始

數學要項

數學要項

序　　　文

1. 本書は學生諸氏が數學研究の上に日常暗誦を要する基礎を集めたるものにて、微塵の無駄も含まざる寶典なり。

2. 數學練習には、應用雜題の多くを解すること、尤も良法なれども、其基礎を明確になし置かざれば、如何に多數の應用に努力するも、尙骨折つて草臥を得るが如し。思ふに應用問題は扇子を開くが如く、廣き範圍に自由自在なるも然も其擴げ得らるゝ根本は、扇の要め一點なり。

3. 本書は所謂數學の要めなり。卽ち粋を集め其繁を却けたるものにして、之を充分に會得すれば、應用に機敏の活力を與ふべし。

4. 本書の內容を別ちて、代數、三角、算術、平面及立體幾何の五編とす。

目　　次

1. 代　　數

2. 三 角 法

3. 算　術

4. 平面幾何

5. 立體幾何

1 代 數

1. 正數及負數の性質 0に或數を加へたる結果を正數と云ひ，0より或る數を減したる結果を負數と云ふ。然れとも正數及負數の記號は加減の意味に非ずして，性質及方向の反對なることを表はすに用ひらるゝを以て，問題の題意に依りて適當に解釋すへきものなり。茲に繁雜を去ける爲め＋の記號は特に用ひさることゝなす。尙注意すべき要點：——

【1】 正數と負數とを總稱して代數的の數と云ひ，符號を取り去りたる數を絕對値と云ふ。

【2】 正數の大小は其絕對値の大小に等しく負數の大小は其絕對値と相反す。

【3】 0は總べての正數より小にして，總べての負數より大なり。

2. 加減乘除符號の變化 加減乘除は絕對値の計算の結果に符號を付す。而して乘除に

於ける符號の變化は．異符號は負となり．同附號は正となる。

3. 指數の定則 或數を因數として．幾回も相乘して得る所の積を其數の乘羃又は羃と云ふ。指數の變化する法則は次の如し。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

4. 因數分解 因數分解は數の和及差の實算に依る公式を逆に利用する方法なり。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)$$
$$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (bc+ca+ab)x + abc$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$(x+1)(x^2-x+1) = x^3 + 1$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$$

5. 剩餘定理 x の降冪に從ひて整頓されたる x の多項式を．一次の 2項式 $x-a$ にて除して得べき剩餘は．此多項式中の x に a を代入して得べき値なり。卽

$$2_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots a_{n-1}x + a^n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

（1）式を $x-a$ にて除したる商を y とし．剩餘を b とす。（1）式の全體を z を以て表はせば

$$z = (x-a)y + b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$x=a$ として(2)式の x に a を代入すれば (2)式は z' なる値に變形す。卽

$$z' = (a-a)y + b = b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

故に（3）式の結果は．z' が剩餘に等しき値となる。茲にもし (1)式が $x-a$ にて全然割り切れるものとすれば．b=o y.=o なるを以て．一般に $x=a$

としてaを代入したる値が0なれば．$(x-a)$にて割り切れることを證す剩餘定理を應用すれば次の諸式を得。

【1】 $\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$の値：——

$x=y$とすれば．$x^n-y^n=x^n-x^n=0$にしてその奇數偶數何れにしても割り切る。即ち

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots y^{n-1}$$

【2】 $\dfrac{x^n-y^n}{x+y}$の値：——

x^n-y^nに$y=x$を代入せば．分子は、$x^n-(-x^n)$にして．nが偶數なるとき割り切れる。即

$$\frac{x^n-y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2\cdots y^{n-1}$$

【3】 $\dfrac{x^n+y^n}{x+y}$の値：——

$x=-x$を代入せば．分子は$x^n+(-x^n)$にしてnが奇數なるとき此式は割り切れる。即

$$\frac{x^n+y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots+y^{n-1}$$

6. 分數及比例　次の諸式は比例の重要なる關係なり。但．分數と比とは同一の値を記法を異にするものとす。

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}\qquad \frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm b}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\qquad \frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$$

$$\frac{a}{b}=\pm\sqrt{\frac{a^2-ce}{b^2-df}}$$

（註） $\dfrac{c}{d}=\dfrac{ma}{mb}$　　$\dfrac{e}{f}=\dfrac{na}{nb}$

$$\therefore\sqrt{\frac{a^2-ce}{b^2-df}}=\sqrt{\frac{a^2-mna^2}{b^2-mnb^2}}=\sqrt{\frac{a^2(1-mn)}{b^2(1-mn)}}$$

