.—

Jordan, Dr. **W.,** Professor am Großh. Polytechnikum zu Karlsruhe, Kreis-Coordinaten für 200 Radien. [48 S.] 16. In Leinwand kart. n. ℳ 1.20.

Milinowski, A., Oberlehrer am Gymnasium zu Weißenburg i. E., die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. I. Teil, Planimetrie. Mit Holzschnitten im Text und 4 Figurentafeln. [VII u. 123 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.—

Reusch, E., Professor d. Physik in Tübingen, die stereographische Projection. Mit acht auf Stein gravirten Tafeln. [V u. 32 S.] Lex.-8. geh. n. ℳ 2.40.

Weiler, Dr. **A.,** Privatdocent und Lehrer der Mathematik in Zürich, Leitfaden der mathematischen Geographie für den Unterricht an Mittelschulen, sowie zum Selbststudium. [98 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. ℳ 1.50.

Wünsche, Dr. **Otto,** Oberlehrer am Gymnasium zu Zwickau, Schulflora von Deutschland. Nach der analytischen Methode bearbeitet. Die Phanerogamen. Dritte Auflage. [LXIV u. 427 S.] 8. geh. n. ℳ 4.—, in Lnwd. gebunden n. ℳ 4.80.

Mathematische Annalen. Unter Mitwirkung der Herren Prof. P. Gordan zu Erlangen, Prof. C. Neumann zu Leipzig, Prof. K. VonderMühl zu Leipzig, gegenwärtig herausgegeben von Prof. Felix Klein zu München und Prof. Adolf Mayer zu Leipzig. XVII. Band.

3. Heft.

Inhalt: Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Von *A. V. Bäcklund* in Lund. — Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung. Von *J. Freyberg* in Dresden. — Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwerthung durch die Methoden von *Lie*. Von *A. Mayer* in Leipzig. — Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. (Zweite Mittheilung.) Von *Georg Cantor* in Halle a. d. Saale. — Ueber die typische Dar-

**

stellung der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. Von *P. Gordan* in Erlangen. — Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. Par *A. Markoff* à St. Pétersbourg. (Second mémoire). — Die Principien der Elektrodynamik. Von *Carl Neumann* in Leipzig. — Ueber die lineare Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Von *Martin Krause* in Rostock. — Ueber die Multiplication der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Von *Martin Krause* in Rostock. — Auszug aus einem Brief an die Redaction der Annalen. Von *von Gall* in Mainz.

4. Heft.

Inhalt: Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden. Von *H. Schubert* in Hamburg. — Ueber Untersuchung und Aufstellung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen. Von *Walther Dyck* in Leipzig. (Hierbei 2 lithographirte Tafeln.) — Notiz über eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige „Normalcurve" vierter Ordnung. Von *Walther Dyck* in Leipzig. — Ueber die Wendepunkte der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten. (Zweite Note.) Von *A. Brill* in München. — Zur Pfaff'schen Lösung des Pfaff'schen Problems. Von *A. Mayer* in Leipzig. — Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in der Entwickelung einer beliebigen Potenz des Radiusvectors nach der mittleren Anomalie. Von *W. Scheibner* in Leipzig. — Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwickelungen. (Aus den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Mai 1856.) Von *W. Scheibner* in Leipzig. — Erweiterung des Abel'schen Satzes von der Form der algebraisch-logarithmisch ausdrückbare Integrale algebraischer Functionen. Von *Leo Königsberger* in Wien. — Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Function. Von *Felix Klein* in Leipzig. — Bemerkung zu der Bestimmung der Anzahl der Torsallinien einer Regelfläche. Von *H. Schubert* in Hamburg.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Herausgegeben unter der verantwortlichen Redaktion von Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl und Dr. M. Cantor. 26. Jahrgang. 1881. 6 Hefte. gr. 8. geh. n. ℳ 18.—

1. Heft.

Inhalt: Die Bestimmung einer Function auf einer Kreisfläche aus gegebenen Randbedingungen. Von *W. Veltmann* (Taf. I Fig. 1—3). — Die Krümmung windschiefer Flächen in den Punkten einer geradlinigen Erzeugenden. Von Dr. *F. Buka*, Privatdocent an der königl. techn. Hochschule in Berlin (Taf. I Fig. 4—9). — Ein Ortsbestimmungsproblem der sphärischen Astronomie. Von Dr. *Siegm. Günther*, Gymnasialprofessor in Ansbach (Taf. I Fig. 10—12). — Das Verhältniss der Hauptkrümmungsradien an einem Flächenpunkte, gemessen durch den Winkel der zugehörigen Inflexionstangenten. Von Prof. *Dietrich* in Regensburg. — Ueber Summen und Producte von Vectoren der Ellipse und verwandter Curven. Von *O. Schlömilch*. — Ueber simultan convergirende und divergirende Reihen. Von *O. Schlömilch*. — Ueber doppelt-orthosymmetrische Determinanten. Von Dr. *K. Weihrauch* in Dorpat. — Aufgabe. Von *G. Schaertlin*, Stud. math. in Basel. — Ueber die Constitution der Elemente. Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie. — Nachschrift zu Artikel I. Von *W. Veltmann*. — Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt). Euler's Theorie von der Ursache der Gravitation. Von Dr. *C. Isenkrahe* in Crefeld. — Der Briefwechsel zwischen Gauss und Sophie Germain. Von Dr. *Siegmund Günther*, Gymnasialprofessor in Ansbach. — Recensionen: *Genocchi, A.*, Il Carteggio di Sofia Germain e Carlo Federico Gauss. Von Dr. *S. Günther* in Ansbach. — *Wretschko*, Dr. *Andreas*, Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Von *Cantor*. — *Girard, H.*, La philosophie scientifique. Von *Cantor*. — *Buys, Lucien*, La science de la quantité. Von *Cantor*. — Bibliographie vom 1. October bis 15. November 1880.

2. Heft.

Inhalt: Ueber die Variationen n^{ter} Ordnung. Von *G. Erdmann*, Gymnasiallehrer in Insterburg (Taf. II Fig. 1—8). — Notiz zu einem Satze von Chasles. Von *E. Lange*, Stud. math. in Dresden. — Neue Lösungen eines Rotationsproblems. Von *C. Frenzel*, Gymnasiallehrer in Lauenburg i. Pommern (Taf. II Fig. 9—11c). — Eine Polynomentwickelung. Von *K. Weihrauch* in Dorpat. — Werth einiger doppelt-orthosymmetrischer Determinanten. Von *K. Weihrauch* in Dorpat. — Ein Satz vom ebenen Viereck (Taf. II Fig. 12). — Von *K. Weihrauch* in Dorpat. — Das Reciprocitätsgesetz. Von *J. Thomae*. — Eine Eigenschaft concentrischer Ellipsen und Hyperbeln (Taf. II Fig. 13 und 14). Von *Schlömilch*. — Das gleichseitige Hyperboloid. Von Dr. *Ad. Schumann*. — Eigenschaften der Lemniscate. Von Dr. *Wilhelm Hess* in München. — Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt). Die Methode Tá jan im Suán-king von Sun-tsè und ihre Verallgemeinerung durch Yih-hing im I. Abschnitte des Tá jan li schu. Von Prof. Dr. *Ludwig Matthiessen* in Rostock. — Miscelle. Von *Friedrich Hultsch* in Dresden. — Eine algebraische Lösung des irreducibeln Falles der cubischen Gleichungen. Von Dr. *Lehmann*, Gymnasiallehrer in Rudolstadt. — Recensionen: *Reye*, Dr. *Theodor*, Die Geometrie der Lage. Von *Milinowski*. — *Schubert*, *H.*, Kalkül der abzählenden

Geometrie. Von *R. Sturm.* — *Götting, R.* Einleitung in die Analysis. Von *Cantor.* — *Heringa,* Dr. *P. M.* Considérations sur la théorie des phénomènes capillaires. Von *E. Warburg* in Freiburg i. B. — *Eneström, Gustaf,* Trois lettres inédites de Jean Ier Bernoulli à Léonard Euler. Von Dr. *S. Günther* in Ansbach. — *Govi, Gilberto,* Intorno alla data di un discorso inedito pronunciato da Federico Cesi. Von Dr. *S. Günther* in Ansbach. — Bibliographie vom 16. November 1880 bis 31. Januar 1881.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und höheren Bürgerschulen. (Zugleich Organ der mathematisch - naturwissenschaftlich - didaktischen Sectionen der Philologen-, Naturforscher- und allgemeinen deutschen Lehrer - Versammlung). Herausgegeben von I. C. V. Hoffmann. Zwölfter Jahrgang. 1881. 6 Hefte. gr. 8. n. *M.* 10.80.

1. Heft.

Inhalt: I. Abhandlungen und grössere Aufsätze, kleine Mittheilungen (Sprechsaal und Aufgaben-Repertorium). Zur Verständigung (Vorwort zum XII. Jahrg.). Vom Herausgeber. — Kleine Bemerkungen zum Unterrichte in der Planimetrie. Von Dr. *Reidt.* — Die hauptsächlichsten Klippen bei der Rentenrechnung. Von *O. Fleischhauer.* — Notiz über die bedingt convergirenden Reihen. Von G.-R. Dr. *Schlömilch.* — Zum Aufgaben-Repertorium. A) Auflösungen (Lehrsätze über das Sehnenviereck) Nr. 93. 94. 95. 100. 101. 102. 108. 109. 111. — B) Neue Aufgaben Nr. 135—144. — C) Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitungen (mit Auflösungen). Educational Times Nr. 47. 'Journal de mathématiques élémentaires et spéciales. (Bestimmung geometr. Oerter.) Nr. 48—53. — Sprech- und Discussions-Saal. Die vierte Raumdimension. Mit Beziehung auf Emsmann's Aufsatz XI, 253 u. f. Von Dr. *Müller* (Neustrelitz). — II. Literarische Berichte. A) Recensionen. 1. *Klempt,* Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra. 2. *Schlegel,* Lehrbuch der elementaren Mathematik. 4. Th. Stereometrie und sphär. Trigonometrie. 3. *Segeer,* Die Fundamentaltheorien der neueren Geometrie und die Elemente der Lehre von den Kegelschnitten für den Schulgebrauch bearb. 4. *Götting,* Einleitung in die Analysis (1.—4. von *Günther*). — 5. *Hermes,* Sammlung von Aufgaben aus der Goniometrie u. ebenen Trigonometrie (*v. Lühmann.*) — 6 *Junghans,* Lehrbuch der ebenen Geometrie (*Lieber*). — 7. *Boymann,* Lehrbuch der Mathematik. 2. Th. Eb. Trigon. und Geom. d. R. 5. Aufl. von Werr. — 8. *Wittstein,* Lehrbuch der Elementar-Mathematik III, 2. Analyt. Geom. (7. 8. von *Scherling*). — 9. *Schüler,* Lehrbuch der analyt. Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte, dann der Strahlbüschel und Punktreihen (*Weinmeister*). — 10. *Pscheidl,* Einleitung in die praktische Physik. — 11. *Klinkerfues,* Die Principien der Spectralanalyse und ihre Anwendung auf Astronomie. — 11. *Rühlmann,* Handbuch der mechanischen Wärmetheorie. — 13. *Neison,* Der Mond. Deutsche Originalausgabe (10.—13. von *P.*). — 14. *Ferraris-Lippich,* Die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente. Elementare Darstellung der Gauss'schen Theorie und ihrer Anwendung. — 15. *Girard,* La Philosophie scien tifique. Sciences, Art et Philosophie, Mathématiques etc. (14. 15. von *Günther*). — B) Specielle Programmschau. Rheinpreussen 1879. — Bayern 1879—1880 (Mathematik). — C) Bibliographie. — III. Pädagogische Zeitung. (Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. dergl.) Bericht über die Thätigkeit der mathem.-naturw. Section der 35. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Stettin im September 1880. Von Dr. *Lieber*-Stettin. — Journalschau. — Geschäftliches. — (Geschlossen am 31. December 1880.)

In meinem Commissions-Verlag erschien:

Ueber die

Integration der allgemeinen Riccati'schen Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = x$$

und

der von ihr abhängigen Differential-Gleichungen

von

Dr. P. Helmling,

ordentl. Professor der reinen Mathematik an der Kaiserl. Universität in Dorpat.

4. Geh. Preis *M.* 1.60.

Leipzig. **C. A. Koch**'s Verlagshandlung.

Verlag von **Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.**

(Zu beziehen durch jede Buchhandlung.)

Substanz und Bewegung.

Von

J. Clerk Maxwell.

Ins Deutsche übersetzt von **Dr. Ernst v. Fleischl.**

Mit Bewilligung
des Autors und der Society for promoting Christian Knowledge.

Zweiter Abdruck.

Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. 8. geh. Preis *M.* 1.20.

In der C. F. Winter'schen Verlagshandlung in Leipzig ist soeben erschienen und durch jede Buchhandlung zu beziehen:

Der Wald.

Den Freunden und Pflegern des Waldes geschildert

von

E. A. Roßmäßler.

Durchgesehen und verbessert

von

Dr. Moritz Willkomm,

Professor der Botanik und Director des Botanischen Gartens der Universität Prag.

Mit 17 Kupferstichen, 90 Holzschnitten und 1 Bestandskarte
in lithogr. Farbendruck.

Lieferung 1. gr. 8. geh. Preis *M.* 1.—

Diese neue Auflage enthält eine Anzahl Verbesserungen und Zusätze. Die zweite Abtheilung des dritten Buches (die Arbeit des Forstmannes) hat eine vollständig neue, zeitgemäße Bearbeitung durch Herrn Geh. Oberforstrath Dr. Judeich erhalten. Die Zahl der Holzschnitte ist um 5 vermehrt worden und an die Stelle der früheren Forstkarten eine neue getreten.

Das Werk wird aus ca. 45 Druckbogen mit vielen trefflichen Holzschnitten, 17 prachtvollen Kupferstichen und 1 forstlichen Karte bestehen. Die Ausgabe geschieht in etwa 16 Lieferungen à *M.* 1.—, welche in kurzen Zwischenräumen erscheinen werden.

Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen.

Von

FRIEDRICH SCHUR in Leipzig.

In den systematischen Entwickelungen hat Steiner den Anfang damit gemacht, die Eigenschaften geometrischer Gestalten durch Zusammenstellung der einfachsten Grundgebilde zu entwickeln. Man kann die Geometrie der Lage von Reye*) als eine gelungene Fortführung dieser Methode geometrischer Forschung bezeichnen; die ungemeine Fruchtbarkeit derselben ist gerade durch dieses Werk illustrirt. Im Folgenden will ich es versuchen diesen Weg fortzusetzen, indem ich da einsetze, wo Herr Reye aufgehört hat. Herr Reye hat wesentlich mit den Flächen 3. Ordnung geschlossen, die durch drei collineare Ebenenbündel erzeugt werden. Ich werde mit diesen anfangen und zunächst einige Hauptsätze über dieselben voranstellen, indem ich die Begründung derselben in dem genannten Werke nachzulesen bitte. Bei der Präcisirung dieser Sätze lege ich besonderen Nachdruck auf die durch *eine* Erzeugung eines Gebildes bedingten unendlich vielen Erzeugungen desselben**); sie sind für meine späteren

*) Reye, die Geometrie der Lage. 2. Aufl. Hannover 1877/80 (G. d. L.). Ich werde mich wesentlich der in diesem Buche gebrauchten Terminologie anschliessen. Inzwischen erschien: Schröter, Theorie der Oberflächen 2. Ordnung und der Raumcurven 3. Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Gebilde, Leipzig 1880.

**) Es findet diese geometrische Thatsache, dass sich aus einer Erzeugung unendlich viele andere oder vielmehr zwei conjugirte Systeme von Erzeugungen ergeben, analytisch darin ihren Ausdruck, *dass diese Erzeugungen durch Nullsetzen von Matrices dargestellt sind,* also etwa die ebene Curve 3. Ordnung durch:

$$\begin{vmatrix} p_x, & q_x, & r_x \\ p'_x, & q'_x, & r'_x \\ p''_x, & q''_x, & r''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Aus dieser ergeben sich nun die unendlich vielen anderen Erzeugungen dadurch, dass man mit dieser Matrix die bekannten Umformungen durch Addition der mit willkürlichen Constanten multiplicirten Horizontal- resp. Verticalreihen vornimmt.

Erörterungen so wichtig, dass ich mir erlaubt habe, diesen Schaaren von Erzeugungen besondere Namen beizulegen. Ich habe dieselben besonders bei den ebenen Curven 3. Ordnung studirt, indem ich die vollständige Reihe der Netze von Erzeugungen derselben durch drei collineare ebene Systeme aufstellte. Mit jedem dieser Netze ist eine eindeutige Transformation der Curve in sich selbst verbunden, welche in neun besonderen Fällen eine lineare wird; drei weitere besondere Fälle führen auf die drei Kegelschnittnetze, deren Tripelcurve die Curve 3. Ordnung ist. Die Frage nach einem analogen Zusammenhange der Flächen 3. Ordnung mit den Flächenbündeln 2. Grades erlangt eine besonders einfache Beantwortung durch den Nachweis einer Fläche 2. Grades, in Bezug auf welche die Geraden einer Schläfli'schen Doppelsechs reciproke Polaren sind. Dieselbe Fläche wird auch dadurch interessant, dass sie zu einer Construction von vollständigen Pentaedern führt, die einer Fläche 3. Ordnung eingeschrieben sind. Diesen mehr vorbereitenden Untersuchungen folgt als eigentlich neuer Schritt auf dem von Steiner vorgezeichneten Wege die Untersuchung derjenigen Curven 6. Ordnung c^6, welche durch vier collineare Ebenenbündel erzeugt werden. Dieselben Curven werden auch durch drei collineare räumliche Systeme erzeugt und sind von diesem Gesichtspunkte aus von Herrn Nöther*) kurz behandelt worden. Man findet dort neben einer Aufzählung derjenigen Curven, in welche die c^6 zerfallen kann, auch den Nachweis ihrer dreifachen Secanten. Ich studire dieselben im Zusammenhange mit gewissen Punktquadrupeln auf c^6, welche erstens zu einer eindeutigen Abbildung der c^6 auf die Fläche ihrer dreifachen Secanten führen und zweitens die Bedingungen dafür übersehen lassen, dass c^6 Kerncurve eines Flächenbündels 2. Grades ist. Ausser dieser speciellen c^6 untersuche ich diejenige, welche von den Punkten gebildet wird, die Punkten einer Ebene in Bezug auf ein Flächengebüsch 2. Grades conjugirt sind. Die Untersuchung endlich derjenigen c^6, welche beide Besonderheiten vereinigt, führt zur geometrischen Beantwortung der Frage nach denjenigen Flächenbündeln 2. Grades, welche Bündel erster Polaren der Punkte einer Ebene in Bezug auf eine Fläche 3. Ordnung sind, sodass fast alle Eigenschaften der Flächen 3. Ordnung durch das Band ihrer collinearen Erzeugung umschlungen erscheinen. In ein noch gar nicht bebautes Feld trete ich zuletzt bei der Untersuchung derjenigen Flächen 4. Ordnuug, welche durch vier collineare räumliche Systeme erzeugt werden. Ich habe mich daher auch damit begnügt, einige wenige Haupteigenschaften derselben zu geben, unter denen ich besonders hervorhebe, dass die erwähnte Fläche eindeutig in sich selbst trans-

*) Nöther, eindeutige Raumtransformationen. Math. Ann. Bd. III, p. 564.

formirbar ist und nur von 33 Constanten abhängt. Ich bemerke jedoch, dass ihre Untersuchung schon desshalb lohnend erscheint, weil sie fast alle bisher behandelten speciellen Flächen 4. Ordnung umfasst.

§ 1.

Die Raumcurve 3. Ordnung.

Zwei collineare Ebenenbüschel $(\mathfrak{c}_1)$ und $(\mathfrak{c}_2)$ erzeugen das Secantensystem Γ einer Raumcurve 3. Grades c^3; Γ wird aus jedem Punkte $\mathfrak{c}$ von c^3 durch ein zu $(\mathfrak{c}_1)$ und $(\mathfrak{c}_2)$ collineares Ebenenbündel $(\mathfrak{c})$ projicirt. Nennen wir also die Gesammtheit dieser Ebenenbündel ein Büschel von collinearen Ebenenbündeln, so können wir sagen:

I. *Das Secantensystem Γ einer Raumcurve* 3. *Grades c^3 wird durch ein Büschel von collinearen Ebenenbündeln erzeugt, deren Centren auf c^3 liegen.*

Einer Ebene G_1 von $(\mathfrak{c}_1)$ entsprechen hierbei successive die Ebenen eines Büschels (c), wo $c = (G_1, G_2)$, irgend zwei Ebenen G_1 und G_1' also die Ebenen zweier projectivischen Büschel (c) und (c'), wenn je zwei Ebenen einander zugewiesen werden, die der G_1 resp. G_1' in demselben Bündel $(\mathfrak{c})$ entsprechen. Nennen wir also die Gesammtheit der Büschel (c) ein Netz projectivischer Ebenenbüschel, so können wir sagen:

II. *Eine Raumcurve* 3. *Grades c^3 wird durch ein Netz projectivischer Ebenenbüschel erzeugt, deren Axen ihrem Secantensysteme Γ angehören**).

Durchschneiden wir unsere räumliche Figur durch eine Ebene S, so ergiebt sich leicht folgender Satz:

III. *Zwei collineare ebene Systeme (S_1) und (S_2) bestimmen ein Büschel collinearer Systeme, welche das Tripel* $(3\mathfrak{c})$ *sich selbst entsprechender Punkte gemein haben. Irgend zwei Geraden g_1 und g_1' von (S_1) entsprechen hierbei successive die Geraden g und g' zweier projectivischen Büschel* $(\mathfrak{g})$ *und* $(\mathfrak{g}')$. *Unter den Systemen des Büschels giebt es drei specielle (S); jeder Geraden g_1 von (S_1) entspricht in (S) eine Gerade g durch einen Punkt $\mathfrak{c}_1$ des Tripels* $(3\mathfrak{c})$ *und zwar entspricht allen Geraden g_1 durch denselben Punkt der Verbindungslinie c_1 der beiden andern Punkte des Tripels immer dieselbe Gerade von (S); der Geraden c_1 selbst aber entspricht in (S) jede beliebige Gerade der Ebene S.*

§ 2.

Die Erzeugung der Fläche 3. Ordnung.

Drei collineare Ebenenbündel $(\mathfrak{c}_1)$, $(\mathfrak{c}_2)$, $(\mathfrak{c}_3)$, welche nicht demselben Büschel angehören, erzeugen eine Fläche 3. Ordnung F^3; jeder

*) S. G. d. L. II. Abth. 12. Vortr. p. 84 ff

Punkt $\mathfrak{c}$ von F^3 ist Centrum eines zu $(\mathfrak{c}_1)$ collinearen Ebenenbündels $(\mathfrak{c})$, welches mit irgend zwei der drei ersten Bündel ebenfalls die F^3 erzeugt. Nennen wir die Gesammtheit dieser Bündel ein Netz collinearer Ebenenbündel, so folgt:

I. *Drei collineare Ebenenbündel, welche nicht demselben Büschel angehören, bestimmen ein Netz collinearer Ebenenbündel, deren Centren auf der Fläche* 3. *Ordnung* F^3 *liegen, welche von den drei ersten Ebenenbündeln erzeugt wird. Dieses Netz enthält doppelt unendlich viel Büschel collinearer Ebenenbündel; die diesen zugehörigen Raumcurven* 3. *Grades bilden auf* F^3 *ein derartiges Netz, dass durch je zwei Punkte von* F^3 *nur eine solche* c^3 *geht, und je zwei solche* c^3 *nur einen Punkt gemein haben. Die Secanten aus einem Punkte* $\mathfrak{g}$ *der* F^3 *an alle* c^3 *durch einen festen Punkt* $\mathfrak{c}$ *liegen in einer Ebene durch* $\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{g}$. *Ausserdem giebt es auf* F^3 *ein anderes Netz von Raumcurven* 3. *Grades* g^3 *von derselben Beschaffenheit, welche durch die Netze projectivischer Ebenenbüschel erzeugt werden, die den Ebenenbüscheln* (g_1) *von* $(\mathfrak{c}_1)$ *in allen Bündeln* $(\mathfrak{c})$ *entsprechen. Jede* g^3 *liegt mit jeder* c^3 *auf einer Fläche* 2. *Grades. Die Ebenen* G, *welche einer Ebene* G_1 *von* $(\mathfrak{c}_1)$ *in allen Bündeln* $(\mathfrak{c})$ *entsprechen, bilden ein Bündel* $(\mathfrak{g})$, *dessen Centrum* $\mathfrak{g}$ *auf* F^3 *liegt. Alle so entstehenden Bündel* $(\mathfrak{g})$ *sind einander collinear und bilden ebenfalls ein die* F^3 *erzeugendes Netz, welches wir zu dem Netze der Bündel* $(\mathfrak{c})$ *conjugirt nennen wollen. Die Curven* c^3 *und* g^3 *resp. spielen für das Netz der* $(\mathfrak{g})$ *dieselbe Rolle wie die Curven* g^3 *und* c^3 *resp. für das Netz der* $(\mathfrak{c})$*).

II. *Unter den Ebenen eines Bündels* $(\mathfrak{c})$ *resp.* $(\mathfrak{g})$ *giebt es sechs, welche sich mit den ihnen entsprechenden Ebenen der Bündel* $(\mathfrak{c})$ *resp.* $(\mathfrak{g})$ *längs einer Geraden* g *resp* c *schneiden. Jede Gerade* g *resp.* c *trifft fünf der* c *resp.* g, *die sechste, welche ihr conjugirt heissen soll, dagegen nicht. Jede Gerade* c *resp.* g *bildet mit den Kegelschnitten, in welchen die Ebenen durch die ihr conjugirte* g *resp.* c *die* F^3 *noch schneiden, Curven* c^3 *resp.* g^3**).

III. *Die reciproke Transformation eines Ebenenbündels* $(\mathfrak{c})$ *resp.* $(\mathfrak{g})$ *auf ein ebenes Punktfeld* E *vermittelt eine eindeutige Abbildung der Fläche* F^3 *auf die Ebene* E. *Den Punkten der Geraden* g *resp.* c *entspricht hierbei derselbe Fundamentalpunkt* $\mathfrak{g}$ *resp.* $\mathfrak{c}$. *Jeder Schnittcurve der* F^3 *mit einer Fläche* n. *Ordnung entspricht eine Curve* $(3n)$. *Ordnung, welche* n*-mal durch jeden der Fundamentalpunkte* $\mathfrak{g}$ *resp.* $\mathfrak{c}$ *geht; umgekehrt entspricht jeder Curve* n. *Ordnung von* E *eine Curve* $(3n)$. *Ordnung auf* F^3. *Den Geraden von* E *entsprechen die Curven* g^3 *resp.* c^3.

*) S. G. d. L. II. Abth. 24. Vortr. p. 191ff.

**) S. G. d. L. II. Abth. 26. Vortr. p. 215ff.

§ 3.

Die Erzeugung der ebenen Curven 3. Ordnung. Ihre eindeutige Transformation in sich.

Der Satz I. des vorigen Paragraphen liefert unmittelbar den folgenden für die Ebene:

I. *Drei collineare ebene Systeme* (C_1), (C_2), (C_3) *erzeugen eine Curve* 3. *Ordnung* f^3 *als Ort derjenigen Punkte, in welchen sich entsprechende Gerade der drei Systeme treffen. Die drei Systeme bestimmen zugleich ein Netz collinearer Systeme, von dem je drei ebenfalls die* f^3 *erzeugen. Dieses Netz enhält doppelt unendlich viel Büschel collinearer Systeme; je zwei Systeme bestimmen ein solches, und je zwei solche Büschel haben ein System gemein.* f^3 *enthält die Tripel* $(3\mathfrak{c})$ *sich selbst entsprechender Punkte dieser Büschel. Die Geraden* g *und* g', *welche zwei Geraden* g_1 *und* g_1' *von* (C_1) *entsprechen, beschreiben zwei collineare Systeme* (G) *und* (G'); *alle diese Systeme* (G) *bilden ein neues Netz collinearer Systeme, von dem ebenfalls je drei die* f^3 *erzeugen; es heisse das zu dem Netz der* (C) *conjugirte Netz. Jedes Tripel* $(3\mathfrak{g})$ *sich selbst entsprechender Punkte zweier Systeme* (G) *liegt auf* f^3, *und jedes Tripel* $(3\mathfrak{c})$ *liegt mit jedem Tripel* $(3\mathfrak{g})$ *auf einem Kegelschnitte.*

Je zwei Punkte von f^3 bestimmen offenbar ein Tripel $(3\mathfrak{c})$ oder $(3\mathfrak{g})$ durch die c^3 oder g^3, welche durch diese beiden Punkte geht. Trifft die Verbindungslinie zweier Punkte $(2\mathfrak{c})$ eines Tripels $(3\mathfrak{c})$ die f^3 zum dritten Male in $\mathfrak{g}$, so müssen die Verbindungslinien aller Punktepaare $(2\mathfrak{c}')$, welche mit dem festen Punkte $\mathfrak{c}$ ein Tripel $(3\mathfrak{c})$ bilden, durch $\mathfrak{g}$ gehen, weil sie die Secanten von $\mathfrak{g}$ an alle c^3 durch den festen Punkt $\mathfrak{c}$ sind. Es müssen aber auch umgekehrt die Verbindungslinien aller Punktepaare $(2\mathfrak{g})$, welche mit $\mathfrak{g}$ ein Tripel $(3\mathfrak{g})$ bilden, durch $\mathfrak{c}$ gehen. Sie gehen nämlich jedenfalls durch einen festen Punkt. Bildet nun $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{g}$ ein Tripel $(3\mathfrak{c})$, so muss die Gerade $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{g}}$ die f^3 in $\mathfrak{g}$ berühren, und jeder Kegelschnitt durch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{x}$ muss die f^3 in einem Tripel $(3\mathfrak{g})$ treffen; ein solcher Kegelschnitt ist nun das Geradenpaar $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{g}}$ und $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{c}}$, er schneidet f^3 in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{g}$ und in dem dritten Schnittpunkte von $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{c}}$ mit f^3, dessen Verbindungslinie mit $\mathfrak{x}$ also durch $\mathfrak{c}$ geht. Wir erhalten also folgenden Satz:*)

*) S. Milinowski, über eine reciproke Verwandtschaft des zweiten Grades, Borchardt's Journal, Bd. 79, p. 149.

Der analytische Ausdruck der eindeutigen Transformation in sich selbst solcher durch Nullsetzen von Determinanten dargestellten Gebilde ist folgender. Ist x ein Punkt der Curve:

II. *Die Verbindungslinien aller Punktepaare* $(2\mathfrak{c})$, *welche mit einem festen Punkte* $\mathfrak{c}$ *von* f^3 *ein Tripel* $(3\mathfrak{c})$ *bilden, gehen durch einen festen Punkt* $\mathfrak{g}$ *von* f^3; *die Verbindungslinien der Punktepaare* $(2\mathfrak{g})$, *welche mit* $\mathfrak{g}$ *Tripel* $(3\mathfrak{g})$ *bilden, gehen dann umgekehrt durch* $\mathfrak{c}$. *Jeder Erzeugung der* f^3 *durch zwei conjugirte Netze collinearer Systeme enspricht also eine eindeutige Transformation derselben in sich selbst.**)

§ 4.

Das vollständige System der eine ebene Curve 3. Ordnung erzeugenden Netze von collinearen ebenen Systemen.

Wir haben die ebene Curve 3. Ordnung als Erzeugniss zweier conjugirter Netze collinearer Systeme kennen gelernt; es dürfte daher die Aufgabe von Interesse sein, für eine gegebene Curve 3. Ordnung

---

$$\begin{vmatrix} p_x, & q_x, & r_x \\ p'_x, & q'_x, & r'_x \\ p''_x, & q''_x, & r''_x \end{vmatrix} = 0,$$

so bestimme man $\varkappa$, λ, μ aus den Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} \varkappa p_i + \lambda p_i' + \mu p_i'', & \varkappa q_i + \lambda q_i' + \mu q_i'', & \varkappa r_i + \lambda r_i' + \mu r_i'' \\ p'_x, & q'_x, & r'_x \\ p''_x, & q''_x, & r''_x \end{vmatrix} = 0,$$

$(i = 1, 2, 3)$. Der dem Punkte x entsprechende Punkt y ist dann bestimmt durch:

$$\varkappa p_y + \lambda p'_y + \mu p''_y = 0,$$
$$\varkappa q_y + \lambda q'_y + \mu q''_y = 0,$$
$$\varkappa r_y + \lambda r'_y + \mu r''_y = 0.$$

Um x ebenso aus y zu finden, braucht man nur die Horizontalreihen mit den Verticalreihen zu vertauschen.

*) Die Verbindungslinien eines Punktes $\mathfrak{x}$ von f^3 mit den einander entsprechenden Punkten $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{g}$ treffen f^3 jedesmal in zwei einander entsprechenden Punkten $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{c}'$. Sind $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{g}$ insbesondere Wendepunkte der f^3, so folgt hieraus leicht, dass jedem Wendepunkte wieder ein Wendepunkt entspricht, und dass je drei Punkten in gerader Linie wieder drei Punkte in gerader Linie entsprechen, dass also die Transformation der f^3 in sich selbst eine lineare wird. Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, dass man einem Punkt $\mathfrak{c}$ von f^3 jeden Punkt $\mathfrak{g}$ in obigem Sinne zuweisen kann, wodurch die Transformation fixirt ist. Es giebt hiernach unter diesen unendlich vielen eindeutigen Transformationen der f^3 in sich selbst neun lineare, die identische eingerechnet. Die übrigen neun linearen Transformationen der f^3 in sich selbst sind durch das Vorhandensein von Collineations-Centren und -Axen, nämlich jedesmal einem Wendepunkte und seiner harmonischen Polare charakterisirt; sie gehören einer leicht zu definirenden Schaar eindeutiger Transformationen der f^3 in sich selbst an. Es entspricht diese Eintheilung der linearen Transformationen der Eintheilung der Permutationen dreier Elemente in zwei Classen cyklischer. S. F. Klein, Geometrisches über Resolventen. Math. Ann. Bd. IV, p. 354.

solche Netze zu construiren, eine Aufgabe, die einfach unendlich viel Lösungen zulässt. Wir müssen hierzu von dem folgenden Satze ausgehen, der sich aus der Erzeugung der f^3 durch ein Kegelschnittbüschel und ein ihm projectivisches Strahlenbüschel leicht beweisen lässt:

I. *Verbindet man ein beliebiges Tripel von Punkten* $(3\mathfrak{c}_{12})$ *einer* f^3 *mit einem beliebigen nicht auf* f^3 *gelegenen Punkte* $\mathfrak{g}_{12}$ *einer Geraden* g_1 *durch Kegelschnitte* k^2_{12}, *so treffen diese die* f^3 *noch in Tripeln* $(3\mathfrak{g})$ *und* g_1 *in Punkten* $\mathfrak{p}_1$; *verbindet man diese 4 Punkte jedesmal mit einem andern beliebigen, nicht auf* f^3 *gelegenen Punkte* $\mathfrak{g}_{13}$ *von* g_1 *durch neue Kegelschnitte* k^2_{13}, *so gehen diese durch ein Tripel* $(3\mathfrak{c}_{13})$ *fester Punkte auf* f^3.

Sei nun g_2 eine beliebige Gerade durch $\mathfrak{g}_{12}$, so werden die k^2_{12} auf g_2 Punkte $\mathfrak{p}_2$ abschneiden, welche mit einem beliebigen nicht auf f^3 gelegenen Punkte $\mathfrak{g}_{23}$ von g_2 und mit den entsprechenden $(3\mathfrak{g})$ Kegelschnitte k^2_{23} bestimmen, welche sich in einem Tripel $(3\mathfrak{c}_{23})$ von festen Punkten auf f^3 schneiden. Da sich die entsprechenden Kegelschnitte beider projectivischen Büschel der k^2_{13} und k^2_{23} in Tripeln $(3\mathfrak{g})$ von f^3 treffen, so treffen sie sich ausserdem in den Punkten $\mathfrak{p}_3$ der Geraden g_3 durch $\mathfrak{g}_{13}$ und $\mathfrak{g}_{23}$. Die Punktreihen der $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ sind offenbar projectivisch und zwar entspricht dem Schnittpunkte einer Verbindungslinie zweier Punkte des Tripels $(3\mathfrak{c}_{12})$ z. B. mit g_1 der Schnittpunkte derselben Linie mit g_2. Hieraus folgt, dass diese projectivische Beziehung der Geraden g_1, g_2, g_3 dieselbe ist, als wenn g_1, g_2, g_3 sich in drei collinearen Systemen (C_1), (C_2), (C_3) entsprechen, die dadurch vollends bestimmt sind, dass $(3\mathfrak{c}_{12})$, $(3\mathfrak{c}_{13})$ resp. die Tripel sich selbst entsprechender Punkte für (C_1) und (C_2), (C_1) und (C_3) resp. sind. Diese drei Systeme erzeugen aber die f^3. Jedes Strahlbüschel $(\mathfrak{p}_1)$ von (C_1) erzeugt nämlich mit den ihm entsprechenden Strahlenbüscheln $(\mathfrak{p}_2)$ und $(\mathfrak{p}_3)$ von (C_2) und (C_3) zwei Kegelschnitte k^2_{12} und k^2_{13} durch $(3\mathfrak{c}_{12})$, $\mathfrak{g}_{12}$ und $(3\mathfrak{c}_{13})$, $\mathfrak{g}_{13}$ resp., welche ausser $\mathfrak{p}_1$ drei Punkte des Erzeugnisses der drei Systeme gemein haben, d. s. aber, wie aus der Construction folgt, drei Punkte von f^3.

Nach Annahme des Tripels $(3\mathfrak{c}_{12})$ und der g_1 entsprechenden Geraden g_2 und g_3 war unsere Construction vollkommen eindeutig. Betrachtet man nun g_1 als zu irgend einem andern Systeme (C') des Büschels $((C_1), (C_2))$ gehörig, so kann man es durch passende Wahl des Systemes (C') und eines andern (C'') desselben Büschels immer erreichen, dass der g_1 von (C') in (C'') eine beliebige Gerade g'' entspricht; aus den Systemen des Netzes ferner kann man immer eins (C''') so auswählen, dass der g_1 von (C') in (C''') eine beliebige Gerade g''' entspricht. Hieraus folgt, dass auch die willkürliche Annahme der Geraden g_2 und g_3 die Eindeutigkeit der Construction des Netzes nicht beeinträchtigt. Diese hängt also nur von der Annahme eines Tripels

$(3\mathfrak{c})$ ab; diese Tripel wiederum sind vollkommen bestimmt, sobald der Punkt $\mathfrak{g}$ von f^3 fixirt ist, welcher einem Punkte $\mathfrak{c}$ von f^3 im Sinne des Satzes II. von § 3. conjugirt ist. Hieraus folgt, dass in der That f^3 durch eine einfache Unendlichkeit von je zwei conjugirten Netzen collinearer Systeme erzeugt werden kann, also auch eine einfach unendliche Schaar eindeutiger Transformationen in sich selbst zulässt.

Kommt es einmal vor, dass ein Tripel $(3\mathfrak{c}_{12})$ mit einem daraus abgeleiteten $(3\mathfrak{c}_{13})$ auf einem Kegelschnitte liegt, so gehen die Tripel $(3\mathfrak{g})$ und $(3\mathfrak{c})$ in einander über, es liegen also je zwei Tripel $(3\mathfrak{g})$ oder $(3\mathfrak{c})$ auf einem Kegelschnitte. Wir können leicht einsehen, wenn dies eintritt. Wir sahen, dass derjenige Punkt $\mathfrak{x}$, welcher mit $\mathfrak{c}$ und dem ihm conjugirten $\mathfrak{g}$ ein Tripel $(3\mathfrak{c})$ bildet, auf der Tangente in $\mathfrak{g}$ an f^3 liegt. Sollen die Punkte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{x}$ nun gleichzeitig ein Tripel $(3\mathfrak{g})$ bilden, so muss auch $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{x}}$ die f^3 in $\mathfrak{c}$ berühren, und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, bilden die Punkte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{x}$ gleichzeitig ein Tripel $(3\mathfrak{g})$ und $(3\mathfrak{c})$. Da nun die Berührungspunkte der andern beiden Tangenten von $\mathfrak{x}$ an f^3 mit $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}$ auf einem f^3 in $\mathfrak{x}$ berührenden Kegelschnitte liegen, so giebt es drei solche Erzeugungen der f^3, für welche die Tripel $(3\mathfrak{c})$ und $(3\mathfrak{g})$ in einander übergehen.

Da dann zwei Tripel $(3\mathfrak{c}_{12})$ und $(3\mathfrak{c}_{13})$ auf einem Kegelschnitte liegen, so bestimmen sie einen Kegelschnitt $k_1{}^2$, in Bezug auf welchen sie Tripel einander conjugirter Punkte sind; irgend ein drittes Tripel $(3\mathfrak{c}_{23})$ bestimmt mit $(3\mathfrak{c}_{12})$ und $(3\mathfrak{c}_{13})$ zwei andere Kegelschnitte $k_2{}^2$ und $k_3{}^2$, welche mit $k_1{}^2$ entweder ein Netz bestimmen oder mit ihm zusammenfallen. Nimmt man aber einen Punkt $\mathfrak{c}$ von $(3\mathfrak{c}_{23})$ beliebig auf f^3 an, so kann man die beiden andern immer so wählen, dass das Letztere nicht eintritt, es müsste denn die Polare von $\mathfrak{c}$ für $k_1{}^2$ ein Theil von f^3 sein. Sehen wir hiervon ab, so kann man immer ein Kegelschnittnetz construiren, dessen Tripelcurve f^3 ist; denn f^3 hat mit der Tripelcurve des $(k_1{}^2, k_2{}^2, k_3{}^2)$ neun Punkte gemein, die nicht Schnittpunkte zweier Curven 3. Ordnung sein können, da dreimal sechs von ihnen auf einem Kegelschnitte liegen, ohne dass die übrigen drei in gerader Linie liegen.

Die f^3 erzeugenden collinearen Systeme werden jetzt einmal dadurch erhalten, dass man je zwei Geraden g_1, g_2 einander zuordnet, die Polaren desselben Punktes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf zwei feste Kegelschnitte $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ des Netzes sind, das andere Mal aber je zwei Geraden g_1, g_2 einander entsprechen lässt, die Polaren zweier festen Punkte $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ in Bezug auf denselben Kegelschnitt k^2 des Netzes sind. So erhält man die beiden conjugirten Netze collinearer Systeme (C) und (G). Nach unserer Construction müssen dieselben aber in diesem Falle in einander übergehen. Es findet dies in der bekannten Thatsache seinen Ausdruck, dass das Netz $(k_1{}^2, k_2{}^2, k_3{}^2)$ das Netz erster Polaren für eine Curve 3. Ordnung ist, deren Hesse'sche Curve f^3 ist, dass also die Polare von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf den Polarkegelschnitt $k_1{}^2$ von $\mathfrak{q}_1$ identisch ist mit der Polare von $\mathfrak{q}_1$ in Bezug auf den Polarkegelschnitt k^2 von $\mathfrak{p}$. Ich begnüge mich hiermit darauf hingewiesen zu haben, wie auch die Erzeugung der Curven 3. Ordnung durch collineare Systeme bei consequenter Verfolgung aller dabei auftretenden Fragen von selbst auf deren Polarentheorie führt.

Als Ergebniss dieses Paragraphen erhalten wir:

II. *Jede ebene Curve* 3. *Ordnung* f^3 *lässt sich einfach unendlich oft durch ein Paar von conjugirten Netzen collinearer Systeme* (C) *und* (G) *erzeugen. Hierbei kommt es dreimal vor, dass die Systeme* (C) *und* (G) *in einander übergehen. Dann gehen auch die Tripel* $(3\mathfrak{c})$ *und* $(3\mathfrak{g})$ *sich selbst entsprechender Punkte je zweier Systeme der beiden Netze in einander über und sind die gemeinsamen Tripel einander conjugirter Punkte je zweier Kegelschnitte eines Kegelschnittnetzes. Die collineare Zuordnung der erzeugenden Systeme erhält man dadurch, dass man entweder je drei Geraden einander zuordnet, die Polaren desselben veränderlichen Punktes in Bezug auf drei feste Kegelschnitte des Netzes sind, oder drei solche, die Polaren dreier festen Punkte in Bezug auf denselben variablen Kegelschnitt des Netzes sind. Zwei conjugirte Punkte* $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}$ *sind einander in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes conjugirt; die drei den Punkten einer Geraden conjugirten Punkte bilden ein Tripel* $(3\mathfrak{c})$ *oder* $(3\mathfrak{g})$.

§ 5.

Ueber die Schlaefli'sche Doppelsechs.

Die sechs Geraden g und c der F^3, welche mit den beiden erzeugenden Netzen der $(\mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{g})$ derselben zusammenhängen (§ 2, II) und die bekannte Schlaefli'sche Doppelsechs bilden, besitzen eine Eigenthümlichkeit, die den Geometern bisher entgangen zu sein scheint; je zwei conjugirte derselben sind nämlich reciproke Polaren in Bezug auf dieselbe Fläche 2. Grades. Zum Beweise dieses Satzes muss ich einen längeren Excurs in die Theorie der Flächen 2. Grades machen.

Wir wollen zwei Gerade einander in Bezug auf eine Fläche 2. Grades F^2 conjugirt nennen, wenn die eine die reciproke Polare der andern trifft. Dann gilt folgender Satz:

I. *Enthält die erste Erzeugung* $[g]$ *einer Fläche* 2. *Grades* G^2 *ein Tripel einander conjugirter Strahlen in Bezug auf eine Fläche* 2. *Grades* F^2, *so enthält sowohl diese Erzeugung* $[g]$ *als die zweite Erzeugung* $[g']$ *von* G^2 *eine einfach unendliche Schaar solcher Tripel.**)

*) S. H. Vogt: „Ueber ein besonderes Hyperboloid", Borchardt's Journal, Bd. 86, S. 301, wo dieser Satz für den Fall, dass F^2 der imaginäre Kugelkreis

Sind nämlich g_1, g_2, g_3 die Geraden dieses Tripels, so treffen ihre reciproken Polaren c_1, c_2, c_3 die Geraden g_2 und g_3, g_3 und g_1, g_1 und g_2 resp. Nennen wir daher C^2 die G^2 reciproke Polare und c^4 die gemeinsame Curve von G^2 und C^2, so haben wir ein der c^4 eingeschriebenes Sechseck, dessen Seiten abwechselnd der Erzeugung $[g]$ von G^2 und $[c]$ von C^2 angehören. Daraus folgt aber, dass es eine einfach unendliche Schaar solcher Sechsecke geben muss. Denn projicirt man die Figur aus einem Punkte $\mathfrak{f}$ der c^4 auf eine Ebene S, so erhält man ein einer Curve 3. Ordnung s^3 eingeschriebenes Sechseck, dessen Seiten abwechselnd durch zwei feste Punkte $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{c}'$ von s^3 gehen. Es muss also nach einem bekannten Satze von Steiner*) einfach unendlich viel solche Sechsecke geben. Die Verbindungslinien je zweier gegenüberliegenden Ecken dieser Sechsecke gehen durch einen festen Punkt von s^3, den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie von $\mathfrak{g}'$ mit dem Tangentialpunkte von $\mathfrak{c}$. Es müssen also auch die Verbindungslinien gegenüberliegender Eckpunkte der der c^4 eingeschriebenen Sechsecke einer durch c^4 gehenden Fläche 2. Grades angehören. Ordnet man nun jedem Punkte von c^4, in welchem sich die Erzeugenden g' und c'' schneiden, den Schnittpunkt ihrer reciproken Polaren c' und g'' zu, so liegen die Verbindungslinien der so zugeordneten Punkte auf einer Fläche 2. Grades. Denn die Projectionen der Geraden c', g'; c'', g'' auf S bilden zwei Paare conjugirter Strahlen, woraus leicht folgt, dass die Projectionen jener Verbindungslinien durch den Pol von $\overline{\mathfrak{g}'\mathfrak{c}'}$ in Bezug auf den Kegelschnitt (F^2, S) gehen müssen. Die Fläche dieser Verbindungslinien selbst muss nun mit der Fläche der Verbindungslinien je zweier gegenüberliegender Eckpunkte jener der c^4 eingeschriebenen Sechsecke identisch sein, weil sie mit ihr drei Geraden derselben Erzeugung gemein hat. Daraus folgt, dass je zwei gegenüberliegende Seiten der Sechsecke reciproke Polaren sind; hiermit ist der erste Theil des Satzes I. bewiesen.

Man zeigt aber zweitens leicht, dass die Geraden der Erzeugung $[g']$ von G^2, welche durch die Punkte (g_1, c_3), (g_2, c_1), (g_3, c_2) gehen, ebenfalls ein Tripel einander in Bezug auf F^2 conjugirter Strahlen bilden. Denn ist g_1' die Erzeugende durch (g_1, c_3), so muss ihre reciproke Polare c_1' in der Ebene $[c_1, g_3]$ liegen und dort die c_1 in (c_1, g_2),

im Unendlichen, ausgesprochen ist. Da sich jedoch der allgemeine Satz aus dem speciellen nicht ableiten lässt, so musste ich einen ausführlicheren Beweis desselben geben.

*) S. Steiner, Crelle's Journal, Bd. 32, p. 425, und Clebsch, ib. Bd. 63, p. 94. Ich bemerke, dass ich den Beweis, soweit er mit den Steiner'schen Polygonen zusammenhängt, nur skizzirt habe. Eine geometrische Theorie derselben habe ich mit meinem Freunde A. Hurwitz ausgearbeitet, aber noch nicht veröffentlicht.

die g_3 in (g_3, c_2) treffen, weil g_1' i. A. nicht in der Ebene $[g_1, c_3]$ liegt; also trifft c_1' die g_2' und g_3' etc. Hiermit ist also auch der zweite Theil des Satzes I. bewiesen.

Haben wir nun umgekehrt auf einer G^2 drei Gerade g_1, g_2, g_3 und auf einer C^2 drei Gerade c_1, c_2, c_3 so, dass g_1 die c_2 und c_3, g_2 die c_3 und c_1, g_3 die c_1 und c_2 schneidet, so giebt es eine Fläche 2. Grades F^2, in Bezug auf welche g_1 und c_1, g_2 und c_2, g_3 und c_3 reciproke Polaren sind. Ordnen wir nämlich den Punkten (g_1, c_2), (g_1, c_3) die Ebenen $[c_1, g_2]$, $[c_1, g_3]$ und den Punkten (c_1, g_2), (c_1, g_3) die Ebenen $[g_1, c_2]$, $[g_1, c_3]$ als Polaren zu, so bilden alle dadurch bestimmten Flächen 2. Grades ein Büschel (oder eine Schaar) durch ein windschiefes Vierseit, dessen Ecken und Seitenflächen die Doppelelemente der durch jene Zuordnung auf g_1 und c_1 bestimmten Involutionen sind. Dem Punkte (g_2, c_3) entsprechen daher in Bezug auf alle diese Flächen Polarebenen durch die Verbindungslinie der Punkte (g_1, c_2) und (c_1, g_3); eine solche Ebene ist $[c_2, g_3]$. Ordnen wir diese also dem Punkte (g_2, c_3) als Polare zu, so ist dadurch eine F^2 bestimmt, in Bezug auf welche auch g_2 und c_2, g_3 und c_3 reciproke Polaren sind.

Sei g_1', g_2', g_3' irgend ein Tripel einander in Bezug auf F^2 conjugirter Geraden auf der zweiten Erzeugung $[g']$ von G^2 und c_1', c_2', c_3' ihre reciproken Polaren auf C^2, so bilden die 12 Geraden:

$$\begin{array}{cccccc} g_1, & g_2, & g_3, & c_1', & c_2', & c_3'; \\ c_1, & c_2, & c_3, & g_1', & g_2', & g_3' \end{array}$$

die bekannte Gruppirung der Schlaefli'schen Doppelsechs. Gehen wir nun umgekehrt von den Geraden:

$$\begin{array}{cccccc} g_1, & g_2, & g_3, & g_4, & g_5, & g_6; \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4, & c_5, & c_6 \end{array}$$

der Schlaefli'schen Doppelsechs der F^3 aus, welche die Erzeugung durch die Netze der (c) und (g) liefert, so bestimmen, wie wir eben gezeigt haben, die Geraden g_1, g_2, g_3 und c_1, c_2, c_3 eine F^2, in Bezug auf welche sie reciproke Polaren sind. Die g_4 gehört nun der zweiten Erzeugung $[c']$ von C^2 an und bestimmt die Geraden c_5 und c_6 eindeutig dadurch, dass sie diejenigen Geraden der Erzeugung $[g']$ von G^2 sein müssen, welche durch die Schnittpunkte von G^2 mit g_4 gehen. Durch c_5 und c_6 sind ebenso g_6 und g_5 und durch diese c_4 bestimmt. Man sieht also, dass das Tripelpaar g_4, g_5, g_6; c_4, c_5, c_6 mit einem der Tripelpaare c_1', c_2', c_3'; g_1', g_2', g_3' identisch sein muss, weil es aus g_4 ebenso eindeutig construirt wird, wie dieses aus c_1'. Hieraus folgt der Satz:

II. *Die conjugirten Geraden einer Schlaefli'schen Doppelsechs einer Fläche 3. Ordnung sind reciproke Polaren in Bezug auf dieselbe Fläche 2. Grades F^2.**)

§ 6.

Ueber eine zu einer Fläche 3. Ordnung gehörige Fläche 3. Classe.

Wir haben in § 3. gesehen, dass die conjugirten Netze der F^3 erzeugenden Ebenenbündel $(\mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{g})$ auf einer Ebene F zwei conjugirte Netze collinearer Systeme (C) und (G) bestimmen, welche die Schnittcurve f^3 von F mit F^2 erzeugen. Es liegt nun die Frage nahe, ob die Netze der (C) und (G) im Besonderen in einander übergehen können. Da dann auch die Tripel $(3\mathfrak{c})$ und $(3\mathfrak{g})$, in welchen F von den Curven c^3 und g^3 getroffen wird, in einander übergehen müssen, so erhält man solche Ebenen F einfach dadurch, dass man durch irgend drei der fünf Schnittpunkte einer c^3 mit einer g^3 Ebenen legt. Durch zwei der Punkte $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, in welchen eine beliebige Gerade p die F^3 trifft, geht nun eine c^3 und eine g^3, deren drei weitere Schnittpunkte mit p verbunden die drei Ebenen F durch p liefern; denn diese Ebenen müssen auch von der Curve c^3 und g^3 durch den dritten Schnittpunkt $\mathfrak{c}_3$ und durch $\mathfrak{c}_1$ resp. $\mathfrak{c}_2$ in demselben Punkte getroffen werden. Die Ebenen F umhüllen also eine Fläche 3. Classe Φ^3. Nun enthält aber Φ^3 die 6 Geraden g und die conjugirten c. Denn irgend eine Ebene durch g trifft F^3 noch in einem Kegelschnitte, der mit der conjugirten c eine Curve c^3 bildet; irgend eine g^3 aber schneidet diese Ebene in drei Punkten dieses Kegelschnittes. Daraus folgt auf Grund von § 5., II., dass Φ^3 die reciproke Polare von F^3 in Bezug auf die dort definirte F^2 ist.

Die Curve f^3 ist also jetzt Tripelcurve eines Kegelschnittnetzes (k^2), und zwar werden die Polaren der Punkte von F in Bezug auf die Kegelschnitte k^2 durch die Bündel $(\mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{g})$ ausgeschnitten, so-

*) Das Product der zu den 36 Schlaefli'schen Doppelsechsen von F^3 gehörigen 36 F^2 ist also eine Covariante von F^3. Ist F^3 die sogenannte Diagonalfläche:

$$p^3+q^3+r^3+s^3+t^3=0,$$

wo $p=q=r=s=t=0$ fünf Ebenen sind, die der Identität:

$$p+q+r+s+t=0$$

genügen, so enthält diese Covariante den rationalen Factor:

$$p^2+q^2+r^2+s^2+t^2=0,$$

welcher der Doppelsechs entspricht, die übrig bleibt, wenn man von den 27 Geraden der F^3 die 15 Diagonalen der Vierseite, welche von je vier Ebenen auf der fünften bestimmt werden, ausschliesst. Siehe Clebsch, das Fünfseit und die Gleichung 5. Grades. Mathem. Ann. Bd. IV, p. 332.

dass jedem Kegelschnitte k^2 ein Punkt $\mathfrak{c}$ und ein Punkt $\mathfrak{g}$ als Centrum je eines solchen Bündels entspricht; es wird also hierdurch gleichzeitig eine eindeutige Transformation von F^3 in sich selbst vermittelt. Der Kegelschnitt, in welchem F von F^2 geschnitten wird, gehört ebenfalls dem Netze (k^2) an, weil die Punktepaare, in welchen F von je zwei conjugirten Geraden g und c getroffen wird, auch in Bezug auf (k^2) conjugirt sind; diesem Kegelschnitte entspricht der Pol $\mathfrak{f}$ von F in Bezug auf F^2. Die Polaren p der sechs Schnittpunkte der Geraden c mit F in Bezug auf einen Kegelschnitt von (k^2) treffen nämlich die conjugirten Geraden g und bestimmen mit ihnen sechs Ebenen, welche durch den diesem Kegelschnitte entsprechenden Punkt $\mathfrak{c}$ gehen, welcher Punkt offenbar für den Kegelschnitt (F^2, F) der Pol von F in Bezug auf F^2 ist.

Betrachtet man den einem Kegelschnitte k^2 von (k^2) zugehörigen Punkt $\mathfrak{c}$ als Pol für eine durch k^2 gehende Fläche 2. Grades C^2, so ist hierdurch jedesmal ein Flächenbüschel 2. Grades bestimmt. Greift man aus irgend drei derselben, für welche die Kegelschnitte k^2 nicht demselben Büschel angehören, je eine Fläche heraus C_1^2, C_2^2, C_3^2, so bestimmen diese drei Flächen ein Flächenbündel 2. Grades, in Bezug auf welches den Punkten von F die Punkte von F^3 conjugirt sind.*) Alle diese Flächenbündel bilden offenbar ein Flächengebüsch 2. Grades, dessen Kernfläche aus F und F^3 besteht. Die Erzeugung der F^3 durch die Bündel $(\mathfrak{g})$ liefert ein eben solches Flächengebüsch; beiden gehört F^2 an. Wir haben also folgenden Satz:

I. *Jedes Netz der eine F^3 erzeugenden collinearen Ebenenbündel* $(\mathfrak{c})$ *lässt sich auffassen als das Netz der Bündel von Polarebenen der Punkte einer Ebene F in Bezug auf die Flächen* 2. *Grades eines Bündels. Derselben Ebene F gehören dreifach unendlich viel solche Flächenbündel* 2. *Grades zu, welche demselben Flächengebüsch* 2. *Grades angehören, dessen Kernfläche aus F und F^3 besteht. Alle diese Ebenen umhüllen für eine gegebene Erzeugung und die ihr conjugirte dieselbe Fläche* 3. *Classe* Φ^3, *welche die reciproke Polare von F^3 in Bezug auf eine Fläche* 2. *Grades F^2 ist, die allen zu den Ebenen F gehörigen Flächengebüschen* 2. *Grades gemeinsam ist.*

§ 7.

Die Erzeugung einer Raumcurve 6. Ordnung vom Geschlechte 3 durch vier collineare Ebenenbündel.

Wir betrachten nunmehr das Erzeugniss von vier collinearen Ebenenbündeln $(\mathfrak{c}_1)$, $(\mathfrak{c}_2)$, $(\mathfrak{c}_3)$, $(\mathfrak{c}_4)$. Je drei derselben erzeugen eine

*) Es folgt hieraus eine einfache Construction der Pole, deren Polarkegelschnitte die k^2 sind. Siehe § 4.

Fläche F^3 und aus der Abbildung irgend einer derselben auf eine Ebene E (§ 2., III.) ergiebt sich leicht, dass das Erzeugniss der vier Ebenenbündel eine Raumcurve 6. Ordnung c^6 mit 7 scheinbaren Doppelpunkten ist; sie kann i. A. auf keiner Fläche 2. Grades liegen.

Sind $F_1{}^3$, $F_2{}^3$, $F_3{}^3$, $F_4{}^3$ die durch je drei der 4 Bündel erzeugten Flächen 3. Ordnung, so wird c^6 auch durch irgend vier collineare Bündel der dadurch bestimmten Netze erzeugt, vorausgesetzt dass sie nicht selbst demselben Netze angehören. Man kann so jeden Punkt des Raumes zum Centrum eines die c^6 erzeugenden Ebenenbündels machen. Die Flächen $F_1{}^3$, $F_2{}^3$ haben nämlich ausser der c^6 die durch die beiden Bündel $(\mathfrak{c}_3)$ und $(\mathfrak{c}_4)$ erzeugte Raumcurve 3. Grades c_{34}^3 gemein. Die Bündel $(\mathfrak{c}_1)$ und $(\mathfrak{c}_2)$ bestimmen ferner ein Büschel von collinearen Ebenenbündeln, und jedes Bündel desselben erzeugt mit den beiden Bündeln $(\mathfrak{c}_3)$ und $(\mathfrak{c}_4)$ eine Fläche 3. Ordnung, die durch c^6 und c_{34}^3 geht. Durch jeden Punkt $\mathfrak{c}$ des Raumes geht eine solche Fläche; denn in $\mathfrak{c}$ schneiden sich zwei entsprechende Ebenen G_3 und G_4 der beiden Bündel $(\mathfrak{c}_3)$ und $(\mathfrak{c}_4)$; die diesen in den Bündeln des durch $(\mathfrak{c}_1)$ und $(\mathfrak{c}_2)$ bestimmten Büschels entsprechenden Ebenen bilden ein Büschel, von dem i. A. nur eine Ebene durch $\mathfrak{c}$ geht; diese bestimmt das Bündel, welches mit $(\mathfrak{c}_3)$ und $(\mathfrak{c}_4)$ die durch c^6, c_{34}^3 und $\mathfrak{c}$ gehende Fläche 3. Ordnung erzeugt. In dem dadurch bestimmten Netze von collinearen Ebenenbündeln giebt es eins $(\mathfrak{c})$ mit dem Centrum $\mathfrak{c}$, das mit irgend drei der vier ursprünglichen Bündel ebenfalls die $\mathfrak{c}^6$ erzeugt.

Die Eindeutigkeit der Construction erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn die Secante von $\mathfrak{c}$ an c_{12}^3 gerade die Axe des den Ebenen G_3 und G_4 in den Bündeln des durch $(\mathfrak{c}_1)$ und $(\mathfrak{c}_2)$ bestimmten Büschels entsprechenden Ebenenbüschels ist. Dann ist offenbar $\mathfrak{c}$ ein Punkt von c^6 und ist also Centrum von unendlich vielen collinearen Ebenenbündeln, welche c^6 erzeugen. Irgend zwei derselben bestimmen ein Büschel, welches alle diese Bündel enthält; denn existirte noch irgend ein anderes solches Bündel mit dem Centrum $\mathfrak{c}$, so müsste dieses mit den Bündeln des Büschels einen Kegel 3. Ordnung erzeugen, dessen Centrum $\mathfrak{c}$ ein dreifacher Punkt von c^6 sein würde. Unter den Bündeln des Büschels giebt es drei specielle, welche in Ebenenbüschel degeneriren (§ 1., III). Die Axen c dieser Büschel sind dreifache Secanten der c^6. Jedes dieser speciellen Bündel erzeugt nämlich mit $(\mathfrak{c}_3)$ und $(\mathfrak{c}_4)$ eine F^3, welche die Gerade c enthält und mit der $F_1{}^3$ und $F_2{}^3$ ausser der c^6 noch die c_{34}^3 gemein hat. Da nun c mit dieser als einer Curve c^3 keinen Punkt gemein hat, so muss sie mit c^6 drei Punkte gemein haben. Wir sehen also gleichzeitig, dass die sechs Geraden c jeder durch c^6 gehenden F^3 dreifache Secanten der c^6 sind. Da nun jede solche F^3 mit der Fläche der dreifachen Secanten ausser diesen sechs

Geraden c und der dreifach zu zählenden c^6 keine weiteren Punkte gemein hat, so ist diese Fläche F^8 8. Ordnung.

Durch irgend drei Punkte des Raumes geht also eine oder ein Büschel von Flächen 3. Ordnung, welche c^6 enthalten.

Wird festgesetzt, welche Ebene G des Raumes einer Ebene G_1 von $(\mathfrak{c}_1)$ entsprechen soll, so ist damit im Allgemeinen auch das zur Erzeugung der c^6 gehörige Ebenenbündel $(\mathfrak{c})$ bestimmt, welchem G angehört. Treffen sich nämlich die entsprechenden Ebenen G_1 und G_2 von $(\mathfrak{c}_1)$ und $(\mathfrak{c}_2)$ mit G in $\mathfrak{g}$, so geht durch $\mathfrak{g}$ eine Fläche F^3 des durch die Curve c^3_{12} bestimmten Büschels. In dem dadurch bestimmten Netze von collinearen Ebenenbündeln giebt es im Allgemeinen nur eins $(\mathfrak{c})$, in welchem der G_1 von $(\mathfrak{c}_1)$ die G entspricht. Nur wenn $\mathfrak{g}$ ein Punkt von c^6 ist, ist jeder Punkt des Kegelschnittes durch die übrigen fünf Schnittpunkte von G mit c^6 Centrum eines gesuchten Bündels; denn eine F^3 durch $\mathfrak{c}_1$ und zwei Punkte desselben enthält den Kegelschnitt ganz, schneidet also G noch in einer Geraden g.

Je drei Flächen F^3 durch c^6 haben daher im Allgemeinen nur noch einen Punkt gemeinsam. Die drei Flächen sind nämlich durch ihre erzeugenden Bündel eindeutig auf einander bezogen. Ist nun G die Verbindungsebene irgend dreier entsprechender Punkte $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{g}''$, so giebt es einen Punkt $\mathfrak{c}$ auf derselben so, dass im Bündel $(\mathfrak{c})$ den einander entsprechenden Ebenen der die drei F^3 erzeugenden Bündel durch $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{g}''$ die Ebene G entspricht. Dieser Punkt $\mathfrak{c}$ ist den drei Flächen gemeinsam; denn das Bündel $(\mathfrak{c})$ erzeugt mit je zwei Bündeln auf den drei Flächen, deren Centrum mit $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{g}''$ resp. nicht auf derselben c^3 liegen, Flächen 3. Ordnung durch c^6, die mit jenen drei Flächen identisch sein müssen, weil sie noch $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{g}''$ resp. enthalten. Haben die drei Flächen ausserhalb c^6 mehr als einen Punkt gemeinsam, so gehen sie offenbar durch dieselbe c^3.

Irgend zwei Flächen F^3 durch c^6 haben immer eine solche Raumcurve 3. Grades c^3 gemeinsam. Alle durch c^6 gehenden Flächen 3. Ordnung bilden also ein lineares System 3. Stufe, das wir ein Flächengebüsch 3. Ordnung nennen wollen.

Entsprechend nun nennen wir die Gesammtheit der c^6 erzeugenden Ebenenbündel ein Gebüsch collinearer Ebenenbündel, welches die c^6 erzeugt. Es besteht aus dreifach unendlich vielen Netzen, von denen je drei ein Bündel gemein haben.

Wir haben also folgenden Satz:

I. *Vier collineare Ebenenbündel erzeugen eine Raumcurve* 6. *Ordnung c^6 mit* 7 *scheinbaren Doppelpunkten. Dieselbe c^6 wird durch ein Gebüsch collinearer Ebenenbündel erzeugt. Dieses Gebüsch enthält dreifach unendlich viel Netze collinearer Ebenenbündel, von denen je drei ein*

Bündel und je zwei ein Büschel von Bündeln gemein haben. Jeder Punkt des Raumes ist Centrum eines Bündels des Gebüsches; nur die Punkte von c^6 sind Centren eines Büschels von Ebenenbündeln. Jedes dieser Büschel enthält drei specielle in Ebenenbüschel degenerirende Bündel, deren Axen $\mathfrak{c}$ *dreifache Secanten der c^6 sind. Diese dreifachen Secanten liegen auf einer Fläche* 8. *Ordnung F^8.*

Einer Ebene G_1 von $(\mathfrak{c}_1)$ entsprechen in den Bündeln des c^6 erzeugenden Gebüsches successive alle Ebenen des Raumes. Ordnet man also je zwei Ebenen G und G' einander zu, welche zweien Ebenen G_1 und G_1' von $(\mathfrak{c}_1)$ in demselben Bündel $(\mathfrak{c})$ des Gebüsches entsprechen, so erhält man zwei collineare räumliche Ebenensysteme Σ und Σ' (§ 1., II. und § 2., I.). Die Ebenen von $(\mathfrak{c}_1)$ liefern so ein Netz von collinearen räumlichen Ebenensystemen, jedes Ebenenbüschel desselben ein Büschel solcher Systeme, und je zwei dieser Büschel haben ein System gemein. Dieses Netz steht natürlich zu c^6 in wesentlichen Beziehungen. Es ist c^6 erstens der Ort derjenigen Punkte, in welchen sich Büschel entsprechender Ebenen oder entsprechende Strahlen irgend dreier Systeme des Netzes treffen; denn jeder Ebene G_1 von $(\mathfrak{c}_1)$ entspricht in dem Büschel von Bündeln $(\mathfrak{c})$, welche in einem Punkte $\mathfrak{c}$ von c^6 ihr Centrum haben, ein Büschel von Ebenen mit der Axe durch $\mathfrak{c}$. Daraus folgt leicht, dass c^6 zweitens der Ort der Quadrupel $(4\mathfrak{g})$ sich selbst entsprechender Punkte je zweier Systeme des Netzes ist. Wir übergehen den leicht zu führenden Beweis, dass irgend drei collineare räumliche Ebenensysteme ein solches Netz bestimmen, also eine c^6 erzeugen, welche auch durch ein Gebüsch collinearer Ebenenbüschel erzeugt werden kann; wir nennen das Netz und das Gebüsch wiederum einander conjugirt. Wir haben also folgenden Satz:

II. *Drei collineare räumliche Ebenensysteme erzeugen eine Raumcurve* 6. *Ordnung als Ort derjenigen Punkte, in welchen sich Büschel entsprechender Ebenen der drei Systeme treffen. Dieselbe Curve wird durch ein Netz collinearer räumlicher Systeme erzeugt und ist der Ort der Quadrupel sich selbst entsprechender Punkte je zweier Systeme dieses Netzes. Die Ebenen, welche irgend einer Ebene eines Systemes in allen Systemen entsprechen, bilden ein Gebüsch collinearer Ebenenbündel, die also eine zu der Erzeugung durch das Netz conjugirte Erzeugung der c^6 liefern.*

Wir fragen zuletzt nach der Mannigfaltigkeit der Curven c^6. Jede der beiden Erzeugungen gestattet die Frage zu beantworten. Um nämlich das Bündel $(\mathfrak{c}_1)$ auf die Bündel $(\mathfrak{c}_2)$, $(\mathfrak{c}_3)$, $(\mathfrak{c}_4)$ collinear zu beziehen, sind, sobald die im Raume ja ganz beliebigen Centren fixirt sind, je 8, im Ganzen also 24 Bedingungen nöthig; die Curven c^6 bilden also eine 24-fache Mannigfaltigkeit. Dasselbe Resultat liefert auch die zweite Erzeugung. Um die Systeme Σ' und Σ'' auf das System Σ collinear zu beziehen sind je 15, also im Ganzen 30 Bedingungen nöthig; da es aber in dem c^6 erzeugenden Netze collinearer Systeme sechsfach unendlich viel Gruppen von je drei Systemen giebt, welche c^6 erzeugen, so bilden die c^6 in der That nur eine 24-fache Mannigfaltigkeit.

Sind von der ersten Erzeugung einer c^6 bereits die Bündel eines Netzes gegeben, soll also c^6 auf einer gegebenen Fläche 3. Ordnung liegen und eine bestimmte Erzeugung derselben mit ihr gemein haben, so ist sie durch acht Punkte eindeutig bestimmt. Denn nimmt man ein Centrum $\mathfrak{c}_4$ beliebig ausserhalb F^3 an, so hat man nur die eindeutige Aufgabe zu lösen, $(\mathfrak{c}_1)$ so collinear auf $(\mathfrak{c}_4)$ zu beziehen, dass acht gegebenen Ebenen von $(\mathfrak{c}_1)$ Ebenen durch acht gegebene Strahlen von $(\mathfrak{c}_4)$ entsprechen*). Es folgt also der Satz:

III. *Die durch ein Gebüsch collinearer Ebenenbündel oder das ihm conjugirte Netz collinearer räumlicher Ebenensysteme erzeugten Raumcurven* 6. *Ordnung c^6 bilden eine 24-fache Mannigfaltigkeit. Auf einer gegebenen F^3 geht durch acht Punkte nur eine c^6, wenn sie gleichzeitig eine gegebene Erzeugung der F^3 enthalten soll.*

§ 8.

Die eindeutige Abbildung der Curve 6. Ordnung auf die Fläche ihrer dreifachen Secanten. Untersuchung gewisser Punktquadrupel auf dieser Curve.

Die Quadrupel $(4\mathfrak{g})$ sich selbst entsprechender Punkte je zweier Systeme des c^6 erzeugenden Netzes besitzen einige interessante Eigenschaften, die wir jetzt ableiten wollen. Sie sind offenbar auch diejenigen Punkte, in welchen sich je vier Ebenen von irgend vier entsprechenden Ebenenbüscheln (g_1), (g_2), (g_3), (g_4) der vier Ebenenbündel $(\mathfrak{c}_1)$, $(\mathfrak{c}_2)$, $(\mathfrak{c}_3)$, $(\mathfrak{c}_4)$ der conjugirten Erzeugung treffen. Sie werden also auf c^6 durch das Netz der Curven g^3 irgend einer c^6 enthaltenden F^3 ausgeschnitten; da nun jede dieser g^3 mit einer c^3 von F^3 auf einer Fläche 2. Grades liegt, so erhalten wir die Quadrupel $(4\mathfrak{g})$ auch durch die Flächen 2. Grades des Bündels durch irgend eine Curve c^3, die irgend zwei Ebenenbündel des c^6 erzeugenden Gebüsches bestimmen.

Je zwei Punkte $\mathfrak{g}$ von c^6 bestimmen also ein Quadrupel $(4\mathfrak{g})$, ein Punkt $\mathfrak{g}$ eine einfach unendliche Schaar. Wir erhalten diese am einfachsten, wenn wir eine F^3 durch c^6 wählen, welche eine beliebige Gerade g durch $\mathfrak{g}$ enthält. Das Büschel der g^3 auf F^3 durch $\mathfrak{g}$ besteht aus der Geraden g und den Kegelschnitten, in welchen die Ebenen durch die conjugirte Gerade c die F^3 noch treffen (§ 2., II). Wir erhalten also folgenden Satz:

*) S. Schröter, Problematis etc. Crelle's Journal. Bd. 62, p. 1.

I. *Die Verbindungsebenen der Tripel* $(3\mathfrak{g})$, *welche mit einem festen Punkte* $\mathfrak{g}$ *von* c^6 *ein Quadrupel* $(4\mathfrak{g})$ *bilden, gehen durch eine feste dreifache Secante* c *von* c^6, *welche die zu* $\mathfrak{g}$ *conjugirte Secante heissen soll. Umgekehrt treffen die Ebenen durch eine feste dreifache Secante* c *von* c^6 *die* c^6 *noch in Tripeln* $(3\mathfrak{g})$, *welche mit einem festen Punkte* $\mathfrak{g}$ *von* c^6 *Quadrupel* $(4\mathfrak{g})$ *bilden.*

Dies führt also auf eine eigenthümliche eindeutige Beziehung der Punkte von c^6 auf die Geraden von F^8.*)

Der letzte Theil des Satzes ergiebt sich sehr leicht daraus, dass die drei dreifachen Secanten c durch einen Punkt $\mathfrak{c}$ von c^6 eine c^3 bilden, dass also alle Kegel 2. Grades durch diese drei Geraden c^6 in Quadrupeln $(4\mathfrak{g})$ treffen; eine Ebene durch zwei dieser Geraden bildet nun mit jeder Ebene durch die dritte einen solchen Kegel. Es ergiebt sich hieraus gleichzeitig folgende Construction der conjugirten Punkte und Geraden:

II. *Die drei dreifachen Secanten durch einen Punkt* $\mathfrak{c}$ *von* c^6 *sind die Kanten eines solchen Trieders, dass jede Seitenfläche desselben die* c^6 *zum sechsten Male in einem Punkte* $\mathfrak{g}$ *trifft, dessen conjugirte Secante die gegenüberliegende Kante* c *ist.*

Seien nun c_1, c_2, c_3 die drei dreifachen Secanten durch $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ ihre conjugirten Punkte, to trifft die Ebene G durch diese drei Punkte c^6 noch in einem Tripel $(3\mathfrak{c})$. Ein Kegelschnitt $k_1{}^2$ durch $(3\mathfrak{c})$ und $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ bildet nun mit c_1 eine Curve c^3; denn eine Fläche F^3 durch c^6, welche eine Gerade g_1 in G durch $\mathfrak{g}_1$ enthält, hat c_1 zur conjugirten Geraden. Es werden also alle Flächen 2. Grades durch c_1 und $k_1{}^2$, die c^6 in Quadrupeln $(4\mathfrak{g})$ treffen; dasselbe gilt von den Flächen 2. Grades durch c_2 und $k_2{}^2$, c_3 und $k_3{}^2$. Da nun die drei Kegelschnitte $k_1{}^2$, $k_2{}^2$, $k_3{}^2$ nicht ohne zusammenzufallen, also überhaupt nicht demselben Büschel angehören können, so bilden die Punkte $\mathfrak{c}+(3\mathfrak{c})=(4\mathfrak{c})$ mit jedem Quadrupel $(4\mathfrak{g})$ 8 associirte Punkte.

Nun gilt folgender Satz:

III. *Liegen auf einer Fläche 3. Ordnung* F^3 *acht associirte Punkte* $(8\mathfrak{g})$, *so treffen die Schnittcurven je zweier Flächen 2. Grades durch die* $(8\mathfrak{g})$ *die* F^3 *noch in je vier Punkten einer Ebene; diese Ebenen bilden ein zu dem Flächenbündel 2. Grades durch die* $(8\mathfrak{g})$ *reciprokes Ebenenbündel, dessen Centrum* $\mathfrak{c}$ *auf* F^3 *liegt.***)

Jeder Fläche G^2 durch die $(8\mathfrak{g})$ entspricht also ein Strahl g von $(\mathfrak{c})$, welcher G^2 in zwei Punkten von F^3 trifft; durch diese beiden

---

*) Es folgt hieraus, dass F^8 ausser der dreifachen Curve c^6 keine vielfachen Curven mehr enthalten kann, woraus wiederum leicht folgt, *dass es keine Ebenen giebt, welche* c^6 *in 6 Punkten eines Kegelschnittes schneiden.*

**) S. Reye, Math. Ann. Bd. I, p. 455. Bd. II, p. 475.

Punkte geht eine g^3, und umgekehrt trifft die Secante g von $\mathfrak{c}$ an irgend eine g^3 die F^3 in zwei Punkten, in welchen sie von der entsprechenden G^2 getroffen wird. Beschreibt g^3 ein Büschel durch einen Punkt $\mathfrak{g}$, so beschreibt die entsprechende G^2 ein Flächenbüschel und erzeugt mit dem Büschel der g^3 eine gewisse Curve auf F^3, die Schnittcurve mit der Fläche 4. Ordnung, welche das Büschel der G^2 mit dem Flächenbüschel 2. Ordnung durch die g^3 und irgend eine c^3 erzeugt. Diese Curve besteht nun aus dieser c^3 und aus einer ebenen Curve 3. Ordnung, welche von dem Büschel der G^2 mit dem ihm entsprechenden Strahlenbüschel in ($\mathfrak{c}$) erzeugt wird; der Rest ist also eine Curve 6. Ordnung, welcher in der Bildebene E (§ 2., III.) eine Curve 4. Ordnung durch die sechs Fundamentalpunkte entspricht. Alle so entstehenden Curven 6. Ordnung haben nun die Punkte ($8\mathfrak{g}$) gemeinsam. Liegen also von diesen vier auf einer g^3, so haben die entsprechenden Curven 4. Ordnung in E vier Punkte einer Geraden gemein, die übrigen vier Punkte müssten also mit den sechs Fundamentalpunkten auf einer Curve 3. Ordnung liegen. Dann müssten also die nicht auf g^3 liegenden Punkte der ($8\mathfrak{g}$) in einer Ebene liegen, was nicht möglich. Hieraus folgt, dass in diesem Falle die Curven 6. Ordnung durch die Punkte ($8\mathfrak{g}$) in eine zusammenfallen.

Die Punkte ($4\mathfrak{c}$) bilden nun mit irgend einem Quadrupel ($4\mathfrak{g}$) acht associirte Punkte und es erzeugt folglich jedes Flächenbüschel 2. Grades durch dieselben mit dem entsprechenden Büschel der g^3 die c^6; jede Fläche 2. Grades durch dieselben trifft also c^6 noch in einem Quadrupel ($4\mathfrak{g}$). Wir erhalten daher den Satz:

IV. *Je zwei Quadrupel* ($4\mathfrak{g}$) *bestimmen ein Flächenbüschel* 2. *Grades, dessen Flächen auf* c^6 *dieselbe Schaar von Quadrupeln* ($4\mathfrak{c}$) *bestimmen. Das Tripel* ($3\mathfrak{c}$), *welches mit einem Punkte* $\mathfrak{c}$ *von* c^6 *ein solches Quadrupel* ($4\mathfrak{c}$) *bildet, erhält man dadurch, dass man die drei übrigen Schnittpunkte von* c^6 *mit der Verbindungsebene der den drei dreifachen Secanten durch* $\mathfrak{c}$ *conjugirten Punkte sucht.*

§ 9.

Die mit einem Flächengebüsch 2. Grades verbundene Kegelspitzencurve.

In Analogie der für die ebenen Curven und die Flächen 3. Ordnung gewonnenen Resultate stellen wir nun den beiden Erzeugungsweisen von c^6 entsprechend die Fragen, ob erstens das Gebüsch der c^6 erzeugenden collinearen Ebenenbündel aufgefasst werden kann als das Gebüsch der Polarenbündel einer Ebene F in Bezug auf die Flächen 2. Grades eines Gebüsches, und ob zweitens das Netz der die c^6 erzeugenden collinearen räumlichen Ebenensysteme aufgefasst werden kann als das Netz der Polarensysteme der Punkte des Raumes in Bezug auf die Flächen 2. Grades eines Netzes?

Im ersten Falle ist offenbar c^6 der Ort derjenigen Punkte $\mathfrak{g}$, welche Punkten $\mathfrak{c}$ von F in Bezug auf alle Flächen des Gebüsches $[G^2]$ conjugirt sind. Die Punkte $\mathfrak{c}$ in F erfüllen eine Curve 4. Ordnung c^4, die Bildcurve in F der c^6 jeder durch c^6 gehenden F^3. Die Punkte, in welchen F von c^6 getroffen wird, sind der Definition nach auch Punkte von c^4; da ihnen also in Bezug auf $[G^2]$ wiederum gemeinsame Punkte von c^6 und c^4 conjugirt sein müssen, so sind sie drei Paare conjugirter Punkte in Bezug auf $[G^2]$ und sind also die Ecken eines vollständigen Vierseits.

Schneidet umgekehrt eine Ebene F die c^6 in sechs Eckpunkten eines vollständigen Vierseits, so ist das Gebüsch der die c^6 erzeugenden collinearen Ebenenbündel das Gebüsch der Polarenbündel der Punkte von F in Bezug auf ein Gebüsch $[G^2]$. F ist nämlich jetzt eine Ebene aller Φ^3, welche zu den durch c^6 gehenden F^3 gehören (§ 6., I.); denn die Ecken je zweier Dreiseite des Vierseits, die eine Ecke gemein haben, bilden zwei Tripel ($3\mathfrak{g}$), die auf einem Kegelschnitte liegen. Jede F^3 bestimmt auf F ein Kegelschnittnetz (k^2), und alle diese (k^2) gehören demselben Gebüsch $[k^2]$ an, weil die gegenüberliegenden Ecken des Vierseits in Bezug auf alle diese (k^2) conjugirt sind. Jedem Kegelschnitte k^2 des Gebüsches entspricht ein Ebenenbündel ($\mathfrak{c}$) des c^6 erzeugenden Gebüsches als Polarenbündel der Punkte von F in Bezug auf die Flächen G^2 eines Büschels durch k^2; irgend vier Flächen aus vier solchen Büscheln, deren Kegelschnitte k^2 nicht demselben Netze angehören, bestimmen eins der gesuchten Flächengebüsche $[G^2]$. Alle diese Flächengebüsche bilden ein lineares System 4. Stufe, welches alle zu den durch c^6 gehenden F^3 gehörigen F^2 enthält (§ 6., I.). Nun bestimmt jede Ebene F einer Φ^3, die zu einer F^3 gehört, ein besonderes Flächengebüsch 2. Grades (§ 6., I.), welches mit einer beliebigen andern Fläche 2. Grades ein solches System 4. Stufe bestimmt. Jenes besondere Flächengebüsch oder die Ebene F bestimmt also auf F^3 eine fünffache Mannigfaltigkeit von Curven c^6, welche F in den sechs Eckpunkten eines vollständigen Vierseits treffen. Solche Curven bilden also auf F^3 im Ganzen eine siebenfache und im Raume eine 23-fache Mannigfaltigkeit; sie sind daher speciell und sollen mit dem besonderen Namen Kegelspitzencurven bezeichnet werden.

In der That gehen durch jede solche Kegelspitzencurve c^6 und die ihr conjugirte c^4 die Kernflächen F^4 der vierfach unendlich vielen Flächengebüsche 2. Grades $[G^2]$. Ist K^2 der Kegel von $[G^2]$, welcher seine Spitze in einem Punkte $\mathfrak{c}$ von c^4 hat, so ist die Polargerade c von F in Bezug auf K^2 eine dreifache Secante von c^6; denn sie trifft F^4 in Punkten, denen in Bezug auf $[G^2]$ Punkte von F conjugirt sein müssen. Dem Punkte $\mathfrak{c}$ ist dann in Bezug auf $[G^2]$ der der Secante c conjugirte Punkt $\mathfrak{g}$ von c^6 conjugirt (§ 8., I.). Denn $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{g}$ sind einander conjugirt in Bezug auf alle F^2, die zu den durch c und c^6 gehenden F^3 gehören; diese gehören aber dem durch $[k^2]$ bestimmten linearen Flächensysteme 4. Stufe an, in Bezug auf dessen Flächen einem Punkte $\mathfrak{g}$ von c^6 ein fester Punkt $\mathfrak{c}$ von c^4 conjugirt ist.

Es ist also c^4 diejenige Curve, in welcher F von der Fläche der dreifachen Secanten F^8 ausser den das Vierseit bildenden Secanten geschnitten wird. F^8 muss die F^4 ausser der dreifach zu zählenden c^6 und der c^4 noch in einer Curve 10. Ordnung schneiden, welche offenbar aus zehn Geraden besteht. Jede dieser Geraden c ist Axe eines in $[G^2]$ enthaltenen Ebenenpaares. Jedem Geradenpaare von $[k^2]$ ist nämlich als Polarenbündel in dem c^6 erzeugenden Gebüsch ein Ebenenbündel ($\mathfrak{c}$) zugeordnet, dessen Centrum der Schnittpunkt der beiden Geraden ist, sodass alle hierdurch bestimmten G^2 in den Punkten dieser beiden Geraden gegebene Ebenen durch dieselben berühren. Soll unter diesen G^2 ein Kegel sein, d. h. ist $\mathfrak{c}$ ein Punkt von c^4, so muss also das Ebenenbündel ($\mathfrak{c}$) in das Ebenenbüschel (c) degeneriren, sodass jedem Punkte von c dasselbe Geradenpaar in $[k^2]$ zugeordnet ist. Liegt also c auf F^4, so sind alle Kegel von $[G^2]$, deren Centren auf c liegen, mit dem Ebenenpaare durch c und das Geradenpaar identisch.

Wir haben also folgenden Satz:

I. *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das eine c^6 erzeugende Gebüsch von collinearen Ebenenbündeln das Gebüsch von Polarbündeln der Punkte einer Ebene F in Bezug auf die Flächen 2. Grades eines Gebüsches $[G^2]$ ist, ist die, dass F die c^6 in den sechs Eckpunkten eines vollständigen Vierseits trifft. Es ist dies eine Bedingung für die c^6, sodass alle solche c^6 noch eine 23-fache Mannigfaltigkeit bilden. Ist die Bedingung erfüllt, so giebt es noch vierfach unendlich viel zugehörige Gebüsche $[G^2]$; in jedem derselben giebt es zehn Ebenenpaare, deren Axen dreifache Secanten von c^6 sind. Diese dreifachen Secanten treffen F in einer Curve c^4, durch welche sowie durch c^6 die Kernflächen F^4 aller dieser Flächengebüsche $[G^2]$ gehen.*

§ 10.

Die Kerncurve eines Flächennetzes 2. Grades.

Soll zweitens das Netz der eine c^6 erzeugenden collinearen räumlichen Ebenensysteme das Netz der Polarensysteme der Punkte des Raumes in Bezug auf die Flächen 2. Grades eines Netzes (G^2) sein, ist also c^6 die Kerncurve dieses Netzes, so sind die Quadrupel $(4\mathfrak{g})$ gemeinsame Quadrupel einander conjugirter Punkte je zweier Flächen des Netzes, es müssen also je zwei Quadrupel (4$\mathfrak{g}$) acht associirte Punkte bilden.*) Bilden umgekehrt irgend zwei und folglich je zwei Quadrupel (4$\mathfrak{g}$) acht associirte Punkte, so ist c^6 Kerncurve eines Flächennetzes 2. Grades. Das erste folgt leicht aus dem Beweise des Satzes IV. in § 8.; daraus folgt nämlich, dass die Quadrupel (4$\mathfrak{c}$) und (4$\mathfrak{g}$) jetzt in einander übergehen müssen, dass also nach § 8., IV. je zwei Quadrupel (4$\mathfrak{g}$) acht associirte Punkte bilden. Die drei Punkte $\mathfrak{g}$, welche den dreifachen Secanten c durch einen Punkt $\mathfrak{c}$ von c^6 conjugirt sind, liegen also jetzt in der $\mathfrak{c}$ conjugirten Geraden.

Seien nun ferner (4$\mathfrak{g}_{12}$) und (4$\mathfrak{g}_{13}$) irgend zwei Quadrupel (4$\mathfrak{g}$), so bestimmen sie eine Fläche 2. Grades G_1^2, für welche sie Quadrupel einander conjugirter Punkte sind. Durch passende Wahl eines dritten Quadrupels (4$\mathfrak{g}_{23}$) (vergl. § 4., p. 8) erhält man ebenso mit (4$\mathfrak{g}_{12}$) und (4$\mathfrak{g}_{13}$) zwei andere Flächen G_2^2 und G_3^2, welche mit G_1^2 ein Netz (G^2) bestimmen. Nun kann man (4$\mathfrak{g}_{12}$) und (4$\mathfrak{g}_{13}$) immer noch so auswählen, dass sie auf einer c^3 liegen; es liegt z. B. jedes Quadrupel (4$\mathfrak{g}$) mit dem Quadrupel durch zwei Punkte, welche mit einem Punkte von (4$\mathfrak{g}$) auf derselben dreifachen Secante c liegen, auf einer c^3, die aus c und einem Kegelschnitte besteht. Durch c^3 und c^6 geht ein Büschel von Flächen 3. Ordnung F^3 und ebenso durch c^3 und die Kerncurve k^6 von (G^2) ein Büschel von Flächen K^3. Jede K^3 schneidet jede F^3 ausser c^3 in einer Curve 6. Ordnung, welche zu derselben Erzeugung der F^3 gehört wie c^6, also mit ihr identisch ist, weil sie zwölf Punkte mit ihr gemein hat; k^6 ist folglich ebenfalls mit c^6 identisch, also (G^2) das gesuchte Flächennetz.**)

Die Kerncurven eines Flächennetzes 2. Grades bilden wie diese eine 21-fache Mannigfaltigkeit; in der That bilden die Kerncurven auf einer F^3 eine fünffache Mannigfaltigkeit entsprechend den dreifach unendlich vielen Netzen, welche zu einer F von Φ^3 gehören. Wir haben also den Satz:

I. *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das eine c^6 erzeugende Netz von collinearen räumlichen Ebenensystemen das Netz von Polarensystemen in Bezug auf ein Flächennetz 2. Grades* (G^2) *ist, ist die, dass irgend zwei Quadrupel* (4$\mathfrak{g}$) *acht associirte Punkte bilden. Dann gehen die Quadrupel* (4$\mathfrak{g}$) *und* (4$\mathfrak{c}$) *in einander über und jedem Punkte* $\mathfrak{g}$ *von* c^6 *ist die Schnittgerade seiner Polarebenen in Bezug auf alle Flächen des Netzes conjugirt. Solche Curven* c^6 *bilden eine* 21-*fache Mannigfaltigkeit.*

---

*) S. Hesse, Crelle's Journal, Bd. 49, p. 279.

**) Da es zum Beweise auch genügt hätte, statt (4$\mathfrak{g}_{23}$) irgend 4 Punkte zu nehmen, die sowohl mit (4$\mathfrak{g}_{12}$) als mit (4$\mathfrak{g}_{13}$) acht associirte Punkte bilden, so ist c^6 als Ort dieser Punkte vollkommen bestimmt.

§ 11.

Das Polarnetz einer Fläche 3. Ordnung.

Wir werden zuletzt naturgemäss auf die Frage geführt, ob eine c^6 gleichzeitig Kegelspitzencurve und Kerncurve sein kann. Wir setzen zunächst die Möglichkeit voraus und leiten alle Folgerungen daraus ab. Es seien nun c_1, c_2, c_3, c_4 die Seiten des Vierseits in F, und die auf c^6 liegenden Eckpunkte desselben $\mathfrak{g}_{12}$ und $\mathfrak{g}_{34}$, $\mathfrak{g}_{13}$ und $\mathfrak{g}_{24}$, $\mathfrak{g}_{14}$ und $\mathfrak{g}_{23}$, ferner $c_{12}, c_{34}, c_{13}, c_{24}, c_{14}, c_{23}$ die diesen conjugirten Geraden; es gehen dann c_{12} durch $\mathfrak{g}_{34}$, c_{13} durch $\mathfrak{g}_{24}$ u. s. w. Sind endlich $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4$ die den Seiten c_1, c_2, c_3, c_4 conjugirten Punkte von c^6, so müssen, weil c^6 eine Kerncurve ist, in gerader Linie liegen:

$$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_{34} \text{ auf } c_{12},$$
$$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_{24} \text{ auf } c_{13} \text{ u. s. w.}$$

Es sind also die 10 Punkte $\mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{34}, \mathfrak{g}_{23}, \mathfrak{g}_{14}, \mathfrak{g}_{13}, \mathfrak{g}_{24}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4$ und die ihnen conjugirten dreifachen Secanten die Ecken und Kanten eines vollständigen Pentaeders.

Sind nun F^3 und F_1^3 irgend zwei durch c^6 gehende Flächen 3. Ordnung und F^2 und F_1^2 die ihnen zugehörigen Flächen 2. Grades, so bilden die Polarebenen der Punkte von F in Bezug auf F^2 und F_1^2 zwei Bündel $(\mathfrak{f})$ und $(\mathfrak{f}_1)$ des c^6 erzeugenden Gebüsches. Dieselben sind also collinear auf einander bezogen, und wir denken uns in F zwei solche collineare Systeme, dass je zwei Punkte einander entsprechen, welche die Pole entsprechender Ebenen von $(\mathfrak{f})$ und $(\mathfrak{f}_1)$ in Bezug auf F^2 resp. F_1^2 sind. In $\mathfrak{g}_{12}$ schneiden sich nun zwei entsprechende Ebenen von $(\mathfrak{f})$ und $(\mathfrak{f}_1)$, deren Pol in beiden Fällen $\mathfrak{g}_{34}$ ist; der Punkt $\mathfrak{g}_{34}$ ist also ein sich selbst entsprechender Punkt der beiden Systeme. Dasselbe gilt also auch von den übrigen Ecken des Vierseits in F, woraus folgt, dass je zwei entsprechenden Ebenen der beiden Bündel $(\mathfrak{f})$ und $(\mathfrak{f}_1)$ in Bezug auf F^2 resp. F_1^2 derselbe Pol in F entspricht. Sei nun H irgend eine andere Ebene unseres Pentaeders, welche also ebenfalls c^6 in den 6 Ecken eines vollständigen Vierseits trifft, und sei $(\mathfrak{h})$ das Bündel der Polarebenen der Punkte von H in Bezug auf F^2. Die Ebenenbündel $(\mathfrak{f})$ und $(\mathfrak{h})$ sind dann collinear, wenn man sie dem c^6 erzeugenden Gebüsch angehörig betrachtet, und die Ebenen F und H ebenfalls, wenn je zwei Pole entsprechender Ebenen von $(\mathfrak{f})$ und $(\mathfrak{h})$ in Bezug auf F^2 einander zugewiesen werden. Wie wir eben bewiesen haben, bleibt diese Beziehung unverändert, von welcher F^3 durch c^6 wir auch ausgehen mögen. Nun verbindet aber jede der 6 Geraden c auf F^3 entsprechende Punkte von F und H. Da nun die Geraden c in ihrer Gesammtheit die dreifachen Secanten von c^6 ausmachen, so gehören diese dem Axensystem einer Raumcurve 3. Grades (Ebenenbüschel 3. Classe) φ^3 an. Jede Ebene durch zwei dreifache Secanten ist Schmiegungsebene von φ^3. Da also durch den Punkt, in welchem eine solche Ebene die c^6 zum sechsten Male trifft, nur drei Schmiegungsebenen von φ^3 gehen können, so liegen in ihr noch zwei dreifache Secanten. Jede Schmiegungsebene von φ^3 trifft also c^6 in den 6 Eckpunkten eines vollständigen Vierseits; diese Ebenen sind folglich allen Φ^3 gemeinschaftlich.

Die Ebenen von φ^3 gruppiren sich offenbar zu je fünf zu den Seitenflächen eines vollständigen Pentaeders, dessen Ecken auf c^6 liegen; der c^4 in F ist also eine Schaar vollständiger Fünfseite eingeschrieben. Je vier Flächen eines solchen Pentaeders bestimmen ein Tetraeder, dessen vier Ecken ein Quadrupel ($4\mathfrak{g}$) bilden, wie z. B. $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$.

Jeder Ebene F von φ^3 gehört ein lineares Flächensystem 2. Grades 4. Stufe zu, welches alle Flächengebüsche enthält, in Bezug auf welche die c^6 der c^4 conjugirt ist. Alle diese Systeme enthalten nun das Netz (G^2) sowohl, dessen Kerncurve c^6 ist, als diejenigen Flächen F^2, welche zu den durch c^6 gehenden F^3 gehören. Da überdies die Polarebenen eines Punktes $\mathfrak{g}$ von c^6 in Bezug auf die allen Systemen gemeinsamen Flächen 2. Grades durch die $\mathfrak{g}$ conjugirte Secante c gehen müssen (s. p. 21), so bilden letztere ebenfalls ein Netz, welches also mit (G^2) identisch sein muss. In der That bestimmen irgend zwei Tetraeder zweier c^6 eingeschriebenen Pentaeder eine G^2, in Bezug auf welche den Ebenen von φ^3 als Pole die Punkte einer gewissen c^3 entsprechen. Nun ist die Polarebene G eines Punktes $\mathfrak{g}$ von c^6 in Bezug auf G^2 eine Ebene aller Φ^3, welche zu den durch c^3 und c^6 gehenden F^3 gehören. Sind nämlich c', c'', c''' die drei dreifachen Secanten durch $\mathfrak{g}$, so entsprechen den Ebenen $[c', c'']$, $[c', c''']$, $[c'', c''']$ in Bezug auf G^2 als Pole drei Punkte von c^3, deren Verbindungslinien die reciproken Polaren in Bezug auf G^2 sind, welche also die den Geraden c', c'', c''' conjugirten Punkte $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$, $\mathfrak{g}'''$ enthalten müssen; da diese auf einer Geraden c liegen, so ist in der That G eine Ebene aller Φ^3 der durch c^6 und c^3 gehenden F^3 (s. § 4., II.). Diese Φ^3 bilden also eine solche Schaar, dass je eine dieser F^3 und eine Φ^3 reciproke Polaren für G^2 sind; und zwar gehört der F^3 jedesmal diese Φ^3 zu. Denn enthält eine F^3 z. B. die c', so muss die conjugirte g' durch $\mathfrak{g}'$ gehen, ausserdem aber durch zwei Punkte von c^3, ist also mit der reciproken Polare von c' für G^2 identisch. G^2 ist also die F^2 für alle durch c^6 und c^3 gehenden F^3.

Den Punkten von F sind in Bezug auf (G^2) die Punkte einer Fläche 3. Ordnung F^3 conjugirt, welche $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$ zu Knotenpunkten hat; denn diese Punkte sind allen Punkten der Geraden c_1, c_2, c_3, c_4 resp. conjugirt. Auf F^3 gehen also die Curven g^3 und c^3 sowie die Netze der ($\mathfrak{g}$) und ($\mathfrak{c}$) in einander über. Mit Bezug auf die Bemerkung über das Polarsystem einer Curve 3. Ordnung p. 8 ergiebt sich hieraus sofort, dass (G^2) das Netz erster. Polaren der Punkte von F in Bezug auf eine Fläche 3. Ordnung ist.*) Die Construction der einem Punkte $\mathfrak{p}$ von F entsprechenden Fläche G^2 ist jetzt sehr einfach: Man suche den conjugirten Punkt $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf (G^2) und suche in (G^2) diejenige Fläche G^2, für welche $\mathfrak{q}$ und F Pol und Polarebene sind, dann ist G^2 die erste Polare von $\mathfrak{p}$. Jedem Punkte $\mathfrak{c}$ von c^4 entspricht offenbar der Kegel, dessen Spitze der conjugirte Punkt $\mathfrak{g}$ von c^6 ist.

Wir können nun auch leicht die Polarengebüsche $[G^2]$ construiren, denen das Polarennetz (G^2) angehört. Durch Annahme von irgend 4 Kegelspitzen ist nämlich ein Gebüsch $[G^2]$ und eine Kernfläche F^4 durch c^6 und c^4 bestimmt. Nehmen wir nun diese 4 Spitzen auf den 4 Seiten eines vollständigen Vierseits an, in dessen Ecken c^6 durch eine Ebene H von φ^3 getroffen wird, so enthält F^4 diese 4 Geraden. Da nun jede derselben Axe eines in $[G^2]$ enthaltenen Ebenenpaares ist, so ist der Schnittpunkt zweier solcher Geraden ein Knotenpunkt von F^4. Es müssen folglich auch die weiteren 6 Secanten durch diese 6 Knotenpunkte auf F^4 liegen, also die 10 Eckpunkte des durch H bestimmten Pentaeders Knotenpunkte von F^4 sein. $[G^2]$ muss das Netz (G^2) enthalten. Es bilden nämlich alle Kegel von $[G^2]$, die ihr Centrum in einem solchen Knotenpunkt $\mathfrak{g}'$ haben, ein Büschel, für welches die dreifachen Secanten durch $\mathfrak{g}'$ das gemeinsame Tripel einander conjugirter Strahlen sind. Da überdies jedem Punkte $\mathfrak{c}$ von c^4 in Bezug auf alle diese Kegel der Punkt $\mathfrak{g}$ von c^6 conjugirt ist, dessen conjugirte Secante durch $\mathfrak{c}$ geht, so gehört der Kegel von (G^2), dessen Centrum $\mathfrak{g}'$ ist, ebenfalls diesem Büschel an. Ordnet man jetzt einem Punkte $\mathfrak{g}'$ von c^6 als Polare den Kegel K^2 von $[G^2]$ zu, dessen Centrum der conjugirte Punkt $\mathfrak{c}'$ auf c^4 ist, so ist die Polarebene $[\mathfrak{g}, \mathfrak{c}']$ eines Punktes $\mathfrak{c}$ von c^4 in Bezug auf K^2 identisch mit der Polarebene von $\mathfrak{g}'$ in Bezug auf die Polare von $\mathfrak{c}$. Es gilt also für den Kegel K^2 und jeden Kegel von (G^2) das Gesetz der gemischten Polaren, folglich ist $[G^2]$ ein Polarengebüsch, dem das Polarennetz (G^2) angehört.**) Es ist hiermit gezeigt, dass das Netz (G^2) Polarnetz für doppelt unendlich viel Flächen 3. Ordnung ist. Bekanntlich besitzt umgekehrt die Kerncurve eines Polarnetzes einer Fläche 3. Ordnung zugleich die Eigenschaften der Kegelspitzencurve. Wir wollen jedoch davon unabhängig die Construction von solchen Curven c^6 geben.

---

*) Siehe Toeplitz, über ein Flächennetz 2. Ordnung, Math. Ann. Bd. XI, p. 434, wo die Literatur vollständig angegeben ist.

**) Siehe Thieme, die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme. Zeitschrift f. Math. u. Phys. XXIV, p. 224.

Ist $\mathfrak{g}_1$ ein Punkt einer c^3 auf einer F^3 und schneidet die Polarebene F_1 in Bezug auf die zugehörige F^2 die c^3 in $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4$, so bilden die Punkte $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4$ ein Quadrupel einander für F^2 conjugirter Punkte. Es ist nämlich jeder Punkt von (F_1, F^3) ein Punkt eines Tripels $(3\mathfrak{g})$ von einander für F^2 conjugirten Punkten, weil F_1 eine Ebene von Φ^3 ist; dasselbe gilt also auch von $\mathfrak{g}_2$ und die beiden andern Punkte dieses Tripels liegen auf der Geraden (F_1, F_2). Sind $\mathfrak{g}_3', \mathfrak{g}_4'$ diese beiden Punkte, so bilden $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3', \mathfrak{g}_4'$ ein Quadrupel einander für F^2 conjugirter Punkte, d. h. $\mathfrak{g}_3'$ und $\mathfrak{g}_4'$ liegen auf der durch $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ bestimmten c^3, sind also mit $\mathfrak{g}_3$ und $\mathfrak{g}_4$ identisch. Die Geraden $\overline{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2}, \overline{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_3}, \overline{\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3}$ treffen daher die F^3 zum dritten Male in Punkten $\mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{13}, \mathfrak{g}_{23}$ einer Geraden. Daraus folgt, dass die 6 Kanten des Tetraeders $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4)$ die F^3 noch in den 6 Eckpunkten eines vollständigen Vierseits einer Ebene F treffen; F, F_1, F_2, F_3, F_4 bilden daher ein der F^3 eingeschriebenes vollständiges Pentaeder. F ist die Polarebene des fünften Schnittpunktes $\mathfrak{g}$ von c^3 mit der durch $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4$ gehenden g^3; denn der Punkt $\mathfrak{g}_{12}$ muss der dritten durch $\overline{\mathfrak{g}_3\mathfrak{g}_4}$ gehenden Ebene von Φ^3, also der Ebene $[\mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}]$ entsprechen u. s. w. In der Ebene F_4 bilden die Punkte $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$; $\mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{13}, \mathfrak{g}_1$; $\mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{23}, \mathfrak{g}_1$ u. s. w. Tripel $(3\mathfrak{g})$. Es geht also durch $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{13}$ eine g^3, die ebenso auch durch $\mathfrak{g}_{14}$ gehen muss. Durch die 7 Punkte $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{13}, \mathfrak{g}_{14}$ geht nun ein Büschel von Curven c^6 und für jede derselben sind $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4$ und $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{13}, \mathfrak{g}_{14}$ Quadrupel $(4\mathfrak{g})$; es enthält folglich jede dieser Curven auch die Schnittpunkte der Ebenen F_1 und F mit F^3, d. h. die Punkte $\mathfrak{g}_{23}, \mathfrak{g}_{24}, \mathfrak{g}_{34}$. Daraus folgt sofort, dass jede dieser c^6 sowohl Kerncurve als Kegelspitzencurve ist. Wir haben also solche Curven in der That construirt und gleichzeitig gewisse vollständige Pentaeder, welche einer F^3 eingeschrieben sind.

Da es dreifach unendlich viel solcher Pentaeder giebt und jedes ein Büschel von c^6 bestimmt, so giebt es auf F^3 vierfach unendlich viel solche c^6; die Kerncurven also, die zugleich Kegelspitzencurven sind, bilden eine 20-fache Mannigfaltigkeit.

Wir fassen die Resultate dieses Paragraphen in folgende Sätze zusammen:

I. *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Flächennetz* 2. *Grades* (G^2) *das Netz erster Polaren der Punkte einer Ebene F in Bezug auf eine Fläche* 3. *Ordnung ist, ist die, dass F die Kerncurve c^6 des Netzes in den* 6 *Eckpunkten eines vollständigen Vierseits trifft. Ist diese eine Bedingung erfüllt, so giebt es unendlich viel solche Ebenen F; sie sind die Schmiegungsebenen einer Raumcurve* 3. *Grades φ^3 und gruppiren sich zu einer Schaar vollständiger Pentaeder, welche der c^6 eingeschrieben sind. Jeder dieser Ebenen entspricht*

(G^2) als Netz erster Polaren in Bezug auf eine Fläche 3. Ordnung, deren Sylvester'sches Pentaeder eins dieser Pentaeder ist, sodass (G^2) Polarnetz von doppelt unendlich vielen Flächen 3. Ordnung ist. Jeder G^2 entspricht der Punkt von F, welcher in Bezug auf (G^2) dem Pole von F in Bezug auf G^2 conjugirt ist. Jede G^2 gehört zu einem Büschel von Flächen F^3 durch c^6.

II. *Die Polarebene eines Punktes $\mathfrak{g}_1$ einer c^3 auf einer Fläche 3. Ordnung F^3 trifft die c^3 in drei Punkten, welche mit $\mathfrak{g}_1$ ein Tetraeder bestimmen, dessen Kanten F^3 noch in den 6 Eckpunkten eines vollständigen Vierseits treffen; die Ebene desselben bildet mit den Seitenflächen des Tetraeders ein der F^3 eingeschriebenes vollständiges Pentaeder. Durch die 10 Ecken desselben geht auf F^3 ein Büschel Kerncurven von Polarnetzen.*

§ 12.

Die Erzeugung einer gewissen Fläche 4. Ordnung durch vier collineare räumliche Ebenensysteme.

Wir betrachten jetzt das Erzeugniss von vier collinearen räumlichen Ebenensystemen Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, die wir kürzer räumliche Systeme nennen wollen. Je vier entsprechende Ebenenbündel derselben $(\mathfrak{c}_1)$, $(\mathfrak{c}_2)$, $(\mathfrak{c}_3)$, $(\mathfrak{c}_4)$ erzeugen eine c^6, je drei dieser eine F^3. Lassen wir $\mathfrak{c}_1$ eine Gerade g_1 von Σ_1 beschreiben, so erzeugen die entsprechenden Bündel $(\mathfrak{c}_2)$, $(\mathfrak{c}_3)$, $(\mathfrak{c}_4)$ die Flächen $F_1{}^3$ eines Büschels durch eine $g_1{}^6$, das Erzeugniss der drei Systeme Σ_2, Σ_3, Σ_4, und eine $g_1{}^3$, das Erzeugniss der drei Ebenenbüschel (g_2), (g_3), (g_4). Ebenso erzeugen die Bündel $(\mathfrak{c}_1)$, $(\mathfrak{c}_3)$, $(\mathfrak{c}_4)$ die Flächen $F_2{}^3$ eines Büschels durch $g_2{}^6$, das Erzeugniss der drei Systeme Σ_1, Σ_3, Σ_4, und eine $g_2{}^3$, das Erzeugniss der drei Ebenenbüschel (g_1), (g_3), (g_4). Beide Flächenbüschel sind dadurch projectivisch auf einander bezogen, dass je zwei entsprechende Flächen die Punkte $\mathfrak{c}_3$ und $\mathfrak{c}_4$ auf g_3 resp. g_4 gemein haben, die beide Secanten von $g_1{}^3$ und $g_2{}^3$ sind. Die beiden Flächenbüschel erzeugen also eine Fläche 6. Ordnung. Nun schneiden sich zwei entsprechende Flächen erstens in einer c^6, dem Erzeugniss der vier Ebenenbündel $(\mathfrak{c}_1)$, $(\mathfrak{c}_2)$, $(\mathfrak{c}_3)$, $(\mathfrak{c}_4)$, ausserdem aber in einer c^3, dem Erzeugniss der beiden Strahlenbündel $(\mathfrak{c}_3)$ und $(\mathfrak{c}_4)$. Die Curven c^3 liegen alle auf einer Fläche G^2, welche von den Ebenenbüscheln (g_3) und (g_4) erzeugt wird. Jene Fläche 6. Ordnung zerfällt also in eine Fläche 2. Grades G^2 und in eine Fläche 4. Ordnung F^4, welche der Ort der Punkte ist, in welchen sich vier entsprechende Ebenen der vier räumlichen Systeme Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 treffen. Die Curve $g_1{}^6$ hat mit $g_2{}^6$ die Punkte $(4\mathfrak{c})$ gemein, welche in den Systemen Σ_3 und Σ_4 sich selbst entsprechen; durch dieselben Punkte gehen auch alle jene

c^3 von G^2. Ebenso haben alle c^6 das Quadrupel ($4\mathfrak{g}$) gemein, welches von den vier Ebenenbüscheln (g_1), (g_2), (g_3), (g_4) erzeugt wird; durch dasselbe Quadrupel gehen auch $g_1{}^3$ und $g_2{}^3$. Jede $F_2{}^3$ trifft also die $g_1{}^6$ ausserdem noch in 14 Punkten, d. h. jede c^6 hat mit $g_1{}^6$ und $g_2{}^6$ je 14 Punkte gemein.

Die vier Systeme Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 bestimmen zu je dreien vier Netze von collinearen räumlichen Systemen. Nimmt man aus jedem derselben ein System, so erzeugen diese vier Systeme, wenn sie nicht demselben Netze angehören, ebenfalls F^4. Wählt man also irgend drei Systeme, etwa aus dreien von den vier Netzen je eins, so bestimmen diese ein Netz (Σ), und sind (Σ'), (Σ''), (Σ''') drei analog construirte Netze, so erzeugen irgend vier Systeme aus diesen Netzen ebenfalls die F^4 unter derselben Beschränkung. Daraus folgt, dass drei solche Netze (Σ), (Σ'), (Σ'') immer ein System gemein haben müssen. Alle einander entsprechenden Ebenen G der Systeme eines Netzes treffen sich nämlich in demselben Punkte $\mathfrak{g}$, und das System des Netzes ist fixirt, sobald festgesetzt ist, welche Ebene durch $\mathfrak{g}$ der G entsprechen soll. Wählen wir nun diese Ebene durch die Punkte $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$, in welchen die G entsprechenden Ebenen der Systeme in den Netzen (Σ'), (Σ'') sich bezüglich treffen, und nennen Σ das dadurch bestimmte System von (Σ), so erzeugt Σ mit den Systemen der Netze (Σ') und (Σ'') die F^4, es müsste denn Σ einem dieser Netze angehören. Wäre dies nun nicht der Fall, so müssten $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ auf F^4 liegen, was i. A. nicht eintreten kann, da $\mathfrak{g}$ ganz beliebig war; also gehört in der That Σ den drei Netzen (Σ), (Σ'), (Σ'') an. Wir sehen also, wie die vier collinearen Systeme Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 immer neue collineare Systeme bestimmen, von denen je vier die F^4 erzeugen. Je drei derselben bestimmen ein Netz, und je drei dieser Netze haben ein System gemein. Die aus Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 abgeleiteten Systeme bilden also ein Gebüsch $[\Sigma]$ von collinearen räumlichen Systemen.

Je vier Bündel $(\mathfrak{c}_1)$, $(\mathfrak{c}_2)$, $(\mathfrak{c}_3)$, $(\mathfrak{c}_4)$ erzeugen eine c^6 auf F^4, welche durch das durch diese vier Bündel bestimmte Gebüsch von collinearen Ebenenbündeln erzeugt wird; jedes dieser Bündel gehört offenbar einem Systeme von $[\Sigma]$ an. Daraus folgt, dass c^6 mit jeder g^6, die durch irgend ein Netz von Systemen von $[\Sigma]$ erzeugt wird, auf einer Fläche 3. Ordnung liegt und mit ihr 14 Punkte gemein hat. Auf der F^4 giebt es also zwei dreifach unendliche Schaaren von Curven c^6 resp. g^6; jede c^6 liegt mit jeder g^6 auf einer Fläche 3. Ordnung. Ebenso wie je zwei Curven c^6 ein Quadrupel ($4\mathfrak{g}$) gemein haben, haben je zwei g^6 ein Quadrupel ($4\mathfrak{c}$) gemein, das Quadrupel sich selbst entsprechender Punkte der Systeme des Büschels, welche die die beiden g^6 erzeugenden Netze gemein haben.

Die Curven c^6 sind also mit den Curven g^6 ganz gleichartig. Sucht man in der That die Ebenen G und G', welche zwei Ebenen G_1 und G_1' von Σ_1 in allen Systemen von $[\Sigma]$ entsprechen, so erhält man zwei collineare Systeme T und T', wenn man je zwei Ebenen einander zuordnet, die G_1 resp. G_1' in demselben Systeme des Gebüsches entsprechen. Macht man dieselbe Construction für alle Ebenen von Σ_1, so erhält man ein Gebüsch $[\mathrm{T}]$ von collinearen räumlichen Systemen, welche ebenfalls zu je vieren die F^4 erzeugen, weil jedes Netz desselben eine c^6 von F^4 erzeugt; wir können $[\Sigma]$ und $[\mathrm{T}]$ wiederum zwei conjugirte Erzeugungen von F^4 nennen. In dem Gebüsch $[\mathrm{T}]$ spielen also die g^6 dieselbe Rolle wie die c^6 im Gebüsch $[\Sigma]$ und umgekehrt; jedes Quadrupel $(4\mathfrak{g})$ ist ein Quadrupel sich selbst entsprechender Punkte zweier Systeme von $[\mathrm{T}]$. Wir haben also folgenden Satz:

I. *Vier collineare räumliche Systeme erzeugen, wenn sie nicht demselben Netze angehören, eine Fläche* 4. *Ordnung* F^4, *welche auch durch je vier Systeme des durch die ursprünglichen vier Systeme bestimmten Gebüsches* $[\Sigma]$ *von collinearen räumlichen Systemen erzeugt wird; je drei Netze eines solchen Gebüsches haben ein System gemeinschaftlich. Sucht man diejenigen Ebenen, welche zweien Ebenen* G *und* G' *eines Systemes* Σ *von* $[\Sigma]$ *in allen übrigen Systemen des Gebüsches entsprechen, so erhält man zwei collineare Systeme* T *und* T', *wenn man je zwei Ebenen einander zuordnet, die* G *resp.* G' *in demselben Systeme von* $[\Sigma]$ *entsprechen. Alle solche Systeme* T *bilden ein neues Gebüsch* $[\mathrm{T}]$, *welches eine zu* $[\Sigma]$ *conjugirte Erzeugung von* F^4 *liefert. Jedes Netz von* $[\Sigma]$ *resp.* $[\mathrm{T}]$ *erzeugt eine* g^6 *resp.* c^6, *und jede* c^6 *liegt mit jeder* g^6 *auf einer Fläche* 3. *Ordnung und hat mit ihr* 14 *Punkte gemein; dagegen haben je zwei* g^6 *resp.* c^6 *ein Quadrupel* $(4\mathfrak{c})$ *resp.* $(4\mathfrak{g})$ *sich selbst entsprechender Punkte zweier Systeme von* $[\Sigma]$ *resp.* $[\mathrm{T}]$ *gemein.*

§ 13.

Die eindeutige Transformation der Fläche 4. Ordnung in sich selbst.

Die Quadrupel $(4\mathfrak{c})$ und $(4\mathfrak{g})$ erfordern hier wiederum eine besondere Aufmerksamkeit. Wir studiren sie am besten durch eine neue Erzeugung von F^4. Sei g_1 eine beliebige Gerade einer Ebene G_1 von Σ_1, so erzeugt das Ebenenbüschel (g_1) mit (g_2), (g_3), (g_4) resp. drei Flächen 2. Grades G_2^2, G_3^2, G_4^2, welche sich in einem Quadrupel $(4\mathfrak{g})$ auf F^4, ausserdem aber in der Geraden g_1 treffen. Durchläuft g_1 die Ebene G_1, so durchlaufen die Flächen drei Bündel (G_2^2), (G_3^2), (G_4^2) durch die Quadrupel $(4\mathfrak{c}_{12})$, $(4\mathfrak{c}_{13})$, $(4\mathfrak{c}_{14})$ resp. und die Geraden g_{12}, g_{13}, g_{14} resp., in welchen G_1 von G_2, G_3, G_4 resp. getroffen wird. Die drei Bündel sind collinear auf einander bezogen und erzeugen ausser der F^4 die doppelt zu zählende Ebene G_1. Fällt nun G_1 im Besonderen mit G_2 zusammen, oder wählen wir Σ_2 so, dass der G_1

in Σ_2 wiederum G_1 entspricht, so zerfallen die Flächen $G_2{}^2$ in G_1 und in Ebenen C, welche durch den G_1 gegenüberliegenden Eckpunkt $\mathfrak{c}$ des Tetraeders $(4\mathfrak{c}_{12})$ gehen. Da G_1 von den Punkten $(4\mathfrak{g})$ nur den Schnittpunkt $\mathfrak{g}$ der drei Ebenen G_1, G_3, G_4 enthält, so gehen die Ebenen C jedesmal durch die andern drei Punkte.

Der Punkt $\mathfrak{c}$ ist offenbar Centrum eines in ein Ebenenbündel $(\mathfrak{c})$ ausartenden Systems des Büschels (Σ_1, Σ_2). Jeder Ebene C von $(\mathfrak{c})$ entsprechen die Ebenen eines Büschels (g_1) in Σ_1. Das dem Büschel (g_1) entsprechende Büschel von Systemen T der conjugirten Erzeugung hat also das g_1 entsprechende Quadrupel $(4\mathfrak{g})$ zu sich selbst entsprechenden Punkten und die der Ebene C, sofern diese als eine Ebene des Tetraeders $(4\mathfrak{g})$ betrachtet wird, in allen Systemen von $[\mathrm{T}]$ entsprechenden Ebenen gehen alle durch $\mathfrak{c}$. Wir sehen also, dass wir von der Erzeugung $[\mathrm{T}]$ ausgehend ebenso vom Punkte $\mathfrak{c}$ zum Punkte $\mathfrak{g}$ kommen, wie von der Erzeugung $[\Sigma]$ ausgehend vom Punkte $\mathfrak{g}$ zum Punkte $\mathfrak{c}$. Wir erhalten also folgenden Satz:

I. *Die Verbindungsebenen der Punkte* $(3\mathfrak{g})$, *welche mit einem festen Punkte* $\mathfrak{g}$ *von* F^4 *Quadrupel* $(4\mathfrak{g})$ *bilden, gehen durch einen festen Punkt* $\mathfrak{c}$ *von* F^4; *dann gehen auch umgekehrt die Verbindungsebenen der Punkte* $(3\mathfrak{c})$, *welche mit* $\mathfrak{c}$ *Quadrupel* $(4\mathfrak{c})$ *bilden, durch* $\mathfrak{g}$. *Hierdurch ist also eine eindeutige Transformation der* F^4 *in sich selbst gegeben.*

Combinirt man in der in diesem Paragraphen gegebenen Erzeugung von F^4 die Flächen der Bündel $(G_3{}^2)$ und $(G_4{}^2)$ zu Büscheln, so erzeugen diese Flächen 3. Ordnung, sodass man den Satz auch so aussprechen kann:

II. *Verbindet man die drei Punkte, in denen jede Gerade durch* $\mathfrak{c}$ *resp.* $\mathfrak{g}$ *die* F^4 *noch trifft, mit einer* g^6 *resp.* c^6 *durch Flächen* 3. *Ordnung, so gehen diese durch den festen Punkt* $\mathfrak{g}$ *resp.* $\mathfrak{c}$ *und bilden ein zu dem Strahlenbündel* $(\mathfrak{c})$ *resp.* $(\mathfrak{g})$ *reciprokes Bündel.*

§ 14.

Ueber die Mannigfaltigkeit der betrachteten Flächen 4. Ordnung.

Die hier betrachteten F^4 sind nicht allgemeine Flächen 4. Ordnung, sondern hängen nur von 33 Constanten ab. Um nämlich das System Σ_1 auf die Systeme Σ_2, Σ_3, Σ_4 collinear zu beziehen, sind je 15, also im Ganzen 45 Bedingungen nöthig; da sich also in dem Gebüsch $[\Sigma]$ zwölffach unendlich viel Gruppen von je vier Systemen finden, welche F^4 erzeugen, so bilden die F^4 in der That nur eine 33-fache Mannigfaltigkeit. Ich bemerke übrigens, das hieraus eigentlich nur folgt, dass die F^4 höchstens eine 33-fache Mannigfaltigkeit bilden; da aber die Möglichkeit der Erzeugung einer Fläche 4. Ordnung durch ein Gebüsch collinearer Systeme schon *eine* Bedingung für dieselbe ist, so wird sie im Allgemeinen auch nur durch dieses und das ihm conjugirte Gebüsch erzeugt werden können.

Noch füge ich hinzu, dass durch eine c^6 und zwölf beliebige Punkte nur eine F^4 geht, weil es für 22 Bedingungen gilt, wenn eine Fläche 4. Ordnung eine Raumcurve 6. Ordnung vom Geschlechte drei enthalten soll. In der That, ist (Σ) das c^6 erzeugende Netz von collinearen Systemen, so schickt es durch jeden der gegebenen Punkte $(12\mathfrak{c})$ ein Bündel einander entsprechender Ebenen; die Forderung ist also die, ein nicht in (Σ) enthaltenes System Σ_4 so zu construiren, dass den einander entsprechenden Ebenen der Systeme von (Σ) durch die $(12\mathfrak{c})$ wiederum Ebenen durch die $(12\mathfrak{c})$ entsprechen. Es lässt sich nun analog, wie Herr Schröter*) dies für die Ebene ausgeführt hat, beweisen, dass diese Aufgabe die dreifach unendlich vielen Systeme des F^4 erzeugenden Gebüsches liefert. Es folgt hieraus gleichzeitig, dass jede F^4, die eine c^6 enthält, sich durch ein Gebüsch collinearer räumlicher Ebenensysteme erzeugen lässt; die Construction desselben aus dem c^6 erzeugenden Netze oder dem conjugirten Gebüsche collinearer Ebenenbündel kann leicht aus den in § 12. resp. § 13. gegebenen Erzeugungen von F^4 abgeleitet werden. Sind z. B. $(\mathfrak{c}_1)$, $(\mathfrak{c}_2)$, $(\mathfrak{c}_3)$, $(\mathfrak{c}_4)$ die c^6 erzeugenden Ebenenbündel und G_1, G_2, G_3, G_4 vier entsprechende Ebenen derselben, sind ferner g_{12}, g_{13}, g_{14} die Schnittgeraden von G_1 mit resp. G_2, G_3, G_4 und $(4\mathfrak{c}_{12})$, $(4\mathfrak{c}_{13})$, $(4\mathfrak{c}_{14})$ resp. die vier Punkte, in denen die Curven 3. Grades c_{12}^3, c_{13}^3, c_{14}^3 resp., welche $(\mathfrak{c}_1)$ mit $(\mathfrak{c}_2)$, $(\mathfrak{c}_3)$, $(\mathfrak{c}_4)$ resp. erzeugt, die F^4 ausserhalb c^6 treffen, so bestimmen g_{12} und $(4\mathfrak{c}_{12})$, g_{13} und $(4\mathfrak{c}_{13})$, g_{14} und $(4\mathfrak{c}_{14})$ drei Flächenbündel 2. Grades $(G_2{}^2)$, $(G_3{}^2)$, $(G_4{}^2)$; dieselben denke man sich so collinear auf einander bezogen, dass je drei Flächen einander entsprechen, welche dieselbe Gerade g_1 auf G_1 bestimmen. Ordnet man dann jedem Ebenenbüschel (g_1) dasjenige Ebenenbüschel (g_2), (g_3), (g_4) resp. zu, dessen Axe auf G_2, G_3, G_4 resp. liegt, und das mit (g_1) die einander entsprechenden Flächen $G_2{}^2$, $G_3{}^2$, $G_4{}^2$ resp. erzeugt, so erhält man die vier collinearen Systeme, welche F^4 erzeugen. Wir haben also folgenden Satz:

I. *Diejenigen Flächen* 4. *Ordnung F^4, welche sich durch zwei conjugirte Gebüsche von collinearen räumlichen Ebenensystemen erzeugen lassen, bilden eine* 33-*fache Mannigfaltigkeit. Eine hinreichende und nothwendige Bedingung für solche Erzeugung ist es, dass F^4 eine c^6 enthält, die durch ein Netz collinearer Systeme oder das ihm conjugirte Gebüsch von collinearen Ebenenbündeln erzeugt ist; soll eine F^4 eine c^6 enthalten, so ist sie durch zwölf weitere Punkte eindeutig bestimmt.*

*) S. Schröter, Problematis etc. Crelle's Journal, Bd. 62, p. 1. S. auch v. Escherich, die reciproken linearen Flächensysteme. Ber. der Wiener Akademie, Bd. 75, II. Abth., p. 552.

Ich schliesse hiermit meine Untersuchungen und verschiebe ein Eingehen auf die speciellen Fragen, welche hier wie früher leicht gestellt werden können, auf eine spätere Arbeit; ich habe in dieser das Fundament für die Beantwortung aller solcher Fragen gegeben. Hier sei nur so viel bemerkt, dass, obwohl diese Flächen 4. Ordnung nicht allgemein sind, doch fast alle bisher behandelten Flächen 4. Ordnung zu ihnen gehören. So natürlich die Kernfläche eines Flächengebüsches 2. Grades und das durch eindeutige Transformation aus demselben entstehende Symmetroid*) mit allen speciellen Fällen, besonders der Kummer'schen Fläche, wie dies Herr Reye**) ausgeführt hat; übrigens liefert der leicht zu führende Nachweis von drei Kegelschnitten auf derselben, von denen einer mit den beiden andern je zwei, diese beiden aber nur einen Punkt gemeinsam haben, direct die beschriebene Erzeugung der Kummer'schen Fläche und zugleich 16 eindeutige Transformationen derselben in sich selbst. Auch die Fläche 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt lässt sich auf mannigfaltige Art durch ein Gebüsch collinearer Systeme erzeugen, denn jede Raumcurve 4. Ordnung 2. Species auf derselben bildet mit dem Doppelkegelschnitt eine c^6 ***); andere Erzeugungen liefern wiederum die Raumcurven 3. Grades auf diesen Flächen mit ebenen Curven 3. Ordnung combinirt. †) Wir sehen also, dass die beschriebene Erzeugung, obwohl sie nur specielle Flächen 4. Ordnung liefert, doch geeignet ist, einen neuen Gesichtspunkt in dieselben zu bringen.

---

*) S. Salmon-Fiedler, Analyt. Geometrie d. Raumes. 3. Aufl. Bd. II, p. 468.

**) S. Reye, Ueber Strahlensysteme 2. Classe etc. Borchardt's Journal, Bd. 86, p. 89.

***) S. Nöther, eindeutige Raumtransformationen, Math. Ann. Bd. III, p. 564.

†) S. Clebsch, Borchardt's Journal, Bd. 69, p. 142.

Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre.

Par

H. G. Zeuthen à Copenhague.

Dans le celèbre Mémoire intitulé: *Théorie analytique des courbes à double courbure de tous les ordres tracées sur l'hyperboloïde à une nappe**), M. Chasles rapporte les courbes d'une surface du second ordre à un système de coordonnées sur la surface. Une valeur donnée de l'une ou de l'autre des coordonnées détermine une génératrice de l'une ou de l'autre des deux séries. Ces coordonnées peuvent servir aussi à établir une projectiveté entre deux figures sur la surface. Si x et y sont les coordonnées d'un point quelconque de l'une des figures, on déterminera le point correspondant de l'autre, soit par $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $y' = \frac{ay + b}{cy + d}$, soit par $x' = \frac{ay + b}{cy + d}$, $y' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$. Les nouvelles coordonnées x' et y' déterminant respectivement des génératrices de la même série que x et y, on voit qu'il existe deux espèces de figures projectives. Nous verrons que dans tous les deux cas elles sont projectives dans le sens propre de ce mot, l'une pouvant être formée de l'autre par une suite de projections centrales successives, et qu'elles sont les seules figures sur une surface du second ordre qui méritent ce nom.

Les propriétés des figures projectives que nous déduirons, dans le § II., d'une définition géométrique identique à la définition analytique que nous venons de donner, sont applicables, non seulement au cas où la surface a des génératrices réelles, mais aussi à celui où la surface a des génératrices imaginaires, ce qui n'empêche pas les figures d'être réelles. Seulement, dans une partie des constructions indiquées dans le § II., on fait usage d'éléments qui sont imaginaires dans ce cas-ci; dans le § III. nous y substituons des opérations réelles.

Les applications de la théorie des figures projectives sur une surface du second ordre sont analogues à celles de la théorie des séries

*) Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences t. LIII.

projectives de points d'une conique plane. Le problème de l'inscription de polygones dont les côtés passent par des points donnés se résout aussi pour une surface par trois essais (§ IV.), et la théorie de ces polygones présente beaucoup d'analogies avec la théorie connue de Poncelet sur les polygones inscrits à une conique plane. On trouve par exemple que, de même qu'il existe une relation entre les points d'intersection d'une droite avec une conique et avec les côtés d'un polygone inscrit à un nombre pair de côtés, il existera une relation entre la trace sur un plan d'une surface du second ordre et la trace d'un polygone inscrit à un nombre impair de côtés. Pour le cas d'un pentagone, cette même relation a été trouvée, mais exprimée d'une manière bien différente, par M. Paul Serret*).

De même que le théorème de Désargues sur un quadrilatère inscrit à une conique s'applique à la construction de la conique, celui dont nous venons de parler sur un pentagone inscrit à une surface s'applique à la construction de la surface (§ VI.). Malgré la différence de la forme du théorème, la construction d'une courbe gauche de quatrième ordre par huit points, qui fait une partie principale de la construction de la surface, s'est montrée identique à celle de M. Serret**), pendant que la construction que nous avons trouvée du huitième point commun aux surfaces passant par sept points donnés est différente de celle de M. Serret***), mais aussi simple.

Notre sujet nous a semblé mériter d'être exposé d'une manière élémentaire, ce que nous avons essayé de faire dans les §§ II.—IV. et VI.—VII. qui sont indépendents des §§ I. et V. Dans le § I. j'ai exposé quelques considérations plus générales sur les transformations d'ordre supérieur d'une surface du second ordre en elle-même, qui m'ont guidé dans mes premières études des figures projectives sur la surface. J'y démontre notamment une formule énumérative analogue à celle qui exprime le principe de correspondance plane†), dont on aurait pu la déduire par une projection stéréographique; mais j'ai préféré d'en donner une démonstration directe.

---

*) Géométrie de Direction p. 371.

**) Géométrie de Direction p. 373.

***) Géométrie de Direction p. 314.

†) Ce principe est dû à M. Salmon pour le cas où les points correspondant à un point donné font un système complet de points d'intersection. Je l'ai généralisé en enlevant cette restriction, et en ayant égard aussi au cas où il existe une courbe de coïncidence (Comptes rendus 1874). On sait que M. Schubert a soumis les principes de ce genre à une étude encore plus générale.

§ I.

Principe de correspondance de points d'une surface du second ordre.

Soit donnée une surface du second ordre, dont les points X et X' se correspondent d'une manière qu'on peut exprimer algébriquement. Nous supposerons, qu'à un point quelconque X correspondent α' points X', et à un point X', α points X. Désignons encore par β le nombre des points X d'une génératrice de la première série*) qui correspondent à des points X' d'une génératrice de la seconde série, et par β', celui des points X' de la première génératrice qui correspondent à des points X de la seconde. Désignons ensuite par γ_1 (et γ_2) le nombre de points X d'une génératrice de la première (seconde) série qui correspondent à des points X' d'une génératrice de la même série.

Alors, si nous indiquons par les suffixes 1 et 2 qu'un point X ou X' se trouve sur une génératrice donnée de la première ou de la seconde série, le lieu des points:

X' corresp. aux points X_1 sera de l'ordre $\beta + \gamma_1$,
X' corresp. aux points X_2 sera de l'ordre $\beta' + \gamma_2$,
X corresp. aux points X_1' sera de l'ordre $\beta' + \gamma_1$,
X corresp. aux points X_2' sera de l'ordre $\beta + \gamma_2$.

L'ordre du lieu des points (X' ou X) correspondant aux points (X ou X') d'une section plane sera égal à $\beta + \beta' + \gamma_1 + \gamma_2$. Il a, en effet, cette valeur dans le cas où le plan de section est tangent à la surface, et, comme, par hypothèse, la correspondance peut être exprimée algébriquement, il est permis d'employer le principe de la conservation des nombres.

Aux points de la courbe d'intersection avec une surface d'ordre m correspondront les points d'une courbe d'ordre $m(\beta + \beta' + \gamma_1 + \gamma_2)$. Aux points X d'une courbe gauche du troisième ordre ayant les génératrices de la première série pour sécantes doubles correspondent les points d'une courbe d'ordre $\beta + \gamma_1 + 2\beta' + 2\gamma_2$, etc.

Nous allons chercher les points de la surface où un point X coïncide avec un point correspondant X'. Il en existe deux espèces.

Nous trouverons en effet un nombre fini ζ de coïncidences de deux points correspondants, X et X', qui se trouvent en des plans passant par une droite fixe d. Elles peuvent avoir lieu en des points, J, tels que toute droite tangente à la surface en J soit la position limite d'une droite XX' joignant deux points correspondants et infiniment voisins. Ces points

*) Nous distinguerons les deux séries de droites — réelles ou imaginaires — de la surface en en appelant l'une la première, l'autre la seconde.

J feront partie du nombre ζ appartenant à une position quelconque de d: nous les appelons des *points de coïncidence isolés,* et nous désignons leur nombre par i. D'autres des ζ coïncidences ont lieu en des points, U, tels qu'une seule tangente en U soit position-limite d'une droite joignant deux points correspondants infiniment voisins. Ces points ne seront pas des points de coïncidence pour d'autres positions de la droite d que celles qui rencontrent la position limite de XX'; mais comme la valeur de ζ n'est pas altérée par un changement de la position de d, il faut que le même nombre de nouveaux points U appartiennent à la nouvelle position. Le tangentes XX' formeront donc une surface réglée et tangente à la surface le long d'une courbe que nous appelons *la courbe de coïncidence.* Nous désignerons l'ordre de cette surface reglée par u, et l'ordre de la courbe de coïncidence par $s = s_1 + s_2$, où s_1 et s_2 indiquent les nombres de ses points d'intersection avec les génératrices de la première et de la seconde série. On aura

$$\zeta = i + u.$$

On voit encore que le nombre de couples de points correspondants et distincts X et X' qui se trouvent sur une génératrice de la première ou seconde série est égal à $\gamma_1 - s_1$ ou à $\gamma_2 - s_2$, et que le nombre de ces couples qui se trouvent dans un plan est égal à

$$\beta + \beta' + \gamma_1 + \gamma_2 - s_1 - s_2.$$

Pour déterminer la valeur de ζ nous faisons passer un faisceau de plans par la droite d, et nous joignons, dans chacun de ces plans, les points X des $\beta + \beta' + \gamma_1 + \gamma_2 - s_1 - s_2$ couples qu'il contient par des droites à l'un, P, des points d'intersection de d avec la surface, et les points correspondants, X', à l'autre, P'. Le lieu des points d'intersection Z de PX avec $P'X'$ aura un point α-tuple en P et un point α'-tuple en P', et rencontre encore un plan quelconque par d en $\beta + \beta' + \gamma_1 + \gamma_2 - s_1 - s_2$ points. Il est donc de l'ordre

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma_1 + \gamma_2 - s_1 - s_2.$$

Il rencontre la surface en

$$2(\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma_1 + \gamma_2 - s_1 - s_2)$$

points. $\alpha + \alpha'$ de ces intersections ont lieu en P et P'. Si nous désignons par l_1 et l_2 les deux génératrices passant par P, et par l_1' et l_2' celles qui passent par P', les suffixes indiquant les deux séries de génératrices, on voit encore que β points d'intersection se confondent au point $l_1 l_2'$, et β', au point $l_1' l_2$. Chacune des génératrices l_1 et l_1' contiendra, à côté des points déjà nommés, encore $\gamma_1 - s_1$ des points d'intersection, et chacune des génératrices l_2 et l_2' en contiendra encore $\gamma_2 - s_2$.

Il reste

$$\begin{aligned} &2(\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma_1 + \gamma_2 - s_1 - s_2) \\ &- \alpha - \alpha' - \beta - \beta' - 2(\gamma_1 - s_1) - 2(\gamma_2 - s_2) \\ &= \alpha + \alpha' + \beta + \beta' \end{aligned}$$

points d'intersection de la surface avec le lieu du point Z. Les droites joignant P et P' à un de ces points déterminent, par leurs intersections avec la surface différentes de P et P', deux points correspondants, X et X', qui coïncident avec le point correspondant Z. Réciproquement, si deux points qui se trouvent sur une droite rencontrant d se confondent, le point correspondant Z coïncidera avec eux. On voit donc que

$$(1) \qquad i + u = \alpha + \alpha' + \beta + \beta',$$

ou que *la somme du nombre des points de coïncidence isolés, et de l'ordre de la surface reglée, lieu des droites joignant les points correspondants X et X' qui coïncident entre eux sur la courbe de coïncidence, est égal à $\alpha + \alpha' + \beta + \beta'$.*

Comme les tangentes aux points de coïncidence isolés joignent aussi des points correspondants X et X' confondus, on peut simplifier cet énoncé en disant: Le lieu des droites XX' joignant des points correspondants et confondus, est égal à $\alpha + \alpha' + \beta + \beta'$.

Plusieurs points de coïncidence isolés, ou plusieurs branches de la courbe de coïncidence, peuvent se confondre. Notre déduction de la formule (1) nous conduit aux règles suivantes pour déterminer le nombre de points ou branches confondus:

Un point J compte pour ι points de coïncidence isolés si la somme des ordres des distances infiniment petites d'un point X, ayant du point J une distance infiniment petite du premier ordre, aux points correspondants X', est égal à ι.

Une courbe compte pour v branches de la courbe de correspondence si la somme des ordres des distances infiniment petites d'un point X, ayant de la courbe une distance infiniment petite du premier ordre, aux points correspondants X', est égal à v.

La surface reglée d'ordre u, tangente à la surface donnée le long de la courbe de coïncidence, qui est de l'ordre s, a avec la dernière surface une courbe d'intersection complète d'ordre $2u$. Celle-ci est composée de la courbe de contact, prise deux fois, et des t_1 et t_2 génératrices des deux séries sur lesquelles, dans une des $\gamma_1 - s_1$ ou $\gamma_2 - s_2$ couples qu'elles contiennent, les deux points correspondants X et X' coïncident entre eux sur la courbe de correspondance. On a donc

$$(2) \qquad 2u = 2s + t_1 + t_2.$$

Nous ajouterons encore la détermination de l'ordre et de la classe de la *congruence formée des droites joignant deux points correspondants X et X'.*

Un plan contient $\beta + \beta' + \gamma_1 + \gamma_2 - s$ couples de points correspondants et, par conséquent, autant de droites de la congruence. La classe est donc égale à $\beta + \beta' + \gamma_1 + \gamma_2 - s$.

Un point de la surface pouvant être regardé comme un point X ou comme un point X', et les génératrices passant par le point contenant $\gamma_1 - s_1$ et $\gamma_2 - s_2$ couples de points correspondants, $\alpha + \alpha' + \gamma_1 + \gamma_2 - s$ droites de la congruence passent par un point de la surface, et, par conséquent, par un point quelconque. L'ordre de la congruence est donc égal à $\alpha + \alpha' + \gamma_1 + \gamma_2 - s$.

Si la relation qui a lieu entre les points X et X', est symétrique, toute droite XX' de la congruence trouvée coïncidera avec une autre. En même temps on aura $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Les droites de la congruence, prises une seule fois, formeront donc une congruence de la classe $\frac{2\beta + \gamma_1 + \gamma_2 - s}{2}$ et de l'ordre $\frac{2\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 - s}{2}$.

Exemples:

1. $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ exprimera que les génératrices de la même série se correspondent une-à-une. En effet, les points correspondant aux points d'une génératrice se trouvent sur une droite rencontrant une génératrice de l'autre série en un seul point, et ne rencontrant pas les génératrices de la même série. On aura ici $i + u = 4$.

Dans le cas où il n'y a aucune courbe de coïncidence on aura $u = 0$ et, par conséquent, 4 points de coïncidence isolés. L'ordre et la classe de la congruence des droites joignant les points correspondants seront égaux à 2, ou, si la relation est symétrique, égaux à 1. On sait que dans ce dernier cas les droites de la congruence rencontrent deux droites fixes, que nous appellerons a et b. Il faut que l'hyperboloide ayant pour directrices a, b et une génératrice quelconque l_1 de la surface donnée, rencontre encore celle-ci en une autre génératrice l_1' de la même série. Elle la rencontre donc encore en deux génératrices c_2 et c_2' de l'autre génération, qui doivent rencontrer a et b. On voit de la même manière que a et b rencontrent deux génératrices c_1 et c_1'. Si a joint le point $c_1 c_2$ à $c_1' c_2'$, b joindra $c_1 c_2'$ à $c_1' c_2$. On voit ainsi que les droites a et b doivent être des polaires réciproques, et que, réciproquement, la congruence des droites rencontrant deux droites polaires réciproques établit toujours entre les points d'intersection avec la surface la correspondance symétrique dont nous parlons ici. Les points de coïncidence se trouveront aux points d'intersection de a et b avec la surface donnée.

Nous verrons, dans ce qui suit, qu'il peut exister, pour les valeurs données ici de α, α' etc., une courbe de coïncidence composée de deux génératrices de la même série, et qu'alors toute génératrice de l'autre série correspond à elle même. Les droites joignant des points correspondants seront donc ces dernières génératrices; la surface gauche d'ordre u sera la surface donnée prise deux fois, de façon qu'on ait $u = 4$, $i = 0$; les deux membres de l'équation (2) indiquant, dans ce cas, l'ordre de la courbe d'intersection de deux surfaces confondues cette équation n'est pas applicable*) ici, mais on a $s = 2$; on trouve ensuite que la congruence des droites, joignant les points correspondants, est de l'ordre et de la classe zéro, ce qui est juste, parce que la congruence s'est réduite à une surface gauche.

2. $\alpha = \alpha' = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\beta = \beta' = 0$ exprimera que les génératrices de l'une des séries correspondent, une-à-une, à celles de l'autre, et réciproquement. On trouve ici que $i + u = 2$.

Dans le cas où il n'y a aucune courbe de coïncidence on aura $u = 0$ et, par conséquent, deux points de coïncidence isolés. La congruence des droites joignant les points correspondants sera de l'ordre 4 et de la classe 2. Nous verrons dans ce qui suit que la symétrie ne se présente pas, tant que $u = 0$.

On ne peut avoir $u = 1$, parce qu'aucun plan n'est tangent à la surface le long d'une courbe. Comme les points d'une génératrice correspondent à ceux d'une génératrice de l'autre série, il est impossible aussi d'avoir $s = 1$. Il faut donc, si s et u sont différents de zéro, qu'on ait $s = u = 2$, $t_1 = t_2 = 0$. Alors la classe de la congruence est égale à zéro, ce qui montre que cette congruence est composée des droites par un point fixe (car la correspondance aurait d'autres nombres caractéristiques, si la congruence était composée des droites par plusieurs points fixes), ou bien que la correspondance est déterminée par une projection centrale. La relation des points correspondants étant symétrique, on obtient aussi la juste valeur 1 de l'ordre de la congruence.

3. Supposons ensuite que les points correspondants, X et X', soient les deux points d'intersection de la surface avec les droites d'une congruence indépendente de la surface. Alors la correspondance sera symétrique; α sera l'ordre et β la classe de la congruence; les nombres $\gamma_1 - s_1$ et $\gamma_2 - s_2$ des génératrices faisant partie de la congruence, et le nombre i des faisceaux de tangentes à la surface qui y appartiennent, seront égaux à zéro; de même les nombres t_1 et t_2

*) Les nombres de la géométrie énumérative indiquant des degrés d'équations, les formules énumératives subissent à des exceptions dans le *seul* cas où une de ces équations devient identique. Nous rappelons ici ce fait connu, parce qu'une formule subissant à des exceptions *imprévues* perdrait sa valeur.

s'évanouissent avec les nombres $\gamma_1 - s_1$ et $\gamma_2 - s_2$ dont nous venons de parler. Les formules (1) et (2) donneront donc $s = u = 2\alpha + 2\beta$.

La congruence n'ayant des relations particulières ni avec l'une, ni avec l'autre des séries de génératrices, il faut qu'on ait

$$s_1 = s_2 = \alpha + \beta.$$

s est l'ordre de la courbe de contact de la surface avec des droites de la congruence, et u celui du lieu de ces droites tangentes à la surface. On pourrait déduire les valeurs de s_1, s_2 et u de l'expression générale, trouvée par M. Halphen, du nombre des droites communes à deux congruences.

§ II.

Propriétés des figures projectives.

Nous allons étudier ensuite directement les deux correspondances dont nous nous sommes occupés dans les exemples 1. et 2. du § I. Nous appellerons les figures liées, l'une à l'autre, par une de ces correspondances, projectives, parce qu'on peut établir la correspondance par un nombre, pair ou impair, de projections centrales, ce que nous démontrerons dans ce qui suit.

En se rappelant que deux séries d'éléments simplement infinies et unicursales dont les éléments se correspondent un à un sont projectives (homographiques), on peut substituer aux définitions exprimées par les équations $\alpha = \alpha' = 1$ etc. les définitions suivantes:

S'il existe, dans chacune des deux séries de génératrices d'une surface du second ordre, une correspondance homographique (ou projective) entre les génératrices, et qu'on fasse correspondre au point d'intersection X des génératrices x_1 et x_2 le point d'intersection X' des génératrices homologues, x_1' et x_2', les deux points X et X' forment deux figures correspondantes, que nous appellerons figures projectives de la première espèce.

S'il existe entre les deux séries de génératrices d'une surface du second ordre deux correspondances homographiques, et qu'on fasse correspondre au point d'intersection X des deux génératrices x_1 et x_2 le point d'intersection X' des génératrices homologues, x_2' et x_1', les deux points X et X' forment deux figures correspondantes, que nous appellerons figures projectives de la seconde espèce.

Il résulte de ces définitions que deux figures (X) et (X') ayant avec une troisième (X'') des projectivités de la même espèce, auront entre elles une projectivité de la première espèce, et que deux figures (X) et (X') ayant avec une troisième (X'') des projectivités de différentes espèces, auront entre elles une projectivité de la seconde espèce.

Deux figures de la surface dont l'une est la projection centrale de l'autre sont évidemment projectives de la seconde espèce. On voit donc que deux figures de la surface dont l'une est formée de l'autre par un nombre pair de projections centrales successives sur la surface elle-même sont projectives de la première espèce, et que deux figures dont l'une est formée de l'autre par un nombre impair de projections centrales successives sont projectives de la seconde espèce. Plus tard nous démontrerons les théorèmes réciproques.

Aux points X d'une conique correspondent, dans toutes les deux correspondances, *les points X' d'une conique.* Ce théorème est une conséquence du fait que chacune des deux séries de génératrices est projective à la série de leurs points d'intersection avec une conique de la surface. Il en résulte que les séries de génératrices x_1 et x_2 qui se rencontrent en un point mobile X d'une section conique seront projectives entre elles, et par définition, aussi leurs séries correspondantes — (x_1') et (x_2') ou (x_2') et (x_1'), suivant que la projectivité est de la première ou de la seconde espèce — seront projectives entre elles. Alors le lieu du point d'intersection X' sera une conique*). En effet, si l'on fait passer une conique par trois de ces points X', les points d'intersection de cette conique avec les génératrices homologues x_1' et x_2' formeront deux séries projectives qui ont les trois points pour points de coïncidence, et où, par conséquent, tout point coïncide avec son point homologue.

On voit encore que dans tous les deux cas *la correspondance sera entièrement déterminée par trois couples de points correspondants*, à condition que les trois points de la même figure se trouvent sur des génératrices différentes entre elles. En effet, toutes les deux correspondances homographiques des génératrices, de la même série ou des deux séries, sont déterminées par trois couples d'éléments homologues. Nous n'insisterons pas sur les cas particuliers où plusieurs points donnés se trouvent sur la même génératrice.

Nous dirons que deux figures projectives — qui ne coïncident pas en entier l'une avec l'autre — sont en *involution* dans le cas où chaque point de la surface a le même point homologue, soit qu'on le regarde comme un point, X, de l'une figure, soit qu'on le regarde comme un point, X', de l'autre. Si la correspondance des figures en involution est de *la première espèce*, il faut évidemment que toutes les deux couples de séries projectives de génératrices, (x_1) et (x_1'), (x_2) et (x_2') soient en involution, et on voit que l'involution a lieu toutes les fois qu'on sait d'un seul point, regardé comme un point A de l'une figure ou

*) Voir le No. 3 du Mémoire cité de M. Chasles sur les courbes tracées sur l'hyperboloïde à une nappe.

comme un point B' de l'autre, que les points homologues, A' et B, coïncident l'un avec l'autre (sans coïncider avec le premier point).

Si la correspondance des figures en involution est de *la seconde espèce*, il faut que toutes les génératrices de l'une des séries aient les mêmes génératrices homologues dans l'autre, soit qu'on les regarde comme appartenant à l'une ou à l'autre des figures. Nous verrons dans ce qui suit que la coïncidence des points A' et B correspondant à un seul point, regardé comme un point A ou B', ne suffit pas ici pour établir l'involution, qu'au contraire deux figures projectives de la seconde espèce contiennent toujours deux points liés l'un à l'autre de cette manière double.

Nous allons ensuite déterminer les points de coïncidence de *deux figures projectives de la première espèce.* Chacune des deux séries contient, en général, deux génératrices*) correspondant à elles-mêmes. Celles de l'une rencontrent celles de l'autre en quatre points où coïncident deux points correspondants X et X', l'un avec l'autre. Il peut arriver en des cas particuliers que toutes les génératrices de l'une des deux séries correspondent à elles-mêmes. Alors chaque point des deux génératrices de coïncidence de l'autre série coïncide avec son point correspondant. On aura donc les résultats suivants:

Deux figures projectives de la première espèce ont, en général, quatre points de coïncidence déterminés par les intersections de deux génératrices de chaque série; elles peuvent aussi avoir une courbe de coïncidence composée de deux génératrices d'une seule série. Si les figures sont en involution elles ont toujours quatre points de coïncidence.

On voit que deux points de coïncidence isolés qui ne se trouvent pas sur une génératrice en déterminent les deux autres, et qu'il est permis de donner, à côté des points de coïncidence, encore une couple de points homologues. Si l'on donne trois points de coïncidence dont deux seulement se trouvent sur la même génératrice, celle-ci et la génératrice de la même série passant par le troisième point formeront une courbe de coïncidence. Si l'on donne trois points de coïncidence sur des génératrices différentes dans toutes les deux séries, les deux figures coïncideront en entier l'une avec l'autre.

Dans le cas où la correspondance est établie par deux projections centrales, les points de coïncidence seront: 1° les points d'intersection avec la droite joignant les deux centres de projection, et 2° les points de contact des plans passant par cette droite.

Considérons ensuite le cas de deux figures projectives de *la seconde espèce*, et commençons par le cas général où elles ne sont pas en in-

*) Nous avons à peine besoin de rappeler que les solutions dont nous indiquons les nombres — ici et dans ce qui suit — peuvent coïncider entre elles.

volution. Alors à une génératrice de la première série correspondent deux génératrices, x_2' et x_2, de la seconde série, suivant qu'on la regarde comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux figures projectives (ou bien, comme une génératrice x_1 ou x_1'). Les séries de génératrices x_2' et x_2, correspondant ainsi à la même génératrice mobile de la première serie, seront projectives entre elles. Soient e_2 et f_2 leurs deux génératrices de coïncidence, et e_1 et f_1 les deux génératrices de la première série qui y correspondent, respectivement, d'une manière double. Alors les points d'intersections E de e_1 et e_2, et F de f_1 et f_2 seront les seuls points de coïncidence des figures. Les points d'intersection de e_1 et f_2 et de e_2 et f_1 seront les deux points, dont nous avons déjà parlé, qui se correspondent d'une manière double.

Si les deux figures sont en involution, tous les points d'intersection de deux génératrices, x_1 et x_2, homologues dans toutes les deux correspondances des génératrices des deux séries, seront des points de coïncidence, et formeront une courbe de coïncidence. Suivant un théorème dont nous avons déjà fait usage, cette courbe est une conique.

On peut déterminer autrement les points de coïncidence de deux figures projectives de la seconde espèce. Soient (x_1) et (x_2'), (x_2) et (x_1') les noms des séries homographiques de génératrices qui déterminent la correspondance. Alors il est évident qu'un point d'intersection des deux coniques, lieux des points d'intersection de génératrices homologues x_1 et x_2', et des points d'intersection de génératrices homologues x_2 et x_1', est un point de coïncidence, et que, réciproquement, ces deux coniques passent par tout point de coïncidence. Il y en aura donc deux ou une infinité, suivant que les coniques sont distinctes ou qu'elles coïncident. On voit encore que trois couples de points correspondants déterminent — immédiatement si la surface a des génératrices réelles — trois points de chacune des deux coniques, et qu'ils suffisent ainsi pour les déterminer.

Deux figures projectives de la seconde espèce ont en général deux points de coïncidence, qui sont les points d'intersection de deux coniques, lieux des points d'intersection des génératrices homologues dans les deux correspondances. Si les figures sont en involution les deux coniques se confondent, et forment alors une courbe de coïncidence.

Les points de coïncidence servent à déterminer *les coniques qui coïncident avec leurs coniques correspondantes.* Comme les séries de points homologues contenues dans le plan d'une de ces coniques sont projectives, on voit que le plan passe par deux points de coïncidence. Si la conique n'est pas composée de droites, et la correspondance est de la première espèce, les deux points de coïncidence sont opposés, c'est dire placés sur des génératrices différentes dans toutes les deux séries. Soient donc E et F deux points de coïncidence opposés de deux figures projectives de la première espèce, ou les deux points de coïncidence de deux figures projectives de la seconde espèce, et désignons, dans tous les deux cas, par e_1 et e_2, et par f_1 et f_2, les génératrices des deux séries qui passent par E et F. Si X et X' sont deux points homologues, la conique EFX correspondra à la conique EFX'. En faisant parcourir à X une section conique passant par E, on fera parcourir aussi à X' une conique passant par E, et on voit ainsi que les faisceaux de plans par EF qui se correspondent sont projectifs. Il y aura donc dans le faisceau deux plans, ou une infinité de plans, qui coïncident avec les plans correspondants.

Soit premièrement la correspondance de la *première espèce*. Alors comme e_1 et e_2, et de même f_1 et f_2, correspondent à elles-mêmes, les plans tangents $e_1 f_2$ et $e_2 f_1$ par la droite EF (ou bien, les plans tangents aux deux autres points de coïncidence) seront, en général, les seuls plans par EF qui coïncident avec leurs plans homologues, et dans le cas particulier où il en existe encore un — ce qui est possible parce que, à côté des points de coïncidence, on peut disposer encore d'une couple de points homologues — tous les plans par EF seront dans la même condition. Alors toutes les droites XX' rencontrent EF, pendant que, dans le cas général, e_1, e_2, f_1, f_2 sont les seules droites joignant des points homologues qui rencontrent EF.

Si les figures sont en involution on aura le cas encore plus particulier que les droites XX' joignant des points homologues rencontrent et EF et la droite GH qui joint les deux autres points de coïncidence opposés. En effet, les points E, X, X' correspondant respectivement à E, X', X, la conique EXX' correspond à elle même et passe par conséquent aussi par F, et, de même, le plan GXX' passera aussi par H. Réciproquement, les figures seront en involution, si une droite XX', et par conséquent toutes les droites XX', rencontrent et EF et GH, car cette propriété, suffisant pour déterminer le point homologue à un point donné, établit une relation symétrique entre les points correspondants. On voit donc aussi que les figures en involution sont les seules qui ont deux faisceaux de sections correspondant à elles-mêmes.

Dans le cas d'une courbe de coïncidence composée de deux génératrices, les sections correspondant à elles-mêmes sont faites par les plans passant par l'une ou l'autre de ces deux génératrices. Nous avons donc prouvé que:

Les seules sections planes qui correspondent à elles-mêmes dans une correspondance projective de la première espèce sont, en général, celles que font les plans tangents aux points de coïncidence. En des cas particuliers toutes les sections passant par deux points de coïncidence opposés correspondent à elles-mêmes, et si les figures sont en involution *toutes les sections passant par l'une ou l'autre des couples de points de coïncidence opposés correspondent à elles-mêmes.* On ne trouve ainsi jamais des coniques propres isolées qui correspondent à elles-mêmes.

Soit ensuite la correspondance de la *seconde* espèce. Alors la droite e_1 correspond à e_2 et f_1 à f_2 dans toutes les deux correspondances des génératrices. La section plane $e_1 f_2$ correspond donc dans l'une figure à $e_2 f_1$ dans l'autre, et réciproquement. Les deux faisceaux projectifs de plans par EF sont donc en involution, et on voit ainsi qu'il existe toujours deux, et seulement deux, coniques par EF qui correspondent à elles-mêmes. Elles ne peuvent se confondre sans coïncider avec l'une ou l'autre des sections $e_1 f_2$ et $f_1 e_2$; mais alors on aurait un cas encore plus particulier que celui — que nous avons déjà negligé, en parlant de la détermination par trois couples de points homologues — où une seule génératrice d'une série correspond à toutes celles de l'autre. Nous ne parlerons, ni non plus, en particulier du cas où les points E et F se confondent, et où, par conséquent, la section du plan tangent où les plans $e_1 e_2$, $f_1 f_2$, $e_1 f_2$, $e_2 f_1$ se confondent correspond à elle-même.

Dans le cas où les figures sont en involution on doit prendre pour E et F des points quelconques de la courbe de coïncidence. L'une des coniques qu'on trouve alors sera la courbe de coïncidenc. Nous allons voir toute de suite que l'autre passe par un point fixe (ce qu'on pourrait conclure aussi de la circonstance qu'un seul de ces plans passe par EF).

Nous avons prouvé que: *Les figures projectives de la seconde espèce contiennent en général deux sections planes qui correspondent à elles-mêmes. Seulement dans le cas où les figures sont en involution elles en contiennent une infinité double*, à côté de la conique de coïncidence déjà trouvée.

Nous sommes maintenant en état de *démontrer la projectiveté* de nos figures, dont nous avons avancé la dénomination de figures projectives.

Nous commençons par les figures projectives de la seconde espèce en involution. Prenons le point d'intersection O des plans tangents en trois points A, B, C de la courbe de coïncidence, qui existe dans ce cas, pour centre de projection, et soit X'' la projection du point X sur la surface elle-même. Alors les points X'' et les points X', homologues à X dans la correspondance donnée, formeront deux figures projectives de la première espèce, ayant pour points de coïncidence les trois points A, B, C. Comme ces points se trouvent sur des génératrices différentes dans toutes les deux figures, il faut que tout point X'' coïncide avec le point correspondant X'. On voit donc que:

La correspondance de deux figures en involution de la seconde espèce peut toujours être établie par une seule projection centrale, le centre de projection étant le pôle du plan de la conique de coïncidence.

Considérons ensuite les figures de première espèce qui ont un faisceau de coniques correspondant à elles-mêmes. Prenons pour centre de projection un point quelconque P de l'axe de ce faisceau EF, et soit X'' la projection de X sur la surface. Les figures où les points X'' correspondent à X' seront donc projectives de la seconde espèce, et elles sont en involution parce que toutes les sections planes par EF correspondent à elles-mêmes. La transition de la figure X'' à X' peut donc être réalisée par une nouvelle projection d'un centre O, qui se trouve évidemment aussi sur la droite EF.

La correspondance de deux figures projectives de la première espèce à un faisceau de coniques correspondant à elles-mêmes, peut être établie par deux projections centrales successives. Les centres de projection se trouvent sur l'axe du faisceau de plans; la position de l'un de ces points sera entièrement déterminé par celle de l'autre qu'on peut choisir arbitrairement sur la droite. Si les figures sont en involution les deux centres peuvent être placés sur l'une ou l'autre de deux droites différentes.

Nous nous élèverons ensuite aux figures projectives générales de la seconde espèce. Nous avons déjà vu qu'elles contiennent deux sections planes correspondant à elles-mêmes. Prenons pour centre de projection un point quelconque du plan d'une de ces sections, et soit X'' la projection de X sur la surface. Les deux figures (X'') et (X') seront projectives de la première espèce, et elles auront une conique propre — celle du plan où nous avons choisi Q — correspondant à elle-même. Elles en auront donc une infinité formant un faisceau, et le cas est ainsi réduit au précédent:

La correspondance de deux figures projectives de la seconde espèce peut être établie par trois projections centrales successives. Les centres de projection se trouvent dans l'un ou l'autre des plans des deux sections correspondant à elles-mêmes. Le premier, étant choisi arbitrairement dans un de ces plans, déterminera une droite contenant les autres, et l'un de ceux-ci, étant choisi arbitrairement sur la droite, en déterminera le dernier.

Si l'on prenait pour centre de projection Q un point de la droite d'intersection EF des deux plans, on aurait une correspondance de la première espèce où E et F se correspondent de deux manières différentes. Les deux figures correspondantes, (X') et (X''), seraient alors en involution. Il existerait donc deux droites différentes où l'on pourrait choisir les deux derniers centres de projections. Ces deux droites se trouvent évidemment sur l'un et l'autre des deux plans dont les sections correspondent à elles-mêmes.

Il nous reste seulement le cas général de deux figures projectives de première espèce. Au moyen d'une seule projection centrale quelconque, on le réduit au cas de deux figures projectives de second espèce. On voit donc que

La correspondance de deux figures projectives de la première espèce peut être établie par quatre projections centrales successives. Le premier centre de projection R étant choisi arbitrairement, les trois autres Q, P, O seront soumis aux mêmes conditions que dans le cas précédent.

Comme, réciproquement, une, deux, trois et quatre projections centrales établissent des correspondances des quatre natures dont nous avons parlé, on voit qu'il est impossible d'établir aucune de ces correspondances par un plus petit nombre de projections centrales que celui que nous lui avons attribué dans nos quatre énoncés.

§ III.

Opérations réelles par rapport aux figures projectives.

Jusqu'à présent il n'a pas été question de la réalité des génératrices de la surface et des différents points et lignes appartenant aux figures projectives dont nous nous sommes occupés. Toutefois, comme les opérations algébriques correspondant aux opérations géométriques dont nous avons parlé ne dépendent pas de la réalité des quantités, les résultats sont établis d'une manière générale, et quant aux indications de constructions elles donnent une voie de déterminer algébriquement les points etc. qu'on doit construire, et qui peuvent être réels quand même ils sont obtenus au moyen de quantités imaginaires. Cependant nous devons indiquer, pour tous les cas, des constructions réelles qui soient possibles à exécuter géométriquement. Nous supposerons alors que *les correspondances des deux figures projectives soient données au moyen de trois couples de points homologues réels*, A, B, C correspondant respectivement à A', B', C'.

Soit premièrement la correspondance de la *seconde espèce*, et commençons par chercher une suite de trois projections conduisant de l'une figure à l'autre. On sait qu'il existe deux cônes réels ou imaginaires qui passent par les sections coniques ABC et $A'B'C'$. Leurs sommets Q_1 et Q_2 se trouvent sur la polaire réciproque de la droite d'intersection des deux plans ABC et $A'B'C'$, et ils sont les points doubles de l'involution déterminée par les couples de ses points d'intersection avec la surface et avec les deux plans. On voit qu'ils sont toujours réels dans le cas où les génératrices de la surface sont imaginaires, et qu'ils peuvent être réels ou imaginaires dans le cas où les génératrices sont réelles.

En projetant la figure $ABC\cdots$ d'un de ces points Q_1, on aura deux figures $A''B''C''\cdots$ et $A'B'C'\cdots$ projectives de la première espèce où la section $A'B'C'A''B''C''$ correspond à elle-même. Les points $A'B'C'$ correspondent respectivement à $A''B''C''$ en des divisions projectives de cette conique, et le point d'intersection de $A'B''$ et $A''B'$ sera un point P_1 de la droite joignant les points de coïncidence des deux divisions. En projetant $A''B''C''$ de P_1 en $A'''B'''C'''$ on aura deux divisions projectives en involution, de façon que $A'A'''$, $B'B'''$, $C'C'''$ passent par un point fixe O_1. En projetant de même un point X de Q_1 en X'', ce point de P_1 en X''', et X''' de O_1 sur la surface, la projection sera le point X' homologue à X.

On voit ainsi que $Q_1P_1O_1$ est l'un des deux plans dont les sections correspondent à elles-mêmes dans les deux figures projectives données; on trouve l'autre en faisant le même usage de Q_2 que de Q_1. On voit, en effet, que seulement pour des positions particulières des points donnés la droite P_1O_1 rencontre Q_1Q_2, de façon qu'on n'a pas en général, et par conséquent ni non plus en des cas particuliers, une double détermination d'un seul des deux plans. La droite d'intersection des deux plans trouvés $Q_1P_1O_1$ et $Q_2P_2O_2$ contient les deux points de coïncidence, réels ou imaginaires suivant que la droite rencontre la surface ou non.

Les constructions indiquées ici s'appliquent si les deux points Q_1 et Q_2 sont réels, ce qui a lieu toujours lorsque les génératrices sont imaginaires. Dans le cas où les génératrices sont réelles, Q_1 et Q_2 peuvent être réels ou imaginaires; mais alors on peut obtenir, et la droite toujours réelle joignant les deux points de coïncidence, et le point X' correspondant à un point donné X au moyen des deux coniques, lieux des points d'intersection de génératrices homologues, dont nous avons indiqué la construction très-facile dans le § II. En joignant la droite passant par les deux points de coïncidence aux points Q_1 et Q_2 on aura les plans des deux sections correspondant à elles-mêmes. Ces plans sont donc réels ou imaginaires en même temps que les points Q_1 et Q_2. S'ils sont imaginaires il sera impossible d'établir la correspondance par trois projections réelles.

Dans ce dernier cas il est naturel de se demander s'il ne serait pas possible d'établir la correspondance par un plus grand nombre de projections réelles. On verra que cela est impossible. En effet, de même qu'une hyperboloide à une nappe décompose l'espace (de points), elle décompose la collection des plans de l'espace, en deux parties. Deux plans appartiennent à la même partie ou à des parties différentes, suivant que leurs pôles se trouvent dans la même partie de l'espace ou en des parties différentes. On voit que deux plans dont les sections se trouvent sur un cône réel appartiennent toujours à la même partie, de façon qu'un nombre quelconque de projections centrales réelles ne conduit jamais de l'une partie de la collection des plans de l'espace à l'autre. Dans le cas où les deux plans ABC et $A'B'C'$ appartiennent à la même partie, les points Q_1 et Q_2 seront réels, et on pourra établir la correspondance par trois projections réelles; dans le cas où ABC et $A'B'C'$ appartiennent à des parties différentes il sera impossible de l'établir par des projections centrales réelles.

Les considérations précédentes nous permettent de construire dans les deux cas suivants quatre centres de projections réels au moyen desquels on peut établir une *correspondance projective réelle et donnée de la première espèce*, 1° si les génératrices de la surface sont imaginaires, 2° si les génératrices sont réelles, et les plans ABC et $A'B'C'$ appartiennent à la même partie de la collection des plans de l'espace, et elles nous montrent que dans le (troisième) cas qui reste il est impossible de réaliser la correspondance par des projections centrales réelles. Dans les deux premiers cas les projections fournissent le meilleur moyen de déterminer le point X' homologue à un point quelconque donné X, et dans tous les deux derniers cas, les génératrices étant réelles, on peut réduire cette construction, de même que celle des points de coïncidence, à des opérations de géométrie plane, en considérant les divisions homographiques de la conique ABC qu'on obtient en faisant correspondre à A, B et C les traces sur ce plan des génératrices de l'une ou de l'autre série passant par A', B' et C'.

Il nous reste de chercher une construction des quatre points de coïncidence de deux figures projectives de première espèce, applicable aussi dans les cas où les génératrices sont imaginaires. On l'obtient en déterminant une involution de deux figures de la première espèce qui ont les mêmes points de coïncidence. Ceux-ci seront alors les points d'intersection de la surface avec les deux droites, réelles ou imaginaires, qui rencontrent les quatre droites joignant les points de quatre couples de l'involution.

Pour la détermination de l'involution aux mêmes points de coïncidence que deux figures projectives données de la première espèce, on a besoin de la *définition* suivante: *La couple EF de deux points de coïncidence opposés de deux figures projectives de la première espèce en involution, et la couple de deux points homologues quelconques AA' forment un système harmonique*, ou bien, A est harmoniquement conjugué à A' par rapport à E et F. E, F et A étant donnés on détermine le point A' au moyen de la droite par A qui rencontre et EF et la droite polaire réciproque de EF.

Celà étant, je dis que: *X' et X'' étant les points qui correspondent, dans une correspondance projective de la première espèce, à un point X suivant qu'on le regarde comme point de l'une ou de l'autre des deux* *figures projectives, et Y étant le point harmoniquement conjugué à X par rapport à X' et X'', les couples de points XY formeront une involution aux mêmes points de coïncidence que les figures données.*

Ce théorème résulte immédiatement du théorème analogue dans la théorie des séries projectives simplement infinies, si l'on se rappelle seulement que les génératrices, de chacune des séries, passant par les points de la surface forment des systèmes harmoniques et des séries projectives, ordinaires ou en involution, en même temps que les points de la surface.

§ IV.

Inscription de polygones.

La théorie précédente s'applique immédiatement à la construction *de polygones fermés et inscrits à la surface dont les côtés passent par des points donnés.* En effet, en commençant par essayer de prendre un point quelconque X de la surface pour sommet, on obtiendra en général un polygone ouvert dont le dernier côté rencontre la surface en un point X'. Si X' coïncide avec X le polygone sera un de ceux que nous cherchons. Or les figures (X) et (X'), dont l'une dépend de l'autre par un nombre de projections centrales, seront projectives. Nous avons donc appris à en construire les points de coïncidence. On y emploie seulement trois couples de points homologues, A, B, C correspondant respectivement à A', B' et C'; on les obtient, de la manière que nous venons d'indiquer, par trois essais. Dans le cas où les génératrices de la surface sont imaginaires, et le nombre des côtés du polygone est pair, on facilite la construction en prenant le point A', trouvé par le premier essai, pour point B, et le point B' pour point C; dans tous les cas il faut prendre A, B, C sur des génératrices différentes dans toutes les deux séries.

Si le nombre n des côtés du polygone cherché est pair on trouve en général quatre solutions. — Dans le cas où AA', BB', CC' sont des génératrices de la même série on obtient une infinité de solutions; les côtés des polygones engendrent alors deux suites fermées de n plans, dont les n arêtes sont des génératrices prises alternativement dans l'une et dans l'autre série. — Si toutes les trois polygones d'essai se ferment on peut commencer la construction d'un nouveau polygone fermé par un point quelconque X de la surface, et il y aura ainsi une infinité double de solutions.

Si n est impair on obtient en général deux solutions. Seulement si AA', BB', CC' se rencontrent au même point, il y en aura une infinité; les côtés des polygones engendrent alors une suite fermée de n cônes qui se rencontrent en n coniques de la surface.

Nous allons étudier les conditions imposées aux n points fixes dans les cas où il existe une infinité de solutions.

Si n est *pair* on aura, en prenant $n-1$ des points fixes pour centres de $n-1$ projections successives, une correspondance de la seconde espèce. Soient A'', B'', C'' les points correspondant aux trois points A, B, C, et désignons par a_1, b_1, c_1 les trois génératrices de l'une des séries qui passent par A, B, C, et par a_2'', b_2'', c_2'' celles de l'autre série qui passent par A'', B'', C''. En projetant ensuite les points A'', B'', C'' du point d'intersection O des plans $a_1 a_2''$, $b_1 b_2''$, $c_1 c_2''$, on déterminera trois points A', B', C' des trois génératrices a_1, b_1, c_1. En prenant ce point O pour le n'ième point fixe, les autres $n-1$ étant donnés, on aura ainsi le cas où il y a une infinité simple de solutions. On obtient la même chose pour une autre position du dernier point O, celle qu'on obtient en changeant entre eux les rôles que nous venons de faire jouer aux deux séries de génératrices. Ces deux positions étant les seules possibles, on voit que la suite de $n = 2r$ points sur lesquels peuvent pivoter, dans deux séries de plans fixes, les côtés d'un polygone fermé et inscrit est soumise à 3 conditions.

Encore plus d'intérêt présentent *les suites de $2r$ points sur lesquels peuvent pivoter d'une manière entièrement libre les côtés d'un polygone fermé et inscrit à la surface.* Nous les appellerons les *cycles complets de $2r$ points.* Le § II. fournit le moyen de déterminer trois points consécutifs d'un cycle complet, les $n-3$ autres (ainsi que l'ordre des points) étant donnés. En effet, en prenant $n-3$ points pour centres de projections successives, on peut construire deux figures projectives de seconde espèce, dont la correspondance peut être établie par 3 projections successives. Les centres de projection dont le premier est un point arbitraire de l'un de deux plan, le deuxième, un point arbitraire d'une droite du même plan, et le dernier, un point déterminé de la même droite, seront les points cherchés du cycle. On voit ainsi que *les points d'un cycle complet de $2r$ points sont soumis à 6 conditions,* qui ne peuvent toutefois servir à déterminer deux des points par les autres.

En ôtant d'un cycle complet de $2r$ points un des points, qui est déterminé par les autres, *on obtient* $2r-1$ points, dont nous dirons qu'ils forment un *cycle de $2r-1$ points.* Les propriétés de cette série nous montreront en effet qu'elle est circulaire, ou bien, qu'on peut la commencer par un point quelconque.

Il résulte premièrement de notre déduction du cycle que ses points ont la propriété suivante: pris pour centres de projections successives de la surface sur elle-même, ses points établissent une involution de la seconde espèce. Cette propriété conduit aux deux suivantes:

Sur les points d'un cycle de $2r - 1$ points peuvent pivoter les côtés d'un polygone fermé et inscrit dont les sommets sont astreints à parcourir des coniques fixes de la surface. — Sur les mêmes points peuvent pivoter librement les côtés opposés d'un polygone à $2(2r - 1)$ côtés, fermé et inscrit à la surface. On pourrait énoncer la dernière de ces propriétés de la manière suivante: *En prenant un cycle de $2r - 1$ points deux fois on aura un cycle complet de $2(2r - 1)$ points.*

La deduction d'un cycle de $2r - 1$ points nous montre que ses points sont assujétis *à 3 conditions*, qui ne peuvent toutefois servir à déterminer un des points par les autres.

En ôtant un des $2r - 1$ points d'un cycle on aura $2r - 2$ points, assujétis à une seule condition; nous dirons qu'ils forment un *cycle incomplet.* Pris, dans l'ordre donné, pour centres de projections successives, ils déterminent deux figures projectives de la première espèce à un faisceau de sections planes correspondant à elles-mêmes. Cela est évident si l'on commence la série par le point consécutif, dans le cycle de $2r - 1$ points, à celui que nous avons ôté; en projetant ensuite toutes les deux figures projectives qu'on a obtenues dans ce cas des points de la série, pris dans le même ordre, on obtient, par chaque projection, deux figures projectives jouissant de la même propriété. Pouvant faire subire ainsi à la série de $2r - 2$ points une permutation circulaire, il est juste de l'appeler un cycle; nous l'avons appelé incomplet parce qu'il faut ajouter 2 points pour avoir un cycle complet de $2r$ points.

Le point qu'il faut ajouter pour former un cycle de $2r - 1$ points est un point quelconque d'un des axes des faisceaux de plans dont nous venons de parler, et il aura sa place, dans ce cycle, entre les centres de la première et de la dernière des projections qui établissent la correspondance à laquelle appartient ce faisceau. Dans le cas particulier où cette correspondance est une involution — et alors aussi les correspondances qu'on obtient en commençant le cycle incomplet par d'autres points seront des involutions — le point à ajouter peut être aussi un point quelconque de la droite polaire réciproque de cet axe. Dans ce cas particulier nous appelons le cycle incomplet *singulier.*

La condition à laquelle $2r - 2$ points doivent satisfaire pour former un cycle incomplet consiste en ce qu'un quelconque des points se trouve sur un de deux plans, déterminés par les autres $2r - 3$ points d'une manière que nous avons indiquée dans les §§ II. et III. Le cycle sera singulier si le point se trouve sur la droite d'intersection des deux plans, ou bien sur la droite joignant les deux points de coïncidence des figures projectives de la seconde espèce qu'on détermine par les $2r - 3$ points, pris pour centres de projections successives. On voit donc qu'un cycle incomplet et singulier dépend de 2 conditions. On voit de plus que dans le cas où un des $2r - 2$ points se trouve sur la droite d'intersection des deux plans qui composent son lieu lorsque les autres points du cycle incomplet sont donnés, tous les $2r-2$ points du cycle seront dans la même condition.

Soit donné un cycle incomplet de $2r-2$ points qui n'est pas singulier. Alors chacun des points ne se trouve que sur un seul des deux plans qui en formeront le lieu si les autres points restent fixes. Chacun de ces plans contient les deux droites qui sont les lieux du $(2r-1)^{me}$ point qu'il faut ajouter immédiatement avant ou après le point auquel appartient le plan, pour former un cycle de $2r-1$ points. Le cycle de $2r-2$ points étant donné, le lieu complet du point à ajouter dans un intervalle inconnu pour former un cycle de $2r-1$ points sera donc composé des arêtes de la suite de $2r-2$ plans circonscrite au cycle donné. — Dans le cas où le cycle est singulier on aura deux suites de $2r-2$ plans au lieu d'une seule.

Soit donné ensuite un cycle de $2r-1$ points. Alors chacun des points se trouve sur une droite déterminée par les autres, qui forment un cycle incomplet. Seulement dans le cas où celui-ci est singulier ils déterminent deux droites; mais, étant des polaires réciproques, elles ne se rencontrent pas en général, et le $(2r-1)^{me}$ point ne se trouve que sur l'une de ces deux droites. On a ainsi dans tous les cas une seule droite par chaque point. Le point qu'il faut ajouter dans un intervalle donné pour former un cycle complet de $2r$ points doit se trouver, selon le § II., sur les deux droites qui appartiennent aux deux points adjacents. On voit ainsi que toutes ces droites forment un polygone fermé, circonscrit au cycle donné, et que le point qu'il faut ajouter pour former un cycle complet doit être un des sommets de ce polygone.

Nous nommerons encore un théorème sur les cycles incomplets et singuliers d'un nombre pair de points: *Étant construit un polygone à $4s$ côtés fermé et inscrit à la surface dont les côtés opposés se rencontrent, les côtés de ce polygone, restant fermé et inscrit, peuvent pivoter librement sur les $2s$ points de rencontre*, qui formeront un cycle incomplet et singulier. Il suffit, en effet, pour établir l'involution de deux figures projectives de la première espèce qu'un seul point a le même point homologue à quelque des deux figures qu'on le fasse appartenir. Comme la même chose ne suffit pas pour deux figures projectives de la seconde espèce, on a besoin de plusieurs conditions pour assurer à un polygone inscrit à $2(2r-1)$ côtés la même liberté, dont il jouit lorsqu'il est deux fois circonscrit à un *cycle* de $2r-1$ points.

Des propriétés fondamentales des cycles, qui permettent de substituer un seul point à un cycle d'un nombre impair de points, résultent immédiatement les théorèmes suivants sur la formation de nouveaux cycles par l'addition de cycles donnés:

En ajoutant à un cycle donné un cycle complet d'un nombre pair de points, on formera un nouveau cycle de la même espèce que le cycle donné. — Par l'addition de deux cycles d'un nombre impair de points on formera un cycle, en général incomplet.

Dans cette addition on peut commencer chaque cycle par un point quelconque et donner aux cycles un sens quelconque. Si le cycle qu'on ajoute à un autre en fait déjà partie en sens inverse, on aura une soustraction de cycles. —

Deux points forment toujours un cycle incomplet, qui sera singulier dans le cas où les points sont conjugués par rapport à la surface. On aura un cycle de trois points en ajoutant un point quelconque de la même droite, et, dans le cas particulier où les points sont conjugués, une autre espèce de cycles de trois points en ajoutant un point quelconque de la polaire réciproque. Le quatrième point d'un cycle complet sera dans le premier cas un point de la même droite qui contient les autres, déterminé conformément au théorème de Desargues. Dans le second cas il sera le pôle du plan des trois autres points. On voit ainsi que:

Les cycles de trois points sont composés, soit de trois points d'une droite, soit des sommets d'un triangle conjugué à lui-même. Les cycles complets de quatre points sont composés, soit de quatre points d'une droite, dont le premier et le troisième, le deuxième et le quatrième, forment avec les deux points d'intersection avec la surface trois couples d'une involution, soit des sommets d'un tétraèdre conjugué à lui-même.

Nous n'avons pas besoin d'énoncer séparément les théorèmes sur les polygones variables, inscrits et fermés, qu'on obtient en appliquant les propriétés générales des cycles aux sommets d'un triangle ou d'un tétraèdre conjugué à lui-même. Ils seront connus, du moins dans le cas où trois sommets sont à l'infini.

Il est évident que $2r - 1$ points d'une droite forment toujours un cycle. La détermination du point de la même droite qui forme avec eux un cycle complet de $2r$ points résulte immédiatement de la théorie de Poncelet sur les polygones inscrits aux coniques.

Il est évident aussi qu'une suite de $2r - 2$ *points d'un plan forment toujours un* cycle, qui est en général *incomplet.* On voit s'il est complet, ou singulier, en essayant d'inscrire à la surface trois polygones fermés à $2r - 2$ côtés circonscrits une fois au cycle, ou un polygone fermé à $2(2r - 2)$ côtés circonscrit deux fois au cycle. S'il est incomplet on pourra former un cycle de $2r - 1$ points en ajoutant, dans un des intervalles, un point quelconque de la droite joignant les points de coïncidence des deux séries projectives déterminées, sur la section faite par le plan du cycle, par les polygones circonscrits au cycle donné de $2r - 2$ points et inscrits — au sommet près qui appartient à l'intervalle que nous avons choisi — à la conique. Les cycles de $2r-1$ points formés ainsi s'appellent *cycles plans ordinaires. Il existe seulement deux polygones plans et fermés circonscrits à un de ces cycles et inscrits à la section conique*, et *le point qu'il faut ajouter, dans un des intervalles; pour former un cycle complet de $2r$ points se trouve dans le même plan.*

A côté de ces cycles plans ordinaires on peut former, dans le cas où le cycle incomplet de $2r-2$ points est singulier, une autre espèce de cycles plans de $2r-1$ points, en ajoutant, dans un des intervalles, le pôle de la droite qui est le lieu du point dont on fait usage pour former un cycle plan ordinaire. Nous appellerons ces nouveaux cycles des *cycles plans singuliers de $2r-1$ points* (parce qu'on a un cycle incomplet et singulier de $2r-2$ points en en ôtant un point quelconque). *Les polygones plans circonscrits à ces cycles, et inscrits à la section, se ferment d'eux mêmes;* les polygones *plans* inscrits à la conique et circonscrits deux fois au cycle sont donc formés par la répétition de polygones circonscrits une fois. *Le point qu'il faut ajouter pour former un cycle complet de $2r$ points est, pour tous les intervalles, le pôle du plan.*

Les points d'un cycle plan ordinaire de trois points se trouvent sur une droite; ceux d'un cycle plan singulier de trois points sont les sommets d'un triangle conjugué à lui-même. —

Les points d'intersection d'un plan avec les côtés d'un polygone inscrit et fermé à $2r-1$ côtés forment toujours un cycle plan ordinaire.

En effet, un sommet quelconque du polygone est point de coïncidence de deux figures projectives de seconde espèce dont l'une est formée de l'autre par $2r-1$ projections successives, les centres de projection étant les $2r-1$ points d'intersection. Les mêmes figures ont évidemment encore deux points de coïncidence dans le plan donné. Il existe donc une courbe de coïncidence passant par les trois points. Donc les figures sont en involution, et les $2r-1$ points forment par conséquent un cycle, qui n'est pas singulier parce que la courbe de coïncidence n'est pas la section faite par le plan donné.

Comme deux figures projectives de la première espèce ont quatre points de coïncidence, les mêmes considérations ne conduisent à aucune particularité du cycle incomplet formé des points d'intersection d'un plan avec les côtés d'un polygone inscrit à la surface à un nombre pair de côtés; mais à cause de la dépendance qui a lieu entre les quatre points de coïncidence, il existera aussi une dépendance entre ce cycle incomplet plan et les sommets du polygone, qu'on peut énoncer ainsi:

Soit inscrit à une surface du second ordre un polygone gauche à $2s$ côtés; alors les deux polygones plans et fermés, circonscrits au cycle incomplet *formé des points d'intersection des côtés du polygone gauche avec un plan, et inscrits à la section faite par ce plan, auront pour sommets les traces des génératrices passant par les sommets du polygone gauche, prises alternativement dans les deux séries.* Deux sommets consécutifs d'un des deux polygones plans ne sont par déterminés par des génératrices de la même série, parce que les côtés du polygone plan rencontrent les côtés homologues du polygone gauche.

Si la surface est une sphère, et un des sommets S du polygone gauche est un des pôles sphériques du cercle d'intersection du plan, les sommets des deux polygones inscrits au cercle qui se trouvent dans le même intervalle du cycle que S seront les points circulaires à l'infini. On voit donc que si l'on fait pivoter sur les points du cycle incomplet les côtés d'un polygone dont les autres sommets se trouvent sur le cercle, les deux côtés adjacents au sommet qui se trouve dans le même intervalle que S, *intercepteront un arc de cercle de grandeur constante.* —

Il n'est pas nécessaire de placer le point devant former avec $2r - 3$ points donnés d'un plan α un cycle incomplet, dans le même plan. Il peut être aussi un point quelconque d'un autre plan β, passant par la droite qui joint les deux points de coïncidence des séries projectives déterminées sur la section du plan α par les polygones inscrits et ouverts dont les côtés pivotent sur les $2r - 3$ points donnés, et par le pôle du plan donné α. En effet, comme ce plan β contient déjà les deux points de coïncidence des figures projectives de second espèce qu'on obtient en prenant les $2r - 3$ points donnés pour centres de projections successives, il suffit d'indiquer encore un point X de la section du plan β auquel correspond un point X' du même plan. On peut prendre un point qui est infiniment voisin du plan α; car le polygone ouvert qui établit la connexion de ce point X avec le point correspondant X' aura, si on prend le pôle du plan α pour centre de projection, la même projection que le polygone fermé et inscrit à la section faite par le plan α qui établit la connexion du point de coïncidence infiniment voisin de X avec lui-même. X et X' auront donc la même projection, et, si les figures projectives ne sont pas en involution, les plans α et β composeront le lieu du $(2r-2)$ième point du cycle incomplet.

L'involution aura lieu si les $2r - 3$ points forment un cycle plan ordinaire ou singulier. Dans le dernier cas le plan β devient indéterminé, et dans le premier, α et β ne composeront pas le lieu complet du point cherché, qui doit être indéterminé selon notre théorème sur l'addition de cycles.

Dans le cas où $r = 3$, on aura, en faisant usage d'une propriété connue des triangles inscrits à une conique dont les côtés passent par des points donnés, le théorème suivant:

Si quatre points A, B, C, D, qui ne se trouvent pas dans le même plan, forment un cycle incomplet, le point D se trouvera dans le plan passant par la droite d'intersection du plan polaire de A avec le plan joignant A à la polaire réciproque de BC, et par la droite d'intersection du plan polaire de C avec le plan joignant C à la polaire réciproque de AB.

Comme cette condition suffit pour faire former aux quatre points un cycle incomplet, il suffit aussi pour établir que les points A, B, C se trouvent sur les plans dont la détermination résulte de permutations circulaires de $ABCD$ dans l'énoncé précédent.

Pour avoir un cycle de cinq points il faut ajouter au cycle incomplet A, B, C, D un point quelconque E de la droite d'intersection du plan par D que détermine l'énoncé précédent, avec le plan analogue par A.

Le $(2r-2)$ième point d'un *cycle incomplet et singulier* dont les autres $2r-3$ points se trouvent dans un plan, se trouvera, en général, sur une droite de ce plan. Dans le cas où les $2r-3$ points forment un cycle il peut être un point quelconque du plan polaire du point formant avec les points donnés un cycle complet. Ce plan coïncide avec le plan des points donnés dans le cas où le cycle plan qu'ils forment est singulier. Un cycle incomplet et singulier de quatre points est donc toujours plan. —

Il peut arriver, en des cas particuliers, *qu'un point d'un cycle se trouve sur la surface elle-même*, et on peut déduire les propriétés de ces cycles des propriétés générales. Il ne serait pas difficile de former les énoncés sur les cycles imcomplets dont un point se trouve sur la surface, mais ne les trouvant pas assez intéressants pour y insister, nous ne nous occuperons, à cet égard, que des cycles d'un nombre impair de points et des cycles complets.

Etant donné un cycle incomplet de $2r-2$ points, le lieu du point à ajouter, dans un intervalle donné, pour former un cycle de $2r-1$ points est une droite qui rencontre la surface en deux des quatre points de coïncidence des figures projectives qu'on détermine en prenant les $2r-2$ points pour centres de projections successives. Il en résulte le théorème suivant, qui nous sera utile:

Si un point P d'un cycle de $2r-1$ points se trouve sur la surface, il sera sommet d'un polygone fermé à $2r-2$ côtés inscrit à la surface, et circonscrit au cycle incomplet formé des $2r-2$ autres points.

Il résulte de l'énoncé et de la déduction que la proposition inverse ne serait pas vraie: un sommet et un point quelconque de chaque côté d'un polygone inscrit à $2r-2$ côtés ne forment pas en général un cycle de $2r-1$ points. Il faut, non seulement que les $2r-2$

points forment un cycle incomplet, mais aussi que le sommet est un des deux points de coïncidence des figures projectives, déterminées par le cycle incomplet, par lesquels passent les coniques correspondant à elles-mêmes. Ces conditions sont remplies dans le cas particulier où tous les $2r - 1$ points se trouvent dans le même plan.

En circonscrivant à un cycle donné de $2r - 1$ points dont un se trouve sur la surface plusieurs polygones ouverts dont les sommets à un près se trouvent sur la surface, on voit que le point à ajouter pour former un cycle complet, est un des sommets du polygone, inscrit et fermé, à $2r - 2$ côtés dont nous avons parlé dans le précédent énoncé. Le sommet P appartient à deux des $2r - 1$ intervalles du cycle donné, chacun des autres à un intervalle. On voit donc *qu'un cycle complet dont un point se trouve sur la surface en a encore un autre sur la surface.*

§ V.

Sur les cycles communs aux surfaces d'un système linéaire.

Nous avons montré, dans le paragraphe précédent, la détermination des points qu'il faut ajouter à des points donnés pour former les différentes espèces de cycles. Cette détermination nous montre les degrés des équations, exprimant qu'une suite de points est un cycle, par rapport aux coordonnées de ces points. On voit que les équations exprimant qu'une suite de $2r$ points est un cycle complet peuvent être réduites au système suivant: 1° une équation qui est du second degré et réductible par rapport aux coordonnées de chacun de $2r - 2$ points consécutifs de la suite; 2° deux équations contenant les coordonnées précédentes et les coordonnées du $(2r - 1)$ième point, et étant linéaires par rapport aux coordonnées de chacun de ces points; 3° trois équations contenant toutes les coordonnées des $2r$ points, et étant linéaires par rapport aux coordonnées de chaque point.

Les équations de condition contiennent encore les coefficients de l'équation de la surface. Sans essayer de surmonter les difficultés qui s'opposeraient à une étude algébrique complète des cycles, nous nous servirons d'un simple raisonnement pour déterminer les degrés des équations de condition d'un cycle complet d'un nombre pair de points, ou d'un cycle d'un nombre impair de points, par rapport aux coefficients de l'équation de la surface.

Les équations devant être homogènes par rapport aux dix coefficients, il est évident que les degrés ne seront pas altérés si l'on donne aux points du cycle des positions particulières, à condition qu'on ne neglige, en même temps, aucun facteur des équations cherchées. Faisons donc coïncider entre eux le premier et le deuxième point du cycle, le troisième et le quatrième etc. jusqu'à ce qu'il n'en reste que quatre points $A\,B\,C\,D$, ou trois points $A\,B\,C$. Il faut alors que ces derniers points forment un cycle complet, ou un cycle; car deux points confondus qui ne se trouvent pas sur la surface forment un cycle complet, qu'on peut negliger selon le théorème sur l'addition des cycles, et comme la droite joignant les deux points confondus garde dans le cas limite une direction déterminée, on ne contribuera rien à satisfaire aux conditions en faisant passer la surface par les points confondus. Les degrés cherchés seront donc les mêmes dans les cas de quatre ou trois points donnés, que dans ceux où le cycle doit être formé d'un nombre pair ou impair quelconque de points. Or nous savons que, dans les cas où les points donnés ne se trouvent pas sur une droite, les quatre points d'un cycle complet doivent être les sommets d'un tétraèdre conjugué à lui-même; et que les trois points d'un cycle doivent être les sommets d'un triangle conjugué à lui-même. Les points étant donnés, on connaîtra, respectivement, six ou trois points conjugués par rapport à la surface, ce qui donne six ou trois équations linéaires par rapport aux coefficients de son équation. On voit donc que *la condition que $2r$ points forment un cycle complet par rapport à une surface du second ordre, peut être exprimée par un système de six équations linéaires par rapport aux coefficients de l'équation de la surface**); et que *la condition que $2r-1$ points forment un cycle, s'exprime par trois équations linéaires par rapport aux coefficients.***)

On en conclut que, dans un système linéaire de ∞^s surfaces, celles par rapport auxquelles $2r$ (ou $2r-1$) points forment un cycle complet (ou un cycle) composent, en général, un système linéaire de ∞^{s-6} (ou de ∞^{s-3}) surfaces. Dans le cas particulier où les points forment un cycle complet (un cycle) par rapport à $s+1$ des surfaces, qui n'appartiennent pas à un système linéaire de ∞^{s-1} surfaces, ils formeront un cycle complet (cycle) par rapport à toutes les ∞^s surfaces du système donné. Si, par exemple, $2r$ (ou $2r-1$) points forment un cycle complet (cycle) par rapport à deux surfaces d'un faisceau, ils formeront un cycle complet (cycle) par rapport à toutes les surfaces du faisceau.

---

*) Ce système n'est pas immédiatement identique à celui des six équations que nous avons indiqué pour la détermination successive de trois des $2r$ points qui forment un cycle complet par rapport à une surface donnée; mais l'un de ces systèmes est formé de l'autre par des éliminations. Il n'est donc pas permis de conclure que l'équation de condition d'un cycle incomplet, qui est une des équations du dernier système, serait linéaire par rapport aux coefficients.

**) Les nombres des équations se réduisent pour des positions particulières des points; mais les équations restent linéaires par rapport aux coefficients. Une seule équation linéaire suffit, par exemple, pour exprimer que $2r-1$ points donnés d'un plan forment un cycle par rapport à une surface.

§ VI.

Construction d'une surface du second ordre passant par des points donnés.

On peut faire usage des théorèmes trouvés dans le § IV. (p. 55) sur les points d'intersection d'un plan avec les côtés d'un polygone inscrit à une surface du second ordre pour construire une surface passant par des points donnés. Nous commençons par le problème suivant:

I. *Construire une surface du second ordre passant par une conique donnée* $\varkappa$ *et par quatre points donnés* 1 2 3 4.

On aura le moyen de déterminer tous les points de la surface en trouvant une construction de son second point d'intersection 5 avec une droite quelconque passant par 4. Or nous avons démontré que les points d'intersection $A\,B\,C\,D\,E$ du plan de la conique $\varkappa$ avec les côtés du pentagone 1 2 3 4 5 1 forment un cycle plan ordinaire. Les points A, B, C, D étant déterminés immédiatement au moyen des points donnés, nous savons encore que le lieu du cinquième point E du cycle est une droite e, facile à construire. Le point E doit se trouver encore sur la trace t du plan passant par le point 1 et par la droite 45 dont on cherche le point d'intersection 5. On pourra ainsi construire le point E qui détermine la position de la droite 15.

Dans le cas où la trace t rencontre la conique $\varkappa$, on peut déterminer le point cherché E sans construire la droite, lieu du cinquième point du cycle. Il suffit, en effet, de prendre t pour côté d'un décagone inscrit à $\varkappa$ et circonscrit deux fois à $A\,B\,C\,D\,E$. Le côté t en détermine les côtés passant par les points donnés A, B, C, D, et ensuite le côté opposé à t; le point d'intersection de celui-ci avec t sera le point cherché E.

Dans le cas où t ne rencontre pas $\varkappa$, on pourrait se servir du même précédé pour déterminer deux points de la droite e; mais il existe aussi d'autres moyens de cette construction. Dans tous les deux cas les opérations se réalisent linéairement, et, à l'exception de peu de projections, dans le plan de $\varkappa$.

II. *Déterminer les points d'intersection d'une droite donnée e avec une surface du second ordre passant par une conique* $\varkappa$ *et par quatre points donnés* 1 2 3 4.

Désignons encore un des points cherchés par 5, et attribuons à A, B, C, D, E les mêmes significations que dans la solution précédente. Alors A, B, C seront donnés, D sera un point de la trace s du plan $4l$, E un point de la trace t du plan $1l$, et la droite DE passera par la trace O de la droite 14. Si D parcourt la droite s, on peut construire, pour chacune de ses positions, de la manière que nous venons d'indiquer, sur la droite t le cinquième point E d'un cycle plan ordinaire déterminé par $A\ B\ C\ D$, et comme cette construction et celle du point D qui correspond à une position donnée de E sont linéaires, on aura ainsi deux séries de points projectives, (D) et (E). La construction de points homologues D et E qui se trouvent sur des droites par O se réduit alors à la détermination de points de coïncidence de deux séries projectives de points d'une droite.*)

On réduira la construction d'une *surface passant par neuf points donnés* aux constructions indiquées ici, en déterminant sa courbe d'intersection avec le plan passant par trois des points donnés. Il s'agit seulement de déterminer encore deux points de cette conique. On peut prendre les quatrièmes points d'intersection du plan avec les quartiques gauches de la première espèce passant par les trois points donnés dans le plan et par cinq autres des points donnés. Nous avons donc besoin seulement de résoudre le problème suivant:

III. *Huit points* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *d'une quartique gauche de la première espèce étant donnés, construire le quatrième point d'intersection Z de cette courbe avec le plan* 6 7 8.

Le point Z est le quatrième point d'intersection des traces de deux surfaces passant par la quartique. Si l'on prend la surface passant encore par un point quelconque de 78, ou de 67, la trace sera composée de la droite 7 8 et d'une droite i par 6, ou de la droite 6 7 et d'une droite k par 8. Le point Z sera le point d'intersection de i et k. Les constructions de ces deux droites étant identiques, nous avons réduit le problème au suivant: *déterminer la droite i passant par un point donné* 6, *et formant avec une droite donnée* (7 8) *une section plane d'une surface du second ordre qui passe encore par cinq points donnés* 1, 2, 3, 4, 5.

Si le point 6 était inconnu, les surfaces assujéties à passer par 1, 2, 3, 4, 5 et trois points de la droite (7 8) formeraient un faisceau passant par (7 8) et une cubique gauche rencontrant le plan donné en deux points de (7 8) et en un troisième point J. Il faut donc que toutes les droites i qu'on obtient pour les différentes positions de 6 passent par ce point fixe. On pourrait déduire le même fait de notre paragraphe précédent, en substituant à la condition que la surface doit passer par 1, 2, 3, 4, 5, celle que les traces A, B, C, D, E des côtés

---

*) Comme le lieu des points E correspondant à D est une droite e, et, réciproquement, le lieu des points D correspondant à un point E est une droite d, les points D et les droites correspondantes e forment deux figures corrélatives. On aura ainsi une nouvelle déduction de la génération des surfaces du second ordre due à M. Seidewitz.

du pentagone 1, 2, 3, 4, 5 doivent former un cycle par rapport à la section de la surface, qui est composée de (7 8) et de i. On obtient le point fixe J des droites i, en donnant au point 6 des positions qui facilitent la construction de la droite i.

On en aura une en plaçant le point 6 en un des points du cycle donné A, B, C, D, E, par exemple en A. En effet, nous avons vu à la fin du § IV. que, dans le cas où A est un point de la surface, il sera sommet d'un quadrilatère fermé, inscrit à la surface, et circonscrit au cycle incomplet B, C, D, E. Dans le cas actuel, ce quadrilatère sera plan et inscrit à la section composée de la droite donnée (7 8) et de la droite inconnue i, qui passe par A. Les côtés de ce quadrilatère se construissent immédiatement, et le point d'intersection des côtés passant par C et D sera un point H de i qui servira à la déterminer.

En plaçant ensuite le point 6 en B, on déterminera une nouvelle droite i.

On aura ainsi la construction suivante du point fixe J des droites i qu'on obtient en donnant à 6 une position quelconque dans le plan:

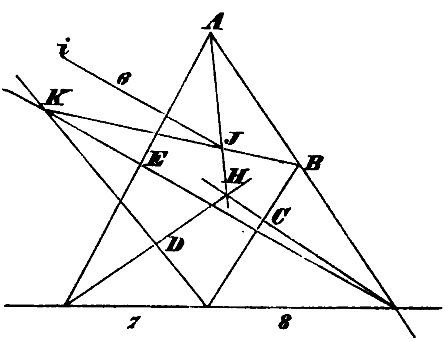


Fig. 1.

Joignez le point A au point d'intersection H de la droite joignant C au point d'intersection de AB et (7 8), et de la droite joignant D au point d'intersection de AE et (78); joignez le point B au point d'intersection K de la droite joignant D au point d'intersection de BC et (7 8), et de la droite joignant E au point d'intersection de BA et 7 8: alors le point J sera le point d'intersection de AH et BK.

En donnant ensuite au point 6 la position donnée on aura la droite cherchée i en joignant 6 à J.

L'autre droite k passant par le point cherché Z se détermine de la même manière.

On a ainsi retrouvé la construction de ce point, trouvée par M. Paul Serret au moyen de considérations bien différentes des nôtres.*)

Le point J que nous avons construit étant un point de la cubique gauche passant par 1, 2, 3, 4, 5 et ayant la droite (7 8) pour sécante double, nous avons indiqué une construction du troisième point d'inter-

*) Géométrie de Direction p. 374.

section de cette courbe avec un plan passant par la sécante double donnée. On pourrait déduire de la même figure d'autres constructions relatives aux cubiques gauches, par exemple celle d'une cubique gauche ayant une sécante double donnée (7 8), passant par quatre points donnés J, 2, 3, 4, et rencontrant encore des droites données $2A$ et $4D$ par deux de ces points en des points inconnus 1 et 5: alors la figure montre la construction de la trace E de 15.

IV. *Construire le huitième point* 5 *commun à toutes les surfaces du second ordre qui passent par les sept points donnés* 1, 2, 3, 4, 6, 7 8.

Les traces connues A, B, C des droites 1 2, 2 3, 3 4, et les traces inconnues D et E des droites 4 5 et 5 1, sur le plan 6 7 8 doivent former des cycles plans ordinaires par rapport à toutes les surfaces du second ordre passant par les sept points, ou bien, par rapport à leurs traces, c'est à dire par rapport à toutes les coniques passant par 6, 7 et 8. Selon le paragraphe précédent — ou selon la théorie connue des surfaces du second ordre passant par sept points donnés — il suffira pour cela de leur faire former des cycles par rapport à trois coniques passant par 6, 7, 8 qui n'appartiennent pas à un seul faisceau.

Nous faciliterons, dans ce qui suit, la construction par un choix convenable de ces trois coniques. Il faut encore que la droite DE passe par la trace connue O de la droite 14. On a ainsi réduit le problème à une question de géométrie plane.

Le problème n'ayant qu'une seule solution, et la position de O étant indépendente de celles des autres points connus du plan, on peut faire passer par un point quelconque O du plan une seule droite DE dépendant de la manière indiquée des autres points connus de ce plan. Il faut donc que les différentes droites qui satisfont à ces autres conditions forment un faisceau. On déterminera le point fixe F de ce faisceau en construisant deux couples de points DE qui forment avec ABC des cycles par rapport aux trois coniques par 678.

On trouvera*) une telle couple DE en déterminant un point D ainsi que la droite e, lieu du cinquième point E du cycle, soit la même par rapport à deux des coniques: alors la droite, lieu du cinquième point E du cycle par rapport à la troisième conique, rencontrera la droite e au point E formant avec D la couple cherchée**).

---

*) Dans notre seconde solution nous indiquerons une construction plus simple de F. Néanmoins nous ne retenons pas cette première solution d'un problème connu et intéressant, parce qu'elle contient un moyen simple de déterminer les traces D et E lorsque la droite $DE(OF)$ est déjà construite.

**) Il faut éviter seulement les cas où cette droite coïncide avec e; si, par exemple, D coïncide avec C, le lieu du cinquième point E du cycle sera, pour toutes les coniques du plan, la droite AB.

Soit (Fig. 2) une des trois coniques, choisies entre celles qui passent par 678, celle qui est composée de 78 et de $6B$. Alors, le point B devant être (p. 57) sommet d'un quadrilatère inscrit à cette conique et

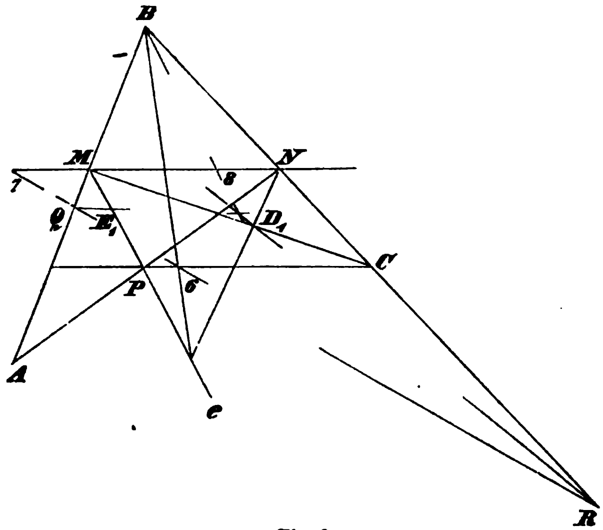


Fig. 2.

circonscrit à $CDEA$, il faut que les deux points D et E se trouvent sur des droites joignant les points d'intersection N et M de 78 avec BC et AB à un point indéterminé de $B6$.

Soit une autre des trois coniques celle qui est composée de 78 et de $6C$. Alors, le point C doit être sommet d'un quadrilatère inscrit à la conique et circonscrit à $DEAB$, et les points D et E se trouveront par conséquent sur les droites joignant C et le point d'intersection P de $6C$ et de AN à un point indéterminé de 78.

Les droites e formant dans ces deux cas des faisceaux aux centres M et P, la droite PM sera un lieu e par rapport à toutes ces deux coniques, et correspondra dans tous les deux cas au point d'intersection D_1 des droites correspondant à MP dans les faisceaux N et C.

Nous déterminerons ensuite la droite lieu du point E correspondant au point trouvé D_1 par rapport à une troisième conique, composée des droites 67 et $B8$. Cette conique ayant les mêmes propriétés que la première de celles que nous avons considérées, le lieu cherché de E sera la droite joignant Q au point d'intersection de $B8$ et de RD_1, Q et R étant les points d'intersection de 67 avec AB et BC. Le point E_1 où cette droite rencontre la droite MP, que nous venons de construire, sera le cinquième point d'un cycle $ABCD_1E_1$ par rapport à toutes les coniques passant par 678.

Nous avons ainsi construit une droite D_1E_1 passant par le point fixe F du faisceau des droites DE.

On en aura une autre D_2E_2, soit en faisant, dans les constructions précédentes, l'inversion de A et C ou de deux des points 6, 7, 8, soit en faisant un nouvel usage des mêmes trois coniques composées. La droite QP sera, par rapport aux deux coniques composées de 67 et $B8$, et de 78 et $6C$, le lieu du cinquième point correspondant à un point D_2 facile à construire, et, en déterminant le lieu du point E correspondant à ce point D_2 par rapport à notre première conique composée de 78 et $B6$, on aura une droite rencontrant QP au point E_2 correspondant à ce point D_2 par rapport à toutes les coniques qui passent par 678. On aura ainsi une nouvelle droite D_2E_2, qui déterminera le point F par son intersection avec D_1E_1.

La droite joignant le point donné O à ce point F sera la véritable position de la droite DE. Les points D et E de cette droite se déterminent au moyen des coniques composées de 78 et $B6$, et de 67 et $B8$. En effet, DE sera le segment intercepté sur la droite trouvée OF par deux angles dont l'un a pour sommet un point de $B6$ pendant que les jambes passent par N et M, l'autre a pour sommet un point de $B8$ pendant que les jambes passent par R et Q. La détermination de ce segment appartient aux élements de la géométrie projective. Comme on en connaît déjà une solution, qu'il faut rejeter, celle où les deux angles coïncident avec ABC, la construction du segment cherché DE sera linéaire: deux essais fourniront deux points d'une droite passant par E (ou D). Il sera le plus commode de placer, dans ces essais, le point D (ou E) aux points d'intersection de la droite OF avec $B6$ et $B8$.

Autre solution. On pourra déterminer le point fixe F du faisceau des droites DE d'une manière plus simple en cherchant les droites DE qui passent par C et A. Ce problème semble au premier abord être indéterminé; car on aura évidemment un cycle, soit par rapport aux trois coniques particulières dont nous avons fait usage dans la première solution, soit par rapport à une conique quelconque du plan, en plaçant le point D en C et le point E sur la droite AB. Il faut donc traiter le problème en problème-limite, et chercher un point D_3 infiniment voisin de C et un point E_3 infiniment voisin de la droite AB qui forment avec A, B, C un cycle par rapport à trois coniques passant par 6, 7, 8.

On peut se servir, à cet effet, des coniques composées de 78 et $6C$ et de 78 et $6B$, dont nous avons déjà fait usage, et d'une conique passant par 6, 7, 8, B et un point C' de BC infiniment voisin de C. En désignant par H' le point d'intersection, différent de B, de cette dernière conique avec AB, on voit que les points D_3 et E_3 doivent se trouver sur des droites joignant C' et H' à un point de la conique. En combinant cette détermination avec celle des couples de points D

et E qui appartiennent à la conique composée de 78 et $6C$, on trouve que la droite $H'P$ est le lieu des points E formant des cycles par rapport à toutes les deux coniques avec A, B, C et le point d'intersection D_3 de deux droites par C' et C, qui ne tendent pas à coïncider entre elles. Ce point est infiniment voisin de C. Le point E qui y correspond par rapport à la troisième conique se trouvera donc sur une droite infiniment voisine de AB, qui déterminera, par son intersection avec $H'P$, un point E_3 infiniment voisin de H'.

$ABCD_3E_3$ formeront un cycle par rapport à toutes les coniques par 6, 7, 8. En même temps que D_3 coïncide avec C, E_3 coïncidera avec le point d'intersection H de BA avec la conique $678BC$. La droite CH sera donc une position limite des droites DE, et passera, par conséquent, par le point cherché F. En déterminant la droite AF de la même manière, on aura la solution suivante du problème IV.:

Soient A, B, C, O les traces des côtés du quadrilatère 12341 *sur le plan* 678, *et F le point d'intersection des droites joignant C au point (différent de B) où la conique $BC678$ rencontre BA, et A au point (différent de B) où la conique $BA678$ rencontre BC: alors la droite OF sera la trace du plan joignant la droite* 14 *au point cherché* 5.

On pourra ensuite construire de la même manière les traces des plans joignant deux autres côtés du quadrilatère 1234 au point cherché, ou déterminer les points DE de la manière indiquée dans la solution précédente.

Note. La seconde construction de la trace OF — et des traces d'autres plans passant par le point cherché — se présente aussi à d'autres considérations que celles du cycle formé des traces des côtés d'un pentagone inscrit. A cet égard nous nous bornerons ici aux remarques suivantes. Si le point O coïncide avec le point F, le problème sera indéterminé, ce qui montre que les sept points donnés se trouvent alors sur une cubique gauche. F est donc la trace de la droite joignant les deux points $1'$ et $4'$ où les droites 21 et 34 rencontrent une cubique gauche assujétie à rencontrer ces deux droites en 2 et en 3 et en des points inconnus, et à passer encore par 6, 7, 8. Les deux coniques dont nous avons fait usage sont les projections de cette cubique gauche, les points 3 et 2 étant pris pour centres de projection.*)

Les problèmes précédents ont été résolus au moyen du théorème sur les traces sur un plan des côtés d'un polygone inscrit à un nombre impair de côtés; nous allons donner ensuite des applications du théorème, énoncé aussi dans le § IV. (p. 55), sur les traces des côtés des polygones à un nombre pair de côtés.

*) Notre seconde solution fait dépendre la détermination complète du point cherché de six applications du théorème de Pascal. M. Paul Serret, qui détermine la droite CF en tangente à la conique tangente aux droites 67, 78, 86,

V. *Soient donnés quatre points* 1, 2, 3, 4, *et une conique* $\varkappa$ *d'une surface du second ordre; construire le plan tangent en un point donné* 1.

Désignons par A, B, C, D les traces sur le plan de la conique $\varkappa$ des côtés du quadrilatère 12341. Il existe deux quadrilatères inscrits à $\varkappa$ et circonscrits à $ABCD$. La droite joignant les sommets de ces deux quadrilatères placés entre les côtés passant par A et D sera la trace du plan cherché. En effet, les génératrices par 1 passeront par ces deux sommets.

VI. *Soient donnés six points* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *et une géneratrice* a *d'une surface du second ordre; construire la section faite par le plan* 456.

Soit A la trace de la génératrice a sur ce plan, P un point de la génératrice, et B, C, D, E les traces des côtés du quadrilatère $P123P$. Alors le point A sera sommet d'un quadrilatère circonscrit à $BCDE$ et inscrit à la conique cherchée. Les côtés AB et AE de ce quadrilatère sont connus. On connaît donc les points d'intersection de CD avec tous les côtés du quadrilatère. Les points d'intersection de la conique cherchée avec CD appartiennent ainsi à une involution connue, ou bien, ils seront harmoniquement conjugués par rapport à deux points connus. La conique, devant passer encore par les points donnés 4, 5, 6 et A, sera donc entièrement déterminée.

On pourrait en déduire une nouvelle solution du problème III.

§ VII.

Inscription d'une suite de cônes ou de plans.

Nous parlerons encore ici d'une question semblable à celle de l'inscription de polygones. Dans le cas où un nombre impair de points forment un cycle nous avons vu qu'ils sont les sommets d'une suite circulaire de cônes *inscrite* à la surface, c'est à dire d'une suite circulaire où deux cônes consécutifs se rencontrent le long d'une conique de la surface. Dans ce cas particulier les suites de génératrices des cônes forment une infinité de polygones fermés et inscrits; mais la suite de cônes ne cesse pas d'être inscrite, si, seulement, chaque génératrice d'un cône rencontre sur la surface une génératrice du cône consécutif, quand même les polygones inscrits formés de ces génératrices consécutives peuvent être continués à l'infini sans se fermer.

BA, BC, fait usage six fois du théorème de Brianchon. (Géométrie de Direction p. 314.) On pourrait aussi déduire sa détermination de F de la considération de la cubique gauche dont nous venons de parler. — Nous renvoyons, du reste, à un article, rédigé aprés le présent, et inséré aux „Oversigter“ de l'Académie danoise des Sciences, 1880.

Nous allons donc résoudre la question suivante: *Inscrire à une surface du second ordre une suite circulaire de n cônes à sommets donnés.* *)

En prenant les *n* points donnés pour centres de projections successives on construira deux figures projectives sur la surface: une conique correspondant à elle même sera la conique commune aux cônes ayant pour sommets le premier et le dernier des centres de projection.

On voit ainsi que la question a en général deux solutions dans le cas où *n* est impair; si les points forment un cycle elle en aura une infinité double, à côté d'une seule solution singulière formée de la suite de cônes qui ont pour génératrices les côtés des polygones circonscrits au cycle et inscrits à la surface. Si *n* est pair la question n'aura en général aucune solution; si les sommets donnés forment un cycle incomplet elle aura une infinité de solutions, le plan de la conique d'intersection de deux cônes consécutifs étant un plan quelconque d'un faisceau — ou d'un de deux faisceaux si le cycle est singulier —; si les sommets donnés forment un cycle complet la question sera entièrement indéterminée.

On aura une question semblable en substituant à la suite de cônes une suite de plans. Il s'agit alors *d'inscrire à la surface une suite circulaire de n plans passant par n points donnés.* Les droites d'intersection de deux plans consécutifs sont alors des génératices, prises alternativement dans l'une et dans l'autre série. La question n'a donc aucun sens dans le cas où *n* est impair. Si *n* est pair, et si on demande, dans un intervalle donné de la suite de points, une arête appartenant à une série déterminée de génératrices, la question a en général deux solutions. Elle en aura une infinité dans le cas où les deux suites circulaires de plans qu'on obtiendrait en demandant, dans l'intervalle donné, une génératrice de l'autre série, sont les lieux des côtés d'une infinité simple de polygones inscrits et fermés, pivotant sur les points donnés. Si les *n* points forment un cycle complet on aura une infinité de solutions, soit que la génératrice de l'intervalle donné appartienne à l'une des séries, soit qu'elle appartienne à l'autre. Dans les cas d'une infinité de solutions les plans de la suite qui passent par un des points donnés auront pour enveloppe le cône circonscrit à la surface.

Copenhague, 20. novembre 1880.

---

*) Cette question, que m'avait proposé M. Juel, a été pour moi l'occasion de l'étude actuelle des figures projectives sur une surface du second ordre. Avant de publier le mémoire actuel je me suis assuré que M. Juel a été conduit à sa question d'une manière très-différente, qui ne l'a pas porté à s'occuper des autres matières dont je traite ici. Je ne préviens donc pas une publication de la part du jeune et habile savant.

Ueber endliche Formensysteme in der Theorie der rationalen Functionen.

Von

Julius König in Budapest.

Denkt man sich die Werthe von n unabhängigen rationalen Functionen der Variabeln $u_1, \cdots, u_n$

$$R_i = R_i(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

beliebig fixirt, so wird man für den Werth einer beliebigen rationalen Function derselben Variabeln durch Elimination der u aus diesen Gleichungen eine Relation erhalten, die man als algebraische Gleichung für diese Function auffassen kann, in welcher die Coefficienten rationale Functionen der Parameter R sind.

Es giebt aber auch eine einzige solche Gleichung, so dass alle rationalen Functionen von $u_1, u_2, \cdots, u_n$ rationale Functionen der Wurzeln dieser Gleichung werden. Damit kann man aber die von Herrn Kronecker*) für rationale Functionen der Wurzeln einer Gleichung gegebene Eintheilung in *Gattungen* auf rationale Functionen von n Variabeln übertragen. Man erhält dadurch eine *Eintheilung aller rationalen Functionen in eine endliche Anzahl von Classen, die sich auf ein beliebiges Fundamentalsystem n unabhängiger Functionen R_i in der Weise bezieht, dass alle Functionen derselben Classe durch irgend eine derselben und die R rational ausdrückbar sind;* damit sind in der mannigfaltigsten Weise endliche Formensysteme bestimmt, die noch n beliebige unabhängige Functionen enthalten. Von dieser Classeneintheilung gelangt man wieder zu den „Gattungen" zurück, wenn man für die R bestimmte specielle Functionen, die elementaren symmetrischen Functionen der u nimmt.

Diese Sätze bleiben auch dann noch gültig, wenn man sich auf den Complex aller rationalen Functionen beschränkt, die einer beliebig gegebenen Bedingung genügen. Nur wird dann, falls der so beschränkte Complex überhaupt nicht mehr n unabhängige Functionen enthält, die Zahl der R sich entsprechend verkleinern.

*) Monatsberichte d. Berl. Akad. 1879, pag. 211.

Alle Invarianten und Covarianten eines Systems algebraischer Formen bilden nun einen solchen Complex, und es ist damit also auch für diese die Existenz endlicher Formensysteme bewiesen, durch welche sich alles rational ausdrücken lässt. — Die Frage ihrer Darstellung, als ganzer Functionen eines endlichen Formensystems, wie sie Herr Gordan für binäre Formen gegeben, bleibt dabei allerdings noch unberührt.

1.

Einleitendes über die Gruppe eines Systems von Gleichungen.

Es seien

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
R_1 &= R_1(u_1, u_2, \cdots, u_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
R_n &= R_n(u_1, u_2, \cdots, u_n)
\end{aligned}
$$

n rationale Functionen der Grössen $u_1 \cdots u_n$, die von einander unabhängig, d. h. so beschaffen sind, dass ihre Functionaldeterminante nicht Null wird. Wir werden dann im Folgenden das System der Functionen R als *Fundamentalsystem* bezeichnen, auf welches die Darstellung einer beliebigen rationalen Function bezogen wird.

Wenn man in den Gleichungen (1) die zur Linken stehenden $R_1 \cdots R_n$ als völlig willkürliche, keinerlei Beschränkung unterworfene Constanten auffasst, so können diese Gleichungen zur Bestimmung von $u_1 \cdots u_n$ verwerthet werden, und man erhält dann im Allgemeinen N Werthesysteme der u, die den Gleichungen genügen. Diese:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\overset{0}{u}_1, \overset{0}{u}_2, \cdots, \overset{0}{u}_n,\\
&\overset{1}{u}_1, \overset{1}{u}_2, \cdots, \overset{1}{u}_n,\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

sind endliche Functionen der R, da eine unendliche Lösung specielle Relationen für die Grössen R voraussetzen würde, während diese ganz beliebige Grössen sind.

Die Auflösung des Systems (1) lässt sich bekanntlich auf die Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten zurückführen. Insbesondere kann man die einem u_i entsprechenden Werthe aus jener Gleichung erhalten, die aus (1) durch Elimination aller übrigen u entsteht. So entstehen die folgenden Gleichungen:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\Phi_1(u_1, R_1, R_2, \cdots, R_n) = 0,\\
&\Phi_2(u_2, R_1, R_2, \cdots, R_n) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Phi_n(u_n, R_1, R_2, \cdots, R_n) = 0.
\end{aligned}
$$

Dieses System von Gleichungen mit je einer Unbekannten genügt in der That für die Auflösung von (1). Denn es giebt alle Werthe, die in dem Schema (2) auftreten, und man hat nur noch durch eine endliche Anzahl von Versuchen die zusammengehörigen zu finden. Allerdings ist diese Darstellung noch eine unvollständige. Wenn nur die Gleichung in u_1 keine gleichen Wurzeln hat, kann man $u_2, \cdots$ durch u_1 schon rational ausdrücken; und die späteren Gleichungen sind also mit der ersten zugleich aufgelöst. Für unsere Zwecke wird aber die unmittelbare Betrachtung des Systems (3) viel einfacher, da hiedurch die für den Fall gleicher Wurzeln eintretende Complication vermieden wird.*)

Die Gleichungen (3) können nun im Allgemeinen noch reductibel sein. Wegen der Willkürlichkeit der R heisst dies, dass man aus Φ einen Factor niedrigeren Grades absondern kann, dessen Coefficienten wieder rational aus den R zusammengesetzt sind. Ist dies der Fall, so setzen wir jeden Factor für sich Null, und erhalten statt (3) die folgende Reihe irreductibler Gleichungen.

$$
\begin{array}{ll}
 & \Phi_1^{(1)} = 0, \quad \Phi_1^{(2)} = 0, \cdots \\
(4) & \Phi_2^{(1)} = 0, \quad \Phi_2^{(2)} = 0, \cdots \\
 & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}
$$

Irgend zwei dieser Gleichungen haben nun entweder alle oder gar keine Wurzeln gemeinsam, wie dies aus ihrer Irreductibilität in bekannter Weise geschlossen werden kann. Wenn nun k Gleichungen in (4.) dieselben Wurzeln geben, oder also dieselbe Gleichung k mal vorkommt, streichen wir sie bis auf einmal fort, und erhalten so Gleichungen, die noch jeden den ursprünglichen Gleichungen entsprechenden u-Werth aber jeden nur einmal geben. Wenn man nun noch die Unbekannte in allen diesen Gleichungen mit u (ohne Index) bezeichnet, und die Gleichungen wieder multiplicirt, erhält man:

$$(5) \qquad \Psi(u, R_1, R_2, \cdots, R_n) = 0,$$

eine im Allgemeinen reductible Gleichung, die aber nur verschiedene Wurzeln besitzt.

Ihre Auflösung ergiebt alle u-Werthe, die in dem unter (2) gegebenen Schema enthalten sind, also auch die Auflösung des ursprünglich gegebenen Systems.

Zu dieser Gleichung gehört nun bekanntlich eine Gruppe von aus ihren Wurzeln gebildeten Substitutionen in der Weise, dass jede rationale Function der Wurzeln, die sich für diese Substitutionen nicht

---

*) Gleiche Wurzeln können in den Gleichungen (3) nämlich auch dann vorkommen, wenn die Werthe der R völlig willkürlich bleiben.

ändert, rational durch die Grössen R_1, R_2, $\cdots$, R_n ausgedrückt werden kann und umgekehrt. Diese Gruppe charakterisirt aber nach dem Vorhergehenden nicht nur die Ψ-Gleichung, sondern auch das ursprünglich vorgelegte Gleichungssystem, und damit auch jenes Fundamentalsystem unabhängiger rationaler Functionen, aus dem dieses gebildet wurde.

Eine auf die Auflösung des Systems (1) bezügliche Bemerkung, die im Folgenden verwerthet wird, möge noch hier Platz finden. *Irgend ein Werthesystem* $u_1, \cdots, u_n$, *das die Gleichungen* (1) *befriedigt, besteht aus im Allgemeinen verschiedenen Werthen.* Denn führt man die Bedingung $u_i = u_k$ in die Gleichungen (1) ein, so bleiben nur $n-1$ Unbekannte, die man aus den n Gleichungen eliminiren kann, und das Eliminationsresultat zeigt, dass dann eine Relation zwischen den R statthaben müsste, während doch diese völlig willkürliche Grössen sind.

2.

Eintheilung der rationalen Functionen von n Variabeln in eine endliche Anzahl von Classen.

Will man nun mit Hülfe der Werthe der im Fundamentalsystem enthaltenen Functionen

$$R_i = R_i(u_1 \cdots u_n), \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

eine beliebige rationale Function der u

$$F = F(u_1 \cdots u_n)$$

ausdrücken, so hat man nur aus diesen $n+1$ Gleichungen die n Grössen $u_1 \cdots u_n$ zu eliminiren und erhält dadurch

$$\varphi(F, R_1, \cdots, R_n) = 0,$$

eine algebraische Gleichung für F, deren Coefficienten sich rational aus den R zusammensetzen.

Man sieht leicht, dass die vollständig gebildete Eliminationsgleichung vom Grade N sein muss.

Wir denken uns zuerst die R durch ein willkürlich gewähltes Werthesystem:

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

bestimmt; dann entsprechen aber den fixirten Werthen der R nicht nur dieses, sondern N Werthesysteme, und die Gleichung muss alle entsprechenden F-Werthe liefern.

Eine Wurzel der Gleichung, die dem fixirten Werthesystem entspricht, sei:

$$F(u_1, u_2, \cdots, u_n).$$

Nun sind aber die $u_1, u_2, \cdots, u_n$ Wurzeln der im vorigen Art. unter (5) aufgestellten Gleichung $\Psi(u) = 0$, und zwar nach der Bemerkung am Schlusse dieses Art. mit im Allgemeinen von einander verschiedenen Werthen. Man kann also F als eine rationale Function der Wurzeln dieser Gleichung auffassen, als solcher entspricht ihr eine Gruppe von Substitutionen, die in der Gruppe der Ψ-Gleichung enthalten ist, und von denen jede einzelne die algebraische Form von F ungeändert lässt. Diese seien

$$1,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots$$

Aus diesen möge durch Multiplication mit gewissen Substitutionen

$$1,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ ,\cdots$$

die ganze, der Ψ-Gleichung entsprechende Gruppe hervorgehn. Dann haben im Allgemeinen die aus F durch die Substitutionen T hervorgehenden Werthe verschiedene algebraische Form, können aber trotzdem gleich werden, ohne dass diesem Falle eine Relation zwischen den R entsprechen müsste. Solche Werthe, die bei willkürlichen R mit F gleich sind, mögen die k Substitutionen

$$1,\ T_a,\ T_b,\ \cdots$$

ergeben.

Dann bilden aber

$$\begin{array}{llll} 1, & S_1, & S_2, & \cdots \\ T_a, & T_aS_1, & T_aS_2, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

abermals eine Gruppe, die man als *numerische Gruppe* der Function F bezeichnen kann. Ihre Substitutionen ändern wohl die algebraische Form, nicht aber den Werth der F, wenn man berücksichtigt, dass $u_1, u_2, \cdots, u_n$ bestimmte Wurzeln der Gleichung $\Psi(u) = 0$ sind.

*Zwei Functionen F_1 und F_2 sollen nun in dieselbe Classe gehören, wenn sie dieselbe numerische Gruppe besitzen.**) Die so entstehenden Classen sind aber nur in endlicher Anzahl vorhanden; denn die Anzahl der in der Gruppe der Gleichung $\Psi(u) = 0$ enthaltenen Gruppen ist endlich.

Zwei in dieselbe Classe gehörige Functionen sind rational durch einander ausdrückbar, und zwar in der Weise, dass nur noch $R_1 \cdots R_n$ in den Ausdruck eintreten. Dies ist für den Fall, dass die „algebraische“ und die „numerische“ Gruppe einer Function übereinstimmen, unmittelbar aus dem Lagrange'schen Satze über ähnliche Functionen ersichtlich; für den allgemeinen Fall aber aus jener Ver-

*) Weiteres über diese Eintheilung, insbesondere ihren Zusammenhang mit den Kronecker'schen Gattungen siehe am Schluss der folgenden Note.

allgemeinerung dieses Satzes, die Camille Jordan (Traité des substitutions, pag. 262) angegeben hat.

Unsere Betrachtungen gingen aber von einem ganz beliebigen Werthesysteme $u_1 \cdots u_n$ aus und gelten daher für eine beliebige rationale Function von n Variabeln. In dieser Form ausgesprochen, ist das erhaltene Resultat folgendes:

Alle rationalen Functionen von $u_1, u_2, \cdots, u_n$ lassen sich in Bezug auf das Fundamentalsystem von einander unabhängiger Functionen

$$R_i = R_i(u_1, u_2, \cdots, u_n), \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

in eine endliche Anzahl von Classen eintheilen, so dass jede Function wieder rational darstellbar ist durch irgend eine in dieselbe Classe gehörige und die Functionen des Fundamentalsystems.

Ist die Anzahl der Classen m, und wählt man aus jeder derselben eine aus, so erhält man als Corollar dieses Satzes noch den folgenden:

Jede rationale Function von n Variabeln ist als rationale Function einer endlichen Anzahl von solchen darstellbar.

In dieses System von Functionen, durch die jede rationale Function wieder rational ausgedrückt wird, müssen übrigens keineswegs Repräsentanten sämmtlicher Classen aufgenommen werden, wie dies unmittelbar ersichtlich ist, wenn man die auf ähnliche Functionen bezüglichen Betrachtungen weiter fortführt.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass eine solche Darstellung

$$F_2 = \text{Rat. Function } (F_1, R_1, \cdots, R_n)$$

— wie immer in solchen Fällen — für gewisse Werthe ihre Gültigkeit verlieren kann. Denkt man sich $u_1 \cdots u_n$ als Coordinaten einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, so sind diese Ausnahmewerthe im Allgemeinen durch eine $n-1$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit charakterisirt. Es sind dies natürlicher Weise dieselben, für die der Ausdruck von F_2, wenn man für $F_1, R_1, \cdots, R_n$ ihre Functionalwerthe in $u_1 \cdots u_n$ einsetzt, analytisch unbestimmt wird.

3.

Endliche Classenzahl für einen speciellen Functionencomplex.

Statt des aus n Functionen bestehenden Fundamentalsystems nehmen wir im Folgenden ein nur aus k unabhängigen Functionen bestehendes:

$$R_i = R_i(u_1, \cdots u_n), \quad (i = 1, 2, \cdots, k),$$

und beschränken dementsprechend die Untersuchung auf alle jene rationale Functionen der u, die schon mit $R_1, \cdots, R_k$ durch eine von den u unabhängige Relation verbunden sind. Oder — was dasselbe ist — wir betrachten nur jene rationale Functionen, die als Wurzeln einer algebraischen Gleichung darstellbar sind, deren Coefficienten rational aus $R_1 \cdots R_k$ zusammengesetzt sind.

Der Kürze wegen will ich den Inbegriff der so definirten Functionen als *rationalen Functionencomplex k-ter Dimension* bezeichnen. Ein solcher wird also dadurch charakterisirt, dass zwischen $k+1$ *beliebig* gewählten Functionen desselben eine von den u unabhängige Relation stattfindet, ohne dass dies schon zwischen k *beliebig* gewählten Functionen der Fall wäre. Man sieht ferner, dass jeder solche Complex durch k in ihm enthaltene unabhängige Functionen vollständig bestimmt wird, da man mit Hülfe derselben für jede weitere rationale Function entscheiden kann, ob sie dem Complex angehört oder nicht. Jedes solche System von k unabhängigen Functionen kann zum Fundamentalsystem genommen werden.

Für den Fall von n Variabeln giebt es endlich nur einen Complex $n$ter Dimension, da dieser mit dem Inbegriff aller rationalen Functionen von n Variabeln übereinstimmt.

Wir ergänzen nun, um die Betrachtungen des vorigen Artikels anwenden zu können, $R_1, \cdots, R_k$ durch weitere $n-k$ unabhängige Functionen, die dann natürlich nicht dem Complex angehören können, zu einem System von n Functionen. Dies kann am einfachsten dadurch geschehen, dass, wenn sich die R-Gleichungen nach irgend welchen k Variabeln auflösen lassen, man weiter $n-k$ unabhängige lineare Functionen der übrigen Variabeln auswählt. Diese seien:

$$P_i = P_i(u_{k+1}, \cdots, u_n), \quad (i = 1, 2, \cdots, n-k),$$

Auf dieses System von n-Functionen gründen wir wieder eine Classeneintheilung sämmtlicher Functionen.

Gehören zwei Functionen F_1 und F_2 in dieselbe Classe, so kann man F_2 durch $F_1, R_1, \cdots, R_k, P_1, \cdots, P_{n-k}$ rational ausdrücken.

Wenn aber F_1 und F_2 dem durch $R_1, \cdots, R_k$ bestimmten Functionencomplex angehören, so kommen in dem Ausdrucke, der die eine Function als rationale Function der anderen liefert, die P gar nicht vor.

Man hat dann für F_1 und F_2 zwei Gleichungen der Form:

$$\psi_1(F_1, R_1, \cdots, R_k) = 0,$$
$$\psi_2(F_2, R_1, \cdots, R_k) = 0;$$

während man jedenfalls noch für F_2 den Ausdruck erhält:

$$F_2 = r(F_1, R_1, \cdots, R_k, P_1, \cdots, P_{n-k}).$$

Wenn dieser Ausdruck für F_2 die P wirklich enthielte, so könnte man, nachdem $R_1, \cdots, R_k$ beliebig gewählte Werthe erhalten haben, die P noch immer so wählen, dass F_2 einen beliebigen Werth annehme; die Gleichung $\psi_2 = 0$ zeigt aber, dass durch $R_1, \cdots, R_k$ auch schon der Werth von F_2 fixirt ist. Es kann demnach r die P

gar nicht enthalten, und der Zusammenhang zwischen F_1 und F_2 muss durch eine Relation von der Form:

$$F_2 = r(F_1, R, \cdots, R_k)$$

gegeben sein.

Die Classeneintheilung sämmtlicher rationalen Functionen in Bezug auf das Fundamentalsystem $R_1, \cdots, R_k, P_1, \cdots, P_{n-k}$ ergiebt selbstverständlich auch eine Eintheilung für jene rationalen Functionen, die dem durch $R_1, \cdots, R_k$ definirten Complex angehören. Und zwar sieht man unmittelbar ein, dass die Eintheilung dieser letzteren Functionen von der Wahl der P völlig unabhängig ist; denn es fragt sich hiebei nur, ob man je einen irreductibeln Theiler der Gleichungen:

$$\psi_1(F_1, R_1, \cdots, R_k) = 0,$$
$$\psi_2(F_2, R_1, \cdots, R_k) = 0$$

durch Transformationen von der Form:

$$F_2 = r_1(F_1, R_1, \cdots, R_k),$$
$$F_1 = r_2(F_2, R_1, \cdots, R_k)$$

in den andern überführen kann; und bei dieser Fragestellung kommen die P überhaupt nicht vor.

Wir haben aber in dieser Weise die früher für sämmtliche rationale Functionen erhaltenen Resultate auch auf den Fall übertragen, wo die Untersuchung auf die einem bestimmten Complexe angehörigen Functionen beschränkt wird. Es gelten demnach für einen solchen die folgenden Sätze:

Alle Functionen, die in einem bestimmten, durch das aus k unabhängigen Functionen bestehende Fundamentalsystem

$$R_i = R_i(u_1, \cdots, u_n), \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

definirten rationalen Functionencomplex $k$ter Dimension enthalten sind, lassen sich in eine endliche Anzahl von Classen eintheilen, so dass jede Function wieder rational darstellbar ist durch irgend eine in dieselbe Classe gehörige und die Functionen $R_1, \cdots, R_k$.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist wieder der folgende:

Alle in einem rationalen Complex enthaltenen Functionen lassen sich durch eine passend gewählte endliche Anzahl derselben rational ausdrücken.

4.

Anwendung auf die Invariantentheorie.

Es seien nun $u_1, \cdots, u_n$ sämmtliche Coefficienten und Variabeln eines Systems beliebiger algebraischer Formen. Die Anzahl der *algebraisch* unabhängigen simultanen Invarianten (und Covarianten) der

Form kann dann natürlich nicht grösser als n sein. Sie ist aber bekanntlich kleiner. Diese Zahl sei k, und demnach $J_1, J_2, \cdots, J_k$ eine Reihe solcher Invarianten und Covarianten, zwischen denen keine Relation besteht; während jede weitere solche Form mit $J_1, \cdots, J_k$ durch eine Gleichung verknüpft ist, die die Coefficienten und Variabeln der vorgelegten Formen nicht weiter enthält.

Es sind also — nach der im Vorhergehenden eingeführten Ausdrucksweise — sämmtliche Invarianten und Covarianten der vorgelegten Formen in dem durch $J_1, \cdots, J_k$ definirten Functionencomplex enthalten.

Theilen wir die Functionen dieses Complexes nach den entwickelten Principien in eine endliche Anzahl von Classen ein. Es kann nun vorkommen, dass einzelne Classen gar keine invariante Form enthalten; dann kommen die betreffenden Classen gar nicht weiter in Betracht. Aus jeder Classe, die invariante Formen enthält, heben wir eine solche heraus, und dann ist jede weitere durch diese eine und $J_1, J_2, \cdots, J_k$ rational ausdrückbar.

Sei nun die Anzahl der Classen, die Invarianten oder Covarianten enthalten, m und $i_1, i_2, \cdots, i_m$ je eine invariante Form aus jeder dieser Classen, so ist *jede Invariante und Covariante der vorgelegten Formen durch das endliche System invarianter Formen:*

$$J_1, J_2, \cdots, J_k, \quad i_1, i_2, \cdots, i_m$$

rational ausdrückbar, wo übrigens noch einzelne i für den in dieser Weise ausgesprochenen Satz überflüssig sein können.

Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, wird bei dieser Herleitung des endlichen Formensystems die Invarianteneigenschaft gar nicht benutzt, und die benutzte Schlussweise bleibt richtig, wenn wir überall, wo von rationalen Functionen, welche die Invarianteneigenschaft besitzen einfach setzen: „Rationale Functionen, welche einer beliebig gegebenen Bedingung genügen."

So können wir schliesslich folgenden Satz aussprechen, der gewissermassen den allgemeinsten Ausdruck der in dieser Note für die Theorie der rationalen Functionen gewonnenen Resultate liefert:

Alle rationalen Functionen beliebiger Variabeln, die einer irgendwie gegebenen Bedingung genügen, sind durch eine passend gewählte endliche Anzahl solcher Functionen rational ausdrückbar.

Zur Theorie der Resolventen.

Von

JULIUS KÖNIG in Budapest.

Sei $f(x) = 0$ eine Gleichung n^{ten} Grades, deren Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämmtlich als ungleich vorausgesetzt werden, G die der Gleichung zugeordnete Gruppe und r die Ordnung dieser Gruppe. Versteht man nun unter F_1 irgend eine rationale Function der Wurzeln, so giebt es eine in G enthaltene Gruppe G' von r' Substitutionen, die die algebraische Form von F nicht ändern. Dann nimmt F im Ganzen $\frac{r}{r'} = k$ der algebraischen Form nach verschiedene Werthe

$$F_1, F_2, \ldots, F_k$$

an, und die Gleichung

$$(1) \qquad (z - F_1)(z - F_2) \ldots (z - F_k) = 0$$

hat durch die Coefficienten der ursprünglichen Gleichung rational ausdrückbare Coefficienten, die also mit Hülfe eines bestimmten Algorithmus berechnet werden können. Diese F-Gleichung ist bekanntlich eine Resolvente der ursprünglichen Gleichung; denn wenn man eine Wurzel derselben F_1 kennt, reducirt sich die Gruppe der ursprünglichen Gleichung von G auf G'.

Wenn nun die algebraisch verschiedenen Werthe $F_1, \ldots, F_k$ auch numerisch verschieden sind, ist diese Gleichung irreductibel.

Man beweist dies sehr einfach, wenn man von dem in meiner Abhandlung (Annalen XIV, pag. 222 und 224) bewiesenen Princip ausgeht, dass die x-Substitutionen der Gruppe G eine isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}$ von Substitutionen unter $F_1 \ldots F_k$ erzeugt, und dass diese Gruppe $\mathfrak{G}$ die Gruppe der F-Gleichung ist. Denn da $F_1 \ldots F_k$ eben alle Werthe sind, die durch die Substitutionen von G aus F_1 entstehen, giebt es unter den Substitutionen von G wenigstens eine, die F_1 in ein beliebiges F_2 überführt. Die Gruppe der F-Gleichung ist also transitiv, und die Gleichung selbst irreductibel. Man kann dieses Resultat auch so aussprechen, dass *die Gleichung für F nur dann reductibel wird, wenn sie gleiche Wurzeln hat.*

In letzterem Falle *müssen also algebraisch verschiedene Werthe* von F, d. h. solche, die nicht für jeden Werth der x übereinstimmen, in Folge der aus der ursprünglichen Gleichung folgenden Werthe für $x_1 \dots x_n$ *numerisch gleich werden.*

Unter dieser Voraussetzung sollen nun die Eigenschaften der Resolvente näher untersucht werden. Seien zwei irreductible Factoren der F-Gleichung

$$(z - F_1)(z - F_2) \dots (z - F_k)$$

und

$$(z - F_1')(z - F_2') \dots (z - F_{k'}'),$$

so sieht man unmittelbar, dass diese entweder durchweg gleiche oder durchweg verschiedene Wurzeln geben, da ja sonst die gemeinschaftlichen Wurzeln einer durch rationale Operationen zu ermittelnden Gleichung genügen würden, und diese als Factor in den als irreductibel vorausgesetzten Factoren enthalten sein müsste, was nicht möglich ist.

Die beiden Factoren müssen dieselben Wurzeln geben.

Der erste dieser Factoren kann nämlich der Annahme nach auch in der Form

$$z^{k'} + A_1 z^{k'-1} + \dots + A_{k'}$$

geschrieben werden, wo $A_1, \dots, A_{k'}$ rational ausdrückbar sind, also sich durch keine Substitution ändern. Wendet man nun jene Substitution an, die z. B. F_1 in F_1' überführt, so muss man einerseits einen Factor erhalten, der gleich Null gesetzt, die Wurzel F_1' liefert, während andrerseits der ganze Factor sich nicht ändern kann, wie man aus dessen zuletzt hingeschriebener Form sieht, weil $A_1 \dots A_{k'}$ sich für gar keine Substitution ändern. Die beliebige Wurzel F_1' muss also unter $F_1 \dots F_k$ enthalten sein, d. h. ein einziger irreductibler Factor liefert schon sämmtliche verschiedene Werthe von F. Da aber dann jeder irreductible Factor dieselben Wurzeln liefert, kommt jeder numerisch verschiedene Werth gleich oft vor, und es ist also, wenn man $\frac{k}{k'} = \lambda$ setzt, *das Polynom der F-Gleichung eine vollständige λ^{te} Potenz, das zu dieser Potenz erhobene Polynom selbst aber irreductibel.*

Wären wir bei der Bildung der Resolvente nicht von der „algebraischen“, sondern sogleich von der „numerischen“ Gruppe für F ausgegangen, so erhielten wir sogleich nur den einen irreductibeln Factor und nicht die λ^{te} Potenz als solche. Es sollten hier aber gerade für den Fall die Verhältnisse entwickelt werden, dass man wohl die Gruppe kennt, für welche F seine algebraische Form nicht ändert, nicht aber diejenige, für welche der numerische Werth überhaupt sich nicht ändert. Denn wenn irgend eine Gleichung vorgelegt ist, kennt man wohl ihre Gruppe, nicht aber die numerischen Werthe der Wurzeln, wird also wohl die algebraische, nicht aber die numerische Gruppe für F bestimmen können.

Ob diese numerische Gruppe überhaupt von der algebraischen verschieden, also dann auch diese als Untergruppe enthält, kann erst nach Bildung der Resolvente entschieden werden.