7. 比例配分　或數を幾つに分ち．其各部分を所定の比に等しからしむる算法を比分按分or按分比例と云ふ。

【4】 Aを1m nに比例する樣分つこと．

所要の3個を$x\ y\ z$とすれば．

$x+y+z=A$　　$1+m+n=B$

$$x=\frac{1}{B}A \quad y=\frac{m}{B}A \quad z=\frac{n}{B}A$$

8. 公約數 數個の整式を整除する式を其公約數or公因數と云ひ．公約數の中次數の最大なるものを最大公約數と云ふ。

9. 公倍數 數個の整式にて整除せらるゝ式を其公倍數と云ひ．公倍數の中にて次數の最小なるものを其最小公倍數or最低公倍數と云ふ。

10. 分數式 AをBにて除したる商を分數式と云ふ。分數式に關する定理次の如し。

【1】分數式の兩項に同數を乘するも其値を變せす。

【2】分數式の兩項を同數にて除するも．其値を變せす。

【4】分數式の値を變せさる樣．公約數にて兩項を除することを約分と云ふ。

【4】分數式の値を變せさる樣同分母に化することを通分と云ふ。

11. 最大公約數の求め方 簡單なる式

は因數分解をなして．兩式を比較の上．其最大なる約數を求む。而して複雜にして見出し難きものは次の算法に依るべし。

以下．2式をA及Bとし．尚A>Bとす．

【1】ABを降冪の順に整列す。

【2】AをBにて除し．其殘餘をCとす。

【3】BをCにて除し．其殘餘をDとす。

【4】CをDにて除し．其殘餘をEとす。

【5】以上の如く繰り返へして．殘餘が遂に0となりたるときは．最後の除數は所要の最大公約數なり。即ち．D=Eとなりたるときは．Eは最大公約數とす。

【6】計算例：——

$A=12x^2-4x-65$

$B=4x^2-8x-5$

上の兩式の最大公約數の運算法を次の如くす。

$2x$	$4x^2-8x-5$	$12x^2-4x-65$	3
	$4x^2-10x$	$12x^2-24x-15$	
	$2x-5$	10 | $20x-50$	
		$2x-5$	

(註) AをBにて除すれば．3が立つ。其殘餘は$20x-50$なり。之を10にて約すれば．$2x-5$となる。$2x-5=C$として．Bを除すれば$3x$が立つ。而して其殘餘は$2x-5$なるを以て．Dを以てCを除すれば殘餘は0となる。故に $2x-5$はA及Bの最大公約數なり。

【解】 前法の法則は次の理論より來る。

【1】 EがAの約數なればEはmAの約數となるを得。

【2】 EがA及Bの約數なればEは $mA\pm nB$ の約數たるを得。但m及nは整式とす。

$$\therefore \frac{A}{E}=a \quad \frac{B}{E}=b$$ とすれば

$$mA\pm nB=maE\pm nbE.$$ 故に

AをBにて除したる商をgとすれば

$$A-gB=C$$

故に．A及Bの公約數はCの約數なり。又A及Bの公約數はB及Cの公約數となる。

【3】 前式より．$A=gB+C$なる故に．B及Cの

公約數はAを整除するを以て．B及Cの公約數はA及Bの公約數なり。

【4】 以上の殘餘の除法を繰り返へして最後にDとEとが相等しきときは．A．B．D．Eの公約數はD及Eにして．之が最大なることは明らかなり。

【5】 3ッ以上の多項式の最大公約數を求むる法：──ABCの最大公約數を求むるには．先づA及Bの最大公約數Gを求め次にGとCとの最大公約數Hを求む可し。然るときはHは所要の最大公約數となる。

12. 最小公倍數の求め方

【1】 2ツの多項式の最小公倍數の求め方は先づ最大約數を求め．之を以て一式を除し．其商を他の式に乘すべし。

【2】 3ッ以上の多項式の最小公倍數の場合：──ABCの最小公倍數を求むるには．先づA及Bの最小公倍數Lを求め．次にLとCとの最小公倍數Hを求むべし。然るときはHはABC 3式の最小公

倍數となる。

13. 一元二次方程式 とは唯1ツの未知數を含む．2次方程式にして．之を次の如く分つ。

(a) 不完全次方程式or純二次方程式

例　$ax^2=b$ ……………………(1)

(b) 完備2次方程式or雜2次方程式

例．$ax^2+bx+C=o$ …………(2)

14. 不完二次方程式の解法

$ax^2=b$　　$\because x=\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

15. 完備二次方程式の解法

【1】 $ax^2+bx+c=o$ ……………(1)

(1) 式にaを乘ずれば

$4a^2x^2+4abx+4ac=o$

$4a^2x^2+4abx=-4ac$

兩項にb^2を加ふれば左邊は完全平方となる。

$(2ax+b)^2=b^2-4ac$

$\because 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$\therefore\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ……….(1)

【2】 (1)式の形が次の如きときは，

$ax^2+2b_1x+c=o$ ………….(3)

$x=\dfrac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-ac}}{a}$ ………. (4)

【3】 $x^2+px+q=o$の解法：——

$x^2+px+q=o$ ……………..(5)

$\therefore\ x^2+px=-q$

$\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2=\dfrac{p^2}{4}-q$

$\therefore\ x=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$ ……(6)

【4】 一般に2次方程式の2根をa bとせば

$(x-a)(x-b)=o$ ………….(7)

$x^2-(a+b)x+ab=o$

$\therefore\ x^2+px+p=o$ の係數關係は

$p=-(a+b)\quad q=ab$ ……..(8)

又．$Ax^2+Bx+C=o$の係數は

$$\frac{B}{A}=-(a+b)\quad \frac{C}{A}=ab\ldots(9)$$

16. 一元二次方程式の吟味 次の方程式

$ax^2+bx+c=o$ に於いて.

【1】 $b^2-4ac=o$ なるときは.

兩根は實數にして相等とし。

【2】 $b^2-4ac<o$ なるときは.

兩根は虚數となる。

【3】 $b^2-4ac>o$ なるときは.

兩根は同符號の實根となる。

茲に b^2-4ac の値に依りて. $\sqrt{b^2-4ac}$ の根を虚ならしめ. 又は實數ならしむるを以て. b^2-4ac を 方程式 $ax^2+bx+c=o$ の判別式と云ふ。

17. 二次不等式の解法 一般方程式に於て

(1) $x^2+px+q>o$ ……………(1)

【1】 $p^2-4q>o$ なれば

$x^2+px+q=(x-a)(x-b)$ なるを以て

$x>a$ or $x>b$

【2】 $p^2-4q=0$ なるときは

$x^2+px+q=(x-a)^2$

$\therefore\ x=a$

【3】 $p^2-4q<o$ なるときは.

x は任意の數となる。

(2) $x^2+px+q<o$ ……………(2)

此解不能とす。

18. 無理數 根號を有する數が. 其結果を精確に求むることを得ざるとき. 之を無理數 or 不盡根數と云ひ. 之に對して整數及分數を有理數と云ふ。

(例) $\sqrt{2}=1.414$ (人よ人よ. と暗誦す)

$\sqrt{3}=1.732$ (人並に. と暗誦す)

19. 不盡根數の關係 a. b. c 及 m.n を正の整數とすれば. 次の關係あり。

$$\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc}\ \cdots\cdots(1)$$

$$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$m\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{m\sqrt{a}}{m\sqrt{b}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

20. 無理數の定理 或數の平方根は1部分が有理にして．他の部分が二次不盡根數（平方根の無理數）なる能はず。

【解】 $\sqrt{n}=a+\sqrt{m}$ なるを得るとせば之を平方して次の如き結果となる。

$$n=a^2+2a\sqrt{m}+m$$

$$\sqrt{m}=\frac{m-a^2-m}{2a}$$

卽$\sqrt{m}$は有理數なる結果となるを以て．假設に反す。此關係は無理方程式の解法上注意を要する點にして．不要の根を誘ひ來ることあり。

21. 無理方程式の解法 無理方程式を解くには次の3段の順序を行ふ必要あり。

(1) 根號を拂ふて有理式となすこと。

(2) 得たる無理方程式を解くこと。

(3) 根が原式に適當するや吟味すること。

32. $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$の解き方 之を解くには

原式を次の如く假定す。

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

兩邊を平方すれば

$$a\pm\sqrt{b}=x+y\pm2\sqrt{xy}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ x+y&=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ xy&=\frac{b}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(2)$$

(2)式を解く時は

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

23. 虛數 負數$(-a)$の平方根$\sqrt{-a}$を虛數と云ふ。卽．數は正負に關せず．其平方は正となるべきものにして．負數の平方根は正にあらず．負にあらざるものとなる。故に之を虛數と云ふ。虛數に對し．他の有理數．無理數及0を實數と云ふ。

（解） $\sqrt{-a}$ の解：——

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$$

上式の $\sqrt{-1}$ を i を以て表はし．之を虛數

單位と云ふ。方程式の根が虚數なるときは．之を**虚根**と云ひ．實數のとき**實根**と云ふ。

24. $x^3=1$ の解法

$$x^3-1=0 \quad \text{or} \quad (x-1)(x^2+x+1)=0 \cdots(1)$$

$$\therefore \quad x-1=0 \qquad x^2+x+1=0$$

故にxの3根の1ツは$x=1$にして．他の2根は次の如くなる。

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \qquad x_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdots\cdots\cdots(2)$$