Wenn eine Verschiedenheit der algebraischen und numerischen Gruppe für ein bestimmtes F und in Bezug auf eine bestimmte Gleichung überhaupt eintritt, muss diese Function sowie die Gruppe der F-Substitutionen specielle Eigenschaften besitzen, die wir aus der Betrachtung der algebraisch verschiedenen F-Werthe herleiten. Seien diese

$$
\begin{array}{ccc}
F_1, & F_2, \cdots, & F_{k'} \\
F_1', & F_2', \cdots, & F_{k'}', \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
F_1^{(\lambda-1)}, & F_2^{(\lambda-1)}, \cdots, & F_{k'}^{(\lambda-1)}
\end{array}
\tag{2}
$$

und zwar so geschrieben, dass die in einer Zeile stehenden auch numerisch verschieden sind, während je eine Colonne die algebraisch verschiedenen, aber numerisch gleichen Werthe enthält.

Dann ist z. B.

$$F_1 - F_1'$$

gleich Null, also rational ausdrückbar, und demgemäss kann die Gruppe der vorgelegten Gleichung nur solche Snbstitutionen enthalten, welche den Werth dieser Function ungeändert lassen. Da die Differenz zweier in verschiedenen Colonnen stehenden F von Null verschieden ist, *muss jede Substitution der ursprünglich vorgelegten Gleichung entweder nur die in je einer Colonne stehenden F untereinander, oder aber diese Colonnen als Ganzes mit einander vertauschen; d. h. die Gruppe der F-Substitutionen kann nicht primitiv sein.*

Auf dieser Grundlage können wir nun *eine Function Φ bilden, die genau dieselben Werthe annimmt wie F, aber mit dem Unterschiede, dass die Φ auch dann algebraisch gleich werden, wenn die F nur numerisch gleich sind.* Es ist dies

$$\Phi_1 = \frac{1}{\lambda}\left(F_1 + F_1' + \cdots + F_1^{(\lambda-1)}\right)$$

mit den ferneren Werthen:

$$\Phi_2 = \frac{1}{\lambda}\left(F_2 + F_2' + \cdots + F_2^{(\lambda-1)}\right),$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\Phi_{k'} = \frac{1}{\lambda}\left(F_{k'} + F_{k'}' + \cdots + F_{k'}^{(\lambda-1)}\right).$$

Man sieht unmittelbar, dass $\Phi_1, \Phi_2, \cdots$ mit $F_1, F_2, \cdots$ übereinstimmt, und zwar gehen die Φ genau durch dieselben Substitutionen in einander über, wie die numerischen Werthe der F.

Herr Kronecker hat in Bezug auf die rationalen Functionen der Wurzeln einer Gleichung die folgende Definition für ihre Eintheilung in Gattungen aufgestellt:

Zwei Functionen gehören zu derselben Gattung, wenn jede von ihnen rational durch die andere darstellbar ist.

Man kann dafür auch die folgende substituiren, aus welcher unter anderem auch die endliche Anzahl der Gattungen sogleich hervorgeht:

Alle Functionen, welche dieselbe numerische Gruppe besitzen, bilden eine Gattung.

Wenn φ und ψ rational durch einander ausdrückbar sind, müssen sie dieselbe numerische Gruppe besitzen; denn aus $\varphi = R(\psi)$ folgt, dass eine Substitution, die ψ nicht verändert, auch φ ungeändert lässt, und da dies auch umgekehrt der Fall ist, folgt hieraus die Identität der Gruppen.

Um aber die Aequivalenz beider Definitionen zu beweisen, müssen wir noch die Richtigkeit des folgenden Satzes nachweisen:

Wenn φ und ψ dieselbe numerische Gruppe besitzen, sind sie rational durch einander ausdrückbar. Adjungirt man φ der ursprünglichen Gleichung, so besteht ihre Gruppe nur mehr aus den Substitutionen, die den Werth von φ ungeändert lassen. Dann ändert sich aber auch ψ nicht mehr für die Substitutionen der Gruppe, ist also rational ausdrückbar. — Ebenso wird φ durch die Adjunction von ψ rational. (Camille Jordan, Traité des substitutions pag. 262.)

Man sieht hieraus, dass die Classeneintheilung in Art. 2. des vorhergehenden Aufsatzes auch folgendermassen formulirt werden kann:

Zwei rationale Functionen der n Variabeln $u_1 \cdots u_n$ gehören in Bezug auf das Fundamentalsystem $R_1 \cdots R_n$ zur selben Classe, wenn sie als Functionen von n bestimmten Wurzeln der dort zu Grunde gelegten Gleichung ((5) *des Art.* 1.) $\Psi(u_1 R_1 \cdots R_n) = 0$ *zur selben Gattung gehören.*

Daher sind nicht nur alle Functionen, die zur selben Classe gehören, mit Hülfe der R, rational durch einander ausdrückbar, sondern es gehören auch zwei Functionen, für die das der Fall ist, immer derselben Classe an.

Bei dieser Bestimmung der Classen werden sie, sobald man für $R_1 \cdots R_n$ die elementaren symmetrischen Functionen der u setzt, mit der Eintheilung in Gattungen in Bezug auf die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades identisch.

Budapest, November 1880.

Ueber einen besonderen Fall des eindeutigen Entsprechens der Punkte zweier Flächen.

Von

H. Krey in Freiburg i/Br.

Durch vier doppelt-quaternäre homogene Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4;\ \ y_1, y_2, y_3, y_4) = 0, \\ f_2(\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ) = 0, \\ f_3(\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ) = 0, \\ f_4(\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ) = 0 \end{cases}$$

ist ein Flächenpaar definirt, dessen Gleichungen

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad \Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

erhalten werden, wenn man y_1, y_2, y_3, y_4, bez. x_1, x_2, x_3, x_4 aus (1) eliminirt. Zugleich kann man die y als rationale Functionen der x, und umgekehrt letztere rational durch die y darstellen; die Punkte der beiden Flächen F, Φ sind also eindeutig auf einander bezogen.

Sei f_i in den x vom Grade m_i, in den y vom Grade n_i, dann sind F, Φ bez. von der Ordnung

$$(2)\qquad \begin{aligned} n &= m_1 n_2 n_3 n_4 + m_2 n_1 n_3 n_4 + m_3 n_1 n_2 n_4 + m_4 n_1 n_2 n_3 \\ \nu &= n_1 m_2 m_3 m_4 + n_2 m_1 m_3 m_4 + n_3 m_1 m_2 m_4 + n_4 m_1 m_2 m_3. \end{aligned}$$

Aus der Verschiedenheit dieser Ordnungszahlen bei Gleichheit des Geschlechts geht hervor, dass F, Φ im Allgemeinen Singularitäten haben. Dasselbe folgt auch schon aus dem Umstande, dass F, Φ Resultanten sind, dass daher, wenn z. B.

$$(3)\qquad f_i = A_i y_1^{n_i} + B_i y_1^{n_i - 1} y_2 + C_i y_1^{n_i - 1} y_3 + \cdots$$

gesetzt und F als ganze Function der $A_i, B_i, C_i, \cdots$ dargestellt wird, das gleichzeitige Verschwinden sämmtlicher partiellen Differentialquotienten,

$$\frac{\partial F}{\partial A_i}, \quad \frac{\partial F}{\partial B_i}, \quad \frac{\partial F}{\partial C_i} \cdots$$

mithin auch das gleichzeitige Verschwinden sämmtlicher $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ *nur zwei* unabhängigen Bedingungen äquivalent ist.

Im Folgenden ist, unter der Voraussetzung allgemeiner Beschaffenheit der Gleichungen (1), die Bestimmung der Singularitätenzahlen für die Fläche F ausgeführt; und zwar handelt es sich um folgende drei Zahlen: *Ordnung b der Doppelcurve, Zahl j ihrer points-pinces und Zahl t ihrer dreifachen Punkte.* Aus diesen ergeben sich die übrigen mit Hülfe allgemeingültiger numerischer Relationen.

Als Hülfsmittel zu dieser Bestimmung dient ausser gewissen auf Paare sich schneidender Strahlen bezüglichen Correspondenzformeln von Schubert ein Satz, welcher die Zahl der Lösungen von sechs doppelt quaternären Gleichungen angiebt. Sind die Gleichungen von den Graden $m_1, \cdots, m_6$ in den x, von den Graden $n_1, \cdots, n_6$ in den y, so ist die fragliche Zahl gleich dem aus 20 Gliedern bestehenden Ausdruck

$$m_1 m_2 m_3 n_4 n_5 n_6 + m_1 m_2 m_4 n_3 n_5 n_6 + \cdots + m_4 m_5 m_6 n_1 n_2 n_3.$$

Der Beweis hierfür ist ganz analog demjenigen für die Zahl der Lösungen von vier doppelt-ternären Gleichungen. — Obiger Ausdruck lässt sich in nachstehender, für das Folgende bequemen Form schreiben:

$$(4) \qquad m_5 m_6 \cdot n + n_5 n_6 \cdot \nu + (m_5 n_6 + m_6 n_5) \cdot e,$$

wo

$$e = m_1 m_2 n_3 n_4 + m_1 m_3 n_2 n_4 + m_1 m_4 n_2 n_3 + m_2 m_3 n_1 n_4 + m_2 m_4 n_1 n_3 + m_3 m_4 n_1 n_2$$

die Ordnung der Curve ist, welche ein Punkt auf F oder Φ beschreibt, wenn sich sein entsprechender auf einer ebenen Curve der Fläche Φ oder F bewegt; wie man sofort findet, wenn man in (1) z. B. $x_4 = 0$, $y_4 = 0$ setzt, und die Zahl der Lösungen der dann entstehenden Gleichungen sucht.

Zur Abkürzung wird im Folgenden gesetzt werden:

$$\sum m_i = M; \qquad \sum n_i = N;$$
$$\sum_{i<k} m_i m_k = M_2; \qquad \sum_{i<k} n_i n_k = N_2.$$

Sollen in den Gleichungen (1) die y als die laufenden Coordinaten, die x dagegen als Parameter in den Flächengleichungen angesehen werden, so kann man dieses dadurch andeuten, dass man nur die y, oder einfacher statt der vier Argumente nur eines schreibt.

Die Coordinaten der Schnittpunkte der drei Flächen

$$f_1(y) = 0, \quad f_2(y) = 0, \quad f_3(y) = 0$$

seien $y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots, y^{(n_1 n_2 n_3)}$, so dass man F definiren kann wie folgt:

$$(5) \qquad F = f_4(y^{(1)}) f_4(y^{(2)}) \cdots f_4(y^{(n_1 n_2 n_3)}),$$

während F andererseits eine ganze Function der $A_i, B_i, C_i, \cdots$ ist.

Aus F bilde man F' dadurch, dass man irgend einen Coefficienten der Gleichung $f_4 = 0$ variirt, z. B. A_4 durch $A_4 + \varepsilon$ ersetzt, wodurch auch die rechte Seite von (5) sich ändert; man findet so:

$$\left[\frac{F'}{\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \frac{\partial F}{\partial A_4} = y_1^{(1)^{n_4}} \cdot f_4(y^{(2)})\, f_4(y^{(3)}) \cdots f_4(y^{(n_1 n_2 n_3)}).$$

Es verschwindet also $\frac{\partial F}{\partial A_4}$ n_4-fach für die Curve e^{ter} Ordnung auf F, welche der ebenen Curve $y_1 = 0$ auf $\Phi = 0$ entspricht; ferner für einen gewissen Ort Λ der Ordnung λ auf F, dessen x so beschaffen sind, dass die drei Flächen $f_1(y) = 0$, $f_2(y) = 0$, $f_3(y) = 0$ in unendlicher Nähe ihres Schnittpunktes $y^{(1)}$, durch welchen auch die Fläche $f_4(y) = 0$ geht, noch einen Schnittpunkt haben; endlich für diejenigen x auf F, deren zugehörige Flächen $f_1(y) = 0$, $f_2(y) = 0$, $f_3(y) = 0$, $f_4(y) = 0$ *zwei* Punkte $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ gemeinschaftlich haben, d. h. für die Doppelcurve von F. Man hat daher die Gleichung

$$n(n - m_4) = e \cdot n_4 + \lambda + 2b, \tag{6}$$

wo λ noch zu bestimmen bleibt.

Einer ebenen Curve $a_x = 0$ auf $F = 0$ entspricht auf Φ eine Curve der Ordnung e. Durch jeden Punkt dieser letzteren gehen drei Flächen $f_1(y) = 0$, $f_2(y) = 0$, $f_3(y) = 0$; die Schnittlinie der Tangentialebenen der Flächen $f_i(y) = 0$ und $f_k(y) = 0$ für einen solchen Punkt möge g_{ik} genannt werden. Man erhält so einfach unendlich viele Strahlenpaare (Schneidepaare) mit Scheitel auf der genannten Raumcurve; fallen die beiden Strahlen g_{12} und g_{13} zusammen, so schneiden sich die drei Tangentialebenen in *einer* Geraden; die drei Flächen f_1, f_2, f_3 haben dann in unendlicher Nähe von $y^{(1)}$ noch einen zweiten Schnittpunkt, der jedoch im Allgemeinen nicht genau auf $f_4(y) = 0$, also auch nicht auf Φ liegt. Demnach ist λ gleich der Zahl der Coincidenzen von g_{12} mit g_{13}, welche nach der Schubert'schen Formel*)

$$\varepsilon = g + h - c - \mu \tag{7}$$

zu bestimmen ist. Die Bedeutung der rechts stehenden Symbole ist folgende: g, h sind die Grade der Oerter der Strahlen g_{12}, bez. g_{13}; c ist die Ordnung des Ortes der Scheitel der Strahlenpaare, also $= e$; μ ist die Classe des Ortes der Ebenen, in welchen die Strahlenpaare liegen, also der Tangentialebenen von $f_1(y) = 0$.

Hiernach ist μ die Zahl der Lösungen von

$$a_x = 0, \quad \sum p_i \frac{\partial f_1}{\partial y_i} = 0, \quad f_1 = 0, \cdots, f_4 = 0,$$

*) Man vergl. Math. Ann. XI, pag. 349, wo die Bedeutung dieser Formel in Worten ausgedrückt ist.

wo die p_i die Coordinaten eines beliebigen Punktes sind. g ist die Zahl der Lösungen von

$$a_x = 0, \quad \sum \pm \alpha_1 \alpha_2' \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \frac{\partial f_2}{\partial y_4} = 0$$

in Verbindung mit den Gleichungen (1), die nicht immer ausdrücklich hinzugefügt werden sollen.

Nach (4) *hat man also*

$$\mu = (n_1 - 1)\, e + m_1 \cdot n,$$
$$g = (n_1 + n_2 - 2)\, e + (m_1 + m_2)\, n,$$
$$h = (n_1 + n_3 - 2)\, e + (m_1 + m_3)\, n.$$

Sodann giebt die Gleichung (7)

(8) $$\lambda = (n_1 + n_2 + n_3 - 4)\, e + (m_1 + m_2 + m_3)\, n$$

und aus (6) *erhält man für die Ordnung der Doppelcurve von F*

(9) $$b = \frac{1}{2}\,[n^2 - Mn - (N - 4)\, e].$$

Jeder Punkt der Fläche Φ ist Scheitel eines Schneidepaares g_{12}, g_{13}. Für das Folgende ist es erforderlich, die Ordnung λ' des Ortes Λ' derjenigen Punkte zu kennen, für welche die beiden Strahlen in einen, S, zusammenfallen. λ' ist gleich der Zahl der Coincidenzen, welche eintreten, wenn der Scheitel auf einer ebenen Curve $a_y = 0$ von Φ sich bewegt, kann also mit Hülfe der Formel (7) bestimmt werden. Für c ist jetzt zu setzen ν; μ ist die Zahl der Lösungen von

$$a_y = 0, \quad \sum p_i \frac{\partial f_1}{\partial y_i} = 0;$$

g ist die Zahl der Lösungen von

$$a_y = 0, \quad \sum \pm \alpha_1 \alpha_2' \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \frac{\partial f_2}{\partial y_4} = 0,$$

also ist hier

$$\mu = m_1 e + (n_1 - 1)\, \nu,$$
$$g = (m_1 + m_2)\, e + (n_1 + n_2 - 2)\, \nu,$$
$$h = (m_1 + m_3)\, e + (n_1 + n_3 - 2)\, \nu,$$

und man findet

(10) $$\lambda' = (m_1 + m_2 + m_3)\, e + (n_1 + n_2 + n_3 - 4)\, \nu.$$

Die Coincidenzstrahlen S beschreiben eine Regelfläche, deren Grad sich bestimmt nach der Formel*)

$$\varepsilon k = gh - c^2 - \mu^2.$$

Die Bedeutung der rechts stehenden Symbole ist folgende:

---

*) Schubert l. c. pag. 351.

gh = Zahl der Schneidepaare, deren Strahlen je eine von zwei gegebenen Geraden schneiden;

c^2 = Zahl der Paare mit Scheitel in einer Geraden, also $= \nu$;

μ^2 = Zahl der Paare mit Schnittebene durch eine gegebene Gerade.

gh bedeutet demnach die Zahl der Lösungen von

$$\sum \pm a_1 a_2' \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \frac{\partial f_2}{\partial y_4} = 0, \quad \sum \pm \alpha_1 \alpha_2' \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \frac{\partial f_3}{\partial y_4} = 0;$$

μ^2 ist die Zahl der Lösungen von

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1' & a_2' & a_3' & a_4' \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \frac{\partial f_1}{\partial y_4} \end{matrix} \right\| = 0,$$

d. h. es ist nach (4)

$$\mu^2 = (n_1 - 1)^2 \nu + m_1^2 n + 2m_1 (n_1 - 1) e$$

$$gh = (n_1 + n_2 - 2)(n_1 + n_3 - 2) \nu + (m_1 + m_2)(m_1 + m_3) n$$
$$+ [(m_1 + m_2)(n_1 + n_3 - 2) + (m_1 + m_3)(n_1 + n_2 - 2)] e,$$

und man findet für den Grad des Ortes der Strahlen S

$$(11) \quad (S) = n \cdot (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)$$
$$+ \nu(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3 - 2n_1 - 2n_2 - 2n_3 + 2)$$
$$+ e[m(n_2+n_3) + m_2(n_1+n_3) + m_3(n_1+n_2) - 2m_1 - 2m_2 - 2m_3].$$

Für endlich viele Punkte der Curve Λ' tritt es ein, dass der zugehörige Strahl g_{14} mit S zusammenfällt; dann haben die vier Flächen $f_1(y) = 0, \cdots$ $\cdots, f_4(y) = 0$ zwei unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich, welche beide genau auf Φ liegen; solche entsprechen den points-pinces der Doppelcurve von F. Der Bestimmung ihrer Anzahl muss die Herleitung einiger Zahlen vorausgeschickt werden.

Der Ort Ω derjenigen Punkte y auf Φ, welche die zugehörige Tangentialebene E von $f_1(y) = 0$ durch einen festen Punkt p schicken, hat eine Ordnung ω = der Zahl der Lösungen von

$$a_y = 0, \quad \sum p_i \frac{\partial f_1}{\partial y_i} = 0,$$

also ist

$$\omega = (n_1 - 1)\nu + m_1 \cdot e.$$

Die beiden Strahlen g_{12}, g_{13} mit Scheitel auf Ω coincidiren

$$g + h - \mu - c$$

mal; hier ist $c = \omega$; μ die Zahl der Lösungen von

$$\sum p_i \frac{\partial f_1}{\partial y_i} = 0, \quad \sum q_i \frac{\partial f_1}{\partial y_i} = 0,$$

$$\mu = (n_1 - 1)^2 \nu + m_1^2 n + 2m_1(n_1 - 1) e$$

$g =$ Zahl der Lösungen von

$$\sum p_i \frac{\partial f_1}{\partial y_i} = 0, \quad \sum \pm \alpha_1 \alpha_2' \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \frac{\partial f_2}{\partial y_4} = 0,$$

$$g = (n_1 - 1)(n_1 + n_2 - 2)\nu + m_1(m_1 + m_2)n + [m_1(n_1 + n_2 - 2) + (m_1 + m_2)(n_1 - 1)]e,$$

$$h = (n_1 - 1)(n_1 + n_3 - 2)\nu + m_1(m_1 + m_3)n + [m_1(n_1 + n_3 - 2) + (m_1 + m_3)(n_1 - 1)]e.$$

Hieraus ergiebt sich für die Classe (E) des Ortes der Tangentialebenen E für Punkte der Curve Λ'

(12) $$(E) = \nu\cdot(n_1 - 1)(n_1 + n_2 + n_3 - 4) + n\cdot m_1(m_1 + m_2 + m_3) + e(2m_1n_1 + m_1n_2 + m_1n_3 + m_2n_1 + m_3n_1 - 5m_1 - m_2 - m_3).$$

Der Ort Γ derjenigen Punkte y auf Φ, welche ihren zugehörigen Strahl g_{14} eine feste Gerade $\alpha_y = 0$, $\alpha^{y'} = 0$ treffen lassen, hat die Ordnung $\gamma =$ der Zahl der Lösungen von

$$\alpha_y = 0, \quad \sum \pm \alpha_1 \alpha_2' \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \frac{\partial f_4}{\partial y_4} = 0,$$

also ist

$$\gamma = (n_1 + n_4 - 2)\nu + (m_1 + m_4)e.$$

Die Strahlen g_{12} und g_{13} mit Scheitel auf der Curve Γ coincidiren

$$g + h - \mu - c$$

mal. Für c ist zu setzen γ; μ ist die Zahl der Lösungen von

$$\sum p_i \frac{\partial f_1}{\partial y_i} = 0, \quad \sum \pm \alpha_1 \alpha_2' \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \frac{\partial f_4}{\partial y_4} = 0;$$

$$\mu = (n_1 + n_4 - 2)(n_1 - 1)\nu + (m_1 + m_4)m_1 n + [(m_1 + m_4)(n_1 - 1) + m_1(n_1 + n_4 - 2)]e$$

g ist die Zahl der Lösungen von

$$\sum \pm \alpha_1 \alpha_2' \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \frac{\partial f_4}{\partial y_4} = 0, \quad \sum \pm \alpha_1 \alpha_2' \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \frac{\partial f_2}{\partial y_4} = 0$$

$$g = \nu\cdot(n_1 + n_4 - 1)(n_1 + n_2 - 2) + n\cdot(m_1 + m_4)(m_1 + m_2) + e[(m_1 + m_2)(n_1 + n_4 - 2) + (m_1 + m_4)(n_1 + n_2 - 2)],$$

$$h = \nu(n_1 + n_4 - 2)(n_1 + n_3 - 2) + n(m_1 + m_4)(m_1 + m_3) + e[(m_1 + m_3)(n_1 + n_4 - 2) + (m_1 + m_4)(n_1 + n_3 - 2).$$

Daher die Zahl der Coincidenzen, oder Grad des Ortes der Strahlen g_{14}, welche Punkten des Ortes Λ' zugehören

(13) $$(g_{14}) = \nu(n_1 + n_4 - 2)(n_1 + n_2 + n_3 - 4) + n(m_1 + m_4)(m_1 + m_2 + m_3) + e[(n_1 + n_4 - 2)(m_1 + m_2 + m_3) + (m_1 + m_4)(n_1 + n_2 + n_3 - 4)].$$

In dem Ausdruck

$$(S) + (g_{14}) - (E) - \lambda',$$

welcher die Zahl der Coincidenzen von g_{14} mit S angiebt, sind jetzt nach (10), (11), (12), (13) alle Zahlen bekannt. *Durch Einsetzen der im Vorigen entwickelten Ausdrücke erhält man für die Zahl der points-pinces:*

$$(14) \qquad j = \nu \cdot (N_2 - 4N + 10) + nM_2 + e(MN - 4M - \Sigma m_i n_i).$$

Der Doppelcurve von F entspricht eine einfache Curve Θ der Ordnung Θ auf Φ. Da Θ angiebt, wie viele Punkte der Doppelcurve einen entsprechenden Punkt in eine Ebene $a_y = 0$ werfen, so ist auch Θ gleich der Zahl der gemeinschaftlichen Punkte der Doppelcurve und der Curve e^{ter} Ordnung P, welche der ebenen Curve $a_y = 0$ entspricht. Die Curve P trifft die Fläche $\frac{\partial F}{\partial A_4} = 0$ im Ganzen in $(n - m_4)e$ Punkten; zu ihnen gehören die gesuchten; ferner aber, n_4-fach zählend, die ν Punkte, in welchen sich P und die zu $y_1 = 0$ gehörende Curve e^{ter} Ordnung schneiden; endlich λ' Punkte der Curve Λ. Hieraus

$$\Theta = (n - m_4)e - n_4\nu - \lambda',$$

oder nach (10)

$$(15) \qquad \Theta = (n - M)e - (N - 4)\nu.$$

Unter den Paaren entsprechender Punkte x, y, welche ihren Punkt x auf der Doppelcurve von F haben, giebt es

$$m_5 \cdot 2b + n_5 \cdot \Theta,$$

welche einer biquaternären Gleichung $f_5(x, y) = 0$ mit den Gradzahlen m_5, n_5 genügen. Man beweist dies durch eine Correspondenz zwischen Punkten y und z auf der Curve Θ. Zu y gehört ein Punkt x der Doppelcurve, welcher mit Hülfe der Gleichung $f_5(x, z) = 0$ $n_5 \cdot \Theta$ Punkte z liefert; geht man umgekehrt von z aus, so liefert dieselbe Gleichung $m_5 \cdot b$ Punkte x, und zu jedem derselben gehören zwei Punkte y der Curve Θ. Daher obige Zahl der Coincidenzen von y mit z.

Für endlich viele Punkte x der Doppelcurve tritt es ein, dass die vier Flächen $f_1(y) = 0, \cdots f_4(y) = 0$ nicht nur zwei Punkte $y^{(1)}, y^{(2)}$, sondern noch einen dritten Punkt $y^{(3)}$ gemeinschaftlich haben. Solche Punkte x sind dreifache Punkte der Fläche und der Doppelcurve; in ihnen durchsetzen sich drei Flächenschalen. Die drei entsprechenden Punkte auf der Fläche Φ sind Doppelpunkte der Curve Θ.

Mit Hülfe von $f_4(y^{(1)}) = 0$, $f_4(y^{(2)}) = 0$, d. h. wenn nur Punkte x der Doppelcurve betrachtet werden, besteht die Gleichung

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial A_4^2} = [y_1^{(1)} y_1^{(2)}]^{n_4} \cdot f_4(y^{(3)}) f_4(y^{(4)}) \cdots f_4(y^{(n_1 n_2 n_3)}).$$

Die $b(n-2m_4)$ auf der Doppelcurve gelegenen Verschwindungspunkte von $\frac{\partial^2 F}{\partial A_4^2}$ vertheilen sich demnach wie folgt. Es sind erstens, je n_4-fach zählend, die Θ Punkte, welche den Θ in der Ebene $y_1=0$ liegenden Punkten von Θ auf F entsprechen; zweitens, dreifach zählend, die t Punkte; drittens gewisse Punkte x, für welche von den $n_1 n_2 n_3 - 2$ weiteren Schnittpunkten der drei Flächen $f_1(y)=0$, $f_2(y)=0$, $f_3(y)=0$ einer dem Punkte $y^{(1)}$ oder $y^{(2)}$ unendlich nahe liegt, weil dann einer der Factoren

$$f_4(y^{(3)}), \quad \cdots \quad f_4(y^{(n_1 n_2 n_3)})$$

unendlich klein wird.

Dieser letztere Fall tritt so oft, $(b,\Lambda)-j$ mal, ein, wie die Curve Λ einen Punkt mit der Doppelcurve gemeinschaftlich hat, der jedoch nicht point-pince der Doppelcurve sein darf.

Um aus der Gleichung

$$(16) \qquad b(n-2m_4) = n_4\cdot\Theta + 3t + (b,\Lambda) - j$$

t bestimmen zu können, muss man noch (b,Λ) berechnen, d. h. die Zahl

$$g+h-\mu-c$$

der Coincidenzen von g_{12} und g_{13} mit Scheitel auf der Curve Θ. Für c ist hier zu setzen Θ; μ ist die Zahl der Lösungen von

$$\sum p_i \frac{\partial f_1}{\partial y_i} = 0,$$

welche ihren Punkt x auf der Doppelcurve haben, also nach dem Hülfssatz

$$\mu = m_1\cdot 2b + (n_1-1)\,\Theta$$

g ist die Zahl der Lösungen von

$$\sum \pm a_1 a_2' \frac{\partial f_1}{\partial y_3}\,\frac{\partial f_2}{\partial y_4} = 0,$$

welche derselben Nebenbedingung genügen, also

$$g = (m_1+m_2)\,2b + (n_1+n_2-2)\,\Theta,$$
$$h = (m_1+m_3)\,2b + (n_1+n_3-2)\,\Theta.$$

Hiernach wird

$$(b,\Lambda) = (m_1+m_2+m_3)\cdot 2b + (n_1+n_2+n_3-4)\cdot\Theta,$$

und die Gleichung (16) *giebt jetzt die Zahl der dreifachen Punkte:*

$$t = \frac{1}{3}\,[b(n-2M) - (N-4)\cdot\Theta + j].$$

Es mögen schliesslich noch die Werthe der beiden *Geschlechtszahlen* für die Fläche F angegeben werden. Nach Zeuthen (Math. Ann. IV) reduciren sich dieselben im vorliegenden Falle auf

$$p^{(1)} = n' - 2a + 3n$$

und

$$p^{(2)} = c' - 12a + 24n.$$

Wegen

$$n' = n(n-1)^2 - 7nb + 4b^2 + 8b - 8k + 15t;$$
$$a = n^2 - n - 2b; \quad 2k = b^2 - b - q,$$
$$q = b(n-2) - 3t - \frac{1}{2}j$$

findet man

$$p^{(1)} = 6(n+\nu) - 4(Mn + N\nu) - 4e(M+N) + 16e + M^2 n$$
$$+ N^2\nu + MNe - \nu N_2 - nM_2 + e\Sigma m_i n_i.$$

Der Ausdruck für $p^{(2)}$ lässt sich zunächst umformen mit Hülfe der Gleichungen

$$c' - \varkappa = 3n' - 3a, \quad \varkappa = a(n-2) - \varrho$$
$$\varrho = (n-2)b - 3t;$$

es wird dann

$$p^{(2)} = 3n' - 17a + an - bn + 2b + 3t + 24n$$

und weiter durch Einsetzen der Werthe von n', b, t

$$p^{(2)} = 44(n+\nu) + 96e - 2e(MN - \Sigma m_i n_i)$$
$$- 2nM_2 - 2\nu N_2 + 4(M^2 n + N^2 \nu) + 8MNe$$
$$- 24(N\nu + Mn) - 24e(M+N).$$

Beide Ausdrücke bleiben, wie es sein muss, durch Vertauschung der m_i mit den n_i ungeändert.

December 1880.

Notiz über die rationalen Curven.

Von

M. Pasch in Giessen.

---

1. Wenn man unter $f\,g\,h$ Formen n^{ten} Grades von zwei Variablen $x_1\,x_2$ versteht, welche sich nicht blos durch constante Factoren unterscheiden, so sind $f\,g\,h$ allemal durch eine algebraische Gleichung verbunden, welche den n^{ten} Grad nicht übersteigt. Diese Gleichung erhält man bekanntlich*) durch Elimination von $x_1 x_2$ aus dem Systeme

$$u_1 f + u_2 g + u_3 h = 0, \qquad v_1 f + v_2 g + v_3 h = 0.$$

Die Resultante enthält die Grössen $u\,v$ nur in den Verbindungen

$$u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad u_1 v_2 - u_2 v_1$$

und ist eine Form n^{ten} Grades der Letzteren. Ersetzt man dieselben durch $f\,g\,h$, so entsteht die Gleichung n^{ten} Grades

$$F(f\,g\,h) = 0,$$

welche bei allen Werthen von $x_1\,x_2$ erfüllt ist.

Wenn $f\,g\,h$ einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, so wird das obige Verfahren illusorisch, die Form $F(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3)$ verschwindet identisch. Wir wollen deshalb voraussetzen, dass die gegebenen Formen von etwaigen gemeinschaftlichen Theilern befreit sind; die Form $F(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ verschwindet dann nicht identisch.

2. Die Gleichung $F = 0$ stellt eine ebene Curve n^{ter} Ordnung in trimetrischen Coordinaten dar. Um die Durchschnittspunkte der Curve mit einer in ihrer Ebene beliebig angenommenen Geraden $(u_1 u_2 u_3)$ zu bestimmen, kann man die Gleichung

$$u_1 f + u_2 g + u_3 h = 0$$

in Bezug auf das Verhältniss $x_1 : x_2$ auflösen. Die Discriminante $\Phi(u_1\,u_2\,u_3)$ dieser Gleichung verschwindet niemals für alle u. Zum Beweise genügt es, aus $f\,g\,h$ zwei lineare Verbindungen $G\,H$ zu bilden, welche keinen mehrfachen Factor gemein haben, und die Gleichung $vG + wH = 0$ zu prüfen. Da keine anderen linearen Factoren als die der Functionaldeterminante von G und H mehrfache Factoren von $vG + wH$ sein können, so zerfällt $vG + wH$ bei geeigneter Wahl von $v : w$ in lauter ungleiche Factoren.

Die Gleichung $u_1 f + u_2 g + u_3 h = 0$ liefert demnach n verschiedene Wurzeln $x_1 : x_2$, ausser wenn $u_1 u_2 u_3$ durch die Gleichung $(2n-2)^{\text{ten}}$

---

*) Vergl. Brill diese Annalen Bd. V, p. 401 f.

Grades $\Phi = 0$ verknüpft sind.*) — Uebrigens ist die Gleichung $\Phi = 0$ auch dann keine identische, wenn $f\,g\,h$ gemeinschaftliche, aber nur einfache gemeinschaftliche Factoren besitzen.

3. Verschiedenen Werthen von $x_1 : x_2$ entsprechen nicht immer verschiedene Punkte der Curve $F = 0$; vielmehr kommt es vor, dass zu jedem Punkte der Curve mehrere Werthe jenes Verhältnisses gehören. Man kann aber, wie Herr Lüroth gezeigt hat**), stets eine rationale Function von $x_1 : x_2$ so herstellen, dass deren Werthe und die Punkte der Curve sich (im Allgemeinen) gegenseitig eindeutig entsprechen. Eine solche Function sei der Quotient $u : v$, wo u und v zwei Formen etwa μ^{ten} Grades von $x_1\,x_2$ ohne gemeinschaftlichen Theiler bedeuten. Dann lassen sich die Coordinaten des zum Werthepaare $x_1\,x_2$ gehörigen Curvenpunktes als Formen $\varphi\chi\psi$ etwa ν^{ten} Grades von $u\,v$ ohne gemeinschaftlichen Theiler darstellen, und es wird

$$\varphi(uv) = \varrho f, \quad \chi(uv) = \varrho g, \quad \psi(uv) = \varrho h,$$

wo ϱ eine Constante oder eine Form von $x_1 x_2$ sein kann. Wäre ϱ nicht constant, so könnte man ϱ zu Null machen, indem man geeignete Werthe für x_1 und x_2 nimmt; werden u und v bei diesen Werthen etwa gleich u_1 resp. v_1, so müsste $uv_1 - vu_1$ die Functionen $\varphi\chi\psi$ theilen. Da also ϱ von $x_1 x_2$ nicht abhängt, so sind $f\,g\,h$ ganze homogene Functionen ν^{ten} Grades von uv und

$$\mu\nu = n.$$

4. Durch Elimination von $u\,v$ aus dem Systeme

$$f : g : h = \varphi(uv) : \chi(uv) : \psi(uv)$$

erhält man eine Gleichung ν^{ten} Grades

$$G(f\,g\,h) = 0.$$

Die Curve $G(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3) = 0$ wird von einer willkürlichen Geraden in ν verschiedenen Punkten getroffen (2) und ist deshalb irreducibel; denn wäre $G = G_1 G_2$, also etwa $G_1(\varphi\chi\psi) = 0$ für alle uv, so hätten die Linien $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ nicht alle Punkte gemein, und man könnte mit Hülfe eines der Linie $G_1 = 0$ nicht angehörigen Punktes der Linie $G_2 = 0$ Werthe uv bestimmen, denen mehr als ein Punkt entspricht.

Dagegen ist die Curve $F = 0$ reducibel bei $\mu > 1$ und enthält alle Punkte der Curve $G = 0$. Sie kann keine anderen Punkte enthalten, da schon die ν verschiedenen Punkte, in denen $G = 0$ der willkürlichen Geraden $(u_1 u_2 u_3)$ begegnet, $\mu\nu$ verschiedene Wurzeln der Gleichung $u_1 f + u_2 g + u_3 h = 0$ liefern. *Folglich ist die Form $F(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3)$ entweder irreducibel oder Potenz einer irreduciblen Form.*

Giessen, im Januar 1881.

---

*) Dies wird bei der Rechnung vorausgesetzt, durch welche Herr Hermite (Cours d'Analyse p. 249) die Doppelpunkte der Curve $F = 0$ ermittelt.

**) Diese Annalen Bd. IX, p. 163.

Notiz über ternäre Formen mit verschwindender Functionaldeterminante.

Von

M. Pasch in Giessen.

Im Folgenden sollen $f\,g\,h$ Formen n^{ten} Grades von drei Variablen $x_1 x_2 x_3$ bedeuten. Sind $f\,g\,h$ durch eine algebraische Gleichung verknüpft, so verschwindet die Determinante des Systemes

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h}{\partial x_2} & \dfrac{\partial h}{\partial x_3} \end{matrix}.$$

Sind $f\,g\,h$ durch zwei Gleichungen verknüpft, d. h. verhalten sich je zwei Formen wie Constanten, so sind auch alle Subdeterminanten zweiten Grades Null. — Umgekehrt: Wenn alle Determinanten zweiten Grades aus dem obigen Systeme verschwinden, so verhalten sich $f\,g\,h$ wie Constanten*); wenn aber nur die Determinante des Systemes verschwindet, so besteht zwischen fgh eine einzige Gleichung. Im letzteren Falle kann man (nachdem $f\,g\,h$ von gemeinschaftlichen Factoren befreit sind) eine Form n^{ten} Grades φ von $x_1 x_2 x_3$ so einführen, dass etwa $\varphi\,g\,h$ eine von Null verschiedene Functionaldeterminante (und eine von Null verschiedene Resultante) besitzen, und zwischen $\varphi\,f\,g\,h$ eine Gleichung vom Grade n^2 aufstellen**); aus dieser Gleichung fällt φ heraus.

Wir wollen annehmen, dass die Determinante der Formen $f\,g\,h$ identisch verschwindet, und dass fgh keinen Factor gemein haben. Fasst man $x_1 x_2 x_3$ als trimetrische Punktcoordinaten in der Ebene auf, so kann man eine Gerade ziehen, von der kein Punkt zugleich auf den drei Curven $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ liegt. Das Coordinatensystem werde so gewählt, dass die Fundamentallinie $x_3 = 0$ diese Eigenschaft besitzt. Dann haben auch die binären Formen

---

*) Vergl. Crelle's Journal Bd. 80, p. 181 f.

**) Vergl. Brill, diese Annalen Bd. V, p. 401.

$$f(x_1, x_2, 0), \quad g(x_1, x_2, 0), \quad h(x_1, x_2, 0)$$

keinen Factor gemein. Diese Formen sind durch eine algebraische Gleichung verknüpft, und genau dieselbe Gleichung n^{ten} Grades

$$F(fgh) = 0$$

besteht zwischen den ternären Formen fgh. Die Form $F(\xi_1\xi_2\xi_3)$ ist entweder irreducibel oder etwa die μ^{te} Potenz einer irreduciblen Form $G(\xi_1\xi_2\xi_3)$ vom Grade ν.

Indem wir auch $\mu = 1$ zulassen, können wir fgh proportional setzen dreien Formen ν^{ten} Grades von zwei Variablen uv ohne gemeinschaftlichen Theiler:

$$\varphi(uv) = \varrho f, \quad \chi(uv) = \varrho g, \quad \psi(uv) = \varrho h.$$

Da das Verhältniss $u:v$ eine rationale Function der Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ werden muss, so nehmen wir u und v als Formen gleichen Grades von $x_1 x_2 x_3$ ohne gemeinschaftlichen Theiler an. Es wird dann ϱ eine Constante; denn sonst könnte man ϱ durch geeignete Wahl von $x_1 x_2 x_3$ zu Null machen, ohne dass auch u und v gleichzeitig verschwinden, und es hätten $\varphi\chi\psi$ einen Theiler von der Form $uv_1 - vu_1$ gemein. Der Grad der ternären Formen u und v ist demnach $= \mu$, und es gilt der Satz:

Zwischen drei ternären Formen n^{ten} Grades mit verschwindender Functionaldeterminante, aber ohne gemeinschaftlichen Theiler, besteht allemal eine irreducible Gleichung ν^{ten} Grades vom Geschlecht Null, wo ν einen Theiler von n bedeutet. Ist $n = \mu\nu$, so lassen sich die drei gegebenen Formen darstellen als Formen ν^{ten} Grades, deren Argumente zwei ternäre Formen μ^{ten} Grades sind.

Der Fall $n = 2$ ist ausführlich behandelt in dem Aufsatze des Herrn Hahn, diese Annalen Bd. 15, p. 111.

Giessen, im Januar 1881.

Ueber algebraische Raumcurven, welche die Gestalt einer Schlinge haben.

Von

A. Brill in München.

Sind ξ, η, ζ Dreieckscoordinaten in der Ebene, so stellen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho \cdot \xi &= p(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)(\lambda - \lambda_7),\\
\varrho \cdot \eta &= q(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_4)(\lambda - \lambda_6),\\
\varrho \cdot \zeta &= r(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_6)(\lambda - \lambda_7),
\end{aligned}$$

(wo ϱ, λ veränderliche Grössen, $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_7, p, q, r$ reelle Constante sind) eine Curve vierter Ordnung dar, die, wenn:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_7$$

(direct oder doch nach einer cyklischen Vertauschung) dem beistehend gezeichneten Typus von unicursalen Curven vierter Ordnung angehört*).

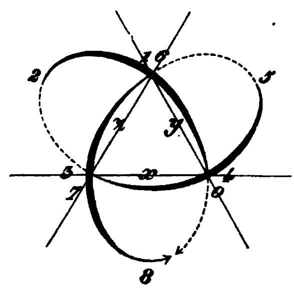


Fig. 1.

Diese Curve entsteht, wenn man von einem Eckpunkt des Coordinatentetraeders aus auf die gegenüberliegende Seitenfläche eine Raumcurve fünfter Ordnung projicirt, deren Tetraedercoordinaten x, y, z, w durch das Gleichungssystem dargestellt sind:

$$(1)\qquad \begin{aligned}
\sigma \cdot x &= \xi(\lambda - \lambda_8),\\
\sigma \cdot y &= \eta(\lambda - \lambda_8),\\
\sigma \cdot z &= \zeta(\lambda - \lambda_8).\\
\sigma \cdot w &= (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_5)(\lambda - \lambda_6).
\end{aligned}$$

Man darf annehmen, dass diese Curve die unendlich ferne Ebene nur in einem reellen Punkte trifft, indem bei passender Wahl der Grössen p, q, r vier von den Wurzeln der Gleichung fünften Grades

---

*) Typus 9 nach der Aufzählung im XII. Bande der Math. Ann. p. 121.

in λ, welche die Parameterwerthe der unendlich fernen Punkte liefert, imaginär werden, was bekanntlich die Erfüllung von zwei Ungleichungen verlangt.

Ordnen sich die Parameterwerthe $\lambda_2 \lambda_5 \lambda_8$ ihrer Grösse nach zwischen $\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_7$ den Indices entsprechend ein, *so bildet diese Curve fünfter Ordnung* im Sinne der Analysis situs eine (in einen Knoten zusammenziehbare) *Schlinge*. Man kann dies aus obiger Figur ersehen, wo die punktirt gezeichneten Theile der Curve den von der Ebene $w=0$ verdeckten Partien der Raumcurve entsprechen. In der Zeichnung wurde der unendlich weite Punkt zwischen λ_8 und λ_0 angenommen.

Wenn dagegen die. Grössen $\lambda_2 \lambda_5 \lambda_8$ sich anders einordnen, so z. B. dass alle drei in dasselbe Intervall $\lambda_7 \ldots \lambda_0$ zu liegen kommen, so bildet die Raumcurve *keine Schlinge*.

Eine Raumcurve mit Schlinge kann, ohne einen wirklichen Doppelpunkt zu besitzen, nicht auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen; *die obige Curve fünfter Ordnung ist also eine solche dritter Species**), d. h. der unvollständige Durchschnitt zweier Flächen dritter Ordnung**), welche sich ausserdem in einer Geraden und einer Raumcurve dritter Ordnung schneiden. Da das Eliminationsverfahren, durch welches man von den Gleichungen (1) zu diesen Flächen dritter Ordnung gelangt, auf jene Curve *ohne* Schlinge angewendet, formell dasselbe Resultat liefern würde, so ist die Schlingenbildung nicht ein nothwendiges Attribut der Curven fünfter Ordnung dritter Species.

Durch die Gleichungen:

$$\sigma \cdot x = \xi \cdot \Lambda,$$
$$\sigma \cdot y = \eta \cdot \Lambda,$$
$$\sigma \cdot z = \zeta \cdot \Lambda,$$
$$\sigma \cdot w = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_5)(\lambda - \lambda_6)(\lambda - \lambda_8)$$

(Λ ein Ausdruck zweiten Grades in λ mit conjugirt imaginären Linearfactoren) wird eine *Raumcurve sechster Ordnung* dargestellt, welche gleichfalls jene Curve vierter Ordnung zur Projection hat, in $x=y=z=0$ einen isolirten Doppelpunkt besitzt, und die bei passender Wahl der Constanten p, q, r ganz im Endlichen verläuft, indem sie eine Schlinge bildet. Sie ist eine Curve sechster Ordnung vierter Species nach Clebsch (l. c.), und bildet zusammen mit einer Curve derselben Art den vollständigen Durchschnitt einer Fläche dritter und einer Fläche vierter Ordnung (vgl. auch die Aufzählung von Ed. Weyr, Comptes R. t. 76.).

Nimmt man das Coordinatentetraeder gleichseitig an, so kann man

*) Salmon-Fiedler, analytische Geometrie des Raumes. Clebsch, die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung. Journ. f. Math. 65.

**) Auf dem Modell einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden lässt sich der ungefähre Verlauf einer solchen Curve leicht angeben.

die Gleichungen so gestalten, dass die Curve in sich selbst übergeht, wenn man sie um eine zur Ebene der Projection senkrechte Axe um einen Winkel von 120° dreht. Für die ebene Curve vierter Ordnung wird dies erreicht, wenn man:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_3 = 1 \quad, \quad \lambda_6 = \infty,$$
$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_4 = \frac{1}{1-\alpha}, \quad \lambda_7 = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

setzt, wo α ein ächter Bruch ist, den wir kleiner als $\frac{1}{2}$ annehmen wollen. Jener Drehung entspricht nämlich die Transformation:

$$\lambda = \frac{1}{1-\mu},$$

durch welche alsdann die Ausdrücke für die Coordinaten $\varrho\xi$, $\varrho\eta$, $\varrho\zeta$ (von einem constanten Factor abgesehen) in einander übergehen.

Setzt man noch:

$$\Lambda = \lambda^2 - \lambda + 1,$$
$$\lambda_2 = 1 - \alpha, \quad \lambda_5 = \frac{1}{\alpha}, \quad \lambda_8 = \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

so sind die Gleichungen einer Curve sechster Ordnung mit der verlangten Eigenschaft die folgenden:

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma \cdot x &= (\lambda^2 - \lambda + 1)\,\lambda\,(1 - \lambda)\,(\lambda - \alpha\lambda - 1)\,(\alpha\lambda + 1 - \alpha), \\ \sigma \cdot y &= (\lambda^2 - \lambda + 1)\,\lambda\,(\lambda - \alpha)\,(\lambda - \alpha\lambda - 1), \\ \sigma \cdot z &= (\lambda^2 - \lambda + 1)\,(\lambda - \alpha)\,(1 - \lambda)\,(\alpha\lambda + 1 - \alpha), \\ \sigma \cdot w &= p \cdot \lambda\,(1 - \lambda)\,(\lambda - 1 + \alpha)\,(\alpha\lambda - 1)\,(\alpha\lambda - \lambda - \alpha), \end{aligned}$$

wo p eine beliebige Constante ist. Denn durch die Substitution:

$$\lambda = \frac{1}{1-\mu}$$

gehen die Ausdrücke für x, y, z in cyklischer Vertauschung direct in einander über, während w in sich selbst transformirt wird.

Setzt man für einen Augenblick:

$$\frac{\lambda^3 - 3\lambda + 1}{\lambda(\lambda - 1)} = L,$$

so verificirt man leicht die Beziehungen:

$$\sigma \cdot (x+y+z) = \alpha(\alpha-1)(\lambda^2-\lambda+1)^3 = \alpha(\alpha-1)\lambda^2(\lambda-1)^2 \cdot (L^2 - 3L + 9),$$
$$\sigma \cdot w = -p\lambda^2(\lambda-1)^2 \cdot \left\{L\alpha(\alpha-1) + 1 - 3\alpha^2 + \alpha^3\right\}.$$

Die Gleichung der unendlich fernen Ebene:

$$x + y + z + w = 0$$

geht hierdurch in eine quadratische Gleichung für L über, mit deren Wurzeln zugleich die unendlich fernen Punkte der Curve 6. Ordnung imaginär werden. Man erreicht dies insbesondere durch genügend kleine Werthe von p, die sich übrigens innerhalb der durch das Verschwinden der Discriminante

$$p^2 - 2p\,\frac{(1+\alpha)(2-\alpha)(1-2\alpha)}{\alpha(1-\alpha)} - 27 = 0$$

gesteckten Grenzen bewegen.

Die durch die Gleichungen (2) *dargestellte Curve sechster Ordnung ist die einfachste algebraische Form der Kleeblattschlinge* („trefoil knot“ nach Tait, on knots, Edinburgh Transact. 1877).

Auch zur Darstellung complicirterer Verschlingungen eignen sich die unicursalen Raumcurven. Eine solche repräsentiren die folgenden Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten:

$$x = \frac{\lambda(p_1\lambda^4 + p_3\lambda^2 + p_5)}{p\lambda^6 + p_2\lambda^4 + p_4\lambda^2 + p_6},$$

$$y = \frac{q(\lambda^2-\lambda_2^2)(\lambda^2-\lambda_4^2)(\lambda^2-\lambda_6^2)}{p\lambda^6 + p_2\lambda^4 + p_4\lambda^2 + p_6},$$

$$z = \frac{r(\lambda^2-\lambda_6^2)^2(\lambda^2-\lambda_1^2)(\lambda^2-\lambda_3^2)(\lambda^2-\lambda_4^2)}{(p\lambda^6 + p_2\lambda^4 + p_4\lambda^2 + p_6)(\lambda^4+1)},$$

wo $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_7$ reelle *positive* Grössen sind, und die Gleichung:

$$p\lambda^6 - p_1\lambda^5 + p_2\lambda^4 - p_3\lambda^3 + p_4\lambda^2 - p_5\lambda + p_6 = 0$$

die Wurzeln $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_5\,\lambda_6\,\lambda_7$ hat. Die Raumcurve hat den unendlich fernen Punkt der z-Axe zum vierfachen isolirten Punkt, sie ist *von der zehnten Ordnung* und hat die neben schematisch gezeichnete Curve sechster Ordnung zur Orthogonalprojection in der Ebene $z = 0$, welche sie in den Punkten

$$\lambda = \pm\lambda_6$$

berührt. Sie ist zur YZ-Ebene symmetrisch gelegen und bildet *zwei aufeinander folgende in demselben Sinn gewundene Schlingen.* Ihre Schnittpunkte mit der unendlich weiten Ebene sind imaginär, weil nach den gemachten Voraussetzungen die Grössen $p\,p_2\,p_4\,p_6$ dasselbe Vorzeichen besitzen.

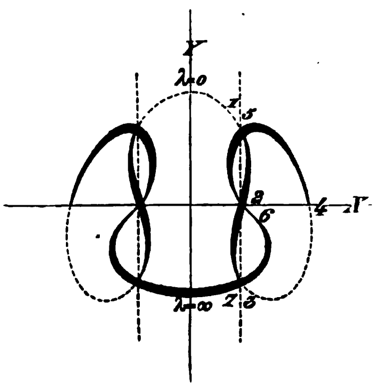


Fig. 2.

München, im Januar 1881.

Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche.

Von

Karl Rohn in Leipzig.

(Mit einer lithogr. Tafel.)

Einleitung.

Diese Einleitung stellt sich die doppelte Aufgabe, einerseits den Leser über den Inhalt der vorliegenden Arbeit zu orientiren, anderseits über die angewendeten Methoden kurz zu referiren. Was den ersten Punkt betrifft, so muss ich zunächst eine gewisse Beschränkung des Themas hier einführen. Wenn man von den gestaltlichen Verhältnissen einer Flächengattung spricht, so versteht man darunter gewöhnlich alle diejenigen verschiedenen Gestalten, welche sich entweder durch Specialisirung des allgemeinen Falles, oder durch Aenderung der Realitätsverhältnisse ergeben. So spricht man bei den Flächen 2. Grades von einer imaginären Fläche und von reellen Flächen mit reellen oder imaginären Erzeugenden, weiter aber auch von Kegel und Ebenenpaar als Specialisirungen des allgemeinen Falles. Ebenso unterscheidet man bei Flächen 3. Grades, nach der Realität ihrer Geraden, Flächen mit 27, 15, 7, und zwei Flächen mit 3 Geraden; durch Specialisirung erhält man die Flächen mit gewöhnlichen, oder biplanaren, oder uniplanaren Knotenpunkten. Auch bei der Kummer'schen Fläche kann man diese doppelte Aenderung der Gestalt mit Erfolg einer näheren Untersuchung unterwerfen. Einen Theil dieser Betrachtungen hat bereits Weiler im VI. Bande der Math. Annalen angestellt, indem er alle Flächen aufzählt, die durch *Specialisirung* aus der Kummer'schen Fläche hervorgehen. Weiler benutzt, dass die Kummer'sche Fläche auf's Engste mit einer Gleichung 6. Grades zusammenhängt, und entwickelt die verschiedenen Gestalten, indem er die Wurzeln theilweise zusammenfallen lässt. Es erübrigt folglich nur noch eine gestaltliche Untersuchung hinsichtlich der Realitätsverhältnisse, die sich freilich auf alle von Weiler aufgezählten Fälle zu erstrecken hätte. In der vorliegenden Arbeit sind nur die *Realitätsverhältnisse der allgemeinen Kummer'schen Fläche und im Anschlusse* *daran der Linienflächen* 4. *Ordnung mit zwei Doppelgeraden* einer näheren Betrachtung unterworfen. Es geschah diese Einschränkung einestheils um diese Abhandlung nicht über Gebühr auszudehnen und durch das endlose Aufzählen der Flächen zu ermüden, anderntheils desshalb, weil aus diesen Fällen die übrigen (Complexfläche, Steiner'sche Fläche etc.) durch Grenzübergang leicht abzuleiten sind*). Das Ergebniss meiner Untersuchungen ist kurz zusammengefasst das Folgende. Es giebt 8 verschiedene Kummer'sche Flächen und 7 verschiedene Linienflächen; die Flächen sind einzeln aufgezählt, ihre Gestalt beschrieben, sowie ihre Gleichungen aufgestellt.

Die Methoden, welche zur Lösung der vorgelegten Frage angewendet wurden, sind, wie die Lösung, selbst von dreifacher Art. Die erste, liniengeometrische, Methode basirt auf der Untersuchung zweier quadratischer Ausdrücke von 6 Variablen, oder geometrisch zu reden, auf dem Studium zweier Flächen 2. Grades in einem Raume von 5 Dimensionen. Die hierbei auftretenden gestaltlichen Verhältnisse, welche sich sofort auf einen Raum von beliebigen Dimensionen erweitern lassen, habe ich im ersten Abschnitte dieser Arbeit dargelegt und dieselben für die zugehörige Kummer'sche Fläche interpretirt. Der zweite Abschnitt legt gewisse topologische Beziehungen, welche daselbst in den einleitenden Bemerkungen näher präcisirt sind, zu Grunde. Diese topologischen Methoden, welche in die Geometrie der Ebene zuerst von Cayley eingeführt wurden, wurden hier auf den Raum ausgedehnt und ihre Zulässigkeit für den Fall der Kummer'schen Fläche dargethan; dieselben ergeben alsdann in systematischer Weise die verschiedenen gestaltlichen Möglichkeiten. Der letzte Abschnitt endlich giebt die analytischen Gleichungen der verschiedenen Flächen in Punktcoordinaten an. Alle Gleichungen werden aus einer einzigen durch imaginäre lineare Transformationen abgeleitet, und ich glaube, dass sich dieser Gedanke überhaupt bei allen Discussionen anwenden lässt, wo es auf die Aufzählung der Gestalten und ihre analytischen Gleichungsformen ankommt. Ich gedenke diese Ansicht demnächst durch die gestaltliche Behandlung der Fläche 3. Grades zu rechtfertigen. Zum Schlusse erwähne ich noch meine Arbeit in den Mathem. Annalen, Bd. XV: *„Hyperelliptische Functionen und die Kummer'sche Fläche"*, welche die geometrische Behandlung der Kummer'schen Fläche mit 16 reellen Knotenpunkten auf Grund der hyperelliptischen Functionen zum Zweck hat, und welcher meine Dissertation mit ähnlichen Betrachtungen vorausging.

---

*) Vergleiche die Bemerkung von Klein im amtlichen Bericht der 50. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte p. 95 (München, Straub, 1877).

I. Abschnitt.

Liniengeometrische Behandlung.

§ 1.

Einleitendes.

a) Die verschiedenen Coordinatensysteme.

Der Gesichtspunkt, von dem aus ich zuerst das vorliegende Problem betrachten will, basirt auf den Wechselbeziehungen der Kummer'schen Fläche zur Liniengeometrie, die denn auch in ihren Methoden einen bequemen und sicheren Weg zur Lösung darbietet. Zum leichteren Verständniss der späteren Darlegung werde ich Einiges hier vorausschicken, was der Liniengeometrie angehört und zum Theil schon bekannt ist.

Zwischen den 6 homogenen Coordinaten einer geraden Linie besteht eine Relation 2. Grades, die durch reelle lineare Transformation in die Form von 3 positiven und 3 negativen Quadraten übergeführt werden kann; etwa:

$$z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 + z_5^2 - z_6^2 = 0.$$

Reellen Werthen der Coordinaten z entsprechen dann natürlich reelle gerade Linien. Die weiteren Untersuchungen verlangen nun, dass diese Gleichung in eine Summe von lauter positiven Quadraten umgesetzt werde, was offenbar nur durch eine imaginäre Substitution*) geleistet werden kann. Es lassen sich nun folgende 4 Substitutionen unterscheiden, die Klein als *Typen* der Liniencoordinatensysteme bezeichnet:

Typus I,	$x_1 = z_1$,	$x_3 = z_3$,	$x_5 = z_5$,
	$x_2 = iz_2$,	$x_4 = iz_4$,	$x_6 = iz_6$.
Typus II,	$x_1 = z_1$,	$x_3 = z_3$,	$\sqrt{2}\,x_5 = z_5 + iz_6$,
	$x_2 = iz_2$,	$x_4 = iz_4$,	$\sqrt{2}\,x_6 = z_5 - iz_6$.
Typus III,	$x_1 = z_1$,	$\sqrt{2}\,x_3 = z_3 + iz_4$,	$\sqrt{2}\,x_5 = z_5 + iz_6$,
	$x_2 = iz_2$,	$\sqrt{2}\,x_4 = z_3 - iz_4$,	$\sqrt{2}\,x_6 = z_5 - iz_6$.
Typus IV,	$x_1 = z_1 + iz_2$,	$x_3 = z_3 + iz_4$,	$x_5 = z_5 + iz_6$,
	$x_2 = z_1 - iz_2$,	$x_4 = z_3 - iz_4$,	$x_6 = z_5 - iz_6$.

*) Diese Substitutionen, sowie ihre geometrische Bedeutung hat bereits **Klein** in einem Manuscripte angegeben, das er mir seiner Zeit zur Benutzung überliess.

Die Gleichungen $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots x_6 = 0$ stellen die 6 Fundamentalcomplexe dar, auf welche die Geraden des Raumes bezogen sind; sie sind, wie aus den Gleichungen ersichtlich, reell oder conjugirt imaginär. Da nun die Geraden dann und nur dann reell sind, wenn ihre z-Coordinaten reell sind, so lassen sich hieraus für die einzelnen Typen folgende Sätze ablesen:

Die Coordinaten x des Typus I stellen eine reelle gerade Linie dar, wenn 1, 3, 5 *reell*, 2, 4, 6 *dagegen rein imaginär sind; für eine reelle Gerade des Typus II müssen* 1 *und* 3 *reell*, 2 *und* 4 *rein imaginär*, 5 *und* 6 *aber conjugirt imaginär sein; der Typus III verlangt* 1 *reell*, 2 *imaginär*, 3 *und* 4, *desgleichen* 5 *und* 6 *conjugirt imaginär, während beim Typus IV die Coordinaten paarweise conjugirt imaginär sein müssen.* Hierdurch sind 4 verschiedene Coordinatensysteme, deren Fundamentalcomplexe in Involution liegen, charakterisirt.

Vermöge der Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0,$$

welcher die x-Coordinaten genügen müssen, gehören immer 32 gerade Linien des Raumes in der Art zusammen, dass sie sich nur durch die Vorzeichen ihrer Coordinaten unterscheiden; 16 unter ihnen besitzen eine gerade Anzahl, die 16 übrigen eine ungerade Anzahl positiver und negativer Vorzeichen. Ich nenne nun zwei Geraden *conjungirt*, wenn sie sich durch eine *gerade*, *adjungirt*, wenn sie sich durch eine *ungerade* Zahl von Vorzeichenwechsel unterscheiden, so dass es zu jeder Geraden 15 conjungirte und 16 adjungirte Geraden giebt. Man übersieht nun sofort, dass nur im ersten Falle alle 32 Geraden reell sind, im zweiten Falle jedoch nur 16 und im dritten und vierten Falle jedesmal nur 8 Gerade von 32 zusammengehörigen; die halbe Anzahl der reellen Geraden ist conjungirt, die halbe adjungirt. Auch die Realität*) der Directricen, Linienflächen und Congruenzen bei den einzelnen Typen lässt sich hiernach leicht entscheiden. Beim Typus I sind reell die 9 Directricenpaare: 12, 14, 16; 32, 34, 36; 52, 54, 56, die 9 Flächen 2. Grades: 123, 456; 124, 356; 125, 346; 126, 345; 134, 256; 136, 245; 145, 236; 146, 235 und 156, 234, ferner sämmtliche Congruenzen. Beim Typus II sind reell 5 Directricenpaare: 12, 14, 32, 34 und 56, sowie 4 Flächen 2. Grades: 156, 234 256, 134; 356, 124; 456, 123 und 7 Congruenzen: 12, 13, 14, 23, 24, 34 und 56. Der Typus III liefert 3 reelle Directricenpaare: 12, 34, 56, ferner 2 reelle Flächen: 134, 256; 156, 234 und 3 reelle Congruenzen: 12, 34, 56; der Typus IV endlich ergiebt dieselben reellen Congruenzen und Directricen, aber 4 reelle Flächen 2. Grades: 135, 246; 136, 245; 145, 236; 146,

---

*) Der Beweis der Realität der hier aufgezählten Gebilde folgt im letzten Abschnitte, einstweilen stehen hier nur die Resultate.

235. Die Flächen 2. Grades sind bei den Typen I, II und III Regelflächen, nur beim Typus IV treten ein Ellipsoid und 3 zweischalige Hyperboloide auf. Wir werden im zweiten Abschnitte hiervon Gebrauch machen.

b) Das System der Complexe 2. Grades.

Gehen wir nun noch einen Schritt weiter und fügen zu der Relation 2. Grades, welche zwischen den Liniencoordinaten bestehen muss, noch eine weitere quadratische Gleichung hinzu, die einen Complex 2. Grades repräsentirt. Es giebt dann bekanntermassen eine und nur eine lineare Transformation, welche beide Gleichungen gleichzeitig in eine Summe von Quadraten verwandelt, wobei die Identität die Form annimmt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Die hier erwähnte Transformation kann selbstverständlich nicht reell sein, sonst müssten ja 3 Quadrate dieser Gleichung mit einem negativen Vorzeichen behaftet sein, vielmehr besteht dieselbe aus einer durchaus reellen Transformation, verbunden mit einer der 4 oben erwähnten imaginären Transformationen. Die Gleichung des Complexes 2. Grades nimmt gleichzeitig die Form an:

$$\varkappa_1 x_1^2 + \varkappa_2 x_2^2 + \varkappa_3 x_3^2 + \varkappa_4 x_4^2 + \varkappa_5 x_5^2 + \varkappa_6 x_6^2 = 0,$$

wo die $\varkappa$ willkürliche Constanten sind, die positiv, negativ oder auch imaginär sein können.

Klein hat nun in den Math. Annalen Bd. II, 224 gezeigt, dass die Kummer'sche Fläche, welche dem obigen Complexe als Singularitätenfläche zugehört, in der gleichen Beziehung steht zu den einfach unendlich vielen Complexen:

$$\frac{x_1^2}{\varkappa_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{\varkappa_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{\varkappa_3 - \lambda} + \frac{x_4^2}{\varkappa_4 - \lambda} + \frac{x_5^2}{\varkappa_5 - \lambda} + \frac{x_6^2}{\varkappa_6 - \lambda} = 0,$$

die er als *confocales* System bezeichnet, und worauf er seine *elliptischen Liniencoordinaten* gründet, vergl. Math. Ann. V, 293. Jede Gerade des Raumes gehört je 4 solchen Complexen an, und umgekehrt haben 4 solche Complexe immer 32 Geraden gemein, die sich nur durch die Vorzeichen ihrer Coordinaten unterscheiden, also ein System der oben erwähnten Art bilden. Der Zusammenhang der gewöhnlichen Coordinaten mit diesen elliptischen wird in bekannter Weise durch die Formel gegeben:

$$\varrho x_\alpha^2 = \frac{(\varkappa_\alpha - \lambda_1)(\varkappa_\alpha - \lambda_2)(\varkappa_\alpha - \lambda_3)(\varkappa_\alpha - \lambda_4)}{f'(\varkappa_\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \cdots 6;$$

wobei $f'(\varkappa_\alpha)$ der nach λ genommene Differentialquotient von:

$$f(\lambda) = (\varkappa_1 - \lambda)(\varkappa_2 - \lambda) \cdots (\varkappa_6 - \lambda)$$

ist, nachdem man für λ den Werth $\varkappa_\alpha$ eingesetzt hat.

Jede Gerade des Raumes besitzt also 4 Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, und diese 4 Parameter gehören auch ihren 15 conjungirten und ihren 16 adjungirten Geraden zu. Die Raumgerade wird zur Tangente der Singularitätenfläche, wenn zwei von ihren 4 Parametern, etwa λ_3 und λ_4, einander gleich werden. Bleiben λ_1 und λ_2 constant, während der Doppelparameter $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$ variirt, so erhält man alle Tangenten in einem bestimmten Punkte der Fläche. Wird der Doppelparameter gleich einem der 6 Werthe $\varkappa$, so erhält man eine der 6 in jenem festen Punkte berührenden Doppeltangenten; wird dieser endlich gleich einem der beiden einfachen Parameter λ_1 oder λ_2, so erhält man die Haupttangenten in dem genannten Punkte. Durch Vorzeichenänderung ergeben sich aus einem Tangentenbüschel 32 zusammengehörige und mithin aus einem Punkte der Kummer'schen Fläche und seiner Tangentialebene ebenfalls 32 zusammengehörige; wir theilen diese Punkte und Ebenen ebenso wie früher die 32 Geraden in zwei Gruppen von 16 *conjungirten* und 16 *adjungirten* Elementen, den Punkten der einen Gruppe sind die Ebenen der andern adjungirt und umgekehrt.

Lassen wir die beiden einfachen Parameter eines solchen Tangentenbüschels zusammenfallen, so tritt Gleiches für die Haupttangenten ein, d. h. die Büschel liegen dann in einer der 16 Doppelebenen, oder sie verlaufen durch einen der 16 Knotenpunkte. Die Knotenpunkte und Doppelebenen bilden ein System zusammengehöriger Elemente, wesshalb jeder Knotenpunkt mit 6 Doppelebenen und jede Doppelebene mit 6 Knotenpunkten vereinigt liegt, wie das ja von den Singularitäten der Kummer'schen Fläche bekannt ist. Alle diese Betrachtungen wurden bereits von Klein angestellt und finden sie hier eine Stelle, um dem Folgenden als Grundlage zu dienen. Klein ging weiter von der Annahme aus, dass die Knotenpunkte reell seien, und kam so zu 4 verschiedenen Kummer'schen Flächen, jeder Typus lieferte eine, die er auch näher untersuchte; später wurden dieselben modellirt, wie schon bei Gelegenheit erwähnt. Ich werde der Vollständigkeit halber auch diese Flächen, welche bereits bekannt sind, hier aufzählen und in dem hier festgehaltenen Sinne behandeln.

c) Ueber die gestaltliche Anordnung im Allgemeinen.

Der Behandlung der einzelnen Typen wollen wir noch Einiges über die gestaltliche Anordnung der Kummer'schen Fläche im Allgemeinen vorausschicken. Wie schon bemerkt gehören die Tangenten der Kummer'schen Fläche zu je 32 zusammen; sie unterscheiden sich nur durch die Vorzeichen ihrer Coordinaten und gehen aus einer dieser Geraden hervor durch die Transformationen, welche durch die 6 linearen Fundamentalcomplexe, die 15 Congruenzen und die 10 Linienflächen derselben bestimmt sind. Die 15 Congruenzen liefern zu einer Geraden die 15 *conjungirten*, die Complexe und Linienflächen die 16 *adjungirten* Elemente. Daraus folgt dann weiter, wenn wir das Tangentenbüschel als Object unserer Untersuchung wählen, dass immer 32 solcher Büschel zusammengehören; sie zerfallen in 2 Gruppen, so zwar, dass zu den Berührungspunkten der einen Gruppe die 16 Tangentialebenen der andern Gruppe die adjungirten Elemente bilden und vice versa. Es gehören also in diesem Sinne immer 16 conjungirte und 16 adjungirte Punkte der Kummer'schen Fläche zusammen, deren Tangenten dieselben beiden einfachen Parameter λ_1 und λ_2 aufweisen; wir bezeichnen sie kurzweg als die beiden Parameter des betreffenden Punktes selbst. Lassen wir einen dieser Parameter constant, so bilden die zugehörigen Punkte eine Curve, nämlich eine Haupttangentencurve*) der Kummer'schen Fläche.

Diese Curven $\lambda =$ Const. überdecken die Kummer'sche Fläche doppelt und schneiden sich zu je zwei in 32 zusammengehörigen Punkten. Dem System dieser Haupttangentencurven gehören doppelt zählend 6 *ausgezeichnete* Curven an, entsprechend den Werthen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4, \varkappa_5, \varkappa_6$; sie sind doppelt zählend, da für die Punkte einer solchen Curve eine der Coordinaten x verschwindet, es also nur noch 16 Vorzeichencombinationen giebt, d. h. in diesen Uebergangsfällen rückt jeder der 16 conjungirten Punkte mit einem adjungirten Punkte zusammen. In den Schnittpunkten zweier ausgezeichneter Haupttangentencurven sind je 2 conjungirte und 2 adjungirte Punkte zusammengefallen, da hier immer 2 Coordinaten x verschwinden; jene Punkte sind demnach auf den Directricen der bezüglichen Congruenz gelegen. Klein nennt sie Doppelinflexionspunkte der Kummer'schen Fläche, weil ihre beiden Haupttangenten (entsprechend den Parametern $\varkappa_\alpha, \varkappa_\beta$) vierpunktig die Fläche berühren; in denselben stossen 4 Gebiete der Kummer'schen Fläche an einander, getrennt durch die beiden ausgezeichneten Haupttangentencurven, wie es Figur 1 schematisch darstellt. Den Punkten eines dieser Gebiete sind die Punkte der beiden anstossenden Gebiete adjungirt, die Punkte des andern Gebietes conjungirt; bezeichnen wir demgemäss die Gebiete selbst als conjungirte und adjungirte, so können wir kurz sagen: *Die ungleichartigen Gebiete besitzen eine gemeinsame Grenze in einer ausgezeichneten Haupttangentencurve, die gleichartigen Gebiete jedoch nicht.* Die letzten Bemerkungen kommen natürlich nur zur Geltung, wenn der Doppelinflexionspunkt und gleichzeitig seine beiden Haupttangenten reell sind.

---

*) Siehe: Klein und Lie, Monatsbericht der Berliner Akademie 1870.

Aus dem Gesagten folgt sofort der Satz: Besteht die Kummer'sche Fläche aus mehreren getrennten Theilen, so wird jeder durch die Transformationen, welche mit den Congruenzen verknüpft sind, in sich selbst übergeführt, wenn er von den zugehörigen Directricenpaaren*) in reellen Punkten geschnitten wird. Denn von den Durchstosspunkten der Directricen kann man durch stetige Wanderung auf der Fläche unmittelbar auf die ganzen Flächentheile schliessen. Bei den übrigen Congruenzen sind noch zwei Fälle zu unterscheiden. Liegen die beiden Directricen eines Paares auf derselben Seite eines Flächentheils (wie es bei endlichen Flächentheilen immer der Fall sein muss), so wird derselbe durch die bez. Transformation in einen andern Theil übergeführt, liegen sie jedoch auf verschiedenen Seiten desselben, so geht er durch die Transformation in sich selbst über. Es würde sonst nothwendigerweise eine Doppelcurve entstehen, da jeder Punkt von seinem transformirten Punkte durch das bezügliche Directricenpaar harmonisch getrennt wird.

Hiermit mögen die allgemeinen Bemerkungen, welche bei den einzelnen Typen ihre Verwendung finden sollen, beendet werden und ich wende mich dem Kernpunkte der ganzen Betrachtung zu.

§ 2.

Ueber die Werthe der Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_6$ bei den einzelnen Typen.

Das Fundament der Entwickelungen der späteren Paragraphen wird durch die nachfolgenden Untersuchungen gebildet. Der Grundgedanke derselben lässt sich folgendermassen formuliren. Die Frage nach den Gestalten einer Fläche setzt immer voraus, dass die Flächengleichung blos reelle Coefficienten enthalte; nur solche Flächen können hier discutirt werden. Nun steht aber die Kummer'sche Fläche in covarianter Beziehung zu dem Büschel:

$$\frac{x_1^2}{\varkappa_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{\varkappa_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{\varkappa_3-\lambda}+\frac{x_4^2}{\varkappa_4-\lambda}+\frac{x_5^2}{\varkappa_5-\lambda}+\frac{x_6^2}{\varkappa_6-\lambda}=0,$$

also können wir uns auch fragen, welche Werthe müssen die Constanten dieser Complexgleichung annehmen, damit die Coefficienten der bez. Kummer'schen Fläche reell werden, da ja die letzteren aus jenen Constanten aufgebaut sind. Die Beantwortung dieser Frage wird aber durch die Bemerkung ermöglicht, dass die Kummer'sche Fläche zu jedem imaginären Complexe des Büschels in der gleichen Beziehung stehen muss, wie zu seinem conjugirt imaginären, sollen

*) Wir können uns bei unseren Untersuchungen, wie wir später sehen werden, auf Congruenzen mit reellen Directricen beschränken.

anders die Coefficienten ihrer Gleichung reell sein; d. h. *jenes System confocaler Complexe enthält zu jedem imaginären Complexe auch den conjugirt imaginären,* da die Kummer'sche Fläche nur zu einem einzigen Complexbüschel in der genannten fundamentalen Beziehung steht. Alles Weitere besteht nur noch aus den Schlüssen, die sich hieran anknüpfen.

Wir gehen jetzt von jener Gleichung in den x zu der entsprechenden Gleichung in den z über; alsdann sind 2 conjugirt imaginäre Complexe dadurch definirt, dass die Coefficienten ihrer Gleichungen conjugirt imaginär sind. Anstatt nun bei diesem Uebergange von der obigen Gleichung des Complexbüschels auszugehen, benützen wir die mit Rücksicht auf die Identität äquivalente Form:

$$x_1^2\,\frac{\varkappa_1-\lambda'}{\varkappa_1-\lambda}+x_2^2\,\frac{\varkappa_2-\lambda'}{\varkappa_2-\lambda}+\cdots+x_6^2\,\frac{\varkappa_6-\lambda'}{\varkappa_6-\lambda}=0,$$

und nehmen an, λ' sei der Parameter des zu dem Complexe λ conjugirt imaginären Complexes. Die bez. Gleichung in den reellen Coordinaten z hat dann, den 4 oben aufgezählten Typen entsprechend, 4 verschiedene Formen, die der Reihe nach durch die folgenden Gleichungen gegeben sind:

1)
$$z_1^2\,\frac{\varkappa_1-\lambda'}{\varkappa_1-\lambda}-z_2^2\,\frac{\varkappa_2-\lambda'}{\varkappa_2-\lambda}+z_3^2\,\frac{\varkappa_3-\lambda'}{\varkappa_3-\lambda}-z_4^2\,\frac{\varkappa_4-\lambda'}{\varkappa_4-\lambda}+z_5^2\,\frac{\varkappa_5-\lambda'}{\varkappa_5-\lambda}-z_6^2\,\frac{\varkappa_6-\lambda'}{\varkappa_6-\lambda}=0,$$

2)
$$z_1^2\,\frac{\varkappa_1-\lambda'}{\varkappa_1-\lambda}-z_2^2\,\frac{\varkappa_2-\lambda'}{\varkappa_2-\lambda}+z_3^2\,\frac{\varkappa_3-\lambda'}{\varkappa_3-\lambda}-z_4^2\,\frac{\varkappa_4-\lambda'}{\varkappa_4-\lambda}$$
$$+\frac{z_5^2-z_6^2}{2}\left(\frac{\varkappa_5-\lambda'}{\varkappa_5-\lambda}+\frac{\varkappa_6-\lambda'}{\varkappa_6-\lambda}\right)+z_5z_6i\left(\frac{\varkappa_5-\lambda'}{\varkappa_5-\lambda}-\frac{\varkappa_6-\lambda'}{\varkappa_6-\lambda}\right)=0,$$

3)
$$z_1^2\,\frac{\varkappa_1-\lambda'}{\varkappa_1-\lambda}-z_2^2\,\frac{\varkappa_2-\lambda'}{\varkappa_2-\lambda}$$
$$+\frac{z_3^2-z_4^2}{2}\left(\frac{\varkappa_3-\lambda'}{\varkappa_3-\lambda}+\frac{\varkappa_4-\lambda'}{\varkappa_4-\lambda}\right)+z_3z_4i\left(\frac{\varkappa_3-\lambda'}{\varkappa_3-\lambda}-\frac{\varkappa_4-\lambda'}{\varkappa_4-\lambda}\right)$$
$$+\frac{z_5^2-z_6^2}{2}\left(\frac{\varkappa_5-\lambda'}{\varkappa_5-\lambda}+\frac{\varkappa_6-\lambda'}{\varkappa_6-\lambda}\right)+z_5z_6i\left(\frac{\varkappa_5-\lambda'}{\varkappa_5-\lambda}-\frac{\varkappa_6-\lambda'}{\varkappa_6-\lambda}\right)=0,$$

4)
$$\frac{z_1^2-z_2^2}{2}\left(\frac{\varkappa_1-\lambda'}{\varkappa_1-\lambda}+\frac{\varkappa_2-\lambda'}{\varkappa_2-\lambda}\right)+z_1z_2i\left(\frac{\varkappa_1-\lambda'}{\varkappa_1-\lambda}-\frac{\varkappa_2-\lambda'}{\varkappa_2-\lambda}\right)$$
$$+\frac{z_3^2-z_4^2}{2}\left(\frac{\varkappa_3-\lambda'}{\varkappa_3-\lambda}+\frac{\varkappa_4-\lambda'}{\varkappa_4-\lambda}\right)+z_3z_4i\left(\frac{\varkappa_3-\lambda'}{\varkappa_3-\lambda}-\frac{\varkappa_4-\lambda'}{\varkappa_4-\lambda}\right)$$
$$+\frac{z_5^2-z_6^2}{2}\left(\frac{\varkappa_5-\lambda'}{\varkappa_5-\lambda}+\frac{\varkappa_6-\lambda'}{\varkappa_6-\lambda}\right)+z_5z_6i\left(\frac{\varkappa_5-\lambda'}{\varkappa_5-\lambda}-\frac{\varkappa_6-\lambda'}{\varkappa_6-\lambda}\right)=0.$$

In allen diesen Gleichungen kommen die 6 Grössen

$$\frac{\varkappa_1-\lambda'}{\varkappa_1-\lambda},\quad\frac{\varkappa_2-\lambda'}{\varkappa_2-\lambda},\quad\ldots,\quad\frac{\varkappa_6-\lambda'}{\varkappa_6-\lambda}$$

vor, deren gegenseitige Beziehung wir zunächst hier studiren, um von ihnen alsdann auf die Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_6$ selbst zu schliessen. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$\frac{\varkappa_\alpha - \lambda'}{\varkappa_\alpha - \lambda} = r_\alpha e^{i\varphi}, \quad \text{wo} \quad \alpha = 1, 2, \cdots, 6$$

zu nehmen ist. Da der durch irgend eine der obigen Gleichungen repräsentirte Complex bei der Vertauschung von λ und λ' in den conjugirt imaginären Complex übergeht, so müssen dabei auch die Coefficienten seiner Gleichung, abgesehen von einem überall gleichen Factor $\frac{1}{\varrho^2}$, die conjugirt imaginären Werthe annehmen. Bei dieser Operation gehen aber die Ausdrücke: $\frac{\varkappa_\alpha - \lambda'}{\varkappa_\alpha - \lambda} = r_\alpha e^{i\varphi_\alpha}$ in ihre reciproken Werthe über, so dass sich hieraus die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung dieser Ausdrücke ergeben.

Es sind nun 2 verschiedene Fälle zu unterscheiden: Entweder zwei jener 6 Brüche, etwa $\frac{\varkappa_1 - \lambda'}{\varkappa_1 - \lambda}$ und $\frac{\varkappa_2 - \lambda'}{\varkappa_2 - \lambda}$, bilden *selbst* zwei Coefficienten der betr. Gleichung, oder es thun dies statt dessen die Combinationen

$$\left(\frac{\varkappa_1 - \lambda'}{\varkappa_1 - \lambda} + \frac{\varkappa_2 - \lambda'}{\varkappa_2 - \lambda}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\varkappa_1 - \lambda'}{\varkappa_1 - \lambda} - \frac{\varkappa_2 - \lambda'}{\varkappa_2 - \lambda}\right) i.$$

Im *erst genannten* Falle haben wir nach den vorausgeschickten Bemerkungen die Relationen:

$$\frac{1}{r_1} e^{-i\varphi_1} = \frac{1}{\varrho^2} r_1 e^{-i\varphi_1}, \quad \text{und} \quad \frac{1}{r_2} e^{-i\varphi_2} = \frac{1}{\varrho^2} r_2 e^{-i\varphi_2};$$

oder: $r_1^2 = r_2^2 = \varrho^2$; d. h. bei einer Interpretation auf der complexen Kugel liegen die beiden Punkte $\frac{\varkappa_1 - \lambda'}{\varkappa_1 - \lambda}$ und $\frac{\varkappa_2 - \lambda'}{\varkappa_2 - \lambda}$ auf der Peripherie eines Kreises*) ϱ, dessen Ebene auf der Axe $(0\,\infty)$ senkrecht steht.

Im *zweiten* Falle ergeben sich die Beziehungen:

$$\frac{1}{r_1} e^{-i\varphi_1} + \frac{1}{r_2} e^{-i\varphi_2} = \frac{1}{\varrho^2}\left\{r_1 e^{-i\varphi_1} + r_2 e^{-i\varphi_2}\right\},$$

und

$$i\left\{\frac{1}{r_1} e^{-i\varphi_1} - \frac{1}{r_2} e^{-i\varphi_2}\right\} = -\frac{1}{\varrho^2} i\left\{r_1 e^{-i\varphi_1} - r_2 e^{-i\varphi_2}\right\};$$

woraus durch kreuzweise Multiplication dieser Gleichungen folgt:

$$e^{-2i\varphi_2} - e^{-2i\varphi_1} = e^{-2i\varphi_1} - e^{-2i\varphi_2},$$

oder:

$\varphi_1 = \varphi_2$, resp. $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$, und mithin: $\varrho^2 = r_1 r_2$, resp. $\varrho^2 = -r_1 r_2$.

---

*) Unter einem Kreise ϱ auf der Kugel ist ein solcher Kreis verstanden, der bei der stereographischen Projection auf die Ebene den Radius ϱ erhält.

Auch dieses Resultat lässt sich leicht auf der complexen Kugel deuten; es will sagen, dass die Verbindungslinie der Punkte $\frac{\varkappa_1 - \lambda'}{\varkappa_1 - \lambda}$ und $\frac{\varkappa_2 - \lambda'}{\varkappa_2 - \lambda}$ die Axe ($0\,\infty$) in einem Punkte schneidet, dessen Polarebene in Bezug auf die Kugel den Kreis ϱ enthält. Je nachdem also $\varrho^2 = + r_1 r_2$ oder $\varrho^2 = - r_1 r_2$ ist, liegt dieser Schnittpunkt ausserhalb oder innerhalb der Kugel. Bei den drei ersten Typen bestimmt sich ϱ^2 als positive Grösse, dagegen sind beim Typus IV. beide Fälle zulässig.

Die 6 Punkte $\frac{\varkappa_\alpha - \lambda'}{\varkappa_\alpha - \lambda}$ *haben also bei den einzelnen Typen folgende Lage auf der complexen Kugel.*

Typus I. Die 6 Punkte liegen auf einem Kreise, dessen Ebene auf der Axe ($0\,\infty$) senkrecht steht.

Typus II. 4 Punkte liegen auf einem derartigen Kreise und die Verbindungslinie der beiden übrigen geht durch den Pol der Kreisebene.

Typus III. 2 Punkte liegen auf einem derartigen Kreise, die 4 übrigen bilden 2 Paare, deren resp. Verbindungslinien durch den Pol der Kreisebene hindurchgehen.

Typus IV. Die 6 Punkte bilden 3 Paare, deren Verbindungslinien sich in einem Punkte der Axe ($0\,\infty$), dem Pol der Ebene ϱ, schneiden; und zwar kann dieser Schnittpunkt innerhalb oder ausserhalb der Kugel liegen.

Die hier gefundenen Eigenschaften der 6 Punkte bleiben ungeändert bei einer beliebigen linearen Transformation der complexen Kugel, nur tritt an Stelle der Ebene senkrecht zur Axe ($0\,\infty$) eine beliebige andere Ebene.

Nun kann man aber die 6 Punkte $\frac{\varkappa_\alpha - \lambda'}{\varkappa_\alpha - \lambda}$ durch die lineare Transformation: $z = \frac{\zeta - \lambda'}{\zeta - \lambda}$ in die 6 Punkte $\varkappa_\alpha$ verwandeln; es besitzen somit auch die 6 Punkte $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_6$ bei den einzelnen Typen die vorher geschilderte Lage, nur ist an Stelle jener Ebene senkrecht zur Axe ($0\,\infty$) eine beliebige Ebene zu setzen.

Da nun *immer dann*, aber auch *nur dann* die Coefficienten der Kummer'schen Fläche reell werden, wenn die imaginären Complexe des confocalen Systems paarweise conjugirt sind, *so haben wir hiermit die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Grössen* $\varkappa$ *aufgestellt.*

Beachtet man noch, dass die Gleichung des confocalen Complexsystems nicht geändert wird, wenn man auf die Constanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_6$ und gleichzeitig auf die Variablen λ, λ' eine beliebige lineare Transformation*) anwendet, so sieht man, *dass jene allgemeinere Lage der* $\varkappa$, *durch geeignete Transformation jener Ebene stets durch folgende specielle ersetzt werden kann:*

Bei den ersten 3 Typen sind 6 resp. 4 resp. 2 Constanten $\varkappa$ reell, die übrigen paarweise conjugirt imaginär. Beim Typus IV. sind wieder 2 Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Ebene durch den Kreis ϱ die Kugel schneidet oder nicht; im ersten Falle kann man die Ebene durch den Kreis ϱ in die Ebene durch den Kreis der reellen Zahlen, im zweiten Falle in die *unendlich ferne* Ebene transformiren. Da aber die Punkte $\varkappa$ paarweise auf 3 Geraden liegen, die durch den Pol der bez. Ebene hindurchgehen, so sind in jenem Falle die Grössen $\varkappa$ paarweise conjugirt imaginär, in diesem Falle haben sie die Form:

$$\varkappa_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{r_1} e^{i\varphi_1},$$
$$\varkappa_3 = r_2 e^{i\varphi_2}, \quad \varkappa_4 = -\frac{1}{r_2} e^{i\varphi_2},$$
$$\varkappa_5 = r_3 e^{i\varphi_3}, \quad \varkappa_6 = -\frac{1}{r_3} e^{i\varphi_3},$$

da die Verbindungslinien $\varkappa_1\varkappa_2$, $\varkappa_3\varkappa_4$ und $\varkappa_5\varkappa_6$ durch den Kugelmittelpunkt gehen. —

Nachdem wir jetzt die Form der Constanten $\varkappa$ bestimmt haben, bleibt uns nur noch übrig, Einiges über die Complexsysteme:

$$\frac{x_1^2}{\varkappa_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{\varkappa_2 - \lambda} + \cdots + \frac{x_6^2}{\varkappa_6 - \lambda} = 0,$$

selbst zu sagen. Legen wir dem λ einen reellen Werth bei, so erhalten wir bei den ersten drei Typen, sowie bei dem ersten Falle des Typus IV. einen reellen**) Complex, insofern die bez. Gleichung in den Coordinaten z reelle Coefficienten besitzt; nehmen wir dagegen λ imaginär, so wird die zugehörige Complexgleichung imaginär, und der Complex enthält blos noch eine reelle Congruenz, die er mit dem conjugirt imaginären Complex gemein hat. In dem zweiten Falle des Typus IV. sind *alle* Complexe λ imaginär und enthalten folglich nur noch je doppelt unendlich viele reelle gerade Linien. Es folgt dies daraus, dass in diesem Falle die Parameter λ und λ' zweier conjugirt imaginärer Complexe auf der complexen Kugel durch die *Endpunkte*

---

*) Die Coefficienten der Complexgleichung ändern sich offenbar nicht, wenn man die 8 Grössen: $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_6, \lambda, \lambda'$ um dieselbe Constante ändert, oder sie mit derselben Constanten multiplicirt, oder endlich an ihre Stelle die reciproken Werthe setzt; aus diesen 3 Operationen lässt sich aber bekanntlich jede lineare Transformation zusammensetzen.

**) Unter reell ist nur eine reelle Gleichung des Complexes verstanden, nicht aber ein Complex mit dreifach unendlich vielen reellen Geraden; über das letztere geben die einzelnen Typen Aufschluss.

eines Durchmessers dargestellt werden, also von der Form sind, $\lambda = \varrho e^{i\varphi}$ und $\lambda' = -\frac{1}{\varrho} e^{i\varphi}$, so dass niemals $\lambda = \bar{\lambda}'$ werden kann, wie das doch für reelle Complexe gefordert wird. Man beweist dies nämlich direct auf folgende Weise*). Setzen wir:

$$\frac{\varkappa_1 - \lambda'}{\varkappa_1 - \lambda} + \frac{\varkappa_2 - \lambda'}{\varkappa_2 - \lambda} = a + ib,$$

also:

$$\frac{\varkappa_1 - \lambda}{\varkappa_1 - \lambda'} + \frac{\varkappa_2 - \lambda}{\varkappa_2 - \lambda'} = \frac{1}{\varrho^2}(a - ib),$$

so folgt:

$$(1 + d)\left(1 + \frac{1}{d}\right) = \frac{a^2 + b^2}{\varrho^2}, \quad \text{wo} \quad d = \frac{\varkappa_1 - \lambda'}{\varkappa_1 - \lambda} : \frac{\varkappa_2 - \lambda'}{\varkappa_2 - \lambda}.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung reell ist, so muss es auch die linke sein, d. h. das Doppelverhältniss d muss reell sein, oder die 4 Punkte $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, λ, λ' müssen auf einem Kugelkreise liegen. Fügt man noch hinzu, dass auch $\varkappa_3$, $\varkappa_4$, λ, λ' und ebenso $\varkappa_5$, $\varkappa_6$, λ, λ' auf einem Kugelkreise liegen müssen, so folgt daraus die obige Behauptung.

§ 3.

Typus I.

Hier sind die Constanten $\varkappa$ sämmtlich reell, und wir machen für diese reellen Grössen die Voraussetzung: $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \varkappa_3 > \varkappa_4 > \varkappa_5 > \varkappa_6$, was wir dadurch erreichen, dass wir die Indices der $\varkappa$ nach ihrer Grösse wählen, dann werden jedoch diese Indices nicht mehr mit den Indices der betreffenden z in der Complexgleichung übereinstimmen. Schreiben wir nun irgend eine Permutation dieser 6 Constanten $\varkappa$ an, so mag durch ihre Stellung in der Permutation auch ihre Stellung in der Complexgleichung gegeben sein; z. B. $\varkappa_3 \varkappa_2 \varkappa_4 \varkappa_1 \varkappa_6 \varkappa_5$ entspricht der Gleichung:

$$\frac{z_1^2}{\varkappa_3 - \lambda} - \frac{z_2^2}{\varkappa_2 - \lambda} + \frac{z_3^2}{\varkappa_4 - \lambda} - \frac{z_4^2}{\varkappa_1 - \lambda} + \frac{z_5^2}{\varkappa_6 - \lambda} - \frac{z_6^2}{\varkappa_5 - \lambda} = 0.$$

Wir legen uns jetzt die Frage vor, wie viele, von einander verschiedene Formen die Complexgleichung annimmt, wenn man die Grössen $\varkappa$ auf alle möglichen Weisen permutirt. Es giebt im Ganzen 720 Permutationen; aber man sieht sofort, dass *die Art der Complexgleichung* nicht geändert wird, wenn man die Elemente 1, 3, 5 in beliebiger Weise vertauscht und die Elemente 2, 4, 6 in einer beliebigen andern Weise, oder wenn man die Elemente 1, 3, 5 an die Stelle von 2, 4, 6 setzt und umgekehrt. Denn alle diese Operationen sind gleichbedeutend

*) Indirect kann man die Behauptung auch verificiren, indem man durch Ausrechnung zeigt, dass die Coefficienten der Complexe λ und λ' conjugirt imaginär werden.

mit reellen Transformationen der Coordinaten z (nämlich mit gewissen Vertauschungen derselben), was bekanntlich *die Art einer Gleichung* nicht alterirt. Die Zahl der Permutationen der Elemente 1, 3, 5 beträgt 6, ebenso die Zahl der Permutationen von 2, 4, 6; es bleiben folglich nur noch $\frac{720}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 10$ verschiedene Permutationen der sechs Grössen $\varkappa$, die hier in Betracht zu ziehen sind. Dieselben sind repräsentirt durch:

$$\text{a)}\quad \varkappa_1\, \varkappa_2\, \varkappa_3\, \varkappa_4\, \varkappa_5\, \varkappa_6\,,$$

$$\text{b)}\ \begin{cases} \varkappa_1\, \varkappa_2\, \varkappa_3\, \varkappa_4\, \varkappa_6\, \varkappa_5\,, \\ \varkappa_1\, \varkappa_2\, \varkappa_3\, \varkappa_5\, \varkappa_4\, \varkappa_6\,, \\ \varkappa_1\, \varkappa_2\, \varkappa_4\, \varkappa_3\, \varkappa_5\, \varkappa_6\,, \\ \varkappa_1\, \varkappa_3\, \varkappa_2\, \varkappa_4\, \varkappa_5\, \varkappa_6\,, \\ \varkappa_2\, \varkappa_1\, \varkappa_3\, \varkappa_4\, \varkappa_5\, \varkappa_6\,, \\ \varkappa_6\, \varkappa_2\, \varkappa_3\, \varkappa_4\, \varkappa_5\, \varkappa_1\,. \end{cases}$$

$$\text{c)}\ \begin{cases} \varkappa_1\, \varkappa_2\, \varkappa_6\, \varkappa_4\, \varkappa_5\, \varkappa_3\,, \\ \varkappa_1\, \varkappa_5\, \varkappa_3\, \varkappa_4\, \varkappa_2\, \varkappa_6\,, \\ \varkappa_4\, \varkappa_2\, \varkappa_3\, \varkappa_1\, \varkappa_5\, \varkappa_6\,, \end{cases}$$

Diese 10 Fälle wären nun eigentlich zu unterscheiden, wir können sie jedoch durch eine einfache Betrachtung auf 3 nicht äquivalente Fälle reduciren. Wenden wir nämlich auf die Grössen $\varkappa$ eine lineare Transformation an, so vertauschen sich zwar die Complexe des Büschels unter einander, aber das Büschel selbst und folglich die zugehörige Kummer'sche Fläche bleibt ungeändert. Dadurch gehen aber die Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_6$ in 6 neue Grössen $\varkappa_1', \varkappa_2', \cdots, \varkappa_6'$ über, die nur noch die Eigenschaft besitzen, dass sie cyklisch auf einander folgen, dagegen kann jede von ihnen, je nach der Grösse der zugefügten Constanten, grösser als alle übrigen gemacht werden.

Um also der früheren Bezeichnungsweise getreu zu bleiben, welche die Indices nach der Grösse der $\varkappa$ bemass, müssen wir hier mehrmals eine cyklische Vertauschung der Indices vornehmen, bis dasjenige $\varkappa'$ den Index 1 erhält, welches den grössten Werth besitzt.

Wir sehen so, dass von den aufgezählten 10 Permutationen alle diejenigen zu einer Complexgleichung von derselben Art führen, welche durch cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 aus einander hervorgehen. *Daher erweisen sich die Complexe der Gruppe* b) *sowie die Complexe der Gruppe* c) *unter sich als gleichartig.* Wir haben von jeder Gruppe nur einen Repräsentanten zu wählen und als solche mögen folgende 3 Combinationen stehen:

$$\text{a)}\quad \varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_3,\ \varkappa_4,\ \varkappa_5,\ \varkappa_6,$$
$$\text{b)}\quad \varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_3,\ \varkappa_4,\ \varkappa_6,\ \varkappa_5,$$
$$\text{c)}\quad \varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_6,\ \varkappa_4,\ \varkappa_5,\ \varkappa_3,$$

die wir einzeln unserer Untersuchung zu unterwerfen haben.

Untersuchung des Falles Ia:

$\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_3,\ \varkappa_4,\ \varkappa_5,\ \varkappa_6.$

Die Geraden der Complexe:

$$\frac{x_1^2}{\varkappa_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{\varkappa_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{\varkappa_3-\lambda}+\frac{x_4^2}{\varkappa_4-\lambda}+\frac{x_5^2}{\varkappa_5-\lambda}+\frac{x_6^2}{\varkappa_6-\lambda}=0$$

sind reell, wenn die Coordinaten x_1, x_3, x_5 reell, x_2, x_4, x_6 aber rein imaginär sind, oder wenn die Quadrate von x_1, x_3, x_5 positiv, von x_2, x_4, x_6 negativ sind. Diese Quadrate sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\varrho x_\alpha^2=\frac{(\varkappa_\alpha-\lambda_1)(\varkappa_\alpha-\lambda_2)(\varkappa_\alpha-\lambda_3)(\varkappa_\alpha-\lambda_4)}{f'(\varkappa_\alpha)};\quad \alpha=1,2,\cdots,6,$$

wobei die Nenner $f'(\varkappa_1)$, $f'(\varkappa_2)$, $\cdots$, $f'(\varkappa_6)$, abwechselnd positiv und negativ sind in Folge der Voraussetzung: $\varkappa_1>\varkappa_2>\cdots>\varkappa_6$. Die Zähler dieser Ausdrücke müssen demnach sämmtlich positiv sein, wenn die zugehörige Gerade reell sein soll. Hieraus schliessen wir: Die Parameter einer reellen Geraden liegen paarweise zwischen denselben Grenzen*) $\varkappa$, oder sie sind paarweise conjugirt imaginär. Die Coordinaten eines Tangentenbüschels sind:

$$\varrho x_\alpha^2=\frac{(\varkappa_\alpha-\lambda_1)(\varkappa_\alpha-\lambda_2)(\varkappa_\alpha-\lambda)^2}{f'(\varkappa_\alpha)};\quad \alpha=1,2,\cdots,6;$$

der zugehörige Punkt und die zugehörige Ebene sind also reell, wenn λ_1 und λ_2 zwischen den nämlichen Grenzen $\varkappa$ liegen, oder wenn sie conjugirt imaginär sind. Im ersten Falle haben wir es mit einem hyperbolischen Punkte der Kummer'schen Fläche zu thun, da seine Haupttangenten λ_1 und λ_2 reell sind, im zweiten mit einem elliptischen Punkte. Werden die beiden einfachen Parameter ebenfalls gleich, so kommen die Geraden in den Doppelebenen und durch die Knotenpunkte; diese Geraden sind alle reell und folglich besitzt die betrachtete Kummer'sche Fläche 16 reelle Knotenpunkte und 16 reelle Doppelebenen, da beim Typus I. die 32 zusammengehörigen Elemente immer gleichzeitig reell sind. —

Untersuchen wir zunächst die hyperbolischen Punkte etwas näher und betrachten wir alle diejenigen Punkte, deren Parameter λ_1, λ_2 zwischen zwei festen Grenzen $\varkappa$, etwa zwischen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, liegen; sie bilden 32 zusammengehörige Gebiete auf der Kummer'schen Fläche, nämlich 16 conjungirte und 16 adjungirte. Wie wir nun früher gesehen haben, stossen immer 2 conjungirte und 2 adjungirte Gebiete in einem Doppelinflexionspunkte zusammen; sie werden hier durch die ausgezeichneten Curven $\lambda=\varkappa_1$ und $\lambda=\varkappa_2$ von einander getrennt und ihre

*) Unter solchen Grenzen sind offenbar zwei aufeinanderfolgende Grössen $\varkappa$ zu verstehen.

Coordinaten*) unterscheiden sich nur durch die Vorzeichen von x_1 und x_2. Je 4 derartig zusammenhängende Gebiete bilden ein hyperbolisches Segment der Kummer'schen Fläche, welches, entsprechend den Parametern $\lambda_1 = \lambda_2$, von 2 Doppelebenen und 2 Knotenpunkten begrenzt wird. Die 32 zusammengehörigen Gebiete bilden also 8 hyperbolische Segmente; die Parameter ihrer Punkte liegen *beide* zwischen den Grenzen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$. *Indem wir so je 2 aufeinanderfolgende $\varkappa$ zu Grenzen wählen, erhalten wir im Ganzen 48 hyperbolische Segmente.*

Von den elliptischen Punkten lässt sich Folgendes sagen. *Sie bilden nur 32 zusammengehörige Gebiete, 16 conjungirte und 16 adjungirte,* da ihre imaginären Parameter ja an keine reellen Grenzen gebunden sind; es sind dies die elliptischen Segmente der Fläche. Die Begrenzung dieser Gebiete beschreiben die Punkte mit gleichen und folglich reellen Parametern; die ganze Contour wird durchlaufen, wenn dieser Parameter $\lambda_1 = \lambda_2$ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. Bewegt sich nun der Parameter $\lambda_1 = \lambda_2$ durch einen der Werthe $\varkappa$ etwa $\varkappa_i$ hindurch, so kehrt die entsprechende Coordinate x_i ihr Vorzeichen um, indem sie durch Null hindurchgeht; d. h. die Contour wird gebildet abwechselnd von 3 Doppelebenen und 3 Knotenpunkten, da ja die Geraden in den Doppelebenen und diejenigen durch die Knotenpunkte sich durch eine ungerade Anzahl von Vorzeichenwechseln unterscheiden.

Bedenken wir noch, dass in jeder Doppelebene ein Berührungskegelschnitt liegt und dass von jedem Knotenpunkte ein Berührungskegel ausgeht, dass ferner jedem Punkte des Kegelschnitts und ebenso jeder Ebene des Tangentialkegels ein Parameter eindeutig zugeordnet ist, so übersieht man sofort folgende Sätze: *Die hyperbolischen Segmente werden von 2 Curvenbogen und 2 Kegelsegmenten begrenzt, deren Parameter zwischen denselben Grenzen $\varkappa$ liegen. Die elliptischen Segmente sind begrenzt von 3 Curvenbogen und 3 Kegelsegmenten.* Und zwar liegt bei 16 conjungirten Segmenten der Parameter $\lambda_1 = \lambda_2$ der Punkte der 3 Curvenbogen zwischen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ und $\varkappa_4$, resp. $\varkappa_5$ und $\varkappa_6$, bei den 16 adjungirten dagegen zwischen $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ und $\varkappa_5$, resp. $\varkappa_6$ und $\varkappa_1$. Siehe Fig. 2 und 3.**)

Um *die Gesammtgestalt der Fläche* zu übersehen, führen wir uns die Lage der reellen Directricenpaare gegen die Fläche vor die Augen.

---

*) Ich spreche öfters von den Coordinaten: $x_1, x_2, \cdots, x_6$ eines Punktes, während ich doch genau zu reden die Coordinaten sämmtlicher Geraden des zugehörigen Tangentenbüschels meine.

**) Die Gestalt der Fläche ist bereits von Kummer an einem Beispiele, dann allgemein von Klein untersucht worden, der auch den Verlauf der Haupttangentencurven auf einem Segmente angab; vergl. Monatsberichte der Berliner Akademie 1864, 1870.

Die 9 reellen Directricenpaare lassen sich folgendermassen in 3 Tetraeder zusammenfassen: 1 2, 3 4, 5 6; 2 3, 4 5, 6 1; 1 4, 2 5, 3 6. Die Kanten der beiden ersten Tetraeder schneiden die Fläche in den 48 reellen Doppelinflexionspunkten $\varkappa_1 \varkappa_2$, $\varkappa_3 \varkappa_4$, $\varkappa_5 \varkappa_6$, $\varkappa_2 \varkappa_3$, $\varkappa_4 \varkappa_5$, $\varkappa_6 \varkappa_1$, während die Kanten des letzten die Fläche gar nicht schneiden. Erinnern wir uns ferner an den schon vorher entwickelten Satz über das Verhältniss der Directricen zu der Kummer'schen Fläche, so finden wir: *Jeder Eckpunkt des Tetraeders* 1 2, 3 4, 5 6 *wird umschlossen von einem Flächentheile der Kummer'schen Fläche, deren jeder von* 4 *Knotenpunkten begrenzt wird, Gleiches gilt für das Tetraeder* 2 3, 4 5, 6 1; *in den Knotenpunkten stossen die zuerst genannten Flächentheile mit den letzteren zusammen. Die einzelnen Flächentheile haben die Gestalt von Tetraedern, deren Seitenflächen durch elliptische und deren Kanten durch hyperbolische Segmente ersetzt sind.* —

Nachdem wir so die Gestalt der Fläche ermittelt haben, bleibt uns noch übrig die Art der Doppeltangentensysteme, sowie die Gestalt der Haupttangentencurven zu untersuchen.

Es giebt 6 *Doppeltangentensysteme*, deren Art jedoch völlig gleich ist, da keine der Grössen $\varkappa$ vor der andern ausgezeichnet ist, und es genügt daher *ein* solches System näher zu betrachten, etwa das System 1. Es ist gegeben durch die Gleichungen:

$$x_1 = 0,$$

$$\varrho x_\alpha^2 = \frac{(\varkappa_\alpha - \varkappa_1)^2 (\varkappa_\alpha - \lambda_1)(\varkappa_\alpha - \lambda_2)}{f'(\varkappa_\alpha)}; \quad \alpha = 2, 3, \cdots, 6.$$

Liegen λ_1 und λ_2 zwischen den nämlichen Grenzen $\varkappa$, oder sind sie conjugirt imaginär, so erhalten wir reelle Doppeltangenten mit reellen Berührungspunkten; oder mit anderen Worten: *in jedem Punkte der Kummer'schen Fläche, sei er hyperbolisch oder elliptisch, giebt es immer* 6 *reelle Doppeltangenten*, eine jedem Systeme entsprechend; ihre Lage lässt sich an einem Modelle der Fläche leicht übersehen. Ausser diesen Doppeltangenten mit reellen Berührungspunkten giebt es auch *isolirte* Doppeltangenten; wir erhalten sie im vorliegenden Falle $(\lambda = \varkappa_1)$, wenn λ_1 zwischen $\varkappa_6$ und $\varkappa_1$, λ_2 aber zwischen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ liegt. Denn die Doppeltangente bleibt dann immer noch reell, da $x_1 = 0$ ist, dagegen werden die Berührungspunkte imaginär, weil λ_1 und λ_2 zwischen verschiedenen Grenzen $\varkappa$ liegen. Der Uebergang von jenen Doppeltangenten mit reellen Berührungspunkten zu diesen wird von den Doppeltangenten:

$$x_1 = 0, \quad \varrho x_\alpha^2 = \frac{(\varkappa_\alpha - \varkappa_1)^3 (\varkappa_\alpha - \lambda)}{f'(\varkappa_\alpha)}, \quad \alpha = 2, 3, \cdots, 6,$$

gebildet, wo λ zwischen $\varkappa_6 \cdots \varkappa_1 \cdots \varkappa_2$ liegt. Ihre Berührungspunkte fallen zusammen, sie sind also vierpunktig berührende Haupttangenten, deren Berührungspunkte auf der Haupttangentencurve $\varkappa_1$ liegen und die diese Curve schneiden, nicht etwa berühren. Der Uebergang endlich von den isolirten Doppeltangenten zu den imaginären wird gebildet von den Doppeltangenten:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \\ \varrho x_\alpha{}^2 = \dfrac{(\varkappa_\alpha - \varkappa_1)^2 (\varkappa_\alpha - \varkappa_2)(\varkappa_\alpha - \lambda)}{f'(\varkappa_\alpha)}, \end{cases}$$

resp.

$$\begin{cases} x_1 = 0, \qquad x_6 = 0, \\ \varrho x_\alpha{}^2 = \dfrac{(\varkappa_\alpha - \varkappa_1)^2 (\varkappa_\alpha - \varkappa_6)(\varkappa_\alpha - \lambda)}{f'(\varkappa_\alpha)}, \end{cases}$$

wo im ersten Falle λ zwischen $\varkappa_6$ und $\varkappa_1$, im zweiten zwischen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ liegt. In diesem Grenzfalle rückt nämlich je eine Doppeltangente mit einer adjungirten zusammen, um dann mit dieser zusammen conjugirt imaginär zu werden, wenn der eine einfache Parameter über $\varkappa_2$ nach $\varkappa_3$ resp. über $\varkappa_6$ nach $\varkappa_5$ hin rückt. Die conjugirt imaginären Berührungspunkte der Doppeltangenten des Grenzfalls liegen beide auf einem imaginären Theile der Curve $\varkappa_2$ resp. $\varkappa_6$.

Nach diesen Bemerkungen gelingt es leicht die Gestalt und Lage der *Haupttangentencurven* anzugeben. Alle solche Curven, deren Parameter λ = Const. zwischen denselben Grenzen $\varkappa$ liegen, verlaufen auf denselben 8 hyperbolischen Segmenten und schneiden sich auf jedem Segmente in 4 zusammengehörigen Punkten. Zu den Curven auf einem Segmente gehören doppelt zählend zwei ausgezeichnete Curven, entsprechend den beiden Grenzwerthen $\varkappa$; dieselben verlaufen über 16 Segmente, da jeder Werth $\varkappa$ zweimal als Grenze auftritt; überdies bestehen sie aus 4 geschlossenen Zügen. In der That gehören z. B. bei der Curve $\varkappa_1$ Punkte, deren Coordinaten sich nur durch Vorzeichen von x_6 und x_2 unterscheiden, demselben Curvenzuge an, da ja auf der Curve $\varkappa_1$ Punkte liegen, deren Coordinate x_6 resp. x_2 verschwindet, so dass sich nur noch 4 getrennte Züge ergeben. Die Gestalten der Curven auf einem Segmente sind in der Figur 2 gegeben. Wo eine gewöhnliche Haupttangentencurve eine der ausgezeichneten Curven schneidet, besitzt sie eine Inflexionstangente, da ja eine solche Tangente die Fläche vierpunktig berührt. Auch der Uebergang aus der allgemeinen Curve in die ausgezeichneten lässt sich dort leicht verfolgen.

Noch erwähnen will ich die *Gestalten der Schnittcurven* in den Tangentialebenen. Die Tangentialebene in einem elliptischen Punkte giebt eine Curve mit isolirtem Doppelpunkte und 3 paaren Zügen, da sie noch 16 reelle Doppeltangenten, die in den Doppelebenen liegen, aufweisen muss. Die Tangentialebene in einem hyperbolischen Punkte schneidet aus gleichen Gründen in 3 paaren Zügen, wovon der *eine* einen Doppelpunkt besitzt. Ein Beispiel geben die Fig. 4a und 4b.

Untersuchung des Falles Ib:

$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4, \varkappa_6, \varkappa_5.$

Für die reellen Geraden des Complexbüschels:

$$\frac{x_1^2}{\varkappa_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{\varkappa_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{\varkappa_3-\lambda}+\frac{x_4^2}{\varkappa_4-\lambda}+\frac{x_5^2}{\varkappa_6-\lambda}+\frac{x_6^2}{\varkappa_5-\lambda}=0,$$

müssen wieder die Quadrate von x_1, x_3, x_5 positiv, von x_2, x_4, x_6 negativ sein. Diese Quadrate sind gegeben durch die Gleichungen:

$$\varrho x_\alpha^2=\frac{(\varkappa_i-\lambda_1)(\varkappa_i-\lambda_2)(\varkappa_i-\lambda_3)(\varkappa_i-\lambda_4)}{f'(\varkappa_i)};\quad \begin{cases}\alpha=1,2,3,4,5,6,\\ i=1,2,3,4,6,5,\end{cases}$$

wo zu jedem α das darunter stehende i der Tabelle gehört.

Wir müssen demnach für eine reelle Gerade die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ so wählen, dass die Zähler von x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 gleiches Vorzeichen von x_5^2 und x_6^2 aber das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, da alsdann die Coordinaten $x_1^2, x_2^2, \cdots, x_6^2$ abwechselnd positiv und negativ werden, wie verlangt.

Daraus folgt, dass für eine reelle Gerade zwischen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$, $\varkappa_3$ und $\varkappa_4$, $\varkappa_5$ und $\varkappa_6$ eine *gerade* Anzahl von Wurzeln λ liegen muss, zwischen $\varkappa_4$ und $\varkappa_5$ resp. $\varkappa_6$ und $\varkappa_1$ dagegen eine *ungerade* Anzahl. Für eine Tangente der Kummer'schen Fläche, welche ja immer einen Doppelparameter besitzt, lässt sich das Resultat dahin aussprechen, dass von den beiden einfachen Parametern der eine zwischen $\varkappa_4$ und $\varkappa_5$, der andere zwischen $\varkappa_6$ und $\varkappa_1$ liegen muss. Hieran knüpfen sich sogleich wichtige Schlüsse für die zugehörige Kummer'sche Fläche. Die Fläche besitzt keine reellen Knotenpunkte und keine reellen Doppelebenen, da für eine reelle Tangente die beiden einfachen Parameter nicht einander gleich werden können; ferner ist die Fläche aus gleichem Grunde durchaus hyperbolisch gekrümmt. In jedem dieser Punkte schneiden sich zwei Haupttangentencurven, der Parameter der einen liegt zwischen $\varkappa_4$ und $\varkappa_5$, derjenige der andern zwischen $\varkappa_6$ und $\varkappa_1$. Auf der Kummer'schen Fläche liegen also zwei verschiedene Systeme von Haupttangentencurven, welche, jedes für sich, die Fläche einfach überdecken; jeder Schaar gehören doppelt zählend 2 ausgezeichnete Curven an, entsprechend den Werthen $\varkappa_4$, $\varkappa_5$ resp. $\varkappa_6$, $\varkappa_1$.

Um die *Gestalt der Fläche* zu entwickeln, benutzen wir den Satz, dass von 32 zusammengehörigen Punkten je 16 auf einem und demselben Flächentheile liegen, nämlich solche 16 Punkte, deren Coordinaten sich nur in den Vorzeichen von x_4, x_5, x_6 und x_1 unterscheiden. Es folgt dies daraus, dass auf einem Flächentheile 4 ausgezeichnete Curven $\varkappa_4$, $\varkappa_5$, $\varkappa_6$ und $\varkappa_1$ liegen, und dass ein Punkt beim Passiren einer dieser Curven jedesmal das Vorzeichen einer der Coordinaten x_4, x_6, x_5, x_1 ändert, indem dieselbe durch Null hindurchgeht. *Die*

Kummer'sche Fläche besteht deshalb aus nur zwei getrennten Theilen, jeder hat eine Gestalt, ähnlich der eines einschaligen Hyperboloids.

Der letzte Theil dieser Behauptung ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die ganze Fläche hyperbolisch gekrümmt sein muss. Die angegebene Gestalt stimmt auch völlig mit der Lage der reellen Directricen überein. Von den 9 reellen Directricenpaaren schneiden vier, nämlich 14, 16, 54, 56, die Fläche in reellen Punkten, den 32 Doppelinflexionspunkten (jede Directrix enthält 4), die übrigen 5 treffen die Fläche gar nicht. Von diesen spielt das Directricenpaar 23 eine besondere Rolle, indem die mit der bez. Congruenz verknüpfte Transformation die Flächentheile einzeln in sich transformirt, während die Transformationen der Congruenzen 12, 25, 34 und 36 den einen Flächentheil auf den andern beziehen. Nach dem Obigen liegt nämlich der Punkt $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ mit dem Punkte $(-x_1) x_2 x_3 (-x_4) (-x_5) (-x_6)$ oder, was dasselbe ist, mit dem Punkte: $x_1 (-x_2) (-x_3) x_4 x_5 x_6$ auf dem nämlichen Flächentheil; diese beiden Punkte gehen aber durch die Transformation der Congruenz 23 in einander über.

Die beiden hyperboloidartigen Theile der Kummer'schen Fläche schliessen in Folge dessen je eine Directrix 23 *ein, und eine aus*, genau wie ein einschaliges Hyperboloid von 2 conjugirten sie nicht schneidenden Polaren die eine einschliesst, die andere ausschliesst. Man könnte dabei noch die beiden Fälle unterscheiden, dass ein Flächentheil ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des andern liegt, je nachdem beide Theile dieselbe oder verschiedene Directricen einschliessen, jedoch sind diese Fälle, wie man leicht sieht, im projectivischen Sinne nicht verschieden.

Um die gestaltliche Anordnung der *Haupttangentencurven* zu beurtheilen, erinnern wir uns daran, dass jede Curve der einen Schaar jede aus der andern Schaar in 32 reellen Punkten schneidet, von welchen auf jeden hyperboloidförmigen Theil 16 kommen. Daraus schliessen wir, dass jede Haupttangentencurve auf jedem der beiden Flächentheile 4 unpaare Züge besitzt, so dass zwei Curven aus verschiedenen Schaaren sich stets in 32 reellen Punkten schneiden. Die Vertheilung der Curven auf den einzelnen Flächentheilen wird durch ihre cyklische Aufeinanderfolge gegeben; dieselbe wird, wenn λ und λ' zwei Curven der einen Schaar und μ und μ' zwei Curven der andern Schaar sind, durch folgendes Schema gegeben:

$$\varkappa_4 > \lambda > \lambda' > \varkappa_5 < \lambda' < \lambda < \varkappa_4 > \lambda > \lambda' > \varkappa_5 < \lambda' < \lambda < \varkappa_4,$$

und

$$\varkappa_6 > \mu > \mu' > \varkappa_1 < \mu' < \mu < \varkappa_6 > \mu > \mu' > \varkappa_1 < \mu' < \mu < \varkappa_6.$$

d. h. ein Ast einer Curve der ersten Schaar (etwa λ) trifft der Reihe nach die oben genannten Aeste (von jeder Curve 4 Aeste) der andern Schaar, um dann in sich zurückzulaufen; ebenso trifft ein Ast μ der zweiten

Schaar die genannten Aeste der ersten Schaar der Reihe nach. Dass die Aeste nach *einmaligem* Durchlaufen eines solchen Cyklus geschlossen sind, wird dadurch bedingt, dass ein Punkt beim Passiren einer ausgezeichneten Haupttangentencurve das Vorzeichen der bez. Coordinate umkehrt und der Cyklus von einer ausgezeichneten Curve jedesmal 2 Aeste enthält, so dass nach Durchlaufen des ganzen Cyklus die Vorzeichencombination wieder die ursprüngliche ist. Ich will nicht unterlassen hier ein bequemes Bild zur Veranschaulichung der Lage der Haupttangentencurven zu erwähnen. An Stelle eines hyperboloidförmigen Flächentheils nehmen wir geradezu ein einschaliges Hyperboloid, dessen Erzeugenden ja alsdann die Haupttangentencurven bilden. Aus einer Schaar Erzeugenden wählen wir 2 Paar Geraden aus, die gegen einander harmonisch gelegen sind; diese Geradenpaare entsprechen den ausgezeichneten Haupttangentencurven. Die übrigen Erzeugenden gehören zu je 4 zusammen, so zwar, dass je 4 zusammengehörige Gerade durch jene Paare harmonisch getrennt werden; sie entsprechen den 4 Aesten der allgemeinen Haupttangentencurve. Wird das Hyperboloid nun stetig deformirt, so dass es in einen Theil der Kummer'schen Fläche übergeht, so gehen die Erzeugenden der Art nach in die unpaaren Züge der Haupttangentencurven dieses Theiles über und wir erhalten dann den oben geschilderten Fall. —

Wir wenden uns jetzt den 6 Systemen von *Doppeltangenten* zu; dieselben zerfallen ersichtlich in *zwei* Gruppen. Die *eine* Gruppe wird gebildet von den beiden Systemen $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$; sie enthält bloss reelle Doppeltangenten mit reellen Berührungspunkten, welche auf verschiedenen Flächentheilen liegen, und ganz imaginäre Doppeltangenten, nicht aber isolirte. Denn eine Doppeltangente:

$$x_2 = 0,\quad \varrho x_\alpha^2 = \frac{(\varkappa_i-\varkappa_2)^2(\varkappa_i-\lambda)(\varkappa_i-\lambda')}{f'(\varkappa_i)},\quad \begin{cases}\alpha=1,3,4,5,6,\\ i=1,3,4,6,5,\end{cases}$$

ist reell und ebenso ihr Berührungspunkt $\lambda\lambda'$, wenn λ zwischen $\varkappa_4$ und $\varkappa_5$ und λ' zwischen $\varkappa_6$ und $\varkappa_1$ liegt; sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so wird dieselbe ganz imaginär. Die *andere* Gruppe besteht aus den 4 Systemen $\varkappa_4$, $\varkappa_5$, $\varkappa_6$ und $\varkappa_1$, sie enthält alle drei Arten von Doppeltangenten. So giebt z. B. das Doppeltangentensystem:

$$x_4 = 0,\qquad \varrho x_\alpha^2 = \frac{(\varkappa_i-\varkappa_4)^2(\varkappa_i-\lambda)(\varkappa_i-\lambda')}{f'(\varkappa_i)},\quad \begin{cases}\alpha=1,2,3,5,6,\\ i=1,2,3,6,5,\end{cases}$$

ganz reelle Tangenten, wenn λ zwischen $\varkappa_4$ und $\varkappa_5$ und λ' zwischen $\varkappa_6$ und $\varkappa_1$ liegt, isolirte Tangenten, wenn λ zwischen $\varkappa_3$ und $\varkappa_4$ und λ' zwischen $\varkappa_6$ und $\varkappa_1$ liegt, endlich imaginäre Tangenten in allen übrigen Fällen.

Schliesslich gebe ich noch die Gestalt der Durchschnittscurve einer

Tangentialebene mit der Fläche. Sie besitzt keine reellen Doppeltangenten, da die Fläche keine reellen Doppelebenen besitzt, dagegen verlaufen durch den Doppelpunkt der Curve 6 reelle Tangenten. Schon hieraus kann man die Gestalt der Curve erschliessen, Fig. 5; man sieht: der Flächentheil, welchen die Tangentialebene berührt, wird in 2 unpaaren Zügen geschnitten, der andere in einem Oval, das auch durchs Unendliche verlaufen kann. Dass wirklich nur dieser Fall zulässig ist, erkennt man am besten daraus, dass zwischen den Tangenten $\varkappa_4$ und $\varkappa_5$ und ebenso zwischen $\varkappa_6$ und $\varkappa_1$ immer eine und nur eine Haupttangente gelegen ist, während bei einer Curve mit sich selbst schneidendem paaren Zuge keine oder zwei Haupttangenten zwischen den beiden Tangenten an diesen paaren Zug liegen.

Behandlung des Falles Ic:

$$\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_6,\ \varkappa_4,\ \varkappa_5,\ \varkappa_3.$$

Das Complexsystem wird dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{x_1^2}{\varkappa_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{\varkappa_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{\varkappa_6-\lambda}+\frac{x_4^2}{\varkappa_4-\lambda}+\frac{x_5^2}{\varkappa_5-\lambda}+\frac{x_6^2}{\varkappa_3-\lambda}=0,$$

und folglich die Raumgeraden durch die Gleichungen:

$$\varrho x_\alpha^2=\frac{(\varkappa_i-\lambda_1)(\varkappa_i-\lambda_2)(\varkappa_i-\lambda_3)(\varkappa_i-\lambda_4)}{f'(\varkappa_i)},\quad \begin{cases}\alpha=1,2,3,4,5,6,\\ i=1,2,6,4,5,3.\end{cases}$$

Auch hier müssen für eine reelle Gerade wieder x_1^2, x_3^2, x_5^2 positiv und x_2^2, x_4^2, x_6^2 negativ sein, was damit übereinkommt, dass die Zähler von x_1^2, x_2^2, x_4^2, x_5^2 gleiches, von x_3^2 und x_6^2 aber das entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen, da $f'(\varkappa_1), f'(\varkappa_2), \cdots, f'(\varkappa_6)$ abwechselnd positiv und negativ sind. Damit aber die Zähler die genannten Vorzeichen bekommen, muss zwischen den beiden Grenzen $\varkappa_2\varkappa_3$, dann $\varkappa_3\varkappa_4$, ferner $\varkappa_5\varkappa_6$, endlich $\varkappa_6\varkappa_1$ je *eine* der 4 Wurzeln λ liegen. Eine reelle Gerade besitzt also 4 Parameter, welche einzeln zwischen den genannten Grenzen gelegen sein müssen, woraus sich sofort ergiebt, dass die Complexe, deren Parameter zwischen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ resp. $\varkappa_4$ und $\varkappa_5$ liegt, keine reellen Geraden mehr besitzen können. Eine reelle einfache Tangente der Kummer'schen Fläche kann ebenfalls nicht mehr existiren, da ja nicht 2 Parameter gleich werden können, ohne dass die zugehörige Gerade imaginär wird. *Die Fläche ist demnach selbst imaginär.*

Es erfordern in diesem Falle nur die *Doppeltangenten* eine nähere Untersuchung. Die Systeme $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_4$ und $\varkappa_5$ liefern nur conjugirt imaginäre Doppeltangenten, während die beiden Systeme $\varkappa_3$ und $\varkappa_6$ sowohl isolirte als imaginäre Tangenten ergeben. So sind die Doppeltangenten des Systems $\varkappa_3$ isolirt, wenn die beiden einfachen Parameter zwischen $\varkappa_5 \varkappa_6$ und $\varkappa_6 \varkappa_1$ liegen, diejenigen des Systems $\varkappa_6$, wenn die einfachen Parameter zwischen $\varkappa_2 \varkappa_3$ und $\varkappa_3 \varkappa_4$ liegen.

§ 4.

Typus II.

Dieser Typus ist dadurch charakterisirt, dass x_1 und x_3 reell, x_2 und x_4 rein imaginär, x_5 und x_6 dagegen conjugirt imaginär sind, was, wie wir früher gesehen haben, zur Folge hat, dass $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ reell, $\varkappa_5$ und $\varkappa_6$ conjugirt imaginär werden. Die reellen $\varkappa$ sollen wieder der Bedingung genügen: $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \varkappa_3 > \varkappa_4$; dann werden freilich die Indices dieser $\varkappa$ nicht mehr mit den Indices der Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 der Reihe nach übereinstimmen, dagegen wird die Uebereinstimmung der Indices von $\varkappa_5$ und $\varkappa_6$ mit x_5 und x_6 erhalten bleiben. Es genügt also hier die Permutation der 4 Grössen $\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4$ anzugeben, um die bezügliche Complexgleichung zu fixiren, z. B. würde zu der Permutation $\varkappa_3 \varkappa_1 \varkappa_4 \varkappa_2$ die Gleichung gehören:

$$\frac{x_1^2}{\varkappa_3 - \lambda} + \frac{x_2^2}{\varkappa_1 - \lambda} + \frac{x_3^2}{\varkappa_4 - \lambda} + \frac{x_4^2}{\varkappa_2 - \lambda} + \frac{x_5^2}{\varkappa_5 - \lambda} + \frac{x_6^2}{\varkappa_6 - \lambda} = 0.$$

Hier lassen sich nun ganz analoge Betrachtungen anstellen, wie beim Typus I., nur dass wir es blos mit den 24 Permutationen der 4 Elemente $\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4$ zu thun haben.

Die Art der ganzen Complexgleichung ändert sich hier nicht, wenn sich die Art der 4 ersten Glieder nicht ändert, und wir finden genau wie beim Typus I., dass eine Vertauschung des ersten und dritten oder des zweiten und vierten Elementes, oder eine gleichzeitige Vertauschung der Elemente 1 und 3 mit 2 und 4 die Art der Gleichung nicht afficirt, so dass nur noch $\frac{24}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 3$ Permutationen zu betrachten bleiben.

Dieselben seien repräsentirt durch:

$$a) \quad \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4,$$

$$b) \begin{cases} \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_4, \varkappa_3, \\ \varkappa_1, \varkappa_3, \varkappa_2, \varkappa_4. \end{cases}$$

Hier führen die letzten beiden Combinationen auch noch zu Flächen gleicher Art, denn sie gehen durch cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3, 4 in einander über und das ändert die Art der Gleichung des Complexbüschels nicht, wie wir beim Typus I. des Näheren gesehen haben. Wir haben also hier blos 2 Fälle zu unterscheiden und wenden uns der Behandlung der beiden Flächen*) zu, können uns jedoch etwas kürzer fassen, da dieselben eine grosse Analogie mit den Flächen (Ia) und (Ib) haben.

Behandlung des Falles IIa:

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4.$$

Die Coordinaten einer beliebigen Geraden sind offenbar durch die Gleichungen bestimmt:

$$\varrho x_\alpha^2 = \frac{(\varkappa_\alpha - \lambda_1)(\varkappa_\alpha - \lambda_2)(\varkappa_\alpha - \lambda_3)(\varkappa_\alpha - \lambda_4)}{f'(\varkappa_\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, 6,$$

wobei $\varkappa_5$ und $\varkappa_6$ conjugirt imaginäre, die übrigen $\varkappa$ aber reelle Werthe besitzen. Bei reellen oder conjugirt imaginären Werthen der λ sind in Folge dessen die Quadrate von x_1, x_2, x_3 und x_4 reell, von x_5 und x_6 conjugirt imaginär. Der Typus II. verlangt ausserdem x_1^2 und x_3^2 positiv, x_2^2 und x_4^2 negativ, damit die bezüglichen Geraden reell seien, oder was dasselbe ist, er verlangt gleiche Vorzeichen der Zähler von x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, da $f'(\varkappa_1)$, $f'(\varkappa_2)$, $f'(\varkappa_3)$, $f'(\varkappa_4)$ schon abwechselnd positiv und negativ sind, Wir kommen also zu dem Resultate, dass die Geraden reell sind, wenn ihre Parameter *paarweise* zwischen denselben Grenzen**) $\varkappa$ liegen, oder wenn dieselben paarweise conjugirt imaginär sind. Nochmals sei hervorgehoben, dass hier von 32 zusammengehörigen Geraden nur 16 reell sind; gleichwohl wollen wir die Geraden, deren Coordinaten jenen Bedingungen genügen, reell nennen, indem wir dabei blos die 16 *reellen* Geraden im Auge haben, die durch die Quadrate der Coordinaten definirt sind. In diesem Sinne sind die Tangenten der Kummer'schen Fläche:

$$\varrho x_\alpha^2 = \frac{(\varkappa_\alpha - \lambda)^2(\varkappa_\alpha - \lambda_1)(\varkappa_\alpha - \lambda_2)}{f'(\varkappa_\alpha)},$$

reell, wenn λ_1 und λ_2 zwischen denselben Grenzen $\varkappa$ liegen, oder wenn sie conjugirt imaginär sind; im ersten Falle erhalten wir die hyperbolischen, im zweiten die elliptischen Punkte der Fläche.

Von den hyperbolischen Punkten lässt sich Aehnliches sagen, wie bei der Fläche (Ia), und aus gleichen Gründen. Alle Punkte nämlich, deren Parameter λ_1, λ_2 zwischen zwei festen Grenzen $\varkappa$ liegen, bilden 16 reelle Gebiete, die zu je 4 in einem Doppelinflexionspunkte an einanderstossen und somit 4 hyperbolische Segmente ausmachen. *Es giebt im Ganzen* 16 *hyperbolische Segmente*, da wir entweder $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$,

*) Die erste der beiden hier erwähnten Flächen ist ebenfalls von Klein angegeben und von mir modellirt worden, das Gleiche gilt von den später zu nennenden Flächen III und IVa.

**) Unter Grenzen sind hier irgend zwei auf einanderfolgende Werthe der reellen Grössen $\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4$ zu verstehen.

oder $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$, oder $\varkappa_3$ und $\varkappa_4$, oder endlich $\varkappa_4$ und $\varkappa_1$ zu Grenzen wählen können. Die Gestalt dieser Segmente, sowie der Verlauf der Haupttangentencurven auf denselben ist genau wie bei (Ia), nur dass hier die einzelnen Curven nur noch aus 4 Zügen bestehen, da es nur noch 4 zusammengehörige Segmente giebt.

Die elliptischen Segmente der vorliegenden Fläche sind etwas von der Gestalt der elliptischen Segmente der Fläche (Ia) verschieden. Zunächst liegt hier auf jedem Segmente ein *singulärer Punkt**), entsprechend den conjugirt imaginären Werthen von $\varkappa_5$ und $\varkappa_6$, dessen imaginäre Haupttangenten vierpunktig die Fläche berühren. Da nun für den singulären Punkt die Coordinaten x_5 und x_6 verschwinden, so folgt daraus, dass zwei conjungirte elliptische Punkte, die sich nur in den Coordinaten x_5 und x_6 durch das Vorzeichen unterscheiden, auf demselben elliptischen Segmente liegen. *Es giebt also im Ganzen* 8 *elliptische Segmente.* Die Gestalt eines solchen Segmentes ist in Fig. 3a wiedergegeben, es wird begrenzt von 4 Curvenbogen mit den Grenzen $\varkappa_1 \varkappa_2$ resp. $\varkappa_3 \varkappa_4$ und 4 Kegelsegmenten mit den Grenzen $\varkappa_2 \varkappa_3$ resp. $\varkappa_4 \varkappa_1$. Ebenso verhält es sich mit den 3 conjungirten Segmenten, während bei den 4 adjungirten Segmenten die Grenzen der Curvenbogen und Kegelsegmente vertauscht sind.

Um die *gestaltliche Anordnung der ganzen Fläche* zu erkennen, müssen wir noch die Lage der 5 reellen Directricenpaare: 12, 34, 23, 41 und 56 gegen dieselbe angeben. Die Directricen der 4 ersten Paare schneiden die Fläche in je 2 Doppelinflexionspunkten, während jede Gerade des letzten Paares die Fläche in 4 singulären Punkten trifft. Das Resultat der hieran geknüpften Schlüsse, die ganz wie bei (Ia) zu ziehen sind, ist das Folgende. *Die Kummer'sche Fläche besitzt* 8 *reelle Knotenpunkte und* 8 *Doppelebenen; sie besteht aus* 4 *gleichartigen Flächentheilen, die in zwei Gruppen zerfallen. Die Theile der einen Gruppe stossen in den Knotenpunkten an diejenigen der andern Gruppe; jene werden von den Directricen* 12 *und* 34, *diese von den Directricen* 23 *und* 41 *geschnitten, während das Directricenpaar* 56 *alle* 4 *Flächentheile schneidet, und zwar in den singulären Punkten. Die einzelnen Flächentheile haben die Gestalt eines Tetraeders, von welchem* 2 *Paar Gegenkanten durch hyperbolische Segmente, je* 2 *Seiten aber mit der sie trennenden Kante durch ein elliptisches Segment ersetzt sind.*

Von den *Haupttangentencurven* gilt das bei (Ia) Gesagte, nur ist, wie schon bemerkt, die Anzahl der Züge auf die Hälfte zu reduciren; auch giebt es nur noch 4 reelle ausgezeichnete Curven. Von den

*) Sie entsprechen den Doppelinflexionspunkten der hyperbolischen Segmente, nur sind die Inflexionstangenten imaginär.

Doppeltangentensystemen sind 4 reell, sie enthalten (ebenso wie bei (Ia)) ganz reelle, isolirte und conjugirt imaginäre Doppeltangenten; die beiden übrigen Systeme enthalten imaginäre Doppeltangenten, indem die Geraden des einen Systems conjugirt imaginär zu denjenigen des andern Systems sind.

Die Gestalt der Schnittcurve in der Tangentialebene eines elliptischen oder hyperbolischen Punktes geben uns die Figuren 6a und 6b, sie besitzen 8 Doppeltangenten (in jeder Doppelebene eine) und 4 durch den Doppelpunkt gehende Tangenten.

Behandlung des Falles IIb:

$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_4, \varkappa_3.$

Die Coordinaten einer Geraden werden durch die Gleichungen gegeben:

$$\varrho x_\alpha^2 = \frac{(\varkappa_i - \lambda_1)(\varkappa_i - \lambda_2)(\varkappa_i - \lambda_3)(\varkappa_i - \lambda_4)}{f'(\varkappa_i)}. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ i = 1, 2, 4, 3, 5, 6. \end{array} \right.$$

Damit die Quadrate x_1^2, x_3^2 positiv, die Quadrate x_2^2, x_4^2 negativ und endlich die Quadrate x_5^2, x_6^2 conjugirt imaginär werden, müssen die Zähler von x_1^2, x_2^2 gleiches, von x_3^2, x_4^2 das entgegengesetzte Vorzeichen haben. Für eine reelle Tangente der gesuchten Fläche folgern wir daraus, dass ihre beiden einfachen Parameter λ_1 und λ_2 zwischen den Grenzen $\varkappa_2 \varkappa_3$ und $\varkappa_4 \varkappa_1$ liegen müssen. Die Fläche besitzt demnach keine reellen Knotenpunkte und keine reellen Doppelebenen; sie ist durchaus hyperbolisch gekrümmt und wird von zwei verschiedenen Systemen Haupttangentencurven (deren jedes 2 ausgezeichnete Curven enthält) einfach überdeckt. Hierin sowie in vielen sonstigen Eigenschaften hat sie ihr Analogon in der Fläche (Ib).

Während aber bei letzterer Fläche alle 32 zusammengehörigen Punkte reell sind und zu je 16 auf zwei Flächentheilen liegen, sind im vorliegenden Falle nur noch 16 zusammengehörige Punkte reell, und zwar müssen diese 16 Punkte auf einem und demselben Flächentheile liegen, was man ganz ebenso wie bei der Fläche (Ib) erschliessen kann. *Die hier auftretende Fläche besteht nur noch aus einem einzigen hyperbolischen Flächentheile, der ganz ebenso wie einer der Flächentheile von* (Ib) *beschaffen ist.*

Eine Beschreibung der Gestalt der Fläche, sowie der Vertheilung der Haupttangentencurven ist demnach überflüssig, nur die Lage der reellen Directricen gegen die Fläche soll hier angegeben werden. Die 8 Directricen der 4 Paare 12, 34, 14, 23 schneiden den einzigen noch vorhandenen Flächentheil in je 2 Punkten und bestimmen so die 16 Doppelinflexionspunkte mit den Parametern: $\varkappa_1 \varkappa_2$, resp. $\varkappa_3 \varkappa_4$, $\varkappa_1 \varkappa_3$, $\varkappa_2 \varkappa_4$, die auch als Durchschnitt der ausgezeichneten Curven $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$

mit den Curven $\varkappa_1$ und $\varkappa_1$ erscheinen; von den Geraden des Directricenpaares 56 liegt die eine innerhalb, die andere ausserhalb der Fläche, wie dies ja auch bei (Ib) der Fall war.

Die 4 *Doppeltangentensysteme* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ und $\varkappa_4$ haben gleiche Beschaffenheit, sie enthalten reelle, isolirte und conjugirt imaginäre Doppeltangenten; so sind dieselben z. B. im Systeme $\varkappa_2$ reell, wenn ihre einfachen Parameter zwischen $\varkappa_2\varkappa_3$ und $\varkappa_4\varkappa_1$ liegen, isolirt, wenn ihre Parameter zwischen $\varkappa_1\varkappa_2$ und $\varkappa_4\varkappa_1$, endlich imaginär, wenn sie zwischen anderen Grenzen liegen. Die beiden Doppeltangentensysteme $\varkappa_5$ und $\varkappa_6$ sind conjugirt imaginär zu einander.

Die Curve in einer Tangentialebene wird durch die Fig. 5 dargestellt, wenn man das Oval weglässt.

§ 5.

Typus III.

Für eine reelle Gerade müssen hier die Quadrate der Coordinaten x_3, x_4 und ebenso x_5, x_6 conjugirt imaginär sein, während die Quadrate von x_1 und x_2 entgegengesetztes Vorzeichen haben müssen. In Folge dessen müssen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ reell, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ und $\varkappa_5$, $\varkappa_6$ conjugirt imaginär sein, wenn anders es reelle Complexe in dem confocalen Systeme geben soll. Für die reellen Grössen $\varkappa$ führen wir wieder die Bedingung ein $\varkappa_1 > \varkappa_2$, und diese Bedingung lässt sich immer durch Vertauschung von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ erreichen. Wir hätten nun die beiden Permutationen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_2$, $\varkappa_1$ zu unterscheiden, aber beide sind nicht wesentlich verschieden, da eine Vertauschung von $\varkappa_1$ mit $\varkappa_2$ die Art der beiden ersten Glieder und somit die Art der ganzen Complexgleichung nicht ändert. Desshalb können wir uns auf die Betrachtung der Complexgleichung:

$$\frac{x_1^2}{\varkappa_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{\varkappa_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{\varkappa_3-\lambda}+\frac{x_4^2}{\varkappa_4-\lambda}+\frac{x_5^2}{\varkappa_5-\lambda}+\frac{x_6^2}{\varkappa_6-\lambda}=0$$

beschränken. Eine Gerade ist hier reell, wenn ihre Parameter paarweise conjugirt imaginär sind, oder wenn sie paarweise reell sind und zwischen den nämlichen Grenzen*) $\varkappa_1 > \varkappa_2$ oder $\varkappa_1 < \varkappa_2$ liegen. Eine Tangente ist folglich reell, wenn ihre Parameter λ_1 und λ_2 gleichzeitig zwischen den Grenzen $\varkappa_1 > \varkappa_2$ oder $\varkappa_1 < \varkappa_2$ liegen, oder wenn sie conjugirt imaginär sind; im ersten Falle ist ihr Berührungspunkt ein hyperbolischer, im zweiten ein elliptischer Punkt der Fläche. Dem Gebiete $\varkappa_1 > \varkappa_2$ entsprechend besitzt die Fläche 2 hyperbolische Seg-

*) Zwei reelle Grössen $\varkappa_1\varkappa_2$ theilen das ganze reelle Werthsystem in 2 Gebiete, wovon das eine mit $\varkappa_1 > \varkappa_2$, das andere mit $\varkappa_1 < \varkappa_2$ bezeichnet werden kann.

mente, da hier von 32 zusammengehörigen Gebieten nur noch 8 reell sind, und je 4, deren Punkte sich nur in den Vorzeichen von x_1 und x_2 unterscheiden, in einem Doppelinflexionspunkte $\varkappa_1 \varkappa_2$ zusammenstossen (also nur ein einziges Segment erzeugen); auch das Gebiet $\varkappa_1 < \varkappa_2$ liefert 2 hyperbolische Segmente. Auf den erst genannten Segmenten verlaufen die Haupttangentencurven $\varkappa_1 > \lambda > \varkappa_2$, auf den letzteren die Curven $\varkappa_1 < \lambda < \varkappa_2$; die beiden hier noch vorhandenen ausgezeichneten Curven verlaufen über alle 4 Segmente und bestehen nur noch je aus einem Zuge; die Gestalt und Vertheilung der Curven auf den einzelnen Segmenten ist wie bei (Ia) und (IIa).

Durchlaufen die Parameter λ_1 und λ_2 alle conjugirt imaginären Werthe, so wandern die zugehörigen Punkte auf den elliptischen Theilen der Fläche; die speciellen Werthe $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ resp. $\varkappa_5$, $\varkappa_6$ ergeben die *singulären* Punkte, die auf diesen elliptischen Gebieten liegen. Man sieht nun, dass immer 4 conjungirte Punkte, die sich nur in den Vorzeichen von x_3, x_4 und x_5, x_6 unterscheiden, auf dem nämlichen Segmente liegen, da für die singulären Punkte auf demselben die Coordinaten x_3, x_4 resp. x_5, x_6 gleichzeitig verschwinden. Es giebt mithin auf der Kummer'schen Fläche *zwei elliptische Segmente* (die Punkte des einen sind zu denjenigen des andern adjungirt) und auf jedem Segmente liegen 4 singuläre Punkte, den Werthepaaren $\varkappa_3 \varkappa_4$ und $\varkappa_5 \varkappa_6$ entsprechend je zwei. Jedes der beiden Segmente wird begrenzt von 4 Curvenbogen und 4 Kegelsegmenten; bei dem einen derselben entsprechen die Curvenbogen den Werthen $\varkappa_1 > \lambda > \varkappa_2$ und die Kegelsegmente den Werthen $\varkappa_1 < \lambda < \varkappa_2$, bei dem andern ist es umgekehrt. Bedenkt man weiter, dass die Kummer'sche Fläche nur 4 reelle Knotenpunkte und 4 reelle Doppelebenen besitzt, und dass jede Doppelebene nur von *einer weiteren* in reellen Knotenpunkten geschnitten wird (da in jeder Doppelebene nur 2 reelle Knotenpunkte liegen), so erkennt man, dass die Contour eines elliptischen Segmentes in zwei nicht zusammenhängende Theile zerfällt, wie es Figur 7 zeigt. Man hätte dieses Resultat auch aus den Transformationen der Congruenzen 34 und 56, welche jene Segmente *in sich* transformiren, erschliessen können.

Die Gestalt der Fläche lässt sich im Zusammenhange mit den Directricen folgendermassen beschreiben. Es giebt 3 *reelle Directricenpaare* 12, 34 *und* 56, *sie bilden die Kanten eines Tetraeders. Die Kummer'sche Fläche besteht aus zwei geschlossenen Theilen, jeder schliesst einen Eckpunkt des genannten Tetraeders ein, und zwar liegen diese beiden Eckpunkte auf einer und derselben Kante* 12, *d. h. jede Directrix der Paare* 34 *und* 56 *trifft nur einen der beiden Flächentheile zwei Mal, während die eine Directrix* 12 *beide Theile, die andere aber die Fläche gar nicht schneidet. Die beiden Theile stossen in den*

4 *Knotenpunkten an einander; sie haben die Gestalt und Lage von 2 Tetraedern, die in zwei Gegenkanten an einander stossen und deren Seitenflächen in denselben Ebenen liegen; das Paar gemeinschaftlicher Gegenkanten ist auf jedem Flächentheile durch hyperbolische Segmente zu ersetzen, während die 4 Seitenflächen sammt den übrigen Kanten auf jedem Theile ein elliptisches Segment vertreten.*

Die beiden reellen *Doppeltangentensysteme* $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind gleichartig, sie enthalten reelle, isolirte und conjugirt imaginäre Doppeltangenten. Von 16 zusammengehörigen Doppeltangenten eines Systems sind 4 reell, wenn die Parameter λ_1, λ_2 zwischen denselben Grenzen $\varkappa_1 > \varkappa_2$ oder $\varkappa_1 < \varkappa_2$ liegen, oder wenn sie conjugirt imaginär sind, dagegen isolirt, wenn $\varkappa_1 > \lambda_1 > \varkappa_2$ und $\varkappa_1 < \lambda_2 < \varkappa_2$ ist; die übrigen Doppeltangenten der Systeme $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind stets conjugirt imaginär.

Die Schnittcurven in den Tangentialebenen der Fläche sind durch die Figuren 8a und 8b dargestellt.

§ 6.

Typus IV.

Dieser Typus ist durch 6 paarweise conjugirt imaginäre Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 charakterisirt, was nach den Untersuchungen des zweiten Paragraphen noch 2 Möglichkeiten für die Constanten $\varkappa$ ergiebt.

Untersuchung des Falles IVa*).

Die Grössen $\varkappa_1\varkappa_2$, $\varkappa_3\varkappa_4$ *und* $\varkappa_5\varkappa_6$ *sind conjugirt imaginär.*

Sind die 4 Parameter λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 einer Geraden reell oder paarweise conjugirt imaginär, so sind von 32 zusammengehörigen Geraden immer 8 reell, 4 conjungirte und 4 adjungirte. Aehnliches gilt für 32 zusammengehörige Tangentenbüschel; es giebt unter denselben immer 8 reelle, wenn ihre Parameter λ_1 und λ_2 beide reell, oder wenn sie conjugirt imaginär sind; im letzten Falle ist der Berührungspunkt ein elliptischer, im ersten ein hyperbolischer Punkt der Fläche. Den Uebergang zwischen beiden Arten von Punkten bilden, entsprechend dem Doppelparameter $\lambda_1 = \lambda_2$, die Punkte der Berührungskegelschnitte in den Doppelebenen, sowie die Ebenen der Tangentialkegel in den Knotenpunkten. Es giebt 4 reelle Knotenpunkte und 4 reelle Doppelebenen; dieselben liegen nirgends vereinigt, da die Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_6$ alle imaginär sind, also keinem reellen Punkte eines Berührungskegelschnittes als Parameter zukommen können.

Wir schliessen daraus, dass ein hyperbolisches Segment begrenzt wird von *einem ganzen* Berührungskegelschnitt und *einem ganzen* Be-

*) Zu dieser Gattung gehört die Fresnel'sche Wellenfläche.

rührungskegel. Zwei Kegelschnitte können offenbar nicht an der Begrenzung betheiligt sein; denn die Punkte des einen sind denjenigen des andern conjungirt, und es müssten desshalb alle Punkte des ganzen Segments paarweise conjungirt sein; es gäbe alsdann einen sich selbst conjungirten Punkt d. h. einen Doppelinflexionspunkt, was jedoch eine Realität der $\varkappa$ voraussetzte. Es giebt folglich im Ganzen 4 hyperbolische Segmente, welche je von einem Kegelschnitt und einem Kegel begrenzt werden; sie enthalten keine ausgezeichneten Haupttangentencurven mehr, woraus ihre trichterförmige Gestalt und der Verlauf der Haupttangentencurven leicht ersichtlich, indem letztere keine Inflexionstangenten, ihre Projection also keine Wendepunkte mehr besitzt, vergl. Fig. 9. Jede Curve besteht aus 4 solchen Zügen, auf jedem hyperbolischen Segmente liegt ein Zug.

Elliptische Gebiete giebt es zwei, da auf jedem 3 Paare von singulären Punkten liegen, den Werthepaaren $\varkappa_1 \varkappa_2$, $\varkappa_3 \varkappa_4$ und $\varkappa_5 \varkappa_6$ gemäss, mithin Punkte, welche sich nur durch die Vorzeichenwechsel von $x_1 x_2$, resp. $x_3 x_4$, resp. $x_5 x_6$ unterscheiden, demselben Gebiete angehören. Die Punkte des einen Gebietes sind somit zu je vier einander conjungirt; das andere enthält jedesmal die 4 dazu adjungirten; in Folge dessen wird das *eine* elliptische Segment von den 4 Berührungskegelschnitten, das *andere* von den 4 Tangentialkegeln begrenzt, wie dies die Fresnel'sche Wellenfläche zeigt. Die beiden elliptischen Gebiete hängen zusammen durch die 4 hyperbolischen Segmente. *Ueberhaupt hat die Fläche die Gestalt von zwei in einander liegenden Ellipsoiden oder zweischaligen Hyperboloiden, die sich in 4 Punkten bis zur Berührung genähert haben.* Die *Doppeltangentensysteme* sind sämmtlich imaginär geworden.

Untersuchung des Falles IVb.

Die Constanten $\varkappa$ sind auf der complexen Kugel durch 3 Paar sich diametral gegenüberstehender Punkte repräsentirt; sie haben also die Form:

$$\varkappa_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \qquad \varkappa_3 = r_2 e^{i\varphi_2}, \qquad \varkappa_5 = r_3 e^{i\varphi_3},$$

$$\varkappa_2 = -\frac{1}{r_1} e^{i\varphi_1}, \qquad \varkappa_4 = -\frac{1}{r_2} e^{i\varphi_2}, \qquad \varkappa_6 = -\frac{1}{r_3} e^{i\varphi_3}.$$

Von 32 Geraden des Raumes:

$$\varrho x_\alpha^2 = \frac{(\varkappa_\alpha - \lambda_1)(\varkappa_\alpha - \lambda_2)(\varkappa_\alpha - \lambda_3)(\varkappa_\alpha - \lambda_4)}{(f' \varkappa_\alpha)},$$

sind nach den Erörterungen eines früheren Paragraphen immer 8 reell, wenn ihre Parameter auf der complexen Kugel ebenfalls diametrale Punkte darstellen; d. h. wenn:

$$\lambda_1 = \varrho_1 e^{i\psi_1}, \qquad \lambda_3 = \varrho_2 e^{i\psi_2},$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{\varrho_1} e^{i\psi_1}, \qquad \lambda_4 = -\frac{1}{\varrho_2} e^{i\psi_2}.$$

Die zugehörige Kummer'sche Fläche ist imaginär, da es keine reellen Tangentenbüschel mehr giebt, *dagegen besitzt sie noch* 4 *reelle Knotenpunkte und* 4 *Doppelebenen, die natürlich nirgends vereinigt liegen.* Denn die Raumgeraden bleiben reell, wenn man $\lambda_1 = \lambda_3$ und $\lambda_2 = \lambda_4$ nimmt; sie besitzen dann zwei Doppelparameter, d. h. sie sind dann zu Geraden in den Doppelebenen resp. zu Strahlen durch die Knotenpunkte geworden.

Auch hier sind die *Doppeltangentensysteme* sämmtlich imaginär geworden.

II. Abschnitt.

Topologische Behandlung.

§ 1.

a, Einleitendes.

Es handelt sich in diesem Abschnitte darum, aus gewissen Grenzfällen der Kummer'schen Fläche auf die Gestalt der allgemeinen Fläche zurückzuschliessen. Die hier angestellten Betrachtungen werden am klarsten hervortreten, wenn ich zuerst Einiges über analoge Fragen bei Curven sage. Bei der Untersuchung der Gestalten algebraischer Curven sind derartige lagengeometrische Deductionen schon längst angewendet worden. Sie basiren sämmtlich auf dem Principe der Continuität, welches, zunächst bei Curvenbüscheln erkannt, bald eine weit grössere Bedeutung erhielt, indem man alle Constanten einer Curvengleichung sich von einander unabhängig, aber continuirlich ändern liess, was natürlich auch eine continuirliche Aenderung der Gestalt der bez. Curve nach sich zog. Alle Eigenthümlichkeiten der Gleichung müssen in der Gestalt der Curve ihre Repräsentation finden; sondert sich von der Gleichung ein Factor ab, so muss sich auch von der Curve ein Theil absondern; wird die Gleichung ein vollständiges Quadrat, so muss auch die zugehörige Curve in eine doppelt zählende Curve ausarten. Gerade der letzte Fall ist hier von besonderer Wichtigkeit.

Diesen Grenzfall der doppelt zählenden Curve können wir durch continuirlichen Process aus einer allgemeineren Curve ableiten, indem wir die Punkte dieser Curve paarweise zusammenrücken lassen; der reelle Theil der Grenzcurve entsteht dann einestheils durch das Zusammenfallen reeller Punkte, anderntheils durch das Zusammenfallen conjugirt imaginärer Punkte. Auf der Grenzcurve selbst ist das nicht mehr zu entscheiden, vielmehr muss man darauf achten, wie die Grenzcurve aus der allgemeinen Curve sich im einzelnen Falle entwickelt. Ein

Beispiel, bekannt aus der Theorie der Curven 4. Ordnung, wird das Gesagte am besten illustriren. Die Gleichung einer solchen Curve kann stets auf die Form gebracht werden: $K^2 + cpqrs = 0$, wo $K = 0$ einen Kegelschnitt, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ die Seiten eines Rechtecks vorstellen. Nehmen wir für $K = 0$ etwa einen Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des Rechtecks zusammenfällt und der die Seiten desselben in reellen Punkten schneidet, wie es Figur 10 zeigt. Wird die Constante $c = 0$, so erscheint der doppelt zählende Kreis als unsere Curve 4. Ordnung, setzen wir dagegen c gleich einer sehr kleinen Grösse ε, so wird die bezügliche Curve in der nächsten Nähe des Kreises verlaufen müssen; aus jedem Punkte des Kreises sind dann 2 Punkte der Curve geworden, die beide reell oder conjugirt imaginär sein können. Angenommen das Product $p \,.\, q \,.\, r \,.\, s$ sei für einen Punkt im Innern des Rechtecks positiv, so wird der reelle Theil der Curve nur in den schraffirten oder nur in den nicht schraffirten Gebieten verlaufen, je nachdem ε negativ oder positiv ist; es ergeben sich also unmittelbar die Figuren 11a und 11b. An diesem Beispiele sieht man deutlich, wie die Curve sich ändert, wenn ε, von einem positiven kleinen Werthe ausgehend, sich durch Null hindurchbewegt und negativ wird; die reellen Punkte der ursprünglichen Curve rücken paarweise zusammen, um dann conjugirt imaginär zu werden, während gewisse conjugirt imaginäre Punkte jener Curve zusammenrücken, um nachträglich den reellen Theil der Curve zu bilden. Ganz analoge Betrachtungen haben wir nun für die Kummer'sche Fläche anzustellen.

b, Von den Grenzfällen der Kummer'schen Fläche.

Zunächst haben wir die Grenzfälle der Fläche zu studiren, um, von ihnen ausgehend, dann alle Gestalten der allgemeinen Fläche zu entwickeln. Um diese Betrachtungen anstellen zu können, muss erstens gezeigt werden, dass es immer *reelle* Grenzfälle giebt, und zweitens, dass man durch *continuirliche* Aenderung die allgemeine Fläche in die Grenzfläche überführen kann. Das Wort „continuirlich" will besagen, dass die Fläche bei dieser Ueberführung keine *andere Grenzlage vorher* zu passiren braucht, bei der sie ihre Gestalt discontinuirlich*) änderte.

Gehen wir von einem System von 6 Fundamentalcomplexen aus, und lassen dasselbe fest, während wir die Constanten des confocalen Complexsystems 2. Grades beliebig variiren, so erhalten wir noch dreifach unendlich viele Kummer'sche Flächen, wie eine Abzählung der unabhängigen Constanten der Complexgleichung sofort ergiebt. Eine solche Fläche besitzt aber 16 Knotenpunkte und 16 Doppelebenen, die

*) Eine continuirliche Aenderung der Gestalt fordert, dass die reellen Punkte reell und die imaginären imaginär bleiben.

sich alle aus *einem* Knotenpunkte ableiten lassen durch die Transformationen, welche mit den Fundamentalcomplexen verknüpft sind; diesen *einen* Knotenpunkt kann man also beliebig im Raume annehmen und es giebt dann immer noch *eine* zugehörige Fläche, da durch jenen Knotenpunkt das ganze Singularitätensystem und somit die Fläche selbst bestimmt ist.

Lassen wir nun den einen Knotenpunkt sich bewegen, so bewegen sich alle übrigen in bestimmter Weise mit, und die Frage nach den Grenzfällen der Fläche reducirt sich auf die Frage nach den speciellen Lagen dieser Knotenpunkte in Bezug auf das feste System der Fundamentalcomplexe. Es giebt aber dreierlei Punkte, welche eine specielle Lage in Bezug auf diese Complexe besitzen, nämlich erstens die Punkte der 10 Fundamentalflächen, zweitens die Punkte der Directricen und endlich drittens die Punkte in den Seitenflächen der Fundamentaltetraeder. Von dem zweiten Falle können wir sofort absehen, da man einen Knotenpunkt von seiner Anfangslage aus durch continuirliche Bewegung in jeden andern Raumpunkt überführen kann, ohne eine solche Directrix zu passiren. Auch der letzte Fall hat für uns keine Bedeutung, da die ganze Specialisirung der bez. Kummer'schen Fläche darin besteht, dass ihre Knotenpunkte zu je 4 in die Seitenflächen eines Tetraeders rücken, was die Gestalt nicht weiter alteriren kann*). Es bleibt also nur noch der Fall übrig, wo ein Knotenpunkt auf eine der Flächen zweiten Grades rückt; dann müssen aber auch alle übrigen Knotenpunkte auf diese Fläche rücken, da ja die 10 Fundamentalflächen durch die oben genannten Transformationen in sich übergehen. *Die* 16 *Knotenpunkte erscheinen in diesem Grenzfalle als die Schnittpunkte von vier Erzeugenden der einen Schaar und vieren der andern Schaar*, und zwar liegen sie paarweise harmonisch zu den Directricenpaaren, die der bez. Erzeugung angehören, wie man das aus den Transformationen ersieht, welche mit den 15 Congruenzen verknüpft sind. Die 16 Doppelebenen werden durch die Tangentialebenen der Fläche 2. Grades in jenen 16 Punkten vorgestellt; sie enthalten je 2 von jenen 8 Erzeugenden, aus jeder Schaar eine, die als die Berührungskegelschnitte der Grenzfläche aufzufassen sind. *Die Grenzfläche selbst ist also in die doppelt zählende Fläche* 2. *Grades ausgeartet***).

Wir haben nun einerseits gefunden, dass die Fundamentalflächen 2. Grades als Grenzfälle der Kummer'schen Fläche auftreten, und es giebt demnach stets *reelle* Grenzflächen, da es bei allen 4 Typen reelle Flächen 2. Grades giebt. Auf der andern Seite genügt es aber auch

*) Die Fläche wird dann, wie man weiss, ein „Tetraedroid".

**) Will man dieses Resultat noch durch ausführlichere Schlüsse ableiten, so hat dies keine Schwierigkeit.

blos diese Grenzfälle zu untersuchen, da eine beliebige Fläche stets durch continuirlichen Process in einen solchen Grenzfall übergeführt werden kann.

Gehen wir nun etwas näher auf den Grenzfall ein. Auf der doppelt zählenden Fläche 2. Grades liegen 8 Erzeugende, aus jeder Schaar 4, deren 16 Schnittpunkte die Knotenpunkte und deren 16 Ebenen die Doppelebenen bestimmen, sie selbst aber bedeuten die Berührungskegelschnitte in den Doppelebenen. Wir fragen uns jetzt nach denjenigen Punkten der Grenzfläche, welche durch paarweises Zusammenrücken reeller Punkte entstanden sind. Die *reelle* Doppelebene der Kummer'schen Fläche mit ihrem Berührungskegelschnitt hat die Eigenschaft, dass in irgend einem Punkte des letzteren die Fläche nur auf einer Seite der Doppelebene gelegen ist; d. h. im Grenzfalle trennen die Doppelebenen mit ihren Berührungskegelschnitten die Partien, welche aus reellen Punkten entstanden sind, von denjenigen Partien, die durch das Zusammenrücken conjugirt imaginärer Punkte hervorgegangen sind. Wir können demnach kurz so sagen: Die 8 Erzeugenden theilen, so viele von ihnen reell sind, die Fläche 2. Grades in verschiedene Felder; zwei Felder, die in einer dieser Erzeugenden aneinander stossen, sind von ungleicher Beschaffenheit, das eine ist aus reellen, das andere aus imaginären Punkten entstanden; vergl. Fig. 12a und 12b, wo die Felder der einen Art schraffirt sind.

Offenbar kann man nun auch umgekehrt aus diesen Grenzlagen die allgemeine Kummer'sche Fläche construiren, indem man nämlich zunächst die Felder reeller Punkte mit 2 Blättern überdeckt, die längs der Begrenzung zusammenhängen, die Felder imaginärer Punkte dagegen einfach weglässt; durch stetige Deformation geht dann diese Fläche in die allgemeine über. Hiermit haben wir ein Mittel an der Hand, die verschiedenen Kummer'schen Flächen abzuleiten, und um alle möglichen Gestalten dieser Fläche zu erschöpfen, müssen wir nur noch die Realität jener 8 Erzeugenden bei den einzelnen Typen untersuchen.

c, Die gestaltlichen Verhältnisse der Grenzflächen.

Schicken wir vorerst noch einige Worte, die für alle Typen gleiche Gültigkeit haben, der Behandlung der einzelnen Typen voraus. Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen haben uns gezeigt, dass es ausser den Fundamentalflächen 2. Grades keine anderen in Betracht kommenden Grenzfälle giebt, sie haben uns aber auch gleichzeitig gelehrt, dass jede solche Fläche noch doppelt unendlich viele Grenzfälle repräsentirt, da wir einem der Knotenpunkte noch eine ganz beliebige Lage auf derselben ertheilen können. Nun sind doch die 16 Knotenpunkte als die Schnittpunkte von vier Erzeugenden der einen Schaar mit vieren der andern Schaar definirt; wir können demnach eine Erzeugende aus jeder Schaar beliebig auswählen, dann sind jedesmal die 3 übrigen mitbestimmt. Die Geraden einer solchen Schaar gehören demnach zu je 4 zusammen; sie lassen sich 3 Mal in 2 Paare spalten, die harmonisch getheilt werden durch je eins der 3 Directricenpaare, welche dieser Erzeugung angehören. Wir können zugleich noch Einiges über die Realitätsverhältnisse im Allgemeinen hier anfügen. Da wir uns auf Flächen mit reellen Gleichungen beschränken müssen, so müssen die imaginären Punkte der Fläche paarweise conjugirt sein; insbesondere müssen also auch die imaginären Knotenpunkte paarweise conjugirt sein. Für die Grenzfläche folgt daraus, dass die Schnittpunkte der 4 Erzeugenden der einen Schaar mit den vieren der andern Schaar nur reell und paarweise conjugirt imaginär sein können; dann müssen aber ersichtlich diese 8 Erzeugenden reell, resp. paarweise conjugirt imaginär sein. Ist nun die bez. Fläche ein einschaliges Hyperboloid (wie bei den ersten 3 Typen), so giebt es reelle und conjugirt imaginäre Erzeugende, die dann *derselben* Schaar angehören; ist sie dagegen ein Ellipsoid oder zweischaliges Hyperboloid (wie beim Typus IV.), so giebt es nur solche conjugirt imaginäre Erzeugende, die *verschiedenen* Schaaren angehören. Das Weitere mag seine Stelle bei den einzelnen Typen finden.

§ 2.

Typus I.

Beim Typus I. giebt es 9 reelle Regelflächen, auf jeder liegen 4 *reelle* Directricenpaare, zwei Paare aus jeder Schaar. So enthält z. B. das Hyperboloid 123, 456 die *reellen* Directricenpaare 12, 23 und 45, 56. Vier zusammengehörige Erzeugende sind hier entweder alle vier reell, oder alle vier imaginär; dann müssen sie aber paarweise conjugirt imaginär sein, und beide Paare conjugirt imaginärer Geraden werden von dem *nämlichen* (natürlich reellen) Directricenpaar harmonisch getheilt, wie man sich leicht überzeugt. Wir können für unsere Grenzfläche demnach folgende 3 Annahmen machen: *Erstens* die 16 Knotenpunkte liegen auf 4 reellen Erzeugenden der einen und 4 reellen Erzeugenden der andern Schaar; *zweitens* sie liegen auf 4 reellen Erzeugenden der einen und 4 imaginären Erzeugenden der andern Schaar; *drittens* sie liegen auf 4 imaginären Geraden der einen und 4 imaginären Geraden der andern Schaar.

Im ersten Falle wird die bez. Regelfläche in 16 Felder getheilt, wie dies Fig. 13a angiebt; diese Felder zerfallen in 2 Gruppen von je 8, die nur in den Knotenpunkten an einander stossen; in der Figur ist die eine Gruppe von der andern durch Schraffirung unterschieden. *Denken wir uns eine solche Gruppe von* 8 *Feldern* (*etwa die schraffirten*) *mit je* 2 *Blättern überdeckt, deren Ränder zusammenhängen, während die übrigen* *frei bleiben, so haben wir eine Kummer'sche Fläche mit* 16 *reellen Knotenpunkten vor uns,* die bereits ein deutliches Bild der allgemeinen Fläche I a giebt, in welche sie durch stetige Aenderung ihrer Gestalt übergeführt werden kann. Lassen wir die Knotenpunkte einer allgemeinen Fläche sich durch eins der Hyperboloide*) hindurchbewegen, so tauschen die überdeckten Felder mit den nicht überdeckten ihre Rolle, indem die reellen Punkte in der Grenze paarweise zusammenrücken und dann conjugirt imaginär werden, während bei den conjugirt imaginären Punkten das Entgegengesetzte eintritt. Dabei ändert aber die Kummer'sche Fläche ihre Gestalt nicht, und man sieht, *dass alle Flächen mit* 16 *reellen Knotenpunkten dieselbe Gestalt besitzen.*

Im zweiten Fall sind blos die 4 Erzeugenden aus der einen Schaar reell, dieselben theilen das bez. Hyperboloid in 4 im Unendlichen mit sich selbst zusammenhängende Streifen. Ueberdecken wir zwei dieser Streifen, die nicht aneinander grenzen, mit je 2 Blättern, deren Ränder zusammenhängen, während wir die beiden übrigen Streifen einfach fortlassen, so erhalten wir *die Kummer'sche Fläche des Typus I. mit* 16 *imaginären Knotenpunkten* (I b). Sie besteht, wie es Figur 13 b angiebt, aus *zwei sich gegenseitig ausschliessenden Theilen*, welche die Gestalt von einschaligen Hyperboloiden besitzen; wenn man die Fläche allmälig deformirt, indem man die conjugirt imaginären Knotenpunkte wandern lässt, so erhält man die allgemeine Fläche dieser Art. Passiren die Knotenpunkte in der Grenzlage jenes Hyperboloid, so tauschen die überdeckten und nicht überdeckten Streifen ihre Rolle, wobei jedoch die Gestalt der Fläche nicht alterirt wird.

Im dritten Fall endlich giebt es auf dem bez. Hyperboloide keine reellen Erzeugenden mehr, welche die reellen Partien der Fläche von der imaginären trennen. Das ganze Hyperboloid kann desshalb doppelt überdeckt werden, und wir erhalten so bei stetiger Deformation *eine Kummer'sche Fläche mit* 16 *imaginären Knotenpunkten*, deren beide Theile die Gestalt eines Hyperboloids besitzen und bei der *der eine Theil innerhalb des anderen gelegen ist.* Passiren jetzt die Knotenpunkte jenes Hyperboloid, so fallen die reellen Punkte der Fläche paarweise zusammen, um nachher conjugirt imaginär zu werden; und da sie in

*) Die 9 Hyperboloide des Typus I. theilen den Raum in 96 Fächer; dieselben bilden 6 Gruppen zu je 16 von der Art, dass die 16 Knotenpunkte die Fächer einer Gruppe immer gleichzeitig durchlaufen. Es giebt demnach 6 verschiedene Kummer'sche Flächen in Bezug auf ihre Lage zu den Regelflächen und zu den Directricen, wie das auch mit den Resultaten des I. Abschnitts übereinstimmt. Es giebt nämlich 9 reelle Directricenpaare, sie bilden 6 reelle Tetraeder; die Kanten eines dieser Tetraeder werden in imaginären, die übrigen Directricen in reellen Punkten geschnitten; das giebt entsprechend den 6 reellen Tetraedern 6 verschiedene Flächen. Aehnliches lässt sich für die Typen II. und III. bemerken.

der Grenzlage das ganze Hyperboloid überdecken, so wird nach dem Durchgang *die Fläche völlig imaginär*, wie bei Ic.

Dass die beiden hier aufgezählten reellen Flächen mit imaginären Knotenpunkten im projectivischen Sinne nicht von einander verschieden sind, wurde bereits oben erwähnt*). Sie gehen aber auch direct in einander über, wenn man die Knotenpunkte von der einen Lage in die andere sich bewegen lässt, ohne eine weitere Grenzlage zu passiren. Um das deutlich zu übersehen gehen wir von einer bestimmten Fläche 2. Grades aus, nämlich von dem Hyperboloide 123, 456; wir nehmen an, die Erzeugenden durch die Knotenpunkte sind alle imaginär; ausserdem mögen die conjugirt imaginären Erzeugenden der einen Schaar durch die Directricen 12, die der andern Schaar durch die Directricen 56 harmonisch getrennt werden. Dann haben wir als Grenzfläche das doppelt überdeckte Hyperboloid. Die Knotenpunkte dieser Fläche sind conjugirt imaginär und liegen paarweise auf 8 reellen Geraden der Congruenz 34, da die Transformation der Congruenz 34, oder was dasselbe ist, die beiden Transformationen der Congruenzen 12 und 56 zusammengenommen, jeden Knotenpunkt in seinen conjugirten überführen. Lassen wir jetzt die Knotenpunkte stetig wandern, so geschieht das dadurch, dass wir einerseits die conjugirt imaginären Knotenpunkte auf den 8 reellen Congruenzgeraden, und dass wir andererseits diese Geraden in der Congruenz sich bewegen lassen. Enden wir diese Wanderung auf irgend einer der 4 Regelflächen 134, 256; 234, 156; 534, 126; 634, 125, so liegen die Knotenpunkte auf 4 reellen Erzeugenden derjenigen Schaar, welche der Congruenz 34 angehört, d. h. die Grenzfläche des doppelt überdeckten Hyperboloids ist durch stetige Aenderung in eine Grenzfläche mit 2 doppelt überdeckten Streifen übergeführt worden, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

§ 3.

Typus II.

Hier giebt es nur noch 4 reelle Regelflächen, nämlich: 123, 456; 124, 356; 134, 256 und 234, 156. Ihre eine Erzeugung enthält je zwei

*) Hat man 2 einschalige Hyperboloide, welche sich nicht in reellen Punkten schneiden, und man legt an eins derselben eine Tangentialebene, so besteht die Gesammtschnittcurve aus einem Geradenpaar und einem Oval, das auch durch's Unendliche verlaufen kann. Nimmt man nun eine Parallelebene zu der Tangentialebene, so schneidet diese in zwei Ovalen, die sich einschliessen oder ausschliessen, je nachdem die Parallelebene auf der einen oder andern Seite von der Tangentialebene liegt. Macht man also diese Ebene zur unendlich fernen, so erhält man im ersten Fall zwei sich einschliessende Hyperboloide, im 2. Fall zwei sich ausschliessende; ganz ebenso verhält es sich mit der oben genannten Kummer'schen Fläche.

reelle Directricenpaare und ein conjugirt imaginäres; ihre andere Erzeugung hingegen enthält das gemeinsame reelle Directricenpaar 56 und je zwei imaginäre Directricenpaare von der Beschaffenheit, dass die Geraden des einen Paares conjugirt imaginär zu denen des andern*) sind. Für 4 zusammengehörige Erzeugende der erst genannten Schaar gilt das beim Typus I. Gesagte, da ja eine solche Schaar, ebenso wie dort, 2 reelle Directricenpaare aufweist; von 4 zusammengehörigen Erzeugenden der andern Schaar dagegen müssen immer 2 reell und 2 conjugirt imaginär sein, indem man leicht zeigt, dass es nicht 2 Paare conjugirt imaginärer Erzeugenden**) geben kann. Der Typus II. ergiebt demnach für die 16 Knotenpunkte nur folgende beiden Möglichkeiten. *Von den 4 Erzeugenden der einen Schaar, die durch die Knotenpunkte hindurchgehen, sind immer 2 reell und 2 conjugirt imaginär, die 4 Erzeugenden der andern Schaar sind dagegen entweder alle reell oder alle imaginär.* Im ersten Falle wird das zugehörige Hyperboloid in 8 Felder getheilt, von denen 4, die nur in den Knotenpunkten an einander stossen, doppelt zu überdecken sind, vergl. Fig. 14a; dadurch entsteht die Fläche IIa mit 8 reellen Knotenpunkten. Beim Durchgang der Fläche durch das Hyperboloid wechseln die überdeckten und nicht überdeckten Felder ihre Rolle, wobei sich offenbar die Gestalt der Fläche nicht ändert; es giebt also *nur eine Fläche mit 8 reellen Knotenpunkten.* Im letzten Fall wird das Hyperboloid in zwei unendliche Streifen getheilt, wovon der eine doppelt, der andere aber gar nicht zu überdecken ist, vergl. Fig. 14b; diess giebt die *einzige Fläche des Typus* II. *mit lauter imaginären Knotenpunkten* (IIb).

§ 4.

Typus III.

Die beiden einzigen reellen Regelflächen sind 134, 256 und 234, 156; sie enthalten noch, den beiden Schaaren von Erzeugenden entsprechend, je ein reelles Directricenpaar, indess die beiden übrigen Paare conjugirt imaginär zu *einander* sind. Es tritt desshalb hier in beiden Schaaren der unter Typus II. zuletzt genannte Fall ein, wo *von 4 zusammengehörigen Erzeugenden immer 2 reell und 2 conjugirt imaginär sind.* Die reellen Erzeugenden theilen das Hyperboloid in 4 Felder, 2 davon

*) Es folgen die Realitätsverhältnisse aller dieser Gebilde aus ihren Complexgleichungen; ich kann hier, wie bereits zu Anfang dieser Abhandlung, nur auf den letzten Abschnitt verweisen, der die analytischen Gleichungen enthält.

**) Denn gehen wir von 2 Paar conjugirt imaginären Elementen aus (mögen das Punkte oder Geraden sein) so giebt es immer 2 reelle Elemente, welche beide Paare gleichzeitig harmonisch theilen; dann kommen wir aber auf den beim Typus I. behandelten Fall zurück, der 2 reelle Directricenpaare voraussetzt, was ja hier ausgeschlossen ist.

werden doppelt überdeckt, die beiden andern bleiben frei, vergl. Fig. 15. Beim Durchgang durch das Hyperboloid bleibt die Gestalt der Fläche ungeändert, der Typus III. liefert folglich nur *eine einzige reelle Fläche, dieselbe besitzt 4 reelle Knotenpunkte.*

§ 5.

Typus IV.

Dieser Typus liefert noch 4 reelle Fundamentalflächen, dieselben sind jedoch nicht mehr Regelflächen, vielmehr bilden sie ein Ellipsoid und 3 zweischalige Hyperboloide*), nämlich 135, 146; 145, 236; 136, 245 und 146, 235. Conjugirt imaginäre Erzeugende gehören hier verschiedenen Schaaren zu, wir erhalten desshalb als einzig mögliche Lage für die 8 Erzeugenden durch die Knotenpunkte die folgende: Wir müssen einen reellen Punkt einer solchen Fläche 2. Grades als Knotenpunkt beliebig auswählen (es giebt das noch zu doppelt unendlich vielen Möglichkeiten Anlass), und aus ihm die 3 weiteren reellen Punkte ableiten, welche sich durch die Transformationen der 3 reellen Congruenzen 12, 34, 56 ergeben; dann bilden die 8 Erzeugenden durch diese 4 Punkte ein System von der verlangten Art. *In der That müssen die zum Typus IV. gehörigen Flächen stets 4 reelle Knotenpunkte enthalten,* da ja 2 conjugirt imaginäre Erzeugenden sich hier stets in einem reellen Punkte schneiden.

Nachdem wir so die Lage der Knotenpunkte fixirt haben, fragen wir uns weiter nach der Gestalt der zugehörigen Grenzfläche. Da die Erzeugenden durch die Knotenpunkte imaginär sind, der reelle Theil der bez. Fundamentalfläche also nicht in Felder getheilt wird, *so kann man diese Fläche ganz und gar mit 2 Blättern überdecken; diese beiden Blätter müssen in den 4 reellen Knotenpunkten,* als dem einzigen reellen Theil der Berührungskegelschnitte, *zusammenhängen* (IV a). Lassen wir die Knotenpunkte in das Innere jener Fläche treten, so werden sich die beiden Blätter immer weiter von einander entfernen, aber doch immer noch an 4 Stellen zusammenhängen müssen, wie das die Fresnel'sche Wellenfläche zeigt. Bewegen sich dagegen die Knotenpunkte durch die Fläche 2. Grades hindurch und gelangen ausserhalb, so werden die reellen Punkte paarweise conjugirt imaginär, *die ganze Kummer'sche Fläche wird imaginär und besitzt nur noch 4 reelle Knotenpunkte und ebenso 4 reelle Doppelebenen* (IV b).

*) Diese 4 Flächen, von denen jede die 3 übrigen in 2 Punkten berührt, theilen den Raum in 5 verschiedene Fächer, nämlich in das Innere des Ellipsoids, das Innere des ersten, zweiten und dritten Hyperboloids und endlich in einen weiteren Raum, der von den 4 Flächen ausgeschlossen wird. Die 4 reellen Knotenpunkte liegen gleichzeitig in einem und demselben Raum; liegen sie ausserhalb der 4 Flächen, so wird die zugehörige Kummer'sche Fläche imaginär (IV b), sonst wird sie reell.

§ 6.

Die verschiedenen Linienflächen 4. Ordnung mit 2 Doppelgeraden.

Als einen speciellen Fall der Kummer'schen Fläche ergeben sich die verschiedenen Linienflächen*) 4. Ordnung mit 2 Doppelgeraden. Die Discussion der Gestalten dieser Linienflächen lässt sich hier ohne Benützung weiterer Hülfsmittel auf das einfachste durchführen und gerade desshalb möchte ich dieselbe an dieser Stelle anbringen. Aber noch weitere Gründe haben mich zu den Darlegungen dieses Paragraphen bewogen. Der erste Grund ist darin zu suchen, dass diese Linienflächen als *Uebergangsformen* der aufgezählten Kummer'schen Flächen betrachtet werden können, während sie doch weit einfachere Gebilde als diese sind, und auch eine Modellirung derselben durchaus keine Schwierigkeiten bietet. Der zweite Grund liegt in der einfachen Form ihrer Gleichungen, die im dritten Abschnitte dieser Abhandlung gegeben sind, sowie in dem häufigen Vorkommen dieser Flächen.**) Den Ausgangspunkt der gestaltlichen Untersuchungen bilden auch hier wieder die Fundamentalflächen 2. Grades, da sie auch als Special- oder Grenzfälle der Linienflächen auftreten.

Um überhaupt eine Linienfläche zu bekommen, lassen wir einen Knotenpunkt auf eine Directrix rücken. Er fällt dann mit einem zweiten Knotenpunkte zusammen, da jede Directrix durch die Transformation der zugehörigen Congruenz Punkt für Punkt in sich transformirt wird. Ueberhaupt rücken also alle Knotenpunkte paarweise zusammen und liegen zu je 4 auf den beiden Geraden eines Directricenpaares. Die zugehörige Kummer'sche Fläche artet dann in eine Linienfläche aus, deren Doppelgeraden eben diese beiden Directricen sind, und deren 8 Cuspidalpunkte (sie können reell und imaginär sein) mit jenen 8 Knotenpunkten identisch sind. Durch die hier aufgezählten Stücke ist aber eine Linienfläche noch nicht völlig bestimmt, vielmehr *giebt es noch einfach unendlich viele Linienflächen, welche die nämlichen Doppelgeraden und die nämlichen Cuspidalpunkte besitzen*, wie sogleich bewiesen werden soll. Gehen wir nämlich von der Kummer'schen Fläche aus; dort fanden wir, dass durch die 16 Knotenpunkte eine Fläche völlig bestimmt ist, und dass es auch immer zu 16 Punkten von der früher beschriebenen Beschaffenheit eine Fläche giebt. Gleiches muss auch nm die speciellen Fall der Linienfläche gelten; es genügt also nicht

*) Es sind dies die allgemeinen Linienflächen 4. Ordnung mit zwei Doppelgeraden, wie man durch Abzählung der Constanten für den allgemeinen und den vorliegenden Fall nachweisen kann.

**) Bis jetzt ist, meines Wissens, noch keine gestaltliche Discussion dieser Linienflächen gegeben, und auch die Darstellung ihrer Gleichungen in der hier gegebenen einfachen Gestalt dürfte nirgends zu finden sein.

die Lage der 8 Cuspidalpunkte zu kennen, man muss auch wissen, in welcher Weise sie aus zwei Knotenpunkten entstanden sind. Nun liegen doch die 16 Knotenpunkte einer Kummer'schen Fläche paarweise auf Geraden der 15 Congruenzen; halten wir also die 8 Geraden einer Congruenz, auf welcher die Knotenpunkte liegen, fest und lassen die Knotenpunkte auf diesen Geraden sich bewegen, bis sie paarweise in die Directricen zusammenrücken, so entstehen 8 Cuspidalpunkte; durch jeden geht eine Congruenzgerade, welche als Verbindungslinie der unendlich nahen Knotenpunkte anzusehen ist und somit *die Erzeugende oder Torsallinie im Cuspidalpunkt* darstellt. Die 8 Cuspidalpunkte mit ihren Torsallinien vertreten demnach in dem speciellen Fall der Linienflächen die 16 Knotenpunkte des allgemeinen Falls, und es muss also immer noch *eine*, aber auch nur *eine* Linienfläche geben, welche jene Cuspidalpunkte mit ihren Erzeugenden enthält. Die Erzeugende in einem Cuspidalpunkte kann aber als Congruenzgerade noch unendlich viele Lagen annehmen, denn alle Geraden, welche die zweite Directrix treffen, gehören der bez. Congruenz an; dann sind aber die Erzeugenden in den übrigen Cuspidalpunkten völlig bestimmt. Hiermit ist die Behauptung erwiesen, *dass es einfach unendlich viele Linienflächen giebt, welche die nämlichen 8 Cuspidalpunkte besitzen. Zugleich ergiebt sich*, wie beiläufig bemerkt, *dass das Doppelverhältniss der Cuspidalpunkte für beide Doppelgeraden dasselbe ist.*

Zu diesen unendlich vielen Linienflächen, mit 8 festen Cuspidalpunkten, gehören auch doppelt zählend die 4 Fundamentalflächen 2. Grades, welche durch die beiden Doppelgeraden hindurchgehen. Man erhält sie dadurch, dass man als Tangente in einem Cuspidalpunkte die durch ihn verlaufende Erzeugende der bez. Fundamentalfläche wählt, oder mit andern Worten dadurch, dass man die Tangente in dem Cuspidalpunkte noch durch einen zweiten Cuspidalpunkt (der natürlich nicht auf derselben Doppelgeraden, wie der erste, liegen kann) hindurchlegt. Es wird demnach auch hier, bei der Untersuchung der Gestalten der Linienflächen, genügen, die zugehörigen Grenzfälle der doppelt zählenden Flächen zweiten Grades zu studiren. Diese Grenzfälle erhalten wir aber direct aus den Grenzfällen der Kummer'schen Fläche, wenn wir die 4 zusammengehörigen Erzeugenden der einen Schaar paarweise zusammenfallen lassen mit den Geraden eines Directricenpaares, die dann zu den Doppelgeraden der zugehörigen Fläche werden. Wir erhalten so ohne Weiteres folgende 7 von einander verschiedene Linienflächen.

Der Typus I. liefert zunächst *eine Linienfläche mit reellen Doppelgeraden und 8 reellen Cuspidalpunkten*, welche durch Figur 16a*) sche-

*) Die beiden stärkeren Linien in den Fig. 16a etc. bedeuten die Doppelgeraden.

matisch dargestellt ist; die Theile der einen Art sind doppelt zu überdecken, die andern einfach wegzulassen. Drehen sich die Erzeugenden in den Cuspidalpunkten, so entwickelt sich aus dem Grenzfalle die allgemeine Linienfläche; sie besteht offenbar aus 2 Mänteln, die sich in den Doppelgeraden *selbst* durchsetzen. Je nachdem die Drehung nach der einen oder andern Seite ausgeführt wird, wechseln die schraffirten und nicht schraffirten Theile ihre Rolle; dabei wird jedoch die Gestalt der bez. Linienfläche nicht alterirt.

Werden die 4 zusammengehörigen Erzeugenden, welche die 8 Cuspidalpunkte auf den Doppelgeraden ausschneiden, paarweise conjugirt imaginär (wie das ja nach den früheren Darlegungen beim Typus I. möglich ist), so kommt *eine reelle Linienfläche mit reellen Doppelgeraden und imaginären Cuspidalpunkten*, vergl. Fig. 16b; die ganze Fläche zweiten Grades ist doppelt zu überdecken. Die allgemeine Fläche besteht demnach aus 2 Mänteln, die sich *gegenseitig* in den Doppelgeraden durchsetzen. Lassen wir diese Fläche durch den Grenzfall des Hyperboloids hindurchgehen, so fallen die reellen Punkte paarweise zusammen und werden alsdann imaginär; es entsteht dann *eine imaginäre*) Linienfläche mit reellen Doppelgeraden und imaginären Cuspidalpunkten.*

Nehmen wir 2 conjugirt imaginäre Directricen zu Doppelgeraden der Linienfläche, während wir die 4 zusammengehörigen Erzeugenden reell lassen, so erhalten wir *eine reelle Linienfläche mit imaginären Doppelgeraden*, vergl. Fig. 16c, ihre *beiden* Mäntel schliessen sich gegenseitig aus. Von dieser Fläche ist die andere Fläche nicht verschieden**), welche man erhält, wenn man die 4 zusammengehörigen Erzeugenden imaginär nimmt und die ganze Fläche 2. Grades mit 2 Blättern überdeckt; ihre Doppelgeraden sind ebenfalls imaginär, nur schliesst von ihren beiden Mänteln der eine den andern ein.

Geht die zuletzt beschriebene Linienfläche durch den Grenzfall des Hyperboloids hindurch, so fallen ihre Mäntel Punkt für Punkt zusammen, um dann imaginär zu werden, es ergiebt sich so *die imaginäre Linienfläche mit imaginären Doppelgeraden.* Hiernach haben wir aus Typus I. im Ganzen 5 Arten von Linienflächen gewonnen***).

Der Typus II. liefert noch *zwei* weitere Linienflächen. Wählen wir nämlich die Directricen 56 als Doppelgeraden, so kommen wir zu den bereits aufgezählten Flächen zurück; wir werden desshalb zu den

---

*) Die Gleichungen aller hier genannten Flächen sind natürlich reell.

**) Das Wort „verschieden" ist im projectivischen Sinne zu nehmen.

***) Dass die Typen II. und III. zum Theil auf die Linienflächen des Typus I. zurückführen, findet seine Erklärung dadurch, dass zu jeder Linienfläche unendlich viele Systeme von 6 Fundamentalcomplexen gehören.

Directricen greifen müssen, die mit 56 nicht*) zu derselben Schaar von Erzeugenden gehören. Sind dieselben reell, so kommen wir zu *einer Linienfläche mit reellen Doppelgeraden und* 4 *reellen Cuspidalpunkten*, vergl. Fig. 17a, da ja hier von 4 zusammengehörigen Erzeugenden immer 2 reell und 2 conjugirt imaginär sind; diese Fläche besteht aus einem einzigen Mantel, der sich in den Doppelgeraden *selbst* durchsetzt. Sind dieselben imaginär, so entsteht *eine Linienfläche mit imaginären Doppelgeraden*, vergl. Fig. 17b; sie besitzt nur noch einen *einzigen* Mantel. Der Typus III. liefert keine neuen Flächen, und der Typus IV. liefert überhaupt keine derartigen Linienflächen. — Wie die hier genannten Linienflächen als Grenzübergänge von einer Kummer'schen Fläche zu einer andern aufgefasst werden können, lässt sich leicht verfolgen; die nähere Ausführung soll hier unterbleiben, weil sie leicht ermüden würde.

III. Abschnitt.

Analytische Behandlung in Punktcoordinaten.

§ 1.

Einleitung.

Wir kommen jetzt zu dem letzten Abschnitte dieser Abhandlung, der sich mit der Aufstellung der Gleichungen in Punktcoordinaten für die bereits in den früheren Abschnitten aufgezählten Flächen beschäftigen soll. Es ist dieser Theil mit Fleiss an das Ende gestellt worden, da sich diese analytische Behandlung nicht eigentlich zur Discussion der Gestalten eignet, und zwar ist das schon darum nicht der Fall, weil dieselbe an die Fundamentaltetraeder anknüpft, was eine unsymmetrische Behandlung der 6 Fundamentalcomplexe nach sich zieht. Aus diesem Grunde soll sich der vorliegende Abschnitt nicht mehr mit gestaltlichen Discussionen befassen, sondern nur mit Hülfe der bereits erzielten Resultate die Gleichungen der einzelnen Flächen wirklich aufstellen. Diese Gleichungen lassen direct die Lage der 16 Knotenpunkte erkennen, und ergeben so immer eine leichte Controle der Rechnung. *Den Ausgangspunkt für die ganze Darstellung bilden die Gleichungen der Fläche mit* 16 *reellen Knotenpunkten, aus der wir alle übrigen Gleichungen durch lineare Transformationen, die allerdings nicht mehr reell sind, ableiten können.* Die Gleichung

*) Die Geraden eines Directricenpaars, das mit 56 zu der nämlichen Schaar gehört, sind nicht conjugirt imaginär, können also keine Fläche mit reeller Gleichung liefern.

der Fläche mit 16 reellen Knotenpunkten wird auf eins der reellen Fundamentaltetraeder bezogen; sie kann dann noch in zwei verschiedenen Formen geschrieben werden. Die erste Form rührt von **Borchardt** her und findet sich im 83. Bd. des **Crelle**'schen Journals S. 239; sie enthält als Constanten die Coordinaten w_0, x_0, y_0, z_0 eines Knotenpunktes und lautet:

$$\left.\begin{aligned} w^4+x^4+y^4+z^4+2\,\frac{w_0 x_0 y_0 z_0 \prod_{\varepsilon,\varepsilon'}(w_0^2+\varepsilon x_0^2+\varepsilon' y_0^2+\varepsilon\varepsilon' z_0^2)\,wxyz}{(w_0^2x_0^2-y_0^2z_0^2)(w_0^2y_0^2-x_0^2z_0^2)(w_0^2z_0^2-x_0^2y_0^2)} \\ -\frac{w_0^4+x_0^4-y_0^4-z_0^4}{w_0^2x_0^2-y_0^2z_0^2}(w^2x^2+y^2z^2)-\frac{w_0^4+y_0^4-x_0^4-z_0^4}{w_0^2y_0^2-x_0^2z_0^2}(w^2y^2+x^2z^2) \\ -\frac{w_0^4+z_0^4-x_0^4-y_0^4}{w_0^2z_0^2-x_0^2y_0^2}(w^2z^2+x^2y^2) \end{aligned}\right\}=0,$$

wobei ε, $\varepsilon' = \pm 1$ ist.

Die zweite Gleichungsform findet sich in meiner Promotionsschrift und ist:

$$0=\left\{\begin{aligned} & w^4+x^4+y^4+z^4 \\ & +4\,\frac{\varkappa_1\varkappa_2(\varkappa_3+\varkappa_4-\varkappa_5-\varkappa_6)+\varkappa_3\varkappa_4(\varkappa_5+\varkappa_6-\varkappa_1-\varkappa_2)+\varkappa_5\varkappa_6(\varkappa_1+\varkappa_2-\varkappa_3-\varkappa_4)}{(\varkappa_1-\varkappa_2)(\varkappa_3-\varkappa_4)(\varkappa_5-\varkappa_6)}\,wxyz \\ & -2\,\frac{(\varkappa_3-\varkappa_5)(\varkappa_4-\varkappa_6)+(\varkappa_3-\varkappa_6)(\varkappa_4-\varkappa_5)}{(\varkappa_3-\varkappa_4)(\varkappa_5-\varkappa_6)}(w^2x^2+y^2z^2) \\ & -2\,\frac{(\varkappa_5-\varkappa_1)(\varkappa_6-\varkappa_2)+(\varkappa_5-\varkappa_2)(\varkappa_6-\varkappa_1)}{(\varkappa_5-\varkappa_6)(\varkappa_1-\varkappa_2)}(w^2y^2+x^2z^2) \\ & -2\,\frac{(\varkappa_1-\varkappa_3)(\varkappa_2-\varkappa_4)+(\varkappa_1-\varkappa_4)(\varkappa_2-\varkappa_3)}{(\varkappa_1-\varkappa_2)(\varkappa_3-\varkappa_4)}(w^2z^2+x^2y^2), \end{aligned}\right.$$

wobei $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \varkappa_3 > \varkappa_4 > \varkappa_5 > \varkappa_6$, wie vorher, die Constanten des Complexsystems 2. Grades sind. Die letzte der beiden Gleichungen lässt sich aus der ersten durch die Bemerkung ableiten, dass die Doppelverhältnisse der 6 Knotenpunkte einer Doppelebene gleich sein müssen den Doppelverhältnissen der Grössen $\varkappa$, da jedem Punkte des Berührungskegelschnitts ein und nur ein Parameter λ zukommt und dieser für die 6 Knotenpunkte gerade jene 6 Werthe $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ..., $\varkappa_6$ annimmt. Die Rechnung soll jedoch hier nicht ausgeführt werden, da sie sehr weitläufig ist.

§ 2.

Typus I.

Wir beginnen zunächst mit der Darstellung der 6 Complexe, der 10 Linienflächen und der 15 Directricenpaare und beziehen sämmtliche Gebilde auf das Fundamentaltetraeder: 1 2, 3 4, 5 6. Die Coordinaten einer geraden Linie sind alsdann durch die Gleichungen gegeben:

$$
\begin{array}{ll}
p_{12} = w_1 x_2 - x_1 w_2, & p_{34} = y_1 z_2 - z_1 y_2, \\
p_{13} = w_1 y_2 - y_1 w_2, & p_{42} = z_1 x_2 - x_1 z_2, \\
p_{14} = w_1 z_2 - z_1 w_2, & p_{23} = x_1 y_2 - y_1 x_2,
\end{array}
$$

wo die p_{ik} der Identität genügen:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Bezeichnen wir nun mit $x_1, x_2, \ldots, x_6$ die *linken Seiten der Complexgleichungen*, zwischen denen die Identität:

$$x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$$

besteht, so lassen sich diese neuen Coordinaten offenbar in der Form darstellen:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \phantom{\frac{1}{i}}(p_{12} + p_{34}) = \phantom{\frac{1}{i}}(w_1 x_2 - x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2), \\
x_2 &= \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}) = \frac{1}{i}(w_1 x_2 - x_1 w_2 - y_1 z_2 + z_1 y_2), \\
x_3 &= \phantom{\frac{1}{i}}(p_{13} + p_{42}) = \phantom{\frac{1}{i}}(w_1 y_2 - y_1 w_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2), \\
x_4 &= \frac{1}{i}(p_{13} - p_{42}) = \frac{1}{i}(w_1 y_2 - y_1 w_2 - z_1 x_2 + x_1 z_2), \\
x_5 &= \phantom{\frac{1}{i}}(p_{14} + p_{23}) = \phantom{\frac{1}{i}}(w_1 z_2 - z_1 w_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2), \\
x_6 &= \frac{1}{i}(p_{14} + p_{23}) = \frac{1}{i}(w_1 z_2 - z_1 w_2 - x_1 y_2 + y_1 x_2).
\end{aligned}
$$

Daraus folgen für die *Linienflächen* 2. *Grades* die Gleichungen*):

$$
\begin{array}{ll}
123, 456 \ldots 2(wy - xz) = 0, & \\
124, 356 \ldots 2(wy + xz) = 0, & 135, 246 \ldots w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\
126, 345 \ldots 2(wz - xy) = 0, & 136, 245 \ldots w^2 - x^2 - y^2 + z^2 = 0, \\
125, 346 \ldots 2(wz + xy) = 0, & 145, 236 \ldots w^2 - x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\
156, 234 \ldots 2(wx - yz) = 0, & 146, 235 \ldots w^2 + x^2 - y^2 - z^2 = 0, \\
134, 256 \ldots 2(wx + yz) = 0, &
\end{array}
$$

dieselben stellen 9 einschalige Hyperboloide und eine imaginäre Fläche 135, 246 dar.

Die Gleichungen**) der 15 *Directricenpaare* aber werden:

---

*) Die Richtigkeit dieser Gleichungen ist leicht zu verificiren; so enthält z. B. das Hyperboloid $wy - xz = 0$ die beiden Schaaren $\frac{w}{x} = \frac{z}{y} =$ Const. und $\frac{w}{z} = \frac{x}{y} =$ Const.; die erste Schaar genügt aber den Complexen: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, und die zweite Schaar den Complexen: $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$.

**) Die Gleichungen $w = 0$, $x = 0$ resp. $y = 0$, $z = 0$ stellen die Directricen 12 dar, weil sie den Gleichungen $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ genügen, etc.

$$(12)\begin{cases}w=0\\x=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}\quad(34)\begin{cases}w=0\\y=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}\quad(56)\begin{cases}w=0\\z=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

$$(14)\begin{cases}w+z=0\\x-y=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}w-z=0\\x+y=0\end{cases}\qquad(23)\begin{cases}w+z=0\\x+y=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}w-z=0\\x-y=0\end{cases}$$

$$(25)\begin{cases}w+y=0\\x-z=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}w-y=0\\x+z=0\end{cases}\qquad(16)\begin{cases}w+y=0\\x+z=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}w-y=0\\x-z=0\end{cases}$$

$$(36)\begin{cases}w+x=0\\y-z=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}w-x=0\\y+z=0\end{cases}\qquad(45)\begin{cases}w+x=0\\y+z=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}w-x=0\\y-z=0\end{cases}$$

$$(13)\begin{cases}w+iz=0\\x+iy=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}w-iz=0\\x-iy=0\end{cases}\qquad(24)\begin{cases}w+iz=0\\x-iy=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}w-iz=0\\x+iy=0\end{cases}$$

$$(15)\begin{cases}w+iy=0\\x-iz=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}w-iy=0\\x+iz=0\end{cases}\qquad(26)\begin{cases}w+iy=0\\x+iz=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}w-iy=0\\x-iz=0\end{cases}$$

$$(35)\begin{cases}w+ix=0\\y+iz=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}w-ix=0\\y-iz=0\end{cases}\qquad(46)\begin{cases}w+ix=0\\y-iz=0\end{cases}\text{u.}\begin{cases}w-ix=0\\y+iz=0,\end{cases}$$

die ersten 9 sind reell, die übrigen 6 imaginär. — Zugleich sieht man, dass aus einem Punkte $wxyz$ durch die Transformationen der 15 Congruenzen folgende Punkte hervorgehen:

(12)	$w,$	$x,$	$-y,$	$-z,$	(23)	$z,$	$y,$	$x,$	$w,$
(13)	$z,$	$y,$	$-x,$	$-w,$	(24)	$z,$	$-y,$	$x,$	$-w,$
(14)	$z,$	$-y,$	$-x,$	$w,$	(25)	$y,$	$-z,$	$w,$	$-x,$
(15)	$y,$	$-z,$	$-w,$	$x,$	(26)	$y,$	$z,$	$-w,$	$-x,$
(16)	$y,$	$z,$	$w,$	$x,$	(34)	$w,$	$-x,$	$y,$	$-z,$

(35)	$x,$	$-w,$	$z,$	$-y,$
(36)	$x,$	$w,$	$-z,$	$-y,$
(45)	$x,$	$w,$	$z,$	$y,$
(46)	$x,$	$-w,$	$-z,$	$y,$
(56)	$w,$	$-x,$	$-y,$	$z.$

Die 3 verschiedenen Flächen des Typus I. können nun durch folgende Betrachtungen gewonnen werden. Zunächst stellt die von Borchardt gegebene Gleichung des vorigen Paragraphen *eine Kummer'sche Fläche* (Ia) *mit* 16 *reellen Knotenpunkten* dar, bezogen auf ein beliebiges reelles Fundamentaltetraeder, etwa das Tetraeder 12, 34, 56. Denn da der Knotenpunkt $w_0x_0y_0z_0$ noch beliebig im Raume sich bewegen darf, kann er in Bezug auf irgend eins der 6 reellen Tetraeder die Coordinaten $w_0\,x_0\,y_0\,z_0$ aufweisen, und dann ist die zugehörige Fläche, bezogen auf dieses Tetraeder, durch jene Gleichung gegeben.

Je nachdem nun der Knotenpunkt $w_0 x_0 y_0 z_0$ ein andere Lage im Raume einnimmt, ändert auch die zugehörige Fläche ihre Lage gegen das Tetraeder 12, 34, 56. Um diese Aenderungen zu studiren, müssen wir ihre Schnittpunkte mit den reellen Directricen untersuchen; hier genügt es, die Schnittpunkte mit einer Directrix 56, etwa: $x = 0$, $y = 0$, zu betrachten. Die 4 Schnittpunkte, es sind Doppelinflexionspunkte, sind dargestellt durch die Gleichung:

$$w^4 + z^4 - \frac{w_0^4 + z_0^4 - x_0^4 - y_0^4}{w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2}\, w^2 z^2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind alle 4 reell, wenn:

$$w_0^4 + z_0^4 - x_0^4 - y_0^4 > 2(w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2)$$

ist, in allen andern Fällen imaginär; die Schnittpunkte der Directricen 56 sind also reell oder imaginär, je nachdem diese Ungleichung erfüllt ist oder nicht.

Von den Flächen mit reellen Knotenpunkten kommt man zu solchen mit imaginären Knotenpunkten durch die Substitution: $w' = w$, $x' = ix$, $y' = iy$, $z' = z$. Denn diese Substitution bezieht die ursprüngliche Fläche Punkt für Punkt auf eine neue Fläche, welche wieder eine Kummer'sche Fläche sein muss, da bei der Transformation das System der Fundamentalcomplexe ungeändert bleibt und die entstehende neue Gleichung ebenfalls reell wird. Auch sieht man sofort, dass jede Gerade der Congruenz 56 bei dieser Transformation in sich übergeht; in welcher Weise dabei die Punktreihe auf ihr sich transformirt, soll uns nun weiter beschäftigen. Begnügen wir uns mit reellen Geraden, so ist eine solche Congruenzgerade bestimmt durch ihre reellen Schnittpunkte mit den Directricen 56, also durch zwei Punkte: $w, 0, 0, z$ und $0, x, y, 0$; diese beiden Punkte bleiben bei der genannten Substitution fest. Jedem reellen Punkte einer solchen Geraden mit den Coordinaten: $w, \lambda x, \lambda y, z$ entspricht bei der Transformation ein imaginärer Punkt $w, i\lambda x, i\lambda y, z$, jedem imaginären Punkt, dessen Coordinaten die Form haben $w, i\lambda x, i\lambda y, z$, ein reeller Punkt; allen übrigen imaginären Punkten aber entsprechen wiederum imaginäre Punkte. Da nun eine gestaltliche Untersuchung der transformirten Fläche blos von den *reellen* Punkten derselben abhängt, so genügt es bei der ursprünglichen Fläche Punkte von der Form $w, i\lambda x, i\lambda y, z$ zu betrachten, da ja nur solche Punkte durch die obige Substitution in reelle Punkte der neuen Fläche übergehen. Legt man nun durch diesen Punkt $w, i\lambda x, i\lambda y, z$ die bez. Gerade der Congruenz 56, so schneidet dieselbe die gegebene Fläche ersichtlich in dem conjugirten Punkte $w, -i\lambda x, -i\lambda y, z$. Ausserdem schneidet eine solche Gerade noch in zwei weiteren Punkten, die reell oder conjugirt imaginär sein können; im letzten Falle sind sie aber stets von der Form $w, i\mu x, i\mu y, z$ und

$w, -i\mu x, -i\mu y, z$, weil die Punkte paarweise harmonisch zu den Directricen 56 liegen müssen. Ich behaupte nun, *dass es nur dann Congruenzgeraden giebt, welche die Fläche in Punkten der beschriebenen Art schneiden, wenn die Schnittpunkte der bez. Directricen mit der Fläche reell sind.* Denn der Uebergang von den Congruenzgeraden mit reellen Schnittpunkten (und solche giebt es bei der Fläche (Ia) ja immer) zu den genannten, wird nothwendig von den Geraden mit einem doppelt zählenden reellen Schnittpunkte gebildet; für einen solchen Punkt muss aber offenbar $\lambda = 0$ oder $\lambda = \infty$ werden, d. h. er muss auf einer der beiden Directricen liegen, womit die Behauptung erwiesen ist.

Wir sind demnach zu folgendem Resultate gelangt. Man führe an der Gleichung der Kummer'schen Fläche mit 16 reellen Knotenpunkten die Substitution $w' = w,\ x' = ix,\ y' = iy,\ z' = z$ aus, und bilde also die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &w^4 + x^4 + y^4 + z^4 - 2\frac{w_0 x_0 y_0 z_0 \prod_{\varepsilon,\varepsilon'}(w_0^2 + \varepsilon x_0^2 + \varepsilon' y_0^2 + \varepsilon\varepsilon' z_0^2)}{(w_0^2 x_0^2 - y_0^2 z_0^2)(w_0^2 y_0^4 - x_0^2 z_0^2)(w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2)}\, wxyz \\ &+ \frac{w_0^4 + x_0^4 - y_0^4 - z_0^4}{w_0^2 x_0^2 - y_0^2 z_0^2}(w^2 x^2 + y^2 z^2) + \frac{w_0^4 + y_0^4 - x_0^4 - z_0^4}{w_0^2 y_0^2 - x_0^2 z_0^2}(w^2 y^2 + x^2 z^2) \\ &\qquad - \frac{w_0^4 + z_0^4 - x_0^4 - y_0^4}{w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2}(w^2 z^2 + x^2 y^2) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung stellt dann eine Kummer'sche Fläche mit 16 *imaginären Knotenpunkten dar, welche reell oder imaginär ist* (Fläche (Ib) oder (Ic)), *je nachdem:* $w_0^4 + z_0^4 - x_0^4 - y_0^4 > 2(w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2)$, *oder nicht.* Denn im ersten Falle schneidet die ursprüngliche Fläche die Directricen 56 in reellen, im zweiten Falle aber in imaginären Punkten.

Eine zweite Darstellung dieser Flächen (Ia), (Ib) und (Ic) erhält man, wenn man von der Flächengleichung mit den Constanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_6$ ausgeht. Man gelangt zu der im vorigen Paragraphen aufgestellten Gleichungsform, wenn man das Tetraeder 12, 34, 56 zu Grunde legt und diejenige Fläche mit 16 reellen Knotenpunkten darstellt, für welche die Indices der $\varkappa$ mit den Indices der Liniencoordinaten $x_1, x_2, \cdots, x_6$ übereinstimmen. Die Fläche (Ia) geht nach den Erörterungen des I. Abschnitts in die Fläche (Ib) über, wenn man zwei aufeinanderfolgende $\varkappa$ mit einander vertauscht, in die Fläche (Ic) dagegen, wenn man zwei gegenüberstehende*) $\varkappa$, etwa $\varkappa_1$ und $\varkappa_4$, unter sich vertauscht; macht man diese Vertauschungen in den Gleichungen der Fläche (Ia), so erhält man die Gleichung der Fläche (Ib) resp. (Ic), immer bezogen auf das nämliche Tetraeder 12, 34, 56. Man überzeugt sich hierbei leicht, dass die Coefficienten der so entstehenden

---

*) Ich nenne 2 Grössen $\varkappa$ gegenüberstehend, wenn sie von der Form $\varkappa_\alpha$ und $\varkappa_{\alpha+3}$ sind.

Gleichungen (Ia), (Ib) und (Ic) ganz denselben Bedingungen genügen, wie die bez. Coefficienten in der Borchardt'schen Gleichungsform. So kehren sich z. B. durch die Vertauschung von $\varkappa_5$ mit $\varkappa_6$ resp. $\varkappa_1$ mit $\varkappa_2$ die Vorzeichen von $(w^2x^2+y^2z^2)$ und $(w^2y^2+x^2z^2)$ um, das Vorzeichen von $(w^2z^2+x^2y^2)$ dagegen bleibt erhalten und der Coefficient dieses Gliedes wird im ersten Falle $> \frac{1}{2}$, im letzten aber $< \frac{1}{2}$. Die Gleichungen selbst kann man sofort anschreiben, wesshalb sie hier weggelassen sind, um Raum zu sparen. Ich habe hier nur noch Folgendes zu bemerken: Will man die Gleichung der Fläche (Ia) auf ein anderes reelles Fundamentaltetraeder beziehen, so hat man mit den Indices der Grössen $\varkappa$ dieselbe Permutation vorzunehmen, wie mit den Zahlen, die die Tetraeder repräsentiren; man gelangt also z. B. vom Tetraeder 12, 34, 56 zu dem Tetraeder 14, 52, 36, indem man $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4, \varkappa_5, \varkappa_6$ ersetzt durch: $\varkappa_1, \varkappa_4, \varkappa_5, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_6$. Von der Fläche (Ia) schliesst man leicht auf (Ib) und (Ic).

§ 3.

Typus II.

Hier sind die Complexe x_5 und x_6 conjugirt imaginär zu nehmen, während x_1 und x_3 reell, x_2 und x_4 aber rein imaginär sind. Beziehen wir wiederum alle Gebilde auf das Tetraeder 12, 34, 56, so ergiebt sich folgendes von der Darstellung beim Typus I. wenig abweichende Gleichungssystem für die 6 Fundamentalcomplexe:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (p_{12}+p_{34}) = (w_1x_2 - x_1w_2 + y_1z_2 - z_1y_2),\\
x_2 &= \frac{1}{i}(p_{12}-p_{34}) = \frac{1}{i}(w_1x_2 - x_1w_2 - y_1z_2 + z_1y_2),\\
x_3 &= (p_{13}+p_{42}) = (w_1y_2 - y_1w_2 + z_1x_2 - x_1z_2),\\
x_4 &= \frac{1}{i}(p_{13}-p_{42}) = \frac{1}{i}(w_1y_2 - y_1w_2 - z_1x_2 + x_1z_2),\\
x_5 &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}(p_{14}-ip_{23}) = j\,(w_1z_2 - z_1w_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2),\\
x_6 &= \frac{1-i}{\sqrt{2}}(p_{14}+ip_{23}) = \frac{1}{j}(w_1z_2 - z_1w_2 + ix_1y_2 - iy_1x_2).
\end{aligned}$$

Die hier stehenden Gleichungen für $x_1, x_2, \ldots, x_6$ lassen sich aber, wie man sich leicht überzeugt, aus den bez. Gleichungen des Typus I. ableiten, wenn man auf dieselben die Substitution: $w = jw'$, $x = x'$, $y = y'$, $z = jz'$ anwendet. Geometrisch gedeutet kann dieses Resultat dahin ausgesprochen werden: *Es giebt eine imaginäre Raumtransformation: $w = jw'$, $x = x'$, $y = y'$, $z = jz'$, welche das Fundamentaltetraeder* 12, 34, 56 *ungeändert lässt, und welche die* 6 *Complexe des Typus I. überführt in die bez. Complexe des Typus II.* Die unmittelbare Folge davon ist, dass auch die Linienflächen und die Directricenpaare des Typus II. durch die nämliche Transformation aus den entsprechenden Gebilden des Typus I. hervorgehen, da dieselben ja die Durchschnitte von 3 resp. 4 Fundamentalcomplexen bilden. Wir erhalten also für die Linienflächen folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
123,\,456\ldots 2(wy - xz) = 0, & \\
124,\,356\ldots 2(wy + xz) = 0, & 135,\,246\ldots iw^2 + x^2 + y^2 + iz^2 = 0, \\
126,\,345\ldots 2(wz + ixy) = 0, & 136,\,245\ldots iw^2 - x^2 - y^2 + iz^2 = 0, \\
125,\,346\ldots 2(wz - ixy) = 0, & 145,\,236\ldots iw^2 - x^2 + y^2 - iz^2 = 0, \\
156,\,234\ldots 2(wx - yz) = 0, & 146,\,235\ldots iw^2 + x^2 - y^2 - iz^2 = 0. \\
134,\,256\ldots 2(wx + yz) = 0, &
\end{array}$$

und für die Directricen:

$$(12)\begin{cases} w = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (34)\begin{cases} w = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (56)\begin{cases} w = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(14)\begin{cases} w + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad (23)\begin{cases} w + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$(25)\begin{cases} jw + y = 0 \\ x - jz = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} jw - y = 0 \\ x - jz = 0 \end{cases} \qquad (16)\begin{cases} jw + y = 0 \\ x + jz = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} jw - y = 0 \\ x + jz = 0 \end{cases}$$

$$(36)\begin{cases} jw + x = 0 \\ y - jz = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} jw - x = 0 \\ y + jz = 0 \end{cases} \qquad (45)\begin{cases} jw + x = 0 \\ y + jz = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} jw - x = 0 \\ y - jz = 0 \end{cases}$$

$$(13)\begin{cases} w + iz = 0 \\ x + iy = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - iz = 0 \\ x - iy = 0 \end{cases} \qquad (24)\begin{cases} w + iz = 0 \\ x - iy = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - iz = 0 \\ x + iy = 0 \end{cases}$$

$$(15)\begin{cases} w + jy = 0 \\ jx + z = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - jy = 0 \\ jx - z = 0 \end{cases} \qquad (26)\begin{cases} w + jy = 0 \\ jx - z = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - jy = 0 \\ jx + z = 0 \end{cases}$$

$$(35)\begin{cases} w + jy = 0 \\ jy - z = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - jx = 0 \\ jy + z = 0 \end{cases} \qquad (46)\begin{cases} w + jx = 0 \\ jy + z = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - jx = 0 \\ jy - z = 0. \end{cases}$$

Die Transformationen der 15 Congruenzen aber machen aus einem Punkte $w\,x\,y\,z$ die 15 weiteren:

$$\begin{array}{lrrrr@{\qquad}lrrrr}
(12) & w, & x, & -y, & -z, & (23) & z, & y, & x, & w, \\
(13) & z, & y, & -x, & -w, & (24) & z, & -y, & x, & -w, \\
(14) & z, & -y, & -x, & w, & (25) & y, & -iz, & iw, & -x, \\
(15) & y, & -iz, & -iw, & x, & (26) & y, & iz, & -iw, & -x, \\
(16) & y, & iz, & iw, & x, & (34) & w, & -x, & y, & -z,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrr}
(35) & x, & -iw, & iz, & -y, \\
(36) & x, & iw, & -iz, & -y,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}(45) & x, & iw, & iz, & y,\\ (46) & x, & -iw, & -iz, & y,\\ (56) & w, & -x, & -y, & z.\end{array}$$

Man erhält diese Tabelle, indem man zu den 16 Punkten des Typus I. die entsprechenden*) bildet und dann die Grössen w und z mit j multiplicirt.

Können wir nun von der Gleichung der Fläche (Ia) des Typus I. auch direct auf die Gleichung (IIa) des Typus II. schliessen? Beginnen wir zunächst mit der Darstellung der Borchardt'schen Gleichungsform. Aus der Gleichung der Fläche (Ia) erhalten wir durch die Transformation $w = jw'$, $x = x'$, $y = y'$, $z = jz'$ offenbar die Gleichung einer neuen Fläche, welche jener Punkt für Punkt entspricht, also wiederum eine Kummer'sche Fläche vorstellt. Diese Fläche, obwohl imaginär, steht in derselben Beziehung zu den Fundamentalcomplexen des Typus II., wie jene zu den entsprechenden Complexen des Typus I.; speciell bilden ihre Knotenpunkte 16 zusammengehörige Punkte in Bezug auf die neuen Fundamentalcomplexe, deren Coordinaten sich aus den Coordinaten der Knotenpunkte von (Ia) ergeben, indem man je die erste und vierte durch j dividirt. Aus der Gleichung dieser Fläche, welche bereits eine Fläche des Typus II. ist, gelangt man also zur Gleichung der gesuchten Fläche, wenn man an Stelle des imaginären Knotenpunktes, $\frac{w_0}{j}$, x_0, y_0, $\frac{z_0}{j}$ und der davon abgeleiteten, den reellen Knotenpunkt: w_0, x_0, y_0, z_0 mit seinen abgeleiteten einführt. Fassen wir das ganze Resultat zusammen, so können wir sagen: *Man gelangt von der Gleichung der Fläche* (Ia) *zu derjenigen der Fläche* (IIa), *wenn man in der erstgenannten Gleichung die Grössen:* w, x, y, z und w_0, x_0, y_0, z_0 *ersetzt durch* jw, x, y, jz und jw_0, x_0, y_0, jz_0. Es ergiebt sich also für IIa die folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&-w^4+x^4+y^4-z^4\\ &-2\,\frac{w_0x_0y_0z_0\left\{(w_0^2+z_0^2)^2+(x_0^2+y_0^2)^2\right\}\left\{(w_0^2-z_0^2)^2+(x_0^2-y_0^2)^2\right\}}{(w_0^2x_0^2-y_0^2z_0^2)(w_0^2y_0^2-x_0^2z_0^2)(w_0^2z_0^2+x_0^2y_0^2)}\,wxyz\\ &+\frac{w_0^4-x_0^4+y_0^4-z_0^4}{w_0^2x_0^2-y_0^2z_0^2}(w^2x^2+y^2z^2)+\frac{w_0^4-y_0^4+x_0^4-z_0^4}{w_0^2y_0^2-x_0^2z_0^2}(w^2y^2+x^2z^2)\\ &\qquad+\frac{w_0^4+z_0^4+x_0^4+y_0^4}{w_0^2z_0^2+x_0^2y_0^2}(w^2z^2+x^2y^2)\end{aligned}\right\}=0.$$

Diese Gleichung gestattet auch sofort die Gleichung der Fläche (IIb) anzuschreiben. Macht man nämlich ganz analoge Betrachtungen, wie

*) Die entsprechenden Punkte von: w, x, y, z; $z, y, -x, -w$ etc. sind: $\frac{w}{j}, x, y, \frac{z}{j}$; $\frac{z}{j}, y, -x, -\frac{w}{j}$ etc.

beim Uebergang von (Ia) zu (Ib), so sieht man, dass aus der Fläche (IIa) die Fläche (IIb) hervorgeht, wenn man die Transformation:*) $w = w'$, $x = ix'$, $y = y'$, $z = iz'$ ausführt, welche die Geraden der Congruenz 34 einzeln in sich transformirt.

Die Gleichungsformen mit den Constanten $\varkappa$ lassen sich ebenfalls unmittelbar angeben. Wendet man auf die Gleichung der Fläche (Ia) wiederum die Substitution: $w = jw'$, $x = x'$, $y = y'$, $z = jz'$ an, so erhält man die Gleichung einer Fläche, welche sich auf die neuen Fundamentalcomplexe bezieht und zu einem confocalen Complexsystem: $\frac{x_1^2}{\varkappa_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{\varkappa_2 - \lambda} + \cdots + \frac{x_5^2}{\varkappa_5 - \lambda} + \frac{x_6^2}{\varkappa_6 - \lambda} = 0$ gehört, dessen Constanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_5, \varkappa_6$ alle reell sind. Nimmt man also nur $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \varkappa_3 > \varkappa_4$ reell, $\varkappa_5, \varkappa_6$ aber conjugirt imaginär, etwa $\varkappa_5 = \mu_5 + i\mu_6$ und $\varkappa_6 = \mu_5 - i\mu_6$, so erhält man die Gleichung der gesuchten Fläche (IIa) in der Form:

$$\left.\begin{array}{l} \qquad -w^4 + x^4 + y^4 - z^4 \\ + 4\,\dfrac{\varkappa_1\varkappa_2(\varkappa_3+\varkappa_4-2\mu_5)+\varkappa_3\varkappa_4(2\mu_5-\varkappa_1-\varkappa_2)+(\mu_5^2+\mu_6^2)(\varkappa_1+\varkappa_2-\varkappa_3-\varkappa_4)}{(\varkappa_1-\varkappa_2)(\varkappa_3-\varkappa_4)\,2\mu_6}\,wxyz \\ \qquad -4\,\dfrac{(\varkappa_3-\mu_5)(\varkappa_4-\mu_5)+\mu_6^2}{(\varkappa_3-\varkappa_4)\,2\mu_6}\,(w^2x^2+y^2z^2) \\ \qquad -4\,\dfrac{(\varkappa_1-\mu_5)(\varkappa_2-\mu_5)+\mu_6^2}{2\mu_6(\varkappa_1-\varkappa_2)}\,(w^2y^2+x^2z^2) \\ +2\,\dfrac{(\varkappa_1-\varkappa_3)(\varkappa_2-\varkappa_4)+(\varkappa_1-\varkappa_4)(\varkappa_2-\varkappa_3)}{(\varkappa_1-\varkappa_2)(\varkappa_3-\varkappa_4)}\,(w^2z^2-x^2y^2) \end{array}\right\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich die Fläche (IIb) durch Vertauschung von $\varkappa_3$ mit $\varkappa_4$.

§ 4.

Typus III.

Die 6 Fundamentalcomplexe sind:

$$\begin{aligned} x_1 &= \quad (p_{12} + p_{34}) = \quad (w_1x_2 - x_1w_2 + y_1z_2 - z_1y_2), \\ x_2 &= \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}) = \frac{1}{i}(w_1x_2 - x_1w_2 - y_1z_2 + z_1y_2), \\ x_3 &= j(p_{13} - ip_{42}) = j(w_1y_2 - y_1w_2 - iz_1x_2 + ix_1z_2), \\ x_4 &= \frac{1}{j}(p_{13} + ip_{42}) = \frac{1}{j}(w_1y_2 - y_1w_2 - iz_1x_2 - ix_1z_2), \\ x_5 &= j(p_{14} - ip_{23}) = j(w_1z_2 - z_1w_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2), \\ x_6 &= \frac{1}{j}(p_{14} + ip_{23}) = \frac{1}{j}(w_1z_2 - z_1w_2 + ix_1y_2 - iy_1x_2). \end{aligned}$$

---

*) Eine solche Transformation kann niemals eine ganz imaginäre Fläche liefern, wie beim Typus I., da die Directricen 34, ebenso wie alle andern reellen Directricen, die Fläche IIa stets in reellen Punkten schneiden, ganz abgesehen von der Lage des Punktes $w_0\, x_0\, y_0\, z_0$.

Diese Gleichungen gehen aus den bez. Gleichungen des Typus I. hervor durch die Substitution: $w = iw'$, $x = x'$, $y = jy'$, $z = jz'$. Die gleiche Substitution liefert daher die Gleichungen der Flächen 2. Grades, sowie der Directricenpaare. Sie sind:

$$123,\ 456 \cdots 2(iwy - xz) = 0,$$
$$124,\ 356 \cdots 2(iwy + xz) = 0,$$
$$126,\ 345 \cdots 2(iwz - xy) = 0,$$
$$125,\ 346 \cdots 2(iwz + xy) = 0,$$
$$156,\ 234 \cdots 2(wx - yz) = 0,$$
$$134,\ 256 \cdots 2(wx + yz) = 0,$$
$$135,\ 246 \cdots -w^2 + x^2 + iy^2 + iz^2 = 0,$$
$$136,\ 245 \cdots -w^2 - x^2 - iy^2 + iz^2 = 0,$$
$$145,\ 236 \cdots -w^2 - x^2 + iy^2 - iz^2 = 0,$$
$$146,\ 235 \cdots -w^2 + x^2 - iy^2 - iz^2 = 0,$$

beziehungsweise:

$$(12)\begin{cases} w = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (34)\begin{cases} w = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (56)\begin{cases} w = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(14)\begin{cases} jw + z = 0 \\ x - jy = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} jw - z = 0 \\ x + jy = 0 \end{cases} \qquad (23)\begin{cases} jw + z = 0 \\ x + jy = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} jw - z = 0 \\ x - jy = 0 \end{cases}$$

$$(25)\begin{cases} jw + y = 0 \\ x - jz = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} jw - y = 0 \\ x + jz = 0 \end{cases} \qquad (16)\begin{cases} jw + y = 0 \\ x + jx = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} jw - y = 0 \\ x - jz = 0 \end{cases}$$

$$(36)\begin{cases} iw + x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} iw - x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad (45)\begin{cases} iw + x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} iw - x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$(13)\begin{cases} w + jz = 0 \\ x + ijy = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - jz = 0 \\ x - ijy = 0 \end{cases} \qquad (24)\begin{cases} w + jz = 0 \\ x - ijy = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - jz = 0 \\ x + ijy = 0 \end{cases}$$

$$(15)\begin{cases} w + jy = 0 \\ x - ijz = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - jy = 0 \\ x + ijz = 0 \end{cases} \qquad (26)\begin{cases} w + jy = 0 \\ x + ijz = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - jy = 0 \\ x - ijz = 0 \end{cases}$$

$$(35)\begin{cases} w + x = 0 \\ y + iz = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - x = 0 \\ y - iz = 0 \end{cases} \qquad (46)\begin{cases} w + x = 0 \\ y - iz = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w - x = 0 \\ y + iz = 0. \end{cases}$$

Aus einem Punkte $w\ x\ y\ z$ gehen dabei durch die Transformationen der Congruenzen die 15 weiteren Punkte hervor:

(12)	$w,$	$x,$	$-y,$	$-z,$
(13)	$z,$	$iy,$	$-x,$	$-iw,$
(14)	$z,$	$-iy,$	$-x,$	$iw,$
(15)	$y,$	$-iz,$	$-iw,$	$x,$
(16)	$y,$	$iz,$	$iw,$	$x,$
(23)	$z,$	$iy,$	$x,$	$iw,$
(24)	$z,$	$-iy,$	$x,$	$-iw,$
(25)	$y,$	$-iz,$	$iw,$	$-x,$
(26)	$y,$	$iz,$	$-iw,$	$-x,$
(34)	$w,$	$-x,$	$y,$	$-z,$
(35)	$x,$	$w,$	$iz,$	$-iy,$
(36)	$x,$	$-w,$	$-iz,$	$-iy,$
(45)	$x,$	$-w,$	$iz,$	$iy,$

$$\begin{array}{lllll} (46) & x, & w, & -iz, & iy, \\ (56) & w, & -x, & -y, & z. \end{array}$$

Um die Gleichung der Fläche (III) aus der Gleichung (Ia) abzuleiten, führen wir an der letzteren zunächst die obige Substitution aus. Dann erhalten wir eine Fläche mit dem Knotenpunkte: $\frac{w_0}{i}$, x_0, $\frac{y_0}{j}$, $\frac{z_0}{j}$; setzen wir alsdann in der neuen Gleichung für den imaginären Knotenpunkt einen reellen ein, so kommt die gesuchte Gleichung. *Die Fläche* (III) *geht also aus der Fläche* (Ia) *hervor durch die gleichzeitige Substitution von:* $w=iw'$, $x=x'$, $y=jy'$, $z=jz'$ und $w_0=iw_0'$, $x_0=x_0'$, $y_0=jy_0'$, $z_0=jz_0'$; es kommt:

$$\left.\begin{array}{l} \qquad\qquad w^4+x^4-y^4-z^4 \\ +2\dfrac{w_0x_0y_0z_0\left\{(w_0^2-x_0^2)^2+(y_0^2+z_0^2)^2\right\}\left\{(w_0^2+x_0^2)^2+(y_0^2-z_0^2)^2\right\}}{(w_0^2x_0^2-y_0^2z_0^2)(w_0^2y_0^2+x_0^2z_0^2)(w_0^2z_0^2+x_0^2y_0^2)}\,wxyz \\ -\dfrac{w_0^4+x_0^4+y_0^4+z_0^4}{w_0^2x_0^2-y_0^2z_0^2}(w^2x^2+y^2z^2) \\ -\dfrac{w_0^4-y_0^4-x_0^4+z_0^4}{w_0^2y_0^2+x_0^2z_0^2}(w^2y^2-x^2z^2) \\ -\dfrac{w_0^4-z_0^4-x_0^4+y_0^4}{w_0^2z_0^2+x_0^2y_0^2}(w^2z^2-x^2y^2) \end{array}\right\}=0.$$

Die andere Gleichungsform der Fläche (III) wird aus der zweiten Form der Fläche (Ia) erhalten, indem man ebenfalls die genannte Substitution auf die Variablen anwendet, und für die Constanten die Voraussetzung macht, dass $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ reell, $\varkappa_3=\mu_3+i\mu_4$, $\varkappa_4=\mu_3-i\mu_4$ und $\varkappa_5=\mu_5+i\mu_6$, $\varkappa_6=\mu_5-i\mu_6$ werden; so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l} \qquad\qquad w^4+x^4-y^4-z^4 \\ +4\dfrac{\varkappa_1\varkappa_2(2\mu_3-2\mu_5)+(\mu_3^2+\mu_4^2)(2\mu_5-\varkappa_1-\varkappa_2)+(\mu_5^2+\mu_6^2)(\varkappa_1+\varkappa_2-2\mu_3)}{(\varkappa_1-\varkappa_2)\cdot 2\mu_4\cdot 2\mu_6}\,wxyz \\ -4\dfrac{(\mu_3-\mu_5)^2+\mu_4^2+\mu_6^2}{2\mu_4\cdot 2\mu_6}\quad(w^2x^2+y^2z^2) \\ +4\dfrac{(\varkappa_1-\mu_5)(\varkappa_2-\mu_5)+\mu_6^2}{2\mu_6\cdot(\varkappa_1-\varkappa_2)}\quad(w^2y^2-x^2z^2) \\ +4\dfrac{(\varkappa_1-\mu_3)(\varkappa_2-\mu_3)+\mu_4^2}{(\varkappa_1-\varkappa_2)\cdot 2\mu_4}\quad(w^2z^2-x^2y^2) \end{array}\right\}=0.$$

§ 5.

Typus IV.

Hier sind die Fundamentalcomplexe paarweise conjugirt imaginär, haben also die Gleichungen:

$$x_1 = \quad (p_{12}-ip_{34}) = \quad (w_1x_2-x_1w_2-iy_1z_2+iz_1y_2),$$
$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12}+ip_{34}) = \frac{1}{i}(w_1x_2-x_1w_2+iy_1z_2-iz_1y_2),$$

$$x_3 = \quad (p_{13} - ip_{42}) = \quad (w_1 y_2 - y_1 w_2 - iz_1 x_2 + ix_1 z_2),$$
$$x_4 = \frac{1}{i}(p_{13} + ip_{42}) = \frac{1}{i}(w_1 y_2 - y_1 w_2 + iz_1 x_2 - ix_1 z_2),$$
$$x_5 = \quad (p_{14} - ip_{23}) = \quad (w_1 z_2 - z_1 w_2 - ix_1 y_2 + iy_1 x_2),$$
$$x_6 = \frac{1}{i}(p_{14} + ip_{23}) = \frac{1}{i}(w_1 z_2 - z_1 w_2 + ix_1 y_2 - iy_1 x_2).$$

Diese Gleichungen lassen sich aus den entsprechenden des Typus I. durch die Substitution: $w = iw'$, $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ *ableiten.* Die gleiche Substitution liefert für die hierher gehörigen Linienflächen und Directricenpaare die Gleichungen:

123, 456 $\cdots 2(iwy - xz) = 0$,
124, 356 $\cdots 2(iwy + xz) = 0$,
126, 345 $\cdots 2(iwz - xy) = 0$,
125, 346 $\cdots 2(iwz + xy) = 0$,
156, 234 $\cdots 2(iwx - yz) = 0$,
134, 256 $\cdots 2(iwx + yz) = 0$,

135, 246 $\cdots - w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$,
136, 245 $\cdots \quad w^2 + x^2 + y^2 - z^2 = 0$,
145, 236 $\cdots \quad w^2 + x^2 - y^2 + z^2 = 0$,
146, 235 $\cdots \quad w^2 - x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

respective:

$$(12)\begin{cases} w=0 \\ x=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad (34)\begin{cases} w=0 \\ y=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \quad (56)\begin{cases} w=0 \\ z=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$(14)\begin{cases} iw+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} iw-z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad (23)\begin{cases} iw+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} iw-z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

$$(25)\begin{cases} iw+y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} iw-y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \qquad (16)\begin{cases} iw+y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} iw-y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

$$(36)\begin{cases} iw+x=0 \\ y-z=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} iw-x=0 \\ y+z=0 \end{cases} \qquad (45)\begin{cases} iw+x=0 \\ y+z=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} iw-x=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

$$(13)\begin{cases} w+z=0 \\ x+iy=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w-z=0 \\ x-iy=0 \end{cases} \qquad (24)\begin{cases} w+z=0 \\ x-iy=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w-z=0 \\ x+iy=0 \end{cases}$$

$$(15)\begin{cases} w+y=0 \\ x-iz=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w-y=0 \\ x+iz=0 \end{cases} \qquad (26)\begin{cases} w+y=0 \\ x+iz=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w-y=0 \\ x-iz=0 \end{cases}$$

$$(35)\begin{cases} w+x=0 \\ y+iz=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w-x=0 \\ y-iz=0 \end{cases} \qquad (46)\begin{cases} w+x=0 \\ y-iz=0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} w-x=0 \\ y+iz=0. \end{cases}$$

Aus einem Punkte $w\,x\,y\,z$ gehen durch die Transformationen der 15 Congruenzen folgende Punkte hervor:

(12)	w,	x,	$-y$,	$-z$,	(23)	z,	iy,	ix,	$-w$,
(13)	z,	iy,	$-ix$,	w,	(24)	z,	$-iy$,	ix,	w,

$$\begin{array}{llllllllll}
(14) & z, & -iy, & -ix, & -w, & (25) & y, & -iz, & -w, & -ix, \\
(15) & y, & -iz, & w, & ix, & (26) & y, & iz, & w, & -ix, \\
(16) & y, & iz, & -w, & ix, & (34) & w, & -x, & y, & -z,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
(35) & x, & w, & iz, & -iy, \\
(36) & x, & -w, & -iz, & -iy, \\
(45) & x, & -w, & iz, & iy, \\
(46) & x, & w, & -iz, & iy, \\
(56) & w, & -x, & -y, & z.
\end{array}$$

Uebrigens folgt:

Die Kummer'schen Flächen des Typus IV. gehen aus (Ia) *hervor, indem man gleichzeitig w und w_0 durch iw und iw_0 ersetzt.* Ihre Gleichung wird also:

$$\left.\begin{array}{l}
w^4+x^4+y^4+z^4+2\dfrac{w_0y_0x_0z_0\prod_{\varepsilon,\varepsilon'}(w_0^2-\varepsilon x_0^2-\varepsilon' y_0^2-\varepsilon\varepsilon' z_0^2)}{(w_0^2x_0^2+y_0^2z_0^2)(w_0^2y_0^2+x_0^2z_0^2)(w_0^2z_0^2+x_0^2y_0^2)}\,wxyz \\
-\dfrac{w_0^4+x_0^4-y_0^4-z_0^4}{w_0^2x_0^2+y_0^2z_0^2}(w^2x^2-y^2z^2)-\dfrac{w_0^4+y_0^4-x_0^4-z_0^4}{w_0^2y_0^2+x_0^2z_0^2}(w^2y^2-x^2z^2) \\
-\dfrac{w_0^4+z_0^4-x_0^4-y_0^4}{w_0^2z_0^2+x_0^2y_0^2}(w^2z^2-x^2y^2)
\end{array}\right\}=0.$$

Diese Gleichung muss sowohl die Fläche (IVa), wie auch die Fläche (IVb) darstellen, und wir haben noch die Frage zu beantworten, wann das eine, wann das andere eintritt. Wir benutzen wieder die Schnittpunkte mit den reellen Directricen, um diese Frage zu entscheiden.

Bei der Fläche (IVa) schneidet nur je eine Directrix aus den 3 Paaren 12, resp. 34, 56 in reellen Punkten, bei der Fläche (IVb) giebt es natürlich überhaupt keine reellen Schnittpunkte. Da die reellen Directricenpaare gleichberechtigt sind, indem die Schnittpunkte gleichzeitig reell oder imaginär werden müssen, so müssen sie alle zu denselben Bedingungsgleichungen hinführen.

Wählen wir also ein beliebiges Directricenpaar aus, etwa: 12, d. h. $w=0$, $x=0$ resp. $y=0$, $z=0$; sie schneiden die obige Fläche in den Punkten:

$$\frac{y}{z}=\sqrt{-c\pm\sqrt{c^2-1}}\ \text{resp.}\ \frac{w}{x}=\sqrt{c\pm\sqrt{c^2-1}},$$

wobei

$$c=\frac{w_0^4+x_0^4-y_0^4-z_0^4}{2(w_0^2x_0^2-y_0^2z_0^2)}.$$

Die Schnittpunkte mit einer der beiden Directricen 12 sind demnach reell, wenn $c^2>1$ ist, oder wenn

$$(w_0^4+x_0^4-y_0^4-z_0^4)^2>4(w_0^2x_0^2+y_0^2z_0^2)^2.$$

Führen wir diese Ungleichung etwas weiter aus, so geht sie über in:

$$(-w_0^2+x_0^2+y_0^2+z_0^2)(w_0^2-x_0^2+y_0^2+z_0^2)(w_0^2+x_0^2-y_0^2+z_0^2)$$
$$(w_0^2+x_0^2+y_0^2-z_0^2)<0.$$

Sind also von diesen 4 Factoren 3 positiv*), der vierte aber negativ, so stellt die obige Gleichung eine reelle Fläche vor, sind dagegen alle 4 positiv, so wird die bezügliche Fläche imaginär; im ersten Falle liegen die Knotenpunkte *innerhalb einer* der 4 reellen Fundamentalflächen, im zweiten Fall aber *ausserhalb aller*. Es stimmt dies genau mit den Resultaten des vorigen Abschnitts überein.

Als zweite Gleichungsform der Fläche (IVa) findet man, indem man die $\varkappa$ paarweise conjugirt imaginär nimmt, und also $\varkappa_1 = \mu_1 + i\mu_2$ etc. setzt:

$$\left.\begin{aligned}
&w^4+x^4+y^4+z^4\\
&-\frac{(\mu_1^2+\mu_2^2)(\mu_3-\mu_5)+(\mu_3^2+\mu_4^2)(\mu_5-\mu_1)+(\mu_5^2+\mu_6^2)(\mu_1-\mu_3)}{\mu_2\mu_4\mu_6}\,wxyz\\
&-\frac{(\mu_3-\mu_5)^2+\mu_4^2+\mu_6^2}{\mu_4\mu_6}(w^2x^2-y^2z^2)-\frac{(\mu_5-\mu_1)^2+\mu_6^2+\mu_2^2}{\mu_6\mu_2}(w^2y^2-x^2z^2)\\
&-\frac{(\mu_1-\mu_3)^2+\mu_2^2+\mu_4^2}{\mu_2\mu_4}(w^2z^2-x^2y^2)
\end{aligned}\right\}=0.$$

Dagegen ergiebt sich für IVb, indem man:

$$\varkappa_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \qquad \varkappa_2 = -\frac{1}{r_1}\,e^{i\varphi_1},$$
$$\varkappa_3 = r_2 e^{i\varphi_2}, \qquad \varkappa_4 = -\frac{1}{r_2}\,e^{i\varphi_2},$$
$$\varkappa_5 = r_3 e^{i\varphi_3}, \qquad \varkappa_6 = -\frac{1}{r_3}\,e^{i\varphi_3},$$

annimmt, nach Heraufmultipliciren des Nenners, die folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
&(w^4+x^4+y^4+z^4)\left(r_1+\frac{1}{r_1}\right)\left(r_2+\frac{1}{r_2}\right)\left(r_3+\frac{1}{r_3}\right)\\
&-8\left\{\left(r_1+\frac{1}{r_1}\right)\sin(\varphi_2-\varphi_3)+\left(r_2-\frac{1}{r_2}\right)\sin(\varphi_3-\varphi_1)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left(r_3-\frac{1}{r_3}\right)\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right\}wxyz\\
&-2\left(r_1+\frac{1}{r_1}\right)\left\{\left(r_2-\frac{1}{r_2}\right)\left(r_3-\frac{1}{r_3}\right)+4\cos(\varphi_2-\varphi_3)\right\}(w^2x^2-y^2z^2)\\
&-2\left(r_2+\frac{1}{r_2}\right)\left\{\left(r_3-\frac{1}{r_3}\right)\left(r_1-\frac{1}{r_1}\right)+4\cos(\varphi_3-\varphi_1)\right\}(w^2y^2-x^2z^2)\\
&-2\left(r_3+\frac{1}{r_3}\right)\left\{\left(r_1-\frac{1}{r_1}\right)\left(r_2-\frac{1}{r_2}\right)+4\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right\}(w^2z^2-x^2y^2)
\end{aligned}\right\}=0.$$

---

*) Es giebt bloss diese eine Möglichkeit, da nicht gleichzeitig 2 der genannten Factoren negativ werden können.

§ 6.

Die Gleichungen der Linienflächen.

Wir beschäftigen uns hier noch mit der Aufstellung der Gleichungen der 7 Linienflächen, welche wir zu Ende des II. Abschnittes aufgestellt haben. Diese Gleichungen erhalten wir aus den Gleichungen der Kummer'schen Fläche, indem wir für die Coordinaten der Knotenpunkte solche specielle Werthe einführen, dass dieselben paarweise zusammenfallen. Im Falle der Fläche (Ia) hat ein Knotenpunkt die Coordinaten w_0, x_0, y_0, z_0, er fällt mit dem Knotenpunkte $-w_0$, $-x_0$, y_0, z_0 zusammen, wenn wir: $cw_0 = x_0 = 0$ setzen. Führen wir zunächst die Substitution $cw_0 = x_0$ und alsdann die weitere: $x_0 = 0$ aus, so ergiebt sich als *Gleichung der Linienfläche mit* 8 *reellen Cuspidalpunkten und den Doppelgeraden* $w=0$, $x=0$, *und* $y=0$, $z=0$ *die folgende:*

$$(w^2y^2 + x^2z^2)(c^2y_0^2 - z_0^2) + (w^2z^2 + x^2y^2)(y_0^2 - c^2z_0^2) \\ + 2wxyz\,\frac{c(y_0^4 - z_0^4)}{y_0z_0} = 0.$$

Diese Gleichung stellt ein ganzes *Büschel von Flächen mit den nämlichen Cuspidalpunkten* dar, wenn man c alle möglichen Werthe beilegt; zu ihm gehören doppelt zählend 4 Hyperboloide, entsprechend den Werthen: $c = \pm\frac{z_0}{y_0}$ resp. $c = \pm\frac{y_0}{z_0}$. Stellen wir nämlich die Gleichung der Tangentialebenen in einem Punkte y, z der Doppelgeraden $w=0$, $x=0$ auf, so ergiebt sich:

$$\frac{X}{W} = \frac{cyz(z_0^4 - y_0^4) \pm \sqrt{(y_0^4+z_0^4)y^2z^2 - (y^4+z^4)y_0^2z_0^2}\;\sqrt{(c^2y_0^2 - z_0^2)(y_0^2 - c^2z_0^2)}}{y_0z_0[z^2(c^2y_0^2 - z_0^2) + y^2(y_0^2 - c^2z_0^2)]}.$$

Verschwindet die erste Wurzel, so fallen die beiden Tangentialebenen zusammen, und der betr. Punkt ist Cuspidalpunkt, dies giebt die 4 Punkte $y = y_0$, $z = \pm z_0$ und $y = z_0$, $z = \pm y_0$. Verschwindet die zweite Wurzel, so fallen die beiden Tangentialebenen für jeden Punkt der Doppelgeraden zusammen, wir erhalten alsdann die 4 doppelt zählenden Hyperboloide des Büschels, entsprechend den Werthen:

$$c = \pm\frac{y_0}{z_0} \text{ resp. } c = \pm\frac{z_0}{y_0}.$$

Wenden wir jetzt auf die obige Linienfläche die Transformation: $w' = w$, $x' = ix$, $y' = iy$, $z' = z$ an, (es ist dies die nämliche Transformation, welche (Ia) in (Ib) resp. (Ic) überführt), so finden wir die Gleichung:

$$(w^2y^2 + x^2z^2)(c^2y_0^2 - z_0^2) - (w^2z^2 + x^2y^2)(y_0^2 - c^2z_0^2) \\ + 2wxyz\,\frac{c(y_0^4 - z_0^4)}{y_0z_0} = 0.$$

Bilden wir wiederum die Gleichung der Tangentialebene in einem Punkte der Doppelgeraden $w = 0$, $x = 0$, so kommt:

$$\frac{X}{W} = \frac{cyz(z_0^4 - y_0^4) \pm \sqrt{(y_0^4 + z_0^4)\, y^2 z^2 + (y^4 + z^4)\, y_0^2 z_0^2}\, \sqrt{(c^2 y_0^2 - z_0^2)(y_0^2 - c^2 z_0^2)}}{y_0 z_0 \left[z^2 (c^2 y_0^2 - z_0^2) - y^2 (y_0^2 - c^2 z_0^2)\right]}.$$

Wir sehen, die erste Wurzel verschwindet nicht für reelle Werthe von y, z, d. h. es giebt keine reellen Cuspidalpunkte. Wenn also:

$$c^2 (y_0^4 + z_0^4) > (c^4 + 1)\, y_0^2 z_0^2,$$

so durchsetzen sich längs der Doppelgeraden zwei reelle Mäntel, im entgegengesetzten Falle sind die Doppelgeraden isolirt. Wir können uns demnach kurz so ausdrücken: *Die Linienfläche mit reellen Doppelgeraden und imaginären Cuspidalpunkten ist reell oder ganz imaginär, je nachdem* c *zwischen* $\frac{y_0}{z_0}$ *und* $\frac{z_0}{y_0}$, *resp.* $-\frac{y_0}{z_0}$ *und* $-\frac{z_0}{y_0}$, *gelegen ist, oder nicht.* Es stimmt das vollständig damit überein, dass die 4 Hyperboloide, welche dem Büschel von Linienflächen angehören, die Uebergangsfälle bilden, indem in der Grenzlage die Erzeugenden der Linienflächen paarweise zusammenfallen, um dann conjugirt imaginär zu werden.

Die Gleichung der Linienfläche mit nur 4 reellen Cuspidalpunkten wird man aus der Gleichung der Fläche (IIa) erhalten, wenn man dort: $cw_0 = x_0 = 0$ setzt; dann werden $w = 0$, $x = 0$ die beiden Doppelgeraden. Die Fläche wird durch die Gleichung:

$$(w^2 y^2 + x^2 z^2)(c^2 y_0^2 + z_0^2) - (w^2 z^2 - x^2 y^2)(y_0^2 - c^2 z_0^2)$$
$$- 2wxyz\, \frac{c(y_0^4 + z_0^4)}{y_0 z_0} = 0,$$

und die Tangentialebenen in einem Punkte der Doppelgeraden $w = 0$, $x = 0$ durch die Gleichung:

$$\frac{X}{W} = \frac{cyz(y_0^4 + z_0^4) \pm \sqrt{(y_0^4 - z_0^4)\, y^2 z^2 + (y^4 - z^4)\, y_0^2 z_0^2} \cdot \sqrt{(c^2 y_0^2 + z_0^2)(y_0^2 - c^2 z_0^2)}}{y_0 z_0 \left[z^2 (c^2 y_0^2 + z_0^2) + y^2 (y_0^2 - c^2 z_0^2)\right]}$$

dargestellt. Die erste Wurzelgrösse zeigt, dass nur noch zwei reelle Cuspidalpunkte existiren, nämlich: $y = z_0$, $z = \pm x_0$; aus der zweiten Wurzelgrösse erkennen wir, dass das Büschel von Linienflächen nur noch zwei reelle Hyperboloide enthält, entsprechend den Parametern $c = \pm \frac{y_0}{z_0}$, wie das nach den früheren Erörterungen auch sein muss.

Eine Linienfläche mit conjugirt imaginären Doppelgeraden erhält man aus der Kummer'schen Fläche (Ia), wenn man die Knotenpunkte derselben paarweise auf den Directricen 46 zusammenfallen lässt. Zu diesem Zwecke machen wir in der Gleichung (Ia) die Substitution:

$w_0 - i x_0 = c(z_0 - i y_0) = 0$, dann kommt als Gleichung der Linienfläche*):

$$(w^2 + x^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 + 2(wy - xz)^2 \frac{c x_0^3 - y_0^3}{x_0 y_0 (c y_0 - x_0)}$$
$$- 2(wz + xy)^2 \frac{c x_0^3 + y_0^3}{x_0 y_0 (c y_0 + x_0)} = 0.$$

Diese Gleichung stellt wieder ein ganzes Büschel von Linienflächen dar, und es soll nachgewiesen werden, dass die Flächen des Büschels zum Theil reell zum Theil imaginär sind. Als Grenzfälle der Flächen des Büschels treten die 4 zu dem Büschel gehörigen Flächen 2. Grades auf, entsprechend den Parametern $c = \pm \frac{x_0}{y_0}$ und $c = \pm \frac{y_0}{x_0}$. Für $c = -\frac{y_0}{x_0}$ kommt die imaginäre Fläche 2. Grades $135, 246 : w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$; die Linienfläche muss also beim Passiren dieser Grenzlage imaginär sein. Für $c = \frac{x_0}{y_0}$ kommt das Hyperboloid $123, 456 : wy - xz = 0$; da nun die Cuspidalpunkte paarweise auf reellen Geraden der Congruenz 56 liegen, so wird in der Grenzlage die Linienfläche zwei Streifen**) des Hyperboloids doppelt überdecken, sie ist also beim Durchgang durch dieses Hyperpoloid reell. Für $c = -\frac{x_0}{y_0}$ resp. $c = \frac{y_0}{x_0}$ kommen die Hyperboloide $wz + xy = 0$ resp. $w^2 + x^2 - y^2 - z^2 = 0$, die Linienfläche überdeckt in den Grenzlagen die ganzen Hyperboloide doppelt, so dass sie beim Durchgang durch eins derselben imaginär wird. Wir haben somit ein Resultat gewonnen, das sich folgendermassen aussprechen lässt: Markirt man auf einer Geraden die 3 Punkte $\pm \frac{y_0}{x_0}$, $-\frac{x_0}{y_0}$, und ausserdem einen vierten entsprechend dem Parameter c, *so wird die zugehörige Linienfläche reell sein, wenn die Punkte* $-\frac{y_0}{x_0}$ *und* c *durch die Punkte* $\frac{y_0}{x_0}$ *und* $-\frac{x_0}{y_0}$ *getrennt werden*; *im andern Falle ist sie imaginär.*

Es erübrigt noch *die reelle Linienfläche mit conjugirt imaginären Doppelgeraden und nur einem Mantel aufzustellen.* Man geht dabei von der Fläche (IIa) aus und lässt ihre Knotenpunkte paarweise zusammenfallen in den Directricen 13, indem man setzt:

$$w - iz = (x - iy)c = 0.$$

---

*) Die Gleichung der Tangentialebenen in einem Punkte der Doppelgeraden $w = ix$, $z = iy$ wird hier:

$$\frac{W - iX}{Z - iY} = \frac{c(x_0^4 - y_0^4)xy \pm \sqrt{(x_0^4 + y_0^4)x^2y^2 - (x^4 + y^4)x_0^2 y_0^2}\sqrt{(c^2 y_0^2 - x_0^2)(y_0^2 - c^2 x_0^2)}}{x_0 y_0 [y^2(c^2 x_0^2 - y_0^2) - x^2(c^2 y_0^2 - x_0^2)]}.$$

**) Vergl. den § 6. des II. Abschnitts.

Es ergiebt sich dann als Gleichung dieser Fläche:

$$(x^2+y^2)^2-(w^2+z^2)^2+2(wx+yz)^2\,\frac{cz_0^3-y_0^3}{y_0z_0(cy_0+z_0)}$$
$$-2(wy-xz)^2\,\frac{cz_0^3+y_0^3}{y_0z_0(cy_0-z_0)}=0.$$

Dem Büschel dieser Linienflächen gehören nur noch 2 reelle Flächen 2. Grades an, nämlich: $(wy-xz)=0$ und $(wx+yz)=0$, entsprechend den Parametern $c=\frac{z_0}{y_0}$ und $c=-\frac{z_0}{y_0}$. Die beiden übrigen Flächen 2. Grades durch die Directricen 1 3 haben imaginäre Gleichungen und werden für imaginäre Werthe des Parameters erhalten, nämlich für $c=\pm i\,\frac{y_0}{z_0}$.

Hiermit sind die sämmtlichen Gleichungen der 7 von einander verschiedenen Linienflächen aufgestellt; man kann alle aus der Fläche mit 8 reellen Cuspidalpunkten ableiten durch Anwendung imaginärer linearer Transformation, wie das bei der Darstellung der Kummer'schen Flächen geschah.

Leipzig, Anfang Januar 1881.

Bemerkung über Flächen vierter Ordnung.

Von

Felix Klein in Leipzig.

Im Anschlusse an die vorstehende Abhandlung des Herrn Rohn hat vielleicht die Bemerkung Interesse, *dass man eine Fläche vierter Ordnung construiren kann, welche aus neun getrennten Theilen besteht, von denen einer ringartigen Zusammenhang aufweist.* Zu dem Zwecke denke man sich eine ebene viertheilige Curve vierter Ordnung, von der wenigstens ein Oval eingebuchtet ist und also eine Doppeltangente zulässt. Diese Doppeltangente verschiebe man ein wenig, so dass sie das betr. Oval viermal schneidet, und spalte sie dann in die beiden Aeste einer sehr steilen Hyperbel, wo nun jeder Ast vier Schnittpunkte mit dem Ovale besitzen wird. Sodann betrachte man die Curve vierter Ordnung als Schnitt der Ebene mit einem orthogonalen Cylinder vierten Grades, die Hyperbel als Schnitt mit einem sehr *flachen* zweischaligen Hyperboloide. Der Cylinder schneidet dies Hyperboloid in 10 Ovalen, von denen 8 der einen Schale angehören und getrennt von einander liegen, während die 2 übrigen Ovale sich auf der anderen Schale befinden und das eine von ihnen das andere einschliesst. Es sei nun $\varphi = 0$ das Hyperboloid, $\psi = 0$ der Cylinder und dabei ψ mit solchem Vorzeichen genommen, dass es innerhalb der 4 Ovale der ursprünglichen Curve *positiv* ist. Dann stellt offenbar

$$\psi = \lambda^2 \varphi^2$$

für unendlich kleine Werthe von λ eine Fläche vierter Ordnung der gewollten Art dar.

Leipzig, 5. April 1881.

Fig. 3ª

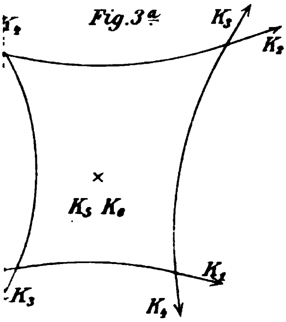


Fig. 5.

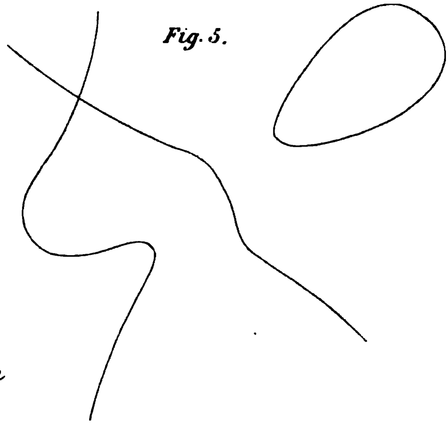


Fig. 14ª

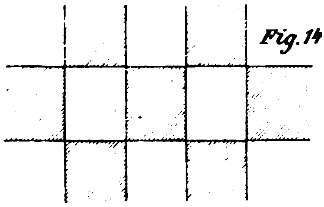


Fig. 14ᵇ

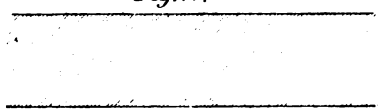


Fig. 16ª

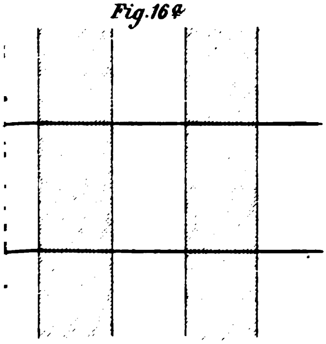


Fig. 16ᵇ

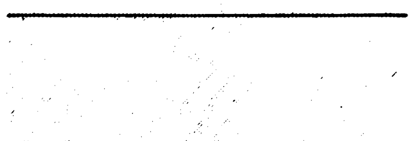


Fig. 16ᶜ

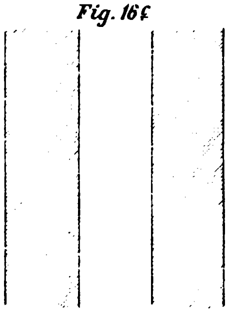


Fig. 17ª

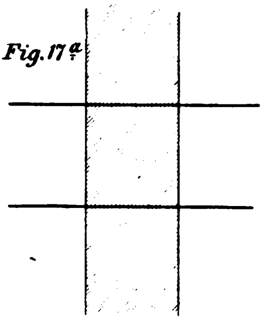
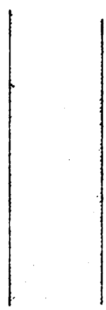


Fig 17ᵇ



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Clebsch, Dr. A., [† als Professor in Göttingen,] Theorie der Elasticität fester Körper. (XI u. 424 S.) gr. 8. 1862. geh. n. *M.* 9.—

„Der Herr Verfasser hatte als Lehrer an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe Gelegenheit und Beruf, sich ausführlicher mit den Anwendungen der allgemeinen Theorie der Elasticität auf die in der Technik besonders wichtigen Fälle zu beschäftigen. Die Resultate dieser Studien liegen uns jetzt in einem ziemlich umfangreichen Werke vor, und man kann dem Verfasser nur Dank wissen, dass er unsere deutsche Literatur um eine Schrift bereichert hat, welche einerseits dem Techniker das Erlernen der strengen Theorie ermöglicht, ihm über die Genauigkeit seiner Resultate und die Zulässigkeit der in der Praxis üblichen Voraussetzungen Aufschlufs giebt, andererseits den Mathematiker belehrt, wie man von den allgemeinsten Gleichungen der Bewegungen und des Gleichgewichts elastischer Körper zu speciellen Fällen gelangen kann, und ihm die grofse Mühe und Zeit erspart, in den Arbeiten der Techniker den Weizen von der Spreu zu sondern. Es ergänzt daher dieses Handbuch das berühmte Werk des französischen Physikers Lamé, welches vorzüglich die allgemeinen Differentialgleichungen, ihre eleganten Transformationen, die Theorie der krystallinischen Körper und ihre optischen Eigenschaften behandelt, während Herr Clebsch ausschliefslich unkrystallinische Körper und deren Verschiebungen durch äufsere Kräfte in Betrachtung zieht.“ [Literarisches Centralblatt 1863, No. 31.]

——— Theorie der binären algebraischen Formen. (VIII u. 467 S.) gr. 8. 1871. geh. n. *M.* 11.—

Gegenüber dem von Hrn. Fiedler übersetzten Salmon'schen Lehrbuche, welches bisher das Hauptmittel für das Studium der neuern Algebra war, wird man in dem vorliegenden Werke einerseits eine Beschränkung, andererseits Erweiterungen finden. Die Beschränkung besteht darin, dafs nur binäre Formen behandelt sind. Dies wurde fast geboten durch den Umstand, dafs nur die Theorie der binären Formen bis jetzt in gewissem Grade abgeschlossen scheint. Der Verfasser geht davon aus, Invarianten und Covarianten durch symbolische Produkte zu definieren; ein Standpunkt, welcher ihm schon vor 10 Jahren als der richtigste erschien. Diese Ansicht hat im Laufe der Zei[illegible] um so mehr sich bei ihm festigen müssen, als gerade hiervon ausgehend Herr Gordan d[illegible]ichtigen Satz fand, dafs die Anzahl der zu jeder Form gehörigen Invarianten und Covari[illegible]ine endliche sei; und mit diesem Satze waren denn wieder Fragen gegeben, welche [illegible]inären Formen aufgestellt und beantwortet werden können, und welche eben der [illegible]er binären Formen jenen vorzugsweise entwickelten Charakter geben.

Indem diese und andere, auf früher[illegible] des Verfassers beruhenden Untersuchungen ausführlich behandelt sind, ist dem erwähn[illegible] gegenüber eine sehr wesentliche Fortentwickelung gegeben, welche bis zu dem neue[illegible]e dieser Disciplin führt.

Andrerseits wird in dem Werke die [illegible]he Interpretation berücksichtigt, welche neben den algebraischen Untersuchungen herge[illegible]lche zugleich die Grundlage der synthetischen Geometrie liefert, nämlich die Theorie de[illegible]en und Stralenbüschel.

Es ist endlich ein grofses Gewicht auf [illegible]ne Behandlung einiger Probleme gelegt, welche dem Studierenden als Muster für die Behan[illegible]g algebraischer Fragen dienen können, und welche ihn so auch praktisch in einen der wichtigsten Theile der neuern Mathematik einführen.

——— Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Ferdinand Lindemann. Mit einem Vorwort von Felix Klein. Ersten Bandes erster Theil. (S. 1—496.) gr. 8. 1875. geh. n. *M.* 11.20.

——— ——— Ersten Bandes zweiter Theil. (S. 497—1050 u. XII S.) gr. 8. 1876. geh. n. *M.* 12.80.

Beide Theile in einem Band, geh. n. *M.* 24.—

Es bedarf wohl kaum einer nähern Erklärung, wenn nach dem nur allzu früh erfolgten Hinscheiden von A. Clebsch alsbald der Gedanke entstand, seine Vorlesungen über Geometrie, welche für das Studium der Wissenschaft von so hervorragendem Einflusse waren, allgemein zugänglich zu machen. Es bezieht sich dies sowohl auf die ausschliefslich geometrischen, als auch auf einzelne Abschnitte anderer Vorlesungen, soweit in letzteren geometrische Probleme gelegentlich behandelt wurden. Dem Herausgeber fiel somit die Aufgabe zu, in möglichstem Anschlusse an den Vortrag, wofür ihm mehrere nachgeschriebene Hefte zur Verfügung standen, und teilweise unter Benutzung von Clebsch herrührender Manuskripte ein zusammenhängendes Bild der verschiedenen geometrischen Disciplinen zu entwerfen, besonders unter Wahrung des einheitlichen Gedankenganges, welcher den Vorlesungen von Clebsch so sehr eigentümlich war. Während sonach in den ersten Abteilungen die rein geometrischen Gesichtspunkte vorwalten, drängt sich schon bei den Kegelschnitten, bez. den Flächen 2. Ordnung die Notwendigkeit eines eingehenden Studiums der Invariantentheorie auf; und dieser algebraische Charakter kommt bei weiterem Fortschreiten immer mehr zur Geltung. Andererseits soll das Buch auch in jene überaus fruchtbaren Untersuchungen einführen, welche aus der Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen, sowie der eindeutigen Transformationen für die Geometrie erwachsen. Die erwähnten Ziele bezeichnen zugleich die Stellung dieser Vorlesungen gegenüber den von Herrn Fiedler übersetzten und bearbeiteten Salmon'schen Lehrbüchern, indem der Stoff, im einzelnen mehr beschränkt, im ganzen doch ein weiteres Gebiet umfafst.

In dem ersten Bande wird in dem angegebenen Sinne die Geometrie der Ebene behandelt. Den Schlufs bildet die Darstellung der Grundzüge einer Theorie der Connexe, jener von Clebsch noch zuletzt in die Geometrie eingeführten Gebilde. — Der zweite Band, die Geometrie des Raumes enthaltend, wird demnächst nachfolgen.

INHALT.

☞ **Jeder Band der Annalen wird 36—38 Druckbogen umfassen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Verantwortliche Redaction: **F. Klein** und **A. Mayer.**

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** und Prof. **Adolph Mayer**
zu Leipzig zu Leipzig.

XVIII. Band. 2. u. 3. Heft.

Mit 4 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1881.

Neuer Verlag

von

B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1881.

Bardey, Dr. **E.**, Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen zweiter Ordnung, Gewerbeschulen und höhere Bürgerschulen. [VIII u. 260 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.—

Dronke, Dr. **A.**, Director der Realschule I. O. zu Trier, Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise für die Prima höherer Lehranstalten. Mit Figuren im Text. [IV u. 75 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.—

General-Register der Zeitschrift für Mathematik und Physik 1856—1880. Jahrg. I—XXV. [123 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.60.

Harnack, Dr. **Axel**, o. Professor der Mathematik an dem Polytechnikum zu Dresden, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zur Einführung in das Studium dargestellt. Mit Figuren im Text. [VIII u. 409 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 7.60.

Joachimsthal, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Zweite Auflage, bearbeitet von L. Natani. Mit zahlreichen Figuren im Text. [VIII u. 242 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 6.—

Jordan, Dr. **W.**, Prof. am Grossh. Polytechnikum zu Karlsruhe, Kreis-Coordinaten für 200 Radien. [48 S.] 16. In Leinwand kart. n. *M.* 1.20.

Milinowski, A., Oberlehrer am Gymnasium zu Weifsenburg i. E., Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. I. Theil: Planimetrie. Mit Holzschnitten im Text und 4 Figurentafeln. [VII u. 123 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.—

Reusch, E., Professor d. Physik in Tübingen, Die stereographische Projection. Mit acht auf Stein gravirten Tafeln. [V. u. 32 S.] Lex.-8. geh. n. *M.* 2.40.

Weiler, Dr. **A.**, Privatdocent und Lehrer der Mathematik zu Zürich, Leitfaden der mathematischen Geographie für den Unterricht an Mittelschulen, sowie zum Selbststudium. [VI u. 98 S.] Mit Figuren im Text. gr. 8. geh. n. *M.* 1.50.

Mitteilungen

der Verlagsbuchhandlung

B. G. Teubner in Leipzig.

No. 1. Diese Mitteilungen sollen das Publikum von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen. Dieselben sind in allen Buchhandlungen gratis zu haben, werden auf Wunsch aber auch direkt franko übersandt. 1881.

Erste Abteilung.

Notizen über künftig erscheinende Bücher.

I. Philologie und Altertumswissenschaft.

Die homerischen Verbalformen systematisch zusammengestellt von E. Frohwein. Mit einem Vorwort von B. Delbrück. gr. 8. geh.

Das hiermit angekündigte Werk ist nur ein Teil einer gröfseren Arbeit, welche zu vollenden der Verfasser durch den Tod verhindert worden ist.

Es war darauf abgesehen, einen Index zu Homer zu schaffen, mittels dessen nicht nur die Belege für jede Form, sondern auch die in irgend einer Hinsicht zusammengehörigen Formen leicht aufgefunden werden könnten. Als Muster schwebte dabei vor das Wörterbuch zum Rigveda von H. Grafsmann.

Unzweifelhaft wird dieser Index auch in seiner Beschränkung auf das Verbum den Philologen und Linguisten willkommen sein. Die Verlagsbuchhandlung hat um so weniger Anstand genommen, das in gewissem Sinne unfertige Werk zu veröffentlichen, weil sie der Meinung ist, dafs diese Veröffentlichung zur Schaffung eines vollständigen index homericus die Anregung geben wird.

Bei Ausarbeitung des vorliegenden Index sind die Ausgaben von La Roche zu Grunde gelegt.

Abrisz der Quellenkunde der griechischen und römischen Geschichte von Arnold Schaefer. Zweite Abteilung. gr. 8. geh.

Seit dem Erscheinen des von mir zuerst 1869 und in zweiter Ausgabe 1873 herausgegebenen Abriszes der Quellenkunde der griechischen Geschichte bis auf Polybios bin ich wiederholt aufgefordert worden in ähnlicher Weise auch die spätere Periode der griechischen Historiographie und die Quellen der römischen Geschichte zu behandeln. Demgemäfs gebe ich in dieser zweiten Abteilung entsprechend der früher erschienenen mit möglichster Beschränkung in der Auswahl des Stoffes die wichtigsten Nachweisungen und Zeugnisse bis zum Ausgange des sechsten Jahrhunderts unserer Zeitrechnung, um damit für akademische Vorlesungen und für das eigene Studium angehender Historiker eine Unterlage zu bieten.

A. S.

Einleitung in die homerischen Gedichte von Dr. A. Gemoll, Oberlehrer am Gymnasium in Wohlau. Mit 2 Kärtchen. gr. 8. kart.

Vorstehende Schrift ist die Erweiterung einer vom Verfasser im Jahre 1879 herausgegebenen Programmabhandlung: Zur Einführung in den Homer. I. Homers Leben und Gesänge.

Es kam dem Verf. schon damals darauf an, für Schulzwecke einen Leitfaden zu liefern, in welchem nur die sicheren Resultate der Homerforschung kurz und präzis zum Ausdruck kämen. Der kurze Text mit seinen knappen Anmerkungen war selbstverständlich nicht zur Befriedigung, sondern zur Erweckung des wissenschaftlichen Interesses bestimmt. Diesen Zweck hat der Verfasser auch in der vorliegenden Neubearbeitung immer im Auge behalten. Neu hinzugefügt sind und werden hoffentlich erwünscht sein die beiden Abschnitte über Troja und Ithaka, in denen namentlich das Verhältnis der topographischen Angaben der Gedichte zur Wirklichkeit berücksichtigt wird.

Die Verlagshandlung hat durch Hinzufügung zweier Karten gethan, was in ihren Kräften stand, um dem Büchlein den Weg in die Schule zu bahnen.

Das Tonsystem und die Tonarten des christlichen Abendlandes, ihre Beziehungen zur griechisch-römischen Musik und ihre Entwicklung bis auf die Schule Guido's von Arezzo. Mit einer Wiederherstellung der Musiktheorie Berno's von der Reichenau, nach einer Karlsruher Handschrift von W. Brambach. gr. 8. geh.

Die mittelalterlichen Tonarten des christlichen Abendlandes — wegen ihres kirchlichen Gebrauches gewöhnlich Kirchentöne genannt —, welche noch heutzutage vielen Volksliedern, dem katholischen Chorale und älteren protestantischen Gesängen zu Grunde liegen, stimmen bekanntlich in Bezug auf Intervallenfolge mit den altgriechischen Oktavengattungen überein. Dagegen entstammen die älteren Namen der Kirchentöne Protus, Deuterus, Tritus, Tetrardus, nicht dem klassischen Griechentume. Die jüngeren Benennungen derselben Dorius, Phrygius, Lydius u. s. w. beruhen nach allgemeiner Annahme auf einem Mifsverständnisse, welches früher dem ehrwürdigen Glarean schuld gegeben wurde, neuerdings den Zeitgenossen oder nächsten Nachfolgern Hucbalds zugeschrieben wird. Ferner setzen die Skalen des Mittelalters ein von dem althellenischen einigermafsen abweichendes Tonsystem voraus.

Der Verfasser der hier angezeigten Schrift hat nun den Versuch gemacht, das System der Kirchentöne aus der praktischen Musik der römischen Kaiserzeit zu erklären. Aufser den klassischen Quellen sind die mittelalterlichen Theoretiker bis zum zwölften Jahrhundert in dieser Frage wichtige Zeugen. Bei Prüfung der letzteren hat sich herausgestellt, dafs Berno von der Reichenau, Zeitgenosse Guido's von Arezzo und früher als dessen Anhänger betrachtet, verhältnismäfsig altertümliche Anschauungen vertritt. Es ist daher aus dem bis jetzt bekannten interpolierten Texte Berno's der echte Inhalt, soweit er für das Tonsystem und die Tonarten bedeutungsvoll ist, ausgeschieden worden.

Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana.

Κορνούτου ἐπιδρομὴ τῶν κατὰ τὴν Ἑλληνικὴν θεολογίαν παραδεδομένων. Recensuit CAROLUS LANG. 8. geh.

Die für die Kenntnis der stoischen Theologie und Naturphilosophie in hohem Grade wichtige Schrift des Cornutus oder, wie ihn schlechtere Handschriften nennen, Phurnutus „über die Natur der Götter" (so lautet der landläufige Titel) liegt bis jetzt in durchaus ungenügenden Ausgaben vor. Das harte Urteil, welches Otto Jahn in der Vorrede (p. XII) zu seinem Persius 1843 über die Überlieferung unserer Schrift in Hinsicht auf die Gale'sche Amsterdamer Ausgabe (1688) gefällt hat, ist durch die (Villoison-)Osann'sche 1844 nur wenig Lügen gestraft worden. Von der kritikscheuen Textführung Osanns abgesehen, erklärt sich die von ihm selbst gefühlte Mangelhaftigkeit seiner Arbeit vor allem daraus, dafs er keine einzige Handschrift des Cornutus'schen Werkes selbst verglichen hatte und die Kollationen, deren er sich bediente, höchst ungenau und zum Teil von ganz unkundiger Hand gefertigt waren. Wenn ich mich nun anschicke, den ältesten und bedeutendsten „Erklärungsversuch der althellenischen Dogmatik" in reinlicherem Gewande der gelehrten Welt vorzuführen, so darf dabei einerseits der Konjektur und der Athetese, wo sie der Sprachgebrauch und der Zusammenhang der fast durchweg ziemlich gut disponierten Schrift erheischt, der Zutritt nicht verschlossen sein, andererseits die im allgemeinen hübsch lesbare Überlieferung der Codd. Paris. 2720, Montepessulanus 422, Vaticanus 942, Bodleianus-Baroccianus 131 und Laurentianus 24 plutei 57 um so mehr zu vorwiegender Geltung kommen, als sie von dem bedeutendsten Vertreter der zweiten Klasse unserer Cornutuscodd., Vaticanus 1385, welcher alle übrigen an Alter übertrifft, vielfach direkt oder indirekt unterstützt wird. Ein knapper, nur auf das Wichtige sich beschränkender krit. Apparat soll die Differenzierung der Überlieferung nach Klassen und Gruppen zur Anschauung bringen; von der dritten Klasse, welche stark kontaminiert und im Vergleich zu den zwei anderen ziemlich wertlos ist, habe ich die Gruppe berücksichtigt, welche die Grundlage der Eudokia'schen Entlehnungen aus Cornutus und der sog. Vulgata bildet. Die praefatio wird aufser einer kurzen Notiz über Cornutus selber namentlich einen Recensus der zahlreichen Handschriften enthalten und über die Klasse bzw. Gruppe, zu der eine jede derselben gehört, Aufschlufs geben. Endlich soll ein ausführlicher Index unsere Ausgabe für lexikologische Zwecke brauchbar machen.

Offenburg. **C. Lang.**

Fragmenta geographorum Graecorum et Latinorum. Collegit, recensuit, apparatu critico indicibusque instruxit CAROLUS FRICK. 2 Voll. 8. geh.

Während Verf. mit der Ausarbeitung seiner „Geschichte der alten Erdkunde" beschäftigt war, deren Erscheinen in diesen Mitteilungen (1878) binnen kurzem in Aussicht gestellt wurde, kam derselbe bald zu der Erkenntnis, dafs, wenn dieses Werk eine einheitliche, abgerundete Darstellung bringen sollte, noch eine Reihe von Einzeluntersuchungen vorangehen müfsten. Vor allem fehlte eine vollständige, zuverlässige Sammlung der Fragmente der griechischen und lateinischen Geographen. Für dieselbe ist in der letzten Zeit allerdings manches, besonders durch die gründlichen Arbeiten von Hugo Berger über

*

Hipparch und Eratosthenes, geschehen, aber auch diese bedürfen, namentlich was Eratosthenes betrifft, mannichfacher Berichtigung und Ergänzung. Daher hat sich Verf. entschlossen, die Veröffentlichung seiner Geschichte der alten Erdkunde einer späteren Zukunft vorzubehalten, und einstweilen zur gründlichen Fundamentierung derselben das Material zusammenzutragen. Wie Verf. hofft, wird die vorstehend näher bezeichnete Fragmentsammlung nicht blofs diesem Zwecke nützen, sondern den Altertumsforschern überhaupt willkommen sein. Dieselbe wird in zwei mäfsig starken Bändchen erscheinen, und zwar 1) die Fragmente der griechischen 2) die der lateinischen Geographen bringen. Die Erläuterungen sind möglichst knapp gehalten, dagegen eine adnotatio critica, teils nach den besten Ausgaben, teils nach neuen Kollationen, hinzugefügt. Den Schlufs bildet ein index scriptorum und ein index rerum.

Auch diemal erfreute sich Verf. bei seiner Arbeit der gütigen Unterstützung des Herrn Prof. Wachsmuth in Heidelberg.

C. F.

Imp. Iustiniani Novellae quae vocantur sive constitutiones quae extra Codicem supersunt. Ordine chronologico digessit, Graeca ad fidem Codicis Veneti castigavit C. E. Zachariae a Lingenthal. 8. geh.

Eine Ausgabe der Novellen entsprechend dem heutigen Stande unseres Wissens und Könnens ist dringendes Bedürfnis. Haloander und Scrimger haben die griechischen Texte nach Abschriften der Venetianer und der Florentinischen Handschrift nicht mit der erforderlichen Treue herausgegeben: die Zahl und Beschaffenheit der kritischen Hülfsmittel ist in unseren Tagen ansehnlich gewachsen. Mit Hülfe derselben und auf Grund einer vollständigen Vergleichung der Venetianer und einer stückweisen der Florentiner Handschrift ist die vorstehend angekündigte Ausgabe gearbeitet: hie und da hat es der Konjekturalkritik bedurft, um die Texte verständlich zu machen.

Besonderen Wert legte der Herausgeber auf die durchgeführte chronologische Ordnung der Konstitutionen. Die gangbaren Ausgaben geben sie in einer Sammlung von 168 Stücken und zweierlei Anhängen. Die Sammlung von 168 Stücken enthält manche Konstitutionen doppelt, andere gar nicht: sie enthält auch Novellen späterer Kaiser, ja sogar Edikte der praefecti praetorio: Die Ordnung ist eine willkürliche und zufällige. Es war daher um so mehr an der Zeit eine planvollere Anordnung zu wählen, als ja die Sammlung von 168 Stücken so wie sie in den Ausgaben reproduciert ist in mancher Beziehung ein Gebilde der Herausgeber ist und vielleicht niemals in dieser Gestalt existiert hat. Die chronologische Anordnung eröffnet ganz neue Gesichtspunkte: es wird Viele überraschen, dafs von den sogenannten Novellen etwa sieben aus den Jahren 533 und 534, d. i. aus der Zeit der Publikation des revidierten Codex datieren.

Auf Wiedergabe lateinischer Übersetzungen der griechischen Konstitutionen und einer vollständigen varietas lectionum in den Anmerkungen ist verzichtet worden. Die gleichzeitig erscheinende Schöll'sche Ausgabe bietet beides in ausreichendem Maafse.

Z.

Quintiliani declamationes quae supersunt CXLV recensuit C. Ritter. 8. geh.

Die quintilianischen Deklamationen werden gewöhnlich in der Beurteilung alle zusammengeworfen. Doch sind verschiedene Gruppen unter denselben sehr scharf zu trennen. Im einzelnen habe ich darüber in einer besonderen Schrift (erschienen 1881 in der J. C. B. Mohrschen

Verlagsbuchhandlung in Freiburg) gehandelt, welche die Herkunft der verschiedenen Stücke nach Möglichkeit bestimmt. Das wichtigste, und wie ich hoffe, von jedermann als sicher anerkannte Ergebnis derselben ist, daſs die 145 kleineren Deklamationen, welche von den 19 gröſseren nach Art, Herkunft und Überlieferung verschieden sind, als echte Arbeiten des Quintilian erkannt sind. Von diesen allein ist hier weiter zu reden. Sie sind bisher nur zweimal auf handschriftlicher Grundlage herausgegeben worden, von Pithoeus, Paris 1580, und vorher aus einer etwas weniger vollständigen Handschrift, welche einer zweiten Klasse von Handschriften angehört, von Ugoletus, Parma 1494. Die übrigen Ausgaben sind im wesentlichen nur Abdrücke. Von mir wird nun eine neue Ausgabe vorbereitet. Die alte Handschrift des Pithoeus habe ich verglichen, dann hinreichende Vertreter jener zweiten Handschriftenklasse. Im übrigen ist der Text nach Kräften hergestellt, wozu die kritischen Leistungen älterer Gelehrter, namentlich des trefflichen Schulting, mehrfach Hilfe boten. **C. R.**

II. Pädagogik. Deutsche Schulbücher.

Leitfaden der Heimatkunde von Dr. A. Döring, Direktor des Gymnasiums in Dortmund. 8. kart. Preis *M.* —.45.

Dieser Leitfaden versucht die Einführung in die Kenntnis der engeren Heimat in methodischer Weise mit dem Zwecke einer Propädeutik für den geographischen Unterricht zu verbinden. Er ist für die unterste Stufe des Unterrichts an Gymnasien und Realschulen I. O., sowie für die entsprechende Altersstufe anderer höherer und niederer Schulen bestimmt und nimmt zu seiner Absolvierung bei zwei wöchentlichen Stunden eine Zeit von etwa dreiviertel Jahren in Anspruch.

Von dem rein anschauungsmäßigen Unterricht in der Heimatkunde unterscheidet er sich durch die bestimmten Ziele und Gesichtspunkte, die der heimatkundlichen Betrachtung gesteckt werden und in denen eben das propädeutische Moment seinen Ausdruck findet.

Der Leitfaden zerfällt demgemäß in zwei Hauptteile: Allgemeine oder vergleichende Heimatkunde und geographische Grundbegriffe. — Besondere oder beschreibende Heimatkunde und Anleitung zum Verständnis der Karte.

Im ersten Hauptteile wird zunächst die Heimat ohne Rücksicht auf die Veränderungen durch die menschliche Thätigkeit betrachtet und dabei folgende vier Gesichtspunkte *vergleichend* abgehandelt: Erleuchtung durch die Sonne, Erwärmung durch die Sonne, Bodengestalt, Bodenbeschaffenheit; sodann werden die durch die Thätigkeit des Menschen bewirkten Veränderungen des Heimatbodens, und zwar ebenfalls vergleichend, betrachtet.

Der zweite Hauptteil geht von dem Versuch einer genaueren Beschreibung der Heimat über zur Vermittelung der geographischen Erkenntnis durch Abbildungen, zeigt dies Unzureichende beider Verfahrungsweisen und leitet so über zur kartographischen Darstellung als der dem geographischen Bedürfnis einzig entsprechenden Darstellungsweise, deren Verfahren nunmehr in ganz elementarer Weise, beginnend mit dem Grundplane des Klassenzimmers, dargelegt wird.

Hiermit schließt der Leitfaden; der Schüler ist nunmehr befähigt, an der Hand der Karte sich in weiteren Kreisen der Heimat und des Vaterlandes zu orientieren.

Der Leitfaden legt nicht eine bestimmte Landschaft der Betrachtung zu Grunde; indem das die Heimat betreffende Material meist in *Frageform* dargestellt ist, konnte eine auf jede Gegend passende Behandlungsweise angewandt und damit zugleich die Anregung des Schülers zu eignem Anschauen, Beobachten und Denken, wie sie die Frageform mit sich bringt, erreicht werden.

III. Mathematik, Technische und Naturwissenschaften.

Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus. Von Prof. Dr. F. NEUMANN zu Königsberg in Pr. gr. 8. geh.

Diese Vorlesungen beginnen mit einfachen Expositionen über die magnetischen Momente, die magnetische Axe, das magnetische Potential, etc., besprechen dabei gelegentlich die bekannte Poisson-Gaufs'sche Methode zur Bestimmung des Erdmagnetismus, und gehen sodann über zur Theorie der magnetischen Induktion, wobei der Reihe nach zuerst der Fall behandelt wird, dafs die inducierenden Kräfte von der Zeit unabhängig sind, sodann der allgemeinere Fall, dafs dieselben gegebene Funktionen der Zeit sind.

Hierauf werden diese theoretischen Expositionen auf mehrere spezielle Fälle in Anwendung gebracht, namentlich auf den Fall, dafs der inducierte (etwa aus weichem Eisen bestehende) Körper eine Kugel, oder eine Hohlkugel, oder ein Ellipsoid (insbesondere ein Rotations-Ellipsoid) ist; während gleichzeitig als inducierende Ursachen bald der Erdmagnetismus, bald ein gegebener Stahlmagnet, bald endlich ein System elektrischer Ströme in Betracht kommt. Auch schliefsen sich an diese Untersuchungen wichtige Bemerkungen an über experimentelle Methoden, z. B. über die Bestimmung der magnetischen Induktions-Konstante, ferner über die Messung der Inklination (des Erdmagnetismus) mittelst horizontaler Ablenkungen einer Kompafsnadel etc. Daneben wird beiläufig gezeigt, in welcher Weise man einen Multiplikator, durch geeignete Anordnung seiner elektrischen Stromwindungen, in eine wirkliche Tangentenboussole, nämlich in ein Instrument verwandeln kann, bei welchen die trigonometrische Tangente des beobachteten Ablenkungswinkels von der vorhandenen Stromstärke wirklich nur durch einen konstanten Faktor sich unterscheidet. Denkt man sich nämlich ein System elektrischer Kreisströme, die alle auf ein und derselben Kugelfläche liegen, und mit irgend welchen Parallelkreisen dieser Fläche zusammenfallen, so wird man, wie in dem vorliegenden Werk exponiert ist, jene Parallelkreise stets in solcher Weise auszuwählen im Stande sein, dafs die von dem elektrischen Stromsystem auf einen magnetischen Massenpunkt ausgeübte Kraft innerhalb jener Kugelfläche ihrer Stärke und Richtung nach konstant bleibt.

Schliefslich wird das allgemeine Problem der magnetischen Induktion auf die Ermittelung einer gewissen „charakteristischen Funktion" reduciert, welche nur noch von der Oberfläche des inducierten Körpers abhängt, und welche daher für das Problem der magnetischen Induktion von derselben fundamentalen Bedeutung sein dürfte, wie die bekannte Green'sche Funktion für die Probleme der elektrischen Induction. C. N.

Über die nach Kreis-, Kugel-, und Cylinder-Functionen fortschreitenden Entwicklungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes. Von Prof. Dr. C. NEUMANN zu Leipzig. 4. geh.

Die Fourier'sche Reihe steht zur Kreisperipherie in derselben Beziehung, wie die Laplace'sche (nach Kugelfunktionen fortschreitende) Reihe zur Kugelfläche. Und parallel diesen Reihenentwicklungen stehen gewisse Integraldarstellungen, welche aus diesen Reihenentwicklungen dadurch hervorgehen, dafs man den Radius des Kreises resp. der Kugel unendlich grofs werden läst. In der That verwandelt sich in solcher Weise die Fourier'sche Reihe in das Fourier'sche Integral, und andererseits die Laplace'sche Reihe in ein gewisses nach Cylinderfunktionen d. i. nach Bessel'schen Funktionen fortschreitendes Integral, welches zuerst vom Verfasser des vorliegenden Werkes angegeben wurde.

Gleichzeitig aber erleiden, falls man jenen Radius unendlich grofs werden läst, auch die bekannten Integraleigenschaften der Kreisfunktionen und die der Kugelfunktionen bemerkenswerte Umänderungen In der That verwandeln sich dabei die erstern in gewisse neue Integraleigenschaften der Kreisfunktionen, welche für die Probleme der konformen Abbildung und ebenso für gewisse Aufgaben der Elektrostatik von besonderer Wichtigkeit sind. Und andrerseits verwandeln sich bei jenem Prozefs die Integraleigenschaften der Kugelfunktionen in gewisse bisher verborgen gebliebene Integraleigenschaften der Cylinderfunktionen.

Die soeben angedeuteten Reihen- und Integral-Darstellungen, Eigenschaften etc. werden im vorliegenden Werk zunächst in flüchtigen Zügen (gewissermafsen auf heuristischem Wege) entwickelt. Sodann geht der Verf. über zur strengen Begründung derselben, und sucht hierbei seinen Auseinandersetzungen durch Anwendung der neueren Hülfsmittel, namentlich des wichtigen Du Bois-Reymond'schen Mittelwertsatzes, eine möglichst einfache Gestalt zu verleihen.

Noch sei bemerkt, dafs der Verfasser absichtlich im ganzen Werke auf die gewöhnlich vorkommenden Funktionen (welche Jacobi gesprächsweise die „vernünftigen“ nannte) sich beschränkt hat. Demgemäfs hat hat derselbe z. B., was Funktionen einer Variablen betrifft, nur solche Funktionen in Betracht gezogen, bei denen die Anzahl der Unstetigkeitspunkte, und ebenso auch die Anzahl der Maxima und Minima für einen endlichen Spielraum der Variablen eine endliche ist.

Zweite Abteilung.

Erschienene Bücher.

Erster Bericht

über die im Jahre 1881 erschienenen Neuigkeiten, neuen Auflagen und Fortsetzungen.

I. Philologie und Altertumswissenschaft.

Aristophanis Ranae. Recensuit Adolphus von Velsen. [VI u. 141 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.—

Autenrieth, Dr. **Georg,** Rektor und Professor am Gymnasium zu Zweibrücken, Wörterbuch zu den Homerischen Gedichten. Für den Schulgebrauch bearbeitet. Mit vielen Holzschnitten und zwei Karten. Dritte umgearbeitete Auflage. [XVI u. 353 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.—

Draeger, Dr. **A.,** Direktor des Gymnasiums zu Aurich, historische Syntax der lateinischen Sprache. Zweiter Band. Zweite Auflage. [XXII u. 870 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 14.—

Das nun in zweiter Auflage vollständig vorliegende Werk kostet *M.* 26.—

Pfitzner, Dr. **W.,** Geschichte der Römischen Kaiserlegionen von Augustus bis Hadrianus. [VI u. 290 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 6.40.

Jahrbücher, neue, für Philologie und Pädagogik. Herausgegeben von Dr. Alfred Fleckeisen und Dr. Hermann Masius. 121. u. 122. Band. 1880.

12. Heft:

Inhalt: I. Abt. Die einführung fremder gesandtschaften in die athenische volksversammlung und die procheirotonie. von *A. Höck* in Husum. — Zu Menandros. von *K. Dziatzko* in Breslau. — Zu Nearchos von Kreta. von *A. Vogel* in Colmar. — Zu Theokritos [5, 38] von *E. Hiller* in Halle. — Über den gegenwärtigen stand der quellenkritik des Hesychios von Milet. von *H. Flach* in Tübingen. — *O. Schneider:* de Callimachi operum tabula apud Suidam commentatio (Gotha 1862) — *C. Wachsmuth:* de fontibus ex quibus Suidas in scriptorum Graecorum vitis hauserit. in der symbola philologorum Bonnensium (Leipzig 1864) — *D. Volkmann:* de Suidae biographicis quaestiones novae (Naumburg 1873) — *E. Rohde:* γέγονε in den biographica des Suidas. im rhein. museum für philologie XXXIII und XXXIV (Frankfurt am Main 1878. 1879). — *Derselbe:* Philo von Byblus und Hesychius von Milet. ebd. XXXIV (ebd. 1879). — *A. Daub:* kleine beiträge zur griechischen litteraturgeschichte im anschlusz an Suidas und Eudokia. ebd. XXXV (ebd. 1880); — *derselbe:* de Suidae biographicorum origine et fide (Leipzig 1880). — Anz. von *M. Büdinger:* Kleon bei Thukydides (Wien 1880). von *H. Zurborg* in Zerbst. — Ad Lucilium [XXVIII 1]. von *S. Brandt* in Heidelberg. — Der begriff des *omne* bei Lucretius. von *C. Gneisse* in Metz. — Zu Sophokles Elektra [v. 601]. von *G. Krüger* in Görlitz. — Die stellung von *uterque* und *ubique*. von *W. H. Roscher* in Meiszen, *E. Meyer* in Herford und *E. Reichenhart* in Frankenthal. — Zu Placidus glossen. von *A. Deuerling* in München. — Des Vergilius sechste zehnte und vierte ecloge. III die vierte ecloge (Pollio). von *W. H. Kolster* in Eutin. — Zur überlieferung von Ciceros briefen. von *L. Mendelssohn* in Dorpat.

II. Abt. Über die handlung in Goethes Tasso. von *F. Kern* in Stettin. — Dichterstellen zu Horaz. von *E. Rosenberg* in Hirschberg. — Antikritik der kritik des hrn. *J. H. Schmalz* in Mannheim. von *W. Gebhardi* in Meseritz. — Entgegnung. von *J. H. Schmalz* in Mannheim. — *A. Brass:* zootomische wandtafeln für den schulgebrauch (Leipzig 1880). angez. von *Helm.* — *F. Kinzenbach:* mein Kriegsjahr 1870—1871. angez. von *V. Meyer* in Hersfeld. — Memoria Elspergeri rectoris gymnasi Onoldini. von *R. Schreiber* in Augsburg. (fortsetzung und schlusz). — Bericht über die verhandlungen der fünfunddreiszigsten versammlung deutscher philologen und schulmänner zu Stettin. von *Herbst* in Stettin (fortsetzung und schlusz). Personalnotizen.

123. u. 124. Band. 1881. 1. Heft.

Jährlich 12 Monatshefte. gr. 8. n. *M.* 30.—

Die Jahrbücher für Philologie und Pädagogik bestehen aus zwei selbständig redigierten, jedoch nur ungetrennt ausgegebenen und einzeln nicht verkäuflichen Abteilungen:

I. Abteilung. A. u. d. T.: Jahrbücher für classische Philologie herausgegeben von A. Fleckeisen. 27. Jahrgang 1881 oder der Jahn'schen Jahrbücher 123. Band.

II. Abteilung. (Für Gymnasialpädagogik und die übrigen Disciplinen des Gymnasialunterrichtes mit Ausschluſs der classischen Philologie). Herausgegeben von H. Masius. 27. Jahrgang 1881 oder der Jahn'schen Jahrbücher 124. Band.

1. Heft:

Inhalt: I. Abt. Anz. von *H. Schrader:* Porphyrii quaestionum Homericarum ad Iliadem pertinentium reliquiae. fasc. I (Leipzig 1880). von *A. Römer* in München. — Zu Aelius Aristeides [11 s. 130]. von *R. Arnoldt* in Königsberg (Ostpreuszen). — Eine neue deutung der Laokoongruppe. von *H. Blümner* in Zürich. — Anz. v. *H. Kraz:* die drei reden des Perikles bei Thukydides übersetzt und erklärt (Nördlingen 1880). von *Ch. Ziegler* in Stuttgart. — Anz. v. *H. Jordan:* kritische beiträge zur geschichte der lateinischen sprache (Berlin 1879). von *H. Schweizer-Sidler* in Zürich. — Anz. v. *P. Langen:* beiträge zur kritik und erklärung des Plautus (Leipzig 1880). von *J. Brix* in Liegnitz. — Zur handschriftlichen überlieferung des Ausonius. von *W. Brandes* in Braunschweig. — Zu den griechischen totenopfern. von *P. Stengel* in Berlin.

II. Abt. Beiträge zur geschichte des deutsch-sprachlichen unterrichtes im siebzehnten jahrhundert. von *R. Hanns* in Waldenburg in Sachsen. — Einige bemerkungen über den deutschen unterricht in prima. von —*l*— (fortsetzung und schluss). — *Brandt:* versuch einer möglichst kurzen zusammenstellung der für die tertia und secunda eines gymnasiums geeigneten grammatischen regeln der französischen sprache. programm des gymnasiums zu Salzwedel, ostern 1879. angez. von *G. Völcker* in Prenzlau. — *F. Jodl:* die culturgeschichtschreibung, ihre entwickelung und ihr problem (Halle 1878). angez. von *C. Hermann* in Leipzig. — Emil Palleske. von *A. Jung* in Meseritz. — Personalnotizen. — F. A. Ecksteins jubiläum. von *H. Masius* in Leipzig.

Neuere Sprachen.

Kreßner, Dr. **Adolf,** Übungssätze zur Erlernung der französischen unregelmäßigen Verben. [IV u. 67 S.] gr. 8. kart. n. ℳ —.80.

Mignet, M., Histoire de la révolution française depuis 1789 jusqu'en 1814. Herausgegeben und mit sprachlichen, sachlichen und geschichtlichen Anmerkungen versehen von Dr. Adolf Korell, Oberlehrer am Thomas-Gymnasium zu Leipzig. III. Band. Depuis le 2 Juin 1793 jusqu'au 4 Brumaire an IV (26 Octobre 1795), terme de la convention. [II u. 104 S.] gr. 8. geh. ℳ 1.20.

Der IV. Band (Schlufs) ist unter der Presse.

II. Pädagogik. Deutsche Schulbücher.

Bartels, Dr. **Friedrich,** Direktor sämtlicher Bürgerschulen in Gera, und **Gustav Wirth,** Lehrer an der höheren Töchterschule in Guben, deutsches Lesebuch für Mädchenschulen. In vier Teilen. II. Teil. [VIII u 264 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 1.20.

Früher erschien: I. Teil. 1880. n. ℳ —.55.

Schütze, Dr. **Fr. W.,** Seminardirektor, K. S. Schulrat, Entwürfe und Katechesen über Dr. M. Luther's kleinen Katechismus. Für evangelische Volksschullehrer. Zugleich eine praktische Anleitung zum Katechisieren für Schullehrer-Seminare. Dritter Band. Drittes bis sechstes Hauptstück. Dritte Auflage. [V u. 389 S.] 8. geh. ℳ 3.—

Das Werk ist nun in dritter Auflage wieder vollständig zu haben:

I. Band.	1. Hauptstück				ℳ 3.75.
II. „	1. Abt.	2. Hauptstück,	I. Art.		ℳ 2.25.
II. „	2. „	2. „	II. „		ℳ 2.25.
II. „	3. „	2. „	III. „		ℳ 2.25.

——— Leitfaden für den Unterricht in der Erziehungs- und Unterrichtslehre. Ein Auszug aus der evangelischen Schulkunde. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. [VIII u. 422 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 4.—

Zurborg, Dr. H., Gymnasiallehrer in Zerbst, Hundert Themata für deutsche Aufsätze. Ein Hilfsbuch für den deutschen Unterricht auf der Sekundaner-Stufe. [64 S.] 8. kart. *M* —.60.

Zeitschrift für weibliche Bildung in Schule und Haus. Zentral-Organ für das deutsche Mädchenschulwesen. Herausgegeben von Richard Schornstein, Direktor der städtischen höheren Töchterschule und Lehrerinnen-Bildungsanstalt zu Elberfeld. Achter Jahrgang. 1881. Jährlich 12 Hefte. Halbjährlich n. *M* 6.—

1. Heft.

Inhalt: Vorwort: Unsere Losung. (Zusammenstellung der Gegenstände, über welche die Zweigvereine im Jahre 1880 verhandelt.) — Wissenschaftliches, Unterricht, Erziehung und Schuleinrichtungen. Karl Friedrich Drollinger, ein Vor-Reformator unserer Litteratur. Von Professor Dr. Löhlein-Karlsruhe. — Das Fragen der Schüler. Von Mathilde Lammers-Bremen. — Litteratur für jung und alt, zur Unterhaltung und Belehrung. „Ohne Familie". Roman von Hector Malot. Aus dem Französischen übertragen von Mary Muchall. Von F. Rehorn-Frankfurt a. M. — „Römische Litteraturbilder für die gebildete Frauenwelt". Von F. Normann. Von Dr. Liebrecht-Elberfeld. — Sammlung von Vorträgen für das deutsche Volk. Herausgegeben von Professor W. Frommel und Professor Dr. Pfaff. Von demselben. — Wissenschaftliche Litteratur. Hermann Kahle. „Pädagogische Erquickstunden, zusammengestellt für Eltern, Lehrer und Lehrerinnen". Von A. Kippenberg-Bremen. — Dr. J. Chr. Gottlob Schumann, „Pädagogische Chrestomathie", eine Auswahl aus den pädagogischen Meisterwerken aller Zeiten für die pädagogische Privatlektüre. Von demselben. — Dr. F. W. Schütze, „Evangelische Schulkunde. Praktische Erziehungs- und Unterrichtslehre für Seminare und Volksschullehrer". Von demselben. — Vereinsangelegenheiten. Verhandlungen der VII. Jahresversammlung des rheinischen Provinzialvereines. — Verschiedenes. Erklärung, betreffend die Gefährdung der körperlichen und geistigen Gesundheit der Mädchen durch die höhern Töchterschulen. Von Direktor Dr. Hasse. — Erwiderung auf diese Erklärung. Von Direktor Dr. Sommer. — Berlin. Aus dem Vereine für höhere Lehranstalten Berlins. — Lehrerinnenseminar zu Mülhausen im Elsaß. Von Oberlehrer Dr. Schultze. — Lehrerinnenseminar zu Elbing. Von Direktor Witt. — Bemerkung, Freistellen am Lehrerinnenseminare zu Hannover betreffend.

2. Heft.

Inhalt: Wissenschaftliches, Unterricht, Erziehung und Schuleinrichtungen. Öffentliche Urteile über das Mädchenschulwesen. (Ein Artikel der Neuen Preußischen Zeitung und Entgegnung darauf. Verhandlung in dem Preußischen Abgeordnetenhause, 27. Sitzung, am 14. Dezember 1880.) Von der Redaktion. — London vor dreihundert Jahren. Von W. Armbrust-Barmen. — Litteratur für jung und alt, zur Unterhaltung und Belehrung. Adelheid von Rothenburg, „Aus dem Tagebuche einer Haushälterin". Von F. Rehorn-Frankfurt a. M. — Dr. Lorenz von Stein, „Die Frau auf dem sozialen Gebiete". Von demselben. — Wissenschaftliche Litteratur. K. August Peschel, „Ausführliche Erklärung der wichtigsten Bibelstellen für den Katechismusunterricht". 1—3. Heft. Von Dr. Dix-Leipzig. — K. August Peschel, „Ausführliche Erklärung" u. s. w. 7., 8. und 9. Heft. Von demselben. — Prof. Dr. Löhlein, „Grundriß der Kirchengeschichte für höhere Lehranstalten". 2. Aufl. Von demselben. — Rektor J. Keller, „Grundriß einer historischen Einleitung in die Bibel, für höhere Bildungsanstalten und zur Selbstbelehrung". 2. Aufl. Von demselben. — Dr. Herm. Stohn, „Hilfsbuch für den Geschichtsunterricht in höhern Töchterschulen". Von Dr. Buchner-Krefeld. — Dr. Richard Andree, „Allgemeiner Handatlas in 86 Karten mit erläuterndem Texte". Von Dr. Liebrecht-Elberfeld. — Dr. L. Hoff und Dr. W. Kaiser, „Abriß der Rhetorik und Poetik". Von demselben. — Regierungsverfügungen. Die städtische höhere Mädchenschule und Lehrerinnenbildungsanstalt zu Darmstadt. — Trier. Die städtische höhere Töchterschule. Von Direktor Kreymer. — Vereinsangelegenheiten. Verhandlungen der VII. Jahresversammlung des rheinischen Proviozialvereins. (Schluß). — Zweigverein im Großherzogthume Baden. Aus der Thätigkeit desselben im Jahre 1879 und 1880. Von Dr. Löhlein-Karlsruhe. — Verschiedenes. Hannover. Lehrerinnenprüfung. Von Dr. Pertz. Der Verein deutscher Lehrerinnen in London. Von Math. Lammers-Bremen.

3. Heft.

Inhalt: Wissenschaftliches, Unterricht, Erziehung und Schuleinrichtungen. Zwei deutsche Märchen in ihrem Zusammenhange mit der alten Göttersage. Von Direktor Dr. Hausmann-Dresden. — Das französische Gesetz für das höhere Mädchenschulwesen. Von Direktor Dr. Nöldeke-Leipzig. — Öffentliche Urteile über die höhere Mädchenschule. (Wissenschaftliche Beilage der Leipziger Zeitung vom 16. Januar 1881.) Von der Redaktion. — Wissenschaftliche Litteratur. Direktor Dr. J. Tietz, „Die geschichtliche Entwicklung des deutschen Nationalbewußtseins". Von Direktor Karnstädt-Lüneburg. — L. Rudolph. Oberlehrer der Luisenschule zu Berlin, „Die Stellung der Schule zum Kampfe zwischen Glauben und Wissen." Ein Beitrag für Eltern, Lehrer und Erzieher. Von Schornstein-Elberfeld. — C. Wittichen, „Lehrbuch für den evangelischen Religionsunterricht in Schule und Haus". Von Dr. Dix-Leipzig. — Professor Dr. D. Sanders, „Deutsche Litteraturgeschichte". Von Professor Dr. Maaß-Breslau. — Dr. L. Jacoby, „Über die Nachahmung von Naturstimmen in der deutschen Poesie". Von demselben. — Regierungsverfügungen. Termine für die Prüfungen der Lehrerinnen und Schulvorsteherinnen im Jahre 1881. — Vereinsangelegenheiten. Aus Niederschlesien. Versammlungen in Liegnitz am 4. Juli und 15. Oktober 1880. Von Rektor Ragoczy-Liegnitz. — Herbstversammlung des sächsischen Provinzialvereines am 2. Oktober 1880. Von Rektor Dr. Rentner-Naumburg. — Hauptversammlung des Zweigvereines Elsaß-Lothringen. Von Oberlehrer Dr. Schultz-Mülhausen. — Herbstversammlung des württembergischen Zweigvereines. Von J. Merkle-Stuttgart. — Verschiedenes. Die vereinbarten Zeugnißprädikate. — Generalversammlung des Wilhelm-Augusta-Lehrerinnenvereines.

III. Mathematik, Technische und Naturwissenschaften.

General-Register der Zeitschrift für Mathematik und Physik 1856—1880. Jahrgang I—XXV. [123 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.60.

Joachimsthal, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Zweite Auflage, bearbeitet von L. Natani. Mit zahlreichen Figuren im Text. [VIII u. 242 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 6.—

Jordan, Dr. **W.,** Professor am Grofsh. Polytechnikum zu Karlsruhe, Kreis-Coordinaten für 200 Radien. [48 S.] 16. In Leinwand kart. n. ℳ 1.20.

Milinowski, A., Oberlehrer am Gymnasium zu Weifsenburg i. E., die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. I. Teil, Planimetrie. Mit Holzschnitten im Text und 4 Figurentafeln. [VII u. 123 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.—

Reusch, E., Professor d. Physik in Tübingen, die stereographische Projection. Mit acht auf Stein gravirten Tafeln. [V u. 32 S.] Lex.-8. geh. n. ℳ 2.40.

Weiler, Dr. **A.,** Privatdocent und Lehrer der Mathematik in Zürich, Leitfaden der mathematischen Geographie für den Unterricht an Mittelschulen, sowie zum Selbststudium. [98 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. ℳ 1.50.

Wünsche, Dr. **Otto,** Oberlehrer am Gymnasium zu Zwickau, Schulflora von Deutschland. Nach der analytischen Methode bearbeitet. Die Phanerogamen. Dritte Auflage. [LXIV u. 427 S.] 8. geh. n. ℳ 4.—, in Lnwd. gebunden n. ℳ 4.80.

Mathematische Annalen. Unter Mitwirkung der Herren Prof. P. Gordan zu Erlangen, Prof. C. Neumann zu Leipzig, Prof. K. VonderMühl zu Leipzig, gegenwärtig herausgegeben von Prof. Felix Klein zu München und Prof. Adolf Mayer zu Leipzig. XVII. Band.

3. Heft.

Inhalt: Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Von *A. V. Bäcklund* in Lund. — Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung. Von *J. Freyberg* in Dresden. — Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwerthung durch die Methoden von *Lie*. Von *A. Mayer* in Leipzig. — Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. (Zweite Mittheilung.) Von *Georg Cantor* in Halle a. d. Saale. — Ueber die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f = x_1{}^3x_2 + x_2{}^3x_3 + x_3{}^3x_1$. Von *P. Gordan* in Erlangen. — Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. Par *A. Markoff* à St. Pétersbourg. (Second mémoire). — Die Principien der Elektrodynamik. Von *Carl Neumann* in Leipzig. — Ueber die lineare Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Von *Martin Krause* in Rostock. — Ueber die Multiplication der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Von *Martin Krause* in Rostock. — Auszug aus einem Brief an die Redaction der Annalen. Von *von Gall* in Mainz.

4. Heft.

Inhalt: Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden. Von *H. Schubert* in Hamburg. — Ueber Untersuchung und Aufstellung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen. Von *Walther Dyck* in Leipzig. (Hierbei 2 lithographirte Tafeln.) — Notiz über eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige „Normalcurve" vierter Ordnung. Von *Walther Dyck* in Leipzig. — Ueber die Wendepunkte der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten. (Zweite Note.) Von *A. Brill* in München. — Zur Pfaff'schen Lösung des Pfaff'schen Problems. Von *A. Mayer* in Leipzig. — Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in der Entwickelung einer beliebigen Potenz des Radiusvectors nach der mittleren Anomalie. Von *W. Scheibner* in Leipzig. — Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwickelungen. (Aus den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Mai 1856.) Von *W. Scheibner* in Leipzig. — Erweiterung des Abel'schen Satzes von der Form der algebraisch-logarithmisch ausdrückbare Integrale algebraischer Functionen. Von *Leo Königsberger* in Wien. — Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Function. Von *Felix Klein* in Leipzig. — Bemerkung zu der Bestimmung der Anzahl der Torsallinien einer Regelfläche. Von *H. Schubert* in Hamburg.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Herausgegeben unter der verantwortlichen Redaktion von Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl und Dr. M. Cantor. 26. Jahrgang. 1881. 6 Hefte. gr. 8. geh. n. ℳ 18.—

1. Heft.

Inhalt: Die Bestimmung einer Function auf einer Kreisfläche aus gegebenen Randbedingungen. Von *W. Veltmann* (Taf. I Fig. 1—3). — Die Krümmung windschiefer Flächen in den Punkten einer geradlinigen Erzeugenden. Von Dr. *F. Buka*, Privatdocent an der königl. techn. Hochschule in Berlin (Taf. I Fig. 4—9). — Ein Ortsbestimmungsproblem der sphärischen Astronomie. Von Dr. *Siegm. Günther*, Gymnasialprofessor in Ansbach (Taf. I Fig. 10—12). — Das Verhältniss der Hauptkrümmungsradien an einem Flächenpunkte, gemessen durch den Winkel der zugehörigen Inflexionstangenten. Von Prof. *Dietrich* in Regensburg. — Ueber Summen und Producte von Vectoren der Ellipse und verwandter Curven. Von *O. Schlömilch*. — Ueber simultan convergirende und divergirende Reihen. Von *O. Schlömilch*. — Ueber doppelt-orthosymmetrische Determinanten. Von Dr. *K. Weihrauch* in Dorpat. — Aufgabe. Von *G. Schaertlin*, Stud. math. in Basel. — Ueber die Constitution der Elemente. Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie. — Nachschrift zu Artikel I. Von *W. Veltmann*. — Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt). Euler's Theorie von der Ursache der Gravitation. Von Dr. *C. Isenkrahe* in Crefeld. — Der Briefwechsel zwischen Gauss und Sophie Germain. Von Dr. *Siegmund Günther*, Gymnasialprofessor in Ansbach. — Recensionen: *Genocchi, A.*, Il Carteggio di Sofia Germain e Carlo Federico Gauss. Von Dr. *S. Günther* in Ansbach. — *Wretschko*, Dr. *Andreas*, Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Von *Cantor*. — *Girard, H.*, La philosophie scientifique. Von *Cantor*. — *Buys, Lucien*, La science de la quantité. Von *Cantor*. — Bibliographie vom 1. October bis 15. November 1880:

2. Heft.

Inhalt: Ueber die Variationen n^{ter} Ordnung. Von *G. Erdmann*, Gymnasiallehrer in Insterburg (Taf. II Fig. 1—3). — Notiz zu einem Satze von Chasles. Von *E. Lange*, Stud. math. in Dresden. — Neue Lösungen eines Rotationsproblems. Von *C. Frenzel*, Gymnasiallehrer in Lauenburg i. Pommern (Taf. II Fig. 9—11 c). — Eine Polynomentwickelung. Von *K. Weihrauch* in Dorpat. — Werth einiger doppelt-orthosymmetrischer Determinanten. Von *K. Weihrauch* in Dorpat. — Ein Satz vom ebenen Viereck (Taf. II Fig. 12). — Von *K. Weihrauch* in Dorpat. — Das Reciprocitätsgesetz. Von *J. Thomae*. — Eine Eigenschaft concentrischer Ellipsen und Hyperbeln (Taf. II Fig. 13 und 14). Von *Schlömilch*. — Das gleichzeitige Hyperboloid. Von Dr. *Ad. Schumann*. — Eigenschaften der Lemniscate. Von Dr. *Wilhelm Hess* in München. — Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt). Die Methode Tá jàn im Suán-king von Sun-tsè und ihre Verallgemeinerung durch Yih-hing im I Abschnitte des Tá jàn li schu. Von Prof. Dr. *Ludwig Matthiessen* in Rostock. — Miscelle. Von *Friedrich Hultsch* in Dresden. — Eine algebraische Lösung des irreducibeln Falles der cubischen Gleichungen. Von Dr. *Lehmann*, Gymnasiallehrer in Rudolstadt. — Recensionen *Reye*, Dr. *Theodor*, Die Geometrie der Lage. Von *Milinowski*. — *Schubert*, *H.*, Kalkül der abzählenden Geometrie. Von *R. Sturm*. — *Götting*, *R.* Einleitung in die Analysis. Von *Cantor*. — *Heringa*, Dr. *P. M.* Considérations sur la théorie des phénomènes capillaires. Von *E. Warburg* in Freiburg i. B. — *Eneström*, *Gustaf*, Trois lettres inédites de Jean Ier Bernoulli à Léonard Euler. Von Dr. *S. Günther* in Ansbach. — *Govi*, *Gilberto*, Intorno alla data di un discorso inedito pronunciato da Federico Cesi. Von Dr. *S. Günther* in Ansbach. — Bibliographie vom 16. November 1880 bis 31. Januar 1881.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und höheren Bürgerschulen. (Zugleich Organ der mathematisch-naturwissenschaftlich-didaktischen Sectionen der Philologen-, Naturforscher- und allgemeinen deutschen Lehrer-Versammlung). Herausgegeben von I. C. V. Hoffmann. Zwölfter Jahrgang. 1881. 6 Hefte. gr. 8. n. ℳ 10.80.

1. Heft.

Inhalt: I. Abhandlungen und grössere Aufsätze, kleine Mittheilungen (Sprechsaal und Aufgaben-Repertorium). Zur Verständigung (Vorwort zum XII. Jahrg.). Vom Herausgeber. — Kleine Bemerkungen zum Unterrichte in der Planimetrie. Von Dr. *Reidt*. — Die hauptsächlichsten Klippen bei der Rentenrechnung. Von *O. Fleischhauer*. — Notiz über die bedingt convergirenden Reihen. Von G.-R. Dr. *Schlömilch*. — Zum Aufgaben-Repertorium. A) Auflösungen (Lehrsätze über das Sehnenviereck) Nr. 93. 94. 95. 100. 101. 102. 108. 109. 111. — B) Neue Aufgaben Nr. 135—144. — C) Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitungen (mit Auflösungen). Educational Times Nr. 47. Journal de mathématiques élémentaires et spéciales. (Bestimmung geometr. Oerter.) Nr. 48—53. — Sprech- und Discussions-Saal. Die vierte Raumdimension. Mit Beziehung auf Emsmann's Aufsatz XI, 253 u. f. Von Dr. *Müller* (Neustrelitz). — II. Literarische Berichte. A) Recensionen. 1. *Kempt*, Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra. 2. *Schlegel*, Lehrbuch der elementaren Mathematik. 4. Th. Stereometrie und sphär. Trigonometrie. 3. *Segeer*, Die Fundamentaltheorien der neueren Geometrie und die Elemente der Lehre von den Kegelschnitten für den Schulgebrauch bearb. 4. *Götting*, Einleitung in die Analysis (1.—4. von *Günther*). — 5. *Hermes*, Sammlung von Aufgaben aus der Goniometrie u. ebenen Trigonometrie (*v. Lühmann*.) — 6. *Junghans*, Lehrbuch der ebenen Geometrie (*Lieber*). — 7. *Boymann*, Lehrbuch der Mathematik. 2. Th. Eb. Trigon. und Geom. d. R. 5. Aufl. von Werr. — 8. *Wittstein*, Lehrbuch der Elementar-Mathematik III, 2. Analyt. Geom. (7. 8. von *Scherling*). — 9. *Schüler*, Lehrbuch der analyt. Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte, dann der Strahlbüschel und Punktreihen (*Weinmeister*). — 10. *Pscheidl*, Einleitung in die praktische Physik. — 11. *Klinkerfues*, Die Principien der Spectralanalyse und ihre Anwendung auf Astronomie. — 11. *Rühlmann*, Handbuch der mechanischen Wärmetheorie. — 13. *Neison*, Der Mond. Deutsche Originalausgabe (10.—13. von *P.*). — 14. *Ferraris-Lippich*, Die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente. Elementare Darstellung der Gauss'schen Theorie und ihrer Anwendung. — 15. *Girard*, La Philosophie scientifique. Sciences, Art et Philosophie, Mathématiques etc. (14. 15. von *Günther*). — B) Specielle Programmschau. Rheinpreussen 1879. — Bayern 1879—1880 (Mathematik). — C) Bibliographie. — III. Pädagogische Zeitung. (Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. dergl.) Bericht über die Thätigkeit der mathem.-naturw. Section der 35. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Stettin im September 1880. Von Dr. *Lieber*-Stettin. — Journalschau. — Geschäftliches. — (Geschlossen am 31. December 1880.)

IV. Theologie.

Meier, Dr. phil. **Ernst Julius,** Superintendent und Consistorialrath, Stunden der Weihe für den Dienst an der Gemeinde. Ephoral-Ansprachen. gr. 8. geh. n. *M* 1.80.

Pastoralblätter für Homiletik, Katechetik und Seelsorge. In Verbindung mit mehreren Geistlichen herausgegeben von G. Leonhardi und C. Zimmermann, evangel.-lutherischen Pfarrern im Königreiche Sachsen. Neue Folge der praktisch-theologischen Zeitschrift: „Gesetz und Zeugniß". Elfter Band (der ganzen Reihe: Dreiundzwanzigster Band.) 1881. Jährlich 12 Hefte. Abonnements-Preis halbjährlich n. *M* 4.80, mit katechetischem Beiblatt n. *M* 5.60.

1. Heft.

Inhalt: Die Taufe Jesu in ihrer Bedeutung für ihn und für uns. Predigt am 1. Sonntage nach Epiphanias über Matth. 3, 13—17. von Dr. E. Luthardt, Domherr und Professor zu Leipzig. — Christus im Sturm. Predigt über Matth. 5, 23—27. von Bischof Dr. Martensen in Kopenhagen, übersetzt von P. Gleiß in Hamberge bei Lübeck. — Hosianna! Herr, hilf doch. Taufrede über Matth. 21, 9. von O. Pank, Superintendent und Pfarrer an der Dreifaltigkeitskirche in Berlin. — Grabrede über Psalm 92, 14—16. am Grabe der Frau Julie von Schubert gehalten von Stadtpfarrer Feez in München. — Das Bilderbuch des heiligen Jakobus. Von Gottfried Jäger, Diakonus in Grimma. — Ueber das Vorkommen der Ironie in der heilgen Schrift. Von P. Grimmert in Gröna bei Bernburg. — Predigtdispositionen über den Sächsischen Evangelien-Cyklus von Dr. Zapff, Oberconsistorialrath in Dresden. — Predigtentwürfe über die Evangelien (Neujahr und Epiphanienzeit) von E. Lehmann, Pfarrer in Eythra (K. Sachsen). — Recensionen.

2. u. 3. (Doppel-) Heft.

Inhalt: Empfanget die Gnade Gottes nicht vergeblich! Predigt über 2. Kor. 6, 1—10. am Sonntage Invocavit von Johannes Paulsen, Pastor in Kropp (Schleswig). — Unsere Kleinen unter dem treuen Hirtenauge Gottes. Predigt über Matth. 18, 10—14. (Evangelium am Sonntage Misericordias Domini) von Dr. theol. Meier, Consistorialrath und Superintendent in Dresden. — Wo kommst du her? Wo willst du hin? Confirmationsrede über 1. Mos. 16, 8. von von der Trenk, Consist.-Rath und Sup. in Greiz. — Der Ort, darauf du stehst, ist heilig Land! Rede über 2. Mos. 3, 5. zur Einweihung des neuen Friedhofes in Lunden am Stillfreitage von Piening, Diakonus in Lunden (Holstein). — Ich will selbst um mein Haus das Lager sein. Traurede über Sacharja 9, 8. von Em. Quandt, Pastor zu St. Elisabeth in Berlin. — Unser Freund schläft. Grabrede über Joh. 11, 11. von Ernst Genzken, Consistorialassessor und Pastor in Schwarzenbeck (Lauenburg). — Von dem heiligen Anstand der Diener Gottes. Von Generalsuperintendent Dr. Jaspis in Stettin. — Erklärung der Epistel am Sonntag Sexagesimä, 2. Petri 1, 16—21. von E. Engelhardt, Decan in Culmbach. — Predigtskizzen über die Passionsgeschichte unseres Herrn Jesu Christi von A. Weidauer, Superintendent zu Glauchau (K. Sachsen). — Predigtentwürfe über die Evangelien (Passionszeit) von E. Lehmann, Pfarrer in Eythra (K. Sachsen). — Recensionen.

Katechetische Vierteljahrsschrift für Geistliche und Lehrer. Ein Beiblatt der Pastoralblätter für Homiletik, Katechetik und Seelsorge. Herausgegeben von G. Leonhardi und C. Zimmermann. Siebzehnter Jahrgang. 1881. 4 Hefte n. *M* 3.60.

1. Heft.

Inhalt: Die heiligen zehn Gebote für den Zweck einer katechetischen Behandlung bearbeitet von Dr. phil. Emil Joseph Krömer, Diakonus an St. Petri in Leipzig. (Fortsetzung.) — Entwurf zu einer Unterredung über Matth. 3, 13—17. (Jesu Amtsweihe in der Taufe) von R. Reichardt, Oberlehrer in Siebenlehn. — Katechese über Psalm 95. von Decan Engelhardt in Kulmbach. — „Was soll ich thun, daß ich das ewige Leben erwerbe?" Katechetische Bemerkungen zu Marcus 10, 17—22. von Dr. Höhne, Lic. und Prof. in Meißen. — Examinatorische Unterredung über Dr. Martin Luthers Kindheits- und Jugendjahre. Von Leupold, Conrector an der Bürgerschule zu Lößnitz. — Recensionen.

V. Litteraturgeschichte.

Archiv für Litteraturgeschichte. Herausgegeben von Dr. Franz Schnorr von Carolsfeld, K. Bibliothekar in Dresden. X. Band.

2. Heft.

Inhalt: Dramen und Dramatiker des sechzehnten Jahrhunderts. Von *Hugo Holstein*. — Briefe von Peter Watzdorff. Aus dem K. Hauptstaatsarchiv zu Dresden. — Ein ungedruckter Brief von Schubart. Mitgetheilt von *Erich Schmidt*. — Das Heidenröslein eine Goethesche Dichtung oder ein Volkslied? Von *Hermann Dunger*. — Zu „Julius von Tarent". Von *Otto Brahm*. — Ein unbekannter Brief Schillers an seine Frau. Mitgetheilt von *Wilhelm Arndt*. — Zu Schillers Balladen. Von *Hermann Ullrich*. — Studien zu Schlegels Shakespeare-Uebersetzung. Nach den Handschriften A. W. Schlegels. Von *Rudolf Genée*. — „Franz Muncker, Lessings Verhältniss zu Klopstock." Angezeigt von *Robert Boxberger*. — „Goethe-Jahrbuch. Herausg. von Ludw. Geiger." Angezeigt von demselben. 1. „J. Minor und A. Sauer, Studien zu Goethe-Philologie." 2. „Jugendbriefe Goethes. Herausg. von W. Fielitz." Angezeigt von *Woldemar* Freiherrn *von Biedermann*. — „Albert Bielschowsky, Friederike Brion." Angezeigt von *Richard Maria Werner*. — Miscellen. 1. Zu S. 6 ff. Von *Karl Goedeke*. 2. Zu Erasmus Alberus. Von *Hugo Holstein*. 3. Zu Heinrich Chnustin. Von demselben. 4. Von *Anton Birlinger*. I. Der getreue Eckhard. II. Ibrahims Ausspruch über die deutsche Einigkeit. III. Die Thiersage und der Beichtstuhl. IV. Die Volksbücher in Reformationsstreitschriften. V. Der Name Schiller in Sulz. VI. Alte gereimte Buchanpreisung. VII. Alte Bitte um Nachsicht wegen der Druckfehler. VIII. Englische Tragoedie von Semiramis. IX. Aus Thomasius' Monatsgesprächen. X. Zu Lessings Nathan. Zu Goldoni. 5. Die älteste Ausgabe des „Hosenteufel" von Andreas Musculus. Von *Reinhold Bechstein*. 6. Zur Geschichte von Chr. Fr. Dan. Schubarts Kaplied. Von *Wilhelm Zipperer*.

VI. Medizin.

Jahrbuch für Kinderheilkunde und physische Erziehung. Herausgegeben von Widerhofer, L. M. Politzer, A. Steffen und B. Wagner. Neue Folge. XVI. Band. 4 Hefte n. ℳ 10.40.

1. u. 2. (Doppel-)Heft.

Inhalt: Ueber Temperaturverhältnisse bei der Meningitis tuberculosa der Kinder. Von *Jules Turin*, ehem. Assistenzarzt im Kinderspitel zu Basel. (Mit 2 Curventafeln.) — Die Diphtheritisepidemie 1876/77 in Malans. Ein Beitrag zur Geschichte der Diphtheritis in der Schweiz. Von Dr. *Michel* in Winterthur. — Vergleichende Beobachtungen über den Einfluss der Ernährung mit der Brust und der künstlichen Ernährung auf das Gewicht und den Wuchs (Länge) der Kinder. Aus dem Kinderhospitale des Prinzen Peter von Oldenburg zu St. Petersburg. Von Dr. med. *A. Russow*. — Fortlaufende Wägungen während der Dentition. Von *N. Woronichin*, ordinirendem Arzte am klinischen Elisabeth-Kinderhospitale in St. Petersburg. — Ueber die Preise einiger Kindernahrungsmittel. Von Prof. *Franz Hofmann*, Dir. d. hiegien. Instituts zu Leipzig. — Kleinere Mittheilungen. 1. Zur Frage über Ernährung der Säuglinge mit Mutter- resp. Ammenmilch. Vortrag, gehalten im März d. J. im allgem. Verein St. Petersburger Aerzte. Von Dr. *Reimer*, älterem Arzte am Nicolai-Kinderspitale. — 2. Zur pädiatrischen Casuistik. Von Sanitäts-Rath Dr. *Ernst Kormann* in Dresden. — 3. Referat der Verhandlungen in der Section für Pädiatrik auf der 53. Naturforscher-Versammlung zu Danzig. — Besprechungen. — Analecten.

VII. Vermischtes.

Mushacke's deutscher Schulkalender für 1881. 30. Jahrgang [Kalender und Notizbuch]. Oster-Ausgabe 1881. Vom 1. Januar 1881 bis Ende April 1882 reichend. 16. geh. n. ℳ 1.20; geb. n. ℳ 1.80.

Dritte Abteilung.

Vermischte Notizen.

Rezensionenverzeichnis.

Altarreden. Eine Sammlung von Casualreden, herausgeg. von Leonhardi. II. Sammlung.
Wissenschaftliche Beilage der Leipziger Zeitung. 1881. No. 17. — Sächsisches Kirchen- u. Schulblatt. 1881. No. 51.

Archimedis opera ed. Heiberg. Vol. I.
Literar. Centralblatt 1881. No. 3.

Aristotelis de arte poetica liber ed. Christ.
Philolog. Anzeiger. X. S. 439.

Bardey, praktisches Lehrbuch der deutschen Sprache. I. Teil. 2. Aufl.
Literarische Beilage zur Pädagogischen Zeitung 1881. No. 2. — Allgemeine deutsche Lehrerzeitung. 1881. No. 1. — Neue Blätter aus Süddeutschland. 1881. 1. Heft. — Neue deutsche Schulzeitung. 1881. No. 2. — Zeitschrift für weibliche Bildung. 1880. 8. Heft.

Bartels u. Wirth, deutsches Lesebuch f. Mädchenschulen. I.
Allg. Thüring. Schulzeitung. 1880. No. 49.

Beloch, der italische Bund unter Rom's Hegemonie.
Philologische Rundschau. No. 3. — Mittheilungen a. d. historischen Litteratur IX.

Bintz, ausgewählte Gedichte geschichtl. Inhalts.
Deutsche Blätter f. Erziehung. 1880. No. 51.

Blaſs, die attische Beredsamkeit. III. Band.
Deutsche Litteraturzeitung. 1881. No. 7.

Boetii commentarii in librum Aristotelis περὶ ἑρμηνείας ed. Meiser. Vol. II.
Deutsche Litteraturzeitung. 1880. Nr. 11. — Literar. Centralblatt. 1881. No. 2.

Brockmann, Lehrbuch d. element. Geometrie. I. Teil. Planimetrie. 2. verb. Aufl.
Centr.-Organ f. d. Interessen d. Realschulwesens. 1880. Heft 12.

Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I. Band.
Literar. Centralblatt. 1880. Nr. 50.

Cassius Felix de medicina ed. Rose.
Philolog. Anzeiger. XI. S. 41.

Ciceronis scripta quae manserunt omnia rec. Müller. Part. IV. Vol. I—III.
Jahresberichte des Berliner philolog. Vereins. VI. S. 341.

—— de legibus libri tres. Von du Mesnil.
Philolog. Anzeiger. X. S. 489.

Commodiani carmina rec. Ludwig. I.
Philolog. Anzeiger. X. S. 485.

Comicorum atticorum frag. ed. Th. Kock. Vol. I.
Deutsche Litteraturzeitung. 1880. No. 9. — Academy. 1880. No. 449.

Curtius, Grundzüge d. griechischen Etymologie. 5. Aufl.
Revue critique. 1880. No. 34.

Eddy, graphische Statik.
Deutsche Litteraturzeitung. 1880. No. 11. — Literar. Centralblatt. 1880. No. 46.

Euripides Tragödien von Wecklein. I. Medea. 2. Aufl.
Blätter f. d. bayr. Gymnasialwesen. 1880. 10. Heft.

—— Alcestis ed. Prinz.
Revue critique. 1880. No. 35.

Eudociae Augustae violarium ed. Flach.
Literar. Centralblatt. 1880. No. 50. — Philologische Rundschau. No. 3. — Philologischer Anzeiger. XI. S. 27.

Franck, Hülfsbuch f. d. Religionsunterricht.
Beweis des Glaubens. 1880. 12. Heft. — Erziehungsschule. 1880. No. 1. — Sonnt.-Beil. d. Kreuz-Zeitung. 1880. No. 49.

Gardthausen, griechische Paläographie.
Theolog. Literaturzeitung. 1880. No. 25.

Gelzer, Sextus Julius Africanus. I. Band.
Philologische Rundschau. No. 4.

Gerber et Greef, Lexicon Taciteum. Fasc. III.
Philologischer Anzeiger. X. S. 337.

Goethe's Götz von Berlichingen. Schulausg. v. Naumann.
Zeitschr. f. österreich. Gymnasien. 1880. 12. Heft.

Grammatici Latini ex rec. Keilii. Vol. VII. Fasc. 2.
Literar. Centralblatt. 1880. No. 47.

Hagen, gradus ad criticen.
Revue critique. 1880. No. 51.

Heiberg, philol. Studien zu griech. Mathem.
Philol. Rundschau. No. 1. — Revue critique. 1881. No. 3.

Herwig, physikalische Begriffe und absolute Maasse.
Literar. Centralblatt. 1881. No. 1.

Hesychii Milesii de viris illustribus liber ed. Flach.
Literar. Centralblatt. 1880. No. 50. — Philol. Rundschau. No. 3.

Heinichen, deutsch-latein. Schulwörterbuch. 2. Aufl.
Philol. Anz. X. S. 501.

Heyer, der Waldbau oder die Forstproductenzucht.
Centralblatt f. das gesamte Forstwesen. 1880. S. 520. — Tharandter Jahrbuch der Forstwissenschaften. 30. Band. 3. Heft.

Hieronymi de viris inlustribus liber ed. Herding.
Theologische Literaturzeitung. 1880. No. 26. — Philol. Anzeiger. X. S. 400.

Homer's Ilias von La Roche. 5. Theil. 2. Aufl.
Jahresbericht des Berliner philolog. Vereins. VII. S. 20.

Homers Ilias v. Ameis-Hentze. II. Bd. I. Heft.
Pädagog. Archiv. XXIII. 1.

—— —— Anhang. 5. Heft.
Jahresberichte des Berliner philologischen Vereins. VII. S. 22.

—— Odyssee v. Ameis-Hentze. I. Bd. I. Heft. 7. Aufl.

—— —— —— Anhang zu I. 3. Aufl.
Jahresberichte d. Berliner philolog. Vereins. VI. S. 23.

Huschke, Bruchstücke aus Schriften römischer Juristen.
Deutsche Litteraturzeitung. 1881. Nr. 8.

—— die neue Oskische Bleitafel.
Literar. Centralblatt. 1881. Nr. 5.

Hygini Gromatici liber de munitionibus castrorum ed. Gemoll.
Literar. Centralblatt. 1880. Nr. 50.

Incerti auctoris de Constantino Magno ejusque matre Helena libellus ed. Heydenreich.
Philologische Rundschau. Nr. 7.

Kekulé, das Leben Welckers.
Deutsches Literaturblatt. Nr. 20.

Keller, Epilegomena zu Horaz. III. Theil.
Literar. Centralblatt. 1880. Nr. 51.

Langen, Beiträge zur Kritik und Erklärung des Plautus.
Deutsche Litteraturzeitung. 1880. Nr. 6. — Literar. Centralblatt. 1881. Nr. 2. — N. Jahrbücher f. Philologie. 1881. 1. Heft.

Lehmann, die tachygraphischen Abkürzungen der griech. Handschriften.
Deutsche Litteraturzeitung. 1881. Nr. 8.

Lex Salica ed. A. Holder.
Deutsche Litteraturzeitung. Nr. 6. — Dahn, Bausteine. II. Reihe. S. 461.

Löwe, Prodromus corporis glossariorum latin.
Revue critique. 1880. No. 51.

Lycophronis Alexandra ed. Kinkel.
Deutsche Litteraturzeitung. 1881. Nr. 3.

Macaulay, history of England. Schulausgabe v. Schwalbach.
Zeitschrift für österreichische Gymnasien. 1880. 12. Heft.

Mayer, K., Leitfaden der deutschen Poetik.
Pädagogisches Archiv. XXII. Bd. 10. Heft. — Zeitschrift für österreich. Gymnasien. 1880. 12. Heft.

Mayer, E., über Küstenaufnahmen.
Rostocker Zeitung. 1880. No. 91.

Mezger, Pindars Siegeslieder erklärt.
Revue critique. 1881. Nr. 4. — Deutsche Litteraturzeitung. 1881. Nr. 7. — Literar. Centralblatt. 1880. Nr. 48. — Philologische Rundschau. Nr. 1.

Molina, Vocabulario de la lengua mexicana ed. Platzmann.
Literar. Centralblatt. 1880. Nr. 50. — Illustrirte Zeitung. Nr. 1956.

Möller u. Hesse, Naturgeschichtsbilder. I. Teil. 2. Aufl.
Preufs. Lehrerzeitung. 1880. Nr. 290. — Neue deutsche Schulzeitung. 1881. Nr. 3. — Literarische Beilage zur Pädagogischen Zeitung. 1881. Nr. 4. — Schulzeitung der Provinz Posen. 1880. Nr. 47. — Pädagogisches Literaturblatt. 1881. Nr. 1.

Montesquieu, considérations sur la grandeur des Romains etc. von Wendler. 2. Aufl.
Blätter f. d. bayr. Gymnasialwesen. 1880. 10. Heft.

Müller, L., Biographie des Horaz.
Deutsche Litteraturzeitung. 1880. Nr. 13.

Nägelsbach, hebräische Grammatik. 4. Aufl.
Zeitschrift für österreich. Gymnasien. 1881. 1. Heft.

Nicephori opuscula historica ed. de Boor.
Literar. Centralblatt. Nr. 3. — Deutsche Litteraturzeitung. 1881. Nr. 2.

Ovidii fastorum libri sex. Schulausgabe von Peter. 2. Aufl.
Zeitschrift f. d. österreich. Gymnasien. 1880. 10. Heft.

Παππαγεώργιος, κριτικὰ καὶ ἑρμηνευτικὰ etc.
Philologischer Anzeiger. XI. S. 18.

Peiper, über die Handschr. des Ausonius.
Deutsche Litteraturzeitung. 1880. Nr. 11.

Plautus' ausgewählte Komödien. Schulausgabe v. Brix. III. Menaechmi. 3. Aufl.
Blätter f. d. bayr. Gymnasialwesen. 1881. 1. Heft.

Poetae latini minores rec. Baehrens. Vol. II.
Literar. Centralblatt. 1880. Nr. 45. — Deutsche Litteraturzeitung. 1880. Nr. 12.

Propertii elegiarum libri IV ed. Baehrens.
Literar. Centralblatt. 1880. Nr. 52. — Philolog. Rundschau. No. 1.

Ribbeck, F. W., Ritschl. I. Band.
Revue critique. 1881. Nr. 4.

Richter, Altes und Neues zur Expedition Xenophons in das Gebiet der Drilen.
Philologische Rundschau. Nr. 7.

Röll, der naturwissenschaftliche Unterricht.
Deutsche Blätter für erziehenden Unterricht. 1881. Nr. 7.

Rosenberg, Aufgaben zum Uebersetzen ins Lateinische.
Blätter f. d. bayr. Gymnasialwesen. 1881. 1. Heft.

Saalschütz, der belastete Stab unter Einwirkung einer seitl. Kraft.
Wochenschrift d. Vereins deutscher Ingenieure. 1880. Nr. 49.

Salmon, analytische Geometrie des Raumes, v. Fiedler. II. Bd. 3. Aufl.
Deutsche Litteraturzeitung. 1881. Nr. 8.

Schlechtendal u. Wünsche, die Insecten. II. u. III. Abth.
Correspondenzblatt f. d. Gelehrten- und Realschulen Württembergs. 1880. 7.—10. Heft

Schleusner, zur Uhlandlektüre.
Zeitschr. f. österreich. Gymnasien. 1880. 11. Heft.

Schmidt, lateinische Stilistik.
Blätter f. d. bayr. Gymnasialwesen. 1881. 1. Heft. — Philologische Rundschau. No 7.

—— Synonymik der griechischen Sprache. III. Band.
Blätter f. d. bayr. Gymnasialwesen. 1881. 2. Heft.

—— Komödien vom Studentenleben.
Deutsche Litteraturzeitung. 1881. No. 4. — Beil. z. Allgem. Zeitung. 1880. No. 333.

Schottky, Abelsche Funktionen.
Deutsche Litteraturzeitung. 1881. No. 1.

Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung etc.
Deutsche Litteraturzeitung. 1881. No. 6.

Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie.
Literarisches Centralblatt. 1880. No. 51.

Schulz, Auswahl aus Walther von der Vogelweide. 2. Aufl.
Zeitschr. f. österreich. Gymnasien. 1880. 12. Heft.

Schütze, Leitfaden f. d. Unterricht in d. Erziehungskunde.
Rhein. Blätter für Erziehung u. Unterricht. 1880. I. Heft.

—— evangelische Schulkunde. 5. Aufl.
Zeitschrift für weibliche Bildung. 1881. 1. Heft.

Seckendorff, d. forstl. Verhältnisse Frankreichs.
Allg. Forst- u. Jagdzeitung. 1880. Nov.

Stark, Vorträge und Aufsätze aus dem Gebiete der Archäologie und Kunstgeschichte. Herausgegeben von Kinkel.
Deutsche Litteraturzeitung. 1881. No. 8.

Stier, hebräisches Uebungs- u. Lesebuch.
Blätter f. d. bayr. Gymnasialwesen. 1881. 1. Heft.

Syri, Publii, Mimi sententiae ed. G. Meyer.
Philolog. Rundschau. No. 6. — Philol. Anzeiger. XI. S. 31.

Tacitus, Agricola, Schulausgabe von Dräger. 3. Auflage.
Zeitschr. f. österreich. Gymnasien. 1881. 1. Heft.

Thiele, der Römerbrief in d. Gymnasialprima.
Zeitschrift f. prakt. Theologie. II. Jahrg. I. Heft.

Thomson, the Spring. Schulausgabe von Werner.
Herrig's Archiv. 64. Bd. 2. Heft.

Thouret, über den gallischen Brand.
Philolog. Rundschau. No. 7. — Literar. Centralblatt. 1881. No. 5.

Uppenkamp, Aufgaben z. Übersetzen in's Lateinische.
Philolog. Rundschau. No. 10.

Vergil's Aeneide. Schulausgabe von Kappes. 2. Heft. 2. Aufl.
Pädagog. Archiv. 1881. 2. Heft.

Wiener u. Leonhardi, am heiligen Herde.
Darmstädter Zeitung. 1880. Nr. 345. — Die Volkskirche. 1880. Nr. 11. — Kirchl. Sonntagsblatt. 1881. Nr. 1. — Die Post. 1881. Nr. 58. — Pückenhofer Blätter. 1880. Nr. 23. — Theologisches Literaturblatt. 1881. Nr. 2.

Wohlrab, Platon's Lehrer und Lehren.
Blätter f. literar. Unterhaltung. 1880. No. 50.

Zieliński, die letzten Jahre des zweiten punischen Krieges.
Deutsche Litteraturzeitung. No. 8.

Buchhändlerische Centralstelle für den Programmentausch der höheren Schulen Deutschlands.

Weitere Berichtigungen zu dem Verzeichnis der Programme 1881.
(Siehe Circular v. 20. Jan.)

1) Programme werden im Jahre 1881 nicht veröffentlicht von

No. 327. **Schalke,** höhere Bürgerschule. — No. 342. **Weilburg,** Gymnasium. — No. 599. **Braunschweig,** Realschule.

2) Die Abhandlung fällt aus bei

No. 254. **Sonderburg,** höhere Bürgerschule. — No. 268. **Lingen,** Gymnasium. — No. 363. **Aachen,** Gymnasium.

3) Nicht vorher angezeigte Abhandlungen liefern:

No. 64. **Friedeberg N./M.,** Gymnasium: Harnecker, Catull's carmen LXVIII.
No. 225. **Magdeburg,** Realschule I. O.: Silldorf, analytische Entwickelung von Sätzen, welche Oberflächen zweiter Ordnung betreffen und aus synthetischen Betrachtungen hervorgehen.
No. 352. **Frankfurt a. M.,** Realschule d. israel. Gemeinde: Lehrplan und Bemerkungen über denselben für Eltern der Schüler.
No. 614. **Greiz,** Gymnasium: Reissig, Pierre Corneille. Ein Beitrag zur Förderung des Studiums dieses Dichters.

4) Statt der angezeigten Abhandlungen liefern:

No. 3. **Königsberg,** Friedrichs-Collegium: Marold, über die gotischen Conjunctionen, welche οὖν und γάρ vertreten.
No. 10. **Rössel,** Gymnasium: Stamm, adnotationes grammaticae et criticae ad M. Tullii libros de divinatione.
No. 12. **Königsberg,** städt. Realschule: Schmidt, Quartos und Folias des Sommernachtstraumes.
No. 123. **Gnesen,** Gymnasium: Eichner, vierzig Übungsstücke zum Übersetzen ins Lateinische im Anschlufs an die Lektüre für Sekunda und Prima.
No 210. **Rofsleben,** Klosterschule: Knobloch, über das römische Lehrgedicht bis zu Ende der Republik.
No. 244. **Schleswig,** Gymnasium: Gidionsen, Vorlagen zum Übersetzen aus dem Deutschen ins Lateinische im Anschlufs an das erste Buch von Ciceros Tusculanen.
No. 286. **Duderstadt,** höhere Bürgerschule: Burchardi, über den Gebrauch des Pronomens οἷος bei Homer.
No. 356. **Wiesbaden,** Realschule II. O.: Unverzagt, über die Grundlagen der Rechnung mit Quaternionen.
No. 385. **Jülich,** Progymn.: Rau, de Aristophanis equitum versibus 505. 506 non reiciendis
No. 401. **Wesel,** Gymnasium: Czwalina, über das Verzeichnis der römischen Provinzen vom Jahr 297.
No. 589. **Bernburg,** Gymnasium: Knoke, über hic und nunc in der oratio obliqua.

Neu hinzugekommen ist

Königsberg, Löbenicht'sche höhere Bürgerschule, mit der Abhandlung: Preiss, über die Echtheit des Epheserbriefs.

Leipzig, den 15. März 1881.

B. G. Teubner.

Ausgegeben im März 1881.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung.*)

Von

F. G. Mehler in Elbing.

Mehrere Aufgaben der mathematischen Physik besitzen die Eigenthümlichkeit, dass, während ihre Lösung im Allgemeinen auf der Anwendung der Kugelfunctionen beruht, in gewissen Grenzfällen an die Stelle dieser die zuerst von Fourier und später besonders von Bessel untersuchten Functionen**) eintreten müssen, für welche Herr Heine den Namen Cylinderfunctionen vorgeschlagen hat. So wird das Problem der Elektricitätsvertheilung auf zwei völlig von einander getrennten Kugeln, in der Regel wenigstens, mit Hülfe der Kugelfunctionen gelöst. Die specielle Annahme, dass die Kugelflächen einander bis zur Berührung genähert werden, bewirkt, dass bei gleicher Methode in der Behandlung des Problems statt der Kugelfunctionen die Cylinderfunctionen verwendet werden müssen. Für die genaue Erkenntniss der Natur dieses Zusammenhanges ist es von Wichtigkeit, auch den dritten noch möglichen Fall in Betracht zu ziehen, nämlich denjenigen, wo die Kugelflächen sich durchdringen und der Körper, auf dem die Elektricität sich verbreitet, von zwei Kugelcalotten mit gemeinschaftlichem Rande begrenzt, im Allgemeinen also von linsenförmiger Gestalt ist. Hier spielen, wie ich in einem im 68. Bande von Borchardt's Journal abgedruckten Aufsatze gezeigt habe, weder die Kugel- noch die Cylinderfunctionen eine Rolle, sondern es tritt an ihre Stelle eine dritte Gattung von Functionen, welche daher zu jenen beiden die noth-

---

*) Aus dem zu Ostern 1870 ausgegebenen Jahresbericht des Gymnasiums zu Elbing.

**) Von neueren Arbeiten über dieselben erwähne ich: C. Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen, Leipzig 1867. — E. Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen, Leipzig 1868. — Heine, Die Fourier-Bessel'sche Function. Borchardt's Journal Bd. 69. — Hankel, Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. Mathematische Annalen, Bd. I, Heft 3.

wendige Ergänzung bildet. Der gemeinsame Ursprung dieser drei Arten von Functionen ist in analytischer Hinsicht wesentlich dadurch charakterisirt, dass alle drei derselben Differentialgleichung genügen, mit dem alleinigen Unterschiede, dass die in dieser vorkommende Constante, welche für die erste Art eine positive ganze Zahl ist, für die zweite unendlich gross wird und für die dritte einen imaginären Werth mit dem reellen Theil $-\frac{1}{2}$ annimmt. Es findet hier also eine analoge Beziehung statt, wie zwischen den drei Arten von Kegelschnitten, der Ellipse mit der endlichen reellen, der Parabel mit der unendlich grossen und der Hyperbel mit der imaginären Hauptaxe. Und diese Aehnlichkeit ist keine blos zufällige. Die Kugelfunction vermittelt die Lösung der Aufgaben über Elektricitäts- und Wärmevertheilung nicht nur für die Kugel, sondern, wie allgemein bekannt, auch für das verlängerte und abgeplattete Rotationsellipsoid; die Cylinderfunction leistet dieselben Dienste nicht nur für den Cylinder, sondern, was weniger bekannt zu sein scheint, auch für das Rotationsparaboloid; die dritte Function endlich findet ihre Anwendung bei dem Kegel und dem zweifachen Rotationshyperboloid. Da ihr Auftreten bei dem Kegel ein besonders einfaches ist, so wird man sie, falls ein besonderer Name erforderlich ist, Kegelfunction nennen können. Ich habe das einfache Rotationshyperboloid unerwähnt gelassen, weil die Untersuchung desselben noch nicht vollständig durchgeführt ist, wenngleich ich mich hinlänglich überzeugt habe, dass hier die Lösung aus denselben Functionen, nur in anderer Combination, zusammenzusetzen ist. Auf den folgenden Blättern werde ich mich fast ausschliesslich auf Darlegung der einfachsten Eigenschaften und Anwendungen dieser Function beschränken; der letzte Paragraph wird als Uebergang zu den verwickelteren Aufgaben angesehen werden können, die ich bei anderer Gelegenheit zu behandeln gedenke.

Es kann noch daran erinnert werden, dass es, ohne an der Sache etwas Wesentliches zu ändern, gestattet ist, die hier in Betracht kommenden Flächen durch Anwendung des Princips der reciproken Radienvectoren (vergl. § 2.) in andere umzuformen, welche den Vortheil gewähren, dass sie allseitig geschlossen sind. So kann z. B. das Rotationsparaboloid durch die Fläche ersetzt werden, welche durch Rotation der Cardioide um ihre Axe entsteht.

§ 1.

Die Vertheilung der Elektricität auf einem Kegel unter dem Einfluss äusserer Kräfte, die in der Axe desselben ihren Sitz haben.

Es seien r, ϑ, φ die Polarcoordinaten eines Punktes im Raume, mit den rechtwinkligen x, y, z durch die Gleichungen $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $z = r\sin\vartheta\sin\varphi$ verbunden, und die Intervalle, innerhalb welcher sich r, ϑ, φ zu bewegen haben, damit alle Punkte des Raumes erschöpft werden, seien der gewöhnlichen Annahme gemäss durch die Grenzen 0 und ∞, 0 und π, 0 und 2π festgestellt. Jeder Punkt erscheint dann als der Durchschnitt von drei sich rechtwinklig schneidenden Flächen, nämlich einer Kugelfläche vom Radius r, einer Kegelfläche, deren durch den Anfangspunkt begrenzte Seitenlinien mit der positiven Richtung der x-Axe den Winkel ϑ einschliessen, und einer durch die x-Axe einseitig begrenzten Ebene, die mit der positiven y-Axe den von dieser nach der positiven z-Axe hin wachsenden Winkel φ bildet. Es ist wohl zu beachten, dass einem constanten Werthe λ des Parameters ϑ keine vollständige, nach zwei entgegengesetzten Richtungen hin sich in's Unendliche erstreckende Kegelfläche entspricht, sondern nur die eine Hälfte einer solchen, das eine der beiden Fächer, in welche sie durch ihren Scheitelpunkt getheilt wird. Um nun die Vertheilung der Elektricität auf einer solchen in ihrem Scheitel begrenzten Kegelfläche unter dem Einfluss beliebiger elektrischer Nichtleiter zu bestimmen, genügt es die Dichtigkeit der Schicht zu kennen, welche sich durch Influenz eines einzelnen aber beliebig gelegenen elektrischen Massenpunktes bildet. Da aber die Behandlung der Aufgabe in dieser Allgemeinheit schon ein tieferes Eingehen auf die Eigenschaften der Kegelfunctionen erfordert, während eine möglichst einfache Einführung derselben zweckmässig erscheint, und da überdies das zweifache Rotationshyperboloid, für welches ich später die Aufgabe in voller Allgemeinheit zu lösen beabsichtige, den Kegel als Grenzfall enthält, so soll hier nur der specielle Fall in Betracht gezogen werden, wo *der erregende Punkt, in welchem man sich die Einheit der negativen Elektricität concentrirt denken möge, auf der Axe des Kegels liegt.* Auf den Charakter der elektrischen Vertheilung wird es zwar von wesentlichem Einflusse sein, ob der erregende Punkt E in dem von der Kegelfläche umschlossenen hohlen Raume liegt, oder auf demjenigen Theile der x-Axe, für welchen die Fläche convex erscheint, insofern nämlich die Dichtigkeit der Elektricität in unmittelbarer Nähe des Scheitels im ersten Falle unendlich klein, im zweiten unendlich gross werden wird. Aber gleichwohl ist eine Trennung beider Fälle in der analytischen Behandlung unnöthig. Denn setzen wir ein für alle Mal fest, dass E auf dem positiven Theile der x-Axe, in der Entfernung c vom Scheitel liege, und dass $\vartheta = \lambda$ die Gleichung der Fläche ist, auf welcher die Vertheilung der Elektricität bestimmt werden soll, so wird man es mit dem ersten oder zweiten der genannten Fälle zu thun haben, je nachdem λ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{1}{2}\pi$ und π enthalten ist. Das Potential v der gesuchten Belegung in Bezug auf irgend einen Punkt r, ϑ, φ ist wegen der besonderen Lage des Punktes E von φ unabhängig und genügt im ganzen Raume, mit Ausnahme der Fläche selbst, der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial v}{\partial\vartheta}\right) = 0,$$

und ausserdem den bekannten Nebenbedingungen. Für innere Punkte, d. h. für solche, welche in demjenigen der beiden durch die Kegelfläche geschiedenen Räume liegen, der den Punkt E nicht enthält, ist v identisch mit dem reciproken Werthe T ihrer Entfernung von dem festen Punkte E; die Bestimmung von v für äussere d. h. mit E in demselben Raume enthaltene Punkte wird sich leicht ergeben, sobald für T eine passende Darstellung gefunden ist. Nun gilt für die reciproke Entfernung eines beliebigen Punktes r, ϑ, φ von dem auf der positiven x-Axe in der Entfernung c vom Scheitel gelegenen Punkte E der Ausdruck

$$T = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2rc\cos\vartheta}},$$

oder auch:

$$T = \frac{1}{\sqrt{rc}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{c} + \frac{c}{r} - 2\cos\vartheta}}.$$

Der zweite Factor dieses Productes möge durch $\mathfrak{T}$ bezeichnet werden, und um ihm eine einfachere Gestalt zu geben, substituire man:

$$r = c \cdot e^{\varrho},$$

so wird:

$$T = \frac{1}{\sqrt{rc}}\,\mathfrak{T}, \quad \text{und} \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{\sqrt{2(\cos\varrho i - \cos\vartheta)}}.$$

Da T ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1) ist, so ergiebt eine leichte Rechnung, dass $\mathfrak{T}$ der folgenden Differentialgleichung Genüge leistet:

$$(2) \qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\varrho^2} - \tfrac{1}{4}\mathfrak{T} = 0.$$

Aus der Form derselben erhellt, dass hier eine Zerlegung von $\mathfrak{T}$ in eine Summe von Producten geboten ist, deren einer Factor eine trigonometrische Function von ϱ ist, während der andere von ϑ allein abhängt. Da ϱ nicht zwischen bestimmte endliche Grenzen eingeschlossen ist, sondern alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann, da ferner $\mathfrak{T}$ für unendlich grosse Werthe von ϱ unendlich klein wird, und für keinen Werth von ϱ unendlich gross werden kann, wenn ϑ, wie dies für innere Punkte ausnahmslos der Fall ist, einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so ist die Darstellung von $\mathfrak{T}$ durch ein Fourier'sches Doppelintegral statthaft, und man erhält, wenn man berücksichtigt, dass $\mathfrak{T}$ seinen Werth nicht ändert, wenn die Grösse ϱ ihr Zeichen wechselt:

$$\mathfrak{T} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty d\mu \cos(\mu\varrho)\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha i - \cos\vartheta}}.$$

Setzt man also

$$\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha i - \cos\vartheta}} = CK^\mu(-\cos\vartheta),$$

so wird:

$$\mathfrak{T} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty C\cos(\mu\varrho)\, K^\mu(-\cos\vartheta)\, d\mu.$$

Der Factor C möge so gewählt werden, dass $K^\mu(1) = 1$ wird; dann ergiebt sich:

$$C = \int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha i + 1}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\mu\alpha i}d\alpha}{e^{\frac{1}{2}\alpha} + e^{-\frac{1}{2}\alpha}},$$

oder wenn $e^\alpha = t$ gesetzt wird:

$$C = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{t^{\mu i + \frac{1}{2} - 1}dt}{1+t} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\frac{\pi}{\cos(\mu\pi i)}.$$

Demnach erhalten wir als Definition der Kegelfunction K^μ die Gleichung

$$(3)\qquad K^\mu(-\cos\vartheta) = \frac{2\cos(\mu\pi i)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i - \cos\vartheta)}}$$

und für $\mathfrak{T}$ den Ausdruck:

$$(4)\qquad \mathfrak{T} = \int_0^\infty \frac{\cos(\mu\varrho)}{\cos(\mu\pi i)}\, K^\mu(-\cos\vartheta)\, d\mu.$$

Indem man denselben in die partielle Differentialgleichung (2) einführt, erkennt man, dass $K^\mu(-\cos\vartheta)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(5)\qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dK}{d\vartheta}\right) - (\mu^2 + \tfrac{1}{4})\, K = 0$$

genügt. Da diese ungeändert bleibt, wenn ϑ in $\pi - \vartheta$ verwandelt wird, so ist $K^\mu(\cos\vartheta)$ ein zweites particuläres Integral derselben. Auch sind die Functionen $K^\mu(\cos\vartheta)$ und $K^\mu(-\cos\vartheta)$ wirklich zwei wesentlich verschiedene Lösungen; denn da für $\vartheta = 0$ die erste $= 1$, die zweite $= \infty$ wird, so kann ihr Quotient keine Constante sein.

Das allgemeine Integral von (5) ist also:

$$K = AK^\mu(\cos\vartheta) + BK^\mu(-\cos\vartheta),$$

wenn A und B von ϑ unabhängige, sonst willkürliche Grössen vorstellen. Bezeichnet jetzt V das Potential der gesuchten elektrischen Schicht in dem äusseren (den Punkt E enthaltenden) Raume, und setzt man

$$V = \frac{1}{\sqrt{rc}} \mathfrak{V},$$

und

$$\mathfrak{V} = \int_0^\infty [K_1 \cos(\mu\varrho) + K_2 \sin(\mu\varrho)]\, d\mu,$$

wie es erlaubt ist, weil $\mathfrak{V}$ als Function von ϱ betrachtet den für die Darstellbarkeit durch ein Fourier'sches Integral erforderlichen Bedingungen genügt, so können, weil $\mathfrak{V}$ dieselbe Differentialgleichung wie $\mathfrak{T}$ erfüllt, K_1 und K_2 nur die Form haben:

$$K_1 = A_1 K^\mu(\cos\vartheta) + B_1 K^\mu(-\cos\vartheta),$$
$$K_2 = A_2 K^\mu(\cos\vartheta) + B_2 K^\mu(-\cos\vartheta).$$

Da aber $K^\mu(-\cos\vartheta)$, wie schon erwähnt, für $\vartheta = 0$ d. h. auf dem dem äusseren Raume angehörigen Theile der x-Axe unendlich gross wird, während $\mathfrak{V}$ endlich bleiben muss, so müssen B_1 und $B_2 = 0$ sein, und da ferner auf der Kegelfläche ($\vartheta = \lambda$) $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{T}$ übereinstimmt, also eine gerade Function von ϱ ist, so muss K_2 wenigstens für $\vartheta = \lambda$ verschwinden, was indessen, wegen $B_2 = 0$, nur möglich ist, wenn auch A_2 verschwindet. Es wird also $K_2 = 0$ und $K_1 = A_1 K^\mu(\cos\vartheta)$, und endlich wird der Werth von A_1 durch die Bedingung bestimmt, dass $\mathfrak{V}$ für $\vartheta = \lambda$ mit der in (4) gegebenen Darstellung von $\mathfrak{T}$ übereinstimmen muss. Man erhält auf diese Weise:

$$(6) \qquad \mathfrak{V} = \int_0^\infty \frac{\cos(\mu\varrho)}{\cos(\mu\pi i)} \; \frac{K^\mu(-\cos\lambda)\cdot K^\mu(\cos\vartheta)}{K^\mu(\cos\lambda)}\, d\mu.$$

Die Dichtigkeit der elektrischen Schicht im Punkte (r, λ, φ) wird jetzt durch die Gleichung gefunden:

$$-4\pi k = \left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n}\right) \quad (\text{für } \vartheta = \lambda),$$

worin die Differentialquotienten in der Richtung der dem äusseren Raume zugekehrten Normale der Fläche zu nehmen sind. Da hiernach $dn = -r\,d\vartheta$ zu setzen ist, so hat man:

$$4\pi k = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial\vartheta} - \frac{\partial T}{\partial\vartheta}\right) = \frac{1}{r\sqrt{rc}}\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\vartheta}\right) \quad (\text{für } \vartheta = \lambda),$$

oder vermöge der für $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{T}$ gefundenen Ausdrücke:

$$4\pi k = \frac{1}{r\sqrt{rc}} \int_0^\infty \frac{\cos(\mu\varrho)}{\cos\mu\pi i} \cdot \frac{\Delta\, d\mu}{K^\mu(\cos\lambda)},$$

worin:

$$\Delta = K^{\mu}(-\cos\lambda)\,\frac{dK^{\mu}(\cos\lambda)}{d\lambda} - K^{\mu}(\cos\lambda)\,\frac{dK^{\mu}(-\cos\lambda)}{d\lambda}.$$

Der Werth von Δ lässt sich ermitteln vermöge einer bekannten Beziehung, die zwischen zwei verschiedenen particulären Lösungen derselben linearen Differentialgleichung besteht. Setzen wir nämlich für den Augenblick $K^{\mu}(\cos\vartheta) = p$ und $K^{\mu}(-\cos\vartheta) = q$, so erhalten wir durch die Verbindung der beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{dp}{d\vartheta}\right) - (\mu^2 + \tfrac{1}{4})\,p = 0$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{dq}{d\vartheta}\right) - (\mu^2 + \tfrac{1}{4})\,q = 0$$

die folgende dritte:

$$q\,d\left(\sin\vartheta\,\frac{dp}{d\vartheta}\right) - p\,d\left(\sin\vartheta\,\frac{dq}{d\vartheta}\right) = 0,$$

deren linke Seite ein vollständiges Differential ist, so dass man, wenn a eine Constante, erhält:

$$q\sin\vartheta\,\frac{dp}{d\vartheta} - p\sin\vartheta\,\frac{dq}{d\vartheta} = a.$$

Wenn man hierin einerseits $\vartheta = \lambda$ und andererseits $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ setzt und beachtet, dass im ersten Falle die linke Seite der Gleichung $= \Delta\sin\lambda$ wird, und dass im zweiten Falle $p = q$ und $\frac{dp}{d\vartheta} = -\frac{dq}{d\vartheta}$ ist, so findet man:

$$\Delta\sin\lambda = -2q\,\frac{dq}{d\vartheta}\ (\text{für } \vartheta = \tfrac{1}{2}\pi),$$

d. h. wenn für q sein in (3) enthaltener Werth genommen wird:

$$\Delta\sin\lambda = 2\left(\frac{\cos\mu\pi i}{\pi}\right)^2 \int_0^{\infty}\frac{\cos\mu\alpha\,d\alpha}{(\cos\alpha i)^{\frac{1}{2}}}\cdot\int_0^{\infty}\frac{\cos\mu\alpha\,d\alpha}{(\cos\alpha i)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die hierin vorkommenden Integrale lassen sich durch eine Behandlung, welche der oben (vor Gl. 3) zur Bestimmung von C angewandten ähnlich ist, auf Euler'sche Integrale erster Gattung zurückführen, und nehmen, wenn die letzteren durch Gammafunctionen ausgedrückt werden, die Form an:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\mu\alpha\,d\alpha}{(\cos\alpha i)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\mu i)\,\Gamma(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\mu i)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\mu\alpha\,d\alpha}{(\cos\alpha i)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}\mu i)\,\Gamma(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\mu i),$$

und das Product beider erhält zufolge einer bekannten Eigenschaft der Gammafunctionen den einfachen Werth

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi}{\sin(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mu i)\pi}\cdot\frac{\pi}{\sin(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\mu i)\pi}=\frac{\pi}{\cos\mu\pi i}.$$

Somit wird $\Delta\sin\lambda=\frac{2\cos\mu\pi i}{\pi}$ und für die Dichtigkeit k gilt die folgende Formel:

$$(7)\qquad k=\frac{1}{2\pi^2\sqrt{c}\sqrt{r^3}\cdot\sin\lambda}\int_0^\infty\frac{\cos(\mu\varrho)\,d\mu}{K^\mu(\cos\lambda)}.$$

Für in unmittelbarer Nähe des Scheitels gelegene Punkte des Kegelmantels bedarf diese Formel einer Umformung, weil sie dann (wegen $r=0$, $\varrho=-\infty$) den Werth von k unter der unbestimmten Form $\infty\cdot 0$ giebt. Diese Umformung wird erst im § 3. vorgenommen werden.

Es mag noch aus (7) die Eigenschaft geschlossen werden, dass für zwei verschiedene Punkte des Mantels, deren Entfernungen r und r_1 vom Scheitel durch die Gleichung $rr_1=c^2$ verbunden sind, zwischen den Dichtigkeiten k und k_1 die Relation

$$(8)\qquad \frac{k}{k_1}=\frac{\sqrt{r_1^3}}{\sqrt{r^3}}\left(=\frac{c^3}{r^3}=\frac{r_1^3}{c^3}\right)$$

stattfindet, wie sich unmittelbar daraus ergiebt, dass in diesem Falle $\varrho_1=-\varrho$ ist.

§ 2.

Die Vertheilung einer gegebenen Elektricitätsmenge auf dem durch Rotation eines Kreissegments um die begrenzende Sehne entstehenden Körper.

Durch die Untersuchungen der Herren Thomson, Liouville und Lipschitz ist der enge Zusammenhang bekannt, durch den die Probleme der Elektricitätsvertheilung für zwei inverse Flächen mit einander verbunden sind. Ich werde von den Resultaten dieser Untersuchungen Gebrauch machen, um mit Hülfe der soeben für den Halbkegel gelösten Aufgabe die Vertheilung zu bestimmen, welche eine gegebene Elektricitätsmenge ohne Einfluss äusserer Kräfte auf einem Körper erfährt, der durch Rotation eines Kreissegments um die begrenzende Sehne erzeugt wird. Sobald die Aufgabe in dieser beschränkten Form ihre Lösung gefunden hat, unterliegt es auch keiner Schwierigkeit, die Einwirkung elektrischer Massenpunkte auf einen Körper derselben Art zu bestimmen, sofern dieselben auf der Rotationsachse des Körpers liegen. Es mag indessen nicht unerwähnt bleiben, dass die *allgemeine* Lösung des Problems für den Kegel, welche im ersten

Paragraphen nur aus dem dort angegebenen Grunde unterblieben ist, auch zur allgemeinen Lösung derselben Aufgabe nicht blos für die durch Rotation des Kreissegments entstehende Fläche, sondern auch für die Dupin'sche Cyklide mit zwei reellen Doppelpunkten führt. Die Cyklide ohne zwei reelle Doppelpunkte kann auf die Ringfläche zurückgeführt werden, welche durch Rotation eines ganzen Kreises um eine ihn nicht schneidende Axe entsteht, und für welche die Elektricitäts- und Wärmevertheilung von Herrn C. Neumann in einer 1864 erschienenen besonderen Schrift bestimmt ist.

Der Satz*), welchen wir zur Lösung unserer speciellen Aufgabe brauchen, lässt sich folgendermassen aussprechen:

Es sei F eine beliebige Fläche, k die Dichtigkeit einer darauf vertheilten elektrischen Schicht im Punkte B und v das Potential derselben in Bezug auf irgend einen Punkt P. Aus einem festen Punkte E entwerfe man das „sphärische Spiegelbild" F' der Fläche F, indem man auf jedem von E nach F gezogenen Strahle EB (R_0) eine solche Strecke EB' (R_0') abschneidet, dass das Product $R_0 \cdot R_0'$ constant (etwa $= c^2$) ist. Wird nun auf F' eine elektrische Belegung angenommen, deren Dichtigkeit k' im Punkte B' mit der Dichtigkeit k in dem entsprechenden Punkte B der Fläche F durch die Gleichung

$$k' = \frac{R_0^3}{c^3} k \tag{9}$$

zusammenhängt, so findet zwischen dem Potentiale v' der Belegung von F' in Bezug auf den dem P entsprechenden Punkt P' und dem Potentiale v der Belegung von F in Bezug auf den Punkt P die folgende einfache Beziehung statt:

$$v' = Rv, \tag{10}$$

wo R die Entfernung der Punkte E und P bedeutet.

Ist insbesondere k so gewählt, dass an der Oberfläche von F (wo R durch R_0 bezeichnet wurde) v sich auf den reciproken Werth von R_0 reducirt, so nimmt v' an der Oberfläche von F' den constanten Werth 1 an, und folglich wird dann durch k' die Art der Vertheilung einer bestimmten Elektricitätsmenge auf der Fläche F'

*) Man vergleiche z. B. die Abhandlung des Herrn Lipschitz in Bd. 61, p. 1—21 von Borchardt's Journal. Bei dem Beweise des dort (p. 6 ff.) auf eine beliebige Anzahl von Flächen ausgedehnten Satzes ist der Fall ausgeschlossen, dass von diesen Flächen eine oder mehrere sich ins Unendliche erstrecken. Wenn der Satz trotzdem hier auf eine Kegelfläche angewandt werden soll, so liegt die Berechtigung dazu in dem Umstande, dass die Dichtigkeit ihrer Belegung für unendlich entfernte Punkte in hinreichend starkem Grade unendlich klein wird. Um völlig streng zu Werke zu gehen, könnte man das Endresultat nach der Methode Dirichlets verificiren, was ich jedoch der Kürze halber unterlassen werde.

festgestellt, wenn diese Fläche isolirt und dem Einflusse elektrischer Nichtleiter entzogen ist.

Wir setzen jetzt an Stelle von F den im vorigen Paragraphen betrachteten Halbkegel und wählen den dort durch E bezeichneten Punkt als das Centrum, von dem aus die Transformation durch reciproke Radienvectoren vorgenommen wird; den Abstand c des Punktes E vom Anfangspunkte der Coordinaten identificiren wir mit der in (9) enthaltenen Constanten c, so dass ein Doppelpunkt der transformirten Fläche F' mit dem Scheitel des Kegels zusammenfällt; wir finden dann die rechtwinkligen Coordinaten x', y', z' des dem Punkte P (x, y, z) entsprechenden Punktes P' aus den Gleichungen

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} x' - c &= c^2 \frac{x-c}{R^2}, \\ y' &= c^2 \frac{y}{R^2}, \\ z' &= c^2 \frac{z}{R^2}, \\ R^2 &= (x-c)^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}\right.$$

Werden für x, y, z die Werthe $r\cos\vartheta$, $r\sin\vartheta\cos\varphi$, $r\sin\vartheta\sin\varphi$ eingesetzt, so ergiebt sich:

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} x' - c &= \frac{c^2(r\cos\vartheta - c)}{r^2+c^2-2rc\cos\vartheta}, \quad \text{also} \\ x' &= \frac{cr(r - c\cos\vartheta)}{r^2+c^2-2rc\cos\vartheta}, \quad \text{und:} \\ y' &= \frac{c^2 r\sin\vartheta\cos\varphi}{r^2+c^2-2rc\cos\vartheta}, \\ z' &= \frac{c^2 r\sin\vartheta\sin\varphi}{r^2+c^2-2rc\cos\vartheta}. \end{aligned}\right.$$

Auf diese Weise sind x', y', z' durch die Polarcoordinaten des dem P' entsprechenden Punktes P ausgedrückt. Fragen wir nun, welche Bedeutung die Grössen r, ϑ, φ haben, wenn dieselben direct als Functionen von x', y', z' d. h. als die Parameter dreier Flächen, die sich im Punkte P' schneiden, aufgefasst werden. Man findet leicht, dass

$$\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{(x'-c)^2 + y'^2 + z'^2} = \frac{r^2}{c^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass bei constantem r das Verhältniss der Abstände des Punktes P' vom Anfangspunkte A und dem Punkte E ebenfalls constant ist. Die Gleichung $r =$ Const. stellt also ein System von Kugelflächen dar, welche ihre Mittelpunkte auf der Axe AE haben und die Strecke AE harmonisch theilen. Einem constanten φ entspricht nach wie vor eine durch die x-Axe begrenzte Ebene, und endlich geht aus der Gleichung

$$\frac{y'^2 + z'^2 + x'(x'-c)}{c\sqrt{y'^2+z'^2}} = \cot\vartheta$$

leicht hervor, dass ϑ den Winkel bedeutet, welchen die von P' nach A und E gezogenen Geraden einschliessen, dass also zu einem constanten ϑ eine Fläche gehört, die entsteht, wenn ein über AE als Sehne und mit ϑ als Peripheriewinkel beschriebener Kreisbogen um AE als Axe rotirt. Jede solche Fläche F' hat in ihren Doppelpunkten A und E einen Tangentenkegel von gleicher Oeffnung mit demjenigen Halbkegel F, dessen Abbild sie ist. Umschliesst F den Punkt E (d. h. ist $\vartheta < \frac{1}{2}\pi$), so hat die Fläche F' in A und E zwei trichterförmige Vertiefungen, und sie besitzt zwei Spitzen, wenn $\vartheta > \frac{1}{2}\pi$; für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ artet sie in eine Kugel aus. Die Aufgabe, deren Lösung vermöge der Formeln (9) und (10) und durch Einsetzung der für v und k im vorigen Paragraphen gefundenen Werthe sich sofort hinschreiben lässt, ist die folgende: Einem Körper, dessen Oberfläche der Ort aller der Punkte ist, für welche eine feste Gerade $AE = c$ unter gegebenem Winkel λ erscheint, ist eine gewisse Elektricitätsmenge M mitgetheilt, welche sich auf der Oberfläche verbreitet und dort (und folglich auch im Innern des Körpers) den constanten Potentialwerth 1 hervorbringt. Es soll das Potential v' für äussere Punkte und die Dichtigkeit k' der Elektricität an jeder Stelle der Oberfläche bestimmt werden.

Man erhält ohne Weiteres:

$$v' = R \cdot V = \frac{R \cdot \mathfrak{V}}{\sqrt{rc}}, \quad \text{und} \quad k' = \frac{R_0^3}{c^2}\,k,$$

worin für $\mathfrak{V}$ und k ihre Werthe aus (6) und (7) zu entnehmen und R und R_0 durch die Gleichungen

$$R^2 = r^2 + c^2 - 2rc\cos\vartheta = rc(2\cos\varrho i - 2\cos\vartheta),$$
$$R_0^2 = r^2 + c^2 - 2rc\cos\lambda = rc(2\cos\varrho i - 2\cos\lambda)$$

gegeben sind; es ist also:

$$(13)\quad v' = \sqrt{2\cos\varrho i - 2\cos\vartheta}\int_0^\infty \frac{\cos(\mu\varrho)}{\cos(\mu\pi i)}\cdot\frac{K^\mu(-\cos\lambda)\,K^\mu(\cos\vartheta)}{K^\mu(\cos\lambda)}\,d\mu,$$

$$(14)\quad k' = \frac{(2\cos\varrho i - 2\cos\lambda)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 c\sin\lambda}\int_0^\infty \frac{\cos(\mu\varrho)\,d\mu}{K^\mu(\cos\lambda)}.$$

Die Elektricitätsmenge M kann bestimmt werden, indem man den Grenzwerth sucht, gegen welchen das Product $v'\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ für unendlich entfernte Punkte convergirt. Beachtet man, dass für solche Punkte $\vartheta = 0$ und $r = c$, also $\varrho = 0$ ist, so findet man:

$$(15)\qquad M = c\int\limits_0^\infty \frac{K^\mu(-\cos\lambda)}{K^\mu(\cos\lambda)}\,\frac{d\mu}{\cos\mu\pi i}.$$

Ist z. B. $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ d. h. geht der Körper in eine Kugel vom Durchmesser c über, so wird

$$M = c\int\limits_0^\infty \frac{d\mu}{\cos\mu\pi i} = \frac{c}{2}.$$

Die Dichtigkeit muss für alle Punkte der Kugeloberfläche dieselbe d. h. der Ausdruck

$$D = \frac{(2\cos\varrho i)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 c}\int\limits_0^\infty \frac{\cos(\mu\varrho)\,d\mu}{K^\mu(0)}$$

muss von ϱ unabhängig $\left(\text{und zwar} = \frac{1}{2\pi c}\right)$ sein. Es ist nicht ohne Interesse, dies Resultat durch eine directe Ermittelung des Integrales zu verificiren. Aus der Gleichung

$$K^\mu(0) = \frac{\sqrt{2\cos\mu\pi i}}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\,d\alpha}{(\cos\alpha i)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mu i)\,\Gamma(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\mu i)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu i)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)}$$

erhält man, weil

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\,\frac{1}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}$$

ist:

$$\frac{1}{K^\mu(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\mu i)\,\Gamma(\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}\mu i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Pi(-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\mu i)\Pi(-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\mu i).$$

Nun ist nach Gauss (Werke, Bd. III, p. 145)

$$\Pi(z) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k\cdot k^z}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+k)}\ (\text{für } k=\infty),$$

folglich:

$$\frac{1}{K^\mu(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots k)^2 k^{-\frac{1}{2}}2^{2k}}{[\mu^2+(\frac{3}{2})^2][\mu^2+(\frac{7}{2})^2]\cdots[\mu^2+(2k-\frac{1}{2})^2]}\ (k=\infty),$$

woraus ersichtlich, dass man setzen darf:

$$\frac{1}{K^\mu(0)} = \frac{A_1}{\mu^2+(\frac{3}{2})^2} + \frac{A_2}{\mu^2+(\frac{7}{2})^2} + \cdots + \frac{A_m}{\mu^2+(2m-\frac{1}{2})^2} + \cdots$$

Für den Coefficienten A_m findet sich:

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}[(2m-\tfrac{1}{2})^2+\mu^2]\Pi(-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\mu i)\Pi(-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\mu i)(\text{für } \mu i = 2m-\tfrac{1}{2})$$

$$A_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(4m-1)\Pi(m-\tfrac{1}{2})\cdot(m-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\mu i)\Pi(-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\mu i)\,(\text{für } \tfrac{1}{2}\mu i = m-\tfrac{1}{4})$$

$$A_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(4m-1)(-1)^{m-1}\frac{\Pi(m-\frac{1}{2})}{\Pi(m-1)}.$$

Bemerkt man noch, dass nach einer Formel von Laplace

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu\varrho)\, d\mu}{\mu^2 + (2m - \frac{1}{2})^2} = \frac{\pi}{4m - 1}\, e^{-(2m - \frac{1}{2})\varrho},$$

sofern ϱ positiv vorausgesetzt wird, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu\varrho)\, d\mu}{K^\mu(0)} = \sum_{m=1}^{m=\infty} 2\sqrt{\pi}\,(-1)^{m-1}\, \frac{\Pi(m - \frac{1}{2})}{\Pi(m - 1)}\, e^{-(2m - \frac{1}{2})\varrho}$$

$$= \pi e^{-\frac{3}{2}\varrho} \left[1 - \frac{3}{2} e^{-2\varrho} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^{-4\varrho} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^{-6\varrho} + \cdots\right],$$

d. h. zufolge des binomischen Lehrsatzes

$$= \pi e^{-\frac{3}{2}\varrho}\,(1 + e^{-2\varrho})^{-\frac{3}{2}} = \pi(2 \cos \varrho i)^{-\frac{3}{2}}.$$

Demnach wird

$$D = \frac{(2 \cos \varrho i)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 c} \cdot \pi\, (2 \cos \varrho i)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\pi c},$$

was bewiesen werden sollte.

§ 3.

Ueber den Grad des Unendlich- resp. Nullwerdens der Dichtigkeit in den conischen Punkten der Fläche.

Es kommt hier wesentlich darauf an zu ermitteln, wie stark der Werth des bestimmten Integrales

$$H = \int_0^\infty \frac{\cos(\mu\varrho)\, d\mu}{K^\mu(\cos\lambda)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mu\varrho i}\, d\mu}{K^\mu(\cos\lambda)}$$

für ein unendlich grosses ϱ gegen Null convergirt. Liesse sich ohne Weiteres annehmen, dass der reciproke Werth von $K^\mu(\cos\lambda)$ sich allgemein in ähnlicher Weise, wie dies in dem soeben betrachteten speciellen Falle $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ möglich war, in eine Summe von Partialbrüchen

$$\frac{B}{\mu^2 + \varepsilon^2} + \frac{B_1}{\mu^2 + \varepsilon_1^2} + \frac{B_2}{\mu^2 + \varepsilon_2^2} + \cdots$$

zerlegen lasse, worin die ε und B von μ unabhängige reelle Werthe hätten, so würde sich, wenn man $\varepsilon < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \cdots$ und sämmtliche ε positiv wählt, für H sofort der Ausdruck ergeben:

$$H = \frac{\pi}{2}\left(\frac{B}{\varepsilon} e^{-\varepsilon\varrho} + \frac{B_1}{\varepsilon_1} e^{-\varepsilon_1\varrho} + \frac{B_2}{\varepsilon_2} e^{-\varepsilon_2\varrho} + \cdots\right),$$

dessen erstes Glied für $\varrho = \infty$ gegen alle folgenden überwiegt und daher als der gesuchte Grenzwerth betrachtet werden könnte. Da jedoch die Begründung der gemachten Annahme jedenfalls ein genaues Eingehen auf die Eigenschaften der Wurzeln der transcendenten Gleichung $K^\mu(\cos\lambda) = 0$ erfordern würde und sich andererseits wenigstens als wahrscheinliches Ergebniss herausstellt, dass beim Uebergang der Grenze nur die kleinste Wurzel von Einfluss bleibt, so scheint es zweckmässig ein solches Verfahren einzuschlagen, bei dem von vorn herein nur diese kleinste Wurzel in Betracht gezogen wird. Im folgenden Paragraphen wird gezeigt werden, dass die Function $K^\mu(\cos\lambda)$, welche bisher nur für reelle Werthe von μ definirt zu werden brauchte, zunächst für solche Werthe durch die unendliche Reihe

$$1 + \frac{4\mu^2+1^2}{2\cdot 2}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{(4\mu^2+1^2)(4\mu^2+3^2)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 + \cdots$$

ersetzt werden kann, dass diese Reihe oder ein aus ihr leicht abzuleitendes bestimmtes Integral dann auch als Definition von $K^\mu(\cos\lambda)$ für einen beliebigen complexen Werth $\mu = \xi + \eta i$ dient, dass $K^\mu(\cos\lambda) = 0$ wird für zwei rein imaginäre Werthe $\mu = \pm\varepsilon i$, wo ε zwischen den Grenzen $\frac{\pi}{2\lambda}$ und $\frac{\pi}{\lambda}$ enthalten ist, und dass endlich, wenn man

$$K^\mu(\cos\lambda) = (\mu^2 + \varepsilon^2) f(\mu)$$

setzt, die Function $f(\mu) = f(\xi + \eta i)$ sicher eindeutig, stetig und von Null verschieden (ihr reciproker Werth also nirgends unendlich) ist, so lange η innerhalb des Intervalles von $-\frac{\pi}{\lambda}$ bis $\frac{\pi}{\lambda}$ bleibt. Wir wollen nun zu dem Integral

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\mu\varrho i}\,d\mu}{(\mu^2+\varepsilon^2)f(\mu)} \quad \text{ein anderes:} \quad H' = \frac{1}{2}\int_{\infty+\frac{\pi i}{\lambda}}^{-\infty+\frac{\pi i}{\lambda}}\frac{e^{\mu\varrho i}\,d\mu}{(\mu^2+\varepsilon^2)f(\mu)}$$

hinzufügen, welches, wie durch die beigesetzten Grenzen angedeutet, auf der in der Entfernung $\eta = \frac{\pi}{\lambda}$ zur reellen ξ-Axe gezogenen Parallelen vom positiv Unendlichen nach dem negativ Unendlichen hin zu nehmen ist. Die Summe der beiden über die unendlich langen Parallelen in entgegengesetzter Richtung genommenen Integrale kann zu einem einzigen Integrale vereinigt und der Integrationsweg darf als eine allseitig geschlossene Linie betrachtet werden. Der durch dieselbe umgrenzte Raum enthält einen und auch nur einen Unstetigkeitspunkt, nämlich den Punkt $0 + \varepsilon i$. Durch Anwendung des bekannten Theorems von Cauchy erhält man also:

$$H + H' = \frac{1}{2}\int^{\circ}\frac{e^{\mu\varrho i}\,d\mu}{(\mu-\varepsilon i)(\mu+\varepsilon i)f(\mu)} = \frac{\pi e^{-\varepsilon\varrho}}{2\varepsilon f(\varepsilon i)},$$

und wenn man das Integral H' auf die rechte Seite der Gleichung schafft, und in ihm, wie es geschehen muss, um es auf ein solches mit reellen Grenzen zu reduciren, μ in $\mu + \frac{\pi i}{\lambda}$ verwandelt, so ergiebt sich:

$$H = \frac{\pi e^{-\varepsilon\varrho}}{2\varepsilon f(\varepsilon i)} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon f(\varepsilon i)}{\pi} e^{-\left(\frac{\pi}{\lambda} - \varepsilon\right)\varrho} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mu\varrho i} d\mu}{\left[\left(\mu + \frac{\pi i}{\lambda}\right)^2 + \varepsilon^2\right] f\left(\mu + \frac{\pi i}{\lambda}\right)} \right\}.$$

Diese Gleichung gilt für jedes reelle ϱ, auch für ein negatives, liefert aber für ein solches kein zum Ziele führendes Resultat. Da aber aus der ursprünglichen Form von H hervorgeht, dass es für gleich grosse positive und negative ϱ denselben Werth hat, so genügt es sich auf positive Werthe von ϱ zu beschränken. Das in der Klammer befindliche Integral hat jedenfalls keinen unendlich grossen, für $\varrho = \infty$, was zu beweisen jedoch unnöthig, sogar einen unendlich kleinen Werth, und da der Factor vor dem Integralzeichen, weil $\frac{\pi}{\lambda} - \varepsilon$ positiv, für $\varrho = +\infty$ verschwindend klein wird, so ergiebt sich:

$$H = \frac{\pi e^{-\varepsilon\varrho}}{2\varepsilon f(\varepsilon i)} (1 + \delta) \text{ (wo } \delta = 0 \text{ für } \varrho = +\infty).$$

Der Werth der Constanten $2\varepsilon f(\varepsilon i)$ ist leicht anzugeben; unter Anwendung der Integralform (4) des folgenden Paragraphen erhält man ihn in der Form:

$$2\varepsilon f(\varepsilon i) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\mu} [K^\mu (\cos\lambda)]_{(\mu = \varepsilon i)} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\lambda \frac{\beta \sin(\beta\varepsilon)\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\lambda)}}.$$

Bezeichnet man diesen (wegen $\varepsilon\lambda < \pi$ offenbar positiven) Werth durch A und führt den für H gefundenen Ausdruck in die Gl. (14) des § 2. an Stelle des Integrales ein, so wird die Dichtigkeit k' für sehr grosse Werthe von ϱ d. h. in der Nähe des einen conischen Punktes der Fläche durch die folgende Näherungsformel dargestellt:

$$k' = \frac{1}{2\pi c \sin\lambda A} \cdot e^{-\varrho\left(\varepsilon - \frac{3}{2}\right)}.$$

Bemerkt man noch, dass $ce^{-\varrho}$ als das Mass der Entfernung des conischen Punktes von einem benachbarten Punkte der Fläche gelten kann, so hat man den Satz:

Für solche Punkte der Fläche, welche in sehr kleiner Entfernung von einem der beiden singulären Punkte derselben liegen, ist die Dichtigkeit der Elektricität proportional der $(\varepsilon - \frac{3}{2})^{ten}$ *Potenz dieser Entfernung, wenn* ε *die kleinste positive Wurzel der transcendenten Gleichung*

$$1+\frac{(\frac{1}{2})^2-\varepsilon^2}{1\cdot 1}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2+\frac{[(\frac{1}{2})^2-\varepsilon^2]\,[(\frac{3}{2})^2-\varepsilon^2]}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 2}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^4$$
$$+\frac{[(\frac{1}{2})^2-\varepsilon^2]\,[(\frac{3}{2})^2-\varepsilon^2]\,[(\frac{5}{2})^2-\varepsilon^2]}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^6+\cdots=0.$$

*bedeutet**).

Dass $\varepsilon-\frac{3}{2}=0$ wird für $\lambda=\frac{1}{2}\pi$ d. h. für den Fall der Kugel, ist aus der vorstehenden Gleichung ersichtlich, ebenso auch, dass ε nicht unter den Werth $\frac{1}{2}$ heruntersinken kann. Weil aber in der Gleichung

$$\frac{(\frac{3}{2})^2-\varepsilon^2}{2\cdot 2}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2+\frac{[(\frac{3}{2})^2-\varepsilon^2]\,[(\frac{5}{2})^2-\varepsilon^2]}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^4+\cdots=\frac{1}{[\varepsilon^2-(\frac{1}{2})^2]\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}-1$$

die Reihe auf der linken Seite einen sehr grossen Werth annimmt, sobald λ sich sehr wenig von π unterscheidet, so muss in diesem Falle der Nenner des Bruches auf der rechten Seite einen sehr kleinen, d. h. ε einen sehr wenig von $\frac{1}{2}$ verschiedenen Werth besitzen, und folglich ist dann $\varepsilon-\frac{3}{2}$ nur sehr wenig grösser als -1. Für einen durch Rotation eines sehr flachen Kreissegments erzeugten, also mit zwei sehr scharfen Spitzen versehenen Körper ist also die Dichtigkeit der Elektricität in einem einer Spitze sehr nahe gelegenen Punkte fast eben so stark unendlich wie die reciproke Entfernung des Punktes von der Spitze.

Uebrigens wird man für ein hinreichend nahe an π gelegenes λ nach (7) in § 4. für $K^\mu(\cos\lambda)$ den angenäherten Werth $-\frac{2}{\pi}\cos\mu\pi i\,\log(\pi-\lambda)$ setzen dürfen und dann das Integral in (14) (§ 2.) für jedes beliebige ϱ ausführen können; man findet dann das einfache Resultat, dass die Dichtigkeit für verschiedene Punkte der Oberfläche als *umgekehrt proportional dem Producte ihrer Entfernungen von den beiden Spitzen* angesehen werden darf.

Es ist noch der entgegengesetzte Fall zu erwähnen, in welchem λ einen nahe an Null gelegenen Werth hat, der Körper also zwei conische Vertiefungen mit geringer Oeffnung (2λ) besitzt. Da ε jederzeit zwischen $\frac{\pi}{\lambda}$ und $\frac{\pi}{2\lambda}$ enthalten ist, so hat hier die Differenz $\varepsilon-\frac{3}{2}$ einen sehr grossen Werth, und die Dichtigkeit convergirt nach dem Innern dieser Vertiefungen zu sehr stark gegen Null. Die Dimensionen des Körpers werden bei immer kleiner werdendem λ und festgehaltenem c immer grösser und grösser. Lässt man aber λ und c gleichzeitig so abnehmen, dass der Quotient $c:\sin\lambda$ einen endlichen Werth d behält, so hat man es schliesslich mit einem Körper zu thun, der durch Rotation eines vollständigen Kreises um eine ihn tangirende Gerade entsteht. Dabei tritt jedoch der Umstand ein, dass durch den

*) Dasselbe Resultat gilt auch für die Vertheilung der Elektricität auf dem Kegel in der Nähe seines Scheitelpunktes. (§ 1.)

Uebergang zur Grenze die Kegelfunctionen in Cylinderfunctionen umgewandelt werden, und da ein specielleres Eingehen auf diese zu weit von unserem Ziele abführen würde, so mag diese kurze Andeutung genügen.

§ 4.

Einige Eigenschaften der Function K^μ. Ihr Zusammenhang mit den Kugel- und Cylinderfunctionen.

A. Die Variable ϑ ist reell und zwischen 0 und π enthalten.

Unter der Voraussetzung eines reellen ϑ kann man für die Function

$$K^\mu(\cos\vartheta) = \frac{2\cos\mu\pi i}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i + \cos\vartheta)}},$$

indem man den reciproken Werth der Wurzelgrösse nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, eine nach Potenzen von $\cos\vartheta$ fortschreitende Reihe ableiten, in der die als Coefficienten der einzelnen Glieder auftretenden Integrale sämmtlich leicht auf die beiden ersten zurückgeführt werden. Das Resultat dieser Rechnung, deren Einzelnheiten ich übergehe, ist in der folgenden Formel enthalten

$$(1)\quad K^\mu(\cos\vartheta) = \frac{\sqrt{\pi}\, L}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\mu i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\mu i}{2}\right)} - \frac{2\sqrt{\pi}\, M}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu i}{2}\right)},$$

worin:

$$L = 1 + \frac{(\frac{1}{2})^2+\mu^2}{1\cdot 2}\cos\vartheta^2 + \frac{(\frac{1}{2})^2+\mu^2}{1\cdot 2}\,\frac{(\frac{5}{2})^2+\mu^2}{3\cdot 4}\cos\vartheta^4 + \cdots,$$

$$M = \cos\vartheta + \frac{(\frac{3}{2})^2+\mu^2}{2\cdot 3}\cos\vartheta^3 + \frac{(\frac{3}{2})^2+\mu^2}{2\cdot 3}\,\frac{(\frac{7}{2})^2+\mu^2}{4\cdot 5}\cos\vartheta^5 + \cdots,$$

oder unter Anwendung der Bezeichnung der hypergeometrischen Reihe:

$$L = F(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\mu i,\ \tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\mu i,\ \tfrac{1}{2},\ \cos\vartheta^2),$$
$$M = \cos\vartheta\, F(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\mu i,\ \tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}\mu i,\ \tfrac{3}{2},\ \cos\vartheta^2).$$

In dem Integrale, durch welches $K^\mu(\cos\vartheta)$ dargestellt ist, lässt sich, weil $\cos\alpha i + \cos\vartheta = 2\left(\cos\frac{\alpha i}{2}^2 - \sin\frac{\vartheta}{2}^2\right)$ ist, die Wurzelgrösse auch in eine nach Potenzen von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ fortschreitende convergente Reihe entwickeln, und man erhält dadurch für $K^\mu(\cos\vartheta)$ die folgende sich durch grössere Einfachheit auszeichnende Entwickelung:

$$(2)\quad K^\mu(\cos\vartheta) = 1 + \frac{4\mu^2+1^2}{2\cdot 2}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 + \frac{(4\mu^2+1^2)}{2\cdot 2}\,\frac{(4\mu^2+3^2)}{4\cdot 4}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^4 + \cdots$$

oder:

$$K^\mu(\cos\vartheta) = F\left[\tfrac{1}{2}+\mu i,\ \tfrac{1}{2}-\mu i,\ 1,\ \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2\right].$$

Es kann beiläufig angeführt werden, dass die Beziehung zwischen drei hypergeometrischen Reihen, welche durch Vergleichung der beiden gewonnenen Reihenausdrücke entsteht, ein specieller Fall der allgemeineren Relation

$$F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) = A F(\alpha,\beta,\tfrac{1}{2},x) + B\sqrt{x}\, F(\alpha+\tfrac{1}{2},\beta+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},x)$$

ist, welche sich neben mehreren ähnlichen in Kummers Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (Crelle's Journal, Bd. 15, S. 82) vorfindet, und welche auch aus dem Nachlasse von Gauss in dessen Werken, Bd. III, p. 227 mitgetheilt ist. Ebendaselbst findet sich die folgende Beziehung:

$$F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, 1-x),$$

woraus sich für $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mu i$, $\beta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mu i$, $x = \cos\vartheta^2$ eine dritte, ebenfalls bemerkenswerthe Reihe für $K^\mu(\cos\vartheta)$ ergiebt, nämlich:

$$(3) \quad K^\mu(\cos\vartheta) = F\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{\mu i}{2}, \tfrac{1}{4}-\tfrac{\mu i}{2}, 1, \sin\vartheta^2\right)$$

$$= 1 + \frac{(\frac{1}{2})^2+\mu^2}{2\cdot 2}\sin\vartheta^2 + \frac{[(\frac{1}{2})^2+\mu^2][(\frac{3}{2})^2+\mu^2]}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}\sin\vartheta^4 + \cdots,$$

welche jedoch ihrer Ableitung gemäss nur für zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ gelegene Werthe von ϑ angewandt werden darf und für $\frac{1}{2}\pi < \vartheta < \pi$ zwar noch convergirt, aber die Function $K^\mu(-\cos\vartheta)$ zur Summe hat.

Während das Integral, von dem wir ausgingen, für imaginäre Werthe von μ im Allgemeinen seinen Sinn verliert, können die Reihen für beliebige complexe Werthe von μ angewandt werden. Setzt man insbesondere $\mu i = n + \frac{1}{2}$, so erhält man z. B. durch Anwendung von (2) und (3) die Gleichungen:

$$K^{-i(n+\frac{1}{2})}(\cos\vartheta) = 1 - \frac{(n+1)n}{1\cdot 1}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 2}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^4 - \cdots,$$

$$K^{-i(n+\frac{1}{2})}(\cos\vartheta) = 1 - \frac{(n+1)\cdot n}{2\cdot 2}\sin\vartheta^2 + \frac{(n+3)(n+1)\cdot n(n-2)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}\sin\vartheta^4 - \cdots,$$

deren rechte Seiten, wenn unter n eine positive ganze Zahl verstanden wird, bekannte Ausdrücke für die Kugelfunction $P^n(\cos\vartheta)$ sind, so dass also

$$P^n(\cos\vartheta) = K^{-i(n+\frac{1}{2})}(\cos\vartheta).$$

Auch aus (1) ergiebt sich leicht dasselbe Resultat, wenn man beachtet, dass für ein gerades n der Nenner von M, für ein ungerades der von

L unendlich gross wird. (Man vergl. auch „Heine, Handbuch der Kugelfunctionen S. 72“.)

Wird μ unendlich gross, ϑ unendlich klein genommen, jedoch so, dass $\mu\vartheta$ einen endlichen Werth x behält, so führen (2) und (3) auf die Reihe

$$1+\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^4}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}+\cdots$$

und zeigen, dass die Cylinderfunction $J\,(xi)$ als Grenzfall der Kegelfunction aufgefasst werden kann.

Es ist von Wichtigkeit für $K^\mu(\cos\vartheta)$ auch ein Integral zu gewinnen, welches diese Function, wie die Reihen, für beliebige reelle oder imaginäre Werthe von μ darstellt. Um hierzu zu gelangen, kann man von der bekannten Reihe

$$\frac{\cos\mu\beta i}{\cos\frac{1}{2}\beta}=1+\frac{4\mu^2+1^2}{1\cdot 2}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{(4\mu^2+1^2)\,(4\mu^2+3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)^4+\cdots$$

ausgehen, deren Gültigkeit nur an die Bedingung $-\pi<\beta<\pi$ geknüpft ist, darin $\sin\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\omega$ setzen, beide Seiten mit $d\omega$ multipliciren und von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ integriren; man findet dann, weil

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\omega^2\,d\omega=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\omega^4\,d\omega=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2}\ \text{u. s. w.}$$

dass:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos\mu\beta i}{\cos\frac{1}{2}\beta}\,d\omega=1+\frac{4\mu^2+1^2}{2\cdot 2}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2+\frac{(4\mu^2+1^2)\,(4\mu^2+3^2)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^4+\cdots$$

Die rechte Seite ist nach (2) genau $=K^\mu(\cos\vartheta)$, in der linken kann β vermöge der Gleichung $\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\omega=\sin\frac{\beta}{2}$ als Integrationsvariable eingeführt werden; man erhält so das der gestellten Forderung genügende Integral

$$K^\mu(\cos\vartheta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{\cos(\beta\mu i)\,d\beta}{\sqrt{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2-\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}},$$

das auch in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$K^\mu(\cos\vartheta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{\cos(\beta\mu i)\,d\beta}{\sqrt{2\,(\cos\beta-\cos\vartheta)}}. \tag{4}$$

Für die Function $P^n(\cos\vartheta)$ ergiebt sich hieraus, indem man $\mu i=n+\frac{1}{2}$ setzt (wo n wieder eine positive ganze Zahl, die Null mit eingeschlossen, bedeutet), das folgende bestimmte Integral:

(a) $$P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta-\cos\vartheta)}},$$

und wenn man hierin ϑ in $\pi-\vartheta$ und auch β in $\pi-\beta$ verwandelt und beachtet, dass $P^n(-\cos\vartheta)=(-1)^n P^n(\cos\vartheta)$ ist:

(b) $$P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\beta)}}.$$

Die Aehnlichkeit dieser Integrale mit den bekannten von Dirichlet gegebenen ist so augenfällig, dass sich die Vermuthung aufdrängt, sie seien eine unmittelbare Folge der letzteren, und in der That lassen sich die einen leicht aus den andern ableiten. Es schien mir jedoch trotzdem angemessen, die Formen (a) und (b) besonders hervorzuheben, weil sie nicht blos eben so brauchbar sind, sondern sogar in der Anwendung eine etwas bequemere Handhabung gestatten. Um die behauptete Identität nachzuweisen, verbinde man (a) und (b) einerseits durch Addition und andererseits durch Subtraction, verwandle aber im zweiten Falle n in $n-1$, *so dass das neue* n *nicht* $=0$ *sein darf, sondern mindestens* $=1$ *sein muss*. Man erhält dann:

$$2P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta-\cos\vartheta)}} + \frac{2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\beta)}}$$

$$0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{\cos(n-\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta-\cos\vartheta)}} - \frac{2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin(n-\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\beta)}},$$

und hieraus, indem man wiederum addirt und subtrahirt:

$$P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{\cos n\beta\cos\frac{1}{2}\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta-\cos\vartheta)}} + \frac{2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\cos n\beta\sin\frac{1}{2}\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\beta)}}$$

$$P^n(\cos\vartheta) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{\sin n\beta\sin\frac{1}{2}\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta-\cos\vartheta)}} + \frac{2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\beta)}},$$

welches die von Dirichlet auf ganz anderem Wege abgeleiteten Formeln sind. Es erscheint überflüssig über den Fall $n=0$ eine Bemerkung hinzuzufügen.

Um das Verhalten der Function $K^\mu(\cos\vartheta)$ für sehr grosse reelle Werthe von μ kennen zu lernen, kann man das Integral (4) benutzen und nach bekannter Methode behandeln. (Man vergl. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen S. 103.) Verwandelt man nämlich β in $\vartheta-\beta$, so lässt sich (4) in folgender Form schreiben:

$$K^\mu(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi} e^{\vartheta\mu} \int_0^\vartheta \frac{e^{-\beta\mu}\, d\beta}{\sqrt{4 \sin\frac{1}{2}\beta \sin(\vartheta - \frac{1}{2}\beta)}} + \frac{1}{\pi} \int_0^\vartheta \frac{e^{-(\vartheta-\beta)\mu}\, d\beta}{\sqrt{4 \sin\frac{1}{2}\beta \sin(\vartheta - \frac{1}{2}\beta)}}.$$

Wird μ, wie es erlaubt ist, *positiv* vorausgesetzt, und wird der Fall $\vartheta = 0$ ausgeschlossen, so nimmt der erste Bestandtheil, wie sich sogleich zeigen wird, für $\mu = \infty$ einen unendlich grossen Werth an, während der zweite sicher endlich bleibt, indem die unter dem Integralzeichen vorkommende Exponentialgrösse innerhalb der Grenzen der Integration stets kleiner als 1 ist. Das erste Integral convergirt, wie durch Verwandlung von β in $\beta : \mu$ hervorgeht, gegen den Werth

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu \sin\vartheta}} \int_0^\infty e^{-\beta} \beta^{\frac{1}{2}-1} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\mu \sin\vartheta}},$$

so dass man schliesslich erhält:

$$K^\mu(\cos\vartheta) = \frac{e^{\vartheta\mu}.(1+\delta)}{\sqrt{2\pi\mu \sin\vartheta}}, \tag{5}$$

wenn δ eine Grösse bezeichnet, die für ein ins Unendliche wachsendes μ verschwindend klein wird. Es wisd also K^μ für $\mu = \infty$ ebenfalls unendlich, aber jedenfalls schwächer als $e^{\pi\mu}$.

Der Werth $\vartheta = \pi$ ist in dieser Näherungsformel ebenfalls auszuschliessen, schon deshalb, weil $K^\mu(\cos\vartheta)$ für $\vartheta = \pi$ überhaupt keinen Sinn behält, sondern für jedes μ unendlich gross wird.

Es bietet sich hiernach die Aufgabe dar, die Function $K^\mu(\cos\vartheta)$ in zwei Bestandtheile zu zerlegen, von denen der erste für sehr nahe an π liegende Werthe von ϑ sich dem Unendlichen, der zweite der Null nähert. Der erste Bestandtheil für sich allein könnte sehr leicht mit Hülfe des Integrales in (4) bestimmt werden; für die genaue und vollständige Lösung der Aufgabe bedienen wir uns jedoch am kürzesten einer Formel von Gauss, welche einen Zusammenhang zwischen den hypergeometrischen Reihen $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, 1-x)$ und $F(\alpha, \beta, 1, x)$ angiebt (l. c. p. 217). Für unsere Zwecke umgeformt lautet dieselbe:

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi K^\mu(\cos\vartheta)}{\cos\mu\pi i} \qquad (6)\\
&= -\left[\log\left(\cos\frac{\vartheta^2}{2}\right) + \Psi(-\tfrac{1}{2}+\mu i) + \Psi(-\tfrac{1}{2}-\mu i) - 2\Psi(0)\right] K^\mu[\cos(\pi-\vartheta)]\\
&\quad - A\frac{[\mu^2+(\frac{1}{2})^2]}{1\cdot 1}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 - (A+B)\frac{[\mu^2+(\frac{1}{2})^2][\mu^2+(\frac{3}{2})^2]}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^4\\
&\quad - (A+B+C)\frac{[\mu^2+(\frac{1}{2})^2][\mu^2+(\frac{3}{2})^2][\mu^2+(\frac{5}{2})^2]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^6\\
&\quad - \dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

worin

$$A = \frac{1}{\mu^2 + (\frac{1}{2})^2} - \frac{2}{1}, \quad B = \frac{1}{\mu^2 + (\frac{3}{2})^2} - \frac{2}{2}, \quad C = \frac{1}{\mu^2 + (\frac{5}{2})^2} - \frac{2}{3}$$
etc.

Man sieht hieraus, dass für $\vartheta = \pi - \delta$ (δ unendlich klein) $K^\mu(\cos\vartheta)$ nur logarithmisch unendlich wird, indem man unter Vernachlässigung endlicher gegen unendliche Grössen setzen darf

$$(7) \qquad K^\mu(-\cos\delta) = -\frac{2\cos\mu\pi i}{\pi}\log\delta.$$

Es ist hierbei vorausgesetzt, dass die Grösse μ endlich bleibt. Aber es ist gerade von besonderem Interesse, den Fall ins Auge zu fassen, wo μ und δ gleichzeitig so zu- und abnehmen, dass ihr Product einen endlichen (positiven) Werth x behält. Beachtet man, dass für $\mu = \infty$

$$\Psi(-\tfrac{1}{2} + \mu i) + \Psi(-\tfrac{1}{2} - \mu i) = \log(\mu^2)$$

gesetzt werden darf (wofür der Beweis leicht zu finden, wenngleich das Verhalten von Ψ für unendlich grosse reelle Werthe des Arguments hier nicht massgebend sein kann), so sieht man, dass die rechte Seite von (6) den Ausdruck

$$-2\left[\log\frac{x}{2} - \Psi(0)\right]J(xi) + 2\left\{\frac{1}{1}\frac{x^2}{2\cdot 2} + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 4} + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2\cdot 4\cdot 6} + \cdots\right\}$$

zur Grenze hat, und dieser Ausdruck, welcher durch $2\,Y(xi)$ bezeichnet werden möge, ist also als der wahre Werth der für $\mu = \infty$, $\mu(\pi - \vartheta) = x$ unter der unbestimmten Form $\infty : \infty$ erscheinenden linken Seite der Gleichung (6) anzusehen. Da $K^\mu(\cos\vartheta)$ und $K^\mu[\cos(\pi - \vartheta)]$ zwei verschiedene Lösungen derselben Differentialgleichung sind, so findet das Gleiche auch für die Functionen $J(xi)$ und $Y(xi)$ statt. Die für die letztere, die Cylinderfunction *zweiter Art*, soeben gegebene Entwicklung ist auch anderweitig bekannt*); es kam hier nur auf ihre Entstehung aus (6) an. Gelegentlich sei noch die aus (3) in § 1. für $Y(xi)$ sich ergebende Integralform erwähnt, nämlich:

$$Y(xi) = \int_0^\infty \frac{\cos\beta\, d\beta}{\sqrt{\beta^2 + x^2}} \; **).$$

Die durch (4) für beliebige reelle oder complexe Werthe von μ definirte Function $K^\mu(\cos\vartheta)$ besitzt, wenn man dem Winkel ϑ irgend einen festen zwischen 0 und π enthaltenen Werth ertheilt und μ allein

*) Man vergl. die oben citirte Abhandlung des Herrn Hankel, Seite 471, beachte jedoch, dass die Bedeutung von $Y(x)$ dort und hier nicht in völlig übereinstimmender Weise festgestellt ist.

**) Eine andere Integralform hat Herr Heine, von der Kugelfunction zweiter Art ausgehend, aufgestellt. (Borchardt's Journal, Bd. 69, p. 131.)

als variabel betrachtet, die merkwürdige Eigenschaft, dass sie für unendlich viele rein imaginäre Werthe von μ verschwindet, und zeigt also auch in dieser Beziehung die grösste Aehnlichkeit mit der Cylinderfunction. Es kann jedoch auf diesen noch nicht hinlänglich untersuchten Gegenstand, dessen ausführliche Erörterung überdies dem Zwecke meiner Arbeit fremd sein würde, hier nur insoweit eingegangen werden, als es zur Rechtfertigung einer im vorigen Paragraphen ohne Beweis hingestellten Behauptung unumgänglich nothwendig ist. Es ist einleuchtend, dass $K^\mu(\cos\vartheta)$ beständig positiv bleibt, wenn μ alle rein imaginären Werthe von 0 bis $\frac{\pi i}{2\vartheta}$ durchläuft, indem dann in (4) die Function unter dem Integralzeichen nur das positive Zeichen hat. Es ist aber auch leicht einzusehen, dass $K^\mu(\cos\vartheta)$ schon für $\mu = \frac{\pi i}{\vartheta}$ einen negativen Werth hat; denn indem man das Integral in zwei andere mit den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\vartheta$, $\frac{1}{2}\vartheta$ und ϑ zerlegt und in dem zweiten β in $\vartheta - \beta$ verwandelt, erhält man

$$K^{\frac{\pi i}{\vartheta}}(\cos\vartheta)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\vartheta}\left\{\frac{1}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}} - \frac{1}{\sqrt{2[\cos(\vartheta-\beta) - \cos\vartheta]}}\right\}\cos\left(\frac{\beta\pi}{\vartheta}\right)d\beta,$$

und alle Elemente dieses Integrales sind negativ, weil von den in der Klammer befindlichen Brüchen der erste stets kleiner als der zweite ist. Es besitzt also die Gleichung $K^\mu(\cos\vartheta) = 0$ zwischen den Grenzen $\frac{\pi i}{2\vartheta}$ und $\frac{\pi i}{\vartheta}$ eine rein imaginäre Wurzel, und auch nur eine, weil, wie aus (4) erhellt, der erste Differentialquotient von K^μ nach μ innerhalb der angegebenen Grenzen sein Zeichen nicht ändert. Dass K^μ für kein reelles μ Null wird, ist ohne Weiteres klar; aber ebensowenig kann dieses für einen complexen Werth $\mu = \xi + \eta i$ $\left(\text{worin } \xi \text{ von 0 verschieden, und } 0 < \eta < \frac{\pi}{\vartheta}\right)$ stattfinden, weil sonst die Integrale

$$\int_0^\vartheta \frac{\cos\beta\xi i\cos\beta\eta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}} \quad \text{und} \quad \int_0^\vartheta \frac{\sin\beta\xi i\sin\beta\eta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}}$$

beide verschwinden müssten, was für das zweite, dessen Elemente stets einerlei Zeichen haben, unmöglich ist. Beachtet man nun, dass $K^{-\mu} = K^\mu$, nennt $\pm\varepsilon i$ die einzigen zwischen $-\frac{\pi i}{\vartheta}$ und $+\frac{\pi i}{\vartheta}$ enthaltenen Werthe des μ, welche $K^\mu(\cos\vartheta)$ verschwinden machen, und setzt

$$K^\mu(\cos\vartheta) = (\mu^2 + \varepsilon^2)f(\mu),$$

so ist die Function $f(\mu)$ für alle complexen Werthe $\mu = \xi + \eta i$, welche dem durch die Ungleichheiten $-\infty < \xi < \infty$, $-\frac{\pi}{\vartheta} < \eta < \frac{\pi}{\vartheta}$ bestimmten Gebiete angehören, eindeutig, stetig und von Null verschieden.

B. Es ist $\vartheta = \eta i$ und η reell.

In diesem Falle stimmt die Function K^μ, welche dem Vorhergehenden entsprechend für ein reelles μ zunächst durch die Gleichung

$$K^\mu(\cos\eta i) = \frac{2\cos\mu\pi i}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i + \cos\eta i)}} \tag{8}$$

definirt werden kann, bis auf einen von η unabhängigen Factor mit der Function $J_\mu(\eta)$ überein, welche ich in meiner in der Einleitung angeführten Abhandlung angewandt habe. Durch Benutzung der dort abgeleiteten Formeln ergeben sich für K^μ die folgenden Darstellungen durch bestimmte Integrale:

$$K^\mu(\cos\eta i) = \frac{2i}{\pi\,\mathrm{tg}\,\mu\pi i}\int_\eta^\infty \frac{\sin\mu\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i - \cos\eta i)}}, \tag{8a}$$

$$K^\mu(\cos\eta i) = \frac{2}{\pi}\int_0^\eta \frac{\cos\mu\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\eta i - \cos\alpha i)}}, \quad (\eta > 0), \tag{8b}$$

$$K^\mu(\cos\eta i) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\eta i + i\sin\eta i\cos\alpha)^{\mu i - \frac{1}{2}}\,d\alpha, \tag{8c}$$

$$K^\mu(\cos\eta i) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\eta i + i\sin\eta i\cos\alpha)^{-\mu i - \frac{1}{2}}\,d\alpha. \tag{8d}$$

Mit Hülfe des ersten dieser vier Integrale findet man leicht:

1) für ein unendlich grosses positives μ und ein endliches positives η:

$$K^\mu(\cos\eta i) = \sqrt{\frac{2}{-\pi i\mu\sin\eta i}}\cos\left(\mu\eta - \frac{\pi}{4}\right); \tag{9}$$

2) für ein unendlich grosses positives η und ein endliches reelles μ:

$$K^\mu(\cos\eta i) = \frac{2ie^{-\frac{1}{2}\eta}}{\pi\,\mathrm{tg}(\mu\pi i)}\left\{\cos\mu\eta\int_0^\infty \frac{\sin\mu\alpha\,d\alpha}{\sqrt{e^\alpha - 1}} + \sin\mu\eta\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\,d\alpha}{\sqrt{e^\alpha - 1}}\right\}; \tag{10}$$

3) für unendlich grosse Werthe von μ und unendlich kleine von η, wenn das Product $\mu\eta$ einen endlichen *positiven* Werth x behält:

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin(x\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \tag{c}$$

wofür man auch das folgende bis $x = 0$ inclusive und wenn man will auch für negative x gültige Integral setzen kann:

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_x^\infty \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}.$$

Es scheint, dass diese Integralform für die Cylinderfunction bei den Mathematikern bisher wenig oder gar keine Beachtung gefunden hat. Da dieselbe jedoch, wie ich mich schon vor längerer Zeit überzeugt habe, manche nützliche Anwendungen gestattet, indem sie in dem Problem der Elektricitätsvertheilung auf zwei sich berührenden Kugeln eine nicht ganz unerhebliche Reduction des Endresultats ermöglicht und auch besonders geeignet erscheint, um für die von Herrn C. Neumann gelegentlich der Behandlung dieses Problems gegebene Darstellung einer willkürlichen Function zweier Variablen durch ein dreifaches Integral*) den strengen Beweis zu liefern: so möge noch eine andere Ableitung derselben hier Platz finden. Als Ausgangspunkt diene das am häufigsten für $J(x)$ benutzte Integral:

$$J(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{\alpha x i}\, d\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Bekanntlich ist nun:

$$\frac{2e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{(1-\alpha^2)\beta^2 i}\, d\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (\text{wenn } \alpha^2 < 1)$$

und

$$= -\frac{i}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \quad (\text{wenn } \alpha^2 > 1).$$

Daraus folgt leicht, dass

$$J(x) = \text{dem reellen Theil von } \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\pi^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty d\beta\, e^{\beta^2 i}\int_{-\infty}^\infty e^{-(\beta^2\alpha^2 - x\alpha)i}\, d\alpha.$$

In der That, die dadurch, dass die Integration nach α von $-\infty$ bis ∞ statt von -1 bis 1 ausgedehnt wird, willkürlich hinzugenommenen Bestandtheile sind rein imaginäre Grössen und werden schliesslich

*) Man vergl. p. 149 ff. der Schrift: „Allgemeine Lösung des Problemes über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Von Carl Neumann." (Halle 1862.)

dadurch beseitigt, dass das Endresultat auf seinen reellen Theil reducirt wird. Allein diese Umformung ist doch nur für ein reelles x statthaft, weil sonst das zwischen den Grenzen $-\infty$ und ∞ genommene Integral seine Bedeutung verliert. Durch Ausführung der Integration ergiebt sich:

$$J(x) = \text{dem reellen Theil von}$$

$$-\frac{2i}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} e^{i\left(\beta^2+\frac{x^2}{4\beta^2}\right)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} \sin\left(\beta^2+\frac{x^2}{4\beta^2}\right),$$

oder wenn x positiv vorausgesetzt, das Integral durch die Substitution $\beta^2 = \frac{1}{2}x\beta'$ transformirt, darauf in zwei andere mit den Grenzen 0 und 1, 1 und ∞ zerlegt und im zweiten β' in $1:\beta'$ verwandelt wird:

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{d\beta'}{\beta'} \sin\frac{x}{2}\left(\beta'+\frac{1}{\beta'}\right) \quad (x > 0),$$

oder endlich, wenn $\beta' + \frac{1}{\beta'} = 2\alpha$ gesetzt wird:

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin(x\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}. \quad \text{q. e. d.}$$

§ 5.

Ueber das Additionstheorem für die Function K^μ. — Bemerkung über die Darstellung einer willkürlichen Function von zwei Variablen durch ein dreifaches Integral. — Anwendung auf einen besonderen Fall.

Die Entwicklung der Kugelfunction P^n für ein zusammengesetztes Argument $\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ nach den Cosinus der Vielfachen von α, welche von Herrn Heine kurz das Additionstheorem für die Kugelfunction genannt wird*), kann bekanntlich auf sehr verschiedenartigen Wegen abgeleitet werden. Während Laplace, dem man dieses wichtige Theorem verdankt, von der Differentialgleichung, welcher P^n genügt, ausgeht, legt Jacobi die Darstellung von P^n durch ein bestimmtes Integral zu Grunde. Beide Methoden können auch zur Entwicklung von $K^\mu(z)$ (für ein reelles μ) angewandt werden, und ich habe die erste benutzt für das Argument

$$z = -\cos\lambda\cos\lambda' - \sin\lambda\sin\lambda'\cos(\varphi-\varphi'),$$

*) Borchardt's Journal, Bd. 69, p. 128. — Die ausführliche Behandlung dieses Theorems und seine Ausdehnung auf die Kugelfunction zweiter Art findet man in Heine's Handbuch der Kugelfunctionen § 67, 70 und 73.

worin λ und λ' reell und zwischen 0 und π enthalten, die zweite für das Argument

$$z = \cos(\vartheta i)\cos(\vartheta' i) + \sin(\vartheta i)\sin(\vartheta' i)\cos(\varphi - \varphi'),$$

worin ϑ und ϑ' reell und von beliebiger Grösse sind. Im ersten Falle liegt z zwischen den Grenzen -1 und 1, im zweiten zwischen 1 und ∞, und in beiden Fällen ist $K^{\mu}(z)$ nach (8) durch die Gleichung

$$K^{\mu}(z) = \frac{\cos \mu\pi i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos \alpha i + z)}},$$

oder was dasselbe ist durch

$$(9)\qquad K^{\mu}(z) = \frac{\cos \mu\pi i}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\mu i - \frac{1}{2}}\, dx}{\sqrt{1 + 2zx + x^2}}$$

völlig eindeutig definirt, erlangt jedoch an der Grenze $z = -1$, d. h. wenn gleichzeitig $\lambda = \lambda'$ und $\cos(\varphi - \varphi') = 1$, einen unendlich grossen Werth. Diesem letzteren Umstande ist es zuzuschreiben, dass die gesuchte Entwicklung in den beiden für das Argument z unterschiedenen Fällen nicht genau dieselbe Form annimmt. Sie fällt nämlich im ersten Falle trotz der Symmetrie von z in Bezug auf λ und λ' verschieden aus, je nachdem λ einen grösseren oder kleineren Werth als λ' hat, während sie im zweiten Falle durchaus symmetrisch in Bezug auf ϑ und ϑ' ist. Ich werde mich auf die Behandlung des zweiten Falles beschränken. Es lässt sich in (9) die stets positive Grösse $1 + 2zx + x^2$ durch das Aggregat der drei Quadrate

$$(\cos \vartheta i + x\cos \vartheta' i)^2 - (i \sin \vartheta i \cos \varphi + ix \sin \vartheta' i \cos \varphi')^2$$
$$- (i \sin \vartheta i \sin \varphi + ix \sin \vartheta' i \sin \varphi')^2$$

darstellen, und der reciproke Werth der Quadratwurzel aus diesem Ausdruck, in welchem $\cos \vartheta i + x \cos \vartheta' i$ wesentlich positiv ist, kann vermöge der Formel

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{A + B\cos\lambda + C\sin\lambda}$$

durch das folgende bestimmte Integral ersetzt werden:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2zx + x^2}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{\cos \vartheta i + i \sin \vartheta i \cos(\varphi - \lambda) + x[\cos \vartheta' i + i \sin \vartheta' i \cos(\varphi' - \lambda)]}.$$

Diesen Werth denke man sich in (9) substituirt, darauf die Reihenfolge der Integration umgekehrt und statt x durch die Gleichung

$x[\cos\vartheta' i + i\sin\vartheta' i\cos(\varphi' - \lambda)] = x'[\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos(\varphi - \lambda)]$

eine neue Integrationsvariable x' eingeführt. Da die in x und x' multiplicirten Grössen stets reelle positive Werthe haben, so bleiben 0 und ∞ die Grenzen des transformirten Integrales. Es lässt sich nun, nachdem man die von x' freien Glieder abgesondert hat, das Integral nach x' ausführen und zwar erhält es den Werth $\pi : \cos\mu\pi i$. Daher wird:

$$(10)\qquad K^\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos(\varphi - \lambda)]^{\mu i - \frac{1}{2}}}{[\cos\vartheta' i + i\sin\vartheta' i\cos(\varphi' - \lambda)]^{\mu i + \frac{1}{2}}}\,d\lambda.$$

Dieser Ausdruck entspricht vollkommen dem von Jacobi für P^n (oder Y^n) aufgestellten*) und liefert in gleicher Weise wie der letztere behandelt fast ohne Rechnung die geforderte Entwicklung. Setzt man nämlich:

$$[\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos(\varphi - \lambda)]^{\mu i - \frac{1}{2}}$$
$$= A_0 + 2A_1\cos(\varphi - \lambda) + 2A_2\cos 2(\varphi - \lambda) + \cdots,$$
$$[\cos\vartheta' i + i\sin\vartheta' i\cos(\varphi' - \lambda)]^{-\mu i - \frac{1}{2}}$$
$$= B_0 + 2B_1\cos(\varphi' - \lambda) + 2B_2\cos 2(\varphi' - \lambda) + \cdots,$$

so dass die A und B durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$(11)\qquad \begin{cases} A_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos\lambda)^{\mu i - \frac{1}{2}}\cos m\lambda\,d\lambda \\[2ex] B_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\cos\vartheta' i + i\sin\vartheta' i\cos\lambda)^{-\mu i - \frac{1}{2}}\cos m\lambda\,d\lambda, \end{cases}$$

so ergiebt sich sofort

$$(12)\qquad K^\mu(z) = A_0B_0 + 2A_1B_1\cos(\varphi - \varphi') + 2A_2B_2\cos 2(\varphi - \varphi') + \cdots.$$

Die Grössen A_0 und B_0 stimmen resp. mit $K^\mu(\cos\vartheta i)$ und $K^\mu(\cos\vartheta' i)$ überein, wie man sieht, wenn man in (11) $m = 0$ und in (10) ϑ' resp. $\vartheta = 0$ macht, und hierdurch ist für die Formeln (8c) und (8d) des vorigen Paragraphen der dort fehlende Beweis nachgeholt. Die allgemeinen Ausdrücke von A_m und B_m lassen sich vermittelst der Jacobi'schen Darstellung von $\sin m\lambda$ durch einen m^{ten} Differentialquotienten in die folgenden transformiren**):

---

*) Crelle's Journal, Bd. 26. — Mathematische Werke Bd. I., p. 1.

**) Man vergl. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, p. 136.

$$
(11\,\mathrm{a})\left\{\begin{aligned}
A_m &= \frac{2^{-m}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2}-\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)} \\
&(-i\sin\vartheta i)^m\int_0^\pi(\cos\vartheta i+i\sin\vartheta i\cos\lambda)^{\mu i-\frac{1}{2}-m}\sin\lambda^{2m}\,d\lambda \\
B_m &= \frac{2^{-m}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2}+\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\mu i)} \\
&(-i\sin\vartheta' i)^m\int_0^\pi(\cos\vartheta' i+i\sin\vartheta' i\cos\lambda)^{-\mu i-\frac{1}{2}-m}\sin\lambda^{2m}\,d\lambda.
\end{aligned}\right.
$$

Es ist bekannt, dass die hierin vorkommenden Integrale trotz der Verschiedenheit der Exponenten $\mu i-\frac{1}{2}-m$ und $-\mu i-\frac{1}{2}-m$ genau dieselben Functionen von ϑ und ϑ' sind, also für $\vartheta=\vartheta'$ einander gleich werden. Auf dem directesten Wege ist diese Gleichheit von Herrn Heine bewiesen worden, indem er durch eine zweckmässige Substitution das eine Integral unmittelbar in das andere überführt. Ich werde es jedoch vorziehen, durch eine andere Substitution jedes Integral einzeln zu transformiren, indem dadurch gleichzeitig eine neue Integralform für A_m und B_m gewonnen wird, welche vor (11) und (11a) den Vortheil hat, dass die imaginäre Grösse μi(— bei den Kugelfunctionen tritt statt $\mu i-\frac{1}{2}$ eine ganze Zahl n auf —) aus dem Exponenten verschwindet.

Man setze $\cos\vartheta i+i\sin\vartheta i\cos\lambda=e^\alpha$, so ergiebt eine leichte Rechnung:

$$
A_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2}-\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)}
$$

$$
(-i\sin\vartheta i)^{-m}\int_{-\vartheta}^{\vartheta}e^{\alpha\mu i}(\cos\vartheta i-\cos\alpha i)^{m-\frac{1}{2}}\,d\alpha.
$$

Vorausgesetzt ist hierbei, dass ϑ einen positiven und von Null verschiedenen Werth hat, so dass $-i\sin\vartheta i$ ebenfalls positiv ist. Der imaginäre Theil des Integrales reducirt sich offenbar auf Null, und in dem reellen können 0 und ϑ als Integrationsgrenzen genommen werden, wenn das Resultat verdoppelt wird. Man erhält also:

$$
(11\,\mathrm{b})\left\{\begin{aligned}
A_m &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2}-\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)} \\
&(-i\sin\vartheta i)^{-m}\int_0^\vartheta(\cos\vartheta i-\cos\alpha i)^{m-\frac{1}{2}}\cos\mu\alpha\,d\alpha, \\
B_m &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2}+\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\mu i)} \\
&(-i\sin\vartheta' i)^{-m}\int_0^{\vartheta'}(\cos\vartheta' i-\cos\alpha i)^{m-\frac{1}{2}}\cos\mu\alpha\,d\alpha.
\end{aligned}\right.
$$

Es sind daher in der That, wenn von den nur μ und m enthaltenden Factoren abgesehen wird, A_m und B_m dieselben Functionen von ϑ und ϑ'. Bemerkt man, dass die Differentialquotienten des in A_m enthaltenen Integrales trotz der Veränderlichkeit der oberen Grenze bis zum m^{ten} inclusive durch Differentiation unter dem Integralzeichen gebildet werden dürfen, so findet man beiläufig die folgende Relation, worin x statt $\cos\vartheta i$ gesetzt ist:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2}-\mu i)}\,\frac{d^m(x^2-1)^{\frac{1}{2}m}A_m}{dx^m}=A_0.$$

Während die Gleichungen (11) — (11 b) eine unmittelbare Uebertragung auf Kugelfunctionen durch die Annahme $\mu i-\frac{1}{2}=n$ gestatten, ist eine solche Annahme in (9) unzulässig, und diese Integralform ist also als der Function K^μ eigenthümlich anzusehen. Es soll nun auch noch für A_m ein Integral abgeleitet werden, welches in ähnlicher Weise gebildet ist. Man multiplicire die Gleichungen

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)\,\Gamma(m+\frac{1}{2}+\mu i)}{\Gamma(m+1)}=\int_0^\infty\frac{x^{\frac{1}{2}-\mu i}}{(1+x)^{m+1}}\,\frac{dx}{x}$$

$$A_m=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\cos\vartheta i+i\sin\vartheta i\cos\lambda)^{\mu i-\frac{1}{2}}\cos m\lambda\,d\lambda$$

mit einander, bezeichne die linke Seite der neuen Gleichung der Kürze halber mit C_m und mache in dem Doppelintegral auf der rechten Seite die Substitution $x=(\cos\vartheta i+i\sin\vartheta i\cos\lambda)\,y$; es wird dann:

$$C_m=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty y^{-\mu i-\frac{1}{2}}\,dy\int_0^\pi\frac{\cos m\lambda\,d\lambda}{(1+y\cos\vartheta i+iy\sin\vartheta i\cos\lambda)^{m+1}},$$

und wenn man $1+y\cos\vartheta i=\varrho x$ und $iy\sin\vartheta i=-\varrho\sqrt{x^2-1}$ setzt:

$$C_m=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{y^{-\mu i-\frac{1}{2}}\,dy}{\varrho^{m+1}}\int_0^\pi\frac{\cos m\lambda\,d\lambda}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\lambda)^{m+1}}.$$

Aber die Integration nach λ ist ausführbar (man vergl. Heine's Handbuch der Kugelfunctionen p. 130, 38a und p. 117, 34a), und C_m nimmt die Form an:

$$C_m=\frac{1\cdot3\cdots(2m-1)}{1\cdot2\cdots m}\int_0^\infty\frac{(\sqrt{x^2-1})^m\,y^{-\mu i-\frac{1}{2}}\,dy}{\varrho^{m+1}},$$

oder wenn für $\sqrt{x^2-1}$ und φ ihre Ausdrücke durch ϑ und y substituirt werden:

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)} (-2i \sin \vartheta i)^m \int_0^\infty \frac{y^{m-\mu i-\frac{1}{2}}\, dy}{(1+2y\cos\vartheta i+y^2)^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Für die Function A_m, von welcher sich C_m nur durch einen constanten Factor, nämlich die linke Seite der ersten der beiden mit einander multiplicirten Gleichungen, unterscheidet, ergiebt sich hieraus, wenn man noch $\log y = \alpha$ setzt, nach einer sehr leichten Umformung:

$$(11\text{c})\quad A_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})(-i\sin\vartheta i)^m}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)\,\Gamma(m+\frac{1}{2}+\mu i)} \int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{(\cos\vartheta i+\cos\alpha i)^{m+\frac{1}{2}}},$$

und durch Vertauschung von μ mit $-\mu$ und ϑ mit ϑ' erhält man aus A_m auch B_m. Als Folge von (11c) ergiebt sich jetzt die Beziehung:

$$(13\text{a})\qquad A_m = \frac{(-1)^m\,\Gamma(\frac{1}{2}+\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2}+\mu i)} (x^2-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m A_0}{dx^m},$$

wenn wieder x, wie in (13), die Bedeutung von $\cos\vartheta i$ hat.

Durch Verbindung von (13) und (13a) entsteht die Relation:

$$(14)\quad \frac{(-1)^m\,\Gamma(\frac{1}{2}+\mu i)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2}+\mu i)\,\Gamma(m+\frac{1}{2}-\mu i)} \frac{d^m}{dx^m}\left[(x^2-1)^m \frac{d^m A_0}{dx^m}\right] = A_0.$$

Die Gleichungen (13), (13a) und (14) entsprechen sehr bekannten Eigenschaften der Kugelfunctionen und zu ihrer Ableitung hätten auch die bei den letzteren gebräuchlichen Methoden angewandt werden können.

Da die Functionen A_0 und B_0 identisch mit $K^\mu(\cos\vartheta i)$ und $K^\mu(\cos\vartheta' i)$ sind, so entsteht als unmittelbare Folge des Additionstheorems (12) die Gleichung:

$$(15)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K^\mu(\cos\vartheta i\cos\vartheta' i+\sin\vartheta i\sin\vartheta' i\cos\varphi)\,d\varphi = K^\mu(\cos\vartheta i)\,K^\mu(\cos\vartheta' i).$$

Von fundamentaler Bedeutung in der Lehre von den Kugelfunctionen ist der Satz, dass jede endliche Function $f(\lambda,\varphi)$, welche für alle zwischen 0 und π enthaltenen Werthe von λ und alle zwischen 0 und 2π enthaltenen von φ willkürlich gegeben ist, sich in die nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\int_0^\pi d\lambda' \sin\lambda' \int_0^{2\pi} P^n(z) f(\lambda',\varphi')\, d\varphi',$$

$$[z = \cos\lambda\,\cos\lambda' + \sin\lambda\,\sin\lambda'\,\cos(\varphi-\varphi')]$$

entwickeln lässt. Auch diesem Satze lässt sich ein ähnlicher für die Function K^μ an die Seite stellen, nämlich der folgende:

Es sei $f(\vartheta, \varphi)$ eine Function von ϑ und φ, welche von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \infty$ und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ gegeben ist, nirgends unendlich wird und für $\vartheta = \infty$ stärker gegen Null convergirt als die $(-\frac{1}{2})^\mu$ Potenz von $\cos \vartheta i$ *oder e^ϑ (der Art, dass man setzen darf*

$$f(\vartheta, \varphi) = e^{-\vartheta(\frac{1}{2}+\varepsilon)} f_1(\vartheta, \varphi),$$

während ε eine positive wenn auch nur beliebig wenig von Null verschiedene Constante vorstellt und $f_1(\vartheta, \varphi)$ für $\vartheta = \infty$ endlich resp. unendlich klein ist), so stimmt der Werth des dreifachen Integrales

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\, \mu \frac{1}{i} \operatorname{tg}(\mu\pi i) \int_0^\infty d\vartheta' \frac{1}{i} \sin(\vartheta' i) \int_0^{2\pi} K^\mu(z) f(\vartheta', \varphi')\, d\varphi',$$

worin

$$z = \cos \vartheta i \cos \vartheta' i + \sin \vartheta i \sin \vartheta' i \cos(\varphi - \varphi'),$$

mit dem Functionalwerthe $f(\vartheta, \varphi)$ überein, wenn dieser ein völlig bestimmter ist, und stellt einen gewissen Mittelwerth dar, wenn die Function f in der Umgebung des Punktes (ϑ, φ) vieldeutig ist.

Der Beweis dieses Satzes kann, unter Benutzung der Integralform (8a) für $K^\mu(z)$, in der Hauptsache nach den von Dirichlet für die Untersuchung der trigonometrischen und Kugelfunctionenreihen geschaffenen Methoden geführt werden, muss jedoch hier unterbleiben, weil durch seine vollständige Durchführung das dieser Arbeit gesteckte Ziel überschritten werden würde. Es möge mir jedoch gestattet sein, den Satz (obschon sein Beweis nicht mitgetheilt wird) zur Ableitung eines speciellen Resultates zu benutzen, welches sowohl an sich merkwürdig als auch durch die nützlichen Anwendungen, welche es zulässt, von Wichtigkeit ist. Wenn $f(\vartheta, \varphi)$ von φ unabhängig ist, so findet man mit Berücksichtigung von (15) und wenn man $\cos \vartheta i = x$ und $f(\vartheta, \varphi) = f(x)$ setzt:

$$\text{(b)} \quad f(x) = \int_0^\infty d\mu\, \mu \frac{1}{i} \operatorname{tg}(\mu\pi i)\, C^\mu K^\mu(x), \text{ worin } C^\mu = \int_1^\infty f(x) K^\mu(x)\, dx.$$

Diese Gleichung soll nun auf den speciellen Fall

$$f(x) = (x-y)^{-\delta}, \quad \delta > \tfrac{1}{2}, \quad 1 \leq x < \infty, \quad -\infty < y < 1$$

angewandt werden. Man erhält dann, wenn man $K^\mu(x)$, indem man für den Augenblick statt x wieder $\cos \xi i$ schreibt, durch das Integral (8b) ausdrückt:

$$C_\mu = \int_1^\infty \frac{K^\mu(x)\,dx}{(x-y)^\delta} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi \sin \xi i}{i(\cos \xi i - y)^\delta} \int_0^\xi \frac{\cos \mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos \xi i - \cos \alpha i)}},$$

und wenn man in dem Doppelintegrale die Reihenfolge der Integration umkehrt und die neuen Integrationsgrenzen in bekannter Weise bestimmt:

$$C^\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \cos \mu\alpha \int_\alpha^\infty \frac{1}{i} \frac{\sin \xi i\, d\xi}{(\cos \xi i - y)^\delta \sqrt{2(\cos \xi i - \cos \alpha i)}}.$$

Das Integral mit den Grenzen α und ∞ wird durch die Substitution $\cos \xi i - \cos \alpha i = (\cos \alpha i - y) z$ zurückgeführt auf:

$$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos \alpha i - y)^{\delta - \frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{2}-1}\,dz}{(1+z)^\delta} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\delta - \frac{1}{2})}{\sqrt{2}\,\Gamma(\delta)(\cos \alpha i - y)^{\delta - \frac{1}{2}}},$$

und es wird demnach

$$C^\mu = \frac{2\,\Gamma(\delta - \frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\delta)} \int_0^\infty \frac{\cos \mu\alpha\, d\alpha}{(\cos \alpha i - y)^{\delta - \frac{1}{2}}},$$

welcher Werth nur in (b) einzusetzen ist, um die gesuchte Darstellung von $f(x) = (x-y)^{-\delta}$ zu erhalten. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall $\delta = 1$. Hier wird vermöge (8) $C^\mu \cos \mu\pi i = \pi K^\mu(-y)$, und es entsteht also aus (b) *erstens* das Integral

$$K^\mu(-y) = \frac{\cos(\mu\pi i)}{\pi} \int_1^\infty \frac{K^\mu(x)\,dx}{x-y}, \tag{16}$$

welches dem Neumann'schen Integral für die Kugelfunction zweiter Art, nämlich

$$Q^n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{P^n(y)\,dy}{x-y},$$

analog gebildet ist, und *zweitens* die Gleichung

$$\frac{1}{x-y} = \pi \int_0^\infty d\mu\,\mu\, \frac{\operatorname{tg}(\mu\pi i)}{i \cos(\mu\pi i)} K^\mu(x) K^\mu(-y), \tag{17}$$

welche der Heine'schen Reihe

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) P^n(x) Q^n(y)$$

entspricht und unter ähnlichen Bedingungen wie diese auch für complexe Werthe von x und y ihre Gültigkeit beibehält.

Auch für die Cylinderfunctionen gelten zwei ähnliche Sätze, nämlich:

$$Y(\eta i) = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\eta^2}} = \int_0^\infty \frac{J(\xi)\,\xi\, d\xi}{\xi^2+\eta^2},$$

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2} = \int_0^\infty d\lambda\, \lambda\, J(\lambda\xi)\, Y(\lambda\eta i) \quad (\eta^2 > 0),$$

wie aus (16) und (17) mit Rücksicht auf den in § 4. angegebenen Grenzübergang leicht gefunden werden kann.

Ueber die Mehler'schen Kegelfunctionen und deren Anwendung auf elektrostatische Probleme.

Von

C. Neumann in Leipzig.

Der vorliegende Aufsatz repräsentirt, abgesehen von den beiden letzten Paragraphen (§ 11. und § 12.), einen Theil einer im vergangenen Sommersemester von mir gehaltenen Vorlesung.

Der Hauptsache nach handelt es sich hier um dieselben Probleme, welche Mehler in seiner höchst schätzbaren Arbeit (im gegenwärtigen Bande der Annalen, Seite 161) in Angriff genommen hat. Doch wird der Weg, den ich einschlagen werde, von dem Mehler'schen sich wesentlich unterscheiden, im Ganzen weniger Hülfsmittel erfordern (z. B. die Theorie der Gammafunctionen entbehrlich machen), und überhaupt wohl eine etwas grössere Einfachheit und Durchsichtigkeit besitzen*). Eine wesentliche Stütze meiner Betrachtungen besteht in gewissen *neuen Integraleigenschaften der Kreisfunctionen* (§ 7.), nach denen ich, obwohl sie eigentlich sehr nahe liegen, lange Jahre vergeblich gesucht hatte. Denn dieselben sind nicht nur für die hier behandelten Probleme, sondern auch für *viele andere*, z. B. für die der *conformen Abbildung*, von wesentlicher Bedeutung.

Der Kürze willen mag es mir erlaubt sein, diejenige Fläche, welche durch Rotation eines Kreisbogens um seine Sehne entsteht, kurzweg ein *Conoid*, oder eine *Conoidfläche* zu nennen. Um nun die elektrostatischen Probleme für ein solches Conoid lösen zu können, entwickle ich zunächst (§ 2. bis § 6.) die *reciproke Entfernung zweier Punkte* in ein für diesen Zweck geeignetes nach gewissen Cosinus fortlaufendes Integral, unter Anwendung der von mir schon mehrfach benutzten (zuerst übrigens wohl von Thomson eingeführten) dipolaren Coordinaten. Sodann werde ich (in § 8. bis § 10.) die das Conoid betreffenden elektrostatischen Aufgaben behandeln, sowohl für den Fall, dass *keine* äusseren Kräfte influiren, als auch für den allgemeinern Fall, dass solche Kräfte *vorhanden* sind; wobei bemerkt sein mag, dass Mehler sich auf den ersten und einfachern Fall beschränkt hat.

---

*) Man möge entschuldigen, dass ich den Mehler'schen Index μ mit q bezeichnet habe; so dass also die Mehler'sche Function K^{μ} identisch ist mit derjenigen, die ich mit K_q bezeichne.

Endlich aber werde ich über die von Mehler behandelten Probleme wesentlich hinausgreifen, indem ich (in § 12.) auch solche Körper in Betracht ziehe, *die theils von einer Conoidfläche, theils von Kugelflächen begrenzt sind.*

§ 1.

Erinnerung an die dipolaren Coordinaten.

Wir wollen die $\xi\eta$ Ebene nur als eine *Halbebene* uns denken, welche von der ξ Axe begrenzt wird, und die positive η Axe in sich enthält. *Auch mag die* ξ Axe *horizontal sein, und von Links nach Rechts laufen.* Setzt man nun

$$(1) \qquad \xi + i\eta = a\,\frac{1+e^{\vartheta+i\omega}}{1-e^{\vartheta+i\omega}},$$

wo a eine gegebene positive Constante vorstellt, und $i=\sqrt{-1}$ sein soll, so stehen die neuen Variablen ϑ, ω zu den rechtwinkligen Coordinaten ξ, η in einfacher Beziehung. Markirt man nämlich auf der ξ Axe *links* und *rechts* vom Anfangspunkte O zwei Punkte A und A', beide in der Entfernung a vom Anfangspunkte, und bezeichnet man die Entfernungen des Punktes (ξ, η) von diesen festen Punkten A und A', die hinfort die beiden *Pole* genannt werden sollen, resp. mit ϱ und ϱ', so ergiebt sich:

$$(2) \qquad \frac{\varrho}{\varrho'} = e^{-\vartheta}, \quad \text{und:} \quad \textit{Winkel}\ (\varrho, \varrho') = \omega,$$

und ferner:

$$(3) \qquad \varrho\varrho' = \frac{4a^2}{2\cos i\vartheta - 2\cos\omega} = \frac{4a^2}{\psi},$$

wo ψ als Abkürzung dienen soll für den angegebenen Nenner. Aus (2) folgt also z. B., dass ω bezeichnet werden kann als die *scheinbare Grösse* der Linie AA' für einen in (ξ, η) befindlichen Beobachter. Demgemäss wird das Curvensystem $\omega =$ Const. durch diejenigen *Kreisbogen* dargestellt sein, welche die Linie AA' zur gemeinschaftlichen Sehne haben. Und mit Rücksicht hierauf folgt aus (1) [nämlich daraus, dass $\xi + i\eta = f(\vartheta + i\omega)$ ist], sofort, dass die Curven $\vartheta =$ Const. durch das zu jenen Kreisbogen *orthogonale Kreissystem* dargestellt sind.

Lässt man die bisher betrachtete Figur um die ξ Axe rotiren, so beschreiben die Bogen $\omega =$ Const. gewisse Rotationsflächen, die fortan als *Conoide* bezeichnet werden mögen. Und gleichzeitig beschreiben alsdann die Kreise $\vartheta =$ Const. gewisse *Kugelflächen*, deren Mittelpunkte sämmtlich in der ξ Axe, und zwar ausserhalb der Strecke AA' liegen. *Unsere Aufgabe soll nun darin bestehen, das elektrostatische Problem für eines jener Conoide zu lösen.*

Zu diesem Zweck führen wir ein *räumliches* Coordinatensystem

x, y, z ein, dessen Anfangspunkt mit dem bisherigen Anfangspunkt O, und dessen x Axe mit der ξ Axe zusammenfallen soll. Dann wird offenbar: $x=\xi$, $y=\eta\cos\varphi$, und $z=\eta\sin\varphi$, wo φ das *Azimuth* der variablen Meridianebene $\xi\eta$ gegen die feste Meridianebene xy vorstellt. Hieraus folgt, falls man ξ und η, mittelst der Formel (1), durch ϑ, ω ausdrückt:

$$(4)\qquad \begin{cases} x=\xi \qquad\quad = a\dfrac{2i\sin(i\vartheta)}{\psi}, \\ y=\eta\cos\varphi = a\dfrac{2\sin\omega\cos\varphi}{\psi}, \\ z=\eta\sin\varphi = a\dfrac{2\sin\omega\sin\varphi}{\psi}, \end{cases}$$

wo ψ dieselbe Bedeutung hat, wie in (3).

Markirt man nun irgendwo im Raume zwei Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1), und bezeichnet man die *neuen* Coordinaten derselben mit $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$, ferner das zugehörige ψ resp. mit ψ und ψ_1, so erhält man, mittelst der Relationen (4), für den gegenseitigen Abstand E dieser Punkte den Werth:

$$(5)\qquad E=\frac{2a\sqrt{2\cos i(\vartheta-\vartheta_1)-2\cos\gamma}}{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}},$$

wo $\cos\gamma$ die Bedeutung hat:

$$(6)\qquad \cos\gamma=\cos\omega\cos\omega_1+\sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi-\varphi_1).$$

Construirt man also über AA', als gemeinschaftlicher Sehne, zwei resp. durch $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ gehende Kreisbogen, so wird γ derjenigen Winkel sein, unter welchem diese beiden Bogen in A oder (was dasselbe) in A' gegeneinander geneigt sind. — Als specieller Fall der Formel (5) ergiebt sich der Werth des Linienelementes:

$$(7)\qquad ds=\frac{2a\sqrt{(d\vartheta)^2+(d\omega)^2+(\sin\omega\, d\varphi)^2}}{\psi}.$$

Und hieraus ergiebt sich für den Laplace'schen Differentialausdruck $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ folgende Transformation:

$$(8)\qquad \frac{4a^2\sin\omega}{\psi^3}\Delta U=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\sin\omega}{\psi}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)+\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\sin\omega}{\psi}\frac{\partial U}{\partial\omega}\right)+\frac{1}{\psi\sin\omega}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2},$$

wo U eine *willkürliche* Function von x, y, z, resp. von $\vartheta, \omega, \varphi$ vorstellt. Diese Formel kann man auch so darstellen:

$$(9)\qquad \frac{4a^2\sqrt{\sin\omega}}{\psi^2\sqrt{\psi}}\Delta U=\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2}+\frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{V}{4}\right),$$

wo V als Abkürzung dient für $U\frac{\sqrt{\sin\omega}}{\sqrt{\psi}}$. — Endlich kann man diese Formel auch so schreiben:

$$(10)\quad \frac{4a^2}{\psi^2\sqrt{\psi}}\Delta U = \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \omega^2} + \frac{\cos\omega}{\sin\omega}\frac{\partial W}{\partial \omega}\right) + \frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{W}{4},$$

wo W als Abkürzung dient für $\frac{V}{\sqrt{\sin\omega}}$, d. i. für $\frac{U}{\sqrt{\psi}}$.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man *sämmtliche* Punkte $(\vartheta, \omega, \varphi)$ des ganzen unendlichen Raumes erhalten wird, falls man den drei Variablen folgende Grenzen zuertheilt:

$$(11)\quad \begin{aligned} \vartheta &= -\infty \cdots +\infty, \\ \omega &= \quad 0 \cdots \pi, \\ \varphi &= \quad 0 \cdots 2\pi. \end{aligned}$$

Insbesondere repräsentirt $\vartheta = +\infty$ den Punkt A, und $\vartheta = -\infty$ den Punkt A'. Ferner repräsentirt $\omega = \pi$ das durch die Linie AA' repräsentirte unendlich dünne Conoid.

§ 2.

Darstellung der reciproken Entfernung zweier Punkte mittelst eines bestimmten Integrales. Einführung der Mehler'schen Kegelfunctionen.

Die Fourier'sche Integralformel kann für eine *gerade* Function $F(\vartheta)$ folgendermassen geschrieben werden:

$$F(\vartheta) = \int_0^\infty dq\, A_q \cos q\vartheta, \quad \text{wo} \quad A_q = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F(\vartheta)\cos q\vartheta \cdot d\vartheta.$$

Bringt man diese Formel in Anwendung auf die Function:

$$F(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\cos i\vartheta - 2\cos\omega}}, \quad \text{d. i.} \quad = \frac{1}{\sqrt{\psi}},$$

so erhält man:

$$(1)\quad \frac{1}{\sqrt{\psi}} = \frac{1}{\sqrt{2\cos i\vartheta - 2\cos\omega}} = \int_0^\infty dq\, C_q L_q(\cos\omega)\cos q\vartheta,$$

wo $C_q L_q(\cos\omega)$ die Bedeutung hat:

$$(2)\quad C_q L_q(\cos\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{2\cos i\vartheta - 2\cos\omega}}.$$

Und die hier noch vorhandene disponible Constante C_q mag so gewählt werden, dass $L_q(\cos\omega) = 1$ wird für $\omega = \pi$, d. i. für $\cos\omega = -1$. Solches festgesetzt, ergiebt sich also durch Anwendung der Formel (2) auf den Fall $\omega = \pi$:

$$(3)\quad C_q \cdot 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{e^{\frac{1}{2}\vartheta} + e^{-\frac{1}{2}\vartheta}}.$$

Nach der Theorie der Gammafunctionen würde hieraus bereits folgen, dass $C_q = \frac{1}{\cos(q\pi i)}$ ist. Doch werden wir, auch *ohne* diese Theorie, im unmittelbaren Verlauf unserer weiteren Betrachtungen, zu diesem Werthe hingeleitet werden. [Man vergl. (22), Seite 205.]

Ohne Weiteres ist aus (3) ersichtlich, dass C_q einen *bestimmten endlichen* Werth hat. Und ebenso folgt aus (2), dass die Function $L_q(\cos\omega)$ für das Intervall $\cos\omega = -1 \cdots +1$, mit alleiniger Ausnahme des Punktes $\cos\omega = +1$, überall einen *endlichen* Werth hat. Oder ein wenig anders ausgedrückt (nämlich μ statt $\cos\omega$ gesetzt): *Die Function*

$$L_q(\mu) = \frac{2}{\pi C_q}\int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{2(\cos i\vartheta) - 2\mu}} \tag{4}$$

hat im Intervall $\mu = -1 \cdots +1$, *mit alleiniger Ausnahme des Punktes* $\mu = +1$, *überall einen endlichen Werth. Auch hat sie* (nach der für C_q gegebenen Definition) *im Punkte* $\mu = -1$ *den Werth* 1. Es ist also:

$$L_q(-1) = 1, \qquad L_q(+1) = \infty. \tag{5}$$

Wir werden weiterhin sehen, dass diese Function von $\mu = -1$ bis $\mu = +1$ in *beständigem Wachsen* begriffen ist. [Vergl. Seite 203.]

Bezeichnet T den reciproken Werth der gegenseitigen Entfernung irgend zweier Punkte $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$, so ist nach (5) S. 197:

$$T = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a\sqrt{2\cos i(\vartheta - \vartheta_1) - 2\cos\gamma}}. \tag{6}$$

Und hieraus folgt mittelst der Formel (1), falls man daselbst ϑ mit $(\vartheta - \vartheta_1)$ und ω mit γ vertauscht:

$$T = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a}\int_0^\infty dq\, C_q L_q(\cos\gamma) \cdot \cos q(\vartheta - \vartheta_1), \tag{7}$$

woraus z. B., weil $\cos\gamma = \cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi - \varphi_1)$ ist, für $\vartheta_1 = 0$, $\omega_1 = 0$ und für $\vartheta_1 = 0$, $\omega_1 = \pi$ sich die speciellern Formeln ergeben:

$$\text{für}\begin{pmatrix}\vartheta_1 = 0\\ \omega_1 = 0\end{pmatrix}: T = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a\sqrt{2\cos i\vartheta - 2\cos\omega}} = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a}\int_0^\infty dq\, C_q L_q(\cos\omega)\cdot\cos q\vartheta, \tag{7a}$$

$$\text{für}\begin{pmatrix}\vartheta_1 = 0\\ \omega_1 = \pi\end{pmatrix}: T = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a\sqrt{2\cos i\vartheta + 2\cos\omega}} = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a}\int_0^\infty dq\, C_q L_q(-\cos\omega)\cdot\cos q\vartheta, \tag{7b}$$

wobei zu bemerken ist, dass der Punkt $\vartheta_1 = 0$, $\omega_1 = 0$ (in beliebiger Richtung) im Unendlichen liegt, und dass andererseits der Punkt

$\vartheta_1 = 0$, $\omega_1 = \pi$ identisch ist mit dem Anfangspunkt 0 unseres Coordinatensystems, also in der Mitte liegt zwischen den beiden Polen A und A'.

Die reciproke Entfernung T genügt der Laplace'schen partiellen Differentialgleichung $\Delta T = 0$; und hieraus wird sich, falls man z. B. für T den Werth (7b) substituirt, eine *gewisse gewöhnliche Differentialgleichung ergeben für die Function* L.

Um näher hierauf einzugehen, setzen wir $\cos\omega = \mu$, und

(8) $$L_q(-\mu) = K_q(\mu);$$

wodurch die Formel (7b) die Gestalt annimmt:

(9) $$T = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a\sqrt{2(\cos i\vartheta) + 2\mu}} = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a}\int_0^\infty dq\, C_q K_q(\mu)\cdot\cos q\vartheta = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a}\, f,$$

wo f als augenblickliche Abkürzung dienen soll für das angegebene Integral. Bildet man nun die Gleichung $\Delta T = 0$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die in (10) S. 198 angegebene Transformation:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega^2} + \frac{\cos\omega}{\sin\omega}\frac{\partial f}{\partial\omega}\right) - \frac{f}{4} = 0,$$

oder, falls man $\cos\omega = \mu$ setzt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial f}{\partial\mu}\right) - \frac{f}{4} = 0;$$

und hieraus folgt, falls man für f seine eigentliche Bedeutung substituirt:

$$\int_0^\infty dq\, C_q\left[-q^2 K + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial K}{\partial\mu}\right) - \frac{K}{4}\right]\cos q\vartheta = 0,$$

wo K zur Abkürzung steht für $K_q(\mu)$. Aus der letzten Formel ergiebt sich, dass der daselbst in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck für sich $= 0$ sein muss. *Demgemäss genügt also die Function* $K_q(\mu)$ *der Differentialgleichung:*

(10) $$-\left(q^2 + \tfrac{1}{4}\right)F + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial F}{\partial\mu}\right) = 0,$$

welche auch so geschrieben werden kann:

(11) $$\left(iq - \tfrac{1}{2}\right)\left(iq + \tfrac{1}{2}\right)F + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial F}{\partial\mu}\right) = 0.$$

Und derselben Differentialgleichung genügt offenbar auch die Function $K_q(-\mu)$, *d. i. die Function* $L_q(\mu)$. Vergl. (8).

Vergleicht man diese Differentialgleichung mit der der Kugelfunctionen:

(12) $$n(n+1)f + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial f}{\partial\mu}\right) = 0,$$

deren particulare Integrale $P_n(\mu)$ und $Q_n(\mu)$ sind, so bemerkt man, dass es nur der Substitution $n = iq - \frac{1}{2}$ bedarf, um völlige Uebereinstimmung herbeizuführen. Es sind also, können wir sagen, $K_q(\mu)$ und $L_q(\mu)$ gewisse Lösungen derjenigen Differentialgleichung, deren particulare Integrale $P_{iq-\frac{1}{2}}(\mu)$ und $Q_{iq-\frac{1}{2}}(\mu)$ sind. Somit folgt:

$$(13)\qquad \begin{aligned} K_q(\mu) &= A P_{iq-\frac{1}{2}}(\mu) + B Q_{iq-\frac{1}{2}}(\mu), \\ L_q(\mu) &= C P_{iq-\frac{1}{2}}(\mu) + D Q_{iq-\frac{1}{2}}(\mu), \end{aligned}$$

wo A, B, C, D noch unbekannte Constanten (d. i. von μ unabhängige Grössen) vorstellen.

§ 3.

Entwicklung der Kegelfunctionen nach Potenzen, und ferner nach Kugelfunctionen.

Substituirt man in der Formel (4) Seite 199:

$$(1)\qquad L_q(\mu) = \frac{2}{\pi C_q} \int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{2(\cos i\vartheta) - 2\mu}}$$

die nach Potenzen von μ fortschreitende Entwicklung:

$$\frac{1}{\sqrt{(\cos i\vartheta) - \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\cos i\vartheta}} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{(\cos i\vartheta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \frac{\mu^2}{(\cos i\vartheta)^{\frac{5}{2}}} + \cdots,$$

so ergiebt sich:

$$(2)\qquad L_q(\mu) = (\alpha + \beta\mu^2 + \gamma\mu^4 + \cdots) + (a\mu + b\mu^3 + c\mu^5 + \cdots);$$

und zwar erhält man für $\alpha, \beta, \cdots a, b, \cdots$ die Werthe:

$$(3)\qquad \alpha = \frac{1}{C_q}\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right) \int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{\cos i\vartheta}}, \qquad a = \frac{1}{C_q}\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right) \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{(\cos i\vartheta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(4)\qquad \beta = \frac{1}{C_q}\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right) \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{(\cos i\vartheta)^{\frac{5}{2}}}, \quad b = \frac{1}{C_q}\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right) \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} \int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{(\cos i\vartheta)^{\frac{7}{2}}},$$

etc. etc. etc. etc.

Bequemer aber kann man diese Coefficienten, abgesehen von den beiden ersten (α und a) finden mittelst der für $L_q(\mu)$ geltenden Differentialgleichung (10) Seite 200:

$$(5)\qquad \left(q^2 + \frac{1}{4}\right) F + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial F}{\partial\mu}\right) = 0,$$

Substituirt man nämlich hier für $F = L_q(\mu)$ die Entwicklung (2), so erhält man auf der linken Seite eine nach Potenzen von μ fortschreitende

Reihe, deren Coefficienten einzeln $= 0$ sein müssen. U. s. w. In solcher Weise erhält man schliesslich:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \beta &= \frac{q_1}{1\cdot 2}\,\alpha, & b &= \frac{q_3}{1\cdot 2\cdot 3}\,a,\\ \gamma &= \frac{q_1\cdot q_5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\alpha, & c &= \frac{q_3\cdot q_7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a,\\ \delta &= \frac{q_1\cdot q_5\cdot q_9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\,\alpha, & d &= \frac{q_3\cdot q_7\cdot q_{11}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\,a,\\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

wo $q_1, q_3, q_5, q_7, \cdots$ folgende Bedeutungen haben:

$$(6\text{a})\qquad q_1 = q^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2,\quad q_3 = q^2 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2,\quad q_5 = q^2 + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2,\ \text{etc. etc.}$$

Da übrigens $K_q(\mu) = L_q(-\mu)$ ist, so folgt aus (2):

$$(7)\qquad \begin{aligned} L_q(\mu) &= (\alpha + \beta\mu^2 + \gamma\mu^4 + \cdots) + (a\mu + b\mu^3 + c\mu^5 + \cdots),\\ K_q(\mu) &= (\alpha + \beta\mu^2 + \gamma\mu^4 + \cdots) - (a\mu + b\mu^3 + c\mu^5 + \cdots); \end{aligned}$$

und es sind also $L_q(\mu)$ und $K_q(\mu)$ *wesentlich verschiedene* Functionen, mithin zu bezeichnen als *die beiden particularen Integrale der Differentialgleichung* (5).

Eine zweite Entwicklung. — Wir können die Formel (1), falls wir $\mu = \cos\omega$ setzen, auch so schreiben:

$$L_q(\cos\omega) = \frac{2}{\pi C_q}\int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta\cdot d\vartheta}{\sqrt{2(1+\cos i\vartheta) - 2(1+\cos\omega)}},$$

mithin auch so:

$$(8)\qquad L_q(\cos\omega) = \frac{1}{\pi C_q}\int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta\cdot d\vartheta}{\sqrt{\left(\cos\frac{i\vartheta}{2}\right)^2 - \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2}}.$$

Substituirt man aber hier die Entwicklung:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\cos\frac{i\vartheta}{2}\right)^2 - \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{i\vartheta}{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{i\vartheta}{2}\right)^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^4}{\left(\cos\frac{i\vartheta}{2}\right)^5} + + \cdots,$$

so ergiebt sich:

$$(9)\qquad L_q(\cos\omega) = \mathsf{A} + \mathsf{B}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2 + \Gamma\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^4 + \cdots,$$

wo $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \cdots$ die Werthe haben:

$$(10) \qquad \mathsf{A} = \frac{1}{\pi C_q} \int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{\cos \frac{i\vartheta}{2}},$$

$$(11) \qquad \mathsf{B} = \frac{1}{\pi C_q} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{\left(\cos \frac{i\vartheta}{2}\right)^3},$$

etc. etc.

Uebrigens folgt aus (9) für $\omega = \pi$ sofort: $L_q(-1) = \mathsf{A}$. Nach unseren früheren Festsetzungen [vgl. (5) Seite 199] ist aber $L_q(-1) = 1$. Folglich auch:

$$(12) \qquad \mathsf{A} = 1.$$

Auch die übrigen Coefficienten B, Γ, $\cdots$ lassen sich viel einfacher [als in (10), (11) angedeutet] ausdrücken, und zwar mittelst der Differentialgleichung (5).

Ohne auf die betreffenden einfachen Operationen hier näher einzugehen, wollen wir nur das Resultat derselben mittheilen, welches unter Rücksicht auf (9) und namentlich auf (12) sich folgendermassen darstellt:

$$(13) \quad L_q(\cos\omega) = 1 + \frac{q_1}{1^2}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{q_1 q_3}{(1\cdot 2)^2}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^4 + \\ + \frac{q_1 q_3 q_5}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^6 + \cdots,$$

wo q_1, q_3, q_5, $\cdots$ die Bedeutungen (6a) haben. Hieraus ergiebt sich durch Vertauschung von ω mit $(\pi - \omega)$ sofort:

$$(14) \quad K_q(\cos\omega) = 1 + \frac{q_1}{1^2}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{q_1 q_3}{(1\cdot 2)^2}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^4 + \\ + \frac{q_1 q_3 q_5}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^6 + \cdots.$$

Da die Grössen q_1, q_3, q_5, $\cdots$ durchweg positiv sind, so folgt aus (13), wenn man daselbst $\cos\omega = \mu$, mithin $\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2 = \frac{1+\mu}{2}$ substituirt, sofort, dass $L_q(\mu)$ *in beständigem Wachsen begriffen ist, während* μ *von* -1 *bis* $+1$ *geht;* was mit unserer früheren Behauptung (Seite 199) in Einklang steht.

Vergleicht man übrigens die Formel (14) mit der bekannten für die Kugelfunction $P_n(\cos\omega)$ geltenden Formel:

$$P_n(\cos\omega) = 1 - \frac{n(n+1)}{1^2}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^2 + \\ + \frac{(n-1)\,n(n+1)(n+2)}{(1\cdot 2)^2}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^4 - + \cdots,$$

und beachtet, dass nach (6a)

$q_1 = -\left(iq-\frac{1}{2}\right)\left(iq+\frac{1}{2}\right)$, $q_3 = -\left(iq-\frac{3}{2}\right)\left(iq+\frac{3}{2}\right)$, $q_5 =$ etc. etc.

ist, so ergiebt sich sofort: $K_q(\cos\omega) = P_{iq-\frac{1}{2}}(\cos\omega)$, oder einfacher geschrieben:

$$K_q(\mu) = P_{iq-\frac{1}{2}}(\mu), \tag{15}$$

was in Einklang ist mit den Formeln (13) Seite 201.

Entwicklung nach Kugelfunctionen. — Es ist $\psi = 2\cos i\vartheta - 2\cos\omega$, mithin:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = \frac{1}{\sqrt{2\cos i\vartheta - 2\cos\omega}} = \frac{e^{-\frac{\vartheta}{2}}}{\sqrt{1-2e^{-\vartheta}\cos\omega + e^{-2\vartheta}}}; \tag{16}$$

und hieraus folgt, falls ϑ *positiv* ist:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = \frac{1}{\sqrt{2\cos i\vartheta - 2\cos\omega}} = \tag{17}$$

$$= e^{-\frac{\vartheta}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n\vartheta} P_n(\cos\omega) = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-N\vartheta} P_n(\cos\omega),$$

wo N zur Abkürzung steht für $\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Substituirt man aber diese Entwicklung (17) in die Formel (1):

$$C_q L_q(\cos\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{2\cos i\vartheta - 2\cos\omega}}, \tag{18}$$

so folgt sofort:

$$C_q L_q(\cos\omega) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n P_n(\cos\omega),$$

wo $A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-N\vartheta}\cos q\vartheta \cdot d\vartheta = \frac{2}{\pi}\frac{N}{N^2+q^2}$ ist. Setzt man also $\cos\omega = \mu$, so ergiebt sich schliesslich:

$$C_q L_q(\mu) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{N}{N^2+q^2} P_n(\mu), \tag{19}$$

und folglich, falls man $-\mu$ statt μ setzt:

$$C_q K_q(\mu) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n N}{N^2+q^2} P_n(\mu); \tag{20}$$

ferner folgt aus (19), falls man $\mu = -1$ setzt, und Rücksicht nimmt auf (5) Seite (199):

$$C_q = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n N}{N^2+q^2}, \quad \text{wo überall } N = n+\tfrac{1}{2} \text{ ist.} \tag{21}$$

Hält man fest an dieser Bedeutung von N, so gilt bekanntlich für jedwedes Argument z die Formel:

$$\frac{1}{\cos z} = 2\pi \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n N}{(N\pi)^2 - z^2},$$

welche z. B. für $z = q\pi i$ die Gestalt annimmt:

$$\frac{1}{\cos(q\pi i)} = 2\pi \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n N}{(N\pi)^2 + (q\pi)^2}.$$

Somit folgt aus (21):

$$C_q = \frac{1}{\cos(q\pi i)}. \tag{22}$$

Aus den Formeln (19), (20) folgt durch Multiplication mit $P_n(\mu)$ und Integration sofort:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, L_q(\mu)\, d\mu = \frac{2}{\pi C_q} \frac{1}{N^2 + q^2}, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{23}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, K_q(\mu)\, d\mu = \frac{2}{\pi C_q} \frac{(-1)^n}{N^2 + q^2}, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{24}$$

Nimmt man ferner für q irgend zwei Werthe q und ϱ, und multiplicirt man die aus (19), (20) für $L_q(\mu)$ und $K_\varrho(\mu)$ sich ergebenden Entwicklungen *miteinander*, und integrirt hierauf nach μ, so erhält man

$$\int_{-1}^{+1} L_q(\mu)\, K_\varrho(\mu)\, d\mu = \frac{4}{\pi^2 C_q C_\varrho} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n N}{(N^2 + q^2)(N^2 + \varrho^2)} =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 C_q C_\varrho} \frac{1}{q^2 - \varrho^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{N}{N^2 + \varrho^2} - \frac{N}{N^2 + q^2}\right),$$

also mit Rücksicht auf (21):

$$= \frac{2}{\pi C_q C_\varrho} \frac{C_\varrho - C_q}{q^2 - \varrho^2},$$

also schliesslich:

$$\int_{-1}^{+1} L_q(\mu)\, K_\varrho(\mu)\, d\mu = \frac{2}{\pi(q^2 - \varrho^2)} \left(\frac{1}{C_q} - \frac{1}{C_\varrho}\right) = \frac{2[\cos(q\pi i) - \cos(\varrho\pi i)]}{\pi(q^2 - \varrho^2)}. \tag{25}$$

Hieraus folgt insbesondere für $\varrho = q$:

$$\int_{-1}^{+1} L_q(\mu)\, K_q(\mu)\, d\mu = \frac{-i \sin(q\pi i)}{q} = \frac{e^{q\pi} - e^{-q\pi}}{2q}, \tag{26}$$

also z. B.:

$$(27) \qquad \int_{-1}^{+1} L_0(\mu)\, K_0(\mu)\, d\mu = \pi.$$

Ferner ergiebt sich aus den Formeln (19), (20) in analoger Weise:

$$(28) \qquad \int_{-1}^{+1} L_q(\mu)\, L_\varrho(\mu)\, d\mu = \int_{-1}^{+1} K_q(\mu)\, K_\varrho(\mu)\, d\mu =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 C_q C_\varrho} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{N}{(N^2+q^2)(N^2+\varrho^2)},$$

d. i.

$$= \frac{4}{\pi^2 C_q C_\varrho} \frac{1}{q^2-\varrho^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{N}{N^2+\varrho^2} - \frac{N}{N^2+q^2} \right).$$

Diese beiden Summen in der letzten Zeile $\left(\text{nämlich von } \frac{N}{N^2+\varrho^2} \text{ und } \frac{N}{N^2+q^2}\right)$ sind *jede für sich betrachtet* divergent. Doch hat die ursprüngliche Summe in der nächstvorhergehenden Zeile einen *bestimmten endlichen* Werth, den ich aber einstweilen nicht in Form eines geschlossenen Ausdrucks darzustellen vermag.

§ 4.

Ueber das Unendlichwerden der Kegelfunctionen.

Die Kegelfunction $L_q(\mu)$ ist $= 1$ für $\mu = -1$, und bleibt sodann, während μ das Intervall $-1 \cdots +1$ durchläuft, in *beständigem Wachsen*, bis sie endlich für $\mu = +1$ ins Unendliche ansteigt (vgl. Seite 199 und 203). Das Verhalten der Function $K_q(\mu) = L_q(-\mu)$ ist offenbar das Entgegengesetzte. In der That werden diese Functionen $L_q(\mu)$ und $K_q(\mu)$ durch zwei Curven dargestellt sein, welche zu einander Spiegelbilder sind in Bezug auf das im Anfangspunkt $\mu = 0$ auf der μ Axe errichtete Perpendikel. — Die Art und Weise nun, in welcher $K_q(\mu)$ und $L_q(\mu)$ resp. in den Punkten $\mu = -1$ und $\mu = +1$ ins Unendliche ansteigen, wollen wir näher untersuchen, und zwar mittelst der für dieselben geltenden Differentialgleichung (10) Seite 200:

$$(1) \qquad -q_1 F + \frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial F}{\partial \mu}\right) = 0, \quad \text{wo} \quad q_1 = q^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2.$$

Zuvor aber sei bemerkt, dass nach (13) Seite 203:

$$(2) \qquad L_q(\mu) = 1 + \frac{q_1}{1^2}\left(\frac{1+\mu}{2}\right) + \frac{q_1 q_3}{(1\cdot 2)^2}\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2 + \frac{q_1 q_3 q_5}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^3 + \cdots$$

ist; woraus sofort sich ergiebt:

$$(3)\quad \begin{cases} L_q(-1) = 1, \\ L_q'(-1) = \frac{q_1}{2}, \\ L_q''(-1) = \frac{q_1 q_3}{2\cdot 4}, \\ L_q'''(-1) = \frac{q_1 q_3 q_5}{2\cdot 4\cdot 6}, \\ \text{etc.} \end{cases} \quad \text{mithin *)}: \begin{cases} K_q(1) = +1, \\ K_q'(1) = -\frac{q_1}{2}, \\ K_q''(1) = +\frac{q_1 q_3}{2\cdot 4}, \\ K_q'''(1) = -\frac{q_1 q_3 q_5}{2\cdot 4\cdot 6}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Da nun $K = K_q(\mu)$ und $L = L_q(\mu)$ der Differentialgleichung (1) Genüge leisten, so hat man:

$$(4)\quad \begin{aligned} &-q_1 K - 2\mu K' + (1-\mu^2)K'' = 0, \\ &-q_1 L - 2\mu L' + (1-\mu^2)L'' = 0; \quad \left[\text{wo } q_1 = q^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right] \end{aligned}$$

multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit L und $(-1)K$, und addirt, so erhält man:

$$-2\mu(LK' - KL') + (1-\mu^2)(LK'' - KL'') = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{\partial[(1-\mu^2)(LK' - KL')]}{\partial\mu} = 0,$$

mithin:

$$(1-\mu^2)(LK' - KL') = \text{Const.}$$

Bezeichnen wir diese Const. mit G, oder vielmehr, was für die weiteren Betrachtungen zweckmässiger ist, mit $\left(-\frac{2}{\pi G}\right)$, so erhalten wir:

$$(5)\quad LK' - KL' = -\frac{2}{\pi G(1-\mu^2)}.$$

Mittelst dieser Gleichung aber muss es möglich sein, L durch K auszudrücken. Setzen wir zu diesem Zweck $L = Kf$, mithin $L' = Kf' + K'f$, so geht die Gleichung (5) über in:

$$-K^2 f' = -\frac{2}{\pi G(1-\mu^2)};$$

woraus sich der Werth von f sofort bestimmt. Substituiren wir aber diesen Werth in die Relation $L = Kf$, so folgt sofort:

$$(6)\quad L = K\left(\frac{2}{\pi G}\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)K^2}\right).$$

*) Es ist nämlich: $K_q(\mu) = L_q(-\mu)$, also, falls man nach μ differenzirt: $K_q'(\mu) = (-1)L_q'(-\mu)$, oder falls man im Ganzen n Male differenzirt:

$$K_q^{(n)}(\mu) = (-1)^n L_q^{(n)}(\mu).$$

Nun ist nach (2):

$$K = K_q(\mu) = 1 + \frac{q_1}{1^2}\left(\frac{1-\mu}{2}\right) + \frac{q_1 q_3}{(1\cdot 2)^2}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2 + \cdots, \tag{7}$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$K = 1 + \alpha(1-\mu) + \alpha'(1-\mu)^2 + \alpha''(1-\mu)^3 + \cdots, \tag{8}$$

oder falls man $1 - \mu = \xi$ setzt:

$$K = 1 + \alpha\xi + \alpha'\xi^2 + \alpha''\xi^3 + \cdots, \tag{9}$$

mithin:

$$\frac{1}{K^2} = 1 + \beta\xi + \beta'\xi^2 + \beta''\xi^3 + \cdots,$$

wo die β constante Coefficienten sind, auf deren Werthe es für unsere Zwecke nicht weiter ankommt. Gleichzeitig wird, weil $1 - \mu = \xi$ sein soll:

$$\frac{1}{1-\mu^2} = \frac{1}{2\xi - \xi^2} = \frac{1}{2\xi}(1 + \gamma\xi + \gamma'\xi^2 + \gamma''\xi^3 + \cdots),$$

Durch Multiplication dieser Formel mit der vorhergehenden ergiebt sich:

$$\frac{1}{(1-\mu^2)K^2} = \frac{1}{2\xi}(1 + \delta\xi + \delta'\xi^2 + \delta''\xi^3 + \cdots),$$

und folglich:

$$\int \frac{d\mu}{(1-\mu^2)K^2} = \int \frac{(-1)\,d\xi}{(1-\mu^2)K^2} = -\frac{1}{2}\left(\log\xi + \delta\xi + \frac{\delta'}{2}\xi^2 + \cdots + \varkappa\right),$$

wo $\varkappa$ die Integrationsconstante repräsentirt. Substituiren wir endlich diesen Werth in (6), so folgt:

$$L = -\frac{K\log\xi}{\pi G} - \frac{K}{\pi G}\left(\varkappa + \delta\xi + \frac{\delta'}{2}\xi^2 + \cdots\right),$$

oder, falls wir im *zweiten* Gliede für K die Entwicklung (9) substituiren:

$$L = -\frac{K\log\xi}{\pi G} + (\Delta + \Delta'\xi + \Delta''\xi^2 + \cdots),$$

wo die Δ (ebenso wie die $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa$) constante Coefficienten sind, auf deren Werthe es uns nicht weiter ankommt. Die letzte Formel endlich gewinnt, falls man für ξ seine eigentliche Bedeutung $(1-\mu)$ restituirt, und die Ordnungszahl q hinzufügt, folgende Gestalt:

$$L_q(\mu) = -\frac{K_q(\mu)\cdot\log(1-\mu)}{\pi G_q} + \Delta_q + \Delta_q'(1-\mu) + \Delta_q''(1-\mu)^2 + \cdots \tag{10}$$

Diese Formel (10) *aber zeigt, dass $L_q(\mu)$ im Punkte $\mu = +1$ logarithmisch unendlich wird.* Gleichzeitig ergeben sich aus derselben folgende Relationen:

$$
(11)\quad \begin{cases}
L_q(1) = \infty, & \lim\limits_{\mu=1} (1-\mu)\, L_q(\mu) = 0, \\
L_q'(1) = \infty, & \lim\limits_{\mu=1} (1-\mu)\, L_q'(\mu) = \frac{1}{\pi G_q}, \\
L_q''(1) = \infty, & \lim\limits_{\mu=1} (1-\mu)^2\, L_q''(\mu) = \frac{1}{\pi G_q}, \\
L_q'''(1) = \infty, & \lim\limits_{\mu=1} (1-\mu)^3\, L_q'''(\mu) = \frac{1\cdot 2}{\pi G_q}, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
L_q^{(j)}(1) = \infty, & \lim\limits_{\mu=1} (1-\mu)^j L_q^{(j)}(\mu) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots (j-1)}{\pi G_q}.
\end{cases}
$$

Es fehlt uns noch die Kenntniss der bei (5) hinzugetretenen Constanten G oder G_q. Um diese zu finden, greifen wir zurück zu der für $L = L_q(\mu)$ geltenden Differentialgleichung (4), und combiniren dieselbe mit der für die Kugelfunction $P = P_n(\mu)$ gültigen Gleichung. Aus diesen beiden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
-\left(q^2 + \tfrac{1}{4}\right) L - 2\mu L' + (1-\mu^2)\, L'' &= 0, \\
n(n+1)\; P - 2\mu P' + (1-\mu^2)\, P'' &= 0
\end{aligned}
$$

folgt sofort:

$$
-\left[n(n+1) + \left(q^2 + \tfrac{1}{4}\right)\right] PL - 2\mu(PL' - LP') \\
+ (1-\mu^2)\,(PL'' - LP'') = 0,
$$

oder was dasselbe ist:

$$
-\left[\left(n + \tfrac{1}{2}\right)^2 + q^2\right] PL + \frac{\partial[(1-\mu^2)\,(PL' - LP')]}{\partial\mu} = 0;
$$

woraus durch Integration sich ergiebt:

$$
(N^2 + q^2)\int_{-1}^{+1} PL\,d\mu = +\Big((1-\mu^2)\,(PL' - LP')\Big)_{\mu=1} \\
- \Big((1-\mu^2)\,(PL' - LP')\Big)_{\mu=-1};
$$

wo wiederum $N = n + \frac{1}{2}$ sein soll. Das *zweite* Glied der rechten Seite *verschwindet*, wie ein Blick auf die Formeln (3) Seite 207 sofort erkennen lässt. Das *erste* Glied hingegen bedarf, weil $L(\mu)$ und $L'(\mu)$ für $\mu = 1$ unendlich gross sind, einer genaueren Untersuchung. Zunächst können wir unsere Formel so schreiben:

$$
(N^2 + q^2)\int_{-1}^{+1} P_n L_q\,d\mu = \\
\Big(\underbrace{(1+\mu)\,P_n(\mu)}_{\alpha} \cdot \underbrace{(1-\mu)\,L_q'(\mu)}_{\beta} - \underbrace{(1+\mu)\,P_n'(\mu)}_{\gamma} \cdot \underbrace{(1-\mu)\,L_q(\mu)}_{\delta}\Big)_{\mu=1}.
$$

Von den hier auftretenden Producten α, β, γ, δ, wird für $\mu = 1$ das $\beta = \frac{1}{\pi G_q}$, und das $\delta = 0$, nach (11). Ferner wird für $\mu = 1$ bekanntlich das $\alpha = 2$, und das γ jedenfalls *endlich* sein*). Somit folgt:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, L_q(\mu)\, d\mu = \frac{2}{\pi G_q}\, \frac{1}{N^2 + q^2}\,.$$

Vergleichen wir aber diese Formel mit der früher gefundenen (23) Seite 205, so ergiebt sich sofort, dass

$$(12) \qquad G_q = C_q, \quad \text{d. i.} = \frac{1}{\cos(q\pi i)}$$

ist. Dieser Werth von G_q wird also nachträglich in allen Formeln des gegenwärtigen Paragraphen zu substituiren sein.

Somit erhalten wir z. B. aus (5):

$$(13) \qquad L_q(\mu)\, K_q'(\mu) - K_q(\mu)\, L_q'(\mu) = -\frac{2}{\pi C_q (1-\mu^2)}\,,$$

oder, falls wir $\mu = 0$ setzen, und beachten, dass $L_q(0) = K_q(0)$, hingegen $L_q'(0) = -K_q'(0)$ ist:

$$(14) \qquad K_q(0)\, K_q'(0) = -\frac{1}{\pi C_q} = -\frac{\cos(q\pi i)}{\pi}\,,$$

oder was dasselbe ist:

$$(15) \qquad L_q(0)\, L_q'(0) = +\frac{1}{\pi C_q} = +\frac{\cos(q\pi i)}{\pi}\,.$$

Hieran knüpft sich eine wichtige Bemerkung hinsichtlich der früher gefundenen Entwicklung (2) Seite 201:

$$(16) \quad L_q(\mu) = (\alpha + \beta\mu^2 + \gamma\mu^4 + \cdots) + (a\mu + b\mu^3 + c\mu^5 + \cdots).$$

Offenbar sind nämlich hier α und a resp. identisch mit $L_q(0)$ und $L_q'(0)$; somit folgt aus (15):

$$(17) \qquad \alpha a = \frac{1}{\pi C_q} = \frac{\cos(q\pi i)}{\pi}\,;$$

wodurch a auf α reducirt ist. *Man hat also für α das in* (3) Seite 201 *angegebene Integral zu nehmen. Sodann aber kann man alle übrigen Coefficienten β, γ, δ, $\cdots$ und a, b, c, d, $\cdots$ in einfacher Weise durch α ausdrücken, indem man theils die Relationen* (6) Seite 202, *theils die soeben gefundene neue Relation* (17) *in Anwendung bringt.*

---

*) Beiläufig bemerkt $+ n(n+1)$.

§ 5.

Die adjungirten Kegelfunctionen.

Differenzirt man die für $K_q(\mu)$ und $L_q(\mu)$ geltende Differentialgleichung (4) Seite 207:

$$(0) \qquad - q_1 f - 2\mu f' + (1-\mu^2) f'' = 0,$$

wiederholt noch μ, so erhält man:

$$(1) \qquad - q_3 f' - 4\mu f'' + (1-\mu^2) f''' = 0,$$

$$(2) \qquad - q_5 f'' - 6\mu f''' + (1-\mu^2) f'''' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(j) \qquad - q_{2j+1} f^{(j)} - (2j+2)\mu f^{(j+1)} + (1-\mu^2) f^{(j+2)} = 0,$$

wo $q_1, q_3, q_5, \cdots$ die früher [(6a) Seite 202] festgesetzten Bedeutungen haben. Aus diesen Gleichungen kann man, indem man $\mu = -1$ setzt, sofort die Werthe von $L_q(-1)$, $L_q'(-1)$, $L_q''(-1)$, $\cdots$ berechnen, und erhält alsdann *dieselben* Werthe, welche wir schon früher (Seite 207) auf andrem Wege gefunden haben.

Führt man in der Formel (j) statt f eine andere Function F ein mittelst der Relation:

$$(1-\mu^2)^{\frac{j}{2}} f^{(j)} = F,$$

so gewinnt jene Formel folgende Gestalt:

$$(\mathrm{I}) \qquad -\left(q_1 + \frac{j^2}{1-\mu^2}\right) F + \frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial F}{\partial \mu}\right) = 0, \quad \text{wo } q_1 = q^2 + \frac{1}{4}\cdot$$

Diese Differentialgleichung wird demnach die beiden particularen Integrale besitzen:

$$(\mathrm{II}) \qquad F = \begin{cases} (1-\mu^2)^{\frac{j}{2}} K_q^{(j)}(\mu) = K_{qj}(\mu), \\ (1-\mu^2)^{\frac{j}{2}} L_q^{(j)}(\mu) = L_{qj}(\mu); \end{cases}$$

wo die Bezeichnungen $K_{qj}(\mu)$ und $L_{qj}(\mu)$ zur Abkürzung dienen sollen. Die in dieser Weise definirten Functionen $K_{qj}(\mu)$ und $L_{qj}(\mu)$ spielen bei unseren weiteren Betrachtungen eine wichtige Rolle, und mögen die *adjungirten Kegelfunctionen* heissen.

§ 6.

Fortsetzung zu § 2., betreffend die analytische Darstellung der reciproken Entfernung zweier Punkte.

In der schon gefundenen Formel (7) Seite 199:

$$(1) \qquad T = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a}\int_0^\infty dq\, C_q L_q(\cos\gamma)\cdot\cos q(\vartheta-\vartheta_1)$$

ist $\cos\gamma = \cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi-\varphi_1)$, und ferner nach (13) Seite 203:

$$(2)\qquad L_q(\cos\gamma) = 1 + \frac{q_1}{1^2}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{q_1 q_2}{(1\cdot 2)^2}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^4 + \cdots$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, dieses $L_q(\cos\gamma)$ nach den Cosinus der Vielfachen von $(\varphi-\varphi_1)$ zu entwickeln, also in eine Reihe von der Form:

$$(3)\qquad L_q(\cos\gamma) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j f_{qj}(\mu,\mu_1)\cos j(\varphi-\varphi_1)$$

wo $\varepsilon_0 = 1$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = 2$ sein soll, während μ und μ_1 zur Abkürzung stehen resp. für $\cos\omega$ und $\cos\omega_1$.

Eine solche Entwicklung muss immer möglich sein, sobald wir festsetzen, dass

$$(4)\qquad \omega < \omega_1, \quad \text{d. i.} \quad \mu > \mu_1$$

sein soll. Denn γ repräsentirt den Winkel, unter welchem die beiden über der Linie AA', als gemeinschaftlicher Sehne stehenden, resp. durch $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ gehenden Kreisbogen im Punkte A gegen einander geneigt sind. Zufolge der Festsetzung (4) können aber diese Bogen niemals untereinander identisch sein, mithin der Winkel γ niemals verschwinden. Oder ein wenig anders ausgedrückt: Zufolge unserer Festsetzung (4) kann $\cos\gamma$ niemals $= 1$, mithin $L_q(\cos\gamma)$ *niemals unendlich* werden. Denken wir uns also für μ und μ_1 irgend zwei der Festsetzung (4) entsprechende Werthe gegeben, so wird $L_q(\cos\gamma)$ eine *stets endlich bleibende* Function des Argumentes $(\varphi-\varphi_1)$ sein, und folglich entwickelbar sein nach den Cosinus der Vielfachen von $(\varphi-\varphi_1)$. Die Sinus können nämlich nicht vorkommen, wie aus (2) ersichtlich ist, sobald man nur beachtet, dass $\cos\gamma = \cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi-\varphi_1)$ ist.

Setzt man $\omega = 0$, mithin $\mu = 1$, so folgt aus (3), (4):

$$L_q(\mu_1) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j f_{qj}(1,\mu_1)\cos j(\varphi-\varphi_1), \quad \text{für} \quad 1 > \mu_1.$$

Hieraus aber folgt, weil die linke Seite von $(\varphi-\varphi_1)$ unabhängig ist, sofort:

$$(4\text{a})\qquad \left.\begin{cases} f_{q0}(1,\mu_1) = L_q(\mu_1), \\ f_{qj}(1,\mu_1) = 0, \quad \text{für} \quad j = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}\right\} \text{für } 1 > \mu_1.$$

Setzt man andererseits $\omega_1 = \pi$, mithin $\mu_1 = -1$, so folgt aus (3), (4)

$$L_q(-\mu) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j f_{qj}(\mu,-1)\cos j(\varphi-\varphi_1), \quad \text{für} \quad \mu > -1;$$

und hieraus:

$$\text{(4b)}\qquad \left.\begin{array}{l} f_{q0}(\mu,-1)=L_q(-\mu)=K_q(\mu) \\ f_{qj}(\mu,-1)=0, \quad \text{für} \quad j=1,2,3,\cdots \end{array}\right\} \text{ für } \quad \mu>-1.$$

Diese einfachen Bemerkungen vorangeschickt, wollen wir nun die allgemeinen Werthe der $f_{qj}(\mu;\mu_1)$ zu bestimmen suchen. Zu diesem Zweck werden wir Gebrauch machen von derjenigen Differentialgleichung, welche aus der Laplace'schen Gleichung $\Delta T=0$ sich ergiebt für den in $T(1)$ enthaltenen Ausdruck $L_q(\cos\gamma)$.

Bezeichnet man das in (1) auftretende Integral zur augenblicklichen Abkürzung mit J, so nimmt die Gleichung $\Delta T=0$ mittelst der Transformation (10) Seite 198 folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\vartheta^2}+\left(\frac{\partial^2 J}{\partial\omega^2}+\frac{\cos\omega}{\sin\omega}\,\frac{\partial J}{\partial\omega}\right)+\frac{1}{\sin^2\omega}\,\frac{\partial^2 J}{\partial\varphi^2}-\frac{J}{4}=0,$$

oder, falls man $\cos\omega=\mu$ setzt, folgende:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\,\frac{\partial J}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{\partial^2 J}{\partial\varphi^2}-\frac{J}{4}=0.$$

Substituirt man nun hier für J seine eigentliche Bedeutung:

$$J=\int_0^\infty dq\,C_q\,L_q(\cos\gamma)\cdot\cos q\,(\vartheta-\vartheta_1),$$

so findet man für die Function $L=L_q(\cos\gamma)$ folgende Differentialgleichung:

$$\text{(5)}\qquad \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\,\frac{\partial L}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{\partial^2 L}{\partial\varphi^2}-\left(q^2+\tfrac{1}{4}\right)L=0.$$

Und substituirt man hier für $L=L_q(\cos\gamma)$ die Entwicklung (3), so erhält man für die Function $f=f_{qj}(\mu,\mu_1)$ folgende Gleichung:

$$\text{(6)}\qquad \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\,\frac{\partial f}{\partial\mu}\right)-\left(\left(q^2+\tfrac{1}{4}\right)+\frac{j^2}{1-\mu^2}\right)f=0.$$

Und in ganz analoger Weise wird man andererseits, falls man den Punkt $(\vartheta,\omega,\varphi)$ festhält, hingegen $(\vartheta_1,\omega_1,\varphi_1)$ als variabel ansieht, für diese Function f auch folgende Differentialgleichung erhalten:

$$\text{(7)}\qquad \frac{\partial}{\partial\mu_1}\left((1-\mu_1^2)\,\frac{\partial f}{\partial\mu_1}\right)-\left(\left(q^2+\tfrac{1}{4}\right)+\frac{j^2}{1-\mu_1^2}\right)f=0.$$

Die Gleichung (6) ist identisch mit der Gleichung (I) des vorhergehenden Paragraphen, und hat also die particularen Integrale $K_{qj}(\mu)$ und $L_{qj}(\mu)$. Somit folgt aus derselben:

$$\text{(8)}\qquad f=f_{qj}(\mu,\mu_1)=\mathsf{A}K_{qj}(\mu)+\mathsf{B}L_{qj}(\mu),$$

wo A, B Constante sind in Bezug auf μ, also nur noch abhängen können von μ_1, und ausserdem von den Ordnungszahlen q, j. Lässt man nun, was mit unserer Festsetzung (4) in Einklang steht, das $\mu = 1$ werden, so wird das in (8) vorhandene $L_{qj}(\mu)$ *unendlich gross* [vgl. Seite 209]. Und mit Rücksicht hierauf ergiebt sich sofort, dass jenes $L_{qj}(\mu)$ in (8) gar nicht vorkommen darf, dass also der Factor B verschwinden muss. Denn wäre jenes $L_{qj}(\mu)$ in (8) wirklich vorhanden, so würde $f_{qj}(\mu, \mu_1)$ für $\mu = 1$ unendlich gross werden, was in Widerspruch ist mit den Formeln (4a). Demgemäss reducirt sich die Formel (8) auf:

$$f = f_{qj}(\mu, \mu_1) = \mathsf{A} K_{qj}(\mu) \cdot \tag{9}$$

Substituirt man diesen Werth in die Differentialgleichung (7), so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1}\left((1-\mu_1^2)\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial \mu_1}\right) - \left(\left(q^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{j^2}{1-\mu_1^2}\right)\mathsf{A} = 0;$$

und hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf den Satz (I), (II) des vorhergehenden Paragraphen sofort, dass die nur von μ_1 abhängende Function A die Gestalt haben muss:

$$\mathsf{A} = \Delta K_{qj}(\mu_1) + \mathsf{E} L_{qj}(\mu_1),$$

wo Δ, E *Constante* sind, nämlich nur noch von den Ordnungszahlen q, j abhängen können. Dieser Werth von A in (9) substituirt, ergiebt sich:

$$f_{qj}(\mu, \mu_1) = \Delta K_{qj}(\mu) K_{qj}(\mu_1) + \mathsf{E} K_{qj}(\mu) L_{qj}(\mu_1). \tag{10}$$

Setzen wir nun hier, im Einklang mit unserer Festsetzung (4), das $\mu_1 = -1$, so wird $K_{qj}(\mu_1)$ *unendlich gross;* und hieraus folgt, dass dieses $K_{qj}(\mu_1)$ in (10) gar nicht vorkommen darf, dass mithin Δ verschwinden muss. Denn die Function $f_{qj}(\mu, \mu_1)$ besitzt zufolge (4b) für $\mu_1 = -1$ einen bestimmten endlichen Werth. Demgemäss reducirt sich die Formel (10) auf:

$$f_{qj}(\mu, \mu_1) = \mathsf{E} K_{qj}(\mu) L_{qj}(\mu_1), \tag{11}$$

wo statt E eigentlich E_{qj} zu schreiben ist. Somit folgt aus (3):

$$L_q(\cos\gamma) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j \mathsf{E}_{qj} K_{qj}(\mu) L_{qj}(\mu_1) \cos j(\varphi - \varphi_1), \text{ für } \mu > \mu_1. \tag{12}$$

Und es handelt sich jetzt nur noch um die Ermittelung der *Constanten* E_{qj}. Im folgenden Paragraphen soll gezeigt werden, dass

$$\mathsf{E}_{qj} = \frac{1}{2^j \Pi(j) K_q^{(j)}(1)} \tag{13}$$

ist, wo Π die Gauss'sche Function bezeichnet. Hieraus ergiebt sich dann mit Rücksicht auf die Formeln Seite 207 sofort:

$$
(14)\quad \begin{cases}
\mathrm{E}_{q0} = \dfrac{1}{1 \cdot 1 \cdot K_q(1)} & = 1, \\[2ex]
\mathrm{E}_{q1} = \dfrac{1}{2 \cdot 1 \cdot K_q'(1)} & = \dfrac{(-1)^1}{q_1}, \\[2ex]
\mathrm{E}_{q2} = \dfrac{1}{2^2 (1 \cdot 2) K_q''(1)} & = \dfrac{(-1)^2}{q_1 q_3}, \\[2ex]
\mathrm{E}_{q3} = \dfrac{1}{2^3 (1 \cdot 2 \cdot 3) K_q'''(1)} & = \dfrac{(-1)^3}{q_1 q_3 q_5}, \\
\qquad \text{etc.} & \text{etc.}
\end{cases}
$$

so dass also die Formel (12 folgende Gestalt erhält:

$$
(15)\quad \begin{aligned} L_q(\cos\gamma) = K_q(\mu)\, L_q(\mu_1) &+ 2\,\frac{(-1)}{q_1}\, K_{q1}(\mu)\, L_{q1}(\mu_1) \cos(\varphi - \varphi_1) \\ &+ 2\,\frac{(-1)^2}{q_1 q_3}\, K_{q2}(\mu)\, L_{q2}(\mu_1) \cos 2(\varphi - \varphi_1) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}
$$

immer vorausgesetzt, dass $\mu > \mu_1$ sei. Dabei repräsentiren $q_1, q_3, q_5, \cdots$ die in (6a) Seite 202 eingeführten Grössen.