然るに茲に x_2．x_3 の各自乘數を求むれば．

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{1-3-2\sqrt{3}}{4}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-3+2\sqrt{-3}}{4}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

故にx_2とx_3とは互ひに他の2乘に等し。

故に $x_2=w \qquad x_3=w^2 \cdots\cdots\cdots(3)$

$$W_1^2=W_2 \qquad W_2^2=W_1$$

∴ 一般に實根の3乘の1ツがaなれば．

$$x_1=a \qquad x_2=aw_1 \qquad x_3=aw_2 \cdots\cdots(4)$$

25. 重二次方程式の解

重二次方程式とは未知數x^4及x^2と絶對項とを以てなる方程式なり。即ち

$$ax^4+bx^2+c=o \cdots\cdots\cdots(1)$$

此場合の解き方としては．$x^2=y$とすれば

(1) 式をyの2次方程式となすを得。

$$\therefore \quad ay^2+by+c=o \cdots\cdots\cdots(3)$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdots\cdots(3)$$

然るときは $x=\pm\sqrt{y}$ を以てxの根は4個となる。

26. 聯立方程式

聯立方程式は 2元以上の一次方程式及二次方程式等の組合はせを以てx．y．z等の未知數を求むる方法なり。以下各種の場合に付き代表的解法を示めす。

【例解1】 二元一次方程式の解法

$$ax+by=m \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$Ax-By=M \cdots\cdots\cdots(2)$$

【1】 **消去法 or 加減法**：——

yの係數を相等しからしむる爲め．(1)にAを掛け．(2)にaを掛ける。其の差を求むれば．yの一次式となるを以てy及xを求むることを得。

即．$Aax+Aby=Am$

$$\begin{array}{r} Aax-aBy=M \\ \hline y(Ab+aB)=Am+aM \end{array}$$

$$\therefore\ y=\frac{Am+aM}{Ab+aB}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3) 及 (1)式を以てxを求む。

【2】 <u>置換法</u>：——

(1)式よりxの値を假定し．(2)式に入る。

$ax=m-by$

$$x=\frac{m-by}{a}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

之を(2)式に置き換ふばyを求めらる。

【3】 <u>未定係數法</u>·——

(2)式に任意數を乘ずれば．

$ax+by=m$

$$\begin{array}{r} Anx-Bny=nM \quad (+) \\ \hline x(a+An)+(b-Bn)y=m+nM \end{array}$$

玆にnは任意の定數なる可きに依り．nが$b-Bn$

$=o$なる値にとる。然るとき

$$n=\frac{b}{B}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

然るときは　$x(a+An)=m+nM$

$$\therefore\ x=\frac{m+nM}{a+nA}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (4)$$

(4)式にnの値を入れてxを求む。

【例解】 $\boxed{\text{一次と二次との聯立方程式}}$ ：——1ツが一次にして．他が2次なる場合は常に之を解くことを得。

$$lx+my+n=o\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=o(2)$$

(1)式より$x=-\dfrac{my+n}{1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(3)式を(2)式に換置すれば．yのみを含める二次方程式となる。由つてyを解く。次にxを求むるを得べし。

【例解3】 $\boxed{\text{二次と二次の聯立方程式}}$ ：——2式が共に二次にして且同次なるときは．常に之を解することを得。

$$ax^2+bxy+cy^2=d\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$px^2+qxy+r^2=s \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

【1】 $y=vx$と命ず。之を(1)及(2)式に置き換ふれば次の形となる。

$$x^2(a+bv+cv^2)=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$x^2(p+qv+v^2)=s \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(3)及(4)式はx^2を括弧の外に含む故に．(3)式を(4)式にて除すればvの二次方程式を導くを得。依つてvを求め．(3)式よりxを出し．次に(1)式にてyを求むるを得。

【2】 次の算法としては．x及yを含まざる常數項を消去する爲めに．d及sの最小公倍數に直し．其差を求むれば．一般の形として(5)式を得らる。

$$lx^2+mxy+ny^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(5)式は因數分解に依りて次の如く變形するを得。

$$(Ax-By)(Cx-Dy)=o \cdots\cdots\cdots (6)$$

$$\therefore\quad x=\frac{B}{A}y \quad 或は \quad \frac{C}{D}y$$

卽xの2根を得．之を(1)式に代入せば．xyの

yの常數値を求めらる。

【3】 x^2の項を消去する爲めに(1)及(2)式のx^2の係數を最小公倍數に直ほして．兩式の差を求むれば．一般の形ちとして次式を得。

$$lxy+my^2=n$$

$$\therefore y^2=\frac{n-lxy}{m} \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