§ 6a.

Nachträgliche Bestimmung der im vorhergehenden Paragraphen noch unbekannt gebliebenen Constanten.

Setzt man in den Formeln (7b) Seite 199 den $\cos\omega = \mu$, so folgt:

$$
(\alpha)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\mu + 2\cos i\Theta}} = \int_0^\infty dq\, C_q K_q(\mu) \cos q\Theta;\text{*)}
$$

und hieraus folgt weiter durch wiederholte Differentiation nach μ:

---

*) Aus (α) folgt z. B. für $\mu = 1$ und $\Theta = 0$:

$$
\frac{1}{2} = \int_0^\infty dq\, C_q.
$$

Nicht weniger einfach ist, wie beiläufig bemerkt sein mag, folgende Formel:

$$
\frac{1}{\pi} = \int_0^\infty dq\, C_q C_q,
$$

zu welcher man leicht gelangt, falls man nur beachtet, dass

$$
C_q = \frac{1}{\cos(q\pi i)} = \frac{2}{e^{q\pi} + e^{-q\pi}}
$$

ist.

$$(\beta)\qquad \frac{(-1)\cdot 1}{(2\mu+2\cos i\Theta)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^\infty dq\, C_q K'_q(\mu)\cos q\Theta,$$

$$(\gamma)\qquad \frac{(-1)^2\cdot 1\cdot 3}{(2\mu+2\cos i\Theta)^{\frac{5}{2}}}=\int_0^\infty dq\, C_q K''_q(\mu)\cos q\Theta,$$

u. s. w. u. s. w. — All' diese Formeln (α), (β), (γ) etc. kann man zusammenfassen in die *eine* Formel:

$$(16)\qquad \left(\frac{1}{2\mu+2\cos i\Theta}\right)^{\frac{2j+1}{2}}=\frac{(-1)^j}{H_j}\int_0^\infty dq\, C_q K_q^{(j)}(\mu)\cos q\Theta,\ \text{wo } j=0,1,2,\cdots$$

Dabei haben alsdann die Zahlen H_j die Bedeutungen:

$$(17)\qquad H_0=1,\quad H_1=1,\quad H_2=1\cdot 3,\quad H_3=1\cdot 3\cdot 5,\quad \text{etc. etc.}$$

Dies vorangeschickt, wenden wir uns zu unserer eigentlichen Aufgabe. Zu diesem Zweck bringen wir die im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Entwicklungen auf den *speciellen* Fall in Anwendung, dass μ sehr nahe an 1, andrerseits μ_1 sehr nahe an -1 liegt, und dass die absoluten Werthe beider Grössen einander gleich sind. Dann ist

$$(18)\qquad \mu_1=-\mu$$

Auch wollen wir zur Abkürzung

$$(19)\qquad \begin{cases}\vartheta-\vartheta_1=\Theta,\\ \varphi-\varphi_1=\Phi,\end{cases}\qquad \begin{cases}2(\mu^2+\cos i\Theta)=U,\\ 2(1-\mu^2)=V,\end{cases}$$

setzen. Alsdann folgt aus (12):

$$L_q(\cos\gamma)=\sum_{j=0}^{j=\infty}\varepsilon_j\,\mathsf{E}_{qj}\,K_{qj}(\mu)\,L_{qj}(-\mu)\cos j\Phi,$$

oder weil $K_{qj}(\mu)\,L_{qj}(-\mu)=(1-\mu^2)^j K_q^{(j)}(\mu)\,L_q^{(j)}(-\mu)$, ausserdem aber $L_q^{(j)}(-\mu)=(-1)^j K_q^{(j)}(\mu)$ ist*):

$$L_q(\cos\gamma)=\sum_{j=0}^{j=\infty}(-1)^j(1-\mu^2)^j\varepsilon_j\,\mathsf{E}_{qj}\left(K_q^{(j)}(\mu)\right)^2\cos j\Phi.$$

Und dies in (1) substituirt, erhält man:

$$(20)\qquad T=\frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a}\int_0^\infty dq\left[C_q\cos q\Theta\sum_{j=0}^{j=\infty}(-1)^j(1-\mu^2)^j\varepsilon_j\,\mathsf{E}_{qj}\left(K_q^{(j)}(\mu)\right)^2\cos j\Phi\right].$$

*) Vergl. (II) Seite 211, und andererseits auch die Note auf Seite 207.

Mit Rücksicht auf unsere gegenwärtigen Festsetzungen (18), (19) ergiebt sich aber andererseits aus (6) Seite 199:

$$(21)\quad T=\frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a}\frac{1}{\sqrt{2(\cos i\Theta)+2\mu^2-2(1-\mu^2)\cos\Phi}}=\frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a}\frac{1}{\sqrt{U-V\cos\Phi}}.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke (20) und (21) einander gleich, multiplicirt man ferner die so entstehende Gleichung mit $\frac{\cos j\Phi\cdot d\Phi}{2\pi}$, und integrirt nach Φ zwischen den Grenzen 0 und 2π, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos j\Phi\cdot d\Phi}{\sqrt{U-V\cos\Phi}}=\int_0^\infty dq\Big[C_q\cos q\Theta\cdot \mathsf{E}_{qj}(-1)^j(1-\mu^2)^j(K_q^{(j)}(\mu))^2\Big],$$

oder, falls man mit V^j d. i. $2^j(1-\mu^2)^j$ dividirt:

$$(22)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos j\Phi\cdot d\Phi}{V^j\sqrt{U-V\cos\Phi}}=\left(-\frac{1}{2}\right)^j\int_0^\infty dq\Big[C_q\cos q\Theta\cdot \mathsf{E}_{qj}(K_q^{(j)}(\mu))^2\Big].$$

Da μ nahe an 1, mithin V (19) nahe an 0 liegen soll, so können wir die linke Seite nach Potenzen von V entwickeln. Diese linke Seite, sie mag $\mathfrak{L}$ heissen, nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos j\Phi\cdot d\Phi}{V^j\sqrt{U}}\left[G_0+G_1\left(\frac{V}{U}\cos\Phi\right)^1+G_2\left(\frac{V}{U}\cos\Phi\right)^2+\cdots\right],$$

wo die G die Zahlen vorstellen:

$$(23)\qquad G_0=1,\quad G_1=\frac{1}{2},\quad G_2=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4},\quad G_3=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6},\quad \text{etc.}$$

Bei Ausführung der Integration fallen die mit G_0, G_1, G_2, $\cdots$, G_{j-1} behafteten Glieder fort, so dass man erhält:

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos j\Phi\cdot d\Phi}{\sqrt{U}}\left[G_j\left(\frac{\cos\Phi}{U}\right)^j+G_{j+1}V\left(\frac{\cos\Phi}{U}\right)^{j+1}+\cdots\right]$$

Substituirt man dies in (22) und lässt man gleichzeitig $\mu=1$ mithin [vgl. (19)] $V=0$, und $U=2(1+\cos i\Theta)$ werden, so folgt:

$$\frac{G_j}{2\pi}\left(\frac{1}{2+2\cos i\Theta}\right)^{\frac{2j+1}{2}}\int_0^{2\pi}\cos j\Phi(\cos\Phi)^j d\Phi=\left(-\frac{1}{2}\right)^j\int_0^\infty dq\Big[C_q\cos q\Theta\cdot \mathsf{E}_{qj}(K_q^{(j)}(1))^2\Big],$$

oder weil das Integral linker Hand $=\frac{2\pi}{2^j}$ ist:

$$\left(\frac{1}{2+2\cos i\Theta}\right)^{\frac{2j+1}{2}}=\frac{(-1)^j}{G_j}\int_0^\infty dq\Big[C_q\cos q\Theta\cdot \mathsf{E}_{qj}(K_q^{(j)}(1))^2\Big].$$

Vergleicht man aber diese Formel mit der aus (16) für $\mu = 1$ entspringenden Formel:

$$\left(\frac{1}{2+2\cos i\Theta}\right)^{\frac{2j+1}{2}} = \frac{(-1)^j}{H_j}\int\limits_0^\infty dq\left[C_q \cos q\Theta \cdot K_q^{(j)}(1)\right],$$

so ergiebt sich sofort:

$$\text{(24)} \qquad \mathsf{E}_{qj}\, K_q^j(1) = \frac{G_j}{H_j}.$$

Nun folgt aber aus (17) und (23):

$$\frac{G_0}{H_0} = 1, \quad \frac{G_1}{H_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{G_2}{H_2} = \frac{1}{2\cdot 4}, \quad \frac{G_3}{H_3} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \text{etc.},$$

mithin allgemein: $\frac{G_j}{H_j} = \frac{1}{2^j \Pi(j)}$; und folglich:

$$\text{(25)} \qquad \mathsf{E}_{qj}\, K_q^j(1) = \frac{1}{2^j \Pi(j)}.$$

W. z. z. w. [vergl. (13)].

§ 7.

Neue Integraleigenschaften der Kreisfunctionen.

Ist $G(\vartheta)$ eine gerade, und $U(\vartheta)$ eine ungerade Function von ϑ, so wird offenbar:

$$(\alpha) \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\vartheta)\, d\vartheta = 0,$$

$$(\beta) \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\vartheta)\, U(\vartheta)\, d\vartheta = 0;$$

vorausgesetzt, dass diese Integrale convergent sind. Hieraus ergeben sich, falls $f(q)$ und $F(q)$ willkürlich gegebene Functionen von q vorstellen, folgende Formeln:

$$\text{(A)} \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_0^\infty dq\, f(q)\sin q\vartheta\right) d\vartheta = 0;$$

$$\text{(B)} \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left(\int\limits_0^\infty dq\, f(q)\sin q\vartheta\right)\left(\int\limits_0^\infty dq\, F(q)\cos q\vartheta\right)\right\} d\vartheta = 0;$$

immer vorausgesetzt, dass die Integrale convergent sind.

Es fragt sich nun, welche Werthe diese Ausdrücke (A) und (B) annehmen werden, falls man daselbst statt Sinus und Cosinus *durchweg den Cosinus*, oder auch im zweiten Ausdruck *durchweg den Sinus* substituirt. Diese Frage nun findet ihre Antwort durch folgende Sätze: Es ist im Allgemeinen:

$$(A') \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^\infty dq\, f(q) \cos q\vartheta \right) d\vartheta = \pi f(0).$$

Und andrerseits ist:

$$(B') \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\int_0^\infty dq f(q) \cos q\vartheta \right) \left(\int_0^\infty dq\, F(q) \cos q\vartheta \right) \right\} d\vartheta = \pi \int_0^\infty dq\, f(q)\, F(q),$$

und ebenso auch:

$$(B'') \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\int_0^\infty dq f(q) \sin q\vartheta \right) \left(\int_0^\infty dq\, F(q) \sin q\vartheta \right) \right\} d\vartheta = \pi \int_0^\infty dq\, f(q) F(q).$$

Die Ableitung dieser Sätze (A′) und (B′), (B″), sowie eine genauere Untersuchung über diejenigen Bedingungen, unter denen sie mit Sicherheit anwendbar sind, habe ich an einem anderen Orte*) mitgetheilt.

§ 8.

Die elektr. Werthe auf dem Conoid, falls keine äusseren Kräfte einwirken.

Sind im Raume irgend zwei unendlich nahe Punkte $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ und $(\vartheta + d\vartheta, \omega + d\omega, \varphi + d\varphi, \psi + d\psi)$ gegeben, und denkt man sich die beiden durch diese Punkte gehenden Individuen des Flächensystems $\vartheta =$ Const. construirt, ebenso die beiden Flächen $\omega =$ Const., und die beiden Flächen $\varphi =$ Const., und bezeichnet man endlich die Kanten des von diesen sechs Flächen gebildeten unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipedums mit ds_ϑ, ds_ω, ds_φ, so ergiebt sich mittelst der Formel (7) Seite 197 sofort:

$$\begin{array}{ll} (k) & ds_\vartheta = \dfrac{2a\, d\vartheta}{\psi}, \qquad (ds_\vartheta \text{ ist Normale einer Kugelfläche } \vartheta = \text{Const.}), \\ (c) & ds_\omega = \dfrac{2a\, d\omega}{\psi}, \qquad (\text{Normale einer Conoidfläche } \omega = \text{Const.}), \\ (m) & ds_\varphi = \dfrac{2a \sin\omega \cdot d\varphi}{\psi}, \quad (\text{Normale einer Meridianebene } \varphi = \text{Const.}). \end{array}$$

Hieraus folgt durch Multiplication:

$$\begin{array}{ll} (K) & ds_\omega\, ds_\varphi = \dfrac{4a^2 \sin\omega \cdot d\omega\, d\varphi}{\psi^2}, \quad (\text{Element einer Kugelfläche}), \\ (C) & ds_\vartheta\, ds_\varphi = \dfrac{4a^2 \sin\omega \cdot d\vartheta\, d\varphi}{\psi^2}, \quad (\text{Element einer Conoidfläche}), \\ (M) & ds_\vartheta\, ds_\omega = \dfrac{4a^2\, d\vartheta\, d\omega}{\psi^2}, \qquad (\text{Element einer Meridianebene}). \end{array}$$

---

*) In meiner Schrift: *Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen*, (Teubner 1881), Seite 8–11, und Seite 77–80.

Dies vorangeschickt, *wollen wir uns ein metallisches und isolirtes Conoid vom Parameter ω gegeben denken, welches bis zu einer gegebenen Spannung C mit Elektricität geladen ist. Es soll ermittelt werden die elektrische Dichtigkeit Δ an seiner Oberfläche, also in jedwedem Punkt $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ dieser Oberfläche.*

Offenbar wird die in Rede stehende elektrische Belegung (weil keine äusseren Kräfte einwirken) symmetrisch sein in Bezug auf die Conoidaxe AA', und ebenso auch symmetrisch sein in Bezug auf den Aequator des Conoids. Hieraus folgt sofort, dass die Dichtigkeit Δ dieser Belegung *nur von* ϑ abhängen kann und eine *gerade Function* von ϑ sein muss. Das Potential dieser noch unbekannten elektrischen Belegung auf irgend einen Punkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ besitzt die Form:

$$(1) \qquad V = \int\int T \Delta d\sigma,$$

wo $d\sigma$ ein Oberflächenelement des Conoids, mithin $\Delta d\sigma$ die auf demselben vorhandene elektrische Masse, und T die reciproke Entfernung des Elementes vom Punkte $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ vorstellt. Unsere Aufgabe wird nun darin bestehen, jenes Δ, *welches eine gerade Function von ϑ ist*, der Art zu bestimmen, dass dieses Potential V gleich der gegebenen Constanten C wird für alle Lagen, die der Punkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ *innerhalb* des Conoids annehmen kann. — Nach Formel (C) ist:

$$(2) \qquad \Delta d\sigma = \left(\frac{\Delta \cdot 2a \sin \omega}{\psi \sqrt{\psi}}\right) \frac{2a\, d\vartheta\, d\varphi}{\sqrt{\psi}},$$

wo ω *den gegebenen Parameter* der Conoidoberfläche vorstellt, und $\psi = 2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega$ ist, während Δ *eine unbekannte gerade Function von ϑ* vorstellt. Demgemäss wird also der in (2) eingeklammerte Ausdruck ebenfalls eine gerade Function von ϑ sein, und (ausser von den gegebenen Constanten a und ω) nur von ϑ allein abhängen. Demgemäss machen wir für diesen Ausdruck den Ansatz:

$$(3) \qquad \frac{\Delta \cdot 2a \sin \omega}{\psi \sqrt{\psi}} = \int_0^\infty dq\, A_q \cos q\vartheta,$$

wo die A_q unbekannte Functionen von q sind.

Ferner repräsentirt T die reciproke Entfernung zwischen dem Massenelement $\Delta d\sigma (\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ und einem *innern* Punkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$. Demgemäss ist $\omega < \omega_1$, oder falls man die Cosinus dieser Winkel mit μ, μ_1 bezeichnet, $\mu > \mu_1$. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich:

$$(4) \qquad T = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a} \int_0^\infty dq\, C_q L_q (\cos \gamma) \cdot \cos q (\vartheta - \vartheta_1), \quad \text{[nach (1) S. 211]}$$

und:

(5) $L_q(\cos\gamma) = K_q(\mu)\,L_q(\mu_1) + U\cos(\varphi-\varphi_1) + U'\cos 2(\varphi-\varphi_1) + \cdots,$
[nach (15) S. 215]

wo U, U', $\cdots$ von μ, μ_1 abhängende Functionen vorstellen, auf deren Werthe es hier nicht weiter ankommt. Substituirt man nun die Werthe (2), (3), (4) in (1), so folgt:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} d\vartheta\,d\varphi \left\{ \sqrt{\psi_1} \left(\int_0^{\infty} dq\,A_q \cos q\vartheta \right) \left(\int_0^{\infty} dq\,C_q L_q(\cos\gamma) \cos q(\vartheta-\vartheta_1) \right) \right\}.$$

In diesem ganzen Ausdruck kommt φ nur insofern vor, als es in $d\varphi$ und in $L_q(\cos\gamma)$, (5), enthalten ist. Demgemäss lässt sich die (von 0 bis 2π gehende) Integration nach φ sofort ausführen; wodurch sich ergiebt:

$$V = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta \left\{ \sqrt{\psi_1} \left(\int_0^{\infty} dq\,A_q \cos q\vartheta \right) \left(\int_0^{\infty} dq\,C_q K_q(\mu)\,L_q(\mu_1) \cos q(\vartheta-\vartheta_1) \right) \right\},$$

wo übrigens der Factor $\sqrt{\psi_1}$ *vor* das Integral gezogen werden kann. Bewerkstelligt man nun die (von $-\infty$ bis $+\infty$ gehende) Integration nach ϑ mittelst der Sätze (B), (B') Seite 218, 219, so folgt:

$$V = 2\pi\sqrt{\psi_1} \cdot \pi \int_0^{\infty} dq\,A_q C_q K_q(\mu)\,L_q(\mu_1) \cos q\vartheta_1 .$$

Und dieser Ausdruck soll also gleich der gegebenen Constante C sein für *alle innern* Punkte $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$. Mit andern Worten: Für all' diese Punkte soll die Gleichung erfüllt sein:

(6) $$2\pi^2 \int_0^{\infty} dq\,A_q C_q K_q(\mu)\,L_q(\mu_1) \cos q\vartheta_1 = \frac{C}{\sqrt{\psi_1}} \cdot$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich aber (ebenso wie die linke) in ein nach den $\cos q\vartheta_1$ fortschreitendes Integral darstellen. Nach (1) Seite 198 ist nämlich:

(6a) $$\frac{C}{\sqrt{\psi_1}} = C \int_0^{\infty} dq\,C_q L_q(\mu_1) \cos q\vartheta_1 .$$

Substituirt man dies in die Formel (6), so sieht man sofort, dass jene Formel erfüllt sein wird, sobald man die noch unbekannten A_q der Bedingung unterwirft:

$$2\pi^2 A_q K_q(\mu) = C,$$

also setzt:

(7) $$A_q = \frac{C}{2\pi^2 K_q(\mu)} \cdot$$

Und substituirt man endlich diesen Werth von A_q in die Formel (3), so erhält man das gesuchte Δ, und gelangt also zu folgendem Satz:

Denkt man sich eine Conoid von der Axenlänge $2a$ *und dem Parameter* ω *mit Elektricität geladen bis zu einer gegebenen Spannung* C, *so wird die Dichtigkeit* Δ *der elektrischen Vertheilung eine blosse Function von* ϑ *sein, und den Werth haben:*

$$\Delta = C \frac{\psi \sqrt{\psi}}{4\pi^2 a \sin \omega} \int_0^\infty \frac{dq \cdot \cos q\vartheta}{K_q(\mu)}, \tag{8}$$

wo μ *zur Abkürzung steht für* $\cos \omega$, *und* $\psi = 2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega$ *ist.*

Auch die *Gesammtmasse* M der unter diesen Umständen auf dem Conoid vorhandenen Elektricität lässt sich leicht berechnen. Nach (2), (3) ist nämlich dieses

$$\mathsf{M} = \int\int \Delta\, d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} d\vartheta\, d\varphi \left\{ \frac{2a}{\sqrt{\psi}} \int_0^\infty dq A_q \cos q\vartheta \right\},$$

oder falls man hier für $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ den mit (6a) analogen Werth substituirt, und zugleich die Integration nach φ ausführt:

$$\mathsf{M} = 4\pi a \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta \left\{ \left(\int_0^\infty dq\, C_q L_q(\mu) \cos q\vartheta \right) \left(\int_0^\infty dq A_q \cos q\vartheta \right) \right\},$$

oder falls man jetzt die Integration nach ϑ mittelst des Satzes (B') Seite 219 bewerkstelligt:

$$\mathsf{M} = 4\pi a \cdot \pi \int_0^\infty dq\, C_q L_q(\mu) A_q.$$

Substituirt man endlich hier für A_q den gefundenen Werth (7), *so ergiebt sich für die* G e s a m m t m a s s e *der auf dem Conoid vorhandenen Elektricität die Formel:*

$$\mathsf{M} = C \left\{ 2a \int_0^\infty \frac{dq\, C_q L_q(\mu)}{K_q(\mu)} \right\}. \tag{9}$$

Der hier in der geschweiften Klammer enthaltene Ausdruck kann bezeichnet werden als eine dem gegebenen Conoid eigenthümliche C o n s t a n t e, *nämlich als seine* e l e k t r i s c h e C a p a c i t ä t.

Die Formeln (8), (9) lassen sich leicht prüfen durch Anwendung auf den Specialfall der *Kugel*, d. i. auf den Specialfall: $\omega = 90^0$. Alsdann wird

$$\omega = 90^0, \quad \mu = 0, \quad \psi = 2 \cos i\vartheta,$$

also nach (8) und (9):

$$\Delta = \frac{C}{4\pi^2 a} (2 \cos i\vartheta)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{dq \cos q\vartheta}{K_q(0)},$$

$$\mathsf{M} = C \cdot 2a \int_0^{\infty} \frac{dq\, C_q L_q(0)}{K_q(0)},$$

oder weil [nach (14) Seite 210] $\frac{1}{K_q(0)} = -\pi C_q K_q'(0)$, ausserdem aber offenbar auch $K_q(0) = L_q(0)$ ist:

$$\Delta = \frac{C}{4\pi^2 a} (2 \cos i\vartheta)^{\frac{3}{2}} (-\pi) \int_0^{\infty} dq\, C_q K_q'(0) \cos q\vartheta,$$

$$\mathsf{M} = C \cdot 2a \int_0^{\infty} dq\, C_q.$$

Diese Werthe aber nehmen mittelst der aus (β) Seite 216 und aus (α) Seite 215 entspringenden Formeln:

$$\left(\frac{1}{2 \cos i\vartheta}\right)^{\frac{3}{2}} = -\int_0^{\infty} dq\, C_q K_q'(0) \cdot \cos q\vartheta,$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^{\infty} dq\, C_q,$$

folgende Gestalt an:

(α) $$\Delta = \frac{C}{4\pi a},$$

(β) $$\mathsf{M} = Ca;$$

und dies sind in der That die bekannten Formeln für die Kugel. W. z. z. w.

Um endlich das Potential der elektrischen Belegung Δ (8) auf einen *äussern* Punkt ($\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1$) zu berechnen, dient die Formel:

$$V = \iint T \Delta\, d\sigma,$$

wo T die reciproke Entfernung jenes *äussern* Punktes ($\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1$) vom Elemente $\Delta d\sigma$ vorstellt; sodass also gegenwärtig $\omega > \omega_1$, mithin $\mu < \mu_1$ ist. Mit Rücksicht hierauf erhält man für dieses Potential V genau denselben Ausdruck wie vorhin (Seite 221), nur mit dem Unterschied, dass das Product $K_q(\mu) L_q(\mu_1)$ gegenwärtig durch $K_q(\mu_1) L_q(\mu)$ vertreten sein wird. Also:

$$V = 2\pi \sqrt{\psi_1} \cdot \pi \int_0^{\infty} dq\, A_q C_q K_q(\mu_1) L_q(\mu) \cdot \cos q\vartheta_1,$$

oder falls man für A_q den Werth (7) substituirt:

$$(10)\qquad V = C \cdot \sqrt{\psi_1} \int_0^\infty \frac{dq\, C_q K_q(\mu_1) L_q(\mu) \cdot \cos q\vartheta_1}{K_q(\mu)}.$$

Dies also ist das Potential, welches die in (8) *besprochene elektrische Belegung des Conoids auf irgend einen äussern Punkt* $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ *ausübt.*

Um diese Formel wieder durch Anwendung auf den Specialfall der *Kugel* zu prüfen, setzen wir

$$\omega = 90^0, \quad \text{mithin} \quad \mu = 0,$$

und erhalten alsdann, weil $K_q(0) = L_q(0)$ ist:

$$V = C \cdot \sqrt{\psi_1} \int_0^\infty dq\, C_q K_q(\mu_1) \cos q\vartheta_1.$$

Nun ergiebt sich aber mittelst der Formel (1) Seite 211 für den reciproken Abstand T des Punktes $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ vom *Mittelpunkt* des Conoids resp. der Kugel, d. i. vom Punkte $(\vartheta = 0,\ \omega = \pi)$ leicht folgender Werth:

$$T = \frac{\sqrt{\psi_1}}{a} \int_0^\infty dq\, C_q K_q(\mu_1) \cos q\vartheta_1.$$

Somit folgt: $V = CaT$, oder mit Rücksicht auf (β):

$$(\gamma)\qquad V = MT,$$

was mit einem bekannten Satze über die Kugel in Einklang ist.

§ 9.

Anwendung auf den Fall eines unendlich dünnen Conoids.

Der *sehr kleine Winkel*, unter welchem der Meridianbogen des sehr dünnen Conoids im Pole A gegen die Conoidaxe geneigt ist, mag σ heissen. Dann wird offenbar der *Parameter* ω der Conoidfläche (d. i. die scheinbare Grösse der Axe AA' für einen in der Conoidfläche befindlichen Beobachter) den Werth haben:

$$(1)\qquad \omega = \pi - \sigma;$$

woraus folgt:

$$(2)\qquad \sin\omega = \sin\sigma = \sigma,$$

und weiter:

$$(3)\qquad \mu = \cos\omega = -\cos\sigma = -1 + \frac{1}{2}\sigma^2 = -1 + \varepsilon,$$

falls man nämlich die höheren Potenzen von σ vernachlässigt, und zur Abkürzung ε für $\frac{1}{2}\sigma^2$ schreibt. Demgemäss nehmen die im vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Formeln (8), (9), (10) die Gestalt an:

$$(4)\qquad \Delta = C\,\frac{\psi\sqrt{\psi}}{4\pi^2 a\sigma}\int_0^\infty \frac{dq\cdot\cos q\vartheta}{L_q(1-\varepsilon)},$$

$$(5)\qquad \mathsf{M} = C\cdot 2a\int_0^\infty \frac{dq\,C_q K_q(1-\varepsilon)}{L_q(1-\varepsilon)},$$

$$(6)\qquad V = C\sqrt{\psi_1}\int_0^\infty \frac{dq\,C_q K_q(\mu_1)\,K_q(1-\varepsilon)\cdot\cos q\vartheta_1}{L_q(1-\varepsilon)}.$$

Nun ist aber nach (14) Seite 203, und nach (10) Seite 208:

$$K_q(1-\varepsilon) = 1 + \frac{q_1}{1^2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^1 + \frac{q_1 q_3}{(1\cdot 2)^2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{q_1 q_3 q_5}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 + \cdots$$

$$L_q(1-\varepsilon) = -\frac{K_q(1-\varepsilon)\cdot\log\varepsilon}{\pi C_q} + \Delta_q + \Delta_q'\varepsilon + \Delta_q''\varepsilon^2 + \cdots$$

[Denn die in der citirten Formel (10) Seite 208 enthaltene Constante G_q ist, wie in (12) Seite 210 gezeigt wurde, identisch mit C_q.] Hieraus folgt für ein *äusserst kleines* ε:

$$(7)\qquad \begin{cases} K_q(1-\varepsilon) = 1, \\ L_q(1-\varepsilon) = -\dfrac{K_q(1-\varepsilon)\cdot\log\varepsilon}{\pi C_q} = -\dfrac{\log\varepsilon}{\pi C_q}; \end{cases}$$

so dass also die Formeln (4), (5), (6) übergehen in:

$$(8)\qquad \Delta = C\,\frac{\psi\sqrt{\psi}}{4\pi^2 a\sigma}\left(\frac{-\pi}{\log\varepsilon}\right)\int_0^\infty dq\,C_q\cos q\vartheta,$$

$$(9)\qquad \mathsf{M} = C\cdot 2a\left(\frac{-\pi}{\log\varepsilon}\right)\int_0^\infty dq\,C_q C_q,$$

$$(10)\qquad V = C\cdot\sqrt{\psi_1}\left(\frac{-\pi}{\log\varepsilon}\right)\int_0^\infty dq\,C_q C_q K_q(\mu_1)\cdot\cos q\vartheta_1.$$

Nun ist nach (1) Seite 198; falls man $L_q(\mu)$ durch $K_q(-\mu)$ ersetzt:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = \frac{1}{\sqrt{2(\cos i\vartheta)-2\mu}} = \int_0^\infty dq\,C_q K_q(-\mu)\cdot\cos q\vartheta,$$

oder, falls man für μ seinen gegenwärtigen Werth (3): $\mu = (-1+\varepsilon)$ substituirt, und Rücksicht nimmt auf (7):

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = \int_0^\infty dq\,C_q\cos q\vartheta.$$

Ferner ist [vgl. die Note Seite 215]:

$$\frac{1}{\pi} = \int_0^\infty dq\, C_q C_q.$$

Somit gehen die Formeln (8), (9) über in:

$$\Delta = \frac{C\psi}{4\pi^2 a\sigma}\left(\frac{-\pi}{\log\varepsilon}\right), \tag{11}$$

$$\mathsf{M} = \frac{C\cdot 2a}{\pi}\left(\frac{-\pi}{\log\varepsilon}\right). \tag{12}$$

Das in (11) enthaltene ψ bezieht sich auf irgend welchen Punkt $(\vartheta, \omega, \varphi)$ der Conoidoberfläche, und hat eine einfache geometrische Bedeutung, und zwar eine doppelte. Einerseits ist nämlich nach (3) Seite 196: $\psi = \frac{4a^2}{\varrho\varrho'}$, wo ϱ, ϱ' die Abstände des Punktes $(\vartheta, \omega, \varphi)$ von den Polen A, A' vorstellen. Und andrerseits ist nach (4) Seite 197: $\eta = \frac{2a\sin\omega}{\psi}$, also mit Rücksicht auf (2): $\eta = \frac{2a\sigma}{\psi}$, oder was dasselbe ist: $\psi = \frac{2a\sigma}{\eta}$, wo η den senkrechten Abstand des Punktes $(\vartheta, \omega, \varphi)$ von der Conoidaxe bezeichnet. Substituirt man aber diese Werthe $\frac{4a^2}{\varrho\varrho'}$ oder $\frac{2a\sigma}{\eta}$ an Stelle von ψ in (11), und substituirt man gleichzeitig daselbst für ε seine aus (3) ersichtliche Bedeutung: $\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma^2$, so erhält man:

$$\Delta = \frac{Ca}{2\pi\sigma(-\log\sigma)}\,\frac{1}{\varrho\varrho'} = \frac{C}{4\pi(-\log\sigma)}\,\frac{1}{\eta}, \tag{13}$$

$$\mathsf{M} = \frac{Ca}{(-\log\sigma)}; \tag{14}$$

denn statt $\log\varepsilon = \log\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right) = \left(\log\frac{1}{2}\right) + 2(\log\sigma)$, kann man (bei dem hier eingehaltenen Grade der Annäherung) unbedenklich $2(\log\sigma)$ setzen. Der *erste* Ausdruck (13) liefert folgenden Satz: *Befindet sich die Elektricität auf einem isolirten unendlich dünnen Conoid im Gleichgewicht, so ist die elektrische Flächendichtigkeit Δ an jeder Stelle umgekehrt proportional dem Product $\varrho\varrho'$, wo ϱ und ϱ' die Entfernungen der Stelle von den beiden Endpunkten des Conoids vorstellen.* Andrerseits folgt aus dem *zweiten* der Ausdrücke (13) der vielleicht noch einfachere Satz, *dass jene Dichtigkeit Δ an jeder Stelle der Conoidoberfläche umgekehrt proportional ist mit dem Abstande η dieser Stelle von der Conoidaxe.*

Doch ist diese Form des Satzes immer noch nicht die einfachste. Vielmehr gelangt man zu einer noch einfacheren, wenn man statt der

*Flächen*dichtigkeit Δ, die *lineare* Dichtigkeit einführt, indem man das unendlich dünne Conoid als eine gerade Linie ansieht. Bezeichnet ds ein Element dieser Linie, oder (genauer ausgedrückt) ein Element der Conoidaxe AA', so wird die diesem Element ds entsprechende Zone der Conoidoberfläche $= 2\pi\eta ds$ sein, falls nämlich η den Radius der Zone vorstellt. Und demgemäss ist die auf dieser Zone vorhandene Elektricitätsmenge $= \Delta \cdot 2\pi\eta ds$. Bezeichnet man also diese Elektricitätsmenge kurzweg mit $\delta \cdot ds$:

$$\delta \cdot ds = \Delta \cdot 2\pi\eta ds,$$

so wird δ die *lineare Dichtigkeit* zu nennen sein. Wir erhalten also: $\delta = 2\pi\eta\Delta$, oder mit Rücksicht auf den *zweiten* Ausdruck in (13):

$$(15) \qquad \delta = \frac{C}{2(-\log\sigma)}, \quad \text{d. i.} \quad = \text{Const.};$$

und gelangen daher zu folgendem Satz: *Befindet sich die Elektricität auf einem isolirten unendlich dünnen Conoid im Gleichgewicht, so wird die lineare elektrische Dichtigkeit δ constant sein.* Oder mit andern Worten: *Befindet sich die Elektricität auf einer begrenzten geraden Linie im Gleichgewicht, so wird die (lineare) elektrische Dichtigkeit auf derselben constant sein.*

Bemerkung. — Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man die *begrenzte gerade Linie* als den Grenzfall eines *Rotationsellipsoids* sich vorstellt; und zwar am Einfachsten durch folgende allgemeinen Ueberlegungen:

Construirt man irgend drei äquidistante die Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ schneidende Parallelebenen, so sind bekanntlich die zwischen diesen Ebenen befindlichen beiden *Kugelzonen* unter einander *gleich*, d. i. von *gleichem Flächeninhalt*. Analoges wird daher, falls man unter ε eine unendlich kleine Grösse versteht, auch gelten vom Volumen der von den beiden Kugelflächen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

und

$$x^2 + y^2 = z^2 = (1 + \varepsilon)^2$$

begrenzten unendlich dünnen Kugelschaale. In der That werden diejenigen beiden Theile dieser Schaale, welche zwischen jenen drei äquidistanten Parallelebenen liegen, *gleiches Volumen* haben.

Versteht man nun unter A, B, C irgend drei (positive) Constanten, und unterwirft man die soeben dargelegten geometrischen Vorstellungen der durch die Gleichungen

$$x = A\xi, \quad y = B\eta, \quad z = C\zeta$$

angedeuteten Transformation, so verwandeln sich die beiden Kugelflächen in zwei *einander ähnliche* Ellipsoidflächen, und jene drei Ebenen wiederum in *äquidistante Parallelebenen*. Und man gelangt daher zu folgendem Satz: *Ist eine unendlich dünne, von zwei einander ähnlichen Ellipsoidflächen begrenzte Schaale gegeben, und legt man durch dieselbe irgend drei äquidistante Parallelebenen (von ganz beliebiger Richtung), so werden diejenigen beiden Theile der Schaale, welche zwischen diesen Parallelebenen liegen, gleiches Volumen besitzen.* Dieser Satz aber kann, wie man sofort übersieht, auf die elektrostatischen Verhältnisse an der Oberfläche eines gegebenen Ellipsoids übertragen werden, und lautet alsdann folgendermassen:

Befindet sich die Elektricität auf der Oberfläche eines gegebenen Ellipsoids (ohne Einwirkung äusserer Kräfte) *im Gleichgewicht, und construirt man irgend drei äquidistante und das Ellipsoid schneidende Parallelebenen E, F, G von ganz beliebiger Richtung, so wird die zwischen E und F vorhandene Elektricitätsmenge stets ebenso gross sein, wie diejenige, welche zwischen F und G sich vorfindet.**)

Ueberträgt man aber diesen allgemeinen Satz auf den Specialfall eines unendlich dünnen Rotationsellipsoids, und denkt man sich die Ebenen E, F, G senkrecht zur Axe desselben, so gelangt man unmittelber zu der Einsicht, dass die *lineare* elektrische Dichtigkeit für ein solches Ellipsoid constant ist. W. z. z. w.

§ 10.

Die elektrische Vertheilung auf dem Conoid unter Einfluss gegebener äusserer Kräfte.

Die hier anzuwendenden Methoden sind aus den vorhergehenden Paragraphen bereits so deutlich zu erkennen, dass ich mich beschränken kann auf die Mittheilung der resultirenden Formeln. Dabei mag wiederum der Parameter des Conoids mit ω, also ein Punkt auf der Conoidfläche mit $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ bezeichnet sein, während $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ und $(\vartheta_2, \omega_2, \varphi_2, \psi_2)$ irgend zwei Punkte *ausserhalb* vorstellen sollen. Auch soll wieder zur Abkürzung $\cos\omega = \mu$, $\cos\omega_1 = \mu_1$ und $\cos\omega_2 = \mu_2$ gesetzt werden. Es gilt folgender Satz:

Betrachtet man diejenige elektrische Belegung, welche auf dem Conoid inducirt wird, durch einen äusseren elektrischen Massenpunkt von der Masse (— 1) *mit den Coordinaten $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ unter der Voraussetzung, dass das Conoid zur Erde abgeleitet ist, so wird die Dichtigkeit η dieser Belegung in irgend einem Oberflächenpunkt $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ den Werth haben:*

$$(1)\qquad \eta = \frac{\psi\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{8\pi^2 a^2 \sin\omega}\int_0^\infty dq\left(\sum_{j=0}^{j=\infty}\varepsilon_j\,\frac{K_{qj}(\mu_1)\cdot\cos q(\vartheta-\vartheta_1)\cdot\cos j(\varphi-\varphi_1)}{K_{qj}(\mu)}\right).$$

Gleichzeitig wird das Potential G dieser Belegung auf irgend einen äusseren Punkt $(\vartheta_2, \omega_2, \varphi_2, \psi_2)$ lauten:

$$(2)\qquad G = \frac{\sqrt{\psi_1}\sqrt{\psi_2}}{2a}\int_0^\infty dq\left(\sum_{j=0}^{j=\infty}\varepsilon_j\,\mathrm{E}_{qj}\frac{L_{qj}(\mu)}{K_{qj}(\mu)}\,K_{qj}(\mu_1)K_{qj}(\mu_2)\cos q(\vartheta_1-\vartheta_2)\cos j(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

*) Eine Anzahl anderer einfacher Sätze über die elektrische Vertheilung auf einem Ellipsoid, namentlich auch auf einem Rotationsellipsoid, habe ich früher angegeben, in diesen Annalen, Bd. XIII, Seite 266.

Dabei stehen μ, μ_1, μ_2 *resp. zur Abkürzung für* $\cos\omega$, $\cos\omega_1$, $\cos\omega_2$.

Man pflegt diese Belegung die dem Centralpunkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ entsprechende *Green'sche Belegung*, und das Potential G die *Green'sche Function* zu nennen. Nach einem bekannten allgemeinen Satz muss die Gesammtmasse dieser Belegung $= \frac{V}{C}$ sein, falls nämlich V und C dieselben Bedeutungen haben, wie in (8), (9), (10) Seite 222—224. Und dass solches wirklich der Fall ist, lässt sich auf Grund der Formel (1) ohne Mühe nachweisen.

Wir wollen uns nun ferner einen *schaalenförmigen* Körper vorstellen, der innerlich von der gegebenen Conoidfläche vom Parameter ω, äusserlich aber von einer ganz beliebigen Fläche begrenzt ist. *Denkt man sich irgendwo im Hohlraum dieses schaalenförmigen Körpers einen elektrischen Massenpunkt von der Masse* (-1) *mit den Coordinaten* $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$, *und betrachtet man diejenige elektrische Belegung, welche auf der innern Fläche, d. i. der Conoidfläche durch diesen Punkt inducirt wird, unter der Voraussetzung, dass der Körper selber zur Erde abgeleitet sei, so wird die Dichtigkeit* η *dieser Belegung an irgend einer Stelle* $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ *der Conoidfläche den Werth haben:*

$$(3)\qquad \eta = \frac{\psi\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{8\pi^2 a^2 \sin\omega}\int_0^\infty dq\left(\sum_{j=0}^{j=\infty}\varepsilon_j\,\frac{L_{qj}(\mu_1)\cdot\cos q(\vartheta-\vartheta_1)\cdot\cos j(\varphi-\varphi_1)}{L_{qj}(\mu)}\right).$$

Und gleichzeitig wird das Potential G dieser Belegung auf irgend einen Punkt $(\vartheta_2, \omega_2, \varphi_2, \psi_2)$ *innerhalb des genannten Hohlraumes dargestellt sein durch:*

$$(4)\qquad G = \frac{\sqrt{\psi_1}\sqrt{\psi_2}}{2a}\int_0^\infty dq\left(\sum_{j=0}^{j=\infty}\varepsilon_j\,\mathrm{E}_{qj}\,\frac{K_{qj}(\mu)}{L_{qj}(\mu)}\,L_{qj}(\mu_1)\,L_{qj}(\mu_2)\cos q(\vartheta_1-\vartheta_2)\cos j(\varphi_1-\varphi_2)\right),$$

wo μ, μ_1, μ_2 *wieder für* $\cos\omega$, $\cos\omega_1$, $\cos\omega_2$ *gesetzt sind.*

Man pflegt diese Belegung die dem innern Centralpunkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ entsprechende *Green'sche Belegung* der Conoidfläche, und G die *Green'sche Function* zu nennen. — Nach einem bekannten Satz ist die Gesammtmasse dieser Belegung stets $= 1$. Und dass solches der Fall, kann man auf Grund der Formel (3) leicht nachweisen.

§ 11.

Anschauliche Bedeutung der Kegelfunctionen. Darstellung derselben als Potentiale.

Wir wollen uns die Verbindungslinie AA' der beiden Pole, deren Linienelement ds (nach Seite 219) den Werth hat:

$$ds = \frac{2a\,d\vartheta}{\psi} \tag{1}$$

mit irgend welcher Masse von der *linearen Dichtigkeit* δ belegt denken, und das Potential V dieser Belegung auf einen beliebig gegebenen Punkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ zu berechnen suchen.

Bezeichnet man die Coordinaten des Elementes ds mit $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$, so ist offenbar $\omega = \pi$; wodurch die für $\cos\gamma$ geltende Formel:

$$\cos\gamma = \cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi - \varphi_1)$$

übergeht in $\cos\gamma = -\cos\omega_1$, d. i. in $\cos\gamma = -\mu_1$. Somit ergiebt sich für die reciproke Entfernung T des Elementes ds vom Punkte $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ der Werth:

$$T = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_1}}{2a}\int_0^\infty dq\,C_q L_q(-\mu_1)\cdot\cos q(\vartheta - \vartheta_1), \qquad \text{(vgl. Seite 199)}. \tag{2}$$

Mit Rücksicht auf (1) und (2) erhält man nun für das zu berechnende Potential

$$V = \int T\delta\,ds \tag{3}$$

den Werth:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta\cdot\left\{\frac{\delta\sqrt{\psi_1}}{\sqrt{\psi}}\int_0^\infty dq\,C_q L_q(-\mu_1)\cdot\cos q(\vartheta - \vartheta_1)\right\}. \tag{4}$$

Das δ ist eine willkürlich gegebene Function von ϑ; und Gleiches gilt daher von dem Bruch $\frac{\delta}{\sqrt{\psi}} = \frac{\delta}{\sqrt{2(\cos i\vartheta) + 2}} = \frac{\delta}{2\cos\left(\frac{i\vartheta}{2}\right)}$. Denkt man sich diesen Bruch dargestellt durch ein Integral von der Form:

$$\frac{\delta}{\sqrt{\psi}} = \int_0^\infty \frac{dq\,A_q\cos q\vartheta}{\pi C_q}, \tag{5}$$

wo A_q eine willkürliche Function von q vorstellt, und substituirt man diesen Werth (5) in (4), so ergiebt sich:

$$V = \sqrt{\psi_1}\int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta\left\{\left(\int_0^\infty \frac{dq\,A_q\cos q\vartheta}{\pi C_q}\right)\left(\int_0^\infty dq\,C_q L_q(-\mu_1)\cdot\cos q(\vartheta - \vartheta_1)\right)\right\},$$

also mittelst der allgemeinen Sätze (B), (B'), Seite 218, etc.:

(6) $$V = \sqrt{\psi_1} \int_0^\infty dq\, A_q L_q(-\mu_1) \cos q\vartheta_1 .$$

Denken wir uns jetzt die willkürliche Function A_q so gewählt, dass sie für ein gegebenes unendlich kleines Intervall

$$q \cdots (q+\gamma)$$

durchweg $= 1$, sonst aber überall $= 0$ ist, so nehmen die Formeln (5), (6) folgende Gestalt an:

(5a) $$\frac{\delta}{\sqrt{\psi}} = \gamma \frac{\cos q\vartheta}{\pi C_q},$$

(6a) $$V = \sqrt{\psi_1} \cdot \gamma L_q(-\mu_1) \cos q\vartheta_1, \text{ d. i. } = \gamma \cdot \sqrt{\psi_1}\, K_q(\mu_1) \cos q\vartheta_1 ;$$

und führen also (falls man noch mit γ dividirt) zu folgendem Satz:

Bezeichnet q eine beliebig gegebene positive (ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale) *Zahl, und denkt man sich die Verbindungslinie AA' der beiden Pole mit einer Masse belegt, deren lineare Dichtigkeit*

(7) $$= \frac{\sqrt{\psi} \cdot \cos(q\vartheta)}{\pi C_q}, \quad d.\ i. \quad = \frac{2 \cdot \cos(q\pi i) \cdot \cos\left(\frac{\vartheta i}{2}\right) \cdot \cos(q\vartheta)}{\pi}$$

ist, so wird das von dieser Belegung auf einen beliebigen Raumpunkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ *ausgeübte Potential V den Werth haben:*

(8) $$V = \sqrt{\psi_1} \cdot K_q(\mu_1) \cdot \cos(q\vartheta_1),$$

wo μ_1 für $\cos \omega_1$ *steht.* — In analoger Weise ergiebt sich (was weiter auszuführen überflüssig sein würde), dass der Ausdruck

(9) $$W = \sqrt{\psi_1} \cdot L_q(\mu_1) \cdot \cos(q\vartheta_1)$$

ebenfalls angesehen werden kann als ein auf den Punkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ ausgeübtes Potential, nur mit dem Unterschiede, dass in diesem Fall die das Potential hervorbringende Masse nicht längs der Linie AA', sondern längs der zu dieser *supplementaren Linie**) hinerstreckt zu denken ist.

Desgleichen können auch die allgemeinern Ausdrücke

(10) $$V = \sqrt{\psi_1} \cdot K_{qj}(\mu_1) \cdot \cos(q\vartheta_1) \cdot \cos(j\varphi_1),$$

(11) $$W = \sqrt{\psi_1} \cdot L_{qj}(\mu_1) \cdot \cos(q\vartheta_1) \cdot \cos(j\varphi_1)$$

---

*) Liegen also die aufeinanderfolgenden Punkte U, A, A', U' in gerader Linie, und zwar U und U' im Unendlichen, so ist die das Potential W erzeugende Masse theils längs der Linie UA, theils längs $A'U'$ hinerstreckt zu denken.

als Potentiale von Massen interpretirt werden, die entweder auf der Linie AA', oder auf der supplementaren Linie ausgebreitet sind. Nur wird es in diesem Fall nicht mehr möglich sein, jene Linien schlechtweg als *Linien* anzusehen, sondern erforderlich sein, dieselben als *unendlich dünne Conoide* zu betrachten.

Analoges endlich wie von den Ausdrücken (8), (9), (10), (11) gilt endlich auch von

(12) denjenigen Ausdrücken,

die aus jenen entstehen, sobald man daselbst die Cosinus (resp. einen Theil dieser Cosinus) durch die entsprechenden Sinus ersetzt.

§ 13.

Die elektrische Vertheilung auf einem Conductor, welcher ungefähr die Gestalt einer Hantel besitzt, nämlich aus zwei Kugeln und einem dieselben verbindenden Conoid besteht.

Sind β, γ und c *gegebene*, den Bedingungen

$$(1) \qquad \beta > 0 > \gamma, \qquad -1 < c < +1$$

entsprechende *Constanten*, so repräsentirt $\vartheta = \beta$ eine den Pol A $(\vartheta = +\infty)$ umschliessende Kugelfläche, ebenso $\vartheta = \gamma$ eine den *andern* Pol A' $(\vartheta = -\infty)$ umschliessende Kugelfläche, und endlich $\mu = c$ eine von A nach A' laufende Conoidfläche. Sind nun ferner O_β und O_γ diejenigen Theile der beiden Kugelflächen, welche *ausserhalb* der Conoidfläche liegen, und bezeichnet O_c denjenigen Theil der Conoidfläche, der *ausserhalb* der beiden Kugelflächen sich befindet, so bilden offenbar O_β, O_γ und O_c die *vollständige Begrenzung* eines gewissen Körpers von hantelförmiger Gestalt. Ich werde im Folgenden zeigen, dass man für diesen Körper das elektrostatische Problem zu lösen im Stande ist, sowohl für den Fall, dass *keine* äusseren Kräfte influiren, als auch für den Fall, dass solche Kräfte *vorhanden* sind.

Um zunächst die elektrische Vertheilung für den Fall zu finden, dass *keine* äusseren Kräfte einwirken, haben wir diejenige Potentialfunction des äusseren Raumes zu finden, welche an der Oberfläche des gegebenen Conductors, d. i. auf O_β, O_γ und O_c *constant*, etwa $= C$ ist. Lassen wir zuerst die Conoidfläche O_c ausser Acht, so würde diese Function leicht angebbar sein, nämlich in einem beliebigen Punkte $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ jenes äussern Raumes den Werth besitzen:

$$(2) \quad F(\vartheta,\mu) = C\sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(\mu)\left(-e^{N(\vartheta-\beta)}\frac{e^{N\gamma}-e^{-N\gamma}}{e^{N\delta}-e^{-N\delta}} + e^{N(\gamma-\vartheta)}\frac{e^{N\beta}-e^{-N\beta}}{e^{N\delta}-e^{-N\delta}}\right),$$

wo $\delta = \beta - \gamma$ sein soll, und N zur Abkürzung steht für $\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Es folgt dies unmittelbar aus meinen früheren Untersuchungen über die elektrische Vertheilung auf zwei Kugelflächen.*)

Um die eigentlich gesuchte Potentialfunction zu finden, mag nun zu $F(\vartheta, \mu)$ noch eine Correction $f(\vartheta, \mu)$ hinzugefügt werden, jene gesuchte Potentialfunction also bezeichnet werden mit:

(3) $$F(\vartheta, \mu) + f(\vartheta, \mu).$$

Dieses $f(\vartheta, \mu)$ muss alsdann

(I) .... erstens eine Potentialfunction des äusseren Raumes sein,

(II) .... zweitens auf den Flächen O_β und O_γ überall $= 0$ sein; und dies wird stattfinden, wenn $f(\vartheta, \mu)$ verschwindet sowohl für $\vartheta = \beta$, als auch für $\vartheta = \gamma$,

(III) .... drittens endlich muss f mit F zusammengenommen auf der Fläche O_c den Werth C ergeben. D. h. sie muss für alle zwischen β und γ liegenden Werthe des Argumentes ϑ der Bedingung entsprechen: $F(\vartheta, c) + f(\vartheta, c) = C$.

Der Bedingung (I) wird [wie aus den Betrachtungen des vorhergehenden §. hervorgeht; vergl. daselbst (8) und (12)] entsprochen werden, wenn man für f die Function nimmt:

(4) $$\sqrt{\psi} \cdot K_q(\mu) \cdot (A \sin q\vartheta + B \cos q\vartheta),$$

wo A, B, q willkürliche Constanten sind, von denen allerdings die letzte auf nur *positive* Werthe beschränkt worden ist. Wir können also z. B. $q = \frac{n\pi}{\beta - \gamma} = \frac{n\pi}{\delta}$ setzen, wo n eine *positive ganze Zahl* vorstellen mag. Setzen wir gleichzeitig

$$A = \cos \frac{n\gamma\pi}{\delta} \quad \text{und} \quad B = -\sin \frac{n\gamma\pi}{\delta},$$

so geht der Ausdruck (4) über in

$$\sqrt{\psi} \cdot K_{\frac{n\pi}{\delta}}(\mu) \left(\cos \frac{n\gamma\pi}{\delta} \sin \frac{n\vartheta\pi}{\delta} - \sin \frac{n\gamma\pi}{\delta} \cos \frac{n\vartheta\pi}{\delta}\right)$$

d. i. in:

(5) $$\sqrt{\psi} \cdot K_{\frac{n\pi}{\delta}}(\mu) \cdot \sin \frac{n(\vartheta - \gamma)\pi}{\delta}.$$

Und dieser Ausdruck hat, wie sofort ersichtlich, die Eigenschaft, nicht nur der Bedingung (I), sondern gleichzeitig auch der Bedingung (II) zu entsprechen. Denn der in ihm enthaltene Sinus geht für $\vartheta = \beta$ über in $\sin \frac{n(\beta - \gamma)\pi}{\delta}$ d. i. in $\sin n\pi$, d. i. in 0; während er andrerseits für $\vartheta = \gamma$ direct in 0 sich verwandelt. — Jenen Bedingungen

*) C. Neumann: *Allgem. Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand etc.*, 1862 (Halle, bei Schmidt). Vgl. daselbst den Satz Seite 110.

(I), (II) wird also auch entsprochen werden, wenn wir für f eine Summe solcher Ausdrücke (5) nehmen, jeder noch multiplicirt mit einer willkürlichen Constanten A_n. Setzen wir demgemäss:

$$f(\vartheta,\mu)=\sqrt{\psi}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n K_{\frac{n\pi}{\delta}}(\mu)\cdot\sin\frac{n(\vartheta-\gamma)\pi}{\delta}, \tag{6}$$

so bleibt nur noch übrig, diese constanten Coefficienten A_n der Art zu bestimmen, dass auch der Bedingung (III) Genüge geschieht.

Nun ist $\psi = 2(\cos i\vartheta) - 2\mu$. Somit folgt aus (6) für $\mu = c$:

$$f(\vartheta,c)=\sqrt{2(\cos i\vartheta)-2\cos c}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n K_{\frac{n\pi}{\delta}}(c)\sin\frac{n(\vartheta-\gamma)\pi}{\delta}; \tag{7}$$

und die Bedingung (III) verlangt, dass dieser Ausdruck $f(\vartheta,c)$ für alle zwischen β und γ liegenden Argumente ϑ identisch sei mit $C-F(\vartheta,c)$, verlangt also, dass für die genannten Argumente folgende Gleichung stattfinde:

$$\sqrt{2(\cos i\vartheta)-2\cos c}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n K_{\frac{n\pi}{\delta}}(c)\cdot\sin n\Theta = C-F(\vartheta,c), \tag{8}$$

wo Θ zur Abkürzung gesetzt ist für $\frac{(\vartheta-\gamma)\pi}{\delta}$.

Wandert aber ϑ von β bis γ, so wandert gleichzeitig dieses grosse Θ von π bis 0. Wir können uns in der Gleichung (8) überall das ϑ durch das grosse Θ ausgedrückt denken, und alsdann sagen, die Bedingung (III) verlange, dass diese Gleichung erfüllt sei für alle zwischen 0 und π liegenden Werthe von Θ. Demgemäss wird man den allgemeinen Coefficienten A_n dadurch erhalten können, dass man die Gleichung, nachdem sie zuvor durch die Wurzelgrösse dividirt worden ist, mit $\sin n\Theta\cdot d\Theta$ multiplicirt, und sodann nach Θ zwischen 0 und π integrirt. In der That ergiebt sich in solcher Weise:

$$\pi A_n K_{\frac{n\pi}{\delta}}(c) = 2\int_0^\pi \frac{[C-F(\vartheta,c)]\sin n\Theta\cdot d\Theta}{\sqrt{2(\cos i\vartheta)-2\cos c}}, \tag{9}$$

wo auf der rechten Seite vor Ausführung der Integration ϑ durch Θ auszudrücken, also durch den Ausdruck $\left(\gamma+\frac{\delta\Theta}{\pi}\right)$ zu ersetzen ist.

Die gesuchte Potentialfunction des äusseren Raumes, welche an der Oberfläche des gegebenen Conductors, d. i. auf den Flächen O_β, O_γ und O_c überall gleich der gegebenen Constanten C sein soll, wird also [vgl. (3) und (6)] *für einen beliebigen Raumpunkt* $(\vartheta,\mu,\varphi,\psi)$ *den Werth haben:*

$$(10) \qquad F(\vartheta, \mu) + \sqrt{\psi} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n K_{\frac{n\pi}{\delta}}(\mu) \cdot \sin \frac{n(\vartheta - \gamma)\pi}{\delta},$$

wo $F(\vartheta, \mu)$ *die in* (2) *angegebene Bedeutung besitzt, während die constanten Coefficienten* A_n *sich bestimmen mittelst der Formel* (9).

Offenbar kann diese Potentialfunction unmittelbar angesehen werden als dasjenige Potential, welches der mit Elektricität geladene Conductor auf den *äusseren* Punkt $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ ausübt, vorausgesetzt, dass sein Potential auf *innere* Punkte den Werth C hat. Demgemäss ergiebt sich die *Dichtigkeit der elektrischen Vertheilung* aus dem Potentiale (10) in bekannter Weise, mittelst einer Differentiation nach der Oberflächen-Normale.

In analoger Weise wird man endlich das Problem der elektrischen Vertheilung für den hier betrachteten Conductor auch dann zu lösen im Stande sein, wenn gegebene äussere Kräfte auf denselben einwirken. Ich beschränke mich hier auf diese wenigen Andeutungen, und hoffe in einer späteren Arbeit auf die in diesem Paragraphen nur flüchtig angedeuteten Untersuchungen näher eingehen zu können. Denn es knüpfen sich an dieselben gewisse Fragen, die nicht ohne Interesse sind, und deren Beantwortung bisher noch niemals versucht worden ist.

So ist man z. B. im Allgemeinen der Ansicht, dass bei Anwendung *zweier* Conductoren, die durch einen *sehr dünnen Draht* mit einander verbunden sind, die Wirkung auf äussere Punkte, sowie auch die Vertheilung auf jenen Conductoren nahezu dieselbe sei, als wäre jener Draht gar nicht vorhanden, dass also in den genannten Beziehungen durch eine plötzliche Vernichtung jenes Drahtes keine merkliche Aenderung eintreten könne. Die hier entwickelte oder vielmehr nur angedeutete Theorie wird voraussichtlich die Mittel gewähren zur Prüfung dieser Ansicht für den Fall, dass die beiden Conductoren *Kugeln* sind. Denn das im gegenwärtigen Paragraphen behandelte die beiden Kugeln verbindende Conoid kann äusserst dünn gedacht werden, und reducirt sich alsdann im Wesentlichen auf einen *dünnen Verbindungsdraht.*

Bemerkung. — Eine andere Methode zur Lösung der in diesem Paragraphen behandelten Aufgabe würde folgende sein. Man setzt die gesuchte Potentialfunction des äusseren Raumes wiederum

$$= F(\vartheta, \mu) + f(\vartheta, \mu),$$

und bestimmt die *erstere* Function $F(\vartheta, \mu)$ der Art, dass sie auf den Flächen O_β, O_γ überall $= C$, und auf der Fläche O_c überall $= 0$, andererseits aber die *zweite* Function $f(\vartheta, \mu)$ in der Weise, dass sie *umgekehrt* auf O_β, O_γ überall $= 0$, und auf O_c überall $= C$ wird.

Es unterliegt kaum einem Zweifel, dass auch diese Methode durchführbar ist, falls man nur Kugelfunctionen P_n in Anwendung bringt, deren Indices n die Wurzeln einer Gleichung von der Form $P_n(c) = 0$ sind. Doch habe ich auf diese (für die vorliegenden Zwecke vielleicht *nicht* besonders geeignete) Methode näher einzugehen, um so weniger Grund, als Professor F. Klein einige sehr interessante und speciell nach dieser Richtung vordringende Betrachtungen zu publiciren im Begriff ist.

Leipzig, Februar 1881.

Ueber Lamé'sche Functionen.

Von

Felix Klein in Leipzig.

Im Folgenden beabsichtige ich, eine Eigenschaft der Lamé'schen Functionen zu beweisen, die bei geometrischer Betrachtungsweise ausserordentlich nahe liegt, aber doch noch nicht bemerkt zu sein scheint. Mein Theorem bezieht sich unterschiedslos auf die Lamé'schen Functionen aller Ordnungen*), mag aber zunächst hier nur für die Lamé'schen Functionen zweiter Ordnung (die gewöhnlichen Lamé'schen Functionen) ausgesprochen werden. Diese Functionen sind, von den eventuell vorkommenden, dann aber nur einfach zutretenden Factoren $\sqrt{\lambda^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - b^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - c^2}$ abgesehen, ganze Functionen von λ^2, von denen jedesmal $(\tau + 1)$ Functionen des Grades τ zusammengehören (vergl. § 2. des Nachfolgenden). Man weiss, dass diese Functionen alle verschieden und dabei reell sind, man weiss ferner, dass sie, gleich Null gesetzt, je τ getrennte reelle Wurzeln ergeben, die alle in dem Intervalle von 0 bis c^2 enthalten sind, — und zwar in der Weise, dass keine Wurzel mit 0 oder mit c^2 oder auch mit dem zwischen 0 und c^2 eingeschalteten Werthe b^2 zusammenfällt. Mein Theorem bezieht sich auf die Art und Weise, wie die so entstehenden $(\tau + 1)$ Serien von je τ Grössen auf die Theilintervalle von 0 bis b^2 und von b^2 bis c^2 vertheilt sind. Rein combinatorisch genommen hat man für die Vertheilung von τ Grössen auf zwei Intervalle $(\tau + 1)$ Möglichkeiten: man wird in das eine Intervall beliebige τ_1 Grössen legen, in das andere $\tau - \tau_1$, und nun τ_1 von 0 bis τ laufen lassen. Mein Satz ist: *dass jede dieser Möglichkeiten bei einer, und natürlich nur bei einer, unserer* $(\tau + 1)$ *Lamé'schen Functionen eintrifft, dass also die Functionen und die verschiedenen Vertheilungsweisen der Wurzeln einander ein-*

---

*) Siehe hier und im Folgenden: Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, Berlin bei Reimer, zweite Auflage, 1878 (später als H. K. citirt). Bezeichnungen oder Sätze, die ich ohne nähere Erläuterung anwende, sind diesem Werke entnommen.

deutig entsprechen. — Der Beweis ist, wie ich schon andeutete, so einfach wie möglich. Es kommt nur darauf an, sich auf der Kugel die geometrische Bedeutung der Lamé'schen Producte $E(\mu^2)\cdot E(\nu^2)$ klar zu machen und dann die auf der Kugel gewöhnlich benutzten Polarcoordinaten als einen Grenzfall der bei dieser Interpretation verwandten elliptischen Coordinaten zu betrachten.

§ 1.

Elliptische Coordinaten auf der Kugel.

Im genauen Anschlusse an die Bezeichnungsweise des Heine'schen Buches seien die elliptischen Coordinaten μ^2, ν^2 eines Punktes der Kugel:

$$x^2+y^2+z^2=1$$

als die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=0 \tag{1}$$

erklärt. Es soll b^2, wie schon erwähnt, kleiner als c^2 sein. Dann liegt die eine Wurzel, die ich μ^2 nennen will, zwischen b^2 und c^2, die zweite, die mit ν^2 bezeichnet sein soll, zwischen 0 und b^2. Wenn im Folgenden gesagt wird, dass $\lambda^2=\mu^2$ oder $=\nu^2$ sei, so wird damit angedeutet, dass die an sich unbeschränkt veränderliche Grösse λ^2 in eins der genannten Intervalle eingeschlossen sei.

Die Gleichung (1) stellt geometrisch eine Schaar von Kegeln zweiter Ordnung mit gemeinsamen Focallinien dar, wobei man zur Bestimmung der letzteren die beiden Gleichungen

$$y=0,\quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2-c^2}=0 \tag{2}$$

erhält. Diese Focallinien werden natürlich von sämmtlichen Kegeln — sofern die letzteren reell sind — eingeschlossen. Aber übrigens haben die Kegel $\lambda^2=\mu^2$ und $\lambda^2=\nu^2$ verschiedene Lage. Die ersteren, die ich *Kegel der ersten Art* nennen will, umschliessen die Z-Axe; die *Kegel der zweiten Art* sind um die X-Axe herumgelegt. Dabei beachte man, dass beide Kegelsysteme als Grenzfälle zwei (doppeltzählende) Coordinatenebenen enthalten: die Kegel erster Art für $\lambda^2=c^2$ die XY-, für $\lambda^2=b^2$ die XZ-Ebene, die Kegel zweiter Art für $\lambda^2=b^2$ ebenfalls die XZ-, für $\lambda^2=0$ die YZ-Ebene. Ich werde diese Ebenen die *Hauptebenen*, die Kreise, in denen sie die Kugel durchdringen, die *Hauptkreise* nennen. Von den Hauptkreisen abgesehen besteht jede Curve $\lambda^2=\mu^2$ oder $\lambda^2=\nu^2$ auf der Kugel aus *zwei* Ovalen, deren Lage in dem einen oder anderen Falle leicht vorzustellen ist.

Es gilt nun vor Allem, den Grenzübergang deutlich aufzufassen, der eintritt, wenn $b^2 = c^2$ wird. Zuvörderst sieht man, dass dann die beiden Focallinien (2) in die X-Axe zusammenfallen. In ihr schneiden sich übrigens nach wie vor die beiden Hauptkreise $y = 0$, $z = 0$, die ich nun als *Hauptmeridiane* bezeichnen will. Auch der dritte Hauptkreis, $x = 0$, der jetzt der *Aequator* heissen soll, ist völlig ungeändert geblieben. Dagegen haben sich die übrigen Curven der ersten oder zweiten Art wesentlich umgestaltet: *Die einzelne Curve erster Art ist in zwei gegen XZ (oder XY) unter gleichem Winkel geneigte Meridiane zerfallen; die Curve zweiter Art in zwei Parallelkreise, welche vom Aequator beiderseitig gleich weit abstehen.* Zum Beweise appellire ich an die geometrische Anschauung. Will man es auf analytischem Wege einsehen, so setze man in (1) zunächst einmal b^2 schlechthin gleich c^2; die dann entstehende Gleichung:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2 + z^2}{\lambda^2 - b^2} = 0 \tag{3}$$

definirt für $\lambda^2 = \nu^2$ auf der Kugel die gewollten Parallelkreise. Ein ander Mal setze man zuvörderst:

$$c^2 = b^2 + \varepsilon^2, \quad \lambda^2 = \mu^2 = b^2 + \varepsilon'^2,$$

— wo ε grösser als ε' sein soll —, und lasse nun ε, ε' unabhängig von einander unendlich klein werden. So reducirt sich (1) nach Wegwerfung verschwindender Grössen auf folgende Gleichung:

$$y^2 = \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cdot z^2, \tag{4}$$

und diese repräsentirt in der That zwei gegen XZ gleich stark geneigte Meridiane.

§ 2.

Definition der Lamé'schen Functionen.

Die Kugelfunction mit zwei Variabelen werde für das Folgende in bekannter Weise definirt *als homogene Function f von x, y, z, die der Gleichung*

$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

*genügt.**) Der *Grad* der Kugelfunction ist dann der Grad von f in x, y, z.

*) Ich möchte hier insbesondere auf die Darstellung verweisen, welche **Maxwell** in seinem treatise on electricity and magnetism (Cambridge 1873) gegeben hat. — Vielleicht hat die Bemerkung Interesse, die sich auf Grund der dort entwickelten Definition unmittelbar ergiebt: *dass die 15 Symmetrieebenen des Ikosaeders die Nullstellen einer Kugelfunction repräsentiren.*

Es wird nun Kugelfunctionen n^{ten} Grades geben können, die abgesehen von etwa vortretenden Factoren x, oder y, oder z (die aber nur in einfacher Multiplicität vorhanden sein sollen) in lauter Factoren von der in (1) vorkommenden Gestalt zerfallen:

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}.$$

Gleich Null gesetzt repräsentirt ein solches f ein Aggregat von Kegeln (1), dem eventuell noch einige Coordinatenebenen zutreten. Auf der Kugel werden wir also als Nullstellen von f eine Anzahl Curven der ersten oder zweiten Art haben, vielleicht verbunden mit einigen der Hauptkreise. Eine solche Function f soll im Folgenden eine *Lamé'sche Function vom n^{ten} Grade* genannt werden, und zwar, der Deutlichkeit halber, eine *Lamé'sche Function von zwei Parametern.*

Der Zusammenhang dieser Definition mit der gewöhnlichen ergiebt sich sofort, wenn man statt der x, y, z der Kugelpunkte die elliptischen Coordinaten μ^2, ν^2 einführt. Zu dem Zwecke hat man, der bekannten Theorie zufolge, zuvörderst die Gesammtheit der auf der Kugel befindlichen Nullstellen durch eine Gleichung in λ^2 darzustellen:

$$E(\lambda^2)=0;$$

dann ist, von einem constanten Factor abgesehen, der uns hier gleichgültig sein wird, f gleich dem Producte

$$E(\mu^2)\cdot E(\nu^2).$$

Der einzelne Factor dieses sogenannten Lamé'schen Productes ist das, was man gewöhnlich als Lamé'sche Function schlechthin bezeichnet; im Gegensatze zur Function f könnte man ihn eine Lamé'sche Function *mit nur einem Parameter* nennen.

Die Function $E(\lambda^2)$ enthält, den etwa vorhandenen Hauptkreisen entsprechend, eine Anzahl Factoren der Art $\sqrt{\lambda^2}$, $\sqrt{\lambda^2-b^2}$, $\sqrt{\lambda^2-c^2}$; nach Abtrennung derselben reducirt sie sich auf eine ganze Function von λ^2:

$$\varphi_\tau(\lambda^2).$$

Der Index τ soll dabei den Grad von φ in λ^2 bedeuten. Lamé'sche Functionen desselben Grades, die hinsichtlich der auf die Hauptkreise bezüglichen Quadratwurzeln übereinstimmen, mögen demselben *Typus* zugerechnet werden. Es giebt dann, wie in der Einleitung bemerkt, jedesmal $(\tau+1)$ Functionen desselben Typus.

Des Näheren stellt sich bei gegebenem n die Sache folgendermassen:

1) *Sei n gerade.* Dann muss mit dem Aggregat der Kegel (1) nothwendig eine paare Anzahl von Hauptebenen verbunden sein. Man hat also folgende vier Typen, deren Bezeichnung nach dem Voraufgeschickten ohne weitere Erläuterung verständlich sein wird:

$$
(5)\quad \begin{cases}
\text{I.} & E = \varphi_{\frac{n}{2}}(\lambda^2), \\
\text{II.} & E = \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \varphi_{\frac{n-2}{2}}(\lambda^2), \\
\text{III.} & E = \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \sqrt{\lambda^2} \cdot \varphi_{\frac{n-2}{2}}(\lambda^2), \\
\text{IV.} & E = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \varphi_{\frac{n-2}{2}}(\lambda^2).
\end{cases}
$$

Von Functionen der ersten Art giebt es, dem wiederholt angeführten Satze entsprechend, $\frac{n+2}{2}$, von Functionen der übrigen Arten je $\frac{n}{2}$, im Ganzen also $(2n+1)$ Lamé'sche Functionen des n^{ten} Grades, wie es sein muss.

2. *Sei n ungerade.* Dann hat man die vier Typen:

$$
(6)\quad \begin{cases}
\text{I.} & E = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \varphi_{\frac{n-3}{2}}(\lambda^2), \\
\text{II.} & E = \sqrt{\lambda^2} \cdot \varphi_{\frac{n-1}{2}}(\lambda^2), \\
\text{III.} & E = \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \varphi_{\frac{n-1}{2}}(\lambda^2), \\
\text{IV.} & E = \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \varphi_{\frac{n-1}{2}}(\lambda^2).
\end{cases}
$$

Auch diese Tabelle ergiebt, dem erwähnten Satze zufolge, $(2n+1)$ Lamé'sche Functionen des n^{ten} Grades.

§ 3.

Bedeutung und Beweis meines Theorem's.

Wie schon in der Einleitung berichtet, hat man vor Allem den Satz, dass die verschiedenen ganzen Functionen $\varphi_\tau(\lambda^2)$ gleich Null gesetzt lauter getrennte, reelle Wurzeln ergeben, die sämmtlich in dem Intervalle von 0 bis c^2 liegen und weder mit 0 noch mit b^2 oder mit c^2 zusammenfallen. Für unsere geometrische Auffassungsweise heisst dies, dass $f = E(\mu^2) \cdot E(\nu^2)$, von den Hauptkreisen abgesehen, auf der Kugel für τ getrennte reelle Curven verschwindet, welche sich, nach einem zunächst unbekannten Gesetze, auf die Curven der ersten und die Curven der zweiten Art vertheilen. *Eben dieses Gesetz will mein Theorem aufdecken.* Es besagt, *dass die $\tau + 1$ demselben Typus angehörigen Lamé'schen Functionen genau den verschiedenen hier denkbaren Vertheilungsmöglichkeiten entsprechen.*

Zum Beweise halte man an der geometrischen Auffassungsweise fest, und lasse nun den Grenzübergang des § 1. eintreten, welcher der Annahme $b^2 = c^2$ entspricht!

Da niemals zwei Curven der ersten oder der zweiten Art mit einander oder mit einem Hauptkreise zusammenfallen können, so degenerirt jede Curve der ersten Art in zwei (gleich stark gegen XZ geneigte) Meridiane, jede Curve der zweiten Art in zwei (gleichweit vom Aequator abstehende) Parallelkreise. Mittlerweile hat die Function

$$f(x, y, z) = E(\mu^2) \cdot E(\nu^2)$$

nicht aufgehört, der Differentialgleichung

$$\Delta_2 f = 0$$

zu genügen. Die elliptischen Coordinaten μ^2, ν^2 aber sind in die gewöhnlichen Polarcoordinaten φ, ϑ übergegangen, die, im Anschlusse an (3), (4) durch folgende Gleichungen definirt sind:

$$(7)\qquad \begin{cases} x = \cos\vartheta, \quad y = \sin\vartheta \cdot \cos\varphi, \quad z = \sin\vartheta \cdot \sin\varphi, \\ \qquad \cos\varphi = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}, \quad \cos\vartheta = \frac{\nu}{b}. \end{cases}$$

Man hat also vor allen Dingen (wegen der Lage der Nullstellen):

Die Function $f(x, y, z)$ ist in eine der $(2n+1)$ in Bezug auf die X-Axe symmetrischen Kugelfunctionen verwandelt, die in üblicher Bezeichnung lauten:

$$(8)\qquad \begin{cases} P_{(h)}^{(n)}(\cos\vartheta) \cdot \cos h\varphi, \\ P_{(h)}^{(n)}(\cos\vartheta) \cdot \sin h\varphi. \end{cases}$$

Hier hat h in der ersten Zeile die Werthe $0, 1, \cdots, n$, in der zweiten Zeile die Werthe $1, 2, \cdots, n$ zu durchlaufen.

Aber zugleich ist ersichtlich, in *welche* der $(2n+1)$ Functionen (8) f übergegangen ist.

Zunächst, was die Unterscheidung der beiden in (8) enthaltenen Formen angeht, so hat man offenbar die Regel:

Es entsteht $P_{(h)}^{(n)}(\cos\vartheta) \cdot \sin h\varphi$ oder $P_{(h)}^{(n)}(\cos\vartheta) \cdot \cos h\varphi$, *je nachdem $f(x, y, z)$ für $y = 0$ verschwindet, oder nicht, je nachdem also das zugehörige $E(\lambda^2)$ den Factor $\sqrt{\lambda^2 - b^2}$ enthält, oder nicht.*

Dann aber können wir auch innerhalb der beiden Arten sondern. In der That erkennt man sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

War τ_1 die Anzahl der Curven erster Art, für welche $f(x, y, z)$ verschwand, und befanden sich unter den Verschwindungscurven des Weiteren noch σ Hauptmeridiane (wo σ nur 0, 1, 2 sein kann), *so ist für die zugehörige Function* (8) $h = 2\tau_1 + \sigma$.

Hiermit aber ist die fragliche Function (8) vollkommen bestimmt.

Nun sage ich, *dass auch umgekehrt beim Grenzübergange die einzelne Function* (8) *nur aus einer einzigen Lamé'schen Function ent-*

stehen kann. Denn man weiss, dass die $(2n+1)$ zu Vergleich kommenden Functionen (8) gleich den $(2n+1)$ überhaupt vorhandenen Lamé'schen Functionen linear unabhängig sind.

Aus allen diesen Sätzen aber folgt unser Theorem unmittelbar. Man kennt bei der einzelnen Function (8) von vorneherein die Meridiane, für welche sie verschwindet. *Daher kann man auf die Anzahl der Curven erster (oder zweiter) Art, für welche die verschiedenen Lamé'schen Functionen verschwinden, den Rückschluss machen.* Es wird genügen, dies nur an einem der 8 Fälle, die man, dem vorigen Paragraphen zufolge, bei geradem resp. ungeradem n zu unterscheiden hat, in's Einzelne darzulegen.

Ich nehme zu dem Zwecke bei ungeradem n (Tab. (6)) den ersten Fall:

$$E = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \varphi_{\frac{n-3}{2}}(\lambda^2).$$

Ein solches E verschwindet für den Hauptmeridian $y = 0$, zudem für den Aequator, $x = 0$. Daher entspricht ihm eine Function

$$P_{(h)}^{(n)}(\cos\vartheta) \cdot \sin h\varphi$$

mit *geradem h.* Nun giebt es solcher Functionen (für $h = 2, 4, \cdots (n-1)$) im Ganzen $\frac{n-1}{2}$, also ebensoviele, als Functionen E des herausgegriffenen Typus. Die $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ Functionen der zweierlei Arten entsprechen einander also eindeutig. Aber

$$P_{(h)}^{(n)}(\cos\vartheta) \cdot \sin h\varphi$$

verschwindet (für gerades h) in $h-2$ Meridianen, die von den Hauptmeridianen verschieden sind. *Daher verschwinden die* $\frac{n-1}{2}$ *Functionen* $E(\lambda^2)$ *des von mir herausgegriffenen Typus beziehungsweise in* $\frac{h-2}{2}$ *Curven der ersten Art, wo h die Werthe* $2, 4, \cdots (n-1)$ *zu durchlaufen hat.* Sie sind also durch die Anzahl der Wurzeln λ^2 verschieden, welche

$$\varphi_{\frac{n-3}{2}}(\lambda^2) = 0$$

zwischen b^2 und c^2 ergiebt, — und eben dieses behauptet mein Theorem.

Dass sich das Theorem in den übrigen Fällen ganz ebenso ergiebt, bedarf wohl keiner Erläuterung mehr. —

Man erkennt das Charakteristische dieses Beweises. Hätte man, wie es gewöhnlich geschieht, λ^2 einfach als Abscisse gedeutet und dementsprechend $E(\lambda^2)$ interpretirt, so hätte sich das Intervall $b^2 \cdots c^2$

beim Grenzübergange in einen einzelnen Punkt zusammengezogen und es würde einer tiefer gehenden Untersuchung vorbehalten geblieben sein, die verschiedenen Wurzeln von $E(\lambda^2) = 0$, die in diesen Punkt coincidiren, nach ihrem Ursprunge zu classificiren. Indem wir statt dessen $E(\mu^2) \cdot E(\nu^2)$ auf der Kugel deuten, verliert der Grenzübergang für die geometrische Auffassung jegliche Unstetigkeit, und das Theorem, um welches es sich handelt, bietet sich unmittelbar.

§ 4.

Das Theorem für die Lamé'schen Functionen der p^{ten} Ordnung*).

Bei den Lamé'schen Functionen p^{ter} Ordnung treten an Stelle der drei Werthe $\lambda^2 = 0$, b^2, c^2 im Ganzen $p+1$, die, reell und positiv vorausgesetzt, in steigender Grössenordnung mit $a_0{}^2, a_1{}^2, \cdots a_p{}^2$ bezeichnet sein mögen. Eine Lamé'sche Function des n^{ten} Grades $E^{(n)}(p, \lambda^2)$ enthält als einfach vertretende Factoren eine gewisse Anzahl, m, von Quadratwurzeln:

$$\sqrt{\lambda^2 - a_0{}^2},\quad \sqrt{\lambda^2 - a_1{}^2},\quad \cdots,\quad \sqrt{\lambda^2 - a_p{}^2}$$

— wo m mit n zusammen gerade oder ungerade sein muss, aber übrigens beliebig ist — und ausserdem eine ganze Function $\frac{n-m}{2}$-ten Grades von λ^2: $\varphi_{\frac{n-m}{2}}(\lambda^2)$. Es mögen wieder alle diejenigen Functionen, welche hinsichtlich der vortretenden Quadratwurzeln übereinstimmen, demselben Typus zugerechnet werden. Die Zahl der linear unabhängigen Functionen des einzelnen Typus ist dann jeweils:

$$\frac{(\tau+1)(\tau+2)\cdots(\tau+p-1)}{1\cdot 2\cdots(p-1)},$$

wo τ der Abkürzung halber statt $\frac{n-m}{2}$ geschrieben ist. Man bemerkt, dass dies gerade diejenige Zahl ist, welche angiebt, auf wie viele verschiedene Weisen τ Punkte über p Intervalle vertheilt werden können.

Mein Theorem ist nun dies: *dass diese Uebereinstimmung keine zufällige ist.* Vielmehr sage ich:

1) *dass jedes Polynom $\varphi_\tau(\lambda^2)$, gleich Null gesetzt, τ getrennte, reelle Wurzeln ergiebt, welche alle zwischen $a_0{}^2$ und $a_p{}^2$ inne liegen, ohne mit diesen Grenzen oder den Grössen $a_1{}^2, \cdots a_{p-1}^2$ zusammenzufallen;*

*) Vergl. H. K. p. 445.

2) *dass die verschiedenen zu demselben Typus gehörigen Polynome $\varphi_\tau(\lambda^2)$ sich durch den Modus der Vertheilung ihrer Wurzeln auf die p Intervalle von a_0^2 bis a_1^2, von a_1^2 bis a_2^2, $\cdots$, von a_{p-1}^2 bis a_p^2 unterscheiden, so zwar, dass jeder Vertheilungsart eine und nur eine Function $\varphi_\tau(\lambda^2)$ entspricht.*

Der erste Theil dieses Satzes kann geradeso bewiesen werden, wie dies hinsichtlich der Lamé'schen Functionen zweiter Ordnung seit lange geschehen ist; man vergleiche das Heine'sche Buch. Um den zweiten Theil des Satzes einzusehen, hat man sich vor Allem die Art und Weise zu überlegen, wie die Kugel des Raumes $(x_0 \cdots x_p)$ von $(p+1)$ Dimensionen:

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 1$$

durch die allgemeinen elliptischen Polarcoordinaten

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots \lambda_p^2,$$

die mittelst folgender Gleichung eingeführt werden:

$$\text{(9)} \qquad \frac{x_0^2}{\lambda^2 - a_0^2} + \frac{x_1^2}{\lambda^2 - a_1^2} + \cdots + \frac{x_p^2}{\lambda^2 - a_p^2} = 0,$$

in p Serien von $(p-1)$-fach ausgedehnten Gebieten zerlegt wird. Sodann lasse man $a_1^2, a_2^2, \cdots a_p^2$ allmählich einander gleich werden, wobei sich die elliptischen Coordinaten in die gewöhnlichen Polarcoordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots \vartheta_p$ verwandeln, die durch folgende Gleichungen definirt sind:

$$\text{(10)} \qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= \cos\vartheta_1, \\ x_1 &= \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{p-2} &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{p-2}\cos\vartheta_{p-1}, \\ x_{p-1} &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots\cdots\cdots \sin\vartheta_{p-1}\cos\vartheta_p, \\ x_p &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots\cdots\cdots \sin\vartheta_{p-1}\sin\vartheta_p. \end{aligned}\right.$$

Dann verwandelt sich das Lamé'sche Product

$$E^{(n)}(p, \lambda_1^2) \cdot E^{(n)}(p, \lambda_2^2) \cdots E^{(n)}(p, \lambda_p^2)$$

nothwendig in eine Kugelfunction des folgenden Typus*):

$$\text{(11)} \qquad P^{(n)}_{(n_1)}(p, \cos\vartheta_1) \cdot P^{(n_1)}_{(n_2)}(p, \cos\vartheta_2) \cdots P^{(n_{p-2})}_{(n_{p-1})}(p, \cos\vartheta_{p-1}) \cdot [\vartheta_p].$$

Hier soll $[\vartheta_p]$, je nachdem,

$$\cos(n_{p-1} \cdot \vartheta_p) \quad \text{oder} \quad \sin(n_{p-1} \cdot \vartheta_p)$$

bedeuten, und

---

*) H. K. p. 461.

$$n, n_1, \cdots, n_{p-1}$$

soll irgend ein Zahlensystem sein, für welches keine der Differenzen

$$n - n_1, \quad n_1 - n_2, \cdots, n_{p-2} - n_{p-1}$$

negativ ist. Man überblickt die verschiedenen reellen Gebiete, für welche eine solche Function (11) auf der Kugel verschwindet. In ähnlicher Weise müssen daher die Nullstellen des Productes

$$E^{(n)}(p, \lambda_1^2) \cdot E^{(n)}(p, \lambda_2^2) \cdots E^{(n)}(p, \lambda_p^2)$$

angeordnet sein. Und eben dies behauptet, nur in analytischer Formulirung, der vorstehend ausgesprochene Satz.

Leipzig, Mitte Januar 1881.

Bemerkung über Abel'sche Gleichungen.

Von

Eugen Netto in Strassburg i./E.

In den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 20. Juni 1853 hat Herr Kronecker diejenigen Gleichungen n^{ten} Grades, deren n Wurzeln in eine solche cyklische Folge $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_1$ gebracht werden können, dass man hat

$$x_2 = \Theta(x_1), \quad x_3 = \Theta(x_2) = \Theta^2(x_1) \cdots x_n = \Theta(x_{n-1}) = \Theta^{n-1}(x_1),$$
$$x_1 = \Theta(x_n) = \Theta^n(x_1),$$

wobei Θ eine dem Rationalitätsbereiche der Gleichung angehörige rationale Function bezeichnet, mit dem Namen *Abel'sche Gleichungen* belegt. Herr C. Jordan hat in seinem Traité etc. § 402 diese Definition erweitert, indem er unter Abel'schen Gleichungen solche verstand, deren Wurzeln sämmtlich rationale Functionen einer einzigen x_0 sind

$$x_1 = \Theta_1(x_0), \quad x_2 = \Theta_2(x_0), \cdots, x_\alpha = \Theta_\alpha(x_0), \cdots,$$

falls die Functionen so beschaffen sind, dass man hat

$$\Theta_\beta\Theta_\alpha(x) = \Theta_\alpha\Theta_\beta(x).$$

Diese Definition hat dann auch Herr Kronecker in der Abhandlung vom 16. April 1877 (Berl. Ber. Nachtrag zum Decemberheft 1877, S. 846) seinen Untersuchungen zu Grunde gelegt.

Ist $f(x) = 0$ die gegebene irreductible Gleichung n^{ten} Grades, bei der eine Wurzel $x_0' = \Theta(x_0)$ rationale Function einer anderen x_0 ist, so ordnet sich das System der Wurzeln in folgende Tabelle ein

$$\begin{array}{lllll} x_0, & \Theta(x_0), & \Theta^2(x_0) & \cdots \Theta^{m-1}(x_0), & \\ x_1, & \Theta(x_1), & \Theta^2(x_1) & \cdots \Theta^{m-1}(x_1), & (m\cdot\nu = n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (\Theta^m(x_\alpha) = x_\alpha) \\ x_{\nu-1}, & \Theta(x_{\nu-1}), & \Theta^2(x_{\nu-1}) & \cdots \Theta^{m-1}(x_{\nu-1}). & \end{array}$$

Die Resolvente

$$\varphi_0 = x_0 + \Theta(x_0) + \Theta^2(x_0) + \cdots + \Theta^{m-1}(x_0)$$

ist ν-werthig; sie hängt von einer Gleichung ν^{ten} Grades $F(\varphi) = 0$ ab; mit ihrer Lösung ist die von $f(x) = 0$ gegeben, da x_λ, $\Theta(x_\lambda), \cdots$ durch auflösbare Gleichungen aus φ_λ abgeleitet werden können.

Die erste (Kronecker'sche) Definition Abel'scher Gleichungen liefert $\nu = 1$; die zweite (Jordan'sche) ergiebt für $F(\varphi) = 0$ dieselben Eigenschaften, wie die für $f(x) = 0$ vorausgesetzten: erstens Irreductibilität, zweitens rationale Ausdrückbarkeit aller Wurzeln durch eine einzige; drittens Vertauschbarkeit der Operationssymbole. — Beide Fälle sind von Abel in seinem Mémoire (Oeuvres compl. I; XI, S. 114 § 3 und § 4) behandelt worden.

Die allgemeinste hier mögliche Fragestellung lautet: „*Welche Bedingungen müssen die Wurzeln von $f(x) = 0$ erfüllen, damit dieselben Beziehungen wie bei $f(x) = 0$ so bei $F(\varphi) = 0$ eintreten?*" Mit der Beantwortung wäre ein ganzes Geschlecht von auflösbaren Gleichungen in ganz bestimmter fester Umgrenzung gegeben. Wir behandeln diese allgemeine Frage aber nicht, sondern wir fügen die Beschränkung hinzu, dass aus $\varphi_\beta = \text{Rat}\,(\varphi_\alpha)$ auch $x_\beta = \text{Rat}_1\,(x_\alpha)$ folgen soll.

Die Irreductibilität von $F(\varphi) = 0$ steht fest.

Da $x_0' = \Theta(x_0)$ eine rationale Function von x_0 ist, so soll auch eine Wurzel $\varphi_1 = x_1 + \Theta(x_1) + \cdots$ rationale Function von

$$\varphi_0 = x_0 + \Theta(x_0) + \cdots$$

werden: $\varphi_1 = \tau_1(\varphi_0)$. Dies erlaubt den Rückschluss auf $x_1 = \Theta_1\,(x_0)$, und man kommt dann wieder durch

$$(\text{A}') \qquad x_0' = \Theta(x_0)\,, \quad x_1 = \Theta_1\,(x_0)$$

auf die entsprechenden Forderungen

$$(\text{B}') \qquad \varphi_1 = \tau_1\,(\varphi_0), \quad \varphi_2 = \tau_2(\varphi_0),$$

aus deren letzter sich $x_2 = \Theta_2(x_0)$ ergiebt; diese Beziehung führt auf die Forderung $\varphi_3 = \tau_3(\varphi_0)$ u. s. w. bis alle Wurzeln erschöpft sind. Es folgt also

$$(\text{A}_1) \quad x_0' = \Theta(x_0), \;\; x_1 = \Theta_1(x_0), \;\; x_2 = \Theta_2(x_0), \;\cdots, \; x_{\nu-1} = \Theta_{\nu-1}(x_0),$$

$$(\text{B}_1) \quad \varphi_1 = \tau_1(\varphi_0), \; \varphi_2 = \tau_2(\varphi_0), \cdots, \; \varphi_{\nu-1} = \tau_{\nu-1}(\varphi_0).$$

Die Bedingungen (A_1) reichen aber nicht aus, um nothwendig die geforderten Beziehungen (B_1) nach sich zu ziehen. Es muss, damit $\varphi_1 = \tau(\varphi_0)$ sei, φ_1 für die Substitution $\Theta(x_0)$ statt x_0, welche φ_0 ungeändert lässt, gleichfalls ungeändert bleiben. Nun ist

$$\varphi_1 = \Theta_1(x_0) + \Theta\Theta_1(x_0) + \cdots + \Theta^{m-1}\Theta_1(x_0).$$

Da alle andern symmetrischen Functionen der Grössen $\Theta_1(x_1)$, $\Theta\Theta_1(x_1), \cdots$ mit φ_1 zugleich (von dem sie rationale Functionen sind, wie umgekehrt φ_1 von ihnen) ungeändert bleiben, so ist also für eine beliebige symmetrische Function S, speciell für die elementaren symmetrischen Functionen, die nothwendige Folgerung

$$S(\Theta_1(x_0),\ \Theta\Theta_1(x_0), \cdots, \Theta^{m-1}\Theta_1(x_0))$$
$$= S(\Theta_1\Theta(x_0),\ \Theta\Theta_1\Theta(x_0), \cdots, \Theta^{m-1}\Theta_1\Theta(x_0))$$

und daraus folgt, dass die Coefficienten der Gleichung, deren Wurzeln $\Theta^\lambda\Theta_1(x_0)$ sind, mit denen der Gleichung, deren Wurzeln $\Theta^\lambda\Theta_1\Theta(x_0)$ sind, übereinstimmen; daher müssen die Systeme der Wurzeln identisch sein; speciell wird

$$\Theta_1\Theta(x_0) = \Theta^{\alpha_1}\Theta_1(x_0),$$

woraus von selbst $\Theta^\lambda\Theta_1\Theta(x_0) = \Theta^{\alpha_1+\lambda}\Theta_1\Theta(x_0)$ folgt. Diese Bedingung ist auch hinreichend dafür, dass $\varphi_1 = \tau_1(\varphi_0)$ wird. Denn φ_1 geht durch die Substitution $\Theta(x_0)$ statt x_0 in

$$\begin{aligned}\Theta_1\Theta(x_0) + \Theta\Theta_1\Theta(x_0) + \Theta^2\Theta_1\Theta(x_0) + \cdots\\ = \Theta^{\alpha_1}\Theta_1(x_0) + \Theta^{\alpha_1+1}\Theta_1(x_0) + \cdots + \Theta^{m-1}\Theta_1(x_0) + \Theta_1(x_0)\\ + \Theta\Theta_1(x_0) + \cdots\\ = \varphi_1\end{aligned}$$

über, ändert sich also nicht, und φ_1 ist eine Function von φ_0. Es müssen also wegen der Forderungen (B_1) nothwendig die Beziehungen

$$(A_2)\quad \Theta_1\Theta(x_0) = \Theta^{\alpha_1}\Theta_1(x_0),\ \Theta_2\Theta(x_0) = \Theta^{\alpha_2}\Theta_2(x_0),\ \Theta_3\Theta(x_0) = \Theta^{\alpha_3}\Theta_3(x_0)\cdots$$

bestehen, und diese reichen auch aus. Diese Gesammtreihe muss unserem Problem gemäss auf die Gleichung $F(\varphi) = 0$ übertragen werden. Es entsteht also die Forderungsreihe

$$(B_2)\quad \tau_2\tau_1(\varphi_0) = \tau_1^{\beta_2}\tau_2(\varphi_0),\ \tau_3\tau_1(\varphi_0) = \tau_1^{\beta_3}\tau_3(\varphi_0),\ \tau_4\tau_1(\varphi_0) = \tau_1^{\beta_4}\tau_4(\varphi_0),\cdots$$

Es sei

$$\varphi_2 = x_2 + \Theta(x_2) + \cdots = \Theta_2(x_0) + \Theta\Theta_2(x_0) + \cdots = \tau_2(\varphi_0),$$
$$\varphi_1 = x_1 + \Theta(x_1) + \cdots = \Theta_1(x_0) + \Theta\Theta_1(x_0) + \cdots = \tau_1(\varphi_0).$$

Verwandelt man in der ersten Zeile x_0 in $x_1 = \Theta_1(x_0)$ so geht φ_0 in $\varphi_1 = \tau_1(\varphi_0)$ über, wie man aus

$$\varphi_0 = x_0 + \Theta(x_0) + \cdots,\quad \varphi_1 = x_1 + \Theta(x_1) + \cdots$$

erkennt. Es wird also

$$(M)\qquad \tau_2\tau_1(\varphi_0) = \Theta_2\Theta_1(x_0) + \Theta\Theta_2\Theta_1(x_0) + \cdots$$

Macht man in der zweiten Zeile diese Operation β_2 mal, so erhält man

$$\tau_1^{\beta_2}(\varphi_0) = \Theta_1^{\beta_2}(x_0) + \Theta\Theta_1^{\beta_2}(x_0) + \cdots$$

und bei der Umwandlung von x_0 in x_2

$$(N)\quad \tau_1^{\beta_2}\tau_2(\varphi_0) = \Theta_1^{\beta_2}\Theta_2(x_0) + \Theta\Theta_1^{\beta_2}\Theta_2(x_0) + \Theta^2\Theta_1^{\beta_2}\Theta_2(x_0) + \cdots$$

so dass die erste Forderung von (B_2) sich übersetzt in

$$\sum_{\lambda=0}^{m-1}\Theta^\lambda\Theta_2\Theta_1(x_0) = \sum_{\lambda=0}^{m-1}\Theta^\lambda\Theta_1^{\beta_2}\Theta_2(x_0).$$

Es sei ferner χ irgend eine andere elementare symmetrische Function der in (M) auftretenden Summanden. Dann ist

$$\chi_0(x_0) = R(\varphi_0(x_0))$$

und wegen der Irreductibilität von $f(x) = 0$

$$\chi_0(x_1) = \chi_1(x_0) = R(\varphi_1) = R(\tau_1(\varphi_0)),$$
$$\chi_0(x_2) = \chi_2(x_0) = R(\varphi_2) = R(\tau_2(\varphi_0))$$

und es ist wie oben, da die χ den φ völlig gleichstehen,

$$\chi_1(x_0) = \varpi_1 \chi_0(x_0); \quad \chi_2(x_0) = \varpi_2 \chi_0(x_0).$$

Ersetzt man in der zweiten dieser Gleichungen x_0 durch x_1, so geht $\chi_0(x_0)$ in $\chi_0(x_1) = \chi_1(x_0) = \varpi_1 \chi_0(x_0)$ über und es wird

$$\varpi_2 \varpi_1(\chi_0) = R(\tau_2 \tau_1(\varphi_0))$$

und ebenso erhält man

$$\varpi_1^{\beta_2} \varpi_2(\chi_0) = R(\tau_1^{\beta_2} \tau_2(\varphi_0));$$

für denselben Exponenten β_2 findet man also die Gleichung

$$\varpi_2 \varpi_1(\chi_0) = \varpi_1^{\beta_2} \varpi_2(\chi_0)$$

und daraus, dass alle aus den $\Theta^\lambda \Theta_2 \Theta_1(x_0)$ gebildeten elementaren symmetrischen Functionen mit denen der Grössen $\Theta^\lambda \Theta_1^{\beta_2} \Theta_2(x_0)$ übereinstimmen und daher, genau wie oben gezeigt wurde, dass man hat

$$\Theta_2 \Theta_1(x_0) = \Theta^{\gamma_2} \Theta_1^{\beta_2} \Theta_2(x_0).$$

Dass dies für die Erfüllung $\tau_2 \tau_1 = \tau_1^{\beta_2} \tau_2$ ausreicht, lehren (M), (N). Es müssen also wegen (B_2) nothwendig die Beziehungen

$$(A_3) \qquad \Theta_2 \Theta_1(x_0) = \Theta^{\gamma_2} \Theta_1^{\beta_2} \Theta_2(x_0), \quad \Theta_3 \Theta_1(x_0) = \Theta^{\gamma_3} \Theta_1^{\beta_3} \Theta_3(x_0),$$
$$\Theta_4 \Theta_1(x_0) = \Theta^{\gamma_4} \Theta_1^{\beta_4} \Theta_4, \cdots$$

bestehen und diese reichen auch aus. Unserem Problem gemäss muss diese Gesammtreihe auf die Wurzeln von $F(\varphi) = 0$ übertragen werden. Hierdurch entsteht die neue Forderungsreihe

$$(B_3) \qquad \tau_3 \tau_2(\varphi_0) = \tau_1^{\varepsilon_3} \tau_2^{\xi_3} \tau_3(\varphi_0), \quad \tau_4 \tau_2(\varphi_0) = \tau_1^{\varepsilon_4} \tau_2^{\xi_4} \tau_4(\varphi_0), \cdots$$

und alle Schlussfolgerungen und Resultate wiederholen sich.

Somit haben wir den Satz:

„*Kann man aus dem Bestehen einer rationalen Beziehung $\varphi_\beta = R(\varphi_\alpha)$ auf $x_\beta = R_1(x_\alpha)$ schliessen, so ist es nothwendig und hinreichend, dass zwischen den Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ die Gleichungen bestehen*

$$(A_1) \quad x_0' = \Theta(x_0), \quad x_1 = \Theta_1(x_0), \quad x_2 = \Theta_2(x_0), \quad x_3 = \Theta_3(x_0), \cdots$$
$$(A_2) \quad \Theta_1 \Theta(x_0) = \Theta^{\alpha_1} \Theta_1(x_0), \; \Theta_2 \Theta(x_0) = \Theta^{\alpha_2} \Theta_2(x_0), \; \Theta_3 \Theta(x_0) = \Theta^{\alpha_3} \Theta_3(x_0), \cdots$$
$$(A_3) \quad \Theta_2 \Theta_1(x_0) = \Theta^{\beta_2} \Theta_1^{\gamma_2} \Theta_2(x_0), \quad \Theta_3 \Theta_1(x_0) = \Theta^{\beta_3} \Theta_1^{\gamma_3} \Theta_3(x_0), \cdots$$
$$(A_4) \quad \Theta_3 \Theta_2(x_0) = \Theta^{\delta_3} \Theta_1^{\varepsilon_3} \Theta_2^{\xi_3} \Theta_3(x_0), \cdots$$

. . . .

damit die entsprechenden Beziehungen zwischen den Wurzeln von $F(\varphi) = 0$ *vorhanden sind.*"

Die so definirten Gleichungen $f(x) = 0$ sind demnach die allgemeinsten, welche nach *Abel'scher Methode* aufgelöst werden können.

Die Gruppe dieser Gleichungen ist erstens transitiv, wegen der Irreductibilität von $f(x) = 0$; zweitens von der Ordnung n, weil alle Wurzeln x rational durch eine einzige ausdrückbar sind; drittens ist sie durch eine Reihe von Substitutionen $s_1, s_2, s_3, \cdots$ bestimmt, für welche die Gleichungen bestehen

$$s_2 s_1 = s_1^{\alpha_2} s_2; \quad s_3 s_1 = s_1^{\alpha_3} s_3; \cdots$$
$$s_3 s_2 = s_1^{\beta_3} s_2^{\gamma_3} s_3; \cdots$$

Diese drei Bedingungen reichen zur völligen Charakterisirung aus. Die erste liefert die Irreductibilität; die zweite die rationale Ausdrückbarkeit aller Wurzeln durch eine. Wenn nun s_1 die Wurzel x_0 in $\Theta(x_0)$ und s_2 die Wurzel x_0 in $\Theta_1(x_0)$ überführt, so liefert

$$s_2 s_1 = s_1^{\alpha_2} s_2, \quad \Theta_1 \Theta(x_0) = \Theta^{\alpha_2} \Theta_1(x_0)$$

u. s. w.

Hieraus folgt eine bemerkenswerthe Analogie mit den auflösbaren Gleichungen überhaupt; denn die Bedingungen 1) und 3) der obigen Gleichungen sind diejenigen für auflösbare Gruppen. Ist nun G eine solche Gruppe, z eine Function der Wurzelgrössen, welche bei jeder Substitution der Wurzeln ihren Werth ändert, so bilden die verschiedenen durch G hervorgerufenen Werthe von z die Elemente einer zu G isomorphen Gruppe, bei welcher die Bedingungen von G gewahrt bleiben, während ausserdem noch die Gleichheit von Grad und Ordnung hineinkommt, also die obige Bedingung 2). Damit wäre eine Classification der auflösbaren Gleichungen, je nach der zugehörigen allgemeinsten Abel'schen Gleichung festgestellt. Um zu zeigen, dass durch diese Betrachtungen wirklich neue Gleichungen erlangt werden, gebe ich die Gruppe einer solchen vom Grade $r \cdot p$, wo p eine Primzahl bedeute und a zum Exponenten r (mod. p) gehöre. Sie wird gebildet durch

$$s_1 = (x_{1,0}\, x_{1,1} \cdots x_{1,p}) \cdots (x_{r,0}\, x_{r,1} \cdots x_{r,p}),$$
$$s_2 = (x_{1,0} x_{2,0} \cdots x_{r,0})(x_{1,1} x_{2,a} x_{3,a^2} \cdots x_{r,a^{r-1}})(x_{1,2} x_{2,2a} \cdots x_{r,2a^{r-1}}) \cdots .$$

17. Januar 1881.

Ueber den Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie.

Von

Friedrich Schur in Leipzig.

Der Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie ist schon mehrfach Gegenstand von Erörterungen in diesen Annalen*) gewesen. Weil dabei jedoch noch Einiges unberücksichtigt geblieben ist, will ich noch einmal auf diesen Gegenstand zurückkommen; wiederholte Besprechungen mit Herrn Prof. Klein sind mir bei Abfassung dieser Note sehr nützlich gewesen.

Das Hauptresultat jener Erörterungen scheint mir der von Herrn Darboux**) bewiesene Satz zu sein, dass *vier Elementen, die eine Folge bilden, der v. Staudt'schen Definition zufolge immer vier Elemente entsprechen müssen, die wieder eine Folge bilden;* denn es folgt aus ihm die Stetigkeit der projectivischen Beziehung. Die sich an diesen Satz schliessenden Betrachtungen von Herrn Darboux***), die einen indirecten Beweis des Fundamentalsatzes auf Grund der Untersuchungen der Herren Zeuthen und Lüroth†) erstreben, sind nicht ganz correct††) und zudem, wie ich glaube, überflüssig. Denn

---

*) Bd. VI, p. 132, Note etc.

**) Bd. XVII, p. 58.

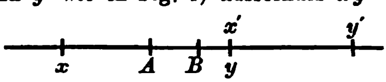
***) l. c. p. 59.

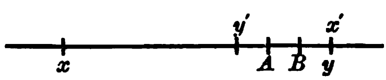
†) Bd. VII, p. 535 — 536.

††) Ueber denselben Beweis schrieb mir Herr Bobeck in Prag:

„Herr Darboux setzt irrthümlicherweise voraus, dass die Zuordnung der von ihm mit x, x' bezeichneten Punkte von vorneherein eine umkehrbare sein müsse. Man kann aber seine Betrachtung leicht ergänzen. Herr Professor Küpper theilte mir in dieser Beziehung folgende Ueberlegung mit:

Es sei y' der homologe Punkt zu y (letzterer mit x' zusammenfallend). Dann kann y' wie in Fig. 1) ausserhalb xy liegen oder wie in Fig. 2) innerhalb xy fallen.

1) 

2) 

Man kann nun im ersten Falle innerhalb xy, im zweiten Falle innerhalb $y'x'$ zwei Punkte AB in der Folge $xABy$ wählen, die mit ihren homologen coincidiren. Es ist nun ein Punktepaar mn vorhanden, welches sowohl xA als By harmonisch trennt, aber keines, welches $x'A$, By' gleichzeitig harmonisch trennen würde, daher kann es keinen Punkt x geben, der mit seinem homoauf Grund der Betrachtungen der Herren Zeuthen und Lüroth ergiebt sich in Verbindung mit dem Satze von der Folge leicht der *directe* Beweis des Fundamentalsatzes*).

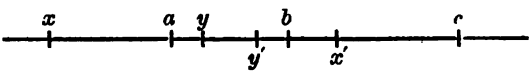
Gegen diesen Beweis ist jedoch das einzuwenden, dass in den Betrachtungen der Herren Zeuthen und Lüroth Punkte (F und G) verwendet werden, die das Resultat eines Grenzprocesses sind, also mit ihnen das *Irrationale* in die reine Geometrie eingeführt wird; man wird aber gut thun, dasselbe möglichst lange von der reinen Geometrie fern zu halten. In der That handelt es sich auch beim Beweise des Fundamentalsatzes nicht darum zu zeigen, dass man durch Construction des vierten harmonischen Elementes aus drei gegebenen jedem Elemente eines Grundgebildes 1. Stufe beliebig nahe kommen kann — und als Beweis hierfür behalten die Betrachtungen der Herren Zeuthen und Lüroth ihren Werth —, sondern es handelt sich nur darum zu zeigen, dass die projectivische Beziehung zwischen zwei Grundgebilden 1. Stufe, sie mag hergestellt sein wie man will, eindeutig ist, sobald drei gegebenen Elementen drei gegebene entsprechen sollen**). Diesen Zweck nun erreicht man, wie ich glaube, mit einfacheren Mitteln und, wenn der Ausdruck gestattet ist, auf *rationalem* Wege, wenn man sich an den Gedankengang anschliesst, den Herr Thomae in seiner Geometrie der Lage***) entwickelt. Herr Thomae hat allerdings für Projectivität eine andere Definition, indem er sie durch Perspectivität erklärt†), aber sein Beweis gilt ungeändert auch für die v. Staudt'sche

---

logen x' nicht zusammenfiele. (Die Doppelpunkte zweier conlocaler projectivischer Punktreihen können nicht so liegen, wie in Fig. 1) oder 2) angegeben ist.)

Ich selbst fand folgenden Beweis:

Es seien xx' zwei homologe Punkte der conlocalen Punktreihen, die nicht zusammenfallen, dann kann ich doch immer drei Punkte abc angeben, die mit ihren homologen $a'b'c'$ zusammenfallen und so liegen, dass das Segment $\overline{ab}$ zwischen $\overline{xx'}$ fällt und x' zwischen bc liegt. Ist nun y der zu x bezüglich ab harmonisch zugeordnete Punkt, so wird sein homologer y' der vierte harmonische zu x' bezüglich ab zugeordnete Punkt sein und $\overline{yy'}$ wird ganz innerhalb $\overline{ab}$ liegen, da x, x' ausserhalb $\overline{ab}$ liegen. Nun ist ein Punktepaar mn vorhanden, welches sowohl xy als bc harmonisch trennt. Das homologe Punktepaar $m'n'$ müsste dann sowohl $x'y'$ als bc harmonisch trennen, was der gemachten Annahme zufolge unmöglich ist, da $x'y'$ durch bc getrennt sind. Daher müssen alle Punkte mit ihren homologen zusammenfallen, sobald es drei Punktepaare thun."



[F. Klein.]

*) S. Bd. XVII, p. 52.

**) S. Bd. XVII, p. 53.

***) Thomae, ebene geometrische Gebilde 1. und 2. Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage. Halle, 1873, p. 12.

†) l. c. p. 11.

Definition, sofern man dieselbe durch den Darboux'schen Satz von der Folge ergänzt. Dann handelt es sich nicht mehr um einen Grenzprocess; denn die von Herrn Thomae verwendeten Punkte (μ und ν) sind definirt als diejenigen Punkte, in denen zwei sich in derselben Richtung stetig bewegende Punkte sich einholen müssen, wenn bekannt ist, dass sie sich überhaupt einmal einholen, und es handelt sich nicht um Construction dieser Elemente, sondern nur um den Nachweis ihrer Existenz, der durch ihre Definition ohne jedes Postulat als das der Stetigkeit der Grundgebilde überhaupt erbracht ist.

Zu der v. Staudt'schen Definition selbst sei mir noch eine methodologische Bemerkung gestattet. Stellt man dieselbe an die Spitze der projectivischen Geometrie, so erscheint die Anwendung der harmonischen Punkte hierzu unnatürlich oder zum mindesten für den Augenblick nicht gerechtfertigt, während sie doch ihren guten Grund hat. Derselbe wird freilich erst aufgedeckt, wenn man die projectivische Beziehung der Grundgebilde *erster* Stufe als in der der Grundgebilde *höherer* Stufe enthalten betrachtet*). Definirt man nämlich *zwei Grundgebilde* 2. *Stufe als collinear, wenn je zwei ungleichartigen Elementen P und g des einen, von welchen P in g liegt, resp. zwei ungleichartige Elemente P_1 und g_1 des andern zugewiesen sind, von welchen auch P_1 in g_1 liegt*, so erscheint die Anwendung der vollständigen Vierecke und der aus ihnen abgeleiteten harmonischen Punkte von selbst geboten, weil eben in der Ebene das Viereck nächst dem nichts Neues liefernden Dreiecke die einfachste Figur ist, während der Beweis der Eindeutigkeit dieser Vierecksconstruction wiederum wesentlich auf Hinzuziehung einer dritten Dimension beruht. So erschöpft diese Definition das Wesen der projectivischen Beziehung in einfachster Form, was eine directe Definition der projectivischen Beziehung der Grundgebilde *erster* Stufe nie in demselben Grade leisten kann, weil bei höheren Dimensionen sich Eigenschaften entfalten, die bei Gebilden niederer Dimension noch wie im Keime verborgen lagen. Es dürfte sich daher, wie überall in der Geometrie, empfehlen den Kreis der Betrachtungen nicht von vornherein auf Gebilde zu niedriger Dimension zu beschränken, also die Definition der Projectivität der Grundgebilde höherer Stufe an die Spitze der projectivischen Geometrie zu stellen.

Leipzig, Anfang Februar 1881.

*) S. v. Staudt, Geometrie der Lage, p. 60. Man vergl. hierzu besonders auch Möbius, der barycentrische Calcul, Cap. 6. und 7., wo zuerst die collineare Verwandtschaft in der Ebene und im Raume durch die Bedingung, dass geraden Linien wieder gerade Linien entsprechen, definirt wird, und daraus erst ein Merkmal für die projectivische Beziehung gerader Linien in § 226. abgeleitet wird.

B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

Cauchy begründete die Infinitesimalrechnung wieder durch die von Lagrange verlassene Methode der Grenzen, indem er glaubte, dass nur sie die erforderliche Strenge darbiete. Die Klarheit und Eleganz seiner Darstellung bewirkte, dass sie sich immer mehr verbreitete und endlich allgemein angenommen wurde. Wenn auch erhebliche Mängel derselben aufgedeckt wurden, so hat sich doch bisher gezeigt, dass sie sich durch consequente Entwickelung von Cauchy's Principien in dem Sinne, dass ausschliesslich arithmetische Betrachtungen benutzt werden, beheben lassen.

Einige Jahre bevor Cauchy durch Veröffentlichung eines Theiles seiner Vorlesungen über Infinitesimalrechnung seinen Ansichten in weiten Kreisen Eingang verschaffte, hatte schon Bernhard Bolzano (geb. zu Prag 1781, gest. ebenda 1848) in einer Reihe von Abhandlungen die Grundbegriffe derselben vielfach *übereinstimmend mit ihm, aber auch in wichtigen Punkten vollständiger als er* entwickelt. Wenn auch Bolzano's Darstellung gegenüber den neueren Forschungen nicht immer haltbar erscheint, so erhebt sie sich doch an vielen Stellen zu einer ungewöhnlichen Klarheit und Sicherheit. Bolzano's Arbeiten geriethen bald in Vergessenheit und erst lange nach seinem Tode fanden seine Leistungen auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung die verdiente Würdigung. H. Hankel erkennt ihm die Priorität vor Cauchy in der richtigen Auffassung der Lehre von den unendlichen Reihen zu*) und Hr. H. A. Schwarz bezeichnet ihn als den Urheber einer von Hrn. Weierstrass weiter entwickelten Schlussweise**), wovon in III. die Rede sein soll.

Der Zweck dieser Zeilen besteht darin, die Bolzano im Gegensatz zu Cauchy eigenthümlichen Definitionen und Sätze über die Prin-

*) Allg. Encyklopädie von Ersch und Gruber 1. sect. B. 90 (1871) Artikel: „Grenze" § 19.

**) Borchardt J. Bd. 74, (1872) p. 221, Note.

cipien der Infinitesimalrechnung übersichtlich zusammenzustellen und zu beleuchten, um zur Vergleichung derselben mit den gegenwärtig von vielen Mathematikern getheilten Ansichten*) anzuregen. Da der Wortlaut mathematischer Definitionen über ihren Sinn nicht immer vollständigen Aufschluss giebt, so musste Sorge getragen werden, denselben aus der Anwendung unzweifelhaft festzustellen. Folgende Werke Bolzano's wurden für diesen Aufsatz benutzt:

1) *Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik. 1. Lief. Prag, 1810 (= Bt.)*

2) *Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen. Prag 1816 (= L.)*

3) *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigtens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag 1817 (= B.)*

4) *Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt. Leipzig 1817 (= P.)*

5) *Dr. Bernhard Bolzano's Paradoxien des Unendlichen herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Přihonsky. Leipzig 1851 (= Pr.)*

Die „Beiträge", welche über den Begriff und die Eintheilung der Mathematik, sowie über die mathematische Methode handeln, bieten für meine Aufgabe wenig dar.**)

Die Abhandlung über den binomischen Lehrsatz ist bereits auf die arithmetische Methode gegründet, die sich hier an manchen Stellen strenger dargestellt findet als bei Cauchy. Aus ihr ist aber schon die Grenze ersichtlich, bis zu welcher Bolzano in der Benutzung seiner Grundgedanken fortgeschritten ist. Sowie Cauchy, blieb auch ihm der *Begriff der gleichmässigen Convergenz der Grenzwerthe von Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen* unbekannt.***)

Eine bedeutende Erscheinung in der mathematischen Litteratur

---

*) Man findet sie zusammengestellt in U. Dini's Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa 1878.

**) Geschichtlich bemerkenswerth ist, dass p. 147 die Addition zweier ganzer Zahlen mittelst des Gesetzes der Associativität für die Summe $a+(b+1)=(a+b)+1$ in derselben Weise durchgeführt wird, wie sie Hankel (Theorie d. complexen Zahlensysteme p. 37) nach Grassmann entwickelt.

***) Ueber diesen Begriff vgl. Dini l. c. p. 102, 397. Bekanntlich wurde die ungleichmässige Convergenz von Reihen von Hrn. Seidel bemerkt. Hr. Weierstrass zeigt in seinen Vorlesungen zuerst die hervorragende Wichtigkeit des erwähnten Begriffes für die ganze Analysis.

bildet die dritte Abhandlung, während die vierte nicht jene Wirkung ausgeübt hat, welche der Verfasser davon erwartete. Alle genannten Schriften sind dadurch ausgezeichnet, dass sie von einer ebenso unbefangenen, als scharfsinnigen Prüfung der einschlägigen Leistungen der älteren Litteratur ausgehen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehe ich zur Darlegung von Bolzano's Ansichten im Einzelnen über.

I. Gleichheit zweier Zahlen.

Lehnsatz (L. § 27): „Wenn in der Gleichung $A + \omega = B + \omega^1$ die Grössen ω, ω^1 so klein werden können, als man nur immer will, während A und B unverändert bleiben: so muss genau $A = B$ sein."

Die häufige Anwendung dieses Satzes, nicht der Satz selbst, der nur die arithmetische Formulirung des Principes der Exhaustionsmethode und die Ausdehnung desselben auf die relativen Zahlen bildet, ist für Bolzano's Darstellung charakteristisch (vgl. L. p. XVI, § 28, 64. B. § 7).

II. Veränderliche Grössen.

Eine Grösse, die alle möglichen Werthe zwischen zwei gegebenen annehmen kann, heisst nach B. p. 49 „frei veränderlich", eine Grösse, die ohne alle Werthe anzunehmen doch in der Umgebung eines jeden ihr zukommenden Werthes Werthe annimmt, welche von denselben beliebig wenig abweichen, heisst „stetig veränderlich." (vgl. B. p. 11, 49). — Im Folgenden werden diese heute nicht mehr üblichen Bezeichnungen meist gebraucht.*)

III. Obere Grenze einer Veränderlichen.

Lehrsatz. „*Wenn eine Eigenschaft M nicht allen Werthen einer veränderlichen Grösse x, wohl aber allen, die kleiner sind als ein gewisser u, zukommt, so giebt es allemal eine Grösse U, welche die grösste derjenigen ist, von denen behauptet werden kann, dass alle kleineren x die Eigenschaft M besitzen.*" (B. p. 41.)

Ueber diesen Satz, der mit einem strengen und vollständigen Beweise versehen ist, bemerkt Bolzano mit Recht (B. p. 48):

„Vorstehender Lehrsatz ist von der grössten Wichtigkeit, . . . Statt seiner hatte man sich bisher nicht selten des falschen Satzes bedient:

---

*) Eine Grösse der ersten Art heisst jetzt stetig veränderlich; die Werthe einer Grösse der zweiten Art heissen im Intervalle (a, b) *überall-dicht* (nach Hrn. G. Cantor diese Annalen Bd. XV, p. 2) oder *pantachisch* (nach Hrn. P. du Bois-Reymond l. c. Bd. XV, p. 287) vertheilt.

„Wenn eine Eigenschaft M nicht von allen x, wohl aber von allen, die kleiner als ein gewisses sind, gilt: so giebt es jederzeit irgend ein grösstes x, welchem die Eigenschaft M zukommt.“

Dies, sage ich, ist zufolge des soeben Erwiesenen *falsch*. Denn giebt es irgend eine Grösse U, welche die grösste derjenigen ist, von denen gesagt werden kann, dass alle unter ihr stehende x die Eigenschaft M an sich haben*): so giebt es darum sicher *kein grösstes x*, dem diese Eigenschaft zukommt, *wenn anders x eine entweder frei oder doch stetig veränderliche Grösse ist.*“ . . .

„Man denke sich, um dies durch ein Beispiel zu erläutern, eine rechtwinklige Hyperbel, und nehme eine ihrer Asymptoten zur Abscissenlinie und nicht den Mittelpunkt c, sondern was immer für einen anderen Punkt a in dieser Asymptote, der die Entfernung D von c hat, zum Anfangspunkte der Abscissen an. Erklären wir nun die Richtung ac für die positive der Abscissen und die Richtung ab, welche die rechtwinklige Ordinate des Punktes a hat, für die positive der Ordinaten: so wird von jeder Abscisse, die kleiner als eine gewisse, z. B. kleiner als $\frac{1}{2}D$ ist, die Eigenschaft gelten, dass ihr eine positive Ordinate entspricht. Gleichwohl wird diese Eigenschaft (M) nicht von allen positiven Abscissen gelten, namentlich nicht von solchen, die grösser als D sind. Giebt es nun wohl hier eine grösste Abscisse, einen grössten Werth von x, welchem die Eigenschaft M zukommt? Keineswegs; wohl aber giebt es ein U d. h. eine Abscisse, welche die grösste unter denjenigen ist, von denen gesagt werden kann, dass alle kleineren als sie positive Ordinaten haben, d. h. die Eigenschaft M besitzen. Diese Abscisse nämlich ist $+D$.“

Die Grösse U heisst nach Weierstrass die *obere Grenze* aller Werthe von x, denen die Eigenschaft M zukommt. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die durch die Eigenschaft M definirte Variabele hier als frei oder doch stetig veränderlich angenommen wird. Sieht man davon ab, so lautet der Satz bekanntlich: „Liegen sämmtliche (unbegrenzt viele) Werthe einer Veränderlichen x unter einer endlichen Zahl A, so giebt es eine und nur eine endliche Zahl U von der Eigenschaft, dass keiner der Werthe x sie überschreitet, dass aber mindestens ein Werth von x vorhanden ist, dessen Unterschied von U weniger beträgt, als irgend eine beliebig kleine positive Zahl ε“ (vergl. Dini l. c. p. 19).

Auf das Verfahren, wodurch Bolzano die Existenz der Grösse U nachweist**), bezieht sich die oben angeführte Bemerkung des Hrn. Schwarz.***)

---

*) Offenbar ist dabei angenommen: U selbst hat nicht die Eigenschaft M.

**) Dieses Verfahren, welches mit dem von Duhamel (Des méthodes dans les sciences de raisonnement II. p. 413) und von Darboux (Mém. sur les fonctions discontinues — Ann. de l'Éc. Normale 2. sér. T. IV.) zu demselben Zwecke gebrauchten übereinstimmt, leistet, wenigstens im Allgemeinen, *die Berechnung der Grösse U nicht*. Es liegt ihm keine weitere Voraussetzung zu Grunde, als dass eine jede unendliche Menge von Zahlen zwischen gegebenen Grenzen in eine fortlaufende Reihe geordnet werden könne.

***) Hr. Schwarz hatte die Güte mir dies auf die von mir geäusserte Vermuthung mitzutheilen.

Die Wichtigkeit des vorstehenden Lehrsatzes wird schon dadurch dargelegt, dass er zum Beweise des Satzes führt, dass eine Function $f(x)$, welche, während x sich z. B. wachsend dem *Grenzwerthe* a nähert, mit x beständig wächst, dabei aber unter einer endlichen Zahl bleibt, einen endlichen Grenzwerth für $\lim x = a - 0$ haben muss.

IV. Convergenz von Reihen aus reellen Gliedern.

Unter den Reihen, deren Werth (d. h. die Grösse, die durch Summirung ihrer Glieder entsteht), soweit man sie fortsetzen mag, eine gewisse Grösse nie überschreitet, ist besonders merkwürdig folgende Classe:

[B. § 6.] „Wenn man den Werth, welchen die Summe der ersten $n, n+1 \cdots n+x$ Glieder einer $\cdots$ Reihe hat, der Ordnung nach durch $F^n x, F^{n+1}x, \cdots, F^{n+r}x$ bezeichnet, so stellen die Grössen

$$F^1 x,\ F^2 x, \cdots, F^n x, \cdots, F^{n+r} x$$

nun eine *neue* Reihe vor. . . . Diese hat . . . die besondere Eigenschaft, dass der Unterschied, der zwischen ihrem n^{ten} Gliede $F^n x$ und jedem späteren $F^{n+r}x$, es sei auch noch so weit von jenem n^{ten} entfernt, kleiner als jede gegebene Grösse bleibt, wenn man erst n gross genug angenommen hat.“ . . .

Den Sinn dieser Eigenschaft erklärt die von Bolzano gegebene Erörterung über die geometrische Reihe (B. § 5, L. § 22). Verlängert man die Reihe $a + ae + ae^2 + \cdots + ae^r$ noch um s Glieder, so ist der Zuwachs

$$ae^{r+1} + ae^{r+2} + \cdots + ae^{r+s} = ae^{r+1}\,\frac{1-e^s}{1-e}\,.$$

Wenn nun e seinem absoluten Werthe nach unter 1 liegt, so verbleibt dieser Zuwachs, wenn man erst r hinlänglich gross genommen hat, kleiner als jede gegebene Grösse, *wie gross auch s hinterher anwachsen mag.* Denn er ist immer kleiner als $2ae^{r+1}:(1-e)$. Es ist aber für $\pm e = \frac{1}{1+u}$ $(u>0) \pm e^r < D$, sobald man $r > \left(\frac{1}{D} - 1\right) : u$ nimmt.

Wenn schon die vorstehende Auseinandersetzung über die *nothwendige* Bedingung der Convergenz unendlicher Reihen präciser zu sein scheint als die bezüglichen Erklärungen Cauchy's (C. d'Analyse p. 125), so zeigt sich Bolzano's volles Verständniss dieses Gegenstandes durch den folgenden Satz, welcher die hinreichende Bedingung der Convergenz ausspricht.

[B. § 7.] „Wenn eine Reihe von Grössen

$$F^1 x,\ F^2 x, \cdots, F^n x, \cdots, F^{n+r} x \cdots$$

von der Beschaffenheit ist, dass der Unterschied zwischen ihrem n^{ten} Gliede $F^n x$ und jedem späteren $F^{n+r}x$, sei dieses von jenem auch noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Grösse verbleibt, wenn man n gross genug angenommen hat: so giebt es jedesmal eine gewisse *beständige* Grösse und zwar nur *eine*, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern und der sie so nahe kommen können, als man nur will, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt."*)

Der a. a. O. vorgetragene Beweis zeigt zwar nur, dass die Annahme, es sei für $F^n(x)$ bei $\lim n = +\infty$ *ein* endlicher Grenzwerth X vorhanden, auf keinen Widerspruch stösst. — Der Beweis lässt sich leicht führen mit Hülfe der von Hrn. P. du Bois Reymond**) erfundenen Unbestimmtheitsgrenzen von $F^n x$ bei $\lim n = +\infty$. Dass hier beide endliche Zahlen $O \geqq U$ sein müssen, erhellt sofort. Es entspricht aber jeder positiven Zahl ε eine Zahl μ, so dass für alle $n > \mu$ $U - \varepsilon < F^n < O + \varepsilon$; und wenn m irgend eine ganze Zahl $> \mu$ bezeichnet, so muss es mindestens zwei Zahlen, k, l grösser als m geben, wofür $F^k > O - \varepsilon$, $F^l < U + \varepsilon$. Da nun zufolge Voraussetzung angenommen werden kann, dass für $n > \mu$ auch sei

$$F^n - \varepsilon < F^{n+r} < F^n + \varepsilon \quad (r = 1, 2 \cdots)$$

so folgt, wenn zuerst $n = k$, hierauf k selbst an Stelle von m gesetzt und demnach $l > k$ angenommen wird, $O - 2\varepsilon < U + \varepsilon$ oder $0 \leq O - U < 3\varepsilon$ d. i. $O = U$. Der gemeinsame Werth dieser Zahlen ist der Grenzwerth $\lim\limits_{n=+\infty} F^n$.***)

Was insbesondere die *binomische* Reihe, die Bolzano nur für reelle Werthe des Argumentes und Exponenten betrachtet, betrifft, so besteht seine Leistung in dem strengen Beweise des Satzes, dass das Product zweier binomischen Reihen zu den Exponenten p, q die binomische Reihe zum Exponenten $p+q$ sei (L. § 38—42).†) — Die Behauptung (L. § 46), dass die binomische Reihe für einen rationalen Exponenten $\frac{n}{m}$ sich beim Grenzübergange $\lim \frac{n}{m} = i$, worin i eine irrationale Zahl bedeutet, die binomische Reihe zum Exponenten i zum Grenz-

---

*) Hankel, der Bolzano's öfters anerkennend gedenkt, glaubt (l. c. § 4—8) vorstehenden Satz zuerst aufgestellt zu haben. Offenbar war ihm die Abhandlung B. nicht zugänglich. — Sein Beweis des Satzes scheint mir indess auch nicht haltbar. Er will zeigen, dass unter Voraussetzung der Relation, es gehöre zu jedem $\sigma > 0$ eine positive Zahl ε von der Art, dass für $0 < \delta < \varepsilon$ $|f(a+\delta) - f(a+\varepsilon)| < \sigma$, die Annahme unmöglich sei, dass für $f(x)$ bei $\lim x = a+0$ kein Grenzwerth vorhanden sei. Dann könnte allerdings, was immer die Constante A sein mag, zu dem beliebigen σ keine Zahl ε gehören, sodass für $\delta < \varepsilon$ stets $|f(a+\delta) - A| < \sigma$ wäre. Aber wenn er dann $f(a+\varepsilon) = A$ setzt, so lässt er ausser Acht, dass $f(a+\varepsilon)$ eben keine Constante ist, sondern durch ε von σ abhängt.

**) Neue Lehrsätze über die Summe unendlicher Reihen. *Antrittsprogramm* etc. p. 3.

***) Einen anderen Beweis des in Rede stehenden Satzes giebt Hr. Dini l. c. p. 27.

†) Ueber die Litteratur dieses Satzes vgl. Lacroix Complément des élémens d'Algèbre IV. édition 1817 p. 163.

werthe habe, erfordert noch den übrigens leicht zu erbringenden Nachweis, dass die binomische Reihe, in welcher das Argument einen constanten absolut genommen unter 1 liegenden Werth erhält, bezüglich aller zwischen zwei rationalen Grenzen μ, ν gelegenen Werthe des Exponenten gleichmässig convergire.

V. Stetige Functionen.

(B. p. 11.) „Nach einer *richtigen Erklärung* . . versteht man unter der Redensart, *dass eine Function fx für alle Werthe von x, die inner- oder ausserhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändre, nur so viel, dass, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega)-fx$ kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann.* . . .“*)

Um den Sinn dieser Erklärung festzustellen, betrachte man den Beweis des Satzes (B. p. 56):

„Jede Function von der Form $a+bx^m+cx^n+\cdots+px^r$, in welcher $m, n\cdots r$ ganze positive Exponenten bezeichnen, ist für alle Werthe von x eine *nach dem Gesetze der Stetigkeit* veränderliche Grösse.“

„Beweis. Denn wenn sich x in $x+\omega$ verändert; so ist die Aenderung, welche die Function erfährt, offenbar =

$$b[(x+\omega)^m-x^m]+c[(x+\omega)^m-x^m]+\cdots+p[(x+\omega)^r-x^r];$$

eine Grösse, von der sich leicht darthun lässt, dass sie so klein werden könne, als man nur immer will, wenn man ω klein genug nimmt. Denn . . . (es) ist diese Grösse =

$$\omega\left\{\begin{array}{l} mbx^{m-1}+m\dfrac{m-1}{2}bx^{m-2}\omega+\cdots+\omega^{m-1} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ +rpx^{r-1}+r\dfrac{r-1}{2}px^{r-2}\omega+\cdots+\omega^{r-1} \end{array}\right\}.$$

. . . Bezeichnen wir . . . durch S die Grösse, die herauskommt, wenn man die Werthe, die alle einzelnen Glieder des (in den Klammern enthaltenen) Ausdruckes für ein bestimmtes ω z. B. ω^1 annehmen, so zu einander addirt, als ob sie alle einerlei Vorzeichen hätten: so ist der wirkliche Werth, den dieser Ausdruck für eben dasselbe ω^1 hat, gewiss nicht $> S$, derjenige aber, den er für jedes *kleinere* ω annimmt, sicher $< S$. Verlangt man daher, dass die Veränderung, welche die Function $a+bx^m+cx^n+\cdots+px^r$ erfährt, $< D$ ausfalle; so nehme man nur ein ω, das zugleich $<\omega^1$ und auch $< D:S$ ist: so wird $\omega\cdot S$ und umsomehr das Product aus ω in eine Grösse, die $< S$ ist, $< D$ sein müssen.“

Aus diesem Beispiele erhellt, dass Bolzano's Definition genau Folgendes besagt: $f(x)$ heisst in der Umgebung des Werthes x stetig, wenn jeder beliebigen, noch so kleinen positiven Zahl D eine von

*) Der Schluss lautet bestimmter; „wenn man ω klein genug nimmt;“ wie Bolzano sonst sagt (L. p. 34, B. p. 57).

Null verschiedene positive Zahl δ entspricht, so dass die Differenz $f(x+\omega)-f(x)$ absolut genommen kleiner ist als D für *alle* Werthe von ω, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner sind als D (vgl. *Dini* l. c. p. 46). Dass aber $f(x+\omega)$ *alle* Werthe zwischen $f(x)$ und $f(x)\pm D$ annimmt, ist in dieser Definition keineswegs ausgesprochen.

Mit Hülfe vorstehender Erklärung der Stetigkeit und des Satzes in III. leitet Bolzano (B. p. 51) den *Lehrsatz* ab:

„Wenn sich zwei Functionen von x, fx und φx entweder für *alle* Werthe von x oder doch für alle, die zwischen α und β liegen, *nach dem Gesetze der Stetigkeit* ändern; wenn ferner $f\alpha < \varphi\alpha$ und $f\beta > \varphi\beta$ ist: so giebt es jedesmal einen gewissen zwischen α und β liegenden Werth von x, für welchen $fx = \varphi x$ wird.“*)

Und er bemerkt treffend (B. p. 12):

„Dass ... die stetige Function niemals zu einem höheren Werthe gelange, ohne erst alle niedrigeren durchgegangen zu sein d. h. dass $f(x+n\Delta x)$ jeden zwischen fx und $f(x+\Delta x)$ liegenden Werth annehmen könne, wenn man n nach Belieben zwischen 0 und $+1$ nimmt: das ist wohl eine sehr *wahre* Behauptung, aber sie kann nicht als *Erklärung* des Begriffes der Stetigkeit angesehen werden**), sondern ist vielmehr ein *Lehrsatz* über denselben und zwar ein solcher, der sich nur erst nach Voraussetzung des (eben erwähnten) Satzes beweisen lässt. . . . Aus dieser allgemeinen Wahrheit nämlich ergiebt sich jene erstere Behauptung in dem besonderen Falle, wo die Function $\varphi(x)$ in eine constante Grösse M übergeht.“

Die Abhandlung P. (§ 1—6) giebt weitere Sätze über die stetigen Functionen. Der erste derselben (§ 2.) kann auf folgenden Satz zurückgeführt werden: „Sind zwei Functionen $F(x)$, $F'(x)$ für *alle* Werthe von x im Intervalle $a \cdots a+h (h>0)$ eindeutig definirt und in der Umgebung von $x=a$ stetig, weiss man ferner, dass der Unterschied $F(x)-F'(x)$ seinem absoluten Betrage nach kleiner gemacht werden kann als jede beliebige Zahl, wenn man nur x hinlänglich nahe an a nimmt, so folgt nothwendig $F(a)=F'(a)$.“ In der That es sei $F(a)=A$, $F'(a)=A'$ und ε eine gegebene positive Zahl, so hat man $|F(x)-A|<\varepsilon$, $|F'(x)-A'|<\varepsilon$ für alle x zwischen a und $a+\delta$, wenn δ eine *positive* hinlänglich kleine Zahl bezeichnet. Da aber auch $|F(x)-F'(x)|<\varepsilon$, wenn nur x hinlänglich nahe an a liegt, so folgt $|A-A'|<3\varepsilon$ d. i. $A=A'$. Aus

*) Bekanntlich lieferte auch Cauchy (Cours d'Analyse p. 460) einen strengen Beweis desselben Satzes. Dabei wird zugleich die Berechnung der Werthe gelehrt, wofür $f(x)-\varphi(x)=0$.

**) Sie wäre dazu nicht einmal ausreichend, wie Darboux l. c. bemerkt hat. Man nehme nur $f(0)=0$, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ für $x \gtrless 0$.

dem vorstehenden Satze ergiebt sich nun der folgende: „Wenn sich die Function $f(x)$ für *alle* Werthe des Intervalles $a \cdots a+h$ stetig ändert; wenn man ferner von der Grösse X so viel weiss, dass sie für die eben genannten Werthe von x *ausser* $x=a$ aus den Werthen von $f(x)$ dergestalt herleitbar sei, dass sich zwar vielleicht die Regel dieser Herleitung bei einer Variation von $f(x)$ gleichfalls ändert, aber doch immer nur nach einem gewissen Gesetze der Stetigkeit von solcher Art, dass die Aenderung von X kleiner als jede gegebene Zahl zu werden vermag, wenn man die Variation von $f(x)$ klein genug macht; und wenn endlich X für $x=a$ definirt und stetig ist: so ist der Werth, den X für $x=a$ annimmt, blos aus dem Werthe $f(a)$ bestimmbar.“ *)

Hier ist X eine zusammengesetzte Function von $x: X = \varphi(f(x)) = F(x)$. Ersetzt man aber $f(x)$ durch eine *beliebige* andere stetige Function $f'(x)$, für welche jedoch $f'(a) = f(a)$ sei, so erhält man $X' = \varphi'(f'(x)) = F'(x)$. Die Functionen $F(x)$, $F'(x)$ genügen nun vollständig den oben vorausgesetzten Bedingungen; denn es soll sein $|F(x) - F'(x)| < \varepsilon$, wenn nur $|f(x) - f'(x)| < \varrho$ d. i. für alle $(x-a) < \delta$. Somit ist $F(a) = F'(a)$.

Es ist klar, dass sich an dem Satze nichts ändert, wenn die Grösse X aus den Werthen einer *endlichen Anzahl* von stetigen Functionen $f_0(x)$, $f_1(x) \cdots f_n(x)$ in ähnlicher Weise herleitbar ist (P. § 3.). Denn man hat zufolge Voraussetzung $|F(x) - F'(x)| < \varepsilon$, wenn nur $|f_r(x) - f_r'(x)| < \varrho_r$ $(r = 0, 1 \cdots n)$. Und da letztere Ungleichung besteht für alle $|x-a| < \delta_r$, so findet man sicher $|F(x) - F'(x) < \varepsilon$ für alle $|x-a| < \delta$, unter δ die kleinste der Zahlen $\delta_0 \delta_1 \cdots \delta_n$ verstanden.

Indess wird, entgegen der Ansicht Bolzano's, der in Rede stehende Satz nicht mehr unbedingt gelten, wenn die Anzahl der Functionen $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$, durch welche X bestimmt ist, in's Unendliche wächst. Dass die Zahlen $\delta_0 \delta_1 \cdots$ in inf. eine von 0 verschiedene untere Grenze haben, bildet vielmehr eine *neue Annahme*. Daher wird denn auch der folgende Satz, auf welchen es Bolzano vornehmlich ankommt, nicht ohne Einschränkung gebraucht werden können:

(P. § 5.) „Wenn sich $f(x)$ für *alle* Werthe $0 \cdots h$ stetig ändert; wenn man ferner von der Grösse $X = F(x)$ soviel weiss, dass sie für alle eben erwähnten Werthe von x *ausser* $x = 0$ *aus allen denjenigen Werthen bestimmbar sei, welche die Function $f(mx)$ annimmt, falls man*

*) Der Kürze wegen citire ich hier und im folgenden Satze nicht genau wörtlich, sondern stelle den Wortlaut so, wie er von Bolzano zufolge des Contextes gemeint war.

für m in ihr jeden denkbaren echten Bruch, 0 *und* 1 *mitgerechnet*, setzet, wobei überdies das schon oben beschriebene Gesetz der Stetigkeit befolgt wird, und wenn endlich X für $x = 0$ definirt und stetig ist*): so ist auch der zu $x = 0$ gehörige Werth von X bloss durch den Werth $f(0)$ bestimmbar.“

Sicher richtig wird dieser Satz unter folgender Voraussetzung sein. Ersetzt man $f(x)$ durch eine beliebige stetige Function $f'(x)$, für welche jedoch $f'(0) = f(0)$ sei, so möge $F(x)$ in $F'(x)$ übergehen. Dann soll zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ gehören, so dass $| F(x) - F'(x) | < \varepsilon$, wenn $| f(mx) - f'(mx) | < \delta$, *gleichviel welchen Werth m zwischen* 0 *und* 1 *erhalten mag*. Jetzt hat man nämlich zufolge der Stetigkeit von $f(x)$ und $f'(x)$ $|f(mx) - f'(mx)| < \delta$, wenn nur x seinem absoluten Betrage nach hinlänglich klein ist, so dass auf $F(x)$ und $F'(x)$ der oben gezeigte Hilfssatz angewendet werden kann.

VI. Ueber die Differenzirung unendlicher Reihen.

Grosse Wichtigkeit legt Bolzano (vgl. L. p. XVI) dem folgenden Satze (L. p. 29) bei:

„Lehnsatz. Wenn eine Function von x, von beliebig vielen, aber nur nach bestimmtem Gesetze zu bildenden Gliedern, $F^r x$, die Eigenschaft hat, dass sie entweder für alle x, oder doch für alle, die innerhalb gewisser Grenzen a und b liegen, blos durch die Vermehrung ihrer Gliederzahl r so klein werden kann, als man nur immer will; wenn ferner $f^r x$ eine zweite Function von ebenso beliebiger Gliederzahl bedeutet, die von der ersten auf solche Art abhängt, dass zwischen beiden für jeden innerhalb a und b liegenden Werth von x die Gleichung stattfindet:

$$\frac{F^r(x+\omega) - F^r x}{\omega} = f^r x + \Omega, \tag{1}$$

worin Ω so klein werden kann, als man nur immer will, wenn es ω werden kann: so behaupte ich, auch die Function $f^r x$ besitze die Eigenschaft, dass sie für eben dieselben Werthe von x, wie $F^r x$, so klein werden kann, als man nur immer will, wenn man ihre Gliedermenge r gross genug annimmt.“

Wie in IV., so bezeichnet auch hier $F^r(x)$ die Summe der $r + 1$ Anfangsglieder einer unendlichen Reihe; man kann also setzen

$$F^r(x) = \sum_0^r \varphi_n(x), \qquad f^r(x) = \sum_0^r \varphi_n'(x)$$

---

*) Bei Anwendung dieses Satzes hat Bolzano, wie auch schon P. p. 2 angegeben ist, nur die Stetigkeit von $F(x)$ für alle Werthe $0 \ldots h$ gefordert. Diese Bedingung ist sicherlich nicht einmal gleichbedeutend mit der, dass $\lim\,[F'(x) - F(x)] = 0$ sei für $\lim x = 0$. Dass er auf den Nachweis dieser Relation für die variirten Functionen später z. B. in VII. nicht eingeht, bildet eine fühlbare Lücke in seinen Demonstrationen.

und dabei annehmen, $\varphi_n(x)$ sei für die Werthe $a \leq x \leq b$ eine stetige Function von x, wodurch $F^r(x)$, wie Bolzano nach (1) bemerkt, eine stetige Function von x wird. Dann kann der vorstehende Satz auch so ausgesprochen werden: „Hat eine unendliche Reihe, deren Glieder für alle $a \leq x \leq b$ stetige Functionen von x sind, für diese Werthe durchaus die Summe 0 und besitzen ihre Glieder sämmtlich Differentialquotienten, so hat auch die aus denselben gebildete unendliche Reihe für jeden der bezeichneten Werthe die Summe 0.“ Dieser Satz ist jedoch bekanntlich nicht immer richtig; er besteht aber, falls man weiss, *dass die Reihe* $\varphi_0'(x) + \varphi_1'(x) + \cdots +$ *für alle* $a \leq x \leq b$ *convergirt und zwar gleichmässig.* Wenn diese Reihe convergirt für die genannten Werthe von x und ausserdem *eine stetige Summe* $f(x)$ besitzt, so gilt der Satz auch noch im Falle, dass die Reihe *nur im Allgemeinen gleichmässig convergirt.* Damit ist nach Herrn Dini (l. c. p. 102) gemeint, dass die gleichmässige Convergenz nur besteht, nachdem aus dem Intervalle (a, b) eine endliche Anzahl von Intervallen, deren jedes beliebig klein angenommen werden kann, ausgeschieden worden ist*). Bolzano hat indess seinen in drei Theile zerfallenden Beweis so angelegt, dass derselbe sich ohne Mühe zu einem Beweise des berichtigten Satzes ergänzen lässt.

1. Zunächst wird der Mittelwerthsatz abgeleitet

$$\frac{F^r(x+\omega) - F^r(x)}{\omega} = f^r(\xi^r), \tag{2}$$

worin $\xi^{(r)}$ einen mittleren Werth zwischen x und $x + \omega$ bezeichnet, der natürlich nicht allein von diesen Zahlen, sondern auch von dem Zeiger r abhängt.

---

*) Ist keine dieser Bedingungen erfüllt, so kann der Satz seine Giltigkeit verlieren. Setzt man z. B.

$$\varphi_0(x) = -\operatorname{arctan} x \qquad \varphi_n(x) = \frac{\operatorname{arctan} x\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \frac{\operatorname{arctan} x\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \qquad (n = 1;\ 2 \cdots),$$

so ist für jedes endliche x $\sum_0^\infty{}_n \varphi_n(x) = 0$ und für $x \gtrless 0$ auch $\sum_0^\infty{}_n \varphi_n'(x) = 0$; dagegen für $x = 0$ hat die letztere Reihe die Summe -1.

Durch Ausserachtlassung der Bedingung, dass $\sum \varphi_n'(x)$ mindestens convergiren müsse, wurde Bolzano zur unrichtigen Ansicht geführt (L. p. 47), dass die binomische Reihe für $x = \pm 1$ nie den Werth von $(1 + x)^n$ geben könne, es sei denn n eine ganze positive Zahl oder Null.

Auch Bolzano's berichtigter Satz löst jedoch nicht vollständig das Problem der Differenzirung unendlicher Reihen und ist nicht identisch mit dem Satze, den Herr Dini (l. c. p. 115) zeigt. Denn übertragen auf die Gleichung $F(x) - \sum \varphi_n(x) = 0$, verlangt er, dass die Existenz des Differentialquotienten von $F(x)$ bekannt sei.

2. Lässt man in (2) r zur Grenze $+\infty$ übergehen, so folgt gemäss den Voraussetzungen

(3) $$\lim_{r=+\infty} f^r(\xi^r) = 0 \quad \text{d. i.} \quad |f^r(\xi^r)| < D \quad \text{für} \quad r > M.$$

Nun aber kann man nicht ohne Weiteres behaupten, dass zwischen x und $x + \omega$ ein Werth ξ vorhanden sei, wofür $\lim\limits_{r=+\infty} f^r(\xi) = 0$ sei. Es folgt jedoch leicht, wenn die *gleichmässige* Convergenz der Reihe $\varphi_0'(x) + \varphi_1'(x) + \cdots = f(x)$ gefordert wird, dass *für die Unbestimmtheitsgrenzen der Function* ξ *bei* $\lim r = +\infty : \xi \geqq \xi'$ *in der That* $f(\xi) = f(\xi') = 0$ *sei.*

Man findet nämlich bei gleichmässiger Convergenz vorstehender Reihe, dass zu jeder positiven Zahl D eine Zahl $\Delta > 0$ gehöre, so dass für jeden Werth $a < \xi < b$

(4) $$|f^r(\xi + i) - f^r(\xi)| < D \quad \text{für alle} \quad |i| < \Delta^{*}).$$

Ist ξ die obere Unbestimmtheitsgrenze von ξ^r für $\lim r = +\infty$, so entspricht der Zahl Δ eine positive Zahl R, so dass für *alle* $r > R$ $\xi^r < \xi + \Delta$, dass aber, wenn s irgend eine ganze Zahl grösser als R bedeutet, mindestens eine ganze Zahl $k \geqq s$ vorhanden sein muss, wofür $\xi^k > \xi - \Delta$. Nimmt man $s > M$ an, so folgt demnach nach (3) und (4)

$$|f^k(\xi^k)| < D, \quad |f^k(\xi^k) - f^k(\xi)| < D.$$

Und da wegen der Convergenz der Reihe $\Sigma\varphi_n'(\xi)$

$$|f^k(\xi) - f(\xi)| \leqq D,$$

wenn nur s auch noch grösser als m vorausgesetzt wird, so ergiebt sich

$$|f(\xi)| < 3D \quad \text{d. i.} \quad f(\xi) = 0.$$

3. Die Function $f(x)$ ist zufolge der in 2. gemachten Voraussetzung *eine stetige Function von* x für alle x im Intervalle (a, b) (Dini l. c. p. 109). Da in jedem Intervalle $x, x + \omega$ mindestens ein

---

*) Nach Voraussetzung existirt, was immer x für ein Werth im Intervalle (a, b) sein möge, eine ganze Zahl m, so dass

$$\left|\sum_{r+1}^{r+s} \varphi_n'(x)\right| < \frac{1}{3} D \quad \text{für } r \geqq m,$$

wobei s jede beliebige ganze positive Zahl sein kann. Setzt man

$$f^{m+s}(x+i) - f^{m+s}(x) = (f^m(x+i) - f^m(x)) + \sum_{m+1}^{m+s} \varphi_n'(x+i) - \sum_{m+1}^{m+s} \varphi_n'(x)$$

und bedenkt, dass für alle $|i| < \Delta_1$ $|f^m(x+i) - f^m(x)| < \frac{1}{3} D$, so folgt

$$|f^{m+s}(x+i) - f^{m+s}(x)| < D \quad |i| < \Delta_1.$$

Daraus ergiebt sich dann von selbst die Relation (4).

Werth $x = \xi$ sich befindet, wofür $f(x) = 0$ ist, so ist sie für alle Werthe $a \leq \alpha \leq b$ Null. In der That ist $|f(\alpha) - f(x)| < D$ für alle $\alpha < x < \alpha + A = \beta$. Zwischen α und β ist aber ein Werth $\mathfrak{x}$ vorhanden, wofür $f(\mathfrak{x}) = 0$. Somit folgt $|f(\alpha)| < D$ d. i. $f(\alpha) = 0$*).

VII. Die Rectification der Curven.

Die Schrift P. enthält einen Versuch, die Probleme der Rectification, Complanation und Cubirung zu lösen ohne Hülfe der Axiome des Archimedes, und was das erstere, auf das wir uns hier beschränken, betrifft, auch ohne Voraussetzung des Satzes, dass das Verhältniss von Bogen und Sehne sich bei unbegrenzter Abnahme des ersteren (richtiger: der letzteren) dem Grenzwerthe 1 nähere. Die meisten Geometer vor Bolzano hatten mit Archimedes als Grundsatz angenommen, dass von zwei convexen Linien, die auf derselben Seite ihrer gemeinsamen Sehne liegen, die umschlossene die kleinere sei**). Mit der Forderung, dass diese und die ähnlichen Annahmen nur Folgerungen aus der Rectificationsformel sein sollten, befand sich Bolzano vollkommen im Rechte; nur verfuhr er nicht radical genug. Denn er betrachtete noch die Länge einer stetigen Linie ohne Weiteres *als eine Grösse* (P. p. 34) d. i. nach Bt. p. 4 als „etwas, welches durch Zahlen bestimmt werden kann".***) Schon aus diesem Grunde kann sein Versuch heute nur mehr historisches Interesse beanspruchen. Es sind aber auch die übrigen Annahmen, auf welche Bolzano sich stützt, der Art, dass sie schon bald nach Erscheinen der Schrift P. Widerspruch erfuhren†). Ist $y = f(x)$ die Gleichung der gegebenen ebenen Curve in rechtwinkligen Coordinaten und $F(x)$ die Länge des Stückes, welches zur Abscisse x gehört, so wird zuerst angenommen (P. p. XVIII), dass $F(x)$ sich nach dem Taylor'schen Satze entwickeln lasse. Diese an sich nicht zulässige Voraussetzung wäre aber

---

*) Die oben angeführte Verallgemeinerung des Satzes ergiebt sich leicht. In der That, es sei $c - \gamma_1$, $c + \gamma_2$ das erste der ausgeschiedenen Intervalle, so hat man für die Werthe $a \leq x \leq c - \gamma_1$, $f(x) = 0$ und da $f(x)$ auch in der Umgebung des Punktes c stetig sein soll, während γ_1 beliebig klein werden kann, nothwendig $f(c) = 0$.

**) Legendre (Élémens de Géométrie 12. édition. L. IV. prop. 9) suchte den angeführten Satz aus dem ersten Axiome des Archimedes, dass die Gerade die kürzeste Linie sei, abzuleiten. Er stützt sich aber hierbei auf die falsche Behauptung, dass unter allen Linien, die eine gegebene *einschliessen,* eine die kleinste sein müsse. (P. p. XII.)

***) *Duhamel* löste die von Bolzano gestellte Aufgabe, indem er zunächst diejenige Zahl definirte, welche die Länge des Bogens heissen soll. (Vgl. Des méthodes etc. III. p. 386.)

†) Vgl. die Besprechungen der Schrift P. in der *allgemeinen Literaturzeitung* Jahrg. 1819 Nr. 236 und in der *Leipziger Literaturzeitung* Jahrg. 1822 p. 1393.

hier eigentlich nicht nothwendig, vielmehr würde es genügen, *die Existenz des Differentialquotienten* $\frac{dF}{dx}$ anzunehmen*). Bezüglich der Function $f(x)$ ist die analoge Festsetzung zu treffen.

Nun wird weiter der Nachweis versucht, dass $\frac{dF}{dx}$ *blos aus* $\frac{df}{dx}$ *bestimmbar sei*, wozu Bolzano sich eines Grundsatzes bedient, den man heute dahin formuliren würde, dass in ähnlichen ebenen Systemen entsprechende Bogen dasselbe Verhältniss besitzen wie irgend ein Paar entsprechender Strecken**). Dies vorausgesetzt ergiebt sich nämlich leicht, dass die $\{F(x+\Delta x)-F(x)\}:\Delta x=\Psi(\Delta x)$ blos durch die Werthe bestimmbar sei, welche die Function $\{f(x+m\Delta x)-f(x)\}:m\Delta x$ giebt, wenn man für m jeden echten Bruch nebst 0 und 1 setzt. Bezeichnet man $\{f(x+\Delta x)-f(x)\}:\Delta x$ mit $\psi(\Delta x)$ und versteht nach P. p. 2 unter $\psi(0)$ $\frac{df}{dx}$, so ändert sich $\psi(\Delta x)$ allerdings stetig mit Δx. Dasselbe gilt von $\Psi(\Delta x)$, wenn $\Psi(0)=\frac{dF}{dx}$ ist. Bolzano wendet nun den Schlusssatz von V. an, wozu das a. a. O. angeführte Gesetz der Stetigkeit für die Aenderung der Function $\Psi(\Delta x)$ gegenüber einer Abänderung von $\psi(\Delta x)$ erforderlich ist. Es ist aber nicht nachgewiesen.

Soweit hat Bolzano's Verfahren functionentheoretisches Interesse. Wenn er ferner den Grundsatz aufstellt (P. p. 49): es müsse irgend ein für *alle* Linien *gleichlautendes Gesetz* geben, nach dem man ihre Längen aus ihren Gleichungen $y=f(x)$ herleiten könne; so heisst dies die Aufgabe der Analysis verkennen, die ja eben ermitteln soll, ob und für welche Arten von Linien ein solches Gesetz besteht.

Anhang.

1. Ueber das Problem der Rectification der Curven.

1. Die griechischen Geometer betrachteten zwei beliebige begrenzte Linien, sowie zwei beliebige begrenzte Flächen als untereinander vergleichbar. Unter dieser Voraussetzung nimmt Archimedes an, dass

*) Vgl. hierzu die Anmerkung auf Pr. p. 66, nach welcher der Differentialquotient einer stetigen Function stets existiren soll, ausgenommen für isolirte Werthe des Argumentes, welche übrigens auch in unendlicher Anzahl vorhanden sein können.

**) Vgl. P. p. 49. Diese Annahme hängt mit Bolzano's geometrischen Ansichten zusammen, die mit denen Legendre's (l. c. Note II) übereinstimmen. Darüber berichtet ausführlich Herr R. Zimmermann (Sitz.-Ber. der Wiener Akademie, phil. Cl. III p. 163).

von den Linien, welche einerlei Endpunkte haben, am kürzesten die gerade sei; dass von anderen Linien mit einerlei Endpunkten in einer Ebene, welche nach derselben Seite ihrer gemeinsamen Sehne hohl sind, die umschlossene die kleinere sei. Ja sie legten jedem solchen Paare von Grössen ohne Weiteres ein *Verhältniss* bei. Hierbei weist das geometrische System Euklid's eine fühlbare Lücke auf. Denn nach Elem. V. Def. 3. haben Grössen zu einander ein Verhältniss, welche vervielfältigt einander übertreffen können. Demnach sollte, bevor vom Verhältnisse zweier Kreisflächen gesprochen wird (Elem. XII. prop. 2), der Nachweis geführt werden, dass eine Kreisfläche existire, welche grösser als die grössere der beiden betrachteten Kreisflächen und dabei ein Vielfaches der kleineren sei. Diese Lücke wird allerdings beseitigt durch die letzte der *Annahmen* des Archimedes*): „Auch ist bei ungleichen Linien, Flächen und Körpern der Ueberschuss des grösseren über das kleinere so gross, dass er durch mehrmalige Zusammenfügung zu sich selbst grösser werden kann, als jede Grösse von der Art der verglichenen."**) Es bleibt jedoch ungewiss, ob er sie gerade der eben berührten Schwierigkeit wegen aufnahm.

2. Das Problem der Rectification hat eine klare und eingehende Darstellung gefunden durch Duhamel***). Er verlangt vor Allem den Nachweis der Behauptung, dass ein gegebener Curvenbogen ein Verhältniss zur Längeneinheit besitze, oder dass ihm eine Zahl entspreche, und sucht denselben auch für den Fall *eines convexen Bogens* zu liefern. Sein Verfahren giebt zu folgender Erörterung Anlass. Zunächst kann man fragen, was für einen arithmetischen Sinn die Definition habe: „Die Länge einer gegebenen Curve ist die Grenze, der sich der Umfang eines der Curve eingeschriebenen Polygons bei unbegrenzter Abnahme der Seiten nähert." Es handelt sich hierbei um den Grenzwerth einer Function von unbegrenzt vielen, unter einander nur durch eine einzige Bedingung verknüpften Veränderlichen, wenn jede derselben unabhängig von den übrigen zur Grenze 0 con-

---

*) Archimedes, Von der Kugel und dem Cylinder. Vgl. Nizze Archimedes Werke p. 44.

**) Beiläufig bemerkt spielt dieses Axiom des Archimedes eine wichtige Rolle in der *allgemeinen Arithmetik*. Es sei eine unendliche Menge von (abstracten) Objecten A, B, ... gegeben. Durch Definitionen werde festgesetzt, welche unter ihnen gleich und welches von je zweien ungleichen das grössere sei. Wird ferner die Addition und Subtraction, die Vervielfältigung und Theilung derselben definirt, so folgt noch nicht, dass es möglich sei, ein gegebenes Object der Schaar so oft zu vervielfältigen, dass dadurch jedes andere übertroffen wird. Ein Beispiel einer Art von Objecten, welche den zuerst genannten Postulaten genügen, dem des Archimedes aber nicht, bieten die *Unendlich der Functionen*, welche Hr. P. du Bois-Reymond betrachtet hat. (Diese Annalen XI. p. 150.) —

***) Des méthodes etc. II, p. 411 f.

vergirt. Es sei dem Bogen AB das Polygon $AA_1A_2\cdots A_{n-1}B$ eingeschrieben und $|A_{r-1}A_r| = s_r$. *Die Summe* $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = p_n$ *hat einen endlichen Grenzwerth* L *für* $\lim s_r = 0$, *wenn jeder positiven Zahl* ε *eine Zahl* $\Delta > 0$ *zugeordnet werden kann, so dass der Unterschied* $p_n - L$ *seinem absoluten Betrage nach kleiner als* ε *ist für alle Systeme von Werthen* $s_1, s_2, \cdots, s_n$, *deren jeder kleiner als* Δ *ist.* Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines endlichen Grenzwerthes von p_n bei $\lim s_r = 0$ besteht ferner darin, dass zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\Delta > 0$ gehört, so dass der Unterschied

$$s_1' + s_2' + \cdots + s_{n_1}' - p_n = p_{n_1}' - p_n$$

seinem absoluten Betrage nach kleiner als ε ist für alle Werthsysteme $s_r < \Delta$, falls nur keine der Seiten des ebenfalls dem Bogen AB eingeschriebenen Polygones p_{n_1}' grösser ist als irgend eine der Seiten des Polygones p_n d. i. $s_{r_1}' \leqq s_r < \Delta$.

3. Duhamel hat das Zutreffen der soeben erwähnten Bedingung mit Hülfe des ersten Theiles des von ihm formulirten „principe fondamental des infiniment petites“ (l. c. II, p. 398) gezeigt, der jedoch mit Sicherheit nur unter einer weiteren Voraussetzung gebraucht werden kann. Dieser bekannte Satz muss so lauten: „Wenn die Summe der positiven Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, deren jede sich der Grenze 0 nähert und deren Anzahl dabei unbegrenzt wächst, unter diesen Umständen einen endlichen Grenzwerth hat, so nähert sich auch die Summe der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ demselben Grenzwerthe, falls der Quotient $\beta_n : \alpha_n$ *gleichmässig bezüglich aller Werthe* $n = 1, 2, \cdots$ für $\lim \alpha_n = 0$ zum Grenzwerthe 1 convergirt.“*) Daher muss man bei der in Rede stehenden Untersuchung zunächst folgenden Satz feststellen: „*Ist der Bogen AB convex***), so nähern sich für alle Punkte M desselben die Winkel NMT und $N'MT'$ zwischen der Tangente in $M : TMT'$ und den Sehnen zu beiden Seiten von $M : MN, MN'$ *gleichmässig* der Grenze Null bei unbeschränkter Annäherung der Punkte N, N' an den Punkt M.“ D. h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\delta > 0$, so dass $|NMT| < \varepsilon$ und $|N'MT'| < \varepsilon$ für alle Sehnen $|MN| < \delta$ resp. $|MN'| < \delta$, gleichviel wo der Punkt M auf dem Bogen AB gewählt wird.

---

*) Dies hat bereits Hr. Dini nach seinen autographirten Vorlesungen im Studienjahre 1877/78: „Analisi infinitesimale“ I, p. 7 bemerkt.

**) D. h. wird er von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten und in ebensovielen von jedem Kreise, der von einem seiner Punkte mit hinlänglich kleinem Radius beschrieben wird. Ein solcher Bogen besitzt in allen seinen Punkten Grenzlagen für seine Sehnen, welche jedoch zu beiden Seiten eines Punktes verschieden sein können.

Beweis. Es sei σ eine beliebige positive Zahl und $|MN| = |MN'| = \sigma$ gemacht. Dann sind entweder alle Winkel NMT, $N'MT'$ kleiner als ε, oder es ist mindestens ein P. C auf AB (mit der Tangente EE') vorhanden, wofür einer der Winkel DCE, $D'CE'$ ($|CD| = |CD'| = \sigma$) grösser als ε ist. Im ersten Falle kann man $\delta = \sigma$ setzen, im zweiten wiederhole man den Versuch mit der Strecke $\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma$. Findet sich auch jetzt noch ein Punkt C_1, wofür einer der Winkel $D_1 C_1 E_1$, $D_1' C_1' E_1'$ grösser als ε ist, so kann $C \equiv C_1$ genommen werden, *da der Winkel DCE mit wachsendem $|CD|$ auch wächst.* U. s. f. Auf diese Art gelangt man entweder zu einer Strecke $\sigma_m = \frac{\sigma}{2^m}$, der die Zahl δ gleichgesetzt werden kann, oder zu einem Punkte C auf AB, wofür entweder alle Winkel $D_n CE$ oder alle $D_n' CE'$ grösser sind als ε, wie gross auch n angenommen werden mag. Die letztere Annahme verträgt sich aber nicht damit, dass für jeden Punkt C auf AB $\lim DCE = 0$ für $\lim CD = 0$ und $\lim D'CE' = 0$ für $\lim CD' = 0$.

Denkt man sich nun die Ecken der Polygone p_n, p'_{n_1} zu einer fortlaufenden Reihe vereinigt, welche die gebrochene Linie p''_{n_2} liefern möge, so ergiebt sich durch Projection der zwischen A_{r-1} und A_r liegenden Ecken von p''_{n_2} auf die Gerade $A_{r-1}A_r$ sofort die Relation

$$0 < p''_{n_2} - p_n < \sum_1^n {}_r s_r \left(\frac{1}{\cos \omega_r} - 1\right),$$

worin ω_r den grösseren der Winkel bedeutet, welche die Sehne $A_{r-1}A_r$ mit den Tangenten in ihren Endpunkten bildet. Da nach dem vorstehenden Satze zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Strecke $\delta > 0$ gehört, so dass

$$0 < \frac{1}{\cos \omega_r} - 1 < \varepsilon \quad \text{für} \quad s_r < \delta,$$

so folgt $p''_{n_2} - p_n < \varepsilon q$ wenn q den Umfang eines Polygones bezeichnet, das auf derselben Seite der Sehne AB liegt, wie der Bogen AB und ihn umschliesst. Auf ähnliche Art ergiebt sich

$$0 < p''_{n_2} - p'_{n_1} < \varepsilon q \quad \text{für} \quad s'_{r_1} \leq s_r < \delta,$$

somit $|p'_{n_1} - p_n| < 2\varepsilon q$. q. e. d.*).

---

*) Definirt man die Zahl L mit Duhamel zunächst als Grenzwerth der Umfänge einer besonderen Classe von eingeschriebenen Polygonen, so lässt sich L als Grenzwerth im allgemeinen Sinne erweisen durch ein Verfahren, *welches nur die einfachsten Sätze der Planimetrie voraussetzt und auch in der Nicht-Euklid'schen Geometrie brauchbar ist.* Man schreibe demnach dem Bogen AB ein Polygon von k Seiten ein und leite daraus andere ab, indem man jede Seite halbirt und in ihrem Mittelpunkte eine Senkrechte errichtet. Für die Umfänge Q_m

4. Ganz ähnlich ergiebt sich der Satz: „Construirt man in den Punkten $A, A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, B$ die Tangenten der Curve, welche die gebrochene Linie $AB_1B_2 \cdots B_nB$ bilden, so existirt für $|AB_1| + |B_1B_2| + \cdots + |B\,B|$ ein Grenzwerth bei $\lim s_r = 0$ und zwar ist er die Zahl L."*)

5. Zu allgemeineren Sätzen gelangt die analytische Geometrie. Man verdankt die volle Einsicht in die Natur des hierhergehörigen Rectificationsproblemes Hrn. P. du Bois-Reymond**). Die grosse Wichtigkeit des Gegenstandes wird es rechtfertigen, wenn hier noch einmal darauf eingegangen und der Beweis des von ihm gegebenen Satzes unter Zugrundelegung der in Nr. 2. angenommenen Definition vorgetragen wird. Es sei CC' eine einfache stetige Linie, deren

---

der so entstehenden Polygone von $k \cdot 2^m$ Seiten sei $\lim\limits_{m=+\infty} Q_m = L$ und $Q_m < L$. — Bezeichnet nun P' den Umfang eines AB eingeschriebenen Polygones, dessen Seiten nicht grösser sind als die eines eingeschriebenen Polygones P von r Seiten mit *nur stumpfen Winkeln*, so findet man unmittelbar, wenn S' die grösste der Seiten des Polygones P' bedeutet,

$$\text{(a)} \qquad P' - P > -(r-1)S'.$$

Damit zeigt man zuerst, dass der Umfang eines beliebigen AB eingeschriebenen Polygones *p kleiner als L sein muss.* Zunächst folgt nach (a), wenn nur m so gross genommen wird, dass alle Seiten von Q_m kleiner sind als jede der Seiten von P

$$P < Q_m + (r-1)S' < L + (r-1)S';$$

somit, da S' beliebig klein sein kann, $P \leqq L$. Da man nach demselben Gesetze, vermöge dessen die Polygone Q_m nacheinander gebildet werden, zu p ein Polygon P mit nur stumpfen Winkeln finden kann, welches somit nicht grösser als L sein kann und dabei grösser als p ist, so folgt, dass $p < L$ sein muss.

Andererseits ergiebt sich aus (a), falls die n Seiten eines Polygones p_n, deren grösste s sein mag, sämmtlich kleiner sind als irgend eine Seite eines Polygones Q_m mit nur stumpfen Winkeln

$$\text{(b)} \qquad p_n - Q_m > -(m-1)s.$$

Ist nun ε eine gegebene positive Zahl und $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, so kann eine ganze Zahl m so gewählt werden, dass $Q_m > L - \varepsilon'$ und dabei *zufolge des in Nr.* 3. *gezeigten Hülfssatzes* nur stumpfe Winkel besitzt. Nimmt man dann s so an, dass

$$(m-1)s < \varepsilon - \varepsilon',$$

so folgt nach (b)

$$p_n > (L-\varepsilon') - (\varepsilon - \varepsilon') \text{ d. i. } 0 < L - p_n < \varepsilon \text{ für alle } s_r < \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{m-1}$$

d. i. $\lim p_n = L$ für $\lim s_r = 0$.

*) Im Traité de Géométrie von E. Rouché und Ch. de Comberousse (IV. édition) findet sich ein Beweis des Satzes von Nr. 2., welcher sich auf einen Theil des Satzes von Nr. 4. stützt. Auch hier (I, Nr. 290, 1.) ist der Hülfsatz in Nr. 3. nöthig. Herr de Tilly zieht diesem Verfahren das von Duhamel vor (Mémoires de la soc. des sciences phys. etc. de Bordeaux 2. sér. T. III, p. 87) und zwar, wie ich glaube, mit Recht.

**) Diese Annalen Bd. XV, p. 285.

Gleichung zwischen den ihren Endpunkten entsprechenden endlichen Abscissen $x = OA = a$ und $x = OA' = a'$ durch die eindeutige und stetige Function $y = f(x)$ dargestellt sei. Zwischen A, A' schalte man die $(n-1)$ Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ mit den Abscissen

$$a_1 = a + \delta_1, \quad a_2 = a_1 + \delta_2, \cdots, a_{n-1} = b - \delta_n$$

ein, zu denen die Curvenpunkte $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ gehören. Unter dieser Voraussetzung besteht der Satz:

„*Wenn die eindeutige und stetige Function $y = f(x)$ wenigstens in allen Punkten $a < x < a'$ mit Ausnahme eines endlichen Punktsystemes erster Art* (d. i. von endlicher Ordnung) *einen* (vollständigen) *Differentialquotienten besitzt, der eine für den Bereich der übrigen Punkte endliche und im endlichen Intervalle (a, a') integrirbare Function bildet, so existirt für die gebrochene Linie $L_n = |CC_1| + |C_1C_2| + \cdots + |C_{n-1}C'|$ bei unbegrenzter Abnahme der Intervalle $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$, deren Summe jedoch stets $a' - a$ bleiben muss, ein endlicher Grenzwerth L, und zwar ist:*

$$L = \int_a^{a'} \left| \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| \cdot dx.\text{“}$$

Setzt man $f(a) = b$, $f(a') = b'$, $f(a_r) = b_r$, so ergiebt sich unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$(1) \qquad L_n = \sum_1^n {}^r \left| \sqrt{1 + \left(\frac{b_r - b_{r-1}}{\delta_r}\right)^2} \right| \cdot \delta_r.$$

Daraus folgt, wenn zunächst angenommen wird, dass $f(x)$ mindestens für alle Punkte $a < x < a'$ einen Differentialquotienten von der erwähnten Eigenschaft besitzt, nach dem Mittelwerthsatze in der Form von O. Bonnet*)

$$L_n = \sum_1^n {}^r \left| \sqrt{1 + f'(X_r)^2} \right| \cdot \delta_r \qquad a_{r-1} < X_r < a_r.$$

Es ist aber, wenn $f'(x)$ integrabel ist im endlichen Intervalle (a, a'), auch $\left| \sqrt{1 + f'(x)^2} \right|$ integrabel**); so dass sich ergiebt

$$(2) \qquad \lim_{\delta_r = 0} L_n = \int_a^{a'} \left| \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| \cdot dx = \text{arc. } CC'.\text{***)}$$

---

*) Serret C. de calcul différentiel p. 23 und G. Cantor Borchardt Journ. 74, p. 141.

**) Vgl. P. du Bois-Reymond l. c. p. 286.

***) Dabei liegt die arithmetische Definition des bestimmten Integrales zu Grunde. Es sei $f(x)$ eine Function, welche in dem endlichen Intervalle $a \leq x \leq a'$ *für alle oder doch für überall-dicht vertheilte Werthe* von x eindeutig definirt ist

Diese Formel besteht auch noch, wenn $f'(x)$ nach Ausschluss einer endlichen Anzahl von Punkten der Bedingung des Satzes Genüge leistet. Es sei der Punkt $x = d = 0D (a < d < a')$ ausgeschlossen. Bei jeder Zerlegung von $a' - a$ wird entweder ein Theil vorkommen, der den Punkt D enthält, oder zwei Theile, die in D zusammenstossen. Im ersten Falle seien die Grenzen des *einen* Theiles, im zweiten die von D verschiedenen Grenzen der beiden Theile $d - \delta' = 0D'$, $d + \delta'' = 0D''$. Wenn nun die den Segmenten AD', $D''A'$ entsprechenden Theile von L_n L'_n, L''_n heissen, so hat man

$$\left| L_n - \int_a^{a'} \left| \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| dx \right| < \left| L'_n - \int_a^{a-\delta'} \cdots \right| + \lambda + \int_{a-\delta'}^{a+\delta''} \cdots + \left| L''_n - \int_{a+\delta''}^{a'} \cdots \right|,$$

worin

$$\lambda = \left| \sqrt{\delta'^2 + [f(d) - f(d - \delta')]^2} \right| + \left| \sqrt{\delta''^2 + [f(d + \delta'') - f(d)]^2} \right|.$$

Jeder gegebenen positiven Zahl ε entspricht nun eine Zahl $\delta > 0$, so dass, wenn nur $\delta' < \delta$ und $\delta'' < \delta$, sowohl das zweite als auch das dritte Glied rechts kleiner ist als ε. Denkt man sich demgemäss δ', δ''

---

und deren sämmtliche Werthe zwischen zwei endlichen Zahlen liegen. Theilt man nun das Intervall $a' - a$ in n Theile

$$a' - a = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n, \qquad (\delta_r > 0);$$

setzt

$$a = a_0, \quad a + \delta_1 = a_1, \quad a_1 + \delta_2 = a_2, \cdots, a_{n-1} + \delta_n = a_n = a',$$

und versteht unter x_r einen beliebigen Werth zwischen a_{r-1} und a_r $(a_{r-1} \leq x_r \leq a_r)$; so existirt für die Summe $\sum_1^n {}_r \, \delta_r f(x_r)$ bei unbegrenzter Abnahme der Theile δ_r ein endlicher Grenzwerth J dann und nur dann, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine Zahl $\varrho > 0$ gehört, so dass die Ungleichung

$$\left| \sum_1^n {}_r \, \delta_r f(x_r) - J \right| < \varepsilon$$

besteht *für alle Werthe* $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$, *deren Summe* $= a' - a$ *ist und von denen jeder einzelne kleiner als* ϱ *ist.* Die Zahl J heisst das bestimmte Integral $\int_a^{a'} f(x) \cdot dx$. — Diese Definition entnehme ich im Wesentlichen den Vorlesungen des Hrn. Weierstrass. — In ähnlicher Art lässt sich der endliche Grenzwerth für $\sum_1^n {}_r \, \delta_r f(x_r, x'_r)$, worin x'_r dieselbe Bedeutung hat wie x_r, bei $\lim \delta_r = 0$ definiren, welcher mit $\int_a^{a'} f(x, x) \, dx$ zu bezeichnen ist. Mit Hülfe desselben dehnt man den im Texte angegebenen Satz auf die ebenen Curven $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ und auf die *Curven doppelter Krümmung* aus.

festgesetzt, so kann nach dem Vorstehenden für die übrigen Intervalle δ_r eine Grenze $\varrho' > 0$ gefunden werden, so dass, wenn nur $\delta_r < \varrho'$, das zweite und vierte Glied rechts ebenfalls unter ε liegen. Somit existirt eine Zahl ϱ, so dass für alle $\delta_r < \varrho$

$$\left| L_n - \int_a^{a'} \left| \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| dx \right| < 4\varepsilon$$

d. h. es gilt wieder die Formel (2). Aehnlich wird man vorgehen, wenn zwischen a und a' eine endliche Anzahl von Punkten oder auch ein unendliches Punktsystem von erster Art auszuschliessen ist.

6. Wenn $f'(x)$ auch nach Ausschliessung eines unendlichen Punktsystemes erster Art keine endliche Function wird, so hat die Summe L_n bei unbegrenzter Abnahme der δ_r *dann und nur dann einen endlichen Grenzwerth* L, *falls das Integral* $\int_a^{a'} \left| \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| dx$ *existirt und zwar ist derselbe ihm gleich.* Dabei wird, wie es die bis jetzt übliche Erklärung des bestimmten Integrales (vgl. Dini Fondamenti p. 300) erheischt, vorausgesetzt, es sei nur ein unendliches System erster Art von solchen Punkten zwischen a und a' vorhanden, so dass in jeder auch noch so kleinen Umgebung irgend eines derselben eine der Grenzen von $f'(x)$ unendlich ist. — Der Beweis des Satzes wird in der bekannten Weise durch allmähliches Aufsteigen zu den höheren Punktsystemen geführt. Es sei zunächst ein einziger Punkt $x = d = 0D$ von der eben erwähnten Eigenschaft zwischen a und a' vorhanden. Zerlegt man L_n wie in Nr. 5. und setzt

$$(3) \quad \lim_{\delta'=+0} \int_a^{d-\delta'} \left| \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| \cdot dx = J', \; \lim_{\delta''=+0} \int_{d+\delta''}^{a'} \left| \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| \cdot dx = J'',$$

so folgt

$$L_n - J' - J'' = \left(L'_n - \int_a^{d-\delta'} \cdots \right) + \left\{ \int_a^{d-\delta'} \cdots - J' \right\}$$

$$+ \left(L''_n - \int_{d+\delta''}^{a'} \cdots \right) + \left(\int_{d+\delta''}^{a'} \cdots - J'' \right) + \lambda.$$

Man nehme nun δ', δ'' so klein, dass das zweite, vierte und letzte Glied rechts absolut kleiner sind als die gegebene Zahl ε. Sind δ', δ'' demgemäss angesetzt, so kann eine Zahl ϱ' gefunden werden von der Art, dass die erste und dritte Differenz für alle Werthe der darin vorkommenden δ_r, welche unter ϱ' liegen, absolut genommen, je kleiner sind als ε. Demnach existirt auch eine Zahl ϱ, so dass für alle $\delta_r < \varrho$

$$|L_n - J' - J''| < 5\varepsilon \quad \text{d. i.} \quad \lim_{r=0} L_n = J' + J''.$$

7. Ist einer der Grenzwerthe (3) unendlich, *so hat auch die Summe L_n einen unendlichen Grenzwerth.* Denn es ist L_n grösser als jede beliebige Zahl G, wenn nur die Intervalle δ_r klein genug sind. In der That es sei $G' > G$, so ist nach Voraussetzung z. B. $\int_a^{d-\delta'} \cdots > G'$ für alle $\delta' < \sigma$, und wenn δ' fixirt ist, so kann für die in L'_n vorkommenden Theile δ_r eine Grenze ϱ' gefunden werden, dass für $\delta_r < \varrho'$ $L'_n > \int_a^{d-\delta'} \cdots - (G' - G)$, mithin $L'_n > G$ ist. Bedeutet ϱ die kleinere der Zahlen σ, ϱ', so überschreitet die über dem Segmente AD stehende Summe gewiss für alle $\delta_r < \varrho$ die Zahl G.

Es ist leicht ersichtlich, dass falls $\int_a^{a'} f'(x)\,dx$ *absolut* convergirt, auch $\int_a^{a'} \left|\sqrt{1 + f'(x)^2}\right| dx$ convergirt und falls $\int_a^{a'} |f'(x)|\,dx$ unendlich ist, dasselbe auch vom zweiten Integral gelten müsse. Diese Bemerkung führt zur Aufstellung von *stetigen Curvenbogen, für welche die Summe L_n bei unbeschränkter Abnahme der δ_r über alle Grenzen wächst.* Es sei z. B. für $x = 0$, $y = 0$; für $x \gtrless 0$

$$y = \int_0^x \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \sin\frac{1}{x},$$

so hat $\int_0^x \left|\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\right| dx$ bekanntlich den Werth $\pm\infty$; demnach hat das Stück der Curve vom Anfangspunkte 0 bis zu einem beliebigem Punkte M, wenn man will, eine unendliche Länge.

Daraus erhellt die *Unzulässigkeit* der Annahme, dass jedem stetigen Bogen eine Zahl als Länge entspreche. Die vermittelst derselben abgeleiteten Resultate haben daher nur Gültigkeit unter der Voraussetzung, dass der betrachtete Bogen messbar sei.

8. Ist der Bogen nach einer der vorstehend entwickelten Methoden als Zahl definirt, so folgen, wie Duhamel hervorgehoben hat, die Annahmen des Archimedes als nothwendige Sätze. Das Nämliche gilt vom Theoreme: arc. AC = arc. AB + arc. BC.

Der Satz: „Das Verhältniss des Bogens MN zu seiner Sehne MN hat für $\lim |MN| = 0$ den Grenzwerth 1“, ergiebt sich für convexe Linien unmittelbar*), in der analytischen Geometrie aus der Formel

$$\lim_{\xi=+0} \frac{1}{\xi}\int_{x_0}^{x_0+\xi} \left|\sqrt{1+f'(x)^2}\right| dx = \left|\sqrt{1+[\lim_{\xi=+0} f'(x_0+\xi)]^2}\right|,$$

welche jedoch die Existenz und Endlichkeit des Grenzwerthes $\lim f'(x+\xi)$ für $\lim \xi = +0$ voraussetzt. Ein ähnlicher Satz besteht für $\lim \xi = -0$.**)

9. In ähnlicher Weise, wie das Problem der Rectification, sind auch die der Quadratur, Complanation und Cubirung zu behandeln. So folgt der Satz, dass die von der Abscissenaxe, der Curve $y = f(x)$ und zwei Ordinaten begrenzte Fläche eine Zahl sei, aus der Existenz des bestimmten Integrales $\int_a^{a'} f(x)\cdot dx$. Es ist befremdlich, dass in einem Werke, welches die Methoden der exacten Wissenschaften darstellt, umgekehrt die Existenz des bestimmten Integrales auf die der Flächenzahl gegründet ist***), während letztere ebenda früher als Ergebniss eines arithmetischen Verfahrens, nämlich eines Grenzüberganges, bezeichnet wird.

Die Quadratur einer von *einer convexen Linie* L begrenzten ebenen Fläche kann nach der in Nr. 2. gegebenen Definition durch folgende Bemerkungen erledigt werden. 1) Aus dem Hilfssatze in Nr. 3. folgt leicht, dass man für die Seiten s_r eines der Linie L eingeschriebenen Polygones $A_1 A_2 \cdots A_n$ eine Grenze δ angeben kann, sodass, wenn nur alle $s_r < \delta$, der Abstand aller Punkte des über jeder Sehne $A_{r-1}A_r$ stehenden Bogens von dieser Sehne kleiner ist als eine vor-

*) Vgl. Rouché etc. l. c. I, p. 184.

**) Beim Beweise dieses Satzes wird der Mittelwerthsatz gebraucht in folgender Form, die natürlich unter der allgemeinen des Hrn. Dini (Fondamenti p. 192 f.) enthalten ist, aber auch für sich abgeleitet werden kann: „Ist $f(x)$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ eindeutig, stetig und mit einem endlichem vorderen (hinteren) Differentialquotienten $\psi(x)$ begabt wenigstens für alle $a < x < b$ mit Ausnahme eines unendlichen Punktsystemes erster Art, so kann der Quotient $[f(b)-f(a)]:(b-a)$ nicht ausserhalb des von der oberen und unteren Grenze von $\psi(x)$ gebildeten Intervalles fallen."

***) Duhamel l. c. III, p. 348 und II, p. 406. Dabei wurde ausser Acht gelassen, dass bereits Cauchy (vgl. Moigno, C. intégral p. 4) den arithmetischen Beweis von der Existenz des bestimmten Integrales einer stetigen Function geliefert hatte, zu dem freilich noch das Theorem von der gleichmässigen Stetigkeit dieser Function hinzugefügt werden muss. — Es findet sich auch die Ansicht, dass die Flächenzahl ohne Grenzübergang denkbar sei, die Bogenzahl aber nicht, z. B. bei Cournot Théorie élém. des fonctions 2. éd. I, p. 296. So scheint es denn nicht überflüssig mit Hrn. de Tilly (l. c. p. 90) zu betonen, dass die Existenz der Flächenzahl nicht einmal durch den hier betrachteten Grenzübergang aus den ein- und umgeschriebenen Polygonen allein gesichert sei, sondern erst dann, wenn dieselbe Zahl auch als Grenzwerth der Summe der (geradlinig begrenzten) Theile erscheint, in welche die vorgelegte Fläche durch zwei Curvensysteme zerschnitten wird.

gegebene Zahl ε. 2) Bezeichnet F die Fläche eines beliebigen L eingeschriebenen Polygones von r Seiten und F' die eines ebensolchen, dessen Seiten aber nicht grösser sind als die von F, so hat man

$$(a) \qquad F' - F > -r \cdot \frac{S'H'}{2}$$

worin S' die grösste unter den Seiten von F', H' das Maximum des Abstandes der Punkte des über jeder dieser Seiten stehenden Theiles von L von ihr bezeichnet.

3) Nun construire man nach dem Verfahren von Duhamel Polygone, wodurch man einen Grenzwerth A für ihre Flächen $\mathfrak{A}_m$ findet: $\lim\limits_{m=+\infty} \mathfrak{A}_m = A$ und $\mathfrak{A}_m < A$.

4) Aus (a) folgt ferner, dass die Fläche f eines jeden L eingeschriebenen Polygones kleiner ist als A. Denn man hat bei genügend hohem m

$$F < \mathfrak{A}_m + \frac{r}{2} S'H' > A + \frac{r}{2} S'H',$$

und da $S'H'$ beliebig klein genommen werden kann, $F \leqq A$. Nach demselben Gesetze, durch welches die Polygone $\mathfrak{A}_m$ nach einander gebildet werden, findet man aber zu f ein Polygon, dessen Fläche F grösser ist als f; demnach ist $f < A$.

5) Andererseits ergiebt sich aus (a), falls die n Seiten s_r eines eingeschriebenen Polygones von der Fläche f_n, deren grösste s sein mag, sämmtlich kleiner sind, als irgend eine Seite eines Polygones von der Fläche $\mathfrak{A}_m$

$$(b) \qquad F_n - \mathfrak{A}_m > -\frac{m}{2} sh,$$

worin h gegenüber f_n dasselbe bedeutet, wie H' gegenüber F'. Ist nun ε eine gegebene positive Zahl und $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, so kann m so gross gewählt werden, dass $\mathfrak{A}_m > A - \varepsilon'$. Nimmt man dann s so klein an, dass $\frac{m}{2}\, sh < \varepsilon - \varepsilon'$, so folgt nach (b)

$$f_n > A - \varepsilon' - (\varepsilon - \varepsilon') \text{ d. i. } 0 < A - f_n < \varepsilon,$$

wenn nur alle s_r kleiner sind als die eben für s ermittelte Grenze. Somit hat man $\lim f_n = A$ für $\lim s_r = 0$.

---

2. Ueber die Differentialquotienten unendlicher Reihen.

Die Frage, ob der Differentialquotient einer unendlichen Reihe, deren Glieder eindeutige und stetige Functionen einer Veränderlichen x: $f_n(x)$ sind, — falls ein solcher überhaupt vorhanden ist — gleich ist der Summe der aus den Differentialquotienten $f_n'(x)$ gebildeten Reihe, dürfte vor Bolzano (vgl. ob. VI.) kaum eingehend erörtert worden sein. Duhamel stellte (Liouville J. T. XIX, Jahrgang 1854, p. 118) den Satz auf: Ist $\Sigma f_n(x)$ in einem Intervalle $(a - \delta_1,\ a + \delta_2)$ convergent und gleich $f(x)$, sind aber $f(a-0)$ und $f(a+0)$ von einander verschieden, während sonst $f(x)$ eine stetige Function von x bildet, so hat $\Sigma f_n'(a)$ eine unendliche Summe. Bertrand, der diesen Satz in seinen Traité du Calcul différentiel (p. 271) aufgenommen hat, sagt blos, $\Sigma f_n'(a)$ sei divergent. Mit Benutzung eines von Herrn

Darboux gegebenen Beispiels lässt sich darthun, dass dieser Satz nicht stichhaltig ist. Setzt man in der That

$$x \geq 0 \quad f_n(x) = e^{-n^2x^2} - e^{-(n+1)^2x^2}; \qquad x \leq 0 \quad f_n(x) = e^{-(n+1)^2x^2} - e^{-n^2x^2},$$
$$(n = 1, 2, \cdots),$$

so ist

$$x > 0 \quad f(x) = e^{-x^2} \quad f(0) = 0 \quad x < 0 \quad f(x) = -e^{-x^2},$$

also

$$f(-0) = -1, \qquad f(+0) = +1.$$

Gleichwohl findet man $\qquad \sum_1^\infty {}_n f'_n(0) = 0.$

Sicher ist der folgende Satz, den man entweder durch Umkehrung des Satzes über die Integration der unendlichen Reihen oder unmittelbar nach Herrn Dini (Fondamenti etc. p. 115) beweisen kann. „Wenn in dem Intervalle $(a - \delta_1, a + \delta_2)$ $\Sigma f_n(x)$ convergirt und ihre Glieder je einen endlichen Differentialquotienten besitzen, und wenn in demselben Intervalle $\Sigma f'_n(x)$ convergirt und zwar *in gleichem Grade*, denn hat auch die Summe $f(x)$ der Reihe $\Sigma f_n(x)$ für $x = a$ einen endlichen Differentialquotienten, welcher gleich ist der Summe der Reihe $\Sigma f'_n(a)$."

Wenn aber die Reihe $\Sigma f'_n(x)$ in dem Intervalle $(a - \delta_1, a + \delta_2)$ eine *stetige* Summe besitzt, so kann dieser Satz auch ausgedehnt werden auf den Fall, dass sie *nur im Allgemeinen gleichmässig* convergirt d. i. dass die gleichmässige Convergenz nur besteht, nachdem aus dem erwähnten Intervalle eine endliche Anzahl von Intervallen, deren jedes beliebig klein angenommen werden kann, ausgeschieden worden ist. (Diese Bezeichnung ist von Herrn Dini l. c. p. 102 entlehnt.) In der That ist eines derselben $(a - \gamma_1, a + \gamma_2)$, so hat man für die Werthe

$$a - \delta_1 \leq x \leq a - \gamma_1, \qquad f'(x) = \sum_1^\infty {}_n f'_n(x).$$

Und da

$$\lim f'(a - \xi) = \sum_1^\infty {}_n f'_n(a) \qquad \text{für} \qquad \lim \xi = +0,$$

so folgt wegen

$$\operatorname*{Lim}_{\xi=+0} \frac{f(a-\xi) - f(a)}{\xi} = \operatorname*{Lim}_{\xi=+0} f'(a - \xi)$$

(Dini l. c. p. 82), dass der hintere Differentialquotient von $f(x)$ für $x = a \quad \sum_1^\infty {}_n f'_n(a)$ sei. Dasselbe gilt bezüglich des vorderen Differentialquotienten von $f(x)$ für $x = a$.

Innsbruck, 9. Februar 1881.

Trois Notes sur la théorie des formes.

Par

M. Faà de Bruno à Turin.

I. Sur un théorème général dans la théorie des formes binaires.

Soit la forme

$$(1)\qquad f_2 = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \cdots + a^n y^n = (x + ay)^n$$

symboliquement; et supposons que par la substitution

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= pX + qY, \\ y &= p'X + q'Y, \end{aligned}$$

on ait

$$(3)\qquad F = A_0 X^n + n A_1 X^{n-1} Y + \cdots + A_n Y^n.$$

On sait qu'on a indifféremment

$$(4)\qquad \begin{aligned} A_i &= \frac{\pi(i)}{\pi(n)} \left(p \frac{d}{dq} + p' \frac{d}{dq'}\right)^{n-i} f(q, q'), \\ A_i &= \frac{\pi(n-i)}{\pi(n)} \left(q \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dp'}\right)^{i} f(p, p'). \end{aligned}$$

Si maintenant on pose

$$(5)\qquad \begin{aligned} \delta\ &= a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3} + \cdots + n a_{n-1} \frac{d}{da_n}, \\ \delta_1 &= n a_1 \frac{d}{da_0} + (n-1) a_2 \frac{d}{da_1} \qquad + \cdots + a_n \frac{d}{da_{n-1}} \end{aligned}$$

on aura d'après un théorème connu

$$\delta\varphi = 0, \quad \delta_1 \varphi = 0,$$

lorsque φ représente un Invariant de la forme. Comme ces symboles δ, δ_1 jouent un grand rôle dans la théorie des formes binaires nous nous sommes proposés d'examiner si l'on peut par des opérations effectuées à l'aide des seuls paramétres p, q, p', q', obtenir les mêmes resultats qu'avec δ, δ_1. Le Théorème suivant donne la solution de la question.

Théorème. — *Les opérations*

$$\delta \text{ et } p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq}, \quad \delta_1 \text{ et } p \frac{dp}{dp'} + q \frac{dq}{dq'}$$

sont équivalentes.

Démonstration. — On sait d'après Cayley que pour une forme binomiale donnée f, on a $\delta = y\delta x$, de sorte qu'en appliquant ce principe aux expressions données de A_i, il viendra

$$(6)\quad \begin{aligned} \delta A_i &= \frac{\pi(i)}{\pi(n)}\Big(p\frac{d}{dq} + p'\frac{d}{dq'}\Big)^{n-i} q'\frac{d}{dq} f(q, q'), \\ \delta A_i &= \frac{\pi(n-i)}{\pi(n)}\Big(q\frac{d}{dp} + q'\frac{d}{dp'}\Big)^{i} p'\frac{d}{dp} f(p, p'). \end{aligned}$$

Mais il faut bien noter ici qu'on ne peut pas changer indifférement l'ordre des différentiations, car les symboles $q'\frac{d}{dq}$, $p'\frac{d}{dp}$, n'ont de valeur que sur des formes binomiales de la forme f, et non sur d'autres. Or en se rappellant le principe connu, qu'en désignant par Ω une opération quelconque on a

$$(7)\qquad \Omega^k(UV) = (\Omega U + \Omega V)^k,$$

on aura, en posant $\Omega = p\frac{d}{dq} + p'\frac{d}{dq'}$, $U = q'f(q, q')$, $V = q'$,

$$\delta A_i = \frac{\pi(i)}{\pi(n)}\,[\Omega(n(q+aq')^{n-1}) + \Omega q']^{n-i},$$

ou

$$\delta A_i = \frac{\pi(i)}{\pi(n)}[q'\Omega^{n-i}(n(q+aq')^{n-i}) + (n-i)\Omega^{n-i-1}n(q+aq')^{n-1}\Omega q' + \text{etc.}].$$

Mais $\Omega q' = p'$; $\Omega^2 q' = 0$, etc.; par conséquent il viendra

$$\delta A_i = q'\frac{d}{dq}\Big\{\frac{\pi(i)}{\pi(n)}\Omega^{n-i}f(q, q') + (n-i)p'\Omega^{n-i-1}\Big\{n\frac{\pi(i)}{\pi(n)}(q+aq')^{n-1}\Big\}.$$

Or observons que la 2$^{\text{te}}$ partie, à savoir,

$$\frac{\pi(i)}{\pi(n)}p'(n-i)\Big(p\frac{d}{dq} + p'\frac{d}{dq'}\Big)^{n-i}\frac{d}{dq}f(q, q'),$$

peut être représentée comme le resultat de l'opération $p'\frac{d}{dp}$ sur l'expression de A_i. Ainsi on trouvera définitivement

$$(8)\qquad \delta A_i = \Big(p'\frac{d}{dp} + q'\frac{d}{dq}\Big)A_i, \quad \text{ou} \quad \delta = p'\frac{d}{dp} + q'\frac{d}{dq}.$$

Après avoir trouvé la formule par cette voie un peu pénible, il s'est présenté une autre démonstration bien plus simple que voici.

Observons d'abord qu'à l'aide de la forme symbolique (1) et de la substitution (2) on trouve symboliquement

$$(9)\qquad A_i = (p + ap')^{n-i}(q + aq')^i,$$

Ainsi le coefficient de a_l sera celui de a^l dans (9), ou

$$\frac{1}{\pi(l)}\Big(p'\frac{d}{dp} + q'\frac{d}{dq}\Big)^l p^{n-i}q^i,$$

et on pourra du premier terme déduire tous les autres. Par suite deux termes consécutifs de A_i, que nous appellerons $a_{l-1}B_{l-1}$, $a_l B_l$, pourront s'écrire

$$a_{l-1} B_{l-1} + \frac{1}{l} a_l \left(p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq}\right) B l_{-1}.$$

Or l'opération δ sur a_l de $a_l B_l$ fournira

$$\frac{l a_{l-1}}{l} \left(p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq}\right) A l_{-1} = (l a_{l-1} B_l)$$

qui entre précisement en δA_i, et puisque la même chose peut se dire de tous les autres termes, l'équation (10) sera démontrée.

Quant à δ_1 il suffit de remarquer qu'on peut partir de $p'^{n-i} q'^{i}$, c'est à dire, du dernier terme pour retrouver par l'opération $p \frac{d}{dp'} + q \frac{d}{dq'}$ tous les termes de A_i. Ainsi on aura évidemment

$$\delta_1 = p \frac{d}{dp'} + q \frac{d}{dq'}.$$

Les deux formules $p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq}$, $p \frac{d}{dp'} + q \frac{d}{dq'}$, en opérant sur $\Delta = pq' - p'q$, le module de la substitution, l'annullent. Ainsi, en admettant ce principe de leur équivalence à δ, δ_1, on pourra démontrer à l'instant que $\delta \varphi = 0$, $\delta_1 \varphi = 0$. Car il suffit d'avoir recours à la définition de l'Invariant

$$\Phi = \varphi \Delta^{\mu}$$

pour voir que

$$\delta \Phi = \delta \varphi \cdot \Delta^{\mu},$$
$$\Omega \Phi = \varphi \cdot \Omega \cdot \Delta^{\mu} = 0$$

en posant maintenant $\Omega = p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq}$.

Mais $\delta \Phi = \Omega \Phi$. Donc $\delta \varphi \cdot \Delta^{\mu} = 0$, et si Δ et différent de 0, ce qu'on peut toujours admettre, $\delta \varphi = 0$.

En général si δ est une des équations caractéristiques d'une forme quelconque à plusieurs variables homogènes, et si on a une substitution de la forme

$$\begin{aligned} x &= pX + qY + rZ + \cdots, \\ y &= p'X + q'Y + r'Z + \cdots, \\ z &= p''X + q''Y + r''Z + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

une des opérations Ω équivalente à δ sera une fonction des opérations $\Sigma p' \frac{d}{dp}$, $\Sigma p'' \frac{d}{dp}$, etc. pour lesquelles on pourra réduire à 0 le déterminant par lignes.

II. Sur le Jacobien des formes binaires.

A ma connaissance on n'a aucune démonstration directe du Théorème qui va suivre, sauf celle fondée sur l'emploi des formes symboliques fournie par Clebsch dans la *Theorie der binären Formen.* J'ai cru utile d'envisager la question sous le point de vue de l'analyse ordinaire. On verra par diverses exemples que par ce Théorème on peut déduire, comme d'une seule source, plusieurs relations connues et nouvelles entre les Covariants des formes.

Représentons par I le Jacobien et posons

$$I = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx}, & \frac{d\varphi}{dy} \\ \frac{d\psi}{dx}, & \frac{d\psi}{dy} \end{vmatrix},$$

φ, ψ étant deux fonctions homogènes de x, y, de m^e, n^e degré. On sait par le théorème d'Euler que

$$x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy} = m\varphi, \quad x\frac{d\psi}{dx} + y\frac{d\psi}{dy} = n\psi.$$

Par conséquent on aura encore

$$mnI = \begin{vmatrix} \delta_x\left(x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy}\right), & \delta_y\left(x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy}\right) \\ \delta_x\left(x\frac{d\psi}{dx} + y\frac{d\psi}{dy}\right), & \delta_y\left(x\frac{d\psi}{dx} + y\frac{d\psi}{dy}\right) \end{vmatrix}.$$

En développant on trouve

$$mnI = x^2\begin{vmatrix} \frac{d^2\varphi}{dx} & \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} & \frac{d^2\psi}{dx\,dy} \end{vmatrix} + xy\begin{vmatrix} \frac{d^2\varphi}{dx} & \frac{d^2\varphi}{dy^2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} & \frac{d^2\psi}{dy^2} \end{vmatrix} + y^2\begin{vmatrix} \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} & \frac{d^2\varphi}{dy^2} \\ \frac{d^2\psi}{dx\,dy} & \frac{d^2\psi}{dy^2} \end{vmatrix} + I$$

$$+ x\begin{vmatrix} \frac{d^2\varphi}{dx^2} & \frac{d\varphi}{dy} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} & \frac{d\psi}{dy} \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} \\ \frac{d\psi}{dx} & \frac{d^2\psi}{dx\,dy} \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d^2\varphi}{dy^2} \\ \frac{d\psi}{dx} & \frac{d^2\psi}{dy^2} \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} & \frac{d\varphi}{dy} \\ \frac{d^2\psi}{dx\,dy} & \frac{d\psi}{dy} \end{vmatrix}.$$

Ce qui multiplie x et y n'est autre chose, en vertu également du Théorème de Euler, que

$$x\frac{dI}{dx} + y\frac{dI}{dy} = (m+n-2)I.$$

Ainsi il viendra

$$\begin{vmatrix} y^2 & -xy & x^2 \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} & \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} & \frac{d^2\varphi}{dy^2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} & \frac{d^2\psi}{dx\,dy} & \frac{d^2\psi}{dy^2} \end{vmatrix} = (m-1)(n-1)I.$$

Par suite, en employant un artifice connu, il viendra

$$\begin{vmatrix} y^2 & -xy^2 & x^2 \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} & \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} & \frac{d^2\varphi}{dy^2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} & \frac{d^2\psi}{dx\,dy} & \frac{d^2\psi}{dy^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x^2 & 2xy & y^2 \\ \frac{d^2\varphi}{dy^2} & -2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} & \frac{d^2\varphi}{dx^2} \\ \frac{d^2\psi}{dy^2} & -2\frac{d^2\psi}{dx\,dy} & \frac{d^2\psi}{dx^2} \end{vmatrix} = 2(m-1)^2(n-1)^2 I^2;$$

d'où il suit qu'en multipliant et en posant

$$\Phi = x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2xy \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + y^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2},$$

$$\Psi = x^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2xy \frac{d^2\psi}{dx\,dy} + y^2 \frac{d^2\psi}{dy^2},$$

(1) $$H = \frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)^2,$$

$$H' = \frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^2\psi}{dy^2} - \left(\frac{d^2\psi}{dx\,dy}\right)^2,$$

$$H'' = \frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{d^2\psi}{dy^2} - 2\frac{d^2\psi}{dx\,dy}\frac{d^2\psi}{dx\,dy} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\frac{d^2\psi}{dx^2}$$

il viendra

$$\begin{vmatrix} 0 & \Phi & \Psi \\ \Phi & 2H & H'' \\ \Psi & H'' & 2H' \end{vmatrix} = 2(m-1)^2(n-1)^2 I^2;$$

ou bien

(2) $$(m-1)^2(n-1)^2 I^2 = (\Phi^2 H' - \Phi\Psi H'' + \Psi^2 H).$$

Mais si l'on observe que $I = mnJ$, J étant le Jacobien dépouillé de ses coefficients numériques, $\Phi = m(m-1)\varphi$, $\Psi = n(n-1)\psi$, et que pareillement

$H = m^2(m-1)^2 H_\varphi$, $H' = n^2(n-1)^2 H_\psi$, $H'' = mn(m-1)(n-1)H_{\varphi\psi}$, H_φ, H_ψ, $H_{\varphi\psi}$ étant les covariants et le coefficient simultané de φ, ψ, il viendra

(3) $$J = -[\varphi^2 H_\psi - \varphi\psi H_{\varphi\psi} + \psi^2 H_\varphi]$$

formule qui aura lieu toutes les fois que φ, ψ auront la forme binomiale.

Exemple 1. Soit la forme cubique

$$\varphi = (a, b, c, d)(x, y)^3$$

dont nous appellerons C_2, C_3 les covariants quadratiques et cubiques. On sait que le covariant de C_2 est le Hessien de φ, et que le Jacobien de φ et C_2 est précisement C_3; ainsi il viendra en posant dans la formule

$$\Psi = C_2,\ H_\varphi = c_2,\ H'_\psi = -\Delta,\ H''_{\varphi\psi} =$$

$$2^2 \cdot 1^2 \cdot 3^2 J^2 = 36\varphi^2\Delta - 4 \cdot 36 c_2^3$$

ou

$$C_3^2 = \varphi^2\Delta - 4C_2^3$$

en admettant que

$$\Delta = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)^2.$$

Exemple 2. Posons

$$\varphi = x^4 + 6\gamma x^2y^2 + y^4 = u, \quad m = 4,$$
$$\psi = \gamma x^4 + (1-3\gamma^2)x^2y^2 + \gamma y^4 = v, \quad n = 4.$$

v représentera le covariant de 4e ordre de la quartique reduite à sa forme canonique dont elle sera l'Hessien. Mais, en appellant Θ le covariant de 6e ordre, et en posant dans ce cas

$$(m-1)^2(n-1)^2 = 81, \quad I = 8J = 8\Theta, \quad H_\varphi = 12^2\psi, \quad \Phi = 12\varphi,$$
$$\Psi = 12\psi$$

et H' désignant l'Hessien de l'Hessien (v. notre Théorie des formes binaires p. 242) $= 36I_3u - 12I_2v$

$$H'' = 24(1+3\gamma^2)u = 24I_2u$$

il viendra

$$81\cdot 8^2\cdot\Theta^2 = -\left\{12^2\varphi^2(36I_3u - 12I_2v) - 144\varphi\psi\cdot 24I_2u + 12^2v^2\,12^2v\right\},$$
$$36\Theta = -\left\{12u^2(3I_3u - I_2v) - 24u^2vI_2 + 12^2v^3\right\},$$
$$\Theta^2 = -\left\{I_3u^3 - I_2u^2v + 4v^3\right\}$$

qui est la relation connue entre les covariants de la quartique.

Exemple 3. Soient $\varphi = C_{2,2}$, $\varphi = C_{3,3}$ *) les covariants de 2e ordre et de 2e dégré, de 3e ordre et de 3e dégré de la quintique, que nous supposerons représentée sous la forme canonique

$$ax^5 + by^5 + cz^5, \qquad x + y + z = 0.$$

On aura alors

$$\varphi = -C_{2,2} = -\left\{acx^2 + (ac+bc+ab)xy + bcxy^2\right\},$$
$$\psi = C_{3,3} = abcxy(x+y)$$

et le Jacobien I sera

$$4C_{1,5} = 4abc\left\{(bc - ab)x + (ac - ab)y\right\}.$$

On trouvera l'Hessien de

$$C_{3,3} = -2C_{6,2} = -4a^2b^2c^2(x^2 + y^2 + xy)$$

et l'Hessien de $\varphi = -I_4$.

Par suite l'équation deviendra, toute reduction faite,

$$C_{3,5}^2 = 2C_{2,2}^2C_{6,2} + 12C_{2,2}C_{3,3}C_{1,5} + 9C_{3,3}^2I_4,$$

ce qui fournit une relation nouvelle entre les covariants fondamentaux.

*) On sousentend que $C_{h,i}$ désigne un covariant d'ordre h et de degré i.

Exemple 4. Pour la même forme quintique qu'auparavant supposons:

$$\varphi = C_{2,2} = -\left\{acx^2 + (ac + bc - ab)xy + bcy^2\right\},$$
$$\psi = C_{6,2} = 2a^2b^2c^2(x^2 + xy + y^2).$$

On aura

$$H = -I_4 = -\left\{a^2b^2 + bc^2 + a^2c^2 - 2ab^2c^2(a + b + c)\right\},$$
$$H' = 12I_{12} = 12a^4b^4c^4; \quad H'' = 4, \quad I_8 = 4a^2b^2c^2(ab + ac + bc).$$

Cela posé l'équation (2) nous fournira cette identité algébrique remarquable

$$\left\{ab - bc)x^2 + 2xy(ac - bc) + (ac - ab)y^2\right\}^2$$
$$= -3[acx^2 + (ac + bc - ab)xy + bcy^2$$
$$+ 2(ab + ac + bc)[acx^2 + (ac + bc + ab)xy + bcy^2](x^2 + xy + y^2)$$
$$+ (x^2 + xy + y^2)^2[a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc(a + b + c)].$$

III. Théorème général sur les Déterminants fonctionnels.

Théorème. — Soit en général D le déterminant

$$\begin{vmatrix} P, & \Delta P, & \Delta^2 P, \cdots \\ Q, & \Delta Q, & \Delta^2 Q, \cdots \\ R, & \Delta R, & \Delta^2 R, \cdots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix}$$

où chaque colonne est dérivée de la première par l'opération Δ quelconque repetée une, deux fois etc. de suite, et en sorte que la dernière colonne ne renferme que des constantes par rapport à Δ, on aura:

(1) $$\Delta D = 0$$

Exemple 1. Soit

$$\Delta = \frac{d}{dx} + \frac{d}{dy} + \frac{d}{dz};$$

on aura, en posant

$$D = \begin{vmatrix} xy & y + z & 1 \\ yz & y + z & 1 \\ zx & z + x & 1 \end{vmatrix}, \qquad D' = \begin{vmatrix} \frac{1}{x+y} & \frac{1}{(x+y)^2} & \frac{1}{(x+y)^3} \\ \frac{1}{y+z} & \frac{1}{(y+z)^2} & \frac{1}{(y+z)^3} \\ \frac{1}{z+x} & \frac{1}{(z+x)^2} & \frac{1}{(z+x)^3} \end{vmatrix},$$

$$\Delta D = 0, \qquad \Delta D' = 0.$$

Exemple 2. Soit
$$\Delta = \frac{d}{dx} + \frac{d}{dy} + \frac{d}{dz} + \frac{d}{dt}$$
$$D = \begin{vmatrix} xyz & xy+yz+zx, & x+y+z, & 1 \\ yzt & yz+zt+ty, & y+z+t, & 1 \\ ztx & zt+xt+xz, & z+t+x, & 1 \\ txy & tx+ty+xy, & t+x+y, & 1 \end{vmatrix} {}^{*)},$$
il viendra pareillement $\Delta D = 0$.

Exemple 3. Au moyen de la propriété, que nous avons exposée dans un article précédent, dont jouissent les coefficients A d'une forme binaire transformée, on peut avec les coefficients, fonctions de p, q, p', q', de la substitution
$$x = pX + qY,$$
$$y = p'X + q'Y$$
former un déterminant qui jouit de cette propriété. Ainsi soit ce déterminant
$$\begin{vmatrix} p^n, & p^{n-1}p', \ldots\ldots\ldots & \ldots p'^n \\ p^{n-1}q, & p^{n-1}q' + (n-1)p^{n-2}p'q, & \ldots p'^{n-1}q' \\ p^{n-2}q^2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots p'^{n-2}q'^2 \\ \vdots & & \\ pq^{n-1}, & q^{n-1}p' + (n-1)q^{n-2}q'p, & \ldots p'q'^{n-1} \\ q^n, & q^{n-1}q' \ldots\ldots\ldots & \ldots q^n \end{vmatrix}$$
où chaque colonne en allant de gauche à droite et réciproquement, ou chaque ligne de haut en bas et réciproquement, resulte des 4 opérations
$$p'\frac{d}{dp} + q'\frac{d}{dq}, \; p\frac{d}{dp'} + q\frac{d}{dq'}; \;\; q\frac{d}{dp} + q'\frac{d}{dp'}, \; p\frac{d}{dq} + p'\frac{d}{dq'}.$$
Ainsi on aura d'après le théorème général
$$\left\{\begin{array}{ll} 1 & p'\dfrac{d\varphi}{dp} + q'\dfrac{d\varphi}{dq} = 0, \\ 2 & p\dfrac{d\varphi}{dp'} + q\dfrac{d\varphi}{dq'} = 0, \\ 3 & p\dfrac{d\varphi}{dq} + p'\dfrac{d\varphi}{dq'} = 0, \\ 4 & q\dfrac{d\varphi}{dp} + q'\dfrac{d\varphi}{dp'} = 0. \end{array}\right.$$

*) Tous ces déterminants peuvent facilement se réduire; et on aura par exemple,
$$D' = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)^3(y+z)^3(z+x)^3}.$$
La démonstration est évidente, car l'opération Δ rendra toujours égales deux colonnes.

En combinant ensemble la 1e et la 3e et la 4e on déduit

$$p\,\frac{d\varphi}{dp}-q'\,\frac{d\varphi}{dq'}=0,$$

$$q\,\frac{d\varphi}{dq}-p'\,\frac{d\varphi}{dp'}=0,$$

d'où

$$p\,\frac{d\varphi}{dp}+q\,\frac{d\varphi}{dq}-p'\,\frac{d\varphi}{dp'}-q'\,\frac{d\varphi}{dq'}=0.$$

Or comme φ est évidemment une fonction homogène par rapport à p, q, p', q', en appellant μ son dégré, on aura:

$$p\,\frac{d\varphi}{dp}+p'\,\frac{d\varphi}{dp'}+q\,\frac{d\varphi}{dq}+q'\,\frac{d\varphi}{dq'}=\mu\varphi.$$

En combinant ensemble les deux dernières équations, on aura

$$p\,\frac{d\varphi}{dp}+p'\,\frac{d\varphi}{dp'}=\frac{\mu}{2}\,\varphi.$$

Mais l'équation (4) nous fournit

$$q\,\frac{d\varphi}{dp}+q'\,\frac{d\varphi}{dp'}=0;$$

d'où en éliminant $\frac{d\varphi}{dp'}$, il viendra

$$(pq'-p'q)\,\frac{d\varphi}{dp'}=\frac{\mu}{2}\,q'\varphi;$$

et par suite

$$\varphi=\lambda(pq'-p'q)^{\frac{\mu}{2}}+C.$$

Et comme il sera facile de vérifier que $C=0$, $\lambda=1$, $\mu=n(n+1)$, il viendra enfin

$$\varphi=(pq'-p'q)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Turin, Janvier 1881.

Vollständige Durchführung einer isogonalen Verwandtschaft, die durch eine gebrochene Function zweiten Grades repräsentirt wird.

Von

Gustav Holzmüller in Hagen.

(Mit 4 lithographirten Tafeln.)

Ueber die geometrischen Beziehungen, welche bei der Abbildung mittels ganzer und gebrochener rationaler Functionen complexen Arguments auftreten, veröffentlichte der Verfasser im Programm 1880 der Kgl. Gewerbeschule zu Hagen einige grundlegende Sätze, ohne jedoch die Methode für gebrochene Functionen durch ein Beispiel zu erläutern. In Folgendem soll dies nachgeholt werden, und zwar an der durch die Function

$$Z = \frac{z^2+1}{2z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

und ihre Umkehrung

$$z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$$

repräsentirten isogonalen Verwandtschaft.

Ueber dieselbe ist bereits bekannt, *dass dem Büschel der Geraden durch den Nullpunkt der z-Ebene ein System confocaler Hyperbeln mit den Brennpunkten ± 1, den concentrischen Orthogonalkreisen die Orthogonalschaar confocaler Ellipsen entspricht, während das Kreisbüschel durch die Punkte ± 1 der z-Ebene nebst seiner Orthogonalschaar in ein ebensolches System übergeht*, nur mit dem Unterschiede, dass die Schnittwinkel des Kreisbüschels der Z-Ebene doppelt so gross sind, als die entsprechenden der andern Ebene, eine Singularität, die sich dadurch erklärt, dass die Punkte ± 1 der Z-Ebene sich als Windungspunkte erster Ordnung darstellen. Der erstere dieser Sätze folgt sofort aus der bekannten Siebeck'schen Abhandlung*), wo im § 16. die Abbildung $Z = \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{zi} + \frac{1}{e^{zi}}\right)$, die mit der obigen einfach zusammenhängt, kurz behandelt wird. Beide wurden im Jahre 1867 von Herrn Professor H. A. Schwarz in den Vorlesungen mitgetheilt.

Hier handelt es sich nun darum, die charakteristischen gegenseitigen Beziehungen beider Ebenen nach der Methode der Vorarbeit

---

*) Siebeck: „Ueber graphische Darstellung imaginärer Functionen." Crelle's Journal, Bd. 55. Die erste Einführung der obigen Substitution findet sich aber im „Handbuch der Kugelfunctionen" von Herrn E. Heine.

abzuleiten, wobei sich die genannten Sätze als Specialfälle allgemeinerer ergeben werden, aus denen sich noch andere einfache und nicht uninteressante Beziehungen folgern lassen.

Einige Rechnungen, deren Resultat unmittelbar aus der Vorarbeit geschlossen werden konnte, sind in ihrem Gange wenigstens soweit angedeutet worden, dass auch Fernerstehenden das Verständniss ermöglicht ist.

Der Grund für die Wahl des obigen Beispiels liegt in dem besonderen Interesse der elliptischen Coordinaten, in der Wichtigkeit unserer Substitution für verschiedene Probleme der Analysis und in dem Zusammenhange mit der früher vom Verfasser dargestellten lemniscatischen Geometrie*). Jede andere gebrochene Function, deren Grad den vierten nicht übersteigt, hätte sich ebenso bequem behandeln lassen.

§ 1.

Untersuchung der Curvensysteme, die den Strahlenbüscheln und Kreisschaaren der Z-Ebene und den isogonalen Trajectorien dieser Systeme entsprechen.

Jedem Punkte $a+bi$ der Z-Ebene entsprechen die beiden Punkte $a+bi \pm \sqrt{(a+bi)^2-1}$ der anderen, welche sich nach den Regeln, die z. B. in den Anfangsparagraphen der Elemente der Functionentheorie von Durège dargestellt sind, leicht elementar construiren lassen. Einfachere Methoden werden sich später ergeben. Da übrigens

$$\frac{1}{a+bi+\sqrt{(a+bi)^2-1}} = a+bi-\sqrt{(a+bi)^2-1},$$

so stehen beide Punkte der z-Ebene in einfacher geometrischer Beziehung. Spiegelt man nämlich den einen mittels reciproker Radii vectores gegen den Einheitskreis, und klappt man dann das Gebilde um die reelle Axe, so findet man den andern Punkt. Man kann also festsetzen, *dass das obere Blatt der Z-Ebene dem Aeusseren, das untere dem Inneren des Einheitskreises entspricht.* Letzterer ist die Abbildung des geradlinigen Verzweigungsschnittes von $+1$ nach -1, und diese beiden Punkte sind eben die Verzweigungspunkte der Z-Ebene, die, wie schon erwähnt, sich als Windungspunkte 1ter Ordnung repräsentiren. Sie entsprechen den Punkten ± 1 der z-Ebene, für welche der Differentialquotient von $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ verschwindet und zugleich die Function eindeutig wird.

*) „Lemniscatische Geometrie etc.“ Zeitschrift für Math. u. Phys. XXI, pag. 325 etc. Vergl. auch: „Beiträge zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften“, dieselbe Zeitschr. XVIII, pag. 228 etc.

Die Abbildung jeder Curve der Z-Ebene lässt sich also elementar durchführen, und zwar kann man den Theil des neuen Gebildes, welcher ausserhalb des Einheitskreises liegt, durch Reciprocität und Symmetrie in den innerhalb liegenden Theil überführen.

Aus

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

folgt nun

$$(1)\qquad X + Yi - (a + bi) = \frac{(x + yi)^2 + 1}{2(x + yi)} - (a + bi)$$
$$= \frac{[x + yi - (\alpha_1 + \beta_1 i)]\cdot[x + yi - (\alpha_2 + \beta_2 i)]}{2(x + yi)}$$

und

$$(2)\qquad X - Yi - (a - bi) = \frac{(x - yi)^2 + 1}{2(x - yi)} - (a - bi)$$
$$= \frac{[x - yi - (\alpha_1 - \beta_1 i)]\cdot[x - yi - (\alpha_2 - \beta_2 i)]}{2(x - yi)},$$

wo $\alpha_1 + \beta_1 i$ und $\alpha_2 + \beta_2 i$ die beiden obigen Werthe von

$$a + bi \pm \sqrt{(a + bi)^2 - 1}$$

bedeuten, die sich nach Trennung des Reellen und Imaginären folgendermassen schreiben lassen:

$$a \pm \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4a^2b^2} + (a^2 - b^2 - 1)}{2}}$$
$$+ i\left[b \pm \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4a^2b^2} - (a^2 - b^2 - 1)}{2}}\right].$$

Multiplication der Gleichungen (1) und (2) giebt nun

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = \frac{[(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2]\cdot[(x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2]}{4(x^2 + y^2)},$$

oder

$$R = \frac{p\cdot q}{2r},$$

wobei R die Entfernung des Punktes $X + Yi$ von $(a + bi)$ bedeutet, während p, q, r die Entfernungen des Punktes $x + yi$ von $\alpha_1 + \beta_1 i$, $\alpha_2 + \beta_2 i$ und Null sind.

Dividirt man hingegen Gleichung (1) durch Gleichung (2) und logarithmirt man beiderseits unter Zufügung des Factors $\frac{1}{2i}$, so erhält man

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{X + Yi - (a + bi)}{X - Yi - (a - bi)}$$
$$= \frac{1}{2i}\lg\frac{x + yi - (\alpha_1 + \beta_1 i)}{x - yi - (\alpha_1 - \beta_1 i)} + \frac{1}{2i}\lg\frac{x + yi - (\alpha_2 + \beta_2 i)}{x - yi - (\alpha_2 - \beta_2 i)} - \frac{1}{2i}\lg\frac{x + yi}{x - yi},$$

oder, was nach bekannter Formel dasselbe ist:

$$\operatorname{arc\,tan} \frac{Y-b}{X-a} = \operatorname{arc\,tan} \frac{y-\beta_1}{x-\alpha_1} + \operatorname{arc\,tan} \frac{y-\beta_2}{x-\alpha_2} - \operatorname{arc\,tan} \frac{y}{x},$$

oder

$$\Theta = \varphi + \chi - \vartheta,$$

wobei die neuen Buchstaben die Richtungswinkel der Radii vectores R, p, q und r gegen die reelle Axe bedeuten.

So ergiebt sich der Satz:

Der concentrischen Kreisschaar $R = c$ um den Punkt $a + bi$ der Z-Ebene und dem Strahlenbüschel $\Theta = \gamma$ durch diesen Punkt entsprechen die Curvensysteme

$$\frac{p \cdot q}{2r} = c \tag{3}$$

$$\varphi + \chi - \vartheta = \gamma, \tag{4}$$

deren Radii vectores von den Punkten $a + bi \pm \sqrt{(a+bi)^2 - 1}$ und Null ausgehen.

Aus der Conformität der Abbildung folgt zunächst, dass, da das Strahlenbüschel $\Theta = \gamma$ und die Kreisschaar $R = c$ orthogonal sind, sich auch die Systeme (3) und (4) rechtwinklig schneiden. Später wird sich zeigen, *dass letztere sich stets als Reciproke eines Lemniscatenbüschels und der zugehörigen Orthogonalschaar von Lemniscaten betrachten lassen, wobei einer der Kreise um die Punkte ± 1 mit dem Radius $\sqrt{2}$ als spiegelnde Curve auftritt.*

Die Fundamentaleigenschaft der Curven (3), dass das Rechteck der Radii vectores p und q gleich dem Rechteck aus dem Radius vector r und dem Doppelten des Parameters c ist, giebt zu einer neuen Construction derselben Anlass:

Man denke sich um $\alpha_1 + \beta_1 i$ und $\alpha_2 + \beta_2 i$ als Brennpunkte die confocale Lemniscatenschaar $p \cdot q = x^2$ gezeichnet, bestimme r für jede Lemniscate gemäss der Gleichung $r = \frac{x^2}{2c}$ auf geometrischem Wege und schlage damit um den Nullpunkt einen Kreis. Die Schnittpunkte desselben mit der entsprechenden Lemniscate genügen der Gleichung (3), gehören also der gesuchten Curve an.

Es lässt sich aber auch folgender Weg einschlagen: Man zeichne, von $\alpha_1 + \beta_1 i$ und Null ausgehend, die Kreisschaar $\frac{p}{r} = \lambda$, wo λ sich geometrisch aus der Proportion $p : r = \lambda : 1$ ergiebt, und schlage um $\alpha_2 + \beta_2 i$ einen Kreis mit dem Radius $q = \frac{2c}{\lambda}$, wo also q gemäss der Proportion $q : 1 = 2c : \lambda$ zu bestimmen ist. Die Schnittpunkte jedes Kreises q mit dem entsprechenden der Kreisschaar gehören der gesuchten Curve an.

Aehnlich lässt sich die Eigenschaft (4) der andern Curvengruppe geometrisch deuten und zur Construction verwenden. Man zeichne durch $\alpha_1 + \beta_1 i$ und $\alpha_2 + \beta_2 i$ das System gleichseitiger Hyperbeln $\varphi + \chi = \sigma$, bestimme für jedes σ die Gerade $\vartheta = \sigma - \gamma$, welche vom Nullpunkte ausgeht. Letztere schneidet die entsprechende Hyperbel in Punkten der gesuchten Curve.

Oder: Man zeichne durch $\alpha_1 + \beta_1 i$ und Null das Kreisbüschel $\varphi - \vartheta = \delta$, bestimme für jedes δ den Winkel $\chi = \gamma - \delta$ und ziehe von $\alpha_2 + \beta_2 i$ aus eine Gerade mit letzterer Neigung. Die Durchschnitte derselben mit dem entsprechenden Individuum des Kreisbüschels geben Punkte der gesuchten Curve.

Die Curven (3) und (4) haben nach Obigem die Eigenschaft, dass sich der innerhalb des Einheitskreises liegende Theil durch Reciprocität gegen denselben und durch Symmetrie aus dem ausserhalb liegenden Theile erzeugen lässt. Für die Curven (4) folgt daraus, dass sie sowohl den unendlichen als den Nullpunkt passiren und dass jede eine Asymptote besitzt, welche, abgesehen vom Vorzeichen, dieselbe Neigung hat, wie ihre Tangente im Nullpunkte. Liegen ferner $\alpha_1 + \beta_1 i$ und $\alpha_2 + \beta_2 i$ auf der reellen oder imaginären Axe, so treten für beide Curvengruppen noch gewisse Symmetrieverhältnisse auf.

Charakteristisch für die Curven (4) ist Folgendes: Die Gerade Linie hat in allen Punkten dieselbe Neigung $\vartheta = \gamma$. Folglich: *Die Gleichung* $\varphi + \chi - \vartheta = \gamma$ *bleibt für jede Curve* (4) *vollständig unverändert, wenn man statt* $\alpha_1 + \beta_1 i$ *und* $\alpha_2 + \beta_2 i$ *einen beliebigen ihrer Punkte ausserhalb des Einheitskreises und den nach obigem Gesetze ihm entsprechenden innerhalb desselben zum Ausgangspunkte der Radii vectores macht**). Das Entsprechende für die Curven (3) wird später angegeben.

Es lässt sich ferner leicht zeigen, *dass die Curven* (3) *und* (4) *Isothermenschaaren in dem von Lamé definirten Sinne sind*, d. h. dass sie sich in einer reellen Form $u = c$ in gewöhnlichen Coordinaten schreiben lassen, deren linke Seite der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt. Da nämlich unsere Curven durch die Abbildung $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ in das Strahlenbüschel durch $a + bi$ und die orthogonale Kreisschaar verwandelt werden, so gehen sie durch die Abbildung

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - (a + b\,i)$$

in Strahlen durch Null und concentrische Kreise um Null über, folglich durch die Abbildung

---

*) Vergl. Darboux: „Sur une classe remarquable de courbes etc.“ Mém. de Bordeaux, VIII, IX.

$$Z = \lg\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - (a + bi)\right]$$

in Parallelenschaaren zur reellen und imaginären Axe. Trennt man aber in letzterer Function das Reelle vom Imaginären, so ergiebt sich

$$X + Yi = \lg\left[\frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)} - a + i\left(\frac{y(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} - b\right)\right] = \lg(\xi + \eta i)$$
$$= \frac{1}{2}\lg(\xi^2 + \eta^2) + i \operatorname{arc\,tan}\frac{\eta}{\xi},$$

wobei von dem periodischen Zusatze abgesehen ist. Setzt man jetzt die reellen resp. imaginären Theile gleich, so ergiebt sich, dass den Geraden $X = a_1$ der neuen Z-Ebene die Curven

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\lg\left[\left(\frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)} - a\right)^2 + \left(\frac{y(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} - b\right)^2\right] = a_1,$$

den Geraden $Y = b_1$ die Curven

$$(6)\qquad \operatorname{arc\,tan}\frac{y(x^2+y^2-1) - 2b(x^2+y^2)}{x(x^2+y^2+1) - 2a(x^2+y^2)} = b_1$$

entsprechen. Dies sind neue Gleichungen für die Curven (3) und (4), deren linke Seiten deshalb der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügen, weil jede der reelle resp. der von i befreite imaginäre Theil einer Function complexen Arguments ist.

Bei der Auswerthung zeigt sich, dass die Curvenschaar (3) resp. (5) vom 4ten Grade, die Gruppe (4) resp. (6) vom 3ten Grade ist. Für das Folgende wird es genügen, beide als *„Isothermen 4ten resp. 3ten Grades der z-Ebene“* zu bezeichnen, obgleich es dort noch andere dieser Art giebt.

In Figur 1 ist beispielsweise links das Strahlenbüschel durch den Nullpunkt der Z-Ebene nebst orthogonaler Kreisschaar dargestellt, während sich rechts das Isothermenbüschel 3ten Grades durch $\pm i$, 0 und ∞ nebst orthogonaler Isothermenschaar 4ten Grades befindet. Durch Buchstaben ist das gegenseitige Entsprechen der Flächentheile erläutert, besonders die Zweideutigkeit tritt klar hervor. Die Schraffirung der Fläche des Einheitskreises soll andeuten, dass dieser Theil der z-Ebene dem zweiten Riemann'schen Blatte der Z-Ebene entspricht. Auch das Reciprocitätsverhältniss der gleichnamigen Felder der z-Ebene ist leicht zu erkennen. In derselben befinden sich ausser dem Einheitskreise noch zwei andere durch ± 1 gehende Kreise, die dem Einheitskreise der Z-Ebene entsprechen. Da gegen letzteren Reciprocität des Strahlenbüschels in Bezug auf sich selbst und ausserdem Reciprocität je zweier Kreise vorhanden ist, so folgt, dass in diesem Falle die Isothermen 3ten Grades in Bezug auf diese Kreise sich selbst reciprok sind, und dass von je zwei Individuen der Schaar 4ten Grades dasselbe gilt. Solche Kreise sind übrigens stets vorhanden, wenn das Centrum des Strahlenbüschels der Z-Ebene auf der imaginären Axe, oder ausserhalb ± 1 auf der reellen liegt, und zwar gehen im ersteren Falle die sich dann rechtwinklig schneidenden Kreise durch ± 1, während im andern Falle nur einer vorhanden ist, der das Kreisbüschel durch ± 1 rechtwinklig schneidet. Zu erwähnen ist noch, dass die dargestellten Curven 3ten Grades aus einem einzigen Zuge bestehen, die Curven 4ten Grades im Allgemeinen aus getrennten Ovalen. Für die innerhalb der beiden Kreise um $\pm i$ liegenden Curven findet hier Symmetrie der Ovale statt: für die ausserhalb liegenden befindet sich der zweite Theil innerhalb des linsenförmigen Flächenstücks und ist das reciproke Gebilde des ersteren gegen den Einheitskreis.

In beiden Theilen der Figur 1 ist diejenige Aufeinanderfolge der Curven gewählt, welche die Eintheilung in rechtwinklige Flächenstücke giebt, die mit zunehmender Kleinheit der Quadratform zustreben. Diese Eintheilung wird unten noch näher erläutert.

Durch die Zeichnung sind übrigens einige isothermische Probleme geometrisch gelöst.

Denkt man sich z. B. die durch zwei Kreisbogen gebildete Sichel $+1$, Y, -1, Y, längs des Randes auf constanter Temperatur gehalten, die nächste Umgebung des Punktes i auf anderer constanter Temperatur, so tritt schliesslich ein stationärer Wärmezustand in der Ebene ein. Für denselben sind die innerhalb der Sichel befindlichen Curven 4ten Grades Isothermen.

Ein Gleiches gilt von dem linsenförmigen Flächenstücke $+1$, Y_1, -1, Y_2 und dem Nullpunkte; Entsprechendes für den Aussenraum der beiden grösseren Kreise und den unendlichen Bereich, für welchen letzteren man auch einen sehr grossen Kreis mit dem Nullpunkte als Centrum setzen kann.

Endlich ist noch folgende Deutung zuzulassen: die Punkte $\pm i$ mögen auf gleicher constanter Temperatur gehalten werden, der Punkt Null und der den unendlichen Bereich vertretende sehr grosse Kreis um den Nullpunkt auf anderer constanter Temperatur. Für den stationären Zustand sind dann sämmtliche Curven 4ten Grades der Zeichnung Isothermen. Der gegenseitige Zusammenhang derselben kann durch folgende kinematische Betrachtungsweise lebendig illustrirt werden. Man denke sich in der Z-Ebene concentrische Kreise aus dem Nullpunkte hervorquellend und sich vergrössernd, ähnlich, wie sie auf ruhiger Wasserfläche beim Aufschlagen eines Steines beobachtet werden. Was entspricht dieser Bewegung in der z-Ebene? Aus den Punkten $\pm i$ quellen kleine Kreise hervor, die jedoch bald andere Gestalt annehmen und durch alle Phasen hindurch sich soweit vergrössern, bis sie in den Punkten ± 1 sich treffen, wobei die Kreisgestalt in gewisser Weise wieder erscheint. Ein Theil des ersten Ovals vereinigt sich mit einem des andern zu einer die Kreise umschliessenden Curve, welche sich bei weiterer Vergrösserung der Kreisgestalt wieder nähert, die abgelösten Reste vereinigen sich innerhalb der Linse zu Ovalen, die kleiner und kleiner werdend sich der Kreisgestalt nähern und schliesslich im Nullpunkte verschwinden.

Ueber die Anwendung des Gegebenen auf hydrodynamische Probleme vergleiche man G. Kirchhoff: „Vorlesungen über math. Physik", 2. Aufl. Abschnitt 21.

Für beide Curvengruppen treten gewisse Singularitäten ein, wenn $a + bi = \pm 1$ ist, denn da $a + bi + \sqrt{(a+bi)^2 - 1}$ für diese Punkte eindeutig wird, werden zwei Radii vectores identisch und die Gleichungen verwandeln sich in folgende:

$$\frac{p^2}{2r} = c, \tag{7}$$

$$2\varphi - \vartheta = \gamma. \tag{8}$$

Beiläufig sei bemerkt, dass sie dann die Reciproken der confocalen Lemniscaten und des gleichseitigen Hyperbelbüschels um resp. durch ± 1 sind, und zwar gegen einen der Kreise um ± 1 mit Radius $\sqrt{2}$. Zur Gruppe (8) gehört der *Einheitskreis*, zu Gruppe (7) eine durch -1 gehende *Pascal'sche Linie* (limaçon), die einzige der Curven dieser Gruppe, welche eine Schleife besitzt (vergl. § 6.). Die Curven (8) bilden, mit Ausnahme der Geraden und des Einheitskreises, sämmtlich rechtwinklige Schleifen, die durch Null und $+1$ (resp. -1) gehen und erinnern in ihrer Gestalt mehr oder weniger an das folium Cartesii.

Aus Gleichung (8) folgt, dass für sehr kleines ϑ sich 2φ der Grösse γ nähert, so dass dem Winkel $\Phi = \gamma$ der Z-Ebene, der seinen Scheitel in $+1$ hat, der Winkel $\varphi = \frac{\gamma}{2}$ entspricht, so dass überhaupt jeder Winkel ε, dessen Scheitel sich dort befindet, in der z-Ebene auf $\frac{\varepsilon}{2}$ oder $\frac{\varepsilon}{2} + 180^0$ reducirt wird. In diesem Punkte hört also, wie auch in -1, die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen auf, was mit dem Verschwinden des Differentialquotienten zusammenhängt. Die Halbirung des Winkels entspricht dem Charakter des Windungspunktes 1ter Ordnung. Bei den Kreisbeziehungen beider Ebenen kommt dieser Punkt noch einmal zur Sprache. —

Die gesammte Geometrie der Z-Ebene lässt sich nun mit elementaren Hilfsmitteln und in leicht übersichtlicher Weise unter Zugrundelegung der Gleichungen (3) *und* (4) *in die z-Ebene übertragen, denn jeder Curve* $f(R, \Theta) = 0$ *der einen entspricht eine leicht aus ihr zu construirende Curve*

(9) $$f\left[\left(\frac{p\cdot q}{2r}\right),\ (\varphi+\chi-\vartheta)\right]=0,$$

und zwar gehen die Radii vectores der letzteren von $a+bi\pm\sqrt{(a+bi)^2-1}$ *und Null aus, wenn die Polarcoordinaten der ersteren Curve auf einen Punkt* $(a+bi)$ *bezogen waren.*

So entspricht z. B. den logarithmischen Spiralen $R=ck^{\Theta}$, welche ein Strahlenbüschel durch $a+bi$ isogonal durchsetzen, eine Curvenschaar

(10) $$\frac{p\cdot q}{2r}=c\cdot k^{\varphi+\chi-\vartheta},$$

d. h. die Schaar der isogonalen Trajectorien des Isothermenbüschels 3^ten^ *und der Orthogonalschaar* 4^ten^ *Grades.* Die Eigenschaften dieser transscendenten Curven sind denen der logarithmischen Spirale ganz analog. Eine besondere Uebereinstimmung liegt darin, dass $\frac{p\cdot q}{2r}$ geometrisch wächst, wenn $\varphi+\chi-\vartheta$ sich arithmetisch ändert. Diese Curven lassen sich ähnlich, wie die logarithmischen Spiralen, als Diagonalcurven einer gewissen Rechteckseintheilung betrachten*). In der Z-Ebene erhält man nämlich ein System ähnlicher Rechtecke, wenn die Neigungswinkel Θ des Strahlenbüschels arithmetisch, die Werthe des Radius R geometrisch auf einander folgen, also z. B.

$$\begin{aligned}\Theta &= \cdots -2\beta,\ \beta,\ 0,\ \beta,\ 2\beta,\ \cdots\\ R &= \cdots e^{-2\alpha},\ e^{-\alpha},\ e^{0},\ e^{\alpha},\ e^{2\alpha},\ \cdots\end{aligned}$$

Folglich:

Die Isothermenbüschel (3) *und* (4) *theilen die Ebenen in rechtwinklige Flächenräume ein, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben, sobald die Ausdrücke* $\varphi+\chi-\vartheta$ *resp.* $\frac{p\cdot q}{2r}$ *die Werthe einer arithmetischen resp. geometrischen Reihe annehmen.*

Ist dabei $\alpha=\beta$, *so geschieht die Eintheilung in kleine „Quadrate“.* Letzteres ergiebt sich aus der logarithmischen Abbildung. — Eine quadratische Eintheilung hat man z. B. in Figur 1. Durch Einzeichnung der Diagonalcurven erhält man eine Vorstellung von den Gestalten der Linien (10) für den dortigen Specialfall.

Kennt man von einer logarithmischen Spirale das Centrum und zwei ihrer Punkte, so kann man unendlich viele elementar construiren. Das Entsprechende gilt von den Curven (9). Auch gewisse Reciprocitätsverhältnisse gegen die auftretenden Kreise finden für diese Curven statt.

Aus Gleichung (8) ergiebt sich ferner, dass das Kreisbüschel durch

---

*) Vergl. „Ueber die logarithmische Abbildung etc.“ Zeitschr. für Math. u. Phys. XVI, pag. 269 etc.

beliebige Punkte $a+bi$ der Z-Ebene und seine Orthogonalschaar, deren Gleichungen sind

$$\Phi - \mathrm{X} = \gamma, \qquad \frac{P}{Q} = c,$$

in folgende Curvensysteme der z-Ebene übergehen:

$$\varphi + \varphi_1 - (\chi + \chi_1) = \gamma, \tag{11}$$

$$\frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = c, \tag{12}$$

deren Radii vectores von den Punkten $a+bi \pm \sqrt{(a+bi)^2 - 1}$ und $a_1 + b_1 i \pm \sqrt{(a_1+b_1 i)^2 - 1}$ ausgehen. *Diese Curven bilden das Isothermenbüschel 4^{ten} Grades durch die genannten vier Punkte und die orthogonale Isothermenschaar desselben Grades.* Es ist zu bemerken, dass der von Null ausgehende Radius vector r, ebenso sein Neigungswinkel ϑ weggefallen ist. Die geometrische Deutung der Gleichungen (11) und (12) kann folgendermassen gegeben werden:

Gehen von zwei Punkten $a+bi \pm \sqrt{(a+bi)^2 - 1}$ Radii vectores p und p_1 aus, von zwei andern Punkten $a_1 + b_1 i \pm \sqrt{(a_1+b_1)^2 - 1}$ Radii vectores q und q_1, so ist der geometrische Ort der Punkte, für welche das Verhältniss des Rechtecks aus p und p_1 zu dem Rechteck aus q und q_1 constant ist, eine der Isothermen 4^{ten} Grades, die durch Gleichung (3) *dargestellt waren; der geometrische Ort der Punkte, für welche die Differenz zwischen den Summen der Neigungswinkel der beiden Paare der Radii vectores constant bleibt, ist gleichfalls eine solche Curve, die durch die genannten Punkte geht und die vorige Curve orthogonal schneidet.*

Nun war oben gezeigt, dass die Isothermen 3^{ten} Grades für alle Punktpaare von der Form $a+bi \pm \sqrt{(a+bi)^2 - 1}$, die auf ihnen liegen, dieselbe Gleichung haben. Das Analogon für die Isothermen 4^{ten} Grades lässt sich auf zwei Arten geben.

Ist nämlich $R = c$ ein Kreis um $a+bi$ und sind $R_1 = c_1$ und $R_2 = \frac{c^2}{c_1}$ zwei concentrische, die also so beschaffen sind, dass zwischen ihren Punkten in Bezug auf den ersten Kreis Reciprocität stattfindet, so hat der erste Kreis die Eigenschaft, dass das Verhältniss der von je zwei zusammengehörigen Punkten der andern Kreise ausgehenden Radii vectores für ihn stets dasselbe ist, auf welchem Radius die beiden Punkte auch liegen mögen. Die Gleichung $\frac{P}{Q} = a$ gilt also für alle Punktpaare. Das Analoge für unsere Curven 4^{ten} Grades auszusprechen, ist so leicht, dass es dem Leser überlassen bleiben kann.

Das zweite Analogon ergiebt sich aus der Betrachtung, dass zu Sehnen eines Kreises, die einen concentrischen umhüllen, gleiche

Peripheriewinkel gehören. Bezeichnet man die Endpunkte jeder Sehne als zugeordnete, und zieht man von solchen aus Radii vectores nach dem ersten Kreise, so hat letzterer für alle zugeordneten Punktpaare die Gleichung $\Phi - X = \gamma$. Auch hier ist die Uebersetzung des Satzes in die z-Ebene leicht durchzuführen.

Also: *Die Isothermen 4ten Grades haben die Eigenschaft, dass die Gleichungen* (11) *oder* (12) *bei jedem Individuum für unendlich viele Punktgruppen, die in geeigneter Weise zu Ausgangspunkten der Radii vectores gemacht werden, unveränderte Geltung behalten.*

Im speciellen Falle

$$(\varphi + \varphi_1) - (\chi + \chi_1) = 0^0 \quad \text{oder} \quad 180^0$$

und

$$\frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = 1$$

hat man statt der Isothermen 4ten Grades solche 3ten Grades, woraus sich neue Eigenschaften der letzteren ergeben.

Dies folgt daraus, dass zwei der Kreise zu Geraden werden.

Auch für das Isothermenbüschel 4ten Grades nebst Orthogonalschaar entsteht die Eintheilung in kleine „Rechtecke", die der Aehnlichkeit zustreben, wenn die Parameter γ resp. c in arithmetischer resp. geometrischer Reihe aufeinander folgen. Die Zeichnung wird am besten entworfen, indem das Kreisbüschel nebst Orthogonalschaar aus der Z-Ebene in die andere transformirt wird. Demnach lassen sich beliebig viele Punkte der isogonalen Trajectorien der Curven (11) und (12) elementar construiren, deren Gleichung, wie leicht zu erkennen, lautet:

$$(13) \qquad \frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = c \cdot k^{\varphi + \varphi_1 - (\chi + \chi_1)}.$$

Sie ist analog der Gleichung der isogonalen Trojectorien des Kreisbüschels

$$\frac{p}{q} = c k^{\varphi - \chi},$$

die ich in der citirten Abhandlung über logarithmische Abbildung als logarithmische Doppelspiralen eingehend untersuchte, worauf sie durch Herrn Burmester eine kinematische Bedeutung als Selbsthüllcurven im kreisverwandt-veränderlichen System erhalten haben.

Auch die transcendenten Curven (10) und (13) sind isothermische. Die Aufstellung ihrer Gleichung in der Form, dass die linke Seite der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt, bieten eine einfache Uebungsaufgabe, deren Methode der oben gegebenen analog ist.

Die Curven (11), (12) und (13) dürfen nicht mit denen der „lemniscatischen Geometrie 2ter O." verwechselt werden, deren Gleichungen identisch lauten. Die Ausgangspunkte der gleichnamigen

Radii vectores sind nämlich hier nicht, wie dort, Gegenecken eines Parallelogramms.

Beispielshalber mögen noch die projectivischen Relationen aus der Z-Ebene in die andere übertragen werden. Das Doppelverhältniss für vier Punkte einer Geraden, die von einem beliebigen Punkte derselben die Entfernungen P, Q, R, S haben, lautet

$$\frac{R-P}{R-Q} \cdot \frac{S-Q}{S-P},$$

das für vier Strahlen durch einen Punkt mit den Richtungswinkeln α, β, γ, δ geltende hat die Form

$$\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\gamma-\beta)} \cdot \frac{\sin(\delta-\beta)}{\sin(\delta-\alpha)}.$$

Beide gehen über in

$$\frac{r_1 \cdot r_2 - p_1 \cdot p_2}{r_1 \cdot r_2 - q_1 \cdot q_2} \cdot \frac{s_1 \cdot s_2 - q_1 \cdot q_2}{s_1 \cdot s_2 - p_1 \cdot p_2},$$

resp.

$$\frac{\sin[\gamma+\gamma_1-(\alpha+\alpha_1)]}{\sin[\gamma+\gamma_1-(\beta+\beta_1)]} \cdot \frac{\sin[\delta+\delta_1-(\beta+\beta_1)]}{\sin[\delta+\delta_1-(\alpha+\alpha_1)]}.$$

Misst man die Entfernungen von einem der vier Punkte, die Neigungswinkel von einem der vier Strahlen aus, so werden die Formeln den entsprechenden der Möbius'schen Kreisverwandtschaft ganz analog, die sich übrigens mit allen Consequenzen für unsere Curvenschaar 4ten Grades übertragen lässt.