同樣の方法にてy²の項を消去すれば．

$$x^2=\frac{v-txy}{u} \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

(7)と(8)とを乘ずればxyの二次方程式を得。

$$mux^2y^2=(n-lxy)(v-txy) \cdots\cdots\cdots (9)$$

(9)式よりxyの値を求む。之を(1)及(2)に代入すれば．x^2及y^2の値を知り．x及yを求むるを得べし。

【例解4】 2數の和と積の方程式 :——

$$x+y=a \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$xy=b \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)式を平方すれば

$$(x+y)^2=a^2$$

$$(x+y)^2-4xy=a^2-4b$$

$$\therefore\quad (x-y)^2=a^2-4b$$

$$x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)及(2)式の和によりてxを求め．差に依りてyを求むるを得。

【例解5】 平方の和と積の方程式 ：――

$$x^2+y^2=a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$xy=b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

玆に$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$なる故に．

$$\left.\begin{array}{l}(x+y)^2=a+2b\cdots\cdots\cdots\\(x-y)^2=a-2b\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}(3)$$

(3)式より平方根を求むれば．

$$\left.\begin{array}{l}x+y=\pm\sqrt{a+2b}\cdots\cdots\cdots\\x-y=\pm\sqrt{a-2b}\cdots\cdots\cdots\end{array}\right)(4)$$

(4)式は和及差に依りて夫々x及yを得。

【例解】 三乗の和の式 ：――

$$x+y=a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^3+y^3=b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)を(1)にて除すれば $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}=\dfrac{b}{a}$

$$\therefore\quad x^2-xy+y^2=\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又(1)式を平方すれば

$$x^2+2xy+y^2=a^2\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4)式より(3)式を減ずれば．xyを知る。然るときは．(1)とxyとは和と積の解法に倣ふ。

【例解7】 四乗の和の式 ：――

$$x+y=a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^4+y^4=b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)式を平方すれば次の如し。

$$x^2+y^2+2xy=a^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式よりx^2+y^2を更に2乗したる式と(2)式とより．xyの二次方程式を得。然るとき(1)とxyとは和と積の解法に倣ふ。

【例解8】 3元の例解(1) ：――

$$xy=a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$yz=b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$zx=c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)と(2)との積を(3)にて除す。

$$\frac{xy \times yz}{zx} = \frac{ab}{c} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(4)より $y^2 = \frac{ab}{c}$　$y = \pm\sqrt{\frac{ab}{c}}$

yを(1)及(2)に置き換ふれば. x 及 z を得る。

【例解9】 $\boxed{\text{3元の例(2)}}$ ——

$$x(x+y+z)=a \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$y(x+y+z)=b \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$z(x+y+z)=c \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)(2)(3)を相寄すれば

$$(x+y+z)^2=a+b+c$$

$$\therefore \quad x+y+z= \pm\sqrt{a+b+c} \cdots\cdots\cdots(4)$$

(4)を以て(1)(2)(3)の各式を除すれば. x. y. z の各値を得らる。

【例解10】 $\boxed{\text{3元の例(3)}}$: ——

$$yz=by+cz \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$zx=cz+ax \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$xy=ax+by \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此聯立方程式の各項には未知数を有する故oは x. y. z の各根となる。他の根を求むるには各式を夫々 $yz. zx. xy$ にて除す。

$$1=\frac{b}{z}+\frac{c}{y} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$1=\frac{c}{x}+\frac{a}{z} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$1=\frac{a}{y}+\frac{b}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

今. a. b. c は o ならざるを以て. (1) ×a (2) ×b. (3) ×c を以て. 内 2 個を加へ. 其殘りの 1 個を減ずれば

$$a+b-c=\frac{2ab}{z}$$

然るとき. z.x.y の各値は同様に

$$z=\frac{2ab}{a+b-c},\ x=\frac{2bc}{b+c-a},\ y=\frac{2ac}{c+a-b}$$

【例解11】 $\boxed{\text{3元の例 (4)}}$: ——

$$x^2-yz=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$y^2-zx=b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$z^2-xy=c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$(x^2-yz)^2-(y-zx)(z-xy)=a^2-bc$$

$$x(x^3+y^3+z^3-3xyz)=a^2-bc$$

同様の方法にて

$$y(x^3+y^3+z^3-3xyz)=b^2-ca$$

$$z(x^3+y^3+z^3-3xyz)=c^2-ab$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a^2-bc}=\frac{y}{b^2-ac}=\frac{z}{c^2-ab}$$

$$=\frac{1}{x^3+y^3+z^3-3xyz.}$$

同値分数の理に依りて

$$\frac{x}{a^2-bc}=\pm\sqrt{\frac{x^2-yz}{(a-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{a}{a(a^3+b^3+c^3-3abc)}}$$

$$\therefore x=\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$$

【例解12】 3元の例 (5)

$$x+y+z=a\cdots\cdots(1)$$

$$yz+zx+xy=b\cdots\cdots(2)$$

$$xyz=c\cdots\cdots(3)$$

此解法として．先づ三次方程式の 3 根を．

$\alpha.\ \beta.\ \gamma$ とすれば

$$(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)=o$$

$$X^3-(\alpha+\beta+\gamma)X^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X-\alpha\beta\gamma=o$$

$$X^3+PX^2+QX-R=o\cdots\cdots(4)$$

(1)(2)(3)(4)各式を對照すれば．

$$P=a. \quad Q=b. \quad R=c.$$

$$\therefore \quad X^3-aX^2+bX-c=o\cdots\cdots(5)$$

此三次方程式を因数分解法に依りて

$$(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)=o$$

故に $x=\alpha.\ y=\beta\ Z=\gamma$ の3 根を得。

【例13】 三元の例 (6)

$$x(y+z)=a\cdots\cdots(1)$$

$$y(x+z)=b\cdots\cdots(2)$$

$$z(y+x)=c\cdots\cdots(3)$$

(1)(2)(3)の括弧を解けば

$$xy+xz=a\cdots\cdots(1^1)$$

$$xy+yz=b\cdots\cdots(2^1)$$

$$yz+xz=c\cdots\cdots(3^1)$$

$(1^1)-(2^1)$ を求む

$$z(x-y)=a-b$$

$$Z=\frac{a-b}{x-y}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3)及(4)

$$Z=\frac{a-b}{x-y}=\frac{c}{y+x}$$

$$\therefore\ (a-b)(x+y)-c(x-y)=o\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$x=\left(\frac{b-a-c}{a-b-c}\right)y.=py\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$y=\left(\frac{c-a-b}{b-a-c}\right)z\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$z=\left(\frac{b-a-c}{c-a-b}\right)y=qy.\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

(6)及(8)を(3)式に代入すれば

$$qy(y+py)=c$$

$$\therefore\ qy^2(1+p)=c.\qquad y^2=\frac{c}{(1+p)q}$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{c}{(1+p)q}}\qquad 1+p=\frac{c}{b+c-a}$$

$$\therefore\ y=\pm\sqrt{\frac{(b+c-a)(c-a-b)}{2(b-c-a)}}\cdots\cdots(9)$$

x. z は同樣にして求む。

27. 等差級數(A.P). 或る法則に從ひ

て列べられたる諸數を級數と云ひ，各數を級數の項と云ふ。今各項が常に其前項に一定の數を加へたる和に等しければ，之を等差級數 or 算術級數と云ふ。又其加へられたる一定數を公差 or 等差と云ふ。

a＝初項　L＝末項　d＝公差

n＝項數　s＝總和　とせば，

$$L=a+(n-1)d\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$S=\frac{n(a+L)}{2}=\frac{n}{2}\left[2a+(n+1)d\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

28. 等比級數 (G.P) 級數の各項が常に其前項に一定の數を乘じたる積に等しきときは之を等比級數 or 幾何級數と云ひ，一定の數を公比 or 等比と云ふ。

a＝初項　r＝等比　s＝總和

L＝末項　n＝項數　とせば

$$S=\frac{a-Lr}{1-r}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\cdots\cdots(1)$$

$$L=ar^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

特別の場合 $r<1$ $n=8$ なるとき

$$S=\frac{a}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(註) 項數の無限なるものを無限級數と云ふ。

39. 調和級數 (H.P) 級數の各項の逆數が等差級數をなすとき. 之を調和級數と云ふ。

$$\frac{1}{a}\quad\frac{1}{a+d}\quad\frac{1}{a+2d}\cdots\cdots\cdots(4)$$

故に $\frac{1}{a}$ $\frac{1}{b}$ $\frac{1}{c}$ が等差級數を爲せば.

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$$

$$a-b:b-c=a:c\cdots\cdots\cdots(2)$$

30. 等差. 等比. 調和の關係

等差級數 $\cdots\cdots a-b:b-c=a:a$

等比級數 $\cdots\cdots a-b:b-c=a:b$

調和級數 $\cdots\cdots a-b:b-c=a:c$

1. ab が各AP.GP.HPなるときは

AP の中項 : $A=\dfrac{a+b}{2}\cdots\cdots\cdots(1)$

GP 中項 : $G=\sqrt{ab}\cdots\cdots\cdots(2)$

HP 中項 : $H=\dfrac{2ab}{a+b}\cdots\cdots\cdots(3)$

2. $A\times H=\dfrac{a+b}{2}\times\dfrac{2ab}{a+b}=ab\quad=G^2$

故にGはAとHとの比例中項 or 等比中項なり.