Auf Angabe zahlreicher Sätze, die nach Obigem für die Geometrie der z-Ebene leicht auszusprechen sind, mag verzichtet werden. Nur noch ein Specialfall der obigen Isothermensysteme, der von Wichtigkeit ist, bleibt der Vollständigkeit halber zu behandeln.

Den Parallelen zur X- und Y- Axe der *Z-Ebene* entsprechen welche Curven?

Aus

$$X + Yi = \frac{1}{2}\left(x + yi + \frac{1}{x+yi}\right)$$

folgt durch Trennung des Reellen und Imaginären und Gleichsetzung der entsprechenden Theile, dass die Geraden $X = a$ und $Y = b$ in folgende Curven 3ten Grades übergehen:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2} = a, \tag{14}$$

$$\frac{y}{2} \cdot \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2} = b. \tag{15}$$

Diese Gleichungen genügen aus demselben Grunde, wie die oben entwickelten, mit ihren linken Seiten der Differentialgleichung $\Delta u = 0$. Die Rechteckseintheilung der Ebene geschieht, wenn beide Parameter arithmetischen Reihen folgen. Die isogonalen Trajectorien sind wieder Isothermen 3ten Grades. Aus der Gleichung der Geraden

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1$$

folgt, dass die allgemeine Gleichung der Isothermen 3ten Grades auf die Form

$$bx(x^2 + y^2 + 1) + ay(x^2 + y^2 - 1) = 2ab(x^2 + y^2)$$

gebracht werden kann. Alle Curven von dieser Gleichung haben also die durch Gleichung (4) charakterisirte Erzeugungsweise. Dass ferner jeder Curve $f(XY) = 0$ der Z-Ebene eine Curve

$$(16) \qquad f\left[\left(\frac{x}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2}\right), \left(\frac{y}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2}\right)\right] = 0$$

entspricht, ist selbstverständlich.

§ 2.

Uebertragung der Geometrie der z-Ebene in die der Z-Ebene.

Für diese Umkehrungsaufgabe ist die Methode der Vorarbeit nicht anwendbar, da die bequemen Factorenzerlegungen hier wegfallen. Sowohl geometrisch als auch analytisch wird der Ausdruck schwerfälliger, und dies hängt eng damit zusammen, dass die Eigenschaften des arcus cosinus und des Logarithmus sich nicht so elegant darstellen lassen, wie die des cosinus resp. der Exponentialfunction. Der Zusammenhang erklärt sich daraus, dass $Z = \frac{1}{2}\left(e^z + \frac{1}{e^z}\right) = \cos zi$, also $z = \frac{1}{i} \arccos Z = \lg\left(Z + \sqrt{Z^2 - 1}\right)$ ist. Der Inhalt dieses Paragraphen wird nur der Vollständigkeit wegen gegeben, da die Methoden sich später vereinfachen lassen.

Dem Punkte $x + yi$ der z-Ebene entspricht der Punkt

$$X + Yi = \frac{1}{2}\left(x + yi + \frac{1}{x + yi}\right)$$

der andern, der sich wiederum elementar construiren lässt, da $\frac{1}{x+yi}$ durch Reciprocität des Punktes $x + yi$ gegen den Einheitskreis und Umlegen um die reelle Axe dargestellt wird, worauf nur noch Addition complexer Strecken anzuwenden ist. Denselben Punkt findet man natürlich, wenn statt des Arguments $x + yi$ der reciproke Werth desselben genommen wird. Diese Zweideutigkeit ist bereits erörtert.

Trennt man in

$$x + yi = X + Yi + \sqrt{(X + Yi)^2 - 1}$$

das Reelle vom Imaginären, und setzt man das Zusammengehörige gleich, so folgt, dass den Linien $x = a$ und $y = b$ folgende Curven entsprechen:

$$(17)\qquad X + \sqrt{\frac{\sqrt{(X^2 - Y^2 - 1)^2 + 4X^2Y^2} + (X^2 - Y^2 - 1)}{2}} = a,$$

$$(18)\qquad Y + \sqrt{\frac{\sqrt{(X^2 - Y^2 - 1)^2 + 4X^2Y^2} - (X^2 - Y^2 - 1)}{2}} = b.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen genügen aus dem oben angegebenen Grunde der Differentialgleichung $\Delta u = 0$. Die Discussion der Gleichungen würde umständlich sein. Später wird sich durch eine einfache Combination ergeben, *dass es sich um die Reciproken zweier Orthogonalschaaren sich berührender Pascal'scher Schneckenlinien (limaçons) handelt,* wobei der Kreis um $+1$ mit Radius $\sqrt{2}$ als spiegelnde Curve auftritt.

Die Construction, wie überhaupt jedes Uebertragen der Geometrie der z-Ebene in die der Z-Ebene ist elementar durchführbar. Die analytische Beziehung beider Ebenen ist die, dass der Curve $f(xy) = 0$ der z-Ebene die Curve

$$(19)\qquad f\left[\left(X + \sqrt{\frac{\sqrt{(X^2 - Y^2 - 1)^2 + 4X^2Y^2} + (X^2 - Y^2 - 1)}{2}}\right),\right.$$
$$\left.\left(Y + \sqrt{\frac{\sqrt{(X^2 - Y^2 - 1)^2 + 4X^2Y^2} - (X^2 - Y^2 - 1)}{2}}\right)\right] = 0$$

entspricht. Weit einfacher erscheinen die im vorigen Abschnitt dargestellten Relationen. Hier fehlen eben die Radii vectores, die sich vorher aus der Zerlegung der Function in Factoren ergaben. Man hat selbst bei einfachen Uebertragungen schwerfällige Rechnungen nöthig, bei denen sich allerdings abgekürzte Bezeichnungen anwenden lassen.

Um z. B. die Gleichung der Curve zu finden, die einer Curve der z-Ebene, welche in Polarcoordinaten ϱ und φ in Bezug auf einen Punkt $a + bi$ gegeben ist, entspricht, stelle man die Gleichungen des Kreises $\varrho = c$ und der Linie $\vartheta = \gamma$ in gewöhnlichen Coordinaten auf und setze in denselben an Stelle von x und y die linken Seiten der Gleichungen (17) und (18). Die gefundenen Ausdrücke mögen mit

$$f_1(XYab) = c \quad \text{und} \quad f_2(XYab) = \gamma$$

bezeichnet werden. Der Curve $F(\varrho\varphi) = 0$ der z-Ebene entspricht also die Curve

$$F[f_1(XYab),\ f_2(XYab)] = 0$$

in der andern. *Es wird sich später zeigen, dass auch die durch f_1 und f_2 charakterisirten Coordinaten die Reciproken zweier orthogonaler Schaaren Pascal'scher Schneckenlinien sind.*

Die Uebertragung von projectivischen Relationen geschieht in derselben Weise, wie im vorigen Abschnitte. Aufgabe der folgenden Paragraphen ist es nun, die interessantesten Beziehungen beider Ebenen aufzufinden und die Uebertragungsmethoden möglichst zu vereinfachen.

§ 3.

Das gegenseitige Entsprechen der elliptischen Coordinaten um ± 1 und der Kreiscoordinaten um Null.

Nach Gleichung (7) entspricht dem Kreise mit Radius $P = c$ um den Punkt -1 der Z-Ebene die Curve $\frac{p^2}{2r} = c$, dem Kreise $Q = c$ um $+1$ die Curve $\frac{q^2}{2r} = c$, wobei die Radii vectores p, q, r von $+1, -1$ und Null ausgehen. Die der Ellipse $\frac{P+Q}{2} = c$ um die Brennpunkte ± 1 der Z-Ebene correspondirende Curve ist also $\frac{p^2+q^2}{2r} = c$, so dass ihre Gleichung in Cartesischen Coordinaten lautet:

$$\frac{(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2}{4\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+y^2+1}{2\sqrt{x^2+y^2}} = c,$$

oder

$$\frac{r^2+1}{2r} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) = c,$$

oder endlich

$$r = c \pm \sqrt{c^2-1}.$$

Der Ellipse $\frac{P+Q}{2} = c$ *mit den Brennpunkten* ± 1 *entsprechen also die beiden Kreise* $r = c \pm \sqrt{c^2-1}$ *oder* $\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right) = c$, *die gegen den Einheitskreis reciprok sind.*

Aus der Halbaxe der Ellipse findet man demnach den Radius des Kreises, indem man c um die mittlere Proportionale zwischen $c+1$ und $c-1$ vermehrt oder vermindert. Aus dem Kreisradius r findet man umgekehrt die Halbaxe der Ellipse, wenn man r um die eine Seite eines Recktecks vom Inhalte 1 vermehrt, dessen andere Seite gleich r ist, worauf noch die Summe zu halbiren ist.

Ebenso geht die Hyperbel $\frac{P-Q}{2} = \varkappa = \cos(\pm\gamma)$, wo also $\pm\gamma$ den Neigungswinkel der Asymptoten bedeutet, über in die Curve $\frac{p^2-q^2}{2r} = \varkappa$, oder in gewöhnlichen Coordinaten in: $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \varkappa$, d. h. in $\cos\vartheta = \cos(\pm\gamma)$ oder in $\vartheta = \pm\gamma = \pm \arccos \varkappa$. Also: *Die Hyperbel* $\frac{P-Q}{2} = \cos\gamma$ *der Z-Ebene verwandelt sich in die beiden Geraden* $\vartheta = \pm\gamma$ *durch Null, die also gleiche Neigung mit den Asymptoten der Hyperbel haben.*

Jeder Punkt der z-Ebene, dessen Polarcoordinaten in Bezug auf den Nullpunkt und die Richtung der reellen Axe r_1 und ϑ_1 sind, lässt sich also elementar in die Z-Ebene übertragen, indem man die Ellipse

$$\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}\left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right)$$

und die Hyperbel

$$\frac{P-Q}{2} = \cos\vartheta_1$$

mit den Brennpunkten ± 1 construirt, wobei ϑ_1 der Neigungswinkel der Asymptote wird. Welcher von den Schnittpunkten zu wählen ist, ergiebt sich aus dem Vorangegangenen. Umgekehrt kann zu jedem Punkte der Z-Ebene das entsprechende Punktpaar der andern mit Hülfe dieser Beziehungen construirt werden.

Aus der Orthogonalität der Kreise und Radien folgt die der confocalen Ellipsen und Hyperbeln. Da man die Eintheilung der z-Ebene in ähnliche Rechtecke mittels der Radien und concentrischen Kreise um resp. durch Null erhält, indem man r die Werthe einer geometrischen, ϑ die einer arithmetischen Reihe annehmen lässt, z. B.

$$\cdots, e^{-3\alpha}, e^{-2\alpha}, e^{-\alpha}, e^0, e^{\alpha}, e^{2\alpha}, e^{3\alpha}, \cdots,$$
$$\cdots, -3\beta, -2\beta, -\beta, 0, \beta, 2\beta; 3\beta, \cdots,$$

so erreicht man die Eintheilung der Z-Ebene in rechtwinklige Flächenräume, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben, indem man in

$$\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \quad \text{und} \quad \frac{P-Q}{2} = \cos\vartheta$$

die aufeinanderfolgenden Werthe von r und ϑ diesen Gesetzen unterordnet. Die Figur ist so leicht zu construiren, dass es einer besonderen Zeichnung nicht bedurfte, um so weniger, als dieses Resultat bereits bekannt ist.

Durch die Abbildung $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ gehen nach Obigem in einander über die Curven

$$(20) \quad f\left[\frac{P+Q}{2}, \frac{P-Q}{2}\right] = 0 \quad \text{und} \quad f\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \cos\vartheta\right] = 0,$$

und ebenso die Curven

$$(21) \quad f\left[\left(\frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P-Q}{2}\right)^2 - 1}\right), \arccos\frac{P-Q}{2}\right] = 0$$

und

$$f(r, \vartheta) = 0.$$

Aus der Gleichung der logarithmischen Spirale um den Nullpunkt der z-Ebene, $r = c\varkappa^{\vartheta}$ folgt z. B. *dass die der isogonalen Trajectorien der confocalen Kegelschnitte mit den Brennpunkten* ± 1 *lautet:*

$$(22) \qquad \frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - 1} = c x^{\arccos \frac{P-Q}{2}}.$$

Die geometrische Deutung dieser Gleichung giebt die Fundamentaleigenschaft dieser Curven, welche sich als Diagonalcurven der obigen Rechteckseintheilung betrachten lassen, so dass, wenn nur zwei aufeinanderfolgende Diagonalpunkte bekannt sind, die Construction beliebig vieler Punkte der transscendenten Curve elementar geschehen kann.

Auch die genannten confocalen Kegelschnitte, ebenso die Curven (22), welche letztere die Eigenschaft haben, dass die isogonalen Trajectorien eines zusammengehörigen Systems Curven desselben Charakters sind, gehören zu den isothermischen Curvenschaaren. Die Frage nach der Form, in welcher die linke Seite der Gleichungen der Kegelschnittschaaren der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt, kann erledigt werden mittels der Abbildung

$$Z = \frac{1}{2}\left[e^{z} + c^{\frac{1}{z}}\right] = \cos(zi)$$

resp. ihrer Umkehrung

$$Z = \lg\left[Z + \sqrt{Z^2 - 1}\right] = \frac{1}{2} \arccos Z,$$

von denen die letztere die Kegelschnitte in Parallele zur reellen resp. imaginären Axe verwandelt. Aus

$$X + Yi = \cos(xi - y) = \cos(xi)\cos y + \sin(xi)\sin y$$

folgt nämlich

$$X = \cos(xi)\cos y,$$
$$Yi = \sin(xi)\sin y,$$

woraus durch Quadrirung und Addition gefolgert werden kann

$$\frac{X^2}{\cos^2 y} - \frac{Y^2}{\sin^2 y} = 1$$

und

$$\frac{X^2}{\cos^2 xi} - \frac{Y^2}{\sin^2 xi} = 1.$$

Das erste ist die Hyperbel-, das andere die Ellipsengleichung. Der Geraden $x = a$ entspricht also die Ellipse $\frac{P+Q}{2} = \cos ai = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2}$, der Geraden $y = b$ die Hyperbel $\frac{P-Q}{2} = \cos b = \frac{e^{bi} + e^{-bi}}{2}$, also, wenn man gewöhnliche Coordinaten einführt:

$$(23) \qquad \frac{1}{i} \arccos \frac{\sqrt{(X+1)^2 + Y^2} + \sqrt{(X-1)^2 + Y^2}}{2} = a,$$

oder, um das Imaginäre zu vermeiden

$$\lg(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) = a, \tag{23*}$$

wo der periodische Zusatz vernachlässigt und für ξ der Werth $\frac{\sqrt{(X+1)^2+Y^2}+\sqrt{(X-1)^2+Y^2}}{2}$ einzusetzen ist; und

$$\arccos \frac{\sqrt{(X+1)^2+Y^2}-\sqrt{(X-1)^2+Y^2}}{2} = b. \tag{24}$$

Diese Gleichungen der Ellipse und Hyperbel genügen mit ihren linken Seiten der obigen Differentialgleichung, da $a = x$ und $b = y$ die reellen resp. imaginären Theile der Hilfsfunction

$$x + yi = \frac{1}{i} \arccos(X + Yi)$$

sind.

Die Uebertragung der allgemeinen Geometrie der z-Ebene in die Z-Ebene gestaltet sich nun folgendermassen: Der Kreis $\varrho = c$ um $a + bi$ hat in gewöhnlichen Polarcoordinaten die Gleichung

$$\sqrt{r^2 - 2r(a\cos\vartheta + b\sin\vartheta) + a^2 + b^2} = c,$$

ihm entspricht also, wenn man $\frac{P+Q}{2} = u$, $\frac{P-Q}{2} = v$ setzt, in der Z-Ebene die Curve

$$\sqrt{(u+\sqrt{u^2-1})^2 - 2(u+\sqrt{u^2-1})(av+b\sqrt{1-v^2})+a^2+b^2} = c, \tag{25}$$

oder kurz geschrieben

$$f_1(uvab) = c.$$

Ebenso geht die Gerade durch $a + bi$ mit dem Neigungswinkel $\varphi = \gamma$, deren Gleichung in Polarcoordinaten lautet

$$\arctan \frac{r\sin\vartheta - b}{r\cos\vartheta - a} = \gamma,$$

über in

$$\arctan \frac{(u+\sqrt{u^2-1})\sqrt{1-v^2} - b}{(u+\sqrt{u^2-1})\,v - a} = \gamma, \tag{26}$$

oder kurz

$$f_2(uvab) = \gamma.$$

Der Curve $F(\varrho\varphi) = 0$ entspricht also die Curve

$$F[f_1(uvab),\ f_2(uvab)] = 0,$$

wozu § 2. zu vergleichen ist. Die durch f_1 und f_2 dargestellten Coordinaten stimmen nämlich mit den dort besprochenen überein.

Mit Hülfe der elliptischen Coordinaten lässt sich überhaupt der allgemeine Charakter der vorliegenden Abbildung am bequemsten entwickeln, besonders auch das Verhalten der beiden Riemann'schen Blätter der Z-Ebene.

Isothermische und verwandte Betrachtungen lassen sich hier ebenso anschliessen, wie in § 1.

§ 4.

Das gegenseitige Entsprechen der Bicircularcoordinaten beider Ebenen mit den Grundpunkten ± 1.

Das Kreisbüschel durch die Punkte ± 1 der Z-Ebene hat die Gleichung $\Phi - X = \gamma$, die Orthogonalschaar die Gleichung $\frac{P}{Q} = c$, wobei die Coordinaten auf ± 1 bezogen sind. Nach den Gleichungen (7) und (8) entsprechen ihnen, da sich beim Einsetzen die von Null ausgehenden Radii vectores wegheben, die Curven

$$(27)\qquad 2(\varphi - \chi) = \gamma, \quad \text{oder} \quad \varphi - \chi = \frac{\gamma}{2} \text{ resp. } 180^0 + \frac{\gamma}{2},$$

$$(28)\qquad \left(\frac{p}{q}\right)^2 = c, \quad \text{oder} \quad \frac{p}{q} = \sqrt{c},$$

also ebenfalls ein Kreisbüschel durch ± 1 *und die orthogonale Kreisschaar*, und zwar correspondiren jedem Kreise des Büschels der Z-Ebene mit dem Peripheriewinkel γ zwei Individua des Büschels der anderen Ebene mit den Peripheriewinkeln $\frac{\gamma}{2}$ und $180^0 + \frac{\gamma}{2}$, die sich demnach rechtwinklig schneiden. Man vergleiche hierzu die sich an die Gleichungen (7) und (8) anschliessenden Erörterungen, aus denen bereits hervorgeht, dass zwei Büschelkreise der Z-Ebene sich unter dem doppelten Winkel schneiden, wie die entsprechenden der z-Ebene.

Das obige Resultat ergiebt sich unabhängig hiervon noch auf folgendem Wege:*)

Aus

$$z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$$

folgen die Gleichungen:

$$z + 1 = Z + 1 + \sqrt{Z^2 - 1} = \sqrt{Z + 1}\,(\sqrt{Z + 1} + \sqrt{Z - 1})$$

und

$$z - 1 = Z - 1 + \sqrt{Z^2 - 1} = \sqrt{Z - 1}\,(\sqrt{Z + 1} + \sqrt{Z - 1}),$$

also durch Division

$$\frac{z + 1}{z - 1} = \sqrt{\frac{Z + 1}{Z - 1}},$$

oder

$$\left(\frac{x + yi + 1}{x + yi - 1}\right)^2 = \frac{X + Yi + 1}{X + Yi - 1},$$

woraus sich ergiebt

$$\left(\frac{x - yi + 1}{x - yi - 1}\right)^2 = \frac{X - Yi + 1}{X - Yi - 1},$$

also durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen

*) Herr Prof. H. A. Schwarz lieferte den Beweis unter Heranziehung einer Hilfsebene.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{P}{Q},$$

wobei die Radii vectores von ± 1 ausgehen.

Durch Division derselben Gleichungen, Logarithmirung und Zusetzung des Factors $\frac{1}{2c}$, folgt:

$$2\left[\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi+1}{x-yi+1} - \frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-1}{x-yi-1}\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi+1}{X-Yi+1} - \frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi-1}{X-Yi-1},$$

oder

$$2\left[\operatorname{arc\,tan}\frac{y}{x+1} - \operatorname{arc\,tan}\frac{y}{x-1}\right] = \operatorname{arc\,tan}\frac{Y}{X+1} - \operatorname{arc\,tan}\frac{Y}{X-1},$$

oder indem man für die arc tan die Richtungswinkel der oben genannten Radii vectores setzt:

$$2(\varphi - \chi) = \Phi - X.$$

Also auch auf diesem Wege, der in anderer Weise mit der Vorarbeit zusammenhängt, ist gezeigt, dass dem Kreisbüschel $\Phi - X = \gamma$ der Z-Ebene das Büschel $\varphi - \chi = \frac{\gamma}{2}$, der Kreisschaar $\frac{P}{Q} = c$ die Kreisschaar $\frac{p}{q} = \sqrt{c}$ entspricht. Die Halbirung der zusammengehörigen Büschelwinkel folgt am bequemsten aus der Gleichung

$$\frac{z+1}{z-1} = \sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}},$$

aus der unten noch weitere Consequenzen gezogen werden. *Ganz allgemein entsprechen sich in beiden Ebenen die Curven*

$$(29) \qquad f\left[\left(\frac{P}{Q}\right),\ (\Phi - X)\right] = 0 \quad \text{und} \quad f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2,\ 2(\varphi - \chi)\right] = 0$$

und selbstverständlich auch

$$(30) \qquad f\left[\sqrt{\frac{P}{Q}},\ \frac{\Phi - X}{2}\right] = 0 \quad \text{und} \quad f\left[\left(\frac{p}{q}\right),\ (\varphi - \chi)\right] = 0.$$

So gehen z. B. die oben erwähnten logarithmischen Doppelspiralen

$$\frac{P}{Q} = c\varkappa^{\Phi - X}$$

mit den Grundpunkten ± 1 der Z-Ebene wiederum in logarithmische Doppelspiralen über, und zwar in das System

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = c\varkappa^{2(\varphi-\chi)},$$

oder

$$\frac{p}{q} = \sqrt{c}\cdot\varkappa^{\varphi-\chi}.$$

Um die Resultate dieses Paragraphen zu veranschaulichen, construire man folgende zusammengehörigen Figuren beider Ebenen. Durch die Punkte ± 1 der Z-Ebene zeichne man ein Kreisbüschel, dessen Schnittwinkel mit der reellen Axe eine arithmetische Reihe bilden. Die Orthogonalschaar, welche der Eintheilung in „ähnliche Rechtecke" entspricht, construire man entweder direct, indem man etwa die imaginäre Axe zur Schaar gehören lässt und sie durch reciproke Radii vectores gegen den zweiten willkürlich angenommenen Kreis spiegelt und so fortfährt, oder indirect durch Transformation einer concentrischen Kreisschaar entsprechender Art mittels $Z = \frac{1}{z}$ von beliebigem Punkte aus.

Die zugehörigen Kreise der z-Ebene werden dann sehr leicht folgendermassen gefunden: *Die beiden Büschelkreise der z-Ebene, die einem solchen der andern Ebene entsprechen, haben ihre Mittelpunkte da, wo letzterer die imaginäre Axe schneidet. Ausserdem gehen sie durch* ± 1. Der Beweis folgt aus einer leichten Betrachtung über die Peripheriewinkel.

Der Kreis der z-Ebene, der zu einem Individuum der Orthogonalschaar der Z-Ebene gehört, hat seinen Mittelpunkt an der Stelle der reellen Axe ausserhalb des Einheitskreises, wo der Kreis der Z-Ebene dieselbe schneidet. Er schneidet ausserdem den Einheitskreis rechtwinklig. Der Beweis für letzteres kann so geführt werden: Der Kreis um den Punkt a der reellen Axe der Z-Ebene, welcher den Einheitskreis rechtwinklig schneidet, trifft die Axe in den Punkten $a + \sqrt{a^2 - 1}$ und $a - \sqrt{a^2 - 1}$. Nach § 1. geht er über in die Curve $\frac{p \cdot q}{2r} = \sqrt{a^2 - 1}$, deren Radii vectores von $a + \sqrt{a^2 - 1}$, $a - \sqrt{a^2 - 1}$ und Null ausgehen. (Die beiden ersteren Punkte waren soeben genannt.) Dieser Gleichung genügt, wie man sich leicht überzeugt, nur der Kreis um $a + \sqrt{a^2 - 1}$, der den Einheitskreis rechtwinklig schneidet.

Damit ist nun gleichzeitig das einfachste Uebertragungsprincip gefunden.

Um nämlich den Punkt $a + bi$ der Z-Ebene in die andere zu übertragen, lege man durch ihn und die Punkte ± 1 einen Kreis und ausserdem durch ihn einen Kreis, der seinen Mittelpunkt auf der reellen Axe hat und den andern rechtwinklig schneidet. Die entsprechenden Kreise der z-Ebene construire man nach der eben angegebenen Methode, welche die beiden correspondirenden Schnittpunkte giebt. — Aehnlich geschieht die Bestimmung des Punktes der Z-Ebene, der einem gegebenen der andern entspricht.

Speciell sei bemerkt, dass dem Einheitskreise der Z-Ebene die beiden Kreise um $\pm i$ mit Radius $\sqrt{2}$ entsprechen, woraus neue Sätze abgeleitet werden können.

Dass zu gewissen Isothermenschaaren 4^{ten} Grades Kreise gehören, wie in § 1. bemerkt wurde, ist aus Obigem gleichfalls ersichtlich.

Interessant ist folgende *kartographische Beziehung:*

Die stereographische Projection des Ptolemäus stellt die Erdoberfläche eindeutig auf der ganzen Ebene dar, und zwar kann dies so geschehen, dass den Meridianen und Parallelkreisen das Kreisbüschel durch ± 1 und die Orthogonalschaar der Z-Ebene entsprechen. Die ganze Z-Ebene ist aber auf dem Einheitskreise der z-Ebene abgebildet. *Die gesammte Erdoberfläche ist demnach auf einem einzigen Kreise so dargestellt, dass wiederum Kreisbüschel und Kreisschaar den Meridianen und Parallelkreisen entsprechen.* Die zugehörige Figur findet sich schon bei Lambert*).

§ 5.

Den Reciproken der elliptischen Coordinaten um ± 1 entspricht das Kreisbüschel durch die Punkte $\pm i$ nebst Orthogonalschaar.

Der isothermischen Spiegelung (Inversion) gegen den Einheitskreis der Z-Ebene entspricht die Spiegelung gegen einen der ihm entsprechenden Kreise um $\pm i$ mit Radius $\sqrt{2}$. Durch die erstere Operation erhält man aus den confocalen Kegelschnitten um ± 1 ihre Reciproken, durch die letztere gehen die entsprechenden Strahlen und Kreise durch resp. um den Nullpunkt der z-Ebene in das Kreisbüschel durch $\pm i$ und die orthogonale Kreisschaar über. Folglich:

Dem Kreisbüschel durch ± 1 und seiner Orthogonalschaar entsprechen die Reciproken der elliptischen Coordinaten um ± 1 gegen den Einheitskreis.

Bekanntlich ist die Reciproke der gleichseitigen Hyperbel eine Lemniscate, und zwar im vorliegenden Falle die Lemniscate $P \cdot Q = 1$ mit den Brennpunkten ± 1. Letztere entspricht offenbar den Kreisen des obigen Büschels, die ihr Centrum in den Punkten ± 1 haben. Der isothermischen Spiegelung gegen diese Lemniscate wird demnach die Reciprocität gegen jeden dieser beiden Kreise entsprechen. Unten werden daraus interessante Beziehungen abgeleitet.

Figur 2 stellt das hier behandelte gegenseitige Entsprechen dar. Ueber die Construction der Curvensysteme braucht nichts bemerkt zu werden.

Um auch hier den einfachsten analytischen Zusammenhang zu finden, werde das Resultat nach unserer Methode verificirt.

Zunächst verwandelt die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ den Kreis $Q = c$ um

*) Lambert: „Beiträge zum Gebrauche der Mathematik etc." 1772. Theil 3, pag. 105 bis 199.

den Punkt $+1$ in den Kreis $\frac{Q}{R} = c$, dessen Radii vectores von $+1$ und Null ausgehen, den Kreis $P = c$ um -1 in den Kreis $\frac{P}{R} = c$ mit Radii vectores, die von -1 und Null ausstrahlen, so dass die Ellipsen- und Hyperbelgleichung $P \pm Q = c$ verwandelt wird in $\frac{P \pm Q}{R} = c$, wodurch *die Gleichung und zugleich die Fundamentaleigenschaft der Reciproken der confocalen Kegelschnitte gefunden ist.* Der Ausdruck geht durch die Abbildung $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$ nach den Gleichungen (3) resp. (7) über in $\frac{p^2 \pm q^2}{t \cdot t_1} = c$, wobei die Radii vectores p, q, t, t_1 von -1, $+1$, $-i$ und $+i$ ausgehen, während die von Null ausgehenden weggefallen sind. Führt man für diese Radii vectores gewöhnliche Coordinaten ein, so entsteht die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 1 = y \cdot \frac{2c}{\sqrt{c^2 - 4}} \quad \text{resp.} \quad x^2 + y^2 - 1 = 2x\sqrt{\frac{4 - c^2}{c^2}}.$$

Das erste ist die Gleichung eines Kreises $r = \frac{2}{\sqrt{c^2 - 4}}$ um den Punkt $\frac{ci}{\sqrt{c^2 - 4}}$ der imaginären Axe, die sich auch schreiben lässt

$$\frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 1}}{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 1}}}, \quad \text{oder auch} \quad \left(\frac{t_1}{t}\right) + \frac{1}{\left(\frac{t_1}{t}\right)} = c,$$

wobei t und t_1 wieder von $\pm i$ ausgehen. Das andere ist die Gleichung des Kreises $r = \frac{2}{c}$ um den Punkt $\sqrt{\frac{4 - c^2}{c^2}}$ der reellen Axe, dessen Gleichung auch lautet: $\varphi_1 - \varphi = \operatorname{arc\,tan} \frac{c}{\sqrt{4 - c^2}}$, oder auch $2 \sin(\varphi_1 - \varphi) = c$. Also mit einer geringen Aenderung:

Der Schaar der Reciproken der confocalen Ellipsen mit der Gleichung $\frac{P + Q}{2R} = c$ *entspricht die Kreisschaar* $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t_1}{t}\right) + \frac{1}{\left(\frac{t_1}{t}\right)}\right] = c$, *der Schaar der Reciproken der confocalen Hyperbeln mit der Gleichung* $\frac{P - Q}{2r} = \varkappa$ *das Kreisbüschel* $\sin(\varphi_1 - \varphi) = \varkappa$, wobei alle Radii vectores von den genannten Punkten ausgehen.

Zwischen beiden Ebenen besteht also die Beziehung, dass sich gegenseitig entsprechen die Curven

$$(31) \quad f\left[\frac{P + Q}{2R}, \frac{P - Q}{2R}\right] = 0 \quad \text{und} \quad f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{t} + \frac{t}{t_1}\right), \sin(\varphi_1 - \varphi)\right] = 0,$$

und ebenso

$$(32)\quad f\left[\left(\frac{P+Q}{2R}+\sqrt{\left(\frac{P+Q}{2R}\right)^2-1}\right),\quad \left(\arcsin\frac{P-Q}{2R}\right)\right]=0$$

und

$$f\left[\left(\frac{t_1}{t}\right),\quad (\varphi_1-\varphi)\right]=0.$$

Auf die Analogie der in diesen Formeln enthaltenen Ausdrücke mit den folgenden: $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $Z+\sqrt{Z^2-1}$, $\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{zi}+\frac{1}{e^{zi}}\right)$ und $\sin z=\frac{1}{2}\left(e^{zi}-\frac{1}{e^{zi}}\right)$ werde kurz aufmerksam gemacht, um damit eine andere Ableitung des Resultats anzudeuten.

Aus dem Gegebenen lassen sich noch einige interessante Sätze beiläufig ableiten. Spiegelung gegen die unter $\pm 45^0$ geneigten Geraden durch den Nullpunkt der z-Ebene verwandelt nämlich das Kreisbüschel durch ± 1 in das Kreisbüschel durch $\pm i$. Folglich entsprechend in der Z-Ebene:

Die isothermische Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel verwandelt das Kreisbüschel durch ihre Brennpunkte nebst Orthogonalschaar in die Reciproken der confocalen Kegelschnitte um diese Punkte.

Dasselbe gilt von der Abbildung $Z=\sqrt{1-z^2}$, wobei die Brennpunkte ± 1 zu Grunde zu legen sind*).

Ferner: Der Kreis um $+1$ (resp. -1) mit Radius $\sqrt{2}$ verwandelt durch Inversion die Geraden durch Null und die zugehörigen concentrischen Kreise in das Kreisbüschel durch ± 1 und dessen Orthogonalschaar. Folglich entsprechend in der Z-Ebene:

Die isothermische Spiegelung gegen die gewöhnliche Lemniscate verwandelt das Kreisbüschel durch ihre Brennpunkte nebst Orthogonalschaar in die confocalen Kegelschnitte um diese Punkte.

Dasselbe gilt von der Abbildung $Z=\sqrt{1+\frac{1}{z^2-1}}$. **) Hierin liegt vielleicht der schnellste rein geometrische Uebergang von den Kreisbüscheln und Kreisschaaren zu den confocalen Kegelschnitten. Beide Sätze sind Beiträge zu Specialfällen der lemniscatischen Verwandtschaft 2ter Ordnung.

§ 6.

Weitere Consequenzen der Kreisbeziehungen beider Ebenen.

Die Formel $\frac{z+1}{z-1}=\sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}}$ des § 4. lässt sich folgendermassen deuten:

---

*) Vgl. „Beiträge zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften."

**) Vgl. „Lemniscatische Geometrie etc." § 5.

Unterwirft man ein Gebilde der z-Ebene der Transformation $\frac{z+1}{z-1}$, so erhält man dasselbe, als wenn man das entsprechende Gebilde der Z-Ebene der Abbildung $\sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}}$ unterzieht.

Die involutorischen Transformationen $\frac{z+1}{z-1}$ und $\frac{Z+1}{Z-1}$ entsprechen aber in beiden Ebenen der Reciprocität gegen den Kreis um den Punkt $+1$ mit Radius $\sqrt{2}$, während die Wurzelausziehung den Uebergang von der gewöhnlichen Geometrie in die lemniscatische bedeutet. (Ausser der Reciprocität ist noch das Umlegen um die reelle Axe zu berücksichtigen, was im Folgenden nicht mehr besonders hervorgehoben werden soll.)

Nun geht aber jedes Kreisbüschel durch die Punkte $a+bi$ und a_1+b_1i der Z-Ebene durch die Abbildung $\sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}}$ in ein Lemniscatenbüschel durch die beiden Punktpaare $\sqrt{\frac{a+bi+1}{a+bi-1}}$ und $\sqrt{\frac{a_1+b_1i+1}{a_1+b_1i-1}}$ über,*) folglich muss letztere Curvengruppe, der Umkehrung der Transformation $\frac{z+1}{z-1}$ unterworfen, die übrigens genau ebenso lautet, auf Curvenschaaren führen, welche dem obigen Kreisbüschel der Z-Ebene entsprechen. Also:

Dem Kreisbüschel durch die Punkte $a+bi$ und a_1+b_1i der Z-Ebene und seiner Orthogonalschaar entsprechen die Reciproken des Lemniscatenbüschels durch die Punktpaare $\sqrt{\frac{a+bi+1}{a+bi-1}}$ und $\sqrt{\frac{a_1+b_1i+1}{a_1+b_1i-1}}$ der z-Ebene gegen den Kreis um den Punkt $+1$ mit Radius $\sqrt{2}$.

Mit andern Worten: *Die in § 1. behandelten Büschel uud Schaaren der Isothermen 3^{ten} und 4^{ten} Grades der z-Ebene sind Reciproke von Lemniscaten-Büscheln und -Schaaren gegen den genannten Kreis.*

Da nun der Spiegelung gegen diesen Kreis in der z-Ebene die Spiegelung gegen die Lemniscate $P\cdot Q=1$ um die Punkte ± 1 der Z-Ebene entspricht, so folgt, dass die genannten Lemniscatenschaaren der z-Ebene durch die Abbildung $Z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ in Curven übergehen, die durch Spiegelung der ursprünglichen Kreissysteme gegen die Lemniscate entstehen.

Von besonderem Interesse ist folgender Fall: Die Geraden durch den Nullpunkt der Z-Ebene nebst Orthogonalschaar gehen nach der „lemniscatischen Geometrie“ durch isothermische Spiegelung gegen die

*) Vergl. „Lemniscatische Geometrie etc.“

Lemniscate in ein Büschel von Schleifenlemniscaten durch ± 1 und Null nebst der Orthogonalschaar von Lemniscaten über. Folglich:

Das Lemniscatenbüschel durch die Punkte ± 1 und Null der Z-Ebene entspricht dem Lemniscatenbüschel durch die Punkte $\pm i$ und ± 1 der z-Ebene; auch die beiden Orthogonalschaaren von Lemniscaten entsprechen einander.

Dieser Fall ist durch Figur 3 erläutert, wobei wiederum dem Innern des Einheitskreises das untere Blatt der Z-Ebene entspricht. Die isothermischen Deutungen dieser Zeichnungen mögen dem Leser überlassen bleiben. Die „lemniscatische Geometrie" giebt Näheres über diese Systeme.

Verification des Resultates und Formulirung der analytischen Beziehung beider Ebenen geschehe auch hier nach der früheren Methode: Nach der „lemniscatischen Geometrie" hat das Büschel von Lemniscaten durch ± 1 und Null die Gleichung $\Phi + \mathrm{X} - 2\Theta = \gamma$, die Orthogonalschaar die Gleichung $\frac{P \cdot Q}{R^2} = c$, wobei die Radii vectores von ± 1 und Null ausgehen. Nach den Formeln (3) und (4) resp. (7) und (8) entstehen durch die Abbildung $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$ aus ihnen die Curven

$$2\,[(\varphi + \chi) - (\psi + \psi_1)] = \gamma \quad \text{und} \quad \left(\frac{p \cdot q}{t \cdot t_1}\right)^2 = c,$$

deren Radii vectores von ± 1 und $\pm i$ ausgehen, während die vom Nullpunkte ausgehenden sich gehoben haben. Nach der öfter citirten Abhandlung sind dies aber die Gleichungen eines Lemniscatenbüschels durch die genannten Punkte und der orthogonalen Lemniscatenschaar.

Ganz allgemein entsprechen sich in beiden Ebenen Curven, deren Gleichungen in diesen lemniscatischen Coordinaten sind:

(33) $$f\left[\left(\frac{P \cdot Q}{R^2}\right), (\Phi + \mathrm{X} - 2\Theta)\right] = 0$$

und

$$f\left[\left(\frac{p \cdot q}{t \cdot t_1}\right)^2, 2\left(\varphi + \chi - (\psi + \psi_1)\right)\right] = 0,$$

wobei die Radii vectores von den Punkten ± 1 und Null der Z-Ebene resp. von denen der z-Ebene ± 1 und $\pm i$ ausgehen.

In derselben Weise lässt sich die obige Relation auch in der Form

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = \frac{Z+1}{Z-1}$$

verwerthen, die man dahin deuten kann, dass die Transformation entsprechender Gebilde mittels der beiden gleichgesetzten Functionen auf identische Gebilde führt. In der Z-Ebene handelt es sich dabei wieder um die Inversion gegen den Kreis um $+1$ mit Radius $\sqrt{2}$, in der z-Ebene um dasselbe, ausserdem aber noch um die Quadrirung, bei welcher bekanntlich der Neigungswinkel jedes von Null ausgehenden Radiusvectors verdoppelt, er selbst aber gemäss der Proportion $1:r=r:r^2$ quadrirt wird. Bekanntlich wird nun jedes Kreisbüschel der z-Ebene durch $a+bi$ und a_1+b_1i nebst Orthogonalschaar durch die Abbildung $\frac{z+1}{z-1}$ in ein Kreisbüschel durch $\frac{a+bi+1}{a+bi-1}$ und $\frac{a_1+b_1i+1}{a_1+b_1i-1}$ nebst Orthogonalschaar, dieses aber durch Quadrirung in ein Büschel *Pascal'scher Schneckenlinien* (limaçons) durch die Punkte $\left(\frac{a+bi+1}{a+bi-1}\right)^2$ und $\left(\frac{a_1+b_1i+1}{a_1+b_1i-1}\right)^2$ nebst Orthogonalschaar von Curven derselben Art verwandelt*). Diese Curven verwandeln sich aber in der Z-Ebene durch die Umkehrung der Abbildung $\frac{Z+1}{Z-1}$, die wiederum ebenso lautet, in die den ursprünglichen Kreisen entsprechenden Systeme. Folglich:

Jedem Kreisbüschel der z-Ebene durch die Punkte $a+bi$ und a_1+b_1i entspricht in der Z-Ebene ein Curvenbüschel durch die Punkte $\frac{1}{2}\left(a+bi+\frac{1}{a+bi}\right)$ und $\frac{1}{2}\left(a_1+b_1i+\frac{1}{a_1+a_1i}\right)$, welches durch Inversion mittels des Kreises um $+1$ mit Radius $\sqrt{2}$ aus einem Büschel Pascal'scher Schneckenlinien (im speciellen Falle Cardioiden oder auch Parabeln) erzeugt werden kann. Von den Orthogonalschaaren gilt dasselbe.

Somit ist auch für die in § 2. behandelten Curven die geometrische Deutung gefunden.

Da die confocalen Kegelschnitte um die Punkte ± 1 der Z-Ebene die Abbildungen von Kreisen und Geraden sind, so ergiebt sich beiläufig ein Specialfall des bekannten Satzes, *dass diese Kegelschnitte, gegen einen Kreis um einen der Brennpunkte (hier der specielle Kreis mit Radius $\sqrt{2}$) gespiegelt, auf Pascal'sche Schneckenlinien führen. Dasselbe gilt aus gleichem Grunde von den obigen Reciproken der Kegelschnitte (Fig. 2). Auch die in den Figuren 1 und 2, und zwar in der Z-Ebene, befindliche Lemniscate $P \cdot Q = 1$ mit den Brennpunkten ± 1 geht durch Inversion gegen diesen Kreis in eine Pascal'sche Schneckenlinie über, weil sie zwei Kreisen der z-Ebenen entspricht.*

Aus letzterem erledigt sich eine zur Gleichung (7) gemachte Bemerkung.

---

*) Ueber die Büschel und Schaaren der Limaçons vergl. Amstein: Exemples de représentation conforme, Bull. Soc. Vaud. Sc. Nat. XVI. 82, eine Abhandlung, der auch Zeichnungen dieser Systeme beigegeben sind.

Da endlich die Kreise der z-Ebene, gegen die Kreise und Geraden um resp. durch Null gespiegelt, wieder Kreise geben, so folgt, *dass die isothermische Spiegelung gegen alle Individua der confocalen Ellipsen und Hyperbeln die hier auftretenden limaçons wiederum in solche verwandelt.*

In gleicher Weise lassen sich noch zahlreiche andere Beziehungen aus dem Vorangegangenen mit Leichtigkeit ableiten. Von diesen sei noch ein Beispiel angegeben.

Das Isothermenbüschel 3ten Grades durch $\pm i$ nebst Orthogonalschaar (Fig. 1) der z-Ebene geht durch Umklappen um die Gerade durch Null mit Neigung 45^0 in ein congruentes Büschel durch ± 1 nebst Orthogonalschaar über; die isothermische Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel der Z-Ebene, welche der genannten Geraden entspricht, verwandelt nach der „lemniscatischen Geometrie“ das Strahlenbüschel durch Null nebst concentrischer Kreisschaar in die confocalen Lemniscaten um die Punkte ± 1 nebst orthogonalem gleichseitigem Hyperbelbüschel durch beide Punkte. Folglich:

In beiden Ebenen entsprechen sich die genannten confocalen Lemniscaten und orthogonalen Hyperbeln einerseits und die um 90° gedrehten Isothermen 3ten resp. 4ten Grades durch resp. um $\pm i$ andrerseits.

Dieses gegenseitige Correspondiren ist in Figur 4 dargestellt.

Der Vollständigkeit halber sei endlich noch gezeigt, wie sich analytisch mittels der Bicircularcoordinaten mit den Grundpunkten ± 1 die Geometrie der z-Ebene in die der Z-Ebene übertragen lässt. Der Kreis $\varrho = c$ um den Punkt $a + bi$ der ersteren und die Gerade $\varphi = \gamma$ durch diesen Punkt gehen nämlich durch die Abbildung $Z = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ in Curven über, deren Gleichung in Polarcoordinaten, die auf den Nullpunkt bezogen sind, lautet:

$$\sqrt{(a-1)^2 + b^2}\sqrt{\frac{R - 2\sqrt{R}\left(a_1 \cos\frac{\Theta}{2} + b_1 \sin\frac{\Theta}{2}\right) + a_1^2 + b_1^2}{R - 2\sqrt{R}\cos\frac{\Theta}{2} + 1}} = c,$$

$$\operatorname{arc\,tan}\frac{\sqrt{R}\sin\frac{\Theta}{2} - b_1}{\sqrt{R}\cos\frac{\Theta}{2} - a_1} - \operatorname{arc\,tan}\frac{\sqrt{R}\sin\frac{\Theta}{2}}{\sqrt{R}\cos\frac{\Theta}{2} - 1} + \alpha = \gamma,$$

wo

$$a_1 = \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a-1)^2 + b^2}, \quad b_1 = \frac{2b}{(a-1)^2 + b^2}, \quad \alpha = \operatorname{arc\,tan}\frac{b}{a-1} \text{ ist.}$$

Diese Gleichungen gehen durch die Abbildung $\frac{Z+1}{Z-1}$ in gleichlautende über, nur dass $\frac{P}{Q}$ an Stelle von R und $\Phi - X$ an Stelle von Θ zu setzen ist, wobei die Radii vectores von ± 1 ausgehen. Die so umgeschriebenen Gleichungen sind die des Büschels und der Schaar Pascal'scher Schneckenlinien, die dem Strahlenbüschel $\varphi = \gamma$ und der Kreisschaar $\varrho = c$ entsprechen, und zwar in Bicircularcoordinaten mit den Grundpunkten ± 1.

Die der confocalen Ellipsen und Hyperbeln lauten z. B.

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{P}{Q}\right) + 2\sqrt{\frac{P}{Q}}\cos\frac{\Phi - X}{2} + 1}{\left(\frac{P}{Q}\right) - 2\sqrt{\frac{P}{Q}}\cos\frac{\Phi - X}{2} + 1}} = c,$$

$$\operatorname{arc\,tan}\frac{\sqrt{\frac{P}{Q}}\sin\frac{\Phi - X}{2}}{\sqrt{\frac{P}{Q}}\cos\frac{\Phi - X}{2} + 1} - \operatorname{arc\,tan}\frac{\sqrt{\frac{P}{Q}}\sin\frac{\Phi - X}{2}}{\sqrt{\frac{P}{Q}}\cos\frac{\Phi - X}{2} - 1} = \gamma.$$

Schlussbemerkungen.

Nach Obigem kann die Theorie der untersuchten isogonalen Verwandtschaft wohl als erledigt betrachtet werden. Man wird erkennen, wie jede Function complexen Arguments zu einer unerschöpflichen Quelle geometrischer Beziehungen wird, sobald man ähnliche Methoden anwendet. Zahlreiche Uebungsbeispiele aus dem Gebiete der conformen Abbildung, isothermische, elektrostatische und hydrodynamische Probleme (man vergl. die physikalischen Anmerkungen zu Fig. 1) lassen sich ohne Weiteres anschliessen, und auch für die Kinematik der entsprechenden conform veränderlichen Systeme können die wichtigsten Consequenzen sofort gezogen werden.

Für andere Verwandtschaften, die mit der behandelten zusammenhängen, sind wichtige Sätze ohne Schwierigkeit auszusprechen. Man unterwerfe z. B. die ζ-Ebene der Transformation $Z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$ und ausserdem der Abbildung $z = \frac{1}{2}\left(a\zeta + \frac{1}{a\zeta}\right)$. Aus Letzterem folgt $\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{a}$, so dass zwischen der Z- und z-Ebene folgende Relation stattfindet:

$$Z = \frac{1}{2}\left[\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{a} + \frac{a}{z + \sqrt{z^2 - 1}}\right].$$

Bei dieser isogonalen Verwandtschaft entsprechen einander gewisse confocale Kegelschnitte mit den Brennpunkten ± 1. Verschiedene Ellipsen und identische Hyperbeln entprechen einander z. B., wenn a reell ist, identische Ellipsen und verschiedene Hyperbeln, sobald a

von der Form $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ist, d. h. wenn es nur einen Drehungsfactor bedeutet. Unter jeder Bedingung entsprechen aber die oben besprochenen Systeme der Reciproken Pascal'scher Schneckenlinien in der einen Ebene solchen Systemen in der andern. Man vergleiche hierzu Jacobi's Brief an Steiner, Crell. Journal XII, pag. 137 und Burmester: „Ueber das bifocal veränderliche System", Math. Annalen XVI. Auch lässt sich von hieraus leicht die isothermische Spiegelung gegen die Ellipse und Hyperbel entwickeln.

Hagen, im Januar 1881.

Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades.

Von

J. Gierster in Bamberg.

Bekanntlich liegt der eigentliche Ausgangspunkt für die Galois'schen Resultate über die Modulargleichungen der elliptischen Functionen in der Betrachtung der zur Modulargleichung gehörigen *„Gruppe"*, deren Aufbau mit Leichtigkeit und grosser Eleganz die verschiedenen Eigenschaften der vorgelegten Gleichung erkennen lässt. So fällt namentlich die Frage nach den Resolventen der Gleichung einfach mit der Frage nach den in der Galois'schen Gruppe enthaltenen Untergruppen zusammen, indem nämlich jeder Untergruppe eine Resolvente und umgekehrt jeder Resolvente eine Untergruppe entspricht. Es ist daher von Interesse, diese Untergruppen zu kennen.

Nun sind gewisse Gattungen dieser Untergruppen durch frühere Arbeiten bekannt*). Insbesondere hat Serret die cyklischen und metacyklischen Untergruppen sorgfältig studirt. Ferner weiss man seit Galois, dass für die Transformationsgrade $q = 5, 7, 11$ Untergruppen von je $\frac{q^2-1}{2}$ (d. h. beziehungsweise von 12, 24, 60) Substitutionen existiren, während dieses für $q > 11$ — es soll hier durchweg q die Bedeutung einer Primzahl haben — nicht mehr der Fall ist.

Auf dieser letzteren Thatsache beruht namentlich der berühmte Galois'sche Satz: Dass die Modulargleichung, die von Hause aus den Grad $q+1$ hat, für die Fälle $q = 5, 7, 11$ Resolventen vom q^{ten} Grade besitzt, während dieses für Primzahlen $q > 11$ nicht mehr der Fall ist.

---

*) Man vergl. Galois in Liouville's Journal 1846, pag. 381 ff. Betti, Sopra l'abbassamento delle equazione modulari delle funzione ellitiche in Tortolini's Annali di scienze matematiche etc., Bd. 4 (1853).

J. A. Serret in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1859, 1860, sowie im zweiten Bd. seines „Cours d'Algèbre supérieure", pag. 363 ff.

Camille Jordan im Traité des substitutions et des équations algébriques 1870, pag. 344.

E. Mathieu, Comptes Rendus 1858; insbesondere Liouville's Journal 1860 und 1861.

Es blieb aber meines Wissens die Frage nach der *Gesammtheit dieser Untergruppen* unerledigt. Die vorliegende Arbeit hat sich nun die Aufgabe gestellt, diese Lücke auszufüllen. Wenn hiebei auch die alten Resultate ausführlich abgeleitet sind, so schien dies im Interesse der Vollständigkeit und Deutlichkeit der Arbeit nothwendig zu sein.

Die hauptsächlichen Resultate der Arbeit sprechen sich in folgendem Theoreme aus: *Ausser den bekannten cyklischen und metacyklischen Untergruppen können nur noch* 3 *Gattungen von Untergruppen in der Galois'schen Gruppe der Modulargleichung enthalten sein. Es sind dieses die Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergruppen von bez.* 12, 24, 60 *Substitutionen und zwar giebt es:*

1) *Tetraedergruppen für jeden Transformationsgrad* q,
2) *Oktaedergruppen, wenn* $q \equiv \pm 1$ *mod.* 8,
3) *Ikosaedergruppen, wenn* $q \equiv \pm 1$ *mod.* 5 *ist.**)

In anderer Fassung geben diese Resultate eine merkwürdige Verallgemeinerung der von Galois für $q = 5, 7, 11$ gefundenen Theoreme. Wenn es gestattet ist, Resolventen, die nicht aus cyklischen und metacyklischen Untergruppen gewonnen werden und von der Galois'schen Resolvente des Grades $\frac{q(q^2-1)}{2}$ verschieden sind, als *besondere* Resolventen zu bezeichnen, so lautet dieselbe folgendermassen:

---

*) Ich bediene mich zur Bezeichnung der Gruppen der geometrischen Ausdrucksweise, die in den Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen üblich ist. Vergl. F. Klein, Math. Annalen Bd. IX, XII; Gordan ebenda Bd. XII, C. Jordan, Borchardt's Journal Bd. 84. Die einfachsten Formeln zur Darstellung dieser Gruppen sind bekanntlich die folgenden:

1. Kreistheilungstypus: $\eta' = \varepsilon^\nu \eta, \quad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}, \quad (\nu = 0, 1, 2 \cdots n-1)$.

2. Doppelpyramidentypus: $\eta' = \varepsilon^\nu \eta$, bez. $\eta' = \frac{\varepsilon^\nu}{\eta}$.

3. Tetraedertypus: $\eta' = \pm \eta, \quad \pm \frac{1}{\eta}, \quad \pm i \frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad \pm i \frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad \pm \frac{i+\eta}{i-\eta},$
$$\pm \frac{i-\eta}{i+\eta}.$$

4. Oktaedertypus: $\eta' = i^\varrho \eta, \quad \frac{i^\varrho}{\eta}, \quad i^\varrho \frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad i^\varrho \frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad i^\varrho \frac{i+\eta}{i-\eta},$
$$i^\varrho \frac{i-\eta}{i+\eta}, \quad (\varrho = 0, 1, 2, 3).$$

5. Ikosaedertypus: $\eta' = \varepsilon^\nu \eta, \quad -\frac{\varepsilon^\nu}{\eta}, \quad \varepsilon^\mu \cdot \frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\nu}{\eta - \varepsilon^\nu(\varepsilon+\varepsilon^4)},$
$$= -\varepsilon^\mu \cdot \frac{\eta - \varepsilon^\nu(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\nu}; \quad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}},$$
$$(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4).$$

1) *Die Modulargleichung der Transformation* q^{ter} *Ordnung hat immer besondere Resolventen vom Grade* $\frac{q(q^2-1)}{24}$. *Dies liefert für* $q=5$ *Resolventen vom Grade* 5;

2) *Sie hat für jedes* $q \equiv \pm 1$ *mod.* 8 *besondere Resolventen vom Grade* $\frac{q(q^2-1)}{48}$. *Dies liefert für* $q=7$ *Resolventen vom Grade* 7.

3) *Sie hat für jedes* $q \equiv \pm 1$ *mod.* 5 *besondere Resolventen vom Grade* $\frac{q(q^2-1)}{120}$. *Dies liefert für* $q=11$ *besondere Resolventen vom Grade* 11.

4) *Ausser diesen besonderen Resolventen giebt es keine weiteren mehr.*

Die drei ersten dieser Sätze sind die Ergebnisse des Abschnittes I. der Arbeit, während der 4. Satz aus den Entwicklungen des Abschnittes II. folgt.

Ich ergreife die Gelegenheit, um Herrn Professor Felix Klein für die vielfache Anregung und Unterstützung bei meinen Arbeiten den besten Dank auszusprechen.

I. Abschnitt.

Aufzählung und Charakterisirung der thatsächlich vorhandenen Untergruppen.

§ 1.

Die Galois'sche Gruppe G der Modulargleichungen. Die Perioden ihrer Substitutionen*).

Seien die $q+1$ Wurzeln der Modulargleichung der Transformation q^{ter} Ordnung — unter q verstehen wir, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, durchgehends eine Primzahl — mit

$$w_\infty,\ w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_\omega,\ \ldots,\ w_{q-1}$$

bezeichnet, dann besteht die Galois'sche Gruppe G derselben nach Adjunction der numerischen Irrationalität $\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}\cdot q}$ aus allen verschiedenen Vertauschungen, welche diese Wurzeln erleiden, falls man die Indices ω durch

$$(1) \qquad \omega' \equiv \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \text{ mod. } q$$

*) Die Resultate dieses Paragraphen finden sich bei Serret in den citirten Abhandlungen.

ersetzt. Hierbei sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \text{ mod. } q.$$

Zwei Substitutionen $\omega_1' \equiv \frac{\alpha_1\omega + \beta_1}{\gamma_1\omega + \delta_1}$ und $\omega_2' \equiv \frac{\alpha_2\omega + \beta_2}{\gamma_2\omega + \delta_2}$ bringen nur dann dieselbe Vertauschung der Wurzeln hervor, wenn sie modulo q zu einander congruent sind, d. h. wenn entweder die Bedingungen

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2, \quad \beta_1 \equiv \beta_2, \quad \gamma_1 \equiv \gamma_2, \quad \delta_1 \equiv \delta_2 \text{ mod. } q,$$

oder

$$\alpha_1 \equiv -\alpha_2, \quad \beta_1 \equiv -\beta_2, \quad \gamma_1 \equiv -\gamma_2, \quad \delta_1 \equiv -\delta_2 \text{ mod. } q$$

stattfinden.

Als Ordnung der Gruppe ergiebt sich hieraus durch einfache Abzählung die Zahl

$$\frac{q(q^2-1)}{2}.$$

Die Eintheilung der einzelnen Substitutionen geschieht nach der Art der Wurzeln der Congruenz

$$\gamma\omega^2 + (\delta - \alpha)\,\omega - \beta \equiv 0 \text{ mod. } q. \tag{2}$$

Dem entsprechend erhält man 3 *Arten von Substitutionen.*

I) Die beiden Wurzeln der Congruenz (2) fallen zusammen; dann ist

$$\frac{\alpha + \delta}{2} = \varkappa \equiv \pm 1 \text{ mod. } q.$$

II) Diese beiden Wurzeln sind reell und von einander verschieden; dann ist

$$\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2 - 1 = \varkappa^2 - 1$$

quadratischer Rest mod. q.

III) Die beiden Wurzeln sind imaginär; dann ist

$$\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2 - 1 = \varkappa^2 - 1$$

quadratischer Nichtrest mod. q.

Da die Wurzeln der Gleichung (2) zugleich die bei der Substitution (1) festbleibenden Indices ω liefern, so ist klar, dass bei den Substitutionen der ersten Art von den $q + 1$ Indices ω nur einer festbleibt, dass ferner bei den Substitutionen der zweiten Art 2 Indices festbleiben, und dass endlich bei den Substitutionen der dritten Art alle $q + 1$ Indices Vertauschungen erleiden.

Man kann indess auch im letzten Falle von zwei festbleibenden Elementen reden, sobald man das Gebiet der Indices erweitert auf alle $q^2 + 1$ Zahlen

$$\infty, \quad a + bj,$$

wo a, b die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, q-1$ beschreiben, *während j eine*

Imaginäre im Galois'schen Sinne) ist, welche einer unten näher definirten irreductiblen Congruenz zweiten Grades modulo q genügt.*

Unter die erste Art fallen ausser der Identität $\omega' \equiv \omega$ mod. q nur noch Substitutionen der Periode q.

Bezeichnen wir nämlich die Substitution $\omega' \equiv \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ mod. q mit S, so findet man leicht unter der Voraussetzung, dass $\alpha+\delta \equiv +2$ mod. q sein soll:

$$S \equiv \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \text{ mod. } q,$$

$$S^2 \equiv \frac{(2\alpha-1)\,\omega+2\beta}{2\gamma\omega+(2\delta-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S^{(\nu)} \equiv \frac{(\nu\alpha-\nu+1)\,\omega+\nu\beta}{\nu\gamma\omega+(\nu\delta-\nu+1)}.$$

Hieraus folgt aber, dass $\nu = q$ die niederste Potenz ist, für welche $S^{(\nu)} \equiv \omega$ mod. q ist.

Die Substitutionen der zweiten Art haben $\frac{q-1}{2}$ oder einen Theiler hievon zur Periode.

Um dies zu zeigen, schreiben wir die allgemeine Substitution (1) in folgende Gestalt:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\omega'-\omega_1}{\omega'-\omega_2} \equiv M\cdot\frac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_2} \text{ oder}\\ &\omega' \equiv \frac{\frac{\omega_1 M_2-\omega_2 M_1}{\omega_1-\omega_2}\,\omega-\beta}{-\gamma\omega-\frac{\omega_2 M_2-\omega_1 M_1}{\omega_1-\omega_2}} \text{ mod. } q. \end{aligned}\right.$$

Hiebei bedeuten ω_1 und ω_2 die beiden Wurzeln der Congruenz (2), nämlich:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \gamma\omega_1 &\equiv \frac{\alpha-\delta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2-1}\\ \gamma\omega_2 &\equiv \frac{\alpha-\delta}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2-1} \end{aligned}\right\} \text{ mod. } q,$$

während M_1, M_2, M in folgender Weise definirt sind:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} M_1 &\equiv \frac{\alpha+\delta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2-1}\\ M_2 &\equiv \frac{\alpha+\delta}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2-1} = M_1^{-1}\\ M &= \frac{M_1}{M_2} = M_1{}^2. \end{aligned}\right\} \text{ mod. } q$$

*) Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois, p. 381 ff. in Liouville's Journal 1846. — Vergl. Serret, Cours d'Algèbre supérieure, tome second pag. 179; oder C. Jordan im „Traité" etc. pag. 14.

Die ν^{te} Potenz $\omega^{(\nu)}$ unserer Substitution $\omega^{(1)}$ ist dann dargestellt durch:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\omega^{(\nu)}-\omega_1}{\omega^{\nu}-\omega_2} \equiv M^{\nu}\,\dfrac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_2} \text{ mod. } q \quad \text{oder} \\[2ex] \omega^{(\nu)} = \dfrac{\dfrac{\omega_1 M_2^{\nu}-\omega_2 M_1^{\nu}}{\omega_1-\omega_2}\,\omega - \beta\cdot\dfrac{M_1^{\nu}-M_2^{\nu}}{\omega_1-\omega_2}}{-\gamma\cdot\dfrac{M_1^{\nu}-M_2^{\nu}}{\omega_1-\omega_2} - \dfrac{\omega_2 M_2^{\nu}-\omega_1 M_1^{\nu}}{\omega_1-\omega_2}} \text{ mod. } q. \end{cases}$$

Nun ist M reell und wegen (5) quadratischer Rest mod. q, also wird nach dem ersten Fermat'schen Satze:

$$(7)\qquad M^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1 \text{ mod. } q.$$

Dies heisst aber: Soll $S^{\nu} \equiv \omega$ mod. q sein, so muss $\nu = \frac{q-1}{2}$ oder ein Theiler hievon sein, was zu beweisen war.

Im dritten Falle ist die Periode $\nu = \frac{q+1}{2}$ oder ein Theiler hievon.

Hier sind — wie schon oben bemerkt wurde — die beiden Wurzeln ω_1 und ω_2 der Congruenz (2) im Sinne von Galois imaginär. Dasselbe ist mit den Grössen M_1 und M_2 der Fall. Man kann aber leicht eine Congruenz zweiten Grades mit reellen Coefficienten angeben, welcher diese Grössen genügen. Dieselbe fällt für ω_1, ω_2 mit der Congruenz (2) selbst zusammen, während aus den Congruenzen (5) für M_1 und M_2, wenn man wieder $\frac{\alpha+\delta}{2} = \varkappa$ setzt, die Congruenz

$$(8)\qquad M_1^2 - 2\varkappa M_1 + 1 \equiv 0 \text{ mod. } q$$

sich ergiebt.

Um jetzt die Perioden der Substitutionen dritter Art zu finden, bedarf man nur noch eines bekannten Satzes*) aus der Theorie der Galois'schen Imaginären, dass nämlich, wenn M_1 die Wurzel einer irreductiblen Congruenz r^{ten} Grades mod. q ist, die $r-1$ übrigen Wurzeln durch $M_1^q, M_1^{q^2}, \cdots, M_1^{q^{r-1}}$ mod. q dargestellt sind. Hiernach sind die 2 Wurzeln der Congruenz (8) einfach durch

$$M_1 \quad \text{und} \quad M_1{}^q$$

bezeichnet. Nun ist, wie aus der Congruenz (8) hervorgeht, das Product beider Wurzeln $= 1$; also kommt die Relation:

$$(9)\qquad M_1^{q+1} \equiv 1 \text{ mod. } q$$

oder

$$(9\text{a})\qquad M^{\frac{q+1}{2}} \equiv 1 \text{ mod. } q,$$

was zu beweisen war.

*) Man vergl. etwa Serret, Cours d'Algèbre. t. sec. pag. 180.

Bemerkt man jetzt noch, dass aus bekannten Gründen die Congruenzen (7) und (9a) immer Wurzeln besitzen, welche zum Exponenten $\frac{q-1}{2\sigma}$ bez. $\frac{q+1}{2\tau}$ gehören, wo σ und τ beliebige Theiler von $\frac{q-1}{2}$ bez. $\frac{q+1}{2}$ sind, so folgt: *Dass in der Gruppe G immer Substitutionen der Perioden q, $\frac{q-1}{2\sigma}$, $\frac{q+1}{2\tau}$ enthalten sind.*

Substitutionen der zwei letzteren Arten erhält man einfach, wenn man in (3) die Grösse M durch eine zum Exponenten $\frac{q-1}{2\sigma}$ bez. $\frac{q+1}{2\tau}$ gehörige Wurzel der Congruenz (7) bez. (9a) ersetzt.

§ 2.

Transformationen der Gruppe G in sich.

Seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_\nu, \cdots, \vartheta_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ die Substitutionen unserer Gruppe G, sei ferner W irgend eine weitere Substitution, so bilden die $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Substitutionen

$$W^{-1}\vartheta_\nu W \tag{10}$$

nach bekannten Principien wieder eine Gruppe, welche *die transformirte Gruppe heisst in Bezug auf die Substitution W.* Ist speciell W eine der Substitutionen ϑ, so wird die Gruppe offenbar in sich selbst transformirt.

Man kann diese Transformation der Gruppe G in sich so einrichten, dass eine beliebige Substitution der Periode q entweder mit

$$\omega' = \omega + 1 \quad \textit{oder mit} \quad \omega' = \omega + n$$

zusammenfällt, wo n irgend ein bestimmter quadratischer Nichtrest mod. q ist und zwar richtet sich dies nach dem quadratischen Charakter von β.

In der That geht $S = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ für $\alpha + \delta \equiv +2$ mod. q durch die Substitution $W^{-1} S W$ in $\omega + \varkappa$ über, wenn

$$W^{-1} \equiv \frac{a\omega + b}{\frac{\alpha - 1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\varkappa}{\beta}}\,\omega + \sqrt{\frac{\beta}{\varkappa}}} \text{ mod. } q$$

gesetzt wird, und man erkennt, dass $\varkappa \equiv 1$ oder $\varkappa \equiv n$ mod. q genommen werden kann, je nachdem β quadratischer Rest oder Nichtrest mod. q ist.

Hiernach können wir alle Substitutionen der Periode q in der Gestalt schreiben:

$$\vartheta^{-1}T\vartheta = \frac{(1+ad\varkappa)\omega + d^2\varkappa}{-c^2\varkappa\omega + (1-ad\varkappa)}, \tag{11}$$

wo $T \equiv \omega + \varkappa$ und $\vartheta \equiv \dfrac{a\omega+b}{c\omega+d}$ mod. q ist.

Es sollen nunmehr zwei Substitutionen T und T' gleichberechtigt heissen, wenn sie einer Identität

$$W^{-1}TW = T'$$

genügen, wo W ebenfalls eine Substitution unserer Gruppe G ist. Dann erhalten wir das Resultat:

Es giebt zwei Gattungen von gleichberechtigten Substitutionen der Periode q. Die Substitutionen jeder Gattung können in der Gestalt (11) dargestellt werden und zwar ist für die eine Gattung $\varkappa$ quadratischer Rest mod. q, für die andere quadratischer Nichtrest.

In analoger Weise kann man die Gruppe G so in sich transformiren, dass eine beliebige Substitution der Periode $\frac{q-1}{2\sigma}$ die Gestalt

$$T \equiv \frac{\lambda^{\nu}\omega}{\lambda^{-\nu}} \quad \text{oder} \quad T^{-1} \equiv \frac{\lambda^{-\nu}\omega}{\lambda^{\nu}} \text{ mod. } q$$

annimmt, wo ν einen festen Werth mod. $\frac{q-1}{2}$ hat. Die Grösse λ bedeutet hier wie im Folgenden immer eine *Primitivwurzel* der Congruenz

$$\lambda^{q-1} \equiv 1 \text{ mod. } q. \tag{12}$$

Sei nämlich $S = \dfrac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ eine Substitution der Periode $\frac{q-1}{2\sigma}$, und es sei (Gln. (5) und (7)) $\alpha+\delta = \lambda^{\nu}+\lambda^{-\nu}$, dann geht S durch die Transformation (10) in T über, wenn

$$W^{-1} \equiv \frac{u(\omega-\omega_2)}{v(-\omega+\omega_1)}, \quad u\cdot v \equiv \frac{1}{\omega_1-\omega_2} \text{ mod. } q$$

gesetzt wird, wobei ω_1 und ω_2 wieder die Wurzeln der Congruenz (2) bedeuten. Hingegen wird die Ueberführung von T in T^{-1} durch

$$W \equiv -\frac{1}{\omega} \text{ mod. } q$$

geleistet. Dass aber ferner ν einen festen Werth mod. $\frac{q-1}{2}$ hat, geht schon einfach daraus hervor, dass bei den Transformationen (10) die Summe $\alpha+\delta$ erhalten bleibt, wie man sofort sieht. Es kann aber nicht $\lambda^{\nu}+\lambda^{-\nu} \equiv \pm(\lambda^{\nu_1}+\lambda^{-\nu_1})$ mod. q sein, ausser wenn $\nu_1 \equiv \pm\nu$ mod. $\frac{q-1}{2}$ ist. Denn diese Bedingung schreibt sich in die Gestalt:

$$\left(\lambda^{\frac{\nu+\nu_1}{2}} \pm \lambda^{-\frac{\nu+\nu_1}{2}}\right)\left(\lambda^{\frac{\nu-\nu_1}{2}} \pm \lambda^{-\frac{\nu-\nu_1}{2}}\right) \equiv 0 \text{ mod. } q.$$

Wir erhalten also das Resultat: *Die Substitutionen der Perioden $\frac{q-1}{2\sigma}$ theilen sich in $\dfrac{q-2+\left(\frac{-1}{q}\right)}{4}$ Gattungen von gleichberechtigten Substitu-*

tionen. Für jede einzelne Gattung ist $\pm(\alpha+\delta)=\lambda^\nu+\lambda^{-\nu}$ mod. q dieselbe Grösse. Dabei bedeutet $\left(\frac{-1}{q}\right)$ das Legendre'sche Zeichen.

Ich greife den Ergebnissen der folgenden Paragraphen vor, wenn ich das letzte Resultat auf die Substitutionen der Periode $\frac{q+1}{2\tau}$ übertrage. Es lautet folgendermassen: *Die Substitutionen der Perioden* $\frac{q+1}{2\tau}$ *theilen sich in* $\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{4}$ *Gattungen von gleichberechtigten Substitutionen.* Für jede einzelne Gattung ist $\pm(\alpha+\delta)$ dieselbe Grösse.

§ 3.

Imaginäre Gestalt der Gruppe G.

Aus § 2. ersehen wir, dass die Substitutionen der zweiten Art in der Gruppe G einen höchst einfachen Grundtypus

$$T\equiv\frac{\lambda^\nu\omega}{\lambda^{-\nu}} \text{ mod. } q$$

zulassen. Ein gleich einfacher Typus existirt jedoch nicht für die Substitutionen der dritten Art. Dies ist ein Umstand, welcher einerseits das Studium dieser letzteren Gattung von Substitutionen wesentlich erschwert, andrerseits die Analogie zwischen den letzten zwei Gattungen von Substitutionen nicht genügend hervortreten lässt. *Es ist daher zweckmässig, neben der ursprünglichen Gestalt der Gruppe G andere imaginäre Gestalten derselben zu betrachten,* in denen die Substitutionen der dritten Art einen ebenso einfachen Repräsentanten zulassen, wie die Substitutionen zweiter Art in der ursprünglichen.

Zu diesen imaginären Gestalten der Gruppe G wird man aber durch die Entwickelungen des § 2. unmittelbar hinübergeführt. Nämlich auch in dem Falle, wo

$$S\equiv\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \text{ mod. } q$$

eine Substitution der Periode $\frac{q+1}{2\tau}$ ist, so dass (nach Gln. (5) u. (9))

$$\alpha+\delta=M_1+M_2=j^\nu+j^{-\nu}$$

wird, leitet eine Substitution

$$W^{-1}\equiv\frac{u(\omega-\omega_2)}{v(-\omega+\omega_1)} \text{ mod. } q,$$

wo $u\cdot v\equiv\frac{1}{\omega_1-\omega_2}$ mod. q ist und ω_1, ω_2 die alte Bedeutung des § 2 haben, die Transformation von S in die Gestalt:

$$T \equiv \frac{j^{\nu}\omega}{j^{-\nu}} \text{ mod. } q.$$

Hiebei soll die Grösse j wie im Folgenden durchgehends eine *primitive* Wurzel der Congruenz

(11) $$j^{q+1} \equiv 1 \text{ mod. } q$$

sein. Diese Transformationen sind aber von jenen des vorigen Paragraphen dadurch wesentlich verschieden, dass W nicht der ursprünglichen Gruppe G angehört, da ω_1 und ω_2 imaginär sind. Transformirt man also die Gruppe G in Bezug auf éine Substitution W, so erhält man eine *neue* transformirte Gruppe, welche die gewünschte Eigenschaft hat. Die Substitutionen dritter Art haben dann den einfachen Repräsentanten

$$T \equiv \frac{j^{\nu}\omega}{j^{-\nu}} \text{ mod. } q.$$

Wir specialisiren die Substitution W noch etwas, indem wir

$$u = v = (\omega_1 - \omega_2)^{-\frac{1}{2}}$$

setzen, so dass

(14) $$W_0^{-1} = \frac{(\omega - \omega_2)(\omega_1 - \omega_2)^{-\frac{1}{2}}}{(-\omega + \omega_1)(\omega_1 - \omega_2)^{-\frac{1}{2}}} \text{ mod. } q$$

wird. Dann erhalten wir aus einer beliebigen reellen Substitution

(15a) $$U = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \qquad (ad - bc = 1)$$

der ursprünglichen Gruppe die transformirte

$$W_0^{-1}\, U W_0 = \frac{A\omega + B}{C\omega + D},$$

wo A, B, C, D die folgenden Bedeutungen haben:

(15b) $$\begin{cases} A = \frac{a+d}{2} + \left[(a-d)\cdot\frac{\alpha-\delta}{2} + b\gamma + c\beta\right]\zeta, \\ D = \frac{a+d}{2} - \left[(a-d)\cdot\frac{\alpha-\delta}{2} + b\gamma + c\beta\right]\zeta, \\ B = \frac{c\omega_2^2 + (d-a)\,\omega_2 - b}{\omega_2 - \omega_1}, \\ C = \frac{c\omega_1^2 + (d-a)\,\omega_1 - b}{\omega_1 - \omega_2}. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet ζ die Grösse:

(16) $$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa^2 - 1}} = \frac{1}{M_1 - M_2} = \frac{1}{j^{\nu} - j^{-\nu}}.$$

Man sieht, dass ζ^2 reell und quadratischer Nichtrest mod. q ist, und dass bei Zugrundelegung anderer und anderer Substitutionen S die Grösse ζ^2 jeden quadratischen Nichtrest mod. q bedeuten kann.

Aus den für A, B, C, D erhaltenen Ausdrücken erkennt man zunächst, dass A, D conjugirt imaginär sind, ebenso B, C. Denn symmetrische Functionen von A, D sowie von B, C sind symmetrische Functionen von ζ, ζ^{-1} bez. ω_1, ω_2; sie sind also reell.

Ich behaupte aber auch umgekehrt: Sobald A, D und B, C paarweise conjugirt imaginäre Grössen der Determinante $AD - BC = 1$ sind, so gehört die Substitution

$$\omega' \equiv \frac{A\omega + B}{C\omega + D} \text{ mod. } q$$

unserer Gruppe an.

In der That ist nämlich die hinreichende Bedingung dafür, dass die Substitution

$$V \equiv \frac{A\omega + B}{C\omega + D} \equiv \frac{(m + n\zeta)\,\omega + (r + s\zeta)}{(r - s\zeta)\,\omega + (m - n\zeta)} \text{ mod. } q$$

unserer Gruppe angehört, die, dass sie sich in die Form:

$$W_0^{-1}\, U\, W_0 = V$$

schreiben lässt, wo U eine (reelle) Substitution der Gruppe G ist. Also muss

$$U = W_0^{+1}\, V\, W_0^{-1}$$

eine reelle Substitution sein. Dies ist aber in der That der Fall. Man findet nämlich:

$$U \equiv \frac{[m - r + (n - s)(\alpha - \delta)\zeta^2]\,\omega + \left[r \cdot \frac{\alpha - \delta}{\gamma} + \left(2n\beta + \frac{\alpha^2 + \delta^2 - 2}{\gamma}\, s\right)\zeta^2\right]}{2(n - s)\gamma\zeta^2\omega + [m + r - (n - s)(\alpha - \delta)\zeta^2]} \text{ mod. } q.$$

Die Gruppe in imaginärer Gestalt besteht daher aus allen Substitutionen der Form:

(A) $$\omega' \equiv \frac{(m + n\zeta)\,\omega + (r + s\zeta)}{(r - s\zeta)\,\omega + (m - n\zeta)} \text{ mod. } q,$$

wo $\zeta = \frac{1}{j^\nu - j^{-\nu}}$*, also die Quadratwurzel aus einem bestimmten quadratischen Nichtrest mod.* q *ist, während* m, n, r, s *reelle Grössen bedeuten; oder aus allen Substitutionen der Gestalt*

(B) $$\omega' \equiv \frac{(g + hj)\,\omega + (k + lj)}{(k + lj^{-1})\,\omega + (g + hj^{-1})} \text{ mod. } q,$$

wo g, h, k, l *reelle Grössen sind und* j *eine primitive Wurzel der Congruenz* (13) *bedeutet.* Vorausgesetzt ist hiebei selbstverständlich, dass die Determinante dieser Substitutionen gleich 1 ist.

Die Formeln (A), (B) *haben zunächst nur die Bedeutung, dass sie, bei unbestimmtem* ω, $\frac{q(q^2-1)}{2}$ *Operationen definiren, die eine mit der ursprünglichen Gruppe isomorphe Gruppe bilden. Will man sie benützen,* *um die Permutationen der $q+1$ Wurzeln der Modulargleichung zu repräsentiren, so darf man diese nicht mehr durch die Indices $\infty, 0, 1, \cdots \cdots q-1$ unterscheiden; man muss vielmehr die imaginären Grössen:*

$$1, j, j^2, j^3, \cdots, j^q$$

als Indices ω einführen.

Die einzuführenden $q+1$ Indices sind nämlich bekanntermassen nichts anderes als jene $q+1$ Grössen W_0', die aus

$$W_0 \equiv \frac{(\omega-\omega_2)(\omega_1-\omega_2)^{-\frac{1}{2}}}{(-\omega+\omega_1)(\omega_1-\omega_2)^{-\frac{1}{2}}} \text{ mod. } q$$

hervorgehen, wenn man an Stelle von ω die Grössen $\infty, 0, 1, \cdots a, \cdots \cdots q-1$ setzt. Allein diese Grössen sind sämmtlich Wurzeln der Congruenz

$$W_0'^{\,q+1} \equiv 1 \text{ mod. } q.$$

In der That kommt:

$$W_0'^{\,q+1} \equiv \left[\frac{a-\omega_2}{-a+\omega_1}\right]^{q+1} \equiv \left[\frac{a-\omega_2}{-a+\omega_1}\right]^q \cdot \left[\frac{a-\omega_2}{-a+\omega_1}\right]$$

$$\equiv \frac{a^q-\omega_2{}^q}{-a^q+\omega_1{}^q} \cdot \frac{a-\omega_2}{-a+\omega_1} \text{ mod. } q.$$

Nun ist aber nach demselben Satze, welcher am Schlusse des § 1. zur Anwendung kam

$$\omega_1{}^q \equiv \omega_2 \quad \text{und} \quad \omega_2{}^q \equiv \omega_1 \text{ mod. } q,$$

ausserdem ist nach dem ersten Fermat'schen Satze

$$a^q \equiv a \text{ mod. } q.$$

Also ergiebt sich:

$$W'^{\,q+1} \equiv \frac{a^q-\omega_2{}^q}{-a^q+\omega_1{}^q} \cdot \frac{a-\omega_2}{-a+\omega_1} \equiv \frac{a-\omega_1}{-a+\omega_2} \cdot \frac{a-\omega_2}{-a+\omega_1} \equiv 1 \text{ mod. } q.$$

Da ferner die $q+1$ Grössen W_0' nothwendig verschieden sind, so müssen sie in gehöriger Reihenfolge mit den $q+1$ Grössen:

$$1, j, j^2, \cdots, j^q$$

übereinstimmen, was zu beweisen war.

Ich füge noch eine Bemerkung hinzu, welche die hier betrachteten imaginären Gruppenformen noch in anderem Lichte zeigt. *Wenn man zu den Substitutionen der Gruppe G noch die Substitution W selbst hinzufügt, so erhält man eine umfassendere Gruppe*), welche die schon in § 1. angedeuteten q^2+1 Indices*

$$\infty, a+bj$$

---

*) Diese umfassendere Gruppe fällt unter die von E. Mathieu in Liouville's Journal, s. II, t. V, p. 38 und t. VI, p. 261 behandelten Gruppen, welche $q^\nu+1$ Indices permutiren.

(wo a, b alle Zahlen $0, 1, 2, \cdots, q-1$ beschreiben) *mit einander permutirt. In ihr erscheinen die Gruppe G und ihre in diesem Paragraphen behandelten Transformirten in imaginärer Gestalt als „gleichberechtigte Untergruppen.“*

§ 4.

Einige Eigenschaften „der Gruppe in imaginärer Gestalt“.

Ich will in diesem Paragraphen einige Eigenschaften der „Gruppe in imaginärer Gestalt“ ableiten, die uns später von Nutzen sein werden.

a) *Ist*

$$\omega' \equiv \frac{A\omega + B}{C\omega + D} \equiv \frac{(g+hj)\,\omega + (k+lj)}{(k+lj^{-1})\,\omega + (g+hj^{-1})}$$

eine Substitution der imaginären Gruppe G_1, so sind alle jene Substitutionen derselben, welche dasselbe A und dasselbe D besitzen, durch

$$\omega' \equiv \frac{A\omega + Bj^{\mu}}{Cj^{-\mu}\omega + D} \text{ mod. } q$$

dargestellt, wo μ (nach Gl. (13)) *alle Zahlen mod. $(q+1)$ bedeutet.*

Sei nämlich

$$\omega' \equiv \frac{A\omega + B'}{C'\omega + D} \equiv \frac{(g+hj)\,\omega + (k'+l'j)}{(k'+l'j^{-1})\,\omega + (g+hj^{-1})}$$

eine weitere derartige Substitution. Dann betrachten wir den Ausdruck:

$$\left(\frac{B'}{B}\right)^{q+1} \equiv \left(\frac{B'}{B}\right) \cdot \left(\frac{B'^{q}}{B^{q}}\right) \text{ mod. } q\,.$$

Nun ist

$$B'^{q} \equiv (k' + l'j)^{q} \equiv k'^{q} + l'^{q} \cdot j^{q} \text{ mod. } q,$$

oder, da nach dem ersten Fermat'schen Satze

$$k'^{q} \equiv k' \quad \text{und} \quad l'^{q} \equiv l' \text{ mod. } q$$

und nach Gl. (13) $j^{q} \equiv j^{-1}$ mod. q ist,

$$B'^{q} \equiv k' + l'j^{-1} \equiv C' \text{ mod. } q.$$

Ebenso ist auch

$$B^{q} \equiv C \text{ mod. } q.$$

Also folgt:

$$\left(\frac{B'}{B}\right)^{q+1} \equiv \frac{B'}{B} \cdot \frac{C'}{C} \equiv \frac{B'C'}{BC} \text{ mod. } q,$$

oder wegen $B'C' \equiv AD - 1 \equiv BC$ mod. q,

$$\left(\frac{B'}{B}\right)^{q+1} \equiv 1 \text{ mod. } q.$$

Hieraus aber kommt:

$$B' \equiv j^{\mu} B$$

und mithin auch

$$C' \equiv j^{-\mu} C,$$

was zu beweisen war.

b) *Aus denselben Gründen sind alle Substitutionen der Gruppe G_1 mit festen Werthen B, C aus einer unter ihnen* $\left(\omega' \equiv \frac{A\omega + B}{C\omega + D}\right)$ *in folgender Weise darstellbar:*

$$\omega' \equiv \frac{Aj^{\mu}\omega + B}{C\omega + Dj^{-\mu}} \text{ mod. } q.$$

c) *Wie auch g und h in $A = g + hj$, $D = g + hj^{-1}$ mod. q gewählt sein mögen, es lässt sich immer ein passendes System $B = k + lj$, $C = k + lj^{-1}$ mit reellen Werthen k, l so finden, dass $AD - BC \equiv 1$ mod. q ist, dass also $\omega' = \frac{A\omega + B}{C\omega + D}$ eine Substitution der Gruppe G_1 ist.*

In der That hat die Congruenz $BC \equiv AD - 1$ mod. q oder

$$k^2 + l^2 - 2\varkappa kl \equiv AD - 1 \text{ mod. } q, \tag{17}$$

wo $\varkappa$ (nach § 1) $= \frac{j + j^{-1}}{2} = \frac{\alpha + \delta}{2}$ ist, immer reelle Lösungen k, l. Ist $AD - 1$ quadratischer Rest mod. q, so ist $k = \sqrt{AD - 1}$, $l = 0$ eine Lösung. Ist aber $AD - 1$ quadratischer Nichtrest mod. q, so schreiben wir die Congruenz (17) in folgende Form:

$$\frac{(k - \varkappa l)^2}{AD - 1} \equiv \frac{\varkappa^2 - 1}{AD - 1} l^2 + 1 \text{ mod. } q.$$

Nun ist hier (§ 1.) $\varkappa^2 - 1$ quadratischer Nichtrest mod. q, also wird $\frac{\varkappa^2 - 1}{AD - 1}$ quadratischer Rest mod. q. Es giebt ferner in der Zahlenreihe

$$1, 2, 3, \cdots, q - 1 \text{ mod. } q,$$

sobald $q > 2$ ist, was hier allgemein angenommen werden mag, jedenfalls einen quadratischen Rest R, auf den ein Nichtrest $R + 1$ folgt. Dies giebt die reelle Lösung

$$l \equiv \sqrt{\frac{AD - 1}{\varkappa^2 - 1} R}; \quad k \equiv \varkappa l + \sqrt{(AD - 1)(R + 1)},$$

was zu beweisen war.

Giebt es aber eine Lösung, so giebt es, wenn nicht $k = l = 0$ ist, nach den vorhergehenden Sätzen gerade $q + 1$ Lösungen.

d) Aus diesen Entwickelungen folgt noch:

Die Gruppe G_1 enthält $\frac{q+1}{2}$ Substitutionen der Form $\omega' \equiv \frac{A\omega}{D}$ und ebensoviele der Form $\omega' \equiv \frac{B}{C\omega}$. Es sind dieses die Substitutionen

$$\omega' = \frac{j^{\mu}\omega}{j^{-\mu}} \quad \text{und} \quad \omega' = \frac{(k + lj)j^{\mu}}{(k + lj^{-1})j^{-\mu}\omega}, *)$$

*) Die Grössen $k + lj$ und $k + lj^{-1}$ unterscheiden sich selbst nur um einen Factor j^{μ}, so dass $k + lj = (k + lj^{-1})j^{\mu}$ ist.

wo $(k + lj)(k + lj^{-1}) \equiv -1 \bmod. q$ ist. Ist $q \equiv 1 \bmod. 4$, so kann man die Substitutionen der letzten Art so schreiben:

$$\omega' = \frac{\sqrt{-1} \cdot j^{\mu}}{\sqrt{-1} \cdot j^{-\mu} \omega}.$$

e) *Ist*

$$U \equiv \frac{(m + n\zeta)\omega + (r + s\zeta)}{(r - s\zeta)\omega + (m - n\zeta)}, \quad wo \quad \zeta = \frac{1}{j - j^{-1}} \ ist,$$

eine Substitution der Periode $\frac{q+1}{2\tau}$, *so dass nach* § 2. $m = \frac{j^{\nu} + j^{-\nu}}{2}$ *ist, so giebt es immer Substitutionen* W *der Gruppe* G_1, *so dass*

$$W^{-1} U W \equiv \frac{j^{\nu}\omega}{j^{-\nu}} = T \left(\text{oder} = T^{-1} \equiv \frac{j^{-\nu}\omega}{j^{\nu}}\right)$$

wird.

Um eine solche Substitution zu erhalten, verfahre man in folgender Weise:

Man zerlege nach (c) die reellen Grössen

$$\left.\begin{aligned} G &\equiv \frac{n}{(j^{\nu} - j^{-\nu})(j - j^{-1})} + \frac{1}{2}, \\ E &\equiv \frac{n}{(j^{\nu} - j^{-\nu})(j - j^{-1})} - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \bmod. q$$

in je 2 conjugirt imaginäre Factoren

$$\left.\begin{aligned} G &\equiv (\mu + \lambda\zeta)(\mu - \lambda\zeta) \\ E &\equiv (\varrho + \sigma\zeta)(\varrho - \sigma\zeta) \end{aligned}\right. \bmod. q.$$

Sodann setze man

$$A = \mu + \lambda\zeta; \ D = \mu - \lambda\zeta; \ B = j^{\tau}(\varrho + \sigma\zeta); \ C = j^{-\tau}(\varrho - \sigma\zeta),$$

wo τ in der Weise bestimmt ist, dass

$$BD \equiv \frac{r + s\zeta}{j^{\nu} - j^{-\nu}} \left(\text{oder} \equiv \frac{-r + s\zeta}{j^{\nu} - j^{-\nu}}\right)$$

wird, so ist, wie eine leichte Rechnung bestätigt,

$$W^{-1} \equiv \frac{A\omega + B}{C\omega + D}$$

eine Substitution der verlangten Eigenschaft.

Dass die letzte Bedingung

$$BD \equiv \frac{r + s\zeta}{j^{\nu} - j^{-\nu}}$$

immer erfüllbar ist, ergiebt sich auf folgende Weise. Es ist

$$AD \cdot BC = G \cdot E = \frac{n^2\zeta^2 - \left(\frac{j^{\nu} + j^{-\nu}}{2}\right)^2 + 1}{(j^{\nu} - j^{-\nu})^2}$$

$$= \frac{n^2\zeta^2 - m^2 + 1}{(j^{\nu} - j^{-\nu})^2} = -\frac{r^2 - \zeta^2 s^2}{(j^{\nu} - j^{-\nu})^2}.$$

Nun ist BD zu AC conjugirt imaginär, also giebt es nach (c) ein ε so beschaffen, dass gleichzeitig

$$BD \cdot j^{\varepsilon} = \frac{r + s\zeta}{j^{\nu} - j^{-\nu}}; \quad AC \cdot j^{-\varepsilon} = - \frac{r - s\zeta}{j^{\nu} - j^{-\nu}}$$

ist.

Bei geeigneter Wahl des unbestimmt gelassenen Exponenten τ in den Ausdrücken für B und C wird nun $\varepsilon = 0$ werden.

Hieraus folgt die Richtigkeit des schon in § 3. angeführten Satzes über die Substitutionen der Periode $\frac{q+1}{2}$.

§ 5.

Die mit einer gegebenen Substitution vertauschbaren Substitutionen der Gruppe.

Für die Aufstellung von Untergruppen ist es von grosser Wichtigkeit, die mit einer gegebenen Substitution S und noch allgemeiner die mit einer gegebenen cyklischen Gruppe $(S, S^2, S^3, \cdots)$ vertauschbaren Substitutionen Θ der Hauptgruppe zu untersuchen. Einmal bilden nämlich diese Substitutionen Θ selbst wieder Gruppen, dann aber können die Anzahlen dieser Substitutionen zur Aufstellung gewisser diophantischer Bedingungsgleichungen verwendet werden, denen die Ordnung einer Untergruppe genügen muss.

Diese Substitutionen Θ können hier sehr leicht mit Hülfe des folgenden Satzes*) aufgestellt werden: Ist Θ mit S vertauschbar, so lässt Θ die bei der Substitution S festbleibenden Indices entweder auch fest, oder aber sie permutirt dieselben unter einander.

Dieser Satz bleibt auch aufrecht erhalten, wenn nur eine Relation der Art

$$\Theta^{-1} S \Theta = S^{\varkappa}$$

bestehen soll, d. h. wenn Θ mit dem Cyklus $(S, S^2, S^3, \cdots)$ vertauschbar ist.

Wir unterscheiden jetzt wieder die 3 Arten von Substitutionen:

1) Die Substitutionen der Periode q haben den Grundtypus:

$$S \equiv \omega + \tau \text{ mod. } q.$$

Die 2 festbleibenden Elemente von S sind ∞, ∞. *Die mit S vertauschbaren Substitutionen Θ sind also die folgenden q:*

$$\Theta \equiv \omega + \beta \quad (\beta = 0, 1, 2, \cdots, q - 1).$$

---

*) Vergl. Lie und Klein, Math. Annalen IV, Ueber Curven mit linearen Substitutionen in sich.

Ferner müssen die Substitutionen Θ, *welche einer Relation* $\Theta^{-1} S \Theta = S^{\varkappa}$ *genügen, die Gestalt haben*

$$\Theta \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\delta} \text{ mod. } q\,.$$

Man findet leicht die Relation:

$$\Theta^{-1} S \Theta = S^{\delta^2}.$$

Die Anzahl dieser Substitutionen Θ *wird (inclusive der Identität) durch* $\frac{q(q-1)}{2}$ *dargestellt.*

2) Die Substitutionen der Periode $\frac{q-1}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{q-1}{2\sigma}\right)$ haben den Grundtypus:

$$S^{\nu} \equiv \frac{\lambda^{\nu}\omega}{\lambda^{-\nu}} \text{ mod. } q\,,$$

und die festbleibenden Elemente sind hier $0, \infty$. Also hat Θ eine der Gestalten:

$$\text{(1)} \qquad \Theta \equiv \frac{\lambda^{\mu}\omega}{\lambda^{-\mu}} = S^{\mu},$$

$$\text{(2)} \qquad \Theta \equiv \frac{-\lambda^{\mu}}{\lambda^{-\mu}\omega} = S^{\mu}T \quad \text{(Periode 2)},$$

wo $T = -\frac{1}{\omega}$ mod. q ist.

Man findet leicht: *Im ersten Falle wird* $\Theta^{-1} S \Theta = S$, *im zweiten Falle aber* $\Theta^{-1} S \Theta = S^{-1}$. — *Die Zahl der Lösungen* $\Theta^{-1} S \Theta = S$ *ist (inclusive der Identität) gleich* $\frac{q-1}{2}$, *und ebenso ist die Zahl der Lösungen* $\Theta^{-1} S \Theta = S^{\varkappa}$ *gleich* $2 \cdot \frac{q-1}{2} = q - 1$, *und zwar ist nur* $\varkappa = 1$ *oder* $\varkappa = -1$ *möglich.*

3) Wir betrachten endlich die Substitutionen der Periode $\frac{q+1}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{q+1}{2\tau}\right)$. Auf diese lässt sich unmittelbar das eben für die Substitutionen der Periode $\frac{q-1}{2}$ erhaltene Resultat übertragen, wenn man die imaginäre Gestalt der Gruppe ins Auge fasst. Wir erhalten nämlich dann den Grundtypus:

$$S^{\nu} \equiv \frac{j^{\nu}\omega}{j^{-\nu}}\,.$$

Das Resultat lautet daher: *Die Substitutionen* Θ *haben eine der beiden Gestalten:*

$$\text{(1)} \qquad \Theta \equiv \frac{j^{\mu}\omega}{j^{-\mu}} = S^{(\mu)},$$

$$\text{(2)} \qquad \Theta \equiv \frac{(k + lj)j^{\mu}}{(k + lj^{-1})j^{-\mu}\omega} \quad \text{(Periode 2)}.$$

Die Substitutionen der ersten Art liefern die Relation:

$$\Theta^{-1} S \Theta = S,$$

die der zweiten Art:

$$\Theta^{-1} S \Theta = S^{-1}.$$

Inclusive der Identität ist die Zahl der Lösungen Θ *der ersteren Art* $\frac{q+1}{2}$; *die Zahl der Lösungen der letzteren Art ist ebenso gross.*

Anm. Ich will hier noch eine Folgerung anfügen, welche wir später verwenden werden. Sind S_1 und S_2 zwei Substitutionen unserer Gruppe, so folgt aus der Gleichung

$$S_1^\sigma = S_2^\sigma$$

die folgende

$$S_1 = S_2^\mu$$

(wo $\mu \equiv 1 \bmod. \frac{\pi}{\sigma}$, und π die Periode von S_1 bedeutet), vorausgesetzt, dass S_1^σ nicht die Identität selbst ist.

Offenbar haben nämlich S_1^σ, S_2^σ und damit S_1, S_2 dieselben festbleibenden Elemente und ferner haben sie dieselbe Periode π. Nun sind aber hier alle Substitutionen mit denselben festbleibenden Elementen die Potenzen einer unter ihnen, und hieraus folgt weiterhin nach bekannten Entwicklungen, dass alle Substitutionen mit denselben festbleibenden Elementen und derselben Periode π die Potenzen einer beliebigen unter ihnen sind.

§ 6.

Die Anzahl der Substitutionen jeder Art. Die cyklischen Gruppen.

Wir können die Resultate des § 5. verwenden, um die Anzahl der Substitutionen jeder der drei Arten auf sehr einfachem Wege zu bestimmen. Dabei bezeichne ich, wie in § 2., mit ϑ_ν die Substitutionen der gegebenen Gruppe G.

Wenden wir uns nun zunächst den Substitutionen der Periode q zu. Sei zu diesem Zwecke

$$S \equiv \omega + \tau \bmod. q,$$

so bilden wir die $(q-1) \cdot \frac{q \cdot (q^2-1)}{2}$ Substitutionen

$$\vartheta_\nu^{-1} S \vartheta_\nu; \;\; \vartheta_\nu^{-1} S^2 \vartheta_\nu; \;\; \cdots \;\; \vartheta_\nu^{-1} S^{q-1} \vartheta_\nu,$$

wo ϑ_ν alle Substitutionen der gegebenen Gruppe beschreibt. Alle diese Substitutionen haben die Periode q. Sie sind aber zu je $\frac{q(q-1)}{2}$ identisch. In der That wird dann und nur dann eine Relation

$$\vartheta_\nu^{-1} S^\varrho \vartheta_\nu = \vartheta_\mu^{-1} S^{\varrho_1} \vartheta_\mu$$

bestehen, wenn

$$\vartheta_\mu \vartheta_\nu^{-1} S^\varrho \vartheta_\nu \vartheta_\mu^{-1} = S^{\varrho_1}$$

ist, d. h. wenn $\vartheta_\mu \vartheta_\nu^{-1}$ eine Substitution Θ des vorigen Paragraphen ist. Aber die Anzahl dieser Substitutionen Θ ist (nach § 5.) gleich $\frac{q(q-1)}{2}$ und also ist unsere Behauptung erwiesen. *Wir erhalten daher durch unseren Process gerade $q^2 - 1$ verschiedene Substitutionen der Periode q.*

Geradeso können wir jetzt eine Substitution der Periode $\frac{q-1}{2}$ behandeln, etwa

$$T \equiv \frac{\lambda^\nu \omega}{\lambda^{-\nu}} \text{ mod. } q,$$

wo λ wieder die Bedeutung des § 5. hat. Wir bilden nämlich die $\frac{q(q^2-1)}{2} \cdot \frac{q-3}{2}$ Substitutionen $\vartheta_\nu^{-1} T \vartheta_\nu$, $\vartheta_\nu^{-1} T^2 \vartheta_\nu$, $\cdots$, $\vartheta_\nu^{-1} T^{\frac{q-3}{2}} \vartheta_\nu$. Dieselben fallen zu je $q - 1$ zusammen und zwar aus ganz analogen Gründen, wie oben. *Wir erhalten daraus*

$$\frac{q-3}{2} \cdot \frac{q(q^2-1)}{2} : (q-1) = \frac{q(q+1)(q-3)}{4}$$

Substitutionen der zweiten Art d. h. Substitutionen der Periode $\frac{q-1}{2}$ oder $\frac{q-1}{2\sigma}$, wo σ ein von $\frac{q-1}{2}$ verschiedener Theiler von $\frac{q-1}{2}$ ist.

Endlich behandeln wir auch eine Substitution der Periode $\frac{q+1}{2}$ in dieser Weise und *erhalten*

$$\frac{(q-1)^2 \cdot q}{4}$$

Substitutionen der dritten Art, d. h. Substitutionen der Periode $\frac{q+1}{2}$ oder $\frac{q+1}{2\tau}$, wo τ ein von $\frac{q+1}{2}$ verschiedener Theiler von $\frac{q+1}{2}$ ist.

Rechnet man zu den 3 erhaltenen Anzahlen von Substitutionen noch die Identität, so kommt als Anzahl sämmtlicher Substitutionen die Zahl $\frac{q(q^2-1)}{2}$ in Uebereinstimmung mit den bisher abgeleiteten Resultaten.

Die vorstehenden Entwicklungen ergeben sogleich noch folgendes Resultat:

*Es giebt in der Gruppe G der Modulargleichung der Transformation q^{ter} Ordnung:**)

---

*) Diese Resultate finden sich bereits bei Serret.

1) $q+1$ *Cyklen* G_q *der Periode* q,

2) $\frac{q(q+1)}{2}$ *Cyklen* $G_{\frac{q-1}{2\sigma}}$ *der Periode* $\frac{q-1}{2\sigma}$,

3) $\frac{q(q-1)}{2}$ *Cyklen* $G_{\frac{q+1}{2\tau}}$ *der Periode* $\frac{q+1}{2\tau}$.

Hierbei ist σ ein Theiler von $\frac{q-1}{2}$, der >1 und $<\frac{q-1}{2}$ sein soll, und ebenso ist τ ein Theiler von $\frac{q+1}{2}$, der $\geqq 1$, aber $<\frac{q+1}{2}$ ist.

Nämlich die Substitutionen der Periode q vereinigen sich zu je $q-1$, die der Periode $\frac{q-1}{2}$ zu je $\frac{q-3}{2}$ und die der Periode $\frac{q+1}{2}$ zu je $\frac{q-1}{2}$ mit der Identität zu einem solchen Cyklus. Ferner enthält jeder Cyklus der Ordnung $\frac{q-1}{2}$ *einen* Cyklus der Ordnung $\frac{q-1}{2\sigma}$ und jeder Cyklus der Periode $\frac{q+1}{2}$ *einen* Cyklus der Periode $\frac{q+1}{2\tau}$, wenn σ, τ die oben beschriebene Bedeutung haben.

Alle diese Cyklen gehen aus einem $(S, S^2, \cdots)$ derselben Art durch Substitutionen

$$\vartheta_\nu^{-1} S \vartheta_\nu, \quad \vartheta_\nu^{-1} S^2 \vartheta_\nu, \cdots$$

hervor, wo ϑ_ν eine Substitution der Hauptgruppe ist. Wir wollen dies damit bezeichnen, dass wir sagen:

Alle Cyklen derselben Art (Periode) sind unter einander gleichberechtigt.

Dies ist eine unmittelbare Folge der in § 2. angeführten Sätze.

§ 7.

Die metacyklischen und Doppelpyramidengruppen*).

Im Hinblick auf die Resultate des § 6. ergeben sich fernerhin folgende Resultate:

Es giebt in der Galois'schen Gruppe G:

1) $q+1$ *halbmetacyklische***) *Untergruppen* $G'_{q\cdot\frac{q-1}{2}}$ *von der Ordnung* $\frac{q(q-1)}{2}$ *und ebensoviele Untergruppen* $G'_{q\sigma}$ *von der Ordnung* $q\sigma$, *wo* σ *ein Theiler von* $\frac{q-1}{2}$ *ist,*

---

*) Vergl. Serret, die oben citirten Arbeiten.

**) Die metacyklische Gruppe $G_{q(q-1)}$ lässt sich bekanntlich durch die Formel $x' = \alpha x + \beta$ mod. q definiren, wo $\alpha = 1, 2 \ldots q-1$, $\beta = 0, 1, 2 \ldots q-1$ ist. Halbmetacyklisch ist dann hier dieselbe Gruppe genannt, wenn α nur alle quadratischen Reste mod. q beschreibt.

2) $\frac{q(q^2-1)}{4\sigma}$ *Doppelpyramidengruppen* $G'_{2\sigma}$ *von der Ordnung* 2σ, *wobei* σ *ein von* 1 *und* 2 *verschiedener Theiler von* $\frac{q-1}{2}$ *ist,*

3) $\frac{q(q^2-1)}{4\tau}$ *Doppelpyramidengruppen* $G'_{2\tau}$ *von der Ordnung* 2τ, *wobei* τ *ein von* 1 *und* 2 *verschiedener Theiler von* $\frac{q+1}{2}$ *ist,*

4) $\frac{q(q^2-1)}{24}$ *Doppelpyramidengruppen* G_4' *von der Ordnung* 4. Diese Gruppen G_4' bestehen aus drei Substitutionen der Periode 2 und der Identität.

Als einfachste Typen solcher Gruppen schreibe ich folgende hin:

1) $\begin{cases} \omega' \equiv \omega + 1 \\ \omega' \equiv \dfrac{\lambda\omega}{\lambda^{-1}} \end{cases}$ mod. q (erzeugende Substitutionen*) einer $G'_{q\frac{(q-1)}{2}}$),

2) $\begin{cases} \omega' \equiv \dfrac{\lambda\omega}{\lambda^{-1}} \\ \omega' \equiv -\dfrac{1}{\omega} \end{cases}$ mod. q (erzeugende Substitutionen einer $G'_{2.\frac{q-1}{2}}$),

3) $\begin{cases} \omega' \equiv \dfrac{j\omega}{j^{-1}} \\ \omega' \equiv \dfrac{B}{C\omega} \equiv \dfrac{k+lj}{(k+lj^{-1})\omega} \end{cases}$ mod. q (erzeugende Substitutionen einer $G'_{2.\frac{q+1}{2}}$).

Die Richtigkeit dieser Sätze ist unmittelbar ersichtlich, wenn $\sigma = \frac{q-1}{2}$ und $\tau = \frac{q+1}{2}$ gesetzt wird. Dann bestehen die angegebenen Gruppen aus allen Substitutionen Θ des § 5., welche eine Relation $\Theta^{-1} S \Theta = S^{\varkappa}$ erfüllen, wo S eine bestimmte von der Identität verschiedene Substitution der Gruppe G ist. Demnach entspricht jedem Cyklus (S) eine solche Untergruppe. Im Allgemeinen sind aber auch die den verschiedenen Cyklen derselben Art entsprechenden derartigen Untergruppen von einander verschieden. Für die Gruppen G' der ersten Art ist dies immer der Fall. Es ist aber auch für die Gruppen G' der zweiten und dritten Art der Fall, solange $\frac{q+1}{2}$ resp. $\frac{q-1}{2}$ grösser als 2 ist. Sie bestehen nämlich dann aus den entsprechenden Cyklen der Periode $\frac{q+1}{2}$ oder $\frac{q-1}{2}$, welche sämmtlich von einander verschieden sind in Verbindung mit $\frac{q+1}{2}$ resp. $\frac{q-1}{2}$ Substitutionen der Periode 2, und zwar spielen die erstgenannten Cyklen

*) Erzeugende Substitutionen sind solche, durch deren wiederholte Combination alle Substitutionen der Gruppe abgeleitet werden können.

gegenüber den Substitutionen der Periode 2 eine bevorzugte Rolle. Ist aber $\frac{q+1}{2}$ bez. $\frac{q-1}{2}$ gleich 2 (d. h. $q=3$ oder 5), so ist dies letztere nicht mehr der Fall. Die entsprechenden G_4' enthalten nur 3 gleichberechtigte Substitutionen der Periode 2 und so werden je 3 dieser G_4' identisch. Es giebt also dann nicht 3 bez. 15 G_4', sondern nur 1 bez. 5 in Uebereinstimmung mit Satz 4 (vergl. unten).

Sind σ und τ von $\frac{q-1}{2}$ bez. $\frac{q+1}{2}$ verschieden, so erhellt die Richtigkeit der angeführten Sätze aus folgenden 2 Bemerkungen:

1) *Jede halbmetacyklische Gruppe $G'_{q\cdot\frac{q-1}{2}}$ enthält nur eine einzige Untergruppe $G'_{q\sigma}$.* Ihre Erzeugenden sind im einfachsten Falle:

$$\omega' \equiv \omega + 1 \text{ und } \omega' \equiv \frac{\lambda^{\frac{q-1}{2\sigma}}\omega}{\lambda^{-\frac{q-1}{2\sigma}}} \text{ mod. } q.$$

2) *Jede Gruppe $G'_{2\cdot\frac{q-1}{2}}$ bez. $G'_{2\cdot\frac{q+1}{2}}$ enthält $\frac{q-1}{2\sigma}$ bez. $\frac{q+1}{2\tau}$ Untergruppen $G'_{2\sigma}$ bez. $G'_{2\tau}$.* So erhält man z. B. für den einfachsten Typus einer $G'_{2\cdot\frac{q-1}{2}}$ offenbar die folgenden Gruppen $G'_{2\sigma}$:

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned} \omega' &\equiv \frac{\lambda^{\mu\cdot\frac{q-1}{2\sigma}}\omega}{\lambda^{-\mu\cdot\frac{q-1}{2\sigma}}} \\ \omega' &\equiv \frac{B\cdot\lambda^{\mu\cdot\frac{q-1}{2\sigma}}}{C\cdot\lambda^{-\mu\cdot\frac{q-1}{2\sigma}}\,\omega} \end{aligned}\right. \text{ mod. } q.$$

$$\left(\mu = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots \frac{q-1}{2\sigma}\right).$$

Hier ist $\frac{B}{C\omega}$ eine beliebige Substitution der Gruppe G, für welche $A = D = 0$ ist. Da aber $\frac{q-1}{2}$ verschiedene Substitutionen dieser Art existiren und an jeder $G'_{2\sigma}$ σ derselben theilnehmen, so erhalten wir $\frac{q-1}{2\sigma}$ Gruppen $G'_{2\sigma}$ der Form (I), welche wir *„zum Cyklus $\left(S \equiv \frac{\lambda\omega}{\lambda^{-1}}\right)$ gehörige Untergruppen"* nennen wollen.

Da es nun im Ganzen $\frac{q(q+1)}{2}$ verschiedene Cyklen (S) giebt (§ 6.), so bekommen wir, wenn $\sigma > 2$ ist, $\frac{q-1}{2\sigma}\cdot q\cdot\frac{q+1}{2} = \frac{q(q^2-1)}{4\sigma}$ verschiedene $G'_{2\sigma}$.

Eine Ausnahme findet offenbar dann statt, wenn $\sigma = 2$ ist. In diesem Falle hat die Gruppe wieder, wie es schon oben bei den Gruppen

$G'_{2.\frac{q+1}{2}}$ bez. $G'_{2.\frac{q-1}{2}}$ für $q = 3$ bez. $q = 5$ eintrat, die Ordnung 4 und besteht aus der Identität und 3 gleichberechtigten Substitutionen der Periode 2, so dass die Substitutionen der Periode σ denen der Periode 2 gegenüber keine bevorzugte Stellung mehr einnehmen. An jeder der $\frac{q(q^2-1)}{4\sigma}$ aufgezählten G_4' nehmen also 3 G_2 den gleichen Antheil, oder jede G_4' ist zu 3 Cyklen G_2 gehörig, und also sind sie zu je 3 identisch. Demnach ist in Uebereinstimmung mit Satz (4) die Anzahl der verschiedenen G_4' durch $\frac{q(q^2-1)}{24}$ dargestellt.

§ 8.

Ueber die Classification der Untergruppen des § 7.

Es soll nunmehr entschieden werden, ob die in § 7. angeführten Gruppen G', wenn sie dieselbe Ordnung haben, auch gleichberechtigt sind. Dies geschieht durch folgende Sätze:

1) *Die $q+1$ Gruppen $G'_{q\sigma}$ sind alle gleichberechtigt.*

2) *Die $\frac{q(q^2-1)}{4\sigma}$ Gruppen $G'_{2\sigma}$ sind alle gleichberechtigt, wenn $\frac{q-1}{2\sigma}$ eine ungerade Zahl ist, sie sind es jedoch nicht, wenn $\frac{q-1}{2\sigma}$ eine gerade Zahl ist. Im letzteren Falle zertheilen sie sich in 2 Gattungen von je $\frac{q(q^2-1)}{8\sigma}$ gleichberechtigten Gruppen.* Insbesondere folgt, dass alle Gruppen $G'_{2.\frac{q-1}{2}}$ gleichberechtigt sind.

3) *Die $\frac{q(q^2-1)}{4\tau}$ Gruppen $G'_{2\tau}$ sind alle gleichberechtigt, wenn $\frac{q+1}{2\tau}$ eine ungerade Zahl ist, aber sie theilen sich in 2 verschiedene Gattungen von je $\frac{q(q^2-1)}{8\tau}$ gleichberechtigten Gruppen $G'_{2\tau}$, wenn $\frac{q+1}{2\tau}$ eine gerade Zahl ist.* Insbesondere sind alle Gruppen $G_{2.\frac{q+1}{2}}$ gleichberechtigt.

In den letzten 2 Sätzen bedeuten σ, τ Theiler von $\frac{q-1}{2}$ bez. $\frac{q+1}{2}$, die grösser als 2 sind.

4) *Die $\frac{q(q^2-1)}{24}$ Gruppen G_4' sind alle gleichberechtigt, wenn 2 quadratischer Nichtrest mod. q ist, sie theilen sich aber in 2 verschiedene Gattungen von je $\frac{q(q^2-1)}{48}$ gleichberechtigten Gruppen G_4', wenn 2 quadratischer Rest modulo q ist.*

Die Richtigkeit dieser Behauptungen ist für die Gruppen $G'_{q\sigma}$, $G'_{2.\frac{q-1}{2}}$, $G'_{2.\frac{q+1}{2}}$ unmittelbar klar, wenn man bedenkt, dass die solchen

Gruppen derselben Art ein-eindeutig entsprechenden Cyklen (§ 6.) gleichberechtigt sind.

Um die angegebenen Sätze auch für die Gruppen $G'_{2\sigma}$ zu beweisen — wir können uns auf diese beschränken, da die Gruppen $G'_{2\tau}$ ganz analog behandelt werden können —, betrachten wir die zu einem Cyklus (S) gehörigen $\frac{q-1}{2\sigma}$ Gruppen $G'_{2\sigma}$, etwa die folgenden

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} U_{(\mu)} &= \frac{\lambda^{\mu \cdot \frac{q-1}{2\sigma}} \omega}{\lambda^{-\mu \cdot \frac{q-1}{2\sigma}}} \\ V_{(\mu)} &= \frac{B \cdot \lambda^{\mu \cdot \frac{q-1}{2\sigma}}}{C \cdot \lambda^{-\mu \cdot \frac{q-1}{2\sigma}} \omega} \\ \mu &= 1, 2, \ldots \frac{q-1}{2\sigma} \end{aligned} \right\} \text{mod. } q.$$

Transformirt man nunmehr die Substitution $V = \frac{B}{C\omega}$ in Bezug auf die Potenzen der Substitution $S = \frac{\lambda\omega}{\lambda^{-1}}$, so kommt:

$$S^{-s} V S^{s} \equiv \frac{B\lambda^{-2s}}{C\lambda^{2s}\omega},$$

während $U_{(\mu)}$ bei diesen Transformationen ungeändert bleibt. Ist jetzt $\frac{q-1}{2}$ ungerade, also $q \equiv 3$ mod. 4, so beschreibt die Substitution $\frac{B\lambda^{-2s}}{C\lambda^{2s}\omega}$ offenbar alle Substitutionen der Form $\omega' \equiv \frac{B_1}{C_1\omega}$. Also sind dann jedenfalls alle $\frac{q-1}{2\sigma}$ zum Cyklus (S) gehörige Gruppen $G'_{2\sigma}$ gleichberechtigt und damit überhaupt alle in G enthaltenen $G'_{2\sigma}$, da ja alle Cyklen (S) derselben Periode gleichberechtigt sind.

Anders ist aber die Sache, wenn $\frac{q-1}{2}$ gerade ist, d. h. wenn $q \equiv 1$ mod. 4 wird. Dann können nämlich mit Hülfe der eben angewandten Transformationen alle jene aber auch nur jene Substitutionen $\frac{B}{C\omega}$ in einander übergeführt werden, *für welche B und C denselben quadratischen Charakter modulo q haben.* Wir unterscheiden daher hier 2 Arten von solchen Substitutionen der Periode 2.

Dieses vorausgesetzt nehmen wir an, $\frac{q-1}{2\sigma}$ sei ungerade; dann enthält jede Gruppe (I) sowohl Substitutionen $\omega' \equiv \frac{B}{C\omega}$ der einen als auch der anderen Art. Also sind wieder alle zum Cyklus (S) gehörigen Gruppen $G'_{2\sigma}$ und damit wieder alle diese in G enthaltenen Gruppen gleichberechtigt. Dies gilt auch für die Gruppen G_4', welche $\sigma = 2$ entsprechen. Die Bedingung, dass $\frac{q-1}{4}$ ungerade sein soll, schreibt sich hier einfach in folgender Weise: $q \equiv 5$ mod. 8. Würde man statt der Gruppen $G'_{2\sigma}$ der 2. Art Gruppen $G'_{2\tau}$ der 3. Art betrachtet haben, so hätte sich ergeben, dass alle G_4' gleichberechtigt sind, wenn $\frac{q+1}{4}$ ungerade, also $q \equiv 3$ mod. 8 ist. Zusammengefasst giebt dies das Resultat, dass alle G_4' gleichberechtigt sind, wenn 2 quadratischer Nichtrest modulo q ist.

Ist hingegen $\frac{q-1}{2\sigma}$ $\left(\text{oder } \frac{q+1}{2\tau}\right)$ eine gerade Zahl (für $\sigma = 2$ oder $\tau = 2$ giebt dies die Bedingung $q \equiv 1$ mod. 8 oder $q \equiv -1$ mod. 8), so enthält eine $G'_{2\sigma}$ der Form (I) nur Substitutionen $\omega' \equiv \frac{B}{C\omega}$ derselben Art und kann daher durch die oben angegebenen Transformationen nur in alle jene $G'_{2\sigma}$ übergeführt werden, deren Substitutionen der Periode 2 Substitutionen derselben Art sind, für welche also B, C beide quadratische Reste oder beide quadratische Nichtreste mod. q sind. So erhalten wir 2 Arten von je $\frac{(q-1)}{8\sigma}$ Gruppen $G'_{2\sigma}$ der Gestalt (I), so dass die Gruppen der einzelnen Art gleichberechtigt sind. Aber die beiden Arten selbst sind nicht gleichberechtigt. Wäre nämlich S eine Substitution, welche 2 zum Typus (I) gehörige Gruppen $G'_{2\sigma}$ von verschiedener Art in einander überführte, so müsste sie, wenn $\sigma > 2$ ist, jedenfalls $U_{(\mu)}$ in

$$S^{-1}\, U_{(\mu)}\, S = U_{(\nu)}$$

transformiren, da die Gruppen $G'_{2\sigma}$ der Gestalt (I) nur diese Substitutionen U von der Periode σ enthalten. Also müsste sie eine Transformation Θ des § 5. sein, d. h. sie müsste eine der Gestalten $\omega' \equiv \frac{A\omega}{D}$ oder $\omega' \equiv \frac{B}{C\omega}$ haben. Allein dass es eine so gestaltige Substitution S nicht giebt, welche zwei verschiedene Gruppen $G'_{2\sigma}$ der Form (I) in einander überführt, haben wir oben gesehen.

Ebenso leicht überzeugt man sich, dass 2 Gruppen G_4' der Gestalt (I), z. B.

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \omega' \equiv \omega, \quad \omega' \equiv \dfrac{\lambda^{\frac{q-1}{4}}\omega}{\lambda^{-\frac{q-1}{4}}}, \quad \omega' \equiv \dfrac{B_1}{C_1\omega}, \quad \omega' \equiv \dfrac{B_1\lambda^{\frac{q-1}{4}}}{C_1\lambda^{-\frac{q-1}{4}}\omega} \\ (2) & \omega' \equiv \omega, \quad \omega' \equiv \dfrac{\lambda^{\frac{q-1}{4}}\omega}{\lambda^{-\frac{q-1}{4}}}, \quad \omega' \equiv \dfrac{B_2}{C_2\omega}, \quad \omega' \equiv \dfrac{B_2\lambda^{\frac{q-1}{4}}}{C_2\lambda^{-\frac{q-1}{4}}\omega},\end{array}\right\} \text{mod. } q,$$

wo B_1, C_1 quadratische Reste und B_2, C_2 quadratische Nichtreste mod. q sind, nicht in einander transformirt werden können in Bezug auf eine Substitution der Hauptgruppe G.

Wenn aber die zum Cyklus $\left(S = \frac{\lambda\,\omega}{\lambda^{-1}}\right)$ gehörigen Gruppen $G'_{2\sigma}$ sich in 2 verschiedene Gattungen von je $\frac{q-1}{8\sigma}$ Gruppen zerlegen, so ist klar, dass *alle* Gruppen $G'_{2\sigma}$ der Gruppe G 2 verschiedene Gattungen von je $\frac{q(q^2-1)}{8\sigma}$ (für $\sigma > 2$) oder $\frac{q(q^2-1)}{48}$ (für $\sigma = 2$) gleichberechtigten Gruppen bilden.

§ 9.

Zahl der Substitutionen der Gruppe G, welche mit einer Gruppe G' des § 7. vertauschbar sind.

Ist N die Zahl der Substitutionen Θ der Hauptgruppe G, welche mit einer Gruppe G' vertauschbar sind, ist ferner M die Zahl der Gruppen $G'_{(\nu)}$ von G (die ursprüngliche Gruppe G' mit eingerechnet), mit denen G' gleichberechtigt ist, so besteht die selbstverständliche Gleichung:

$$M \cdot N = \frac{q(q^2-1)}{2}.$$

Seien nämlich die Substitutionen der G' durch $S_1, S_2 \cdots$ bezeichnet und die Substitutionen der G durch $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots$, dann fallen die $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Gruppen G'_ν

$$\vartheta_\nu^{-1} S_1 \vartheta_\nu, \quad \vartheta_\nu^{-1} S_2 \vartheta_\nu, \cdots$$

zu je N zusammen. Also ist G' mit $M = \frac{q(q^2-1)}{2N}$ Gruppen G' der Gruppe G gleichberechtigt.

Hieraus ergeben sich leicht folgende Sätze, welche gewissermassen eine Ergänzung der in § 8. bewiesenen Sätze sind.

1) *Jede Gruppe* $G'_{q\sigma}$ *ist mit* $\frac{q(q-1)}{2}$ *Substitutionen* Θ *der Gruppe* G *vertauschbar.* Es sind dies die $\frac{q(q-1)}{2}$ Substitutionen der zugehörigen Gruppe $G'_{\frac{q(q-1)}{2}}$, von welcher $G'_{q\sigma}$ Untergruppe ist.

2) *Eine Gruppe* $G'_{2\sigma}$ *oder* $G'_{2\tau}$ ($\sigma > 2$ und $\tau > 2$), *für welche* $\frac{q-1}{2\sigma}$ *resp.* $\frac{q+1}{2\tau}$ *eine ungerade Zahl ist, ist nur mit ihren eigenen Substitutionen vertauschbar.*

3) *Eine* $G'_{2\sigma}$ *oder* $G'_{2\tau}$ ($\sigma > 2$ und $\tau > 2$), *für welche* $\frac{q-1}{2\sigma}$ *resp.* $\frac{q+1}{2\tau}$ *eine gerade Zahl ist, ist mit den* 4σ *bez.* 4τ *Substitutionen einer* $G'_{4\sigma}$ *bez.* $G'_{4\tau}$ *vertauschbar.* Für die einfachsten Gruppen $G'_{2\sigma}$, deren erzeugende Substitutionen die folgenden sind:

$$\begin{cases} \omega' \equiv \dfrac{\lambda^{\frac{q-1}{2\sigma}}\omega}{\lambda^{-\frac{q-1}{2\sigma}}} \\ \omega' \equiv \dfrac{B}{C\omega} \end{cases} \text{mod. } q,$$

lauten die zugehörigen Gruppen $G'_{4\sigma}$ folgendermassen:

$$\begin{cases} \omega' \equiv \dfrac{\lambda^{\frac{q-1}{4\sigma}}\omega}{\lambda^{-\frac{q-1}{4\sigma}}} \\ \omega' \equiv \dfrac{B}{C\omega} \end{cases} \text{mod. } q.$$

4) *Eine Gruppe G_4' ist mit* 12 *Substitutionen* Θ *der Gruppe* G *vertauschbar, wenn* $q \equiv \pm 3$ *mod.* 8 *ist; sie ist hingegen mit* 24 *Substitutionen vertauschbar, wenn* $q \equiv \pm 1$ *mod.* 8 *ist.* Schreiben wir die Gruppe G_4' in einer der einfachen Gestalten:

$$\begin{cases} \omega' \equiv \dfrac{\lambda^{\frac{q-1}{4}}\omega}{\lambda^{-\frac{q-1}{4}}} \\ \omega' \equiv \dfrac{B}{C\omega} \end{cases} \text{oder} \quad \begin{cases} \omega' \equiv \dfrac{j^{\frac{q+1}{4}}\omega}{j^{-\frac{q+1}{4}}} \\ \omega' \equiv \dfrac{B}{C\omega} \end{cases} \text{mod. } q,$$

so bestehen im Falle $q \equiv 5$ oder 3 mod. 8 die besagten 12 Substitutionen Θ aus den Substitutionen der G_4' selbst in Verbindung mit der Substitution

$$\omega' \equiv \frac{\dfrac{1+\lambda^{\frac{q-1}{4}}}{2}\omega - B\dfrac{1+\lambda^{-\frac{q-1}{4}}}{2}}{-C\dfrac{1+\lambda^{\frac{q-1}{4}}}{2}\omega + \dfrac{1+\lambda^{-\frac{q-1}{4}}}{2}} \quad \text{resp.} \quad \omega' \equiv \frac{\dfrac{1+j^{\frac{q+1}{4}}}{2}\omega - B\dfrac{1+j^{-\frac{q+1}{4}}}{2}}{-C\dfrac{1+j^{\frac{q+1}{4}}}{2}\omega + \dfrac{1+j^{-\frac{q+1}{4}}}{2}}$$

mod. q, welche von der Periode 3 ist.

Die 24 Substitutionen Θ des Falles $q \equiv \pm 1$ mod. 8 bestehen aus den eben genannten 12 Substitutionen in Verbindung mit der Substitution:

$$\omega' \equiv \frac{\lambda^{\frac{q-1}{8}}\omega}{\lambda^{-\frac{q-1}{8}}} \quad \text{resp.} \quad \omega' \equiv \frac{j^{\frac{q-1}{8}}\omega}{j^{-\frac{q-1}{8}}} \text{ mod. } q,$$

welche die Periode 4 hat.

§ 10.

Die Tetraeder- und Oktaedergruppen.

Aus dem letzten Resultate des § 9. ergeben sich sogleich folgende Sätze:

Es giebt in der Modulargruppe G immer $\frac{q(q^2-1)}{24}$ *Tetraedergruppen* G''_{12} *von* 12 *Substitutionen. Dieselben sind alle gleichberechtigt, wenn* $q \equiv \pm 3$ *mod.* 8 *ist, sie vertheilen sich aber in* 2 *Gattungen von je* $\frac{q(q^2-1)}{48}$ *gleichberechtigten Gruppen, wenn* $q \equiv \pm 1$ *mod.* 8 *ist. Im ersten Falle giebt es ausser den* 12 *Substitutionen der* G''_{12} *selbst keine Substitution der Hauptgruppe* G, *welche mit einer Gruppe* G''_{12} *vertauschbar wäre, im letzten Falle hingegen giebt es (inclusive der Identität)* 24 *solche Substitutionen.*

Diese Gruppen G''_{12} werden erzeugt von den Substitutionen einer G_4' in Verbindung mit einer solchen Substitution der Periode 3, welche mit dieser G_4' vertauschbar ist (§ 9.). Fernerhin werden die 24 Substitutionen, die im Falle $q \equiv \pm 1$ mod. 8 mit einer G''_{12} vertauschbar sind, erhalten, wenn man die 12 Substitutionen der G''_{12} mit einer von jenen Substitutionen der Periode 4 in Verbindung bringt, welche mit der in der Gruppe G''_{12} enthaltenen G_4' vertauschbar sind (§ 9.).

Dass die so erhaltenen Gruppen G''_{12} wirklich Tetraedergruppen sind, kann man einfach dadurch verificiren, dass man den Isomorphismus einer unter ihnen mit der Tetraedergruppe nachweist. Seien nun T_1, T_2, T_3 die 3 Substitutionen der Periode 2, welche der zugehörigen Gruppe G_4' angehören, sei ferner S eine Substitution der Periode 3, die mit der G_4' vertauschbar ist, so erhalten wir folgende 8 Substitutionen der Periode 3

$$\begin{array}{llll} S, & S^2, & T_1^{-1} S T_1, & T_1^{-1} S^2 T_1, \\ T_2^{-1} S T_2, & T_2^{-1} S^2 T_2, & T_3^{-1} S T_3, & T_3^{-1} S^2 T_3, \end{array}$$

welche unserer G''_{12} angehören und, wie man leicht sieht, alle von einander verschieden sind. Diese 8 Substitutionen der Periode 3 geben in Verbindung mit den 3 Substitutionen der Periode 2 und der Identität die 12 Substitutionen der betrachteten Gruppe G''_{12}, und nun erkennt man leicht, dass diese G''_{12} der Tetraedergruppe isomorph ist, wenn man z. B. den Substitutionen T_1 und S die Substitutionen $\eta' = -\eta$ bez. $\eta' = i\,\frac{1+\eta}{1-\eta}$ als entsprechend zuordnet.

Ferner bedenke man, dass jede Tetraedergruppe G''_{12} nur eine Gruppe G_4' enthält, dass aber auch umgekehrt (wie aus den Resultaten des § 9. folgt) jede Gruppe G_4' nur zu einer einzigen Gruppe G''_{12} Anlass giebt. *Also sind die Gruppen* G_4' *und* G''_{12} *ein-eindeutig einander zu-*

geordnet und also übertragen sich die Sätze, welche in Betreff der Anzahl und Gleichberechtigung der Gruppen G_4' gelten, auch unmittelbar auf die Gruppen G_{12}''.

Aus ganz analogen Gründen ergiebt sich der Satz:

Ist $q \equiv \pm 1$ *mod.* 8, *so giebt es* $\frac{q(q^2-1)}{24}$. *Oktaedergruppen* G_{24}'' *in der Modulargruppe* G, *welche sich in* 2 *verschiedene Gattungen von je* $\frac{q(q^2-1)}{48}$ *gleichberechtigten Gruppen vertheilen. Eine solche* G_{24}'' *ist nur mit ihren eigenen* 24 *Substitutionen vertauschbar.*

Diese Gruppen G_{24}'' werden gebildet von den 24 Substitutionen, die im Falle $q \equiv \pm 1$ mod. 8 mit einer G_4' oder zugehörigen G_{12}'' vertauschbar sind.

Dass hier Oktaedergruppen vorliegen, lässt sich wieder in derselben einfachen Weise ableiten, wie es eben bei den Gruppen G_{12}'' gemacht wurde, um deren Tetraedercharakter zu erkennen. Für den einfachsten Typus einer G_{24}'' (vergl. § 9.) ist der Isomorphismus mit der Oktaedergruppe (Anm. d. Einleitung) hergestellt, wenn man den Substitutionen

$$\omega' \equiv \frac{\lambda^{\frac{q-1}{8}}\,\omega}{\lambda^{-\frac{q-1}{8}}} \quad \text{und} \quad \omega' \equiv \frac{\dfrac{\omega}{\lambda^{\frac{q-1}{8}} - \lambda^{-\frac{q-1}{8}}} + B}{C\omega - \dfrac{1}{\lambda^{\frac{q-1}{8}} - \lambda^{-\frac{q-1}{8}}}}$$

der G_{24}'' die Substitutionen

$$\eta' = i\eta \quad \text{und} \quad \eta' = \frac{1-\eta}{1+\eta}$$

zuordnet, wie man sich leicht überzeugt.

Ferner sind auch diese Gruppen G_{24}'' *den Gruppen* G_4' *eineindeutig zugeordnet* und also giebt es ebensoviele Gattungen und in jeder Gattung ebensoviele Individuen von Gruppen G_{24}'' als Gruppen G_4'. Damit sind auch die in Betreff der Oktaedergruppen aufgestellten Sätze bewiesen.

Dass im Falle $q \equiv \pm 3$ mod. 8 keine Oktaedergruppen vorhanden sind, geht schon aus der einfachen Thatsache hervor, dass der Grad $\frac{q(q^2-1)}{2}$ der Hauptgruppe in diesem Falle nicht durch 24 theilbar ist.

§ 11.

Eine andere Ableitung der Tetraeder- und Oktaedergruppen.

Wir können die Tetraeder- und Oktaedergruppen noch auf eine andere sehr einfache Weise ableiten, wenn wir uns auf bekannte algebraische Resultate stützen. *Als Ausgangspunkt hiezu verwenden wir* *das Princip, in den bekannten endlichen Gruppen*) von binären linearen Substitutionen die auftretenden Einheitswurzeln durch die entsprechenden Congruenzwurzeln mod.* q (genau bezeichnet, die Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ durch die Wurzeln der Congruenz $x^n \equiv 1$ mod. q) *zu ersetzen.*

Offenbar werden auf diese Weise Gruppen G'' definirt, welche mit den ebengenannten Gruppen beziehungsweise holoedrisch isomorph sind. Dies geht einfach aus dem Umstande hervor, dass jede zwischen den Einheitswurzeln bestehende Relation sich unmittelbar in eine Relation der entsprechenden Congruenzwurzeln mod. q umschreibt und dass also die Substitutionen jener Gruppen mit den Substitutionen dieser in eineindeutiger Beziehung stehen.**)

Um dieses Princip zunächst für die *Tetraedergruppen* in Anwendung zu bringen, unterscheiden wir die Fälle $q \equiv 1$ mod. 3 und $q \equiv -1$ mod. 3. Im ersten Falle ist $\alpha = \lambda^{\frac{q-1}{3}}$ eine reelle Grösse, welche der Congruenz

$$\alpha^3 \equiv 1 \text{ mod. } q$$

genügt. Es sind daher auch die 2 Substitutionen

$$(\mathrm{s}) \quad \omega' \equiv \frac{\alpha\omega}{\alpha^{-1}} \quad \text{und} \quad (\mathrm{t}) \quad \omega' \equiv \frac{-\frac{\omega}{\alpha-\alpha^{-1}} + \frac{2}{\alpha-\alpha^{-1}}}{\frac{\omega}{\alpha-\alpha^{-1}} - \frac{1}{\alpha-\alpha^{-1}}}$$

mod. q reell, also in der Gruppe G enthalten.

Da dieselben andrerseits nach dem ebenangeführten Principe eine Tetraedergruppe***) erzeugen, so ist das Vorkommen dieser Gruppe in der Hauptgruppe G nachgewiesen.

Noch allgemeiner können wir die Substitutionen

$$(\Delta) \qquad (\mathrm{s}_1) \quad \omega' \equiv \frac{\alpha\omega}{\alpha^{-1}}; \qquad (\mathrm{t}_1) \quad \omega' \equiv \frac{\frac{\omega}{\alpha-\alpha^{-1}} + B}{C\omega - \frac{1}{\alpha-\alpha^{-1}}} \text{***)}$$

modulo q als erzeugende Substitutionen von Tetraedergruppen auffassen, wenn B, C der Bedingung

---

*) Vgl. die Anmerkung p. 320.

**) Es sei hier bemerkt, dass die Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedergruppen mit den Gruppen $\omega' \equiv \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ mod. q für $q = 3$, bez. 4, 5 isomorph sind (vgl. F. Klein, Mathem. Annalen XIV, pag. 148).

***) Alle Substitutionen der so erzeugten Tetraedergruppe sind folgende:

$$\omega' \equiv \frac{\alpha^{\nu}\omega}{\alpha^{-\nu}}; \quad \omega' \equiv \frac{\frac{\alpha^{\varrho}\omega}{\alpha-\alpha^{-1}} + B\alpha^{\nu}}{C\alpha^{-\nu}\omega - \frac{\alpha^{-\varrho}}{\alpha-\alpha^{-1}}} \text{ mod. } q \text{ für } \varrho, \nu = 0, 1, 2.$$

$$B \cdot C \equiv \frac{2}{(\alpha - \alpha^{-1})^2} \text{ mod. } q$$

genügen, da s und t sich mit Hülfe der Substitution

$$\Theta \equiv \frac{\sqrt{C(\alpha - \alpha^{-1})} \cdot \omega}{\sqrt{\frac{B(\alpha - \alpha^{-1})}{2}}} \text{ mod. } q$$

in

$$\Theta^{-1} s \Theta = s_1 \quad \text{und} \quad \Theta^{-1} t \Theta = t_1$$

transformiren. Zwei solche Transformirte erzeugen aber bekanntlich immer eine zur Gruppe der ursprünglichen Substitutionen isomorphe Gruppe.

Wir können passender Weise die durch 2 Substitutionen der Art (Δ) erzeugten Tetraedergruppen *„zum Cyklus* (s) *gehörige Tetraeder“* nennen.

Ihre Zahl ist $\frac{q-1}{3}$, da an jeder Tetraedergruppe drei Substitutionen der Periode 2 theilnehmen, welche die Form der Substitution (t_1) haben — die zwei weiteren solchen Substitutionen gehen aus einer

$$t_1 \equiv \frac{\frac{\omega}{\alpha - \alpha^{-1}} + B}{C\omega - \frac{1}{\alpha - \alpha^{-1}}} \text{ mod. } q$$

hervor, wenn man statt B, C beziehungsweise $B\alpha$, $C\alpha^2$ oder $B\alpha^2$, $C\alpha$ setzt —, während überhaupt $q - 1$ derartige Substitutionen in der Gruppe G enthalten sind.

Geradeso, wie im Falle $q \equiv 1$ mod. 3 können wir jetzt im Falle $q \equiv -1$ mod. 3 verfahren, wenn wir die imaginäre Gestalt der Gruppe G ins Auge fassen. In diesem Falle ist $\alpha \equiv j^{\frac{q+1}{3}}$ mod. q zu setzen, während B, C conjugirt imaginäre Zahlen sind, deren Produkt den Werth

$$B \cdot C \equiv \frac{2}{(\alpha - \alpha^{-1})^2} \equiv \frac{-2}{3} \text{ mod. } q$$

hat, Zahlen, welche nach § 4. (c) immer existiren. Die Zahl der zum Cyklus (s) gehörigen Tetraeder wird hier im Hinblick auf Satz (a) in § 4. als $\frac{q+1}{3}$ erkannt.

Da es jetzt fernerhin $\frac{q(q+1)}{2}$ oder $\frac{q(q-1)}{2}$ Cyklen der Periode 3 giebt, je nachdem $q \equiv 1$ oder $\equiv -1$ mod. 3 ist, und ferner*) jede Tetraedergruppe zu 4 solchen Cyklen gehört, so ergiebt sich als Gesammt-

*) Jede Tetraedergruppe enthält bekanntlich 4 Cyklen der Periode 3 (vergl. die 2. Note auf Seite 348 und die Resultate des § 6).

zahl der verschiedenen Tetraedergruppen, welche in der Gruppe G enthalten sind, in jedem Falle die Zahl $\frac{q(q^2-1)}{24}$.

Hieraus können wir weiter schliessen, dass die hier behandelten Tetraedergruppen mit den Gruppen G_{12}'' des § 10. übereinstimmen. Denn bekanntlich enthält die Tetraedergruppe eine „ausgezeichnete" Gruppe G_4' d. h. eine G_4', mit welcher die 12 Substitutionen der Tetraedergruppe vertauschbar sind. Also ist jedenfalls jede Tetraedergruppe auch eine Gruppe G_{12}''. Da aber weiterhin die Zahl der G_{12}'' mit der Zahl der Tetraedergruppen identisch ist, so muss auch umgekehrt jede G_{12}'' des § 10. eine Tetraedergruppe sein.

Wir könnten von den hier gemachten Entwicklungen ausgehend auch die Frage der *Gleichberechtigung* der Tetraedergruppen behandeln, ich glaube indes, dies um so eher bei Seite lassen zu können, als ähnliche Betrachtungen im folgenden Paragraphen für die Ikosaedergruppen gemacht werden.

Auch die *Oktaedergruppen* können direct aus dem oben aufgestellten Principe abgeleitet werden. Man kann nämlich sofort bezügliche Gruppentypen hinschreiben, die entweder der ursprünglichen Gruppe G oder der „Gruppe in imaginärer Gestalt" angehören, je nachdem

$$q \equiv 1 \quad \text{oder} \quad q \equiv -1 \text{ mod. } 8$$

ist. Zu diesem Zwecke sei ϱ eine primitive reelle oder imaginäre Wurzel der Congruenz

$$\varrho^4 \equiv -1 \text{ mod. } 8,$$

also etwa $\varrho = \lambda^{\frac{q-1}{8}}$ oder $\varrho = j^{\frac{q+1}{8}}$, je nachdem $q \equiv 1$ oder -1 mod. 8 ist, so erzeugen die Substitutionen

$$\omega' \equiv \frac{\varrho\omega}{\varrho^{-1}} \quad \text{und} \quad \omega' \equiv \frac{\frac{\omega}{\varrho-\varrho^{-1}} + B}{C\omega - \frac{1}{\varrho-\varrho^{-1}}} \text{*) mod. } q$$

eine zum Cyklus $\left(S = \frac{\varrho\omega}{\varrho^{-1}}\right)$ gehörige Oktaedergruppe. Hiebei sind B, C Zahlen, welche die Bedingung:

$$BC \equiv \frac{1}{(\varrho-\varrho^{-1})^2} \equiv -\frac{1}{2} \text{ mod. } q$$

erfüllen und reell sind, wenn $q \equiv 1$ mod. 8 ist, aber conjugirt imaginär, wenn $q \equiv -1$ mod. 8 ist. Zahlen der letzteren Art giebt es aber (nach § 4., c) unter allen Umständen.

---

*) Diese Substitutionen unterscheiden sich von den entsprechenden Substitutionen der Oktaedergruppe (pag. 320. Anm.) dadurch, dass ihre Determinante zu 1 gemacht ist.

§ 12.

Die Ikosaedergruppen.

Das in § 11. aufgestellte Princip gestattet sogleich noch eine andere Art von Gruppen abzuleiten. Es sind dies die *Ikosaederyruppen* G''_{60} von je 60 Substitutionen.

Da im Falle der Existenz von Untergruppen der Ordnung 60 der Grad $\frac{q(q^2-1)}{2}$ der Hauptgruppe G durch 60 theilbar sein muss, so folgt, dass hier nothwendig q quadratischer Rest mod. 5 sein muss. Es können also hier überhaupt nur die Fälle

$$q \equiv 1 \text{ mod. } 5 \quad \text{und} \quad q \equiv -1 \text{ mod. } 5$$

in Betracht kommen.

Man hat nun folgenden Satz:

Wenn $q \equiv \pm 1$ *mod.* 5 *ist, so giebt es in der Modulargruppe* G *immer* $\frac{q(q^2-1)}{60}$ *Ikosaedergruppen* G''_{60}. *Dieselben vertheilen sich auf zwei verschiedene Gattungen von je* $\frac{q(q^2-1)}{120}$ *unter einander gleichberechtigten* G''_{60}.

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir wieder an, es sei ϱ eine primitive Wurzel der Congruenz

$$\varrho^5 \equiv 1 \text{ mod. } q,$$

also entweder $\varrho = \lambda^{\frac{q-1}{5}}$ oder $\varrho = j^{\frac{q+1}{5}}$, je nachdem $q \equiv 1$ oder $\equiv -1$ mod. 5 ist. Dann erzeugen nach dem Principe des § 11. die 2 Substitutionen*) der Determinante 1:

$$\omega' \equiv \frac{\varrho\,\omega}{\varrho^{-1}} \quad \text{und} \quad \omega' \equiv \frac{\frac{\omega}{\varrho-\varrho^{-1}} + B}{C\omega - \frac{1}{\varrho-\varrho^{-1}}} \text{ mod. } q$$

---

*) Alle Substitutionen der erzeugten Ikosaedergruppe lauten:

$$\omega' \equiv \frac{\varrho^{\nu}\omega}{\varrho^{-\nu}}, \quad \frac{-\varrho^{\nu}(\varrho^2-\varrho^{-2})B}{\varrho^{\nu}(\varrho^2-\varrho^{-2})C\omega}, \quad \frac{\varrho^{\mu}\left(\frac{\omega}{\varrho-\varrho^{-1}} + B\varrho^{\nu}\right)}{\varrho^{-\mu}\left(C\varrho^{-\nu}\omega - \frac{1}{\varrho-\varrho^{-1}}\right)},$$

$$\frac{\varrho^{\mu}\left(\frac{\omega}{\varrho^2-\varrho^{-2}} + B\cdot\varrho^{\nu}(\varrho^2+\varrho^{-2})\right)}{\varrho^{-\mu}\left(\varrho^{-\nu}C(\varrho^2+\varrho^{-2})\,\omega - \frac{1}{\varrho^2-\varrho^{-2}}\right)} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4).$$

eine „zum Cyklus $\left(s = \frac{\varrho\,\omega}{\varrho^{-1}}\right)$ gehörige“ Ikosaedergruppe. Hiebei müssen B, C zwei der Bedingung

$$BC \equiv \frac{(\varrho^2 + \varrho^{-2})^2}{(\varrho - \varrho^{-1})^2} \text{ mod. } q$$

entsprechende Grössen sein, welche reell oder conjugirt imaginär sind, je nachdem $q \equiv 1$ oder $q \equiv -1$ mod. 5 ist. Zahlen dieser Eigenschaften existiren aber unter allen Umständen (§ 4., c), da die Grösse $\frac{(\varrho^2 + \varrho^{-2})^2}{(\varrho - \varrho^{-1})^2}$ reell ist.

Die Zahl dieser zum Cyklus $\left(s = \frac{\varrho\,\omega}{\varrho^{-1}}\right)$ *gehörigen Gruppen* G_{60}'' *ergiebt sich wieder einfach als* $\frac{q-1}{5}$ *oder* $\frac{q+1}{5}$, *je nachdem* $q \equiv 1$ *oder* -1 *mod.* 5 *ist.* Denn zu jeder solchen Gruppe gehören 5 Substitutionen der Periode 2 von der Gestalt

$$t \equiv \frac{\frac{\omega}{\varrho - \varrho^{-1}} + B}{C\omega - \frac{1}{\varrho - \varrho^{-1}}} \text{ mod. } q,$$

welche aus einer unter ihnen (t) hervorgehen, wenn man an Stelle von B, C die Grössen $B\varrho^{\nu}$, $C\varrho^{-\nu}$ für $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ setzt, während in der Gruppe G überhaupt $q - 1$ oder $q + 1$ (§ 4., a) Substitutionen dieser Art existiren.

Bemerkt man hiezu, dass es bez. $\frac{q(q+1)}{2}$ oder $\frac{q(q-1)}{2}$ Cyklen der Periode 5 giebt (§ 6.), und dass, wie man weiss*), an jeder Gruppe G_{60}'' 6 Cyklen der Periode 5 theilnehmen oder dass jede Gruppe G_{60}'' zu 6 Cyklen der Periode 5 gehört, so ergiebt sich als Anzahl aller in der Modulargruppe G enthaltenen Ikosaedergruppen die Zahl

$$\frac{q(q^2-1)}{60}.$$

Man kann nun auch die Frage der Gleichberechtigung dieser Gruppen G_{60}'' leicht beantworten. Zunächst wird man leicht die zum Cyklus (s) gehörigen Gruppen in 2 Gattungen trennen. Wir schreiben nämlich die folgenden 2 Typen dieser Gruppen hin, unter S, T erzeugende Substitutionen verstanden:

*) Vergl. die zweite Anmerkung pag. 348.

$$\text{A)}\quad q \equiv 1 \bmod. 5, \quad \varrho \equiv \lambda^{\frac{q-1}{5}} \bmod. q.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(I)}\ S \equiv \frac{\varrho\,\omega}{\varrho^{-1}}, \quad T \equiv \frac{\dfrac{\omega}{\varrho - \varrho^{-1}} + \dfrac{\lambda^{2\mu}}{\varrho^2 - \varrho^{-2}}}{\dfrac{\lambda^{-2\mu}}{\varrho^2 - \varrho^{-2}}\,\omega - \dfrac{1}{\varrho - \varrho^{-1}}} \bmod. q;\\
&\text{(II)}\ S \equiv \frac{\varrho\,\omega}{\varrho^{-1}}, \quad T \equiv \frac{\dfrac{\omega}{\varrho - \varrho^{-1}} + \dfrac{\lambda^{2\mu+1}}{\varrho^2 - \varrho^{-2}}}{\dfrac{\lambda^{-2\mu-1}}{\varrho^2 - \varrho^{-2}}\,\omega - \dfrac{1}{\varrho - \varrho^{-1}}} \bmod. q.
\end{aligned}\right\}\left(\mu = 0, 1, 2, \ldots \frac{q-3}{2}\right)$$

$$\text{B)}\quad q \equiv -1 \bmod. 5, \quad \varrho \equiv j^{\frac{q+1}{5}} \bmod. q.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(I)}\ S \equiv \frac{\varrho\,\omega}{\varrho^{-1}}, \quad T \equiv \frac{\dfrac{\omega}{\varrho - \varrho^{-1}} + b j^{2\nu}}{c j^{-2\nu}\omega - \dfrac{1}{\varrho - \varrho^{-1}}} \bmod. q;\\
&\text{(II)}\ S \equiv \frac{\varrho\,\omega}{\varrho^{-1}}, \quad T \equiv \frac{\dfrac{\omega}{\varrho - \varrho^{-1}} + b j^{2\nu+1}}{c \cdot j^{-(2\nu+1)}\omega - \dfrac{1}{\varrho - \varrho^{-1}}} \bmod. q.
\end{aligned}\right\}\left(\nu = 0, 1, 2, \ldots \frac{q-1}{2}\right)$$

Hiebei sind b, c conjugirt imaginäre Grössen der Bedingung

$$bc \equiv \frac{(\varrho^2 + \varrho^{-2})^2}{(\varrho - \varrho^{-1})^2} \text{ (vgl. § 4., c)}.$$

Nun sind jedenfalls die $\frac{q-1}{10}$ bez. $\frac{q+1}{10}$ Gruppen jeder der zwei aufgeführten Arten gleichberechtigt; denn sie gehen durch Transformation in Bezug auf die Substitutionen

$$\Theta_\nu \equiv \frac{\lambda^\nu\omega}{\lambda^{-\nu}} \text{ bez. } \Theta_\nu \equiv \frac{j^\nu\omega}{j^{-\nu}} \bmod. q$$

in einander über, da die erzeugenden Substitutionen

$$s \equiv \frac{\varrho\,\omega}{\varrho^{-1}} \text{ und } t \equiv \frac{\dfrac{\omega}{\varrho - \varrho^{-1}} + B}{C\omega - \dfrac{1}{\varrho - \varrho^{-1}}}$$

hiebei in

$$\Theta_\nu^{-1} s \Theta_\nu \equiv \frac{\varrho\,\omega}{\varrho^{-1}} \text{ und } \Theta_\nu^{-1} t \Theta_\nu \equiv \frac{\dfrac{\omega}{\varrho - \varrho^{-1}} + B\lambda^{-2\nu}}{C\lambda^{2\nu}\omega - \dfrac{1}{\varrho - \varrho^{-1}}}$$

oder

$$\frac{\dfrac{\omega}{\varrho-\varrho^{-1}}+Bj^{-2\nu}}{Cj^{2\nu}\omega-\dfrac{1}{\varrho-\varrho^{-1}}}$$

verwandelt werden.

Also sind die zum Cyklus $\left(S=\frac{\varrho\omega}{\varrho^{-1}}\right)$ *gehörigen Ikosaedergruppen* G''_{60} *zu je* $\frac{q-1}{10}$ *bez.* $\frac{q+1}{10}$ *gleichberechtigt*, und da alle Cyklen der Periode 5 (§ 6.) selbst gleichberechtigt sind, so folgt, dass von den $\frac{q(q^2-1)}{60}$ überhaupt vorhandenen Ikosaedergruppen jedenfalls je $\frac{q(q^2-1)}{120}$ gleichberechtigt sind. Hiebei ist jedoch noch nicht entschieden, ob nicht alle diese G''_{60} untereinander gleichberechtigt sind. Allein, würde man dieses annehmen, so käme man in Widerspruch mit dem am Eingang des § 9. aufgestellten Satze, da dort $M=\frac{q(q^2-1)}{60}$ und N mindestens gleich 60 gesetzt werden müsste. Also sind die Gruppen G''_{60} der I. Art nicht mit denen der II. gleichberechtigt, was zu beweisen war.

Ich füge hier noch den ergänzenden Satz bei: *Die Gruppen* G''_{60} *sind nur mit ihren eigenen* 60 *Substitutionen vertauschbar.*

§ 13.

Isomorphismus der Gruppe mit sich selbst.

Es ist ein bekanntes Theorem, welches dem Wesen der Sache nach Kronecker*) zukommt, *dass die Gruppe der Modulargleichung auf zwei wesentlich verschiedene Arten auf sich selbst isomorph bezogen werden kann.* In der Folge hat man diese zwei Arten von Isomorphismus der Gruppe mit sich selbst wegen ihrer Wichtigkeit passend mit den Namen der *Cogrediens* und *Contragrediens* noch ausdrücklicher unterschieden**).

Bei meiner Darstellung liegt der Grund für dieses Verhalten darin, dass es nach § 2. zwei verschiedene Gattungen von Substitutionen S_q der Periode q in der Gruppe G giebt.

Man hat nämlich den Satz: *Die Modulargruppe G lässt sich auf zwei wesentlich verschiedene Arten auf sich selbst isomorph beziehen. Bei der einen Art, die als Cogrediens zu bezeichnen ist, entsprechen den Substitutionen S_q wieder Substitutionen S_q' derselben Gattung, bei der*

*) Monatsberichte der Berliner Akademie 1861.

**) Vergl. Gordan, Annalen XIII, p. 375 ff.

anderen Art, die wir als Contragredienz zu bezeichnen haben, entsprechen den Substitutionen S_q Substitutionen S_q' von entgegengesetzter Gattung.

Zunächst ist klar, dass aus einer isomorphen Bezugsetzung der Gruppe G mit sich selbst ohne Weiteres $\frac{q(q^2-1)}{2}-1$ weitere abgeleitet werden können. Besteht nämlich der gegebene Isomorphismus der Gruppe G mit sich darin, dass die erzeugenden Substitutionen s, t den Substitutionen s_1, t_1 zugeordnet sind, so erhält man bekanntlich ebenfalls einen Isomorphismus der Gruppe G mit sich, der von dem ersten verschieden ist, wenn man den Substitutionen s, t die Substitutionen

$$\vartheta^{-1} s_1 \vartheta \quad \text{und} \quad \vartheta^{-1} t \vartheta$$

zuordnet, wo ϑ eine von der Identität verschiedene Substitution der Gruppe G ist.

Die so erlangten $\frac{q(q^2-1)}{2}$ verschiedenen Fälle des Isomorphismus der Gruppe G mit sich selbst sollen als Isomorphismus derselben Art bezeichnet werden.

Nunmehr erhalten wir die $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Fälle der Cogredienz, wenn wir den erzeugenden Substitutionen

$$(s) \quad \omega' \equiv \omega + 1, \qquad (t) \quad \omega' \equiv -\frac{1}{\omega} \text{ mod. } q$$

der Gruppe G die Substitutionen

$$\text{(a)} \qquad (s') \quad \omega' \equiv \omega + 1, \qquad (t') \quad \omega' \equiv -\frac{1}{\omega} \text{ mod. } q$$

zuordnen, während die $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Fälle der Contragredienz erlangt werden, wenn man den Substitutionen

$$(s) \quad \omega' \equiv \omega + 1 \quad \text{und} \quad (t) \quad \omega' \equiv -\frac{1}{\omega} \text{ mod. } q$$

die Substitutionen

$$\text{(b)} \qquad (s_1') \quad \omega' \equiv \omega + n; \qquad (t_1') \quad \omega' \equiv \frac{-n}{n^{-1}\omega} \text{ mod. } q$$

entsprechen lässt, wo n ein beliebiger quadratischer Nichtrest mod. q ist.

Beide Arten fallen in eine zusammen, sobald man den Substitutionen ϑ die ausserhalb der Gruppe G liegende imaginäre Substitution

$$\Theta \equiv \frac{x^{-1}\omega}{x} \text{ mod. } q$$

adjungirt, wo x eine Wurzel der Congruenz

$$x^2 \equiv n \text{ mod. } q$$

ist.

In der That überzeugt man sich leicht, dass

$$\begin{aligned} \Theta^{-1} s \Theta \quad &= s_1', \\ \Theta^{-1} t \Theta^{-1} &= t_1' \end{aligned}$$

wird. In dieser Ueberführung liegt zugleich der Beweis, dass die mit (b) bezeichneten Bezugsetzungen in der That einen Isomorphismus der Gruppe mit sich selbst herstellen.

Ausser den nunmehr aufgezählten $2 \cdot \frac{q(q^2-1)}{2}$ Fällen des Isomorphismus der Gruppe G mit sich giebt es keine weiteren mehr. Denn, wenn der Substitution (s) $\omega' \equiv \omega + 1$ mod. q die Substitution s_1 derselben Periode zugeordnet ist, so kann man ϑ nach § 2. so wählen, dass $s_1' = \vartheta^{-1} s_1 \vartheta$ entweder mit $\omega' \equiv \omega + 1$ oder mit $\omega' \equiv \omega + n$ zusammenfällt. Im ersten Falle können wir dann die Zuordnungen

$$(s) \quad \omega' \equiv \omega + 1, \qquad (t) \quad \omega' \equiv -\frac{1}{\omega} \text{ mod. } q,$$

$$(s') \quad \omega \equiv \omega + 1, \qquad (t') \quad \omega' \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega - a} \text{ mod. } q$$

wählen, da (t') ebenfalls die Periode 2 haben muss wie (t). Da ferner $s't'$ von der Periode 3 sein muss, weil dies auch bei st der Fall ist, so folgt die Bedingung $c = 1$ und also muss t' die Gestalt

$$t' \equiv \frac{a\omega - (1 + a^2)}{\omega - a} \text{ mod. } q$$

haben. Allein man überzeugt sich nun leicht, dass die Transformation von s und t in Bezug auf

$$\vartheta \equiv \omega + a \text{ mod. } q$$

diese Substitutionen in

$$\vartheta^{-1} s \vartheta = s' \quad \text{und} \quad \vartheta^{-1} t \vartheta = t'$$

überführt, so dass unsere Zuordnung keinen neuen Fall des Isomorphismus der Gruppe mit sich selbst ergiebt. Ferner wird der zweite Fall auf den ersten zurückgeführt, wenn man die Gruppe G in Bezug auf die Substitution $\Theta \equiv \frac{x^{-1}\omega}{x}$ mod. q (in sich) transformirt.

Ich füge diesen Betrachtungen noch einen Satz hinzu, der durch einen Blick auf die obigen Entwicklungen als richtig erkannt wird: *Durch die Transformation der Gruppe G in sich, welche die Substitution Θ liefert, werden die verschiedenen Gattungen von Untergruppen G_4', G_{12}'', G_{24}'', G_{60}'' mit einander vertauscht. Wenn man also die Substitution Θ zu den Substitutionen der Gruppe G hinzunimmt, so entsteht eine umfassendere Gruppe von $q(q^2-1)$ Substitutionen — die Gruppe der Modulargleichung der Transformation q^{ter} Ordnung ohne Adjunction von $\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}} q}$ —, welche die Gruppe G der Ordnung $\frac{q(q^2-1)}{2}$ als ausgezeichnete Untergruppe in sich enthält, und in welcher alle Substitutionen der Periode q, ebenso alle Untergruppen G_4', G_{12}'', G_{24}'', G_{60}'' unter einander gleichberechtigt sind.*

§ 14.

Einige Sätze über die Zugehörigkeit der aufgezählten Untergruppen.

Ich stelle zum Schlusse dieses Abschnitts noch einige Sätze zusammen, die leicht bewiesen werden können. Hierbei soll ebenso wie früher *eine Gruppe zu einer anderen gehörig* genannt werden, wenn sie die letztere in sich als Untergruppe enthält. Ferner soll $\left(\frac{m}{n}\right)$ das Legendre'sche Zeichen bedeuten d. h. den Werth $+1$ oder -1 haben, je nachdem m quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest mod. n ist.

1) *Zu jeder cyklischen Gruppe G_2 der Periode 2 gehören* $\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{4}$ *Gruppen G_4' und ebensoviele Gruppen G_{12}'', die alle gleichberechtigt sind, wenn* $\left(\frac{2}{q}\right)=-1$ *ist, die sich aber in zwei Hälften von je* $\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{8}$ *Gruppen von entgegengesetzter Gattung vertheilen, wenn* $\left(\frac{2}{q}\right)=+1$ *ist.*

Zu jeder Gruppe G_2 gehören ferner $3\,\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{4}$ *Oktaedergruppen, wenn* $\left(\frac{2}{q}\right)=1$ *ist und zwar von jeder der beiden Gattungen je* $\frac{3\left(q-\left(\frac{-1}{q}\right)\right)}{8}$. *Ebenso gehören zu jeder cyklischen Gruppe G_2 im Falle* $\left(\frac{q}{5}\right)=1$ *je* $\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{2}$ *Ikosaedergruppen und zwar von jeder Gattung* $\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{4}$.

2) *Zu jeder cyklischen Gruppe G_3 der Ordnung 3 gehören* $\frac{q-\left(\frac{q}{3}\right)}{3}$ *Tetraedergruppen G_{12}'', die von derselben Gattung sind, wenn* $\left(\frac{2}{q}\right)=-1$ *ist, die sich aber in zwei Gattungen von je* $\frac{q-\left(\frac{q}{3}\right)}{6}$ *Tetraedergruppen G_{12}'' vertheilen, wenn* $\left(\frac{2}{q}\right)=1$ *ist.*

Zu jeder Gruppe G_3 gehören ferner von jeder der zwei Gattungen je $\frac{q-\left(\frac{q}{3}\right)}{6}$ *Oktaedergruppen, wenn* $\left(\frac{2}{q}\right)=1$ *ist und ebensoviele Ikosaedergruppen von jeder Gattung, wenn* $\left(\frac{q}{5}\right)=1$ *ist.*

3) *Zu jeder cyklischen Gruppe* G_4 *der Periode* 4 *gehören* $\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{8}$ *Oktaedergruppen der einen und ebensoviele der andern Art.*

4) *Zu jeder cyklischen Gruppe* G_5 *der Periode* 5 *gehören* $\frac{q\mp 1}{5}$ *Ikosaedergruppen, die sich in gleiche Hälften von je* $\frac{q\mp 1}{10}$ *auf die beiden vorhandenen Gattungen vertheilen. Hiebei gelten die oberen oder unteren Vorzeichen, je nachdem* $q\equiv 1$ oder $q\equiv -1$ *mod.* 5 *ist.*

5) *Zu jeder Doppelpyramidengruppe* G_4' *gehört eine Tetraedergruppe und, wenn* $\left(\frac{2}{q}\right)=1$ *ist, ebenso eine Oktaedergruppe.*

6) *Ebenso gehören zu jeder Gruppe* G_4', *sowie zu jeder Tetraedergruppe zwei Ikosaedergruppen* G_{60}'', *welche von entgegengesetzter Gattung sind, wenn* 2 *quadratischer Nichtrest mod.* q *ist, die aber von derselben Gattung sind, wenn* 2 *quadratischer Rest mod.* q *ist.*

II. Abschnitt.

Beweis für die Vollständigkeit der im I. Abschnitte gelieferten Aufzählung von Untergruppen.

Ich gehe nunmehr dazu über, nachzuweisen, dass ausser den in Abschnitt I. aufgestellten Untergruppen der Modulargruppe G keine weiteren derartigen Gruppen existiren können. Dieser Beweis kann mit denselben Mitteln durchgeführt werden, welche Camille Jordan*) verwendet hat, um die endlichen Gruppen der linearen Substitutionen und zwar zunächst der binären und ternären aufzustellen. Demselben liegt der einfache Gedanke zu Grunde, dass man für den Grad g einer Gruppe G' gewisse diophantische Bedingungen aufstellt, welche nothwendig bestehen müssen, wenn diese Gruppe eine Untergruppe der Hauptgruppe G sein soll, und dass man dann für die Zahlen g, welche den erwähnten Bedingungen genügen, besondere Untersuchungen anstellt, um zu entscheiden, ob denn auch in der That Untergruppen der Gruppe G vom Grade g existiren. Merkwürdig ist hiebei in unserem Falle, dass für alle Lösungen g auch in der That Untergruppen dieser Ordnungen von G existiren.

*) Camille Jordan, Mémoire sur les équations différentielles linéaires à l'intégrale algébrique, in Crelles Journal Bd. 84.

§ 1.

Diophantische Bedingungen für den Grad einer Untergruppe.

Zunächst erkennt man: *Jede weitere in der Hauptgruppe G enthaltene Untergruppe, die von den im I. Abschnitte aufgestellten verschieden ist, kann keine cyklische Gruppe der Ordnung q enthalten.* Denn entweder enthält sie nur einen solchen Cyklus (S), dann genügen alle Substitutionen Θ der Untergruppe einer Bedingung

$$\Theta^{-1} S \Theta = S^{\varkappa},$$

d. h. die Gruppe fällt mit einer halbmetacyklischen Gruppe oder einer Untergruppe derselben zusammen. Oder aber die Gruppe enthält mindestens zwei verschiedene Cyklen der Periode q (S_1) und (S_2); dann enthält sie alle $q+1$ derartigen Cyklen der Hauptgruppe. Denn durch die Transformationen

$$S_2^{-\mu}\, S_1^{\nu}\, S_2^{\mu}$$

für $\mu = 1, 2, \cdots, q-1$ gehen aus (S_1) gerade $q-1$ weitere von einander und von (S_1) und (S_2) verschiedene Cyklen $(S_2^{-\mu} S_1 S_2^{\mu})$ dieser Periode hervor. Also enthält sie alle q^2-1 Substitutionen der Periode q der Hauptgruppe, mithin auch die zwei folgenden

$$S \equiv \omega + 1; \qquad S' \equiv \frac{2\omega - 1}{\omega} \text{ mod. } q$$

und demnach auch die Substitution

$$S^{-2} S' \equiv -\frac{1}{\omega} \text{ mod. } q,$$

welche in Verbindung mit S bekanntlich die Gruppe G erzeugt. Wir schliessen hieraus, dass die Untergruppe mit der Hauptgruppe selbst zusammenfällt, was nicht der Fall sein soll.

Dementsprechend soll auch im Folgenden nur von Untergruppen die Rede sein, die keine Substitution der Periode q enthalten.

Der Grad g einer hier betrachteten Untergruppe ist dann ein Theiler von $\frac{q^2-1}{2}$.

Ferner seien die Substitutionen einer solchen Untergruppe mit Θ_{ν} bezeichnet. —

Wir greifen dann aus den Substitutionen unserer Untergruppe eine Substitution S_1 heraus, welche die höchst vorkommende Periode π_1 hat, so dass also keine Substitution Θ' der Untergruppe existirt von höherer Periode als S_1.

Dann ist die Anzahl der Substitutionen Θ_{ν}, die einer Relation

$$\text{(A)} \qquad \Theta_{\nu}^{-1} S_1 \Theta_{\nu} = S_1^{\mu}$$

genügen, entweder $= \pi_1$ oder $= 2\pi_1$.

Wir wissen nämlich nach § 2. des Abschnittes I., dass die Gesammtheit der Substitutionen ϑ_ν der Hauptgruppe G, welche einer Relation (A) genügen, eine Doppelpyramidengruppe bilden, welche aus den Potenzen einer Substitution S in Verbindung mit einer Substitution T der Periode 2 besteht, und zwar ist S_1 eine Potenz von S, etwa

$$S_1 = S^\tau.$$

Nun soll der Annahme nach keine Substitution von höherer Periode, als S_1 hat, vorkommen; daher haben wir nur die zwei folgenden Möglichkeiten:

1) Die Substitutionen Θ_ν der verlangten Art bestehen nur aus allen Potenzen von $S_1 = S^\tau$ und bilden dann eine cyklische Gruppe der Periode π_1. Ausser diesen Potenzen von S können keine weiteren mehr vorkommen; denn wäre S' noch eine solche Potenz von S, so könnte man eine Substitution $S_1^x \cdot S'^y$ finden, die eine grössere Periode hätte als S_1, was ein Widerspruch wäre.

2) Die Substitutionen Θ der verlangten Art bestehen aus den π_1 Potenzen von S_1 in Verbindung mit mindestens einer Substitution T_1. Wenn es aber eine Substitution T_1 giebt, so giebt es sogleich π_1 derartige Substitutionen der Periode 2; es sind dies die Substitutionen $S_1^\nu T_1$ für $\nu = 1, 2, 3 \cdots \pi_1$. Aber ausser diesen können keine weiteren solchen Substitutionen mehr vorhanden sein. Denn wäre $S^\mu T_1$ eine solche, so gäbe es auch eine Substitution $S^\mu T_1 T_1 = S^\mu$ der Untergruppe, die keine Potenz von S_1 wäre, was aber nach (1) nicht stattfinden kann. Also bilden in diesem Falle die Substitutionen Θ eine Doppelpyramidengruppe der Ordnung $2\pi_1$, was zu beweisen war.

Offenbar gilt dieser Satz auch für jede solche Substitution Θ der Untergruppe, welche nicht als Potenz einer andern Substitution Θ' derselben von höherer Periode als Θ darstellbar ist.

Dieses vorausgesetzt bilden wir jetzt die $(\pi_1 - 1) \cdot g$ Substitutionen:

$$\Theta_\nu^{-1} S_1 \Theta_\nu;\quad \Theta_\nu^{-1} S_1^2 \Theta_\nu; \cdots;\ \Theta_\nu^{-1} S_1^{\pi_1 - 1} \Theta_\nu,$$

wo Θ_ν alle Substitutionen der Untergruppe (inclusive der Identität) beschreibt. Dann haben bekanntlich alle diese Substitutionen dieselbe Periode, wie beziehungsweise:

$$S_1,\ S_1^2,\ S_1^3, \cdots,\ S_1^{\pi_1 - 1}.$$

Ferner erkennt man ebenso wie in § 6. Abschn. I., dass dieselben zu je π_1 resp. $2\pi_1$ zusammenfallen, je nachdem die Zahl der Substitutionen Θ, welche einer Relation (A) genügen $= \pi_1$ oder $2\pi_1$ ist. *Die Gesammtheit der durch unser Verfahren mit S_1 erhaltenen unter sich verschiedenen, übrigens gleichberechtigten Substitutionen der betrachteten Untergruppe ist demnach $\frac{(\pi_1 - 1) \cdot g}{\sigma_1 \pi_1}$, wo $\sigma_1 = 1$ oder $= 2$ ist.*

Mit den jetzt erhaltenen Substitutionen werden noch nicht alle Substitutionen unserer Untergruppe erschöpft sein. Man suche nun unter den übriggebliebenen Substitutionen der Untergruppe wieder eine solche S_2 heraus, deren Periode π_2 von keiner anderen der noch restirenden Substitutionen übertroffen wird. Dann gilt für diese Substitution ebenfalls der Satz (A), da es keine Substitution Θ geben kann von grösserer Periode als π_2, von welcher S_2 eine Potenz ist. Offenbar müsste nämlich eine solche Substitution Θ unter den bereits aufgezählten sein, dann wäre also $\Theta = \Theta_\nu^{-1} S_1^{\varrho} \Theta_\nu$ und

$$S_2 = \Theta^{\tau} = \Theta_\nu^{-1} S_1^{\varrho\tau} \Theta_\nu,$$

d. h. es wäre auch S_2 eine der bereits aufgezählten Substitutionen, was gegen die Voraussetzung verstösst. *Demnach ist wieder die Zahl der verschiedenen Substitutionen der Art*

$$\Theta_\nu^{-1} S_2 \Theta_\nu,\ \ \Theta_\nu^{-1} S_2^2 \Theta_\nu,\ \ \cdots,\ \ \Theta_\nu^{-1} S_2^{\pi_2 - 1} \Theta_\nu,$$

da diese zu je $\sigma_2 \pi_2$ (wo $\sigma_2 = 1$ oder 2 ist) zusammenfallen, *durch* $\frac{(\pi_2 - 1) g}{\sigma_2 \pi_2}$ *dargestellt.*

Diese Substitutionen sind aber andrerseits auch von den erst erhaltenen Substitutionen verschieden. Denn wäre etwa $\Theta_\nu^{-1} S_1^{\varkappa} \Theta_\nu = \Theta_\mu^{-1} S_2^{\lambda} \Theta_\mu$, so käme sofort:

$$\Theta_\mu \Theta_\nu^{-1} S_1^{\varkappa} \Theta_\nu \Theta_\mu^{-1} = S_2^{\lambda}$$

und hieraus (nach § 5. Anm.), wenn man $\Theta_\nu \Theta_\mu^{-1} = \Theta_\varrho$ setzt,

$$\Theta_\varrho^{-1} S_1^{\frac{\varkappa}{\lambda} \cdot \psi} \Theta_\varrho^{-1} = S_2.$$

Dies würde aber sagen, dass S_2 schon zu den erst erlangten Substitutionen gehörte, was ein Widerspruch gegen unsere Annahme wäre, S_2 solle zu den restirenden Substitutionen Θ gehören.

Wir können so fortgehen, indem wir wieder aus den restirenden Substitutionen eine S_3 herausgreifen von einer Periode π_3, die nicht kleiner ist als die Periode irgend einer andern der übriggebliebenen Substitutionen und erhalten dann auf demselben Wege wieder $\frac{(\pi_3 - 1) g}{\sigma_3 \pi_3}$ neue, von einander und der Identität verschiedene Substitutionen der Untergruppe u. s. f. Sei S_r diejenige Substitution, mit welcher der Process sich abschliesst, mit welcher also alle Substitutionen Θ_ν der Untergruppe ausser der Identität erschöpft sind. *Dann erhalten wir offenbar* (mit Hinzufügung der Identität) *die Relation*

$$\text{(I)} \qquad g = 1 + \sum_{\nu = 1}^{\nu = r} \frac{(\pi_\nu - 1) g}{\sigma_\nu \pi_\nu},$$

wobei $\sigma_\nu = 1$ *oder* 2 *ist.*

Ausser dieser Hauptbedingung schreiben wir noch 2 weitere hin. *Selbstverständlich ist die Bedingung:*

(II) $$g \geqq \sigma_\nu \pi_\nu.$$

Ist ferner $\pi_1 > \pi_2 > 2$, *so wird*

(III) $$g \geqq 2\pi_1\pi_2 - \pi_1 - \pi_2 + 1.$$

Denn die $\pi_2(\pi_1 - 1)$ Substitutionen

$$S_2^{-\nu} S_1^{\mu} S_2^{\nu} \text{ für } \begin{cases} \mu = 1, 2, \cdots, \pi_1 - 1 \\ \nu = 1, 2, \cdots, \pi_2, \end{cases}$$

sowie die $\pi_1(\pi_2 - 1)$ Substitutionen

$$S_1^{-\mu} S_2^{\nu} S_1^{\mu} \text{ für } \begin{cases} \nu = 1, 2, \cdots, \pi_2 - 1 \\ \mu = 2, 1, \cdots, \pi_1 \end{cases}$$

sind unter sich und von der Identität verschieden.

§ 2.

Discussion der erhaltenen Bedingungsgleichungen.

Aus der Bedingung (I) ergiebt sich jetzt

$$g = \frac{1}{1 - \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{\pi_\nu - 1}{\sigma_\nu \pi_\nu}}.\text{*)}$$

Nun muss g positiv sein, also $1 > \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{\pi_\nu - 1}{\sigma_\nu \pi_\nu}$, und da jeder Term $\frac{\pi_\nu - 1}{\sigma_\nu \pi_\nu} \geqq \frac{1}{4}$ ist, so kann r höchstens gleich 3 sein und daher giebt es nur eine geringe Anzahl von positiven Lösungen g. Dieselben sind:

(1) $$r = 1 \text{ giebt } \sigma_1 = 1, \; g = \pi_1,$$

(2) $$r = 2 \text{ giebt } \begin{cases} \text{a) } \sigma_1 = \sigma_2 = 2; \; \pi_1 = \pi_1, \; \pi_2 = \pi_2; \; g = \frac{2\pi_1\pi_2}{\pi_1 + \pi_2}, \\ \text{b) } \sigma_1 = 2, \; \sigma_2 = 1; \; \pi_1 = \pi_1, \; \pi_2 = 2; \; g = 2\pi_1, \\ \text{c) } \sigma_1 = 1, \; \sigma_2 = 2; \; \pi_1 = 3, \; \pi_2 = 2; \; g = 12, \end{cases}$$

(3) $$r = 3 \text{ giebt } \begin{cases} \text{a) } \sigma_1 = \sigma_1 = \sigma_3 = 2; \; \pi_1 = \pi_1, \; \pi_2 = 2, \; \pi_3 = 2, \; g = 2\pi_1, \\ \text{b) } \quad ,, \quad ; \; \pi_1 = 3, \; \pi_2 = 3, \; \pi_3 = 2, \; g = 12, \\ \text{c) } \quad ,, \quad ; \; \pi_1 = 4, \; \pi_2 = 3, \; \pi_3 = 2, \; g = 24, \\ \text{d) } \quad ,, \quad ; \; \pi_1 = 5, \; \pi_2 = 3, \; \pi_3 = 2, \; g = 60. \end{cases}$$

*) C. Jordan, die eben citirte Abhandlung in Borchardt's Journal, Bd. 84, pag. 98.

Bemerkt man ferner, dass die Lösungen (2)a und (3)b in Widerspruch stehen mit den Bedingungen (II) bez. (III) des § 1., so bleiben nur folgende Lösungen zur Discussion:

(1) $$r = 1;\ \sigma_1 = 1;\ \pi_1 = \pi_1;\ g = \pi_1.$$

(2) $$\begin{cases} \text{a)}\ r=2;\ \sigma_1=2,\ \sigma_2=1;\ \pi_1=\pi_1,\ \pi_2=2;\ g=2\pi_1, \\ \text{b)}\ r=3,\ \sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=2;\ \pi_1=\pi_1,\ \pi_2=2,\ \pi_3=2;\ g=2\pi_1, \end{cases}$$

(3) $$r=2;\ \sigma_1=1,\ \sigma_2=2;\ \pi_1=3,\ \pi_2=2;\ g=12,$$

(4) $$r=3;\ \sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=2;\ \pi_1=4,\ \pi_2=3,\ \pi_3=2;\ g=24,$$

(5) $$r=3;\ \sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=2;\ \pi_1=5,\ \pi_2=3,\ \pi_3=2;\ g=60.$$

Nun ist klar, dass der Fall (1) *die cyklischen Gruppen G_σ und G_τ liefert.*

Die beiden Fälle (2) *liefern die Doppelpyramidengruppen $G'_{2\sigma}$, $G'_{2\tau}$ und zwar beziehungsweise für ungerade Zahlen σ, τ oder für gerade Zahlen σ, τ.* Denn der Entwicklung des § 1. dieses Abschnittes zufolge ist S_1 von der Periode π_1 mit allen Substitutionen Θ der Gruppe in einer Beziehung:

$$\Theta^{-1} S_1 \Theta = S_1^{\varkappa}\ (\S.\ 7.).$$

Der Fall (3) *giebt die Tetraedergruppen.*

In der That bemerkt man zunächst nach den Entwicklungen des § 1., dass eine diesem Falle entsprechende Untergruppe 4 Cyklen der Periode 3 und 3 Cyklen der Periode 2 hat, wie dies auch beim Tetraeder der Fall ist. Sei nun ϱ eine primitive Wurzel der Congruenz $\varrho^3 \equiv 1$ mod. q, so können wir

$$S_1 = \frac{\varrho\,\omega}{\varrho^{-1}};\qquad S_2 = \frac{a\omega + b}{c\omega - a}\ (\S\ 1.)$$

nehmen, wo a von 0 mod. q verschieden ist. Dann besitzt

$$S_2 S_1 = \frac{a\varrho\omega + b\varrho^{-1}}{c\varrho\omega - a\varrho^{-1}}$$

jedenfalls nicht die Periode 2, also muss sie die Periode 3 haben, da nur diese zwei Perioden vorkommen; also wird

$$a \equiv \frac{1}{\varrho - \varrho^{-1}} \text{ mod. } q,$$

d. h. nach § 11., dass S_1 und S_2 eine Tetraedergruppe erzeugen.

Der Fall 4 *liefert die Oktaedergruppen.*

Zunächst sieht man nämlich wieder, dass bei einer Untergruppe dieses Falles, wie dies beim Oktaeder der Fall ist, 3 Cyklen der Periode 4, 4 Cyklen der Periode 3 und 6 Cyklen der Periode 2 existiren. Sei jetzt wieder ϱ eine primitive Wurzel der Congruenz $\varrho^8 \equiv 1$ mod. q, so können wir (§ 1, Abschn. II.)

$$S_1 = \frac{\varrho\omega}{\varrho^{-1}}, \qquad S_3 = \frac{a\omega + b}{c\omega - a}$$

wählen, wo $a > 0$ mod. q ist. Jetzt betrachten wir die Substitutionen:

$$S_3 S_1 = \frac{a\varrho\omega + b\varrho^{-1}}{c\varrho\omega - a\varrho^{-1}}; \quad S_3 S_1^2 = \frac{a\varrho^2\omega + b\varrho^{-2}}{c\varrho^2\omega - a\varrho^{-2}}.$$

Jedenfalls hat nun die Substitution $S_3 S_1$, da $a > 0$ mod. q ist, entweder die Periode 3 oder 4. Im ersten Falle wird $a \equiv \frac{1}{\varrho - \varrho^{-1}}$ mod. q und S_1 und S_3 erzeugen (§ 11.) eine Oktaedergruppe. Im letzten Falle wird $a \equiv \frac{\varrho + \varrho^{-1}}{\varrho - \varrho^{-1}}$ mod. q; dann hat aber $S_3 S_1^2$ wegen

$$a(\varrho^2 - \varrho^{-2}) \equiv (\varrho + \varrho^{-1})^2 \equiv 2 \text{ mod. } q$$

nach § 2. die Periode q, was ein Widerspruch ist, wenn $q > 3$ ist, was hier angenommen werden muss. Diese Möglichkeit ist daher nicht weiter in Betracht zu ziehen.

Der Fall (5) *liefert die Ikosaedergruppen.*

Denn zunächst erhalten wir im Hinblick auf § 1. d. Abschn. für eine diesem Falle entsprechende Untergruppe 6 Cyklen der Periode 5, 10 Cyklen der Periode 3, 15 Cyklen der Periode 2. Nun sei ϱ eine Wurzel der Congruenz: $\varrho^5 \equiv 1$ mod. q. Wir setzen dann (nach § 1, A. II.)

$$S_1 \equiv \frac{\varrho\omega}{\varrho^{-1}}, \qquad S_3 \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega - a} \text{ mod. } q,$$

wobei wir $a > 0$ mod. q annehmen dürfen. Bilden wir jetzt wieder die Substitutionen

$$S_3 S_1 \equiv \frac{a\varrho\omega + b\varrho^{-1}}{c\varrho\omega - a\varrho^{-1}}; \quad S_3 S_1^2 \equiv \frac{a\varrho^2\omega + b\varrho^{-2}}{c\varrho^2\omega - a\varrho^{-2}} \text{ mod. } q,$$

so folgt wieder: $S_3 S_1$ hat entweder die Periode 3 oder 5. Hat sie die Periode 3, so wird $a \equiv \frac{1}{\varrho - \varrho^{-1}}$ mod. q und S_1, S_3 erzeugen nach § 12. eine Ikosaedergruppe. Hat sie die Periode 5, dann wird entweder (vergl. Abschn. I, § 2.)

$$a \equiv \frac{\varrho^2 + \varrho^{-2}}{\varrho - \varrho^{-1}} \equiv \frac{-1}{\varrho^2 - \varrho^{-2}} \qquad \text{oder} \quad a \equiv \frac{\varrho + \varrho^{-1}}{\varrho - \varrho^{-1}} \text{ mod. } q.$$

Im ersteren Falle also sind S_1, S_3 nach § 12. wieder erzeugende Substitutionen einer Ikosaedergruppe. Im letzteren Falle aber stossen wir auf andere Schwierigkeiten, so dass dieser Fall ausgeschlossen bleibt. Nämlich die Periode von $S_3 S_1^2$ muss entweder $= 2$ oder 3 oder 5 sein. Nun ist sie jedenfalls nicht 2, da (vergl. Abschn. I, § 2. den Werth von $\alpha + \delta$)

$$a(\varrho^2 - \varrho^{-2}) \equiv (\varrho + \varrho^{-1})^2 \text{ mod. } q$$

jedenfalls von Null verschieden ist. Sie ist aber auch nicht 3, denn sonst müsste $(\varrho + \varrho^{-1})^2 \equiv \pm 1$ mod. q sein. Nun gäbe

$$(\varrho + \varrho^{-1})^2 \equiv 1$$

die Relation $\varrho^2 + \varrho^{-2} + 1 \equiv 0$, also $\varrho^6 \equiv 1$ mod. q; ebenso gäbe

$$(\varrho + \varrho^{-1})^2 \equiv -1$$

die Relation $\varrho^2 + \varrho^{-2} + 3 \equiv - \varrho - \varrho^{-1} + 2 \equiv -(\varrho^2 - \varrho^{-2})^2 \equiv 0$ mod. q, also $\varrho^4 \equiv 1$ mod. q. Allein dies sind Widersprüche gegen die über ϱ gemachte Voraussetzung, dass $\varrho^5 \equiv 1$ mod. q sein soll.

Endlich hat $S_3 S_1^2$ auch nicht die Periode 5. Sonst wäre nämlich entweder

$$(\varrho + \varrho^{-1})^2 \equiv \pm (\varrho + \varrho^{-1}) \text{ mod. } q,$$

was sicher nicht der Fall ist, oder aber es wäre

$$(\varrho + \varrho^{-1})^2 \equiv \pm (\varrho^2 + \varrho^{-2}) \text{ mod. } q,$$

was ebenfalls unmöglich ist.

Aus allen diesen Erörterungen schliessen wir: *Dass mit den in Abschnitt I. aufgezählten Untergruppen alle Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für einen primzahligen Transformationsgrad q erschöpft sind, und dass also das zu Eingang gestellte Problem in der That erledigt ist.*

Bamberg, im Januar 1881.

Ueber die Abhängigkeit der Charaktere einer durch Leitcurven bestimmten Regelfläche von den Charakteren dieser Leitcurven.

Von

Otto Rupp in Brünn.

Die windschiefen Regelflächen, welche durch eine Gerade erzeugt werden, die

1) drei gegebene Curven einfach,

2) eine gegebene Curve zweifach und eine andere einfach, und

3) eine gegebene Curve dreifach schneidet,

sind zuerst von George Salmon betrachtet worden*).

A. Cayley**) fügt den von Salmon gefundenen Resultaten neue hinzu. Ausser den Graden der Flächen und den Anzahlen der doppelten resp. mehrfachen Erzeugenden bestimmt derselbe namentlich auch die Ordnungen der eigentlichen Doppelcurven. Die Methode, welche Cayley zur Ermittelung der letzteren anwendet, beruht darauf, dass eine (Leit-)Curve m^{ter} Ordnung durch ein System zweier Curven p^{ter} und q^{ter} Ordnung (wobei $p+q=m$ ist) ersetzt wird***).

Nachdem zur Lösung des bezeichneten Problems eine directe geometrische Methode bisher nicht bekannt ist,†) und andrerseits die oben genannten Autoren bei ihren Betrachtungen stationäre Punkte der Leitcurven ausschlossen, so dürfte in dieser Hinsicht die vorliegende

---

*) Salmon: On a class of Ruled Surfaces, Cambridge and Dublin Math. Journ. vol. 8. pag. 45.

——— On the Degree of a Surface reciprocal to a given one. Transact. Royal Irish Acad. vol. 23. p. 461. — cf. auch Salmon's Raumgeometrie II. Theil. Deutsche Ausgabe von Fiedler, p. 296. (3. Auflage.)

**) A. Cayley: On Skew Surfaces, otherwise Scrolls. Philos. Transactions vol. 153. p. 453.

***) Diese Methode ist wesentlich eine Anwendung der Form III. des Schubert'schen Principes von der Erhaltung der Anzahl (cf. Schubert: Calcül der abzählenden Geometrie, § 4).

†) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, II. Theil. p. 302 (3. Auflage).

Abhandlung als Vervollständigung der Theorie bezeichneter drei Regelflächen dienen. Dieselbe befasst sich mit der Ableitung der Charaktere und gewöhnlichen Singularitäten dieser Flächen auf directem geometrischen Wege.

I.

Allgemeine Betrachtungen über die Singularitäten der Regelflächen. Bezeichnungen und Gleichungen.

Eine Gerade g, welche in jeder Lage drei Raumcurven C_1, C_2 und C_3, die eine allgemeine gegenseitige Lage besitzen, in je einem Punkte a_1, a_2 resp. a_3 schneidet, erzeugt eine windschiefe Regelfläche.

Sind t_1, t_2 und t_3 die Tangenten der Curven C_1, C_2 und C_3 in den drei Punkten a_1, a_2 und a_3, so repräsentiren die Ebenen (gt_1), (gt_2) und (gt_3) die Berührebenen der Regelfläche in a_1, a_2, a_3. Da bekanntlich die Reihe der Punkte auf einer Erzeugenden jeder Regelfläche zu dem Büschel der ihnen entsprechenden Berührebenen projectivisch ist, so ist im vorliegenden Falle vermöge der drei Paare entsprechender Elemente a_1, (gt_1); a_2, (gt_2) und a_3, (gt_3) die Berührebene in jedem weiteren Punkte der Erzeugenden g bestimmt.

Es giebt nun im Allgemeinen immer eine bestimmte endliche Anzahl von Erzeugenden g, welche die eine oder die andere der drei Leitcurven C_1, C_2, C_3 noch ein zweites Mal schneiden.

Vorausgesetzt, eine derartige Erzeugende g schneide die Leitcurven C_2 und C_3 in a_2 resp. a_3, und die Leitcurve C_1 in den beiden Punkten a_1 und a_1'. Dann entspricht irgend einem beliebigen Punkte x der Erzeugenden g eine Berührebene G_x vermöge der projectivischen Beziehung

$$(a_1 a_2 a_3 x) = (gt_1\, gt_2\, gt_3\, G_x)$$

und eine zweite Berührebene G_x' vermöge der projectivischen Beziehung

$$(a_1' a_2 a_3 x) = (gt_1'\, gt_2\, gt_3\, G_x'),$$

d. h. einem jeden Punkte x von g entsprechen zwei verschiedene Berührebenen. Die Gerade g ist mithin eine *„Doppelerzeugende“* der Regelfläche.

Die beiden zur Reihe der Punkte einer Doppelerzeugenden, also auch untereinander projectivischen Büschel von Tangentialebenen besitzen zwei Doppelebenen, welche offenbar keine anderen sind, als die Berührebenen (gt_2) und (gt_3) in den Punkten a_2 und a_3.

Wenn in den beiden genannten projectivischen Büscheln von Tangentialebenen ausser den Ebenen (gt_2) und (gt_3) noch ein drittes Paar entsprechender coincidirender Ebenen existirt, so sind diese Büschel identisch, d. h. es coincidiren alle einander entsprechenden

Ebenen. In diesem Falle ist g eine *„stationäre Erzeugende"*, d. i. eine Doppelerzeugende, in deren jedem Punkte die beiden Tangentialebenen der Regelfläche zusammenfallen.

Dieser Fall kann nur dann eintreten:

1) Wenn die Doppelverhältnisse $(a_1 a_1' a_2 a_3)$ und $(gt_1\, gt_1'\, gt_2\, gt_3)$ gleichen Werth besitzen, oder

2) Wenn die Punkte a_1 und a_1' zusammenfallen, und in ihrer Vereinigung einen „stationären Punkt" der Leitcurve C_1 repräsentiren.

Nachdem die Beziehung $(a_1 a_1' a_2 a_3) = (gt_1\, gt_1'\, gt_2\, gt_3)$ eine Bedingung bezüglich der gegenseitigen Lage der Leitcurven C_1, C_2 und C_3 in sich schliesst, so kann dieselbe im vorliegenden Falle nicht berücksichtigt werden, wohl aber die in 2) ausgesprochene, welche zu folgendem Satze führt:

„Die Erzeugenden der Regelfläche, welche durch die stationären Punkte einer Leitcurve hindurchgehen, sind stationäre Erzeugende, und können stationäre Erzeugenden im Allgemeinen auf keine andere Art entstehen."

Dieser Satz gilt, wie man sich durch analoge Betrachtungen überzeugt, nicht blos für die Regelfläche mit drei einfach zu schneidenden Leitlinien, sondern auch für die beiden anderen oben angeführten Regelflächen.

Eine andere gewöhnliche Singularität der Regelflächen sind die sogenannten *„Kanten"* oder *„Torsallinien."**)

Wie es unter ∞^1 Paaren von projectivischen einstufigen Grundgebilden im Allgemeinen eine endliche Anzahl mal vorkommt, dass jedem beliebigen Elemente des einen Grundgebildes ein constantes Element des anderen, und umgekehrt entspricht**), so kommt es im vorliegenden Falle im Allgemeinen auch unter den ∞^1 Projectivitäten der Punkte und Tangentialebenen längs einer Erzeugenden der Regelfläche eine endliche Anzahl mal vor, dass einem jeden ihrer Punkte eine und dieselbe Tangentialebene und jeder ihrer Tangentialebenen ein und derselbe Punkt entspricht. Die Erzeugenden, welche Träger solcher ausgearteten Projectivitäten sind, nennt man „Torsallinien", die festen Tangentialebenen derselben „Torsalebenen", und die festen Punkte auf ihnen „Spitzen".

Für M als Grad und R als Rang einer windschiefen Fläche ist die Zahl der Torsallinien gleich:

---

*) Die erste Bezeichnung rührt von de La Gournerie her (arêtes, Kanten); die zweite von Sturm. (Eine „Torse" nennt Cayley das Ebenensystem einer jeden developpablen Fläche.)

**) Sturm, Math. Annalen Band 6 und 12. — Hirst, Proced. of the London Math. Soc. vol. 5 und 8. — Schubert, Calcül der abzählenden Geometrie. §§ 27 und 28.

$$T = 2R - 2M.*)$$

Da eine Ebene, welche durch eine Erzeugende einer Regelfläche gelegt wird, die Fläche nur in einem einzigen Punkte dieser Erzeugenden berührt, so muss eine Ebene, welche die Regelfläche in zwei Punkten einer Erzeugenden berührt, nach Form IV des Princips von der Erhaltung der Anzahl**) in allen Punkten dieser Erzeugenden berühren, d. h. die Erzeugende muss nothwendig eine Torsallinie sein.

Auf Grund dieser Anschauung lassen sich die Anzahlen der Torsallinien der zu untersuchenden Regelflächen von vornherein bestimmen. Sind C_1, C_2 und C_3 drei Leitlinien einer Regelfläche und ist eine Gerade g, welche C_1, C_2 und C_3 beziehungsweise in den Punkten a_1, a_2 und a_3 treffen mag, eine Torsallinie der Fläche, so müssen, wenn t_1, t_2 und t_3 die Tangenten von C_1, C_2 und C_3 in $a_1\, a_2\, a_3$ vorstellen, irgend zwei von den drei Tangentialebenen $(g t_1)$, $(g t_2)$ und $(g t_3)$ coincidiren, d. h. es müssen irgend zwei von den Tangenten t_1, t_2, t_3 sich schneiden. Hieraus folgt aber, dass eine jede Torsallinie gleichzeitig eine Erzeugende derjenigen Developpablen sein müsse, welche irgend zweien von den drei Leitcurven C_1, C_2, C_3 umschrieben ist. In Folge der allgemeinen gegenseitigen Lage der Leitcurven wird der Fall, dass alle drei Tangenten $t_1\, t_2\, t_3$ in einerlei Ebene liegen, nicht eintreten. Schneiden sich z. B. t_2 und t_3, so ist a_1 die Spitze der Torsallinie, und jede durch g gehende Ebene berührt nach der Definition der Torsallinie die Regelfläche in a_1. Andrerseits ist dann aber auch a_1 ein Schnittpunkt der Leitcurve C_1 mit der den Curven C_2 und C_3 umschriebenen Developpablen. Jeder Schnittpunkt der einen Leitcurve mit der den beiden anderen Leitcurven umschriebenen Developpablen ist hiernach Spitze einer Torsallinie, und die Gesammtzahl dieser drei Gruppen von Schnittpunkten ist auch die Gesammtzahl der Torsallinien der Regelfläche.

Auf der Regelfläche, deren Erzeugenden eine Curve C_1 zweifach und eine zweite Curve C_2 einfach schneiden, giebt es zwei Gruppen von Torsallinien, nämlich solche, welche ihre Spitzen auf C_2 haben, und solche, deren Spitzen auf C_1 liegen. Durch Betrachtungen, welche den vorhergehenden analog sind, findet man, dass die ersteren die gemeinschaftlichen Erzeugenden der Regelfläche und der der Curve C_1

*) R. Sturm beweist diese Relation durch eine Betrachtung der eindeutigen Beziehung zwischen den Punkten und und den Tangentialebenen der Regelfläche auf zwei beliebigen ihrer ebenen Schnitte. Math. Ann. Bd. VI, p. 255.

H. Schubert leitet dieselbe Gleichung vermittelst seiner Coincidenzformel für das Punktepaar direct ab, und zeigt auch, dass dieselbe eine specielle Form seiner Coincidenzformel für das Strahlenpaar ($\varepsilon\sigma = 2\varepsilon\beta - 2\varepsilon g$, Calcül der abzählenden Geometrie § 315, Formel 22) ist. Mathem. Ann. Bd. XVII, p. 575—576.

**) Schubert, Calcül, § 4.

doppeltumschriebenen Developpablen, und die letzteren die gemeinschaftlichen Erzeugenden der Regelfläche und der den Curven C_1 und C_2 umschriebenen Developpablen sind. Endlich ergeben sich die Torsallinien einer Regelfläche, welche von den dreifachen Secanten einer Raumcurve erzeugt wird, als gemeinschaftliche Erzeugende dieser Regelfläche und der der Leitcurve doppelt umschriebenen Developpablen.

II.

Methoden und Gleichungen zur Berechnung der Charaktere.

Der Uebersichtlichkeit wegen sollen hier vorab die Bezeichnungen und Gleichungen, von welchen im Folgenden Gebrauch gemacht wird, zusammengestellt werden.

Es sei

m — die Ordnung einer Leitcurve,

r — ihr Rang,

p — ihr Geschlecht,

h — die Zahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte,

β — die Zahl ihrer stationären Punkte,

M — der Grad einer Regelfläche,

R — der Rang derselben (Classe des ebenen Schnittes),

ND — (nodal director) die Summe der Ordnungen ihrer vielfachen Leitcurven, reducirt auf Doppelcurven (wobei eine k-fache Curve m^{ter} Ordnung mit einer Doppelcurve $\frac{1}{2}mk(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung äquivalent ist),

NG — (nodal generator) die Zahl der Doppelerzeugenden, wobei eine jede k-fache Erzeugende durch $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelerzeugende ersetzt ist,

NR — (nodal residue) die Ordnung der eigentlichen, ausser den vielfachen Leitlinien und Doppelerzeugenden vorhandenen Doppelcurve,

NT — (nodal total) die Summe der Ordnungen aller vorgenannten Doppellinien, d. h. die Gesammtzahl der Doppelpunkte eines ebenen Schnittes der Regelfläche,

SG — Zahl der stationären Erzeugenden (oder der Rückkehrpunkte des ebenen Schnittes der Regelfläche),

T — Zahl der Torsallinien,

$D(m_1 m_2)$ — die Ordnung (Rang) der zwei Curven m_1^{ter} und m_2^{ter} Ordnung umschriebenen Developpablen,

$D(m^2)$ — die Ordnung der einer Curve m^{ter} Ordnung doppelt umschriebenen Developpablen.

Zwischen den angeführten Zahlwerthen bestehen Beziehungen, welche bereits von verschiedenen Autoren ohne Anwendung der analytischen Geometrie abgeleitet wurden, und zwar sind es folgende:

Für die Regelfläche mit drei einfach zu schneidenden Leitcurven m_1, m_2, m_3:

(1) $M = 2 m_1 m_2 m_3$,

(2) $ND = \frac{1}{2} m_1 m_2 m_3 (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 - 3)$,

(3) $NG = \frac{1}{2} m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3 - 3) + m_1 m_2 h_3 + m_2 m_3 h_1 + m_3 m_1 h_2$.

Für die Regelfläche mit einer zweifach zu schneidenden Leitcurve C_1 und einer einfach zu schneidenden Leitcurve C_2:

(4) $M = m_2 \left[h_1 + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\right]$,

(5) $ND = \frac{1}{2} m_2 [h_1{}^2 - h_1 + m_1 m_2 (m_1 - 1)^2 - m_1 (m_1 - 1)]$,

(6) $NG = h_1 h_2 + \frac{1}{4} m_1 m_2 (m_1 - 1)(m_2 - 1) + 3 m_2 (m_1 - 2)$
$\cdot \left[h_1 - \frac{1}{6} m_1 (m_1 - 1)\right]$.

Für die Regelfläche der dreifachen Secanten:

(7) $M = (m-2)\left[h - \frac{1}{6} m (m-1)\right]$,

(8) $ND = \frac{1}{2} m (h - m + 2)(h - m + 1)$,

(9) $NG = \frac{1}{4} [-m^4 + 18 m^3 - 71 m^2 + 78 m - 48 mh + 132 h + 12 h^2]$.

(10) $T = -4h^2 + 2h(m^2 + 4m - 22) - 5m^3 + 27m^2 - 34m$
$- 6\beta(h - 2m + 6)$.

Ferner die Gleichungen:

(11) $D(m_1 m_2) = m_1 r_2 + m_2 r_1$,

(12) $D(m^2) = r(m-3) - 3\beta$ *).

*) Die Werthe (1), (2), (3), (4), (5) sind von Salmon und Cayley in den Anfangs citirten Abhandlungen geometrisch, die Werthe (6), (7), (8), (9), (12) analytisch bestimmt worden; cf. in dieser Beziehung auch Salmon-Fiedler, Raumgeometrie, II. Theil p. 296 (3. Auflage).

Die Werthe (7) und (9) (letzterer = der 6-fachen Zahl der eine Raumcurve vierpunktig schneidenden Geraden) wurden geometrisch abgeleitet für den vollen Schnitt zweier Flächen von Picquet: Comptes rendus vol. 77, p. 474, von Schubert: Calcül der abzählenden Geometrie p. 323, und für eine beliebige Raumcurve (m, h, β) von Zeuthen: Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche etc. Brioschi Annali di Matematica, III. vol., p. 175 (Ohne Beweis auch mitgetheilt in Comptes rendus 1868, p. 225).

Die Zeuthen'sche Abhandlung enthält auch eine geometrische Ableitung für Werth (12), als auch für die Ordnung der eigentlichen Doppelcurve auf der Regelfläche der dreifachen Secanten.

Nun wurde früher gezeigt, dass man bei den fraglichen drei Regelflächen sowohl die Zahl SG der stationären Erzeugenden (als jener, welche von den stationären Punkten der Leitcurven ausgehen), als auch der Torsallinien (als gemeinschaftlicher Erzeugenden der Regelfläche und der den Leitcurven paarweise resp. doppelt umschriebenen Developpablen) von vornherein zu bestimmen vermag. Dann ergiebt sich aber vermittelst der in 1—12 angegebenen Gradzahlen und der früher aufgestellten Gleichung

$$T = 2R - 2M$$

unmittelbar der „*Rang*" der Regelfläche

$$R = \tfrac{1}{2}\, T + M, \tag{13}$$

und ferner vermittelst der auf den ebenen Schnitt der Regelfläche angewandten Plücker'schen Formel *die Ordnung NT der Total-Doppelcurve*

$$\begin{aligned} NT &= \tfrac{1}{2}\,[M(M-1) - R - 3SG], \\ &= \tfrac{1}{2}\left[M(M-2) - \tfrac{1}{2}\, T - 3SG\right]; \end{aligned} \tag{14}$$

endlich wieder mit Benützung der in 1 — 12 gegebenen Werthe für NG und ND *die Ordnung NR der eigentlichen Doppelcurve*

$$NR = NT - ND - NG. \tag{15}$$

Eine andere Methode zur Bestimmung der Charaktere der in Frage stehenden Regelflächen beruht auf der Anwendung der *Zeuthen'schen Correspondenzformel.* Sind nämlich zwei Curven C und C' vom Geschlecht p resp. p' derart auf einander bezogen, dass einem Punkte von C x' Punkte auf C' und einem Punkte von C' x Punkte auf C entsprechen, und kommt es t-mal vor, dass von x zusammengehörigen Punkten zwei coincidiren, und t'-mal, dass von x' zusammengehörigen Punkten zwei coincidiren, so besteht die Relation

$$t - t' = 2x'(p-1) - 2x(p'-1)^{*}). \tag{16}$$

Sind nun C und C' zwei Curven auf einer Regelfläche, so vermitteln die Erzeugenden der letzteren eine Correspondenz ihrer Punkte. Die vorstehende Correspondenzformel kann dann einerseits in der Weise verwendet werden, dass man die Punkte einer Leitcurve auf jene eines ebenen Schnittes bezieht, und andererseits, indem man die Punkte zweier Leitcurven aufeinander bezieht.

Im ersten Falle hat man, wenn C die Curve des ebenen Schnittes, und C' die Leitcurve der Regelfläche bedeutet, für x den Grad der

*) Mathem. Annalen Bd. III, pag. 150. Cf. auch Clebsch-Lindemann, Geometrie pag. 458.

Vielfachheit von C' zu setzen; x' ist gleich 1 und t' mithin gleich 0. Die Zahl t, d. i. die Anzahl der Coincidenzen des ebenen Schnittes wird erfüllt, erstens durch jene Punkte, welche den Torsallinien angehören, deren Spitzen auf C' liegen, und zweitens durch jene Punkte, welche den stationären Erzeugenden angehören, welche nicht von den stationären Punkten von C', sondern von jenen der anderen Leitcurven herrühren.

Im zweiten Falle, das ist, wenn man für C und C' zwei Leitcurven der Regelfläche setzt, ist x' gleich dem Grad der Vielfachheit von C' und x gleich jenem von C. Die Coincidenzen t und t' sind gerade so wie im ersten Falle zu zählen. Dann ergiebt die Gleichung (16) eine Identität, welche gleichzeitig ein Kriterium für die Richtigkeit der Zahlen t und t', somit auch für die Richtigkeit der früher angestellten Betrachtungen über die stationären Erzeugenden und Torsallinien der Regelflächen repräsentirt.

Besser noch kann man, um eine Verification für die letztgenannten Betrachtungen zu erhalten, an Stelle der Anwendung der Zeuthen'schen Geschlechtsformel, *direct zwei Formeln bestimmen, deren Differenz die erstere giebt.*

Als Beispiel mag die Regelfläche mit drei Leitcurven C_1, C_2 und C_3 dienen. Man bestimmt zunächst direct vermittelst des Chasles'schen Correspondenzprincips die Zahl W_{13}, welche angiebt, wie oft es vorkommt, dass die Verbindungslinie zweier Punkte auf C_1, die (vermöge der Erzeugenden der Regelfläche) demselben Punkte von C_2 entsprechen, eine gegebene Gerade g_1 schneidet.

Zu diesem Zwecke betrachtet man g_1 als Träger zweier Ebenenbüschel, welche die Punkte der C_1 projiciren, und findet leicht, dass die Correspondenz eine symmetrisch $m_1 m_2 m_3 (m_1 m_3 - 1)$-deutige ist. Nach dem Chasles'schen Correspondenzprincip kommt es nun $2 m_1 m_2 m_3 (m_1 m_3 - 1)$mal vor, dass zwei einander entsprechende Ebenen, d. h. Ebenen, welche zwei Punkte der C_1 enthalten, die demselben Punkte von C_2 entsprechen, zusammenfallen. Diese Coincidenzen werden erfüllt: 1) durch die Zahl W_{13} zweimal, 2) durch die stationären Punkte β_1 der Leitcurve $m_2 m_3$ mal, da einem jeden derselben $m_2 m_3$ Punkte auf C_2 entsprechen; 3) die Schnittpunkte der Curve C_1 mit jenen Torsallinien, deren Spitzen auf der Curve C_2 liegen; die Anzahl derselben ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte von C_2 mit der den Curven C_1 und C_3 umschriebenen Developpablen, also nach Gleichung (11) gleich $m_2(r_1 m_3 + r_3 m_1)$; 4) zweimal von den Punkten auf C_1, welche von jenen Doppelerzeugenden, welche C_3 in zwei verschiedenen Punkten treffen. Die Anzahl derselben ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte von C_1 mit jener Regelfläche, deren Erzeugenden C_2 einfach und C_3 zweifach schneiden; also mit Rücksicht auf Gleichung

(4) gleich $\frac{1}{2}\, m_1 m_2 (m_3^2 - m_3 + 2h_3)$; und endlich 5) dreimal durch die Schnittpunkte von C_1 mit den $\beta_3 m_1 m_2$ stationären Erzeugenden, welche von den stationären Punkten auf C_3 herrühren. Hiernach ist

$$2m_1 m_2 m_3 (m_1 m_3 - 1) = 2\, W_{13} + \beta_1 m_2 m_3 + m_2 (r_1 m_3 + r_3 m_1) \\ + m_1 m_2 (m_3^2 - m_3 + 2h) + 3\beta_3 m_1 m_2.$$

Nun bestimmt man wieder direct durch das Correspondenzprincip die Zahl V_3, welche angiebt, wie oft die Verbindungslinie zweier solcher Punkte auf C_2 eine gegebene Gerade g_2 schneidet, welche zwei Punkten auf C_1 entsprechen, deren Verbindungslinie ebenfalls eine gegebene Gerade g_1 schneidet.

Eine beliebige durch g_2 gelegte Ebene ε schneidet C_2 in m_2 Punkten, welchen auf C_1 $m_2 m_1 m_3$ Punkte entsprechen. Die durch g_1 und diese Punkte gelegten Ebenen schneiden C_1 noch in weiteren $m_2 m_1 m_3 (m_1 - 1)$ Punkten, welchen auf C_2 $m_2 m_1 m_3 (m_1 - 1) m_2 m_3$ Punkte, also durch g_2 ebensoviele Ebenen ε' entsprechen. Man erhält auf diese Weise eine symmetrische $m_2 m_1 m_3 (m_1 - 1) m_2 m_3$-deutige Correspondenz zwischen den Ebenenbüscheln ε und ε' und mithin nach dem Correspondenzprincip $2m_2 m_1 m_3 (m_1 - 1) m_2 m_3$ Doppelebenen. Die Zahl dieser Coincidenzen wird erfüllt: 1) durch die frühere Zahl W_{13} zweimal, 2) durch die gesuchte Zahl V_3 zweimal, 3) durch die $r_1 m_2 m_3$ Punkte, welche den Berührungspunkten der r_1 durch g_1 an C_1 gelegten Tangentialebenen entsprechen, und endlich 4) durch die $\beta_1 m_2 m_3$ Punkte, welche den β_1 stationären Punkten von C_1 auf C_2 entsprechen. Es ist daher

$$2m_2 m_1 m_3 (m_1 - 1) m_2 m_3 = 2\, W_{13} + 2\, V_3 + r_1 m_2 m_3 + \beta_1 m_2 m_3.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich, wenn man berücksichtigt, dass $r_3 + 2h_3 + 3\beta_3 = m_3^2 - m_3$ ist, für V_3 der Werth

$$V_3 = m_1 m_2 m_3^2 (m_1 - 1)(m_2 - 1).$$

Man sieht, dass diese Zahl in Bezug auf m_1 und m_2 symmetrisch ist (wie dies nach der Definition von V_3 nothwendig der Fall sein muss) und daher die Richtigkeit der früheren Betrachtungen über Torsallinien und stationäre Erzeugenden bestätigt.*)

---

*) Diese Betrachtung resp. Verification verdankt der Verfasser einer Mittheilung des Herrn Dr. Hermann Schubert. Dieselbe ist eine verallgemeinerte Nachbildung des Beweises für die Erhaltung des Geschlechts zweier ein-eindeutig auf einander bezogenen Curven, welchen Herr Dr. Schubert im 16ten Bande der Math. Ann. pag. 180 gegeben hat.

III.

Charaktere und Singularitäten der Regelfläche (C_1, C_2, C_3).

Der Grad der Regelfläche ist nach Gleichung (1) gleich

$$M = 2 m_1 m_2 m_3 .$$

Durch jeden der β_1 stationären Punkte von C_1 gehen $m_2 m_3$ Erzeugende der Regelfläche, nämlich die gemeinschaftlichen Erzeugenden der zwei Kegelflächen, welche aus diesem Punkte über den Curven C_2 und C_3 beschrieben werden. Die β_1 stationären Punkte von C_1 geben daher (nach I) Veranlassung zur Entstehung von $\beta_1 m_2 m_3$ stationären Erzeugenden der Regelfläche. Ebenso bestimmen die β_2 resp. β_3 stationären Punkte von C_2 und C_3 resp. $\beta_2 m_3 m_1$ und $\beta_3 m_1 m_2$ stationäre Erzeugenden, so dass die Gesammtzahl SG der letzteren

$$SG = \beta_1 m_2 m_3 + \beta_2 m_3 m_1 + \beta_3 m_1 m_2$$

ist.

Die den Curven C_1 und C_2 gemeinschaftlich umschriebene Developpable, deren Ordnung nach Gleichung (11) gleich $r_1 m_2 + r_2 m_1$ ist, schneidet die Curve C_3 in $m_3 (r_1 m_2 + r_2 m_1)$ Punkten, welche, wie in I. gezeigt wurde, Spitzen ebensovieler Torsallinien repräsentiren. Analog ergeben sich die Zahlen $m_1 (r_2 m_3 + r_3 m_2)$ und $m_2 (r_3 m_1 + r_1 m_3)$ jener Torsallinien, welche ihre Spitzen auf C_1 resp. C_2 haben. Mithin ist die Gesammtzahl T der Torsallinien

$$T = 2(m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2).$$

Nach Gleichung (13) ergiebt sich jetzt der Rang R der Regelfläche

$$R = 2 m_1 m_2 m_3 + m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2 .$$

Ferner nach Formel (14) für die Ordnung NT der Summe aller Doppellinien

$$\begin{aligned} 2NT = 2 m_1 m_2 m_3 (2 m_1 m_2 m_3 - 2) &- (m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2) \\ &- 3(m_1 m_2 \beta_3 + m_2 m_3 \beta_1 + m_3 m_1 \beta_2) . \end{aligned}$$

Endlich nach (15), (2) und (3) mit gleichzeitiger Berücksichtigung, dass $r_1 + 2h_1 + 3\beta_1 = m_1(m_1 - 1)$ ist, die Ordnung der eigentlichen Doppelcurve

$$\begin{aligned} NR = \tfrac{1}{2} m_1 m_2 m_3 [4 m_1 m_2 m_3 &- (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) \\ &- 2(m_1 + m_2 + m_3) + 5] \text{*)}. \end{aligned}$$

*) Uebereinstimmend mit dem von Cayley gegebenen Werthe.

IV.

Charaktere und Singularitäten der Regelfläche, deren Erzeugenden eine Curve C_1 zweifach und eine Curve C_2 einfach schneiden.

Der Grad M der Regelfläche ist nach (4) (I)

$$M = m_2\left[h_1 + \frac{1}{2} m_1(m_1 - 1)\right].$$

Durch jeden Punkt des Raumes gehen h_1 Gerade, welche die Curve C_1 zweipunktig schneiden. Die β_2 stationären Punkte von C_2 bestimmen mithin $\beta_2 h_1$ stationäre Erzeugenden der Regelfläche. Da ferner der aus einem stationären Punkte der Curve C_1 über dieser beschriebene Perspectivkegel bekanntlich von der $(m_1 - 2)$ten Ordnung ist, und daher $(m_1 - 2)m_2$ seiner Erzeugenden auch die Curve C_2 treffen, so entsprechen den β_1 stationären Punkten von C_1 $\beta_1(m_1 - 2)m_2$ stationäre Erzeugende der Regelfläche. Man erhält demgemäss die Gesammtzahl SG der stationären Erzeugenden

$$SG = \beta_2 h_1 + \beta_1 m_2(m_1 - 2).$$

Die der Curve C_1 doppeltumschriebene Developpable, deren Ordnung (Glg. 12) $r_1(m_1 - 3) - 3\beta_1$ ist, schneidet C_2 in $r_1 m_2(m_1 - 3) - 3\beta_1 m_2$ Punkten, welche nach I. Spitzen ebensovieler Torsallinien vorstellen.

Bezieht man nun die Punkte der Leitcurve C_2 auf jene des ebenen Schnittes der Regelfläche mittelst des Zeuthen'schen Correspondenzprincips (Gleichung (16), I.):

$$t - t' = 2x'(p - 1) - 2x(p' - 1),$$

wobei die nicht accentuirten Buchstaben für den ebenen Schnitt, und die accentuirten für die Curve C_2 gelten mögen, so hat man nach den Auseinandersetzungen in I. für x den Grad der Vielfachheit von C_2, also h_1 zu setzen; $x' = 1$, und mithin $t' = 0$. Die Coincidenzen t auf dem ebenen Schnitt rühren von den Torsallinien her, deren Spitzen auf C_2 liegen, und von den stationären Erzeugenden, welche durch die stationären Punkte der Curve C_1 bestimmt sind. Hiernach ist

$$t = r_1 m_2(m_1 - 3) - 3\beta_1 m_2 + \beta_1 m_2(m_1 - 2) = r_1 m_2(m_1 - 3) + \beta_1 m_2(m_1 - 5).$$

Endlich bedeutet p das Geschlecht des ebenen Schnittes und p' jenes der Curve C_2; es ist daher bekanntlich

$$2(p - 1) = R - 2M + SG$$

und

$$2(p' - 1) = r_2 - 2m_2 + \beta_2.$$

Setzt man diese Werthe in die Geschlechtsgleichung ein, so ergiebt sich für den Rang R der Regelfläche der Ausdruck

$$R = r_1 m_2(m_1 - 3) + m_1 m_2(m_1 - 1) + h_1 r_2 - 3\beta_1 m_2.$$

Vermittelst der Gleichung $T=2(R-M)$ erhält man die Zahl T der Torsallinien

$$T=2r_1m_2(m_1-3)+m_1m_2(m_1-1)-6\beta_1m_2+2h_1r_2-2h_1m_2$$

oder weil $m_1(m_1-1)-2h_1-3\beta_1=r_1$ ist,

$$T=r_1m_2(2m_1-5)+2h_1r_2-3\beta_1m_2.$$

Andrerseits folgt aus $R=M(M-1)-2NT-3SG$

$$2NT=m_2^2\left[h_1+\frac{1}{2}m_1(m_1-1)\right]^2-m_2h_1-\frac{3}{2}m_1m_2(m_1-1)$$
$$-r_1m_2(m_1-3)-h_1r_2-3\beta_2h_1-3\beta_1m_2(m_1-3).$$

Endlich ergiebt sich mittelst Formel (15) und den Gleichungen (5) und (6) die Ordnung der eigentlichen Doppelcurve (wenn man gleichzeitig $r_1=m_1(m_1-1)-2h_1-3\beta_1$ etc. benützt)

$$NR=NT-ND-NG$$
$$=m_2\left[\frac{1}{2}h_1(m_1-2)(m_1-3)+\frac{1}{8}m_1(m_1-1)(m_1-2)(m_1-3)\right]$$
$$+m_2(m_2-1)\left[\frac{1}{2}h_1^2+\frac{1}{2}h_1(m_1^2-m_1-1)+\frac{1}{8}m_1(m_1-1)(m_1^2-5m_1+2)\right]^{*}).$$

V.

Charaktere und Singularitäten der Regelfläche, welche von den dreipunktigen Secanten einer Raumcurve gebildet wird.

Der Grad der Fläche ist nach Gleichung (7)

$$M=(m-2)\left[h-\frac{1}{6}m(m-1)\right],$$

und die Zahl der Torsallinien nach (10)

$$T=-4h^2+2h(m^2+4m-22)-5m^3+27m^2-34m-6\beta(h-2m+6).$$

Hieraus folgt mittelst der Formel (13) für den Rang R der Werth

$$R=-2h^2+h(m^2+5m-24)-\frac{1}{6}(16m^3-84m^2+104m)$$
$$-3\beta(h-2m+6).$$

Nachdem ferner bekanntlich durch jeden stationären Punkt einer Raumcurve $(h-2m+6)$ Geraden gehen, welche die Curve noch in zwei weiteren Punkten treffen, so ist die Zahl der stationären Erzeugenden

$$SG=\beta(h-2m+6).$$

---

*) Der von Cayley auf analytischem Wege gefundene Werth ist um $m_1(m_1-1)\,m_2(m_2-1)$ grösser, indem dieses Glied, welches im Schlussresultate $NR=NT-ND-NG$ wegzufallen hat, aus Versehen stehen geblieben ist.

Nach der Plücker'schen Gleichung $R = M(M-1) - 2NT - 3SG$ findet man daher

$$2NT = m^2h^2 - 4mh^2 + 6h^2 - \frac{1}{3}(m^4 - 5m^3 + 11m^2 + 14m - 78)h$$
$$+ \frac{1}{36}(m^6 - 6m^5 + 13m^4 + 90m^3 - 518m^2 + 636m)$$

also endlich nach Formel (15) und den Gleichungen (8) und (9) für die Ordnung der Doppelcurve den Ausdruck

$$NR = \frac{1}{2}h^2m(m-1) - \frac{1}{6}h(m^4 - 5m^3 + 5m^2 - 49m + 120)$$
$$+ \frac{1}{72}(m^6 - 6m^5 + 31m^4 - 270m^3 + 868m^2 - 840m).{}^{*})$$

Brünn, Anfang Februar 1881.

---

*) Der von Cayley angegebene Werth ist um $6m$ grösser, weil im Resultate $NR = NT - ND - NG + 3m$ statt $-3m$ steht.

Theorie der allgemeinen Periodicität.

Von

Otto Rausenberger in Frankfurt a. M.

Die Theorie der transcendenten Functionen kann auf verschiedenen Grundlagen aufgebaut werden. Man kann das bestimmte Integral als Grundelement ansehen und dadurch zu den wichtigeren Transcendenten gelangen, dass man die Integrale algebraischer Ausdrücke und deren Umkehrungen als neue Functionen einführt. Dieses Verfahren ist bei den elliptischen und in modificirter Weise auch bei den Abel'schen Functionen das historische und konnte in neuerer Zeit durch die Ausbildung der Theorie der complexen Integrale zu hoher Vollkommenheit gebracht werden. Nichtsdestoweniger haben viele der bedeutendsten Analytiker diesen Weg nicht als den naturgemässen erkannt; wenn derselbe auch zu allen Eigenschaften der genannten Transcendenten führt, so ist doch nicht zu verkennen, dass er keinen Einblick in die eigentliche analytische Natur derselben gewährt. Andrerseits kann man die unendlichen Reihen und Producte, sowie gewisse Grenzausdrücke zur Definition von Transcendenten benutzen. Der grosse Vorzug dieses Verfahrens liegt darin, dass die genannten Gebilde als Erweiterung der algebraischen Functionen betrachtet werden können und viele Eigenschaften der letzteren auch ihnen zukommen. In der That erscheint die unendliche, für beliebige endliche x convergente Potenzreihe als ganze Function von unendlich hohem Grade; ihre zweite Darstellungsform ist das unendliche Product, zu dem ein nirgends Null werdender Factor hinzutreten kann. Die Erweiterung der rationalen Function ist der Quotient zweier unendlichen Potenzreihen oder Producte; in anderer Form dargestellt giebt sie die unendliche Partialbruchreihe. An diese Gebilde schliessen sich solche unendliche Reihen oder Quotienten derselben an, welche nach Potenzen von rationalen Functionen von x $\left(\text{im einfachsten Fall von } \frac{1}{x}\right)$ fortschreiten. Die verallgemeinerte algebraische Function $y = f(x)$ endlich wird durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$ definirt, in der $F(x, y)$ eine unendliche, aus Potenzen von rationalen Functionen der Grössen x und y gebildete Reihe darstellt.

Das Gebiet der hier skizzirten Functionen ist ein unendlich mannigfaltiges, und es tritt an uns die Frage heran: *Nach welchen Principien sollen wir aus dieser zahllosen Menge Transcendenten auswählen, welche so hervorragende Eigenschaften besitzen, dass sie eine besondere Behandlung verdienen?* Auf diese Frage ist nach meinem Dafürhalten noch keine befriedigende Antwort gegeben worden; die Einführung der periodischen Functionen geschah entweder durch ziemlich willkürliche Definition oder wurde auf Principien von zu geringer Allgemeinheit gestützt. Die vorliegende und einige später nachfolgende Abhandlungen stellen sich die Aufgabe, in der Beantwortung dieser Frage, wenn vielleicht auch nicht ganz zum Ziele, so doch einen Schritt weiter zu gelangen.

§ 1.

Die periodischen Functionen.

Da die eingeführten Functionen, die wir kurzweg als analytische bezeichnen wollen, nur eine Erweiterung der algebraischen sind, so werden wir behufs einer Auswahl uns nach Analogien in der Theorie der letzteren umsehen müssen. Sei, um den einfachsten Fall zu nehmen, die ganze Function

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

gegeben, so kann zu jedem x das zugehörige y mittelst elementarer Operationen berechnet werden. Dagegen lassen sich, wenn $n > 4$ ist, die zu einem gegebenen y gehörigen Werthe von x im Allgemeinen nicht durch Wurzelgrössen u. s. w. ausdrücken, da die definirende Gleichung nicht allgemein algebraisch auflösbar ist. Doch ist bekannt, dass es eine Gruppe höherer Gleichungen giebt, welche eine algebraische Lösung zulassen. Diese sogenannten Abel'schen Gleichungen sind so beschaffen, dass sich ihre Lösungen in der Form darstellen lassen:

$$a, \ \vartheta(a), \ \vartheta^2(a), \ \cdots, \ \vartheta^{n-1}(a),$$

wobei $\vartheta^\varkappa$ die $\varkappa$mal iterirte Function ϑ bedeutet und angenommen wird, dass $\vartheta^n(a) = a$ ist.

Abel setzt ausserdem voraus, dass ϑ eine *eindeutige* Function ist; doch lassen sich jedenfalls auch für *mehrdeutige* ϑ ähnliche Betrachtungen durchführen. Durch Anwendung auf algebraische Functionen entspringt hieraus folgender Satz: *Eine algebraische Function* $y = F(x)$ *ist dann algebraisch umkehrbar* (d. h. ihre Umkehrung ist durch Wurzelgrössen darstellbar), *wenn sie der Functionalgleichung genügt*:

$$F(\vartheta(x)) = F(x),$$

aus der weiter folgt:

$$F(x) = F(\vartheta(x)) = F(\vartheta^2(x)) = \cdots = F(\vartheta^{n-1}(x)),$$

wobei wieder angenommen werden muss, dass $\vartheta^n(x) = \vartheta(x)$ ist.

Die Ausdehnung dieser Betrachtung auf transcendente Functionen liegt sehr nahe. Lassen wir die Bedingung fallen, dass $\vartheta^n(x) = x$ ist, so wird $F(x)$ für unendlich viele verschiedene x denselben Werth annehmen, also keine algebraische Function mehr sein können, somit, wenn sie überhaupt existirt, eine transcendente Function sein müssen, von der wir wenigstens vermuthen dürfen (die strengere Durchführung muss für später vorbehalten bleiben), dass sich ihre Umkehrung durch eine (im Allgemeinen unendlich grosse) Anzahl von Wurzelgrössen (mit im Allgemeinen unendlich grossen Exponenten) darstellen lassen wird. Die hervorragende analytische Bedeutung dieser Functionen ist hiernach unmittelbar evident. Wenn nun $F(x)$ der Functionalgleichung genügt:

$$F(\varphi(x)) = F(x),$$

wobei wir uns $y = \varphi(x)$ als eine beliebige algebraische Function, d. h. durch eine algebraische Gleichung

$$\varphi_1(x, y) = 0$$

definirt denken wollen, so nennen wir sie eine *periodische Function im weiteren Sinn**) oder auch nur kurzweg eine *periodische Function*, auch wohl zum Unterschied von später einzuführenden Functionen eine *periodische Function erster Gattung.* Die gewöhnlich sogenannten periodischen Functionen sind ein specieller Fall der hier definirten; es ist bei ihnen

$$F(x + n) = F(x).$$

§ 2.

Das algebraische Functionaltheorem.

1. Wir beweisen jetzt einen Satz, welcher die Erweiterung (auch in Bezug auf den Beweis) eines, soviel mir bekannt, von Herrn Weierstrass herrührenden Theorems ist und von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus den periodischen Functionen eine hervorragende Wichtigkeit verleiht. Wir fragen: für welche Functionen $f(x)$ besteht ein algebraisches Functionaltheorem derart, dass

$$f[\psi(x, y)] = \varphi[f(x), f(y)] \tag{1}$$

ist, wobei φ und ψ algebraische, d. h. durch algebraische Gleichungen definirte Functionen bedeuten; oder in Worten ausgesprochen: *Wann lässt sich eine Function einer algebraischen Function zweier Variabeln algebraisch ausdrücken durch die Functionen der einfachen Variabeln?*

*) Vgl. hiermit: Comptes rendus, 1879, I, p. 807, Note de M. Appell.

2. Zunächst ist klar, dass wenn für $f(x)$ jenes Functionaltheorem gültig ist, auch für die Umkehrung desselben, $F(x)$, ein solches stattfinden muss. Denn nehmen wir von beiden Seiten die Function F und setzen statt x und y $F(x)$ und $F(y)$, so wird aus (1):

$$F\Big[f[\psi(F(x),\ F(y))]\Big] = F\Big[\varphi[f(F(x)),\ f(F(y))]\Big],$$

oder wenn man beachtet, dass

$$F[f(x)] = x \quad \text{und} \quad f[F(x)] = x$$

ist,

$$\psi[F(x),\ F(y)] = F[\varphi(x, y)].$$

In Bezug auf die Vieldeutigkeit der vorkommenden Functionen bemerken wir zu dem Vorhergehenden wie zu dem Folgenden, dass wir die betreffenden Gleichungen als befriedigt ansehen, wenn mindestens *eine* Gruppe der möglichen Werthe denselben genügt.

Beispiel: Für $\operatorname{tang} x$ gilt das Functionaltheorem

$$\operatorname{tang}(x+y) = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y}{1 - \operatorname{tang} x \cdot \operatorname{tang} y};$$

hieraus folgt:

$$\operatorname{arctang} x + \operatorname{arctang} y = \operatorname{arctang} \frac{x+y}{1-xy}.$$

3. Dass alle algebraischen Functionen Gleichungen von der Form (1) genügen, ist unmittelbar evident; es handelt sich nur darum, die transcendenten analytischen Functionen aufzusuchen, welchen diese Eigenschaft zukommt. Dieselben sind alle der Art, dass sie entweder für unendlich viele x denselben Werth $a = f(x)$ annehmen, oder dass dies wenigstens bei ihrer Umkehrung stattfindet. Im letzteren Fall brauchen wir nach dem Vorhergehenden nur ihre Umkehrung zu untersuchen. Seien nun $y_1, y_2, \cdots, y_n$, wobei n die Anzahl der verschiedenen Werthe von F übersteigen muss, so gewählt, dass

$$f(y_1) = f(y_2) = \cdots = f(y_n) = a$$

wird, ohne dass jedoch $\psi(x, y_r) = \psi(x, y_s)$ ist, eine Wahl, die immer getroffen werden kann, da wir unendlich viele y, die der ersten Bedingung genügen, zur Verfügung haben und $\psi(x, y)$ als algebraische Function nur für eine endliche Anzahl der y denselben Werth annimmt. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \varphi[f(x), a] &= f[\psi(x, y_1)], \\ \varphi[f(x), a] &= f[\psi(x, y_2)], \\ &\vdots \\ \varphi[f(x), a] &= f[\psi(x, y_n)]. \end{aligned}$$

Da aber die Zahl dieser Gleichungen die Zahl der verschiedenen Werthe von $\varphi[f(x), a]$ übersteigt, so müssen mindestens 2 dieser Grössen übereinstimmen, woraus folgt, dass etwa

$$f[\psi(x, y_r)] = f[\psi(x, y_s)]$$

ist. Setzen wir nun aber x statt $\psi(x, y_s)$, so ist $\psi(x, y_r)$ eine algebraische Function $\vartheta(x)$ dieses neuen x, und wir erhalten für $f(x)$ die Functionalgleichung:

$$f[\vartheta(x)] = f(x),$$

d. h. $f(x)$ ist eine periodische Function. Wir haben somit folgenden Satz bewiesen:

Jede Function, welche ein algebraisches Functionaltheorem der oben definirten Art besitzt, ist entweder algebraisch, oder periodisch, oder die Umkehrung einer periodischen Function.

§ 3.

Die Periodicitätsgleichung.

1. Ist $F[\varphi_1(x)] = F(x)$, so bezeichnen wir $y = \varphi_1(x)$ oder auch die entsprechende implicite Gleichung $f(x, y) = 0$, welche zwei der Argumente, für die $F(x)$ denselben Werth annimmt, mit einander verbindet, als die zu $F(x)$ gehörige Periodicitätsgleichung. Wir setzen dieselbe in der Folge stets als algebraisch voraus. Bedeutet nun ${}_{\varkappa}(x)$ die $\varkappa$-fach iterirte Function $\varphi_1(x)$, $\varphi_{-1}(x)$ die Umkehrung von $\varphi_1(x)$ und $\varphi_{-\varkappa}(x)$ die $\varkappa$-fach iterirte Function $\varphi_{-1}(x)$, so ergeben sich, wenn man an Stelle von x $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_{-1}(x)$ u. s. w. setzt, aus der Gleichung

$$F[\varphi_1(x)] = F(x)$$

die folgenden:

$$\begin{aligned} F(x) &= F[\varphi_1(x)] = F[\varphi_2(x)] = \cdots \\ &= F[\varphi_{-1}(x)] = F[\varphi_{-2}(x)] = \cdots. \end{aligned}$$

Man ersieht hieraus, dass man $F(x)$ auch die Periode $\varphi_{-1}(x)$ zuschreiben und somit in der Periodicitätsgleichung $f(x, y) = 0$ x mit y vertauschen darf. Dass ausserdem $F(x)$ auch die Periode $\varphi_{\varkappa}(x)$ hat, ist ohne Weiteres evident.

2. Setzen wir in $F(x)$ statt x eine algebraische Function dieser Grösse, $\psi_1(x)$, so dass wir haben $F_1(x) = F[\psi_1(x)]$, und hat wieder $F(x)$ die Periodicitätsgleichung $y = \varphi_1(x)$ oder $f(x, y) = 0$, so behaupte ich, dass $F_1(x)$ ebenfalls periodisch ist und (wenn wir, wie in der Folge, die sich häufenden Klammern theilweise weglassen) die Periodicitätsgleichung $y = \psi_{-1}\,\varphi_1\,\psi_1(x)$ oder in impliciter Form $f[\psi_1(x), \psi_1(y)] = 0$ hat. Setzen wir nämlich y in $F_1(x)$ und beachten, dass $\psi_1\,\psi_{-1}(x) = \psi_{-1}\,\psi_1(x) = x$ ist, so erhalten wir

$$F_1[\psi_{-1}\,\varphi_1\,\psi_1(x)] = F[\psi_1\,\psi_{-1}\,\varphi_1\,\psi_1(x)] = F[\varphi_1\,\psi_1(x)],$$

oder da

$$F[\varphi_1(x)] = F(x)$$

und

$$F(x) = F_1[\psi_{-1}(x)]$$

sein muss,

$$F_1[\psi_{-1}\varphi_1\psi_1(x)] = F[\psi_1(x)] = F_1(x).$$

Haben wir daher die Functionen aufgestellt, welchen die Periodicitätsgleichung $y = \varphi_1(x)$ oder $f(x, y) = 0$ zukommt, so können wir durch die angegebene Functionalsubstitution alle herleiten, welche die Periodicitätsgleichung

$$y = \psi_{-1}\varphi_1\psi_1(x) \quad \text{oder} \quad f[\psi_1(x), \psi_1(y)] = 0$$

besitzen. Wir werden daher diese doppelte Substitution, welche auch bei anderen, verwandten Untersuchungen von Wichtigkeit ist, anwenden, um verschiedene Arten von Perioden auf gewisse Normalfälle zurückzuführen.

Beispiel: Es ist $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, so dass $\sin x$ die Periodicitätsgleichung $y = x + 2\pi$ zukommt. Wählen wir nun $\psi_1(x) = x^2$, also $\psi_{-1}(x) = \sqrt{x}$, so finden wir, dass $\sin x^2$ die Periodicitätsgleichung

$$y^2 = x^2 + 2\pi \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{x^2 + 2\pi}$$

hat. In der That erhalten wir, wenn wir y statt x in $\sin x^2$ einsetzen:

$$\sin[\sqrt{x^2 + 2\pi}]^2 = \sin(x^2 + 2\pi) = \sin x^2.$$

§ 4.

Die wiederkehrenden Perioden.

1. Unter den algebraischen Periodicitätsgleichungen $y = \varphi_1(x)$ oder $f(x, y) = 0$ werden wir zunächst diejenigen auszusuchen haben, welche wiederkehrende Perioden liefern und in Folge dessen zu keinen transcendenten periodischen Functionen führen, d. h. solche, bei denen $\varphi_n(x) = x$ ist. Es handelt sich also darum, alle algebraischen Functionen aufzufinden, welche n mal iterirt wieder auf x zurückführen. Bemerkt muss werden, dass die folgende Untersuchung für mehrdeutige (etwa $\varkappa$-deutige) Functionen $\varphi_1(x)$ nur insofern gültig ist, als wir blos verlangen, dass *einer* der $n^\varkappa$ Werthe, die $\varphi_n(x)$ eventuell annehmen kann, gleich x ist.

Eine Function der gesuchten Art lässt sich sofort angeben. Setzen wir nämlich $y = \varphi_1(x) = \alpha x$, wobei α eine n^{te} Einheitswurzel bedeutet, so ist

$$\varphi_n(x) = \alpha^n x = x.$$

Aber auch die Functionen, welche durch Anwendung der Functionalsubstitution aus der eben gefundenen hergeleitet werden können, genügen der Bedingung*); denn ist

---

*) Die Anwendung der Functionalsubstitution auf $y = \alpha x$, um Functionen der besprochenen Art aufzustellen, findet sich bereits in einem Werke von Hill; doch

$$\varphi_1(x) = \psi_{-1}[\alpha \cdot \psi_1(x)]$$

oder kürzer

$$\varphi_1(x) = \psi_{-1}\alpha\psi_1(x),$$

so haben wir

$$\varphi_n(x) = \psi_{-1}\alpha\psi_1\psi_{-1}\alpha\psi_1 \cdots \psi_{-1}\alpha\psi_1(x) = \psi_{-1}\alpha^n\psi_1(x)$$
$$= \psi_{-1}\psi_1(x) = x,$$

wobei auf die oben gemachte Bemerkung über die Vieldeutigkeit der vorkommenden Functionen Rücksicht zu nehmen ist.

Ich behaupte nun aber, *dass alle möglichen Functionen* $\varphi_1(x)$ *von der gesuchten Art durch die Functionalsubstitution aus* $y = \alpha x$ (wobei α *alle* vorhandenen n^{ten} Einheitswurzeln darstellen mag) *hergeleitet werden können.* Dies ist bewiesen, wenn ich wirklich eine Substitution angebe, welche das Verlangte leistet. Diese ist aber

$$\psi_1(x) = x + \alpha^{n-1}\varphi_1(x) + \alpha^{n-2}\varphi_2(x) + \cdots + \alpha\varphi_{n-1}(x).$$

Führen wir nämlich dieselbe in $y = \alpha x$ ein, so wird daraus

$$\psi_1(y) = \alpha\psi_1(x),$$

oder

$$y + \alpha^{n-1}\varphi_1(y) + \alpha^{n-2}\varphi_2(y) + \cdots + \alpha\varphi_{n-1}(y)$$
$$= \alpha[x + \alpha^{n-1}\varphi_1(x) + \alpha^{n-2}\varphi_2(x) + \cdots + \alpha\varphi_{n-1}(x)].$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist in der That $y = \varphi_1(x)$; denn setzen wir darin diese Grösse für y ein, so wird die linke Seite, da $\alpha^n = 1$, $\varphi_n(x) = x$ ist, zu

$$\varphi_1(x) + \alpha^{n-1}\varphi_2(x) + \alpha^{n-2}\varphi_3(x) + \cdots + \alpha x$$
$$= \alpha[x + \alpha^{n-1}\varphi_1(x) + \alpha^{n-2}\varphi_2(x) + \cdots + \alpha\varphi_{n-1}(x)],$$

was mit der rechten Seite übereinstimmt.

Diese Substitution wird indessen unbrauchbar, wenn

$$\psi_1(x) = x + \alpha^{n-1}\varphi_1(x) + \alpha^{n-2}\varphi_2(x) + \cdots + \alpha\varphi_{n-1}(x)$$

identisch zu einer Constanten c wird. Setzen wir in diesem Ausdruck $\varphi_1(x)$ statt x, so wird daraus

$$\varphi_1(x) + \alpha^{n-1}\varphi_2(x) + \alpha^{n-2}\varphi_3(x) + \cdots + \alpha x = \alpha\psi_1(x) = \alpha \cdot c;$$

---

fehlt daselbst der Nachweis, dass man dieselben auf diese Weise *sämmtlich* erhält. Für *lineare* Functionen ist die allgemeine Untersuchung in verschiedener Weise durchgeführt von Herrn F. Klein, Annalen Bd. IX, pag. 183 und Herrn Gordan, Annalen Bd. XII, pag. 23, von Herrn Camille Jordan in Borchardt's Journal Bd. 84, p. 89. In den genannten Abhandlungen sind die binären Formen mit linearen Transformationen in sich aufgestellt, somit die *algebraischen* Functionen construirt, welche eine lineare Periodicitätsgleichung besitzen. Es ist hiernach gerechtfertigt, wenn die folgenden Untersuchungen auf *transcendente* Functionen beschränkt werden. — Ausserdem ist zu citiren: Serret, Handbuch der höheren Algebra, deutsche Uebersetzung, 1879, Bd. 2, pag. 299 ff.

es muss demnach $c = \alpha \cdot c$, also $c = 0$ sein; $\psi_1(x)$ verschwindet dann identisch. In diesem Falle wählen wir die Substitution:

$$\psi_1'(x) = \alpha^{n-1} x \varphi_1(x) + \alpha^{n-2} x \varphi_2(x) + \cdots + \alpha^{n-k_1} \alpha^{n-k_2} \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(x) + \cdots$$
$$= \sum_{\substack{k_1 = 0,1,2\ldots n-1 \\ k_2 = 0,1,2\ldots n-1 \\ k_2 < k_1}}' \alpha^{2n-k_1-k_2} \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(x),$$

und man überzeugt sich leicht wie oben, dass durch dieselbe $y = \varphi_1(x)$ aus $y = \alpha^2 \cdot x$ hergeleitet wird. Falls auch dieser Ausdruck identisch verschwindet (eine von 0 verschiedene Constante kann er wieder nicht sein), so leiten wir $y = \varphi_1(x)$ durch die Substitution

$$\psi_1''(x) = \sum' \alpha^{3n-k_1-k_2-k_3} \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(x) \varphi_{k_3}(x)$$

aus $y = \alpha^3 \cdot x$ her u. s. w.

So können wir weitergehen bis zu

$$\psi_1^{(n-2)}(x) = \sum' \alpha^{(n-1)n-k_1-k_2-\cdots-k_{n-1}} \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(x) \cdots \varphi_{k_{n-1}}(x).$$

Sollte auch diese Substitution nebst allen vorhergehenden zu Null werden, so wollen wir $\varphi_1(x)$ dadurch bestimmen, dass wir eine Gleichung bilden, welche die n *Lösungen*

$$x,\ \alpha^{n-1}\varphi_1(x),\ \alpha^{n-2}\varphi_2(x),\ \cdots \alpha\varphi_{n-1}(x)$$

besitzt und lautet:

$$(X - x)\left(X - \alpha^{n-1}\varphi_1(x)\right)\left(X - \alpha^{n-2}\varphi_2(x)\right) \cdots \left(X - \alpha\varphi_{n-1}(x)\right) = 0.$$

Multipliciren wir diese Gleichung aus, so nimmt dieselbe nach bekannten Regeln die Gestalt an:

$$X^n - \psi_1(x) X^{n-1} + \psi_1'(x) X^{n-2} - \cdots \pm \psi_1^{(n-2)}(x) X - \Phi(x) = 0,$$

worin $\Phi(x)$ eine unbekannte Function bezeichnet. Da aber voraussetzungsmässig

$$\psi_1(x) = \psi_1'(x) = \cdots = \psi^{(n-2)}(x) = 0$$

ist, so geht die Gleichung über in

$$X^n - \Phi(x) = 0 \quad \text{oder} \quad X = \sqrt[n]{\Phi(x)} = \alpha^k \chi(x).$$

Geben wir k alle Werthe von 0 bis $n-1$, so müssen wir für X die n Werthe

$$x,\quad \alpha^{n-1}\varphi_1(x),\quad \alpha^{n-2}\varphi_2(x),\ \cdots \alpha\varphi_{(n-1)}(x)$$

erhalten. Sei etwa

$$x = \alpha^r \chi(x). \quad \text{und} \quad \alpha^{n-1}\varphi_1(x) = \alpha^s \chi(x),$$

so folgt daraus durch Elimination von $\chi(x)$

$$\varphi_1(x) = \alpha^{s-n-r+1} x,$$

d. h. $\varphi_1(x)$ hat bereits die gewünschte Form.

2) In dem besonderen Falle, dass $\varphi_2(x) = x$ sein soll, haben wir $\alpha = -1$ zu setzen. Wir erhalten dann die Gleichung

$$\psi_1(y) = -\psi_1(x)$$

oder

$$\psi_1(y) + \psi_1(x) = 0,$$

d. h. die Periodicitätsgleichung ist in x und y symmetrisch. Dass auch das Umgekehrte gilt, leuchtet sofort ein.

§ 5.

Die rationale Periodicität.

1. Es handelt sich nunmehr darum, die algebraischen Periodicitätsgleichungen, welche transcendenten Functionen zugehören, mittelst der Functionalsubstitution auf gewisse Normalfälle zu reduciren*). Betrachten wir zuerst die allgemeinste in Bezug auf x und y *rationale* Periodicitätsgleichung

$$axy + bx + cy + d = 0,$$

in der vorläufig a von 0 verschieden sein möge.

Wir wenden auf dieselbe die Substitution

$$\psi_1(x) = \frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}$$

an, deren Coefficienten noch unbestimmt und nur der Bedingung unterworfen sein sollen, dass ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

nicht verschwindet. Wir erhalten dann

$$a\,\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}\cdot\frac{\alpha+\beta y}{\gamma+\delta y} + b\,\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x} + c\,\frac{\alpha+\beta y}{\gamma+\delta y} + d = 0,$$

oder ausmultiplicirt

$$[a\beta^2+(b+c)\beta\delta+d\delta^2]\,xy + [a\alpha\beta+b\beta\gamma+c\alpha\delta+d\gamma\delta]x$$
$$+ [a\alpha\beta+b\alpha\delta+c\beta\gamma+d\gamma\delta]y + [a\alpha^2+(b+c)\alpha\gamma+d\gamma^2] = 0.$$

Man ersieht leicht, dass man unter allen Umständen β und δ so bestimmen kann, dass

$$a\beta^2 + (b+c)\beta\delta + d\delta^2 = 0$$

wird, ohne dass man gleichzeitig $\beta = 0$ und $\delta = 0$ annehmen müsste. Wir können daher der weiteren Transformation eine einfachere Periodicitätsgleichung zu Grunde legen, welcher das Glied mit xy fehlt:

$$ax + by + c = 0.$$

*) Die folgende Untersuchung ist, soweit sie sich auf *lineare* Transformationen bezieht, als bekannt anzunehmen und soll nur des Zusammenhangs wegen vollständig durchgeführt werden.

Durch die Substitution

$$\psi_1(x) = \alpha + \beta x$$

geht dieselbe über in

$$a \cdot (\alpha + \beta x) + b \cdot (\alpha + \beta y) + c = 0.$$

Diesen Ausdruck kann man auf die Normalform

$$y = p \cdot x$$

bringen, wenn man

$$a\alpha + b\alpha + c = 0,$$

also

$$\alpha = -\frac{c}{a+b},$$

$$b\beta = 1, \quad \text{also} \quad \beta = \frac{1}{b}$$

und

$$a\beta = p, \quad \text{also} \quad p = \frac{a}{b}$$

setzt. Diese Reduction wird nur dann unmöglich, wenn $a + b = 0$ ist, d. h. wenn die Periodicitätsgleichung in der Form

$$y = x + n$$

geschrieben werden kann. —

Hieraus folgt, dass sich alle rationalen Periodicitätsgleichungen auf 2 Normalformen zurückführen lassen:

$$1) \quad y = px,$$

$$2) \quad y = x + n.$$

2. Wir wollen nun weiter beweisen, *dass diese beiden Normalfälle nicht durch eine algebraische Substitution in einander übergeführt werden können.*

Wäre nämlich $z = \psi_1(x)$ eine algebraische Function, welche durch die Gleichung $F(x, z)$, die wir offenbar als irreductibel voraussetzen dürfen, da sie sonst in mehrere zerlegt werden könnte, definirt sein soll, so beschaffen, dass sie als Functionalsubstitution in die Gleichung $y = x + n$ eingesetzt dieselbe in $y = px$ überführte, so müsste

$$\psi_1(y) = \psi_1(x) + n$$

durch $y = px$ befriedigt werden, so dass wir hätten:

$$\psi_1(px) = \psi_1(x) + n.$$

Diese Relation kann aber, wenn wir zur definirenden Gleichung $F(x, z) = 0$ zurückgreifen, auch so ausgedrückt werden: die Gleichungen $F(x, z) = 0$ und $F(px, z+n) = 0$ sollen für übereinstimmende x durch ein gleiches z befriedigt werden. Da aber voraussetzungsmässig $F(x, z) = 0$ irreductibel und $F(px, z+n) = 0$ von dem nämlichen Grad in x und z sein muss, so folgt, dass $F(x, z)$ und $F(px, z+n)$ bis auf einen constanten Factor identisch sind. Seien nun etwa die höchsten Glieder in Bezug auf z von $F(x, z)$ nach fallenden Potenzen von x geordnet:

$$z^k(a_1 x^{r_1} + a_2 x^{r_2} + \cdots) + z^{k-1}(b_1 x^{s_1} + b_2 x^{s_2} + \cdots) + \cdots,$$

so hätten wir für beliebige x und z die Gleichung zu befriedigen:

$$\begin{aligned}&(z+n)^k \cdot (a_1 p^{r_1} x^{r_1} + a_2 p^{r_2} x^{r_2} + \cdots)\\ &+ (z+n)^{k-1} \cdot (b_1 p^{s_1} x^{s_1} + b_2 p^{s_2} x^{s_2} + \cdots) + \cdots\\ &= C \cdot [z^k(a_1 x^{r_1} + a_2 x^{r_2} + \cdots) + z^{k-1}(b_1 x^{s_1} + b_2 x^{s_2} + \cdots) + \cdots].\end{aligned}$$

Nach Entwickelung der Potenzen von $z + n$ ergiebt aber die Coefficientenvergleichung der ersten Glieder mit z^k und z^{k-1}: $a_1 p^{r_1} = C a_1$, also, da wir a_1 als Coefficienten des höchsten Gliedes als von 0 verschieden annehmen müssen,

$$C = p^{r_1};$$

ferner

$$\begin{aligned}kn[a_1 p^{r_1} x^{r_1} + a_2 p^{r_2} x^{r_2} + \cdots] + b_1 p^{s_1} x^{s_1} + b_2 p^{s_2} x^{s_2} + \cdots\\ = C \cdot (b_1 x^{s_1} + b_2 x^{s_2} + \cdots).\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann für beliebige x nur dann statthaben, wenn auf beiden Seiten gleich hohe Potenzen von x vorhanden sind, wenn also etwa $r_1 = s_1$ ist; dann haben wir

$$k n a_1 p^{r_1} + b_1 p^{r_1} = C \cdot b_1,$$

oder

$$k n a_1 p^{r_1} + b_1 p^{r_1} = p^{r_1} b_1,$$

oder

$$k n a_1 + b_1 = b_1,$$

eine Gleichung, die in keiner Weise zu befriedigen ist, da k, n, a_1 nothwendig von 0 verschieden sind. *Die beiden Normalfälle sind also wesentlich von einander verschieden.*

3. Wir haben nun noch zu untersuchen, wie weit sich die beiden Normalperiodicitätsgleichungen in andere *derselben* Art transformiren lassen. Wenden wir auf $y = x + n$ die Substitution $\psi_1(x) = \frac{n}{m} \cdot x$ an, so erhalten wir $y \cdot \frac{n}{m} = x \cdot \frac{n}{m} + n$ oder $y = x + m$, so dass wir jede Function mit einer additiven Periode durch eine lineare Substitution in eine andere derselben Art mit beliebiger anderer Periode verwandeln können.

4. Weniger einfach ist die Untersuchung, wann sich $y = px$ in $y = qx$ überführen lässt. Sei wieder $z = \psi_1(x)$ eine algebraische Substitution, die das Gewünschte leistet und die durch die irreductible Gleichung $F(x, z) = 0$ bestimmt ist. Dann müsste $\psi_1(y) = p\psi_1(x)$ durch $y = qx$ befriedigt werden, so dass wir hätten $\psi_1(qx) = p\psi_1(x)$, oder $F(qx, pz) = 0$ müsste mit $F(x, z) = 0$ eine gemeinschaftliche

Lösung haben, also wieder, da $F(x, z) = 0$ irreductibel ist, mit ihm bis auf eine multiplicatorische Constante übereinstimmen. Sind

$$a_1 x^{r_1} z^{s_1} + a_2 x^{r_2} z^{s_2} + \cdots$$

einige Glieder von $F(x, z)$, so würden wir zu setzen haben

$$a_1 q^{r_1} p^{s_1} x^{r_1} z^{s_1} + a_2 q^{r_2} p^{s_2} x^{r_2} z^{s_2} + \cdots$$
$$= C a_1 x^{r_1} z^{s_1} + C a_2 x^{r_2} z^{s_2} + \cdots,$$

und es wäre eine Reihe Gleichungen von der Form

$$a q^r p^s = C a$$

zu befriedigen. Sei nun a von 0 verschieden, so ist

$$C = q^r p^s;$$

eine andere dieser Gleichungen, etwa

$$a' q^u p^v = C a'$$

lässt sich nur dann befriedigen ohne $a' = 0$ zu setzen, wenn $q^u p^v = q^r p^s$ ist. Alle übrigen Glieder müssen nothwendiger Weise verschwinden. Die Gleichung wird daher lauten

$$a x^r z^s + a' x^u z^v = 0,$$

oder kürzer

$$z^k = C x^{k_1},$$

oder

$$z = c x^{\frac{k_1}{k}},$$

wobei k und k_1 ganze, positive oder negative Zahlen sind. Wir führen durch diese Substitution $y = px$ über in $c y^{\frac{k_1}{k}} = c p x^{\frac{k_1}{k}}$ oder

$$y = p^{\frac{k}{k_1}} x.$$

Man kann also $y = px$ in $y = qx$ nur dann durch eine algebraische Substitution verwandeln, wenn q eine rational gebrochene, positive oder negative Potenz von p ist.

5. Das Gesammtresultat lautet:

Es giebt nur 2 wesentlich verschiedene Arten von rationalen Perioden: die additive und die multiplicatorische. Für die additiv periodischen Functionen ist die Grösse der Periode nicht charakteristisch, während dies bei den Functionen mit multiplicatorischer Periode der Fall ist. Da die letzteren von einer gewissen constanten Grösse, einem Modul, abhängig sind, so schlage ich für sie den Namen *Modularfunctionen* vor, der von *Gudermann* den mit ihnen nahe verwandten elliptischen Functionen beigelegt wurde.

6. Obgleich ich die Construction dieser periodischen Functionen auf eine spätere Gelegenheit verschiebe, so will ich doch folgende Bemerkung über ihre Form beifügen. Ist $f(x + kn) = f(x)$, so wird

diese Gleichung auch für $k = \infty$ gelten müssen, d. h. eine additiv periodische Function nimmt für $x = \infty$ *alle* Werthe an, die sie überhaupt für irgend ein x besitzt; $x = \infty$ ist also ein wesentlicher Unstetigkeitspunkt derselben. Hat sie noch einen andern wesentlichen Unstetigkeitspunkt, etwa $x = a$, so müssen wegen der Periodicität auch $x = a + kn$ solche sein, d. h. *eine additiv periodische Function hat entweder einen wesentlichen Unstetigkeitspunkt, nämlich $x = \infty$, oder unendlich viele.* Im ersten Fall lässt sie sich, wenn sie eindeutig ist, *als Potenzreihe von x mit nur positiven Potenzen oder als Quotient zweier solcher Reihen darstellen.*

7. Eine entsprechende Betrachtung ergiebt, dass *eine multiplicatorisch periodische Function zwei wesentliche Unstetigkeitspunkte besitzt, nämlich $x = \infty$* und *$x = 0$; hat sie deren noch mehr, so hat sie unendlich viele.* Im ersten Fall muss sie sich (ihre Existenz überhaupt sowie ihre Eindeutigkeit vorausgesetzt) *als Potenzreihe mit steigenden und fallenden Potenzen von x oder* (was thatsächlich allein möglich ist) *als Quotient zweier derartiger Reihen darstellen lassen.*

§ 6.

Algebraische Hülfsuntersuchungen.

Jede Art von Periodicität, welche nicht durch die Gleichung

$$axy + bx + cy + d = 0$$

bestimmt ist, muss als irrational und mehrdeutig bezeichnet werden. Denn lautet etwa die Periodicitätsgleichung $y = x^2$, so wäre zwar y rational durch x, aber nicht x durch y ausgedrückt, und wenn $F(x^2) = F(x)$ ist, so muss auch $F(\sqrt{x}) = F(x)$ sein. Bevor wir indessen der Untersuchung dieser irrationalen Perioden näher treten, müssen wir einige allgemeinere Betrachtungen über algebraische Functionen vorausschicken.

1) Sei $y = f(x)$ eine durch die *irreductible* Gleichung

$$F(y, x) = 0,$$

die in y vom n^{ten} Grade sein möge, definirte algebraische Function. Es ist bekannt, dass die n Werthe von y im Allgemeinen (einzelne x ausgenommen) von einander verschieden sind, aber dadurch sämmtlich in einander übergeführt werden können, dass man die Variable x einen geschlossenen Weg zurücklegen lässt. Werden nun diese n Werthe von y mit

$$y_1 = f^{(1)}(x), \quad y_2 = f^{(2)}(x), \; \cdots, \; y_n = f^{(n)}(x)$$

bezeichnet, so ist einleuchtend, dass sich jeder derselben als *algebraische* Function eines beliebigen andern darstellen lässt; denn man braucht nur aus

$$y_r = f^{(r)}(x) \quad \text{und} \quad y_s = f^{(s)}(x)$$

x zu eliminiren, um eine algebraische Gleichung zwischen y_r und y_s herzuleiten. Wir nennen diese algebraische Beziehung zwischen je zwei Werthen einer algebraischen Function den *Zusammenhang* derselben und die Gleichung, welche denselben bestimmt, die *Zusammenhangsgleichung.*

Sei nun für beliebige x

$$y_2 = \varphi_1(y_1),$$

so ist klar, dass $\varphi_1(y_1)$ auch dann noch eine Lösung von $F(y, x) = 0$ darstellen wird, wenn y_1 durch stetige Aenderung von x in y_2 übergeführt wird, dass also etwa

$$y_3 = \varphi_1(y_2) = \varphi_2(y_1)$$

sein muss. Ebenso werden die übrigen Iterirungen von $\varphi_1(y_1)$ (d. h. immer je *ein* Werth dieser im Allgemeinen *mehrdeutigen* Functionen) Lösungen von $F(y, x) = 0$ sein müssen. Da die Anzahl dieser Lösungen eine endliche ist, so muss φ_1 eine Function sein, welche nach einer endlichen Zahl von Iterirungen wieder auf den Ausgangswerth zurückführt, mithin sich nach § 4. in der Form

$$\varphi_1(y_1) = \psi_{-1}\alpha\psi_1(y_1)$$

darstellen lassen (ψ_1 ist eine algebraische Function, α eine k^{te} Einheitswurzel). — Haben wir nun

$$\begin{aligned}
y_2 &= \varphi_1(y_1),\\
y_3 &= \varphi_2(y_1),\\
&\vdots\\
y_k &= \varphi_{k-1}(y_1),\\
y_1 &= \varphi_k(y_1),
\end{aligned}$$

so wird auch etwa

$$\begin{aligned}
y_{k+2} &= \varphi_1(y_{k+1}),\\
y_{k+3} &= \varphi_2(y_{k+1}),\\
&\vdots\\
y_{2k} &= \varphi_{k-1}(y_{k+1}),\\
y_{k+1} &= \varphi_k(y_{k+1})
\end{aligned}$$

sein und kein y der zweiten Reihe wird mit einem der ersten übereinstimmen können. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens lassen sich sämmtliche n Werthe von y in Reihen von je k Gliedern ordnen, woraus man erkennt, dass k ein Theiler von n sein muss. Ist ferner

$$y_{k+1} = \chi_1(y_1),$$

so wird $\chi_l(y_1) = y_1$ und l auch ein Theiler von n sein müssen u. s. w. Auf diese Weise können sich noch mehrere Reihen von Zusammenhangsgleichungen zwischen den Lösungen ergeben, falls n sich in

Factoren zerlegen lässt; ist dagegen n eine Primzahl, so muss der Zusammenhang ein einfacher sein, d. h. alle Lösungen lassen sich aus einer einzigen durch Iterirung *einer* Function herleiten. — Als primitiv wollen wir die Zusammenhangsgleichung

$$y_2 = \varphi_1(y_1)$$

bezeichnen, wenn $\varphi_1(y_1)$ nicht die Iterirung einer andern Function $\chi_1(y)$ ist, welche durch ihre Iterirungen eine grössere Anzahl von Functionalwerthen liefert wie $\varphi_1(y_1)$. — Wir sprechen von einem einfachen, doppelten, dreifachen u. s. w. Zusammenhang einer algebraischen Function, wenn sich alle Werthe derselben durch Iterirung einer, zweier, dreier u. s. w. primitiver Zusammenhangsfunctionen aus einer einzigen herleiten lassen.

Einige Beispiele werden die Sache deutlicher machen.

Beispiel 1:

$$(y-1)^4 = x.$$

Wir haben

$$y_1 = 1 + \sqrt[4]{x},$$
$$y_2 = 1 + i\sqrt[4]{x},$$
$$y_3 = 1 - \sqrt[4]{x},$$
$$y_4 = 1 - i\sqrt[4]{x}.$$

Die Zusammenhangsgleichung zwischen y_2 und y_1 lautet:

$$y_2 - 1 = i(y_1 - 1),$$

oder

$$\varphi_1(y_1) = y_2 = iy_1 + 1 - i.$$

Dieselbe ist primitiv, denn wir haben

$$\varphi_2(y_1) = -y_1 + 2,$$

also

$$y_3 = \varphi_2(y_1),$$

und

$$\varphi_3(y_1) = -iy_1 + 1 + i,$$

also

$$y_4 = \varphi_3(y_1).$$

Dagegen ist

$$\psi_1(y_1) = \varphi_2(y_1) = -y_1 + 2$$

nicht primitiv, da schon

$$\psi_2(y_1) = y_1$$

ist.

Beispiel 2:

$$y^2 - 2yx + x^2 - x = 0,$$

also

$$y_1 = x + \sqrt{x},$$
$$y_2 = x - \sqrt{x},$$

und somit

$$\varphi_1(y_1) = y_2 = 1 + y_1 \pm \sqrt{1 + 4y_1};$$

setzt man hierin y_2 statt y_1, so folgt

$$\varphi_2(y_1) = 2 + y_1 \pm \sqrt{1 + 4y_1} \pm (2 \pm \sqrt{1 + 4y_1}),$$

worin nur das erste und dritte Doppelzeichen correspondiren. Die Werthe von $\varphi_2(y_1)$ sind also

$$4 + y_1 \pm 2\sqrt{1 + 4y_1} \quad \text{und} \quad y_1;$$

zwei Werthe geben also wieder die erste Lösung.

Beispiel 3:

$$y^4 - 2y^2 = x,$$

oder

$$y_1 = +\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}},$$

$$y_2 = -\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}},$$

$$y_3 = +\sqrt{1 - \sqrt{1 + x}},$$

$$y_4 = -\sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}.$$

Hier ist der Zusammenhang ein doppelter; denn wir haben

$$y_1 + y_2 = 0$$

und

$$y_1^2 + y_3^2 = 2.$$

2. Die allgemeine Darstellung der Zusammenhangsgleichungen einer durch eine algebraische Gleichung definirten Function ist sehr leicht. Sei

$$y = f(x)$$

durch

$$F(y, x) = y^n + \chi_1(x)\, y^{n-1} + \chi_2(x)\, y^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1}(x)\, y + \chi_n(x) = 0,$$

bestimmt, worin die $\chi(x)$ rationale Functionen von x bedeuten, so brauchen wir nur zwischen

$$F(y_r, x) = 0$$

und

$$F(y_s, x) = 0$$

x zu eliminiren. Etwas umständlicher, doch für die Theorie wichtig ist folgende Methode. Wir haben

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = -\chi_1(x),$$

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + \cdots + y_{n-1} y_n = \chi_2(x),$$

$$\vdots$$

$$y_1 y_2 \cdots y_n = (-1)^n \chi_n(x).$$

Eliminirt man aus diesen n Gleichungen x und $n-2$ der y, so erhält man eine Gleichung zwischen den beiden übrigen y. Bei beiden Methoden ist ersichtlich, dass das Eliminationsresultat genau gleich ausfallen muss, welche beiden y man auch in die Zusammenhangsgleichung bringt. Die gefundene Gleichung umfasst daher den Zusammenhang aller Paare von Werthen mit Einschluss von $y_r = y_s$ und ist somit nicht irreductibel. — Bei dem zuletzt betrachteten Beispiel

$$y^4 - 2y^2 = x$$

ergiebt sich

$$y_r^4 - 2y_r^2 = y_s^4 - 2y_s^2$$

oder

$$y_r^4 - y_s^4 - 2y_r^2 + 2y_s^2 = 0,$$

eine Gleichung, die sich in die 3 Factoren

$$y_r - y_s = 0,$$
$$y_r + y_s = 0,$$
$$y_r^2 + y_s^2 - 2 = 0$$

zerlegen lässt.

3. Setzen wir in der Gleichung $F(x, y) = 0$ mit den Lösungen $y_k = f^{(k)}(x)$

$$y = \xi_1(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

so sind die Lösungen der transformirten Gleichung

$$z_k = \xi_{-1} f^{(k)}(x),$$

und wenn eine Zusammenhangsgleichung von $F(y, x) = 0$ lautete:

$$\Phi(y_r, y_s) = 0,$$

oder

$$y_s = \Psi_1(y_r),$$

so haben wir jetzt

$$\Phi(\xi_1(z_r),\ \xi_1(z_s)) = 0,$$

oder

$$z_s = \xi_{-1}\Psi_1\xi_1(z_r).$$

Die Zusammenhangsgleichungen gestatten also dieselbe Transformation wie die Periodicitätsgleichungen, doch nur mittelst einer *linearen* Substitution.

4. Von besonderer Wichtigkeit sind für uns diejenigen Functionen $y = f_1(x)$, welche durch eine Gleichung von der Form

$$\text{(1)} \qquad \frac{a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_n} = \varphi_1(x),$$

oder, was dasselbe ist,

$$\text{(2)} \quad y^n + \frac{a_1 - b_1\varphi_1(x)}{a_0 - b_0\varphi_1(x)} y^{n-1} + \frac{a_2 - b_2\varphi_1(x)}{a_0 - b_0\varphi_1(x)} y^{n-2} + \cdots + \frac{a_n - b_n\varphi_1(x)}{a_0 - b_0\varphi_1(x)} = 0$$

bestimmt sind, worin $\varphi_1(x)$ eine *rationale* Function bedeutet. Die Zusammenhangsgleichung von (1) oder (2) lautet

$$(3)\qquad \frac{a_0 y_r^n + a_1 y_r^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 y_r^n + b_1 y_r^{n-1} + \cdots + b_n} = \frac{a_0 y_s^n + a_1 y_s^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 y_s^n + b_1 y_s^{n-1} + \cdots + b_n},$$

ist also von $\varphi_1(x)$ unabhängig. Dividirt man (3) durch den Factor $y_r - y_s$, so liefert die übrigbleibende Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades genau die $n-1$ Werthe von $f_1(x)$, welche ausser y_r noch existiren. — Es ist aber auch leicht zu erweisen, dass jede n deutige algebraische Function, welche vollständig denselben Zusammenhang wie die durch (1) definirte hat, von der Form

$$\frac{a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_n} = \varphi_1'(x)$$

sein muss. Denn soll

$$(5)\qquad y^n + \chi_1(x) y^{n-1} + \chi_2(x) y^{n-2} + \cdots + \chi_n(x) = 0$$

die verlangte Eigenschaft haben, so müssen *alle* Gleichungen, welche sich zwischen den Lösungen von (1) oder (2): $y_1, y_2, \cdots, y_n$ aufstellen lassen, identisch mit denjenigen sein, welche sich zwischen den Lösungen von (5): $y_1', y_2', \cdots, y_n'$ ergeben. Da wir aber

$$(6)\qquad \begin{cases} y_1 + y_2 + \cdots + y_4 = -\dfrac{a_1 - b_1\varphi_1(x)}{a_0 - b_0\varphi_1(x)}, \\ y_1 y_2 + y_1 y_3 + \cdots + y_{n-1} y_n = \dfrac{a_2 - b_2\varphi_1(x)}{a_2 - b_0\varphi_1(x)}, \\ \vdots \\ y_1 y_2 \cdots y_n = (-1)^n \dfrac{a_n - b_n\varphi_1(x)}{a_0 - b_0\varphi_1(x)} \end{cases}$$

und

$$(7)\qquad \begin{cases} y_1' + y_2' + \cdots + y_n' = -\chi_1(x), \\ y_1' y_2' + y_1' y_3' + \cdots + y_{n-1}' y_n' = \chi_2(x), \\ \vdots \\ y_1' y_2' \cdots y_n' = (-1)^n \chi_n(x) \end{cases}$$

haben, so werden die Resultate der Elimination von x zwischen

$$(8)\qquad \sum y_1 y_2 \cdots y_r = (-1)^r \frac{a_r - b_r\varphi_1(x)}{a_0 - b_0\varphi_1(x)}$$

und

$$\sum y_1 y_2 \cdots y_s = (-1)^s \frac{a_s - b_s\varphi_1(x)}{a_0 - b_0\varphi_1(x)},$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft,

$$(9)\qquad \sum y_1 y_2 \cdots y_r = (-1)^r \frac{a_r - b_r x}{a_0 - b_0 x}$$

und

$$\sum y_1 y_2 \cdots y_s = (-1)^s \frac{a_s - b_s x}{a_0 - b_0 x}$$

einerseits und

(10)
$$\sum y_1' y_2' \cdots y_r' = (-1)^r \chi_r(x)$$

und

$$\sum y_1' y_2' \cdots y_s' = (-1)^s \chi_s(x)$$

andrerseits identisch sein müssen. Es ist aber leicht einzusehen (was weiter unten bei anderer Gelegenheit ausführlicher erörtert werden wird), dass dies nur dann zutrifft, wenn

(11)
$$\chi_r(x) = \frac{a_r - b_r \varphi_1'(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1'(x)}$$

und

$$\chi_s(x) = \frac{a_s - b_s \varphi_1'(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1'(x)}$$

ist, worin $\varphi_1'(x)$ nur eine rationale Function sein kann, weil sonst die Coefficienten der Gleichung vieldeutig würden und hierdurch der Zusammenhang eine Aenderung erlitte. Hiermit ist die Behauptung erwiesen. —

Mit diesen wenigen Resultaten ist natürlich die Theorie des Zusammenhangs nicht erschöpft; doch genügen dieselben, um die Untersuchungen über irrationale Periodicität bis zu einem gewissen Punkte zu erledigen.

§ 7.

Die irrationale Periodicität.

1. Um die recht schwierige Frage über die Zulässigkeit der irrationalen Periodicität klarer zu machen, will ich mich vorerst an ein Beispiel halten. Wenn die Periodicitätsgleichung der *eindeutigen* Function $F(x)$ lautet:

$$y = x^2,$$

so müssen die Relationen bestehen:

$$F(x) = F(x^2) = F(x^4) = F(x^8) = \cdots$$
$$= F(\sqrt{x}) = F(\sqrt[4]{x}) = F(\sqrt[8]{x}) = \cdots.$$

$\sqrt{x}$ hat aber zwei Werthe, welche wir als $+\sqrt{x}$ und $-\sqrt{x}$ unterscheiden können. Es entsteht nun die Frage: sollen wir von der periodischen Function $F(x)$ verlangen, dass sowohl $F(+\sqrt{x})$ als auch $F(-\sqrt{x})$ mit $F(x)$ übereinstimmt, oder sollen wir es als genügend betrachten, wenn nur eine dieser Grössen, etwa $F(+\sqrt{x})$ gleich $F(x)$ wird? Nehmen wir für einen Augenblick das Letztere an, setzen aber voraus, dass $F(x)$ nur in einzelnen Punkten unstetig wird. Sei nun

$F(+\sqrt{x_1}) = F(x_1)$ und denken wir uns, dass x von x_1 eine continuirliche Reihe von Werthen durchläuft, ohne jedoch durch einen Unstetigkeitspunkt von $F(x)$ oder $F(+\sqrt{x})$ zu gehen, was nach der eben gemachten Voraussetzung immer möglich ist; so wird, da $F(x)$ und $F(\sqrt{x})$ nicht plötzlich ihren Werth ändern können, diese Uebereinstimmung fortwährend stattfinden müssen. Nun ist es aber bekanntlich immer möglich (und zwar auf unendlich vielen Wegen), die Variable so zu führen, dass, wenn x zu x_1 zurückkehrt, $+\sqrt{x_1}$ in $-\sqrt{x_1}$ übergegangen ist. Demnach müsste auch $F(-\sqrt{x}) = F(x)$ sein. Man übersieht sofort, dass, wenn eine für beliebige x (einzelne Punkte ausgenommen) stetige Function eine Periode $y = \varphi_1(x)$ haben soll, welche durch eine irreductible Gleichung definirt ist (was immer vorausgesetzt werden darf, da sich sonst die Gleichung in mehrere zerlegen liesse), die Gleichungen

$$F(\varphi_\varkappa(x)) = F(x) \quad \text{und} \quad F(\varphi_{-\varkappa}(x)) = F(x)$$

für *sämmtliche* Werthe von $\varphi_\varkappa(x)$ und $\varphi_{-\varkappa}(x)$ bestehen müssen. — Kehren wir jedoch zu unserem Beispiel zurück. Es müsste $F(\sqrt{x})$ für die 2 Werthe von $\sqrt{x}$, $F\left(\sqrt[2]{x}\right)$ für die $2^\varkappa$ Werthe von $\sqrt[2^\varkappa]{x}$ mit $F(x)$ übereinstimmen. Allein wir könnten ja auch $F(x^2) = F(x)$ zum Ausgangspunkt nehmen; dann müsste $F(\pm\sqrt{x^2}) = F(x)$ oder $F(\pm x) = F(x)$, ferner $F\left(\pm\alpha\sqrt[2^\varkappa]{x}\right) = F(x)$ sein, wenn α eine $2^{\varkappa\text{te}}$ Einheitswurzel bedeutet. Hierbei würden wir also noch mehr Werthe des Arguments finden, für welche $F(x)$ sich gleich bleiben soll. Wenn man $F(x^4)$, $F(x^8)$ u. s. w. zum Ausgangspunkt wählt, so mehrt sich noch die Zahl dieser Werthe, so dass $F(x)$ für 2^∞ Werthe sich gleich bleiben müsste. Aehnliches tritt im Allgemeinen bei mehrdeutigen Periodicitätsfunctionen ein. Da es nun wahrscheinlich, wenn auch nicht erwiesen ist, dass eine stetige Function nur für ∞^2 Werthe des Arguments unverändert bleiben kann, so schliessen wir die Functionen mit mehrdeutiger Periodicitätsbeziehung im Allgemeinen von dem Kreis der zu untersuchenden aus.

2. Bemerkt zu werden verdient, dass diese nicht ganz exacten Betrachtungen in speciellen Fällen mit völliger Strenge durchgeführt werden können. Ist z. B. $y = \varphi_1(x) = x^n$, so ergiebt sich leicht, dass $F(\alpha x) = F(x)$ sein muss, wenn α eine $n^{\varkappa\text{te}}$ Einheitswurzel bedeutet. Die Reihe der $n^{\varkappa\text{ten}}$ Einheitswurzeln stellt aber für ein sehr grosses $\varkappa$ einen geschlossenen Kreis von unendlich benachbarten Werthen dar, sodass wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $F(x)$ diese Function für eine zusammenhängende Reihe von Werthen, also überhaupt unverändert bleiben müsste.

3. Die in 1. gemachten Schlüsse gelten nur so lange, als $F(x)$ eine *eindeutige* Function ist; schon bei *endlich* vieldeutigen Functionen verlieren sie ihre Gültigkeit, wie das Beispiel

$$F(x) = \sin \sqrt[3]{x}$$

zeigt, welches eine dreideutige Function mit den Werthen ($\alpha^3 = 1$)

$$F^{(1)}(x) = \sin \sqrt[3]{x},$$
$$F^{(2)}(x) = \sin \alpha \sqrt[3]{x},$$
$$F^{(3)}(x) = \sin \alpha^2 \sqrt[3]{x}$$

und der Periodicitätsgleichung

$$\sqrt[3]{y} = 2\pi + \sqrt[3]{x},$$

oder

$$y = (2\pi + \sqrt[3]{x})^3$$

repräsentirt. Setzt man nämlich y statt x in $F(x)$, so erhält man die 9 Ausdrücke

$$\begin{array}{lll} \sin(2\pi + \sqrt[3]{x}), & \sin(2\pi + \alpha\sqrt[3]{x}), & \sin(2\pi + \alpha^2\sqrt[3]{x}), \\ \sin\alpha(2\pi + \sqrt[3]{x}), & \sin\alpha(2\pi + \alpha\sqrt[3]{x}), & \sin\alpha(2\pi + \alpha^2\sqrt[3]{x}), \\ \sin\alpha^2(2\pi + \sqrt[3]{x}), & \sin\alpha^2(2\pi + \alpha\sqrt[3]{x}), & \sin\alpha^2(2\pi + \alpha^2\sqrt[3]{x}), \end{array}$$

von denen der erste, zweite und dritte bezüglich $\sin \sqrt[3]{x}$, $\sin \alpha \sqrt[3]{x}$, $\sin \alpha^2 \sqrt[3]{x}$ gleich sind, während die übrigen andere Werthe annehmen. Auch ist es nicht möglich, derartige mehrdeutige Functionen mit *irrationaler* Periode auf eindeutige zurückzuführen, indem man sie als Lösungen einer algebraischen Gleichung darstellt, deren Coefficienten *eindeutige periodische* Functionen sind. Der eindeutige Ausdruck

$$\sin \sqrt[3]{x} + \sin \alpha \sqrt[3]{x} + \sin \alpha^2 \sqrt[3]{x} =$$
$$-\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 8\cdot 3} - \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 14\cdot 5} + \cdots$$

ist überhaupt nicht periodisch, da die einzelnen Theile desselben nicht bei *gleichen* Aenderungen ungeändert bleiben. — Dass *unendlich* vieldeutige Functionen irrationale Periodicitätsgleichungen zulassen, die bei eindeutigen und endlich vieldeutigen Functionen unmöglich sind, zeigt folgende Function:

$$F(x) = \sin\left(2\pi \frac{\log\log x}{\log 2}\right);$$

diese bleibt ungeändert, wenn man x^2 oder $x^{\frac{1}{2}}$ statt x setzt; nur ist letzteres nicht für *beide* Werthe von $x^{\frac{1}{2}}$ der Fall. — Im Folgenden beschränken wir uns auf die Untersuchung *eindeutiger* Functionen.

4. Die Schwierigkeiten, auf welche die irrationale Periodicität führt, sind in 2 Fällen nicht vorhanden:

a) wenn die Periodicitätsfunction derart ist, dass keine Iterirung derselben mehr als eine bestimmte, endliche Anzahl von Werthen besitzt;

b) wenn die Zahl der Werthe von $\varphi_n(x)$ zwar ins Beliebige wächst, allein unter denselben nur eine bestimmte, endliche Zahl von den Werthen früherer Iterirungen verschieden ist.

5. Der erste Fall, welchen ich allein erledigt habe, lässt sich leicht reduciren. Es ist vorerst klar, dass keine der Iterirungen der n-deutigen, durch eine irreductible Gleichung definirten Function $y = f_1(x)$ weniger als n-deutig sein kann. Denn seien $y_1, y_2, \cdots, y_r$ die Werthe von $f_{\varkappa-1}(x)$, so haben wir für $f_\varkappa(x)$:

$$f_1(y_1), \quad f_1(y_2) \cdots f_1(y_r).$$

Jeder dieser Ausdrücke ist n-werthig, da $f_1(x)$ für dasselbe Argument n wesentlich verschiedene Werthe (einzelne Punkte ausgenommen) haben muss; die Gesammtzahl der Werthe von $f_\varkappa(x)$ muss daher mindestens n betragen. Nehmen wir nun an, dass die Vieldeutigkeit der Iterirungen von $f_1(x)$ bis zu einer s-fachen steige, und dass $f_\varkappa(x)$ dieselbe erreiche, so werden auch $f_{2\varkappa}(x)$, $f_{3\varkappa}(x)$ u. s. w. gerade s-deutig sein, weil ein höherer Grad der Vieldeutigkeit nach der gemachten Annahme, ein niedrigerer aber nach dem eben Bewiesenen nicht möglich ist. Da nun eine Function mit der Periode $y = f_1(x)$ auch die Periode $y = f_\varkappa(x)$ hat, so genügt es, diejenigen Periodicitätsfunctionen $y = f_1(x)$ aufzusuchen, deren Iterirungen von *derselben* Vieldeutigkeit wie $f_1(x)$ sind.

6. Soll dies bei der ersten Iterirung der n-deutigen Function $f_1(x)$ der Fall sein, so werden, wenn $y_1, y_2, \cdots, y_n$ die Werthe von $f_1(x)$ bezeichnen,

$$f_1(y_1), \quad f_1(y_2), \cdots, f_1(y_n)$$

dieselben Werthe liefern müssen, da jeder dieser Ausdrücke deren n besitzt und im Ganzen nur n vorhanden sein sollen. Die Ausdrücke $y_2, y_3 \cdots y_n$ werden aber aus y_1 durch die Zusammenhangsgleichung von $y = f_1(x)$ hergeleitet, und da wir y_1 jeder Grösse gleich machen können, so folgt, dass $f_1(x)$ für solche Argumente denselben Werth annehmen muss, welche durch die Zusammenhangsgleichung von $y = f_1(x)$ in einander übergeführt werden können. Dies fällt aber mit der Forderung zusammen, dass $f_{-1}(x)$ denselben Zusammenhang wie $f_1(x)$ selbst besitzt. Wir haben daher nur solche Functionen zu untersuchen, *deren Zusammenhang mit dem ihrer Umkehrung übereinstimmt.*

7. Die fragliche Function $y = f_1(x)$ möge durch die Gleichung

(1) $$y^n + \varphi^{(1)}(x)y^{n-1} + \varphi^{(2)}(x)y^{n-2} + \cdots + \varphi^{(n)}(x) = 0,$$

ihre Umkehrung, welche nach dem Gesagten ebenfalls n-deutig ist, durch

(2) $$y^n + \psi^{(1)}(x)y^{n-1} + \psi^{(2)}(x)y^{n-2} + \cdots + \psi^{(n)}(x) = 0$$

bestimmt sein, sodass die Gleichungen (1) und (2) durch Vertauschung von y und x in einander übergehen. Sollen beide Gleichungen denselben Zusammenhang haben, so muss das Eliminationsresultat von

(3) $$\sum y_1 y_2 \cdots y_r = \varphi^{(r)}(x)$$

und

$$\sum y_1 y_2 \cdots y_s = \varphi^{(s)}(x)$$

mit dem von

(4) $$\sum y_1 y_2 \cdots y_r = \psi^{(r)}(x)$$

und

$$\sum y_1 y_2 \cdots y_s = \psi^{(s)}(x)$$

übereinstimmen, d. h. es muss, wenn

(5) $$\psi^{(r)}(x) = \varphi^{(r)}\xi(x)$$

ist, auch

(6) $$\psi^{(s)}(x) = \varphi^{(s)}\xi(x)$$

sein. Es ergiebt sich dies leicht daraus, dass nach (3) und (4)

(7) $$\varphi^{(r)}\varphi^{(s)}_{-1}(x) = \psi^{(r)}\psi^{(s)}_{-1}(x)$$

und zwar für *alle* Werthe dieser Ausdrücke sein muss, woraus bei der Annahme von (5) folgt

(8) $$\varphi^{(r)}\varphi^{(s)}_{-1}(x) = \varphi^{(r)}\xi\,\psi^{(s)}_{-1}(x),$$

oder

(9) $$\varphi^{(s)}_{-1}(x) = \xi\,\psi^{(s)}_{-1}(x),$$

oder endlich

(10) $$\psi^{(s)}(x) = \varphi^{(s)}\xi(x).$$

Demnach kann (2) in die Form gesetzt werden

(11) $$y^n + \varphi^{(1)}\xi(x)y^{n-1} + \varphi^{(2)}\xi(x)y^{n-2} + \cdots + \varphi^{(n)}\xi(x) = 0.$$

Dabei muss $\xi(x)$ so beschaffen sein, dass die Coefficienten *eindeutige* Functionen werden. Es folgt hieraus

(12) $$f_{-1}(x) = f_1\xi(x).$$

Der letzteren Gleichung genügt aber nur

(13) $$\xi(x) = f_{-2}(x),$$

und zwar ist klar, dass *alle* Werthe von $f_1 f_{-2}(x)$ mit denen von $f_{-1}(x)$ übereinstimmen, weil nach Früherem beide Ausdrücke gerade n Werthe haben und $f_{-1}(x)$ durch eine irreductible Gleichung bestimmt ist. Daher wird $\varphi^{(x)} f_{-2}(x)$ eine *eindeutige* Function sein müssen, was nur möglich ist, wenn *alle* $\varphi^{(x)}(x)$ vom n^{ten} Grad oder Constanten sind. $f_{-2}(x)$ hat mit der Umkehrung von $\varphi^{(x)}(x)$ denselben Zusammenhang, woraus weiter folgt, dass die Umkehrungen *aller* $\varphi^{(x)}(x)$, soweit diese nicht Constanten sind, von gleichem Zusammenhang sein, d. h. nach § 6, 4 durch folgende Gleichung bestimmt sein müssen:

$$\frac{A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \cdots + A_n}{B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + \cdots + B_n} = \frac{ax+b}{cx+d}. \tag{14}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist bei allen $\varphi^{(x)}(x)$ dieselbe, während die rechte Seite nur vom ersten Grade zu sein braucht (da sonst die $\varphi^{x}(x)$ nicht rational wären), im Uebrigen aber verschieden sein kann. Die $\varphi^{(x)}(x)$ sind somit rationale Functionen des ersten Grades von *derselben* rationalen Function n^{ten} Grades. Weiter ist noch ersichtlich, dass die Nenner der erstgenannten rationalen Functionen übereinstimmen müssen, da sonst beim Wegmultipliciren derselben die Gleichung (1) in x von höherem als dem n^{ten} Grade würde. Wir erhalten daher für (1)

$$\begin{aligned} y^n + \frac{a_1 - b_1 \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)} y^{n-1} + \frac{a_2 - b_2 \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)} y^{n-2} + \cdots \\ + \frac{a_n - b_n \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

oder

$$\frac{a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_n} = \frac{c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n}{d_0 x^n + d_1 x^{n-1} + \cdots + d_n}. \tag{16}$$

Durch nochmalige Anwendung von § 6., 4. ergiebt sich aber hieraus leicht, dass $y = f_1(x)$ nur dann mit seiner Umkehrung denselben Zusammenhang haben kann, wenn (16) die Gestalt annimmt:

$$\frac{a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_n} = \varepsilon\left(\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n}\right), \tag{17}$$

worin ε eine lineare Function bezeichnet. Hiermit ist bewiesen, *dass alle Periodicitätsgleichungen n^{ten} Grades, welche iterirt immer vom n^{ten} Grade bleiben, aus einer linearen durch Einsetzen einer rationalen Function n^{ten} Grades für y und x hergeleitet werden können.* Dass die gefundenen Gleichungen auch wirklich die gewünschte Eigenschaft besitzen, ist leicht ersichtlich*).

*) Das hier gefundene Resultat steht in naher Beziehung zu dem von Herrn S. Lie in seiner „Theorie der Transformationsgruppen I“, Mathematische Annalen, Bd. XVI, S. 455, ausgesprochenen; doch erkennt man leicht, dass die beiden Sätze nicht identisch sind. Die von Herrn S. Lie angewandten Methoden sind von den meinigen gänzlich verschieden.

8. Es wird nicht ohne Interesse sein, wenn wir den eben allgemein bewiesenen Satz für einen speciellen Fall durch directe Rechnung herleiten. Sei die Function $y = f_1(x)$ durch die Gleichung

$$ay^2 + byx + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

bestimmt, so werden wir die definirende Gleichung für die iterirte Function $z = f_2(x)$ finden, wenn wir y aus der vorgelegten Gleichung und

$$az^2 + bzy + cy^2 + dz + ey + f = 0$$

eliminiren. Wir schreiben diese Gleichungen zuerst in der Form

$$y^2a + y(bx + d) + cx^2 + ex + f = 0, \tag{18}$$

$$y^2c + y(bz + e) + az^2 + dz + f = 0, \tag{19}$$

und erhalten dann nach einer bekannten Regel

$$\begin{vmatrix} a & cx^2+ex+f \\ c & az^2+dz+f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} cx^2+ex+f & bx+d \\ az^2+dz+f & bz+e \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & bx+d \\ c & bz+e \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Soll nun $z = f_2(x)$ eine höchstens zweideutige Function sein, so kann dies nur auf 2 Arten geschehen: entweder fallen in (20) die Potenzen von x und z, welche den zweiten Grad überschreiten, weg, oder (20) lässt sich als Quadrat darstellen. Dass das Erstere nicht der Fall sein kann, ersieht man daraus, dass die Coefficienten von z^4 und x^4, a^4 und c^4 sind, die wir nicht beide als 0 annehmen dürfen. Das Letztere kann in 3 Fällen eintreten.

1. Es ist für beliebige x und z

$$\begin{vmatrix} cx^2 + ex + f & bx + d \\ az^2 + dz + f & bz + e \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$bcx^2z + bexz + bfz + cex^2 + e^2x + ef$$
$$= abxz^2 + bdxz + bfx + adz^2 + d^2z + df,$$

eine Gleichung, die nur identisch befriedigt werden kann, wenn wir

$$b = 0, \quad d = 0, \quad e = 0$$

annehmen. Die Gleichung

$$ay^2 + cx^2 + f = 0$$

kann aber aus der linearen Gleichung

$$ay + bx + f = 0$$

durch die Substitution $\psi_1(x) = x^2$ hergeleitet werden.

2. Es ist identisch

$$\begin{vmatrix} a & bx + d \\ c & bz + e \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$abz + ae = bcx + cd;$$

hier ist erforderlich, dass

$$b = 0 \quad \text{und} \quad ae = cd \quad \text{oder} \quad \frac{a}{c} = \frac{d}{e}$$

ist; (18) nimmt dann die Form an

$$ay^2 + dy + cx^2 + \frac{cd}{a} x + f = 0,$$

oder

$$y^2 + my + p(x^2 + mx) + f = 0,$$

eine Gleichung, die aus

$$y + px + f = 0$$

durch die Substitution

$$\psi_1(x) = x^2 + mx$$

hervorgeht.

3. Fällt der zweite Theil von (20) nicht weg, so setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} r &= bx + d, \\ s &= bz + e, \\ u &= cx^2 + ex + f, \\ v &= az^2 + dz + f \end{aligned}$$

und erhalten durch Ausrechnung von (20)

$$(21) \qquad (av - cu)^2 - rs(av + cu) + as^2u + cr^2v = 0,$$

welcher Gleichung wir auch die beiden andern Formen geben können:

$$(22) \quad (av - cu)^2 - rs(av - cu) + as^2u + cr^2v - 2crsu = 0$$

und

$$(23) \quad (av - cu)^2 + rs(av - cu) + as^2u + cr^2v - 2arsv = 0.$$

Ein Ausdruck $A^2 + AB + C$ (dessen Bestandtheile A, B, C verschiedene Variabeln enthalten) kann aber nur dann quadratisch sein, wenn $AB + C = 0$ (die beiden vorigen Fälle) oder $B^2 = 4C$ ist. Demnach haben wir wegen (22) und (23) die beiden Gleichungen zu befriedigen:

$$(24) \qquad r^2s^2 = 4as^2u + 4cr^2v - 8crsu$$

und

$$(25) \qquad r^2s^2 = 4as^2u + 4cr^2v - 8arsv,$$

aus deren Zusammenstellung sich als nothwendige, doch nicht hinreichende Bedingung ergiebt

$$(26) \qquad crsu = arsv.$$

Diese Gleichung ist befriedigt, wenn $r = 0$ oder $s = 0$ ist; aus (24) und (25) folgt, dass dann auch die andere der beiden Grössen verschwinden muss (die übrigen Combinationen erweisen sich leicht als unzulässig); hieraus würde wieder wie oben $b = 0$, $d = 0$, $e = 0$

folgen. Andernfalls muss $cu = av$ sein, was unmögliche Bedingungen ergiebt.

Das Gesammtresultat lautet also: *eine Function $y = \varphi_1(x)$, die durch eine Gleichung zweiten Grades definirt ist, giebt nur dann und immer dann iterirt wieder eine Function zweiten Grades, wenn sie durch eine rationale Functionalsubstitution aus einer linearen Function hergeleitet ist.*

9. Noch bleibt der Fall zu betrachten übrig, dass die Iterirungen einer n-deutigen Periodicitätsfunction zwar mehr als n-deutig, aber so beschaffen sind, dass ein Theil ihrer Werthe mit solchen früherer Iterirungen zusammenfällt und in Folge dessen immer höchstens n *neue* Werthe auftreten. Die erste Iterirung muss alsdann wieder x als einen Werth haben, mithin muss nach Früherem die definirende Gleichung von $y = f_1(x)$ in y und x symmetrisch sein. Es ist mir noch nicht gelungen, diesen Fall zu erledigen, und ich beschränke mich darauf, durch ein Beispiel die vorkommenden Verhältnisse zu erläutern.

Sei

$$\sqrt{y} + \sqrt{x} = n$$

oder

$$(y - x)^2 - 2n^2(y + x) + n^4 = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich durch die Functionalsubstitution

$$\varphi_1(x) = \sqrt{x} - \frac{n}{2}$$

aus

$$y + x = 0,$$

aber andrerseits auch in Folge der Doppeldeutigkeit der Wurzeln aus $y = x + n$ durch die Substitution $\varphi_1(x) = \sqrt{x}$ herleiten. Wir haben

$$y = f_1(x) = (n \pm \sqrt{x})^2,$$

während wir bei der Iterirung den Werth x doppelt und ausserdem

$$f_2(x) = (2n \pm \sqrt{x})^2$$

finden. Für $f_3(x)$ erhalten wir wieder $(n \pm \sqrt{x})^2$, $(2n \pm \sqrt{x})^2$ und ausserdem $(3n \pm \sqrt{x})^2$ u. s. w.

Dieser irrationalen Periodicitätsgleichung entspricht wirklich die *eindeutige* Function

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6},$$

bei welcher

$$y = (2\pi \pm \sqrt{x})^2$$

zu setzen ist. In der That ist

$$\cos y = \cos(2\pi \pm \sqrt{x}) = \cos(\pm\sqrt{x}) = \cos\sqrt{x}.$$

In anderen Fällen gestalten sich die Verhältnisse freilich bedeutend anders; doch erscheint es nicht wahrscheinlich, dass sich periodische Functionen ergeben, welche nicht durch die Functionalsubstitution aus additiv oder multiplicatorisch periodischen hergeleitet werden können.

§ 8.

Die mehrfach periodischen Functionen.

1. Functionen mit mehreren (vorläufig 2) nicht auf einander zurückführbaren Perioden $\varphi_1(x)$ und $\chi_1(x)$ wollen wir zunächst nur für den Fall untersuchen, dass die letzteren *vertauschbar* sind, d. h. dass wir haben

$$\varphi_1 \chi_1(x) = \chi_1 \varphi_1(x);$$

auch beschränken wir uns im Folgenden auf rationale Periodicitätsgleichungen.

2. Die eine der Perioden können wir immer in eine additive oder multiplicatorische transformiren; die directe Rechnung ergiebt dann ohne Schwierigkeit, dass die andere jedesmal von derselben Art sein muss; es kommen daher für uns nur Functionen mit mehrfacher additiver oder mehrfacher multiplicatorischer Periode in Betracht.

Was den ersten Fall anlangt, so ist bekannt, dass die Zahl der additiven Perioden (bei endlich vieldeutigen Functionen) 2 nicht überschreiten kann und dass zwischen diesen beiden Perioden kein reelles Verhältniss bestehen darf.

3. *Jede eindeutige* (oder endlich vieldeutige) *Function mit multiplicatorischer Periode lässt sich in eine eindeutige* (resp. ebensovieldeutige) *Function mit doppelter additiver Periode mittelst einer transcendenten Substitution verwandeln.* Denn setzt man in der Function

$$F(px) = F(x)$$

$$p = e^{\frac{2\pi i m}{n}}, \quad x = e^{\frac{2\pi i w}{n}},$$

so hat $F\left(e^{\frac{2\pi i w}{n}}\right)$ die doppelte Periode m und n. Ist ferner

$$F_1(w + m) = F_1(w)$$

und

$$F_1(w + n) = F_1(w),$$

so substituiren wir

$$w = \frac{n}{2\pi i} \, lx$$

und gelangen hierdurch zu einer multiplicatorisch periodischen Function. Die unendliche Vieldeutigkeit von lx macht die Function nicht vieldeutig, da die verschiedenen Werthe von w die Form haben $w = \frac{n}{2\pi i} \, lx + kn$ und durch die Zufügung von kn zu w die Function $F_1(w)$ nicht geändert wird. — Hieraus folgt auch leicht, dass mod. p von der Einheit verschieden sein muss.

4. Machte man bei einer Function mit doppelter multiplicatorischer Periode die eben erwähnte Substitution, so würde man eine Function mit dreifacher additiver Periode erhalten; endlich vieldeutige Functionen mit mehrfacher multiplicatorischer Periode sind also nicht möglich, wenn wir selbstverständlich den Fall ausschliessen, dass die Perioden ganze Potenzen derselben Grösse sind.

Wir haben somit nur 3 Arten von periodischen transcendenten Functionen gefunden:

1. *die Functionen mit einfacher additiver Periode,*
2. *diejenigen mit einfacher multiplicatorischer Periode,*
3. *diejenigen mit doppelter additiver Periode.*

Die letzteren braucht man jedoch nicht besonders zu behandeln, weil sie sich aus den vorhergehenden herleiten lassen. Diese Reduction der elliptischen Functionen auf die Modularfunctionen ist von grossem Vortheil, da die letzteren einfacher sind und hierdurch ihre analytische Natur deutlicher hervortreten lassen.

5. Bei mehrfachen Perioden, für welche die Gleichung

$$\varphi_1 \chi_1(x) = \chi_1 \varphi_1(x)$$

nicht gilt, hört die Analogie mit den Abel'schen Gleichungen auf; denn Abel hat die algebraische Lösbarkeit solcher Gleichungen, deren Wurzeln durch die Iterirungen von 2 verschiedenen Functionen aus einer einzigen hergeleitet werden können, nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass diese beiden Functionen vertauschbar sind. Ueberdies ist es wahrscheinlich, dass mehrere nicht vertauschbare Perioden (einzelne Specialfälle ausgenommen) bei Functionen *mit getrennt liegenden Discontinuitätspunkten* nicht möglich sind; vorläufig gelang es mir nur nachzuweisen, dass Functionen mit zwei nicht vertauschbaren Perioden im Allgemeinen *unendlich viele wesentliche Discontinuitätspunkte* besitzen müssen. Manche Combinationen von Perioden sind bei eindeutigen Functionen überhaupt nicht zulässig, wie aus der Untersuchung des Specialfalles, dass sich beide Periodicitätsgleichungen durch Transformation *gleichzeitig* von einem Gliede mit xy befreien lassen, hervorgehen wird.

a) Die eine Periodicitätsgleichung lasse sich auf

$$\varphi_1(x) = x + 1 \tag{1}$$

reduciren, während die andere hierbei in

$$\chi_1(x) = ax + b \tag{2}$$

übergeht. Dann ist

$$\chi_n(x) = a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1), \tag{3}$$

$$\chi_{-n}(x) = \frac{x}{a^n} - b\left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{a}\right), \tag{4}$$

also

(5) $$\varphi_1 \chi_n(x) = a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) + 1,$$

(6) $$\chi_n \varphi_1(x) = a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) + a^n,$$

und somit

(7) $$F[a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) + 1] \\ = F[a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) + a^n],$$

oder wenn x für $a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) + 1$ gesetzt wird,

$$F(x + a^n - 1) = F(x)$$

oder wegen (1)

(8) $$F(x + a^n) = F(x),$$

ein Resultat, das auch für negative n gilt, wie aus (4) folgt. Ist mod. a von der Einheit verschieden, so kann a^n durch wachsende positive oder negative n beliebig klein gemacht werden; $F(x)$ müsste also eine unendlich kleine additive Periode haben, was bei endlich vieldeutigen Functionen nicht möglich ist. Wenn mod. $a = 1$ ist, so kann zunächst a genau eine Einheitswurzel sein; dann ist $\chi_1(x) = ax + b$ eine Periode, die durch Iterirung zu x zurückführt, wie aus Früherem sowohl als auch aus (3) erhellt. Ist nämlich a eine primitive n^{te} Einheitswurzel, so haben wir

$$a^n = 1,$$

$$a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1 = 0,$$

also

$$\chi_n(x) = x.$$

Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so lässt sich leicht nachweisen, dass unendlich viele unendlich wenig von einander verschiedene additive Perioden vorhanden sind, indem a^n durch geeignete Wahl von n jeder Grösse vom Modul 1 beliebig nahe gebracht werden kann. — Für $a = 1$ ist auch die zweite Periode additiv.

b) Sei die eine Periodicitätsgleichung auf

(9) $$\varphi_1(x) = px$$

reducirbar, während die andere wieder

(10) $$\chi_1(x) = ax + b$$

lauten möge (b von Null, mod. p von 1 verschieden), so ist

(11) $$\varphi_1 \chi_1(x) = apx + bp,$$

(12) $$\chi_1 \varphi_1(x) = apx + b,$$

woraus wie oben folgt

(13) $$F[x + b(p - 1)] = F(x),$$

wodurch dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt ist.

6. Ist

$$\varphi_1(x) = x + 1, \tag{14}$$

$$\chi_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{15}$$

so muss wegen (14) die Function für $x = \infty$ wesentlich discontinuirlich werden; aus (15) folgt dann, dass dies auch für $x = \frac{a}{c}$, also wegen beider Gleichungen in unendlich vielen Punkten geschehen muss. Ein Ausnahmefall ist nicht möglich, wenn c von Null verschieden ist. Tritt an Stelle von (14)

$$\varphi_1(x) = px, \tag{16}$$

so ist eine analoge Betrachtung möglich; auch hier müssen unendlich viele wesentliche Discontinuitätspunkte vorhanden sein, wenn nicht

$$\chi_1(x) = qx$$

oder

$$\chi_1(x) = \frac{q}{x}$$

ist; im letzteren Fall ist

$$\chi_2(x) = x.$$

Frankfurt a/M., im Februar 1881.

Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begränzt sind.

Von

Felix Klein in Leipzig.

In dem Werke über *theoretische Physik* der Herren Thomson und Tait*) findet sich ein bemerkenswerther Abschnitt über Kugelfunctionen, in welchem eine Reihe neuer Ideen in nur zu knapper Form entwickelt sind. Es seien r, ϑ, φ die gewöhnlichen Polarcoordinaten im Raume. Dann kommen die betreffenden Angaben im Wesentlichen darauf hinaus, dass man für jeden Körper, der von irgend welchen Flächen $r =$ Const., $\vartheta =$ Const., $\varphi =$ Const. begränzt ist, die fundamentale Potentialaufgabe**) *durch richtige Verallgemeinerung der gewöhnlichen Kugelfunctionen erledigen könne.* Dabei fehlt allerdings jeder Ansatz zur Erbringung der nothwendigen Convergenzbeweise; auch ist die Darstellung in einer Weise skizzenhaft, dass es fast unmöglich scheint, den Sinn mancher einzelnen Behauptung zu verstehen. Trotzdem wird jeder Mathematiker in den genannten Ent-

---

*) Theoretische Physik, deutsch von Helmholtz und Wertheim, 1. Theil, Braunschweig 1871 (cf. pag. 156—178 daselbst). — Das Original erschien, wie man weiss, unter dem Titel „Natural Philosophy", 1867, doch scheint der Abschnitt über Kugelfunctionen zu denjenigen Theilen des Werkes zu gehören, die, einer Bemerkung der Vorrede zufolge, bereits früher gedruckt worden sind. Wenigstens citirt Herr Thomson den betreffenden „Appendix B" schon im Jahre 1862; vergl. eine Arbeit in den Philosophical Transactions vom Jahre 1863: „*Dynamical Problems regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid.*" — In einer neuen Auflage der „Natural Philosophy" (Cambridge 1879) findet sich derselbe Abschnitt wesentlich umgearbeitet und erweitert; doch scheint auch diese Darstellung zum unmittelbaren Verständnisse noch nicht ausführlich genug.

**) Als solche sei das Problem bezeichnet: aus den Werthen des Potentials in den Punkten einer Oberfläche den Verlauf desselben im Inneren des von der Oberfläche begränzten Körpers zu bestimmen.

wickelungen einen wesentlichen Fortschritt auf dem hier in Rede stehenden Gebiete erkennen.

Wiederholte Versuche, mir denselben verständlich zu machen, liessen die Frage in mir entstehen, ob nicht das Analoge durch Verallgemeinerung der Lamé'schen Functionen für einen Körper zu leisten sei, der von irgend welchen confocalen Flächen zweiten Grades begränzt ist. Man würde dann ein allgemeineres Problem erledigt haben, welches das speciellere der Kugelfunctionen als Gränzfall in sich schliesst, und, da es die verschiedenen sonst zu unterscheidenden Möglichkeiten gleichförmig umfasst, einen leichteren und vollständigeren Ueberblick über letztere ermöglicht.

Unter vorläufiger Beiseitelassung aller Convergenzbetrachtungen ist es mir nun in der That gelungen, dies allgemeinere Problem zu erledigen. Der Unterschied ist nur der, dass man fortwährend so zu sagen mit *impliciten* Formeln arbeitet. Wo man im Falle der Kugelfunctionen a priori bekannte Reihenentwickelungen unmittelbar hinschreibt, hat man es hier mit Lösungen der Lamé'schen Differentialgleichung zu thun, für welche die in der Differentialgleichung auftretenden Constanten selbst erst, allgemein zu reden, aus transcendenten Gleichungen berechnet werden müssen*). Aber dies hindert nicht, dass diese Constanten und die zugehörigen Functionen *durchaus eindeutig* bestimmt sind, und hierauf allein kommt es bei der allgemeinen Entwickelung an.

Ich werde im Folgenden den etwas weitschichtigen Stoff so ordnen, dass ich vor allen Dingen solche Körper betrachte, die sechs verschiedene Begränzungsflächen besitzen. Unter ihnen mögen diejenigen voranstehen, welche sich durch keine Hauptebene (Coordinatenebene) des confocalen Flächensystems hindurchziehen (§ 1.—5.); die Betrachtung complicirterer Fälle macht hernach keine besonderen Schwierigkeiten mehr (§ 6.). Nun erst gehe ich zur Behandlung von Körpern über, die weniger als sechs Begränzungsflächen haben. Doch beschränke ich mich dabei, um ermüdende Aufzählungen zu vermeiden, im Wesentlichen auf das Vollellipsoid, und zeige (§ 7.), dass Lamé's ursprüngliche Behandlung dieses Falles genau diejenige ist, welche aus meinem allgemeinen Ansatze hervorgeht. Dabei wird das Theorem von principieller Wichtigkeit, welches ich neuerdings in diesen Annalen in einer Note über Lamé'sche Functionen**) publicirt habe.

---

*) Etwas Aehnliches kennt man von den Reihenentwickelungen, die nach Bessel'schen Functionen von beliebigem Index fortschreiten. — Man vergleiche auch verschiedene Aufsätze von Liouville und Sturm in den ersten Bänden des Liouville'schen Journals; dieselben haben mit den im Texte zu entwickelnden Anschauungen viele Berührungspunkte.

**) Annalen XVIII, p. 237—246.

§ 1.

Die elliptischen Coordinaten im Raume und die Lamé'sche Differentialgleichung.

Zur Definition der elliptischen Coordinaten werde ich setzen*):

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - \varkappa^2} + \frac{z^2}{\lambda - 1} = 1, \tag{1}$$

wo der „Modul" $\varkappa^2$ als reelle positive Grösse < 1 genommen werden soll. Dann sind, wie man weiss, die drei Wurzeln λ bei reellen x, y, z reell; ich will sie μ, ν, ϱ nennen, wo μ den *zweischaligen Hyperboloiden*, ν den *Regelflächen* (den einschaligen Hyperboloiden), ϱ den *Ellipsoiden* des confocalen Systems entsprechen mag. Man hat in bekannter Weise:

$$\begin{cases} 0 \leqq \mu \leqq \varkappa^2, \\ \varkappa^2 \leqq \nu \leqq 1, \\ 1 \leqq \varrho \leqq +\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Es sei nun t das elliptische Integral:

$$t = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda \cdot \overline{\lambda - \varkappa^2} \cdot \overline{\lambda - 1}}}; \tag{3}$$

für $\lambda = \mu, \nu, \varrho$ verwandele sich t in u, v, w. Dann schreibt sich, wie man weiss, die Differentialgleichung des Potentials in folgender Gestalt:

$$\frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}}{\overline{\mu - \nu} \cdot \overline{\mu - \varrho}} + \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}}{\overline{\nu - \varrho} \cdot \overline{\nu - \mu}} + \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2}}{\overline{\varrho - \mu} \cdot \overline{\varrho - \nu}} = 0, \tag{4}$$

und man genügt ihr, nach Lamé, indem man Φ gleich dem Producte dreier Functionen setzt, deren einzelne nur von einem Argumente abhängt:

$$\Phi = E_1(u) \cdot E_2(v) \cdot E_3(w) = E_1(\mu) \cdot E_2(\nu) \cdot E_3(\varrho), \tag{5}$$

und die verschiedenen E derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung unterwirft:

$$\frac{d^2 E(t)}{dt^2} = (A\lambda + B) \cdot E(t). \tag{6}$$

Dass in dieser „*Lamé'schen Differentialgleichung*" A und B zunächst beliebige reelle Constante bedeuten können, dass ferner E_1, E_2, E_3 irgend drei particuläre Lösungen der Differentialgleichung bedeuten dürfen, ist a priori deutlich, und es brauchte hier gar nicht hervor-

*) Diese Definition ist von derjenigen einigermassen verschieden, die ich im Anschlusse an Heine's Kugelfunctionen in meiner vorigen Note über Lamé'sche Functionen gebraucht habe.

gehoben zu werden, wenn nicht durch Lamé's eigene Intentionen und die Untersuchungen Späterer eine mehr particuläre Auffassung sich Bahn gebrochen hätte. Indem Lamé $E(\lambda)$ als ganze rationale Function von $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\lambda-\varkappa^2}$, $\sqrt{\lambda-1}$ bestimmen wollte, verwandelte sich für ihn A in $n(n+1)$ und B unterlag einer bestimmten, numerischen, algebraischen Gleichung; die Particularlösungen E_1, E_2, E_3 wurden identisch. Es hat dann später Hermite in seinen vielgenannten Untersuchungen über die Integration der Lamé'schen Differentialgleichung an der Annahme $A = n(n+1)$ festgehalten und nur B beliebig genommen; das Gleiche gilt von den zahlreichen Arbeiten Anderer, die sich an die seinigen anschliessen.

§ 2.

Allgemeiner Ansatz für einen Körper, der von sechs confocalen Flächen begränzt ist und die Coordinatenebenen nicht durchdringt.

Es sei nun ein Körper gegeben, der von sechs confocalen Flächen zweiten Grades begränzt ist: den beiden zweischaligen Hyperboloiden $\mu = a_1$ und $\mu = a_2 (a_1 < a_2)$, den beiden Regelflächen $\nu = b_1$ und $\nu = b_2 (b_1 < b_2)$, und den beiden Ellipsoiden $\varrho = c_1$ und $\varrho = c_2 (c_1 < c_2)$. Indem wir hinzufügen, dass sich der Körper durch keine der drei Hauptebenen des confocalen Systems hindurch erstrecken soll, ist er im Wesentlichen völlig bestimmt; denn wir wollen immer an der Voraussetzung festhalten, dass er durchaus im Endlichen gelegen sei. — Auf seinen sechs Begränzungsflächen seien jetzt, nach einem willkürlichen Gesetze, Potentialwerthe gegeben; es handelt sich darum, die zugehörigen Potentialwerthe für das Innere des Körpers zu finden.

Bekanntlich decomponirt man eine solche Aufgabe zweckmässigerweise in sechs Einzelprobleme. Man lässt die Potentialwerthe jeweils nur auf einer der begränzenden Flächen *beliebig* gegeben, auf den anderen gleichförmig Null sein und sucht die solcher Annahme entsprechenden Potentialwerthe des Inneren; hernach addirt man die sechs so gefundenen Particularpotentiale.

Die Vermuthung muss nun offenbar die sein, dass man jedes solche Particularpotential durch eine unendliche Reihe passend ausgewählter Lamé'scher Producte darstellen könne:

(7) $$\psi(\mu, \nu, \varrho) = \Sigma C \cdot E_1(\mu) \cdot E_2(\nu) \cdot E_3(\varrho).$$

Ich verzichte fürs Erste, wie schon in der Einleitung bemerkt, darauf, die Zulässigkeit einer solchen Reihenentwickelung im Sinne der modernen Anforderungen *strenge* zu beweisen. Vielmehr wünsche ich nur zu zeigen, dass man in der That eine und nur eine solche Reihenentwickelung aufstellen kann, die den übrigens bekannten Reihenentwickelungen willkürlicher Functionen *analog* ist. Ich gründe diese Analogie auf das Vorhandensein gewisser Haupteigenschaften, die bei der gewöhnlichen Fourier'schen Reihe bereits genügend hervortreten.

Es sei in dem Intervalle von 0 bis π

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots.$$

Dann fasse ich das wesentliche Verhalten der rechter Hand auftretenden Functionen in den folgenden Sätzen zusammen:

1. sie sind im Intervalle von $x = 0$ bis $x = \pi$ durchaus endlich und werden an den Gränzen sämmtlich gleich Null;

2. zwischen diesen Gränzen verschwindet die erste Function keinmal, die zweite einmal, u. s. f., so dass jeder Zahl von Verschwindungsstellen eine und nur eine Function entspricht;

3. für irgend zwei verschiedene Functionen hat man die sogenannte Integraleigenschaft:

$$\int_0^\pi \sin px \cdot \sin qx \cdot dx = 0; -$$

und verlange nun, dass unsere Reihenentwickelung dieselben Eigenschaften mutatis mutandis aufweise.

Ich will dabei, um die Ideen zu fixiren, hier und im Folgenden annehmen, die sechste Begränzungsfläche unseres Körpers sei diejenige, welche dem Ellipsoid $\varrho = c_2$ angehört. Dann soll also $\psi(\mu, \nu, \varrho)$ für $\mu = a_1$ und $\mu = a_2$, sodann für $\nu = b_1$ und $\nu = b_2$, sowie für $\varrho = c_1$ verschwinden; es soll endlich $\psi(\mu, \nu, c_2)$, während μ von a_1 bis a_2 und ν von b_1 bis b_2 läuft, eine in diesem Bereiche willkürlich gegebene Function repräsentiren. Zu dem Zwecke müssen wir der Reihenentwickelung (7), der entwickelten Analogie zufolge, die folgenden Bedingungen auferlegen:

1. *Man hat die Constanten A, B der definirenden Lamé'schen Differentialgleichungen, man hat ferner die zugehörigen Particularlösungen E_1, E_2, E_3 in der Weise auszuwählen, dass folgende Gleichungen statthaben:*

$$E_1(a_1) = 0, \quad E_1(a_2) = 0; \quad E_2(b_1) = 0, \quad E_2(b_2) = 0; \quad E_3(c_1) = 0,$$

während gleichzeitig die E innerhalb ihrer Intervalle durchaus endlich bleiben.

2. *Unter m, n irgend zwei ganze Zahlen verstanden (die auch Null sein können) muss immer ein und nur ein Product*

$$E_1(\mu) \cdot E_2(\nu) \cdot E_3(\varrho)$$

existiren, welches m-mal zwischen a_1 und a_2 und n-mal zwischen b_1 und b_2 verschwindet. — Ich werde ein solches Product in Zukunft als

$$(E_1 \cdot E_2 \cdot E_3)_{m,n}$$

bezeichnen.

3. *Für die so definirten unendlich vielen Producte soll die Integraleigenschaft bestehen:*

$$(8) \qquad \int (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3)_{m,n} \cdot (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3)_{m',n'} \, d\omega = 0,$$

wo $d\omega$ *das Oberflächenelement des Ellipsoids* $\varrho = c_2$ *bedeuten soll und die Integration über den Bereich* $a_1 \leq \mu \leq a_2$ *und* $b_1 \leq \nu \leq b_2$ *zu erstrecken ist.*

Mein Nachweis wird sich darauf beschränken dürfen, die Verträglichkeit und die Vollständigkeit dieses Systems von Bedingungen hervortreten zu lassen. Dies soll in den folgenden Paragraphen geleistet werden.

§ 3.

Reduction der Bedingungen.

Ein Theil der somit aufgestellten Bedingungen ist eine Folge der übrigen oder lässt sich auf unmittelbare Weise erledigen.

In dieser Richtung behaupte ich zunächst, *dass zufolge der Definition der Lamé'schen Functionen die Integraleigenschaft* (3) *eine Folge von* (1) *ist.*

Zum Beweise sei der Kürze halber

$$[E_1(\mu) \cdot E_2(\nu) \cdot E_3(\varrho)]_{m,n} = \varphi_{m,n}$$

gesetzt. Dann folgt für zwei verschiedene φ, da beide der Differentialgleichung des Potentials genügen, aus dem Green'schen Satze sofort, dass das über die Oberfläche unseres Körpers ausgedehnte Doppelintegral:

$$\int \left\{ \varphi_{m,n} \cdot \frac{\partial \varphi_{m',n'}}{\partial n} - \varphi_{m',n'} \cdot \frac{\partial \varphi_{m,n}}{\partial n} \right\} d\omega$$

gleich Null ist; $d\omega$ ist dabei das Flächenelement der verschiedenen Begränzungsflächen, $\frac{\partial}{\partial n}$ bedeutet eine Differentiation nach der jeweiligen, in bestimmtem Sinne genommenen, Normale. Fünf unserer Begränzungsflächen liefern aber überhaupt keinen Beitrag zu diesem Integral, da für sie $\varphi_{m,n}$ und $\varphi_{m',n'}$ beide verschwinden. Bei der sechsten Fläche, dem Ellipsoid $\varrho = c_2$, fällt die Normale der Richtung nach mit dem Durchschnitte der Flächen $\mu =$ Const., $\nu =$ Const. zusammen, $\frac{\partial}{\partial n}$ wird mit $\frac{\partial}{\partial \varrho}$ proportional*). Daher ist bis auf einen nicht in Betracht kommenden Factor

*) Es ist

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \varrho} \cdot \sqrt{\frac{\varrho \cdot \varrho - \varkappa^2 \cdot \varrho - 1}{\varrho - \mu \cdot \varrho - \nu}}.$$

$$\frac{\partial \varphi_{m,n}}{\partial n} = [E_1(\mu) \cdot E_2(\nu)]_{m,n} \cdot \frac{\partial E_3(\varrho)_{m,n}}{\partial \varrho}$$

und es folgt:

$$\left\{(E_3)_{m,n}\left(\frac{\partial E_3}{\partial \varrho}\right)_{m',n'} - (E_3)_{m',n'}\left(\frac{\partial E_3}{\partial \varrho}\right)_{m,n}\right\} \cdot \int (E_1 \cdot E_2)_{m,n}(E_1 \cdot E_2)_{m',n'}\, d\omega = 0.$$

Hier kann der einzige von ϱ abhängende Factor:

$$(E_3)_{m,n}\left(\frac{\partial E_3}{\partial \varrho}\right)_{m',n'} - (E_3)_{m',n'}\left(\frac{\partial E_3}{\partial \varrho}\right)_{m,n}$$

nicht identisch Null sein. Denn sonst würde durch Integration folgen:

$$(E_3)_{m,n} = \text{Const.}\ (E_3)_{m',n'},$$

während doch die beiden E_3 *verschiedenen* Lamé'schen Differentialgleichungen genügen sollen. Somit folgt das Verschwinden des anderen Factors und also das Verschwinden von (8), was zu beweisen war.

Ich sage ferner, *dass man den Gleichungen*

$$E_1(a_1) = 0, \quad E_2(b_1) = 0, \quad E_3(c_1) = 0,$$

die unter (1) *mit aufgeführt sind, durch blosse Wahl der Particularlösungen* E_1, E_2, E_3 *der Lamé'schen Differentialgleichung genügen kann.*

Im Interesse des Folgenden will ich dies, so einfach es ist, geometrisch erläutern. Ich will λ (also ev. μ, ν oder ϱ) als Abscisse deuten und somit von einer *Curve* (E, λ) sprechen. E genügt in Bezug auf λ einer Differentialgleichung zweiter Ordnung; man darf also zur Individualisirung der Curve (E, λ) einen Punkt derselben und die Tangente in diesem Punkte beliebig annehmen. Unsere Forderung ist hiernach gewiss erfüllbar; denn sie verlangt nur, drei Curven (E_1, λ), (E_2, λ), (E_3, λ) so zu bestimmen, dass sie beziehungsweise durch die drei Punkte der Abscissenaxe $\lambda = a_1$, $\lambda = b_1$, $\lambda = c_1$ hindurchlaufen. Sie ist sogar auf unendlich viele Weisen zu erfüllen, indem man die Richtungen der Curven in diesen Punkten beliebig annehmen kann. Indess ist die sonach existirende Unbestimmtheit für unsere Zwecke gleichgültig. Denn eine Aenderung der Anfangsrichtung bedeutet ja nur, dass das betr. E mit einem constanten Factor multiplicirt wird, und ist also für unseren Ansatz, in welchem $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$ ohnehin mit einem beliebigen Factor verbunden ist, durchaus irrelevant. — Diesen Ueberlegungen entsprechend will ich fernerhin unter E_1, E_2, E_3 drei solche Particularlösungen verstehen, welche die Bedingungen

$$E_1(a_1) = 0, \quad E_2(b_1) = 0, \quad E_3(c_1) = 0$$

jedenfalls erfüllen.

Dass diese E_1, E_2, E_3 *in den für sie in Betracht kommenden Intervallen dann jedenfalls endlich sind,* wie wir unter (1) ebenfalls verlangten, folgt aus der Form der Lamé'schen Differentialgleichung auf Grund bekannter Convergenzbetrachtungen.

Es bleibt also nur noch den Gleichungen

$$E_1(a_2) = 0, \quad E_2(b_2) = 0,$$

es bleibt ferner der Forderung (2) zu genügen. Für Beides hat man noch die Constanten A, B der Lamé'schen Differentialgleichung zur vollen Verfügung. Sie aber reichen auch gerade aus, um Beides zu erzielen. Dies zu beweisen ist die Aufgabe der folgenden beiden Paragraphen. Ich betrachte zu dem Zwecke neben λ abwechselnd auch das Integral t als unabhängige Variable und stelle also neben die Curven (E, λ) die entsprechenden Curven (E, t).

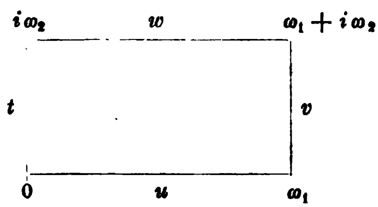
§ 4.

Der Verlauf der Curven (E, t).

Die geometrische Beziehung zwischen λ und dem Integrale t:

$$t = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda\cdot\overline{\lambda-\varkappa^2}\cdot\overline{\lambda-1}}}$$

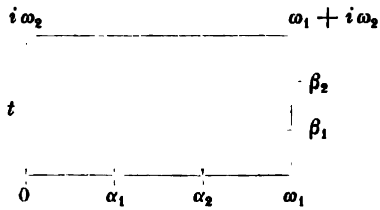
ist aus der Theorie der elliptischen Integrale genügend bekannt. Wir haben hier nur die reellen Werthe von λ von 0 bis $+\infty$ in's Auge zu fassen, die sich auf die drei Intervalle von 0 bis $\varkappa^2$, von $\varkappa^2$ bis 1 und von 1 bis $+\infty$ vertheilen. Läuft λ von 0 bis $\varkappa^2$, so bewegt sich t als ebenfalls *reelle* Grösse von 0 bis ω_1, wo $2\omega_1$ die reelle Periode des elliptischen Integrals bedeutet und der grösseren Bestimmtheit wegen positiv gedacht werden mag. Wächst λ über $\varkappa^2$ hinaus, so erhält t zunächst *rein imaginäre* Zuwächse, bis es, für $\lambda = 1$, in $\omega_1 + i\omega_2$ übergegangen ist, wo $2i\omega_2$ die imaginäre Periode des Integrals bedeuten soll und ω_2 ebenfalls eine positive Grösse vorstellen mag. Für $\lambda > 1$ entsprechen den reellen Incrementen von λ wieder reelle Aenderungen von t, und ertheilt man, was gestattet ist, dem $\frac{dt}{d\lambda}$ in diesem Intervalle das negative Vorzeichen, so geht t für $\lambda = +\infty$ in $i\omega_2$ über. Der ganze Weg, den t in seiner complexen Ebene zurücklegt, wenn λ von 0 bis $+\infty$ läuft, ist sonach durch folgende Figur gegeben.



Ich habe die Buchstaben u, v, w hinzugeschrieben, entsprechend den particulären Benennungen, welche t in den betr. Intervallen trägt (cf. § 1.).

Ueber diesem Linienzuge als Basis denke man sich nun die Curven (E, t) construirt, indem man E etwa als verticale Ordinate senkrecht gegen die complexe Ebene t aufträgt. Im Allgemeinen wird (E, t) von (E, λ) der Gestalt nach verschieden sein; auf das merkwürdige Verhalten an den Stellen $\lambda = 0,\ \varkappa^2,\ 1,\ \infty$ habe ich hernach noch besonders aufmerksam zu machen. Aber (E, t) wird dann und nur dann die Ebene t treffen, wenn (E, λ) die Abscissenaxe λ trifft, — und das ist fürs Erste die Hauptsache.

Es mögen jetzt $t = \alpha_1,\ \alpha_2;\ \beta_1,\ \beta_2$ die Werthe sein, welche $\lambda = a_1,\ a_2;\ b_1,\ b_2$ entsprechen; vergleiche die beigesetzte Figur:



Dann betrachten wir eine Curve (E_1, u), die von $u = \alpha_1$, eine andere, (E_1, v), die von $v = \beta_1$ ausläuft, und unser Nachweis hat sich dem vorigen Paragraphen zufolge darauf zu beschränken, zu zeigen: *dass es immer ein einziges Werthepaar A, B der Constanten in der Lamé'schen Differentialgleichung giebt, für welches (E_1, u) zwischen α_1 und α_2 und (E_2, v) zwischen β_1 und β_2 genau $(m + 1)$, beziehungsweise $(n + 1)$ Halboscillationen ausführt.*

Nun kann man aber über den Verlauf der Curven (E, t) aus der Differentialgleichung (6), die man folgendermassen schreiben mag:

$$\frac{\frac{d^2E}{dt^2}}{E} = A\lambda + B, \tag{9}$$

gewisse allgemeine Schlüsse ziehen. Wenn nämlich dt ein *reelles* Increment bedeutet, so sagt ein positiver Werth der linken Seite in (9), dass die Curve (E, t) der Ebene t die *convexe* Seite zukehrt, dass die Curve (E, t), wie ich einen Augenblick sagen will, in Bezug auf die Ebene t *divergirt;* ein negativer Werth bedeutet *Convergenz* der Curve. Ist aber dt rein imaginär (wie im Intervalle v), so wird die Bedeutung, wie man sofort sieht, genau umgekehrt: dem positiven Werthe entspricht die Convergenz, dem negativen die Divergenz.

Hierzu nun nehme man den Satz: *dass eine stark convergirende Curve nothwendig bereits im kleinen Intervalle oscillirt,* sowie den ferneren, *dass $A\lambda + B$ höchstens einmal* (wenn nämlich $-\frac{B}{A}$ positiv ist) *zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = +\infty$ das Zeichen wechselt.* So scheint es von vorneherein möglich, für (E_1, u) und (E_2, v) das oben Verlangte zu erzielen. Man wird $A\lambda + B$ für $\lambda = a_1$ jedenfalls negativ, für $\lambda = b_2$ jedenfalls positiv nehmen müssen, da (E_1, u) im Intervalle (α_1, α_2) und (E_2, v) im Intervalle (β_1, β_2) oscilliren soll. Ich sage aber geradezu, *dass die Zahl dieser Oscillationen ausreicht, um A und B eindeutig zu bestimmen.* Man ersieht dies am besten, wenn man wieder λ als Abscissenaxe einführt und $\eta = A\lambda + B$ als Gleichung einer geraden Linie deutet, wie dies nun geschehen mag.

§ 5.

Bestimmung der Constanten A, B.

Der Ausdruck $\eta = A\lambda + B$ soll jetzt, wie bereits gesagt, über der Abscissenaxe λ als gerade Linie gedeutet werden, und wir fragen zunächst, wie diese gerade Linie verlaufen muss, damit wenigstens die Curve (E_1, λ) in ihrem Intervalle die richtige Zahl von Halboscillationen ausführt, beziehungsweise, welche *Enveloppe* von den unendlich vielen Geraden, die dieser *einen* Bedingung genügen, umhüllt wird.

Sicher hat diese Enveloppe eine horizontale Tangente. Man setze in (9) $A = 0$. So kommt

$$\frac{\frac{d^2E}{dt^2}}{E} = B$$

und also, wegen $E_1(\alpha_1) = 0$:

$$E_1 = \sin\sqrt{-B}(u - \alpha_1).$$

Die somit gegebene Curve (E_1, u) vollführt nun von $u = \alpha_1$ bis $u = \alpha_2$ $(m + 1)$ Halboscillationen, wenn

$$\sqrt{-B}(\alpha_2 - \alpha_1) = (m + 1)\pi$$

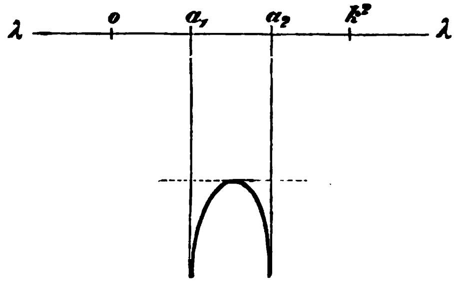
genommen wird. *Wir haben also als horizontale Tangente unserer Enveloppe:*

$$\eta = -\frac{(m + 1)^2\pi^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}.$$

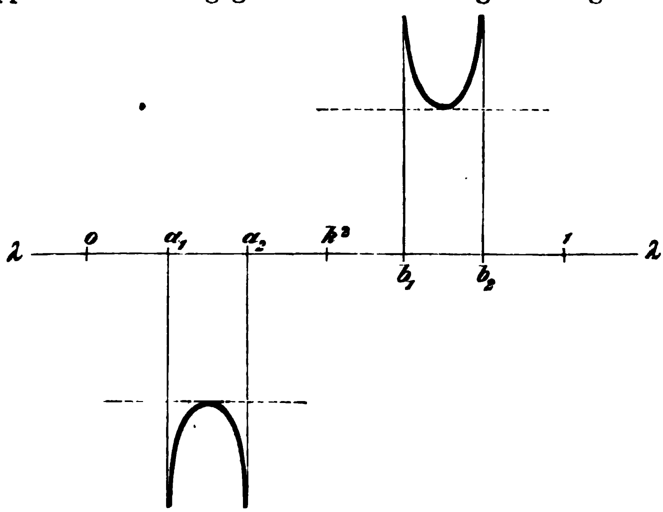
Man überzeugt sich ferner, *dass unsere Enveloppe kein Paar paralleler Tangenten, also auch keine Wendetangente besitzen kann.* Denn ist $\eta = A\lambda + B$, $\eta' = A\lambda + B'$, so ist (mit Rücksicht auf das Vorzeichen) η im ganzen Intervalle (a_1, a_2) entweder grösser oder kleiner als η', und die Curve E_1, welche η entspricht, oscillirt daher durchweg langsamer oder schneller als die Curve für η'.

Nunmehr nehme man A sehr gross positiv, B so, dass trotzdem $Aa_1 + B$ einen negativen und zwar einen sehr stark negativen Werth repräsentirt. Dann oscillirt die Curve (E_1, λ) in der Nähe von $\lambda = a_1$ sehr lebhaft, und schon in einem kleinen Intervalle hinter a_1 werden $(m + 1)$ Oscillationen eingetreten sein. Wir müssen also B so wählen, dass $A\lambda + B$ dicht hinter $\lambda = a_1$ bereits verschwindet, und von da ab positiv wird, dass also die betr. Curve (E_1, u) sehr bald hinter a_1 von der Convergenz zur Divergenz übergeht. — Analoge Betrachtungen gelten für solche Ausdrücke $A\lambda + B$, die für $\lambda = a_2$ einen bedeutenden negativen Werth aufweisen, während gleichzeitig (E_1, λ) nur $\left(\frac{m+1}{2}\right)$mal im Intervalle (a_1, a_2) oscilliren soll. Das heisst aber geometrisch: *dass unsere Enveloppe sich von der bereits bestimmten horizontalen Tangente nach abwärts zieht, und dass sie die beiden Linien $\lambda = a_1$ und $\lambda = a_2$ zu Asymptoten hat.*

Alles in Allem genommen hat also unsere Enveloppe schematisch folgende Gestalt:



Ganz analoge Betrachtungen stelle man nunmehr für das Intervall (b_1, b_2) an, in welchem $(n+1)$ Halboscillationen von (E_2, λ) eintreten sollen. Dann wird nur, mit Rücksicht auf das rein imaginäre dv, der Unterschied Platz greifen, dass die betr. Horizontaltangente eine positive Ordinate besitzt und die Enveloppe nach oben gekehrt ist. Die beiden Enveloppen haben also gegen einander die folgende Lage:



Nun waren unsere Behauptungen gegen Ende des vorigen Paragraphen auf den einen Satz zurückgeführt worden, dass die Zahlen *m*, *n*, welche das Verhalten der Curven E_1, E_2 in ihren bez. Intervallen charakterisiren, allein hinreichen, um A, B zu bestimmen. Dies heisst offenbar, *dass unsere zwei Enveloppen eine und nur eine gemeinsame Tangente besitzen sollen.* Und dass dies in der That zutrifft, dass also unser Beweis erledigt ist, zeigt ein Blick auf unsere Figur. Zwei Curven, die so gegen einander liegen, wie unsere beiden Enveloppen, haben nothwendig eine und nur eine gemeinsame Tangente. Man kann also in der That die Bedingungen des § 2. befriedigen und das dort formulirte Problem in dem auseinandergesetzten Sinne erledigen.

Man beachte noch dieses. Im Falle der Figur ist A nothwendig *positiv*. Setzen wir also $A = n(n+1)$ und nennen n den *Grad* der Lamé'schen Function, so ist der Grad ein reeller. Hätten wir dagegen das Intervall (b_1, b_2) (zwischen x^2 und 1) mit dem Intervalle (c_1, c_2) (zwischen 1 und $+\infty$) zu combiniren gehabt, uns also damit beschäftigt, eine willkürliche Function zu repräsentiren, die auf einem Stücke eines zweischaligen Hyperboloids gegeben ist, so wäre A nothwendig negativ, n also *imaginär* von der Form $-\frac{1}{2} + in'$ geworden. Dasselbe wäre eingetreten, wenn wir Oscillationen einerseits zwischen a_1, a_2, andererseits zwischen c_1, c_2 verlangt hätten und $\frac{(m+1)^2}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}$ kleiner als $\frac{(r+1)^2}{(\gamma_1-\gamma_2)^2}$ gewesen wäre (γ_1, γ_2 sollen die Integralwerthe bedeuten, die c_1, c_2 entsprechen, und $r+1$ die Zahl der Halboscillationen zwischen c_1, c_2 sein). Diese Bemerkungen schliessen als particuläre Fälle gewisse Sätze in sich, die man aus der Theorie der Kugelfunctionen kennt*).

§ 6.

Körper, begrenzt von beliebigen sechs confocalen Flächen.

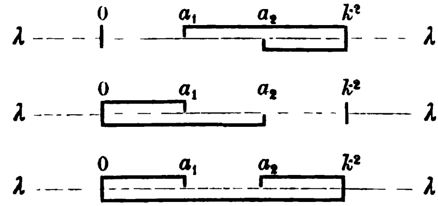
Es hat jetzt keinerlei Schwierigkeit, diese Untersuchungen auf den Fall eines beliebigen, endlichen, von sechs confocalen Flächen begrenzten Körpers auszudehnen, mag sich der Körper von einem Oktanten des Coordinatensystems in einen zweiten hinüberziehen oder mag er sogar so gedacht werden, dass er gewisse Theile des Raumes

---

*) Kugelfunctionen von imaginärem Grade werden bei Thomson und Tait in dem cit. Appendix erwähnt. Andererseits wurde bekanntlich Herr Mehler zur Betrachtung derselben geführt; er nennt dieselben Kegelfunctionen. Man vergl. die Aufsätze von Mehler und Neumann im XVIII. Bande dieser Annalen, p. 161 und p. 195 ff. — Ich will dabei hinzufügen, dass der erste auf Kegelfunctionen bezügliche Aufsatz des Herrn Mehler im 68. Bande des Borchardt'schen Journals erschien (1868) und von 1867 datirt ist.

mehrfach ausfüllt*). Man wird einen solchen Körper in der Weise beschreiben, dass man nicht nur die Parameter a_1, a_2; b_1, b_2 und c_1, c_2 der begränzenden Flächen angiebt, sondern hinzufügt, wie *durch das Innere des Körpers hindurch* a_1 in a_2, b_1 in b_2, c_1 in c_2 übergeht. Die folgenden drei Figuren, welche sich nur auf das Intervall a_1, a_2 beziehen, werden genügen, um die unbegrenzt vielen hier denkbaren Möglichkeiten verständlich zu machen, und zugleich erläutern, wie man jeden Körper der gemeinten Art durch eine schematische Figur definiren kann:

1)
2)
3)



Die Modification, der unsere bisherigen Betrachtungen zu unterwerfen sind, ist durch diese Figuren von selbst gegeben. Es handelt sich im Wesentlichen darum, zu untersuchen, *wie die Constanten A, B der Lamé'schen Differentialgleichung beschaffen sein müssen, damit die Curve (E_1, λ) eine beliebig vorgegebene Zahl $(m+1)$ von Halboscillationen ausführt, wenn a_1 auf dem vorgeschriebenen Wege in a_2 übergeht.* Wir werden also zunächst untersuchen, wie sich allgemein die Curve (E_1, λ) verhält, wenn das zwischen a_1 und a_2 bewegliche λ an einer Grenze $\lambda = k^2$ oder $\lambda = 0$ anlangt und dann seinen Bewegungssinn umkehrt. Sodann werden wir fragen, wie nunmehr die Enveloppe aller derjenigen Linien $\eta = A\lambda + B$ beschaffen sein wird, für welche (E_1, λ) im gegebenen Intervall die gewünschte Zahl von Nullstellen aufweist.

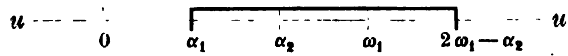
Was den ersten Punkt betrifft, so beachte man vor Allem, dass das Integral

$$t = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda \cdot \overline{\lambda - k^2} \cdot \overline{\lambda - 1}}}$$

bei der genannten Umkehr von λ ungehindert weiter läuft. Ich will des bestimmteren Ausdrucks wegen den Fall der Figur 1) zu Grunde legen, bei welchem die Umkehr in $\lambda = k^2$ erfolgt. Wenn dann t von 0 auslaufend bei $\lambda = a_1$, a_2, k^2, wie wir oben annahmen, die Werthe α_1, α_2, ω_1 aufweist, so erreicht es, während λ von k^2 zu a_2 zurückkehrt, den Werth $2\omega_1 - \alpha_2$, wie nachstehende Figur erläutert:

---

*) Es hat keinen Zweck, diese Möglichkeit hier auszuschliessen, weil die Methode der Behandlung für sie dieselbe ist, wie im anderen Falle.



Hinsichtlich der Curve (E_1, u) ist also nur Dieses geändert, dass das Intervall, in welchem die $(m+1)$ Halboscillationen stattzufinden haben, über ω_1 hinausgreift: eine Aenderung, die für unsere Betrachtungen durchaus irrelevant ist. Hieraus folgt zumal, dass E_1 auch im neuen Intervalle durchaus endlich bleibt.

Wir übertragen jetzt (E_1, u) in (E_1, λ), indem wir bei jedem λ als Ordinate diejenigen E auftragen, welche den entsprechenden Werthen von u zugeordnet sind. Hierbei will insbesondere berücksichtigt sein, wie sich (E_1, λ) an der Stelle $\lambda = k^2$ verhält. Man hat allgemein:

$$\frac{dE}{du} = \frac{dE}{d\lambda}\cdot\sqrt{\lambda\cdot\overline{\lambda-k^2}\cdot\overline{\lambda-1}}.$$

Wenn also $\frac{dE}{du}$ an der betreffenden Stelle nicht verschwindet, so ist $\frac{dE}{d\lambda}$ nothwendig unendlich gross: *die Linie $\lambda = k^2$ wird von der Curve (E_1, λ) in einem bestimmten Punkte berührt; vom Berührungspunkte ab läuft die Curve, indem sie sich umbiegt, mit einem neuen Zweige rückwärts.* Wenn aber $\frac{dE}{du}$ gleich Null ist, so kommt durch fortgesetztes Differentiiren:

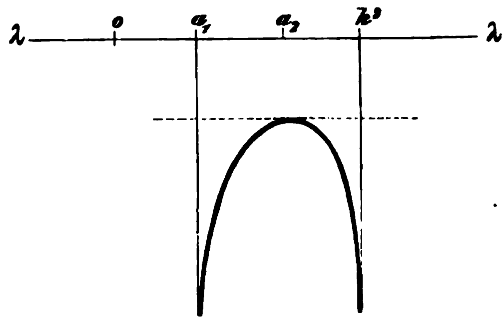
$$\left(\frac{dE}{d\lambda}\right)_{\lambda=k^2} = \frac{2\cdot\frac{d^2E}{du^2}}{k^2(k^2-1)}$$
$$= \frac{2E(Ak^2+B)}{k^2(k^2-1)}.$$

Ueberdies beachte man, dass die Curve (E_1, u) jetzt nothwendig in Bezug auf $u = \omega_1$ symmetrisch ist. Die Curve (E_1, λ) existirt jetzt also nur in *einem* Zuge, der von $\lambda = a_1$ bis $\lambda = k^2$ und dann rückwärts von $\lambda = k^2$ bis $\lambda = a_2$ durchlaufen wird. *Derselbe trifft die Linie $\lambda = k^2$ unter einem Winkel, der von den Werthen der A, B, E abhängt.* Es ist hier also die Möglichkeit gegeben, dass (E_1, λ) in das zweite Intervall $k^2 \leq \lambda \leq 1$ hinein reell forgesetzt wird.

Diese Ueberlegungen hindern in keiner Weise die Betrachtung der *Enveloppen* des § 5.; die Resultate gestalten sich nur etwas anders. Zuvörderst ist ersichtlich, dass die horizontale Tangente der Enveloppe die folgende geworden ist:

$$\eta = \frac{(m+1)^2\pi^2}{(2\omega_1-\alpha_1-\alpha_2)^2}.$$

Dann aber sage ich (indem ich immer am Falle der Figur 1) festhalte), *dass $\lambda = a_1$ allerdings Asymptote geblieben ist, dass die andere Asymptote aber in $\lambda = k^2$ übergegangen ist,* dass also die Enveloppe eine Gestalt hat, wie sie folgende Figur versinnlicht:



In der That, wenn $\eta = A\xi + B$ eine sehr *steile* Linie vorstellt, so darf derjenige Theil des uns vorgeschriebenen Intervalls, in welchem η negativ ist und in welchem daher die Oscillationen unserer Curve stattfinden, nur sehr wenig ausgedehnt sein. Dieser Ueberlegung lässt sich aber nur Rechnung tragen, indem wir die Asymptoten in der angegebenen Weise wählen. — Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass sich die Lage der Asymptoten und somit die Gesammtgestalt der Enveloppe in allen übrigen Fällen ähnlich bestimmt; im Falle der dritten Figur z. B. würden $\lambda = 0$ und $\lambda = k^2$ die beiden Asymptoten sein.

Man sieht aber sofort, dass die so gewonnenen Enveloppen noch immer dieselbe Schlussweise gestatten, wie sie in § 5. für den dort betrachteten speciellen Fall begründet wurde. *Zwei Enveloppen über verschiedenen Intervallen haben immer eine und nur eine gemeinsame Tangente, mag der Weg, der innerhalb des einzelnen Intervalls vom einen Endpunkte zum anderen Endpunkte führt, beschaffen sein, wie er will.*

Diese Schlussweise bildete aber den Kern unserer Ueberlegungen, und es bleiben die letzteren also auch für den allgemeinen uns jetzt vorliegenden Fall in Geltung, was zu beweisen war.

Vielleicht ist es zur vollen Deutlichkeit nützlich, noch eine Bemerkung über den Werth $E_3(c_2)$ hinzuzufügen. Es können c_1 und c_2 so verbunden sein, wie die Figur aufweist:

Man wird dann unter $E_3(c_2)$ denjenigen Werth verstehen, den E_3 annimmt, wenn λ von c_1 aus zunächst bis 1 abnimmt und dann erst bis c_2 wächst.

§ 7.

Das Vollellipsoid.

Wenn die vorhergehenden Untersuchungen für einen Körper verwerthet werden sollen, der weniger als sechs verschiedene Begrenzungsflächen hat, so bedürfen sie zunächst einer gewissen Verallgemeinerung. Unsere Functionen E_1, E_2, E_3 waren dadurch bestimmt, dass sie für gewisse feste Werthe von λ und ausserdem eine gewisse Anzahl von Malen zwischen diesen Werthen verschwinden sollten. Aber man sieht leicht, dass dieselbe Methode, vermöge deren wir die eindeutige Bestimmtheit der betr. E_1, E_2, E_3 erschlossen, auch noch in anderen Fällen anwendbar ist. Wir können sie z. B. Wort für Wort wiederholen, wenn E_1 zwischen a_1 und a_2 nach wie vor m-mal verschwinden soll, aber bei a_1 und a_2 irgend welchen anderen Bedingungen genügt, z. B. einen verschwindenden Differentialquotienten $\frac{dE_1}{du}$ besitzt.

Diese Bemerkung findet bei Körpern der nun zu betrachtenden Art im folgenden Sinne Verwerthung. Solche Körper besitzen nothwendig eine oder mehrere *Symmetrieebenen*. Nun ist es ein allgemeines Verfahren, dessen man sich bei der Potentialaufgabe für symmetrische Körper seit je bedient: dass man einen solchen Körper längs der Symmetrieebenen zerschneidet und dann für den einzelnen so entstehenden Theil gewisse Fundamentalaufgaben löst. Dieselben verlangen sämmtlich, ein Potential so zu bestimmen, dass es auf der ursprünglichen Oberfläche des bei der Zerschneidung entstandenen Theiles willkürlich vorgegebene Werthe annimmt; sie unterscheiden sich dadurch, dass auf der einzelnen begrenzenden Ebene entweder das Potential selbst oder aber sein nach der Normale genommener Differentialquotient verschwinden soll. Die Lösung der anfänglichen Potentialaufgabe erwächst, indem wir die verschiedenen bei diesen Einzelproblemen gefundenen Potentiale durch die Symmetrieebenen hindurch fortsetzen und übrigens zusammenaddiren.

Betrachten wir nun gleich den Fall des Vollellipsoids. Wir zerschneiden dasselbe vorab längs seiner drei Symmetrieebenen. Der so entstehende *Oktant* kann als ein Körper aufgefasst werden, der von sechs confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt ist. Nur die eine Begrenzungsebene nämlich vertritt eine einzelne Fläche zweiten Grades: das ist die Coordinatenebene YZ und die Fläche $\mu = 0$. Die beiden anderen repräsentiren Stücke von verschiedenen Flächen; die Ebene XY z. B. gehört zum Theile (soweit sie von der Focalellipse des Systems umschlossen wird) dem Ellipsoid $\varrho = 1$, zum Theil der Regelfläche $\nu = 1$ an. — Für diesen Oktanten haben wir nun, indem wir bei jeder der drei Coordinatenebenen die beiden in Betracht kommenden

Annahmen aus einander halten, im Ganzen acht Einzelprobleme zu unterscheiden.

Es wird genügen, nur die beiden extremen Fälle genauer zu besprechen: bei dem einen handelt es sich um Herstellung eines Potentials, das auf sämmtlichen drei Coordinatenebenen verschwindet, bei dem anderen soll der nach der Normale genommene Differentialquotient bei sämmtlichen drei Coordinatenebenen gleich Null sein.

Im ersten Falle haben wir nur einen besonderen Fall der in § 2.—5. behandelten Aufgabe: a_1 rückt in $\lambda = 0$, a_2 und b_1 fallen in $\lambda = k^2$, b_2 und c_1 in $\lambda = 1$ zusammen. Dies hat zur Folge, *dass E_1, E_2, E_3, von etwa zutretenden irrelevanten Factoren abgesehen, dieselbe Particularlösung der Lamé'schen Differentialgleichung vorstellen.* Denn E_1 und E_2 verschwinden nun beide für $\lambda = k^2$, E_2 und E_3 beide für $\lambda = 1$. Allerdings lässt sich E_1, da (E_1, λ) dem Früheren zufolge die Linie $\lambda = k^2$ berührt, nicht *reell* über diese Linie hinaus fortsetzen. Aber eine leichte Ueberlegung lässt erkennen, dass E_1 in diesem Intervalle rein imaginär ist, also nach Abtrennung des irrelevanten Factors i das gewollte E_2 liefert. — Alles Uebrige bleibt so wie im allgemeinen Falle. Die verschiedenen $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$, welche in der Reihenentwickelung des gesuchten Potentials auftreten, entsprechen nach wie vor den verschiedenen möglichen Zahlencombinationen m, n, die die Anzahl der Verschwindungsstellen in den Intervallen $0 - k^2$ und $k^2 - 1$ ergeben.

Im zweiten Falle haben wir die neue Form der Grenzbedingungen. Für $\mu = 0$, k^2 soll $\frac{dE_1}{du}$, für $\nu = k^2$, 1 soll $\frac{dE_2}{dv}$ und für $\varrho = 1$ $\frac{dE_3}{dw}$ verschwinden*). Hieraus ergiebt sich ohne Weiteres (wie schon im vorigen Paragraphen angedeutet wurde), *dass E_1, E_2, E_3 nur verschiedene Benennungen derselben Particularlösung E sind;* denn die Curve (E_1, λ) z. B. zieht sich jetzt vom Intervalle μ in das Intervall ν ungehindert hinüber. Uebrigens aber werden wir zur Lösung unserer Potentialaufgabe genau an den Bedingungen des § 2. festhalten. *Wir werden das gesuchte Potential aus einer unendlichen Zahl von Producten $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$ zusammensetzen, von denen das einzelne wieder durch die Anzahl m seiner Verschwindungsstellen im Intervalle μ und die Anzahl n seiner Verschwindungsstellen im Intervalle ν charakterisirt sein wird.* Dass für eine solche Reihenentwickelung auch wieder die Integraleigenschaft gilt, folgt ähnlich wie in § 3. aus dem Green'schen Satze.

In entsprechender Weise behandele man die übrigen sechs Fälle. *Dann ist man offenbar genau zu demjenigen Verfahren gekommen,*

*) Vergl. die Formel für $\frac{dE}{du}$ auf pag. 423 und die für $\frac{\partial}{\partial n}$ in der Note zu pag. 415.

welches Lamé für das dreiaxige Ellipsoid aufgestellt hat. Denn ich zeigte in meiner bereits in der Einleitung citirten Note, dass die gewöhnlichen Lamé'schen Functionen genau in der Weise ihre Nullstellen über die beiden Intervalle μ, ν vertheilt haben, wie wir es hier von den successiven Gliedern unserer Reihenentwickelung verlangen. In einer Hinsicht führt Lamé's ursprünglicher Ansatz weiter als der meinige. Man verstehe unter σ, σ', σ'' Eins oder Null, je nachdem $E_1 . E_2 \cdot E_3$ für $\lambda = 0, k^2, 1$ verschwindet, oder nicht. Dann folgt bei Lamé sofort, dass A, die erste in der Differentialgleichung auftretende Constante, den folgenden Werth hat:

$$A = (2(m+n) + \sigma + \sigma' + \sigma'')\,(2(m+n) + \sigma + \sigma' + \sigma'' + 1).$$

Bei der von mir gegebenen Entwickelung bedürfte es dazu zuvörderst des Nachweises, dass $E_1 = E_2 = E_3$ im vorliegenden Falle eine algebraische Function von λ ist. — Dagegen liegt bei Lamé das Theorem über die Vertheilung der Nullstellen auf die verschiedenen Intervalle ziemlich fern*), während es bei meiner nunmehrigen Darstellung als selbstverständlicher Ausgangspunkt gilt.

Leipzig, den 14. März 1881.

---

*) Offenbar bedeutet dies Theorem für die Berechnung der gewöhnlichen Lamé'schen Functionen, dass man die Gleichungen höheren Grades, von denen die Bestimmung der zugehörigen Constanten B abhängt, a priori separiren kann. Ich möchte mir vorhalten, auf diesen Gegenstand bei einer späteren Gelegenheit einzugehen.

Ueber das Parallelhexagon auf dem geradlinigen Hyperboloid.

Von

H. Schröter in Breslau.

Drei beliebig gewählte Paare von parallelen Erzeugenden eines geradlinigen Hyperboloids lassen sich zu einem räumlichen Sechseck an einander fügen, dessen Seiten auf dem Hyperboloid verlaufen, und dessen drei Hauptdiagonalen (Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken) drei Durchmesser des Hyperboloids sind. Diese räumliche Figur, welche wir ein *Parallelhexagon* nennen wollen, lässt gleichzeitig noch zwei andere Auffassungen zu. Wenn wir je zwei aufeinander folgende Seiten des Parallelhexagons durch eine Ebene verbinden, so erhalten wir sechs Ebenen, Berührungsebenen des Hyperboloids, die paarweise parallel laufen und die Seitenflächen eines *Parallelepipeds* bilden, von dem aber nur sechs Kanten und sechs Ecken dem Hyperboloid angehören, die übrigen sechs Kanten und die übrigen beiden Ecken nicht. Wenn wir die Schnittpunkte je zweier auf einander folgender Seiten d. h. die sechs Ecken des Parallelhexagons auffassen, so sind dieselben die Ecken eines *Paralleloktaëders*, dessen acht Seitenflächen paarweise parallel laufen; von ihnen gehören aber nur sechs als Berührungsebenen dem Hyperboloid an, die beiden übrigen nicht; von den zwölf Kanten des Oktaëders gehören sechs als Erzeugende dem Hyperboloid an, die sechs übrigen nicht. Die drei Hauptdiagonalen des ursprünglichen Parallelhexagons können als die (schiefwinkligen) Axen des Paralleloktaëders aufgefasst werden. Das Parallelepiped und das Paralleloktaëder sind Polarfiguren von einander in Bezug auf das Hyperboloid; das Parallelhexagon ist sich selbst polar.

Für das besondere Hyperboloid, welches unendlich viele Tripel von je drei zu einander rechtwinkligen Erzeugenden besitzt und welches ein „gleichseitiges" genannt wird, hat Herr H. Vogt*), indem er auf demselben ein Parallelhexagon, von zwei solchen rechtwinkligen

*) H. Vogt: „Ueber ein besonderes Hyperboloid", Borchardt's Journal f. Mathematik Bd. 86, S. 297.

Tripeln gebildet, annahm, einige metrische Eigenschaften abgeleitet, welche diesem besonderen Hyperboloid eigenthümlich zu sein schienen. Herr G. Bauer*) hat aber von einer dieser Eigenschaften, dass nämlich der Inhalt des oben beschriebenen Parallelepipeds constant ist, nachgewiesen, dass dieselbe allgemein gilt für ein beliebiges Hyperboloid und irgend drei Paare von parallelen Erzeugenden. Die übrigen Eigenschaften des rechtwinkligen Parallelhexagons auf dem gleichseitigen Hyperboloid gelten zwar nicht gleichlautend für das allgemeine Hyperboloid und drei beliebige Paare von parallelen Erzeugenden, sind aber besondere Fälle von sehr einfachen metrischen Beziehungen eines beliebigen Parallelhexagons auf dem allgemeinen Hyperboloid; die Herleitung derselben ist der Zweck der nachfolgenden Mittheilung, an welche sich noch einige elementare stereometrische Sätze knüpfen, die, wie es scheint, nicht alle bisher bemerkt worden sind. Die bereits bekannten findet man, zum Theil anders abgeleitet, in R. Baltzer's Elementen der Mathematik.

1. Nimmt man auf dem geradlinigen Hyperboloid drei beliebige Paare paralleler Erzeugender:

$$l \text{ und } g, \quad l_1 \text{ und } g_1, \quad l_2 \text{ und } g_2,$$

so lässt sich aus denselben ein räumliches Sechseck bilden, dessen Ecken seien:

$$(l_1 g_2) = \mathfrak{a}, \quad (g_2 l) = \mathfrak{b}_1, \quad (l g_1) = \mathfrak{c}, \quad (g_1 l_2) = \mathfrak{a}_1, \quad (l_2 g) = \mathfrak{b}, \quad (g l_1) = \mathfrak{c}_1.$$

Die drei Diagonalen dieses Parallelhexagons:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_1$$

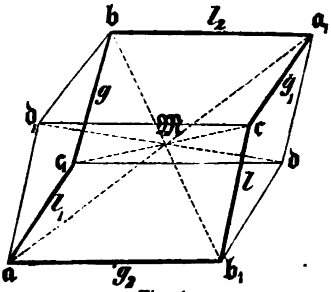


Fig. 1.

d. h. $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$ $|\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1|$ schneiden und halbiren sich in dem Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des Hyperboloids; die sechs Ebenen:

$$[l_1 g_2] \; [g_2 l] \; [l g_1] \; [g_1 l_2] \; [l_2 g] \; [g l_1]$$

sind die Seitenflächen eines Parallelepipeds, von dem drei Paar Gegenecken $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ und die sechs Kanten, welche die Seiten des Parallelhexagons sind, auf dem Hyperboloid liegen, das vierte Paar Gegenecken $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ und die übrigen durch diese Ecken gehenden sechs Kanten aber nicht dem Hyperboloid angehören.

Da $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ ein Durchmesser, die Mitte $\mathfrak{M}$ zwischen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ der Mittelpunkt und die beiden Ebenen $[l_1 g_2]$ und $[g_1 l_2]$ die Berührungsebenen des Hyperboloids in den Endpunkten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ eines Durchmessers sind, so

*) G. Bauer: „Ueber eine Eigenschaft des geradlinigen Hyperboloids", Sitzungsberichte der math. phys. Classe der K. Akad. d. Wissensch. zu München, 5. Juni 1880.

wird eine durch $\mathfrak{M}$ zu diesen beiden Ebenen parallel gelegte Ebene die zu dem Durchmesser $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ conjugirte Durchmesserebene sein und das Hyperboloid in einer Hyperbel schneiden, deren beide Asymptoten durch $\mathfrak{M}$ parallel laufen mit den Geraden l_1 (oder g_1) und l_2 (oder g_2). Diese zu dem Durchmesser $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ conjugirte Durchmesserebene schneidet aus dem Parallelepiped ein Parallelogramm aus, dessen Ecken $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1$ die Mitten der Kanten $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1|$, $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}|$ sind. Die Diagonalen $|\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1|$, $|\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1|$ dieses Parallelogramms, welche sich in $\mathfrak{M}$ schneiden, sind ein Paar conjugirter Durchmesser für die Durchschnittshyperbel, weil sie harmonisch getrennt werden durch die Asymptoten derselben, welche den Seiten des Parallelogramms parallel laufen.

Der Durchmesser $|\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1|$ ist ein reeller, weil er den Erzeugenden $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1|$ und $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1|$ in den Punkten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$ begegnet. Die Länge $\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1$ vertritt den conjugirten imaginären Durchmesser der Hyperbel, weil sie gleich ist dem zwischen den Asymptoten abgeschnittenen Stück auf der Tangente im Punkte $\mathfrak{m}$, welche parallel läuft mit $|\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1|$.

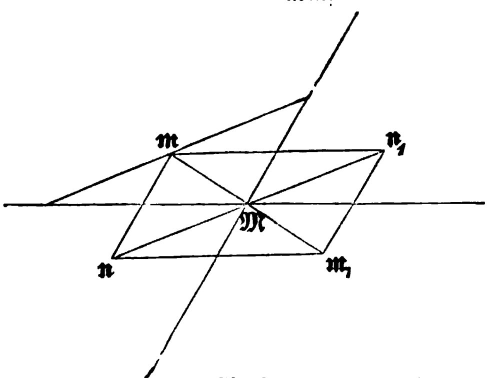


Fig. 2.

Wir haben nunmehr drei conjugirte Durchmesser des Hyperboloids $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ $|\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1|$ $|\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1|$ und kennen die ihnen zugehörigen Punktinvolutionen, von denen die beiden ersten hyperbolisch sind, die dritte elliptisch ist.

Für jedes solche Tripel von conjugirten Durchmessern einer Oberfläche zweiter Ordnung gelten die bekannten Beziehungen*):

$$\text{I.}\quad P_A + P_B + P_C = \text{const.} = P_a + P_b + P_c,$$

$$\text{II.}\quad P_A P_B \sin^2(AB) + P_A P_C \sin^2(AC) + B_B P_C \sin^2(BC)$$
$$= \text{const.} = P_a P_b + P_a P_c + P_b P_c,$$

$$\text{III.}\quad P_A P_B P_C \cdot S^2(ABC) = \text{const.} = P_a P_b P_c,$$

wo $P_a P_b P_c$ die Potenzen der drei Punktinvolutionen auf den Hauptaxen der Oberfläche, $P_A P_B P_C$ die Potenzen der Punktinvolutionen auf drei beliebigen conjugirten Durchmessern derselben bedeuten und zur Abkürzung $S^2(ABC)$ gesetzt ist für das Quadrat des räumlichen Sinus der von den drei conjugirten Durchmessern gebildeten körperlichen Ecke.

In unserem Falle ist nun:

---

*) Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung von H. Schröter, Leipzig, B. G. Teubner 1880. § 58.

$$P_A = \quad \frac{1}{4}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)^2,$$

$$P_B = \quad \frac{1}{4}(\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1)^2 = \quad \frac{1}{4}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2,$$

$$P_C = -\frac{1}{4}(\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1)^2 = -\frac{1}{4}(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^2;$$

es lassen sich die obigen drei Beziehungen in eine solche Form kleiden, dass sie in einfacher Weise abhängen von den Elementen des auf dem Hyperboloid verlaufenden Parallelhexagons und somit gewisse metrische Eigenschaften dieser räumlichen Figur ausdrücken.

2. Der Vollständigkeit und besseren Uebersicht wegen wollen wir die Elemente unseres Parallelepipeds folgendermassen bezeichnen:

$$\text{die Kanten}\begin{cases} \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{d}_1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{d} = a, \\ \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{d}_1\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{d} = b, \\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d}_1\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1\mathfrak{d} = c, \end{cases}$$

$$\begin{array}{c}\text{die räumlichen}\\ \text{Diagonalen}\end{array}\begin{cases} \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \alpha, \\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 = \beta, \\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 = \gamma, \\ \mathfrak{d}\mathfrak{d}_1 = \delta, \end{cases}$$

$$\begin{array}{c}\text{die Diagonalen}\\ \text{der Seitenflächen}\end{array}\begin{cases} \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1 = p, \\ \mathfrak{c}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 = q, \\ \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1 = r, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{d}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1 = p_1, \\ \mathfrak{d}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1 = q_1, \\ \mathfrak{d}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1 = r_1, \end{cases}$$

$$\begin{array}{c}\text{die Flächen der}\\ \text{Seitenparallelogramme}\end{array}\begin{cases} [\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1] = [\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}] = s_1, \\ [\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1] = [\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}] = s_2, \\ [\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1] = [\mathfrak{d}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}] = s_3, \end{cases}$$

$$\begin{array}{c}\text{die Flächen der}\\ \text{Diagonalparallelogramme}\end{array}\begin{cases} [\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}] = f_1, \\ [\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}] = f_2, \\ [\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}] = f_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} [\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}] = \varphi_1, \\ [\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{b}] = \varphi_2, \\ [\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}] = \varphi_3, \end{cases}$$

und das Volumen des Parallelepipeds $= v$.

Zwischen diesen Grössen bestehen mehrere elementare Beziehungen, von denen wir Gebrauch machen werden. Zunächst folgt aus dem bekannten Satze, dass *in einem Parallelogramm die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich ist der Summe der Quadrate der vier Seiten:*

$$p^2 + p_1{}^2 = 2b^2 + 2c^2,$$
$$q^2 + q_1{}^2 = 2c^2 + 2a^2,$$
$$r^2 + r_1{}^2 = 2a^2 + 2b^2,$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2a^2 + 2p^2, \qquad \alpha^2 + \delta^2 = 2a^2 + 2p_1{}^2,$$
$$\gamma^2 + \alpha^2 = 2b^2 + 2q^2, \qquad \beta^2 + \delta^2 = 2b^2 + 2q_1{}^2,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 2c^2 + 2r^2, \qquad \gamma^2 + \delta^2 = 2c^2 + 2r_1{}^2,$$

Hieraus folgt für die Beziehung I. in 1.:

$$\alpha^2 + p^2 - p_1^2 = 4(P_a + P_b + P_c) = \text{const.},$$

$$\alpha^2 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} - \frac{\alpha^2 + \delta^2}{2} = 4(P_a + P_b + P_c),$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 8(P_a + P_b + P_c),$$

und dies giebt unsern ersten Satz:

Irgend drei Paare von parallelen Erzeugenden eines geradlinigen Hyperboloids lassen sich zu einem Parallelhexagon an einander reihen, dessen Seiten auf dem Hyperboloid liegen. Die Berührungsebenen in den sechs Ecken bilden ein Parallelepiped, von dem drei räumliche Diagonalen die Verbindungslinien der Gegenecken des Parallelhexagons sind, während die vierte Diagonale die beiden übrigen nicht auf dem Hyperboloid liegenden Gegenecken des Parallelepipeds verbindet. Die Summe der Quadrate der drei ersten Diagonalen vermindert um das Quadrat der vierten Diagonale ist von unveränderlichem Werthe:

$$= 8(P_a + P_b + P_c),$$

wie auch die drei Paare von parallelen Erzeugenden auf dem Hyperboloid gewählt werden mögen.

In dem besonderen Falle des gleichseitigen Hyperboloids ergiebt sich, wenn man zwei Tripel von rechtwinkligen Erzeugenden wählt, der von H. Vogt (s. o.) ausgesprochene Satz, dass die Ecken aller solchen rechtwinkligen Parallelepipeda auf einer Kugelfläche liegen, weil $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ wird.

Dieser Satz lässt sich auch als eine Eigenschaft des Parallelhexagons auf dem Hyperboloid aussprechen, wenn man die aus den obigen Beziehungen hervorgehende Gleichung benutzt:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2);$$

man erhält:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2) = 4(P_a + P_b + P_c) \text{ d. h.}$$

Ein beliebiges von drei Paaren paralleler Erzeugender eines geradlinigen Hyperboloids gebildetes Parallelhexagon hat sechs Seiten und drei Hauptdiagonalen; die Summe der Quadrate der letzteren vermindert um die Summe der Quadrate der ersteren ist von unveränderlichem Werthe:

$$= 4(P_a + P_b + P_c).$$

Derselbe Satz lässt sich auch drittens als eine Eigenschaft eines Paralleloktaëders aussprechen, wenn man die aus den obigen Beziehungen hervorgehende Gleichung benutzt:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 + b^2 + c^2 + p^2 + q^2 + r^2;$$

man erhält:

$$p^2 + q^2 + r^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 4(P_a + P_b + P_c)$$

und mit Berücksichtigung der Bedeutung von $abcpqr$ (s. o.)

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{a}\mathfrak{c})^2 + (\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2 + (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)^2 + (\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1)^2 + (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1)^2$$
$$-(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1)^2 - (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c})^2 - (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a})^2 - (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b})^2 - (\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1)^2 - (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a})^2 = 8(P_a + P_b + P_c) \text{ d. h.}$$

Die sechs Ecken eines von drei beliebigen Paaren paralleler Erzeugender eines geradlinigen Hyperboloids gebildeten Parallelhexagons lassen sich als die Ecken eines Paralleloktaëders auffassen. Von den fünfzehn Geraden, welche diese sechs Punkte im Raume paarweise verbinden, sind nämlich drei die (schiefwinkligen) Axen des Oktaëders (oder die drei Hauptdiagonalen des Parallelhexagons), die zwölf übrigen die Kanten des Oktaëders, von denen sechs Erzeugende des Hyperboloids sind, die übrigen sechs nicht. Die Summe der Quadrate der letzteren, vermindert um die Summe der Quadrate der ersteren ist von unveränderlichem Werthe:

$$= 8(P_a + P_b + P_c).$$

Die von uns benutzten Beziehungen lassen sich als elementarstereometrische Sätze aussprechen, z. B.

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2), \text{ d. h.}$$

Die Summe der Quadrate der vier räumlichen Diagonalen eines Parallelepipeds ist gleich der Summe der Quadrate sämmtlicher (12) *Kanten desselben.* (Legendre.)

Ferner:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 + b^2 + c^2 + p^2 + q^2 + r^2, \text{ d. h.}$$

In einem Paralleloktaëder ist die doppelte Summe der Quadrate der drei (schiefwinkligen) Axen (d. h. Verbindungslinien der drei Paar Gegenecken) gleich der Summe der Quadrate sämmtlicher (12) *Kanten.*

Betrachten wir das Tetraëder (Fig. 1.), welches von den vier Punkten:

$$\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}$$

gebildet wird, so haben wir als Kanten desselben:

$$p\ q\ r\ p_1\ q_1\ r_1$$

und die Kanten abc des diesem Tetraëder umschriebenen Parallelepipeds sind die Verbindungslinien der Mitten je zweier Gegenkanten des Tetraëders*), welche wir „Mittellinien" nennen wollen; also lässt sich die Beziehung:

$$4(a^2 + b^2 + c^2) = p^2 + q^2 + r^2 + {p_1}^2 + {q_1}^2 + {r_1}^2$$

so interpretiren:

Im Tetraëder ist die Summe der Quadrate der (6) *Kanten gleich*

---

*) Vergl. R. Baltzer: „Die Elemente der Mathematik", 3 Aufl., Leipzig 1870, Stereom. § 6., 8. S. 205.

der vierfachen Summe der Quadrate der drei Mittellinien, deren jede die Mitten zweier Gegenkanten verbindet.

Auch Beziehungen der Art:

$$
\begin{aligned}
2(c^2 - b^2) &= q^2 - r^2 + q_1^2 - r_1^2,\\
2(a^2 - c^2) &= r^2 - p^2 + r_1^2 - p_1^2,\\
2(b^2 - a^2) &= p^2 - q^2 + p_1^2 - q_1^2
\end{aligned}
$$

lassen eine ähnliche einfache geometrische Interpretation zu. Wäre insbesondere z. B. $c = b$, so wäre das Parallelogramm $[\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1]$ ein Rhombus, also seine Diagonalen rechtwinklig zu einander d. h. in dem Tetraëder $\mathfrak{abcd}$ müssen die Gegenkanten $|\mathfrak{ab}|$ und $|\mathfrak{cd}|$ rechtwinklig zu einander gerichtet sein, und es würde daraus die Bedingung folgen:

$$q^2 + q_1^2 = r^2 + r_1^2$$

und, wie leicht zu sehen, auch umgekehrt:

Wenn ein Paar Gegenkanten eines Tetraëders rechtwinklig zu einander gerichtet ist, so hat die Summe der Quadrate jedes der beiden übrigen Paare von Gegenkanten denselben Werth, woraus folgt:

Wenn zwei Paare von Gegenkanten eines Tetraëders Paare von rechtwinklig zu einander gerichteten Strahlen sind, so ist es auch das dritte Paar von Gegenkanten.

Endlich können wir die Beziehung:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = p^2 + q^2 + r^2 + p_1^2 + q_1^2 + r_1^2$$

sowohl als eine Eigenschaft des Parallelepipeds, wie auch des Tetraëders $\mathfrak{abcd}$ aussprechen, dessen drei Paar Gegenkanten pp_1, qq_1, rr_1 sind. In letzterem Sinne ist $\mathfrak{M}$ der Schwerpunkt des Tetraëders und $\mathfrak{M}\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\,\alpha = \frac{3}{4}\,\mathfrak{l}_{\mathfrak{a}}$, wenn $\mathfrak{l}_{\mathfrak{a}}$ die Schwerlinie bedeutet, welche von der Ecke $\mathfrak{a}$ des Tetraeders nach dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche desselben hingeht; wir erhalten also den Satz:

Im Tetraëder ist die neunfache Summe der Quadrate der vier Schwerlinien (welche von den Ecken nach den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Seitenflächen gehen) gleich der vierfachen Summe der Quadrate der sechs Kanten.

Oder wir können die Beziehung:

$$\delta^2 = p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

als eine Eigenschaft des Parallelepipeds aussprechen:

In einem Parallelepiped ist die Verbindungslinie einer Ecke mit der gegenüberliegenden eine räumliche Diagonale; von den Verbindungslinien der ersten Ecke mit den sechs übrigen Ecken sind drei Kanten drei Diagonalen in den Seitenflächen des Parallelepipeds. Die Summe der Quadrate der drei letzteren vermindert um die Summe der Quadrate der drei ersteren ist gleich dem Quadrat der räumlichen Diagonale. U. s. w.

3. In ähnlicher Weise lässt sich der Satz II. in 1. behandeln. Wir erhalten zuvörderst:

$$P_a P_b + P_a P_c + P_b P_c = \frac{1}{16}\left\{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}\mathfrak{c} \cdot \sin(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}\mathfrak{c})\right\}^2$$
$$- \frac{1}{16}\left\{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{d} \cdot \sin(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}\mathfrak{d})\right\}^2$$
$$- \frac{1}{16}\left\{\mathfrak{b}\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{d} \cdot \sin(\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \mathfrak{a}\mathfrak{d})\right\}^2.$$

Von den drei Ausdrücken der rechten Seite sind die beiden letzten leicht zu ermitteln, der erste etwas umständlicher. Da $\mathfrak{a}\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1$ ist, so wird gemäss der obigen Bezeichnung

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{d} \cdot \sin(\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = 2s_1,$$
$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{d} \cdot \sin(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = \varphi_1.$$

Zu einem einfachen Ausdruck für die Grösse

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}\mathfrak{c} \cdot \sin(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}\mathfrak{c})$$

gelangen wir durch folgenden Hilfssatz:

Werden vier parallele Kanten eines beliebigen Parallelepipeds durch eine zu ihnen normale Ebene geschnitten, so sind die Durchschnittspunkte die Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten und Diagonalen normal stehen auf den vier parallelen Kanten. Zwischen den Seiten und Diagonalen eines Parallelogramms besteht aber die oben erwähnte bekannte Beziehung, dass die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich ist der Summe der Quadrate der vier Seiten; wenn wir also dieser Gleichheit als Factor hinzufügen das Quadrat der Länge einer der vier parallelen Kanten, so folgt der Satz:

Wenn man bei einem Parallelepiped vier parallel laufende Kanten paarweise durch Ebenen verbindet, so enthalten dieselben vier Seitenparallelogramme und zwei Diagonalparallelogramme des Parallelepipeds. Die Summe der Quadrate der vier Seitenparallelogramme ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalparallelogramme.

Dieser Hilfssatz in die oben (2) eingeführten Bezeichnungen übertragen liefert die drei Relationen:

$$f_1^2 + \varphi_1^2 = 2s_2^2 + 2s_3^2,$$
$$f_2^2 + \varphi_2^2 = 2s_3^2 + 2s_1^2,$$
$$f_3^2 + \varphi_3^2 = 2s_1^2 + 2s_2^2,$$

woraus u. A. folgt:

$$4(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \quad \text{d. h.}$$

Bei einem Parallelepiped ist die Summe der Quadrate sämmtlicher (6) *Diagonalparallelogramme gleich der doppelten Summe der Quadrate sämmtlicher* (6) *Seitenparallelogramme.*

Ferner lassen sich die Flächen der Seitenparallelogramme ausdrücken durch die Flächen der Diagonalparallelogramme:

$$4s_1^2 = -f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2,$$
$$4s_2^2 = +f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 + \varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \varphi_3^2,$$
$$4s_3^2 = +f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2.$$

Wenn wir von dem Parallelepiped (Fig. 1) durch die Diagonalebene $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1]$ ein dreiseitiges Prisma abschneiden, dessen drei parallele Kanten:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}| \quad |\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}|$$

sind, so lässt sich der vorige Satz:

$$s_2^2 + s_3^2 = \frac{1}{2} f_1^2 + \frac{1}{2}\varphi_1^2$$

oder

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1]^2 + [\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1]^2 = \frac{1}{2}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1]^2 + \frac{1}{2}[\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}]^2$$

leicht als eine Eigenschaft des dreiseitigen Prismas aussprechen, auf die wir nicht weiter eingehen wollen. Wenn wir aber von dem dreiseitigen Prisma durch die Ebene $[\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1]$ ein Tetraëder $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ abtrennen, so giebt der vorige Satz eine Eigenschaft des Tetraëders:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1\mathfrak{b}_1]^2 + [\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1]^2 - 2[\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1\mathfrak{p}]^2 = \frac{1}{8}\left\{\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 \sin(\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1, \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1)\right\}^2,$$

wo $\mathfrak{p}$ die Mitte der Kante $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|$ bedeutet (Fig. 3) d. h. in Worten:

Die Summe der Quadrate zweier Seitenflächen eines Tetraëders vermindert um das doppelte Quadrat derjenigen Dreiecksfläche, welche die gemeinsame Kante zur Grundlinie und die Mitte der Gegenkante zur Spitze hat, ist gleich dem achten Theile von dem Quadrat des Products aus diesen beiden Gegenkanten in den sinus ihrer Neigung zu einander).*

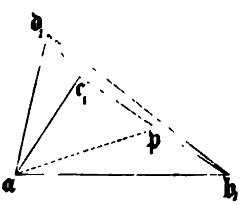


Fig. 3.

Hiernach können wir das noch fehlende dritte Glied des anfänglichen Ausdrucks umgestalten, wenn wir das Tetraëder

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$$

und das Gegenkantenpaar $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ nehmen; also wird nach unserem Hülfssatz:

*) Dieser Satz ist nur ein specieller Fall des allgemeinen auf Seite 551 meiner „Theorie der Oberflächen 2. O. etc." ausgesprochenen Satzes.

$$\{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}\mathfrak{c} \cdot \sin(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}\mathfrak{c})\}^2 = 2f_2^2 + 2f_3^2 - \varphi_1^2.$$

Dieses substituirt in die ursprüngliche Formel giebt:

$$P_a P_b + P_a P_c + P_b P_c = \frac{1}{8} f_2^2 + \frac{1}{8} f_3^2 - \frac{1}{16} \varphi_1^2 - \frac{1}{4} s_1^2 - \frac{1}{16} \varphi_1^2$$

$$= \frac{1}{8} f_2^2 + \frac{1}{8} f_3^2 - \frac{1}{8} \varphi_1^2 - \frac{1}{4} s_1^2,$$

oder wenn wir für s_1^2 seinen Werth setzen, ausgedrückt durch die Diagonalflächen (s. o)

$$16(P_a P_b + P_a P_c + P_b P_c) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2,$$

und dies giebt unsern zweiten Hauptsatz:

Irgend drei Paare von parallelen Erzeugenden eines geradlinigen Hyperboloids lassen sich zu einem Parallelhexagon an einander reihen, dessen Seiten auf dem Hyperboloid liegen. Die Berührungsebenen in den sechs Ecken bilden ein Parallelepiped, dessen sechs Diagonalebenen Parallelogramme bilden, welche je zwei gegenüberliegende Kanten des Parallelepipeds zu Gegenseiten haben. Von diesen Diagonalparallelogrammen haben drei je ein Paar paralleler Erzeugender zu Gegenseiten, die drei übrigen nicht. Die Summe der Quadrate der ersten drei Diagonalparallelogramme vermindert um die Summe der Quadrate der drei übrigen ist von unveränderlichem Werthe:

$$= 16\{P_a P_b + P_a P_c + P_b P_c\},$$

wie auch die drei Paare von parallelen Erzeugenden auf dem Hyperboloid gewählt werden mögen.

In dem besonderen Falle des gleichseitigen Hyperboloids ergiebt sich, wenn man zwei Tripel von rechtwinkligen Erzeugenden wählt, der Werth der Constanten gleich Null, weil $f_1 = \varphi_1$, $f_2 = \varphi_2$, $f_3 = \varphi_3$ wird, und es geht hieraus die bekannte Bedingung für die Hauptaxen eines gleichseitigen Hyperboloids hervor.

Wählt man aber auf dem gleichseitigen Hyperboloid drei beliebige Paare paralleler Erzeugender, so tritt eine neue Eigenschaft des gleichseitigen Hyperboloids hervor, wonach die Summe der Quadrate der drei ersten Diagonalparallelogramme immer gleich ist der Summe der Quadrate der drei übrigen.

Derselbe Satz lässt sich auch als eine Eigenschaft des Parallelhexagons auf dem Hyperboloid aussprechen, wenn wir die zuletzt benutzte Eigenschaft eines Tetraëders noch anders verwerthen. Wir erhalten nämlich, wenn wir in dem Tetraëder

$$\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}$$

das Paar Gegenkanten $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{a}\mathfrak{d}|$ auffassen:

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}]^2 + [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]^2 = \frac{1}{2} f_1^2 + \frac{1}{2} s_1^2,$$

und wenn wir das Paar Gegenkanten $|\mathfrak{a}\mathfrak{d}|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{d}|$ auffassen:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{b}]^2 + [\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c}]^2 = \frac{1}{2} \varphi_1^2 + \frac{1}{2} s_1^2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen geht einmal hervor:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2 + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]^2 + [\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]^2 + [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]^2 = \frac{1}{2}(f_1^2 + \varphi_1^2) + s_1^2$$

und nach dem Obigen

$$= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2,$$

oder auch

$$= \frac{1}{4}\left\{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2\right\}.$$

Die Dreiecke, deren Flächen $\frac{1}{2} f_1$, $\frac{1}{2} f_2$, $\frac{1}{2} f_3$, $\frac{1}{2} \varphi_1$, $\frac{1}{2} \varphi_2$, $\frac{1}{2} \varphi_3$ sind, sind aber diejenigen, welche in dem Tetraëder durch je eine Kante und die Mitte der Gegenkante gelegt werden. Wir erhalten also folgenden Satz:

Im Tetraëder ist die Summe der Quadrate der vier Seitenflächen gleich der Summe der Quadrate der sechs Dreiecksflächen, welche je eine Kante des Tetraëders zur Grundlinie und die Mitte der Gegenkante zur Spitze haben.

Zweitens folgt aus den vorigen beiden Gleichungen:

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}]^2 + [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}] - [\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{b}]^2 - [\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c}]^2 = \frac{1}{2} f_1^2 - \frac{1}{2} \varphi_1^2$$

und in gleicher Weise:

$$[\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}]^2 + [\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{d}]^2 - [\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{a}]^2 - [\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c}]^2 = \frac{1}{2} f_2^2 - \frac{1}{2} \varphi_2^2,$$

endlich drittens:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2 + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]^2 - [\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}]^2 - [\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{b}]^2 = \frac{1}{2} f_3^2 - \frac{1}{2} \varphi_3^2,$$

woraus durch Addition folgt:

$$4[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2 - \left\{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2 + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]^2 + [\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]^2 + [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2\right\},$$

oder nach dem Obigen:

$$4[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2 - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{2}\left\{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2\right\},$$

was sich auch so schreiben lässt:

$$\left.\begin{array}{l} [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2 - [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1]^2 - [\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1]^2 - [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1]^2 \\ + [\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1]^2 - [\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}]^2 - [\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}]^2 - [\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}]^2 \end{array}\right\} = 4(P_a P_b + P_a P_c + P_b P_c),$$

d. h. in Worten:

Ein beliebiges von drei Paaren paralleler Erzeugender eines geradlinigen Hyperboloids gebildetes Parallelhexagon hat sechs Ecken, die in bestimmter Reihenfolge durch die Seiten des Parallelhexagons verbunden werden. Je drei auf einander folgende Ecken bestimmen ein Dreieck δ, *deren es also sechs giebt, die paarweise congruent sind. Die drei geradstelligen und die drei ungeradstelligen Ecken bestimmen je ein Dreieck* Δ, *welche beiden Dreiecke ebenfalls congruent sind. Die Summe der Quadrate der beiden letzten Dreiecke* Δ *vermindert um die Summe der Quadrate der ersten sechs Dreiecke* δ *ist von unveränderlichem Werthe:*

$$= 4(P_a P_b + P_a P_c + P_b P_c).$$

Drittens lässt sich derselbe Satz auch als eine Eigenschaft des Paralleloktaëders aussprechen, dessen sechs Ecken die (im Endlichen liegenden) Treffpunkte der drei Paare paralleler Erzeugender des Hyperboloids sind. Die acht in dem letzten Ausdrucke auftretenden Dreiecke sind nämlich die Seitenflächen dieses Oktaeders, und wir können daher den Satz so formuliren:

Drei beliebige Paare paralleler Erzeugender eines geradlinigen Hyperboloids treffen sich ausser in drei unendlich-entfernten Punkten noch in sechs übrigen Punkten, welche als die Ecken eines Paralleloktaëders angesehen werden können. Von den acht Seitenflächen desselben sind sechs Berührungsebenen des Hyperboloids, die beiden übrigen nicht. Die Summe der Quadrate der beiden letzteren vermindert um die Summe der Quadrate der sechs ersteren giebt einen unveränderlichen Werth $[= 4(P_a P_b + P_a P_c + P_b P_c)]$, *wie auch die drei Paare von parallelen Erzeugenden auf dem Hyperboloid gewählt werden mögen.*

Die von uns benutzten Beziehungen lassen sich auch als elementarstereometrische Sätze aussprechen, wie dies zum Theil schon oben geschehen ist.

So führt z. B. die oben abgeleitete Beziehung:

$$[\mathfrak{abc}]^2 + [\mathfrak{abd}]^2 + [\mathfrak{acd}]^2 + [\mathfrak{bcd}]^2 = s_1{}^2 + s_2{}^2 + s_3{}^2$$

auf eine von Joachimsthal angegebene Eigenschaft des Tetraëders. Der Inhalt des Tetraëders $\mathfrak{abcd}$ ist nämlich, wie unmittelbar einleuchtet, der dritte Theil von dem Inhalte des ihm umschriebenen Parallelepipeds (Fig. 1.). Der Inhalt des Tetraëders lässt sich vierfach ausdrücken durch eine Seitenfläche und die zugehörige Höhe, der Inhalt des Parallelepipeds dreifach durch eine Seitenfläche und den Abstand derselben von der mit ihr parallelen Seitenfläche. Führen wir diese Ausdrücke ein in die vorige Formel und bezeichnen die vier Höhen des Tetraëders durch $h_1 h_2 h_3 h_4$, die drei kürzesten Abstände je zweier Gegenkanten des Tetraëders von einander durch $k_1 k_2 k_3$ (da diese offenbar gleich sind den drei Abständen je zweier paralleler

Seitenflächen des dem Tetraëder umschriebenen Parallelepipeds), so erhalten wir:

$$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2}=\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}+\frac{1}{k_3^2} \text{ d. h.}$$

Die Summe der reciproken Quadrate der Höhen eines Tetraëders ist gleich der Summe der reciproken Quadrate der kürzesten Abstände je zweier Gegenkanten von einander.

Ferner liefert die Beziehung:

$$4[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2+s_1^2+s_2^2+s_3^2=f_1^2+f_2^2+f_3^2$$

eine Eigenschaft des Paralleloktaëders:

In einem Paralleloktaëder (begrenzt von vier Paaren paralleler Seitenflächen) ist die doppelte Summe der Quadrate der acht Seitenflächen (Dreiecke) gleich der Summe der Quadrate der drei Diagonalflächen (Parallelogramme).

In ähnlicher Weise zeigt die Beziehung:

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}]^2+[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]^2-[\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{b}]^2-[\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c}]^2=2\left\{\left(\frac{f_1}{2}\right)^2-\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2\right\}$$

folgende Eigenschaft des Tetraëders:

Der Ueberschuss der Summe der Quadrate zweier Seitenflächen eines Tetraëders über die Summe der Quadrate der beiden übrigen ist gleich dem doppelten Ueberschuss des Quadrates derjenigen Dreiecksfläche, welche die gemeinsame Kante der beiden ersten Tetraëderflächen zur Grundlinie und die Mitte der Gegenkante zur Spitze hat, über das Quadrat derjenigen Dreiecksfläche, welche die gemeinsame Kante der beiden übrigen Tetraëderflächen zur Grundlinie und die Mitte der Gegenkante zur Spitze hat.

Bezeichnet man die Seitenflächen eines Tetraëders

$$1\ 2\ 3\ 4$$

durch $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ und die Mittelflächen durch μ_{ik}, d. h. die Fläche eines Dreiecks, welches die Kante (ik) zur Grundlinie und die Mitte der Gegenkante zur Spitze hat, so lassen sich erstere durch letztere also ausdrücken:

$$\begin{cases}\sigma_1^2=\frac{3}{4}(\mu_{23}^2+\mu_{24}^2+\mu_{34}^2)-\frac{1}{4}(\mu_{12}^2+\mu_{13}^2+\mu_{14}^2),\\ \sigma_2^2=\frac{3}{4}(\mu_{13}^2+\mu_{14}^2+\mu_{34}^2)-\frac{1}{4}(\mu_{21}^2+\mu_{23}^2+\mu_{24}^2),\\ \sigma_3^2=\frac{3}{4}(\mu_{14}^2+\mu_{24}^2+\mu_{12}^2)-\frac{1}{4}(\mu_{31}^2+\mu_{32}^2+\mu_{34}^2),\\ \sigma_4^2=\frac{3}{4}(\mu_{12}^2+\mu_{13}^2+\mu_{23}^2)-\frac{1}{4}(\mu_{41}^2+\mu_{42}^2+\mu_{43}^2).\end{cases}$$

Wir übergehen die Interpretation dieser und ähnlicher Beziehungen, welche sich aus unsern Formeln ergeben.

4. Der Satz III. in 1. nimmt nach Einführung der Werthe für die drei conjugirten Durchmesser des Hyperboloids folgende Gestalt an:

$$-P_a \cdot P_b \cdot P_c = \frac{1}{64} (\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)^2 (\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2 (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2 \cdot S^2(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}\mathfrak{c}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}),$$

wo der räumliche sinus S der von den drei conjugirten Durchmessern gebildeten körperlichen Ecke bedeutet das Product aus dem sinus des Winkels zweier Kanten in den sinus des Neigungswinkels der dritten Kante gegen die durch die beiden ersten gelegte Ebene; führen wir diesen Werth ein, so ist

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) \cdot (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \cdot \sin(\mathfrak{b}\mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = 2s_1$$

und

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1) \sin\{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, s_1\} = k_1,$$

wo k_1 den Abstand der beiden parallelen Seitenflächen des Parallelepipeds bedeutet, welche die Berührungsebenen in den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ am Hyperboloid sind. Das Product $s_1 k_1$ ist nun nichts anderes als das Volumen v des Parallelepipeds, wir erhalten also:

$$v^2 = -16 P_a P_b P_c = \text{const. d. h.}$$

wir haben als dritten Hauptsatz den schon von Herrn G. Bauer a. a. O. ausgesprochenen Satz:

Irgend drei Erzeugende der einen Regelschaar und die drei mit ihnen parallelen Erzeugenden der andern Regelschaar eines geradlinigen Hyperboloids lassen sich zu einem räumlichen Sechsseit an einander reihen, dessen sechs Seiten der Reihe nach abwechselnd den beiden Regelschaaren des Hyperboloids angehören. Legt man durch je zwei auf einander folgende Seiten dieses Sechsseits Ebenen, so erhält man die sechs Seitenflächen eines Parallelepipeds. Das Volumen dieses Parallelepipeds bleibt von unveränderlichem Werthe:

$$= -16 P_a P_b P_c,$$

wie auch die drei Paare von parallelen Erzeugenden auf dem Hyperboloid gewählt werden mögen.

Wenn man von dem Parallelepiped (Fig. 1) die beiden Tetraëder $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1)$ und $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b})$, deren jedes $\frac{1}{6}v$ zum Volumen hat, in Abzug bringt, so bleibt der Inhalt des oben betrachteten Paralleloktaëders übrig und der vorige Satz lässt sich in folgender Form aussprechen:

Die sechs Ecken eines von drei beliebigen Paaren paralleler Erzeugender eines geradlinigen Hyperboloids gebildeten Parallelhexagons lassen sich als die Ecken eines Paralleloktaëders auffassen; der Inhalt desselben bleibt von unveränderlichem Werthe:

$$= -\frac{64}{9} P_a \cdot P_b \cdot P_c,$$

wie man auch die drei Paare paralleler Erzeugender auf dem Hyperboloid wählen mag.

Breslau, den 20. März 1881.

Ueber die algebraischen Functionen, welche zu gegebenen Riemann'schen Flächen gehören.

(Auszug aus einem Schreiben an Hrn. F. Klein.)

Von

J. Thomae in Jena.

Sie fragten mich nach der Construction algebraischer Functionen, die wie eine gegebene Fläche T verzweigt seien. Ich sagte Ihnen schon, dass für den Fall, in welchem die Fläche drei Blätter besitzt, eine solche Function von mir im sechsten Bande der Annalen auf Seite 612 dargestellt sei und zwar algebraisch, wenn vier Verzweigungspunkte in T vorhanden sind, durch Thetafunctionen im allgemeinen Falle*). Im ersten Falle ist die Function später noch einmal construirt in der Inauguraldissertation des Herrn Kasten Bremen 1876. Durch Ihr Gespräch angeregt, habe ich über diesen Gegenstand wieder nachgedacht, und bemerkt, dass meine Methode auch zur Darstellung algebraischer Functionen führt, welche wie eine *vier*blättrige Fläche mit gegebenen Windungspunkten verzweigt ist, und ich will Ihnen diese Methode hier mittheilen. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Problem, eine Function σ zu construiren, die wie eine *drei*blättrige Fläche $\mathfrak{T}$ mit beliebig vielen einfachen Windungspunkten verzweigt ist, bereits gelöst sei.

Es sei σ eine Function, welche in der dreiblättrigen Fläche $\mathfrak{T}$ mit einfachen Windungspunkten, die über den Punkten $k_1, k_2, \cdots \cdot \cdot k_{2p+4}$ der z-Ebene liegen, einwerthig ist. $\mathfrak{T}$ ist vom Geschlecht p, und es seien $u_1\, u_2 \cdots u_p$ die überall endlichen Integrale dieser Fläche, in der kanonischen Form, und mit den Anfangswerthen, welche Riemann gewählt hat, um sie als Argumente in Thetafunctionen

*) In der 5ten Zeile ist dort (pag. 612) $g(x)g(x)$ statt Const. zu lesen, wo $g(x)$ eine ganze Function ist, und in den Thetafunctionen ist $u_\mu(r, x)$ durch $u_\mu(r, x) - \Sigma_{(\nu)} u_\mu(0, k_\nu)$ zu ersetzen, wenn die Summe über die p Verzweigungspunkte k_ν erstreckt wird, in denen die Function unendlich werden soll.

einzusetzen. Die $2p$ Periodicitätsmoduln von u_μ sind demnach 0, 0, $\dots i\pi$, $0\dots 0$; $a_{\mu 1}, a_{\mu 2}, \dots a_{\mu p}$. Zur Erleichterung der Bezeichnung sollen einige Abkürzungen eingeführt werden. Es sei

$$e_\mu = u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} + \cdots + u_\mu^{(p)}$$

und $u_\mu^{(1)}, u_\mu^{(2)} \cdots u_\mu^{(p)}$ seien die Werthe von u_μ in p Punkten σ_1, z_1; $\sigma_2, z_2; \cdots \sigma_p, z_p$ von $\mathfrak{T}$, und, unter h und g ganze Zahlen verstanden, sei

$$\omega_\mu = g_\mu i\pi + h_1 a_{\mu 1} + h_2 a_{\mu 2} + \cdots + h_p a_{\mu p}.$$

Das System $(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \cdots u_p - e_p)$ werde kurz mit $(u - e)$, und ähnlich das System $\left(u_1 - e_1 + \frac{1}{2}\omega_1, u_2 - e_2 + \frac{1}{2}\omega_2, \cdots u_p - e_p + \frac{1}{2}\omega_p\right)$ mit $\left(u - e + \frac{1}{2}\omega\right)$ bezeichnet, und Σhu für $h_1 u_1 + h_2 u_2 + \cdots + h_p u_p$ gesetzt. Endlich seien $\sigma, \sigma', \sigma''$ die Werthe von σ in drei übereinanderliegenden Punkten von $\mathfrak{T}$, die also zu demselben z gehören. Dann ist nach dem Abel'schen Theoreme

$$u + u' + u'' = \text{Const.}$$

wenn $u u' u''$ die Werthe von u in den Punkten σ, z; σ', z; σ'', z sind.

Nach diesen Vorbereitungen können wir eine Function σ, die wie eine vierblättrige Fläche T verzweigt ist, mit Windungspunkten, die über $k_1\, k_2 \cdots k_{2p+4}$ liegen, und vom Geschlecht $p - 1$ ist, sofort hinschreiben. Es ist die Function

$$s = \frac{e^{\Sigma hu}\,\vartheta\left(u - e + \frac{1}{2}\omega\right)}{\vartheta(u - e)} + \frac{e^{\Sigma hu'}\,\vartheta\left(u' - e + \frac{1}{2}\omega\right)}{\vartheta(u' - e)} + \frac{e^{\Sigma hu''}\,\vartheta\left(u'' - e + \frac{1}{2}\omega\right)}{\vartheta(u'' - e)},$$

worin die p-fach unendliche Thetareihe die Moduln $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{pp}$ hat. Die Function $e^{\Sigma hu}\vartheta\left(u - e + \frac{1}{2}\omega\right) : \vartheta(u - e)$ lässt sich algebraisch darstellen (freilich nicht durch bloses Radiciren), und ihr Quadrat $f(\sigma, z)$ oder kurz f ist in $\mathfrak{T}$ einwerthig. Statt $f(\sigma', z) f(\sigma'', z)$ soll bez. f', f'' geschrieben werden.

Man erkennt zunächst, dass

$$R = \sqrt{f \cdot f' \cdot f''}$$

in $\mathfrak{T}$ einwerthig ist, so dass R rational in σ und z, sogar rational in z ist. Denn es ist

$$R = \frac{e^{\Sigma h(u + u' + u'')}\,\vartheta\left(u - e + \frac{1}{2}\omega\right)\vartheta\left(u' - e + \frac{1}{2}\omega\right)\vartheta\left(u'' - e + \frac{1}{2}\omega\right)}{\vartheta(u - e)\,\vartheta(u' - e)\,\vartheta(u'' - e)}$$

in $\mathfrak{T}$ einwerthig, weil $u + u' + u''$ constant ist. Führt man σ, z in $\mathfrak{T}$ herum an seinen Platz zurück, so kann

$$u^{\mu} \text{ in } u_{\mu} + m_{\mu} i\pi + n_1 a_{\mu 1} + n_2 a_{\mu 2} + \cdots + n_p a_{\mu p},$$
$$u'_{\mu} \text{ in } u'_{\mu} + m'_{\mu} i\pi + n'_1 a_{\mu 1} + n'_2 a_{\mu 2} + \cdots + n'_p a_{\mu p},$$
$$\text{oder in } u''_{\mu} + m'_{\mu} i\pi + n'_1 a_{\mu 1} + n'_2 a_{\mu 2} + \cdots + n'_p a_{\mu p},$$
$$u''_{\mu} \text{ in } u''_{\mu} + m''_{\mu} i\pi + n''_1 a_{\mu 1} + n''_2 a_{\mu 2} + \cdots + n''_p a_{\mu p},$$
$$\text{oder bez. in } u'_{\mu} + m''_{\mu} i\pi + n''_1 a_{\mu 1} + n''_2 a_{\mu 2} + \cdots + n''_p a_{\mu p},$$

übergegangen sein, wenn m, n, m', n', m'', n'' ganze Zahlen sind. Es ist aber jedesmal $m_\mu + m'_\mu + m''_\mu = 0$, $n_\nu + n'_\nu + n''_\nu = 0$ und R multiplicirt sich deshalb durch einen solchen Umgang von σ, z in $\mathfrak{T}$ mit

$$e^{\Sigma h(m+m'+m'')i\pi + \Sigma g(n+n'+n'')i\pi} = 1,$$

R ist einwerthig. Da aber $f \cdot f' \cdot f''$ in $\sigma, \sigma', \sigma''$ symmetrisch ist, wird dieses Product eine rationale Function von z, und da es überall, wo es verschwindet oder unendlich wird, unendlich klein oder unendlich gross *zweiter* Ordnung wird, so ist $\sqrt{ff'f''}$ *rational* in z.

Diese Rationalität und daraus folgende Eindeutigkeit der Quadratwurzel bewirkt, dass s eine einwerthige Function ist, und zwar genügt s der Gleichung

$$s^4 - 2(f+f'+f'')s^2 - 8\sqrt{ff'f''}\,s + (f+f'+f'')^2 - 4(f'f'+f''f+ff') = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von z sind. Die Discriminante dieser Gleichung ist abgesehen von einem constanten Factor das Quadrat der Function,

$$ff(f''-f') + f'f'(f-f'') + f''f''(f'-f)$$

also die Discriminante der Gleichung

$$F^3 - (f+f'+f'')F^2 + (ff'+f'f''+f''f)F - ff'f'' = 0.$$

Es fragt sich nun, wo und wie s verzweigt ist. — Verschwindet f für $z = z_0$, $\sigma = \sigma_0$, so ist f (und ebenso sind f', f'') nach der Natur dieser Function dort in eine Reihe von der Form

$$(z - z_0)^2 (A + B(z-z_0) + C(z-z_0) + \cdots)$$

entwickelbar, und es ist dort $\sqrt{f}$ einwerthig, $ds : dz$ endlich. Es ist jener Punkt *kein* Verzweigungspunkt.

Aehnlich verhält es sich mit den Punkten, in welchen f oder f', f'' unendlich wird, sie sind ebenfalls keine Verzweigungspunkte. Der Differentialquotient

$$2\frac{ds}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{dz}}{\sqrt{f}} + \frac{\frac{\partial f'}{\partial z} + \frac{\partial f'}{\partial \sigma'}\frac{d\sigma'}{dz}}{\sqrt{f'}} + \frac{\frac{\partial f''}{\partial z} + \frac{\partial f''}{\partial \sigma''}\frac{d\sigma''}{dz}}{\sqrt{f''}}$$

kann da, und nur da unendlich gross werden, wo $\frac{d\sigma}{dz}, \frac{d\sigma'}{dz}, \frac{d\sigma''}{dz}$ unendlich gross wird, oder wenn z auf einen der Werthe $k_1 k_2 \ldots k_{2p+4}$

fällt. Das Verhalten von s an jenen Stellen lässt sich leicht direct bestimmen.

Ist

$$\sqrt{f} + \sqrt{f'} + \sqrt{f''}$$

der erste Werth von s, so sind die drei andern

$$\sqrt{f} - \sqrt{f'} - \sqrt{f''}, \; -\sqrt{f} + \sqrt{f'} - \sqrt{f''}, \; -\sqrt{f} - \sqrt{f'} + \sqrt{f''}.$$

Fallen nun die Werthe σ, σ' für $z = k$ zusammen, so wird ein Umgang um k den ersten und letzten Werth von s nicht *ändern*, weil f, f' nur vertauscht werden, und die Wurzeln durch einen (hinreichend nahe um k geführten) Umgang ihre Zeichen unverändert beibehalten. Der zweite und dritte Werth von s aber werden sich ändern, und zwar in einander übergehen. Es liegt also in der wie s verzweigten Fläche T über k ein und nur ein Verzweigungspunkt, so dass dieselbe $2p + 4$ einfache Windungspunkte enthält und zum Geschlecht $p - 1$ gehört. Die Form von s lehrt zugleich auch, dass T nicht zerfällt, sondern zusammenhängend ist. Denn führt man σ, z in $\mathfrak{T}$ herum, so in die Anfangslage zurück, dass $\sqrt{f}$ sein Zeichen gewechselt hat, was nach der Natur dieser Function stets möglich ist, so muss von den Wurzeln $\sqrt{f'}$, $\sqrt{f''}$ eine, und wegen der Eindeutigkeit von $\sqrt{ff'f''}$ nur eine ihr Zeichen gewechselt haben, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass $\sqrt{f'}$ in $\pm\sqrt{f''}$, $\sqrt{f''}$ in $\mp\sqrt{f'}$ übergegangen ist. Man gelangt also durch ein solches Herumführen von σ, z vom Werthe $\sqrt{f} + \sqrt{f'} + \sqrt{f''}$ zu einem andern, etwa zu $-\sqrt{f} - \sqrt{f'} + \sqrt{f''}$. Zu den beiden andern Werthen von s gelangt man aber, wenn man σ, z in $\mathfrak{T}$ herum so zum Anfang zurückführt, dass $\sqrt{f''}$ sein Zeichen wechselt, so dass man also von einem Werthe von s durch stetige Aenderung von z wirklich zu allen anderen Werthen von s gelangen kann, was nicht möglich wäre, wenn T zerfiele.

Durch verschiedene Wahl der Grössen h, g erhalten die Verzweigungspunkte verschiedene Lagen in Bezug auf die Blätter, man kann jedoch, wenn für eine Lage die Function s construirt ist, eine solche für jede andere Lage durch stetige Abänderung der k erhalten.

Ein Beispiel für die Construction einer Function s ist vielleicht erwünscht. Deshalb werde eine Function construirt, die in einer vierblättrigen Fläche vom Geschlecht Null einwerthig ist, deren sechs Verzweigungspunkte über $z = \pm 1, \pm\tau, \pm\tau\tau$ $\left(\tau = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ liegen.

Eine dreiblättrige Fläche $\mathfrak{T}$ vom Geschlecht Eins, welche über den sechs Punkten einfache Windungspunkte besitzt, ist wie die Function

$$\sigma = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - z^6}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - z^6}}$$

verzweigt, welche Wurzel der Gleichung

$$\sigma^3 - 3sz + 2 = 0$$

ist. Functionen f, die in *einem* Punkt unendlich gross und in *einem* unendlich klein zweiter Ordnung werden, können als Quotienten der Ausdrücke

$$\sigma + \sqrt[3]{2}, \quad \sigma + \tau\sqrt[3]{2}, \quad \sigma + \tau\tau\sqrt[3]{2}, \quad \sigma$$

gebildet werden. Setzen wir $f = (\sigma + \sqrt[3]{2}) : \sigma$, so erhalten wir für s den Ausdruck

$$s = \sqrt{1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sigma}} + \sqrt{1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sigma'}} + \sqrt{1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sigma''}}.$$

Da

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} + \frac{1}{\sigma''} = \frac{1}{2} 3z^2$$

$$\frac{1}{\sigma\sigma'} + \frac{1}{\sigma'\sigma''} + \frac{1}{\sigma''\sigma} = 0, \quad \frac{1}{\sigma\sigma'\sigma''} = -\frac{1}{2}$$

ist, so folgt

$$f + f' + f'' = 3 + \frac{1}{2} 3\sqrt[3]{2}\, z^2,$$

$$ff' + f'f'' + f''f = 3 + 3\sqrt[3]{2}\, z^2, \quad f'f''f' = \frac{1}{2} 3\sqrt[3]{2}\, z^2.$$

Mithin genügt s der Gleichung

$$s^4 - (6 + 3\sqrt[3]{2} z^2) s^2 - 4\sqrt[3]{12}\sqrt[6]{2} z s - 3 - \sqrt[3]{2} z^2 + \frac{1}{4} 9\sqrt[3]{4} z^4 = 0.$$

Jena, 21. April 1881.

Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Raume von n Dimensionen stattfinden.*)

Von

G. Veronese in Leipzig.

Es ist bekannt, dass eine Curve in der Ebene sechs Charaktere hat, und dass zwischen ihnen drei unabhängige Plücker'sche Gleichungen stattfinden. — Im Raume von drei Dimensionen hat eine Curve neun allgemeine Charaktere und sechs unabhängige Cayley-Plücker'sche Gleichungen. — Im Raume von n Dimensionen hat man folgenden Satz:

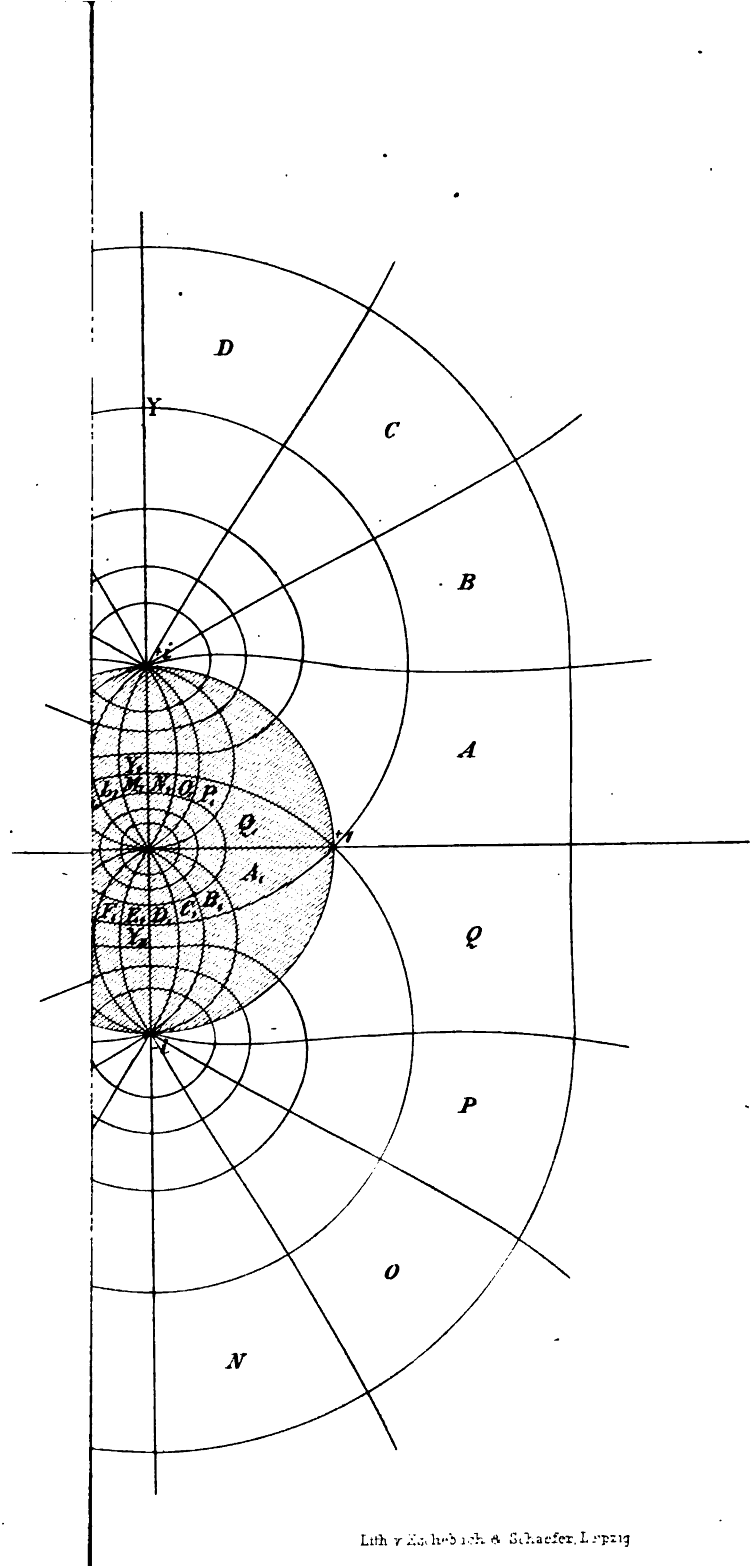
Eine Curve in einem n-dimensionalen Raume hat $3n$ allgemeine Charaktere, für welche $3(n-1)$ unabhängige Gleichungen stattfinden.

Es kommt noch eine Gleichung für das Geschlecht hinzu, so dass, wenn die Ordnung, die Zahl der Spitzen und das Geschlecht gegeben sind, die anderen Charaktere abgeleitet werden können. Die Curve kann ausserdem $n-2$ stationäre Räume und n Doppelelemente haben.

Leipzig, Juni 1881.

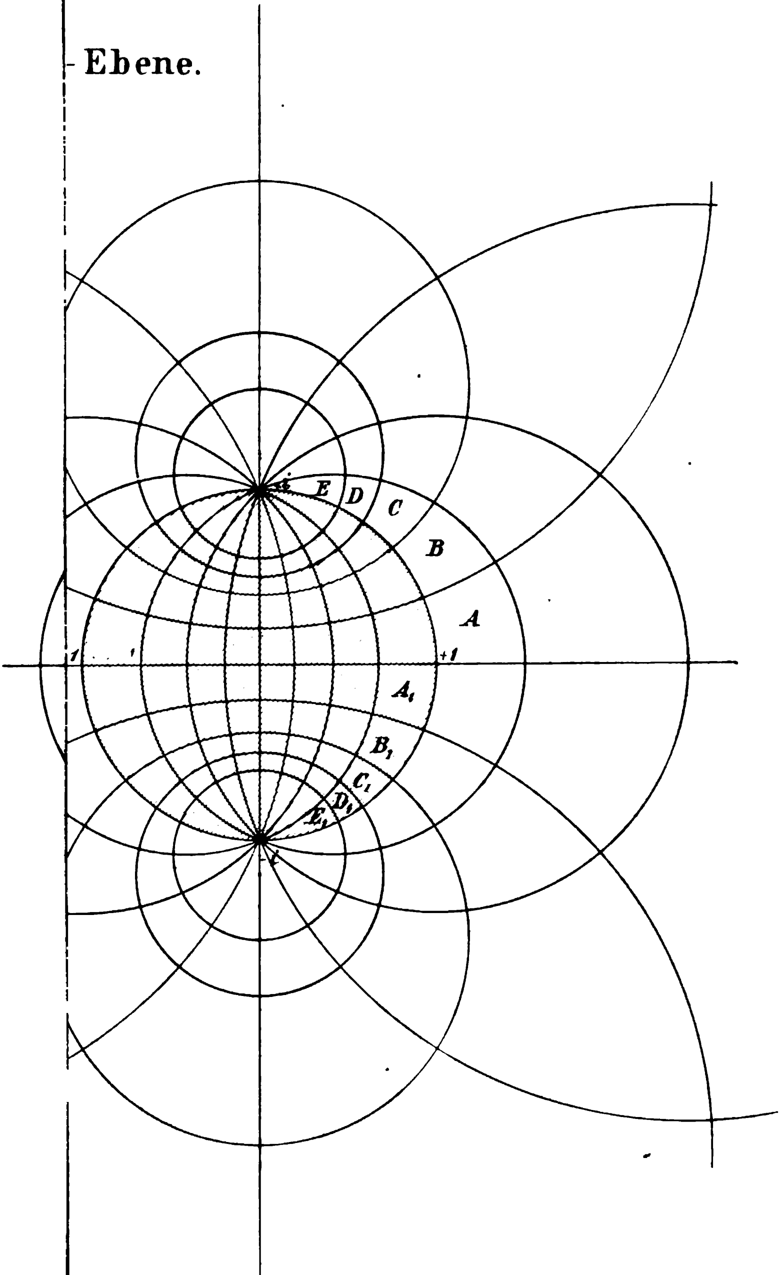
---

*) Dieser Satz gehört in eine grössere Arbeit über n-dimensionale Geometrie, welche in einem der nächsten Hefte der Mathem. Annalen publicirt werden wird.



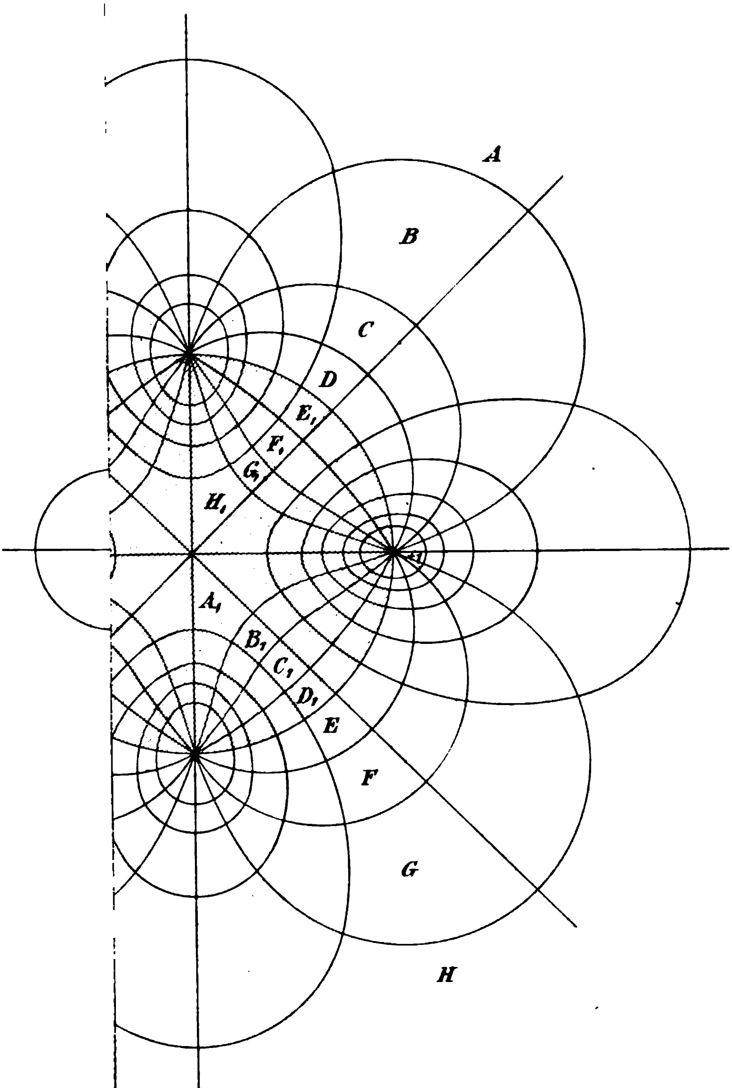
Lith v. Eschebach & Schaefer, Leipzig

- Ebene.



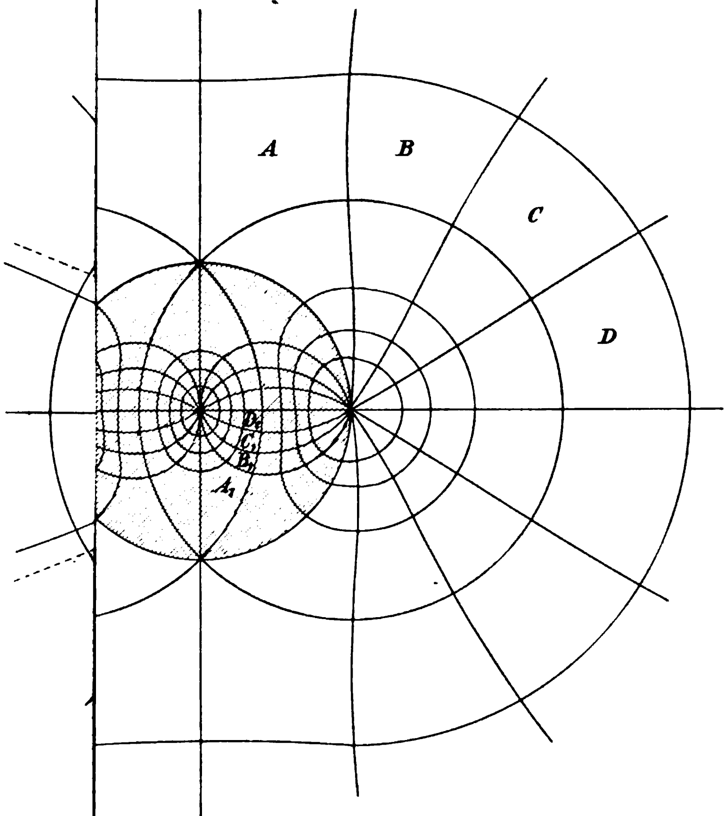
Lith. v. Eschebach & Schaefer Leipzig

z-Ebene.



Lith v Eschebach & Schaefer, Leipzig.

z-Ebene.



Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig

INHALT.

☞ **Jeder Band der Annalen wird 36—38 Druckbogen umfassen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Verantwortliche Redaction: **F. Klein** und **A. Mayer.**

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. Gordan zu Erlangen, Prof. C. Neumann zu Leipzig,
Prof. K. VonderMühll zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Leipzig und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XVIII. Band. 4. Heft.

Mit 2 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1881.

Ueber Galois' Theorie der algebraischen Gleichungen.

Von

Paul Bachmann in Münster.

Obwohl neuere Bearbeiter, unter ihnen besonders Herr C. Jordan*), die Untersuchungen von Galois**) über die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen dem allgemeinen Verständnisse durch eine weitere Ausführung und systematischere Entwicklung näher gebracht haben, so dürfte doch Mancher vom Studium dieses principiellen Theiles der Lehre von den Gleichungen durch den ausgedehnten Gebrauch der sehr abstracten Substitutionstheorie abgehalten worden sein, welcher von Jenen gemacht wird. Solchen wird vielleicht nachfolgende neue Darstellung des Gegenstandes nicht unwillkommen sein, welche die genannte Theorie, soweit es der Natur der Sache nach möglich scheint, vermeidet, indem sie sich im Wesentlichen nur auf die beiden fundamentalen Begriffe des Zahlenkörpers***) und der Irreductibilität gründet. Bei dieser Behandlung, welche übrigens schon von Herrn Dedekind angegeben worden ist, wird zugleich — meinen wir — von den Phasen des Auflösungsprocesses der Gleichungen eine viel concretere Anschauung, als bei der gebräuchlichen Darstellungsweise, gewonnen.

Nur die einfachsten Sätze über symmetrische und ähnliche Functionen werden vorausgesetzt.

1. Wir beginnen mit der Feststellung einiger fundamentalen Begriffe.

Die aufzulösende Gleichung

(1) $$F(x) = 0$$

sei eine Gleichung n^{ten} Grades:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

*) Vgl. z. B. seinen Commentaire sur Galois in Math. Ann., Bd. I, p. 141.

**) In Liouville's Journal, I. sér. t. XI.

***) Dedekind, sur la théorie des nombres entiers algébriques, § 15., insb. Ende von § 16.; vgl. auch Vorl. über Zahlentheorie von Dirichlet, herausg. von Dedekind, 3. Aufl., Suppl. XI.

deren Coefficienten aus den rationalen Zahlen und irgend welchen gegebenen Grössen $A, B, C, \cdots$ auf rationale Weise d. i. mittels einer endlichen Anzahl von Additionen, Subtractionen, Multiplicationen und Divisionen zusammengesetzt, deren Wurzeln

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$$

aber von einander verschieden sind.

Jede Grösse, welche gleichfalls auf rationale Weise aus $A, B, C, \cdots$ und rationalen Zahlen entsteht, wird als rational bekannt bezeichnet.

Wenn im Laufe einer Untersuchung den ursprünglich gegebenen Grössen $A, B, C, \cdots$ andere $y, z, \cdots$ als bekannt hinzugefügt werden, so sagt man, *man adjungire diese der Gleichung*, und nennt sie *adjungirte Grössen.* Durch solche Adjunction wird der Begriff der rational bekannten Grössen verändert, indem nach derselben alle Grössen rational bekannt sind, welche aus $A, B, C, \cdots$ *und* $y, z, \cdots$ rational zusammengesetzt sind.

Eine ganze Function $f(x)$ oder die Gleichung $f(x) = 0$, deren Coefficienten aus irgend welchen Gegebenen rational zusammengesetzt sind, heisst *irreductibel*, wenn es unmöglich ist, $f(x)$ in Factoren geringeren Grades zu zerlegen, deren Coefficienten in demselben Sinne rational sind. Durch Adjunction neuer Grössen kann es sich ereignen, dass eine bis dahin irreductible Gleichung reductibel wird.

Es ist bekannt, dass, wenn eine irreductible Gleichung mit einer anderen in gleichem Sinne rationalen Gleichung *eine* Wurzel gemeinschaftlich hat, *alle* ihre Wurzeln dieser Gleichung genügen. *Zwei in demselben Sinne irreductible Gleichungen, welche eine Wurzel gemeinsam haben, müssen folglich identisch mit einander sein.*

Ein System von Zahlen, die nicht sämmtlich verschwinden und die Eigenschaft haben, dass Summe, Differenz, Product und Quotient irgend zweier, seien sie verschieden oder identisch mit einander, wieder Zahlen des Systems sind, wird nach Herrn Dedekind's Vorgange *ein Zahlenkörper* genannt.

Solchen Körper bilden z. B. in jedem Momente der Untersuchung die rational bekannten Grössen.

Dasselbe gilt, wenn ξ eine Wurzel der irreductibeln Gleichung $f(x) = 0$ und m der Grad dieser Gleichung ist, von den rationalen Functionen von ξ oder auch von den sämmtlichen Grössen

$$A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + \cdots + A_{m-1}\xi^{m-1}, \tag{2}$$

bei denen $A_0, A_1, \cdots, A_{m-1}$ in demselben Sinne rational sind, wie die Coefficienten der Gleichung. *Ein Körper dieser Art soll kurz ein irreductibler (aus ξ erzeugter) Körper vom Grade m genannt werden.* Da jeder Wurzel der Gleichung ein solcher Körper entspricht, erhält man im Ganzen m der Gleichung entsprechende Körper, welche *zu einander conjugirt* heissen.

Satz I. *Damit die conjugirten Körper* — was die Gesammtheit der in ihnen enthaltenen Zahlen betrifft — *mit einander identisch sind, ist nothwendig und hinreichend, dass jede Wurzel der irreductibeln Gleichung durch jede andere rational ausdrückbar sei.*

Denn, enthalten die den Wurzeln ξ, ξ' entsprechenden Körper dieselben Zahlen, gehören also die Grössen

$$(3) \qquad A_0' + A_1'\xi' + A_2'\xi'^2 + \cdots + A'_{m-1}\cdot\xi'^{m-1}$$

für alle rational bekannten Werthe der Coefficienten A' zu den Grössen (2), so findet sich unter diesen auch ξ' selbst; und unter derselben Voraussetzung auch ξ im Körper der Grössen (3). — Umgekehrt, wenn ξ' rational durch ξ ausdrückbar ist, wird jede Zahl (3) zum Körper der Zahlen (2), desgleichen, wenn auch ξ rational ausdrückbar ist durch ξ', jede Zahl dieses Körpers zum Körper der Zahlen (3) gehören, beide Körper also identisch mit einander sein.

Der Körper der Zahlen (2) soll *ein Normalkörper* heissen, wenn er mit den zu ihm conjugirten identisch ist.

2. Die allgemeinste Frage nun, welche man sich bezüglich der Auflösung der Gleichungen stellen kann, ist diese: *durch welche (algebraische) Grössen kann eine gegebene Gleichung gelöst, d. h. können ihre Wurzeln rational ausgedrückt werden?* Zu ihrer Beantwortung wird man versuchen müssen, der Gleichung successive geeignete Grössen $y, z, \cdots$ zu adjungiren der Art, dass schliesslich ihre Wurzeln rational bekannt werden. Um aber diese Operation richtig zu leiten, wird man vor Allem klar zu stellen haben, welche Grössen denn von vornherein zu den rational bekannten gehören.

Die Coefficienten der Gleichung (1) sind bekanntlich bis auf die Vorzeichen gleich den einfachsten symmetrischen Functionen ihrer Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$, und jede rationale *symmetrische* Function der Wurzeln ist rational durch sie ausdrückbar.

Ist nun (1) die *allgemeine* Gleichung n^{ten} Grades, so sind die Coefficienten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ Unbestimmte und sie allein die Gegebenen. In diesem Falle sind die genannten Functionen der Wurzeln auch die einzigen Wurzelfunctionen, welche rational bekannt sind; denn eine Gleichung

$$\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) = \psi(a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

in welcher φ, ψ rationale Functionen der Argumente bezeichnen, kann, ohne identisch zu sein, nicht bestehen, da die Wurzeln, ebenso wie die Coefficienten, Unbestimmte bezeichnen, kann aber nur dann identisch sein, wenn φ sich, ebenso wie ψ, *symmetrisch* aus den Wurzeln zusammensetzt.

Dagegen ist klar, dass eine solche Beziehung zwischen den Wurzeln einer Gleichung und ihren Coefficienten, wenn diese bestimmte

Werthe haben, oder von bestimmt Gegebenen $A, B, C, \ldots$ abhängen, sehr wohl möglich ist, und können dann folglich auch ausser den symmetrischen Functionen der Wurzeln noch andere Gattungen rationaler Wurzelfunctionen existiren, welche als bekannt anzusehen sind. Auch leuchtet ein, dass dieser Gattungen stets neue auftreten können, wenn durch Adjunction geeigneter Grössen der Umfang der Gegebenen erweitert wird.

Hieraus ist ersichtlich, dass wir unsere Untersuchung auf die Betrachtung aller rationalen Functionen von den Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$, deren Coefficienten in den Gegebenen $A, B, C, \cdots$ rational sind, werden zu begründen haben. Diese bilden einen Körper, welcher K heisse.

Nun folgt bekanntlich aus dem Satze von den ähnlichen Functionen, dass jede rationale Wurzelfunction rational ausgedrückt werden kann durch eine solche Function, welche bei den Vertauschungen der n Wurzeln

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

numerisch verschiedene Werthe erlangt. Eine Function dieser Art ist

$$\omega_0 = h_0\alpha_0 + h_1\alpha_1 + \cdots + h_{n-1}\alpha_{n-1}$$

für passende Werthe der h_i; setzt man nämlich z. B.

$$h_0 = 1,\ h_1 = h,\ h_2 = h^2,\ \cdots,\ h_{n-1} = h^{n-1},$$

so können zwei bestimmte der N *algebraisch* verschiedenen Werthe von ω_0 höchstens für $n-1$ Werthe von h einander *numerisch* gleich sein, und demnach giebt es nicht mehr als

$$(n-1) \cdot \frac{N(N-1)}{2}$$

verschiedene Werthe von h, für welche *irgend zwei* jener Ausdrücke numerisch gleich sein können. Für jeden anderen Werth von h müssen sie sämmtlich von einander verschieden sein, auch leuchtet ein, dass h sogar rational, ω_0 also im Körper K gewählt werden kann.

3. Diese verschiedenen Werthe von ω_0 sind Wurzeln einer Gleichung $P(x) = 0$, deren Coefficienten als symmetrische Functionen von $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ rational bekannt sind. Die Function $P(x)$ wird jederzeit, mag man die Gleichung (1) in ihrem ursprünglichen Zustande oder nach Adjunction irgend welcher Grössen betrachten, wie leicht zu sehen, in irreductible Factoren *desselben Grades* zerfallen, weil ihre Wurzeln jede durch eine beliebige von ihnen rational ausdrückbar sind. Wir bezeichnen mit $G(x)$ denjenigen irreductibeln Factor von $P(x)$, welcher rational bekannte Coefficienten und die Wurzel ω_0 hat, seinen Grad mit g, und nennen

$$(4) \qquad \omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{g-1}$$

die Wurzeln der irreductibeln, sogenannten *Galois'schen Gleichung*

(5) $$G(x) = 0.$$

Alsdann sind die Functionen des Körpers K, weil sie rational durch ω_0 ausdrückbar sind, offenbar sämmtlich gleich einer Zahl der folgenden Form:

(6) $$C_0 + C_1\omega_0 + C_2\omega_0^2 + \cdots + C_{g-1}\omega_0^{g-1},$$

in welcher die Coefficienten rational bekannt sind; und umgekehrt repräsentirt jede Zahl dieser Form den Werth einer Function des Körpers K. Diese Zahlen bilden wieder einen Körper G, welcher *der Galois'sche Körper der Gleichung* (1) genannt werden soll. *Die Zahl g heisse sein Grad; sie muss nach der über $P(x)$ gemachten Bemerkung stets ein Theiler von N sein.*

Der Galois'sche Körper ist ein Normalkörper, weil (Satz I.) jede der Functionen $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_{g-1}$ durch eine beliebige von ihnen rational ausdrückbar ist. Setzt man, dieser Bemerkung entsprechend, indem man mit $\Theta_0, \Theta_1, \cdots, \Theta_{g-1}$ rationale Functionen bezeichnet, die Wurzeln der Gleichung (5) in die Form:

$$\omega_0 = \Theta_0(\omega_0), \quad \omega_1 = \Theta_1(\omega_0), \cdots, \omega_{g-1} = \Theta_{g-1}(\omega_0),$$

so ist, wenn ω *irgend eine* Wurzel von (5) bedeutet, für jeden Werth i aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots, g-1$ auch $\Theta_i(\omega)$ eine Wurzel; denn wegen der Irreductibilität der Gleichung (5) wird die rationale Gleichung $G[\Theta_i(x)] = 0$, weil sie die Wurzel ω_0 mit jener gemein hat, durch jede Wurzel ω derselben erfüllt, und demnach

$$G[\Theta_i(\omega)] = 0.$$

Wegen der Irreductibilität der Gleichung (5) wird ferner eine Function

$$u_0 = C_0 + C_1\omega_0 + C_2\omega_0^2 + \cdots + C_{g-1}\cdot\omega_0^{g-1}$$

des Körpers K dann und nur dann von vornherein bekannt sein, wenn $C_1 = C_2 \cdots = C_{g-1} = 0$ ist. Ihr Werth bleibt daher ungeändert, wenn irgend eine der Grössen (4) statt ω_0 gesetzt wird; wie denn auch umgekehrt eine Function u_0, welche bei diesen Substitutionen sich nicht ändert, als symmetrische Function der Grössen (4) dargestellt werden kann, also durch die bekannten Grössen rational ausdrückbar ist. Die Werthe dieser Functionen bilden einen in G enthaltenen Körper C, *den Körper der (ursprünglich) bekannten Functionswerthe*, die Substitutionen aber, welche die Werthe (4) aus ω_0 hervorbringen, *die Gruppe der Gleichung* (1) (Galois).

4. Nunmehr betrachten wir eine Function u_0 des Körpers K, deren Werth dem Körper C nicht angehört. Die g Werthe derselben, welche den Substitutionen der Gruppe entsprechen, werden einer Gleichung $\Pi(x) = 0$ Genüge leisten, deren Coefficienten als unveränderliche Functionen rational bekannt sind. Mit $\Gamma(x)$ bezeichnen wir denjenigen

irreductibeln Factor von $\Pi(x)$, welchem die Wurzel u_0 zukommt, mit γ seinen Grad, und nennen

$$u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{\gamma-1}$$

die Wurzeln der irreductibeln Gleichung

$$\Gamma(x) = 0. \tag{7}$$

Die Function u_0 kann rational durch ω_0 dargestellt werden, was in der Gleichung $u_0 = \psi(\omega_0)$ ausgedrückt werde. Aus der rationalen Beziehung

$$\Gamma(u_0) = \Gamma\psi(\omega_0) = 0$$

folgt aber wegen der Irreductibilität der Gleichung (5), dass die sämmtlichen Grössen

$$\psi\Theta_0(\omega_0),\quad \psi\Theta_1(\omega_0), \cdots, \psi\Theta_{g-1}(\omega_0)$$

Wurzeln der Gleichung (7) sind. Angenommen nun, unter diesen seien mehrere, etwa die ersten h, gleich u_0, und folglich

$$\psi\Theta_0(\omega_0) = \psi\Theta_1(\omega_0) = \cdots = \psi\Theta_{h-1}(\omega_0), \tag{8}$$

so bestehen diese Relationen auch für jede andere Wurzel ω der Gleichung (5):

$$\psi\Theta_0(\omega) = \psi\Theta_1(\omega) = \cdots = \psi\Theta_{h-1}(\omega). \tag{9}$$

Die h Wurzeln

$$\Theta_0(\omega),\quad \Theta_1(\omega), \cdots, \Theta_{h-1}(\omega) \tag{10}$$

der Gleichung (5) sind aber erstens untereinander verschieden, weil z. B. aus der Gleichheit $\Theta_1(\omega) = \Theta_2(\omega)$ sich fälschlich $\Theta_1(\omega_0) = \Theta_2(\omega_0)$ ergäbe. Zweitens sind sie auch von den Wurzeln

$$\Theta_0(\omega_0),\quad \Theta_1(\omega_0), \cdots, \Theta_{h-1}(\omega_0) \tag{11}$$

sämmtlich verschieden, sobald es *eine* unter ihnen ist; denn, fände sich auch nur eine von ihnen unter den Wurzeln (11), so würden die sämmtlichen Grössen (9) gleich u_0, und demnach müssten die Wurzeln (10) sämmtlich zu den Wurzeln (11) gehören, welche nach der Voraussetzung *ausschliesslich* den Werth u_0 hervorbringen.

Hieraus ist zu schliessen, dass immer je h von den Wurzeln der Gleichung (5) dieselbe Wurzel der Gleichung (7) hervorbringen und dass folglich g ein Vielfaches von h, nämlich $g = \gamma h$ sein muss. Man gewinnt daher den Satz:

Satz II. *Eine jede Function des Körpers K, welche nicht selbst rational bekannt ist, genügt einer irreductibeln Gleichung mit rational bekannten Coefficienten, deren Grad ein Theiler von g ist.*

Zum Körper K gehören insbesondere die Wurzeln der Gleichung (1) selbst. Ist diese also irreductibel, so muss ihr Grad ein Theiler von g sein. Man findet daher den

Zusatz. *Der Grad des Galois'schen Körpers einer Gleichung vom Grade n ist theilbar durch n, wenn sie irreductibel ist.*

Der Wurzel u_0 der irreductibeln Gleichung (7) entspricht der Körper Γ aller Zahlen von der Form

(12) $$C_0 + C_1 u_0 + C_2 u_0^2 + \cdots + C_{\gamma-1} \cdot u_0^{\gamma-1}$$

mit rational bekannten Coefficienten. Sie enthalten in sich die Zahlen des Körpers C und gehören selbst insgesammt zum Galois'schen Körper G der Gleichung (1).

5. Satz III. *Wird nun die Function u_0 der Gleichung* (1) *adjungirt, so erweitert sich der Körper der rational bekannten Functionswerthe, der ursprünglich C ist, zum Körper Γ.* Gleichzeitig aber wird die bisher irreductible Galois'sche Gleichung reducirt; denn die nach Adjunction von u_0 rationale Gleichung

(13) $$\psi(x) - u_0 = 0$$

hat, wie gezeigt, nur noch die h Wurzeln

$$\Theta_0(\omega_0), \quad \Theta_1(\omega_0), \quad \cdots, \quad \Theta_{h-1}(\omega_0)$$

mit der Gleichung (5) gemeinschaftlich. Nennt man also

$$\mathfrak{G}(x, u_0)$$

denjenigen in u_0 irreductibeln Factor von $G(x)$, welchem die Wurzel ω_0 zukommt, so ist die Gleichung

(14) $$\mathfrak{G}(x, u_0) = 0$$

vom Grade $\mathfrak{g} = h$.

Denn zunächst kann ihr Grad $\mathfrak{g}$ nicht grösser sein als h, weil sonst die Gleichung (13) mehr als h Wurzeln mit der Gleichung (5) gemeinsam haben müsste. Andererseits erhält man, wenn u eine Unbestimmte bedeutet, indem man $G(x)$ durch $\mathfrak{G}(x, u)$ theilt, eine Gleichung von der Form:

$$G(x) = \mathfrak{G}(x, u) \cdot Q(x, u) + R(x, u),$$

worin Q und R ganze Functionen von x und u bezeichnen, deren letztere bezüglich x von kleinerem Grade ist als $\mathfrak{G}$. Man findet hieraus die Identität

$$R(x, u_0) = 0,$$

weil diese Beziehung durch jede Wurzel von (14) erfüllt werden muss; d. h. die Coefficienten von $R(x, u)$ verschwinden sämmtlich für $u = u_0$ und folglich wegen der Irreductibilität der Gleichung (7) auch für $u = u_1, u_2, \cdots, u_{\gamma-1}$. Hieraus folgt, dass $G(x)$ durch jede der Functionen

$$\mathfrak{G}(x, u_0), \quad \mathfrak{G}(x, u_1), \quad \cdots, \quad \mathfrak{G}(x, u_{\gamma-1})$$

theilbar ist. Das Product dieser Functionen ist aber eine ganze Function von x vom Grade $\mathfrak{g}\gamma$, deren Coefficienten als symmetrische Functionen der Wurzeln von (7) in den Zahlen des Körpers C rational sind, und welche, weil sie mit der in demselben Sinne rationalen und irreductibeln Function $G(x)$ gemeinsame Wurzeln hat, durch diese

Function vom Grade $h\gamma$ theilbar ist. Da folglich $\mathfrak{g} \overline{\gtrless} h$, so findet sich durch Vergleichung mit der bereits erlangten Beziehung $\mathfrak{g} \overline{\gtrless} h$, wie behauptet, $\mathfrak{g} = h = \frac{g}{\gamma}$.

Satz IV. *Durch Adjunction von u_0 wird demnach die ursprüngliche Galois'sche Gleichung vom Grade g durch die neue Galois'sche Gleichung* (14) *nur noch vom Grade $\frac{g}{\gamma}$, und folglich der ursprüngliche Galois'sche Körper der Gleichung* (1) *vom Grade g durch einen neuen nur noch vom Grade $\frac{g}{\gamma}$ ersetzt, dessen Coefficienten die Zahlen des Körpers Γ sind.*

Werden mehrere Functionen des Körpers K, z. B.

$$u_0', u_0'', \cdots, u_0^{(m)} \tag{15}$$

adjungirt, so kommt dies auf die Adjunction einer einzigen passend gewählten Function dieses Körpers zurück. Denn in dem Ausdrucke

$$u_0 = h_1 u_0' + h_2 u_0'' + \cdots + h_m u_0^{(m)}$$

lassen sich für die h_i (vgl. Nr. 2.) rationale Werthe so wählen, dass bei jeder Vertauschung der Wurzeln, welche wenigstens eine der Functionen verändert, auch u_0 sich ändert; während natürlich u_0 ungeändert bleibt, sobald die Functionen (15) gleichzeitig ihren Werth behalten. Der so bestimmten Function u_0 sind also sämmtliche Functionen (15) ähnlich und können demnach durch u_0 rational ausgedrückt werden. Der Körper, welcher in rationaler Weise aus den Grössen (15) entsteht, muss daher identisch sein mit demjenigen, der in gleicher Weise aus u_0 hervorgebracht wird.

6. Sei jetzt Γ ein beliebiger in G enthaltener Körper (doch wird stillschweigend vorausgesetzt, dass Γ von C und von G selbst verschieden sei), dessen Glieder, wie alle in G enthaltenen, die Werthe von Functionen des Körpers K bezeichnen.

Wir wollen die Grössen (15) *unabhängig von einander nennen, wenn eine Gleichung*

$$k_1 u_0' + k_2 u_0'' + \cdots + k_m \cdot u_0^{(m)} = 0$$

mit rational bekannten Coefficienten nur dann bestehen kann, wenn die letztern gleich Null sind.

Demgemäss wird man im Körper Γ eine gewisse grösste Anzahl, welche g nicht erreicht, von unabhängigen Gliedern $u_0', u_0'', \cdots, u_0^{(m)}$ angeben können der Art, dass jedes andere Glied U von Γ in der Form

$$U = k_1 u_0' + k_2 u_0'' + \cdots + k_m u_0^{(m)} \tag{16}$$

mit rational bekannten Coefficienten darstellbar ist. Denn da die Grössen (15) dem Körper G angehören, erhält man m Gleichungen von der Form:

$$u_0' = C_0' + C_1'\omega_0 + \cdots + C'_{g-1} \cdot \omega_0^{g-1}$$
$$u_0'' = C_0'' + C_1''\omega_0 + \cdots + C''_{g-1} \cdot \omega_0^{g-1}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$u_0^{(m)} = C_0^{(m)} + C_1^{(m)}\omega_0 + \cdots C_{g-1}^{(m)} \cdot \omega_0^{g-1},$$

welche gegen die Voraussetzung über die Grössen (15) nicht unabhängig sein könnten, wenn $m > g$ wäre, für $m = g$ aber, da sie unabhängig von einander sein sollen, gestatten würden, ω_0 und damit den gesammten Körper G in der Form (16) auszudrücken d. i. dem Körper Γ einzuverleiben.*)

Ersetzt man nun die Functionen (15) nach dem in voriger Nr. Bemerkten durch eine einzige Function u_0, welche, wie gezeigt worden, einer gewissen irreductibeln Gleichung $\Gamma(x) = 0$ vom Grade γ genügt, deren Coefficienten in den Zahlen des Körpers C rational sind, so wird der Körper Γ identisch mit dem Körper der Zahlen von der Form (12). Demnach ist $m = \gamma$; denn die sämmtlichen Zahlen dieses Körpers sind durch die γ unabhängigen Grössen

$$1,\ u_0,\ u_0^2,\ \cdots,\ u_0^{\gamma-1}$$

in jener Form mit rational bekannten Coefficienten darstellbar.

Dies Resultat lässt sich folgendermassen aussprechen:

Satz V. *Zu jedem in G enthaltenen Körper Γ gehört eine Function u_0 des Körpers K von der Art, dass Γ als ein aus u_0 gebildeter irreductibler Körper dargestellt werden kann.*

Dies vorausgeschickt, nehmen wir an, Γ sei ein in G enthaltener Normalkörper, welcher selbst keinen Normalkörper weiter umfasst.

Die Wurzeln

$$u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_{\gamma-1}$$

der irreductibeln Gleichung $\Gamma(x) = 0$, deren jede den Körper Γ hervorbringt, sind alsdann (nach Satz I.) rational durch u_0 ausdrückbar; und weil Gleiches von jeder rationalen Function der Wurzeln $u_0, u_1, \cdots u_{\gamma-1}$ der Gleichung $\Gamma(x) = 0$ gilt, ist Γ mit dem Galois'schen Körper dieser Gleichung identisch.

Letzterer kann demnach keinen Normalkörper enthalten. Denn sonst gäbe es eine rationale Function der Grössen $u_0, u_1, \cdots, u_{\gamma-1}$:

$$t = \psi(u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_{\gamma-1}),$$

welche zu ihm gehört und einer irreductibeln Gleichung $\Gamma'(x) = 0$ genügt, deren Wurzeln rational unter einander ausdrückbar sind. Dieselbe Function t ist aber auch eine gewisse in K enthaltene Function von $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$, und wegen der genannten Eigenschaften derselben würde, wenn sie der Gleichung (1) adjungirt wird, der Körper der rational bekannten Functionswerthe sich (nach Satz III.) zu dem aus t gebildeten Normalkörper erweitern, dieser aber gegen die Voraus-

*) Vgl. Vorl. üb. Zahlenth. v. Dirichlet, 3. Aufl., p. 466.

setzung in Γ enthalten sein, da t selbst, als rationale Function von u_0 darstellbar, diesem Körper angehört.

Die Betrachtungen der letzten drei Nummern, welche wir zunächst auf den ursprünglichen Zustand der Gleichung (1) bezogen haben, werden offenbar ihre Gültigkeit auch dann behalten, wenn sie auf einen Augenblick bezogen werden, in welchem derselben bereits eine oder mehrere Functionen des Körpers K adjungirt worden sind.

7. Wir wollen eine irreductible Gleichung, deren Wurzeln rational unter einander abhangen und für welche der Galois'sche Körper keinen Normalkörper enthält, hinfort kurz *eine einfache Gleichung* (C. Jordan) nennen. Bei solcher Ausdrucksweise lehren die vorausgeschickten Betrachtungen den Satz, *dass die Auflösung jeder Gleichung auf die von einfachen Gleichungen zurückführbar ist.*

Denn zuvörderst darf offenbar die gegebene Gleichung (1) als irreductibel vorausgesetzt werden, widrigenfalls man nur jeden ihrer irreductibeln Factoren successive gleich Null zu setzen und in der nachfolgenden Weise zu behandeln hätte.

Enthält nun der Galois'sche Körper G der Gleichung (1) einen Normalkörper, so wird man diesen, wie leicht einzusehen, stets so wählen können, dass er selbst keinen Normalkörper weiter enthält. Eine zu diesem Körper Γ gehörige Function u_0 von den Wurzeln der Gleichung (1) leistet dann einer einfachen Gleichung $\Gamma(x) = 0$ Genüge, und ihre Adjunction d. i. die Auflösung dieser Gleichung erweitert den Körper C der ursprünglich bekannten Functionswerthe zum Körper Γ, indem sie gleichzeitig die ursprüngliche Galois'sche Gleichung $G(x) = 0$ vom Grade g durch eine neue

$$\mathfrak{G}(x, u_0) = 0$$

vom kleineren Grade $\mathfrak{g} = \frac{g}{\gamma}$ ersetzt. Der Galois'sche Körper der Gleichung (1) ist nunmehr identisch mit der Gesammtheit der Zahlen von der Form

$$\Gamma_0' + \Gamma_1'\omega_0 + \Gamma_2'\omega_0^2 + \cdots + \Gamma'_{\mathfrak{g}-1} \cdot \omega_0^{\mathfrak{g}-1},$$

worin die Coefficienten die Zahlen des Körpers Γ bedeuten.

Enthält jener Körper wieder noch einen Normalkörper in sich, so kann man mittels derselben Betrachtung eine neue einfache Gleichung $\Gamma'(x) = 0$ vom Grade γ' einführen, bei deren Auflösung die neue Galois'sche Gleichung durch eine dritte von noch kleinerem Grade $\mathfrak{g}' = \frac{\mathfrak{g}}{\gamma'}$ ersetzt wird; und kann solange in gleicher Weise fortfahren, als der neue Galois'sche Körper noch einen Normalkörper enthält. Da die Grade der Galois'schen Gleichungen aber nicht ohne Ende abnehmen können, muss endlich der Fall eintreten, dass der Galois'sche Körper keinen Normalkörper mehr enthält; dann ist aber die entsprechende Galois'sche Gleichung selbst eine einfache, und durch ihre Auflösung werden alle Functionen, welche der Körper K enthält, bekannt und die Gleichung (1) aufgelöst.

Hieraus entnehmen wir das wichtige Princip, dass es, statt einer gegebenen Gleichung die Wurzeln einer *beliebigen* anderen zu adjungiren, genügen wird, ihr successive die Wurzeln der *einfachen* Gleichungen zu adjungiren, auf deren Auflösung diese letztere zurückkommt. Wenn wir uns demnach jetzt die Frage stellen, welche Wirkung es auf die Gleichung (1) habe, wenn wir ihr die Wurzeln irgend einer anderen Gleichung adjungiren, so dürfen wir diese letztere als einfach voraussetzen.

8. Es sei in irgend einem Momente der Untersuchung C' der Körper der rational bekannten Functionswerthe, G' der Galois'sche Körper der Gleichung (1), und

$$G'(x) = 0$$

die entsprechende Galois'sche Gleichung vom Grade g'. Wir bezeichnen mit

$$\varphi(x) = 0 \tag{17}$$

eine Gleichung vom Grade p mit gegenwärtig rational bekannten Coefficienten, und ihre Wurzeln mit

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{p-1}.$$

Dieser Gleichung entspricht dann eine gewisse Galois'sche Gleichung

$$H(x) = 0$$

vom Grade q und ein Galois'scher Körper, welcher H heisse.

Die Körper G' und H werden gewisse Glieder gemeinschaftlich haben, welche, nach der Natur der Zahlenkörper, in ihrer Gesammtheit einen besonderen Körper Γ (den grössten gemeinschaftlichen Theiler von G' und H — Dedekind —) bilden. Seine Glieder repräsentiren die Werthe derjenigen Functionen von den Wurzeln der Gleichung (1), welche *auch* als rationale Functionen von den Wurzeln der Gleichung (17) mit rational bekannten Coefficienten dargestellt werden können, und daher nach Auflösung dieser Gleichung rational bekannt werden. Ist demnach der Körper Γ, welcher C' nothwendig in sich enthält, von C' verschieden, so kann er, als in G' enthalten, nach Satz V. durch eine Function u_0 von den Wurzeln der Gleichung (1) hervorgebracht werden, welche einer, in den Zahlen des Körpers C' rationalen und gegenwärtig irreductibeln Gleichung $\Gamma(x) = 0$ vom Grade γ genügt, und folglich sind die Glieder des Körpers Γ identisch mit der Gesammtheit der Zahlen von der Form:

$$C_0' + C_1' u_0 + C_2' u_0^2 + \cdots + C_{\gamma-1} \cdot u_0^{\gamma-1},$$

in welcher die Coefficienten rational bekannt sind.

Nun sind die Wurzeln der Gleichung $\Gamma(x) = 0$ *einerseits* verschiedene Werthe der Function u_0 von den Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$. *Andererseits* sind die Glieder des Körpers Γ, insbesondere auch u_0 selbst in H enthalten, also mittels $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{p-1}$ rational ausdrückbar; und da $\Gamma(x) = 0$ die irreductible Gleichung mit rational bekannten Coefficienten ist, der u_0 genügt, so sind deren Wurzeln auch verschiedene Werthe von u_0 als einer Function von den Wurzeln $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{p-1}$, sie sind also selbst rationale Functionen dieser Wurzeln und demnach sämmtlich Glieder des Körpers Γ und können eine jede, so gut wie u_0, benutzt werden, um diesen Körper zu erzeugen.

Das heisst aber nichts Anderes, als dass Γ ein — in G' sowohl, wie in H — enthaltener *Normalkörper* ist.

Indem man nun die Gleichung (17) auflöst, erweitert man nach der Voraussetzung den Körper C' zum Körper Γ d. h. man adjungirt die Function u_0 oder löst die Gleichung $\Gamma(x) = 0$ auf. Hierdurch aber wird nach Satz IV. der Grad des Galois'schen Körpers G' der Gleichung (1) auf $g'' = \frac{g'}{\gamma}$ erniedrigt. Und da der Körper Γ und die Gleichung $\Gamma(x) = 0$ zur Gleichung (17) in demselben Verhältniss stehen, wie zur Gleichung (1), wird die Auflösung der letztern den Grad des Galois'schen Körpers H der Gleichung (17) auf $q' = \frac{q}{\gamma}$ reduciren. Man findet hieraus:

Satz VI. *Wenn die Auflösung der Gleichung* (17) *den Grad g' des Galois'schen Körpers von* (1) *auf g'' erniedrigt, so erniedrigt umgekehrt die Auflösung dieser Gleichung den Grad q des Galois'schen Körpers jener auf q', in der Weise, dass*

$$\frac{g'}{g''} = \frac{q}{q'}$$

ist.

9. Wird nun die bisher beliebige Gleichung (17) als einfach vorausgesetzt, so enthält H als Galois'scher Körper derselben keinen Normalkörper ausser sich selbst, und folglich muss dann Γ mit H identisch sein. Hieraus folgt einerseits, dass jedes Glied von H, insbesondere jede Wurzel der Gleichung (17) eine zu G' gehörige Zahl d. i. eine Function der Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ ist; andererseits muss $\gamma = q$, und da bei einfachen Gleichungen (vgl. Nr. 6.) der Grad des Galois'schen Körpers gleich dem der Gleichung ist, $\gamma = p$ sein. Man gewinnt folglich den wichtigen

Satz VII. *Der Körper der rational bekannten Functionswerthe einer Gleichung kann durch Auflösung einer einfachen Gleichung nur dann sich erweitern, wenn die Wurzeln der letzteren rationale Functionen von den Wurzeln der ersteren sind. Bei eintretender Erweiterung wird* *der Grad der Galois'schen Gleichung in der Weise reducirt, dass er durch den Grad der einfachen Gleichung getheilt wird.*

Versetzen wir uns demgemäss in einen Augenblick, in welchem der Gleichung (1) bereits eine oder mehrere Functionen des Körpers K adjungirt sein können, so werden, bei Beibehaltung der obigen Bezeichnungen, die Functionen des Körpers K sämmtlich durch die Zahlen von der Form

$$C_0' + C_1'\omega_0 + C_2'\omega_0^2 + \cdots + C_{g'-1}' \cdot \omega_0^{g'-1}$$

repräsentirt sein, in welcher die C_i' die Zahlen des Körpers C' sind, und werden es solange auch bleiben, als die Adjunction anderer Grössen den Körper C' der rational bekannten Functionen nicht erweitert, insbesondere also solange nur solche Hilfsgleichungen aufgelöst werden, deren Wurzeln nicht rationale Functionen von den Wurzeln der gegebenen sind. Wird aber durch Auflösung einer einfachen Gleichung (17) vom Grade p, deren Coefficienten von den zuvor Adjungirten abhängig sein können, der Körper C' zu einem in G' enthaltenen Normalkörper Γ erweitert, so wird offenbar dasselbe auch ohne die Hilfsgleichungen durch Adjunction einer Function u_0 des Körpers K geleistet, welche einer *in den Zahlen des Körpers C' rationalen und vor Auflösung der letzten Hilfsgleichung irreductibeln* Gleichung $\Gamma(x) = 0$ vom Grade $\gamma = p$ genügt.

Und diese Bemerkung lässt sich nunmehr auf jeden spätern Moment der Untersuchung übertragen.

10. Da wir für diese Untersuchung uns vorgesetzt haben, die Bedingung für die algebraische Auflösbarkeit einer Gleichung von einem Primzahlgrade zu bestimmen, beschränken wir uns nun auf die Betrachtung derjenigen Gleichungen, welche nach Herrn Kronecker's Vorgange Abel'sche Gleichungen genannt werden und durch den Umstand charakterisirt sind, dass, wenn ihre Wurzeln in bestimmter Weise cyklisch geordnet werden, eine jede von ihnen die gleiche rationale Function von der vorhergehenden ist. Die Theorie derselben*) wird hier als bekannt vorausgesetzt und nur in Erinnerung gebracht, dass eine Abel'sche Gleichung, deren Grad eine zusammengesetzte Zahl ist, auf andere von Primzahlgraden zurückgeführt werden kann. Letztere aber sind einfache Gleichungen; denn, da der Grad ihres Galois'schen Körpers (vgl. Ende von Nr. 6.) ihrem Grade selbst gleich also eine Primzahl ist, kann kein anderer Körper in Letzterem enthalten sein ausser dem der rational bekannten Functionswerthe.

Dies vorausgeschickt, sei p eine Primzahl, ξ eine Wurzel der Gleichung

---

*) Abel, mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement, O. compl. I, p. 114, sowie auch Cr. J. Bd. 4, p. 26.

(18) $$\frac{x^p-1}{x-1}=0,$$

und $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{p-1}$ die Wurzeln der Gleichung

(19) $$x^p = A,$$

in welcher A rational bekannt. Da man jene p Wurzeln in solcher Weise wählen kann, dass

$$\gamma_1 = \xi\cdot\gamma_0,\ \gamma_2 = \xi\cdot\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_0 = \xi\cdot\gamma_{p-1}$$

und folglich jede von ihnen dieselbe, nach Adjunction von ξ rationale Function der vorhergehenden ist, wie die erste von der letzten, so ist *die binomische Gleichung* (19) *nach Adjunction von* ξ *eine Abel'sche Gleichung;* dasselbe gilt aber bekanntlich von der Kreistheilungsgleichung (18), und demnach kann man mit Beachtung der voraufgeschickten Bemerkung sagen, dass die Ausziehung einer Wurzel von einem Primzahlgrade, folglich offenbar jede Wurzelausziehung und demnach auch die Lösung jeder durch Wurzelausziehungen auflösbaren Gleichung auf eine Reihe von Abel'schen Gleichungen von Primzahlgraden zurückführbar ist.

Da umgekehrt jede Abel'sche Gleichung algebraisch auflösbar ist, gewinnt man zunächst das Resultat: *Eine Gleichung ist dann und nur dann algebraisch auflösbar, wenn sie durch Abel'sche Gleichungen von Primzahlgraden auflösbar ist.*

Verfolgen wir nun die Phasen der Auflösung bei einer algebraisch lösbaren Gleichung (1), wie sie den successive aufzulösenden Abel'schen Gleichungen von Primzahlgraden entsprechen!

Nachdem möglicherweise die Auflösung einer oder mehrerer solcher Gleichungen den Körper der bekannten Functionswerthe und folglich die Gestalt des Galois'schen Körpers der Gleichung (1) nicht verändert, sei $\varphi(x) = 0$ eine Abel'sche Gleichung vom Primzahlgrade p, deren Auflösung jenen Körper zum Körper Γ erweitert. Nach Nr. 8. ist Γ ein Normalkörper und kann diese Erweiterung (vor. Nr.) auch ohne die Hilfsgleichungen geleistet werden durch Adjunction einer Function u_0 des Körpers K, welche einer irreductibeln Gleichung $\Gamma(x) = 0$ des Grades $\gamma = p$ mit rational bekannten Coefficienten genügt; diese Gleichung ist aber eine Abel'sche Gleichung, da ihre Wurzeln rational von einander abhängig sein müssen und ihr Grad eine Primzahl ist. Da nunmehr und in jedem folgenden Stadium der Untersuchung dieselbe Betrachtung sich wiederholen lässt, so erkennt man, *dass die Wurzeln der sämmtlichen Abel'schen Gleichungen, die zur Lösung der gegebenen dienen, als Functionen des Körpers K vorausgesetzt werden dürfen.*

Sind $\gamma', \gamma'', \gamma''', \cdots$ die Grade dieser successiven Abel'schen Gleichungen, $\Gamma', \Gamma'', \Gamma''', \cdots$ die Normalkörper, zu denen sie allmählich den Körper C erweitern, so sind jene Zahlen auch die Grade dieser Körper, und *die Auflösung einer jeden Hilfsgleichung erniedrigt jedesmal (Satz VII.) den Grad der augenblicklichen Galois'schen Gleichung in der Weise, dass er durch den Grad der aufgelösten Gleichung getheilt wird.*

11. *Betrachten wir nunmehr eine algebraisch auflösbare irreductible Gleichung*

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

vom Primzahlgrade n.

Der Grad g ihres ursprünglichen Galois'schen Körpers wird dann (Satz II., Zusatz) durch n theilbar sein, aber durch keine höhere Potenz von n, weil g in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ enthalten ist; und wird bei der successiven Auflösung derjenigen Abel'schen Gleichungen von Primzahlgraden, welche zur Auflösung der Gleichung (1) sich eignen, auch solange durch n theilbar bleiben, als keine dieser Gleichungen vom Grade n ist (s. vor. Nr.). Damit aber die Gleichung (1) schliesslich aufgelöst werde, muss der Grad der Galois'schen Gleichung bis auf 1 herabsinken; es muss also ein Augenblick eintreten, in welchem der Grad dieser Gleichung — sie heisse dann $G^{(i)}(x) = 0$, ihr Körper $G^{(i)}$, der gemeinsame Grad beider $g^{(i)}$ — noch durch n theilbar ist, bei Auflösung einer Abel'schen Gleichung $\Gamma(x) = 0$ vom Grade n jedoch durch eine andere $\mathfrak{G}(x) = 0$ mit dem Körper $\mathfrak{G}$ ersetzt wird, deren Grad $\mathfrak{g} = \frac{g^{(i)}}{n}$ nicht mehr durch n theilbar ist.

Vor dieser Auflösung muss die Gleichung (1) noch irreductibel sein; denn würde sie im Gegentheil schon bei Auflösung einer der früheren Abel'schen Gleichungen vom Primzahlgrade p reducirt, und nennten wir

$$u_0, u_1, \cdots, u_{p-1}$$

die Wurzeln derselben und $f(x, u_0)$ einen jetzt irreductibeln Factor von $F(x)$ von möglichst kleinem Grade, so würde $F(x)$, wie man leicht sieht (vgl. Nr. 4.), durch jede der Functionen

$$f(x, u_0), f(x, u_1), \cdots, f(x, u_{p-1})$$

theilbar, welche sämmtlich in gleichem Sinne irreductibel sein müssten, weil sie sämmtlich in u_0 rational wären und keinen in demselben Sinne rationalen Factor von geringerem Grade wie $f(x, u_0)$ enthalten könnten. Da das Product jener Factoren Coefficienten hätte, welche dem Körper der, vor Auflösung der Abel'schen Gleichung bekannten Werthe angehören, müsste es durch die zur selben Zeit irreductible Function $F(x)$ theilbar und offenbar eine Potenz von $F(x)$ sein, weil es keine anderen Wurzeln hat, wie $F(x)$ selbst. Man gewänne also eine Gleichung von der Form:

$$F(x)^\lambda = f(x, u_0) \cdot f(x, u_1) \cdots f(x, u_{p-1}).$$

Nun könnten zwei der irreductibeln Factoren nur entweder ohne gemeinsame Wurzeln oder gänzlich mit einander identisch sein; in der vorstehenden Gleichung müssten daher je λ Factoren einander gleich, folglich p ein Vielfaches von λ also $\lambda = 1$ und

$$F(x) = f(x, u_0) \cdot f(x, u_1) \cdots f(x, u_{p-1})$$

sein, was erfordert, dass die Primzahl n theilbar durch p, also $n = p$ wäre. Dann würde aber durch Auflösung jener Abel'schen Gleichung der vorstehenden Formel gemäss $F(x)$ in Linearfactoren zerlegt, die Gleichung (1) also aufgelöst, und der Grad $g^{(i)}$ könnte nicht mehr durch n theilbar sein.

Nach Auflösung der Gleichung $\Gamma(x) = 0$ aber kann $F(x)$ (nach Satz II., Zusatz) nicht mehr irreductibel sein, und folglich wird durch Wiederholung der eben angestellten Betrachtung, wenn $u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}$ jetzt die Wurzeln der Gleichung $\Gamma(x) = 0$ bezeichnen, eine Gleichung von der Form

$$F(x) = f(x, u_0) \cdot f(x, u_1) \cdots f(x, u_{n-1})$$

d. i. eine Zerlegung von $F(x)$ in Factoren *ersten Grades* erhalten. Die Gleichung (1) wird also durch Adjungirung von u_0 aufgelöst. Da hiernach der Grad der Galois'schen Gleichung, welcher vorher $g^{(i)}$ war, durch Adjunction von u_0 auf 1 herabsinken muss, kann $g^{(i)}$ nur gleich n sein; dann ist aber der Körper $G^{(i)}$ vom Grade n identisch mit jedem der irreductibeln Körper, welche durch die Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ der gegebenen Gleichung hervorgebracht werden. Mit andern Worten: ein jeder von diesen ist ein Normalkörper, folglich die Wurzeln der Gleichung (1) rational von einander abhängig und die Gleichung (1), weil ihr Grad eine Primzahl, eine Abel'sche Gleichung.

Damit also die Gleichung (1) *algebraisch auflösbar ist, muss sie nach Adjunction der Wurzeln einer gewissen Abel'schen Gleichung selbst eine solche werden.*

12. Hieraus lässt sich das Kriterium für die algebraische Auflösbarkeit der Gleichung (1), welches von Galois gegeben worden ist, folgendermassen herleiten.

Zur einfacheren Darstellung nehmen wir einmal an, es bedürfe, um die Gleichung (1) zu einer Abel'schen zu machen, der Auflösung nur zweier solcher Gleichungen. Die erste von ihnen sei

$$\Gamma'(x) = 0$$

mit den Wurzeln $u_0', u_1', \cdots, u'_{\gamma-1}$, die andere, deren Coefficienten in u_0' rational sein können,

$$\Gamma''(x) = 0,$$

und ihre Wurzeln $u_0'', u_1'', \cdots, u''_{\gamma'-1}$. Nach Adjunction von u_0' und u_0'' reducirt sich die ursprüngliche Galois'sche Gleichung

$$G(x) = 0$$

vom Grade $n\gamma'\gamma''$ auf eine andere

$$G^{(2)}(x) = 0$$

vom Grade n, deren Wurzeln, wenn Θ eine rationale Function bedeutet, gleich

$$\omega_0, \Theta(\omega_0), \Theta^2(\omega_0), \cdots, \Theta^{n-1}(\omega_0) \tag{20}$$

gesetzt werden können; und die gegebene Gleichung wird dadurch zu einer Abel'schen, d. h. sie wird aufgelöst, wenn noch eine ihrer Wurzeln, etwa α_0, als bekannt angesehen wird.

Die gleichzeitige Adjunction von α_0, u_0', u_0'' ist daher gleichbedeutend mit der Adjunction von ω_0, und folglich ändert jede Substitution der Gruppe, weil sie ω_0 verändert, wenigstens eine der drei Grössen α_0, u_0', u_0''.

Da die Wurzeln (20) der Galois'schen Gleichung dieselben Werthe von u_0' und u_0'' hervorbringen (Nr. 4.), so ändert die Substitution, welche ω_0 in $\Theta(\omega_0)$ verwandelt, die Wurzel α_0, und zwar stellt sie, da sie erst nach n-maliger Wiederholung zu ω_0 zurückführt, und n eine Primzahl ist, offenbar eine cyklische Vertauschung zwischen den n Wurzeln vor, durch welche etwa

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}$$

in

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_0$$

übergeht.

Nach Adjunction von α_0 allein würde aber die Gleichung $G(x) = 0$ auf eine andere

$$G_1(x) = 0$$

vom Grade $\gamma'\gamma''$ reducirt werden (Nr. 5.), deren Wurzeln, welche als rationale Functionen von ω_0 mit

$$\omega_0, \varphi'(\omega_0), \varphi''(\omega_0), \cdots, \chi(\omega_0), \cdots$$

bezeichnet werden können, denselben Werth von α_0 hervorbringen, mit andern Worten: die Substitutionen, welche ω_0 in $\varphi'(\omega_0)$, $\varphi''(\omega_0)$ $\cdots \chi(\omega_0), \cdots$ verwandeln, lassen α_0 ungeändert, vertauschen vielmehr nur die anderen Wurzeln und müssen u_0', u_0'' in ihre verschiedenen Werthe verwandeln.

Man kann demnach (Nr. 4.) die $n\gamma'\gamma''$ Wurzeln der Galois'schen Gleichung in der Weise ordnen:

$$\left\{\begin{array}{cc|c|c}
\omega_0, & \varphi'(\omega_0), \cdots & \chi(\omega_0), \cdots & \cdots \\
\Theta(\omega_0), & \Theta\varphi'(\omega_0), \cdots & \Theta\chi(\omega_0), \cdots & \cdots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\
\Theta^{n-1}(\omega_0), & \Theta^{n-1}\varphi'(\omega_0), \cdots & \Theta^{n-1}\chi(\omega_0), \cdots & \cdots
\end{array}\right. \tag{21}$$

dass jeder Verticalreihe *einer* der Werthe von u_0'', insbesondere den Verticalreihen der ersten Abtheilung die einzelnen Wurzeln der letzten Abel'schen Hilfsgleichung, jeder der unterschiedenen Abtheilungen aber *einer* der Werthe von u_0' entspricht. Die Substitutionen also, welche z. B. die Glieder der zweiten Verticalreihe in einander verwandeln, sind diejenigen Substitutionen der Gruppe, welche u_1'' nicht ändern; sie müssen aber, da u_0'', u_1'' rational durch einander ausdrückbar sind, übereinstimmen mit denjenigen, welche u_0'' nicht verändern; es muss also z. B. $\Theta\varphi'(\omega_0)$ aus $\varphi'(\omega_0)$ entstehen durch die Substitution, welche ω_0 etwa in $\Theta^a(\omega_0)$ verwandelt, also

$$\Theta\varphi'(\omega_0) = \varphi'\Theta^a(\omega_0)$$

sein. Setzt man nun

$$\omega_0 = \omega(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$$

$$\varphi'(\omega_0) = \omega(\alpha_{y_0}, \alpha_{y_1}, \cdots, \alpha_{y_{n-1}}),$$

so findet sich

$$\Theta(\omega_0) = \omega(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_0)$$

$$\Theta\varphi'(\omega_0) = \omega(\alpha_{y_1}, \alpha_{y_2}, \cdots, \alpha_{y_0}),$$

desgleichen

$$\varphi'\Theta^a(\omega_0) = \omega\left(\alpha_{a+y_0}, \alpha_{a+y_1}, \cdots, \alpha_{a+y_{n-1}}\right),$$

wobei die Indices (mod. n) zu nehmen sind, und folglich die Beziehung

$$y_{z+1} \equiv a + y_z (\text{mod. } n)$$

und allgemeiner

$$y_{z+b} \equiv ab + y_z.$$

Hieraus aber folgt, wenn $z = 0$ gesetzt und dann b mit z bezeichnet und beachtet wird, dass $y_0 = 0$ sein muss,

$$y_z \equiv a \cdot z.$$

Die Substitutionen also, welche ω_0 in $\varphi'(\omega_0)$, $\varphi''(\omega_0)$, ... verwandeln, haben sämmtlich die Form $\binom{z}{az}$ d. h. sie verwandeln den Index z in az, wenn a eine Zahl bedeutet, welche durch n nicht theilbar ist. Dem Schema (21) gemäss entstehen daher die Substitutionen der Gruppe, welche u_0' nicht verändern und der ersten Abtheilung entsprechen, indem Substitutionen von der Form $\binom{z}{az}$ mit den Wiederholungen der cyklischen Substitution $\binom{z}{z+1}$ zusammengesetzt werden, und haben demnach sämmtlich die lineare Form

$$(22) \qquad \binom{z}{az+b}.$$

Die Substitutionen ferner, welche die Glieder der zweiten Abtheilung in einander verwandeln, sind diejenigen Substitutionen der Gruppe, welche u_1' nicht ändern, und müssen, da u_0', u_1' rational durch einander ausdrückbar sind, mit denjenigen übereinstimmen, welche der ersten Abtheilung zugehören. Demnach entsteht z. B. $\Theta\chi(\omega_0)$ aus $\chi(\omega_0)$ durch eine lineare Substitution. Setzt man wieder

$$\chi(\omega_0) = \omega(\alpha_{y_0}, \alpha_{y_1}, \cdots, \alpha_{y_{n-1}})$$

also

$$\Theta\chi(\omega_0) = \omega(\alpha_{y_1}, \alpha_{y_2}, \cdots, \alpha_{y_n}),$$

so ergiebt sich hieraus eine Relation von der Form

$$y_{z+1} \equiv c \cdot y_z + d \pmod{n}$$

also

$$y_1 \equiv d$$
$$y_2 \equiv cd + d$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$y_s \equiv c^{s-1}d + c^{s-2}d + \cdots + d,$$

insbesondere

$$y_n \equiv d \cdot \frac{c^n - 1}{c - 1}$$

folglich, da $y_n \equiv y_0 \equiv 0$ ist, $c \equiv 1 \pmod{n}$ und

$$y_z \equiv d \cdot z.$$

Es entsteht daher auch jede der Grössen $\chi(\omega_0), \cdots$ mittelst einer Substitution von der Form $\binom{z}{dz}$ aus ω_0, und folglich sind auch die der zweiten, in gleicher Weise aber auch die den folgenden Abtheilungen entsprechenden Substitutionen d. h. die Substitutionen der Gruppe überhaupt sämmtlich von der Form (22).

Da endlich unsere Betrachtung offenbar unabhängig ist von den Voraussetzungen, welche wir, um die Darstellung zu vereinfachen, eingeführt haben, ergiebt sich

Der Galois'sche Satz: Damit eine irreductible Gleichung von einem Primzahlgrade algebraisch auflösbar ist, darf ihre Gruppe nur lineare Substitutionen enthalten.

Es würde leicht sein, zu beweisen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist).* Doch ziehen wir es vor, aus den vorstehenden Betrachtungen diejenige andere Form des Galois'schen Kriteriums herzuleiten, welche von Herrn Kronecker gegeben und als die geeignetere bezeichnet worden ist**).

13. Man kann die successive Adjunction je einer Wurzel der i Abel'schen Hilfsgleichungen, deren Grade $\gamma', \gamma'', \cdots, \gamma^{(i)}$ seien, durch die Adjunction einer einzigen Function U_0 ersetzen, welche (Nr. 4.) einer irreductibeln Gleichung

$$H(x) = 0$$

---

*) S. z. B. Serret, Handb. d. höheren Algebra, deutsch von Wertheim, 1868, Bd. 2, pag. 519.

**) Ebendas. pag. 535, oder auch Monatsber. d. B. Ak. 1853.

vom Grade $h = \gamma'\gamma'' \cdots \gamma^{(i)}$ Genüge leistet mit von vornherein bekannten Coefficienten. In dem Schema (21) wird dann jeder Verticalreihe *einer* der verschiedenen Werthe von U_0, welche die Wurzeln der genannten Gleichung sind, zugehören, die Glieder derselben Verticalreihe aber, wie gezeigt worden, durch die Wiederholungen der cyklischen Substitution $\binom{z}{z+1}$ aus einander entstehen; demnach bleiben die Wurzeln der Gleichung $H(x) = 0$ bei denselben Substitutionen der Gruppe ungeändert, können also eine jede durch eine beliebige von ihnen rational ausgedrückt werden.

Andererseits hatten die Substitutionen, welche ω_0 in $\varphi'(\omega_0)$, $\varphi''(\omega_0)$, $\cdots \chi(\omega_0)$, $\cdots$ verwandelten, sämmtlich die Form $\binom{z}{az}$ oder, wenn r eine primitive Wurzel (mod. n) bezeichnet, die folgende: $\binom{z}{r^m z}$. Dasselbe gilt offenbar auch von denjenigen Substitutionen, durch welche eine dieser Grössen in eine beliebige andere von ihnen verwandelt wird. Und wenn nun $\binom{z}{r^k z}$ diejenige dieser Substitutionen bedeutet, bei welcher m den kleinsten Werth k hat, und durch dieselbe geht einer der Werthe von U_0 — er heisse U — in einen anderen $U' = \psi(U)$ über, unter ψ eine rationale Function verstanden, so folgt leicht aus der Irreductibilität der Gleichung $H(x) = 0$, dass die Wiederholung der Substitution $\binom{z}{r^k z}$ die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung hervorbringt und dass daher diese Gleichung eine Abel'sche ist. Der Satz am Schlusse von Nr. 11. lässt sich darnach präciser folgendermassen fassen:

Damit die Gleichung (1) algebraisch auflösbar ist, muss sie nach Auflösung einer Abel'schen Gleichung mit rational bekannten Coefficienten selbst eine Abel'sche Gleichung werden. Aus der Natur solcher Gleichungen leuchtet nun aber sogleich ein, dass diese nothwendige Bedingung auch ausreichend ist. Und so gewinnen wir schliesslich den

Satz von Kronecker. Eine algebraisch auflösbare irreductibele Gleichung vom Primzahlgrade n ist dadurch charakterisirt, dass ihre Wurzeln so geordnet werden können, dass zwischen ihnen die Beziehungen stattfinden:

$$\alpha_1 = \Theta(\alpha_0, U), \; \alpha_2 = \Theta(\alpha_1, U), \; \cdots, \; \alpha_0 = \Theta(\alpha_{n-1}, U),$$

während Θ eine rationale Function, U aber die Wurzel einer Abel'schen Gleichung bezeichnet, deren Coefficienten in demselben Sinne, wie die der gegebenen, rational sind.

Münster i/W. Januar 1881.

Zur Theorie der Vertheilung der Elektricität in leitenden Körpern.*)

Von

F. G. MEHLER in Elbing.

In der wissenschaftlichen Beilage des zu Ostern 1870 ausgegebenen Jahresberichts des hiesigen Königlichen Gymnasiums habe ich das elektrostatische Problem für einen unendlichen geraden Kegel unter der Voraussetzung gelöst, dass der Sitz der äusseren elektrischen Kräfte sich auf der Rotationsaxe befindet. Auch habe ich dort die allgemeine Lösung des Problems für den Kegel und das zweifache Rotationshyperboloid so weit vorbereitet, dass die weitere Bearbeitung im Wesentlichen nach der von Herrn Heine für das Rotationsellipsoid gegebenen Methode hätte geschehen können. Da indessen das Interesse an der Sache durch die Beschäftigung mit einem verwandten, aber schwierigeren Probleme zurückgedrängt wurde, und da überdies auch eines der für die Weiterführung der Untersuchung wichtigsten Hülfsmittel, das Additionstheorem für die Kegelfunctionen, nicht neu ist (indem Herr Heine schon früher die Gültigkeit des Theorems für Kugelfunctionen mit beliebigen nicht ganzzahligen Indices, also auch für solche mit imaginären Indices, zu denen die Kegelfunctionen gehören, nachgewiesen hat), so unterliess ich die damals beabsichtigte weitere Ausführung und habe auch jetzt nicht die Absicht, dieselbe wieder aufzunehmen. Die in den letzten Jahren gemachten Versuche, auf anderem Wege in verwandte Gebiete tiefer einzudringen, als es mir früher gelungen war, haben zwar nur einen theilweisen Erfolg gehabt; sie haben mich indessen zu der Aufstellung einiger die Vertheilung der Elektricität in Rotationskörpern betreffenden Sätze geführt, die mir bemerkenswerth erscheinen und vielleicht einer weiteren Ausbildung und Anwendung fähig sind. Ich will im Folgenden zunächst (in § 1.) die einfachsten dieser Sätze mittheilen und sie dann auf die Lösung des elektrostatischen Problems für zwei kugelförmige Leiter

---

*) Aus dem Jahresberichte des Gymnasiums zu Elbing, Ostern 1879.

anwenden. Ich würde es nicht unternehmen, den zahlreichen vorhandenen Bearbeitungen dieses (für den Fall, dass keine äusseren Kräfte wirken) zuerst von Poisson gelösten Problems*) eine andere hinzuzufügen, wenn dieselbe nicht, nach meiner Ueberzeugung wenigstens, eine wesentlich neue wäre, nicht nur was den Ausgangspunkt der Untersuchung betrifft, sondern auch hinsichtlich der Form der erhaltenen Resultate. Während nämlich alle mir bekannten Lösungen die Form von Reihenentwicklungen, wenn auch sehr verschiedener Art, haben, und nur in speciellen Fällen einzelne der in Betracht kommenden Grössen durch elliptische Functionen**) oder durch bestimmte Integrale ausgedrückt worden sind, erhalte ich das allgemeine Resultat von vornherein in Form von bestimmten Integralen. Ich stelle nämlich das Potential zunächst durch ein Integral dar, welches eine noch unbekannte Function einer complexen Variablen enthält; es zeigt sich dann, dass diese Function, wenn allen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen genügt werden soll, eine doppelt periodische Function sein muss, und es ist leicht, dieselbe anzugeben. Uebrigens behandele ich, um die Methode in ihrer einfachsten Form anwenden zu können, zunächst den Fall zweier concentrischen Kugeln und führe den allgemeinen durch die Methode der reciproken Radienvectoren darauf zurück. Wenn ich die Anwendung der letzteren Methode hätte vermeiden wollen, so würde ich mich (jedoch nur in dem Falle, dass der später durch P_0 zu bezeichnende Punkt ausserhalb der durch die beiden Kugelmittelpunkte gehenden Geraden liegt), genöthigt gesehen haben, diejenige Transformation der Differentialgleichung des Potentials zu benutzen, welche Herr C. Neumann in seiner zweiten Lösung des entsprechenden Wärmeproblems***) zu Grunde legt. Die von mir erhaltenen Resultate sind in der Form sehr ähnlich denjenigen, welche ich für einen von zwei Kugelcalotten begrenzten Körper durch Umformung der anfangs unter wesentlich anderer Form erscheinenden Ausdrücke schliesslich gefunden habe. (Borchardt's Journal, Bd. 68, S. 144.) Ich kann diesen Fall jetzt zwar auch direct behandeln; doch bedürfen die in § 1. angegebenen Sätze zu diesem Zwecke einer Erweiterung, die anzugeben ich unterlassen habe, weil sie mit einer

*) In Betreff der Litteratur des Problems verweise ich auf S. 214 des Werkes: „Schwere, Elektricität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen von Bernhard Riemann bearbeitet von Karl Hattendorff. Hannover. 1876."

**) Man vergl. hierüber die Abhandlung von Herrn G. Kirchhoff: „Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln." (Borchardt's Journal, Bd. 59.)

***) „Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Halle. 1862."

anderen, noch nicht gehörig untersuchten Frage in Verbindung steht. Schon bei der Anwendung auf das Rotationsellipsoid gestalten sich die Bedingungen, welchen die Function der complexen Variablen zu genügen hat, nicht so einfach, dass es mir gelungen wäre, die Function ohne Hülfe von Reihenentwicklungen zu bestimmen, und es dürfte auch in der Sache selbst begründet sein, dass für die Vertheilung der statischen Elektricität auf Rotationskörpern nicht so einfache und allgemeingültige Resultate gewonnen werden können, wie sie Herr Heine für ein in mancher Beziehung ähnliches elektrodynamisches Problem*) erhalten hat.

§ 1.

Bemerkungen allgemeineren Inhalts zur Theorie der Vertheilung der statischen Elektricität auf Rotationskörpern.

Durch x, y, z mögen die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punktes im Raume bezeichnet werden, in welchem man sich die Einheit der negativen Elektricität concentrirt denkt, und welcher der Einwirkung einer auf einer Rotationsfläche vertheilten elektrischen Massenschicht unterworfen ist. Die X-Axe sei die Rotationsaxe und die positiv zu wählende Grösse $\eta\left(=\sqrt{y^2+z^2}\right)$ bezeichne den Abstand des Punktes von der Rotationsaxe. Alle Punkte, für welche x und η constant sind, liegen also auf der Peripherie eines bestimmten Kreises. Irgend eine Meridianebene diene nun gleichzeitig als Ebene der complexen Zahlen, und zwar sei die X-Axe zugleich Axe des Reellen, und die beiden Punkte, in welchen die Ebene durch die erwähnte Kreislinie geschnitten wird, seien Träger der conjugirten complexen Zahlen $x+i\eta$ und $x-i\eta$. Jeder Linie in der Zahlenebene entspricht in Folge dessen eine Rotationsfläche, jedem begrenzten Theile der Ebene ein von einer Rotationsfläche begrenzter körperlicher Raum, und die im Folgenden in der Zahlenebene vorzunehmenden analytischen Operationen führen zu Resultaten, die ihre geometrische Bedeutung durch die entsprechenden räumlichen Gebilde erhalten. Es werden nun Integrale betrachtet werden, welche sich über geschlossene Linien erstrecken, und zwar ist jede derselben (auch in dem Falle, wo zwei Linien die vollständige Begrenzung eines ringförmigen Flächenstückes bilden), in solchem Sinne zu durchlaufen, dass die im Punkte $\zeta_1=x_1+i\eta_1$ in der Richtung der Bewegung gezogene Tangente zu der Normale, welche nach dem Innern des von der Linie *allein* begrenzten *endlichen* Flächenstückes gerichtet ist, dieselbe Lage hat wie die positive X-Axe

*) „Ueber die constante elektrische Strömung in ebenen Platten." (Borchardt's Journal, Bd. 79.)

zur positiven H-Axe. Für die Untersuchung macht es nun einen wesentlichen Unterschied, ob die Linien (oder die ihnen entsprechenden Rotationsflächen) die Rotationsaxe schneiden oder nicht.

Wir werden nur den ersten Fall in Betracht ziehen, und hierbei stets voraussetzen, dass die den Integrationsweg bestimmende Curve durch die Rotationsaxe in zwei symmetrische Theile getheilt wird. Auch mag der Einfachheit wegen angenommen werden, dass der eine Schnittpunkt auf dem positiven, der andere auf dem negativen Theile der X-Axe liege. Ersetzt man z. B. $x_1 + i\eta_1$ durch einen der vier Ausdrücke

$$e^{\varrho_1 + i\vartheta_1}, \quad \cos(\vartheta_1 - i\varrho_1), \quad i \sin(\vartheta_1 - i\varrho_1), \quad e^{i\,am(\vartheta_1 - i\varrho_1)},$$

und bestimmt durch Trennung des Reellen und Imaginären x_1 und η_1 als Functionen von ϱ_1 und ϑ_1, oder umgekehrt, diese als Functionen von jenen, so erfüllen die constanten Werthen von ϱ_1 entsprechenden Curven die gemachte Voraussetzung, und die Integration ist nach ϑ_1 zwischen den Grenzen 0 und p (allgemeiner: τ und $\tau + p$) auszuführen, wenn p in den drei ersten Fällen den Werth 2π, im vierten den Werth $4K$ besitzt. In Betreff der in den Integralen vorkommenden Wurzelgrösse

$$R = \sqrt{(\zeta_1 - x - i\eta)(\zeta_1 - x + i\eta)} = \sqrt{(\zeta_1 - x)^2 + y^2 + z^2}$$

wird festgesetzt, dass sie in dem auf der positiven X-Axe liegenden Punkte der Integrationscurve einen positiven Werth habe. Bewegt sich der Punkt ζ_1 auf der Curve, so ändert sich R stetig und erhält nach einem ganzen Umlaufe stets wieder denselben Werth, mögen nun die Punkte $x + i\eta$ und $x - i\eta$ beide ausserhalb oder beide innerhalb des von der Curve begrenzten Flächenstückes liegen. Aber während im ersten Falle R auch in dem auf der negativen X-Axe liegenden Punkte einen positiven reellen Werth hat, erhält es im zweiten Falle dort einen negativen Werth. Wenn die Punkte $x \pm i\eta$ auf der Integrationscurve liegen, so bleibt das Vorzeichen von R beim Ueberschreiten dieser Punkte willkürlich, und das Integral verliert dann seine bestimmte Bedeutung. Von besonderer Wichtigkeit ist aber der Fall, dass jene Punkte der Curve unendlich nahe rücken. Das Integral zerfällt dann in zwei Theilintegrale, von denen das eine vom Punkte $x - i\eta$ über die positive X-Axe hinweg bis zum Punkte $x + i\eta$, das andere von $x + i\eta$ über die negative X-Axe hinweg bis $x - i\eta$ zu nehmen ist. Der Werth von R möge in dem ersten dieser Theilintegrale durch P, in dem zweiten durch Q bezeichnet werden, vorausgesetzt, dass die Annäherung der Punkte von aussen her stattfindet. Geschieht sie dagegen von innen, so hat zwar zufolge der früheren Festsetzungen in dem ersten Theilintegrale R den Werth P, aber in dem zweiten den Werth $Q' = -Q$. Es wird also zu beachten sein, dass das Vorzeichen der mit P und Q bezeichneten Grössen so gewählt ist, dass diese Grössen für $\eta_1 = 0$ (also für $\zeta_1 = x_1$) einen positiven reellen Werth erhalten. Bemerkt muss jedoch werden, dass die soeben besprochene Zerlegung des Integrales in dem Falle ihre Bedeutung verliert, dass die Punkte $x \pm i\eta$ in einen einzigen zusammenfallen. Da aber das unzerlegte Integral (wie aus der Form desselben unmittelbar ersichtlich sein wird) für $\eta = 0$, d. h. auf der X-Axe, keine Stetigkeitsunterbrechung erleidet, so können *die für $\eta = 0$ geltenden Resultate aus den für ein beliebig kleines η geltenden* durch Uebergang zur Grenze gefunden werden.

Nach diesen Vorbemerkungen schreiten wir nun zur Aufstellung und Begründung der folgenden Sätze:

α) Wenn $f(\zeta_1)$ auf der Curve C_1, und auch an der inneren und äusseren Seite derselben innerhalb eines Streifens von endlicher Breite, eine eindeutige, stetige und endliche Function der complexen Variablen ζ_1 ist und für conjugirte Werthe $(x_1 \pm i\eta_1)$ von ζ_1 ebenfalls conjugirte Werthe annimmt, so kann das über C_1 erstreckte Integral

$$v = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta_1)\, d\zeta_1}{R}$$

angesehen werden als das Potential einer elektrischen Belegung, welche auf der der Curve C_1 entsprechenden Rotationsfläche F_1 ausgebreitet ist, in Bezug auf irgend einen Punkt (x, y, z) des ausserhalb F_1 liegenden Raumes.

Denn zunächst ist mit Rücksicht darauf, dass der Integrationsweg symmetrisch zur Axe des Reellen liegt, und dass ebenso wie $f(\zeta_1)$ auch R für conjugirte Werthe von ζ_1 conjugirte Werthe annimmt, leicht einzusehen, dass v nur reelle Werthe besitzt. Ferner sind, so lange der Punkt (x, y, z) in endlicher Entfernung von F_1 bleibt, R und die Derivirten von R nach x, y, z stetige Functionen der Coordinaten, woraus leicht die nämliche Eigenschaft für die Function v und ihre Derivirten sich ergiebt. Aber auch wenn (x, y, z) der Fläche F_1 unendlich nahe rückt, behalten $v, \frac{\partial v}{\partial x}, \cdots$ endliche Werthe. Denn zufolge der ersten der über $f(\zeta_1)$ gemachten Voraussetzungen kann man, ohne dass das Integral dadurch eine Aenderung seines Werthes erleidet, die Curve C_1 durch eine an ihrer inneren Seite innerhalb des erwähnten Streifens verlaufende Curve C_1' ersetzen, welche in endlicher Entfernung von den Punkten $x \pm i\eta$ bleibt. Es genügt ferner v der Differentialgleichung $\Delta^2 v = 0$, d. h. der Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

weil dem reciproken Werthe von R, also jedem Elemente des Integrales, diese Eigenschaft zukommt, und endlich ist auch die letzte der Bedingungen erfüllt, welche das Potential einer Flächenbelegung im äusseren Raume erfüllen muss, nämlich dass die Producte

$$\mathfrak{r} \cdot v, \quad \mathfrak{r}^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \mathfrak{r}^2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \mathfrak{r}^2 \frac{\partial v}{\partial z}$$

endliche Werthe behalten, wenn $\mathfrak{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ unendlich gross wird. Der Grenzwerth von $\mathfrak{r} \cdot v$ ist

$$m = \frac{1}{2\pi i} \int f(\zeta_1)\, d\zeta_1$$

und stellt die Gesammtmenge der auf der Fläche F_1 verbreiteten Elektricität dar.

β) Besitzt $f(\zeta_1)$ in dem ganzen ausserhalb C_1 liegenden Theile der Zahlenebene keinen Verzweigungs- oder Unstetigkeitspunkt (und nimmt man an, dass $\zeta_1 f(\zeta_1)$ für $\zeta_1 = \infty$ nicht ebenfalls unendlich wird), so kann man die Curve C_1, ohne dass das Integral seinen Werth ändert, so erweitern, dass sie unendlich nahe an die Punkte $x \pm i\eta$ herantritt, und es ergiebt sich dann durch die oben angedeutete Zerlegung des Integrales:

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\eta}^{x+i\eta} \frac{f(\zeta_1)\, d\zeta_1}{P} + \frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\eta}^{x-i\eta} \frac{f(\zeta_1)\, d\zeta_1}{Q},$$

oder wenn man sich ζ_1 durch $\varrho_1 + i\vartheta_1$ und x und η durch ϱ und ϑ ausgedrückt denkt, und dann, wegen der unendlichen Annäherung der Curve C_1 an die einem constanten Werthe von ϱ entsprechende Curve C, $\varrho_1 = \varrho$ setzt*):

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{f(\zeta_1)}{P} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1}\, d\vartheta_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\vartheta}^{p-\vartheta} \frac{f(\zeta_1)}{Q} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1}\, d\vartheta_1.$$

Wenn die Punkte $x \pm i\eta$ von der äusseren Seite auf der Normale nach der inneren übertreten, so besitzt die Function $f(\zeta_1) : R$ in der

---

*) Man kann die Curve C_1 so umformen, dass sie in ihrer ganzen Ausdehnung mit der Curve C geradezu zusammenfällt, *ausser* in unmittelbarer Nähe der Punkte $x \pm i\eta$, welche durch unendlich kleine, z. B. halbkreisförmige, Bogen zu umgehen sind. Die über diese Bogen genommenen Theile des Integrales werden verschwindend klein, und jedes der Integrale über die diese Bogen verbindenden Linien nähert sich einem endlichen Grenzwerthe. Daher ist es erlaubt geradezu $\varrho_1 = \varrho$, und in den Grenzen $\vartheta_1 = \vartheta$ zu setzen. Die Ausdrücke für die Derivirten von v aber lassen, weil sie die $\left(-\frac{3}{2}\right)$te Potenz von R enthalten, sich nicht in der angegebenen Weise transformiren. Ihre Umformungen sind aber durch andere Hülfsmittel leicht herzustellen.