31. 順列變數 諸物の内より 1 回に或る個數を取る. 之を各異れる順序に配列する法を順列と云ふ。卽n個の内より r 個宛を取りたる順列の數を示めすに $_nP_r$ なる記號に依る。

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

$$_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots 3.2.1$$

$_nP_n$ は 1 より n 迄を列乘したるものなり。此如き記法を $\angle n$ 又は $n!$ を以て表はし. 之を階乘と云ふ。若し P 個の内にて同種の物がp. q. r.個あるときは

$$_nP_n=\frac{\angle n}{\angle p\angle q\angle r}\cdots\cdots\cdots(1)$$

32. 環狀順列 前項に述べたる順列は線狀順列なり。之を環狀に配列するとき. 之を環狀順列と云ふ。一般に n 個の内より r 個を取りて作り得べき環狀順列の數は次の如し。

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r}\cdots(2)$$

33. 組合變數 諸物の内より1回に數個宛を取り出す法を組合せと云ふ。卽ち配列の順序を問はざるものなり。今n個の内よりr個を取り出す組合せの數を示めすに $_nCr$ なる記號を用ふ。

$$_nCr=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\angle r}$$

$$=\frac{\angle n}{\angle r\angle n-r}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $_nCr$ が總べての方法中最大なる爲めの關係式は次の如くなる。

$$_nCr+1<_nCr>_nCr+1\cdots\cdots(2)$$

(2) 式の如く $_nCr$ が最大の條件は. (1)式の分母の最小なるときにして. 今其連乘を比較し見れば. $n-r=r$のとき分母最小なり。故に. $n=2r$.

或は$r=\frac{1}{2}n$ の場合とす。

卽ち n が偶數なるとき $r=\frac{1}{2}n$

奇數なれば $r=\frac{n-1}{2}$及$\frac{n+1}{2}$

34. 二項定理 $(x+a)$の如き2項式の展開は次の如くなる。

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}+\cdots\cdot a^n$$

此公式を二項定理と云ふ。此應用より

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots+x^n$$

一般に$(1+x)^n$ の展開式にて右端より數へ、第$r+1$ 番目の項は$nCrx^n$ なり。卽ち

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdot(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}x^n$$

35. 單利法 旣に生じ居る利息に關係なく只元金と期間に比例せしむる利息計算を單利法と云ふ。玆に

A=元金　i=利率　n=期間

B=利息　S=元利合計‥‥とせば

$$B=Ain\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$S=A(1+in)\cdots\cdots\cdots(2)$$

上式(1)及(2)は普通利息計算の公式として正當なるものなるが、手形割引に於いては、利息を差引く計算なるを以て、之を割引と稱し簡單なる算

法による。

A=額面高　i=利率　n=期間
C=割引高　P=現價　とせば

$$C=Ain \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$P=A(1-in) \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

【註】 Pは割引高を差引いて支拂はるゝ金高にして、之を**現價**と云ふ。茲に(2)式のAと(3)式のAと比較すれば

$$(2): A=\frac{S}{1+in} \qquad (4): A=\frac{P}{1-in}$$

即ち(4)式のAが(2)式のAより大なるを以て、手形割引の歩合は普通歩合より大なり。之を區別して、普通の方法を**眞割引**と云ひ、手形割引を**銀行割引**と云ふ。

【附】 年利率より推して1日の利息を算出する代りに、始めより**日歩何錢**と稱する利息計算あり。通例元金100圓に對する1日の利息を省略して此如く云ふ。但1年=365日。

36. 複利法 or 重利法

複利法は利子を元金に繰り入るゝ方法にして、6ヶ月目、或は1ヶ年目毎に計算す。次の如くせば、

i=1ヶ年の歩合　　n=年數

p=元金　　B=元利

n年後の元利合計：$B=P(1+i)^n \cdots\cdots (1)$

6ヶ月毎に利息を繰り入るるときは

n年後元利：$B=P\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n} \cdots\cdots (2)$

毎月、利息を繰り入るゝとき

n年後元利：$B=P\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12n} \cdots\cdots (3)$

37. 年金總和

年利率iにて毎年aなる金額を貯金するときはn年の後に、元利合計如何なるかを**年金總和**と云ふ。但しn年目に拂ひ込みたる年金には利息の付かざるものとす、

年金總和：$S=\frac{a}{i}\left[(1+i)^n-1\right] \cdots (4)$

38. 年金現價

n年後の年金總和を1時金の現價にて得る計算を**年金現價**と云ふ。即ち或高Bを貯金してn年後の元利が年金總和に等としくなる爲めのBを求むる計算なり。

$B(1+i)^n=\frac{a}{i}\left[(1+i)^n-1\right]$ なるを以て

年金現價：$B=\frac{a}{i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^n}\right] \cdots (5)$