äusseren Fläche keinen Verzweigungspunkt mehr, und da sie mit ζ_1^2 multiplicirt im Unendlichen endlich bleibt, so hat das über den ganzen Umfang der Curve erstreckte Integral den Werth Null. Unter Beachtung des über den Zeichenwechsel von Q Gesagten erhält man also:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{f(\zeta_1)}{P}\,\frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1}\,d\vartheta_1 - \frac{1}{2\pi i}\int_{\vartheta}^{p-\vartheta} \frac{f(\zeta_1)}{Q}\,\frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1}\,d\vartheta_1.$$

Daher gilt im äusseren Raume für v der Doppelausdruck:

$$v = \frac{1}{\pi i}\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{f(\zeta_1)}{P}\,\frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1}\,d\vartheta_1 = \frac{1}{\pi i}\int_{\vartheta}^{p-\vartheta} \frac{f(\zeta_1)}{Q}\,\frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1}\,d\vartheta_1.$$

γ) Das erste dieser beiden Integrale erscheint für $\vartheta = 0$, also auf der positiven X-Axe, das zweite für $\vartheta = \frac{1}{2}p$, also auf der negativen X-Axe, unter unbestimmter Form, indem dann die Integrationsgrenzen einander gleich werden, die Function unter dem Integralzeichen aber unendlich gross. Man findet jedoch, indem man beachtet, dass hier $x_1 = x$, $\zeta_1 = x + i\eta_1$ gesetzt werden darf, leicht die Grenzwerthe:

Für $x > 0$:

$$\lim v = \lim \frac{1}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \frac{f(x+i\eta_1)\,d\eta_1}{\sqrt{\eta^2 - \eta_1^2}} = \lim \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x + i\eta\cos\alpha)\,d\alpha = f(x),$$

und für $x < 0$ oder $\vartheta = \frac{1}{2}p$:

$$\lim v = \lim \frac{1}{\pi}\int_{\eta}^{-\eta} \frac{f(x+i\eta_1)\,d\eta_1}{\sqrt{\eta^2 - \eta_1^2}} = -f(x).$$

Es besitzt also das Potential der in α) betrachteten elektrischen Belegung der Fläche F_1, wenn $f(\zeta_1)$ auch die unter β) gestellten Bedingungen erfüllt, im äusseren Raume auf dem positiven Theile der X-Axe den Werth $f(x)$ und auf dem negativen Theile derselben den Werth $-f(x)$.

δ) Bezeichnet man durch x_0 die Abscisse eines auf der X-Axe gelegenen festen Punktes X_0, so ist, falls über eine den Punkt X_0 umschliessende Curve integrirt wird:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1 - x_0)R} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + \eta^2}}, \quad \text{oder} = 0,$$

je nachdem die Curve die Punkte $x \pm i\eta$ ausschliesst oder ebenfalls umschliesst. Man erhält also aus dem in β) gewonnenen Resultate, indem man dort $f(\zeta_1) = 1 : (\zeta_1 - x_0)$ setzt, für $1 : r$ die beiden Darstellungen:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\vartheta}^{\vartheta}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\vartheta_1}\,\frac{d\vartheta_1}{(\zeta_1-x_0)P}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\vartheta}^{p-\vartheta}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\vartheta_1}\,\frac{d\vartheta_1}{(\zeta_1-x_0)Q},$$

und die Gültigkeit derselben ist zunächst an die Bedingung $\xi_2<x_0<\xi_1$ geknüpft, wenn ξ_1 und ξ_2 die Abscissen der Punkte sind, in denen der Integrationsweg des ersten und der des zweiten Integrales die X-Axe schneidet. Da man aber, bei festgehaltenen Werthen von x_0 und ξ_1 durch Erweiterung der Integrationscurve den Punkt mit der Abscisse ξ_2 beliebig weit auf der negativen X-Axe fortrücken lassen kann, so ist die erste der beiden Darstellungen gültig unter der Bedingung $-\infty<x_0<\xi_1$; und ebenso ist es die zweite unter der Bedingung $\xi_2<x_0<\infty$.

α') Erfüllt $\varphi(\zeta_1)$ die in α) in Bezug auf $f(\zeta_1)$ gemachten Voraussetzungen, so kann man das Integral

$$\mathfrak{v}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(\zeta_1)\,d\zeta_1}{R}$$

ansehen als das Potential einer elektrischen Belegung der Fläche F_1 in Bezug auf einen beliebigen Punkt (x, y, z) des inneren Raumes. Aber wenn diese Belegung dieselbe sein soll, wie diejenige, deren Potential im äusseren Raume in α) durch v bezeichnet wurde, so darf $\varphi(\zeta_1)$ nicht $=f(\zeta_1)$ sein; die Lösung des elektrostatischen Problems für die Fläche F_1 erfordert vielmehr die Lösung der Aufgabe: wenn von den Functionen $f(\zeta_1)$ und $\varphi(\zeta_1)$ die eine gegeben ist, die andere so zu bestimmen, dass auf der Fläche F_1 die Functionen v und $\mathfrak{v}$ dieselben Werthe annehmen.

β') Ist $\varphi(\zeta_1)$ im ganzen inneren Raume endlich und einändrig, so gilt in diesem Raume für $\mathfrak{v}$ der Doppelausdruck:

$$\mathfrak{v}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\vartheta}^{\vartheta}\frac{\varphi(\zeta_1)}{P}\,\frac{\partial\zeta_1}{\partial\vartheta_1}\,d\vartheta_1=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\vartheta}^{p-\vartheta}\frac{\varphi(\zeta_1)}{Q}\,\frac{\partial\zeta_1}{\partial\vartheta_1}\,d\vartheta_1.$$

γ') Auf dem Theile der Abscissenaxe, welcher innerhalb des von F_1 begrenzten Raumes liegt, besitzt das Potential $\mathfrak{v}$ den Werth $\varphi(x)$.

δ') Wenn über eine Curve integrirt wird, welche den festen Punkt X_0 mit der Abscisse x_0 ausschliesst, so ist, vorausgesetzt, dass x_0 *positiv* ist:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\zeta_1}{(\zeta_1-x_0)R}=-\frac{1}{r}=-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+\eta^2}},\quad\text{oder }=0,$$

je nachdem die Curve die Punkte $x\pm i\eta$ umschliesst oder ebenfalls ausschliesst. Es gelten daher für $-1:r$ die beiden Darstellungen:

$$-\frac{1}{r} = \frac{1}{\pi i}\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1}\,\frac{d\vartheta_1}{(\zeta_1 - x_0)\,P} = -\frac{1}{\pi i}\int_{\vartheta}^{p-\vartheta} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1}\,\frac{d\vartheta_1}{(\zeta_1 - x_0)\,Q},$$

die erste gültig für $\xi_1 < x_0 < \infty$, die zweite identisch mit der zweiten in δ). Wenn aber x_0 *negativ* ist, so muss in der letzten Formel $\frac{1}{r}$ an Stelle von $-\frac{1}{r}$ gesetzt werden, und die erste Darstellung von $\frac{1}{r}$ wird identisch mit der in δ), die zweite ist gültig für $-\infty < x_0 < \xi_2$. Denn obgleich in beiden Fällen das Integral über die die Punkte $x + i\eta$ umschliessende Linie gleich ist dem mit -1 multiplicirten Werthe des Integrales längs eines mit unendlich kleinem Radius um X_0 in derselben Richtung beschriebenen Kreises, so findet doch der Unterschied statt, dass im Punkte X_0

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + \eta^2} = r, \quad \text{oder} = -\sqrt{(x - x_0)^2 + \eta^2} = -r$$

wird, je nachdem $x_0 >$ oder < 0.

δ'') Durch Verbindung von δ) und δ') ergeben sich die Resultate:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1}\,\frac{d\vartheta_1}{(\zeta_1 - x_0)\,P} = \frac{\varepsilon}{r}\left(\varepsilon = \pm 1, \text{ je nachdem } \xi_1 \gtrless x_0\right),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\vartheta}^{p-\vartheta} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1}\,\frac{d\vartheta_1}{(\zeta_1 - x_0)\,Q} = \frac{\varepsilon'}{r}\left(\varepsilon' = \pm 1, \text{ je nachdem } \xi_2 \lessgtr x_0\right).$$

ε) Es mögen jetzt zwei Curven C_a und C_b betrachtet werden, von denen die erste von der zweiten umschlossen wird, und die Potentiale

$$v_a = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta_a)\,d\zeta_a}{R_a}, \quad v_b = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta_b)\,d\zeta_b}{R_b}$$

$$\left(R_a = \sqrt{(\zeta_a - x)^2 + \eta^2}, \quad R_b = \sqrt{(\zeta_b - x)^2 + \eta^2}\right)$$

zweier elektrischen Belegungen der Flächen F_a und F_b, beide bezogen auf irgend einen zwischen F_a und F_b liegenden Punkt (x, y, z). Die Function $f(\zeta_1)$ sei eindeutig, stetig und endlich zwischen C_a und C_b (und auch innerhalb eines Streifens von endlicher Breite an der inneren Seite von C_a und eines anderen an der äusseren Seite von C_b). Es ergiebt sich dann, wenn man C_a so erweitert und C_b so zusammenzieht, dass zwischen beiden ein unendlich schmales die Punkte $x \pm i\eta$ enthaltendes Flächenstück übrig bleibt:

$$v_a = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{f(\zeta_1)}{P} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\vartheta}^{p-\vartheta} \frac{f(\zeta_1)}{Q} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1,$$

$$v_b = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{f(\zeta_1)}{P} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\vartheta}^{p-\vartheta} \frac{f(\zeta_1)}{Q} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1.$$

Daher ist das Gesammtpotential beider Belegungen im Punkte (x, y, z):

$$v_a + v_b = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{f(\zeta_1)}{P} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1,$$

und auf dem Theile der positiven X-Axe zwischen F_a unh F_b besitzt es den Werth $f(x)$.

ε') Wenn aber die Potentiale der Belegungen die Formen

$$v_a = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(\zeta_a)d\zeta_a}{R_a}, \quad v_b = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(\zeta_b)d\zeta_b}{R_b}$$

haben, und $\varphi(\zeta_1)$, wie $f(\zeta_1)$, zwischen C_a und C_b stetig ist, dann ist:

$$v_a = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{\varphi(\zeta_1)}{P} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\vartheta}^{p-\vartheta} \frac{\varphi(\zeta_1)}{Q} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1$$

$$v_b = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{\varphi(\zeta_1)}{P} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\vartheta}^{p-\vartheta} \frac{\varphi(\zeta_1)}{Q} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1.$$

Daher gilt in diesem Falle für das Gesammtpotential der Belegungen in dem Punkte (x, y, z) zwischen F_a und F_b der Ausdruck

$$v_a + v_b = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\vartheta}^{p-\vartheta} \frac{\varphi(\zeta_1)}{Q} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1,$$

und auf dem Theile der negativen X-Axe zwischen F_a und F_b besitzt es den Werth $-\varphi(x)$.

§ 2.

Erste Aufgabe

über die Vertheilung der Elektricität auf zwei concentrischen Kugelflächen.

Der Raum zwischen den concentrischen Kugelflächen F_a und F_b wird als die Elektricität nicht leitend, der ganze übrige Raum wird als sie leitend angesehen. Im nichtleitenden Raume befindet sich auf dem positiven Theile der X-Axe der Punkt X_0 mit der Abscisse x_0.

Es sollen die Potentiale v_a und v_b zweier solchen Belegungen der Flächen F_a und F_b für den nichtleitenden Raum bestimmt werden, dass das Gesammtpotential $v_a + v_b$ auf F_a und F_b resp. die Werthe annimmt:

$$-\frac{1}{r_a} = -\frac{1}{\sqrt{(x_a - x_0)^2 + y_a^2 + z_a^2}} \text{ und } +\frac{1}{r_b} = +\frac{1}{\sqrt{(x_b - x_0)^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

Die hier anzuwendenden Coordinaten werden durch die Gleichungen gegeben

$$x + i\eta = c \cdot e^{\varrho + i\vartheta}, \quad x_1 + i\eta_1 = c \cdot e^{\varrho_1 + i\vartheta_1},$$

wobei für die Constante c nur wegen der in § 8. zu machenden Anwendung nicht die Einheit gewählt ist. Die Grössen ϱ und ϱ_1 können alle Werthe von $-\infty$ bis ∞ annehmen, ϑ liegt zwischen 0 und π, während für ϑ_1 alle zwischen $-\pi$ und 2π enthaltenen Werthe in Anwendung kommen werden. Die Radien a und b der Kugeln und die Abscisse von X_0 werden ausgedrückt durch

$$a = c \cdot e^{\varrho_a}, \quad b = c \cdot e^{\varrho_b}, \quad x_0 = c \cdot e^{\varrho_0},$$

und es ist $\varrho_a < \varrho_0 < \varrho_b$. Man erhält nun

$$R = c\sqrt{e^{2\varrho_1 + 2i\vartheta_1} - 2e^{\varrho_1 + i\vartheta_1} e^{\varrho} \cos\vartheta + e^{2\varrho}},$$

und in dem Falle, dass $\varrho_1 = \varrho$ wird:

$$R = ce^{\varrho} e^{\frac{1}{2}i\vartheta_1} \sqrt{2(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}.$$

Aus diesem Ausdrucke aber ergiebt sich für die oben mit P und Q bezeichneten Grössen:

$$P = ce^{\varrho} e^{\frac{1}{2}i\vartheta_1} \sqrt{2(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}, \quad (-\vartheta < \vartheta_1 < \vartheta),$$

$$Q = -ice^{\varrho} e^{\frac{1}{2}i\vartheta_1} \sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)}, \quad (\vartheta < \vartheta_1 < 2\pi - \vartheta),$$

wobei die beiden Quadratwurzeln, jede in dem für sie allein in Betracht kommenden Intervalle, nur reelle und positive Werthe besitzen. Auf der X-Achse, also für $\vartheta_1 = 0$, resp. $\vartheta_1 = \pi$, sind P und Q selbst positiv reell, wie es den gemachten Festsetzungen entspricht. Beachtet man ferner, dass für $\varrho_1 = \varrho$:

$$\frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - x_0} = \frac{ie^{\varrho + i\vartheta_1} d\vartheta_1}{e^{\varrho + i\vartheta_1} - e^{\varrho_0}} = \frac{e^{\frac{1}{2}(\varrho - \varrho_0)} e^{\frac{1}{2}i\vartheta_1} d\vartheta_1}{2\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 - i\varrho + i\varrho_0)},$$

so ergiebt sich durch Anwendung von δ''):

$$(1) \qquad \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho + \varrho_0)}}{2\pi c} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{d\vartheta_1}{i\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 - i\varrho + i\varrho_0)\sqrt{2(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}} = \frac{\varepsilon}{r},$$

wenn $\varepsilon = -1$ für $\varrho < \varrho_0$, und $\varepsilon = +1$ für $\varrho > \varrho_0$. Dieses Integral nimmt also auf F_a und F_b die für das Gesammtpotential vorgeschriebenen Werthe an, und es stellt das Gesammtpotential dar sowohl in dem

Raume innerhalb F_a als auch in dem Raume ausserhalb F_b. In dem nichtleitenden Raume aber mögen die Potentiale der einzelnen Belegungen unter den Formen dargestellt werden, welche unter ε) angegeben sind, und welche, wenn man die Function f als unmittelbar von $\varrho_1 + i\vartheta_1$ (statt von $e^{\varrho_1 + i\vartheta_1}$) abhängig betrachtet, auch so geschrieben werden können:

$$(2)\quad v_a = \frac{ce^{\varrho_a}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta_a} f(\varrho_a + i\vartheta_a)\frac{d\vartheta_a}{R_a},\quad v_b = \frac{ce^{\varrho_b}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta_b} f(\varrho_b + i\vartheta_b)\frac{d\vartheta_b}{R_b}.$$

Es muss nun die Function $f(\varrho_1 + i\vartheta_1)$ für gleiche aber entgegengesetzte ϑ_1 conjugirte complexe Werthe annehmen, und sie darf ihren Werth nicht ändern, wenn ϑ_1 um 2π wächst, muss also der Gleichung $f(\varrho_1 + i\vartheta_1) = f(\varrho_1 + i\vartheta_1 + 2i\pi)$ genügen. Setzt man jedoch

$$(3)\qquad f(\varrho_1 + i\vartheta_1) = \frac{1}{2c} e^{-\frac{1}{2}\varrho_0} e^{-\frac{1}{2}(\varrho_1 + i\vartheta_1)} F(\varrho_1 + i\vartheta_1),$$

so muss, da die vor F stehende Exponentialgrösse bei einer Zunahme von ϑ_1 um 2π das (-1)fache ihres ursprünglichen Werthes erhält, die neue Function F der Gleichung

$$(4)\qquad F(\varrho_1 + i\vartheta_1) = -F(\varrho_1 + i\vartheta_1 + 2i\pi)$$

Genüge leisten. Aus ε) ergiebt sich nun unter Benutzung der angegebenen Werthe von P und Q:

$$(5)\quad \begin{cases} v_a = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho + \varrho_0)}}{4\pi c}\left\{\displaystyle\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{F(\varrho + i\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}} + \int_{\vartheta}^{2\pi - \vartheta} \frac{iF(\varrho + i\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1}}\right\} \\[2ex] v_b = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho + \varrho_0)}}{4\pi c}\left\{\displaystyle\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{F(\varrho + i\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}} - \int_{\vartheta}^{2\pi - \vartheta} \frac{iF(\varrho + i\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1}}\right\}, \end{cases}$$

also für die Summe der beiden Potentiale:

$$(6)\qquad v_a + v_b = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho + \varrho_0)}}{2\pi c}\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{F(\varrho + i\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}}.$$

Für $\varrho = \varrho_a$ und $\varrho = \varrho_b$ muss nun dieser Ausdruck die in (1) angegebenen Werthe haben. Wir versuchen dies zu erreichen, indem wir zunächst setzen:

$$F(\varrho + i\vartheta_1) = \frac{1}{i \sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 - i\varrho + i\varrho_0)} - G(\varrho + i\vartheta_1 - \varrho_0)$$
$$- G(\varrho + i\vartheta_1 + \varrho_0 - 2\varrho_a).$$

Das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung wird unendlich, wenn $\varrho = \varrho_0$ und $\vartheta_1 = 0$ oder $= 2\pi$. Da aber F für diese Werthe

(d. h. im Punkte X_0) endlich bleiben muss, so soll über G so verfügt werden, dass in diesem Punkte die beiden ersten Glieder zusammen keinen unendlich grossen, sondern den Werth Null geben. Es müssen ferner nach Einsetzung des Werthes von F in (6) von den drei so erhaltenen Integralen die beiden letzten für $\varrho = \varrho_a$ und $\varrho = \varrho_b$ einander aufheben. Verwandelt man aber in dem zweiten den Integrationsbuchstaben ϑ_1 in $-\vartheta_1$ und vereinigt es mit dem dritten, so erhält man, wenn G der Bedingung $G(-t) = -G(t)$ genügt, das Integral:

$$\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{+G(-\varrho + i\vartheta_1 + \varrho_0) - G(\varrho + i\vartheta_1 + \varrho_0 - 2\varrho_a)}{\sqrt{2(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}} d\vartheta_1.$$

Dieses verschwindet in der That für $\varrho = \varrho_a$. Damit dasselbe für $\varrho = \varrho_b$ geschehe, soll G der Bedingung unterworfen werden

$$G(-\varrho_b + i\vartheta_1 + \varrho_0) = G(\varrho_b + i\vartheta_1 + \varrho_0 - 2\varrho_a),$$

welche erfüllt ist, wenn für jedes t die Function $G(t) = G(t + 2\varrho_b - 2\varrho_a)$ ist. Da nach (4) ausserdem $G(t) = -G(t + 2i\pi)$, so ist für $G(t)$ eine doppelt periodische Function zu wählen, deren reelle Periode $= 2\varrho_b - 2\varrho_a$, und deren imaginäre Periode $= 4i\pi$, und zwar genügt allen bisher erörterten Bedingungen offenbar:

$$G(t) = \frac{2K'}{\pi} \cdot \cot \operatorname{am} \frac{K't}{\pi},$$

wenn der Mokul k des elliptischen Integrales so gewählt ist, dass:

$$(7) \qquad \varrho_b - \varrho_a = \frac{\pi K}{K'}, \quad \text{also } q = e^{-\frac{\pi^2}{\varrho_b - \varrho_a}} \text{ und } q' = e^{-(\varrho_b - \varrho_a)}.$$

Daher ergiebt sich, wenn man den Werth von G in den Ausdruck von F einsetzt und ϱ_1 an Stelle von ϱ schreibt:

$$(8) \quad F(\varrho_1 + i\vartheta_1) = \frac{1}{i \sin \frac{1}{2}(\vartheta_1 - i\varrho_1 + i\varrho_0)} - \frac{2K'}{\pi} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_1 + i\vartheta_1 - \varrho_0)$$
$$- \frac{2K'}{\pi} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_1 + i\vartheta_1 + \varrho_0 - 2\varrho_a),$$

und um einzusehen, dass dieser Ausdruck *keine* der nothwendigen Bedingungen unerfüllt lässt, darf man sich nur noch überzeugen, dass F keine Unstetigkeitspunkte im nichtleitenden Raume besitzt. Nun wird F nur auf der X-Axe unendlich, und zwar in den Punkten, welche den Werthen

$$\varrho_1 = \varrho_0 + 2m(\varrho_b - \varrho_a) \text{ und } \varrho_1 = 2\varrho_a - \varrho_0 + 2n(\varrho_b - \varrho_a)$$

entsprechen, worin m und n beliebige ganze Zahlen bedeuten, für m jedoch der Werth 0 ausgeschlossen ist. Aber alle diese Werthe von ϱ_1 sind theils kleiner als ϱ_a, theils grösser als ϱ_b, keiner der entsprechenden Punkte liegt also in dem Raume zwischen den beiden Kugelflächen.

Es sind jetzt also F und f bestimmt durch (8) und (3), und folglich v_a und v_b für Punkte des nichtleitenden Raumes durch (5) oder auch (2). Die Ausdrücke in (2) gelten übrigens noch in weiterem Umfange, nämlich, wie aus α) und α') in § 1. hervorgeht, der erste noch in dem Raume ausserhalb F_b, der zweite noch in dem Raume innerhalb F_a.

§ 3.

Zweite Aufgabe über die Vertheilung der Elektricität auf zwei concentrischen Kugelflächen.

Es sollen die Potentiale v_a und v_b zweier solchen elektrischen Belegungen der Flächen F_a und F_b für den nichtleitenden Raum bestimmt werden, dass das Gesammtpotential $v_a + v_b$ auf F_a und F_b resp. die Werthe annimmt:

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{\sqrt{(x_a - x_0)^2 + y_a^2 + z_a^2}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r_b} = \frac{1}{\sqrt{(x_b - x_0)^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

Diese Aufgabe lässt sich, indem man von ε') in § 1. ausgeht, in fast ganz gleicher Weise wie die vorhergehende behandeln, und ihre Lösung ist in den folgenden Formeln enthalten:

$$(1')\qquad \frac{1}{r} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho+\varrho_0)}}{2\pi c}\int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta}\frac{d\vartheta_1}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 - i\varrho + i\varrho_0)\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)}}.$$

$$(2')\quad v_a = \frac{c e^{\varrho_a}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta_a}\varphi(\varrho_a + i\vartheta_a)\frac{d\vartheta_a}{R_a},\quad v_b = -\frac{c e^{\varrho_b}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta_b}\varphi(\varrho_b + i\vartheta_b)\frac{d\vartheta_b}{R_b}.$$

$$(3')\qquad \varphi(\varrho_1 + i\vartheta_1) = \frac{1}{2c}e^{-\frac{1}{2}\varrho_0}e^{-\frac{1}{2}(\varrho_1+i\vartheta_1)}\Phi(\varrho_1 + i\vartheta_1).$$

$$(8')\quad \Phi(\varrho_1+i\vartheta_1) = \frac{1}{i\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 - i\varrho_1 + i\varrho_0)} - \frac{2K'}{\pi}\operatorname{cot am}\frac{K'}{\pi}(\varrho_1 + i\vartheta_1 - \varrho_0)$$
$$+ \frac{2K'}{\pi}\operatorname{cot am}\frac{K'}{\pi}(\varrho_1 + i\vartheta_1 + \varrho_0 - 2\varrho_a).$$

$$(5')\left\{\begin{aligned} v_a &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho+\varrho_0)}}{4\pi c}\left\{\int_{-\vartheta}^{\vartheta}\frac{\Phi(\varrho + i\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}} + \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta}\frac{i\Phi(\varrho + i\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)}}\right\} \\ v_b &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho+\varrho_0)}}{4\pi c}\left\{-\int_{-\vartheta}^{\vartheta}\frac{\Phi(\varrho + i\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}} + \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta}\frac{i\Phi(\varrho + i\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)}}\right\}. \end{aligned}\right.$$

$$(6') \qquad v_a + v_b = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho+\varrho_0)}}{2\pi c} \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta} \frac{i\Phi(\varrho + i\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)}}.$$

Zu erwähnen ist in Betreff der Ableitung nur, dass an Stelle der in § 2. vorkommenden Umformung eines bestimmten Integrales mit den Grenzen $-\vartheta$ und ϑ durch Verwandlung von ϑ_1 in $-\vartheta_1$ hier die Umformung eines Integrales mit den Grenzen ϑ und $2\pi - \vartheta$ durch Verwandlung von ϑ_1 in $2\pi - \vartheta_1$ tritt.

§ 4.

Verallgemeinerung der erhaltenen Resultate und Darstellung derselben in übersichtlicherer Form.

Um die weiter unten (§ 6.) auszuführende Uebertragung der gewonnenen Resultate auf zwei nicht concentrische Kugelflächen vorzubereiten, soll hier zunächst die specielle Voraussetzung, dass der Centralpunkt X_0 auf der positiven X-Axe liege, fallen gelassen und statt X_0 ein an beliebiger Stelle zwischen F_a und F_b gelegener Punkt P_0 gewählt werden, dessen Coordinaten durch die Gleichungen

$$x_0 = ce^{\varrho_0}\cos\vartheta_0, \quad y_0 = ce^{\varrho_0}\sin\vartheta_0\cos\varphi_0, \quad z_0 = ce^{\varrho_0}\sin\vartheta_0\sin\varphi_0$$

gegeben seien. Ebenso werden die Coordinaten des Punktes P zwischen F_a und F_b, auf welchen die Potentialfunctionen bezogen werden, ausgedrückt durch

$$x = ce^{\varrho}\cos\vartheta, \quad y = ce^{\varrho}\sin\vartheta\cos\varphi, \quad z = ce^{\varrho}\sin\vartheta\sin\varphi,$$

worin φ den zwischen 0 und 2π zu wählenden Winkel bedeutet, den die durch die X-Axe und P gelegte Ebene mit der XY-Ebene bildet, während die Bedeutung von ϱ und ϑ dieselbe geblieben ist. Unter r ist jetzt also nicht die Entfernung PX_0, sondern PP_0 zu verstehen, und dem entsprechend, wenn P_a und P_b Punkte auf F_a und F_b bezeichnen, unter r_a und r_b die Entfernungen P_aP_0 und P_bP_0. Es gilt daher z. B. für r die Gleichung

$$(9) \qquad r = ce^{\frac{1}{2}(\varrho+\varrho_0)}\sqrt{2(\cos(i\varrho - i\varrho_0) - \cos\omega)},$$

wenn

$$\cos\omega = \cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi - \varphi_0),$$

also ω der zwischen 0 und π zu wählende Winkel ist, den die vom Anfangspunkte A nach P und P_0 gezogenen Radienvectoren mit einander bilden. Da die vorgenommenen Abänderungen nur die Wirkung haben, dass die Dichtigkeiten der elektrischen Schichten constant werden für alle Punkte solcher Kreise, deren Ebenen auf der Axe AP_0 (statt auf AX_0) senkrecht stehen, so ergeben sich die Ausdrücke für die Potentialfunctionen durch blosse Verwandlung von ϑ in ω. Wenn man nun in diese Ausdrücke die Werthe von F und Φ wirklich einsetzt, so zerfällt jedes der Integrale in drei Theile, von denen der erste nach (1) und (1') sich auf $e:2r$, resp. $1:2r$ reducirt, wobei jedoch zu beachten ist, *dass bei Anwendung dieser Zerlegung die Werthe der v für $\varrho = \varrho_0$, d. h. auf der durch den Centralpunkt P_0 gehenden concentrischen Kugelfläche unter unbestimmter Form erscheinen.* Im Uebrigen treten nur die folgenden vier bestimmten Integrale auf, in denen der Integrationsbuchstabe ϑ_1 durch λ ersetzt worden ist:

$$(10)\quad \begin{cases} J_1 = \dfrac{2K'}{\pi}\displaystyle\int_{-\omega}^{\omega} \cot\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0+i\lambda)\cdot\frac{d\lambda}{M}, \\ J_2 = \dfrac{2K'}{\pi}\displaystyle\int_{-\omega}^{\omega} \cot\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\varrho+\varrho_0-2\varrho_a+i\lambda)\cdot\frac{d\lambda}{M}, \\ J_3 = \dfrac{2iK'}{\pi}\displaystyle\int_{\omega}^{2\pi-\omega} \cot\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0+i\lambda)\cdot\frac{d\lambda}{N}, \\ J_4 = \dfrac{2iK'}{\pi}\displaystyle\int_{\omega}^{2\pi-\omega} \cot\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\varrho+\varrho_0-2\varrho_a+i\lambda)\cdot\frac{d\lambda}{N}, \\ \text{wenn: } M = \sqrt{2(\cos\lambda-\cos\omega)},\quad N = \sqrt{2(\cos\omega-\cos\lambda)}. \end{cases}$$

Aus den in § 1. angegebenen Gründen sind für $\omega = 0$ und $\omega = \pi$ diese Integrale durch die Grenzwerthe zu ersetzen, die sie für $\omega = +0$ und $\omega = \pi - 0$ annehmen, und man findet zunächst, indem man $\sin\frac{1}{2}\lambda = \sin\frac{1}{2}\omega\cos\psi$, resp. $\cos\frac{1}{2}\lambda = \cos\frac{1}{2}\omega\cos\psi$, setzt, wodurch die Integrationsgrenzen in Bezug auf ψ die Werthe 0 und π erhalten:

$$(11)\quad \begin{cases} \text{Für } \omega = 0: J_1 = 2K'\cot\operatorname{am}\dfrac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0). \\ \text{Für } \omega = \pi: J_3 = 2iK'\cot\operatorname{am}\dfrac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0+i\pi) \\ \qquad\qquad = 2K'\Delta\operatorname{am}\dfrac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0). \end{cases}$$

Die entsprechenden Grenzwerthe von J_2 und J_4 erhält man hieraus, indem man $\varrho_0 - 2\varrho_a$ an Stelle von $-\varrho_0$ schreibt. Die allgemeinen Werthe von J_1 und J_3 können auch unter den Formen dargestellt werden:

$$(12)\quad \begin{cases} J_1 = \dfrac{2K'}{\pi}\displaystyle\int_0^{\omega}\left\{\cot\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0+i\lambda)+\cot\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0-i\lambda\right\}\frac{d\lambda}{M}, \\ J_3 = \dfrac{2iK'}{\pi}\displaystyle\int_{\omega}^{\pi}\left\{\cot\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0+i\lambda)-\cot\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0-i\lambda\right\}\frac{d\lambda}{N}, \end{cases}$$

und hieraus ergeben sich die Grenzwerthe:

$$(13)\begin{cases} \qquad\qquad\qquad\text{Für } \omega = \pi : J_1 \\ = \frac{K'}{\pi}\int\limits_0^\pi \left\{\operatorname{cotam}\frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0+i\lambda)+\operatorname{cotam}\frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0-i\lambda)\right\}\frac{d\lambda}{\cos\frac{1}{2}\lambda}\cdot \\ \qquad\qquad\qquad\text{Für } \omega = 0 : J_3 \\ = \frac{iK'}{\pi}\int\limits_0^\pi \left\{\operatorname{cotam}\frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0+i\lambda)-\operatorname{cotam}\frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0-i\lambda)\right\}\frac{d\lambda}{\sin\frac{1}{2}\lambda}\cdot \end{cases}$$

Wollte man übrigens in allen Integralen die elliptischen Functionen mit complexem Argumente durch solche mit reellem und solche mit rein imaginärem Argumente ersetzen, so würde dies durch Anwendung der Formeln

$$\cot \operatorname{am}(u+iv) + \cot \operatorname{am}(u-iv) = \frac{2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \Delta \operatorname{am} iv}{\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am} iv}$$

$$\cot \operatorname{am}(u+iv) - \cot \operatorname{am}(u-iv) = \frac{-2 \sin \operatorname{am} iv \cos \operatorname{am} iv \Delta \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am} iv}$$

ohne Weiteres geschehen können.

Die in § 2. und § 3. vorkommenden Potentialfunctionen, welche, wie wir vorhin gesehen, unmittelbar auf einen beliebigen Centralpunkt P_0 übertragen werden können, mögen fortan durch

$$v_a^{-1,1} \text{ und } v_b^{-1,1}, \quad \text{respective } v_a^{1,1} \text{ und } v_b^{1,1}$$

bezeichnet werden, wodurch angedeutet werden soll, dass das Gesammtpotential an den Oberflächen die Werthe

$$-\frac{1}{r_a} \text{ und } \frac{1}{r_b}, \quad \text{respective } \frac{1}{r_a} \text{ und } \frac{1}{r_b}$$

besitzt. Man erhält dann z. B.

$$v_a^{-1,1} = \frac{\mathfrak{e}+1}{2r} - \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho+\varrho_0)}}{4\pi c}(J_1+J_2+J_3+J_4).$$

Multiplicirt man diese Gleichung noch mit $2r$, substituirt auf der rechten Seite für r den in (9) angegebenen Werth und setzt zur Abkürzung

$$(14)\qquad \frac{1}{2\pi}\sqrt{2\cos(i\varrho - i\varrho_0) - 2\cos\omega} = \sigma;$$

und nimmt man dieselben Umformungen in allen übrigen Fällen vor, so gelangt man zu den folgenden Formeln:

$$(15)\qquad \begin{cases} 2rv_a^{-1,1} = \mathfrak{e} + 1 - \sigma(J_1+J_2+J_3+J_4), \\ 2rv_b^{-1,1} = \mathfrak{e} - 1 - \sigma(J_1+J_2-J_3-J_4), \\ \ r(v_a^{-1,1}+v_b^{-1,1}) = \mathfrak{e} - \sigma(J_1+J_2). \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} 2rv_a^{1,1} = 1 + \mathfrak{e} - \sigma(J_1 - J_2 + J_3 - J_4), \\ 2rv_b^{1,1} = 1 - \mathfrak{e} - \sigma(-J_1 + J_2 + J_3 - J_4), \\ r(v_a^{1,1} + v_b^{1,1}) = 1 - \sigma(J_3 - J_4). \end{cases}$$

Endlich kann man die Resultate noch dadurch verallgemeinern, dass man diejenigen Potentialfunctionen $v_a^{\alpha,\beta}$ und $v_b^{\alpha,\beta}$ sucht, deren Summe auf der Fläche F_a den Werth $\alpha : r_a = \alpha : P_a P_0$ und auf der Fläche F_b den Werth $\beta : r_b = \beta : P_b P_0$ annimmt, wo α und β irgend welche constante Werthe bedeuten. Es ergiebt sich nun nach bekannten Sätzen

$$v^{\alpha,\beta} = \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\, v^{-1,1} + \tfrac{1}{2}(\beta + \alpha) v^{1,1}$$

für jeden der beiden bei v hinzuzufügenden Indices a und b. Daher ist:

$$(17)\quad \begin{cases} 2rv_a^{\alpha,\beta} = \beta(1 + \mathfrak{e}) - \sigma(\beta J_1 - \alpha J_2 + \beta J_3 - \alpha J_4), \\ 2rv_b^{\alpha,\beta} = \alpha(1 - \mathfrak{e}) - \sigma(-\alpha J_1 + \beta J_2 + \alpha J_3 - \beta J_4), \\ r(v_a^{\alpha,\beta} + v_b^{\alpha,\beta}) = \gamma + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\sigma(J_1 + J_2) - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sigma(J_3 - J_4), \end{cases}$$

worin wiederum die J durch die Gleichungen (10) gegeben sind und γ die Bedeutung hat:

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\,\alpha(1 - \mathfrak{e}) + \tfrac{1}{2}\,\beta(1 + \mathfrak{e}).$$

Da aber $\mathfrak{e} = -1$ oder $= 1$, je nachdem ϱ kleiner oder grösser als ϱ_0, so hat γ den constanten Werth α für alle zwischen ϱ_a und ϱ_0 und den constanten Werth β für alle zwischen ϱ_0 und ϱ_b gelegenen Werthe der Variablen ϱ. Ueber den Fall $\varrho = \varrho_0$ ist schon weiter oben in diesem Paragraphen gesprochen worden.

§ 5.

Die Dichtigkeiten und Elektricitätsmengen der Belegungen der beiden concentrischen Kugelflächen.

Die Dichtigkeit $k_a^{\alpha,\beta}$ der auf der Fläche F_a befindlichen elektrischen Schicht ist durch die Formel

$$-4\pi k_a^{\alpha,\beta} = \frac{e^{-\varrho a}}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(v_a^{\alpha,\beta} + v_b^{\alpha,\beta} - \frac{\alpha}{r} \right) \right\} (\varrho = \varrho_a)$$

bestimmt. Benutzt man nun den in der dritten der Gleichungen (17) enthaltenen Werth und beachtet, dass für $\varrho = \varrho_a$:

$$J_2 = -J_1,\quad J_4 = J_3,\quad \frac{\partial J_2}{\partial \varrho} = \frac{\partial J_1}{\partial \varrho},\quad \frac{\partial J_4}{\partial \varrho} = -\frac{\partial J_3}{\partial \varrho}$$

wird, so erhält man:

$$-4\pi k_a^{\alpha,\beta} = \frac{e^{-\varrho a}}{c}\ \frac{\sigma_a}{r_a} \left\{ (\alpha - \beta)\, \frac{\partial J_1}{\partial \varrho} - (\alpha + \beta)\, \frac{\partial J_3}{\partial \varrho} \right\} (\varrho = \varrho_a),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (14) und (9):

$$-4\pi k_a^{\alpha,\beta} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\varrho_0 - \frac{3}{2}\varrho_a}}{2\pi c^2} \left\{(\alpha - \beta)\frac{\partial J_1}{\partial \varrho} - (\alpha + \beta)\frac{\partial J_3}{\partial \varrho}\right\} (\varrho = \varrho_a),$$

und da die Differentiation der Integrale J_1 und J_3 nach ϱ unter dem Integralzeichen ausgeführt werden darf:

$$(18)\quad \begin{cases} k_a^{\alpha,\beta} = \dfrac{K'^2 e^{-\frac{1}{2}\varrho_0 - \frac{3}{2}\varrho_a}}{4\pi^4 c^2}\left\{(\alpha - \beta) S_a + (\alpha + \beta) T_a\right\}, \quad \text{wenn:} \\[2ex] S_a = \displaystyle\int_{-\omega}^{\omega} \frac{\Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_a - \varrho_0 + i\lambda)}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_a - \varrho_0 + i\lambda)} \frac{d\lambda}{M}, \\[2ex] T_a = \displaystyle\int_{\omega}^{2\pi - \omega} \frac{-i\Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_a - \varrho_0 + i\lambda)}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_a - \varrho_0 + i\lambda)} \frac{d\lambda}{N}. \end{cases}$$

Das Integral S_a reducirt sich für $\omega = 0$, d. h. in dem dem Punkte P_0 am nächsten liegenden Punkte der Kugelfläche F_a auf den Werth

$$\frac{\pi \Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_0 - \varrho_a)}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_0 - \varrho_a)},$$

und das Integral T_a für $\omega = \pi$, d. h. in dem am weitesten von P_0 entfernten Punkte auf den Werth

$$\frac{-i\pi\Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_a - \varrho_0 + i\pi)}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_a - \varrho_0 + i\pi)} = \pi k^2 \sin \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_0 - \varrho_a) \cos \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_0 - \varrho_a).$$

Um die Dichtigkeit $k_b^{\alpha,\beta}$ in irgend einem Punkte P_b der Kugelfläche F_b zu erhalten, hat man nur nöthig in dem für $k_a^{\alpha,\beta}$ geltenden Ausdrucke a in b zu verwandeln und denselben ausserdem mit dem Factor -1 zu multipliciren.

Was die auf den concentrischen Kugelflächen ausgebreiteten Elektricitätsmengen $m_a^{\alpha,\beta}$ und $m_b^{\alpha,\beta}$ anbetrifft, so lassen sich dieselben zwar einzeln, die erste nach § 1. α), die zweite nach den Formeln für $v_b^{-1,1}$ und $v^{1,1}$ in in § 2. Nr. 2) und § 3. Nr. 2'), berechnen, man gelangt aber viel einfacher durch die Aufstellung der beiden folgenden Relationen zum Ziel. Da bekanntlich die Summe aller auf geschlossenen Flächen befindlichen Elektricitätsmengen gleich ist dem Grenzwerthe des Productes aus dem Gesammtpotential in Bezug auf einen unendlich entfernten Punkt und der Entfernung des letzteren von einem im

Endlichen gelegenen Punkte (z. B. P_0), und da im vorliegenden Falle das Gesammtpotential in dem Raume ausserhalb F_b den Werth $\beta : r$ hat, so gilt die Gleichung

$$m_a^{\alpha,\beta} + m_b^{\alpha,\beta} = \beta.$$

Ferner ist, weil die Summe der Potentiale in dem Raume innerhalb $F_a = \alpha : r$ und folglich im Kugelmittelpunkte $= \alpha : AP_0 = \alpha : ce^{\varrho_0}$, und weil das Potential jeder einzelnen Kugelfläche in Bezug auf den Mittelpunkt gleich ist dem Quotienten ihrer Elektricitätsmenge und ihres Radius:

$$e^{-\varrho_a} m_0^{\alpha,\beta} + e^{-\varrho_b} m_b^{\alpha,\beta} = \alpha e^{-\varrho_0}.$$

Daher hat man:

$$(19) \qquad m_a^{\alpha,\beta} = \frac{\alpha e^{-\varrho_0} - \beta e^{-\varrho_b}}{e^{-\varrho_a} - e^{-\varrho_b}}; \quad m_b^{\alpha,\beta} = \frac{\beta e^{-\varrho_a} - \alpha e^{-\varrho_0}}{e^{-\varrho_a} - e^{-\varrho_b}}.$$

§ 6.

Die Vertheilung der Elektricität auf zwei nicht concentrischen Kugelflächen.

Durch die von Herrn W. Thomson in die Potentialtheorie eingeführte Methode der reciproken Radienvectoren kann man von der Green'schen Belegung zweier concentrischen Kugelflächen (d. h. von der den Oberflächenwerthen $1:r_a$ und $1:r_b$ des Potentials entsprechenden Belegung) übergehen zu derjenigen Belegung zweier nicht concentrischen Kugeln, deren Potential an den Oberflächen den Werth 1 hat; und von dieser durch nochmalige Transformation (aus einem anderen Punkte) zu der Green'schen Belegung zweier nicht concentrischen Kugeln. Die von mir in Betreff der Oberflächenwerthe gemachten allgemeineren Annahmen ($\alpha : r_a$ und $\beta : r_b$) ändern in der Behandlung nichts. Das angedeutete Verfahren ist noch deshalb einer Vereinfachung fähig, weil bekanntlich wiederholte Transformationen durch reciproke Radienvectoren (von gleichzeitig eintretenden nebensächlichen Veränderungen abgesehen) auch durch eine einzige ersetzt werden können. Besonders geeignet für die Anwendung erscheint die von Herrn C. Neumann*) gegebene Form des Fundamentalsatzes der Theorie. Um in der Darstellung keine Lücke zu lassen, und da ich den Satz doch dem vorliegenden speciellen Falle und den im Vorhergehenden angewandten Bezeichnungen anpassen müsste, will ich den (in etwas anderer Form geführten) Beweis des Satzes in die Darstellung aufnehmen.

---

*) Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Leipzig 1877. (S. 363 u. 364.)

Auf der positiven X-Axe werde in der Entfernung c vom Kugelmittelpunkte A ein Punkt B als Pol der Transformation angenommen, und zu jedem Punkte P der correspondirende P' construirt, d. h. derjenige, der mit P auf demselben durch B *begrenzten* Strahle und in solcher Entfernung liegt, dass

$$BP \cdot BP' = c^2, \quad \text{oder} \quad BP : BA = BA : BP'.$$

Da hiernach $\Delta AP'B \sim PAB$, so ist, da nach dem Früheren $\angle PAB = \vartheta$ und $AP : AB = e^\varrho$ ist:

$$\angle AP'B = \vartheta \quad \text{und} \quad AP' : BP' = e^\varrho.$$

Auf diese Weise haben sich zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume dieselben Coordinaten ergeben, welche Herr C. Neumann seiner Lösung des Problems für nicht concentrische Kugeln zu Grunde gelegt hat.

Zu den constanten Werthen $\varrho = \varrho_a$ und $\varrho = \varrho_b$ gehören die (einander nicht schneidenden) nicht concentrischen Kugelflächen F_a' und F_b', welche die correspondirenden zu den bisher betrachteten F_a und F_b sind. Man kann, ohne die Allgemeinheit der Resultate zu beeinträchtigen, annehmen, dass ϱ_b positiv sei, also F_b' den Pol B umschliesse. Je nachdem dann ϱ_a (welches $< \varrho_b$) negativ oder positiv, umschliesst F_a' den Pol A oder ebenfalls den Pol B und zwar auch die Fläche F_b'. Für $\varrho_a = 0$ würde F_a' übergehen in die auf der Strecke AB in ihrem Halbirungspunkte senkrecht stehende Ebene, die gemeinschaftliche Potenzebene aller durch die Gleichung $\varrho =$ Const. dargestellten Kugelflächen. Drei Paare correspondirender Punkte von F_a und F_a' (und ebenso von F_b und F_b') liegen, zufolge des constanten Werthes des Productes $BP_a \cdot BP_a'$ stets auf einer und derselben Kugelfläche. Daraus ergiebt sich insbesondere, dass durch P_a und P_b' eine F_a und F_a' berührende Kugelfläche gelegt werden kann, dass also unendlich kleine correspondirende Flächenelemente von F_a und F_a' sich wie die Quadrate ihrer Abstände vom Punkte B verhalten.

Wir betrachten nun, zu dem Beweise des oben erwähnten Satzes übergehend, die Oberflächenpotentiale

$$v_a = \int \frac{dm_a}{PP_a}, \quad v_a' = \int \frac{dm_a'}{P'P_a'}, \quad v_b = \int \frac{dm_b}{PP_b}, \quad v_b' = \int \frac{dm_b'}{P'P_b'},$$

und setzen fest, dass für correspondirende Massenelemente die Beziehungen gelten

$$dm_a' = \frac{BP_a'}{BP_0'}\, dm_a, \qquad dm_b' = \frac{BP_b'}{BP_0'}\, dm_b,$$

worin P_0' der dem Centralpunkte P_0 correspondirende Punkt ist. Da nun $\Delta BP'P_a' \sim BP_aP$, also $P'P_a' = \frac{BP_a'}{BP} \cdot PP_a$, so ist:

$$\frac{dm_a'}{P'P_a'} = \frac{BP}{BP_0'} \cdot \frac{dm_a}{PP_a}, \quad \text{also } v_a' = \frac{BP}{BP_0'} v_a, \quad \text{oder } v_a' = \frac{PP_0}{P'P_0'} v_a.$$

Folglich stehen die Potentiale der einzelnen correspondirenden Belegungen zu einander in den Beziehungen:

$$P'P_0' \cdot v_a' = PP_0 \cdot v_a, \qquad P'P_0' \cdot v_b' = PP_0 \cdot v_b,$$

und für die Summe der Potentiale gilt daher die Gleichung:

$$P'P_0'(v_a' + v_b') = PP_0(v_a + v_b).$$

Nun sind durch die Gleichungen (17) v_a und v_b, für den Centralpunkt P_0, in Bezug auf einen beliebigen Punkt P des nichtleitenden Raumes so bestimmt worden, dass $v_a + v_b$ auf den Oberflächen F_a und F_b resp. die Werthe $\alpha : P_a P_0$ und $\beta : P_b P_0$ annimmt. Mithin besitzen die durch dieselben Gleichungen zu berechnenden Potentiale v_a' und v_b', für welche der Centralpunkt P_0' zu Grunde gelegt ist, und welche sich auf den Punkt P' des correspondirenden (nichtleitenden) Raumes beziehen, die Eigenschaft, dass ihre Summe auf F_a' und F_b' resp. die Werthe $\alpha : P_a' P_0'$ und $\beta : P_b' P_0'$ erhält.

Es bleibt noch übrig die Dichtigkeiten der neuen Belegungen zu bestimmen. Nun nimmt die oben für die Massenelemente von F_a und F_a' aufgestellte Bedingung, wenn man diese Elemente durch die Flächenelemente ds_a und ds_a' und die Dichtigkeiten k_a und k_a' ausdrückt, die Form an

$$k_a' = k_a \cdot \frac{BP_a'}{BP_0'} \cdot \frac{ds_a}{ds_a'} = k_a \cdot \frac{BP_a'}{BP_0'} \cdot \frac{BP_a^2}{BP_a'^2} = k_a \cdot \frac{c^2}{BP_a'^2 \cdot BP_0'},$$

und dem entsprechend ist der Werth von k_b'. Man findet nun aus den Gleichungen

$$AP'^2 + BP'^2 - 2AP' \cdot BP' \cos\vartheta = c^2, \quad AP' = BP' \cdot e^{\varrho},$$

dass:

$$BP' = \frac{c}{\tau} e^{-\frac{1}{2}\varrho}, \quad \text{wenn } \tau = \sqrt{2\cos i\varrho - 2\cos\vartheta},$$

$$BP_a' = \frac{c}{\tau_a} e^{-\frac{1}{2}\varrho_a}, \quad \text{wenn } \tau_a = \sqrt{2\cos i\varrho_a - 2\cos\vartheta},$$

und zwei eben solche Gleichungen gelten für die Indices b und 0. Endlich stellt man noch leicht $P'P_0'$ (oder r') in der Form dar:

$$r' = r \cdot \frac{BP_0'}{BP} = \frac{rBP' \cdot BP_0'}{c^2} = \frac{c\sqrt{2\cos(i\varrho - i\varrho_0) - 2\cos\omega}}{\tau \cdot \tau_0} = \frac{2\varkappa c\sigma}{\tau\tau_0}.$$

Die für die Vertheilung der Elektricität auf zwei nicht concentrischen Kugelflächen erhaltenen Resultate sollen nun, unter Fortlassung der Accente, übersichtlich zusammengestellt werden:

Es sei c die Entfernung zweier festen Punkte A und B. Die Lage eines Punktes P im Raume werde bestimmt durch

$$\vartheta = \angle APB, \quad \varrho = \log(AP:BP)$$

und den Neigungswinkel φ der Ebene APB und einer festen durch die Gerade AB gelegten Ebene. Die dem constanten Werthe ϱ_a entsprechende Kugelfläche F_a und die dem grösseren und positiven constanten Werthe ϱ_b entsprechende Kugelfläche F_b mögen zusammen die Begrenzungen eines Nichtleiters, jede einzelne für sich die Begrenzung eines Leiters der Elektricität bilden. Im nichtleitenden Raume sei der Centralpunkt $P_0(\varrho_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ gegeben, und durch $P_a(\varrho_a, \vartheta, \varphi)$ und $P_b(\varrho_b, \vartheta, \varphi)$ mögen solche Punkte bezeichnet werden, welche resp. auf F_a und F_b liegen. Dann sind die Dichtigkeiten k derjenigen elektrischen Belegungen von F_a und F_b, deren Gesammtpotential in P_a und P_b resp. die Werthe

$$\frac{\alpha}{P_0P_a} \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{P_0P_b}$$

besitzt, durch die Formeln bestimmt

$$(20) \quad \begin{cases} k_a^{\alpha,\beta} = \dfrac{K'^2 \tau_0 \tau_a^3}{4\pi' c^2} \{(\alpha-\beta) S_a + (\alpha+\beta) T_a\} \\[2ex] k_b^{\alpha,\beta} = -\dfrac{K'^2 \tau_0 \tau_b^3}{4\pi' c^2} \{(\alpha-\beta) S_b + (\alpha+\beta) T_b\}, \end{cases}$$

und die Potentiale v der einzelnen Belegungen in Bezug auf irgend einen Punkt $P(\varrho, \vartheta, \varphi)$ des nichtleitenden Raumes durch

$$(21) \quad \begin{cases} 2r \cdot v_a^{\alpha,\beta} = \beta(1+\mathfrak{e}) - \sigma(\ \ \beta J_1 - \alpha J_2 + \beta J_3 - \alpha J_4) \\ 2r \cdot v_b^{\alpha,\beta} = \alpha(1-\mathfrak{e}) - \sigma(-\alpha J_1 + \beta J_2 + \alpha J_3 - \beta J_4). \end{cases}$$

In diesen Formeln ist

$$\tau_a = \sqrt{2\cos i\varrho_a - 2\cos\vartheta}, \quad \tau_b = \sqrt{2\cos i\varrho_b - 2\cos\vartheta},$$

$$\tau_0 = \sqrt{2\cos i\varrho_0 - 2\cos\vartheta_0}, \quad \tau = \sqrt{2\cos i\varrho - 2\cos\vartheta},$$

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2\cos(i\varrho - i\varrho_0) - 2\cos\omega}, \quad r = \frac{2\pi c\sigma}{\tau\tau_0},$$

$$\cos\omega = \cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Die Grösse $\mathfrak{e}$ bedeutet den Werth -1 für $\varrho_a \leqq \varrho < \varrho_0$, dagegen den Werth 1 für $\varrho_0 < \varrho \leqq \varrho_b$; für $\varrho = \varrho_0$ ist in jeder der Gleichungen (21) die rechte Seite durch den Grenzwerth zu ersetzen, den sie für $\varrho = \varrho_0 \pm 0$ annimmt. Unter S_a und S_b sind die in § 5., Nr. 18), unter S_b und T_b die durch Vertauschung der Indices a und b daraus hervorgehenden, und unter J_1, J_2, J_3, J_4 die in § 4., Nr. 10) angegebenen Integrale zu verstehen. Die in den Integralen vorkommenden elliptischen Functionen beziehen sich auf einen solchen Modul, dass (nach den Bezeichnungen in Jacobi's Fundamenta nova):

$$\frac{\pi K}{K'} = \varrho_b - \varrho_a, \quad \text{also } q = e^{-\frac{\pi^2}{\varrho_b - \varrho_a}}, \quad q' = e^{-(\varrho_b - \varrho_a)}.$$

Beiläufig mag noch erwähnt werden, dass für die Radien a und b und die Centrale g der beiden Kugeln die Gleichungen gelten:

$$a = \pm \frac{c}{2} \frac{i}{\sin i\varrho_a} \left(\varrho_a \gtrless 0\right), \quad b = \frac{c}{2} \frac{i}{\sin i\varrho_b},$$

$$g = \mp \frac{c}{2} (i \cot i\varrho_b - i \cot i\varrho_a), \quad \left(\varrho_a \gtrless 0\right),$$

und dass die Constante c aus den Werthen von a, b, g durch die Formel

$$g \cdot c = \sqrt{(g+a+b)(g-a-b)(g+a-b)(g-a+b)}$$

berechnet werden kann.

§ 7.

Vertheilung gegebener Elektricitätsmengen, ohne Einwirkung äusserer Kräfte.

Nimmt man ϱ_a negativ an, betrachtet also zwei volle kugelförmige Leiter, und verwandelt man α und β in $\alpha \cdot BP_0$ und $\beta \cdot BP_0$ und lässt dann den Centralpunkt P_0 in unendliche Ferne rücken, so nähert sich für einen endlich entfernten Punkt P das Verhältniss $r : BP_0$ der Einheit; die durch die Annahmen $\varrho_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$ zu erhaltenden Grenzwerthe der J mögen durch $\mathfrak{J}$, die von S und T durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$, die von k durch $\mathfrak{k}$, die von v durch $\mathfrak{v}$ bezeichnet werden. Man überzeugt sich dann leicht, dass das Product $\mathfrak{v} \cdot AP$, wenn man jetzt (wo die Coordinaten des Centralpunktes in den Formeln nicht mehr enthalten sind) den Punkt P sich unendlich weit entfernen lässt, einem endlichen Grenzwerthe $\mathfrak{m}$ zustrebt, dass also $\mathfrak{v}$ auch der im Unendlichen von einer Potentialfunction zu erfüllenden Bedingung Genüge leistet. Daher gelangt man zu den folgenden Resultaten:

Diejenigen elektrischen Belegungen der beiden kugelförmigen Leiter, deren Gesammtpotential im Innern des ersten Leiters den constanten Werth α und im Innern des zweiten den constanten Werth β besitzt, haben die Dichtigkeiten

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{k}_a^{\alpha,\beta} &= \quad \frac{K'^2 \tau_a^3}{4\pi^4 c} \{(\alpha-\beta)\mathfrak{S}_a + (\alpha+\beta)\mathfrak{T}_a\} \\ \mathfrak{k}_b^{\alpha,\beta} &= -\frac{K'^2 \tau_b^3}{4\pi^4 c} \{(\alpha-\beta)\mathfrak{S}_b + (\alpha+\beta)\mathfrak{T}_b\}, \end{aligned} \right.$$

und ihre Potentiale die Werthe

$$(23)\quad \begin{cases} \mathfrak{v}_a^{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\beta(1+\mathfrak{e}) - \frac{\tau}{4\pi}(\beta\mathfrak{J}_1 - \alpha\mathfrak{J}_2 + \beta\mathfrak{J}_3 - \alpha\mathfrak{J}_4), \\ \mathfrak{v}_b^{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\alpha(1-\mathfrak{e}) - \frac{\tau}{4\pi}(-\alpha\mathfrak{J}_1 + \beta\mathfrak{J}_2 + \alpha\mathfrak{J}_3 - \beta\mathfrak{J}_4). \end{cases}$$

Hierin ist (nach 12):

$$(24)\quad \begin{cases} \mathfrak{J}_1 = \frac{2K'}{\pi}\int\limits_0^{\vartheta}\left\{\operatorname{cotam}\frac{K'}{\pi}(\varrho+i\lambda) + \operatorname{cotam}\frac{K'}{\pi}(\varrho-i\lambda)\right\}\frac{d\lambda}{\sqrt{2\cos\lambda - 2\cos\vartheta}}, \\ \mathfrak{J}_3 = \frac{2iK'}{\pi}\int\limits_{\vartheta}^{\pi}\left\{\operatorname{cotam}\frac{K'}{\pi}(\varrho+i\lambda) - \operatorname{cotam}\frac{K'}{\pi}(\varrho-i\lambda)\right\}\frac{d\lambda}{\sqrt{2\cos\vartheta - 2\cos\lambda}}, \end{cases}$$

während $\mathfrak{J}_2$ und $\mathfrak{J}_4$ aus $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_3$ durch Verwandlung von ϱ in $\varrho - 2\varrho_a$ entstehen, und $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{T}_a$, $\mathfrak{S}_b$, $\mathfrak{T}_b$ aus

$$\mathfrak{S} = -\frac{\pi^2}{2K'^2}\frac{\partial\mathfrak{J}_1}{\partial\varrho} \quad\text{und}\quad \mathfrak{T} = \frac{\pi^2}{2K'^2}\frac{\partial\mathfrak{J}_3}{\partial\varrho}$$

durch Einsetzung der Werthe $\varrho = \varrho_a$ und $\varrho = \varrho_b$ gebildet werden können.

Drückt man in der ersten der Gleichungen (23) das erste Glied der rechten Seite nach (1) und (1′) durch die Formel aus

$$\frac{1}{2}\beta(1+\mathfrak{e}) = \frac{\beta\tau}{4\pi}\int\limits_0^{\vartheta}\left(\frac{1}{i\sin\frac{1}{2}(\lambda - i\varrho)} - \frac{1}{i\sin\frac{1}{2}(\lambda+i\varrho)}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{2\cos\lambda - 2\cos\vartheta}}$$

$$+\frac{\beta\tau}{4\pi}\int\limits_{\vartheta}^{\pi}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\lambda - i\varrho)} + \frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\lambda+i\varrho)}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{2\cos\vartheta - 2\cos\lambda}},$$

vereinigt das erste Integral mit $\mathfrak{J}_1$, das zweite mit $\mathfrak{J}_3$, multiplicirt dann die Gleichung mit $BP\left(=\frac{c}{\tau}e^{-\frac{1}{2}\varrho}\right)$ und lässt schliesslich $BP = \infty$ d. h. $\varrho = 0$, $\vartheta = 0$ werden, so erhält man für die auf der Kugel, welche den Pol A umgiebt, befindliche Elektricitätsmenge den Ausdruck:

$$(25)\quad \mathfrak{m}_a^{\alpha,\beta} = \alpha\frac{cK'}{2\pi}\operatorname{cotam}\left(\frac{-2K'\varrho_a}{\pi}\right) + \beta\frac{c}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\lambda} - \frac{2iK'}{\pi}\operatorname{cotam}\frac{iK'\lambda}{\pi}\right)\frac{d\lambda}{\sin\frac{1}{2}\lambda}$$

$$+\alpha\frac{cK'}{4\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\left\{i\operatorname{cotam}\frac{K'}{\pi}(-2\varrho_a + i\lambda) - i\operatorname{cotam}\frac{K'}{\pi}(-2\varrho_a - i\lambda)\right\}\frac{d\lambda}{\sin\frac{1}{2}\lambda}.$$

Hieraus ergiebt sich $\mathfrak{m}_b^{\alpha,\beta}$, indem man α mit β und $-\varrho_a$ mit ϱ_b vertauscht. Nach diesen Formeln lassen sich α und β berechnen, wenn die den Kugeln mitgetheilten Elektricitätsmengen gegeben sind. Es ist leicht zu sehen, dass die Functionen unter den Integralzeichen auch für $\lambda = 0$ endliche Werthe besitzen. Zur numerischen Berechnung der Integrale kann man sich im Allgemeinen mit Vortheil der Näherungsformel*) bedienen:

$$\int_0^\pi f(\cos\lambda)\,d\lambda = \frac{\pi}{n}\left\{f\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right) + f\left(\cos\frac{3\pi}{2n}\right) + \cdots + f\left(\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\right\}.$$

Auch zu der Berechnung der Grössen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{k}$ (und der allgemeineren v und k) kann dieselbe Formel angewendet werden. Denn jede dieser Grössen lässt sich durch zwei Integrale ausdrücken, welche resp. die Formen haben

$$\int_0^\vartheta f(\lambda)\frac{\cos\frac{1}{2}\lambda\,d\lambda}{\sqrt{2\cos\lambda - 2\cos\vartheta}} \quad \text{und} \quad \int_\vartheta^\pi f_1(\lambda)\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda\,d\lambda}{\sqrt{2\cos\vartheta - 2\cos\lambda}},$$

und in denen die Functionen f und f_1 zwischen und auch noch an den Integrationsgrenzen endliche Werthe haben. Diese Integrale gehen aber in solche mit den Grenzen 0 und π über, wenn im ersten $\sin\frac{1}{2}\lambda = \sin\frac{1}{2}\vartheta\cos\frac{1}{2}\mu$ und im zweiten $\cos\frac{1}{2}\lambda = \cos\frac{1}{2}\vartheta\cos\frac{1}{2}\nu$, und in Folge dessen

$$\frac{-2\cos\frac{1}{2}\lambda\,d\lambda}{\sqrt{2\cos\lambda - 2\cos\vartheta}} = d\mu \quad \text{und} \quad \frac{2\sin\frac{1}{2}\lambda\,d\lambda}{\sqrt{2\cos\vartheta - 2\cos\lambda}} = d\nu$$

gesetzt wird.

§ 8.

Betrachtung des Falles zweier einander berührenden Kugeln.

Ganz ähnlich wie für zwei concentrische Kugeln kann das Problem der Elektricitätsvertheilung auch bei zwei parallelen Ebenen behandelt und durch die Methode der reciproken Radienvectoren die Lösung auf zwei einander berührende Kugeln übertragen werden. Man kann jedoch die für diesen Fall geltenden Resultate auch aus den in den beiden vorhergehenden §§ behandelten allgemeineren, wenn auch in weniger strenger Weise, durch einen Grenzübergang ableiten. Man verwandle ϑ, ϱ, $\varrho_a \cdots$ in $c\vartheta$, $c\varrho$, $c\varrho_a \cdots$ und lasse dann c, d. h. den Abstand der Pole A und B und folglich auch den kürzesten Abstand der Kugeln unendlich klein werden. Da jetzt ϑ durch die Gleichung $AB\cdot\vartheta = \angle APB$, oder da $\angle APB$ unendlich klein, durch $AB\cdot\vartheta = \sin\angle APB$ definirt ist, so bedeutet das neue ϑ den reciproken

*) Vergl. meine „Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen" im 63. Bande von Borchardt's Journal (S. 157). — In dem in der letzten Zeile auf S. 156 angegebenen Werthe von α_m ist statt $2m+1$ zu setzen $2m-1$.

Werth des Durchmessers des um das Dreieck ABP beschriebenen Kreises, d. h. des Kreises, der durch P geht und die X-Axe im Punkte A berührt. Der Parameter ϱ ist jetzt definirt durch $AB \cdot \varrho = \log(AP:BP)$, oder, da die Differenz von AP und BP unendlich klein ist, durch $AB \cdot \varrho = (AP - BP) : AP$. Fällt man nun von B auf AP das Loth BQ und errichtet in P auf AP das die Verlängerung von AB in R schneidende Loth AR, so verhält sich $AQ : AP = AB : AR$, und es darf $AP - BP = AQ$ gesetzt werden. Folglich ist $\varrho = 1 : AR$ d. h. gleich dem reciproken Werthe des Durchmessers der Kugel, welche durch P und A geht und ihren Mittelpunkt auf der X-Axe hat. (Da in dem in der Einleitung angeführten Werke „Allgemeine Lösung des Problems etc." die den Grössen ϑ und ϱ entsprechenden Grössen gelegentlich, auf Seite 59, als die reciproken Werthe der Radien interpretirt worden sind, so sehe ich mich veranlasst zu bemerken, dass die dieser Interpretation zu Grunde gelegten und nur an dieser einen Stelle benutzten Gleichungen (65) einer aus (64) sich ergebenden Veränderung bedürfen.) Die Parameter ϑ und ϱ haben resp. alle Werthe von 0 bis ∞ und $-\infty$ bis ∞ zu durchlaufen. Die den constanten Werthen ϱ_b und ϱ_a entsprechenden Kugelflächen berühren einander im Punkte A, und zwar, wenn ϱ_b wiederum positiv und grösser als ϱ_a angenommen wird, von innen oder von aussen, je nachdem ϱ_a positiv oder negativ ist. Es sind nun auch τ, σ, ω in $c\tau$, $c\sigma$, $c\omega$ zu verwandeln, und die neu entstandenen Grössen und r werden dargestellt durch

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\tau = \sqrt{\varrho^2 + \vartheta^2}, \quad \tau_0 = \sqrt{\varrho_0^{\,2} + \vartheta_0^{\,2}}, \quad \sigma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(\varrho - \varrho_0)^2 + \omega^2}, \\ &r = \frac{2\pi\sigma}{\tau\tau_0}, \quad \omega = \sqrt{\vartheta^2 + \vartheta_0^{\,2} - 2\vartheta\vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}\,. \end{aligned}$$

Man hat ferner, indem man statt (10) die daraus abgeleiteten Gleichungen (12) zu Grunde legt, den Integrationsbuchstaben λ in $c\lambda$ zu verwandeln, wodurch die Integrationsgrenzen 0 und ω keine Veränderung erleiden, während an Stelle der Grenze π die unendlich grosse $\pi : c$ tritt. Ueberdies ist zu beachten, dass in den elliptischen Functionen $q = 0$, also $k = 0$, $K = \frac{1}{2}\pi$ und $\frac{K'}{\pi} = \frac{\pi}{2c} : (\varrho_b - \varrho_a)$ wird. In Folge dieser Veränderungen tritt nun z. B. an Stelle der elliptischen Function $\cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho - \varrho_0 + i\lambda)$ die Kreisfunction

$$\cot \frac{\pi(\varrho - \varrho_0 + i\lambda)}{2(\varrho_b - \varrho_a)} \quad \text{oder} \quad \cot \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,(\varrho - \varrho_0 + i\lambda),$$

wenn der Kürze halber gesetzt wird:

$$(27)\qquad \frac{\pi}{\varrho_b - \varrho_a} = \varepsilon.$$

Versucht man hiernach die Grenzwerthe der Producte cJ_1, cJ_2, cJ_3, cJ_4 zu bilden, so findet man, dass wohl die beiden ersten (abgesehen von der schon bei J_1 selbst für $\varrho = \varrho_0 \pm 0$ nothwendiger Weise auftretenden Discontinuität) völlig bestimmte Werthe L_1 und L_2 annehmen, dass dagegen die beiden letzten unendlich gross werden, jedoch ihre Differenz gegen einen bestimmten Werth convergirt, der durch $L_3 - L_4$ bezeichnet werden möge. Da aber im vorliegenden Falle die Constanten α und β einander gleich (z. B. beide $= 1$) zu setzen sind, weil sonst im Berührungspunkte der Kugelflächen eine Discontinuität in dem Werthe des Gesammtpotentials eintreten würde, so enthalten die Ausdrücke für die Potentialfunctionen J_3 und J_4 nur in der Verbindung $J_3 - J_4$, behalten also, wie es sein muss, endliche Werthe. Man gelangt somit für einen Leiter, dessen einer Theil durch die Kugelfläche vom Durchmesser $1 : \varrho_a$, und dessen anderer Theil durch die Kugelfläche vom Durchmesser $1 : \varrho_b$ begrenzt wird, zu den folgenden Resultaten:

I. Wenn die elektrische Vertheilung durch Influenz der im Punkte $(\varrho_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ des nichtleitenden Raumes concentrirt gedachten Elektricitätsmenge -1 hervorgerufen wird, und der Leiter, falls er aus zwei vollen Kugeln besteht (ϱ_a negativ ist) durch einen dünnen Draht mit dem Erdboden verbunden ist, so sind die Potentiale v_a und v_b der beiden elektrischen Schichten zu bestimmen aus:

$$(28)\qquad \begin{cases} r(v_a + v_b) = 1 - \sigma(L_3 - L_4), \\ r(v_a - v_b) = \mathfrak{e} - \sigma(L_1 - L_2), \end{cases}$$

worin:

$$(29)\quad \begin{cases} L_1 = 2\varepsilon \sin \varepsilon(\varrho - \varrho_0) \displaystyle\int_0^\omega \frac{1}{\cos i\varepsilon\lambda - \cos\varepsilon(\varrho - \varrho_0)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}, \\[2ex] L_2 = 2\varepsilon \sin \varepsilon(\varrho + \varrho_0 - 2\varrho_a) \displaystyle\int_0^\omega \frac{1}{\cos i\varepsilon\lambda - \cos\varepsilon(\varrho + \varrho_0 - 2\varrho_a)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}, \\[2ex] L_3 = 2\varepsilon \displaystyle\int_\omega^\infty \left(\frac{-i\sin i\varepsilon\lambda}{\cos i\varepsilon\lambda - \cos\varepsilon(\varrho - \varrho_0)} + i \operatorname{tg} i\lambda\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}, \\[2ex] L_4 = 2\varepsilon \displaystyle\int_\omega^\infty \left(\frac{-i\sin i\varepsilon\lambda}{\cos i\varepsilon\lambda - \cos\varepsilon(\varrho + \varrho_0 - 2\varrho_a)} + i \operatorname{tg} i\lambda\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}. \end{cases}$$

Die bei L_3 und L_4 in den Klammern hinzugefügten Grössen $+ i \operatorname{tg} i\lambda$ bewirken nur, dass jedes der beiden Integrale für sich einen bestimmten Werth hat; sie heben sich auf, wenn die Differenz $L_3 - L_4$ durch ein einziges Integral dargestellt wird. Für die Dichtigkeiten ergiebt sich:

$$(30)\quad \begin{cases} k_a = \dfrac{\varepsilon^2 \tau_0 \tau_a^3 \sin \varepsilon(\varrho_0 - \varrho_a)}{2\pi^2} \displaystyle\int_{\omega}^{\infty} \dfrac{-i \sin i\varepsilon\lambda}{(\cos i\varepsilon\lambda - \cos\varepsilon(\varrho_0 - \varrho_a))^2} \dfrac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}, \\[2ex] k_b = \dfrac{\varepsilon^2 \tau_0 \tau_b^3 \sin \varepsilon(\varrho_b - \varrho_0)}{2\pi^2} \displaystyle\int_{\omega}^{\infty} \dfrac{-i \sin i\varepsilon\lambda}{(\cos i\varepsilon\lambda - \cos\varepsilon(\varrho_b - \varrho_0))^2} \dfrac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}. \end{cases}$$

II. Der aus zwei einander berührenden Kugeln bestehende Leiter sei isolirt und ihm die Elektricitätsmenge $\mathfrak{M}$ mitgetheilt. Dann ist:

$$(31)\quad \begin{cases} \mathfrak{v}_a + \mathfrak{v}_b = \alpha - \dfrac{\alpha\tau}{2\pi}(\mathfrak{L}_3 - \mathfrak{L}_4), \\[1ex] \mathfrak{v}_a - \mathfrak{v}_b = \alpha \cdot \mathfrak{e} - \dfrac{\alpha\tau}{2\pi}(\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2), \end{cases}$$

falls $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \cdots$ die aus $L_1, L_2, \cdots$ für $\varrho_0 = 0$ und $\omega = \vartheta$ hervorgehenden Ausdrücke bezeichnen. Ferner erhält man für die Dichtigkeiten:

$$(32)\quad \begin{cases} \mathfrak{k}_a = \dfrac{\alpha \varepsilon^2 \tau_a^3 \sin(-\varepsilon\varrho_a)}{2\pi^2} \displaystyle\int_{\vartheta}^{\infty} \dfrac{-i \sin i\varepsilon\lambda}{(\cos i\varepsilon\lambda - \cos\varepsilon\varrho_a)^2} \dfrac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \vartheta^2}}, \\[2ex] \mathfrak{k}_b = \dfrac{\alpha \varepsilon^2 \tau_b^3 \sin(\varepsilon\varrho_b)}{2\pi^2} \displaystyle\int_{\vartheta}^{\infty} \dfrac{-i \sin i\varepsilon\lambda}{(\cos i\varepsilon\lambda - \cos\varepsilon\varrho_b)^2} \dfrac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \vartheta^2}}. \end{cases}$$

Wenn man hierin $\lambda = \vartheta + t$ setzt, so findet man leicht, dass bis auf einen Factor, der für sehr grosse Werthe von ϑ sehr wenig von der Einheit verschieden ist:

$$\frac{\mathfrak{k}_a}{\sin(-\varepsilon\varrho_a)} = \frac{\mathfrak{k}_b}{\sin(\varepsilon\varrho_b)} = a\sqrt{\frac{\varepsilon^3}{2\pi^3}} \cdot \vartheta^{\frac{3}{2}} e^{-\varepsilon\vartheta}.$$

Hieraus ergiebt sich nicht nur das bekannte Resultat, dass im Berührungspunkte (d. h. für $\vartheta = \infty$) die Dichtigkeiten gleich Null sind, sondern es ist auch der Grad der Kleinheit zu ersehen, den dieselben in Punkten haben, die dem Berührungspunkte sehr nahe liegen.

Endlich findet man durch Anwendung der Gleichung (25):

$$(33)\quad \mathfrak{m}_a = \frac{\alpha\varepsilon}{4}\cot(-\varepsilon\varrho_a) + \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{\lambda} - i\varepsilon\cot\frac{i\varepsilon\lambda}{2} - \frac{i\varepsilon \sin i\varepsilon\lambda}{\cos i\varepsilon\lambda - \cos 2\varepsilon\varrho_a}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Bei Vertauschung von $-\varrho_a$ mit ϱ_b ändert sich nur das Vorzeichen des ersten Gliedes, so dass

$$(33')\quad \mathfrak{m}_b = \mathfrak{m}_a - \tfrac{1}{2}\alpha\varepsilon\cot(-\varepsilon\varrho_a).$$

Verbindet man hiermit die Gleichung $\mathfrak{m}_a + \mathfrak{m}_b = \mathfrak{M}$, so hat man drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Grössen α, $\mathfrak{m}_a$, $\mathfrak{m}_b$.

Anmerkung. Wenn zwei mit den Elektricitätsmengen $\mathfrak{m}_a'$ und $\mathfrak{m}_b'$ geladene Kugeln einander bis auf eine im Verhältniss zu ihren Radien sehr kleine Entfernung genähert werden, so ergiebt sich, unter Vernachlässigung von Grössen, die für ein verschwindend kleines c ebenfalls verschwindend klein werden, für $\mathfrak{m}_a'$ nach (25) der Ausdruck:

$$\mathfrak{m}_a' = \mathfrak{m}_a + \frac{\beta-\alpha}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{c}}\left(\frac{2}{\lambda} - i\varepsilon \cot\frac{i\varepsilon\lambda}{2} + \frac{\varepsilon}{i}\operatorname{tg} i\lambda\right)\frac{d\lambda}{\lambda}$$
$$+ \frac{\alpha-\beta}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{c}}\frac{\varepsilon}{i}\operatorname{tg} i\lambda\cdot\frac{d\lambda}{\lambda},$$

worin $\mathfrak{m}_a$ die in (33) angegebene Grösse bedeutet. Nun nähert sich das erste Integral bei unendlich abnehmendem c einer endlichen Grenze, während das zweite über jeden gegebenen Werth hinaus wächst. Da aber $\mathfrak{m}_a'$ und $\mathfrak{m}_a$ bestimmte endliche Werthe vorstellen, so muss $\alpha-\beta$, die Differenz der Werthe des Gesammtpotentials auf den beiden Kugeloberflächen, sehr klein sein, und in Folge dessen ist das zweite Glied in dem Ausdrucke für $\mathfrak{m}_a'$ gegen die beiden anderen zu vernachlässigen. Man erhält aber durch theilweise Integration:

$$\int_0^{\frac{\pi}{c}}\frac{\varepsilon}{i}\operatorname{tg} i\lambda\frac{d\lambda}{\lambda} = \varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{c}}\left(\log\frac{\pi}{c} - \log\lambda\right)\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{i}\operatorname{tg} i\lambda\right)d\lambda = \varepsilon\log\frac{1}{c} + G,$$

wenn G eine Grösse, die bei unendlich abnehmendem c endlich bleibt. Setzt man also

$$\alpha - \beta = \frac{2\pi\cdot\mathfrak{b}}{\varepsilon\log\frac{1}{c}},$$

so ergiebt sich:

$$\mathfrak{m}_a' = \mathfrak{m}_a + \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{m}_b' = \mathfrak{m}_b - \mathfrak{b},$$

und wenn man hierin für $\mathfrak{m}_a$ und $\mathfrak{m}_b$ ihre Werthe aus (33) und (33') einsetzt, so kann man die Constanten α und $\mathfrak{b}$ durch die gegebenen Elektricitätsmengen $\mathfrak{m}_a'$ und $\mathfrak{m}_b'$ ausdrücken. — Während aber das Gesammtpotential auf beiden Kugeln nahezu dieselben Werthe besitzt (nämlich Werthe, deren Differenz bei fortgesetzter Annäherung der Kugeln in dem Grade abnimmt, wie der reciproke Werth des Logarithmus der reciproken Entfernung*) beider Kugeln), haben, wie sich

*) Man vergl. den Werth von c am Schlusse des § 6.

mittels der in § 7. entwickelten Formeln nachweisen lässt, die Potentiale der einzelnen Belegungen und ebenso die Dichtigkeiten in der Nähe der Punkte, in welchen die Centrale die Kugeloberflächen schneidet, sehr grosse Werthe, die Dichtigkeiten in beträchtlicherer Entfernung aber nahezu dieselben Werthe, welche bei der Berührung der Kugeln eintreten würden. Die überschüssigen, bei der Berührung sich ausgleichenden Elektricitätsmengen ($+\mathfrak{b}$ und $-\mathfrak{b}$) würden also, wenn die Kugeln einander bis auf eine unendlich kleine Entfernung genähert werden könnten, ohne dass ein Uebergang von Elektricität von der einen zur anderen stattfände, auf unendlich kleinen Flächenräumen concentrirt sein.

Wenn die eine Kugel zur Erde abgeleitet, der anderen die Elektricitätsmenge $\mathfrak{m}_a'$ mitgetheilt ist, so sind β, $\mathfrak{m}_a$, $\mathfrak{m}_b = 0$, also $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}_a'$; die auf der nicht isolirten Kugel durch Influenz hervorgerufene Elektricitätsmenge $\mathfrak{m}_b'$ ist also bei sehr kleiner Entfernung der Kugeln nahezu $= -\mathfrak{m}_a'$, und die sehr kleine Grösse

$$\alpha = 2\pi\mathfrak{m}_a' : \left(\varepsilon \log \frac{1}{c}\right)$$

giebt den Werth des Gesammtpotentials in der isolirten Kugel an.

§ 9.

Reihenentwicklungen.

Wir kehren zu den in § 6. aufgestellten allgemeinen Formeln zurück, um kurz anzugeben, wie daraus theils neue, theils bekannte aber auf anderen Wegen gefundene Reihenentwicklungen abgeleitet werden können.

1.

Wendet man für $\cot am u$ die Formel an

$$\cot am u = \frac{\pi}{2K}\left\{\cot\frac{\pi u}{2K} - \frac{4q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} - \cdots\right\},$$

und bezeichnet durch δ die Constante

$$\delta = \frac{K'}{K} = \frac{\pi}{\varrho_b - \varrho_a} = -\frac{1}{\pi}\log q,$$

so ergeben sich für die Integrale J_1 und J_3, unter Benutzung der in § 4. Nr. 12) angegebenen Formen, die Ausdrücke:

$$(34)\quad \begin{cases} J_1 = \displaystyle\int_0^\omega \frac{2\delta\sin\delta(\varrho-\varrho_0)\cdot d\lambda}{(\cos i\delta\lambda - \cos\delta(\varrho-\varrho_0))\sqrt{2\cos\lambda - 2\cos\omega}} - \sum_1^\infty A_s\cdot\sin s\delta(\varrho-\varrho_0) \\ J_3 = \displaystyle\int_\omega^\pi \frac{-2i\delta\sin i\delta\lambda\cdot d\lambda}{(\cos i\delta\lambda - \cos\delta(\varrho-\varrho_0))\sqrt{2\cos\omega - 2\cos\lambda}} + \sum_1^\infty B_s'\cdot\cos s\delta(\varrho-\varrho_0), \end{cases}$$

worin die Coefficienten A_s und B_s die folgenden Functionen von ω vorstellen:

$$A_s = \frac{8\delta q^{2s}}{1+q^{2s}} \int_0^{\omega} \frac{\cos is\delta\lambda \cdot d\lambda}{\sqrt{2\cos\lambda - 2\cos\omega}},$$

$$B_s = \frac{8\delta q^{2s}}{1+q^{2s}} \int_{\omega}^{\pi} \frac{-i\sin is\delta\lambda \cdot d\lambda}{\sqrt{2\cos\omega - 2\cos\lambda}}.$$

Zu bemerken ist, dass die Reihe für J_1 für den Werth $\varrho = \varrho_0$ nicht anwendbar ist, und dass sie für $\omega = \pi$, welches auch der Werth von ϱ sei, aus lauter unendlich grossen Gliedern besteht, woraus indessen nur zu schliessen ist, dass in diesem speciellen Falle die Umkehrung der Reihenfolge der Summation und Integration unstatthaft war. Von diesen Ausnahmefällen abgesehen sind die Reihen anwendbar, und sie sind dann stark convergent, wenn der Abstand der Kugeln ein geringer ist. — Dass das vor dem Summenzeichen stehende Glied des Ausdruckes von J_3 dann $= \infty$ wird, wenn gleichzeitig $\varrho = \varrho_0$, $\omega = 0$, ist dadurch begründet, dass J_3 für diese Werthe unendlich werden muss. Die Ausdrücke für J_2 und J_4 ergeben sich durch Buchstabenvertauschung aus den für J_1 und J_3 aufgestellten. — Die Reihen dürfen nach ϱ unter dem Summenzeichen differentiirt werden.

2.

Setzt man in (12) $\lambda = \pi - \mu$, so ergiebt sich:

$$J_1 = -\frac{2iK'}{\pi} \int_{\pi-\omega}^{\pi} \left\{\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{K'}{\pi}(\varrho - \varrho_0 - i\mu) - \Delta\,\mathrm{am}\,\frac{K'}{\pi}(\varrho - \varrho_0 + i\mu)\right\} \cdot \frac{d\mu}{\sqrt{-2\cos\mu - 2\cos\omega}}$$

$$J_3 = \frac{2K'}{\pi} \int_0^{\pi-\omega} \left\{\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{K'}{\pi}(\varrho - \varrho_0 - i\mu) + \Delta\,\mathrm{am}\,\frac{K'}{\pi}(\varrho - \varrho_0 + i\mu)\right\} \cdot \frac{d\mu}{\sqrt{2\cos\omega + 2\cos\mu}},$$

und durch Anwendung der Formel

$$\Delta\,\mathrm{am}\,u = \frac{\pi}{2K}\left\{1 + \frac{4q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}$$

erhält man hieraus die trigonometrischen Reihen

$$(35) \qquad \begin{cases} J_1 = \sum\limits_1^{\infty} C_s \cdot \sin s\delta(\varrho - \varrho_0), \\ J_3 = \sum\limits_0^{\infty} D_s \cdot \cos s\delta(\varrho - \varrho_0) \end{cases}$$

wenn die Coefficienten C_s und D_s die Werthe haben:

$$C_s = \frac{4\delta}{\cos is\delta\pi}\int\limits_{\pi-\omega}^{\pi}\frac{-i\sin is\delta\mu\cdot d\mu}{\sqrt{-2\cos\mu-2\cos\omega}},$$

$$D_s = \frac{4\delta}{\cos is\delta\pi}\int\limits_{0}^{\pi-\omega}\frac{\cos is\delta\mu\cdot d\mu}{\sqrt{2\cos\omega+2\cos\mu}},$$

und wenn in der Reihe für J_3 das dem Werthe $s = 0$ entsprechende Glied auf die Hälfte reducirt wird. Es muss erwähnt werden, dass beide Reihen für den speciellen Werth $\omega = 0$ divergent sind, und dass die erstere (welche eine für $\varrho = \varrho_0 \pm 0$ discontinuirliche Function darstellt) für jeden Werth von ϱ nur eine sehr schwache Convergenz besitzt und nach ϱ nicht unter dem Summenzeichen differentiirbar ist. Dagegen ist es bei der zweiten Reihe erlaubt, den Werth von $\frac{\partial J_s}{\partial\varrho}$ durch Differentiation der einzelnen Reihenglieder abzuleiten und die so sich ergebende Reihe ist (ausser für nahe an 0 gelegene Werthe von ω) stark convergent, wenn der Abstand der Kugeln ein geringer ist. Von dieser Reihe allein hängen die Dichtigkeiten der elektrischen Belegungen in dem Falle ab, dass das Gesammtpotential auf beiden Kugeln denselben Werth hat.

3.

Benutzt man die Formeln

$$\cot\operatorname{am}(u, k) = \frac{1}{i\sin\operatorname{am}(-iu; k')}$$

$$\frac{1}{\sin\operatorname{am}u} = \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi u}{2K}} + \frac{4q}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^3}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right\},$$

so erhält man:

$$\frac{2K'}{\pi}\cot\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0+i\lambda)$$

$$= \frac{1}{i\sin\frac{1}{2}(\lambda-i\varrho+i\varrho_0)} + \frac{1}{i}\sum_0^\infty\frac{4q_1^{2n+1}}{1-q_1^{2n+1}}\sin(n+\tfrac{1}{2})(\lambda-i\varrho+i\varrho_0),$$

worin:

$$q_1 = e^{-(\varrho_b-\varrho_a)}.$$

Nun ist, wenn $\mathfrak{e}$, wie früher, die positive oder negative Einheit bezeichnet, je nachdem $\varrho-\varrho_0$ positiv oder negativ ist:

$$\frac{1}{i\sin\frac{1}{2}(\lambda-i\varrho+i\varrho_0)} = \frac{\mathfrak{e}}{i\sin\frac{1}{2}\mathfrak{e}(\lambda-i\varrho+i\varrho_0)} = 2\mathfrak{e}\sum_0^\infty e^{-(n+\frac{1}{2})\mathfrak{e}(\varrho-\varrho_0+i\lambda)}.$$

Vereinigt man diese Summe mit der vorigen, so ergiebt sich nach einigen leichten Umformungen:

$$\frac{2K'}{\pi}\cot\operatorname{am}\frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0+i\lambda)$$
$$=2\sum_0^\infty\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\{i(\varepsilon\varrho_b-\varepsilon\varrho_a-\varrho+\varrho_0)+\lambda\}}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b-\varrho_a)}.$$

Aus (12) folgt nun:

$$J_1=2\pi\sum_0^\infty\frac{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varepsilon\varrho_b-\varepsilon\varrho_a-\varrho+\varrho_0)}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b-\varrho_a)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\lambda\,d\lambda}{\sqrt{2\cos\lambda-2\cos\omega}},$$

$$J_3=2\pi\sum_0^\infty\frac{i\cos i(n+\frac{1}{2})(\varepsilon\varrho_b-\varepsilon\varrho_a-\varrho+\varrho_0)}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b-\varrho_a)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_\omega^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\lambda\,d\lambda}{\sqrt{2\cos\omega-2\cos\lambda}}.$$

Die Ausdrücke für J_2 und J_4 entstehen hieraus durch Verwandlung von $\varrho-\varrho_0$ in $\varrho+\varrho_0-2\varrho_a$; es ist jedoch gleichzeitig $\varepsilon=1$ zu setzen, weil $\varrho+\varrho_0-2\varrho_a$ positiv ist. Beachtet man noch, dass

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\lambda\,d\lambda}{\sqrt{2\cos\lambda-2\cos\omega}}=\frac{2}{\pi}\int_\omega^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\lambda\,d\lambda}{\sqrt{2\cos\omega-2\cos\lambda}}=P^n(\cos\omega),\ ^*)$$

so erhält man die folgenden in Bezug auf ω nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihenentwicklungen der vier Integrale J:

$$J_1=2\pi\sum_0^\infty\frac{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varepsilon\varrho_b-\varepsilon\varrho_a-\varrho+\varrho_0)}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b-\varrho_a)}P^n(\cos\omega),$$

$$J_2=2\pi\sum_0^\infty\frac{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b+\varrho_a-\varrho-\varrho_0)}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b-\varrho_a)}P^n(\cos\omega),$$

$$J_3=2\pi\sum_0^\infty\frac{i\cos i(n+\frac{1}{2})(\varepsilon\varrho_b-\varepsilon\varrho_a-\varrho+\varrho_0)}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b-\varrho_a)}P^n(\cos\omega),$$

$$J_4=2\pi\sum_0^\infty\frac{i\cos i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b+\varrho_a-\varrho-\varrho_0)}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b-\varrho_a)}P^n(\cos\omega),$$

Die Dichtigkeiten k_a und k_b (§ 6.) können durch die Gleichungen

---

*) Diese Darstellungen der Kugelfunction $P^n(\cos\omega)$ habe ich in den „Mathematischen Annalen" (Bd. V) aus den Dirichlet'schen Integralformen, und auf anderem Wege in dem Jahresberichte des hiesigen Gymnasiums, 1870, abgeleitet. (Letzterer Aufsatz ist in diesen Annalen, Bd. 18, pag. 161—194, abgedruckt.)

$$k_a^{\alpha,\beta} = -\frac{\tau_0 \tau_a^3}{8\pi^2 c^2}\left\{(\alpha-\beta)\frac{\partial J_2}{\partial \varrho} + (\alpha+\beta)\frac{\partial J_4}{\partial \varrho}\right\}(\varrho = \varrho_a),$$

$$k_b^{\alpha,\beta} = \frac{\tau_0 \tau_b^3}{8\pi^2 c^2}\left\{(\alpha-\beta)\frac{\partial J_2}{\partial \varrho} + (\alpha+\beta)\frac{\partial J_4}{\partial \varrho}\right\}(\varrho = \varrho_b),$$

gefunden werden. Daher ist:

$$k_a^{1,1} = \frac{\tau_0 \tau_a^3}{2\pi c^2}\sum_0^\infty \frac{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_0)}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)}\cdot(n+\tfrac{1}{2})\,P^n(\cos\omega),$$

$$k_b^{1,1} = \frac{\tau_0 \tau_b^3}{2\pi c^2}\sum_0^\infty \frac{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_0 - \varrho_a)}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)}\cdot(n+\tfrac{1}{2})\,P^n(\cos\omega).$$

Die Werthe von $4\pi k_a^{1,1}$ und $4\pi k_b^{1,1}$ erweisen sich als übereinstimmend mit den für die ihnen entsprechenden Grössen $H_\sigma^{(1)}$ und $H_s^{(1)}$ von Herrn C. Neumann aufgestellten Ausdrücken (l. c. pag. 109, Nr. 132).

Wenn α und β beliebige constante Werthe behalten, so findet man:

$$k_a^{\alpha,\beta} = \frac{\tau_0 \tau_a^3}{4\pi c^2}\sum_0^\infty i\cdot\frac{\alpha e^{(n+\frac{1}{2})(\varrho_b-\varrho_0)} - \beta e^{-(n+\frac{1}{2})(\varrho_b-\varrho_0)}}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)}\cdot(n+\tfrac{1}{2})\,P^n(\cos\omega),$$

$$k_b^{\alpha,\beta} = \frac{\tau_0 \tau_b^3}{4\pi c^2}\sum_0^\infty i\cdot\frac{-\alpha e^{(n+\frac{1}{2})(\varrho_a-\varrho_0)} + \beta e^{-(n+\frac{1}{2})(\varrho_a-\varrho_0)}}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)}\cdot(n+\tfrac{1}{2})\,P^n(\cos\omega),$$

und endlich ergiebt sich für die Dichtigkeiten der Belegungen zweier Kugeln, die mit gegebenen Elektricitätsmengen geladen aber der Einwirkung äusserer Kräfte nicht unterworfen sind:

$$\mathfrak{k}_a^{\alpha,\beta} = \frac{\tau_a^3}{4\pi c}\sum_0^\infty i\cdot\frac{\alpha e^{(n+\frac{1}{2})\varrho_b} - \beta e^{-(n+\frac{1}{2})\varrho_b}}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)}\cdot(n+\tfrac{1}{2})\,P^n(\cos\vartheta),$$

$$\mathfrak{k}_b^{\alpha,\beta} = \frac{\tau_b^3}{4\pi c}\sum_0^\infty i\cdot\frac{-\alpha e^{(n+\frac{1}{2})\varrho_a} + \beta e^{-(n+\frac{1}{2})\varrho_a}}{\sin i(n+\frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)}\cdot(n+\tfrac{1}{2})\,P^n(\cos\vartheta).$$

4.

Um zu einer anderen Form von Reihenentwicklungen zu gelangen lege ich die Gleichung*) zu Grunde:

*) Vergl. „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen. Von K. H. Schellbach. Berlin 1864," Seite 114 Nr. (3).

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{1}{\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sin(x+s\nu i)} \qquad (q=e^{-\nu}).$$

Da nun

$$\frac{2K'}{\pi}\cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0+i\lambda)$$

$$=\frac{2K'}{\pi}\cdot\frac{1}{i\sin \operatorname{am}\left\{\frac{K'}{\pi}(\lambda-i\varrho+i\varrho_0);k'\right\}}$$

und im vorliegenden Falle $\nu'=\varrho_b-\varrho_a$ ist, so erhält man, wenn man noch s in $-s$ verwandelt:

$$\frac{2K'}{\pi}\cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho-\varrho_0+i\lambda)$$

$$=\frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\lambda-i\varrho+i\varrho_0-2is(\varrho_b-\varrho_a))}.$$

Setzt man diesen Werth in (10) ein und beachtet, dass nach (1) und (1'):

$$\int_{-\omega}^{\omega}\frac{d\lambda}{i\sin\frac{1}{2}(\lambda-i\mu)\sqrt{2\cos\lambda-2\cos\omega}}=\frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{2\cos i\mu-2\cos\omega}},$$

$$\int_{\omega}^{2\pi-\omega}\frac{d\lambda}{\sin\frac{1}{2}(\lambda-i\mu)\sqrt{2\cos\omega-2\cos\lambda}}=\frac{2\pi}{\sqrt{2\cos i\mu-2\cos\omega}},$$

wenn $\varepsilon=+1$ oder -1, je nachdem μ positiv oder negativ ist, so erhält man:

$$J_1=2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_s(2\cos i(\varrho-\varrho_0+2s\varrho_b-2s\varrho_a)-2\cos\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

$$J_2=2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_s(2\cos i(\varrho+\varrho_0-2\varrho_a+2s\varrho_b-2s\varrho_a)-2\cos\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

$$J_3=2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}(2\cos i(\varrho-\varrho_0+2s\varrho_b-2s\varrho_a)-2\cos\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

$$J_4=2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}(2\cos i(\varrho+\varrho_0-2\varrho_a+2s\varrho_b-2s\varrho_a)-2\cos\omega)^{-\frac{1}{2}}.$$

Hierin ist $\varepsilon_s=+1$ oder -1, je nachdem s positiv oder negativ, und $\varepsilon_0=\varepsilon$; ferner $\delta_s=+1$, wenn s positiv oder Null, dagegen $\delta_s=-1$, wenn s negativ. Bei Einsetzung der Werthe der J in die

Gleichungen (21) heben sich die Glieder $\beta(1+\mathfrak{e})$ und $\alpha(1-\mathfrak{e})$ fort, und in der ersten Gleichung ausserdem alle Glieder, welche negativen Werthen von s entsprechen, in der zweiten die zu nicht negativen Werthen von s gehörigen, so dass für die Potentialfunctionen v_a und v_b die Ausdrücke gelten:

$$v_a^{\alpha,\beta} = -\beta\frac{\tau\tau_0}{c}\sum_1^\infty(2\cos i(\varrho-\varrho_0+2s\varrho_b-2s\varrho_a)-2\cos\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

$$+\alpha\frac{\tau\tau_0}{c}\sum_0^\infty(2\cos i(\varrho+\varrho_0-2\varrho_a+2s\varrho_b-2s\varrho_a)-2\cos\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

$$v_b^{\alpha,\beta} = -\alpha\frac{\tau\tau_0}{c}\sum_{-1}^{-\infty}(2\cos i(\varrho-\varrho_0+2s\varrho_b-2s\varrho_a)-2\cos\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

$$+\beta\frac{\tau\tau_0}{c}\sum_{-1}^{-\infty}(2\cos i(\varrho+\varrho_0-2\varrho_a+2s\varrho_b-2s\varrho_a)-2\cos\omega)^{-\frac{1}{2}}.$$

Durch $\varrho, \vartheta, \varphi$ sind die Coordinaten des Punktes P, auf welchen die Potentialfunctionen sich beziehen, und durch $\varrho_0, \vartheta_0, \varphi_0$ diejenigen des Centralpunktes P_0 bezeichnet worden. Bezeichnet man durch P_s und Q_s solche Punkte, denen die Coordinaten

$$\varrho_0-2s\varrho_b+2s\varrho_a,\ \vartheta_0,\ \varphi_0$$

und

$$-\varrho_0+2\varrho_a-2s\varrho_b+2s\varrho_a,\ \vartheta_0,\ \varphi_0$$

zukommen, so können die Ausdrücke für v_a und v_b unter folgenden Formen dargestellt werden:

$$v_a^{\alpha,\beta} = \beta\sum_1^\infty -\sqrt{\frac{AP_s\cdot BP_s}{AP_0\cdot BP_0}}\cdot\frac{1}{PP_s}$$

$$+\alpha\sum_0^\infty +\sqrt{\frac{AQ_s\cdot BQ_s}{AP_0\cdot BP_0}}\cdot\frac{1}{PQ_s},$$

$$v_b^{\alpha,\beta} = \alpha\sum_{-1}^{-\infty} -\sqrt{\frac{AP_s\cdot BP_s}{AP_0\cdot BP_0}}\cdot\frac{1}{PP_s}$$

$$+\beta\sum_{-1}^{-\infty} +\sqrt{\frac{AQ_s\cdot BQ_s}{AP_0\cdot BP_0}}\cdot\frac{1}{PQ_s}.$$

Setzt man hierin $\alpha=\beta=1$, so erhält man die Green'sche Function für den Centralpunkt P_0; setzt man dagegen $\varrho_0=0$, $\vartheta_0=0$, d. h. lässt P_0 ins Unendliche rücken, und verwandelt α und β in $\alpha\sqrt{AP_0\cdot BP_0}$

und $\beta \sqrt{AP_0 \cdot BP_0}$ (wodurch die Nenner der Brüche unter den Wurzelzeichen fortfallen), so beziehen sich die Formeln auf den Fall, wo das Gesammtpotential auf den beiden Kugeloberflächen resp. die constanten Werthe α und β hat. In jedem Falle zeigen die Formeln, dass die Wirkung der elektrischen Belegung jeder einzelnen Kugel nach aussen hin äquivalent ist der Wirkung bestimmter in den innerhalb dieser Kugel gelegenen Punkten P_s und Q_s concentrirt gedachter Massen; ein Resultat, zu dem mehrere der früheren Bearbeitungen des Problems auf sehr verschiedenen Wegen geführt haben.

Elbing, Ostern 1879.

Versuch einer übersichtlichen Darstellung der Riemann'schen Fläche, welche der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung für Primzahltransformation der elliptischen Functionen entspricht.

Von

WALTHER DYCK in Leipzig.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Die Probleme, welche mit den gestaltlichen Verhältnissen einer Riemann'schen Fläche im Zusammenhange stehen, finden eine besondere Schwierigkeit in der rein geometrischen Auffassung der Fläche und der Orientirung auf derselben, falls die Anzahl ihrer Blätter nur einigermassen gross ist. Die schon von Riemann gegebene, von Herrn Klein ausführlich verwandte Form der Darstellung, in welcher die einzelnen Blätter der Fläche, statt übereinanderzuliegen, nebeneinander ausgebreitet sind, erleichtert in hohem Grade diese Uebersicht. Sie macht es möglich, die Fläche dadurch der geometrischen Auffassung näher zu bringen, dass man sich zunächst successive auf kleinen Gebieten der Fläche orientirt und dann deren Einordnung in das Ganze verfolgt.

Die folgenden Zeilen versuchen es nun, eine Beschreibung der regulären Riemann'schen Flächen zu geben, welche der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung der elliptischen Functionen für Primzahltransformation entsprechen.

Diese Beschreibung wird wesentlich erleichtert dadurch, dass wir es mit einer *regulären* Fläche zu thun haben. *Dann ist es ein allgemeines Princip, die gestaltlichen Anordnungen der Fläche an vorhandene Untergruppen der durch die ganze Fläche vorgestellten Gesammtgruppe zu knüpfen;* es lassen sich dabei die einzelnen Blätter der Fläche in eine Anzahl gleichartiger Gebiete zusammenfassen, die durch die Substitutionen der betreffenden Untergruppe ineinander übergehen. Es sei in dieser Richtung namentlich auf die Darstellung verwiesen, welche Herr Klein im XIV. Bande dieser Annalen von der 168-blättrigen Fläche gegeben hat, die sich bei Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen einstellt.*) In der That sind es gemeinsame Ueberlegungen mit meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Klein, welche, von dort ausgehend, die principiellen Gesichtspunkte ergeben haben, nach welchen auch in den höheren Fällen eine übersichtliche Darstellung zu erreichen ist.

Was nun die Anordnung der folgenden Darstellung betrifft, so ist zunächst die bekannte Definition unserer Fläche vorausgeschickt (§ 1.), wie sie sich mit Hülfe der linearen ganzzahligen Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ von der Determinante 1 in geometrischem und gruppentheoretischem Sinne ergiebt. Diese Definition enthält die sämmtlichen, einfachsten Hülfsmittel der folgenden Darstellung.

Aus den Transformationen unserer Fläche in sich folgt die Möglichkeit, die einzelnen Blätter unserer Fläche zu gewissen Gebietstheilen zu gruppiren (§§ 2., 3.), deren gegenseitiges Verhalten wir näher verfolgen (§ 4.). So kommt eine übersichtliche Darstellung der Fläche, in welcher dieselbe in eine Anzahl gleichartiger Gebiete zerschnitten erscheint und wobei die Ränder dieser Gebiete in bestimmter Weise einander zugeordnet sind. Die Art der Aneinanderreihung unserer Gebietstheile giebt dann Anlass zur Aufstellung gewisser Linienzüge auf unserer Fläche (§§ 5., 6.), die gleichfalls die Orientirung auf derselben erleichtern.

Im folgenden Paragraphen (7.) gehen wir dann dazu über, eine bestimmte typische Gestalt zu kennzeichnen, in welcher die Fläche sich als „Fundamentalpolygon" in die ω-Ebene ausbreiten lässt.

In unseren Anordnungen treten unmittelbar bekannte (cyklische und metacyklische) Untergruppen der Gesammtgruppe hervor, die wir in § 8. aufzählen.

Zum Schlusse (§ 9.) sind die Betrachtungen an den Fällen der Transformation 5[ter], 7[ter] und 11[ter] Ordnung näher ausgeführt.

---

§ 1.

Definition der zu behandelnden Flächen.

Die Abhängigkeit des Periodenverhältnisses ω des elliptischen Integrales von der absoluten Invariante desselben $J=\frac{g_2^3}{\Delta}$ (in der Bezeichnung von Weierstrass und Klein) wird geometrisch durch eine unendlich vielblättrige Riemann'sche Fläche versinnlicht, deren Blätter für $J=0$ zu je drei, für $J=1$ zu je zwei zusammenhängen, während bei $J=\infty$ je unendlich viele Blätter zu einem Cyklus ver-

*) „Ueber Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen" pag. 458 ff. Man sehe auch noch den Aufsatz d. V. „Ueber reguläre Riemann'sche Flächen." Annalen Bd. XVII, pag. 437—510.

bunden sind. In der Folge sind die den Stellen $J = \infty$, 0, 1 entsprechenden Punkte beziehungsweise durch a, b, c bezeichnet.

Wir denken uns diese Riemann'sche Fläche durch Nebeneinanderlegen ihrer Blätter in eine frei im Raume gelegene Fläche ver-

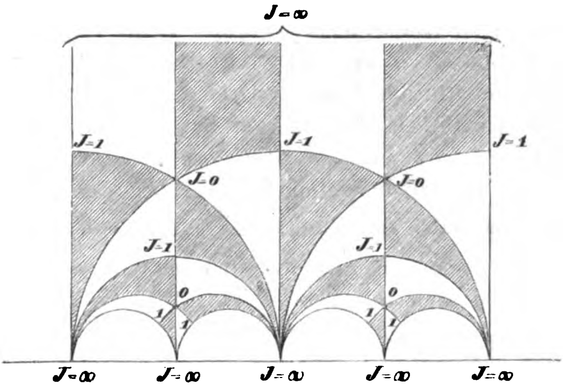


Fig. 1.

wandelt, die als Netz in die Ebene ausgebreitet die bekannte in Fig. 1 gegebene Eintheilung ergiebt, in welcher die Bilder der positiven und negativen Halbebene J durch die Schraffirung unterschieden sind.

Die einem Werthe von J entsprechenden ω-Werthe gehen dabei durch die ganzzahligen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

von der Determinante 1 auseinander hervor. Durch ein Werthsystem $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ist somit jedesmal *ein Blatt* unserer Fläche charakterisirt. Dabei ist ein simultaner Zeichenwechsel in Zähler und Nenner des obigen Quotienten gestattet. Dem Blatte $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ entspricht in der auseinandergefalteten Fläche ein schraffirtes „Dreieck $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$" und eines der benachbarten nichtschraffirten. Wir wollen dabei festsetzen, dass wir immer *den* beiden Dreiecken *gleiche* Bezeichnung beilegen, die, wie in Fig. 2, längs einer Kante ac zusammenstossen.

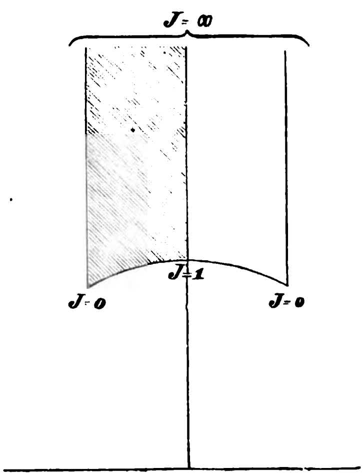


Fig. 2.

Unsere obigen ω-Substitutionen lassen sich durch Iteration und Combination von zwei „erzeugenden" Substitutionen darstellen, nämlich durch:

(A) $\omega = \omega' + 1$ von der Periode ∞,

(C) $\omega = \frac{-1}{\omega}$ von der Periode 2.

Wenden wir die Substitution A und ihre successiven Potenzen auf ein (etwa schraffirtes) Dreieck (α, β, γ, δ) an, so geht dieses der Reihe nach in die sämmtlichen (schraffirten) Dreiecke über, welche sich um den Eckpunkt a des Ausgangsdreiecks gruppiren. Analog wird durch die Substitution C unser Dreieck in das im Punkte c entsprechende (schraffirte) Dreieck übergeführt.

Wir betrachten jetzt jene Substitutionen nach einem Modul n, indem wir aus der unendlich vielblättrigen Fläche ein endliches Stück herausschneiden, welches die modulo n verschiedenen Werthe $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ repräsentirt. Wegen der Continuität der modulo n genommenen ω Substitutionen lässt sich aus dem Netze (Fig. 1) unserer Gesammtfläche ein *einfach zusammenhängendes Gebiet* abscheiden, welches diese Werthe darstellt. *Dasselbe versinnlicht uns geometrisch die Galois'sche Resolvente der Modulargleichung für Transformation n^{ter} Ordnung* und wir bezeichnen es als das „*Fundamentalpolygon*“ derselben. Man kann diesem Gebiete eine gewisse typische Gestalt ertheilen, auf die wir am Schlusse (§ 9.) der Arbeit näher eingehen.

Die *Ränder* des Fundamentalpolygons gehören vermöge der ω-Substitutionen paarweise zusammen, so wie die einzelnen Dreiecke durch unsere obigen Substitutionen A und C (die jetzt modulo n verstanden sind) sich aneinander anschliessen. So entsteht eine geschlossene reguläre Riemann'sche Fläche. Wir setzen in der Folge n stets als Primzahl voraus und haben dann, den $\frac{n \cdot n^2 - 1}{2}$ modulo n verschiedenen Werthen von $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ entsprechend, eine in $\frac{n \cdot n^2 - 1}{2}$ schraffirte und ebensoviele nichtschraffirte Dreiecke getheilte Fläche. Den Eckpunkten a, b, c unserer Gebietseintheilung entsprechend, vereinigen sich jetzt beziehungsweise $2 \cdot n$, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 2$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Dreiecke. Wir werden diese Punkte in der Folge auch beziehungsweise als „Eckpunkte n, 3, 2“ der Flächeneintheilung bezeichnen.

Die so im Allgemeinen charakterisirte Riemann'sche Fläche ist es, deren gestaltliche Verhältnisse wir näher untersuchen wollen.

§ 2.

Zusammenfassung der Gebiete unserer Fläche zu n-Ecken.

Fassen wir die um einen Eckpunkt n liegenden Gebiete jedesmal zu *einem n-Ecke* zusammen, so theilt sich die ganze Fläche in $\frac{n^2 - 1}{2}$ solche n-Ecke ein.

Wir erhalten die zu einem n-Ecke gehörigen Dreiecke, wenn wir auf eines derselben, $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, die Substitution A, $\omega = \omega' + 1$ und ihre Potenzen anwenden. Insofern unser Dreieck bei der Substitution A in sein „Nachbardreieck" $\frac{\alpha\omega+(\beta+\alpha)}{\gamma\omega+(\delta+\gamma)}$ übergeführt wird, wollen wir dabei sagen, dass es sich bei dieser Substitution mit der „*Amplitude* 1" um seinen Eckpunkt n „dreht", während die Substitution A^{ν} eine „Drehung von der Amplitude ν" bewirkt. Die Drehungen sind dabei modulo n verstanden und stets in demselben Sinne, in unserer weiteren Darstellung dem Sinne des Uhrzeigers entgegengesetzt, genommen.

Die obige Substitution zeigt nun unmittelbar, dass zu einem Eckpunkte n diejenigen n Dreiecke $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ gehören, für welche α und β constant ist, während die n verschiedenen Werthepaare γ, δ sich durch die Congruenz

(1) $$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \text{ mod. } n$$

bestimmen. So lassen sich die sämmtlichen n-Ecke unserer Fläche am einfachsten durch zwei Indices (α, γ) charakterisiren, wo α und γ von einander unabhängig ein ganzes Restsystem modulo n durchlaufen, von dem nur das Werthepaar $(0, 0)$ ausgeschlossen ist und ein gleichzeitiger Zeichenwechsel der Indices gestattet ist.*)

§ 3.

Zusammenfassung der n-Ecke zu Polygoncyklen.

Jedes n-Eck (α, γ) ist von einem Kranze von n weiteren Polygonen (α', γ') umgeben. Wir erhalten die Mittelpunkte derselben, wenn wir auf die n Dreiecke $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ unseres Polygons (α, γ) die Substitution $\omega = \frac{-1}{\omega'}$ anwenden, welche, wie schon oben erwähnt, jedesmal eine Drehung des betreffenden Dreiecks um seinen Eckpunkt c darstellt. Diese sind also einfach als Centra $(\alpha', \gamma') = (\beta, \delta)$ zu bezeichnen, wo β, δ die n Werthepaare bedeuten, die sich als Lösungen der obigen Congruenz

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \equiv 1 \text{ mod. } n$$

bei festem α, γ ergeben.

Wir wollen ein n-Eck mit dem Kranze der n umgebenden n-Ecke kurz als „*Polygoncyklus*" bezeichnen.

---

*) Man vergleiche hierzu die betreffenden Erörterungen in dem jüngsten Aufsatze des Herrn Klein: „Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Function." Math. Ann. XVII, p. 572.

Dann gilt der Satz:

Die $\frac{n^2-1}{2}$ *n-Ecke unserer Fläche lassen sich zu je* $n+1$ *in* $\frac{n-1}{2}$ *von einander getrennte Polygoncyklen zusammenfassen.*

Wir betrachten zu dem Ende eine Transformation unserer Fläche in sich, darin bestehend, dass wir um ein Centrum (α, γ) eine Drehung von der Periode n ausführen, und fragen uns nach dem Verhalten der einzelnen n-Ecke bei dieser Drehung. Drehen wir um das Centrum $(1, 0)$, indem wir das Dreieck ω in $\omega+1$ überführen, so geht dadurch ein beliebiges Dreieck $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ über in

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}+1=\frac{(\alpha+\gamma)\,\omega+(\beta+\delta)}{\gamma\omega+\delta},$$

und damit folgt:

Bei der Drehung $\omega=\omega'+1$ *um das Centrum* $(1, 0)$ *bleiben alle Centra* $(\alpha, 0)$, *für welche also* $\gamma\equiv 0$ *mod.* n *ist, und nur diese fest, während allgemein dabei ein Centrum* (α, γ) *in* $(\alpha+\gamma, \gamma)$ *übergeht.*

Nun sind die um ein n-Eck $(\alpha, 0)$ liegenden n Polygone (α', γ') nach dem Obigen gerade dadurch charakterisirt, dass für sie $\alpha\cdot\gamma'\equiv 1$ mod. n ist, also γ' einen *festen* Werth besitzt; während α' alle Reste modulo n annimmt. Der Vergleich mit dem soeben gefundenen Satze zeigt also, *dass die jedes Centrum* $(\alpha, 0)$ *umgebenden* n *Polygone bei der Drehung in einander übergehen:*

Es bilden somit die $\frac{n-1}{2}$ *Centra* $(\alpha, 0)$ *die Mittelpunkte von* $\frac{n-1}{2}$ *Polygoncyklen, die bei unserer Transformation je in sich übergehen. Wir können uns also ein anschauliches Bild unserer Fläche verschaffen, indem wir sie in* $\frac{n-1}{2}$ *solcher Polygoncyklen zerschneiden und jeden für sich darstellen.* Dabei ist dann, wie im folgenden Paragraphen ausgeführt, noch anzugeben, wie die einzelnen Ränder der so zerschnittenen Fläche aneinander gehören.

Je nachdem wir von dem Centrum $(1, 0)$ *als Mittelpunkt eines Polygoncyklus ausgehen, oder von einem der* n *umgebenden* n*-Ecke, erhalten wir im Ganzen* $(n+1)$ *verschiedene Arten, diese Zerlegung der Fläche auszuführen.* Allgemein ist dabei das aus einem *beliebigen* Centrum (α, γ) entspringende System von $\frac{n-1}{2}$ zusammengehörigen Polygoncyklen gegeben durch die Centra $(\varkappa\cdot\alpha, \varkappa\cdot\gamma)$, wo $\varkappa$ ein halbes Restsystem modulo n durchläuft.

Der Rand jedes unserer $\frac{n-1}{2}$ Polygoncyklen besteht aus $2n(n-3)$ Dreiecksseiten bc [Vergleiche die Figur 1 und 2 der Tafel I, welche für den Fall $n = 11$ entworfen ist]. Längs dieser Randkanten greifen die einzelnen Cyklen ineinander ein, wie wir dies sogleich noch näher auszuführen haben.

Die Drehung der Polygoncyklen lässt sich noch dadurch charakterisiren, dass wir einen derselben, also etwa den Cyklus $(1, 0)$, herausgreifen, um den Mittelpunkt desselben eine Drehung von der Amplitude 1 ausführen und jetzt nach der Amplitude der Drehung für die übrigen Cyklen $(\alpha, 0)$ fragen, die dabei gleichfalls in sich übergehen. Dann zeigt man leicht, dass diese Amplitude $\equiv \delta^2 \bmod. n$ ist, wobei $\alpha \cdot \delta \equiv 1 \bmod. n$.

Es drehen sich also bei unserer Transformation sämmtliche Polygoncyklen mit verschiedenen Amplituden, die dem System der verschiedenen quadratischen Reste modulo n entsprechen.

§ 4.

Aneinanderschliessen der Cyklen zur Fläche.

Wir wollen jetzt näher präcisiren, wie die einzelnen Ränder unserer zerschnittenen Fläche zusammenzusetzen sind. Dabei legen wir, der kürzeren Darstellung wegen, die Eintheilung nach den Polygoncyklen $(\alpha', 0)$ zu Grunde, die wir in der Folge blos durch den *einen* Index (α') bezeichnen, und wobei wir α' stets $\leq \frac{n-1}{2}$ annehmen.

Dann haben wir nach dem Früheren zuvörderst die Regel, dass ein Dreieck $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ zu dem n-Ecke (α, γ) gehört; und dieses zu dem Cyklus (α'), für welchen

$$\alpha' \gamma \equiv \pm 1 \bmod. n$$

ist. Beachten wir noch, dass die beiden Nachbardreiecke (das schraffirte und das nichtschraffirte), welchen wir den Index $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ beigelegt haben, mit ihrem Rande $(b\,c\,b)$ an die beiden durch $(\beta, -\alpha, \delta, -\gamma)$ zu bezeichnenden Dreiecke stossen, so lassen sich durch diese Angaben die Ränder unserer $\frac{n-1}{2}$ Cyklen im einzelnen Falle sofort zusammenschliessen.

Die hiedurch im Allgemeinen definirte Anordnung wollen wir dadurch näher charakterisiren, dass wir nach der *Reihenfolge fragen, in der sich die einzelnen Polygoncyklen um irgend einen derselben gruppiren.*

Wir gehen dabei von dem Cyklus (1) aus und betrachten zunächst das Polygon $(0, 1)$ dieses Cyklus. An die $(n - 3)$ noch freien Kanten $(b\,c\,b)$ dieses Polygons stossen nun der Reihe nach die $(n - 3)$ Polygone:

$$(1,2), \quad (1,3) \quad (1,4), \quad \cdots, \quad \left(1, \frac{n-1}{2}\right),$$

$$(-1,2), \; (-1,3), \; (-1,4), \cdots, \left(-1, \frac{n-1}{2}\right),$$

welche den Centra (α') angehören, für welche beziehungsweise

$$2\alpha', \quad 3\alpha', \quad 4\alpha', \quad \cdots, \quad \frac{n-1}{2}\alpha' \equiv \pm 1 \text{ mod. } n$$

ist. Die Werthe (α') der gesuchten Centra bilden also gerade das halbe Restsystem modulo n mit Ausschluss von 1. Ihre Anordnung ist (vergleiche auch die für den Fall $n = 11$ gegebenen Fig. 1 und 2 auf Tafel I) dabei *symmetrisch* in Bezug auf die durch die Mittelpunkte $(1, 0)$ und $(0, 1)$ gezogene Mittellinie unseres Polygons $(0, 1)$.

Drehen wir den Cyklus (1) durch die Substitution $\omega = \omega' + \nu$ in sich, so bleiben (selbstverständlich) auch unsere Centra (α') unverändert; führen wir den Cyklus (1) durch eine Substitution

$$\omega = \frac{\alpha_1 \omega' + \beta_1}{\delta_1}$$

in einen Cyklus (α_1) über, so wird jeder unserer Cyklen (α') in einen Cyklus $(\alpha' \alpha_1)$ übergeführt. Damit ist aber die gegenseitige Anordnung für alle unsere Cyklen gekennzeichnet:

Jeder Polygoncyklus stösst an jeden anderen mit $2n$ *seiner Ränder* (bcb); *diese* $2n$ *Ränder sind dabei jedesmal regulär-symmetrisch zum Centrum des Cyklus angeordnet.*

Wir fragen noch, *wie sich die so angeordneten Randstücke im Einzelnen aneinanderschliessen.* Greifen wir zu dem Ende etwa die Polygoncyklen (1) und (α') heraus, so erhalten wir nach dem eben Ausgeführten sofort die $2n$ Ränder in dem einen und in dem anderen Cyklus, in welchen die beiden zusammenstossen. Bezeichnen wir (vergl. Fig. 1 in Tafel I) die betreffenden n Randstücke des Cyklus (1), wie sie durch die Drehung A, $\omega = \omega' + 1$ um das Centrum (1) successive auseinander hervorgehen, mit R_0, R_1, R_2, $R_3 \cdots$ (indem wir dabei die noch übrigen n, zu jenen symmetrischen, Randstücke ausser Betracht lassen), und führen dieselbe Bezeichnung im Cyklus (α') ein, indem wir gleichfalls die Ränder, wie sie im Cyklus aufeinander folgen, durch R_0', R_1', R_2', $R_3' \cdots$ benennen. Dabei sollen R_0 und R_0' *zusammengehörige* Randstücke sein. Die Zuordnung der Ränder R_1, R_2, $R_3 \cdots$ zu den Rändern R_1', R_2', $R_3' \cdots$ ergiebt sich dann sofort, wenn wir den Rand R_0 successive in R_1, R_2, $R_3 \cdots$ überführen und zusehen, in welcher Reihenfolge dann der Rand R_0' in die übrigen Ränder R_1', R_2', $R_3' \cdots$ übergeht. Wir drehen also den Cyklus (1) mit der Amplitude 1 um sein Centrum, dann dreht, wie wir schon oben erwähnt (pag. 513), der Cyklus (α') mit einer Amplitude, die $\equiv \delta^2$ mod. n ist, wenn $\alpha' \delta \equiv 1$ mod. n. Damit folgt aber, dass die Reihenfolge, in welcher unsere Ränder paarweise zu vereinigen sind, unmittelbar durch die Zuordnung:

$$R_0, \quad R_1, \quad R_2, \quad R_3 \cdots,$$

zu:

$$R_0', \quad R'_{\delta^2}, \quad R'_{\delta^4}, \quad R'_{\delta^6} \cdots$$

gegeben ist, — und eine analoge Anordnung kommt für jedes Cyklenpaar.

§ 5.

Aneinanderreihen von Polygoncyklen.

Wir haben im vorigen Paragraphen durch eine Substitution

$$\text{(T)} \qquad \omega = \frac{\alpha' \omega' + \beta'}{\delta'}$$

den Cyklus 1 in einen Cyklus (α') übergeführt. Der Werth von β' in dieser Substitution bestimmt dabei die *specielle Art* dieser Ueberführung, indem dadurch dem Dreiecke „ω" des ersten Cyklus ein *bestimmtes* Dreieck $(\alpha', \beta', 0, \delta')$ des neuen Cyklus zugeordnet wird.

Die Iteration der obigen Substitution lässt unseren Cyklus (1) der Reihe nach übergehen in die Cyklen

$$(1), \quad (\alpha'), \quad (\alpha'^2), \quad (\alpha'^3) \cdots$$

Wenn nun α' in Bezug auf den Modul n zum Exponenten $n-1$ gehört, gelangen wir dabei in *sämmtliche* Polygoncyklen, während für $\alpha'^{\frac{n-1}{2d}} \equiv -1$ mod. n unsere $\frac{n-1}{2}$ Cyklen sich in d Reihen spalten, die durch unsere Substitution je in sich gehen.

Setzen wir für den Augenblick die obige Substitution (T) in der speciellen Form

$$\text{(T')} \qquad \omega = \frac{\alpha \omega'}{\delta}$$

voraus, wo α zum Exponenten $n-1$ gehöre, so sehen wir unmittelbar, dass durch diese Substitution neben der eben angeführten Reihe der Centra

$$(1), \quad (\alpha'), \quad (\alpha'^2), \quad (\alpha'^3) \cdots$$

noch die Centra eines zweiten Systems zusammengehöriger Polygoncyklen in einander übergeführt werden, nämlich die Reihe der Centra:

$$(0, 1), \quad (0, \alpha'), \quad (0, \alpha'^2), \quad (0, \alpha'^3) \cdots,$$

aber auch *nur* diese Reihe. Dabei führt die Substitution (C) $\omega = \frac{-1}{\omega'}$ die Reihe der ersten Centra in die zweite Reihe über, und ein gleiches gilt von allen Substitutionen $T'^{-\nu} C T'^{\nu}$.

Analog lässt sich für unsere *allgemeine* Substitution (T) der Satz aussprechen, *dass durch diese Substitution* (T) *und ihre successiven Potenzen die Centra zweier zusammengehöriger Systeme von Cyklen in einander übergeführt werden. Dabei giebt es immer eine Substitution* S *von der Periode* 2, *welche die Centra des einen Systems mit denen des anderen vertauscht, und das Gleiche gilt dann von allen Substitutionen* $T^{-\nu} S T^{\nu}$.*)

Wir können uns geometrisch eine solche Substitution (T) durch einen Weg auf unserer Riemann'schen Fläche vorgestellt denken, den wir vom Cyklus (1), etwa vom Dreiecke ω ausgehend, zu dem Dreiecke $(\alpha', \beta', 0, \delta')$ des Cyklus (α') führen und von hier aus analog von Cyklus zu Cyklus fortsetzen, bis wir zum Ausgangspunkte zurückgekommen sind — ein Weg, der, den verschiedenen Werthen β' entsprechend, noch n verschiedene Weisen der Cyklenverbindung zulässt, und den wir dabei stets so legen können, dass er auch noch jedesmal die Centra jenes zugehörigen Systems von Polygoncyklen enthält.

Beschränken wir uns einen Augenblick auf den Fall, in dem α' eine primitive Wurzel der Primzahl n ist, so durchläuft ein solcher Weg die sämmtlichen $\frac{n-1}{2}$ Centra (α'^{μ}) in einer von dem speciellen Werthe von α' abhängigen Reihenfolge. Sehen wir von dieser Reihenfolge ab, so giebt es, den $n+1$ möglichen Cykleneintheilungen entsprechend, die wir auf unserer Fläche treffen können, im Ganzen $n(n+1)$ wesentlich verschiedene derartige Linienzüge; sie reduciren sich auf blos $\frac{n(n+1)}{2}$ *Linienzüge*, da wir, wie eben erwähnt, jeden Linienzug durch *zwei* zugeordnete Systeme von Cyklen legen können.

Wir haben nun in unserer regulär eingetheilten Fläche in den *Kanten* unserer Dreiecke Linienstücke, die wir uns zu Wegen auf der Fläche zusammensetzen können. Jeder einzelne Schritt, von einem Dreiecke in ein benachbartes führend, bezeichnet dabei eine Drehung um einen der Eckpunkte des Dreiecks.

Führen wir solche Linienzüge von dem Centrum eines Polygoncyklus zu einem zugehörigen Centrum, so können wir damit alle möglichen Anordnungen unserer Cyklen erreichen.

§ 6.

Anordnung der Polygoncyklen längs der Symmetrielinien der Fläche.

Wir gehen im Folgenden auf *eine* dieser Gruppirungen näher ein, die sich unmittelbar darbietet: *Die Anordnung der Polygoncyklen längs derjenigen aus Dreiecksseiten gebildeten Linienzüge, welche sich durch*

*) Man vergleiche hier die zugehörigen Entwicklungen bei Serret, Traité d'algèbre supérieure vol. II., sowie die im letzten Hefte dieser Annalen erschienene

jede Ecke geradlinig fortsetzen — Linien, welche wir nach Herrn Klein*) als *Symmetrielinien* unserer Fläche bezeichnen wollen.

Charakterisiren wir eine Symmetrielinie durch die Eckpunkte, welche sie passirt, so sehen wir, dass es auf unseren Flächen nur *eine* Art von Symmetrielinien giebt; sie bestehen [vergl. die schematische Fig. 3 der Tafel I] aus einem Zuge:

(1) $$a \mid c\, a\, b\, c\, b\, a \mid \cdots$$

in periodischer Wiederholung. Wir wollen dieses Stück einer Symmetrielinie als ein *Element* derselben bezeichnen. Die geometrische Anschauung der Fläche zeigt uns dabei, *dass diejenigen Centra a, welche jedesmal ein neues Element der Linie beginnen, Centra von zusammengehörigen Polygoncyklen sind, und weiter sehen wir, dass es auf einer Symmetrielinie zwei Reihen solcher Punkte a giebt, welche als Centra von Polygoncyklen zwei getrennten Systemen angehören.*

Wir stellen jetzt diejenige Substitution auf, welche jenem durch ein Element einer Symmetrielinie bezeichneten Wege entspricht. Dabei gehen wir vom Centrum des Polygoncyklus (1) aus und bestimmen das dem Dreiecke ω dieses Cyklus analoge Dreieck des neuen Cyklus. Die Formel (1) für ein Element unserer Symmetrielinie ergiebt nun die gesuchte Substitution unmittelbar. Bezeichnen wir nämlich für den Augenblick:

mit A die Substitution $\omega = \omega' + 1$
[Drehung um einen Eckpunkt a, Periode n],

mit B die Substitution $\omega = \frac{\omega' + 1}{-\omega'}$
[Drehung um einen Eckpunkt b, Periode 3],

mit C die Substitution $\omega = \frac{-1}{\omega'}$
[Drehung um einen Eckpunkt c, Periode 2],

wobei dann die Relation

$$A \cdot B \cdot C = 1$$

statthat, so schreibt sich unser in Formel (1) gegebener Weg als *Substitution* aufgefasst [von links nach rechts] folgendermassen:

(2) $$C \cdot A^{\frac{n+1}{2}} \cdot B^2 \cdot C \cdot B \cdot A^{\frac{n-1}{2}}.$$

[vergl. Fig. 3 auf Tafel I]. Die einem Elemente einer Symmetrielinie entsprechende Substitution ist also:

(3) $$\omega = -\frac{2\omega'}{-\frac{n-1}{2}}$$

Abhandlung des Herrn Gierster: „Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades."

*) Man vergleiche Annalen XIV, p. 465.

oder im umgekehrten Sinne

(3a) $$\omega = \frac{\frac{n-1}{2}\cdot\omega'}{-2}.$$

Unsere vom Dreiecke ω auslaufende Symmetrielinie durchläuft also der Reihe nach die Centra:

(4) $(1), \quad (2), \quad (2^2), \quad (2^3)\cdots$

die wir in *umgekehrter Reihenfolge* auch als Centra:

(4a) $(1), \quad \left(\frac{n-1}{2}\right), \quad \left(\frac{n-1}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{n-1}{2}\right)^3\cdots$

bezeichnen können.

Die zweite Reihe von zusammengehörigen Polygoncentren erhalten wir, wenn wir in die successiven Potenzen der Substitution (3) die Substitution $\omega = -\frac{1}{\omega'}$ eintragen. Es sind dies also die Centra:

(5) $(0,\,1), \quad \left(0,\,\frac{n-1}{2}\right), \quad \left(0,\,\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right), \quad \left(0,\,\left(\frac{n-1}{2}\right)^3\right)\cdots$

oder in umgekehrter Reihenfolge geschrieben:

(5a) $(0,\,1), \quad (0,\,2), \quad (0,\,2^2), \quad (0,\,2^3)\cdots$

Wir sehen nun sofort:

Eine Symmetrielinie besteht aus $\nu = \frac{n-1}{2d}$ Elementen, wenn

$$2^{\frac{n-1}{2d}} \equiv \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2d}} \equiv -1 \text{ mod. } n$$

oder kürzer $4^\nu \equiv 1$ mod. n ist.

Dann sind wir nämlich nach der ν^{ten} Wiederholung der Substitution (3) zum ursprünglichen *Centrum* (1) und zum Ausgangs*dreieck* (ω) desselben zurückgekehrt. Nun besteht jedes Element einer Symmetrielinie aus 6 Dreiecksseiten, und so ergiebt sich, *dass es auf unserer Fläche $\frac{n\cdot\overline{n+1}\cdot d}{2}$ Symmetrielinien giebt.*

Drehen wir jetzt durch die Substitution A, $\omega = \omega' + 1$, und ihre successiven Potenzen den Cyklus (1) in sich, so geht dabei unsere erstbetrachtete Symmetrielinie der Reihe nach in die $(n-1)$ übrigen durch das Centrum (1) laufenden Symmetrielinien über. Dabei bleiben die $\frac{n-1}{2\cdot d}$ Centra $(1), (2), (2^2), \cdots$, welche auf der ersten Symmetrielinie liegen, und *nur diese* Punkte derselben fest, während die zweite Reihe $(0,\,1), \left(0,\,\frac{n-1}{2}\right), \left(0,\,\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right)\cdots$ von zusammengehörigen Punkten a successive in neue Reihen von zusammengehörigen Punkten a übergeht. Nach der Bemerkung auf pag. 513 dreht dabei durch die

Substitution A der Cyklus (1) mit der Amplitude 1, der Cyklus $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ mit der Amplitude 4, der Cyklus $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ mit der Amplitude 4^2 u. s. w.

Zusammenfassend ergiebt sich somit für unsere Symmetrielinien die folgende Gruppirung:

1. Die $\frac{n \cdot \overline{n+1} \cdot d}{2}$ Symmetrielinien unserer Fläche trennen sich zu je n in $\frac{\overline{n+1} \cdot d}{2}$ Systeme. Jedes System enthält $\frac{n-1}{2d}$ Centra von Polygoncyklen derart, dass durch sie die sämmtlichen Symmetrielinien des Systems hindurchlaufen; wir wollen sie die „Centra I" des Systems nennen. Das System enthält ausserdem noch $n \cdot \frac{n-1}{2d}$ „Polygoncentra II", deren jedes nur von *einer* Symmetrielinie des Systems durchsetzt wird.

Den zwei Reihen zusammengehöriger Centra, die wir auf jeder Symmetrielinie unterscheiden, entsprechend, ist jede Symmetrielinie an *zwei* solchen Systemen betheiligt.

2. Die $\frac{\overline{n+1} \cdot d}{2}$ Systeme von Symmetrielinien gehören ihrerseits wieder zu je d zusammen, der Art, dass die Centra I dieser d Systeme zusammen eine vollständige Reihe von $\frac{n-1}{2}$ zusammengehörigen Cyklencentren bilden; die Centra II einer solchen Gruppe umfassen dann *alle* übrigen Polygoncentra der Fläche.

3. Von den Polygoncyklen, in die wir, von irgend einem Centrum ausgehend, durch die Substitution (3a) successive gelangen, dreht jeder folgende mit viermal grösserer Amplitude als der unmittelbar vorhergehende.

§ 7.

Das Fundamentalpolygon in der ω-Ebene.

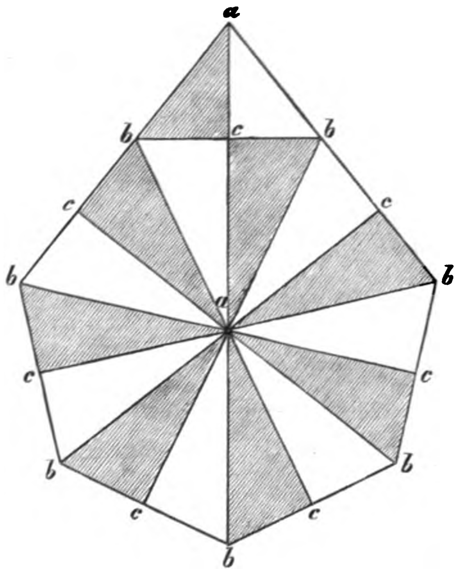
Wir vervollständigen die Darstellung unserer Fläche noch dadurch, dass wir angeben, wie sich dieselbe über der ω-Ebene ausbreiten lässt. Man kann dies, da in der ω-Ebene zu jedem Dreiecke modulo n genommen unendlich viele äquivalente Dreiecke existiren, noch auf sehr verschiedene Weise bewerkstelligen. Wir fragen also, wie wir die $\frac{n-1}{2}$ Polygoncyklen der bisherigen Darstellung durch zweckmässige Zerschneidung und Zusammenfügung zu einem *übersichtlichen Fundamentalpolygon in der ω-Ebene* ausbreiten können.

Wir gehen wieder vom Polygoncyklus (1) aus, dessen Mitte also durch die Dreiecke

$$\omega - \frac{n-1}{2}, \cdots, \quad \omega - 2, \quad \omega - 1, \quad \omega, \quad \omega + 1, \omega + 2, \cdots, \omega + \frac{n-1}{2}$$

gebildet ist und zerschneiden denselben zunächst in n Stücke der Art, wie Figur 1 für $n = 7$ [oder etwa die Figur 2 in Tafel I für $n = 11$] bezeichnet.

Fig. 1.



Diese n Gebiete legen wir, indem wir noch jedesmal die Mittellinie derselben von b bis a einschneiden, nebeneinander in die ω-Ebene und biegen sie dabei so auseinander, dass die obigen Dreiecke mit den gleichbenannten Dreiecken der ω-Ebene zusammenfallen. Dabei kommt also das Centrum des Cyklus (1) in den unendlich fernen Punkt der ω-Ebene zu liegen, während die Mittelpunkte der umliegenden n-Ecke:

$$\left(-\frac{n-1}{2}, 1\right), \cdots, (-2, 1), (-1, 1), \quad (0, 1), \quad (+1, 1), (+2, 1), \cdots, \left(+\frac{n+1}{2}, 1\right)$$

beziehungsweise in die Punkte:

$$-\frac{n-1}{2}, \cdots, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad +2, \cdots + \frac{n-1}{2}$$

der reellen Axe zu liegen kommen*) und jeder der n Gebietstheile innerhalb zweier Ordinaten

$$-\frac{n}{2} \;\Big|\; -\frac{n-2}{2} \cdots \;\Big|\; -\frac{3}{2} \;\Big|\; -\frac{1}{2} \;\Big|\; +\frac{1}{2} \;\Big|\; +\frac{3}{2} \;\Big|\; \cdots \frac{n-2}{2} \;\Big|\; \frac{n}{2}$$

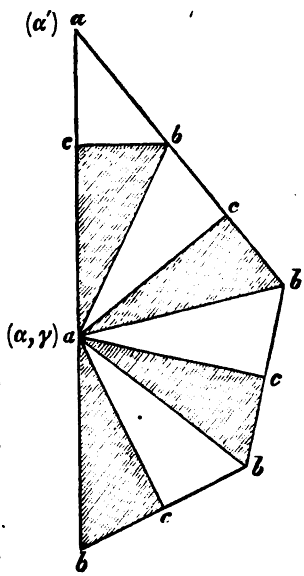
eingeschlossen ist. An die $n \cdot (n-3)$ freien Kanten bcb der letzteren Gebiete stossen nun die sämmtlichen weiteren Polygoncyklen in der pag. 514 gegebenen Reihenfolge und Anordnung.

*) Wir nehmen den positiven Sinn derselben von links nach rechts.

Aus der *Regularität* der Flächeneintheilung folgt dann sofort, dass es möglich sein muss, die ursprüngliche Fläche so innerhalb der oben bezeichneten n Verticalstreifen auszubreiten, dass die Anordnung für alle Streifen eine *congruente* ist. Die *Symmetrie* der Fläche bezüglich ihrer schraffirten und nichtschraffirten Gebiete fordert dann weiter, dass innerhalb jeden Streifens *Symmetrie* zu dessen Mittellinie statthat.

Eine solche Anordnung erhalten wir nun, wenn wir unsere $\frac{n-3}{2}$ weiteren Polygoncyklen (α') in $n\,(n-3)$ abwechselnd congruente und symmetrische Stücke der durch nebenstehende Figur 2 (für $n=7$) charakterisirten Art zerschneiden. Die Spitzen a dieser Gebiete tragen die Bezeichnung (α') des betreffenden Cyklencentrums, während die halbirten n-Ecke als umgebende Polygone die Bezeichnung (α, γ) tragen.

Fig. 2.



Wenn wir jetzt angeben, wie diese einzelnen Stücke an unsere freien Ränder zu schliessen sind, können wir uns nach dem Obigen auf den durch die Ordinaten $\omega = 0$ und $\omega = \frac{1}{2}$ begrenzten Verticalstreifen der ω-Ebene beschränken.

In den eben bezeichneten Raum fallen $\frac{n-3}{2}$ unserer Gebiete, die an die $\frac{n-3}{2}$ freien Ränder des Polygons (0, 1) zu fügen sind, welche in unserem Verticalstreifen sich befinden. Die Lage dieser Gebiete bestimmen wir dadurch, dass wir die Punkte der Abscissenaxe angeben, in welche die Centra der Halbpolygone (α, γ) zu liegen kommen und die Punkte, welche den Spitzen (α') entsprechen. Diese Angaben müssen wir dann noch dadurch vervollständigen, dass wir angeben, ob das betreffende Gebiet ein dem Fig. 2 dargestellten analoges, d. h. ein Gebiet mit „weisser Spitze" ist, oder ein dazu symmetrisches, mit „schraffirter Spitze."

Diese letztere Frage entscheidet sich aber unmittelbar. Das Stück aca der Randlinie eines solchen Gebietes (vergl. Fig. 2) verwandelt sich nämlich, wenn wir die Figur in die ω-Ebene übertragen, in den Halbkreis über den beiden der Spitze (α') und dem Centrum (α, γ) entsprechenden Punkten. Ist nun die Abscisse des Punktes (α') *kleiner* als die von (α, γ), liegt also die Spitze (α') *links* vom Centrum (α, γ), so entspricht das Gebiet dem in der Figur gezeichneten mit *weisser* Spitze, denn auch hier liegt, wenn wir das Gebiet der ω-Ebene entsprechend orientiren, die Spitze nothwendig links vom Centrum des Halbpolygons. Ist aber die Abscisse der Spitze (α') *grösser* als die von Centrum (a, γ), so kommt das symmetrische Gebiet mit schraffirter Spitze.

Die Abscissen der Centra $(\alpha, \gamma) = (1, \gamma)$ für die Halbpolygone, welche wir an die $\frac{n-3}{2}$ freien Ränder des Polygones $(0, 1)$ anschliessen, lassen sich unmittelbar hinschreiben. Die Reihenfolge der Polygone $(1, \gamma)$ von links nach rechts durchlaufen ist nämlich (wie schon pag. 514 erwähnt) gegeben durch:

$$\left(1, \frac{n-1}{2}\right), \ \left(1, \frac{n-3}{2}\right), \cdots, (1, 4), \ (1, 3), \ (1, 2)$$

und die Centra dieser Polygone liegen in den Punkten:

$$\omega = \frac{1}{\frac{n-1}{2}}, \qquad \frac{1}{\frac{n-3}{2}}, \cdots, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{2}$$

der reellen Axe.

Die Cyklencentra (α') dieser Polygone (die Spitzen (α') unserer Gebiete) ergeben sich nach pag. 513 aus der Congruenz

$$\alpha' \gamma \equiv \pm 1 \text{ mod. } n,$$

wo wir $\alpha' \leqq \frac{n-1}{2}$ nehmen. *Wir haben die Abscissen dieser Centra* (α') *zu bestimmen*. Zu dem Ende berücksichtigen wir, dass das Halbpolygon $(1, \gamma)$ mit seinen beiden Dreiecken $\frac{\omega}{\gamma\omega + 1}$ {dem schraffirten und dem nichtschraffirten} an den entsprechenden Rand bcb des Cyklus $(0, 1)$ stösst*). Das ν^{te} Dreieckspaar des Cyklus $(1, \gamma)$, von jenem ersteren in positivem oder negativem Drehungssinne gezählt, ist nun bezeichnet durch die Substitution $\frac{\omega \pm \nu}{\gamma\omega \pm \gamma\nu + 1}$, und dieses Dreieckspaar grenzt seinerseits mit seinem Rande bcb an den Polygoncyklus $(\nu, \gamma\nu \pm 1)$. ν als variabel angesehen, befinden sich unter diesen letzteren Cyklen unendlich viele Cyklen $(\alpha' + \lambda n, \varkappa n)$, die mit $(\alpha', 0)$ modulo n äquivalent sind. Um die Abscisse unserer Spitze (α') zu finden, haben wir also nur zu fragen, welches ist, von *Dreieck* $\frac{\omega}{\gamma\omega + 1}$ an, in positivem oder negativem Drehungssinne gerechnet der *nächste* Cyklus $(\alpha', 0)$? Aus der obigen Congruenz

$$\alpha' \gamma \mp 1 \equiv 0 \text{ mod. } n$$

folgt aber unmittelbar, dass dies der Cyklus $(\alpha', \alpha'\gamma \mp 1)$ ist.

---

*) Man sehe hiezu die Figur in Tafel II, welche für den Fall $n = 11$ entworfen ist.

Das Centrum dieses Cyklus und damit die gesuchte Abscisse für unsere Spitze (α') *ist also:*

$$\omega = \frac{\alpha'}{\alpha'\gamma \mp 1}.$$

Da nun diese Abscisse je nach dem Vorzeichen im Nenner grösser oder kleiner ist als die Abscisse $\frac{1}{\gamma}$ des Centrums für das zugehörige Halbpolygon, so entspricht das obere Vorzeichen den Gebieten mit schraffirter, das untere den Gebieten mit weisser Spitze.

Damit ist die Anordnung unserer Gebiete in dem Intervalle $\omega = 0$ *bis* $\omega = \frac{1}{2}$ *völlig bestimmt.* Die *Gesammtfläche* entsteht jetzt durch die abwechselnd congruente und symmetrische Wiederholung dieses Streifens. Dabei ist wieder eine Tabelle anzufügen, welche die Ränder unseres Fundamentalpolygons einander paarweise zuordnet und diese ergiebt sich unmittelbar durch unsere früheren Angaben.

Wir veranschaulichen unsere allgemeinen Erörterungen in § 9. durch die specielle Gestalt der Fundamentalpolygone für $n = 7$ und $n = 11$.

§ 8.

Die Untergruppen, welche unseren Anordnungen zu Grunde liegen.

Das in der Einleitung ausgesprochene Princip, der geometrischen Darstellung regulärer Riemann'scher Flächen gewisse *Untergruppen* der durch die ganze Fläche vorgestellten Gruppe zu Grunde zu legen, tritt im Vorstehenden deutlich hervor und zwar sind hier gewisse in der Gruppe der Modulargleichung enthaltene *cyklische und metacyklische Untergruppen* benützt.

Dieselben kommen dabei in *verschiedener Weise* zur Geltung. Zunächst nämlich haben wir gewisse Gebietstheile zusammengefasst, welche bei den Transformationen einer Untergruppe je *in sich* übergehen. Weitere Untergruppen erkennen wir in den Ueberführungen dieser einzelnen Gebiete ineinander. Endlich stellen sich Untergruppen auch noch durch gewisse „Transformationswege" dar, die wir auf unserer Fläche verzeichnen.

Wir führen kurz die hiernach unseren Anordnungen zu Grunde liegenden Untergruppen auf:

1. *Die Gruppe der Modulargleichungen enthält* $n + 1$ *cyklische Gruppen von der Periode* n. Ihnen entspricht es, dass wir auf $n + 1$ verschiedene Weisen die Riemann'sche Fläche in je $\frac{n-1}{2}$ Polygoncyklen zerschneiden können, die jedesmal bei den Transformationen *einer* solchen Gruppe in sich drehen.

Ebenso veranschaulicht die n-fach congruente Anordnung des Fundamentalpolygons in der ω-Ebene eine dieser cyklischen Gruppen, nämlich die der Substitution A, $\omega = \omega' + 1$ entsprechende, welche sich durch Verschiebung der ω-Ebene längs der reellen Axe charakterisirt. Die $\frac{n-1}{2}$ Cyklencentra, welche bei dieser Operation fest bleiben, sind unmittelbar durch den Punkt $\omega = \infty$ gegeben und durch die $2 \cdot n \cdot \frac{n-3}{2}$ Spitzen (α'), in welchen unser Fundamentalpolygon an die Abscissen heranreicht, und welche zu je $2n$ zu *einem* Centrum zusammengehören.

2. *Es giebt* $\frac{n \cdot n+1}{2}$ *cyklische Gruppen von der Ordnung* $\frac{n-1}{2}$. Ihnen entsprechen unmittelbar die in § 5. erwähnten $\frac{n \cdot n+1}{2}$ wesentlich verschiedenen Transformationswege, die, von einem gewissen Cyklencentrum beginnend, *alle* Centra des zugehörigen Cyklensystems durchlaufen. Den Untergruppen dieser cyklischen Gruppe entsprechen ähnliche, früher schliessende, Wege. Speciell sind durch die *Symmetrielinien* (vergl. § 6.) Untergruppen von der Ordnung $\frac{n-1}{2d}$ bezeichnet, wo $2^{\frac{n-1}{2d}} \equiv -1 \mod. n$.

3. Jeder unserer Transformationswege enthält zwei Systeme von zusammengehörigen Cyklencentren, die gleichberechtigt sind. Verbinden wir also mit den obigen cyklischen Gruppen von der Ordnung $\frac{n-1}{2}$ (oder eines Theilers dieser Zahl) noch jene früher erwähnte Transformation S von der Periode 2, welche jene beiden Systeme vertauscht, so folgen *die* $\frac{n \cdot n+1}{2}$ *Doppelpyramidengruppen*) von der Ordnung* $n-1$ (*und deren Untergruppen*), welche die Gruppe der Modulargleichungen enthält. Von ihnen sind speciell die auf die *Symmetrielinien* bezüglichen von der Ordnung $\frac{n-1}{d}$ in unserer geometrischen Darstellung leicht ersichtlich.

4. Indem wir die zuerst behandelten Drehungen unserer Cyklen *in sich* mit ihrer successiven Ueberführung *ineinander* (längs der in 2. aufgeführten Transformationswege verbinden, erhalten wir auch das Bild der $n+1$ *metacyklischen Untergruppen von der Ordnung* $\frac{n \cdot n-1}{2}$, welche die Gruppe der Modulargleichung umfasst. Mit ihnen correspondirt die Eintheilung der Fläche in Gebiete der durch Fig. 2 (Tafel I) gekennzeichneten Art. Wir sehen dabei sofort, dass eine derartige Eintheilung der Fläche auf $n+1$ verschiedene Weisen möglich ist.

---

*) Wegen dieser Bezeichnung vergleiche man z. B. Ann. XII, p. 167.

Bezüglich der Anordnung unserer Flächen nach *anderen* als den hier aufgezählten Untergruppen*) sei hier noch auf die Form verwiesen, welche Herr Klein der Fläche 168[ten] Grades (für Transformation 7[ter] Ordnung) ertheilt hat, um die in ihr enthaltene *Oktaedergruppe* zum Ausdruck zu bringen**).

Analog lässt sich z. B. der 660-blättrigen Fläche (für Transformation 11[ter] Ordnung) „*Ikosaederregularität*" ertheilen, der in ihr enthaltenen *Ikosaederuntergruppe* entsprechend. Doch schwindet hier zunächst die Uebersichtlichkeit der ganzen Fläche, die unter Zugrundelegung der obigen, sich unmittelbar darbietenden Untergruppen in einfacher Weise erreicht ist.

§ 9.

Darstellung der Fälle $n = 5, 7, 11$.

Die regulären Flächen, welche der Transformation 5[ter] und 7[ter] Ordnung entsprechen, sind in den Arbeiten des Herrn Klein***) ausführlich erörtert. Doch sei des Zusammenhangs wegen hier in Kürze die Form gekennzeichnet, in welcher sie sich in unsere Darstellung einreihen.

1. $n = 5$.

Die 60-blättrige Fläche, welche sich für $n = 5$ ergiebt (das Ikosaeder), theilt sich in 12 Fünfecke ein, die auf 6 Weisen zu je 2 Polygoncyklen zusammengefasst werden können.

Denken wir uns die Fläche in der bekannten Weise über der Kugel ausgebreitet, so liegen die Centra zweier zusammengehöriger Polygoncyklen diametral gegenüber und bilden so in der That die einzigen Punkte, welche bei der Drehung der Cyklen in sich fest bleiben. Dabei ist die Amplitude der Drehung für den einen Cyklus modulo 5 genommen 4mal so gross wie die des anderen, denn die Drehung des einen Cyklus erfolgt in entgegengesetztem Sinne zu der des zweiten.

2. $n = 7$.

Bei der 168-blättrigen Fläche für Transformation 7[ter] Ordnung, welche in 24 Siebenecke zerfällt, erhalten wir auf 8 Weisen 3 zusammengehörige Polygoncyklen.

Die Centra dreier zusammengehöriger Cyklen treten in dem von Herrn Klein gegebenen Netze dieser Fläche (vergleiche die zugehörige Tafel im XIV. Annalenbande) unmittelbar hervor in dem Mittelpunkt und den 14 Eckpunkten dieses Netzes, welche letztere zu je sieben zu vereinigen sind. Die Anordnung der Polygoncyklen längs der

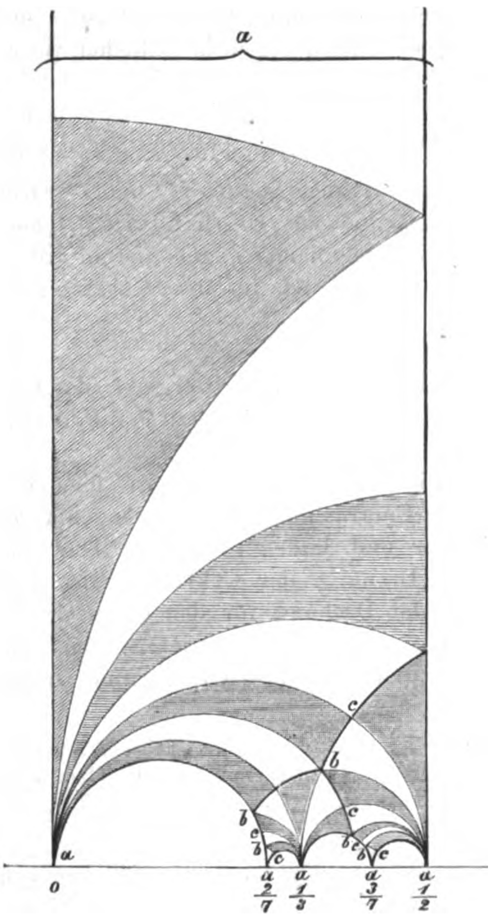
*) Die vollständige Aufzählung dieser Untergruppen giebt Herr Gierster in der schon oben erwähnten Arbeit.

**) Annalen XIV, pag. 466 ff.

***) In den Annalenbänden IX, XII, XIV.

Symmetrielinien der Fläche (die hier aus 3 Elementen bestehen) ist dabei in dieser Gestalt der Fläche am deutlichsten ersichtlich. Führen wir um den Mittelpunkt unseres Netzes eine Drehung aus, so drehen auch die beiden zugehörigen Polygoncyklen in sich; indem wir dabei die Reihenfolge berücksichtigen, in welcher die Eckpunkte unseres Netzes zu diesen Cyklen zu vereinigen sind, finden wir auch sofort unsere Regel über die Amplitude der Drehung für die einzelnen Polygoncyklen bestätigt.

Fig. 3.



Das *Fundamentalpolygon* für die Transformation siebenter Ordnung hat Herr Klein im XIV. Annalenbande pag. 463 gegeben. Wir setzen die dortige Figur, den 14ten Theil des Fundamentalpolygons, als Beispiel für die allgemeinen Erörterungen des § 7. und zum Vergleich mit dem nachfolgend für $n = 11$ gegebenen Fundamentalpolygon noch einmal hierher.

3. $n = 11$.

Die 660-blättrige Fläche, welche sich bei Transformation elfter Ordnung einstellt, theilt sich in 60 Elfecke, die sich auf 12 Weisen zu je 12 in 5 Polygoncyklen zusammenfassen lassen, die wir nach dem Früherenmit (1), (2), (3), (4), (5) benennen. Fig. 1 der Tafel I stellt den Polygoncyklus (1) dar. Durch die dem Umriss beigesetzten Zahlen sind die Polygoncyklen bezeichnet, welche an den betreffenden Rändern eingreifen. Für die vier weiteren Polygoncyklen ist diese Zuordnung der Ränder in der beigesetzten Tabelle ersichtlich, welche einfach angiebt, wie die Cyklen sich permutiren, wenn wir den „Mittelcyklus“ (1) successive in die übrigen Cyklen (2), (4), (3), (5) überführen.

Betrachten wir die Anordnung dieser Cyklen *längs einer Symmetrielinie*, indem wir auf das Dreieck ω die Substitution

$$\omega = \frac{2\omega'}{5}$$

und deren successive Potenzen anwenden, so kommen wir, da die Zahl 2 zum Exponenten $n-1$ gehört, vom Centrum (1) beginnend in *sämmtliche* zugehörige Centra in der Reihenfolge 1, 2, 4, 3, 5.

Die specielle Zuordnung der einzelnen Ränder unserer Polygoncyklen ergiebt sich nach den am Schluss des § 4. gegebenen Erörterungen sofort. Um z. B. die Ränder unserer Cyklen 5, 3, 4, 2 einzeln an die zugehörigen Ränder des Cyklus (1) zu schliessen, haben wir zu berücksichtigen, dass für eine Drehung des Cyklus (1) von der Amplitude (1) die Amplituden der Cyklen 5, 3, 4, 2 beziehungsweise mit 4, 4^2, 4^3, 4^4 congruent sind. Damit folgt dann die Zuordnung aller entsprechenden Ränder eines Cyklenpaares aus einer einzigen.

Zum Schlusse geben wir noch die *Gestalt des Fundamentalpolygons* in der ω-Ebene für $n = 11$ an, dessen 22ter Theil, der zwischen den Ordinaten 0 und $\frac{1}{2}$ eingeschlossene Streifen, in Tafel II vorliegt.

Die oben § 7. angeführten allgemeinen Erörterungen ergeben hier speciell, dass die Centra $(1, \gamma)$ der an das Polygon (0, 1) sich schliessenden Halbpolygone in die Punkte

$$\omega = \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}$$

der reellen Axe fallen, während die zugehörigen Spitzen (α') in die Punkte

$$\omega = \frac{2}{11}, \quad \frac{3}{11}, \quad \frac{4}{11}, \quad \frac{5}{11}$$

zu liegen kommen. Dabei sind, weil $2 \cdot 5 \equiv -1 \bmod. 11$ und $3 \cdot 4 \equiv +1 \bmod. 11$ ist, die Spitzen (2) und (5) „nichtschraffirte Spitzen“, während die Spitzen (3) und (4) zu schraffiren sind.

Damit ist die Anordnung unseres Fundamentalpolygons vollständig gegeben.

Leipzig, Mitte Februar 1881.

Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe.

Von

A. HURWITZ aus Hildesheim.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Theile. — Einmal ist (im I. Abschnitt) der Versuch gemacht, die vollständigen Grundlagen einer unabhängigen Theorie der *elliptischen Modulfunctionen**) zu entwickeln, andererseits wird (im II. Abschnitt) eine Classe von Gleichungen untersucht, die bei diesen Functionen eine Rolle spielt.

Diese Gleichungen — die neuen Multiplicatorgleichungen der Herren Klein und Kiepert — bildeten den Ausgangspunkt der Arbeit.

Herr Klein, durch seine Untersuchungen über Modulfunctionen auf dieselben geführt, veröffentlichte auf sie bezüglich eine kurze, nur Resultate enthaltende Note.**) Herr Kiepert gelangte von Seiten der doppeltperiodischen Functionen zu denselben Resultaten, indem er sich auf die Eigenschaften der Weierstrass'schen Functionen σ und $\wp$ stützte.***) Dabei ist zu erwähnen, dass auch Herrn Brioschi's kurz vorher erschienene Arbeit: *Sopra una classe di equazioni modulari* (Annali di matematica Bd. 9, pag. 167) sich implicite auf dieselben Gleichungen bezieht.

Herr Klein fand neuerdings nicht die Zeit, seine die Multiplicatorgleichungen betreffenden Resultate einer eingehenden und seinen übrigen Entwicklungen in der Theorie der Modulfunctionen conformen Begründung zu unterziehen. So unternahm ich denn, auf Anregung von Herrn Klein, die Untersuchung der Gleichungen, wie sie in einer independenten Theorie der Modulfunctionen verlangt werden muss.

Bald kam ich jedoch dazu auf die Grundlagen dieser Theorie zurückzugreifen, und so entwickelte sich der erste Abschnitt der vorliegenden Arbeit, der bestimmt ist, einige in den Grundlagen noch vorhandene Lücken auszufüllen.

---

*) Dieser Name rührt wohl von Herrn Dedekind her; wir wollen diese Functionen im Folgenden kurz als „Modulfunctionen" bezeichnen.

**) Brief an Brioschi vom 30. Dec. 1878, mitgetheilt in den Rendiconti del Instituto Lombardo vom 2. Januar 1879; abgedruckt, so weit er hier in Betracht kommt, Mathem. Annalen Bd. XV, p. 86—88. — In der Folge beziehen sich alle Citate, die nur aus Ortsangabe bestehen, auf Klein'sche Arbeiten.

***) „*Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen.*" Crelle Bd. 87, p. 199.

Die moderne Auffassung der Modulfunctionen basirt bekanntlich auf einer geometrischen Figur*), die in der Ebene der complexen Variabeln ω die linearen ganzzahligen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

repräsentirt.

Man wird hier verlangen dürfen, dass man auf directem Wege von den linearen Substitutionen zu der sie repräsentirenden geometrischen Figur gelange.

Herr Dedekind giebt (l. c. pag. 271) einen Theil eines synthetisch geführten Beweises des Zusammenhanges der Transformationen mit jener Figur und erwähnt, dass man die nöthigen Beweise der Theorie der Reduction der quadratischen Formen entnehmen kann.

Die *im ersten Capitel des ersten Abschnitts* vorliegender Arbeit gegebene Begründung der Figur dürfte insofern eine befriedigende sein, als sie, mit wenigen elementaren Ueberlegungen operirend, mit einer gewissen Nothwendigkeit von den Transformationen zu der Figur hinführt. Dass hiermit auch eine überaus einfache Behandlungsweise der Reduction der quadratischen Formen gewonnen ist, liegt auf der Hand.

Einen wesentlichen Bestandtheil dieses ersten Capitels bildet die von Herrn Klein herrührende, wichtige Theorie der Fundamentalpolygone, welche zu den in der Gesammtheit der linearen Transformationen enthaltenen Untergruppen gehören. — Als neu möchte ich hier die (allerdings nicht ins Detail ausgeführte) Methode bezeichnen, wie man eine Transformation irgend einer Untergruppe aus den erzeugenden Substitutionen zusammensetzen kann. Dieselbe liefert, von der geometrischen Anschauung ins Arithmetische übersetzt, eine eigenthümliche Art von Kettenbruchentwicklung.

Im *zweiten Capitel des ersten Abschnitts* werden durch directe Processe analytische Entwicklungen für die Modulfunctionen hergestellt.

---

*) Wegen derselben vergleiche man die unter sich zusammenhängenden Arbeiten von Schwarz (Crelle, Bd. 75, p. 292: *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes ist*), *Dedekind* (Crelle Bd. 83, p. 265: *Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*), Klein (Mathematische Annalen Bd. XIV—XVII).

Neben diese stellt sich unabhängig eine Arbeit von Stephen Smith aus dem Jahre 1877 (Atti della Accademia dei Lincei).

Herr Klein hat schon vor längerer Zeit die interessante Bemerkung gemacht, dass sich diese Figur im Princip bereits im Gauss'schen Nachlass Bd. 3, p. 477, 478 vorfindet. Es wird dort angegeben, dass die Function $\varkappa^2(\omega)$ jeden Werth ein Mal und nur ein Mal in einem Raume annimmt, der in der ω-Ebene von zwei Geraden und zwei Halbkreisen begrenzt ist.

Obgleich die hierbei zur Verwendung kommenden Gedanken nicht wesentlich von den in der Theorie der elliptischen Functionen benutzten verschieden sind, so habe ich doch geglaubt diese Entwicklungen ausführlich darstellen zu sollen. So natürlich sich nämlich diese Betrachtungen bei der nachstehend gegebenen Darstellungsweise gestalten, so haben verschiedene Mathematiker gerade hier wesentliche Schwierigkeiten und Hemmungen gefunden.*)

Ein bekannter Ansatz führt zunächst zu solchen homogenen Functionen zweier Variabeln, den Modul*formen*, welche die *homogenen* linearen ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 zulassen, und aus denen somit durch Quotientenbildung Modul*functionen* abgeleitet werden können. Es gelingt sodann leicht, die als unendliche Summen definirten Functionen in Potenzreihen umzusetzen.

Eine dieser Summen bleibt, wegen ihrer bedingten Convergenz, bei den linearen homogenen Substitutionen nicht vollkommen ungeändert, erfährt aber bei denselben doch nur eine einfache Modification ihres Werthes. Ihre exponentielle Integration führt direct zum Endziele, zu der Function Δ in ihrer Productentwicklung, deren fundamentale Bedeutung für die Theorie der Modulfunctionen Herr Dedekind mit Recht wiederholt hervorgehoben hat.**) —

Der *zweite Abschnitt* meiner Arbeit handelt, wie erwähnt, von den neuen Multiplicatorgleichungen.

Er ist wieder in zwei Capitel getheilt, von denen das erste dem Nachweis der *Existenz* der Gleichungen gewidmet ist, während im zweiten Capitel einige Eigenschaften der Gleichungen abgeleitet werden.

Neu sind in diesem Abschnitt: die Allgemeinheit der Entwicklungen — indem die Gleichungen für beliebig zusammengesetzte Transformationsgrade hergeleitet und untersucht werden, während die Arbeiten von Kiepert und Klein nur primzahlige Transformationen in Betracht ziehen —, ferner der § 5. des zweiten Capitels und sämmtliche Beweisführungen, die sich jedoch zum grossen Theil auf die von Herrn Klein ausgebildeten Methoden stützen.

*) Hermite sagt z. B. in der *Uebersicht der Theorie der elliptischen Functionen* (im Anhang zur sechsten Ausgabe von Lacroix's Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral) pag. 40 der deutschen Ausgabe (von Natani, Berlin 1863), dass es „bei dem jetzigen Standpunkt der analytischen Kenntnisse“ unmöglich schiene, die Functionen $\varkappa(\omega)$ und $\varkappa'(\omega) = \sqrt{1-\varkappa^2(\omega)}$ vollständig zu behandeln, ohne auf die Functionen Θ und H zu recurriren.

Sodann bemerkt Herr Dedekind, l. c. pag. 285 unten: „Allein es ist mir bisher nicht geglückt, diese Darstellung von $\eta(\omega)$ als explicite Function von ω lediglich aus ihrer obigen Definition, also ohne die Hülfe der Theorie der ϑ-Functionen abzuleiten.“

**) Riemann's Werke pag. 438 und l. c.

Auf den mir vorab noch zu fern liegenden Umstand, dass unsere Gleichungen „Jacobi'sche" Gleichungen sind, d. h. dass zwischen den Quadratwurzeln aus den Wurzeln unserer Gleichungen die zuerst von Jacobi bemerkten linearen Relationen bestehen, bin ich nicht eingegangen.

Schliesslich möchte ich noch erwähnen, dass ich durch den persönlichen Verkehr mit Herrn Professor Klein, dem ich die anregendste und förderndste Theilnahme an allen meinen Bestrebungen während meiner Studienzeit verdanke, wesentlich bei meinen Untersuchungen gefördert wurde, und ich ergreife mit Freude die Gelegenheit, meinem hochverehrten Lehrer auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

I. Abschnitt.

Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen.

I. Capitel.

Die linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante + 1 und die in ihnen enthaltenen Untergruppen.

§ 1.

Die linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante + 1.

Die Transformationen

(1) $$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

in denen $$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist und α, β, γ, δ irgend welche positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, bilden eine Gruppe. Denn die Zusammensetzung irgend zweier solcher Transformationen führt zu einer dritten derselben Art.

Deutet man ω in der complexen Zahlenebene, so bemerkt man sofort, dass alle Werthe ω', die durch die Transformationen (1) aus einem Werthe ω entstehen, mit diesem im Vorzeichen der zweiten Ordinate übereinstimmen. Wir wollen daher nur die Punkte ω mit *positiver* zweiter Ordinate in Betracht ziehen. Sie erfüllen die „positive" Halbebene.

Es soll sich nun darum handeln, ein anschauliches geometrisches Bild für die Gesammtheit der Transformationen (1) herzustellen. Dazu führen folgende Ueberlegungen:

I. „*Erleidet ein Punkt* ω *durch die Transformation* $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *eine Vergrösserung resp. keine Veränderung seiner Ordinate, so ist*

$$(\gamma\omega+\delta)(\gamma\varpi+\delta)<1$$

resp.

$$(\gamma\omega+\delta)(\gamma\varpi+\delta)=1.\text{“}$$

Dabei bezeichnet ϖ die zu ω conjugirt complexe Grösse.

In der That, die Ordinate des Punktes ω ist

$$\frac{\omega-\varpi}{2i},$$

und die Bedingungen

$$\frac{1}{2i}\left\{\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}-\frac{\alpha\varpi+\beta}{\gamma\varpi+\delta}\right\}\geqq\frac{\omega-\varpi}{2i}$$

reduciren sich durch leichte Umformungen auf die im Satze angegebenen.

II. „*Bestimmt man alle Punkte, welche den Bedingungen genügen:*

$$\omega\varpi>1 \quad \textit{und} \quad -1<\omega+\varpi<+1,$$

so giebt es keine Transformation (1), *welche die Ordinate irgend eines dieser Punkte ungeändert liesse oder vergrösserte.*“

Denn die Bedingungen

$$1\geqq(\gamma\omega+\delta)(\gamma\varpi+\delta)$$

lassen, da

$$(\gamma\omega+\delta)(\gamma\varpi+\delta)>\gamma^2\pm\gamma\delta+\delta^2$$

ist, keine ganzzahligen Lösungen γ, δ zu.

Wir wollen nun zwei Punkte ω und ω' einander *äquivalent* nennen, wenn sie in der, offenbar gegenseitigen, Beziehung zu einander stehen, dass der eine durch eine Transformation (1) aus dem andern hervorgeht. Dann können wir, da ja die Ordinaten zweier Punkte entweder gleich sind oder die eine grösser als die andere ist, auf Grund von II. sagen:

III. „*Im Innern des Raumes, welcher begrenzt wird durch einen um den Nullpunkt mit dem Radius* 1 *beschriebenen Kreis und durch zwei zur Axe der rein imaginären Zahlen in den Abständen* $+\frac{1}{2}$ *und* $-\frac{1}{2}$ *parallel laufende Geraden giebt es keine zwei einander äquivalente Punkte.*“

Die innerhalb dieses „*Ausgangs-Raumes*“ liegenden Punkte sind nämlich gerade die durch die Bedingungen des Satzes II. charakterisirten.

In Bezug auf die Begrenzung dieses Raumes haben wir den Zusatz:

IIIa. „*Die Punkte der Ränder des Ausgangsraumes sind paarweise vermöge der Transformationen* $\omega'=\omega\pm1,\ -\frac{1}{\omega}$, *einander äquivalent, jedoch nie mit einem Punkte im Innern des Ausgangsraumes.*“

Denn entsprechend den durch diese Punkte befriedigten Bedingungen:

$$\omega\varpi\geqq1,\qquad -1\leqq\omega+\varpi\leqq+1$$

giebt es keine Transformation (1), welche ihre Ordinate vergrösserte, und nur die Transformationen $\omega + t$ und $-\frac{1}{\omega} + \tau$, wo t und τ irgend welche ganze Zahlen sind, können ihre Ordinate ungeändert lassen.

Unterwerfen wir nun die Punkte des so erhaltenen Ausgangsraumes einer beliebigen Transformation (1), so geht derselbe über in einen ebenfalls von drei (auf der Axe der reellen Zahlen senkrecht stehenden) Kreisbogen begrenzten Raum.

Ich behaupte nun:

IV. *„Zwei durch verschiedene Transformationen* $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ *und* $\frac{\alpha_1\omega+\beta_1}{\gamma_1\omega+\delta_1}$ *aus dem Ausgangsraum entstehende Kreisbogendreiecke* D *und* D_1 *können nie einen Flächentheil gemein haben."*

Denn das Dreieck D geht durch die Transformation $\frac{\delta\omega-\beta}{-\gamma\omega+\alpha}$ in den Ausgangsraum über, während zugleich das Dreieck D_1 in ein Dreieck D_2 übergeht.

Hätten nun D und D_1 ein Flächenstück gemeinsam, so müsste Gleiches für D_2 und den Ausgangsraum stattfinden, was nicht angeht, da im Innern des letztern keine zwei äquivalenten Punkte liegen können.

An die drei Begrenzungskanten des Ausgangsraumes legen sich nun die Dreiecke*) $\omega + 1$, $\omega - 1$ und $-\frac{1}{\omega}$ an, woraus folgt, dass an die drei Kanten jedes Dreiecks $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ sich resp.

$$\frac{\alpha(\omega+1)+\beta}{\gamma(\omega+1)+\delta}, \quad \frac{\alpha(\omega-1)+\beta}{\gamma(\omega-1)+\delta}, \quad \frac{\alpha\left(-\frac{1}{\omega}\right)+\beta}{\gamma\left(-\frac{1}{\omega}\right)+\delta}$$

anlegen.

Mit Rücksicht auf IV. können wir somit den für das Folgende fundamentalen Satz aussprechen:

V. *„Die Gesammtheit der durch alle Transformationen* (1) *aus dem Ausgangsraum entstehenden Dreiecke bedecken die positive Halbebene einfach und durchaus lückenlos."*

Man bemerke, dass die unzählig vielen Dreiecke unserer Figur an den zu $\varrho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ äquivalenten Stellen zu je sechs zusammenstossen, dem entsprechend, dass der Ausgangsraum an den Ecken ϱ und $1+\varrho$ Winkel von 60 Grad aufweist.

Die Dreiecke $\omega + \nu$ haben den unendlich fernen Punkt als eine

*) Die in Rede stehenden Dreiecke sind hier, wie häufig im Folgenden, mit den Transformationen bezeichnet, durch welche sie aus dem Ausgangsraum entstehen.

Ecke; dagegen verlaufen alle übrigen Dreiecke $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ im Endlichen, sich mit der Ecke $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einem rationalen Punkte auf die Axe der reellen Zahlen stützend.

Jeder solche Punkt $\frac{\alpha}{\gamma}$ ist Ecke für unzählig viele Dreiecke, die sich an einander legen, und deren durch $\frac{\alpha}{\gamma}$ laufende Kanten sich sämmtlich in diesem Punkte berühren. Die Dreiecke selbst legen sich, kleiner und kleiner werdend, immer dichter an die Axe der reellen Zahlen an.

§ 2.

Zusammensetzung aller Transformationen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ aus zweien derselben.

Obgleich durch eine einfache arithmetische Betrachtung nachgewiesen werden kann, dass alle Transformationen (1) sich aus den beiden

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \omega + 1^{*)} \\ \omega' &= -\frac{1}{\omega} \end{aligned}\right\}$$

zusammensetzen lassen, so wollen wir doch hier einen directen Nachweis dieses Umstandes aus unserer Figur herleiten.

Das sich dabei darbietende Verfahren ist einerseits an und für sich von Interesse, andererseits grosser Verallgemeinerung fähig.

Ich schicke folgenden Hülfssatz voraus:

„*Man begrenze in der positiven Halbebene durch zwei zur Axe der rein imaginären Zahlen parallel laufende Geraden einen Parallelstreifen von endlicher Breite und zerlege ihn in zwei Theile, indem man in beliebig kleinem aber endlichem Abstande k eine Parallele zur Axe der reellen Zahlen zieht. Dann liegen in dem unendlich grossen, der Axe der reellen Zahlen abgewandten Theile des Parallelstreifens nur eine endliche Zahl von Punkten, die einem beliebig angenommenen Punkte ω äquivalent sind.*“

Ein Punkt wird dann und nur dann in dem bezeichneten Theile des Parallelstreifens liegen, wenn

1) seine Ordinate grösser ist als k und
2) seine Abscisse zwischen die parallelen Begrenzungslinien des Parallelstreifens fällt.

Soll nun erstens die Ordinate des Punktes $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ grösser als k werden, so ist erforderlich, dass

$$\gamma^2\omega\varpi + \gamma\delta(\omega+\varpi) + \delta^2 - \frac{l}{k} < 0$$

*) Mit jeder Transformation betrachten wir auch ihre inverse, also ihre — 1te Potenz, als gegeben.

wird. Hier bezeichnet ϖ die zu ω conjugirte Grösse, und es ist $\frac{\omega - \varpi}{2i} = l$ gesetzt.

Diese Ungleichung kann aber nur für eine endliche Zahl von Werthepaaren γ, δ erfüllt werden. Es stellt nämlich die Gleichung

$$x^2 \cdot \omega\varpi + x \cdot y(\omega + \varpi) + y^2 - \frac{l}{k} = 0,$$

wenn x und y als rechtwinklige Coordinaten gedeutet werden, eine Ellipse dar, und die linke Seite ihrer Gleichung fällt nur für die in ihrem Innern liegenden Punkte negativ aus.

Eine Ellipse kann aber nur eine endliche Zahl von Punkten ganzzahliger Abscisse und Ordinate umschliessen.

Sei nun (Γ, Δ) irgend einer unter diesen Punkten, dessen Abscisse (Γ) und Ordinate (Δ) relativ prime Zahlen sind. Dann werden alle Lösungen der Gleichung

$$\alpha\Delta - \beta\Gamma = 1,$$

gegeben sein durch

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + t \cdot \Gamma \\ \beta &= \beta_0 + t \cdot \Delta \end{aligned}\right\},$$

wo α_0, β_0 irgend ein Lösungspaar bezeichnet und t alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat.

Soll nun zweitens die Abscisse des Punktes

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\Gamma\omega + \Delta}$$

zwischen die Begrenzungslinien unseres Parallelstreifens fallen, so muss

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha_0\omega + \beta_0}{\Gamma\omega + \Delta} + \frac{\alpha_0\varpi + \beta_0}{\Gamma\varpi + \Delta}\right\} + t$$

zwischen zwei gegebenen Grenzen liegen. Offenbar lässt sich aber die ganze Zahl t nur endlich oft dieser Bedingung gemäss wählen.

Somit ist unsere Behauptung vollständig erwiesen.

Man bemerke noch, dass nach Satz I. im § 1. alle Punkte ω, welche durch die Transformation $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, $\gamma \gtrless 0$, eine Vergrösserung ihrer Ordinate erfahren, das Innere des Kreises ausfüllen, der um den Punkt $-\frac{\delta}{\gamma}$ mit dem Radius $\frac{1}{\gamma}$ beschrieben ist. So erleiden also z. B. alle diejenigen Punkte durch die Transformation $-\frac{1}{\omega}$ eine Vergrösserung der Ordinate, welche unterhalb der krummlinigen Kante des Ausgangsraumes liegen.

Und nun ist es leicht die Richtigkeit der folgenden Angaben einzusehen:

Jedem beliebigen Punkte ω_0 der positiven Halbebene entspricht ein (und also nach Satz III., § 1. im Allgemeinen auch nur ein) ihm äquivalenter Punkt des Ausgangsraumes; und zwar findet man diejenige lineare Transformation, welche die Ueberführung des Punktes ω_0 in seinen äquivalenten des Ausgangsraumes leistet, nach folgender Vorschrift:

Man verschiebe vermöge der Transformation $\omega + 1$ (oder ihrer inversen $\omega - 1$) den Punkt ω_0, bis er zwischen die verticalen Begrenzungslinien des Ausgangsraumes zu liegen kommt.

Entweder ist nun seine Ordinate schon lang genug, so dass er jetzt in dem Ausgangsraume liegt — und dann ist unser Ziel schon erreicht —, oder er hat eine zu kurze Ordinate. In letzterem Falle verwandelt die Transformation $-\frac{1}{\omega}$ ihn in einen Punkt mit grösserer Ordinate, der nun, wenn er vermöge $\omega + 1$ wieder zwischen die verticalen Begrenzungslinien verschoben wird, entweder in den Ausgangsraum hineinreicht oder nicht.

Im letzteren Falle wende man wieder die Transformation $-\frac{1}{\omega}$ an, verschiebe wieder, wenn nöthig, und so fort.

Sollte bei Anwendung der genannten Operationen der Punkt ω_0 einmal in einen Punkt der Begrenzungslinien des Ausgangsraumes übergehen, so ist der Process als beendigt anzusehen, da wir diese Punkte mit zu dem Ausgangsraume nehmen müssen, um alle Punkte ω in Betracht ziehen zu können.

Nur in diesem Falle gehören nach Satz IIIa., § 1. dem Punkte ω_0 *zwei* ihm und untereinander äquivalente Punkte des Ausgangsraumes zu.

In allen Fällen muss aber der soeben angegebene Process nach einer endlichen Zahl von Operationen zum gewünschten Ziele führen. Denn nach unserem Hülfssatze giebt es ja überhaupt zwischen den verticalen Rändern des Ausgangsraumes nur eine endliche Anzahl von Punkten, die zu ω_0 äquivalent sind und eine grössere Ordinate besitzen, als sie ω_0 hat.

Die Schilderung dieses Processes gab Herr Klein in seinem Colleg über algebraische Gleichungen, im Anschluss an die Theorie der Reduction quadratischer Formen. (München, im Sommer 1879.)

Es zeigt sich so, dass und wie sich jede Substitution*) $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ aus den beiden $\omega + 1$ und $-\frac{1}{\omega}$ zusammensetzen lässt.

Man wende nämlich einfach auf den Punkt $\frac{\delta\omega_0 - \beta}{-\gamma\omega_0 + \alpha}$ das in Rede stehende Verfahren an; ω_0 kann dabei irgend ein Punkt des Ausgangsraumes sein.

---

*) „Substitution" ist gleichbedeutend mit „Transformation".

§ 3.

Die in der Gesammtheit der linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante + 1 enthaltenen Untergruppen.

Fundamentalpolygone.

Irgend ein aus der Gesammtheit von linearen ganzzahligen Substitutionen herausgegriffener Complex von Substitutionen, welcher so beschaffen ist, dass die Zusammensetzung irgend zweier (verschiedener oder identischer) Substitutionen des Complexes wieder auf eine Substitution des Complexes führt, heisst eine *Untergruppe* der Gesammtheit der Transformationen, der „*Hauptgruppe*“.

Wir wollen uns hier des bestimmteren Ausdrucks wegen auf Untergruppen mit endlichem Index beschränken.

Unter dem Index einer Untergruppe versteht man bekanntlich die kleinste Zahl μ von Substitutionen $T_1, T_2 \cdots T_\mu$ der Hauptgruppe, welche der Anforderung genügen, dass jede Substitution der Hauptgruppe als Product einer Substitution der Untergruppe und einer dieser μ Substitutionen dargestellt werden kann.

In üblicher Weise sind hier die Substitutionen symbolisch durch Buchstaben bezeichnet, wobei die identische Substitution $\omega' = \omega$ das Symbol 1 erhält; das Product zweier Substitutionen ist diejenige, die durch Zusammensetzung der beiden die Factoren bildenden Substitutionen entsteht.

Wir wollen weiterhin Kürze halber sagen, zwei ω-Dreiecke oder auch zwei Punkte ω und ω' seien in Bezug auf eine Untergruppe *relativ äquivalent*, wenn sie aus einander durch eine Transformation der Untergruppe hervorgehen.

Ist nun irgend eine Untergruppe gegeben, so construire man in folgender Weise ein zu ihr gehöriges „*Fundamentalpolygon*“:*)

Man gehe von irgend einem der ω-Dreiecke, etwa dem Ausgangsraume aus. An dieses legen sich nach rechts die Dreiecke $\omega + 1$, $\omega + 2$ u. s. w. an. Diese nehmen wir successive in das zu bildende Polygon auf, bis wir an ein solches nicht mehr aufzunehmendes $\omega + a$ kommen, welches mit dem Ausgangsraume relativ äquivalent ist. Die links befindliche geradlinige Kante des Dreiecks ω geht dann durch die zur Untergruppe gehörige Substitution $\omega + a$ in die rechts liegende Kante des Dreiecks $\omega + a - 1$ über. Wir wollen sagen, dass diese Kanten nicht mehr „frei“ sind, sondern sich gegenseitig durch die Untergruppe „binden“.

Von den sich unmittelbar an die noch „freien“ Kanten der nunmehr aufgenommenen Dreiecke $\omega + \nu$ $(\nu = 0, 1, 2 \cdots a - 1)$ an-

*) Siehe Mathem. Annalen Bd. XVII, pag. 63 u. 64.

setzenden Dreiecken (D) nehmen wir nur so viele auf, dass jedes der nicht aufgenommenen Dreiecke (D) mit einem der jetzt überhaupt aufgenommenen Dreiecke ($\omega + \nu$ und ein Theil der (D)) relativ äquivalent ist, die letzteren jedoch sämmtlich unter einander relativ inäquivalent sind. Die Begrenzungskanten des jetzt gebildeten Aggregats von inäquivalenten Dreiecken werden nun theils sich paarweise durch die Untergruppe „binden", theils noch „frei" sein.

Mit den Dreiecken (D'), die sich an diese freien Kanten unmittelbar ansetzen, verfahre man nun genau so, wie soeben mit den Dreiecken (D). Man nehme also so viele von ihnen auf, dass jedes der übrigen nicht aufgenommenen irgend einem der Dreiecke des nunmehr vergrösserten Aggregates relativ äquivalent ist; dass aber alle Dreiecke des letzteren unter einander relativ inäquivalent sind.

So fahre man fort, bis man ein Aggregat von relativ inäquivalenten Dreiecken erhalten hat, von dessen Begrenzungskanten keine mehr frei ist, sondern je zwei sich gegenseitig binden, so dass jedes sich unmittelbar an eine Kante des „*Fundamentalpolygons*" ansetzende Dreieck einem Dreieck des Fundamentalpolygons relativ äquivalent ist. Es ist zu bemerken, dass das Fundamentalpolygon in der mannigfachsten Weise gewählt werden kann. Denn einmal ist, wie erwähnt, die Wahl des Ausgangsdreiecks vollkommen willkürlich. Andererseits kann die jedesmalige Aufnahme neuer sich an die freien Kanten ansetzenden Dreiecke im Allgemeinen in verschiedenartigster Weise den gestellten Anforderungen entsprechend vorgenommen werden.

Ueber die Eigenschaften und Bedeutung des Fundamentalpolygons handeln die nachfolgenden Entwicklungen.

Das Fundamentalpolygon besteht aus μ Dreiecken, wo μ den Index der Untergruppe bezeichnet. Es können nicht mehr als μ Dreiecke sein, denn unter je $\mu + 1$ befinden sich mindestens zwei relativ äquivalente. Es sind aber genau μ Dreiecke, wie aus dem nunmehr zu beweisenden wichtigen Satze folgt:

„*Jedes Dreieck $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ ist einem (und nur einem) Dreiecke des Fundamentalpolygons relativ äquivalent, und zwar kann es in dasselbe durch successive Anwendung derjenigen Substitutionen E der Gruppe transformirt werden, welche die sich bindenden Kanten des Fundamentalpolygons in einander überführen.*"

Die Substitutionen E bilden demnach ein volles System von *erzeugenden* Substitutionen der Untergruppe, indem jede beliebige Substitution der Untergruppe sich als ein Product der Substitutionen E darstellen lässt.

Dies beweist man nach Herrn Klein folgendermassen:

Seien A_1 und A_1', A_2 und A_2' $\cdots$ A_i und A_i' $\cdots$ je zwei sich bindende

Kanten des Fundamentalpolygons. E_i bezeichne die Transformation der Untergruppe, durch welche die Kante A_i in A_i' übergeht.

Wendet man nun auf das Fundamentalpolygon die Transformation E_i an, so geht dasselbe in ein neues Polygon über, welches sich längs der Kante A_i' an das alte anlegt.

So legt sich vermöge der Transformationen E_i und E_i^{-1} um das Fundamentalpolygon ein Kranz neuer Polygone, je eines an je eine Kante des Fundamentalpolygons.

Durch fortgesetzte Anwendung der Transformationen E_i entstehen aus diesen Polygonen andere und andere. Und nun ist die Behauptung unseres Satzes, dass alle so aus dem Fundamentalpolygone entstehenden neuen Polygone die *ganze* positive Halbebene *lückenlos* überdecken.

Dieses wird aber bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass an jede Kante eines bereits erhaltenen Polygons sich vermöge der Transformationen E_i ein neues anlegt.

Sei $T = E_m^{\mu_m} E_n^{\mu_n} E_p^{\mu_p} \cdots$ die Transformation, durch welche ein Polygon aus dem Fundamentalpolygon entstanden ist, und sei $\overline{A_i}$ eine Kante des Polygons. So wird $\overline{A_i}$ durch T aus A_i entstehen.

Dann ist aber TE_i^{-1} eine Transformation, vermöge welcher aus dem Fundamentalpolygon ein sich an $\overline{A_i}$ anlegendes neues Polygon entsteht. Denn vermöge E_i^{-1} geht A_i' in A_i und vermöge T geht A_i in $\overline{A_i}$ über.

Man bemerke, dass alle in der geschilderten Weise aus dem Fundamentalpolygon entstehenden Polygone die positive Halbebene nicht nur lückenlos, sondern auch *einfach* überdecken. Denn, wie leicht zu sehen, können zwei solche Polygone kein Dreieck gemeinsam haben, ohne ganz zu coincidiren.

Auf Grund des Satzes pag. 534 kann man nun offenbar a priori angeben, durch welches Product der erzeugenden Transformationen E sich irgend ein ω-Dreieck in das ihm relativ äquivalente, oder, was auf dasselbe hinauskommt, irgend ein Punkt ω_0 in den ihm relativ äquivalenten des Fundamentalpolygons überführen lässt, sofern man für jeden nicht im Fundamentalpolygon liegenden Punkt zwischen den verticalen Begrenzungslinien des Fundamentalpolygons eine aus den erzeugenden Substitutionen E zusammengesetzte Substitution kennt, die seine Ordinate vergrössert.

Ich will aber hier nicht untersuchen, ob solche Transformationen, die die Ordinate der betreffenden Punkte vergrössern, für jedes beliebige Fundamentalpolygon a priori angegeben werden können. — Es sei nur bemerkt, dass für die grösste Zahl der bisher überhaupt behandelten Untergruppen solche Substitutionen in der That bekannt sind, und vermöge derselben die Ueberführung eines beliebigen Punktes ω_0 in den ihm relativ äquivalenten des Fundamentalpolygons durch folgenden, dem auf pag. 536 geschilderten ganz analogen Process bewerkstelligt wird:

Man verschiebe den Punkt vermöge der die verticalen Ränder des Fundamentalpolygons vereinigenden Substitution so lange, bis er zwischen diese Ränder fällt. Ist dann seine Ordinate zu kurz, so dass er noch nicht im Fundamentalpolygon (oder auf einer Kante desselben) liegt, so wende man auf ihn diejenige Substitution an, welche die gerade über ihm liegende Kante des Fundamentalpolygons in die ihr zugehörige (sie „bindende") Kante überführt. Dadurch wird die Ordinate des Punktes vergrössert. Fällt nun der so transformirte Punkt nicht ohnedies in den von den verticalen Rändern des Fundamentalpolygons begrenzten Parallelstreifen, so führe man diese Lage abermals vermöge der die verticalen Ränder vereinigenden Substitution herbei.

Ist jetzt seine Ordinate noch nicht lang genug, um in das Fundamentalpolygon zu reichen, so wende man wieder diejenige Transformation an, welche die gerade über ihm liegende Kante des Fundamentalpolygons in die zugehörige transformirt, verschiebe wieder, wenn nöthig, und so fort.

Dieser Process schliesst nach einer endlichen Zahl von Operationen, so dass der Punkt schliesslich, wie gewünscht, in das Fundamentalpolygon transformirt ist.

§ 4.

Fortsetzung. Congruenzgruppen.

Von allen Untergruppen beherrscht man bislang ihrer arithmetischen Natur nach nur eine bestimmte Classe, nämlich die sogleich zu definirenden Congruenzgruppen. In Rücksicht auf die im zweiten Abschnitt zu gebenden Entwicklungen seien diesen Gruppen die nachfolgenden Betrachtungen gewidmet.

Nennt man zwei Substitutionen

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_1\omega+\beta_1}{\gamma_1\omega+\delta_1}$$

(mod. n) congruent, wenn

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv \alpha_1:\beta_1:\gamma_1:\delta_1 \,(\text{mod. } n),$$

so giebt es bekanntlich

$$G = \frac{n^3}{k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\cdots$$

mod. n incongruente Substitutionen, wo $p, q \cdots$ die verschiedenen in n aufgehenden Primzahlen sind, und k die Zahl der Lösungen der Congruenz

$$x^2 \equiv 1 \ (\text{mod. } n)$$

bedeutet.

Solche Untergruppen nun, die alle diejenigen und nur diejenigen Substitutionen enthalten, die zu gegebenen Substitutionen in Bezug auf einen festen Modul (n) congruent sind, nennt man nach Herrn Klein *„Congruenzgruppen“* und zwar der n^{ten} *Stufe.*

Hier wirft sich als fundamental die Frage auf:

Wie kann man entscheiden, ob eine gegebene Gruppe Congruenzgruppe ist oder nicht?

Für die Beantwortung dieser Frage bieten sich zwei Wege dar. Erstens:

Eine Gruppe wird dann und nur dann Congruenzgruppe von der n^{ten} Stufe sein, wenn alle zu der Substitution $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, der „Identität“, (mod. n) *congruenten Substitutionen zu der Gruppe gehören.*

Zunächst ist selbstverständlich, dass eine Gruppe n^{ter} Stufe alle Substitutionen in sich enthält, die (mod. n) zur Identität congruent sind. Aber auch umgekehrt: Enthält eine Gruppe alle (mod. n) zur Identität congruenten Substitutionen, so werden, falls T irgend eine Substitution der Gruppe ist, alle zu T (mod. n) congruenten Substitutionen gleichfalls zur Gruppe gehören, da diese von der Form ST sind, wo S (mod. n) zur Identität congruent ist.

Sucht man daher unter einem vollen System von (mod. n) verschiedenen Substitutionen alle diejenigen $T_1, T_2 \cdots T_\nu$ heraus, welche zu unserer Gruppe gehören, so lässt sich diese definiren als die Gesammtheit derjenigen Substitutionen, welche (mod. n) zu den Substitutionen T_i congruent sind.

Die auf diesen Satz sich stützende Methode zur Untersuchung, ob eine vorgelegte Untergruppe Congruenzgruppe ist oder nicht, verlangt eine endliche Zahl von Versuchen. Man hat sich nämlich die *erzeugenden* Substitutionen der Gruppe $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (mod. n) zu verschaffen, und diese darauf hin zu untersuchen, ob sie zu der vorgelegten Gruppe gehören, oder ob dies nicht (wenigstens nicht für alle) der Fall ist.

Geometrisch lässt sich dies nach den Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen so ausdrücken:

Man hat zu untersuchen, ob das Fundamentalpolygon der vorgelegten Gruppe vermöge der seine zusammengehörigen Ränder vereinigenden Substitutionen so oft an einander gelegt werden kann, dass das Fundamentalpolygon für die Gruppe $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ hervorgeht. —

Eine zweite Methode der Untersuchung ist gelegentlich von Herrn Klein benützt. Sie gründet sich auf folgenden Satz:

Ergeben die erzeugenden Substitutionen einer Gruppe vom Index μ, (mod. n) *betrachtet, durch Zusammensetzung nur $\frac{G}{\mu}$* (mod. n) *ver-*

schiedene Substitutionen, so besteht die Gruppe aus allen Substitutionen, die (mod. n) *jenen* $\frac{G}{\mu}$ *Substitutionen congruent sind.* G bezeichnet dabei die Zahl der (mod. n) verschiedenen (incongruenten) Substitutionen.

Man kann diesen Satz kurz so beweisen:

Nach Voraussetzung erweisen sich alle Substitutionen der Gruppe mit $\frac{G}{\mu} = \nu$ Substitutionen, etwa:

$$S_1, S_2 \cdots S_\nu \pmod{n}$$

congruent. Es handelt sich darum nachzuweisen, dass auch umgekehrt jede mit einer S_i (mod. n) congruente Substitution zur Untergruppe gehört.

Nun werden alle (mod. n) verschiedenen Substitutionen dargestellt sein durch folgendes Schema:

$$\left.\begin{array}{cccc} S_1, & S_2 & \cdots & S_\nu \\ T_2 S_1, & T_2 S_2 & \cdots & T_2 S_\nu \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T_\mu S_1, & T_\mu S_2 & \cdots & T_\mu S_\nu \end{array}\right\}$$

und die μ Substitutionen

$$1, T_2, T_3 \cdots T_\mu$$

werden unter einander relativ inäquivalent sein, so dass jede beliebige Substitution dargestellt werden kann in der Form $S T_k$, wo S eine Substitution der Untergruppe ist.

Soll nun

$$S T_k \equiv S_i \pmod{n}$$

sein, so folgt

$$T_k \equiv S_j \pmod{n},$$

was nur angeht, wenn $T_k = S_j = 1$ ist, so dass sich also $S T_k$ auf S, eine Substitution der Untergruppe, reducirt, was zu beweisen war.

§ 5.

Die homogenen linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante $+1$.

Alle Erörterungen über die Gruppe der ganzzahligen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

lassen sich mit Leichtigkeit auch für die homogenen ganzzahligen Substitutionen

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{array}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

verwerthen.

Es findet nämlich, um die von C. Jordan eingeführte Ausdrucksweise zu gebrauchen, ein *hemiedrischer Isomorphismus* zwischen beiden Substitutionsgruppen statt.

Einer Substitution

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\}$$

der homogenen Gruppe ist die *eine*

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

der nicht homogenen entsprechend zu setzen, während der nicht homogenen Substitution

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

die *beiden* homogenen

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= -\alpha\omega_1 - \beta\omega_2 \\ \omega_2' &= -\gamma\omega_1 - \delta\omega_2 \end{aligned}\right\}$$

correspondiren. Vermöge dieser Correspondenz entspricht auch jeder Untergruppe der homogenen Substitutionen eine solche der nicht homogenen.

Hierbei ist zu bemerken, dass der Isomorphismus zwischen solchen *Untergruppen* sehr wohl ein *holoëdrischer* sein kann. Offenbar tritt dieser Umstand dann ein, wenn zwei zusammengehörige homogene Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -\alpha, & -\beta \\ -\gamma, & -\delta \end{pmatrix}$$

nie gleichzeitig der homogenen Untergruppe angehören können.

Vermöge dieses Isomorphismus ist man in der Lage alle Eigenschaften der homogenen Gruppe und Untergruppen von den entsprechenden der nicht homogenen abzulesen.

So ist es namentlich leicht die Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen auf die homogenen Transformationen zu übertragen. Man bemerkt, dass fast alle dort ausgesprochenen Sätze wörtlich ihre Geltung auch für homogene Substitutionen behalten.

Es ist nur zu beachten, dass zwei *homogene* Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

dann und nur dann mod. n congruent zu nennen sind, wenn

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv \alpha_1 \\ \beta &\equiv \beta_1 \\ \gamma &\equiv \gamma_1 \\ \delta &\equiv \delta_1 \end{aligned}\right\} \text{(mod. } n)$$

und dass, dementsprechend,

$$n^3\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\cdots$$

(mod. n) verschiedene (incongruente) homogene Substitutionen existiren.

Die an sich selbstverständlichen Bemerkungen dieses Paragraphen sind es, welche gewisse Schwierigkeiten beseitigten, die sich der directen Untersuchung der im zweiten Abschnitt behandelten Multiplicatorgleichungen entgegenstellten. Es handelte sich darum, eine gewisse Gruppe von homogenen Substitutionen arithmetisch zu charakterisiren. Indem die Untersuchung homogener Gruppen nunmehr auf die nicht homogener zurückgeführt ist, lassen sich die für die letzteren ausgebildeten geometrischen Methoden ohne Weiteres für die ersteren verwerthen. (Siehe Abschn. II, §§ 1—3.)

II. Capitel.

Die Bildung der Modulfunctionen und Modulformen 1. Stufe.

§ 1.

Definition der Modulfunctionen und Modulformen.

Wir wollen im Folgenden immer unter linearer Transformation schlechthin eine ganzzahlige der Determinante $+1$ verstehen.

Wir bringen nun die linearen Transformationen durch folgende Definitionen mit functionentheoretischen Untersuchungen in Zusammenhang:

Eine Modulfunction ist eine eindeutige analytische) Function eines Argumentes ω, die ungeändert bleibt, wenn man das Argument irgend welchen linearen Transformationen einer in der Gesammtheit der letzteren enthaltenen Untergruppe unterwirft, während sie bei Anwendung aller übrigen linearen Transformationen ihren Werth im Allgemeinen ändert.*

Eine Modulform k^{ter} Dimension ist eine eindeutige homogene analytische Function k^{ter} Dimension zweier Argumente ω_1, ω_2, die ungeändert bleibt, wenn man die Argumente irgend welchen homogenen linearen Transformationen einer in der Gesammtheit der letzteren enthaltenen Untergruppe unterwirft, während sie bei Anwendung irgend einer der übrigen linearen Transformationen ihren Werth im Allgemeinen ändert.

Der Quotient irgend zweier Modulformen von ω_1, ω_2 gleicher Dimension ist eine Modulfunction von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, und jede Modulfunc-

---

*) Wir nennen nach Weierstrass eine Function (complexer Veränderlicher) „*analytisch*", wenn sie sich durch ein System untereinander zusammenhängender, d. h. in einander fortsetzbarer, Potenzreihen definiren lässt.

tion lässt sich auf unendlich viele Weisen als Quotient zweier Modulformen darstellen.

Wir können uns daher auf die Bildung der Modul*formen* beschränken. Dabei sind es namentlich Eisenstein'sche Ideen, die uns zu den gewünschten Formeln leiten werden.

§ 2.

Bildung der Modulformen 1. Stufe.

Wir ziehen zunächst nur diejenigen Modul-Formen und -Functionen in Betracht, welche bei *allen überhaupt möglichen* linearen Transformationen ungeändert bleiben. Diese werden wir gemäss den Auseinandersetzungen des ersten Capitels § 4. Modul-Formen resp. -Functionen der *ersten Stufe* nennen.

Unter Modul-Form oder -Function schlechthin sei im Folgenden immer eine solche *erster Stufe* verstanden.

Ist nun

$$\varphi(\omega_1, \omega_2)$$

eine homogene Function k^{ter} Dimension von ω_1 und ω_2, so kann offenbar

$$\sum \varphi(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2,\ \nu\omega_1 + \varrho\omega_2)^{*)}$$

eine Modulform k^{ter} Dimension darstellen, sofern die Summe für ein Gebiet der Variabeln ω_1, ω_2 einen von der Anordnung der Summanden unabhängigen Werth hat, innerhalb dieses Gebietes eine eindeutige Function von ω_1, ω_2 ist und über solche Werthsysteme $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ erstreckt wird, dass die Grössenpaare

$$\lambda\omega_1 + \mu\omega_2,\quad \nu\omega_1 + \varrho\omega_2$$

des in Rede stehenden Gebietes sich in ihrer Gesammtheit reproduciren, wenn ω_1 und ω_2 irgend einer linearen Transformation unterworfen werden.

Für unsere Zwecke genügt es, wie der Erfolg unserer Untersuchungen zeigen wird, für die Function $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ die Potenz $\left(\frac{1}{\omega_1}\right)^m$ zu wählen. Dabei bedeutet m eine ganze positive Zahl.

Dem obigen allgemeinen Ansatze entsprechend bilden wir hier die Summe

---

*) Eine solche Summe kann, wie Weierstrass in den Berliner Monatsberichten (August, 1880) bemerkt hat, mehrere analytische Functionen in sich vereinigen. Das heisst, die verschiedenen Potenzreihen, in welche sich die Summe entwickeln lässt, können in mehrere Systeme zerfallen, so dass die Potenzreihen eines solchen Systems unter einander zusammenhängen, während je zwei Potenzreihen, die verschiedenen Systemen angehören, nicht aus einander durch Fortsetzung entstehen können. Die Summe stellt dann so viele verschiedene analytische Functionen vor, als getrennte Systeme von Potenzreihen aus ihr erhalten werden.

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}{}' \left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^m,$$

wo das Komma den Ausschluss der Combination

$$\mu = \nu = 0$$

bedeuten soll.

Wie sich leicht nachweisen lässt*), convergirt diese Summe für beliebige Werthe von ω_1, ω_2, deren Verhältniss $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ keine reelle Zahl ist, unbedingt, sobald $m > 2$ ist. Sie stellt daher dann eine Modulform $-m^{\text{ter}}$ Dimension vor, oder wird uns vielmehr zu einer solchen hinführen, indem wir nur eine der beiden analytischen Functionen in Betracht ziehen werden, die sie in sich vereinigt. (Vgl. die Anmerkung auf voriger Seite und § 3.)

Für ungerade $m > 2$ ist sie identisch Null. Wir betrachten daher für $m > 2$ nur die Functionen

$$G_n = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}{}' \left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^{2n}, \quad n > 1.$$

Neben diesen wollen wir jedoch auch die den Werthen $m = 1$ und $m = 2$ entsprechenden Summen

$$G_{\frac{1}{2}} = \sum \sum{}' \left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right),$$

$$G_1 = \sum \sum{}' \left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^2$$

berücksichtigen. Diese convergiren nicht unabhängig von der *Reihenfolge* der Summation, weshalb diese Reihenfolge in jedem speciellen Falle genau anzugeben ist.

§ 3.

Umsetzung der Functionen G_n in Potenzreihen.

Um die Summen G_n auf ihren Charakter als analytische Functionen zu untersuchen, sowie aus Gründen der Anwendbarkeit, ist es wesentlich, dieselben in Potenzreihen umzusetzen.

Dabei gehen wir von der bekannten Partialbruchzerlegung der Cotangente aus:

$$\pi \cdot \cot a\pi = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a+\nu} + \frac{1}{a-\nu} \right\}.$$

Entwickelt man andererseits die Cotangente nach steigenden Potenzen von

$$v = e^{2ai\pi},$$

so erhält man die Grundformel:

*) S. z. B. Eisenstein, Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind. (Mathem. Abhandlungen p. 213 oder auch Crelle's Journal Bd. 35, 1847.)

$$\frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a+\nu} + \frac{1}{a-\nu} \right\} = -i\pi - 2i\pi \sum_{k=1}^{\infty} v^k.$$

Differenzirt man diese Formel m Mal nach a, so folgt:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left(\frac{1}{a+\nu} \right)^m = (-1)^m \cdot \frac{(2i\pi)^m}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} k^{m-1} v^k. {}^*)$$

Die Summe linker Hand convergirt für endliche Werthe a unbedingt, wenn $m > 1$ ist, während der Convergenzbereich der Potenzreihe rechter Hand durch die Bedingung $|v| < 1$ bestimmt ist ($|v|$ bedeutet den absoluten Betrag von v).

Diese letztere Bedingung ist gleichbedeutend mit der andern, dass a eine positive zweite Ordinate haben muss, was jetzt ausdrücklich angenommen sei.

Setzen wir nun für a, $\mu \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2} = \mu \cdot \omega$ und summiren über alle ganzzahligen Werthe $\mu = 1$ bis ∞, so folgt:

$$\sum_{\mu=1}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu\omega+\nu} \right)^m = (-1)^m \cdot \frac{(2i\pi)^m}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} k^{m-1} \cdot \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}},$$

wobei

$$e^{i\pi\omega} = q$$

gesetzt ist, und ω, der obigen Bedingung für a entsprechend, eine positive zweite Ordinate hat.

Und aus dieser Formel ergiebt sich nun unmittelbar, dass

$$G_n(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{1}{\omega_2} \right)^{2n} \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}{}' \left(\frac{1}{\nu} \right)^{2n} + 2 \cdot (-1)^n \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1} \cdot \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} \right]$$

oder

$$G_n(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2} \right)^{2n} \cdot \frac{1}{(2n)!} \left[B_n + (-1)^n \cdot 4n \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} \right]$$

ist, wo B_n die n^{te} Bernoulli'sche Zahl bedeutet.

Diese Potenzreihe, welche, wie aus der obigen Entwicklung hervorgeht, mit der $\sum\sum' \left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2} \right)^{2n}$ übereinstimmt, sobald $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ eine *positive* zweite Ordinate hat, stellt nun für $n > 1$ eine Modulform der $-2n^{ten}$ Dimension vor, die wir fortan ebenfalls durch G_n bezeichnen wollen.

Sie ist eine Modulform, denn erstens bleibt sie für alle linearen Transformationen ungeändert, und zweitens ist sie eine eindeutige analytische Function von ω_1 und ω_2, da die Potenzreihe nach q in der positiven

*) Die Schlussformel in Scheibners Gratulationsschrift: Ueber „unendl. Reihen und deren Convergenz" (Leipzig 1860), enthält diese Formel als speciellen Fall. — Aus der Scheibner'schen Formel fliessen übrigens für die Theorie der Modulfunctionen bemerkenswerthe Resultate, auf die bei geeigneter Gelegenheit zurückzukommen ich mir vorbehalte.

Halbebene ω überall convergirt, aber über dieselbe hinaus keine Fortsetzung gestattet, indem sie für jeden rationalen Werth von ω mit der unendlichen Summe einen unendlich grossen Werth annimmt. *)

Insbesondere kommt nun für $n = 1, 2, 3, 4$:

$$3G_1 = \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \left[\quad 1 \quad - 24 \sum k \cdot \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}}\right],$$

$$g_2 = \quad 60 G_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20 \sum k^3 \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}}\right] **),$$

$$g_3 = 140 G_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum k^5 \cdot \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}}\right] **),$$

$$7\,!\; G_4 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^8 \left[\frac{1}{16\cdot 15} + 2 \sum k^7 \cdot \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}}\right].$$

In Bezug auf G_1 ist zu bemerken, dass die Potenzreihe aus der Summe für G_1 durch folgende Anordnung der Summation erhalten ist: Es ist bei festem μ zuerst über alle ν summirt, wobei die Reihenfolge der Summanden ohne Einfluss auf das Resultat ist. In der so gewonnenen Summe ist dann über $\mu = -\infty$ bis $+\infty$ summirt, wobei wiederum die Anordnung der Summation nicht in Betracht kommt.

Die Summe $G_{\frac{1}{2}}$ erfordert eine Behandlung für sich. Wir wollen dieselbe bei folgender Anordnung der Summation auswerthen:

$$G_{\frac{1}{2}}^{(n,m)} = \lim_{\lambda=\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\mu=+\lambda}{}' \left\{ \lim_{\varkappa=\infty} \sum_{\nu=-\varkappa}^{\nu=+\varkappa} \left(\frac{1}{(\mu+n)\omega_1 + (\nu+m)\omega_2} \right) \right\}$$

wo m und n beliebig gewählte ganze Zahlen sind.

Nach der Formel für die Partialbruchzerlegung der Cotangente ist:

$$G_{\frac{1}{2}}^{(n,m)} = \frac{\pi}{\omega_2} \cdot \lim_{\lambda=\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\mu=+\lambda} \cot \{((\mu+n)\omega + m)\cdot\pi\}$$

$$= \frac{\pi}{\omega_2} \cdot \lim_{\lambda=\infty} \sum_{\mu=\lambda-n+1}^{\mu=\lambda+n} \cot(\mu\omega\pi)$$

$$= \frac{i\pi}{\omega_2} \cdot \lim_{\lambda=\infty} \sum_{\mu=\lambda-n+1}^{\mu=\lambda+n} \frac{e^{2\mu i\pi\omega}+1}{e^{2\mu i\pi\omega}-1}$$

$$= \frac{i\pi}{\omega_2} \cdot \lim_{\lambda=\infty} \sum_{n'=-(n-1)}^{n'=n} \frac{e^{2\lambda i\pi\omega}\cdot e^{2n' i\pi\omega}+1}{e^{2\lambda i\pi\omega}\cdot e^{2n' i\pi\omega}-1},$$

also

$$G_{\frac{1}{2}}^{(n,m)} = -\frac{2ni\pi}{\omega_2}.$$

---

*) Vergleiche die schon citirten Entwicklungen von Weierstrass in den Berliner Monatsberichten.

**) g_2 und g_3 sind die von Weierstrass so benannten Invarianten des elliptischen Integrals I. Gattung. — Die Grössen $(2n-1)\,G_n\,(n>1)$ treten in Weier-

§ 4.

Verhalten der Function G_1*) bei linearen Transformationen von ω_1 und ω_2. Einführung der Function Δ.

Während die Functionen G_n für $n > 1$, wegen der unbedingten Convergenz der zugehörigen Doppelsummen, bei allen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 ungeändert bleiben, bedarf der Effect dieser Transformationen in Bezug auf G_1 eingehender Untersuchung.

Nach den Entwicklungen des I. Capitels setzen sich nun alle homogenen linearen Transformationen aus folgenden beiden zusammen:

(1)
$$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1 + \omega_2 \\ \omega_2' = \qquad \omega_2 \end{cases}$$

und

(2)
$$\begin{cases} \omega_1' = -\omega_2 \\ \omega_2' = \quad \omega_1. \end{cases}$$

Aus der Gleichung

$$G_1 = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{3\omega_2^2} \left\{1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}}\right\},$$

wo zuerst die Summation nach ν, dann diejenige nach μ auszuführen ist, geht hervor, dass für die Transformation (1) G_1 ungeändert bleibt.

Um nun zu untersuchen, welchen Einfluss die Transformation (2) auf G_1 hat, benutzen wir folgende Identität:

$$\frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{q^3} - \frac{1}{(p+q)^3} \left\{\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3}\right\} = \frac{1}{(p+q)^4} \left\{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right\} + \frac{6}{(p+q)^5} \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right\},$$

die sich aus der evidenten Gleichung:

$$\frac{1}{p \cdot q} = \frac{1}{p+q} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p+q} \cdot \frac{1}{q}$$

durch dreimalige Differentiation nach p und dreimalige Differentiation nach q ergiebt.**)

Wir wollen in dieser Identität

$$p = \mu_1 \omega_1 + \nu_1 \omega_2,$$
$$q = -\mu_2 \omega_1 - \nu_2 \omega_2,$$

strass' Vorlesungen über elliptische Functionen als die Entwicklungscoefficienten von pu auf und zwar definirt Weierstrass die Grössen durch dieselben unendlichen Doppelsummen, welche den Ausgangspunkt unserer Betrachtung bilden.

*) $G_1 \cdot \omega_2$ ist abgesehen von einem Zahlenfactor die in Weierstrass' Vorlesungen über elliptische Functionen mit 2η bezeichnete Grösse (Periode des Integrals 2. Gattung).

**) Wegen dieser zuerst von Eisenstein l. c. verwandten Identität vgl. § 8. — Die Benützung derselben zur Untersuchung von G_1 ist jedoch neu.

also

$$p+q=(\mu_1-\mu_2)\,\omega_1+(\nu_1-\nu_2)\,\omega_2$$

setzen. Alsdann wollen wir alle Gleichungen summiren, welche entstehen, wenn μ_1, ν_1, μ_2, ν_2, jedes unabhängig von den andern, alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Dabei sollen jedoch die Combinationen, in denen $\mu_1=\nu_1=0$, oder $\mu_2=\nu_2=0$, oder endlich $\mu_1-\mu_2=\nu_1-\nu_2=0$ ist, ausgeschlossen bleiben.

Da nun die linke Seite der Identität bei der Summation eine unbedingt convergirende Summe liefert, so wird dieses auch die rechte Seite thun. Man wird daher ein richtiges Resultat erhalten, wenn man über die *einzelnen* Glieder der rechten Seite so summirt, dass bei allen Gliedern *dieselbe* Reihenfolge in der Summation eingehalten wird.

Die Summation über die linke Seite der Identität liefert nun bei ganz willkürlicher Wahl der Anordnung die Function $3\cdot G_3$.

Setzen wir rechter Hand

$$p+q=w=(\mu_1-\mu_2)\,\omega_1+(\nu_1-\nu_2)\,\omega_2=m\omega_1+n\omega_2,$$

also $\quad p=w-q=(m+\mu_2)\,\omega_1+(n+\nu_2)\,\omega_2,$

so werden alle zulässigen Combinationen μ_1, ν_1, μ_2, ν_2 erhalten werden, wenn m und n alle ganzen Zahlen von $-\infty\cdots+\infty$ mit Ausnahme der Combination $m=n=0$ durchlaufen, und für jeden stehenden Werth von

$$w=m\omega_1+n\omega_2$$

μ_2 und ν_2 alle ganzzahligen Werthepaare annehmen mit Ausschluss der Combinationen

$$\left.\begin{matrix}\mu_2=0\\ \nu_2=0\end{matrix}\right\}\quad\text{und}\quad\left.\begin{matrix}\mu_2=-m\\ \nu_2=-n\end{matrix}\right\}.$$

Wir können somit schreiben:

$$\begin{aligned}3G_3=3\cdot\sum_w\frac{1}{w^1}\Big[&\sum\sum\frac{1}{((m+\mu_2)\omega_1+(n+\nu_2)\omega_2)^2}\\&+\sum\sum\Big(\frac{1}{(\mu_2\omega_1+\nu_2\omega_2)^2}\Big)-\frac{2}{w^2}\Big]\\+6\sum_w\frac{1}{w^5}\Big[&\lim_{\substack{k=\infty,\\ l=\infty}}\cdot\sum_{\mu_2=-l}^{+l}\sum_{\nu_2=-k}^{+k}\frac{1}{(m+\mu_2)\omega_1+(n+\nu_2)\omega_2}\\&-\lim_{\substack{k=\infty,\\ l=\infty}}\sum_{\mu_2=-l}^{+l}\sum_{\nu_2=-k}^{+k}\Big(\frac{1}{\mu_2\omega_1+\nu_2\omega_2}\Big)-\frac{2}{w}\Big].\end{aligned}$$

Also, indem wir zunächst die Summation nach μ_2 und ν_2 ausführen:

$$3G_3=6G_1(\omega_1,\omega_2)\cdot\sum_w\frac{1}{w^4}-18\sum_w\frac{1}{w^6}-\frac{12i\pi}{\omega_2}\sum_w\frac{m}{w^5}.$$

Und schliesslich durch Summation über w:

$$21 G_3 = 6 G_1(\omega_1, \omega_2) \cdot G_2 + \frac{3i\pi}{\omega_2} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial \omega_1}.$$

Da diese Gleichung eine blosse *Identität* zwischen ω_1 und ω_2 ist, so ist es gestattet, in derselben ω_2 durch ω_1 und ω_1 durch $-\omega_2$ zu ersetzen. Dann folgt, da G_3 und G_2 dabei unverändert bleiben:

$$21 G_3 = 6 G_1(-\omega_2, \omega_1) \cdot G_2 - \frac{3i\pi}{\omega_1} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial \omega_2}.$$

Durch Subtraction der letzten beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$6 G_2 [G_1(\omega_1, \omega_2) - G_1(-\omega_2, \omega_1)] = -\frac{3i\pi}{\omega_1 \omega_2}\left[\omega_1 \frac{\partial G_2}{\partial \omega_1} + \omega_2 \cdot \frac{\partial G_2}{\partial \omega_2}\right].$$

Nun ist aber $G_2(\omega_1, \omega_2)$ eine homogene Function 4^{ter} Dimension; also nach dem Euler'schen Satze:

$$\omega_1 \frac{\partial G_2}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial G_2}{\partial \omega_2} = -4 G_2.$$

So erhalten wir schliesslich die von anderer Seite wohlbekannte Formel:

$$G_1(\omega_1, \omega_2) - G_1(-\omega_2, \omega_1) = \frac{2i\pi}{\omega_1 \cdot \omega_2}.$$

Diese Gleichung giebt nun offenbar die Aenderung von $G_1(\omega_1, \omega_2)$ an, wenn man auf die Argumente die Substitution

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= -\omega_2 \\ \omega_2' &= \quad \omega_1 \end{aligned}\right\}$$

anwendet. Dieselbe lässt sich vermöge der Reihenentwicklung von G_1 folgendermassen umsetzen:

$$\text{(A)} \quad \log q \left\{1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}}\right\} + \log q' \left\{1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{q'^{2k}}{1 - q'^{2k}}\right\} = -6,$$

wobei

$$q = e^{i\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}},$$

$$q' = e^{-i\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}},$$

also

$$\log q \cdot \log q' = \pi^2$$

ist.

Durch Differentiation folgt aus dieser letzten Gleichung:

$$\frac{dq}{q \cdot \log q} = -\frac{dq'}{q' \cdot \log q'}.$$

Die mit $\frac{d \cdot \log q}{\log q}$ multiplicirte Gleichung (A) lässt sich daher so schreiben:

$$\frac{dq}{q}\left\{1 - 24 \sum k \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}}\right\} - \frac{dq'}{q'}\left\{1 - 24 \sum k \cdot \frac{q'^{2k}}{1 - q'^{2k}}\right\} = -6 \cdot \frac{d \log q}{\log q}.$$

Diese Gleichung lässt sich nun Glied für Glied integriren, und es ergiebt sich nach ausgeführter Integration durch den Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen:

$$(\log q)^6 \cdot q \cdot \prod (1 - q^{2k})^{12} = C \cdot q' \cdot \prod (1 - q'^{2k})^{12}$$

oder:

$$\text{(B)} \quad \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \cdot q \cdot \prod (1 - q^{2k})^{12} = - \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^6 \cdot q' \cdot \prod (1 - q'^{2k})^{12},$$

indem sich die Integrationsconstante C aus der Bemerkung ergiebt, dass für $\frac{\omega_1}{\omega_2} = i$

$$q = q'$$

wird.

Indem wir nun in (B) beiderseits quadriren, ergiebt sich der für die Theorie der Modulfunctionen fundamentale Satz:

„*Die Function*

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} \cdot q^2 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})^{24}$$

bleibt ungeändert, wenn ω_1 und ω_2 beliebigen homogenen linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante $+1$ *unterworfen werden.*“

§ 5.

Modulfunctionen.

Wir haben im ersten Capitel gesehen, dass sich die positive Halbebene ω den linearen Transformationen $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ entsprechend in unendlich viele Dreiecksgebiete zerlegen lässt.

Jeder beliebige Punkt ω mit endlicher positiver Ordinate war einem und nur einem Punkte des Ausgangsraumes äquivalent, wenn man zu dem Innern des letzteren noch die Hälfte seiner Begrenzung, etwa die links von der Axe der rein imaginären Zahlen liegende, hinzunahm.

Die Axe der rein imaginären Zahlen zerlegt den Ausgangsraum in zwei symmetrische Dreiecksgebiete, von denen wir das eine, dessen Ecken die Punkte $\omega = \rho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $\omega = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ und $\omega = i \cdot \infty$ sind, zur Unterscheidung vom anderen schraffiren wollen.

Nach Riemann'schen Anschauungen*) giebt es nun eine im Innern dieses schraffirten Gebietes eindeutige und überall stetige Function $J(\omega)$, die die Abbildung desselben auf die positive Halbebene J vermittelt, wobei der Begrenzung jenes Gebietes die Begrenzung der positiven Halbebene J, d. i. die Axe der reellen Zahlen entspricht. Die so

*) Vgl. Dedekind, l. c. pag 274.

definirte Function $J(\omega)$ enthält noch drei reelle willkürliche Constante, über die so verfügt werden soll, dass $J(\omega)$ für die Ecken

$$\varrho, \quad i, \quad i \cdot \infty$$

des Gebietes resp. die Werthe

$$0, \quad 1, \quad \infty$$

annimmt.

Diese Function $J(\omega)$ hat dann nach bekannten Principien*) die Eigenschaft, dass sie für äquivalente Punkte und nur für solche denselben Werth annimmt.

Da in der Umgebung des Punktes $\omega = i\infty$ $J(\omega)$ und $q^2 = e^{2i\pi\omega}$ gegenseitig *eindeutig* von einander abhängen, so folgt, dass

$$q^2 \cdot J(\omega)$$

für $\omega = i \cdot \infty$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth annimmt.

Nun kehren wir zu den oben abgeleiteten Modulformen zurück.

Bilden wir den Quotienten

$$\frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{\left(\frac{1}{12} + 20 \sum k^3 \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}}\right)^3}{q^2 \Pi (1 - q^{2k})^{24}},$$

so ist dieser eine Modulfunction von ω und also eine eindeutige Function von $J(\omega)$. Er wird für keinen Punkt des Ausgangsraumes unendlich mit Ausnahme des Punktes $\omega = i\infty$, wo das Product

$$q^2 \cdot \frac{g_2^3}{\Delta}$$

einen endlichen von Null verschiedenen Werth annimmt.

Daraus folgt: $\frac{g_2^3}{\Delta}$ *ist eine lineare ganze Function von J.*

Dasselbe gilt aus ähnlichen Gründen für den Quotienten $\frac{g_3^2}{\Delta}$.

Offenbar sind dabei $\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}$ und $\frac{g_3}{\sqrt{\Delta}}$ noch *eindeutige* Functionen von ω.

Es gilt aber der evidente Satz: (Mathem. Annalen XIV, p. 128)

Verzweigungsstellen von Functionen von $J(\omega)$, die eindeutige Functionen von ω sind, können nur bei $J = 0, 1, \infty$ liegen, und zwar können bei $J = 0$ resp. $J = 1$ die Blätter der betreffenden Riemann'schen Fläche theils isolirt verlaufen, theils zu je dreien resp. zu je zweien zusammenhängen, während bei $J = \infty$ die Verzweigung irgend welche sein darf.

Demnach ist klar, dass:

$$\frac{g_2^3}{\Delta} = a \cdot J, \quad \frac{g_3^2}{\Delta} = a_1 (J - 1)$$

zu setzen ist.

---

*) Siehe Schwarz, l. c.

Die Zahlencoefficienten a und a_1 bestimmen sich aus der Gleichung

$$a_1 g_2^3 - a g_3^2 = a a_1 \Delta$$

mit Hülfe der Reihenentwicklungen von g_2, g_3, Δ nach q.

So findet man dann die Gleichungen:

$$\frac{g_2^3}{\Delta} = J,$$

$$\frac{27 g_3^2}{\Delta} = J - 1.$$

Der hiermit functionentheoretisch erkannte Umstand, dass g_2 und g_3 für $\omega = \varrho$ resp. $\omega = i$ verschwinden, lässt sich auch leicht direct aus der ursprünglichen Definition dieser Grössen durch Doppelsummen erkennen. In der That die Glieder von

$$\sum \sum{}' \frac{1}{(\mu\omega + \nu)^4}$$

ordnen sich für $\omega = \varrho$ zu je dreien, wie

$$\left(\frac{1}{\mu\varrho + \nu}\right)^4,$$

$$\left(\frac{1}{(\nu - \mu)\varrho - \mu}\right)^4 = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{\mu\varrho + \nu}\right)^4,$$

$$\left(\frac{1}{-\nu\varrho + \mu - \nu}\right)^4 = \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{1}{\mu\varrho + \nu}\right)^4,$$

die sich in der Summe zerstören.

Analog ist es bei g_3, und allgemein folgt in ähnlicher Weise:

$$G_m = 0, \qquad \text{für } \omega = \varrho, \text{ wenn } m \gtrless 0 \pmod{3},$$
$$\qquad\qquad \text{für } \omega = i, \text{ wenn } m \gtrless 0 \pmod{2}.$$

§ 6.

Algebraischer Zusammenhang der Modulformen unter einander.

Schon oben fanden wir eine algebraische Relation zwischen verschiedenen Modulformen, nämlich:

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = \Delta.$$

Alle Relationen dieser Art fliessen aus einer Ueberlegung, die nunmehr entwickelt werden soll.

Sei $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ irgend eine eindeutige Form einer negativen ganzen Dimension $= -k$, die sich bei allen linearen Transformationen bis auf eine als Factor hinzutretende n^{te} Einheitswurzel reproducirt. (Solche Formen sollen gelegentlich als der Hauptgruppe „adjungirt" bezeichnet werden.) Alsdann ist

$$\left\{\frac{\Psi(\omega_1, \omega_2)}{(\sqrt[12]{\Delta})^k}\right\}^{12n}$$

eine Modulfunction von ω, und also eine eindeutige Function von J.

Setzen wir nun voraus, dass $\Psi(\omega, 1)$ an den Stellen des Ausgangsraumes, wo es unendlich wird, von einer endlichen Ordnung (in Bezug auf $J(\omega)$) unendlich wird, so wird jene *eindeutige* Function von J eine *rationale.*

Da überdies $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ als *eindeutige* Function von ω_1, ω_2 vorausgesetzt wurde, so folgt, indem Functionen von J, die *eindeutige* Functionen von ω sind, nur bei $J = 0, 1, \infty$ in der oben angegebenen Weise verzweigt sein können:

$$\frac{\Psi(\omega_1, \omega_2)}{(\sqrt[12]{\Delta})^k} = \sqrt[3]{J^\alpha} \cdot \sqrt{(J-1)^\beta} \cdot R(J)$$

wo α, β ganze Zahlen bedeuten.

So kommt schliesslich, indem man

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \qquad J - 1 = \frac{27\, g_3^2}{\Delta}$$

rechter Hand einsetzt:

$$\text{(A)} \qquad \Psi(\omega_1, \omega_2) = (\sqrt[12]{\Delta})^r \cdot \frac{G_m(g_2, g_3)}{G_n(g_2, g_3)},$$

wo G_m und G_n ganze Functionen von g_2 und g_3 bezeichnen, deren Dimensionen als Modulformen von ω_1, ω_2 resp. $-m$ und $-n$ sein mögen.

Zwischen den ganzen Zahlen k, r, m, n besteht, wegen der Gleichheit der Dimensionen der beiden Seiten von (A), die Relation:

$$k = r + m - n.$$

Auf Grund dieser Entwicklungen können wir nun folgende Sätze aufstellen (vgl. Annalen XV, pag. 86):

Eine eindeutige Form von ω_1 und ω_2 von negativem ganzen Grade, die sich bei allen linearen Transformationen nur um Einheitswurzeln ändert und im Ausgangsraum nur von endlicher Ordnung unendlich wird, lässt sich in der Form (A) *darstellen und kann sich folglich nur um* 12*te Wurzeln der Einheit ändern.*

In der Form $(\sqrt[12]{\Delta})^r\, G_m(g_2, g_3)$ sind für $r < 0$ alle im Ausgangsraume nur für $\omega = i\infty$ unendlich gross werdenden, für $r \geq 0$ alle überhaupt nicht unendlich werdenden Formen enthalten, die sich bei linearen Transformationen nur um Einheitswurzeln als Factoren ändern.

Speciell folgt hieraus:

Die sämmtlichen Functionen G_μ, $\mu > 3$, sind rationale ganze Functionen von g_2 und g_3.

§ 7.

Zahlentheoretische Folgerungen.

Aus letzterem Umstande entspringen eine grosse Zahl zahlentheoretischer Formeln.

Die in § 3. gegebenen Reihenentwicklungen liefern nämlich nach aufsteigenden Potenzen von q^2 geordnet:

$$G_\mu(\omega_1, \omega_2) = \frac{c_\mu}{\omega_2^{2\mu}}\left(B_\mu + (-1)^\mu \cdot 4 \cdot \mu \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2\mu-1}(n) \cdot q^{2n}\right),$$

wo c_μ einen Zahlenfactor und $\psi_{2\mu-1}(n)$ die Summe der $(2\mu - 1)^{\text{sten}}$ Potenzen der Divisoren der Zahl n bedeutet.

Jede Relation zwischen den G_μ liefert daher eine Formel, welche die zahlentheoretischen Functionen $\psi_{2\mu-1}(n)$ für verschiedene Werthe μ mit einander verbindet.

Folgendes Beispiel möge zum Aufschluss über die Art dieser Formeln dienen:

Da sich G_4 als ganze rationale Function von g_2 und g_3 darstellen lassen muss, so ist

$$G_4 = a \cdot g_2^2,$$

wo a ein Zahlenfactor ist, der sich aus dem Vergleich der Anfangsglieder der Reihenentwicklungen ergiebt.

Man findet so

$$1 + 480 \sum \psi_7(n) q^{2n} = \left(1 + 240 \sum \psi_3(n) \cdot q^{2n}\right)^2$$

und folglich:

$$\psi_7(n) = \psi_3(n) + 120 \{\psi_3(1)\psi_3(n-1) + \psi_3(2) \cdot \psi_3(n-2) + \psi_3(3) \cdot \psi_3(n-3) + \cdots + \psi_3(n-1) \cdot \psi_3(1)\}.$$

Ist insbesondere n eine Primzahl $= p$, so folgt die Formel:

$$p^7 - p^3 = 240 \sum \psi_3\left(\frac{p^2 - a^2}{4}\right),$$
$$a = 1, 3, 5, \ldots p - 2$$

indem jetzt alle Zahlenpaare a und $p - a$, $(a < p)$ zu einander relativ prim sind und für relativ prime m und n

$$\psi_{2\mu-1}(m) \cdot \psi_{2\mu-1}(n) = \psi_{2\mu-1}(m \cdot n)$$

ist. —

Auch für die allgemeinen Formeln giebt diese letztere Gleichung das Mittel zweckmässiger Umformung an die Hand. —

§ 8.

Die Aufstellung algebraischer Relationen zwischen den G_μ.

Nachdem wir functionentheoretisch erkannt haben, dass zwischen den G_μ unzählig viele algebraische Relationen bestehen (indem sich alle rational und ganz aus zweien von einander unabhängigen, g_2 und g_3, zusammensetzen lassen), liegt die Frage nahe, *wie* man solche Relationen aufstellt.

Schreibt man eine der *Form* nach erkannte Gleichung zwischen den G_μ mit unbestimmten Coefficienten an, so kann man selbstverständlich diese letzteren mit Hülfe der Reihenentwicklungen der G_μ bestimmen.

Man wird aber wegen der empirischen Natur dieses Verfahrens zu keiner allgemeinen Formel gelangen. Eine solche liefert nun eine von Eisenstein*) herrührende Methode, von der wir schon in § 4. anderweitigen Gebrauch gemacht haben und auf die ich hier kurz eingehen will.

Eisenstein entnimmt der Theorie der Partialbruchzerlegung folgende Identität:

$$\text{(A)}\qquad \frac{1}{p^r}\cdot\frac{1}{q^s}=\sum_{\sigma=0}^{\sigma=r-1}(s+\sigma-1)_\sigma\cdot\frac{1}{(p+q)^{s+\sigma}}\cdot\frac{1}{p^{r-\sigma}}$$
$$+\sum_{\tau=0}^{\tau=s-1}(r+\tau-1)_\tau\cdot\frac{1}{(p+q)^{r+\tau}}\cdot\frac{1}{p^{s-\tau}}.$$

Man kann diese Formel, wie beiläufig bemerkt sei, direct sehr leicht erhalten, wenn man die evidente Identität:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{q}=\frac{1}{p+q}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p+q}\cdot\frac{1}{q}$$

r Mal nach p und s Mal nach q differenzirt.

Wir setzen nun in (A)

$$\left.\begin{aligned}p&=\mu\,\omega_1+\nu\,\omega_2\\ q&=\mu'\omega_1+\nu'\omega_2\end{aligned}\right\}\quad\text{also}\quad p+q=(\mu+\mu')\,\omega_1+(\nu+\nu')\,\omega_2$$

und summiren über alle ganzzahligen μ, ν, μ', ν', wobei nur die Combinationen $\mu=\nu=0$ und $\mu'=\nu'=0$ und endlich $\mu+\mu'=\nu+\nu'=0$ ausgeschlossen werden sollen.

---

*) a. a. O. Diese schon mehrfach citirte inhaltsreiche Arbeit ist auch historisch sehr interessant. Es findet sich in ihr z. B. schon die von Weierstrass eingeführte Function pu (bei Eisenstein: $(2, x) - (2^*, 0)$), allerdings ohne dass Eisenstein die principielle Bedeutung derselben erkannt hätte. Die Formel 5, p. 285 ist geradezu identisch mit der Gleichung:

$$p'u^2=4pu^3-g_2\cdot pu-g_3.$$

Es seien überdies r und s grösser als 2. Alsdann hat man bei der Ausführung der Summation mit Vorsicht nur je die beiden letzten Glieder der Summen rechter Hand zu behandeln, indem man die bei einem beliebigen dieser Glieder willkürlich eingehaltene Reihenfolge der Summation bei allen festhalten muss.

Ich will gleich das Resultat der Summation hinschreiben, indem ich in Betreff der Ausführung auf das specielle Beispiel in § 4. oder auch auf die Eisenstein'sche Abhandlung verweise. Es wird:

$$G_{\frac{r}{2}} \cdot G_{\frac{s}{2}} + G_{\frac{r+s}{2}}[(s+r-1)_s + (s+r-1)_r + (-1)^{s+1}]$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{r-3}(s+\sigma-1)_{s-1} \cdot G_{\frac{s+\sigma}{2}} \cdot G_{\frac{r-\sigma}{2}} + \sum_{\tau=0}^{s-3}(r+\tau-1)_{r-1} \cdot G_{\frac{r+\tau}{2}} \cdot G_{\frac{s-\tau}{2}}$$

$$+ (r+s-2)_{s-1} \cdot \frac{i\pi}{6(r+s-2)} \left[\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial G_{\frac{r+s-2}{2}}}{\partial \omega_2} - \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2} \cdot \frac{\partial G_{\frac{r+s-2}{2}}}{\partial \omega_1}\right].$$

Hierbei ist der letzte von den nicht unbedingt convergirenden Summen herrührende Term vermöge des Euler'schen Satzes von homogenen Functionen und der Gleichung

$$G_1 = -\frac{i\pi}{6\omega_2} \cdot \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}$$

umgesetzt.

Jede Grösse $G_{\frac{\alpha}{2}}$, für welche $\frac{\alpha}{2}$ keine ganze Zahl ist, ist gleich Null. Die Formel liefert daher nur dann eine Gleichung für die G_μ, wenn r und s entweder beide gerade oder beide ungerade sind; sie zieht sich in jedem besonderen Falle durch den Wegfall und die Uebereinstimmung vieler Glieder zusammen.

Das letzte Glied der Formel ist die Functionaldeterminante von $\log \Delta$ und $G_{\frac{r+s-2}{2}}$, welch' letztere demnach auch eine Modulform ist. Dieser Umstand ist selbstverständlich; denn aus der Theorie der Invarianten fliesst unmittelbar der Satz:

„Alle invarianten Bildungen aus Modulformen sind wieder Modulformen." *)

Gleichungen, in denen *nur* die G_μ vorkommen, gewinnt man nun, wenn man zwischen den verschiedenen Formeln, die für $r+s=t$, wo t eine fest angenommene gerade Zahl ist, bestehen, das letzte Glied eliminirt.

Neben der obigen Formel, die nur Producte von je zwei Functionen G_μ enthält, existiren noch unzählig viele andere auf analogem

*) Vgl. Annalen XV, pag. 86.

Wege zu bildende Gleichungen, in denen Producte von je n Functionen G_μ auftreten.

Differenzirt man nämlich die Identität:

$$\frac{1}{p_1}\cdot\frac{1}{p_2}\cdots\frac{1}{p_n}=\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\left(\frac{1}{p_1p_2\cdots p_{n-1}}+\frac{1}{p_1p_2\cdots p_{n-2}p_n}+\cdots\right)$$

α_1 Mal nach p_1, α_2 Mal nach p_2, $\cdots$, α_i Mal nach p_i, $\cdots$,
so ergiebt sich eine Identität, die in ganz gleicher Weise, wie die Identität für $n=2$ zur Aufstellung von Formeln für die G_μ benutzt werden kann.

Uebrigens sind alle diese Relationen algebraische Folgerungen aus den binären, da man mit Hülfe der letzteren successive sämmtliche $G_\mu (\mu > 3)$ durch die beiden ersten g_2 und g_3 ausdrücken kann.

§ 9.

Differentialquotient einer Modulfunction.

Bislang haben wir uns immer die Modulfunctionen durch Quotientenbildung aus Modulformen entstanden gedacht.

Es giebt nun einen einfachen Process, der umgekehrt aus einer bekannten Modulfunction eine Modulform ableiten lehrt.

Aus den Gleichungen

$$F(\omega')=F(\omega)$$

und

$$\omega'=\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$$

folgt nämlich durch einfache Differentiation:

$$\frac{1}{\omega_2'^2}\cdot\frac{dF(\omega')}{d\omega'}=\frac{1}{\omega_2^2}\cdot\frac{dF(\omega)}{d\omega},$$

wobei

$$\omega'=\frac{\omega_1'}{\omega_2'},\qquad \omega=\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

und

$$\omega_1'=\alpha\omega_1+\beta\omega_2,$$
$$\omega_2'=\gamma\omega_1+\delta\omega_2$$

gesetzt ist. Daraus fliesst der Satz:

Ist $F(\omega)$ irgend eine Modulfunction, die zu irgend einer Untergruppe der linearen Transformationen gehört, so ist

$$\frac{1}{\omega_2^2}\cdot\frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

eine zu der isomorphen Gruppe von homogenen linearen Transformationen gehörige Modulform.

Speciell ist also $\frac{1}{\omega_2^2}\cdot\frac{dJ(\omega)}{d\omega}$ eine zur ganzen Gruppe der linearen homogenen Transformationen gehörige Modulform — 2. Dimension.

Da nun $\frac{dJ(\omega)}{d\omega}$ nur für $\omega = i\infty$ im Ausgangsraume unendlich wird, und zwar so, dass

$$q^2 \cdot \frac{dJ(\omega)}{d\omega}$$

endlich und von Null verschieden ist, so folgt nach den Sätzen des § 6.:

$$\frac{1}{\omega_2^2} \cdot \frac{dJ(\omega)}{d\omega} = \frac{G_{11}(g_2, g_3)}{\Delta} = C \cdot \frac{g_2^2 \cdot g_3}{\Delta}.$$

Die Constante C bestimmt sich aus den Reihenentwicklungen, und man findet die Formel

$$\frac{dJ(\omega)}{d\omega} = 9 \cdot \frac{\omega_2^2}{i \cdot \pi} \cdot \frac{g_2^2 \cdot g_3}{\Delta}$$
$$= \frac{\omega_2^2}{i\pi} \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{\Delta} \cdot J^{\frac{2}{3}} \cdot (J-1)^{\frac{1}{2}},$$

die später, § 6. des letzten Capitels, wichtig wird.

§ 10.

Tragweite der benutzten Methoden.

Zum Schlusse dieses Capitels will ich kurz die Richtungen andeuten, nach welchen die hier benutzten Methoden der Verallgemeinerung fähig sind.

Bei den obigen Entwicklungen kommt fast durchgängig nur die Gruppe *sämmtlicher* linearer Transformationen in Betracht. Alle bei dieser angestellten Betrachtungen lassen sich jedoch ohne Ausnahme auch bei beliebigen Untergruppen jener Transformationen in analoger Weise durchführen.

Es gelingt z. B. leicht, diejenigen Summen $\sum\sum\left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^m$, bei denen μ und ν nicht mehr sämmtliche ganzen Zahlen durchlaufen, sondern nur alle diejenigen, die in Bezug auf einen festen Modul resp. zwei gegebenen Zahlen congruent sind, in Potenzreihen nach q umzusetzen.

Hierbei zeigt sich unter anderm, dass die von Jacobi auf pag. 103 ff. der Fundamenta entwickelten Grössen sich als solche Doppelsummen darstellen, in denen μ und ν gewisse Zahlclassen mod. 4 zu durchlaufen haben.

Zwischen diesen Doppelsummen bestehen wegen functionentheoretischer Betrachtungen, die den in § 6. angestellten analog sind, algebraische Relationen, zu deren wirklichen Aufstellung wieder die Eisenstein'schen Identitäten dienen können. Diese algebraischen Relationen können wiederum vermöge der Entwicklungen nach q zur Aufstellung zahlentheoretischer Formeln verwerthet werden u. s. w.

Die Durchführung der hierdurch gekennzeichneten Aufgaben, die in eine vollständige Theorie der Modulfunctionen gehört, würde aber einen zu grossen Umfang gewinnen, als dass ich sie hier unternehmen könnte.

Es bedarf schliesslich wohl kaum der Erwähnung, dass auch für mehr Variable ganz ähnliche Entwicklungen stattfinden.

II. Abschnitt.

Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe.

I. Capitel.

Die Existenz der Multiplicatorgleichungen erster Stufe.

§ 1.

Die zu $\sqrt[12]{\Delta}$ gehörige Untergruppe.

Unter allen im II. Capitel des I. Abschnittes abgeleiteten Functionen nimmt die Grösse

$$\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} \cdot \Delta(\omega_1, \omega_2) = q^2 \cdot \Pi(1 - q^{2\nu})^{24}$$

dadurch eine ausgezeichnete Stellung ein, dass sie überall im Innern der positiven Halbebene ω endlich und von Null verschieden ist. Hieraus folgt nämlich, dass jede Potenz dieser Function, sowie ihr Logarithmus in der positiven Halbebene ω unverzweigt und also in derselben eine *eindeutige* Function ist, sofern man ihren Werth an einem bestimmten willkürlich zu wählenden Punkt ω_0 festgesetzt hat.*)

Von den Wurzeln aus Δ ist die vom grössten Index, welche noch eine *durchaus eindeutige* Function von ω_1 und ω_2 ist, die zwölfte. Aus diesem Grunde ist gerade die $\sqrt[12]{\Delta}$ von principieller Einfachheit.

Wir stellen uns nun zunächst die Aufgabe, die Untergruppe von $\sqrt[12]{\Delta}$ *zu bestimmen, d. h. die Gruppe derjenigen homogenen linearen Transformationen von* ω_1, ω_2, *bei denen* $\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$ *vollkommen ungeändert bleibt.*

Da

$$\sqrt[12]{\Delta} = \frac{\sqrt[3]{\Delta}}{\sqrt[4]{\Delta}} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{\Delta} = (\sqrt[12]{\Delta})^4, \quad \sqrt[4]{\Delta} = (\sqrt[12]{\Delta})^3,$$

---

*) Siehe Dedekind, in Riemanns Werken pag. 438.

so ist klar, dass $\sqrt[12]{\Delta}$ für diejenigen und *nur* für diejenigen Transformationen ungeändert bleibt, die $\sqrt[3]{\Delta}$ und $\sqrt[4]{\Delta}$ simultan ungeändert lassen. Das heisst, die Gruppe von $\sqrt[12]{\Delta}$ besteht aus allen denjenigen Transformationen, die gleichzeitig der Gruppe von $\sqrt[3]{\Delta}$ und der von $\sqrt[4]{\Delta}$ angehören. *Unsere Aufgabe ist daher auf die Bestimmung dieser letzteren beiden Gruppen reducirt.* Ich will jedoch nur die Bestimmung der Gruppe von $\sqrt[4]{\Delta}$ eingehender behandeln, da für $\sqrt[3]{\Delta}$ Alles ganz analog und übrigens einfacher ist.

Zu dem Zwecke werden wir zunächst, den Entwicklungen des ersten Abschnitts (I. Capitel) gemäss, das Fundamentalpolygon derjenigen Gruppe nicht homogener Transformationen aufsuchen, welche nach § 5. daselbst der Gruppe von $\sqrt[4]{\Delta}$ entspricht.

Nach dem im I. Abschnitt allgemein auseinander gesetzten Verfahren findet man, dass dieses Fundamentalpolygon aus dem Ausgangsraume ω und dem anliegenden Dreiecke $\omega + 1$ besteht.

Um die Richtigkeit dieser Angabe a posteriori einzusehen, hat man sich nur zu überzeugen:

1) dass das Dreieck ω allein kein vollständiges Fundamentalpolygon für unsere Gruppe ist,

2) dass den die Ränder vereinigenden Substitutionen:

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega + 2 \\ \omega' &= \frac{\omega - 1}{\omega} \end{aligned} \right.$$

homogene Transformationen entsprechen, die $\sqrt[4]{\Delta}$ ungeändert lassen.

Was den ersten Punkt betrifft, so folgt derselbe aus dem Umstande, dass keine der beiden homogenen Substitutionen, die der Substitution

$$\omega' = \omega + 1$$

entsprechen, $\sqrt[4]{\Delta}$ ungeändert lässt.

In Bezug auf den zweiten Punkt ist zu bemerken, dass die folgenden, den (A) entsprechenden, Transformationen der gestellten Anforderung genügen:

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_1' &= -\omega_1 - 2\omega_2, \\ \omega_2' &= - \omega_2, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_1' &= -\omega_1 + \omega_2, \\ \omega_2' &= -\omega_1. \end{aligned} \right.$$

Es bestehen nämlich die Formeln:

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \sqrt[12]{\Delta}(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) &= e^{\frac{i\pi}{6}} \sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2), \\ \sqrt[12]{\Delta}(-\omega_2, \omega_1) &= e^{\frac{9i\pi}{6}} \sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2). \end{aligned} \right.$$

Von denselben ergiebt sich die erste unmittelbar aus der Reihenentwicklung von $\sqrt[12]{\Delta}$. Die letztere erhält man, wenn man bemerkt, dass sich $\sqrt[12]{\Delta}(-\omega_2, \omega_1)$ und $\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$ jedenfalls nur um eine 12[te] Einheitswurzel unterscheiden können, und dass sich diese Einheitswurzel selbst sofort aus den Reihenentwicklungen ergiebt, wenn man $\frac{\omega_1}{\omega_2} = i$ setzt, in welchem Falle ja

$$q = e^{i\pi\omega} = q' = e^{-\frac{i\pi}{\omega}}$$

wird.

Da alle Transformationen sich aus den beiden $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ zusammensetzen lassen, so genügen die Formeln (B) um jede beliebige *numerisch* gegebene Substitution darauf hin zu untersuchen, ob sie $\sqrt[12]{\Delta}$ ungeändert lässt oder nicht. Speciell erkennt man nun so, dass die Transformationen (1) und (2) $\sqrt[4]{\Delta}$ in der That ungeändert lassen. Nach den Entwicklungen des I. Abschnittes sind also die Transformationen (A) die erzeugenden Transformationen der in Rede stehenden Gruppe von nicht homogenen Substitutionen.

Dem entspricht vermöge des Isomorphismus:

„*Die Gruppe von* $\sqrt[4]{\Delta}$ *besteht aus allen Substitutionen, die sich durch Combination der Substitutionen* (1) *und* (2) *ergeben.*“

§ 2.

Fortsetzung.

Durch die eine oder die andere der beiden in Abschn. I., Cap. I., § 4. auseinandergesetzten Methoden findet man nun:

Die Gruppe von $\sqrt[4]{\Delta}$ *ist eine Congruenzgruppe und zwar der* 4[ten] *Stufe.*

Sie besteht aus allen Substitutionen, die zu einer der folgenden 12 (*mod.* 4) *congruent sind:*

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Es ergiebt sich nämlich — um nur die Anwendungsweise der zweiten Untersuchungsmethode hier näher anzuführen —, dass durch Zusammensetzung der erzeugenden Substitutionen (1) und (2) mod. 4 nur die 12 soeben hingeschriebenen Substitutionen entstehen. —

Die den letzten acht Schematen congruenten Substitutionen lassen sich kurz als alle diejenigen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bezeichnen, bei denen

$$a + d \equiv -1 \pmod{4}$$

ist.

Die Gruppe der 12 (mod. 4) genommenen Substitutionen ist der Tetraedergruppe holoedrisch isomorph. —

Ganz analog ergiebt sich die Gruppe von $\sqrt[3]{\Delta}$ *als Gesammtheit aller derjenigen Transformationen, welche* (*mod.* 3) *einem der folgenden* 8 *Schemata congruent sind:*

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \mp 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mp 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

wo in jedem Schema immer alle oberen Zeichen oder alle unteren Zeichen zusammengehören.

Die den letzten 6 Schematen congruenten Substitutionen lassen sich wieder kurz als diejenigen Substitutionen charakterisiren, für welche

$$a + d \equiv 0 \pmod{3}$$

ist.

Nimmt man die für $\sqrt[4]{\Delta}$ und $\sqrt[3]{\Delta}$ erhaltenen Resultate zusammen, so folgt die Untergruppe von $\sqrt[12]{\Delta}$. *Insbesondere zeigt sich, dass die Untergruppe von* $\sqrt[12]{\Delta}$ *eine Congruenzgruppe der* 12. *Stufe ist.*

§ 3.

Bestimmung der 12ten Einheitswurzel, um welche sich $\sqrt[12]{\Delta}$ bei irgend einer Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ändert.

Nach Bestimmung der Gruppe von $\sqrt[12]{\Delta}$ hat es keine Schwierigkeit mehr, die Einheitswurzel $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, um welche sich $\sqrt[12]{\Delta}$ bei einer beliebigen Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ändert, in geschlossener Form anzugeben.

Ist zunächst $c \gtrless 0 \pmod{3}$, so kann man ξ so bestimmen, dass in der zusammengesetzten Transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \xi c & b + \xi d \\ c & d \end{pmatrix}$$

die Summe $a + \xi c + d \equiv 0 \pmod{3}$ wird. Es ist nämlich nur

$$\xi \equiv -c(a + d) \pmod{3}$$

zu setzen.

Dann gehört aber (§ 2.) die Transformation rechter Hand zur Untergruppe von $\sqrt[3]{\Delta}$, und es folgt somit:

Die dritten Einheitswurzeln, um welche sich $\sqrt[3]{\Delta}$ bei den Substitutionen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & c(a+d) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ändert, sind einander gleich.

Also:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^4 = e^{c(a+d)\cdot\frac{2i\pi}{3}},$$

wenn

$$c \gtrless 0 \ (\text{mod. } 3).$$

Für

$$c \equiv 0 \ (\text{mod. } 3)$$

ist gewiss

$$d \gtrless 0 \ (\text{mod. } 3),$$

da ja

$$ad - bc = 1.$$

Es ist folglich auf

$$\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

das soeben erhaltene Resultat anwendbar.

Somit ist:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^4 = e^{d(b-c)\frac{2i\pi}{3}} = e^{db\frac{2i\pi}{3}},$$

wenn

$$c \equiv 0 \ (\text{mod. } 3).$$

Stillschweigend ist hierbei von den Formeln (B) pag. 562 Gebrauch gemacht.

Diese beiden Resultate lassen sich nun so zusammenziehen:

In allen Fällen ist:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^4 = e^{[(a+d)\cdot c + db(1-c^2)]\frac{2i\pi}{3}}.$$

Aehnlich ergiebt sich:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^3 = e^{c(a+d+1)\frac{i\pi}{2}}, \qquad c \gtrless 0 \ (\text{mod. } 2),$$

$$= e^{\{d(b-c+1)-1\}\frac{i\pi}{c}}, \qquad c \equiv 0 \ (\text{mod. } 2),$$

also allgemein:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^3 = e^{[c(a+d+c^2)+(1-c^2)\{d(b-c+1)-1\}]\frac{i\pi}{2}}.$$

Nach einigen leichten Umformungen findet man nun:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = e^{\{(1-c^2)[db+3d(c-1)+c+3]+c(d+a-3)\}\frac{i\pi}{6}}$$

als diejenige 12^{te} *Einheitswurzel, mit der* $\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$ *multiplicirt wird, wenn man* ω_1, ω_2 *der linearen Transformation* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *unterwirft.**)

§ 4.

Transformationsproblem.

Eine Eigenthümlichkeit, die den einfachen transcendenten Functionen gemeinsam ist, besteht darin, dass die Function für Argumente, die in einfachem Zusammenhange stehen, Werthe annimmt, die durch eine algebraische Gleichung verknüpft sind.

Diese Bemerkung rechtfertigt die Frage:

Wie muss eine algebraische Gleichung

$$f(\omega, \omega') = 0$$

beschaffen sein, damit nur eine endliche Zahl von inäquivalenten Werthen ω' (*resp.* ω) *hervorgehe, wenn man für* ω (*resp.* ω') *alle einem beliebigen Werthe äquivalenten Werthe in* $f = 0$ *einträgt?***)

Offenbar nur für solche Gleichungen zwischen ω und ω' wird es zutreffen können, dass der Werth einer Modulfunction für ω mit dem für ω' in einem algebraischen Zusammenhange steht.

Nimmt man die Gleichung $f = 0$ in ω und ω' vom ersten Grade an, so zeigt sich, dass jede bilineare Relation zwischen ω und ω', die rationale Zahlen-Coefficienten hat, der gestellten Anforderung genügt.

Ist F eine Modulfunction, so wollen wir die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen $F(\omega)$ und $F(\omega')$, wo ω und ω' durch eine solche bilineare Gleichung verbunden sind, „*Transformationsproblem*"***) nennen. Man führt das Transformationsproblem leicht auf die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen $F(\omega)$ und $F\left(\frac{\omega}{n}\right)$†) zurück, wo n irgend eine positive ganze Zahl ist.

---

*) In expliciter Form scheint sich der für $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ gegebene Ausdruck in der Literatur nicht vorzufinden. Man erhält ihn aber sofort, wenn man den bei $\sqrt[8]{\Delta}$ vortretenden, aus der Theorie der Θ-Functionen bekannten Factor mit der dritten Einheitswurzel combinirt, welche bei der Transformation von $\sqrt[3]{\Delta}$ auftritt, und die sich durch die Modulfunction $\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}$ leicht bestimmt.

**) Es ist mir neuerdings gelungen, nachzuweisen, dass eine so beschaffene Gleichung *nothwendig bilinear* in ω und ω' ist.

***) Die Beziehung zwischen ω und ω' ist bekanntlich die bei der „Transformation" der elliptischen Functionen zwischen den Periodenverhältnissen stattfindende.

†) Diese Vereinfachung der Fragestellung bietet wesentliche Vortheile dar. Vgl. Mathem. Annalen Bd. XIV, p. 130, 161, Bd. XVII, p. 62 ff.

Ganz analoge Fragestellungen werden für die Modul*formen* stattfinden.

Hier wollen wir unter „Transformationsproblem" die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen den Werthen einer Modulform für ω_1, ω_2 und dem für ω_1', ω_2' verstehen, wenn

$$\omega_1' = \frac{\omega_1}{n},$$

$$\omega_2' = \omega_2$$

gesetzt wird, wo n wieder eine positive ganze Zahl bedeutet.

§ 5.

Fortsetzung. Anzahl der Repräsentanten.

Bei der Behandlung des Transformationsproblems der Modulformen wird es vor allem nöthig sein, die Frage zu erledigen:

Wie viele inäquivalente Zahlenpaare ω_1', ω_2' entstehen, wenn man ω_1, ω_2 durch alle möglichen äquivalenten Zahlenpaare $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, $\gamma\omega_1 + \delta\omega_2$ ersetzt?

Soll zunächst das Zahlenpaar $\frac{\omega_1}{n}$, ω_2, mit

$$\frac{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2}{n}, \quad \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 = \alpha \cdot \frac{\omega_1}{n} + \frac{\beta}{n} \cdot \omega_2, \quad n \cdot \gamma \cdot \frac{\omega_1}{n} + \delta \cdot \omega_2$$

äquivalent sein, so ist klar, dass hierfür

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}$$

nothwendige und hinreichende Bedingung ist.

Ersetzt man hier nun ω_1, ω_2 durch ein äquivalentes Zahlenpaar und bezeichnet mit $P^{(n)}$ das zu der Transformation

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gehörige Zahlenpaar:

$$\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n}, \quad c\omega_1 + d\omega_2,$$

so folgt:

Zwei Zahlenpaare $P^{(n)}$ und $Q^{(n)}$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn

$$P = S \cdot Q$$

ist, wo

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

eine Substitution der Untergruppe

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}$$

ist.

Und zwar geht dann das Zahlenpaar $P^{(n)}$ aus dem Zahlenpaare $Q^{(n)}$ durch die Transformation

$$S' = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{n} \\ n\gamma & \delta \end{pmatrix}$$

hervor. Dies wollen wir symbolisch durch

$$P^{(n)} = S'(Q^{(n)})$$

andeuten.

In Bezug auf die hier auftretende Untergruppe

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}$$

bemerkt man Folgendes:

Unter allen (mod. n) verschiedenen Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ giebt es, wie leicht zu sehen,

$$n \cdot \varphi(n) = n^2\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) \cdots$$

in denen $\beta \equiv 0$ (mod. n) ist.

Daher ist der Index unserer Untergruppe:

$$N = \frac{n^3\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \cdots}{n^2\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) \cdots} = n\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) \cdots .$$

Und nun folgt hieraus als Antwort auf die eingangs gestellte Frage:

Alle (bei festen, aber willkürlichen ω_1, ω_2) überhaupt möglichen Zahlenpaare $P^{(n)}$ vertheilen sich in

$$N = n\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) \cdots$$

Classen. Jede Classe enthält nur untereinander äquivalente Zahlenpaare; dagegen sind je zwei verschiedenen Classen angehörige Zahlenpaare zu einander inäquivalent."

Greift man aus jeder Classe ein beliebiges aber bestimmtes Zahlenpaar heraus, so hat man in diesen N Zahlenpaaren ein vollständiges System von „Repräsentanten", indem jedes Zahlenpaar $P^{(n)}$ mit einem und nur einem jener N äquivalent ist.

Bilden

$$T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, \ldots, T_N^{(n)}$$

ein solches System von Repräsentanten, so ist dieses offenbar auch dann noch der Fall, wenn jedes T_i durch $S_i T_i$ ersetzt wird, wo S_i eine willkürlich gewählte Substitution der Untergruppe $\beta \equiv 0$ (mod. n) ist.*)

---

*) Und zwar erhält man so *alle* Repräsentantensysteme aus einem bestimmten.

§ 6.

Die Gleichung, der die „transformirte" $\sqrt[12]{\Delta}$ genügt. (Multiplicatorgleichung erster Stufe.)

Man kann die Transformationen S_i, mit Hülfe deren man irgend ein System von Repräsentanten abändern kann, dazu verwenden, die Repräsentanten für bestimmte Absichten möglichst zweckmässig zu gestalten, z. B. so, dass die in sie eingehenden Zahlen bestimmten Congruenzen Genüge leisten.*)

Wir wollen sie hier speciell so wählen, dass alle Repräsentanten

$$\frac{A_i\omega_1 + B_i\omega_2}{n}, \quad C_i\omega_1 + D_i\omega_2$$

den Bedingungen

$$A_i,\ B_i,\ C_i,\ D_i \quad \text{resp.} \equiv 1,\ 0,\ 0,\ 1 \ (\text{mod. } 12)$$

genügen.

Dieses wird immer möglich sein, *so lange n relativ prim zu* 12 *ist, was wir von jetzt ab, sofern nicht das Gegentheil ausdrücklich festgesetzt wird, voraussetzen wollen.*

Nun können wir den für das folgende fundamentalen Satz aufstellen:

„*Die symmetrischen Functionen der N Grössen*

$$z_i = \sqrt[12]{\Delta}\left\{T_i^{(n)}\right\} = \sqrt[12]{\Delta}\left\{\frac{\alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2}{n}, \quad \gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2\right\},$$

wo die $T_i^{(n)}$ in der soeben angegebenen Weise gewählte Repräsentanten sind, ändern sich bei beliebigen Substitutionen von ω_1, ω_2 nur um 12*te Wurzeln der Einheit.*"

In der That sei P irgend eine homogene lineare Transformation. Dann gehen die im Satze erwähnten Grössen bei Anwendung dieser Substitution auf ω_1, ω_2 über in:

$$\sqrt[12]{\Delta}\left\{(T_i P)^{(n)}\right\}.$$

Es ist aber, da ja die T ein volles Repräsentantensystem bilden,

$$(1) \qquad T_i P = S_i \cdot T_j,$$

wo

$$S_i = \begin{pmatrix} a_i & nb_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$(2) \qquad (T_i P)^{(n)} = S_i'(T_j^{(n)}),$$

wo

$$S_i' = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ nc_i & d_i \end{pmatrix},$$

*) Das allgemeine Princip vergl. Annalen XVII, pag. 67.

z_i geht also über in z_j multiplicirt mit derjenigen Einheitswurzel, um die sich $\sqrt[12]{\Delta}$ bei Anwendung der Substitution S_i' ändert.

Nun folgt aus (1), da

$$T_i \equiv T_j \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (mod. 12)},$$
$$S_i \equiv P \text{ (mod. 12)}.$$

Also sind alle S_i und folglich auch alle S_i' mod. 12 congruent, bringen also (§ 3.) dieselbe Aenderung (12te Einheitswurzel), auf $\sqrt[12]{\Delta}$ angewandt, hervor. Daraus folgt sofort die Richtigkeit unseres Satzes.

Combiniren wir nun diesen mit den Sätzen pag. 555 (unten), indem wir berücksichtigen, dass die Grössen $z_i \cdot \omega_2$ im Ausgangsraum nirgends unendlich gross werden (was zur Evidenz aus den im folgenden Paragraphen zu gebenden Productentwicklungen der z_i hervorgeht), so haben wir den Satz gewonnen, auf den wir zustrebten:

„*Die Grösse* $\sqrt[12]{\Delta}\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)$ *ist für Zahlen* n, *welche zu* 12 *relativ prim sind, Wurzel einer Gleichung vom Grade*

$$N = n\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) \cdots,$$

deren Coefficienten bis auf einen Factor von der Gestalt $\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)^r$ *ganze rationale Functionen von* $g_2(\omega_1, \omega_2)$ *und* $g_3(\omega_1, \omega_2)$ *sind.*“

Diese Gleichung wollen wir Multiplicatorgleichung *erster Stufe* nennen, eine Benennung, die sich aus dem Umstande rechtfertigt, dass die Grösse $\dfrac{\sqrt[12]{\Delta}\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)}$ bei Transformation des durch $\sqrt[12]{\Delta}$ normirten elliptischen Integrals als „Multiplicator“ auftritt (Math. Annalen XIV, p. 144) und dass wir andererseits $\sqrt[12]{\Delta}$ als eine der Hauptgruppe (der Gruppe erster Stufe) „adjungirte“ Form bezeichnen dürfen. (Siehe pag. 555.)

§ 7.

Explicite Formeln für die Wurzeln der Multiplicatorgleichung.

Die Wurzeln unserer Gleichung waren:

$$z_i = \sqrt[12]{\Delta}\left\{\frac{\alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2}{n}, \ \gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2\right\}$$
$$= n \cdot \sqrt[12]{\Delta}\{(\alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2), \ n(\gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2)\},$$

wobei

$$\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (mod. 12)}$$

war, und sämmtliche $\frac{\alpha_i\omega_1+\beta_i\omega_2}{n}$, $\gamma_i\omega_1+\delta_i\omega_2$ ein volles System von Repräsentanten bildeten. Für die Darstellung dieser Wurzeln durch Potenzreihen oder zunächst durch unendliche Producte nach q müssen diese Repräsentanten nothwendig modificirt werden.

Nun zeigt man aber durch leichte arithmetische Betrachtungen:*)

Jedes Zahlenpaar

$$\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\quad n(\gamma\omega_1+\delta\omega_2)$$

ist einem einzigen Zahlenpaare

$$a\omega_1+b\omega_2,\quad d\omega_2$$

äquivalent, wobei

$$a\cdot d=n,\quad b<d,$$

und überdies a, b, d *nicht-negative ganze Zahlen ohne einen allen dreien gemeinsamen Theiler sind.*

Es ist nämlich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\alpha\omega_1+\beta\omega_2&=\alpha'(a\omega_1+b\omega_2)+\beta' d\omega_2;\\ n\gamma\omega_1+n\delta\omega_2&=\gamma'(a\omega_1+b\omega_2)+\delta' d\omega_2;\end{aligned}\quad \alpha'\delta'-\beta'\gamma'=1,$$

oder:

$$\text{(I)}\qquad \left\{\begin{aligned}\alpha&=\alpha' a; & \beta&=\alpha' b+\beta' d;\\ n\gamma&=\gamma' a; & n\delta&=\gamma' b+\delta' d;\end{aligned}\right.\quad \alpha'\delta'-\beta'\gamma'=1,$$

in folgender Weise lösbar:

Man nenne den grössten gemeinsamen Theiler von α und n (also auch von α und $n\cdot\gamma$) a. Dann wird

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha'\cdot a\\ n\gamma&=\gamma'\cdot a\end{aligned}\right\},$$

wo α' und γ' relativ prim zu einander sind. Man setze ferner

$$d=\frac{n}{a}$$

und löse die Gleichung

$$\alpha'\delta'-\beta'\gamma'=1$$

durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned}\delta'&=\delta_0+t\gamma'\\ \beta'&=\beta_0+t\alpha'\end{aligned}\right\},$$

indem man unter δ_0, β_0 irgend eine Lösung versteht. Schliesslich bestimme man die ganze Zahl t so, dass

*) Vgl. z. B. Dedekind, Crelle's Journal Bd. 88, p. 287 ff.

$$b = \delta_0 \cdot \beta - \beta_0 \cdot n\delta - t \cdot d$$

nicht negativ und $< d$ wird.

Dann sind alle Gleichungen (I) befriedigt, und also $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, $n(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2)$ äquivalent mit $a\omega_1 + b\omega_2$, $d\omega_2$.

Indem man sich nun überzeugt, dass zwei verschiedene Zahlenpaare

$$a\omega_1 + b\omega_2,\ d\omega_2; \quad a_1\omega_1 + b_1\omega_2,\ d_1\omega_2$$

die den angegebenen Bedingungen ($ad = a_1 d_1 = n$, $b < d$, $b_1 < d_1$ etc.) genügen, nie äquivalent sein können, so ist klar, dass jedes Zahlenpaar

$$\alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\quad n(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2)$$

einem und nur *einem* Zahlenpaare

$$a\omega_1 + b\omega_2,\quad d\omega_2$$

äquivalent ist.

Auch umgekehrt ist aber leicht zu sehen, dass zu jedem $a\omega_1 + b\omega_2$, $d\omega_2$ äquivalente Zahlenpaare $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, $n(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2)$ gefunden werden können, so dass also das Entsprechen zwischen den Repräsentanten $\alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2$, $n(\gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2)$ und den Zahlenpaaren $a\omega_1 + b\omega_2$, $d\omega_2$ eindeutig umkehrbar ist.*)

Es folgt nun aus $\begin{pmatrix}\alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (mod. 12) und aus dem Gleichungssystem (I), dass

$$\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}a & -nb \\ 0 & a\end{pmatrix} \pmod{12}$$

ist, wo $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$ diejenige Substitution ist, die

$$\alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2,\quad n(\gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2)$$

aus dem entsprechenden

$$a\omega_1 + b\omega_2,\quad d\omega_2$$

entstehen lässt.

Somit ist, da die Wurzel z_i oder vielmehr $\frac{1}{n} z_i$ aus

$$\sqrt[12]{\Delta}\left\{a\omega_1 + b\omega_2,\ d\omega_2\right\}$$

durch Anwendung der Transformation $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$ hervorgeht, nach der Formel pag. 566:

$$z_i = n \cdot e^{[-bd + 3(a-1)]\frac{i\pi}{6}} \sqrt[12]{\Delta}\left\{a\omega_1 + b\omega_2,\ d\omega_2\right\},$$

(wobei mehrfach von den selbstverständlichen Congruenzen

$$a^2 \equiv d^2 \equiv 1 \pmod{12}$$

Gebrauch gemacht ist).

*) Am leichtesten folgt dieses aus der pag. 580 bewiesenen Thatsache, dass die Anzahl der $a\omega_1 + b\omega_2$, $d\omega_2$ mit der der Repräsentanten übereinstimmt.

Durch Anwendung der Productenentwicklung von $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ pag. 552 kommt nun für die Wurzel der Multiplicatorgleichung folgende explicite Formel:

$$z_i(a, d, b) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)(-1)^{\frac{a-1}{2}} \varepsilon^{ab\left(\frac{1-d^2}{12}\right)} \cdot a \cdot q^{\frac{a}{6d}} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \varepsilon^{\nu a b} q^{\frac{a}{d} \cdot 2\nu}\right)^2,$$

wobei

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}, \quad q = e^{i\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}}$$

ist.

§ 8.

Durch 2 oder 3 theilbare Transformationsgrade.

Ist n (der „Transformationsgrad") nicht mehr relativ prim zu 12, so werden die Betrachtungen, die zur Existenz der Multiplicatorgleichung führten, hinfällig. Indessen lassen sich leicht analoge Untersuchungen durchführen, und ich will hier kurz die dabei entstehenden Resultate angeben.

1) Ist $n = 2^\mu \cdot m$, $\mu > 0$ und m relativ prim zu 6, so gelingt es nicht mehr die Repräsentanten $T^{(n)}$ so zu wählen, dass die symmetrischen Functionen der für sie gebildeten $\sqrt[12]{\Delta}$ bei beliebigen linearen Transformationen sich nur mit 12^{ten} Einheitswurzeln multipliciren. Dieses ist jedoch noch zu erreichen, wenn wir statt $\sqrt[12]{\Delta}$ die $\sqrt[3]{\Delta}$ in Betracht ziehen. Denn wir können, da n nicht durch 3 theilbar ist, die Repräsentanten so annehmen, dass ihre Zahlen

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ resp.} \equiv 1, 0, 0, 1 \pmod{3}$$

werden, und dann gelten für $\sqrt[3]{\Delta}$ noch dieselben Schlüsse wie oben für $\sqrt[12]{\Delta}$. Es folgt:

Der Ausdruck

$$\sqrt[3]{\Delta}\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right), \quad \textit{wo } n = 2^\mu \cdot m, \quad m \textit{ relativ prim zu } 6,$$

genügt einer Gleichung vom Grade

$$n\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) \cdots,$$

deren Coefficienten bis auf einen Factor von der Form $(\sqrt[3]{\Delta})^r$ ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Ihre Wurzeln sind:

$$z(a, d, b) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 a^4 \cdot \varepsilon^{ab\left(\frac{1-d^2}{3}\right)} q^{\frac{2a}{3d}} \prod\left(1 - \varepsilon^{\nu a b} q^{\frac{a}{d} \cdot 2\nu}\right)^8,$$

wo a, d, b alle nicht-negative Zahlen zu durchlaufen haben, so dass für jedes Tripel a, d, b

$$a \cdot d = n, \quad b < d$$

ist, und a, d, b keinen allen dreien gemeinsamen Theiler besitzen.

2) Ganz analog verhält sich die Sache, wenn

$$n = 3^\nu \cdot m, \quad m \text{ relativ prim zu } 6,$$

ist.

Dann ergiebt sich:

Der Ausdruck $\sqrt[4]{\Delta}\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)$, *wo* $n = 3^\nu \cdot m$, m *relativ prim zu* 6, *genügt einer Gleichung vom Grade* $n\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\cdots$, *deren Coefficienten bis auf einen Factor der Gestalt* $(\sqrt[4]{\Delta})^r$ *ganze rationale Functionen von* g_2 *und* g_3 *sind.*

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$z(a, d, b) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 \cdot a^3 \cdot \varepsilon^{ab\cdot\left(\frac{1-d^2}{4}\right)} q^{\frac{a}{4d}} \prod \left(1 - \varepsilon^{\nu ab} q^{\frac{a}{d}2\nu}\right)^6.$$

3) Ist schliesslich n durch 6 theilbar, so genügt erst Δ selbst einer Gleichung $n\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\cdots$ ten Grades, deren Coefficienten dann rationale ganze Functionen von g_2 und g_3 sind.

II. Capitel.

Eigenschaften der Multiplicatorgleichung erster Stufe.

§ 1.

Gruppe der Multiplicatorgleichung.

"Die Monodromiegruppe der Multiplicatorgleichung besteht aus allen Permutationen ihrer Wurzeln, welche entstehen, wenn man auf ω_1 *und* ω_2 *die sämmtlichen Substitutionen eines vollen Systems mod.* n *verschiedener und mod.* 12 *der Identität congruenter Substitutionen anwendet.*

Dabei sind zwei Substitutionen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

mod. n *als congruent zu betrachten, wenn*

$$a : b : c : d = a' : b' : c' : d' \pmod{n},$$

so dass die genannte Gruppe also der Monodromiegruppe der Modulargleichung holoedrisch isomorph ist."

Dass eine rationale Function der Wurzeln $z_i = \sqrt[12]{\Delta}\,\{T_i^{(n)}\}$, welche als rationale Function von $\sqrt[12]{\Delta}$, g_2, g_3 darstellbar ist, die in Rede stehenden Permutationen zulässt, ist evident. Es handelt sich darum, zu zeigen, dass 1) alle diese Permutationen verschieden sind und dass 2) jede rationale Function der Wurzeln z_i, welche die Permutationen zulässt, als rationale Function von $\sqrt[12]{\Delta}$, g_2, g_3 dargestellt werden kann. Hierbei dürfen wir uns offenbar auf homogene ganze Functionen der z_i beschränken.

1) Eine beliebige homogene Substitution auf ω_1 und ω_2 angewandt wird die Wurzel z_i in eine Wurzel z_k verwandeln, letztere multiplicirt mit einer gewissen nur von der Substitution abhängenden 12ten Einheitswurzel (p. 569 und 570). Indem wir von dieser 12ten Einheitswurzel vorläufig absehen, wollen wir sagen, jene Substitution bewirke eine gewisse Permutation der Wurzeln, indem z_i in z_k übergeführt wird.

Nun haben wir folgenden Satz:

„*Zwei Substitutionen P und P' bewirken dann und nur dann dieselben Permutationen der Wurzeln z_i, wenn P und P' in dem eingangs präcisirten Sinne mod. n congruent sind.*“

In der That, sollen P' und P dieselbe Permutation bewirken, so muss (p. 567)

$$T_i P = S_i T_i P'$$

sein, wo S_i eine Substitution der Untergruppe

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}$$

ist, und T_i irgend einen der schon früher so bezeichneten Repräsentanten bedeutet. Somit folgt:

$$S_i = T_i P P'^{-1} T_i^{-1}.$$

Setzt man jetzt $PP'^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ergiebt sich, indem man T_i die Repräsentanten

$$\omega_1 + 12\alpha\omega_2, \quad \omega_2, \qquad \alpha = 0, 1, 2, \cdots n-1$$

durchlaufen lässt, dass nothwendig

$$a \equiv d \equiv k \quad \text{und} \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod{n}$$

sein muss, wo $k^2 \equiv 1 \pmod{n}$ ist.

Man hat also

$$PP'^{-1} \equiv \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \pmod{n}$$

und folglich in dem angegebenen Sinne

$$P \equiv P' \pmod{n}.$$

Dass diese Congruenz auch hinreichend ist, damit P und P' dieselbe Permutation bewirken, ist leicht zu verificiren.

2) Lässt nun eine homogene Function der Wurzeln z_i alle die ω-Substitutionen S zu, welche mod. 12 der Identität congruent sind, mod. n aber ein vollständiges System incongruenter Substitutionen bilden,

so ist klar, dass sich diese Function bei beliebigen ω-Substitutionen nur um eine 12^te Einheitswurzel, die als Factor hinzutritt, ändern kann. Denn jede beliebige ω-Substitution T bewirkt ja dieselbe Permutation der Wurzeln z_i, wie diejenige unter den Substitutionen S, die ihr mod. n congruent ist, nur dass noch zu jeder Wurzel ein und dieselbe 12^te Einheitswurzel hinzutritt.

Somit ist die Function der Wurzeln z_i nach den Entwicklungen in § 6. des 2. Cap. des ersten Abschnitts eine ganze Function von g_2 und g_3 multiplicirt in eine positive Potenz von $\sqrt[12]{\Delta}$. Der eingangs aufgestellte Satz ist hiermit vollständig erwiesen. Ueberdies haben wir offenbar gleichzeitig den Satz gewonnen:

„Jede rational bekannte, in den Wurzeln z_i ganze rationale und homogene Function ist bis auf einen Factor $(\sqrt[12]{\Delta})^r$ eine ganze rationale Function von g_2 und g_3."

§ 2.

Nähere Angaben über die Coefficienten der Multiplicatorgleichung.

Zur wirklichen numerischen Berechnung der Multiplicatorgleichung kann man zwei Methoden verwenden.

Entweder man berechnet, wie Herr Kiepert*), die symmetrischen Functionen der Wurzeln, indem man sie gleichsetzt $(\sqrt[12]{\Delta})^r$ multiplicirt in eine ganze Function von g_2 und g_3 mit unbestimmten Coefficienten und sodann r und die unbestimmten Coefficienten vermöge der Reihenentwicklungen nach q bestimmt.

Oder man schreibt die Gleichung mit unbestimmten Coefficienten hin, setzt für g_2, g_3, $\sqrt[12]{\Delta}$ ihre Entwicklungen nach q ein und für die Unbekannte die Entwicklung einer speciellen Wurzel, etwa:

$$z(n, 1, 0) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n\, q^{\frac{n}{6}} \prod (1 - q^{n \cdot 2\nu})^2,$$

worauf sich wiederum die Zahlencoefficienten durch Nullsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von q ergeben.

Während die erste Methode zur praktischen Berechnung der Gleichungen den Vorzug verdient, erlaubt die letztere zunächst den Schluss:

Die Multiplicatorgleichung enthält nur rationale Zahlencoefficienten. **)

Denn alle in Betracht kommenden Reihenentwicklungen haben rationale Zahlencoefficienten.

*) l. c. p. 209.

**) Ob diese Coefficienten in allen Fällen (wie Annalen Bd. XV, pag. 87 behauptet wird) *ganze* Zahlen sind, konnte ich bislang nicht entscheiden.

Sei nun

$$z^N + A_1 z^{N-1} + \cdots + A_i \cdot z^{N-i} + \cdots A_N = 0$$

unsere Gleichung, wobei

$$N = n\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) \cdots .$$

Es sei

$$A_i = (\sqrt[12]{\Delta})^{r_i} G_{k_i}(g_2, g_3),$$

wo $G_{k_i}(g_2, g_3)$ eine ganze rationale Function von g_2 und g_3 bedeutet, die als Function von ω_1, ω_2 homogen vom $-k_i^{\text{ten}}$ Grade ist.

Da $\sqrt[12]{\Delta}\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)$, sowie $\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$, in Bezug auf ω_1, ω_2 von der Dimension -1 ist, so folgt, indem alle Glieder der Gleichung dieselbe Dimension haben müssen:

(1) $$r_i + k_i = i.$$

Wir wollen nun in unsere Gleichung für die Unbekannte z die Wurzel $z(n, 1, 0)$ eingetragen denken. Schreibt man dann

$$\omega_1 + \omega_2 \text{ statt } \omega_1, \quad \text{und} \quad \omega_2 \text{ statt } \omega_2,$$

so geht dabei über:

$$\begin{array}{lll} z(n, 1, 0) & \text{in} & e^{\frac{n i \pi}{6}} \cdot z(n, 1, 0), \\ \sqrt[12]{\Delta} & \text{in} & e^{\frac{i\pi}{6}} \sqrt[12]{\Delta}, \\ g_2 & \text{in} & g_2, \\ g_3 & \text{in} & g_3. \end{array}$$

Da die Gleichung nach wie vor richtig bleiben muss, so müssen die bei den einzelnen Gliedern vortretenden 12^{ten} Einheitswurzeln untereinander gleich sein; also haben wir:

$$r_i + (N - i) \cdot n \equiv N \cdot n \pmod{12},$$

oder

(2) $$r_i \equiv i \cdot n \pmod{12}.$$

Ausserdem kann

(3) $$r_i < 12$$

vorausgesetzt werden, da anderen Falls die ganze Potenz von Δ, welche hinzutritt, wegen

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2,$$

zur ganzen Function $G_{k_i}(g_2, g_3)$ genommen werden kann.

Aus (1) und (2) folgt noch:

(4) $$k_i \equiv i(1 - n) \pmod{12}.$$

Da r_i wegen (1) nie grösser als i werden kann, so schliessen wir:

Ist der kleinste positive Rest von $i \cdot n$ (mod. 12) grösser als i, so ist der Coefficient von

$$g^{N-i}$$

in der Multiplicatorgleichung identisch Null.

Ist $C \cdot g_2^\alpha \cdot g_3^\beta$ irgend ein Glied einer ganzen Function von g_2 und g_3, die als Function von ω_1, ω_2 die Dimension $-k$ hat, so ist offenbar

$$4\alpha + 6\beta = k.$$

Diese Gleichung kann für einen durch 4 theilbaren Werth von k nur für gerade Werthe von β, und für ein durch 3 theilbares k nur für durch 3 theilbare Werthe von α befriedigt werden.

Diese Bemerkung in Verbindung mit der Congruenz (4) begründet den Satz:

„*Ist* $n \equiv 1$ (*mod.* 12), *so treten in den Coefficienten unserer Gleichung* g_2 *und* g_3 *nur in solchen Potenzen auf, deren Exponenten durch* 3 *resp.* 2 *theilbar sind; für* $n \equiv 5$ (*mod.* 12) *tritt* g_3 *nur in geraden Potenzen, für* $n \equiv 7$ (*mod.* 12) *tritt* g_2 *nur in Potenzen mit durch* 3 *theilbaren Exponenten auf.*“

Oder anders ausgedrückt:

„*Der Quotient* $\dfrac{\sqrt[12]{\Delta\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}}{\sqrt[12]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}$ *genügt einer Gleichung* N^{ten} *Grades. Die Coefficienten dieser Gleichung sind rationale ganze Functionen von* J *für* $n \equiv 1$ (*mod.* 12), *von* $\sqrt[3]{J}$ *für* $n \equiv 5$ (*mod.* 12), *von* $\sqrt{J-1}$ *für* $n \equiv 7$ (*mod.* 12), *und schliesslich von* $\sqrt[3]{J}$ *und* $\sqrt{J-1}$ *für* $n \equiv 11$ (*mod.* 12).*)

Auch für nur durch eine Potenz von 2 (nicht aber durch 3) oder nur durch eine Potenz von 3 (nicht aber durch 2) theilbare Transformationsgrade finden solche Sätze über die Gestalt der Coefficienten statt.

Für $n = 2^\mu \cdot m$ (m relativ prim zu 6) enthält die betr. Gleichung nur J oder auch $\sqrt[3]{J}$, je nachdem $n \equiv +1$ oder -1 (mod. 3) ist, und für $n = 3^\nu \cdot m$ (m relativ prim zu 6) tritt nur J oder auch $\sqrt{J-1}$ auf, je nachdem $n \equiv +1$ oder -1 (mod. 4) ist.

(Vgl. wegen dieses Paragraphen Math. Annalen XV, p. 87 und die mehrfach citirte Arbeit von Kiepert.)

---

*) Dass die $\sqrt[3]{J}$ und $\sqrt{J-1}$ für $n \gtrless 1$ (mod. 12) *nicht* in solchen Potenzen überall auftreten, dass die Coefficienten rational in J werden, folgt aus dem Verhalten von $\dfrac{\sqrt[12]{\Delta\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}}{\sqrt[12]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}$, wenn man statt ω_1, $\omega_1 + n\omega_2$ setzt.

§ 3.

Das letzte Glied der Multiplicatorgleichung.

Bilden wir das letzte Glied unserer Gleichung (für beliebigen zu 12 primen Transformationsgrad), also das Product P aller Wurzeln, so kommt:

$$P = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^N \cdot (-1)^{\Sigma \frac{a-1}{2} \cdot \frac{d \cdot \varphi(e)}{e}} \cdot \varepsilon^{\Sigma\left(a \cdot \left(\frac{1-d^2}{12}\right) \Sigma b\right)} \cdot \prod a^{\frac{d \cdot \varphi(e)}{e}}$$
$$\cdot\, q^{\Sigma \frac{a}{6d} \cdot \frac{d\varphi(e)}{e}} \prod_{(a,\, b,\, d)} \prod \left(1 - \varepsilon^{\nu a b}\, q^{\frac{a}{d} \cdot 2\nu}\right)^2.$$

Hier bedeutet e den grössten gemeinsamen Theiler von a und d.

Zum Verständniss dieser Formel bemerke man, dass für einen stehenden Werth des Theilers a von n, $d = \frac{n}{a}$ bestimmt ist, und b alle $\frac{d \cdot \varphi(e)}{e}$ Zahlen zu durchlaufen hat, die nicht negativ, $< d$ und relativ prim zum grössten gemeinsamen Theiler e von a und d sind.

Um die auftretenden zahlentheoretischen Functionen auszuwerthen, benutzen wir den häufig angewandten Kunstgriff, für dieselben Functionalgleichungen aufzustellen.

Es ist immer, wenn

$$\sum a^\lambda \cdot \frac{(\varphi(e))^\mu}{e^\nu} = \psi(n)$$

gesetzt wird, wo λ, μ, ν beliebige Grössen sind und die Summation über alle Theiler a von n erstreckt wird,

$$\psi(n) \cdot \psi(n_1) = \psi(n \cdot n_1),$$

sofern n und n_1 theilerfremd sind.

Vermöge dieser Eigenschaft von $\psi(n)$ kann man diese Function offenbar sofort aus den Primfactoren von n zusammensetzen. Wir wollen dies indess nur für $\mu = \nu$ ausführen; wir setzen also

$$\psi(n) = \sum a^\lambda \cdot \left(\frac{\varphi(e)}{e}\right)^\mu.$$

Für eine Primzahlpotenz p^k sind die Theiler:

$$1,\ p,\ p^2,\ \cdots,\ p^k,$$

und die zugehörigen Werthe von $\frac{\varphi(e)}{e}$ für den ersten und letzten Theiler 1, für alle übrigen

$$1 - \frac{1}{p}.$$

Daher wird

$$\psi(p^k) = 1 + p^{k \cdot \lambda} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\mu \cdot \frac{p^{\lambda k} - p^\lambda}{p^\lambda - 1},$$

womit auch, wenn

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots$$

ist,

$$\psi(n) = \psi(p_1^{k_1})\,\psi(p_2^{k_2}) \cdots$$

gefunden ist.

Für $\mu = \lambda = 1$ kommt

$$(1) \qquad \sum a \cdot \frac{\varphi(e)}{e} = n\left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2}\right) \cdots = N^{*}),$$

für $\lambda = 0$, $\mu = 1$:

$$\sum \frac{\varphi(e)}{e} = \prod_i \left(2 + (k_i - 1)\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right).$$

Der Exponent von (-1) in P wird daher:

$$\frac{1}{2}\left\{n \cdot \sum \frac{\varphi(e)}{e} - \sum \frac{d \cdot \varphi(e)}{e}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\, p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} \cdots \left\{\prod (2p_i + (p_i - 1)(k_i - 1)) - \prod (p_i + 1)\right\}$$

$$\equiv \frac{1}{2} \prod (p_i - 1)\, k_i \equiv \frac{1}{2} \prod (p_i^{k_i} - 1) \pmod{2}.$$

Da für einen stehenden Werth von a Σb stets durch d theilbar ist, so ist die in P eingehende n^{te} Einheitswurzel gleich 1.

Aus (1) folgt nun, dass $q^{\frac{N}{6}}$ als Factor in P auftritt. Somit kommt:

$$P = (-1)^{\frac{1}{2}\prod\left(p_i^{k_i} - 1\right)} \cdot \prod a^{\frac{d \cdot \varphi(e)}{e}} \left(\sqrt[12]{\Delta}\right)^N.$$

Es bleibt nur noch übrig, den Zahlenfactor

$$\prod a^{\frac{d \cdot \varphi(e)}{e}} = \prod a^{\frac{n \cdot \varphi(e)}{a \cdot e}} = \chi(n)$$

auszuwerthen.

Sind n und n_1 relativ prim, so ist

$$\chi(n \cdot n_1) = \prod (a \cdot a_1)^{\frac{n \cdot n_1}{a \cdot a_1} \cdot \frac{\varphi(e) \cdot \varphi(e_1)}{e \cdot e_1}},$$

wo sich das Product über alle Theiler a und a_1 von resp. n und n_1 zu erstrecken hat.

Wir spalten jeden einzelnen Factor dieses Productes in zwei Theile:

$$\left(a^{\frac{n}{a} \cdot \frac{\varphi(e)}{e}}\right)^{\frac{n_1}{a_1} \cdot \frac{\varphi(e_1)}{e_1}} \cdot \left(a_1^{\frac{n_1}{a_1} \cdot \frac{\varphi(e_1)}{e_1}}\right)^{\frac{n}{a} \cdot \frac{\varphi(e)}{e}}$$

*) Dedekind, l. c. pag. 288.

und führen die Multiplication bei dem ersten Theile zunächst nach a_1, dann nach a aus, während beim zweiten Theile gerade die umgekehrte Reihenfolge der Multiplication befolgt werden soll.

Dann ergiebt sich mit Benutzung der Formel (1):

$$\chi(n \cdot n_1) = \chi(n)^{N_1} \cdot \chi(n_1)^N,$$

oder

$$\chi(n \cdot n_1)^{\frac{1}{N \cdot N_1}} = \chi(n)^{\frac{1}{N}} \cdot \chi(n_1)^{\frac{1}{N_1}},$$

und folglich

$$\chi(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_\nu)^{\frac{1}{N_1 N_2 \ldots N_\nu}} = \chi(n_1)^{\frac{1}{N_1}} \cdot \chi(n_2)^{\frac{1}{N_2}} \cdots \chi(n_\nu)^{\frac{1}{N_\nu}},$$

wenn $n_1, n_2 \cdots n_\nu$ zu einander relativ prim sind.

Für eine Primzahlpotenz findet man nun:

$$\chi(p^k) = p^{\frac{p^k - 1}{p - 1}},$$

also für ein beliebiges n

$$\chi(n)^{\frac{1}{N}} = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\frac{p_i^{k_i} - 1}{p_i - 1} \cdot \frac{1}{p_i^{k_i - 1}(p_i + 1)}},$$

wenn

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}.$$

Wir erhalten somit schliesslich für das letzte Glied der Multiplicatorgleichung den folgenden Werth:

$$P = (-1)^{\frac{1}{2}\Pi\left(p_i^{k_i} - 1\right)} \left(\prod p_i^{\frac{p_i^{k_i} - 1}{(p_i^2 - 1) p_i^{k_i - 1}}} \right)^N \cdot (\sqrt[12]{\Delta})^N.$$

§ 4.

Verhalten der Multiplicatorgleichung für $g_2 = 0$ und für $g_3 = 0$.

Schon pag. 578 haben wir die Gleichung für $\sqrt[12]{\Delta}\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)$ dadurch in eine nur Functionen von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ enthaltende umgewandelt, dass wir dieselbe durch $(\sqrt[12]{\Delta})^N$ dividirten und also als Unbekannte die Grösse

$$M(\omega) = \frac{\sqrt[12]{\Delta}\left(\frac{\omega}{n}, 1\right)}{\sqrt[12]{\Delta}(\omega, 1)} \text{ *)}$$

---

*) $M(\omega)$ ist die Grösse, welche als „Multiplicator" zu bezeichnen ist. Nichtsdestoweniger wollen wir unter „Multiplicatorgleichung" auch weiterhin immer die Gleichung für $\sqrt[12]{\Delta}\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)$ verstehen.

einführten. Die Coefficienten der Gleichung für $M(\omega)$ waren dann rationale ganze Functionen von resp. J, $\sqrt[3]{J}$, $\sqrt{J-1}$ oder $\sqrt[3]{J}$ und $\sqrt{J-1}$, je nachdem

$$n \equiv 1,\ 5,\ 7,\ 11 \pmod{12}$$

war. Wir benutzen jetzt diese Gleichung für M um die Multiplicatorgleichung für den Fall zu studiren, dass wir in derselben $g_2 = 0$ (wobei $J = 0$ wird) resp. $g_3 = 0$ (wobei $J = 1$ wird) eintragen. Um aber die Gleichungen zu erhalten, welche entstehen, wenn wir in der Gleichung für M $J = 0$ oder $J = 1$ setzen, können wir in derselben, aufgefasst als Gleichung für ω, dem ω die Werthe ϱ resp. i ertheilen.

Die Untersuchung der Wurzeln dieser speciellen Gleichungen wird daher durch die Untersuchung der Repräsentantenwerthe

$$\frac{a\varrho + b}{d} \quad \text{und} \quad \frac{ai+b}{d}\ ^{*)}$$

resp. zu erledigen sein.

Zunächst können wir sagen:

„*Die Repräsentantenwerthe* $\frac{a\varrho+b}{d}$ *resp.* $\frac{ai+b}{d}$ *werden sich theils zu je* 3 *resp. zu je* 2 *untereinander äquivalenten zusammenschaaren, theils vereinzelt ohne äquivalente vorhanden sein.*“

Dieses ist ein unmittelbarer Ausfluss des auf p. 553 angegebenen Verzweigungssatzes $\left(\text{letzterer angewandt auf } J\left(\frac{\omega}{n}\right) \text{ als Function von } J(\omega)\right)$.

Betrachten wir nun zunächst behufs näherer Durchführung die Repräsentantenwerthe

$$\frac{ai+b}{d}.$$

Es ist

$$\frac{ai+b}{d} = \frac{b\cdot i - a}{d\cdot i}.$$

Und nun ist die Zahl $\frac{b\omega - a}{d\omega}$ mit einem Repräsentanten $\frac{a_1\omega + b_1}{d_1}$ äquivalent, so dass die beiden Repräsentantenwerthe

$$\frac{ai+b}{d} \quad \text{und} \quad \frac{a_1 i + b_1}{d_1}$$

äquivalent werden.

---

*) Dieses (dass wir nämlich auf die *nicht* homogenen Repräsentanten geführt werden) ist der Grund, weshalb wir an Stelle der Multiplicatorgleichung einen Augenblick die Gleichung für M untersuchen.

Des Näheren wird nämlich

$$\begin{pmatrix} b, & -a \\ d, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix},$$

wenn

$$\left.\begin{array}{l} b = \alpha a_1 \\ d = \gamma a_1 \end{array}\right\}; \quad d_1 = \frac{n}{a_1}$$

gesetzt wird, indem man mit a_1 den grössten gemeinsamen Theiler von b und d bezeichnet; wenn ferner die Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

durch die Formeln

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \beta_0 + t\alpha \\ \delta = \delta_0 + t\gamma \end{array}\right\}$$

gelöst wird, wo β_0, δ_0 irgend ein Lösungspaar bezeichnen, und wenn man schliesslich die ganze Zahl t so bestimmt, dass

$$b_1 = -a\delta_0 - td_1$$

nicht negativ und $< d_1$ wird.

Es fragt sich nun: Wann können zwei so zusammengehörige Repräsentanten

$$(a, b, d) \quad \text{und} \quad (a_1, b_1, d_1)$$

zusammenfallen?

Dazu ist erforderlich, dass der grösste gemeinsame Theiler a_1 von b und d dem a gleich wird. Somit muss $a = 1$ und b relativ prim zu $d = n$ sein. Es kommen daher nur noch die Werthe

$$\frac{i + b}{n},$$

in Betracht. Die zu $\frac{i+b}{n}$ gehörige Zahl $\frac{a_1 i + b_1}{d_1}$ ist nun nach Obigem

$$= \frac{i + b_1}{n},$$

wo b_1 der kleinste positive Rest von

$$-\delta_0 \ (\text{mod.}\ n)$$

ist, und es ist

$$b\delta_0 \equiv 1 \ \ (\text{mod.}\ n).$$

Soll also auch b mit b_1 übereinstimmen, so muss

$$b^2 + 1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ n)$$

sein. Und umgekehrt, ist diese Congruenz erfüllt, so fällt der Repräsentant $(1, b, n)$ mit seinem entsprechenden $(1, b_1, n)$ zusammen.

Für unsere Gleichung ergiebt sich demnach:

Die Wurzeln M ordnen sich für $J = 1$ in Paare, wie

$$M = n \cdot e^{[-d.b+3(a-1)]\frac{i\pi}{6}} \cdot \frac{\sqrt[12]{\Delta(ai+b,d)}}{\sqrt[12]{\Delta(i,1)}}$$

und

$$M' = n \cdot e^{[-d_1 b_1+3(a_1-1)]\frac{i\pi}{6}} \cdot \frac{\sqrt[12]{\Delta(a_1 i+b_1,d_1)}}{\sqrt[12]{\Delta(i,1)}},$$

welche sich nur um eine 12^{te} *Einheitswurzel unterscheiden können. Eine Ausnahme bilden nur diejenigen Wurzeln, welche den Repräsentantenwerthen* $\frac{i+b}{n}$ *entsprechen, wo b der Congruenz*

$$b^2 + 1 = 0 \;(\text{mod. } n)$$

genügt. Sie bleiben isolirt.

Die 12^{te} Einheitswurzel, um welche sich die eben genannten M und M' unterscheiden, findet man vermöge der Gleichungen pag. 583 oben aus der Formel pag. 566. Es ergiebt sich nach leichten Reductionen:

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} M'.$$

Ganz analog verhält es sich mit den Repräsentantenwerthen

$$\frac{a\varrho+b}{d}.$$

Diese ordnen sich, den Gleichungen

$$\frac{a\varrho+b}{d} = \frac{(b-a)\varrho-a}{d\cdot\varrho} = \frac{b\cdot\varrho+(b-a)}{d\cdot\varrho+d}$$

entsprechend, zu je drei einander äquivalenten an

$$\frac{a\varrho+b}{d}, \quad \frac{a_1\varrho+b_1}{d_1}, \quad \frac{a_2\varrho+b_2}{d_2},$$

indem die Zahlen

(A) $$\frac{(b-a)\omega-a}{d\cdot\omega} \quad \text{und} \quad \frac{b\omega+(b-a)}{d\cdot\omega+d}$$

sich 2 Repräsentanten

(B) $$\frac{a_1\omega+b_1}{d_1} \quad \text{resp.} \quad \frac{a_2\omega+b_2}{d_2}$$

äquivalent erweisen.

Die linearen Transformationen, durch welche aus den beiden Repräsentanten (A) die resp. entsprechenden Zahlen (B) hervorgehen, werden wiederum vermöge eines Verfahrens gefunden, das demjenigen analog ist, welches soeben für die Repräsentanten $\frac{ai+b}{d}$ angegeben wurde. Die einzigen Repräsentantenwerthe, die mit einem ihrer beiden entsprechenden zusammenfallen können, sind die Zahlen

$$\frac{\varrho + b}{n},$$

wo b der Congruenz

$$b^2 + b + 1 \equiv 0 \text{ (mod. } n)$$

genügt. Und zwar zeigt sich, dass mit jedem solchen $\frac{\varrho + b}{n}$ *beide* entsprechenden Repräsentantenwerthe zusammenfallen.

Es folgt also:

Die Wurzel M der aus unserer Gleichung durch die Substitution $J = 0$ entstehenden Gleichung schaaren sich im Allgemeinen zu dreien, wie die folgenden, zusammen:

$$M = n \cdot e^{[-d\,b + 3(a-1)]\frac{i\pi}{6}} \frac{\sqrt[12]{\Delta(a\varrho + b, d)}}{\sqrt[12]{\Delta(\varrho, 1)}},$$

$$M' = n \cdot e^{[-d_1 b_1 + 3(a_1-1)]\frac{i\pi}{6}} \frac{\sqrt[12]{\Delta(a_1\varrho + b_1, d_1)}}{\sqrt[12]{\Delta(\varrho, 1)}},$$

$$M'' = n \cdot e^{[-d_2 b_2 + 3(a_2-1)]\frac{i\pi}{6}} \frac{\sqrt[12]{\Delta(a_2\varrho + b_2, d_2)}}{\sqrt[12]{\Delta(\varrho, 1)}},$$

die sich nur um 12^{te} Einheitswurzeln unterscheiden können. Eine Ausnahme bilden nur die Wurzeln, welche den Zahlen $\frac{\varrho + b}{n}$ entsprechen, wo

$$b^2 + b + 1 \equiv 0 \text{ (mod. } n)$$

ist. Sie bleiben isolirt.

Die betr. 12^{ten} Einheitswurzeln berechnen sich nach pag. 566, und es kommt nach einigen Reductionen

$$M = e^{2\left(\frac{n-1}{2}\right)\frac{i\pi}{3}} M' = e^{4\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\frac{i\pi}{3}} M''.$$

Auf Grund dieser Entwicklungen können wir nunmehr die Sätze aussprechen:

Wenn $n \equiv 1$ oder $\equiv 5$ (mod. 12) ist, verwandelt sich die linke Seite der Multiplicatorgleichung für $g_3 = 0$, nach Abtrennung eines Factors vom Grade ν, in ein vollständiges Quadrat. — ν ist dabei die Zahl der Lösungen der Congruenz

$$b^2 + 1 \equiv 0 \text{ (mod. } n).$$

Wenn $n \equiv 1$, oder $\equiv 7$ (mod. 12) ist, verwandelt sich die linke Seite unserer Gleichung für $g_2 = 0$, nach Abtrennung eines Factors vom

Grade μ, in einen vollständigen Cubus. — μ ist dabei die Zahl der Lösungen der Congruenz:

$$b^2 + b + 1 \equiv 0 \; (mod.\; n).^{*)}$$

Ist $n \equiv 11$ oder $\equiv 5$ (mod. 12), so enthält unsere Gleichung für $g_2 = 0$ nur durch 3 theilbare Potenzen, für $n \equiv 11$ oder $\equiv 7$ (mod. 12) und $g_3 = 0$ nur durch 2 theilbare Potenzen der Unbekannten.

Das in diesem letzten Satze ausgesprochene Resultat ist aber darum trivial, weil es schon aus der Betrachtung der Dimension der einzelnen Glieder der Gleichung hervorgeht.

§ 5.

Bestimmung der μ resp. ν sich abtrennenden Wurzeln.

Es ist bemerkenswerth, dass man den Werth der μ resp. ν sich abtrennenden Wurzeln der im vorigen Paragraphen behandelten Gleichungen leicht angeben kann.

Sei

$$M = n \cdot e^{-nb\frac{i\pi}{6}} \cdot \frac{\sqrt[12]{\Delta(i+b,\, n)}}{\sqrt[12]{\Delta(i,\, 1)}}$$

eine solche Wurzel (für $g_3 = 0$).

Dann genügt b der Congruenz:

$$b^2 + 1 \equiv 0 \; (\text{mod. } n).$$

Nennt man nun (indem man in das Gebiet der complexen ganzen Zahlen $\sigma + \tau i$ übergeht) $D - Ci$ den grössten gemeinsamen Theiler von $i + b$ und n, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} n &= (D + Ci)(D - Ci) \\ b + i &= (B + Ai)(D - Ci) \end{aligned}\right\},$$

welche Gleichungen die nachfolgenden in sich enthalten:

$$\begin{aligned} n &= D^2 + C^2, \\ b &= AC + BD, \\ AD - BC &= 1. \end{aligned}$$

*) Vgl. Mathem. Annalen Bd. XV, pag. 87 und 88.

Siehe auch wegen der Gruppirung der Repräsentantenwerthe $\frac{ai + b}{d}$ und $\frac{a\varrho + b}{d}$ die Arbeit von Gierster: „Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad", Math. Annalen, Bd. XIV, p. 536, die jedoch keine Beweise enthält.

Man findet hieraus noch leicht:

$$bC \equiv -D \, (\text{mod. } n),$$

eine Congruenz, die zeigt, dass nicht nur jedem $b + i$ ein Factor $D + Ci$ einer Zerfällung von n in $(D + Ci)\ (D - Ci)$ entspricht, sondern dass auch umgekehrt jedem solchen Factor eine und nur eine Zahl b und folglich ein $b + i$ zugehört.

Associirte Zahlen $(D+Ci)$, $i(D+Ci)$, $-(D+Ci)$, $-i(D+Ci)$ sind dabei als *nicht* verschiedene Factoren anzusehen.

Es wird nun

$$M = n \cdot e^{-\frac{n b i \pi}{6}} \cdot \frac{1}{D - Ci} \cdot \frac{\sqrt[12]{\Delta(A \cdot i + B \cdot 1, C \cdot i + D \cdot 1)}}{\sqrt[12]{\Delta(i, 1)}}$$

d. h., da das Zahlenpaar $A \cdot i + B \cdot 1$, $C \cdot i + D \cdot 1$ dem Zahlenpaare i, 1 äquivalent ist,

$$M = \varepsilon \cdot (D + Ci)$$

wo ε nach pag. 566 bestimmt wird, in der dortigen Bezeichnungsweise

$$= e^{-\frac{n b i \pi}{6}} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

ist, und sich als eine 4[te] Einheitswurzel erweist.

Wir haben also den Satz:

Die μ sich für $g_3 = 0$ abtrennenden einfachen Wurzeln M sind diejenigen complexen Factoren $D + Ci$ und $D - Ci$ von n, welche bei allen möglichen, wesentlich verschiedenen Zerlegungen

$$n = (D + Ci)\,(D - Ci), \quad (D \text{ und } C \text{ theilerfremd})$$

auftreten, jeder Factor mit einer bestimmten complexen Einheit multiplicirt.

Ganz analog findet man:

Die ν sich für $g_2 = 0$ abtrennenden Wurzeln sind diejenigen complexen Factoren $D + C\varrho$ und $D + C\varrho^2$ von n, welche bei allen möglichen wesentlich verschiedenen Zerlegungen

$$n = (D + C\varrho)\,(D + C\varrho^2), \quad (D \text{ relativ prim zu } C)$$

auftreten, jeder solche Factor mit einer bestimmten Einheit (± 1, $\pm \varrho$, $\pm \varrho^2$) multiplicirt.

Hier entspricht jedem Repräsentanten $\frac{\varrho + b}{n}$, für welchen $b^2 + b + 1 \equiv 0 \, (\text{mod. } n)$, die Wurzel

$$M = \varepsilon (D + C\varrho),$$

wo

$$\varepsilon = e^{-nb \cdot \frac{i\pi}{6}} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

$D + C\varrho^2$ der grösste gemeinsame Theiler von n und $b + \varrho$, und schliesslich

$$n = (D + C\varrho)\,(D + C\varrho^2),$$
$$b + \varrho = (B + A\varrho)\,(D + C\varrho^2)$$

ist.

Es ist nicht schwer zu sehen, dass der zweifach resp. dreifach auftretende Factor unserer Gleichung, entsprechend den verschiedenen Divisoren der Zahl n, sich in Factoren mit rationalen Zahlencoefficienten zerlegt. Auch ist leicht nachzuweisen, dass alle diese Gleichungen Abel'sche Gleichungen sind, also algebraisch auflösbar sind.

Ich will jedoch diesen Gegenstand hier nicht weiter verfolgen, indem ich mir vorbehalte, auf denselben bei anderer Gelegenheit (wo diese Sätze sich in allgemeinere Gesichtspunkte einordnen sollen) zurückzukommen. Herr Kiepert hat, wie mir Herr Klein mittheilt, in neuerer Zeit ähnliche, jedoch noch nicht publicirte Untersuchungen angestellt.

§ 6.

Differential-Relation, welcher der Multiplicator $M(\omega)$ genügt.

Wir sahen pag. 560, dass die Formel besteht:

$$\sqrt[8]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} = \frac{dJ}{d\omega} \cdot J^{-\frac{2}{3}} \cdot (J-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot i\pi}{3\,\omega_2^2}.$$

Schreiben wir in dieser Gleichung $\frac{\omega_1}{n}$ statt ω_1, so kommt:

$$\sqrt[8]{\Delta\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)} = n \cdot \frac{dJ'}{d\omega} \cdot J'^{-\frac{2}{3}} \cdot (J'-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot i\pi}{3\,\omega_2^2},$$

wo

$$J' = J\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

ist. Durch Division dieser beiden Formeln entsteht nun:

$$M^2 = n \cdot \frac{dJ'}{dJ} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}}\,(J-1)^{\frac{1}{2}}}{J'^{\frac{2}{3}}\,(J'-1)^{\frac{1}{2}}}, {}^{*})$$

eine Relation, die dem bekannten differentiellen Ausdruck des Jacobi'schen Multiplicators ganz analog ist.

*) Mathem. Annalen XIV, pag. 145. Siehe auch Brioschi, Atti della Accademia dei Lincei, vol. II. ser. 3, Sitzung vom 3. März 1878.

Anmerkung: Diese Relation wird für diejenige Methode zur Aufstellung der Transformationsgleichung zwischen J und J' von Wichtigkeit, welche Herr

§ 7.

Numerische Beispiele.

Zum Schluss will ich noch eine kleine Zahl von wirklich ausgerechneten Multiplicatorgleichungen zusammenstellen. Sie haben den Zweck, Material zu bieten, um die in abstracto entwickelten Sätze an concreten Beispielen prüfen zu können.

Vorab jedoch will ich einen zur numerischen Berechnung der Gleichungen für primzahlige Transformation dienenden allgemeinen Ansatz hersetzen, um an ihn einige Bemerkungen anzuknüpfen.

Die Wurzeln der Multiplicatorgleichung sind, wenn der Transformationsgrad n Primzahl ist:

$$z_k = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right) \varepsilon^{k\left(\frac{1-n^2}{12}\right)} q^{\frac{1}{6n}} \prod \left(1 - \varepsilon^{\nu k} q^{\frac{2}{n}\nu}\right)^2$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,$$

und

$$z_\infty = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right) \cdot n(-1)^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n}{6}} \prod (1 - q^{2n\nu})^2.$$

Klein im Anschluss an seine Darstellung dieser Gleichung für die niedersten Fälle ($n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$; Mathem. Annalen XIV, pag. 141–146) allgemein vorschlägt. Sein Gedankengang ist folgender:

Man setze in der nöthigenfalls (also für $n \equiv 5, 7, 11 \pmod{12}$) in $J(\omega)$ rational gemachten Gleichung für $M(\omega)$

(1) $$f(M, J) = 0,$$

$$-\frac{n}{\omega} \text{ statt } \omega \text{ ein.}$$

Dann geht dieselbe, wie man leicht erkennt, über in:

(2) $$f\left(\frac{n}{M},\ J'\right) = 0.$$

In den Fällen $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$ genügten die Gleichungen (1) und (2), um die Relation zwischen J und J' als Resultat der Elimination von M zu definiren (l. c.). Im allgemeinen Falle wird diese Relation jedoch nur ein Factor des Eliminationsresultats sein, und es fragt sich, wie man diesen findet. Hierzu liefert nun offenbar unsere neue Relation

$$M^2 = n \cdot \frac{dJ'}{dJ} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}}{J'^{\frac{2}{3}}(J'-1)^{\frac{1}{2}}}$$

einen Beitrag. Ob dieselbe aber zur Absonderung des gewünschten Factors ausreicht, muss vorab dahingestellt bleiben.

Setzt man nun

$$\prod (1-x^\nu)^{2\lambda} = \sum_{\varrho=0}^{\infty} C_\varrho^{(\lambda)} x^\varrho$$

so wird

$$S_\lambda = \left(\sum_{\varkappa=0}^{n-1} z_\varkappa^\lambda\right) + z_\infty^\lambda$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^\lambda \cdot n \cdot q^{\frac{n\lambda}{6} - 2v}\left[\sum_{t=0}^{\infty} C_{tn+\alpha}^{(\lambda)} q^{2t} + (-1)^\lambda \cdot n^{\lambda-1} q^{2v} \sum_{t=0}^{\infty} C_t^{(\lambda)} q^{2nt}\right].$$

Hierbei bedeutet

$$v = \left[\lambda \cdot \frac{n^2-1}{12n}\right]$$

die grösste in $\lambda \cdot \frac{n^2-1}{12 \cdot n}$ enthaltene ganze Zahl, und es ist

$$\alpha = \lambda \cdot \frac{n^2-1}{12} - nv.$$

Diese Formel hat zunächst den Vortheil, dass sie a priori erkennen lässt, welche Potenz von $\sqrt[12]{\Delta}$ *absolut* genommen als Factor vor die ganze Function von g_2 und g_3, der S_λ bis auf eine Potenz von $\sqrt[12]{\Delta}$ gleich ist, vortritt. — Eine zweite Bemerkung ist folgende:

Man kennt (aus der Theorie der elliptischen Functionen) nur die Reihenentwicklungen von

$$\Pi(1-x^\nu) \quad \text{und} \quad \Pi(1-x^\nu)^3.$$

Vermöge des obigen Ansatzes liefern nun offenbar die Multiplicatorgleichungen unendlich viele Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten der Reihenentwicklung von $\Pi(1-x^\nu)^{2\lambda}$, Gleichungen, die z. B. als Eigenschaften der fünfeckigen Zahlen ausgesprochen werden können. Da ich aber in dieser Richtung einen allgemeinen Satz vermuthe, von dem die auf dem angegebenen Wege erhaltenen Sätze particuläre Fälle sein würden, so will ich die letzteren hier unterdrücken, um bei Gelegenheit auf dieselben zurückzukommen. —

Multiplicatorgleichung

für $n = 2$:

$$z^{12} - 12\, g_2 \cdot \Delta^{\frac{1}{3}} \cdot z^4 + 16\Delta = 0,$$

für $n = 3$:

$$z^{12} - 18\,\Delta^{\frac{6}{12}} \cdot z^6 + 216 g_3 \cdot \Delta^{\frac{3}{12}} \cdot z^3 - 27\Delta = 0,$$

für $n = 4$:

$$z^{24} - 48\Delta^{\frac{1}{3}} \cdot z^{20} + 16 \cdot 51\,\Delta^{\frac{2}{3}} \cdot z^{16} - 16 \cdot 22\Delta\; z^{12} + 3 \cdot 64\,\Delta^{\frac{1}{3}}(68\Delta - 9g_2^3) \cdot z^8$$

$$- 4^5 \cdot 3(4\Delta - 9g_2^3)\,\Delta^{\frac{2}{3}} \cdot z^4 + 4^6\,\Delta^2 = 0,$$

für $n = 5$:

$$z^6 + 10\,\Delta^{\frac{1}{4}} \cdot z^3 - 12g_2 \cdot \Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z + 5\,\Delta^{\frac{1}{2}} = 0,$$

für $n = 7$:

$$z^8 + 14\,\Delta^{\frac{1}{6}} \cdot z^6 + 63\,\Delta^{\frac{1}{3}} \cdot z^4 + 70\,\Delta^{\frac{1}{2}} \cdot z^2 + 216\,g_3 \cdot \Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z - 7\,\Delta^{\frac{2}{3}} = 0,$$

für $n = 11$:

$$z^{12} - 90 \cdot 11\,\Delta^{\frac{1}{2}} \cdot z^6 + 40 \cdot 11 \cdot 12g_2 \cdot \Delta^{\frac{1}{3}} \cdot z^4 - 15 \cdot 11 \cdot 216g_3 \cdot \Delta^{\frac{1}{4}} \cdot z^3$$

$$+ 2 \cdot 11 \cdot (12g_2)^2 \cdot \Delta^{\frac{1}{6}} \cdot z^2 - 12g_2 \cdot 216g_3 \cdot \Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z - 11\,\Delta = 0,$$

für $n = 13$:

$$z^{14} + 13\Big[\,2\,\Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z^{13} + 25\,\Delta^{\frac{2}{12}} \cdot z^{12} + 196\,\Delta^{\frac{3}{12}} \cdot z^{11} + 1064\,\Delta^{\frac{4}{12}} \cdot z^{10}$$

$$+ 4180\,\Delta^{\frac{5}{12}} \cdot z^9 + 12086\,\Delta^{\frac{6}{12}} \cdot z^8 + 25660\,\Delta^{\frac{7}{12}} \cdot z^7 + 39182\,\Delta^{\frac{8}{12}} \cdot z^6$$

$$+ 41140\,\Delta^{\frac{9}{12}} \cdot z^5 + 27272\,\Delta^{\frac{10}{12}} \cdot z^4 + 9604\,\Delta^{\frac{11}{12}} \cdot z^3 + 1165\,\Delta \cdot z^2\Big]$$

$$+ \left\{746\,\Delta - (12g_2)^3\right\}\Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z + 13\,\Delta^{\frac{14}{12}} = 0,$$

für $n = 17$:

$$z^{18} + 17\Big[10\,\Delta^{\frac{3}{12}} \cdot z^{15} + 2 \cdot 12g_2 \cdot \Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z^{13} + 751\,\Delta^{\frac{6}{12}} \cdot z^{12}$$

$$+ 184 \cdot 12\,g_2 \cdot \Delta^{\frac{4}{12}} \cdot z^{10} + 25740\,\Delta^{\frac{9}{12}} \cdot z^9 + 17 \cdot (12g_2)^2 \cdot \Delta^{\frac{2}{12}} \cdot z^8$$

$$+ 8780 \cdot 12g_2 \cdot \Delta^{\frac{7}{12}} \cdot z^7 + 323903\,\Delta^{\frac{12}{12}} \cdot z^6 - 1474 \cdot (12g_2)^2 \cdot \Delta^{\frac{5}{12}} \cdot z^5$$

$$+ 99128 \cdot 12g_2 \cdot \Delta^{\frac{10}{12}} \cdot z^4 + \left\{20 \cdot (12g_2)^3 - 592310\,\Delta\right\}\Delta^{\frac{3}{12}} \cdot z^3$$

$$+ 481 \cdot (12g_2)^2 \cdot \Delta^{\frac{8}{12}} \cdot z^2\Big] + \left[994 \cdot 12g_2 \cdot \Delta - (12g_2)^4\right]\Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z$$

$$+ 17\,\Delta^{\frac{18}{12}} = 0.$$

Die Gleichungen für 2, 3, 4, 5, 7, 13 finden sich im Wesentlichen

Mathem. Annalen Bd. XIV, p. 143 und 146; jedoch ist in den Formeln (26) p. 146 daselbst zu setzen: $n = 2$, $\tau = -\frac{1}{64} M^{12}$ und $n = 5$, $\tau = -125 M^3$.

Die Formel für $n = 11$ ist Mathem. Annalen XV, pag. 88 mitgetheilt. Der Fall $n = 17$ ist der Arbeit von Kiepert entlehnt (Crelle 87, pag. 215), wo auch $n = 19$ und 23 berechnet sind.

Wegen weiterer Beispiele siehe Gierster, l. c. p. 541, 542 u. 543.

Leipzig, im März 1881.

Ueber Darstellungsfunctionen.

Von

Paul du Bois-Reymond in Tübingen.*)

... Sehr zutreffend bemerkst Du, dass mein Beweis des Satzes:

$$\lim_{h=\infty}\int_{0}^{a} dx\, f(x)\,\varphi(x,h) = f(0)\lim_{h=\infty}\int_{0}^{a} dx\,\varphi(x,h),$$

sowie die Beweise einiger anderen Sätze den $\lim_{h=\infty}\int_{a}^{b} dx\,\varphi(x,h) = 0$ nicht allein für feste a und b, sondern auch für — während des Ansteigens von h — irgendwie bewegliche a und b voraussetzen, dass jedoch der Schluss vom Grenzwerth Null bei festen a, b auf den gleichen bei beweglichen a, b nicht ohne Weiteres einleuchte. Gewiss. So unbeschränkt hinsichtlich der Function $\varphi(x,h)$ wäre der Schluss sogar falsch, wie Beispiele lehren. Allein wenn man $\varphi(x,h)$ angemessen beschränkt, namentlich wenn man annimmt, dass $\varphi(x,h)$ für $x > 0$ nicht unendlich wird, was doch von den bis jetzt an den Tag getretenen Darstellungsformeln ausnahmslos gilt, so ist es, wie ich alsbald zeigen werde, sehr leicht, jene Beweise durch den Nachweis der Identität beider Grenzwerthe zu ergänzen. Die Annahme der Endlichkeit von $\varphi(x,h)$ für $x > 0$ und $h = \infty$ ist übrigens bei allen Sätzen der beiden Abhandlungen: *Ueber die allgemeinen Eigenschaften* etc.**) und *Allgemeine Lehrsätze* etc.***), auch wo dies nicht ausdrücklich angegeben ist, gemacht, und es ist vielleicht von Interesse einmal ihre Nothwendigkeit zu prüfen. Denn im Ganzen war mein Streben bei jenen älteren Untersuchungen und ihrer Fortsetzung bis zu denen über

*) Aus einer brieflichen Mittheilung des Verfassers an Hrn. C. Neumann.

**) Borch. Journal, Bd. 69, p. 1.

***) Borch. Journal, Bd. 79, p. 38.

die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungen, in den Grundformeln:

$$\lim \int_a^b dx f(x) \varphi(x, h) = 0, \quad 0 < a < b, \cdots A$$

$$\lim \int_0^a dx f(x) \varphi(x, h) = f(0) \lim \int_0^a dx \varphi(x, h),$$

von der Hypothese, dass $\lim \int_0^a dx \varphi(x, h)$ eine von a unabhängige, endliche, feste Grösse G sei, ausgehend, die Beschränkungen der Function $f(x)$ successive und auf Kosten des Spielraums der Function $\varphi(x, h)$ thunlich aufzuheben*). Es liegt daher nahe auch einmal den entgegengesetzten Weg zu verfolgen, d. h. unter Beibehaltung der für die Gültigkeit der vorstehenden Sätze zuerst sich darbietenden Beschränkungen von $f(x)$ den weitesten Spielraum für $\varphi(x, h)$ aufzusuchen. Man wird also $f(x)$ der ursprünglichen Dirichlet'schen Bedingung unterwerfen, oder nach Deiner zweckmässigen Bezeichnungsweise, der ich unbedingt mich anschliesse, $f(x)$ als *abtheilungsweise monoton* voraussetzen, und sodann zusehen, welcher umfassendste Spielraum der Function $f(x, h)$ gelassen werden darf, damit der Beweis des § 4. der ersten der cit. Abhandlungen bindend bleibe. Dies läuft eben einfach auf die Frage nach der Identität der Grenzwerthe $\int_a^b dx \varphi(x, h)$ bei festen und bei beweglichen a, b hinaus, die ich im Folgenden erledigen will. Die Ergebnisse sind übrigens insofern allgemeinerer Natur, als an Stelle der durch die Darstellungstheorie geforderten Bedingung, dass $\lim \int_0^a dx \varphi(x, h)$ von a unabhängig sei, dieser Limes auch eine beliebige Function von a sein darf.

---

*) Die Forderung der Endlichkeit von $\varphi(x, h)$ ist unerlässlich für den Beweis des Satzes A (Art. 1 der zweiten cit. Abhandlung), welcher der Function $f(x)$ ihre denkbar grösste nur durch das Erforderniss der Integrirbarkeit beschränkte Freiheit wahrt. Allein *nachträglich* kann man hier wie in analogen Fällen der Function $\varphi(x, h)$ bedingtes Unendlichwerden gestatten, ähnlich wie der Function $f(x)$ im Art. 2 der cit. Abhandlung. Es darf $\varphi(x, h)$ von vornherein einige feste Unendlichkeitspunkte haben, oder auch in einzelnen festen Punkten mit h unendlich werden, wenn nur das $\int dx \bmod \varphi(x, h)$ über diese Unendlichkeitsstellen, hinreichend eng begrenzt, für jeden Werth von h unter einem beliebigen Kleinheitsgrad bleibt. Unter solchen Umständen wird übrigens auch eine Bewegung der Unendlichkeitspunkte gestattet sein.

1.

Es sei $\lim \int\limits_a^b dx\varphi(x,h) = 0$, wo ich a und b durch die Ungleichheit $0 < \varepsilon \leqq a < b \leqq X$ beschränke, unter ε eine beliebig klein anzunehmende Grösse verstanden. Während h über alle Grenzen zunimmt, seien a und b unbeweglich. Weiter sei auch $0 < \varepsilon \leqq \alpha < \beta \leqq X$, und es ist zu zeigen, dass auch $\lim_{h=\infty} \int\limits_\alpha^\beta dx\varphi(x,h) = 0$ ist, falls α und β während des Wachsthums von h innerhalb der ihnen zugewiesenen Strecke ihre Werthe verändern. Hinsichtlich der Function $\varphi(x,h)$ setze ich zunächst voraus, dass in:

$$\int\limits_\alpha^\beta dx\varphi(x,h) = (\beta - \alpha)\,\psi$$

ψ stets unter einer endlichen, allerdings je kleiner ε desto höher befindlichen Schranke Φ verbleibt, während α und β sich verändern.

Dies vorausgeschickt, theilen wir das Intervall $X - \varepsilon$ in n Theile Δ. Man wird, da n endlich ist, h immer hinreichend gross annehmen können, dass

$$\int\limits_{\varepsilon+p\Delta}^{\varepsilon+q\Delta} dx\varphi(x,h); \quad p, q = 0, 1, 2, \cdots, n$$

numerisch kleiner als eine beliebig kleine Grösse ϱ sei. Es wird also, wenn h hinreichend gross ist:

$$\operatorname{mod} \int\limits_\alpha^\beta dx\varphi(x,h) < \varrho + 2\Delta\Phi$$

sein. Nun können Δ und ϱ, jedes für sich, beliebig klein angenommen werden, stets entspricht einer Wahl Δ, ϱ ein die vorstehende Ungleichheit erfüllender Werth h. Setzt man z. B. $\varrho = \Delta$, so ist also für ein hinreichend grosses h

$$\operatorname{mod} \int\limits_\alpha^\beta dx\varphi(x,h) < \Delta(1 + 2\Phi),$$

wo immer α und β auf der ihnen zugewiesenen Strecke sich befinden mögen. Es ist Δ beliebig klein und in $\operatorname{mod} \int\limits_\alpha^\beta dx\varphi(x,h)$ sonst nicht enthalten, als dass es dem h eine untere Grenze vorschreibt, damit vorstehende Ungleichheit stattfinde. Wächst h alsdann von dieser unteren Grenze in's Unendliche, so kann der Limes von $\operatorname{mod}\int\limits_{\alpha}^{\beta} dx\,\varphi(x,h)$ nicht von Null verschieden sein. Denn wäre er es, so könnten wir ja von vornherein $\Delta(1+2\Phi)$ kleiner annehmen, als diesen Limes, was sinnlos ist. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass, wenn ich von einem Limes von $\operatorname{mod}\int\limits_{\alpha}^{\beta} dx\,\varphi(x,h)$ rede, ich nicht eine feste Grösse als solchen vorauszusetzen brauche, sondern darunter auch die Unbestimmtheitsgrenzen seiner Schwankungen verstehen darf.

Doch ist die Bedingung, dass $\varphi(x,h)$ für $x>0$ mit h nicht unendlich werde, d. i., dass in

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} dx\,\varphi(x,h) = \delta\cdot\psi(\delta,\alpha,h),\qquad \beta-\alpha=\delta,$$

ψ unter einer endlichen Grenze Φ verharren solle, ersichtlich eine für die Gültigkeit der allgemeinen Sätze der Darstellungstheorie *nicht nothwendige*. Der obige Beweis der Coexistenz der Grenzwerthe Null von $\int\limits_{a}^{b} dx\,\varphi(x,h)$ und $\int\limits_{\alpha}^{\beta} dx\,\varphi(x,h)$ lässt sich in kaum veränderter Weise führen, wenn nur vorausgesetzt wird:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} dx\,\varphi(x,h) = \lambda(\delta)\cdot\psi(\delta,\alpha,h),$$

wo $\lambda(\delta)$ beliebig langsam Null werden darf, ψ aber wieder unter einer Schranke Ψ verbleiben muss.

So führt denn dieser Weg kurz und mühelos zu einer Bedingung für $\varphi(x,h)$, welche dieser Function mannigfaches Unendlichwerden gestattet. Es giebt aber noch einen Gedankengang, der uns zu einer neuen, die vorstehende enthaltenden, scheinbar weiteren Bedingung führt, und welche für die Gültigkeit unserer Beweismethoden *nothwendig* ist. Von dieser neuen Bedingung lässt sich dann zeigen, dass sie mit der alten äquivalent ist, wodurch diese Betrachtungen einen befriedigenden Abschluss finden.

II.

Die ursprüngliche Bedingung war, dass die Function

$$F(a,h) = \int\limits_{0}^{a} dx\,\varphi(x,h)$$

nach $h=\infty$ einen von a unabhängigen Limes G haben solle, und zwar für jedes *feste* $a > 0$. Die neu hinzutretende Bedingung ist offenbar, dass $F(a, h)$ diesen Limes G auch haben müsse, wenn, während h ansteigt, a beweglich ist, bei seiner hypothetischen Bewegung aber von Null durch eine feste, wenn auch beliebig kleine Distanz ε getrennt bleibt. Dann wird in der That:

$$\int_a^b dx\,\varphi(x, h) = F(b, h) - F(a, h)$$

den Limes $G - G = 0$ haben müssen, wie auch a und b in der Strecke $0 < \varepsilon \leqq a < b \leqq X$ sich beim Ansteigen von h verhalten mögen.

Um diese Bedingung zu formuliren, wollen wir, gewohnten Vorstellungen zu Liebe, setzen x statt a, $\frac{1}{y}$ statt h, $F(a, h) = f(x, y)$, und dieser Function das rechteckige Gebiet Γ vorschreiben:

$$\varepsilon \leqq x \leqq X,$$
$$0 \leqq y \leqq Y.$$

Nach dem Obigen muss $f(x, y)$ folgende Eigenschaft haben: $\lim_{y=0} f(x, y)$ muss $= G$ sein, wie auch, während y abnimmt, x zwischen ε und X sich hin und her bewegen möge. Jedenfalls darf also $f(x, y)$ für keinen Punkt $x = x_1$, $y = 0$ *stetigvieldeutig* sein. D. h. es darf in der Strecke $\varepsilon \leqq x \leqq X$, $y = 0$ kein Punkt $x = x_1$ existiren, für den der Grenzwerth $\lim_{x=x_1, y=0} f(x, y)$ abhängt von der relativen Geschwindigkeit der Abnahme von $x_1 - x$ und y. Mit anderen Worten es muss $f(x, y)$ für jeden besonderen Punkt $x = x_1$ des Intervalles $\varepsilon \cdots X$ der Linie $y = 0$ *stetig* sein. Dies ist unerlässlich, reicht es aber auch aus, d. h. wenn bei Annäherung von x an jeden besonderen Werth $x = x_1$ und bei gleichzeitiger Abnahme von y gegen Null $f(x, y)$ stets den Limes G hat, ist dies auch ihr Limes, wenn x, bei Abnahme von y, z. B. keiner Grenze sich nähert, sondern unausgesetzt hin und her springt?

Er ist es ohne Zweifel. Der Nachweis geschieht mit Hülfe gewisser Rechtecke, die man von den Stetigkeitskreisen aus erhält, sodann auch direct definiren kann. Wir nehmen auf einen Augenblick die Function $f(x, y)$ im ganzen Gebiet Γ stetig an, was jedenfalls heischt, dass $\varphi(x, h)$ nach h stetig sei. Ausserdem wollen wir $f(x, y)$ über das Gebiet Γ hinaus fortsetzen, sie dort durchweg constant und $= G$ annehmen. Dann ist $f(x, y)$ in der ganzen Strecke $\varepsilon \leqq x \leqq X$, $y = 0$ stetig und jeder Punkt dieser Strecke ist von solchem Gebiet, in welchem $f(x, y)$ existirt, umgeben. Jetzt setzen wir eine beliebig kleine Grösse μ fest, und construiren zu jedem Punkt der Strecke $\varepsilon \leqq x \leqq X$, $y = 0$, als Mittelpunkt den *grössten* Kreis, in welchem die Schwankung der Function $f(x, y)$ das Maass μ erreicht.

Keiner dieser Kreise kann den Halbmesser Null haben, da er alsdann einem Unstetigkeitspunkt der Function $f(x, y)$ entspräche.

Von diesen Kreisen gehen uns nur ihre im Gebiet der positiven y liegenden Hälften an. Diese Halbkreise bedecken dort ein Gebiet, dessen eine Begrenzung die Linie $\varepsilon \leqq x \leqq X$, $y = 0$ ist, während die andere Begrenzung die Kreis-Enveloppe ist, die mit $y = \eta(x)$ bezeichnet werden mag. Von dieser Linie behalten wir nur den Theil bei, der im Gebiet Γ liegt, und nur ihn wollen wir mit $y = \eta(x)$ bezeichnen. Doch dürfen wir uns nicht auf die Anschauung der Enveloppe stützen, sondern müssen die Existenz der Function $\eta(x)$ wirklich beweisen.

Der Kreis für den Mittelpunkt $x = x_1$, $y = 0$, den wir kurz den Kreis $x_1, 0$ nennen wollen, habe den Radius r. Nun errichten wir auf der x-Axe im Punkt $x = x_1$ ein Loth η. Die Peripherie des Kreises $x_1, 0$ schneidet η in der Höhe r. Auch von allen übrigen Kreisen $x, 0$ kann η geschnitten werden. Der höchst mögliche Schnittpunkt wird der eines der Kreise $\varepsilon, 0$ oder $X, 0$ sein, und zwar resp. in den Höhen $\sqrt{2r(x_1 - \varepsilon) + r^2}$ oder $\sqrt{2r(X - x_1) + r^2}$. Der höchste dieser beiden Punkte sei η'. So *kann* also η von den Kreisen $x, 0$ (wo x dem Intervall $\varepsilon \leqq x \leqq X$ angehört) noch geschnitten werden im Intervall $r \leqq \eta \leqq \eta'$. Falls nun η' weder vom Kreis $\varepsilon, 0$ noch vom Kreis $X, 0$ geschnitten wird, so muss es im Intervall $r \cdots \eta'$ einen Punkt η'' geben, der Art, dass es keinen tieferen Punkt η''' giebt, über den nicht noch Schnittpunkte von η mit Kreisen $x, 0$ fielen. Die Existenz des Punktes η'' kann man nach bekanntem Verfahren durch irrationale Darstellung beweisen, indem man das Intervall $r \cdots \eta'$ z. B. successive in $10^1, 10^2, \cdots$ Theile zerlegt. Ein höchstes der Intervalle

$$r + p\,\frac{\eta' - r}{10} < \eta \leqq r + (p + 1)\,\frac{\eta' - r}{10}$$

enthält dann noch Schnittpunkte. Dies sei das Intervall $p = p_1$. Man zerlege es wiederum in 10 gleiche Intervalle, von denen wieder ein höchstes noch Schnittpunkte enthält, u. s. f., so dass $\eta'' - r$ unmittelbar durch einen fortlaufenden Decimalbruch dargestellt wird. Es ist alsdann $\eta'' = \eta(x_1)$.

Weiter ist $\eta(x)$ eine stetige Function von x. Es existirt $\eta(x)$ für jeden Werth $x = x_1$. Nun existire noch neben $\eta(x_1)$ ein Werth $\eta(x_1 \pm 0)$, der von $\eta(x_1)$ verschieden ist. Da durch $\eta(x_1 \pm 0)$ ebenfalls Kreise gehen müssten, so könnte die Bestimmung $\eta(x_1)$ keine eindeutige sein, was sie doch ist.

Sodann kann $\eta(x)$ nirgend Null sein. Denn wo $\eta(x)$ Null ist, ist es auch r, und die Function $f(x, y)$ ist dann gegen die Voraussetzung unstetig.

Es muss also nach bekannten Grundsätzen $\eta(x)$ seinen kleinsten Werth y_1 irgendwo annehmen und dieser Werth y_1 ist > 0.

Zu jedem μ gehört mithin ein y_1. Und bei abnehmendem μ kann weder y_1, noch (für irgend ein festes x) $\eta(x)$ wachsen. Man hat also ein Rechteck:

$$\varepsilon \leqq x \leqq X,$$
$$0 \leqq y \leqq y_1,$$

in welchem die Schwankung der Function 2μ nicht übersteigt. Und wenn man y_1 als Argument ansieht, so kann man ihm ganz leicht μ so zuordnen, dass μ als monoton abnehmende Function mit y_1 unter jede Grenze sinkt. Doch wird eine solche Zuordnung bei der directen Definition der Stetigkeitsstreifen kürzer bewerkstelligt.

Jene Kreise sind dieselben, von denen Herr Lüroth in seinem originellen Beweise für die Gleichmässigkeit der Stetigkeit von Functionen zweier Variabeln*) Gebrauch macht. Er zeigt, dass die Radien der Kreise x, y stetige Functionen von x, y sind. Diese merkwürdige Eigenschaft bleibt offenbar noch für Linien als Oerter der Kreismittelpunkte bestehen, auch wenn die Function $f(x, y)$ *nur* in diesen Linien stetig ist. Auch unsere vorstehenden Betrachtungen gelten unverändert, wenn wir die Stetigkeit der Function $f(x, y)$ auf die Linie $\varepsilon \leqq x \leqq X$, $y = 0$ beschränken, also von $\varphi(x, h)$ nicht voraussetzen, dass sie nach h stetig sei. Nur die Definition der Kreise x, 0 muss etwas anders gefasst werden. *Der Kreis x, 0 muss derjenige grösste Kreis sein, in dessen Gebiet, mit Ausschluss der Peripherie, die grösste Werthdifferenz der Function $f(x, y)$ den Werth μ nicht übersteigt.*

Man kann jene rechteckigen Stetigkeitsstreifen auch direct definiren, wie folgt. Es sei y der gemeinsame Radius von allen Kreisen x, 0, und μ sei die grösseste unter den Schwankungen von $f(x, y)$, die innerhalb dieser Kreise vorkommen, oder der grösste Werth, der von keiner dieser Schwankungen überstiegen wird. Es wird μ monoton gegen Null abnehmen müssen, während y stetig gegen Null abnimmt, und es sei $\mu = \lambda(y)$. Man hat also:

$$f(x, y) - G = \lambda(y) \cdot \psi, \quad \psi \leqq 1, \quad \text{nicht} \leqq 2!$$

Ein besonderer Fall hiervon ist die Stetigkeit der Functionen *einer* Variabeln. Verschwindet nämlich für jeden besonderen Werth x die Function $f(x, y) = F(x + y) - F(x)$ mit y, so wird, wie leicht zu sehen, die Function $f(x, y)$ auch nach ihren beiden Argumenten für jeden besonderen Werth von x stetig sein, und man wird setzen dürfen:

$$F(x + y) - F(x) = \lambda(y) \cdot \psi, \quad \psi \leqq 1,$$

wo $\lambda(y)$ eine mit y monoton gegen Null abnehmende Function. Wenn $\lim_{y=0} \psi$ nicht Null ist (wobei nicht ausgeschlossen ist, dass sein Un-

*) Math. Ann. VI, 319.

bestimmtheitsintervall die Null enthält), wird man $\lambda(y)$ den *Stetigkeitsgrad* von $F(x)$ im *Intervall* $\varepsilon \leqq x \leqq X$ nennen, analog wie ich schon öfters vom Stetigkeitsgrad in Punkten Gebrauch machte.

Diese Bemerkungen lassen sich unmittelbar auf Functionen von drei Variabeln ausdehnen. Es sei $f(x, y, z)$ für alle Punkte x, 0, 0 des Intervalls $\varepsilon \leqq x \leqq X$ stetig, und $= G$. Man wird den Kreiscylinder construiren, dessen Axe die x-Axe ist, und dessen Radius $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ auf Grund von Kugeln so zu einer Grösse μ in Beziehung gesetzt ist, wie es eben bei y und μ auf Grund von Kreisen der Fall war. Man hat also:

$$f(x, y, z) - G = \lambda(r) \cdot \psi, \quad \psi \leqq 1.$$

Es kann in $z^2 = x^2 + y^2$, y und z sonst beliebig sein, z. B. kann $z = 0$ oder $y = 0$ sein. So ergiebt sich:

$$f(x, y, z) - G = \lambda(y) \cdot \psi, \quad \psi \leqq 1,$$
$$f(x, y, z) - G = \lambda_1(z) \cdot \psi, \quad \psi_1 \leqq 1$$

oder durch Multiplication:

$$f(x, y, z) - G = \lambda(y) \cdot \lambda_1(z) \cdot \chi, \quad \chi \leqq 1,$$

wenn wir $\lambda(y)\lambda_1(z)$ statt ihrer Quadratwurzel schreiben, wo $\lambda(y)$ und $\lambda_1(z)$ mit ihren Argumenten monoton gegen Null abnehmende Functionen vorstellen.

III.

Wenn also $f(x, y)$ für alle Punkte $x, 0 (\varepsilon \leqq x \leqq X)$ stetig ist, so ist auch $\lim_{y=0} f(x, y) = G$ ganz unabhängig von der Verfügung über x, d. i.

$$f(x, y) = F(a, h) = \int_0^a dx\,\varphi(x, h)$$

nähert sich der Grenze G bei ins Unendliche wachsendem h, wie auch a während dessen seinen Werth ändern möge, wenn es nur von 0 um ein Festes entfernt bleibt.

Der Bedingung der Stetigkeit von $F(a, h)$ nach a und h für jeden besonderen Werth von a geben wir eine etwas andere Form, indem wir

$$\int_0^{a_1} dx\,\varphi(x, h) - \lim_{h=\infty} \int_0^a dx\,\varphi(x, h)$$

$$= \int_0^{a_1} dx\,\varphi(x, h) - G = \int_a^{a_1} dx\,\varphi(x, h) + \int_0^a dx\,\varphi(x, h) - G$$

setzen, woraus dann folgt, dass $\lim_{a_1=a,\, h=\infty}\int\limits_a^{a_1} dx\,\varphi(x, h) = 0$ sein muss. Somit ergiebt sich:

Mein (Ueber die allgemeinen Eigenschaften etc., Borch. Journ. Bd. 69, § 4) für den Satz:

$$\lim\int\limits_0^a dx f(x)\,\varphi(x, h) = f(0)\lim\int\limits_0^a dx\,\varphi(x, h)$$

gegebener Beweis gestattet, wenn man die Voraussetzung der abtheilungsweisen Monotonie der Function $f(x)$ bestehen lässt, der Function $\varphi(x, h)$ folgenden Spielraum:

Erstens muss

$$\lim\int\limits_0^a dx\,\varphi(x, h)$$

von a unabhängig endlich und bestimmt sein. Zweitens muss sein:

$$\lim_{a=a_1,\, h=\infty}\int\limits_a^{a_1} dx\,\varphi(x, h) = 0$$

für jeden festen Werth $a > 0$, und ein beliebiges gleichzeitiges Verschwinden von $a_1 - a$ und $\frac{1}{h}$.

Setzen wir $a_1 - a = \delta$, so ist die vorstehende Bedingung offenbar erfüllt, wenn,

$$\int\limits_a^{a_1} dx\,\varphi(x, h) = \lambda(\delta)\,\psi(a, \delta, h), \quad 0 < \varepsilon \leqq a,$$

gesetzt, $\lambda(\delta)$ mit δ überhaupt Null wird, und $\psi(a, \delta, h)$ unter einer endlichen von ε abhängigen Grenze Φ bleibt. Andererseits geht aus den obigen Sätzen über die Stetigkeit einer Function von drei Variabeln hervor, dass

$$f(a, \delta, h) = \int\limits_a^{a+\delta} dx\,\varphi(x, h)$$

stets auf die Form $\lambda(\delta)\cdot\psi$, $\psi \leqq 1$ gebracht werden kann. Hieraus folgt, dass diese Bedingung, welche mit der im Art. I. aufgestellten identisch ist, oder die völlig äquivalente Bedingung

$$\lim_{a=a_1,\, h=\infty}\int\limits_a^{a_1} dx\,\varphi(x, h) = 0,$$

im Sinne meines erwähnten Beweises die Theorie in der That abschliesst.

IV.

Ich werde zum Schluss ein Beispiel einer Function vorlegen, welche die Bedingung

$$\lim_{a_1=a,\, h=\infty} \int_a^{a_1} dx\, \varphi(x, h) = 0$$

nicht erfüllt.

Die Function

$$\frac{x-\varkappa}{\left[(x-\varkappa)^2+\frac{1}{h^n}\right]^2}$$

ist nach $x-\varkappa$ ungerade, so dass ihr Integral von $\varkappa - k$ bis $\varkappa + k$ Null ist.

Schreiben wir ϱx statt x, und setzen

$$\psi(x, h) = \frac{\varrho x-\varkappa}{\left[(\varrho x-\varkappa)^2+\frac{1}{h^n}\right]^2},$$

so ist:

$$\int_0^N dx\, \psi(x, h) = \frac{1}{2\varrho}\left\{\frac{1}{\varkappa^2+\frac{1}{h^n}} - \frac{1}{(\varrho N-\varkappa)^2+\frac{1}{h^n}}\right\},$$

und hierin setzen wir: $\varrho = h^3$, $\varkappa = \frac{1}{h}$, $n = 4$. Dann ist der Limes $h = \infty$ des vorstehenden Integrals Null für jeden festen Werth N, unendlich für $\varrho N - \varkappa = 0$.

Nun betrachten wir das Integral

$$\int_a^b dx\, \psi(x-\gamma, h), \quad \gamma > 0.$$

Sobald a und b fest sind, hat es nach dem vorigen den Limes Null, nicht aber z. B. wenn $a = \gamma$, $b = \gamma + \frac{\varkappa}{\varrho}$.

Hieraus folgt, dass u. A.

$$\varphi(x, h) = h e^{-hx} + \psi(x-\gamma, h)$$

das erste Attribut einer darstellenden Function besitzt. Denn $\lim_{h=\infty}\int_0^a dx\, \varphi(x, h)$ ist von a unabhängig und $= 1$. Allein $\varphi(x, h)$ erfüllt die weitere für die darstellenden Functionen abgeleitete Bedingung nicht. $\int_a^{a_1} dx\, h e^{-hx} = e^{-ah} - e^{-a_1 h}$ erfüllt sie allerdings. Dagegen hat man, wenn $a = \gamma$, $a_1 - \gamma = \delta$ gesetzt wird:

$$\int_{\alpha}^{\alpha_1} dx\,\psi(x-\gamma, h) = \int_{0}^{\delta} dx\,\psi(x, h) = \frac{1}{2\varrho}\left\{\frac{1}{\varkappa^2 + \frac{1}{h^n}} - \frac{1}{(\varrho\delta - \varkappa)^2 + \frac{1}{h^n}}\right\}.$$

Diese Grösse wird aber, wie wir oben sahen, unendlich statt Null, wenn $\delta = \frac{\varkappa}{\varrho}$ gesetzt und h unendlich wird. Sie ist eben nach δ und h *stetig vieldeutig.*

Seit ich meine Eingangs angeführten Abhandlungen schrieb, sind die analytischen Grundbegriffe verschärft, die Methoden vervollkommnet und vermehrt worden. Namentlich drei Sätze habe ich geglaubt einer Ueberarbeitung unterziehen zu sollen. Der das Integral

$$\int_0^a d\alpha \bmod f'(\alpha)$$

benutzenden Darstellbarkeitsbedingung*) gab ich ihren weitesten Inhalt.**) Sodann bediente ich mich besserer Methoden zur Discussion eines Theils der aus der Darstellbarkeitsbedingung

$$\int_0^a d\alpha \bmod \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta f(\beta) < \infty^{***})$$

sich ergebenden Folgerungen.†) Endlich habe ich soeben den Satz des § 4. der ersten der citirten Abhandlungen bis an seine Grenzen verfolgt.

Mit diesen drei Nachträgen bilden die *allgemeinen* Sätze über die Darstellungsformeln, trotz manchen offenen Fragen, die es für's Erste wohl bleiben dürften, und manchen Punkten, die ich noch zu erläutern vermag, schon jetzt einen zusammenhängenden und durchsichtigen Lehrgegenstand.

Tübingen, im April 1881.

*) Borch. Journ. Bd. 79, Art. 8.

**) Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen etc., Tübingen bei Laupp, pag. 28 sqq.

***) Borch. Journ. Bd. 79, Art. 9.

†) Comptes Rendus, 11. und 18. April 1881.

Ueber eine charakteristische Eigenschaft der developpabeln Flächen.

Von

HANS V. MANGOLDT in Freiburg i/Br.

Die Constructionsaufgabe, in einer Ebene eine gegebene Strecke AB von einem gegebenen Punkte C aus der Grösse und Richtung nach abzutragen, lässt unter anderen folgende Lösung zu, die auf beliebig gekrümmte Flächen übertragen werden kann: Man verbinde C mit B durch eine Gerade, halbire diese in M, ziehe die Gerade AM und verlängere sie um sich selbst bis D, so ist CD gleich und parallel AB.

Sind auf einer beliebig gekrümmten Fläche ein geodätischer Bogen AB und ein Punkt C gegeben, so kann man genau dieselbe Construction ausführen, indem man jede vorkommende gerade Linie durch die entsprechende geodätische ersetzt. Der so erhaltene Bogen CD soll dem ursprünglichen gleich und parallel genannt werden.

$$CD = \| AB.$$

Diese Beziehung zwischen den Bogen AB und CD ist offenbar wie in der Ebene reciprok. Ist

$$CD = \| AB,$$

so ist auch

$$AB = \| CD.$$

Dagegen bleibt der Satz: „Sind zwei Strecken einer dritten gleich und parallel, so sind sie auch einander gleich und parallel" für beliebig gekrümmte Flächen im Allgemeinen nicht mehr gültig. — Es soll bewiesen werden, *dass die developpabeln Flächen die einzigen sind, für welche er bestehen bleibt.*

Es sei F eine Fläche, welche die verlangte Eigenschaft besitzt, wenigstens so lange man die Betrachtung auf eine gewisse Umgebung eines bestimmten nicht singulären Punktes O der Fläche beschränkt. Aus dem angegebenen Verfahren zur Construction eines geodätischen Bogens, der einem gegebenen gleich und parallel ist, ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

1) Ein Bogen AB wird von einem in ihm selbst oder in seiner geodätischen Verlängerung gelegenen Punkte C einfach dadurch abgetragen, dass man ihn ohne Aenderung seiner Länge in seiner eigenen Richtung so lange verschiebt, bis sein Anfang A mit C zusammenfällt.

2) Ist
$$AB = \parallel A'B',$$
so ist auch
$$AA' = \parallel BB'.$$
Denn die letzteren beiden Bogen sind durch die Diagonalen $A'B$, AB' in genau derselben Weise mit einander verbunden, wie die ursprünglichen.

3) Sind in zwei Dreiecken zwei Paar Seiten gleich und parallel, so sind auch die dritten Seiten gleich und parallel. Denn ist
$$AB = \parallel A'B'$$
und
$$AC = \parallel A'C',$$
so ist nach 2) sowohl
$$AA' = \parallel BB',$$
als auch
$$AA' = \parallel CC'.$$

In Folge der vorausgesetzten Fundamentaleigenschaft unserer Fläche ergiebt sich hieraus
$$BB' = \parallel CC'$$
und wieder nach 2)
$$BC = \parallel B'C',$$
w. z. b. w.

4) Sind AB und AC Theile ein und derselben geodätischen Linie, deren Längen sich verhalten wie $1 : n$, und sind $A'B'$, $A'C'$ die geodätischen Bögen, welche man erhält, indem man AB und AC von demselben Punkte A' aus abträgt, so sind auch $A'B'$ und $A'C'$ Theile ein und derselben geodätischen Linie, und ihre Längen verhalten sich ebenfalls wie $1 : n$.

Beweis. Sei zunächst $n = 2$. Dann ist
$$AA' = \parallel BB' = \parallel CC',$$
folglich
$$BC = \parallel B'C';$$
ferner
$$AB = \parallel BC = \parallel A'B',$$
also
$$A'B' = \parallel B'C'.$$

Nach 1) muss daher $B'C'$ die Verlängerung von $A'B'$ bilden und ihm an Länge gleich sein. — Durch wiederholte Anwendung derselben Schlüsse ergiebt sich die Richtigkeit unseres Satzes für den Fall, dass n irgend eine rationale Zahl bedeutet, und daraus folgt, dass er auch für alle irrationalen Werthe von n gültig bleibt.

Nun sei s eine beliebige unbegrenzte geodätische Linie und A' ein Punkt ausserhalb derselben. Wenn man von s einen beliebigen Bogen AB abschneidet, diesen von A' aus abträgt und den entstehenden Bogen $A'B'$ nach beiden Seiten unbegrenzt verlängert, so entsteht eine neue geodätische Linie s', welche wir die durch A' gezogene Parallele zu s nennen wollen. — Die Lage dieser Parallelen hängt offenbar nur von der Lage des Punktes A', nicht aber von der Grösse, Lage und Richtung des Stückes AB ab.

Zwei parallele geodätische Linien s, s' können sich innerhalb des Flächentheils, den wir betrachten, niemals schneiden. Denn hätten sie einen Schnittpunkt C, so könnte man ein Stück AB der Linie s von C aus auf zwei verschiedene Weisen abtragen: einmal dadurch, dass man dasselbe in s verschiebt, bis sein Anfangspunkt nach C gelangt, und zweitens dadurch, dass man AB erst von einem Punkte A' der Linie s' aus abträgt und den entstehenden Bogen $A'B'$ in s' verschiebt, bis sein Anfang mit C zusammenfällt. Dies würde aber unseren Voraussetzungen widersprechen.

Durch den Punkt O, dessen Umgebung wir betrachten, ziehen wir nun zwei sich schneidende unbegrenzte geodätische Linien OP, OQ, die wir als Axen eines Coordinatensystems auf F betrachten. In jeder von ihnen denken wir uns eine bestimmte Richtung als die positive fixirt. Zieht man durch einen hinreichend nahe bei O gelegenen Punkt A von F zwei Parallele zu den Axen, so schneiden diese auf OP und OQ resp. zwei Bögen p, q ab, welche die Lage des Punktes A völlig bestimmen und daher als Coordinaten von A bezeichnet werden können.

In diesem System wird jede geodätische Linie durch eine lineare Gleichung zwischen den Coordinaten p, q dargestellt.

Sind nämlich A, B irgend zwei benachbarte Punkte einer geodätischen Linie und resp. p, q und $p+dp$, $q+dq$ ihre Coordinaten, so gehört auch der Punkt C mit den Coordinaten $p+2dp$, $q+2dq$ der Curve an. Denn bezeichnen wir etwa noch die Punkte mit den Coordinaten $p+dp$, q und $p+2dp$, $q+dq$ durch A' und B', so ist in den Dreiecken $AA'B$, $BB'C$

$$AA' = \| \, BB' = \| \, dp,$$

$$A'B = \| \, B'C = \| \, dq,$$

also auch

$$AB = \| \, BC,$$

und daher jeder dieser beiden Bogen die Verlängerung des anderen. Aehnlich ergiebt sich, dass auch jeder Punkt mit den Coordinaten

$p + \nu dp$, $q + \nu dq$, wo ν zunächst irgend eine rationale und dann auch jede irrationale Zahl bedeuten kann, der Curve angehört. Diese letztere erfüllt somit die Differentialgleichung

$$\frac{dq}{dp} = \lambda, \tag{1}$$

wo λ eine Constante bedeutet, und wird daher in endlicher Form durch eine Gleichung ersten Grades zwischen p und q dargestellt. Auch umgekehrt ist jede Curve, welche eine solche Gleichung befriedigt, eine geodätische Linie, wie sich leicht beweisen lässt. Durch Schlüsse, welche den eben angewendeten völlig analog sind, ergiebt sich, dass in jeder geodätischen Linie das Bogenelement ds, welches einem festen Zuwachs dp von p entspricht, von der Lage seines Anfangspunktes, also dem Werthe von p, unabhängig ist.

Denken wir uns die Fläche F durch drei Gleichungen von der Form

$$x = \varphi(p, q); \quad y = \psi(p, q); \quad z = \chi(p, q)$$

und die betrachtete geodätische Linie durch ihre Differentialgleichung

$$\frac{dq}{dp} = \lambda \tag{1}$$

gegeben, so hat man unter Anwendung der bekannten Gauss'schen Bezeichnungen

$$ds^2 = dp^2(E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2).$$

Die Unabhängigkeit des Bogenelementes von p drückt sich daher aus durch die Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dp}(E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2) \\ &= \frac{\partial E}{\partial p} + \lambda\left(\frac{\partial E}{\partial q} + 2\frac{\partial F}{\partial p}\right) + \lambda^2\left(2\frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial G}{\partial p}\right) + \lambda^3\frac{\partial G}{\partial q} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

welche, da sie für beliebige Werthe von λ bestehen soll, sofort in die vier anderen

$$\frac{\partial E}{\partial p} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial E}{\partial q} + 2\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \tag{4}$$

$$2\frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial G}{\partial p} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial G}{\partial q} = 0 \tag{6}$$

zerfällt.

Weitere Gleichungen für die Functionen E, F, G ergeben sich aus dem Umstande, dass die geodätischen Linien unserer Fläche durch lineare Gleichungen zwischen p und q dargestellt werden. Die hierfür nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, welche von Beltrami aufgestellt worden sind (Annali di matematica, I. serie, tom. VII, pag. 188), bestehen in vier Differentialgleichungen, denen die Functionen E, F, G genügen müssen. Wir haben für den gegenwärtigen Zweck nur von der ersten und letzten derselben Gebrauch zu machen, die folgendermassen lauten:

$$E\left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}\right) - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial p} = 0,$$

$$G\left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}\right) - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial q} = 0.$$

In Folge von (3) und (6) reduciren sich diese Gleichungen sofort auf

$$2\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial E}{\partial q} = 0,$$

$$2\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial p} = 0,$$

und liefern in Verbindung mit den Gleichungen (4) und (5)

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial p} = 0.$$

Die Grössen E, F, G sind also sämmtlich constant. Das Krümmungsmass unserer Fläche ist daher gleich Null und diese selbst developpabel, wie wir beweisen wollten.

Freiburg i/Br., Ende Juni 1881.

Verlag von Mod

Modelle

Ein P
Zahlen (Ind
in O mit ei
selben kan
oder gerade
Zweig in je

Diese
Ein (
ist also re
Die Singula
Ebenen (α)
blen in der
in O einen
fern l. m.

N:o 6 (19, 16, 15). **(2, 3, 5)** -
Doppelcurve imaginär.

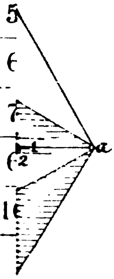
N:o 7 (19, 16, 15). **(2, 4, 5)** -
Zwei Doppelcurvenzweige
Punkte.

N:o 8 (19, 17, 15). **(2, 4, 6)** -
Zwei Doppelcurvenzweige
(3, 6, 9).

Charak

(Be

N:o	m	r
1	3	4
2 u. 5	4	5
3	4	6
4 u. 7	5	7
6	5	(2
8	7	16



Jede Nummer ist in ein a
Reichsmark, jede der übrigen à
Die Preise verstehen sich i
schieht auf Kosten und Gefahr
Lund, 1881.

Der Unterzeichr
täts-Buchhandlun

Faden-Modelle (

Punkt, Vereinigung von stat. Ebene und Punkte (α und β).

$(x = a\lambda^2,\ y = b\lambda^3,\ z = c\lambda^5)$.

aufge Punkt, Vereinigung von stat. Punkte und Tangente (β und θ).
pag. durch O: der eine mit (1, 2, 3) -, der andere mit (2, 4, 5) -
tione

Zwe $(x = a\lambda^2,\ y = b\lambda^4,\ z = c\lambda^5)$.

die 1 Punkt, Vereinigung von allen drei Singularitäten (α, β, θ).
durch O mit Punkten von der ersten Form, (1, 2, 3) und

$x = a\lambda^3,\ y = b\lambda^4 + c\lambda^5,\ z = d\lambda^6 + e\lambda^7)$.

sofo

tere der Developpablen.

zeichnungen von Cayley und Salmon).

	n	α	β	x	y	$g+\Delta$	$h+D$	θ
	3	0	0	0	0	1	1	0
	4	1	1	2	2	2	2	0
	4	0	0	4	4	3	3	2
	5	1	1	8	8	5	5	2
	5	2	2	5	5	4	4	0
	8	4	2	26	25	17	13	3

und

ma
wie

---

partes Kistchen verpackt und einzeln verkäuflich; N:o 8 à 30
20 Mk. **Ganze Serie: 150 Mark.**
incl. Emballage, excl. Versendungskosten. Die Zusendung ge-
des Empfängers.

Gleerup'sche Universitäts-Buchhandlung.

ete bestellt hiermit bei der **Gleerup'schen Universi-**
in Lund:

Zweite Serie) von Singularitäten, N:o

unkte

gente

lung

Bardelli, *S*

Battaglini,
getiche.

Beltrami, *I*
Domenic

— *Sulla teo*

Bertini, *Sull*
5.° ordine

Betti, *Sopra l*

Boncompagn
mento ine

Borchardt, *S*
logues à c
métrico-géo
ments.

Brioschi, *So*
dell'ottavo

— *Il risulta*
l'una cubi

Caporali, *So*
plamente i
piane.

Casorati, *Un*

Cayley, *On*

Cerruti, *Into*
zione di al

Cremona, *Sc*
di quart'

Darboux, *Su* Bd. XVIII.

Dini, *Alcuni*
una varia

INDEX OPUSCULORUM

quae in hoc volumine continentur:

Opuscula singula non veneunt.

IN MAILAND. — PREIS 20 MARK

IN MEMORIAM DOMINICI CHELINI

COLLECTANEA MATHEMATICA

NUNC PRIMUM EDITA

CURA ET STUDIO

L. CREMONA et E. BELTRAMI.

Opuscula conscripserunt:

T. REYE	Argentorati	**J. BARDELLI**	Mediolani
L. SCHLAEFLI	Bernæ	**F. BRIOSCHI**	Mediolani
C. G. BORCHARDT	Berolini	**J. JUNG**	Mediolani
L. KRONECKER	Berolini	**H. CAPORALI**	Neapoli
A. CAYLEY	Cantabrigiæ	**H. BETTI**	Pisis
T. A. HIRST	Londini	**U. DINI**	Pisis
G. DARBOUX	Lutetiæ Parisiorum	**E. PADOVA**	Pisis
C. HERMITE	Lutetiæ Parisiorum	**J. BATTAGLINI**	Romæ
A. MANNHEIM	Lutetiæ Parisiorum	**B. BONCOMPAGNI**	Romæ
H. S. SMITH	Oxonii	**V. CERRUTI**	Romæ
C. F. GEISER	Turici	**L. CREMONA**	Romæ
R. WOLF	Turici	**E. BELTRAMI**	Ticini
H. D'OVIDIO	Augustæ Taurinorum	**E. BERTINI**	Ticini
F. SIACCI	Augustæ Taurinorum	**F. CASORATI**	Ticini

Accessit imago ejusdem Chelini et testamentum Nic. Tartaleae.

SUMPTIBUS

ULRICI HOEPLI

BIBLIOPOLAE

NEAPOLI MEDIOLANI PISIS

MDCCCLXXXI.

Pu

Pu
du

Pu
d

$x =$

te

zei

ipa
2
inc
de

G

iete
g i

Zv

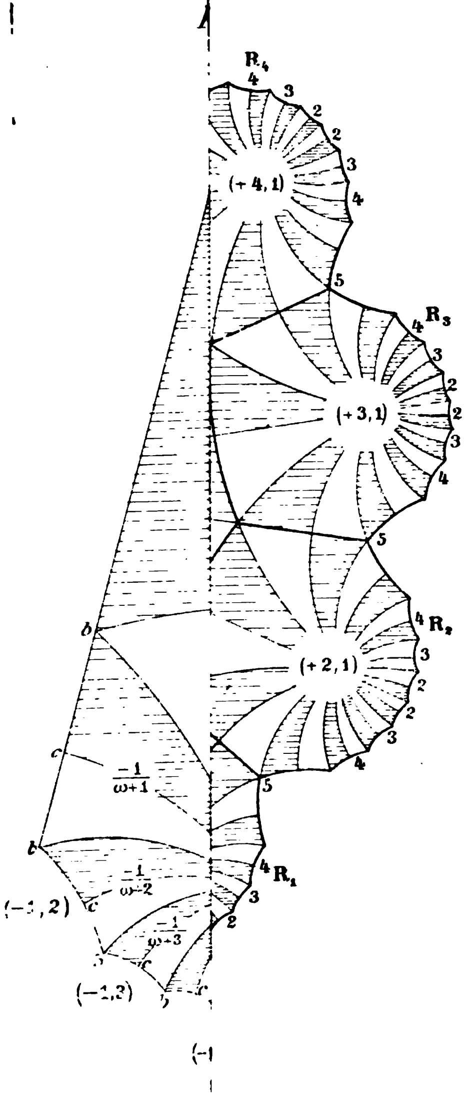
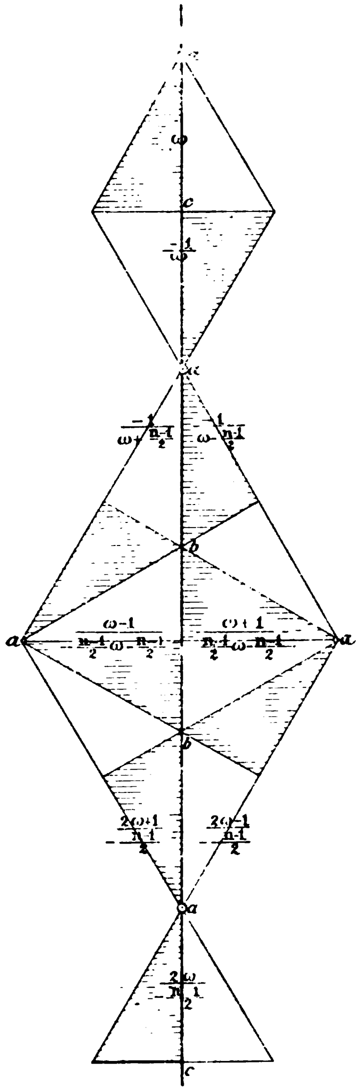
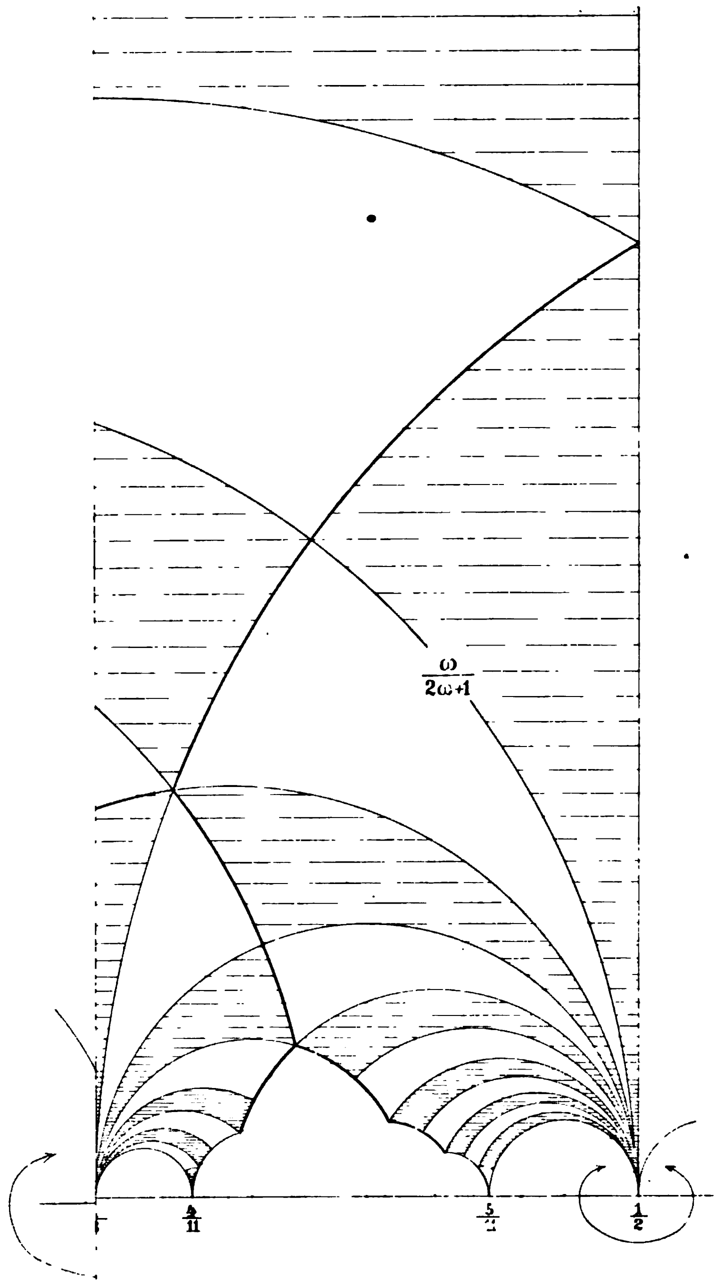

R4
R3
R2
R1
(+4, 1)
(+3, 1)
(+2, 1)
(−1, 2)
(−1, 3)
$\frac{-1}{\omega+1}$
$\frac{-1}{\omega+2}$
$\frac{-1}{\omega+3}$

Fig. 3.


ω
c
$-\frac{1}{\omega}$
b
a


ω
2ω+1
1/2

Mitteilungen

der Verlagsbuchhandlung

B. G. Teubner in Leipzig.

No. 3. Diese Mitteilungen sollen das Publikum von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen. Dieselben sind in allen Buchhandlungen gratis zu haben, werden auf Wunsch aber auch direkt franko übersandt. 1881.

Erste Abteilung.

Notizen über künftig erscheinende Bücher.

I. Philologie und Altertumswissenschaft.

andbuch der griechischen Staatsalterthümer von Gustav Gilbert, Oberlehrer am Gymnasium zu Gotha, 2 Theile. 1. Theil: Der Staat der Lakedaimonier und Athener. gr. 8. geh.

In Erfüllung einer vor einer Reihe von Jahren übernommenen erpflichtung soll im Laufe dieses Jahres der erste Teil eines Handbuchs er griechischen Staatsaltertümer erscheinen, welches den Staat er Lakedaimonier und Athener umfassen wird. Die Darstellung der eiden Staatsverfassungen zerfällt in einen kürzeren historischen und nen längeren antiquarischen Abschnitt. Der erstere giebt eine Übersicht er Verfassungsentwicklung von der ältesten Zeit bis auf die römische errschaft und schliefst mit einer kurzen Darstellung der Verfassung nter dieser Herrschaft. Der antiquarische Teil schildert im wesentlichen e Verfassung des 5. und 4. Jahrhunderts.

Die Disposition dieses ersten Teiles ist demnach folgende:

I. Der Staat der Lakedaimonier. 1. Historischer Teil: Die gehichtliche Entwicklung des Staates der Lakedaimonier und Übersicht er Verfassung unter römischer Herrschaft. 2. Antiquarischer Teil: . Die Elemente der Bevölkerung, a. die Heloten, b. Die Perioiken, die Spartiaten. B. Die Regierungsgewalten, a. das Königtum, der Rat der Alten, c. die Apella, d. die Ephoren, e. die übrigen eamten. C. Das Kriegswesen. D. Finanz- und Gerichtswesen. E. Der kedaimonische Bund.

II. Der Staat der Athener. 1. Historischer Teil: A. Die Entehung des athenischen Gesamtstaates und die eupatridische Geschlechtserfassung. B. Solon und Kleisthenes. C. Der Staat der Athener bis m Jahre 146 und Übersicht der athenischen Verfassung unter römischer errschaft. 2. Antiquarischer Teil: A. Die Elemente der Bevölkerung. die Sklaven, b. die Metoiken, c. die athenische Bürgerschaft, die politische Gliederung der Bürgerschaft und das Assoziationswesen. . Die Organe der Regierung und die souveräne Staatsgewalt. a. die

Magistratur, α. Allgemeines, β. die einzelnen Magistrate, b. der Rat der 500 und der Rat vom Areopag, c. die Ekklesie. C. Das Kriegswesen. D. Das Finanzwesen. a. Allgemeines, b. die Ausgaben, c. die Einnahmen. E. Das Gerichtswesen. F. Die athenische Bundesherrschaft. a. der erste Bund, b. der zweite Bund, c. die athenischen Kleruchien.

G. G.

Hermann Köchly's gesammelte kleine philologische Schriften. Unter Leitung von G. M. Thomas herausgegeben von Gottfried Kinkel jun. und Ernst Böckel. Erster Band: Opuscula latina. Zweiter Band: Deutsche Aufsätze.

Während seiner letzten Krankheit im November 1876 beauftragte Hofrat Köchly die Unterzeichneten mit der Ordnung und Herausgabe seines Nachlasses, sowie der zu verschiedenen Zeiten erschienenen vermischten Schriften. Im Einverständnis mit der Familie des Verfassers wird zunächst eine Sammlung der „Opuscula" veranstaltet, deren Wiederabdruck den zahlreichen Schülern, Freunden und Verehrern des Heimgegangenen gewifs willkommen sein wird. Während seines Aufenthalts in der Schweiz (1850—64) verfafste Köchly nicht weniger als 33 akademische Gelegenheitsschriften. Von diesen sind die Abhandlungen über Homer am berühmtesten. Sie zeichnen sich durch Schärfe des Urteils wie durch Schönheit der Form aus und werden überall wo man die griechische Litteratur schätzt und studiert, eifrig gelesen und kommentiert. Dazu kommen 1) zahlreiche kritisch-exegetische Erörterungen über einzelne Stellen der griechischen Epiker, Bukoliker und Tragiker und 2) litterarhistorische, archäologische und kritische Essays. Besonders wertvoll dürften dem wissenschaftlichen wie einem weiteren Publikum die sehr anziehend geschriebenen historischen Aufsätze sein; hier vereinigen sich in jedem einzelnen Falle eindringende Forschung, lebhafte Darstellung und wohlthuende Wärme der Empfindung, um ein unvergleichliches Ganze zu schaffen.

Aufgenommen sind folgende Abhandlungen:

I. Band. 1. De Iliadis B, 1—483 disputatio (1850). — 2. De genuina catalogi Homerici forma dissertatio (1853). — 3—7. De Iliadis carminibus diss. III—VII (1857—1859). — 8—10. De Odysseae carminibus diss. I—III (1862—63). — 11. Coniectaneorum epicorum fasc. III [zu den homerischen Hymnen] (1856). — 12. Coniectt. epicc. fasc. I [zu den Fragmenten der griechischen Epiker] (1851). — 13. De diversis Hesiodeae Theogoniae partibus diss. (1860). — 14. Emendationes Apollonianae (1850). — 15. Coniectanea in Apollonium et Oppianum (1838). — 16. De aliquot Quinti Smyrnaei locis epistola critica ad Franciscum Spitznerum scripta (1841). — 17. De lacunis in Quinto Smyrnaeo quaestio (1843). — 18. Emendationes Nonni (1836). — 19. Coniectt. epicc. fasc. II [zu Nonnos] (1852). — 20. De Nonni Dionysiacorum libro XXXIX diss. (1855). — 21. De evangelii Joannei paraphrasi a Nonno facta diss. (1860). — 22. De Musaei Grammatici codice Palatino scr. variorum lectt. lancem saturam adiect A. K. — 23. Carminum Theocriteorum in strophas suas restitutorum specimen (1858). — 24—28. Emendationum in Euripidis Iphigeniam Tauricam plt. I—V (1860—1862). — 29. De Lacedaemoniorum cryptia commentatio (1835).

II. Band. 1. Homer und das griechische Epos. Eine Skizze (1842). — 2. Über das zweite Buch der Iliade (1845). — 3. Hektor's Lösung (1859). — 4. Über den Zusammenhang und die Bestandtheile der Odyssee (1862). — 5. Beiträge zur Kritik und Erklärung des Tryphiodor (1839). — 6. Über die Perser des Aeschylus (1874). — 7. Über Sophokles

Antigone. Vorlesung (1844). — 8. Die Alkestis des Euripides (1847). — 9. Die Einheit der Handlung in Euripides Hekabe (1846). — 10. Über die Vögel des Aristophanes (1857). — 11. Der Freiheitskrieg der Hellenen gegen Philippos und die Schlacht bei Chäroneia, 340—338 v. Chr. (1861). — 12. Über Pyrrhos und Rom (1868). — 13. Über die napoleonische Karte des alten Galliens (1862). — 14. Über das römische Pilum (1862). — 15. Zu den Wurfübungen mit dem römischen Pilum und der hasta amentata (1865). — 16. Über die hasta amentata (1868). — 17. Eröffnungsrede zur 24. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner (1865).

Von diesen Aufsätzen sind mehrere sehr selten geworden; andere, wie No. 14, 17 und 28 des ersten Bandes, waren seit Jahren nicht mehr zu haben. Ausgeschlossen sind nur einige Rezensionen älteren Datums sowie die Forschungen über griechische Militärschriftsteller, welche in der vorliegenden Form sich nicht zum Wiederabdruck eignen.

Die Herausgeber haben sich in die Arbeit in der Weise geteilt, dafs Dr. Kinkel den ersten und Prof. Böckel den zweiten Band redigiert, während Hr. Prof. Thomas die Vorrede liefern wird.

G. M. Thomas. Kinkel jun. Böckel.

München, Zürich, Karlsruhe, im Mai 1881.

K. L. Kayser's Homerische Abhandlungen. Herausgegeben von H. Usener. gr. 8. geh.

Kayser in Heidelberg hat mit zwei kleinen lateinischen Abhandlungen *De diversa Homericorum carminum origine* (1835) und *De interpolatore Homerico* (1842) in die Homerstudien fördernd eingegriffen, und durch die zweite, worin er die charakteristischen Merkmale der lediglich zur Herstellung eines nachträglichen Zusammenhangs gedichteten Füllstücke endgiltig feststellte, sich ein bleibendes Verdienst erworben. So sehr sie Beachtung verdienen, sind doch beide Schriften längst nur äusserst wenigen bekannt und fast verschollen. Durch einen berichtigten Abdruck glaubte der Herausgeber ebenso den Schriften selbst und dem Andenken des Verfassers, wie der noch immer eifrig fortgesetzten Homerforschung einen Dienst zu erweisen. In das Bändchen wurde aus dem handschriftlichen Nachlass und aus einer Anzahl von Rezensionen nur aufgenommen, was entweder absoluten Wert zu haben schien oder doch, wie der vom Verfasser selbst zum Druck bestimmte deutsche Versuch einer Geschichte des Homerischen Epos, besonders geeignet war, einen Überblick über Kaysers Ansichten zu gewähren. Das Vorwort giebt auf Grund des Nachlasses und Tagebuchs die Geschichte von Kaysers Homerischen Studien und sucht die wesentlichen Momente von K.s Bildungsgang klar zu stellen; als Beilagen sind demselben ein Auszug der Homer betreffenden Aufzeichnungen in K.s Tagebuch und eine bibliographische Übersicht seiner Schriften und Rezensionen zugegeben.

Kritische und paläographische Beiträge zu den alten Sophokles-Scholien von Peter N. Papageorgiu. gr. 8. geh.

Der Verfasser versucht hauptsächlich, eine ansehnliche Zahl von Scholienstellen kritisch zu behandeln; im ersten Teile wird nach einer kurzen Darlegung der Mängel der Elmsley'schen Ausgabe über die Codices gesprochen, die alte Scholien geben und besonders über den Florentinus G., worauf der Verfasser zur Besprechung der Frage von dem Texte, den die Laurentianischen Scholien voraussetzen, übergeht. Den Schlufs bildet eine Untersuchung des Sprachgebrauchs der Scholiasten. Die kritische Besprechung der korrupten Stellen bildet ausschliefslich das Thema des zweiten Teiles.

Entwürfe zu griechischen Exercitien von Carl Schmelzer, Gymnasialdirektor in Hamm. gr. 8. kart.

Man klagt wohl nicht mit Unrecht, daß die Schüler der Oberklassen unserer Gymnasien so wenig gewandt im deutschen Ausdruck sind. Vielleicht tragen einen Teil der Schuld daran manche unserer Übersetzungsbücher, welche, allzusehr bestrebt, den deutschen Ausdruck dem der Fremdsprache anzupassen, dem Schüler ein Deutsch bieten, das zu einem gewandten deutschen Ausdruck wenig anleitet. Die vorliegenden Übungsstücke, deutschen Schriftstellern entnommen, muten dem Schüler hier und da eine intensivere Arbeit zu, erschweren ihm etwas seine Aufgabe. Wer überzeugt ist, daß strenge, intensive Arbeit und festes, sicheres Wissen korrespondieren, der dürfte dies für einen Vorzug halten.

T. Macci Plauti Miles Gloriosus, emendabat et adnotabat O. Ribbeck. gr. 8. geh.

Die Ausgabe bildet den Abschlufs einer langjährigen Beschäftigung mit dem schwer verdorbenen Text, von welcher in verschiedenen Jahrgängen des Rheinischen Museums seit 1857 Proben vorgelegt sind. In den Anmerkungen sind die Abweichungen hauptsächlich von den Brix'schen Lesarten verzeichnet mit Angabe der handschriftlichen Überlieferung zu den betreffenden Stellen. Hierfür ist dem Herausgeber durch G. Löwe's und seiner Genossen Güte sowohl die von dem erstgenannten vollzogene, ergebnisreiche Revision des Mailänder Palimpsestes als auch die von Hinck für Ritschl besorgte neue Vergleichung des Vetus zur Verfügung gestellt. Den Decurtatus hat der Herausg. selbst von neuem eingesehen.

Die Cantica des Terenz und ihre Eurythmie. Von Carl Meissner. Separatabdruck aus den Supplementen der Jahrbücher für klassische Philologie. gr. 8. geh.

Anregung zu vorstehender Untersuchung, die sich nur auf die Cantica im engeren Sinne des Wortes, auf die Cantica mutatis modis erstreckt, hat mir C. Conradts Schrift „über die metrische Composition der Comödien des Terenz (Berlin 1876)“ gegeben, der überhaupt das Verdienst hat, die schwierige Frage der Cantica wieder in Flufs gebracht und in vieler Beziehung gefördert zu haben. Mit Conradt stimme ich darin überein, dafs der metrische Bau sämtlicher Cantica auf dem Prinzip der Dreiteilung beruht; in betreff der Art und Weise jedoch, wie diese Dreiteilung selbst aufzufassen sei, gehen unsere Ansichten völlig auseinander. — Die Schrift besteht aus einem allgemeinen und einem speziellen Teile. Der erstere zerfällt wieder in sieben Abschnitte, in deren erstem und zweitem über Canticum und Diverbium, sodann über die Frage gehandelt wird, ob sämtliche jambische Senarpartieen dem Diverbium angehören. Im Kapitel 3 werden die in den Cantica vereinzelt vorkommenden jambischen Senare besprochen, im Kapitel 4 wird ein neues Gesetz über den Gebrauch der Klauseln aufgestellt und im Kapitel 5 die Grenze zwischen dem eigentlichen Canticum und der stichisch-lyrischen Partieen gezogen. Die beiden letzten Kapitel legen das Prinzip der Dreiteilung selbst, das sämtliche Cantica beherrscht und durchdringt, ausführlich dar. — Der spezielle Teil beschäftigt sich mit der metrischen Analyse der Cantica. Da aus derselben hervorgeht, dafs der Text des Terenz, und zwar schon in sehr früher Zeit, durch interpolierte Verse verderbt ist, eine Ansicht, die bereits F. Ritschl (opusc. II S. 797) mit divinatorischem Scharfblick ausgesprochen hat, so ist über diesen Punkt, sowie über die handschriftliche Überlieferung überhaupt, in dem am

Schlusse beigefügten Anhang gehandelt worden. Zugleich aber wird die Analyse darthun, daſs in den Cantica des Terenz, die bisher nichts weiter als ein chaotisches Gewirr bunt durcheinander gewürfelter Verse und Versarten waren, nicht etwa Willkür, sondern die strengste Regelmäſsigkeit herrscht, so daſs auch sie mit ihrem eurythmischen Bau von der alle Denkmäler der antiken Poesie mehr oder weniger durchdringenden Gesetzmäſsigkeit der Form Zeugnis ablegen.

Bernburg. C. M.

Taciti dialogus de oratoribus. Recognovit Aemilius Baehrens.

Diese neue Ausgabe des Dialogus stellt sich in erster Linie die Aufgabe, den traurig verdorbenen Text, soweit dies mit Hilfe besonnener Konjekturalkritik möglich ist, in seiner früheren Reinheit wiederherzustellen. Die vielfachen seit dem Erscheinen von Michaelis' Ausgabe auf diesen Zweck gerichteten Bestrebungen der Gelehrten haben manches gute zu Tage gebracht; aber noch wartet eine groſse Zahl korrupter Stellen auf ihre Heilung. Der Herausgeber, eben so weit von Buchstabenverehrung (wie sie neuerdings in so abstoſsender Weise zu Tage getreten ist) als von bodenloser Willkür sich ferne haltend, wird die Gründe für die von ihm vorgenommenen Änderungen in einem beigefügten knappen commentarius criticus darlegen. — Unter dem Texte werden die Varianten der beiden in ihrer ursprünglichen Gestalt hergestellten Handschriftenklassen mitgeteilt werden, wodurch zum ersten Male möglich sein wird, die bisher so hintangesetzte zweite Klasse in ihrer ganzen Trefflichkeit kennen zu lernen. Die römischen codices sind nicht ohne Nutzen an einer Reihe von Stellen von A. Mau nochmals geprüft worden.

Gr. E. Bs.

II. Pädagogik. Volks- und Jugendschriften.

Iduna. Deutsche Heldensagen, dem deutschen Volk und seiner Jugend wiedererzählt von Dr. Karl Heinrich Keck, Direktor des Gymnasiums zu Husum. Vierter Teil: Dietrich von Bern und seine Gesellen. 8. geh.

Mit diesem Bande, der sich an Gudrun, die Nibelungen und Wieland den Schmied anreiht, wird das ganze Werk abgeschlossen sein; denn alles, was sonst noch aus der echtdeutschen Heldensage bemerkenswert sein möchte, wie Walter von Aquitanien, Wolf-Dietrich, König Rothers Brautfahrt ꝛc., findet episodisch, entweder in den Nibelungen oder in Dietrich von Bern, seine Erledigung. Auch in diesem letzten Teil ist der Verfasser bemüht gewesen, einerseits aus der Vergleichung der deutschen und der nordischen Überlieferung, in stetem Hinblick auf die Idee des der Sage zu Grunde liegenden Mythus, möglichst die echten und ursprünglichen Züge der Sage wiederherzustellen, anderseits in bezug auf Stil und einheitliche Komposition den künstlerischen Anforderungen zu genügen. Freilich machte bei Dietrich von Bern die Forderung künstlerischer Einheit ganz besondere Schwierigkeiten. Denn in der nordischen Überlieferung ist bekanntlich die Wilkinasaga die Hauptquelle: sie ist in der Form zwar sehr nüchtern und rationalistisch, dem Inhalt nach aber bietet sie überaus verworrene und krause Bilder von allem, was mit Dietrich in engerer oder loserer Verbindung steht, und zwar in der nichts weniger als künstlerischen Weise, daß fast jeder Held nur auftritt, um bald wieder für immer zu verschwinden. Unsere eigene mittelalterliche Poesie aber enthält zwar eine außerordentliche Fülle von Liedern, die sich auf den Sagenkreis von Dietrich beziehen, aber teils sind sie mit willkürlichen phantastischen Erfindungen der Sänger versetzt, teils entbehren sie geradezu, wie z. B. das Gedicht von Alpharts Tod, jedes Anhalts in der echten Sage. Wenn der Verfasser also zum ersten Mal den Versuch wagt, die formlose wüste Masse der Überlieferung zu sichten und künstlerisch zu gestalten, so muß das von ihm entworfene Bild von Dietrich und seinen Gesellen sich von den früheren Darstellungen in wesentlichen Zügen unterscheiden, und die neue Auffassung wird vielleicht manchen Kenner zuerst befremden: aber ein kritischer Anhang wird die Neugestaltung des Bildes überall ausreichend begründen. und der Verfasser giebt sich der Hoffnung hin, daß in den wichtigsten und wesentlichsten Resultaten der Forschung ihm die Zustimmung der Sagenkundigen nicht fehlen wird.

III. Mathematik.

Einleitung in die neuere Geometrie. Von Wilh. Fuhrmann, Oberlehrer an der Realschule I. O. zu Königsberg i. Pr. Mit 4 Figurentafeln. gr. 8. geh.

Nachdem gewichtige Stimmen es ausgesprochen hatten, daſs ein Teil der Sätze u. Methoden der neueren Geometrie in die Schule einzuführen sei, entstanden eine Menge Schriften, welche diesen Gegenstand verarbeiteten. Vorliegende Schrift verfolgt dasselbe Ziel; indem aber der Verfasser in der Form der Behandlung sich an die Euklidische Methode anlehnt, glaubt er die Einführung in das Wesen der neuern Geometrie zu erleichtern. Da manche Lehrbücher diese elementaren Teile der neueren Geometrie entweder gar nicht oder nur unvollständig enthalten (Kambly, Koppe), so kann diese Schrift zugleich als Anhang für jene gelten. Ein reichhaltiges Übungsmaterial in Gestalt von meist leichteren Aufgaben, von denen manche wohl ganz neu sind, soll ferner dazu dienen, die Erkenntnis der neuen Theorie zu befestigen und zugleich den Vorzug der neuen Methoden vor den alten ins Licht zu setzen.

IV. Litteratur-Wissenschaft.

Katalog der im Besitze der Königlichen öffentlichen Bibliothek zu Dresden befindlichen Handschriften. Bearbeitet im Auftrage der Generaldirektion der Königl. Sammlungen für Kunst und Wissenschaft von Dr. Franz Schnorr von Carolsfeld, königl. Bibliothekar.

Umfassendere Verzeichnisse von Handschriften der Königlichen öffentl. Bibliothek zu Dresden liegen bis jetzt in folgenden Werken gedruckt vor: — Fr. Ad. Ebert, Geschichte und Beschreibung der Dresdner Bibliothek (Leipz. 1822), Henr. Orthob. Fleischer, catalogus codicum manuscriptorum orientalium bibliothecae Regiae Dresdensis (Leipz. 1831), und K. Falkenstein, Beschreibung der k. öffentl. Bibliothek zu Dresden (Dresden 1839). In dem Ebert'schen Buche sind die Handschriften der Abteilungen D („Auctores classici") und O („Spanische, italienische, französische u. s. w. Handschriften") verzeichnet; Fleischers Katalog beschränkt sich, wie sein Titel besagt, auf die orientalischen Manuskripte; Falkenstein hat in seinem Werke die Abteilungen A—O aufgenommen, doch ohne die Absicht zu verfolgen, deren Bestand vollständig zu inventarisieren.

Seit dem Erscheinen des jüngsten der angeführten drei Werke hat sich in der Dresdner Bibliothek der Besitz an Handschriften so beträchtlich gemehrt, daſs die Abteilungen P—R und einige mit kleinen Buchstaben bezeichnete Klassen neu hinzugekommen sind. Da es überdies in zahlreichen Fällen wünschenswert erschien, daſs die Beschreibungen und die Litteraturnachweisungen, welche Falkenstein bietet, durch genauere Spezification des Inhaltes der Handschriften und unter Benutzung der neueren litterarischen Hilfsmittel vervollständigt würden, so hat auf Antrag der Bibliotheksdirektion die Königl. Generaldirektion der Königl. Sächs. Sammlungen für Kunst und Wissenschaft beschlossen, einen neu bearbeiteten Manuskriptenkatalog zu veröffentlichen, welcher sämmtliche Dresdner Handschriften auſser den in der Abteilung E aufgestellten orientalischen, d. i. eine Anzahl von ca. 6000 Bänden verzeichnen wird. Der Druck dieses neuen Katalogs hat bereits begonnen.

Zweite Abteilung.

Erschienene Bücher.

Dritter Bericht

über die im Jahre 1881 erschienenen Neuigkeiten, neuen Auflagen und Fortsetzungen.

I. Philologie und Altertumswissenschaft.

Brambach, W., das Tonsystem und die Tonarten des christlichen Abendlandes im Mittelalter, ihre Beziehungen zur griechisch-römischen Musik und ihre Entwicklung bis auf die Schule Guido's von Arezzo. Mit einer Wiederherstellung der Musiktheorie Berno's von der Reichenau nach einer Karlsruher Handschrift. [IV u. 53 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 1.60.

Cohn, Leopold, de Aristophane Byzantio et Suetonio Tranquillo Eusthati auctoribus. Commentatio ex supplementis annalium philologicorum seorsum expressa. [92 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.—

Gerber, A. et **A. Greef,** Lexicon Taciteum. Fasciculus IV. [S. 337—480.] Lex.-8. geh. n. ℳ 3.60.

Heiberg, J. L., Dr. phil., philologische Studien zu griechischen Mathematikern. III. Besonderer Abdruck aus dem zwölften Supplementbande der Jahrbücher für classische Philologie. [28 S.] gr. 8. geh. n. ℳ —.80.

Heinichen, Friedrich Adolph, Dr. der Phil. und Lic. der Theologie, Gymnasialprorector a. D. und Professor, lateinisch-deutsches und deutsch-lateinisches Schulwörterbuch. Erster Theil: A. u. d. T.: Lateinisch-deutsches Schulwörterbuch zu den Prosaikern Cicero, Caesar, Sallust, Nepos, Livius, Curtius, Plinius d. J. (Briefe), Quintilian (10. Buch), Tacitus, Sueton, Justin, Aurelius Victor, Eutrop und zu den Dichtern Plautus, Terenz, Catull, Virgil, Horaz, Tibull, Properz, Ovid und Phaedrus. Vierte verbesserte Auflage, bearbeitet von Dr. A. Draeger, Director des Königl. Seminars zu Aurich. [X u. 957 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 6.—

Holzweißig, Dr. **Friedrich,** Oberlehrer am Gymnasium zu Bielefeld, griechische Syntax in kurzer, übersichtlicher Fassung auf Grund der Ergebnisse der vergleichenden Sprachforschung zum Gebrauch für Schulen bearbeitet. Zweite Auflage. [VI u. 67 S.] gr. 8. kart. ℳ —.75.

Jahrbücher für classische Philologie. Herausgegeben von Dr. Alfred Fleckeisen, Professor in Dresden. Zwölfter Supplementband. Zweites Heft. [S. 249—463.] gr. 8. geh. n. ℳ 4.50.

Inhalt: De dialogi qui Taciti nomine fertur sermone iudicium scripsit Theodorus Vogel. — De Aristophane Byzantio et Suetonio Tranquillo Eustathi auctoribus scripsit Leopoldus Cohn. — Philologische Studien zu griechischen Mathematikern. Von J. L. Heiberg. III. — De scholiis Homericis ad historiam fabularem pertinentibus scripsit Eduardus Schwartz.

Koch, Dr. **Ernst,** Professor an der K. S. Fürsten- und Landesschule zu Grimma, Griechische Schulgrammatik auf Grund der Ergebnisse der vergleichenden Sprachforschung bearbeitet. Achte Auflage. [XVI u. 400 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.80.

Lange, Dr. **Ludwig,** Geh. Hofrath und Professor der class. Philologie, das römische Königthum. Festrede zur Feier des Allerhöchsten Geburtstags Sr. Majestät des Königs am 23. April 1881 gehalten. [34 S.] 8. geh. ℳ —.60.

Methner, Dr. **J.,** Grundzüge einer Metrik und Rhythmik für den Schulgebrauch. [28 S.] gr. 8. kart. n. ℳ —.80.

Ostermann, Dr. **Christian,** Professor, Oberlehrer an dem Königl. Gymnasium zu Fulda, lateinisches Vokabularium, grammatikalisch [und etymologisch] geordnet in Verbindung mit einem Übungsbuche. Mit Berücksichtigung der neuen deutschen Rechtschreibung. 4 Abteilungen. gr. 8. kart. ℳ 1.65.

Einzeln:

I. Abt. Für Sexta (grammatikalisch geordnet). 21. Doppel-Auflage. [32 S.] ℳ —.30.

II. Abt. Für Quinta (grammatikalisch geordnet). 14. Doppel-Auflage. [32 S.] ℳ —.30.

III. Abt. Für Quarta (grammatikalisch geordnet). 11. Doppel-Auflage. [52 S.] ℳ —.45.

IV. Abt. Für Tertia (etymologisch geordnet) in Verbindung mit einem Übungsbuch zum Übersetzen aus dem Deutschen ins Lateinische. 7. Doppel-Auflage. [80 S.] ℳ —.60.

Ostermann, Dr. **Christian,** Professor, Oberlehrer an dem Königl. Gymnasium zu Fulda, lateinisches Übungsbuch im Anschluß an ein grammatikalisch geordnetes Vokabularium. Mit Berücksichtigung der neuen deutschen Rechtschreibung. 4 Abteilungen. gr. 8. geh. ℳ 3.60.

Einzeln:

I. Abt. Für Sexta. 18. Doppel-Auflage. [VIII u. 112 S.] ℳ —.75.

II. Abt. Für Quinta. 13. Doppel-Auflage. [VI u. 136 S.] ℳ —.90.

III. Abt. Für Quarta. 12. Doppel-Auflage. [127 S.] ℳ —.75.

IV. Abt. Für Tertia. 9. Doppel-Auflage. [VIII u. 190 S.] ℳ 1.20.

——— lateinisch-deutsches und deutsch-lateinisches Wörterbuch zu Ostermanns lateinischen Übungsbüchern für Sexta und Quinta alphabetisch geordnet. 11. verbesserte Doppel-Auflage. Mit Berücksichtigung der neuen deutschen Rechtschreibung. [79 S.] gr. 8. kart. ℳ —.75.

Plauti, T. Macci, comoediae. Recensuit instrumento critico et prolegomenis auxit Fridericus Ritschelius sociis operae adsumptis Gustavo Loewe, Georgio Goetz, Friderico Schoell. Tomi I. Fasciculus IV. Asinaria. Recensuerunt Georgius Goetz et Gustavus Loewe. Accedit codicis Ambrosiani J. 257 infer. specimen phototypicum. [XXVIII u. 110 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.60.

Schwartz, Eduardus, de scholiis Homericis ad historiam fabularem pertinentibus. Commentatio ex supplementis annalium philologicorum seorsum expressa. [65 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 1.60.

Siebelis, Dr. Johannes, Professor am Gymnasium zu Hildburghausen, Tirocinium poëticum. Erstes Lesebuch aus lateinischen Dichtern. Zusammengestellt und mit kurzen Erläuterungen versehen. Dreizehnte Auflage, besorgt von Dr. Richard Habenicht, Professor am Gymnasium i. Plauen i. V [VIII u. 91 S.] gr. 8. geh. ℳ —.75.

Vogel, Theodorus, de dialogi qui Taciti nomine fertur sermone iudicium. [Epistola gratulatoria F. A. Ecksteinio missa D. VI M. Ian. MDCCCLXXXI.] Commentatio ex supplementis annalium philologicorum seorsum expressa. [S. 249—282.] gr. 8. geh. n. ℳ 1.20.

Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana.

Eclogae poetarum latinorum. In usum gymnasiorum composuit Samuel Brandt. [VIII u. 146 S.] 8. geh. ℳ 1.—

Schulausgaben griechischer und lateinischer Klassiker mit deutschen Anmerkungen.

Ciceros Rede für T. Annius Milo. Für den Schul- und Privatgebrauch erklärt von Friedrich Richter. In dritter Auflage neu bearbeitet von Alfred Eberhard. [IV u. 112 S.] gr. 8. geh. *M* —.90.

Demosthenes neun Philippische Reden für den Schulgebrauch erklärt von C. Rehdantz. Erstes Heft. I—III: Olynthische Reden. IV: Erste Rede gegen Philippos. Sechste, verbesserte Auflage, besorgt von F. Blass. [VIII u. 174 S.] gr. 8. geh. *M* 1.20.

Xenophons griechische Geschichte. Für den Schulgebrauch erklärt von Dr. B. Büchsenschütz, Direktor des Friedrich-Werderschen Gymnasiums zu Berlin. Zweites Heft, Buch V—VII. Vierte vermehrte und verbesserte Auflage. [186 S.] gr. 8. geh. *M* 1.50.

Jahrbücher, neue, für Philologie und Pädagogik. Herausgegeben von Dr. Alfred Fleckeisen und Dr. Hermann Masius. 123. u. 124. Band. 1881.

5. Heft:

Inhalt: I. Abt. Anz. v. *K. Tümpel:* Ares und Aphrodite (Leipzig 1880) von *O. Crusius* in Dresden (jetzt in Leipzig). — Eurypylos, Melanippos und Komaitho. von *A. Schultz* in Hirschberg. — Zu griechischen dichtern. von *R. Schneider* in Duisburg. — Nochmals der goldene schnitt. von *R. Löhbach* in Mainz. — Der waffenstillstand des jahres 423 vor Chr. (zu Thukydides IV 118). von *F. Kiel* in Hannover. — Zu Tacitus Historien. von *H. Schütz* in Potsdam. — Die abfassungszeit des Platonischen Theaitetos von *E. Rohde* in Tübingen. — Zu Tacitus dialogus de oratoribus. von *H. Schütz* in Potsdam. — Zu Florus [II 13, 28]. von *A. F.* — Zu Lukianos. von *E. Ziegeler* in Bremen. — Zu Xenophons Kyropädie [I 1, 1]. von *Th. Büttner-Wobst* in Dresden. — Realistische bemerkungen zu Horatius. von *O. Jäger* in Köln. — Kritisches zur aegritudo Perdicae von *K. Rossberg* in Norden. — Alexandros und sein arzt Philippos. von *F. Rühl* in Königsberg (Preussen). — Zu Horatius oden [I 11, 31.] von *C. Jacoby* in Danzig. — Philologische gelegenheitsschriften.

II. Abt. Michael Neander. ein vortrag von *F. Meister* in Breslau (fortsetzung). — Wert und unwert der extemporalia. von *Ruprecht* in Hildesheim. — *K. F. Süpfle:* M. Tullii Ciceronis epistulae selectae temporum ordine compositae. für den schulgebrauch mit einleitung und erklärenden anmerkungen versehen. achte auflage umgearbeitet und verbessert von *E. Böckel* (Karlsruhe 1880). angez. von *J. H. Schmalz* in Mannheim. — *J. Ciaja:* griechisches übungsbuch zum übersetzen aus dem griechischen ins deutsche und aus dem deutschen ins griechische. erste abteilung für quarta (Leipzig 1879). angez. von *A. Rüdiger* in Schleiz. — *A. Schulz:* das höfische leben zur zeit der minnesinger. erster und zweiter band (Leipzig 1879 u. 1880). angez. von *G. Bötticher* in Berlin. — *A. Deppe:* des Dio Cassius bericht über die Varusschlacht verglichen mit den übrigen geschichtsquellen (Detmold 1870). angez. von *E. Glaser* in Gieszen. — *L. Strümpell:* psychologische pädagogik (Leipzig 1880). angez. von *M. Jahn* in Leipzig. — Ein französischer katechismus. von *L. Mezger* in Schönthal. — *C. Kapff:* biblische lebensbilder von Abraham bis David (Bremen 1880). angez. von *G. Sachse* in Posen. — Personalnotizen.

II. Pädagogik. Deutsche Schulbücher.

Bartels, Dr. **Friedrich,** Direktor sämtlicher Bürgerschulen in Gera, und **Gustav Wirth,** Lehrer an der höheren Töchterschule in Guben, deutsches Lesebuch für Mädchenschulen. In vier Teilen. III. Teil. [VI u. 402 S.] gr. 8. geh. n. *M* 1.60.

Franck, Dr. **H.,** Oberlehrer am Gymnasium zu Demmin, Hülfsbuch für den evangelischen Religionsunterricht in Gymnasien. Zweite Abteilung. Für die oberen Klassen. [VI u. 182 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 1.20.

Kraepelin, Dr. **Karl,** Realschul-Oberlehrer, Leitfaden für den botanischen Unterricht an mittleren und höheren Schulen. Zweite, umgearbeitete Auflage. [IV u. 69 S.] gr. 8. geh. ℳ —.75.

Wirth, G., Lehrer an der höheren Töchterschule in Guben, deutsches Lesebuch für höhere Töchterschulen. I. II. III. u. V. Teil. gr. 8. geh. n. ℳ 6.20.

Einzeln:

I. Teil. Unterstufe: Erster Kursus. Fünfte Auflage. [VI u. 131 S.] n. ℳ —.80.

II. Teil. Unterstufe: Zweiter Kursus. Fünfte Auflage. [VI u. 180 S.] n. ℳ 1.60.

III. Teil. Mittelstufe: Erster Kursus. Fünfte Auflage. [VIII u. 292 S.] n. ℳ 1.60.

V. Teil. Oberstufe: Erster Kursus. Vierte Auflage. [VI u. 944 S.] n. ℳ 2.80.

Zeitschrift für weibliche Bildung in Schule und Haus. Zentral-Organ für das deutsche Mädchenschulwesen. Herausgegeben von Richard Schornstein, Direktor der städtischen höheren Töchterschule und Lehrerinnen-Bildungsanstalt zu Elberfeld. Neunter Jahrgang. 1881.

6. Heft. Juni.

Inhalt: Wissenschaftliches, Unterricht, Erziehung und Schuleinrichtungen. Fortbildung der Mädchen. Von Mathilde Lammers-Bremen. — Adelbert von Chamisso. Von Dr. Kaiser-Elberfeld. — Im Auftrage der VII. Hauptversammlung des Deutschen Vereines für das höhere Mädchenschulwesen an den preußischen Staats- und Unterrichtsminister gerichtete Eingabe. — Litteratur für jung und alt, zur Unterhaltung und Belehrung. Edmund Höfer, „Bibliothek für unsere Frauen". Von F. Rehorn-Frankfurt a. M. a. „Rosy" von Marie Franck. b. „Das Erbe der zweiten Frau" von Eufemia Gräfin Ballestrem. c. „Auf der Giudecca", Novelle von Elise Linhardt. d. „Das Pfarrhaus zu Wudnick". Eine altmodische Kriegs- und Liebesgeschichte von Edmund Höfer. e. „Gazela", Novelle nach dem Dänischen des Carit Etlar. Deutsch von Pauline Schanz. — Wissenschaftliche Litteratur. M. M. Besançon et Leibenger, „Le Souvenir du Pensionat. Etudes progressives de langue française". Paraissant tous les Samedis. Von Dr. Weischer-Köln. — C. Bohm, „Französische Sprachschule". Auf Grundlage der Aussprache und Grammatik nach dem Prinzipe der Anschauung bearbeitet. Von demselben. — Dan. Sanders' „Abriß der deutschen Silbenmessung und Verskunst". Von Dr. Buchner-Krefeld. — F. Terks, „Leitfaden für Botanik und Zoologie in vier Kursen". 1., 2., 3., 4. Heft. Von Dr. Röll-Darmstadt. — Dr. L. Blums „Grundriß der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen". 6. Auflage von W. Dietrich. Von demselben. — Dr. F. Erismann, „Gesundheitslehre für Gebildete aller Stände". 2. Auflage von Dr. Ad. Schuster. Von demselben. — J. von Hanstein, „Das Protoplasma als Träger der pflanzlichen und tierischen Lebensverrichtungen". Von demselben. — Ferdinand Hirts „Geographische Bildertafeln". Herausgegeben von Dr. Alwin Oppel und Arnold Ludwig. Von Dr. Liebrecht-Elberfeld. — Allgemeine Deutsche Pensionsanstalt für Lehrerinnen und Erzieherinnen. Jahressitzung des Kuratoriums am 1. Mai d. J. — Verschiedenes. Aus der Schule für die Schule. Nr. 17—20. Von Rektor Keller-Aarau. — Frankreich. Camille Sées Antrag auf Errichtung eines Staatsseminares für Lehrerinnen.

III. Mathematik, Technische und Naturwissenschaften.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Herausgegeben von Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl und Dr. M. Cantor. 26. Jahrgang. 1881.

4. Heft.

Inhalt: Die Discontinuitäten der zweiten Differentialquotienten des Oberflächenpotentials. Von *Theodor Horn* in Leipzig (Schluss). — Ueber Isothermenschaaren, isogonale Verwandtschaften und conform veränderliche Systeme, die mit den Abbildungen $z = \sqrt[n]{Z}$ und $z = \sqrt[m]{\frac{aZ+b}{cZ^n+d}}$ zusammenhängen. Von Dr. *G. Holzmüller*, Director der königl. Gewerbeschule in Hagen. (Taf. V Fig. 1 und 2). — Doppelte Entstehungsweise der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven. Von Dr. *Chr. Wiener*, Professor an der grossherzogl. polytechn. Schule in Karlsruhe (Taf. V Fig. 3 u. 4). — Kleinere Mittheilungen. Ueber geodätische Linien. Von Dr. *O. Böklen* in Reutlingen (Taf. V Fig. 5 u. 6). — Bemerkung zu der „Notiz zu einem Satze von Chasles von E. Lange". Von Prof. Dr. *H. Schroeter* in Breslau. — Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt). Bemerkungen zu den Archimedischen Näherungswerthen der irrationalen Quadratwurzeln. Von *Heilermann* in Essen. — Recensionen: *Edelmann, M. Th.*, Neuere Apparate für naturwissenschaftliche Schule und Forschung. Von *Th. Kötteritzsch* in Freiberg. — *Castigliano, A.*, Théorie des systèmes élastiques. Von *Biadego* in Arona. — *Tessari, Domenico*, La teoria delle ombre e del chiaro-scuro. Von *Chr. Wiener* in Karlsruhe. — *Brill*, Prof. Dr., und *Klein*, Prof. Dr., Mathematische Modelle. Von *M. Noether* in Erlangen. — *Schottky*, Dr. *Friedrich*, Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variablen. Von *M. Noether* in Erlangen. — *Fick, A.*, Das Grössengebiet der vier Rechnungsarten. Von *M. Noether* in Erlangen. — *Thomae, J.*, Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. Von *J. Lüroth*. — *Buchonnet, Charles*, Éléments de calcul approximatif. Von *Cantor*. — Bibliographie vom 1. April bis 15. Mai 1881.

IV. Theologie.

Pastoralblätter für Homiletik, Katechetik und Seelsorge. Herausgegeben von G. Leonhardi und C. Zimmermann. Neue Folge von „Gesetz und Zeugniß". XI. Band. 1881.

7. Heft, Juli.

Inhalt: „Wenn haben wir die rechte Stellung zu unserm Herrn?" Predigt am Johannisfest über Joh. 8, 22—30. von H. A. Fick, Pastor zu Billwärder an der Bill (Hamburg). — Das christliche Krankenhaus. Predigt über Jak. 5, 15. von Em. Quandt, Pfarrer zu St. Elisabeth in Berlin. — Schaffe in mir, Gott, ein reines Herz. Beichtrede über Psalm 51, 12. von C. Zimmermann, Pfarrer in Seifersdorf bei Rabenau. — Predigt-Studie zum Trinitatisfest. Von Ch. Heinr. Schöner, Pastor in Goldkronach (Baiern). — Predigtdispositionen über die zweite Württembergische Evangelienreihe (Zweite Hälfte: die Trinitatiszeit) von C. Euler, Pfarrer zu Carlsberg. — Predigtentwürfe und Dispositionen über die Evangelien. (Trinitatiszeit.) Von E. Lehmann, Pfarrer in Cythra (K. Sachsen). — Recensionen.

Katechetische Vierteljahrsschrift für Geistliche und Lehrer. Ein Beiblatt der Pastoralblätter für Homiletik, Katechetik und Seelsorge. Herausgegeben von G. Leonhardi und C. Zimmermann. Siebzehnter Jahrgang. 1881.

3. Heft.

Inhalt: Elisas erste Thaten. Katechese über 2. Könige 2, 13—25. von Mangold, Lehrer in Cassel. — Die Gnadenmittel und ihr Verhältniß zu der heiligen Dreieinigkeit. Katechismusunterrichtsskizze von Dr. Kluge, Pfarrer in Weilsingroden, Provinz Sachsen. — Katechetische Behandlung der Eigenschaft der göttlichen Liebe. Ein Entwurf von Pastor Haack in Breesen. — Katechismusunterredung über das Lied: „O großer Gott, du reines Wesen," V. 1—3. von Lic. Dr. Hasse, Pfarrer und emer. Superintendent zu Frauenstein i. S. — Haupt- und Cardinalfragen des christlichen Glaubens. Von Hermann Opitz, Pfarrer und Superintendent zu Dippoldiswalde. — Ueber die Rechtfertigung aus dem Glauben (in Bezug auf die homiletische und katechetische Flüssigmachung dieses Lehrstücks). Von Zimmermann, Pfarrer in Seifersdorf. — Recensionen.

Dritte Abteilung.

Vermischte Notizen.

Rezensionenverzeichnis.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. 3. Heft.
Deutsche Literaturzeitung. No. 14.

Autenrieth, Wörterbuch zu den homerischen Gedichten.
Revue critique. No. 24.

Bartels und Wirth, Deutsches Lesebuch. I. II.
Deutsche Schulpraxis. No. 13. — Preufsische Lehrerzeitung. No. 128.

Bender, Grundrifs der römischen Litteraturgeschichte.
Bursian's Jahresbericht. Bd. 21.

Blass, die Attische Beredsamkeit.
Philologische Rundschau. No. 27.

Boehm, Methodik des deutschen Unterrichts.
Deutsche Schulzeitung. No. 18.

Brockmann, Lehrbuch der Trigonometrie.
Central-Organ f. d. Interessen d. Realschulwesens. 6. Heft.

Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.
Rivista filologica. 1881. p. 870. — Revue critique. No. 20.

Curti Rufi, Q., hist. Alexandri Magni libri ed. Vogel.
Literarisches Centralblatt. No. 20.

Ehlers, italienische Grammatik.
Central-Organ f. d. Interessen d. Realschulwesens. 6. Heft.

Fox, die Kranzrede des Demosthenes.
Literarisches Centralblatt. No. 21.

Gelzer, Sextus Julius Africanus. I.
Theologische Literaturzeitung. No. 12.

Hart, de Tzetzarum nomine, vitis, scriptis.
Deutsche Literaturzeitung. No. 24. — Literarisches Centralblatt. No. 22.

Helm, Quaestiones syntacticae de participiorum usu Tacitino.
Bursian's Jahresbericht. 18. Bd.

Herwig, Physikalische Begriffe und absolute Maasse.
Zeitschrift f. österr. Gymnasien. 4. Heft. — Deutsche Literaturzeitung. No. 21.

Heydenreich, Geschichte von Leubnitz.
Mitteilungen des Freiberger Altertumsvereins. 17. Heft.

——— die Hyginhandschrift der Freiburger Gymnasialbibliothek.
Mitteilungen des Freiberger Altertumsvereins. 17. Heft.

Homers Ilias, erklärt von Ameis. II. Band. II. Heft von Hentze.
Philologische Rundschau. No. 25.

——— Odyssee, erkl. von Ameis. II. B. II. Heft v. Hentze. 6. Aufl.
Philologische Rundschau. No. 25.

——— ——— Anhang. IV. Heft. 2. Aufl.
Philologische Rundschau. No. 25.

Hyperidis orationes, ed. Blass. 2. Aufl.
Revue critique. No. 24.

Jeep, Verwendung des Eisens beim Hochbau.
Tidsskrift for den techniske Forening. 3. u. 4. Heft.

Incerti auctoris de Constantino Magno libellus ed. Heydenreich.
Mitteilungen des Freiberger Altertumsvereins. 17. Heft.

Juliani imperatoris libri contra Christianos, ed. Neumann.
Literarische Rundschau. No. 10. — Theologische Literaturzeitung. No. 11.

Kekulé, Das Leben Friedrich Gottlob Welckers.
Im neuen Reiche. 1. Heft.

Keller, Vocabolario della lingua italiana.
Central-Organ f. d. Interessen d. Realschulwesens. 6. Heft.

Livi, Titi, ab urbe condita liber XXVI, von Friedersdorff.
Jahresberichte d. Berliner philologischen Vereins. VII. S. 151.

Lycophronis Alexandra, ed. Kinkel.
Literarisches Centralblatt. No. 25.

Lysias ausgewählte Reden von Frohberger. I. 2. Aufl. von Gebauer.
Hermes. Bd. XVI.

Meffert, Übungsbuch zum Übersetzen ins Englische.
Blätter f. bayr. Realschulwesen. 8. Heft.

Meier, Stunden der Weihe.
Sächsisches Kirchen- u. Schulblatt. No. 22. — Theologische Literaturzeitung. No. 13.

Melae, Pomponii, de chorographia libri tres ed. Frick.
Literarisches Centralblatt. No. 21.

Nägelsbach, Hebräische Grammatik. 4. Aufl.
Theologisches Literaturblatt. No. 20.

Neumann, Kaiser Julians Bücher gegen die Christen.
Literarische Rundschau. No. 10. — Theologische Literaturzeitung. No. 11.

Peiper, die handschriftliche Überlieferung des Ausonius.
Philologische Rundschau. No. 25.

Reishaus, Vorschule zur Geometrie. 2. Abt.
Correspondenzblatt f. d. Gelehrten- u. Realschulen Württembergs. 1880. 11. u. 12. Heft.

Schütze, Leitfaden für den Unterricht in der Erziehungs- und Unterrichtslehre.
Preußische Schulzeitung. No. 39.

Stier, hebräisches Übungs- und Lesebuch.
Theologisches Literaturblatt. No. 21.

Tait, Handbuch der Quaternionen.
Deutsche Literaturzeitung. No. 28.

Teuffel, Geschichte der römischen Litteratur. 3. Aufl.
Bursian's Jahresbericht. Bd. 21.

Vergil's Aeneide, erläutert von Karl Kappes. 3. Heft. 2. Aufl.
Philologische Rundschau. No. 15.

Xenophontis Hellenica, lib. I. II. ed. Breitenbach. Ed. II.
Philologische Rundschau. No. 23.

Übersetzungen in fremde Sprachen.

Von der Jugendschrift

Marcus Charinus, der junge Christ in Pompeji, von Eduard Alberti

ist eine norwegische Übersetzung in Christiania erschienen.

Von der italienischen Übersetzung des

Griechischen Elementarbuchs von Wesener

ist eine zweite Auflage erschienen.

Von

Lucian Müller's Metrik der Griechen und Römer

erscheint zu Paris eine französische Übersetzung.

Gipsabgüsse der von Adolf Hildebrand in Florenz modellirten Büste Friedrich Ritschl's werden zum Preise von 10 Mark auf Bestellung bei dem Unterzeichneten von dem Gipsformer, Herrn F. J. Steger hierselbst angefertigt. Der Reinertrag ist für die Bibliothek des k. philologischen Seminars der Universität Leipzig bestimmt.

Leipzig, Juli 1881.

Prof. Dr. **O. Ribbeck.**

Buchhändlerische Centralstelle für den Programmentausch der höheren Schulen Deutschlands.

Weitere Berichtigungen zu dem Verzeichnis der Programme 1881.

Die angezeigte Abhandlung erscheint nicht von

No. 332. **Corbach,** Gymnasium. — No. 456. **Strafsburg,** Realschule bei St. Johann. — No. 485. **Frankenberg,** Realschule.

Ferner eingegangene Programme für 1881:

No. **10.** 28. 39. 86.
No. **104.** 125. 129. 135. 137. 145. 174. 185. 186. 189.
No. **214.** 215. 231. 251.
No. **305.** 324. 334. 347. 357. 377.
No. **430.** 468. 486. 488. 497.
No. **503.** 505. 563. 570. 597.
No. **617.** 623. 628.

Von Universitäten:

Dorpat, die Abhandlung: Archaeologische Miscellen von G. Loeschke.

Diese für die erste Versendung zu spät eingetroffenen Programme können erst mit der zweiten, die Michaelis-Programme enthaltenden Sendung zur Verteilung kommen.

Leipzig, den 1. Juli 1881.

B. G. Teubner.

Die 36. Versammlung deutscher Schulmänner und Philologen, welche dieses Jahr in Karlsruhe abgehalten werden sollte, muss auf das nächste Jahr verschoben werden. Der Grund liegt in anderen Festlichkeiten, welche wahrscheinlich gerade in den Herbsttagen in Karlsruhe die ausschliessliche Theilnahme der Bevölkerung in Anspruch nehmen werden.

Karlsruhe und Heidelberg, im Juni 1881.

Das Präsidium der 36. Philologenversammlung:
Dr. Wendt. C. Wachsmuth.

Ausgegeben im Juli 1881.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Mitteilungen

der Verlagsbuchhandlung

B. G. Teubner in Leipzig.

No. 4. Diese Mitteilungen sollen das Publikum von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen. Dieselben sind in allen Buchhandlungen gratis zu haben, werden auf Wunsch aber auch direkt franko übersandt. 1881.

Erste Abteilung.

Notizen über künftig erscheinende Bücher.

I. Philologie und Altertumswissenschaft.

Handlexikon der griechischen und römischen Mythologie im Verein mit mehreren Gelehrten herausgegeben von W.H. ROSCHER. Lex.-8. geh.

Über Zweck und Plan dieses Handlexikons, welches bestimmt ist, das treffliche aber bereits in vielen Punkten veraltete Werk von Jacobi (Coburg und Leipzig 1835) zu ersetzen, habe ich mich schon früher (s. diese Mitteilungen v. J. 1879, No. 2) ausgesprochen. Ich wiederhole, daſs es in erster Linie auf eine möglichst objektive, knappe und zuverlässige Darstellung der sämtlichen überlieferten Mythen unter gehöriger Benutzung der Monumente der bildenden Kunst, sowie der betreffenden Kulte ankommt. Die Deutung der Mythen steht erst in zweiter Linie; sie soll nur da gegeben oder der Darstellung zu Grunde gelegt werden, wo sie sicher oder doch sehr wahrscheinlich ist. Im übrigen genügt es, die wichtigeren bisherigen Deutungen kurz anzuführen. Um auch kunstmythologischen Ansprüchen einigermaſsen genügen zu können, sollen dem Buche Abbildungen ausgewählter, besonders charakteristischer Monumente in guten neu anzufertigenden Holzschnitten beigegeben werden.

Bald nachdem ich die Ausarbeitung begonnen hatte, wurde es mir klar, daſs ein so umfangreiches Werk, wenn sein Erscheinen nicht bis ins unabsehbare verzögert werden sollte, nicht von einem Einzelnen, sondern nur von einem Verein mehrerer Gelehrter geschaffen werden könne. Es war daher mein eifriges Bestreben, dem Buche die Mitwirkung einer Anzahl tüchtiger, ja hervorragender Männer zu sichern, welche sich bereit finden lieſsen, nach den angegebenen Gesichtspunkten zu arbeiten. Es gereicht mir gegenwärtig zu hoher Freude, nunmehr ein alphabetisches Verzeichnis meiner Herren Mitarbeiter geben zu können, wobei ich mich begnüge, jedem Namen eine Anzahl besonders wichtiger, bereits übernommener Artikel beizufügen.

Gröſsere Artikel haben übernommen die Herren:

Privatdoc. Dr. Birt in Marburg (Ceres, Dea Dia, Diana, Genii, Genius etc.), Dr. Engelmann in Berlin (Admetos, Alkestis, Erichthonios, Io, Laokoon, Odysseus, Penelope etc.), Privatdoc. Dr. Flasch in Würzburg (Aglauros etc., Helene, Hermaphroditos, Kentauren, Lapithen, Niobe, Orestes, Poseidon, Zeus etc.), Prof. Dr. Fleischer in Meiſsen (Achilleus, Troilos etc.), Direktorialassistent Dr. Furtwängler in Berlin (Asklepios, Dioskuren, Eros, Faunus, Ge, Giganten, Glaukos, Hades, Herakles, Hygieia, Heros etc.), Dr. Greve in Fellin (Hyakinthos, Linos, Narkissos etc.), Dr. Klügmann in Rom (†, hat kurz vor seinem Tode sämtliche Amazonenartikel eingesandt), Privatdoc. Dr. E. Meyer in Leipzig (sämtliche ägyptische und orientalische Gottheiten, deren Mythen und Kulte in Hellas und Italien Aufnahme gefunden haben, wie Astarte, Ammon, Isis, Osiris, Mithras), Rektor Dr. Procksch in Eisenberg (Avernus, Bellona, Bona Dea etc.), Prof. Dr. Rapp in Stuttgart (Erinys, Eos, Helios, Hephaistos, Mainaden, Nymphen, Pan, Satyros etc.), Prof. Dr. Reifferscheid in Breslau (Acca Lar., Epona, Hercules, Indigetes, Juppiter, Lares, Manes, Penates, Silvanus etc.), Privatdoc. Dr. Schreiber in Leipzig (Artemis, Demeter, Dionysos etc.), Dr. Seeliger in Meissen (Argonautensage), Prof. Dr. Stoll in Weilburg (Ares, Atlas, Chariten etc.), Prof. Dr. v. Sybel in Marburg (Ate, Cheiron, Daimon, Daktylen, Daphne, Dike, Dione, Eileithyia, Hebe etc.), Dr. Weizsäcker in Ludwigsburg (Deukalion, Mnemosyne, Moirai, Musen, Nemesis, Nereus, Okeanos etc.), Dr. Wissowa in Breslau (eine groſse Anzahl römischer Artikel), Konrektor Prof. Dr. Wörner in Leipzig (Aeneas, Anchises, Ascanius).

Von den kleineren Artikeln werden gröſsere oder kleinere Partieen bearbeiten die Herren: Prof. Dr. Angermann in Meissen, Dr. Bernhard und Helbig in Bautzen, Dr. Meltzer in Dresden (Anna, Dido), Dr. G. Oertel in Leipzig, Dr. Schirmer in Eisenberg, Dr. A. Schultz in Hirschberg, Prof. Dr. Stoll, Dr. Wilisch in Zittau (korinthische Mythen).

Der Unterzeichnete gedenkt auſser einer Anzahl kleinerer Artikel auch einige Hauptgötter wie Aphrodite, Apollon, Athene, Hermes etc. zu behandeln.

Endlich haben ihre Mitwirkung noch in Aussicht gestellt die Herren Prof. Dr. Preuner (Greifswald), Dr. Milchhöfer (Berlin) und Dr. Crusius (Dresden).

Die angeführten Namen berechtigen wohl zu der Hoffnung, daſs das Werk nicht bloſs ein brauchbares Nachschlagebuch für Lehrer und Studierende bilden, sondern auch der mythologischen Wissenschaft zur wesentlichen Förderung gereichen werde.

Prof. Dr. **W. H. Roscher.**

Commentationes philologae Ienenses ediderunt seminarii philologorum Ienensis professores. Vol. I. gr. 8. geh.

In den commentationes philologae Ienenses sollen Arbeiten jüngerer Jenenser Philologen gesammelt werden, welche durch Methode und Resultate wissenschaftlichen Wert haben, wenn auch bisweilen auf einem nur beschränkten Gebiete. Der erste Band bringt drei solcher Arbeiten.

P. Sauerbrei: de fontibus Zonarae quaestiones selectae, versucht die Quellen dieser Kompilation von 450—800, wo Hirsch eintritt, zu untersuchen. Wichtig ist namentlich das Resultat, daſs diejenigen Partieen oströmischer Geschichte, welche auf nicht erhaltene Quellen zurückgehen, wahrscheinlich, wenn auch auf indirektem Wege, auf Candidus Isaurus und Malchus zurückgehen.

G. E. Gundermann: de Juli Frontini strategematon libro qui fertur IV hat zuerst die textkritische Grundlage für die Behandlung des Frontin gewonnen, indem er zwei Klassen der Codices ausgeschieden und zur Evidenz erwiesen hat, dafs die Ausgabe Dederichs billigen Anforderungen nicht genügt. Als Specimen einer neuen Ausgabe ist das 4. Buch mit kritischem Apparat angehängt.

J. V. Sarrazin: de Theodoro Lectore Theophanis fonte praecipuo giebt eine Quellenanalyse der Chronik des Theophanes von Theodosius d. G. bis auf Anastasius. Dafs hier erst die Tripartita, dann die Kirchengeschichte des Theodorus Lector für die kirchlichen — teilweise auch für die profanen — Abschnitte Hauptquelle sei, steht nach des Verfassers Untersuchungen völlig fest. Er hat über die schriftstellerische Persönlichkeit desselben, sowie über die noch dunklere des Johannes διακρινόμενος zuerst Licht verbreitet, die Fragmente beider zusammengestellt und so ein nicht ganz unwichtiges Kapitel spätgriechischer Historiographie eigentlich zum ersten Male seit Fabricius wieder ernstlich durchforscht.

Geschichte der römischen Litteratur von W. S. Teuffel. Vierte Auflage bearbeitet von L. Schwabe. gr. 8. geh.

Es war das Ziel der neuen Bearbeitung, das Werk dem gegenwärtigen Stand unseres Wissens anzupassen, ohne seine wohlbewährte Eigentümlichkeit und Einrichtung aufzugeben. Zugleich war das Absehen darauf gerichtet, dafs das Buch in der neuen Auflage nicht erheblich umfangreicher würde als in der vorigen, damit es nicht seine Handlichkeit und damit seine Brauchbarkeit für weitere Kreise einbüfse. Ebendeshalb und da auf dem Gebiet der römischen Litteratur jetzt eine sehr lebhafte wissenschaftliche Thätigkeit herrscht und zudem zwischen dem Erscheinen der neuen und der letzten Auflage eine Zeit von 6 Jahren liegt, mufste die Umgestaltung des Buches eine weitgreifende sein, welche sich natürlich zunächst weniger auf die Paragraphen des Textes als auf deren Einzelausführungen zu erstrecken hatte. Der Rahmen des Werkes (Paragrapheneinteilung und Zahlen u. dgl.) ist, so weit als möglich, unverändert geblieben. Auf äufserliche Scheidung der Änderungen und Zusätze des Bearbeiters mufste bei deren Umfang mit Rücksicht auf die Gedrängtheit des Buches und zur Vermeidung unleidlicher Buntscheckigkeit in dessen Äufserem verzichtet werden.

Von der neuen Auflage sind bereits mehr als zwei Drittel im Druck vollendet. Dieselbe wird in drei sich rasch folgenden Lieferungen erscheinen.

Der römische Kalender von Otto Ernst Hartmann. Aus dem Nachlasse des Verfassers herausgegeben von Ludwig Lange. gr. 8. geh.

Der am 17. September 1877 zu Göttingen verstorbene Geh. Justizrat und Professor der Rechte Dr. Otto Ernst Hartmann war durch seine Studien über die ältere römische Gerichtsverfassung dazu geführt worden, den Einflufs der Religion auf die Rechtspflege genauer zu untersuchen. Die Resultate dieser an den römischen Kalender anknüpfenden Untersuchung, durch welche das System der dies fasti und nefasti nebst dem der dies festi und profesti und die Bedeutung dieser Systeme für die Rechtspflege und die Volksversammlungen in sehr wesentlichen Punkten aufgehellt wurde, liegen gedruckt vor in dem Werke: Der Ordo Judiciorum und die Judicia extraordinaria der Römer.. Erster Teil: Über die römische Gerichtsverfassung. Göttingen 1859. Seit jener Zeit haben den Verfasser ausser den Vorarbeiten für die Vollendung des gedachten

Werkes umfassende Studien über den römischen Kalender, seine Geschichte und seine innere Einrichtung fast unausgesetzt beschäftigt. Es war seine Absicht, die Geschichte des römischen Kalenders von dem zehnmonatlichen Jahre des Romulus bis zu der Kalenderreform des Cäsar zu schreiben und dabei die Tradition, soweit er sie als zuverlässig erkannt hatte, gegenüber den Hypothesen Mommsens, Huschkes und anderer zur Geltung zu bringen. Die in den Osterferien des Jahres 1875 begonnene Ausarbeitung dieser Geschichte für den Druck ist zu zwei Dritteilen vollendet; ein Teil dieser Ausarbeitung liegt in einer nochmaligen übersichtlicher disponierten Umarbeitung aus dem Jahre 1876 vor. Leider konnte der Verfasser weder jene Ausarbeitung noch diese Umarbeitung zu Ende führen, da er schon seit dem Beginn des Jahres 1876 von einem schweren und schmerzhaften Leiden heimgesucht war, das ihm im Jahre 1877 neben seiner Berufsthätigkeit, die er bis zum Schlufs des Sommersemesters fortsetzte, keine litterarische Thätigkeit gestattete.

Die zum Abschlufs des Ganzen noch erforderlichen Partieen lassen sich vielleicht aus den Kollektaneen des Verfassers in dessen Sinne ergänzen. Doch da der Versuch dazu längere Zeit erfordern würde, so soll zunächst nur das, was der Verfasser im wesentlichen druckfertig hinterlassen hat, herausgegeben werden. Auch ohne die Schlufspartieen ist das zur Herausgabe Bestimmte vollkommen verständlich. Die darin enthaltenen Untersuchungen werden nicht blofs durch die musterhafte Klarheit der Darstellung, sondern auch durch die einleuchtende Richtigkeit der in strenger Beweisführung gewonnenen Resultate in hohem Grade die Aufmerksamkeit der Historiker und Philologen auf sich ziehen.

Die Thätigkeit des Herausgebers wird sich im wesentlichen auf die Verifizierung der Citate und die Ausführung, bez. Stilisierung einzelner Anmerkungen beschränken; hier und da wird er Gelegenheit haben, die neuere Litteratur nachzutragen. Aufserdem wird er ein Vorwort und ein Register hinzufügen.

Fragmenta historicorum Romanorum rec. Hermannus Peter. 8. geh.

Diese kleine und billige Ausgabe der Fragmente der römischen Historiker, welche der bibliotheca Teubneriana eingereiht wird und somit aufser einer kritischen Vorrede nur den Text der Bruchstücke enthält, verfolgt einen doppelten Zweck: zunächst soll sie in ihrer ersten Hälfte einen Abdruck der Fragmente des ersten Bandes der „Relliquiae“ bringen, der durch eigene und fremde Bemühungen mannigfache Verbesserungen erfahren hat, sodann in ihrer zweiten einen Prodromus zum zweiten Bande derselben. Der Verf. hat sich in den letzten 10 Jahren mit geringen Unterbrechungen unausgesetzt mit der Sammlung der Fragmente seit Sallust und Cäsar beschäftigt, aber sich überzeugen müssen, dafs er hier, wo es ihm fast an jeder Vorarbeit fehlt, notwendiger Weise viele Lücken lassen würde und eine auch nur annähernde Vollständigkeit nicht erreichen könne. Das wichtigste wird schon in dieser kleineren Ausgabe vorliegen und gewifs übersichtlich zusammengestellt vielen als ein bequemes Hülfsmittel zu den eigenen Studien dienen; Einzelnes werden die Spezialforscher oft vermissen und zahlreiche Notizen zur Ergänzung beisteuern können. An sie richtet sich das Horazische Wort auf dem Titel 'Si quid novisti rectius istis, candidus inperti.' Dankbar wird der Verf. jeden Beitrag zu seiner gröfseren Ausgabe, die noch innerhalb eines Lustrums erscheinen soll, entgegennehmen und hofft, dafs es ihm so gelingen wird, auch mit dem zweiten Bande der Relliquiae den Fachgenossen eine das gesamte Material umfassende, abschliefsende Arbeit vorzulegen. Einstweilen aber wird sowohl Philologen als Historikern die erste Sammlung der Fragmente aller römischen Geschichtschreiber auch in ihrer teilweisen Unvollkommenheit willkommen sein.

Horazstudien. Alte und neue Aufsätze über die Lyrik des Horaz von Prof. Dr. Theodor Plüss, Lehrer am Gymnasium zu Basel. gr. 8. geh.

Die Horazarbeiten des Verfassers sind freundlich aufgenommen worden. Eine Sammlung derselben erscheint zeitgemäfs, insofern sich, wie neuerdings von reaktionärer und von gegnerischer Seite festgestellt worden, gerade jetzt eine lebhaftere Strömung des Interesses an der Kritik horazischer Lyrik in reaktionärer Richtung kundgiebt. Von den älteren Arbeiten sind hier mehrere in Umfang, Form und Ergebnissen völlig andre geworden; hinzugekommen sind Arbeiten, welche von Hauptgesichtspunkten aus die übrigen Aufsätze ergänzen und so der kleinen Sammlung sachlich und methodisch eine gewisse Vollständigkeit geben sollen. Die Richtung der Kritik ist eine reaktionäre, insofern der Verfasser Kritik und Exegese auf den, wie es scheint, überwundenen Standpunkt zurückführen will, dafs ein lyrisches Gedicht nach den Gesetzen der lyrischen Gattung, die einzelne Strophe nach Sinn und Absicht des ganzen Liedes zu erklären und zu beurteilen sei. Er versucht von diesem Standpunkte aus, mit den Gesetzen und Regeln wissenschaftlicher Ästhetik wirklich Ernst zu machen und eine feste Methode der Erklärung zu schaffen. Auf diese Weise glaubt er manche Ergebnisse gewonnen zu haben für das Verständnis der Dichtungsart und der Dichtungen, des Dichters, seines inneren Lebens und seiner Entwicklung, des Zeitalters und seiner geistigen Bewegungen.

Griechische Syntax für die Oberklassen der Gymnasien zusammengestellt von Carl Schmelzer, Gymnasialdirektor. gr. 8. kart.

Wie unter den Nationen unserer Zeit keine in der Art ihres Empfindens dem Griechentum näher verwandt ist als die Deutsche, so bietet auch die deutsche Sprache mehr als jede andere der griechischen Entsprechendes. Ich habe deshalb versucht, in der folgenden Arbeit, nicht wie dies meist geschieht, das Latein, sondern das Deutsche zum Vergleiche heranzuziehen. Außerdem bin ich bemüht gewesen, die syntaktischen Regeln möglichst knapp zu geben und habe alles, was für unsere Schüler selbstverständlich ist, wie z. B. die Auseinandersetzungen über den individuellen und den generellen Gebrauch des Artikels u. a., oder was gelegentlichen Anmerkungen zur Lektüre füglich überlassen werden kann, wie etwa den Wegfall des ὤν bei ἑκών und ἄκων, die Lehre von den Partikeln u. a., unerwähnt gelassen. Möge die Arbeit sich Freunde erwerben und dem griechischen Unterrichte Nutzen bringen.

Hamm, im Juli 1881. **C. Schmelzer.**

II. Pädagogik. Deutsche Schulbücher.

Lehrbuch der Geschichte von Rudolf Dietsch, weil. Rektor der k. sächs. Landesschule zu Grimma. Zweiten Bandes dritte Abteilung: Dritte Periode des Mittelalters (1096—1273), bearbeitet von Dr. H. Kohl, Oberlehrer am k. Gymnasium zu Chemnitz. gr. 8. geh.

Der hochverdiente ehemalige Rektor der k. Landesschule Grimma hatte zwei Abteilungen des zweiten Bandes seines Lehrbuchs herausgegeben und

**

war mit der Bearbeitung der dritten Abteilung desselben Bandes beschäftigt, als unheilbare Krankheit ihn befiel und seiner Thätigkeit ein Ziel setzte. Die Verlagsbuchhandlung übertrug dem Verfasser der hier angezeigten dritten Abteilung die Fortsetzung des Werkes, speziell die Bearbeitung der 3. und 4. Periode des Mittelalters „vom Beginn der Kreuzzüge bis zur Reformation". Von der Dietschschen Fortsetzung waren zehn Bogen bereits gedruckt, die Geschichte der Kreuzzüge behandelnd; da sich aber erwies, daß sie nur auf Wilken basierten, so ist eine völlige Neubearbeitung auf Grund der Quellen und der neueren Litteratur erfolgt. In der Anordnung des Stoffes folgt das Lehrbuch aus praktischen Gründen der in dem Grundriß der allg. Geschichte in der Bearbeitung von G. Richter gegebenen Angabe der wichtigsten Quellen und prägnante Stellen aus denselben begleiten den Text. Der Geschichte der Kreuzzüge und des römisch-deutschen Kaisertums ist ein größerer Raum zugewiesen, als der Frankreichs und Englands. Da das Buch namentlich für Lehrer der Geschichte an höheren Schulanstalten bestimmt ist, wird die kürzere Behandlung der Geschichte der nichtdeutschen Staaten Billigung finden.

III. Mathematik, Technische und Naturwissenschaften.

Cyclographie oder Geometrie der Kreise und Kreis-Systeme zur Construction der Aufgaben über Kreise mittelst der Centralprojection. Von Dr. Wilh. Fiedler. gr. 8. geh.

Die kleine Schrift, welche ich hiermit dem mathematischen Publikum ankündige, entwickelt die Theorie der Kreissysteme in der Ebene und die konstruierende Lösung der daraus entspringenden Aufgaben über die Bestimmung der Kreise durch Bedingungen der Berührung und des Schnittes unter vorgeschriebenen Winkeln mit Geraden und mit Kreisen auf Grund der einfachen Anschauung, dafs jeder Kreis in der Ebene der Bildkreis eines Punktes im Raume ist, sowie der Distanzkreis in der Zentralprojektion der des Projektions-Zentrums; die graphische Durchführung, zu der die entspringenden Theorieen in der engsten Beziehung stehen, geschieht in der Form der Zentralprojektion; die zentrische Kollineation und die Abbildung durch reziproke Radien, die sich im vollen Umfange mit ergeben, machen die Übertragung der Resultate in den Raum von drei Dimensionen selbstverständlich.

Die Herausgabe der Schrift ist veranlafst durch die Publikation der gesammelten Werke von Jac. Steiner von der Königl. Preufsischen Akademie der Wissenschaften; dieselbe hat mich definitiv eines Irrtums überführt, in welchem ich bezüglich des Inhalts meiner Schrift viele Jahre befangen war; des Irrtums nämlich, dafs ich annahm, die bezeichnete Anschauung sei von Steiner selbst benutzt worden und habe die Grundlage des Buches gebildet, welches er im März 1826 als nahe vollendet bezeichnete und dessen baldiges Erscheinen in einem Umfange von 25 bis 30 Bogen er in Aussicht stellte unter der Angabe des Inhalts: Über das Schneiden der Kreise in der Ebene, das Schneiden der Kugeln im Raume und das Schneiden der Kreise auf der Kugelfläche.

Die Gründe, die ich zu dieser Meinung hatte, sind zahlreich und der Inhalt meiner Schrift wird sie dem Kundigen auch ohne Besprechung darlegen. Indem ich offen gestehe, dafs diese irrige Ansicht mich lange Zeit von der Ausarbeitung und Veröffentlichung der Sache abgehalten hat, gewärtige ich das Urteil der Sachverständigen darüber, ob der Irrtum selbst entschuldbar war, d. h. ob meine Grundidee als natürliche Wegleitung zu einer grofsen Reihe Steinerscher Entdeckungen anzuerkennen ist oder ob eine Überschätzung derselben darin lag, daſs ich sie nicht nur für eine Steinersche überhaupt, sondern geradezu für eine seiner fundamentalen Ideen hielt. Eben in jener Wegleitung finde ich ihren Wert: Die zentralprojektivische Durchbildung der Idee führt in einfachster Weise zu allen den Aufgaben und ihren Lösungen, die Steiner a. a. O. als in seinem Besitz verkündigte, ohne sie zu veröffentlichen; und sie giebt gerade die Begriffe und Theorieen, die er in den ersten Abhandlungen als die Grundlage aller seiner Untersuchungen bezeichnete und mitteilte; sie stellt im Zusammenhang damit eine Theorie der Kegelschnitte, die von Gaultier 1813 begründet, Poncelet und Steiner bekannt war und deren Beziehungen zu jenen Untersuchungen über die Kreise bei Steiner durch einige der von ihm um 1826 publizierten Sätze wahrscheinlich gemacht ward; ja sie führt auch zu den Fragestellungen der beiden ausgeführtesten Abhandlungen über die Kegelschnitte, die Steiner selbst veröffentlicht hat, der Abhandlungen von 1847 und von 1852 (37. u. 45. Bd. des „Journal"). Daraus entsprang mein Irrtum, ich erwartete das endliche Hervortreten der Steinerschen Ausführung mit Sicherheit und widmete meine Arbeit anderen Aufgaben. Erst seit wenigen Jahren, wo ich erfuhr, daſs die lang ersehnte Veröffentlichung der Steinerschen Werke die Schrift über die Kreise und Kugeln nicht bringen könne, weil sie nicht mehr vorhanden ist, ja daſs sie für das Gebiet der bezüglichen Abhandlungen überhaupt nichts Neues bringen werde, konnte ich mich verpflichtet erachten, mich selbst der öffentlichen Darlegung jener Methode anzunehmen. Ich gab zuerst, noch immer zweifelnd und vorsichtig, in dem Aufsatz „Neue Projektionsmethoden?" die Grund-Idee und ihre analytische Ausdrucksform für Büschel und Netze von Kreisen, sowie in Verbindung mit der vorangehenden Abhandlung über das allgemeine Problem der Kegelquerschnitte die Anwendung auf das Apollonische Problem, wie ich sie lange vorher schon gelegentlich gemacht hatte; ich lieſs die Elemente der daraus entspringenden Theorie der Kegelschnitte folgen und zeigte in weiteren Noten die Anschauungsform der doppelt berührenden Kreise für einen Kegelschnitt und die für das System der Kreise, die einen gegebenen Kreis unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden u. s. w. Damit würde ich mich gern begnügt haben, wenn es sich nicht um einen interessanten und eigentlich ziemlich elementaren Teil der Geometrie handelte, der in Lehre und Litteratur stiefmütterlich behandelt wird, und zugleich um eine Methode des geometrischen Zeichnens zur Erledigung einer Menge von Aufgaben auf einheitlichem Wege und ohne Kunstgriffe. Ich gebe um so lieber eine elementare Behandlung dieses Gebietes nach der neuen Methode und in der Form der Zentralprojektion, als dasselbe bisher vielleicht mehr als irgend ein anderes der darstellenden und projektivischen Geometrie unzugänglich erschienen ist. Daſs dabei ein tüchtiges Stück Planimetrie von der Stereometrie aus eine einfache Erledigung empfängt, entspricht zudem auch meinen schon sonst vertretenen Reform-Ideen.

Die Schrift enthält die Entwickelung der Methode bis zur vollständigen graphischen Durchbildung und ist daher von zahlreichen Figuren begleitet; doch setzte sie sich nicht die Behandlung aller Aufgaben ihres Gebietes vor, damit der Umfang ein mäſsiger bleiben konnte; die Behandlung der entsprechenden Probleme der Sphärik und der Geometrie von drei Dimensionen wird nur kurz besprochen, um zur selbstständigen Weiterführung der Grundgedanken anzuregen. Zahlreiches Detail halte ich zurück, weil es dazu nicht so sehr zu dienen schien. Die Hauptaufgaben vom Schnitt unter vorgeschriebenen reellen oder nicht reellen Winkeln mit reellen wie mit nicht reellen Grundkreisen werden aber genau entwickelt und ausgeführt; die Lehre vom Schnitt mehrerer Kreise unter gleichen Winkeln ist auch vollständig gegeben.

Die Theorie der Foci oder Scheitel von Kreisen samt ihren Anwendungen, welche Chasles und Möbius zuerst entwickelt haben, erhält man mit großer Vollständigkeit aus der durch die unmittelbare Anschaulichkeit viel mehr elementaren Methode, die ich gebe. **W. F.**

Antike Rechenaufgaben. Ein Ergänzungsheft zu jedem Rechenbuch für Gymnasien. Von Prof. Dr. Rudolf Menge und Ferdinand Werneburg in Eisenach. gr. 8. kart.

Es wird zugegeben werden müssen, daſs die Aufgaben der in unsern Gymnasien üblichen Rechenbücher oft wenig geeignet sind, das Interesse der Schüler und somit die Lust zur Lösung der Aufgaben zu erregen, weil sie Gebieten entnommen sind, die den Gedankenkreisen unsrer Gymnasiasten fern liegen. Ein Ersatz dieser Aufgaben durch solche, die auf das unsern Schülern zunächstliegende Vorstellungsgebiet, nämlich das klassische Altertum, sich beziehen, wird also voraussichtlich den Rechenunterricht auf dem Gymnasium fördern. Ebenso läſst sich nicht in Abrede stellen, daſs unsre Gymnasiasten oft wenig befähigt sind, die antiken Verhältnisse sich anschaulich vorzustellen. Um dies zu erreichen, muſs man sie nicht nur mit der Form der Dinge bekannt machen, sondern auch mit ihrem Maſs, Wert und Gewicht und alles, soweit es gemessen, geschätzt, gewogen werden kann, in vergleichende Beziehung zu den Dingen der ihnen bekannteren Gegenwart setzen. Diese Aufgabe wird man naturgemäſs den untern Klassen der Gymnasien zuzuweisen haben. Es schien daher richtig, für diese Klassen eine gröſsere Anzahl von Rechenaufgaben zusammenzustellen, die das antike Leben, soweit Zahl und Maſs in ihm eine Rolle spielen, in fast allen Beziehungen wiederspiegeln und einerseits dem jeweiligen Vorstellungskreis der Schüler in den einzelnen Klassen sich anschlieſsen, andrerseits rechnerisch methodisch geordnet sind. Diese „antiken Rechenaufgaben" sind als ein Ergänzungsheft zu jedem Rechenbuche für Gymnasien zu betrachten; denn sie wollen die üblichen Rechenbücher nicht verdrängen und die bisher als richtig anerkannten Ziele nicht beeinträchtigen, sondern nur da eintreten, wo bisher der Gymnasiast mit stofflich ihm ganz fern liegenden Aufgaben behelligt wurde. Die so erreichte innige Verknüpfung zwischen den bis jetzt gänzlich getrennten Gebieten des sprachlichen und des Rechenunterrichts, die Erlösung des letzteren aus seiner isolierten Stellung wird allen Pädagogen als bedeutsam für das Gymnasium erscheinen. Mehrere Gymnasialdirektoren, denen der Plan zu dem Büchlein mitgeteilt wurde, haben denn auch sofort die Einführung desselben in ihre Anstalten in bestimmte Aussicht gestellt. Die „antiken Rechenaufgaben" werden natürlich nur wenige Bogen umfassen und sind so eingeteilt, daſs sie leicht neben jedem andern Rechenbuche gebraucht werden können.

Die Gliederfüſsler mit Ausschluſs der Insekten. Eine Anleitung zur Kenntnis derselben von D. H. R. von Schlechtendal. Teil I: Die Spinnentiere. Mit 4 Tafeln Abbildungen. 8. geh.

Den Insekten will der Verfasser nun auch die übrigen Gliedertiere in gleicher Weise bearbeitet folgen lassen und wird zunächst der I. Teil: Die Spinnentiere: Spinnen, Scheerentiere, Kanker, Milben und Zecken im Druck erscheinen, dem sich dann der II. Teil: Die Tausendfüſsler und Kruster anschlieſsen wird.

Der gänzliche Mangel eines derartigen einheitlichen Bestimmungsbuches veranlaſste den Verfasser, die Bearbeitung eines solchen vorzunehmen. Wohl erwägend, dafs gewisse Ordnungen, wie z. B. die Milben, nicht leicht Liebhaber finden werden, da die Kleinheit der Arten einerseits, andererseits aber auch die Schwierigkeit der Untersuchung abschrecken, sind solche Ordnungen nur übersichtlich nach Familien und Gattungen, nicht aber nach Arten aufgenommen. Bei Beschreibung der Gattungen und Arten wurden besonders solche Merkmale gewählt, welche leichter in die Augen fallen und allenfalls nur den Gebrauch einer guten Lupe erfordern, doch war es nicht zu umgehen, zuweilen, wo diese nicht zur Bestimmung hinreichten, auch feinere Unterscheidungsmerkmale heranzuziehen. Jederzeit ist jedoch der kurzen Beschreibung, so weit es dem Verfasser bekannt geworden, auch die Zeit der Geschlechtsreife, wie die Art des Vorkommens und Lebens beigefügt; denn der Hinweis auf dieses fesselt, erregt und hält die Aufmerksamkeit des Anfängers und besonders des jugendlichen Sammlers wach. So möge das Werkchen denn hingehen und sich Freunde zu erwerben suchen; die Kritiker aber mögen urteilen, wie es ihnen gut dünkt und recht ist.

Der Verfasser.

Leitfaden für den zoologischen Unterricht an mittleren und höheren Schulen von Dr. Karl Kraepelin. gr. 8. geh.

Die ungeheure Fülle zusammenhangsloser Einzeldaten ist es vor allem, welche den naturwissenschaftlichen Unterricht bisher an der Erreichung größerer Erfolge verhindert hat. Sie kann nicht beseitigt werden, so lange man Spezies und Gattung zum Ausgangspunkt einer gesunden Methodik machen zu können glaubt. Individuen, Arten, Gattungen dürfen daher im allgemeinen nur so weit in den Kreis der Betrachtung gezogen werden, als sie zu Induktionsschlüssen über die gemeinsamen oder unterscheidenden Charaktere der größeren Gruppen der organischen Wesen Verwertung finden. — Aus diesen Ansichten heraus ist der zoologische Leitfaden entstanden; sein Schwerpunkt liegt in der Schilderung des Allgemeinen, dem Hervorheben des Gesetzmäßigen gegenüber dem Besonderen. Familien, Gattungen und Arten sind vielfach nur aufgezählt, um als Spezimina zu dienen, an welchen die Charaktere der höheren Kategorieen beobachtet werden können, und nur da, wo sie in bezug auf Bau, Leben oder Verbreitung ein allgemeineres Interesse darbieten, wurden sie ausführlicher behandelt.

Die Ausdehnung des Stoffes wurde nach den Bedürfnissen der Realschule I. O. bemessen. Die Diktion ist dem Verständnisvermögen der jeweiligen Altersstufe der Schüler angepaßt. Auf den von Quinta bis Untersekunda zu behandelnden systematischen Teil folgt ein vergleichend anatomisch-physiologischer Abschnitt, welcher für die Oberklassen bestimmt ist und die Stelle einer sonst wohl üblichen „Anthropologie" ersetzen soll. Nur hierdurch glaubte der Verf. dem Gedanken von der Zusammengehörigkeit der gesamten organischen Welt, von der Gesetzmäßigkeit in der Entwickelung immer höherer und komplizierterer Lebensformen Geltung verschaffen zu können.

Dr. Karl Kraepelin.

IV. Litteratur-Wissenschaft.

Catalogus Bibliothecae Danteae Dresdensis a Philalethe, b. Rege Ioanne Saxoniae, conditae, auctae, relictae. Edidit Julius Petzholdt. gr. 8. geh.

Dieser Katalog, das bibliographisch genaue Verzeichnis der vom verst. König Johann v. Sachsen hinterlassenen und der Prinzl. Sekundogenitur-Bibliothek in Dresden angehörigen reichen Dante-Bibliothek ist vom Herausg. zunächst und in der Hauptsache dazu bestimmt, den von ihm behufs einer künftigen Biographie des verst. Königs bereits veröffentlichten Schriften sich anzuschliefsen, als diese Dante-Bibliothek die eigene Schöpfung des Königs ist, und deshalb eine Darstellung derselben, schon im Hinblicke auf die Königlichen Dantearbeiten, bei einer Biographie des Königs wohl kaum gut vermifst werden dürfte. Nächstdem hat der Katalog aber auch den Zweck, die Grundlage zu einer auf das sorgfältigste bearbeiteten Dante-Bibliographie zu bilden. Denn wenn auch an Dante-Litteraturen und -Bibliographieen nichts weniger als Mangel ist, im Gegenteile dergl. Schriften in aufsergewöhnlich grofser Anzahl vorhanden sind, so leiden dieselben doch sämtlich mehr oder weniger an bibliographischer Ungenauigkeit um deswillen, weil den Verf. ein mehr oder minder grofser Teil der verzeichneten Danteschriften nicht in natura vorgelegen haben.

Zweite Abteilung.

Erschienene Bücher.

Vierter Bericht

über die im Jahre 1881 erschienenen Neuigkeiten, neuen Auflagen und Fortsetzungen.

I. Philologie und Altertumswissenschaft.

Aristophanis Plutus. Recensuit Adolphus von Velsen. [VI u. 85 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.—

Kayser's, K. L., Homerische Abhandlungen. Herausgegeben von Hermann Usener. [XLIX u. 106 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.—

Schmelzer, Carl, Gymnasial-Direktor, Entwürfe zu griechischen Exercitien. [60 S.] gr. 8. kart. n. ℳ —.80.

Stoll, H. W., Professor am Gymnasium zu Weilburg, die Meister der römischen Litteratur. Eine Übersicht der klassischen Litteratur der Römer für die reifere Jugend und Freunde des Altertums. [IV u. 427 S. mit 1 Stahlstich.] 8. geh. ℳ 4.20, in Leinwand gebunden ℳ 5.40.

Schaefer, Arnold, Abrifs der Quellenkunde der griechischen und römischen Geschichte. Zweite Abteilung: Die Periode des römischen Reiches. [IV u. 199 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.—

Vaniček, Alois, k. k. Gymnasialdirektor zu Neuhaus in Böhmen, etymologisches Wörterbuch der lateinischen Sprache. Zweite umgearbeitete Auflage. [VIII u. 388 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 6.—

Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana.

Appiani historia Romana. Edidit Ludovicus Mendelssohn. Volumen alterum. [VI S. u. S. 565—1227.] 8. geh. ℳ 4.50.

Poetae latini minores. Recensuit et emendavit Aemilius Baehrens. Volumen III. [308 S.] 8. geh. ℳ 3.—

Schulausgaben griechischer und lateinischer Klassiker mit deutschen Anmerkungen.

Ciceros ausgewählte Briefe. Für den Schulgebrauch erklärt von Josef Frey. Dritte Auflage. [VIII u. 239 S.] gr. 8. geh. ℳ 2.25.

——— Tusculanarum disputationum libri V. Für den Schulgebrauch erklärt von Otto Heine. Dritte verbesserte Auflage. Zwei Hefte. gr. 8. 1881. geh. ℳ 2.70.

Einzeln:
I. Heft: Libri I u. II [XXV u. 106 S.] ℳ 1.20.
II. — Libri III—V [II u. 160 S.] ℳ 1.50.

Nepos, Cornelius. Für Schüler mit erläuternden und eine richtige Übersetzung fördernden Anmerkungen versehen von Dr. Johannes Siebelis, weiland Professor am Gymnasium zu Hildburghausen. Zehnte Auflage besorgt von Dr. Max Jancovius, Oberlehrer am Vitzthumschen Gymnasium in Dresden. [XVI u. 196 S.] gr. 8. geh. ℳ 1.20.

Jahrbücher, neue, für Philologie und Pädagogik. Herausgegeben von Dr. Alfred Fleckeisen und Dr. Hermann Masius. 123. u. 124. Band. 1881.

6. Heft:

Inhalt: I. Abt. Anz. v. *J. U. Faesi* und *F. R. Franke:* Homers Iliade erklärt. 1r und 2r band. 6e auflage (Berlin 1879. 80). von *J. Renner* in Zittau. — Zu Homeros. von *J. Sitzler* in Tauberbischofsheim. — Zu Platons Laches [196d]. von *H. Eichler* in Frankfurt an der Oder. — Anz. v. *P. Pulch:* de Eudociae quod fertur violario (Straszburg 1880). von *R. Gropius* in Weilburg. — Melaia und Itone [zu Thuk. V 5, 3]. von *J. Beloch* in Rom. — Zu Stobaios anthologion. von *R. Dressler* in Bautzen. — Zu Horatius und Homeros. von *E. Rosenberg* in Hirschberg. — Ἡρακλῆς Μήλων. von *P. Stengel* in Berlin. — Zu lateinischen dichtern. von *E. Baehrens* in Groningen. — Über *sic* = *tum*, *deinde*. von *G. Landgraf* in Schweinfurt. — Sex suffragia. von *Th. Plüss* in Basel. — Zu Vergilius Aeneis. von *G. Heidtmann* in Wesel. — Zur geschichte der handschriftlichen überlieferung des Tacitus. von *A. Viertel* in Königsberg. — Ein rhetorisches anekdoton. von *E. Rohde* in Tübingen. — Die lateinischen adjectiva auf *-stus* und *-utus*. von *H. Rönsch* in Lobenstein. — Zu Paulinus von Nola. von *B. Dombart* in Erlangen. — Zum genethliacus des Claudius Mamertinus. von *E. Klussmann* in Rudolstadt.

II. Abt. Ziel und methode des geographischen unterrichts. von *E. Oehlmann* in Norden. — Bedenken und vorschläge zum religionsunterricht auf höheren Schulen. von *P. Höfer* in Zerbst. — Michael Neander. ein vortrag von *F. Meister* in Breslau (fortsetzung). — Bericht über die achtzehnte versammlung des vereins rheinischer schulmänner. von *O. Jäger* in Köln.

7. Heft.

Inhalt: I. Abt. Noch eine art von interpolationen bei Homeros. von *W. Christ* in München. — Zu Sophokles [Trach. 145]. von *J. Golisch* in Schweidnitz. — Zu Theognis von *E. Hiller* in Halle. — *Ch. Ziegler:* Theognidis elegiae secundis curis recognitae

(Tübingen 1880). — *J. Sitzler:* Theognidis reliquiae (Heidelberg 1880). — Anz. v. *O. Benndorf* und *O. Hirschfeld:* abhandlungen des archäologisch-epigraphischen seminars der univ. Wien. I. II (Wien 1880. 81). von *E. Petersen* in Prag. — *R. Schneider:* die geburt der Athena. — *J. Dürr:* die reisen des kaisers Hadrian. — Zu Kornutus. von *C. Lang* in Offenburg. — Noch einmal die Stellung von *uterque.* von *A. Procksch* in Eisenberg. — Zu Lucretius. von *C. Gneisse* in Metz. — Zum verständnis einer pseudo-Plutarchischen nachricht über Diogenes. von *G. P. Weygoldt* in Lörrach. — Miscellen. von *K. E. Georges* in Gotha. — Zu Plinius naturalis historia [XXI § 111]. von *O. Weise* in Eisenberg.

II. Abt. Ziel und methode des geographischen unterrichts. von *E. Oehlmann* in Norden (fortsetzung). — Bedenken und vorschläge zum religionsunterricht auf höheren schulen. von *P. Höfer* in Zerbst (schluss). — Goethe als übersetzer des hohenliedes. von *B. Badt* in Breslau. — Michael Neander. ein vortrag von *F. Meister* in Breslau (fortsetzung). — *G. Hess:* leitfaden der erdkunde für mittlere und obere classen höherer lehranstalten in drei bändchen (Gütersloh und Leipzig 1879). angez. von *E. Glaser* in Giessen.

Neuere Sprachen.

Ciala, Otto, französische Schulgrammatik mit Übungsstücken. [In drei Stufen.] Untere Stufe. Zweite vermehrte Auflage. [VIII u. 156 S.] gr. 8. geh. ℳ 1.50.

Mignet, M., histoire de la révolution française depuis 1789 jusqu'en 1814. Herausgegeben und mit sprachlichen, sachlichen und geschichtlichen Anmerkungen versehen von Dr. Adolf Korell, Oberlehrer am Thomas-Gymnasium in Leipzig. IV. Band: Directoire, consulat et empire. Depuis le 27 octobre 1795 jusqu'en 1814. [IV u. 146 S.] gr. 8. geh. ℳ 1.50.

II. Pädagogik. Deutsche Schulbücher.

(Mathematische Lehrbücher siehe: III.)

Zeitschrift für weibliche Bildung in Schule und Haus. Zentral-Organ für das deutsche Mädchenschulwesen. Herausgegeben von Richard Schornstein, Direktor der städtischen höheren Töchterschule und Lehrerinnen-Bildungsanstalt zu Elberfeld. Neunter Jahrgang. 1881.

7. Heft. Juli.

Inhalt: Wissenschaftliches, Unterricht, Erziehung und Schuleinrichtungen. Der innere Entwicklungsgang des Dramas bei den Griechen und Römern. Von Lic. Dr. A. Wünsche-Dresden. — Zeitschrift für Orthographie, herausgegeben von Dr. W. Vietor. Von Direktor Dr. Buchner-Krefeld. — Zur Frage der Schulbibel. — Litteratur für jung und alt, zur Unterhaltung und Belehrung. Armin Steins „Schlichte Geschichten. In der Dämmerungsstunde". Von F. Rehorn-Frankfurt a. M. — Adelheid Bandau, „Zwölf Jahre als Diakonissin". Von Oberlehrer Rudolph-Berlin. — Wissenschaftliche Litteratur. — Hermann Masius, „Naturstudien". Skizzen. I. Band. 9. Aufl. Von Dr. Röll-Darmstadt. — Hermann Masius, „Die Tierwelt". Charakteristiken. Von demselben. — F. Terks, „Leitfaden für den Unterricht über Bau und Leben des menschlichen Körpers". Von demselben. — Tabellen zur Wiederholung des systematischen Teiles der Zoologie, der Botanik und Mineralogie. Von demselben. — „Great Britain and Ireland designed by E. H. Wichmann". Von Lic. Dr. Wünsche-Dresden. — Professor Dr. Kutzen, „Das deutsche Land in seinen charakteristischen Zügen und seinen Beziehungen zu Geschichte und Leben der Menschen". 3. Auflage, herausgegeben von Professor Dr. W. Koner. Von demselben. — Dr. G. Stohn, „Lehrbuch der vergleichenden Geographie für höhere Lehranstalten sowie zum Selbstunterrichte". Von demselben. — Vereinsangelegenheiten. Programmentausch. Von Direktor Dr. Nöldeke-Leipzig. — Generalversammlung des Elsaß-Lothringischen Zweigvereines für das höhere Mädchenschulwesen in Mülhausen am 25. Mai. Von Oberlehrer Schultz-Mülhausen. — Nordwestdeutsche Provinzialversammlung in Bremen am 6. bis 8. Juni. Von Schulvorsteher A. Kippenberg-Bremen. — Allgemeine Deutsche Pensionsanstalt für Lehrerinnen und Erzieherinnen. Sitzung des Zentralverwaltungsausschusses zu Berlin am 13. Mai. Von Schulvorsteher Stäckel-Berlin. — Mitglieder des Kuratoriums und des Zentralverwaltungsausschusses. Von demselben. — Verschiedenes. Aus der Schule für die Schule. Von Rektor J. Keller-Aarau. — Potsdam. Erteilung des Direktortitels. — Potsdam. Zwanzigste Lehrerinnenprüfnng. — Vereinbarte Zeugnisprädikate. Nordhausen. — Das Feierabendhaus für deutsche Lehrerinnen und Erzieherinnen in Steglitz bei Berlin.

8. Heft. August.

Inhalt: Aus den Schulberichten dieses Jahres. (Die geistigen Grundlagen und Richtungen der höhern Mädchenschule der Gegenwart.) Von der Redaktion. — Wissenschaftliches, Unterricht, Erziehung und Schuleinrichtungen. Bilder aus der deutschen Litteratur. II. Ludwig Uhland, der Dichter und der Gelehrte. Von Dr. W. Kaiser-Elberfeld. — Wissenschaftliche Litteratur. E. Döring, „Lehrbuch der Geschichte der alten Welt". 2 Teile. Von Direktor Dr. Wulckow-Darmstadt. — H. Volkmann, „Rechenunterricht in der Volksschule". 1. Teil: Unterstufe. — „Aufgaben für das schriftliche Rechnen in der Volksschule". Von Th. Gramm-Elberfeld. — Dr. Joh. Deter, „Leitfaden für den Unterricht in der allgemeinen Arithmetik und Algebra". Von demselben. — A. Reinmuth, „Rechenapparat für Schule und Haus". Von demselben. — B. Höpfner, „Aufgaben zum Zifferrechnen". Heft I bis VII. Von demselben. — Rudolf Dietlein und Woldemar Dietlein, „Deutsche Fibel". Gemeinsame Unterlagen für den vereinigten Anschauungs-, Sprech-, Schreib-, Leseunterricht. Ausgabe B in 2 Heften. Von demselben. — D. Mattiat, „Raumlehre in der Volksschule". 2. Aufl. Von demselben. — J. Löser, „Praktisches Rechenbuch für deutsche Schulen". Heft I bis VII. Von demselben. — Vereinsangelegenheiten. Versammlung des Brandenburgischen Provinzialvereines zu Potsdam am 8. Juni. Von Schulvorsteher Stäckel-Berlin. — Verschiedenes. Vereinbarte Zeugnisprädikate. Städtische höhere Mädchenschule zu Darmstadt.

III. Mathematik, Technische und Naturwissenschaften.

Bruno, F. Faà di, Einleitung in die Theorie der binären Formen. Mit Unterstützung von Professor M. Noether deutsch bearbeitet von Dr. Theodor Walter. [VIII, 379 S. u. 4 tabellarische Beilagen.] gr. 8. geh. n. ℳ 10.80.

Fuhrmann, W., Oberlehrer an der Realschule auf der Burg in Königsberg/Ostpr., Einleitung in die neuere Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen und Gymnasien. Mit 4 lithographierten Figurentafeln. [IV u. 63 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 1.60.

Henrici, J., Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Erster Teil: Gleichheit der planimetrischen Gröfsen. Kongruente Abbildung in der Ebene. Pensum der Tertia. Mit 188 Figuren in Holzschnitt. [VIII u. 152 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.—

Mathematische Annalen. Unter Mitwirkung der Herren Prof. P. Gordan zu Erlangen, Prof. C. Neumann zu Leipzig, Prof. K. VonderMühl zu Leipzig, gegenwärtig herausgegeben von Prof. Felix Klein zu Leipzig und Prof. Adolf Mayer zu Leipzig. XVIII. Band. 1881. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. ℳ 20.—

2. u. 3. Heft.

Inhalt: Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung. Von *F. G. Mehler* in

Elbing. — Ueber die Mehler'schen Kegelfunctionen und deren Anwendung auf elektrostatische Probleme. Von *C. Neumann* in Leipzig. — Ueber Lamé'sche Functionen. Von *Felix Klein* in Leipzig. — Bemerkung über Abel'sche Gleichungen. Von *Eugen Netto* in Strassburg i. E. — Ueber den Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie. Von *Friedrich Schur* in Leipzig. — B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Von *O. Stolz* in Innsbruck. — Trois Notes sur la théorie des formes. Par *M. Faà de Bruno* à Turin. — Vollständige Durchführung einer isogonalen Verwandtschaft, die durch eine gebrochene Function zweiten Grades repräsentirt wird. Von *Gustav Holzmüller* in Hagen. (Mit 4 lithographirten Tafeln.) — Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades. Von *J. Gierster* in Bamberg. — Ueber die Abhängigkeit der Charaktere einer durch Leitcurven bestimmten Regelfläche von den Charakteren dieser Leitcurven. Von *Otto Rupp* in Brünn. — Theorie der allgemeinen Periodicität. Von *Otto Rausenberger* in Frankfurt a. M. — Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind. Von *Felix Klein* in Leipzig. — Ueber das Parallelhexagon auf dem geradlinigen Hyperboloid. Von *H. Schröter* in Breslau. — Ueber die algebraischen Functionen, welche zu gegebenen Riemann'schen Flächen gehören. Von *J. Thomae* in Jena. — Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Raume von n Dimensionen stattfinden. Von *G. Veronese* in Leipzig.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Herausgegeben von I. C. V. Hoffmann. XII. Jahrgang. 1881.

3. Heft.

Inhalt: I. Abhandlungen und grössere Aufsätze, kleinere Mittheilungen (Sprechsaal und Aufgaben-Repertorium). Constructionen von Ellipsentangenten und Bestimmung ihrer Berührungspunkte mit Hülfe des Lineals, wenn die conjugirten Durchmesser der Curven bekannt sind. I. Von *A. Ernst* in Halberstadt. (Mit 2 Fig.) — Kleinere Mittheilungen. Ueber den Unterricht in der Combinationslehre. Von Dr. *Stammer*. — Notiz zu v. Schäwens Aufsatze in IX, 117 (mit Bezug auf einen Aufsatz von Dr. *Matthiessen* in der Zeitschr. f. Math. u. Phys.). — Sprech- und Discussions-Saal. Erwiderung auf Dr. Diekmanns Aufsatz Heft 2, S. 95 u. f. Von Prof. Dr. *Erler*. — Zum Aufgaben-Repertorium. A) Auflösungen Nr. 112. 113. 114. 115. 126. 127. 129. 130. 131. — B) Neue Aufgaben Nr. 153—162. — C) Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitschriften Nr. 59—74. — II. Literarische Berichte. A) Recensionen. *Kessler*, Mittheilungen physikalisch-mathematischen Inhalts (Abdr. aus dem Jahresbericht der Bochumer Gewerbeschule) (*Günther*). — *Delabar*, Die Polar- und Parallelperspective (*Scherling*). — *Frangenheim*, Methodischer Leitfaden der Linearperspective für höhere Lehranstalten. — *Frangenheim*, Ein neues perspectivisches Studienblatt. — *Schlömilch*, Compendium der höheren Analysis. Fünfte Auflage. 1. Bd. (*H.*). — *Lagranges* mathematische Elementarvorlesungen herausgegeben von *Niedermüller* (*P.*). — *Reis*, Elemente der Physik, Meteorologie und mathematischen Geographie (*H.*). — *Herwig*, Physikalische Begriffe und absolute Maasse (*P.*). — *Pisko*, Zwei Vorträge: 1) Fortschritte der Akustik; 2) Die neuen Grundanschauungen in der Physik. — Zwei Leitfäden der Physik für Volksschulen: a) *Sattler*, Leitfaden der Physik und Chemie für Bürgerschulen. — b) *Baenitz*, Physik für Volksschulen. — *Weinhold*, Physikalische Demonstrationen. II. Liefg. — *Gretschel*-*Wunder*. Jahrbuch der Erfindungen. 16. Jahrg. — Kleiner Literatursaal. a) Schworella u. Heick, Leitfaden zur Orientirung im Gebiete der Kartographie u. Geographie. — b) Steigers Exportliste amerikanischer Zeitschriften. — B) Specielle Programmschau. a) Hessen-Nassau (mathem.) Ostern 1880. — b) Rheinprovinz (mathem. u. naturhist.) Ostern 1880. — C) Bibliographie. Februar—März. — III. Pädagogische Zeitung. (Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. dergl.) — Eine Antrittsrede eines deutschen Universitätsrectors über das Verhältniss des Gymnasiums zur Realschule I. O. (Abdruck). — Zum Kampfe der Realschule mit dem Gymnasium, kl. Mittheilung (Abdruck). — Die Vorträge von Hoppe und Durège in der mathematischen Section der Naturforscher-Versammlung zu Danzig. September 1880. (Abdruck). — Proben aus dem mathematischen Unterrichte an Lehrerseminaren und Volksschulen III. A) Die Geometrie von Kehr. — B) Aus der Praxis der Volks- und Bürgerschule. — Ein physikalischer Apparat (Spiritus-Schnellkocher) im Gewande eines Kochgeschirres. (Mit 1 Fig.). — Journalschau. — Geschäftliches.

4. Heft.

Inhalt: I. Abhandlungen und grössere Aufsätze, kleinere Mittheilungen (Sprechsaal und Aufgaben-Repertorium). Constructionen von Ellipsentangenten und Bestimmung ihrer Berührungspunkte mit Hülfe des Lineals, wenn die conjugirten Durchmesser der Curven bekannt sind. II. Von *Adolf Ernst*. Fortsetzung und Schluss. (Mit 2 Fig. im Text). — Kleinere Mittheilungen. Zu den physikalischen Schulversuchen: Das hydrostatische Paradoxon Von Dr. *Kleinstück*. Mit 2 Fig. im Text. — Zu Dr. Stammers Aufsatz über den Unterricht in der Combinationslehre, S. 190 u. f. Von *Studnička*. — Sprech- und Discussions-Saal. Zur mathematischen Orthographie; Gutachten zu XI, 187—196. Von

Dr. *Strack*. — Antwort auf die Bemerkungen des Hrn. Realschuldirectors Dr. *Müller*-Neustrelitz von Prof. *Emsmann*-Stettin nebst Notiz d. Red. — Zum Aufgaben-Repertorium. A) Auflösungen Nr. 88. 125. 132—134. (135). — B) Neue Aufgaben Nr. 163—174. — C) Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitschriften Nr. 75—82. II. Literarische Berichte. Recensionen. — *Buys*, La Science de la quantité précédée d'une étude analytique sur les objects fondamentaux de la science (*Günther*). — *Bunkofer*, Die Geometrie des Progymnasiums. I. Geometrie der Tertia. II. Geometrie der Secunda (*Scherling*). — *Heilermann* u. *Diekmann*, Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra an Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen. I. Th. 2. verm. Aufl. (*H.*) — *Unverzagt*, Ueber die Grundlagen der Rechnung mit Quaternionen (*H.*) — *Siegmund*, Die Wunder der Physik und Chemie (*Gaidečka*). — *Wettstein*, Die Strömungen des Festen, Flüssigen und Gasförmigen und ihre Bedeutung für Geologie, Astronomie, Klimatologie und Meteorologie (*Günther*). — *Reis*, Die Elemente der Physik, Meteorologie und mathematischen Geographie. — *Schell*, Theorie der Bewegung und der Kräfte. 2. umgearb. Aufl. — *Beetz*, Grundzüge der Elektricitätslehre, zehn Vorlesungen. — *Stöckhardt*, Die Schule der Chemie. 19. verb. Aufl. — *Wallach*, Tabelle zur chemischen Analyse. 1. u. 2. Th. (*Vogel*). — *Behrens*, Methodisches Lehrbuch der allgemeinen Botanik für höhere Lehranstalten (*Ludwig*). — *Guthe*, Lehrbuch der Geographie. 4. Aufl. — *Guthe*, Abriss der allgemeinen Erdkunde, erweiterter Abdruck aus diesem Lehrbuche. Beide bearb. von Dr. Wagner. — *Proctor*, Unser Standpunkt im Weltall (Our place among infinities). Deutsche Ausgabe von *Schur* (*Pick*). — B) Specielle Programmschau. Preussen, Posen, Schlesien, Mich. 1880. — Mecklenburg (Schwerin und Strelitz) 1880. — C) Bibliographie. April—Mai. — III. Pädagogische Zeitung. (Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. dergl.) Die fünfte Delegirten-Versammlung des allgemeinen deutschen Realschulmännervereins zu Berlin. April 1881. Bericht von Hersmann. — Uebersicht über die in Preussen gebrauchten geographischen Lehrmittel (Ergänzung zu XI, 185). — Böcke und Böckchen. — Preisausschreibungen. — Einladungen zu Naturforscher-Versammlungen. — Geschäftliches.

IV. Theologie.

Pfarrleben in einem Gebirgsdorfe. Kulturgeschichtliche Bilder von einem hessischen Geistlichen. [VII u. 163 S.] 8. geh. *M.* 1.80, eleg. geb. *M.* 2.40.

Verhandlungen der dritten evangelisch-lutherischen Landessynode im Königreiche Sachsen 1881. Im Anhang: Sachregister betreffend die Synodal-Verhandlungen der dritten ordentlichen evangelisch-lutherischen Landes-Synode. [V, 328 u. 30 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 4.—

Pastoralblätter für Homiletik, Katechetik und Seelsorge. Herausgegeben von G. Leonhardi und C. Zimmermann. Neue Folge von „Gesetz und Zeugniß". XI. Band. 1881.

8. u. 9. (Doppel-)Heft, August, September.

Inhalt: Ein Lied zur Harfe Davids am Erntefeste. Predigt am Ernte-Dankfeste über Psalm 104, 27—31. von G. Engelbach, Pfarrer in Butzbach (Großherzogthum Hessen). — Der Missionsruf an das neutestamentliche Zion. Missionsfestpredigt über Jes. 54, 2—5. von Pastor W. Wintzer in Brofen (Provinz Sachsen). — Er hat Alles wohlgemacht. Predigt am 12. Sonntage n. Trinit. über Marc. 7, 32—37. von K. Mau, Pastor in Burg in Dithmarschen (Holstein). — Die Berge, von welchen uns Hülfe kommt. Predigt über Galat. 3, 15—22. (Epistel am 13. Sonntage n. Trinit.) von Meinhardt, Archidiakonus in Delitzsch. — Grabrede über Joh. 20, 20. von Pfarrer Em. Quandt zu St. Elisabeth in Berlin. — Beicht- und Abendmahlsrede über Joh. 6, 5—13. von Pastor Lehmann in Strauch. — Leichenrede über Luc. 14, 2 und 4. am Sarge eines herrschaftlichen Wirthschaftsbeamten von Paul Dienemann, Pastor in Bömenzien (Altmark). — Die Ausbildung der Geistlichen vor 1000 Jahren, nach Rabanus Maurus, de institutione clericorum, von Dr. phil. Heinrich Nobbe, Pastor zu Bergen i. V. — Warum hat unsere Predigt nicht mehr Erfolg? Von Pastor Böttcher in Peine (Hannover). — Predigtentwürfe und Dispositionen über die Evangelien. (Trinitatiszeit.) Von E. Lehmann, Pfarrer in Eythra (K. Sachsen.) — Zur Biographie des Cyriacus Spangenberg von Th. Bindewald, Pfarrer zu Fischborn (Oberhessen). — Recensionen.

V. Medizin.

Jahrbuch für Kinderheilkunde und physische Erziehung. Herausgegeben von Widerhofer, L. M. Politzer, A. Steffen und B. Wagner. Neue Folge. XVII. Band. 4 Hefte n. ℳ 10.40.

1. Heft.

Inhalt: Therapeutische Beobachtungen beim Typhus im Kindesalter. Von Prof. *J. Kaulich.* (Hierzu 6 lithographirte Tafeln). — Erfahrungen und Versuche über die Verwendbarkeit von H. O. Opel's Nährzwieback als Nebenkost für Säuglinge und an Rhachitis leidende Kinder. Von Dr. med. *Ernst Kormann.* — Historische Literaturforschungen auf dem Gebiete der Orthopädie, vorläufig ausgedehnt bis zum Beginne des Jahres 1879. Von *Demselben.* — Ueber Puls und Temperatur bei der tuberkulösen Meningitis im Kindesalter. Von Dr. med. *J. Votteler*, Assistent an der Distriktspoliklinik in Leipzig. (Hierzu 1 lithographirte Tafel). — Kleinere Mittheilungen. 1. Zur Casuistik der Milzerkrankungen. Von *A. Steffen.* — 2. Zur Behandlung des Keuchhustens. Mittheilung von Dr. *A. Thomsen*, Copenhagen, eingeleitet von Dr. *Neubert*, Leipzig. — 3. Ueber Diphtherie. Von *Ph. Biedert.* — Besprechungen. — Analekten.

Dritte Abteilung.

Vermischte Notizen.

Rezensionenverzeichnis.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Heft III: Abhandlung von Weifsenborn.
Philologische Rundschau. No. 30.

Altarreden. Sammlung von Casualreden, von Leonhardi. II. Sammlg.
Pastoralblätter, 4. Heft. — Theologischer Litteratur-Bericht. No. 6. — Der Beweis des Glaubens. 6. Heft.

Archimedis opera omnia, ed. Heiberg. Vol. II.
Revue critique. No. 29.

Aristophanis ranae ed. v. Velsen.
Deutsche Litteraturzeitung. No. 30.

Aristotelis Ethica Nicomachea ed. Susemihl.
Deutsche Litteraturzeitung. No. 32.

Autenrieth, Wörterbuch zu den Homerischen Gedichten.
Philologische Rundschau. No. 27.

Bardey, Lehrbuch der deutschen Sprache. I. Teil. 2. Aufl. u. 2. Teil.
Chronik des Volksschulwesens. 1880. — Christlicher Schulbote. No. 19. — Central-Organ f. d. Interessen d. Realschulwesens. 7/8. Heft. — Evang. Schulblatt. No. 8,10.

Bartels u. Wirth, deutsches Lesebuch.
Schulblatt d. Provinz Sachsen. No. 14. — Württembergisches Schul-Wochenblatt. No. 29.

Berger, die geographischen Fragmente des Eratosthenes.
Philologische Rundschau. No. 26.

Blass, attische Beredsamkeit. III. Band. 1. Abth.
Revue historique. 4. Heft.

Cholevius, praktische Anleitung zur Abfassung deutscher Aufsätze.
Repertorium der Pädagogik. N. F. XV. S. 402.

Ciceronis scripta omnia ed. Mueller. Part. II. vol. I.
Blätter f. d. bayr. Gymnasialwesen. 6. Heft.

Curti Rufi hist. Alexandri Magni libri. Schulausg. v. Vogel. II. Bdchn.
—— —— Textausgabe von Vogel.
Blätter f. d. bayr. Gymnasialwesen. 6. Heft.

Egelhaaf, Vergleichung d. Berichte d. Polybios und Livius über d. italischen Krieg d. Jahre 218—217.
Jahresberichte des Berliner philolog. Vereins. VII. S. 185.

Fasti consulares comp. J. Klein.
Rivista philologica v. 1. Juli.

Franck, Hülfsbuch f. d. evang. Religionsunterricht.' 2 Abteilungen.
Chronik des Volksschulwesens. 1880. — Neue Preussische (Kreuz-) Zeitung (Sonntagsbeilage). No. 29. — Zeitschrift f. d. Gymnasialwesen. 7/8. Heft.

Frick, geographisches Vademecum.
Pädagogisches Archiv. 7. Heft.

Gardthausen, griechische Palaeographie.
The Louisville Daily Commercial, v. 19. Juni. — The Daily Times-Star (Cincinnati), v. 14. Juni.

Gelzer, Sextus Julius Africanus. I. Teil.
Mitteilungen a. d. historischen Litteratur. IX. S. 204.

Gerber et Greef, Lexicon Taciteum. Fasc. II. III.
Jahresberichte d. Berliner philolog. Vereins. VII. S. 220.

Grossmann, Regeln z. leichteren Erlernung d. hebräisch. Formenlehre.
Theologisches Literaturblatt No. 21.

Haedicke, vocabulaire français.
Centralorgan f. d. Interessen d. Realschulwesens. 10. Heft. — Programm der Realschule zu Crossen. 1881.

Helm, quaest. syntact. de participiorum usu.
Jahresberichte d. Berliner philolog. Vereins. VII. S. 250.

Helmert, Theorieen der höheren Geodäsie. I. Theil.
Technische Blätter. 2. Heft. — Deutsche Literaturzeitung. No. 29.

Herwig, physikalische Begriffe und absolute Maafse.
Zeitschrift f. mathem. Unterricht. 3. Heft.

Hesiodi carmina ed. Göttling. Ed. III. ed. Flach.
Philologischer Anzeiger. XI. Band. 6. Heft.

Huschke, Oskische Bleitafel.
Philologische Rundschau. No. 26.

Keller, Epilegomena zu Horaz. III. Teil.
Deutsche Literaturzeitung. No. 26.

Krefsner, Leitfaden d. französischen Metrik.
Herrig's Archiv. 65. Bd. 4. Heft.

Lysias, ausgewählte Reden, v. Frohberger. 2. Aufl., von Gebauer.
Jahresberichte d. Berliner philolog. Vereins. VII. S. 197.

Meier, Stunden der Weihe für den Dienst an der Gemeinde.
Theologisches Literaturalatt. No. 28.

Molina, vocabulario de la lengua Mexicana. Por Platzmann.
Deutsche Literaturzeitung. No. 26.

Möller und Hesse, Naturgeschichtsbilder. I. Teil. 2. Aufl.
Chronik des Volksschulwesens. 1880.

Müller, Luc., Qu. Horatius Flaccus. Eine Biographie.
Philologische Rundschau. No. 30.

Nägelsbach, hebräische Grammatik. 4. Aufl.
Zeitschrift f. d. Gymnasialwesen. 6. Heft.

Nepos, Corn., in usum scholarum accommodavit. Ed. Ortmann. Ed. II.
Jahresberichte d. Berliner philolog. Vereins. VII. S. 268.

Platons Euthyphron. Schulausgabe v. Wohlrab. 2. Aufl.
Philologische Rundschau. No. 31.

Pomponius Mela, de chorographia liber ed. Frick.
Philologische Rundschau. No. 27.

Reidt, Sammlung von Aufgaben a. d. Trigonometrie und Stereometrie. 2 Theile. 2. Aufl.
Zeitschrift f. österreichische Gymnasien. V. Heft.

Schütze, evang. Schulkunde. 5. Aufl.
Chronik des Volksschulwesens. 1880.

Schütze, Leitfaden f. d. Unterricht in der Erziehungs- und Unterrichtslehre. 2. Aufl.
Schlesische Schulzeitung. No. 28. — Preufsisches Schulblatt. No. 20. — Literaturblatt f. katholische Erzieher. No. 7. — Mädchenschule v. 20. Juli.

Sieglin, die Fragmente des L. Coelius Antipater.
Jahresberichte d. Berliner philologischen Vereins. VII. S. 184.

Sophoclis tragoediae ed. Wunder. Vol. I. Sect. II. Oedipus Rex. Ed. V.
Blätter f. d. bayr. Gymnasial- u. Realschulwesen. 6. Heft.

Stier, hebräisches Übungs- und Lesebuch.
Zeitschrift f. d. Gymnasialwesen. XXXV. 6. Heft.

Tacitus, das Leben des Agricola. Schulausgabe von Draeger. 3. Aufl.
Jahresberichte des Berliner philolog. Vereins. VII. S. 211.

———— dialogus de oratoribus. Schulausgabe von Andresen. 2. Aufl.
Jahresberichte des Berliner philolog. Vereins. VII. S. 215.

Vergils Aeneide. Schulausgabe von Kappes. I—III. Heft. 2. Aufl.
Philologische Rundschau. No. 25. — Philologischer Anzeiger. XI. 4/5. Heft.

Vollbrecht, Wörterbuch zu Xenophons Anabasis.
Revue critique. No. 25.

Warnke, Pflanzen in Sitte, Sage und Geschichte.
Literar. Beilage zur Pädagog. Zeitung. No. 7.

Zieliński, die letzten Jahre des Zweiten punischen Krieges.
Mitteilungen a. d. historischen Litteratur. 4. Heft. — Jahresberichte d. Berliner philolog. Vereins. VII. S. 190.

Berichtigung.

In No. 3 dieser Mitteilungen, Seite 48. Z. 5 v. oben ist zu lesen: Draeger, Direktor des Kgl. Gymnasiums, statt Seminars.

Buchhändlerische Centralstelle für den Programmentausch der höheren Schulen Deutschlands.

Weitere Berichtigungen zu dem Verzeichnis der Programme 1881.

Die angezeigte Abhandlung erscheint nicht von:

No. 435. **Metz**, Lyceum. — No. 458. **Thann**, Real-Progymnasium. — No. 466. **Freiberg i. S.**, Gymnasium. — No. 521. **Bruchsal**, Gymnasium. — No. 530. **Donaueschingen**, Progymnasium.

Statt der angezeigten Abhandlung liefern:

No. 441. **Strafsburg**, Protest. Gymnasium: Jundt, die dramat. Aufführungen im Gymnasium zu Strafsburg. Ein Beitrag zur Geschichte des Schuldramas im 16. u. 17. Jahrh.

No. 457. **Strafsburg**, Neue Realschule: Froitzheim, Neuere Geschichte für höhere Schulen Elsafs-Lothringens.

No. 526. **Mannheim**, Gymnasium: Schmalz, Über die Latinität des P. Vatinius in den bei Cicero ad. Fam. V, 9 u. 10 erhaltenen Briefen.

Ferner eingegangene Programme für 1881:

No. **18.** [Abhandlg.] 20. 27.
No. **138.** 46. 98.
No. **256.** 66. 73. 81. 84.
No. **348.** 51.
No. **432.** 33. 34. 35. 36. 37. 38. 41. 45. 48. 49. 50. 51. 52. 57. 58. 59. 66. 71. 98.
No. **507.** 20. 21. 22. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 32. 33. 35. 36. 37. 40. 41. 42. 45. 47. 52.
No. **615.** [Abhandlg.]

Aus Bayern:

Amberg, Studienanstalt: Neumeyer, Agis und Kleomenes. Zwei Lebensbilder aus der letzten Zeit des spartan. Staates.

Ansbach, Studienanstalt: Günther, Beiträge zur Geschichte der neueren Mathematik.

Aschaffenburg, Studienanstalt: Degenhart, kritisch-exegetische Bemerkungen zu Ciceros Schrift de natura deorum.

Augsburg, Gymnasium St. Stephan: Lobhardt, quae de Judaeorum origine judicaverint veteres.

———, Realgymnasium: Schulnachrichten.

Bamberg, Studienanstalt: Mayerhoefer, die Florentiner Niobegruppe.

Bayreuth, Studienanstalt: Hofmann, Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe am 6. Dezbr. 1882.

Dillingen, Studienanstalt: Pfeifer, harmonische Beziehungen zwischen Scholastik und moderner Naturwissenschaft.

Eichstätt, Gymnasium: Hodoeporicon S. Willibaldi, oder S. Willibalds Pilgerreise geschrieben von der Heidenheimer Nonne. Übersetzt und erläutert von Jakob Brückl.

Erlangen, Studienanstalt: Kelber, zu Julius Firmicus Maternus, dem Astrologen.

Freising, Studienanstalt: Seisenberger, der biblische Schöpfungsbericht (Genesis I, 1—2, 3) ausgelegt.

Hof, Studienanstalt: Sörgel, Demosthenische Studien. I.

Kempten, Studienanstalt: Lehmann, Probe aus einer Übersetzung des Livius.

Landau, Studienanstalt: Molenaar, John Miltons Verlorenes Paradies. 1. Buch. Ins Deutsche übertragen.

Landshut, Studienanstalt: Einhauser, die drei Spiranten der griechischen Sprache. Ein Beitrag zum Unterrichte im Griechischen.

Metten, Studienanstalt: Braunmüller, namhafte Bayern im Kleide des heil. Benedikt. Zweite Reihe.

München, Ludwigsgymnasium: Seibel, die Klage um Hektor im letzten Buche der Ilias. Eine Homer-Studie.

———, Maximiliansgymnasien: Stumpf, de Nesiotarum republica.

Neuburg a. D., Studienanstalt: Eberl, Studien zur Geschichte der zwei letzten Agilulfinger.

Neustadt a/d. H., Studienanstalt: Müller, zur Übersetzung und Erklärung des Livius. [II, 1—20].

Nürnberg, Studienanstalt: Schröder, Auflösungen von Aufgaben aus der Trigonometrie.

Regensburg, altes Gymnasium: Obermaier, die conjugatio periphrastica activa und der irrealis im Lateinischen.

———, neues Gymnasium: Krebs, die Präpositionen bei Polybius. I.

Schweinfurt, Studienanstalt: Kern, zum Gebrauch des Ablativ bei Vergil.

Speier, Studienanstalt: Thielmann, über Sprache und Kritik des lateinischen Apolloniusromanes.

Straubing, Studienanstalt: Wex, die Metra der alten Griechen und Römer in Maſsen des deutschen Reichs übersichtlich dargestellt.

Würzburg, Studienanstalt: Schepss, handschriftliche Studien zu Boethius de consolatione philosophiae.

Zweibrücken, Studienanstalt: Stich, Adnotationes criticae ad Marcum Antonium.

Von Universitäten, Verzeichnis der Vorlesungen 1881/82.

Berlin, lateinisch mit: J. Vahlen, observationes quaedam sermonis Lucretiani.

Breslau, lateinisch mit: A. Reifferscheid, oratio ad natalicia augustissimi Imperatoris ac Regis nostri.

Bonn, deutsch und lateinisch mit der Abhandlung: E. Lübberti de Pindari studiis Hesiodeis et Homericis dissertatio.

Freiburg, deutsch, ohne Abhandlung.

Greifswald, lateinisch mit der Abhandlung: A. Kiessling, analecta Plautina II.

Halle, deutsch und lateinisch mit den Abhandlungen: Dümmler, Rhytmorum ecclesiasticorum aevi Carolini. — Keil, oratio de Friderico Guilelmo Magno electore Brandenburgico.

Heidelberg, deutsch, ohne Abhandlung.

Jena, lateinisch mit der Abhandlung: M. Schmidt, commentationis de numeris in choricis systematis Ajacis Sophocleae continuatio.

Kiel, deutsch und lateinisch, ohne Abhandlung.

Königsberg, lateinisch: Praemisit L. Friedlaender titulos in quibus impensae monumentorum sepulcralium indicatae sunt.

Leipzig, deutsch, ohne Abhandlung.

Marburg, deutsch, ohne Abhandlung.

Münster, lateinisch mit: J. M. Stahl, de tragoediae primordiis et incrementis ab Aristotele adumbratis.

Rostock, lateinisch mit: F. W. Fritzsche, additamenta Lucianea.

Strafsburg, deutsch, ohne Abhandlung.

Würzburg, deutsch, ohne Abhandlung.

Aus **Siebenbürgen** gingen ein die Programme von:

Hermannstadt — Kronstadt — Mediasch — Mühlbach — Sächs. Regen — Schäfsburg.

Aus **Oesterreich**:

Brixen — Horn — Karolinenthal (Prag) — Komotau — Böhm. Leipa — Teschen — Wien (Gymn. z. d. Schotten).

Leipzig, den 25. August 1881.

B. G. Teubner.

Ausgegeben im September 1881.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

INHALT.

☞ **Jeder Band der Annalen wird 36–38 Druckbogen umfassen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Verantwortliche Redaction: **F. Klein** und **A. Mayer.**

12

3

PERIODICAL

INHALT.

☞ Jeder Band der Annalen wird 36—38 Druckbogen umfassen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Verantwortliche Redaction: **F. Klein** und **A. Mayer.**

12