永續年金の現價：$B=\frac{a}{i} \cdots\cdots (6)$

m年間据置き、其より n 年間引き續く年金の現價關係は、$B(1+i)^m\times(1+i)^n=\frac{a}{i}[(1+i)^n-1]$ なるを以て、**据置定期年金の現價は**

$$B=\frac{a(1+i)^n-1}{i(1+i)^{m+n}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

m年間据置き、永續年金の現價は

$$B=\frac{a}{i(1+i)^m}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

39. 年賦金 1 時に B 圓を借入れたる金高を n 年間に同額 a 圓宛毎年償還する計算を**年賦金**と云ふ。(4)式より次の公式を得。

$$年賦金 : a=\frac{B(1+i)^n i}{(1+i)^n-1}\cdots\cdots(9)$$

但し、B=1 時金、i=利率、n=年數、

40. 對數 或數 M の他の數 a に關する**對數**とは M に等しき a の羃の指數を云ふ。故に

$a^x=M$ なるときは

$$x=\log_a M\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

玆に a を**對數の底**と云ひ、M を**眞數**と云ふ。

a^0 は 1 なる故に、$\log_a 1=0$ なり。

41. 對數定理 對數の計算は乘除羃の關係式にして次の如き基礎に依る。

算式	對數計算
$a\times b$	$\log a+\log b$
$a\div b$	$\log a-\log b$
b^a	$a\times\log b$
$\sqrt[a]{a}$	$\log b\div a$

42. 常用對數 普通對數は 10 を底としたる對數にして、其記法としては $\log_{10}M$ を消略して單に $\log M$ となす。∴ $\log 10^n=n$

$$\therefore\ \log(M\times10^n)=\log M+n$$
$$\log(M\div10^n)=\log M-n$$

卽ち對數計算は 1 より 10迄の基數の對數を**對數表**に依りて求め、之と桁數に應じたる整數の加減を行ふ方法なり。

43. 對數計算法 對數は以上の關係を基礎とするに過ぎず、而して普通對數表は 1 位の數を示めすを以て、何れも小數なり。10 位以上或は以下の小數に對する對數は表の小數に桁數に應じたる正又は負の整數を加ふるに止まる。玆に桁數に應ずる數を**指標**と云ひ、小數分を**假數**と云ふ。

【計算例】

$$\log 500=\log 5+\log 100=2.6990$$

$$\log 0.05=\log 5-\log 100=\bar{2}.6990=-1.301$$

$$\log(0.05)^3=(\log5-\log100)\times3=\bar{2}.699\times3$$
$$=-1.301\times3=-3.903=\bar{4}.0970$$

$$\log(0.05\times0.003)=\log5-\log100+\log3$$
$$-\log1000=\bar{2}.699+\bar{3}.471$$
$$=\bar{5}.+1.1761=\bar{4}.1761$$

以上の計算例に見る如く次の規約を定む。

1. 一般にn桁の整數の對數は$(n-1)$の指標に假數を加へたるものにて直ちに求む。

2. 小數點以下n個の0を有する小數の對數は$-(n+1)$の指標に假數を加へたるものを以て直ちに求む。

3. 此場合假數は正なるを以て、指標の負號を混同せざるを要す。故に負號は其上に記す。故に全體としての負號は$-$(n+假數の１に對する餘數)の數に附す。卽ち$-(n+a)$の形にして、玆にaを餘對數と云ふ。

4. 小數の乘羃又は根の對數計算は先づ全體を負號と化し、然る後n倍又はn分するを要す。次に指標のみが負號となる樣形を書き替へ、眞數を求め桁數を定む。

5. **逆對數**：一眞數を求むるには逆對數を用ふるを尤も便利とす。卽ち假數を以て眞數を求むる

爲めに作られたる逆表なり。此表により眞數を求むれば指標に依りて數位を知る。

【例】 $\bar{4}.070$の眞數を求む:—
逆對數表に依れば.070より1175を得、故に眞數は0.0001175となる。

44. 三次方程式(1)

玆に一般式

$$x^3+px+q=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今、(1)式に於て$x=y+z$を換置す。
然るときは

$$x^3=y^3+z^3+3yz(y+z)$$
$$=y^3+z^3+3yzx\cdots\cdots(2)$$

(2)式を(1)式に置き換ふれば次式を得。

$$y^3+z^3(3yz+p)x+q=0\cdots\cdots(3)$$

(3)式に於て$(3yz+p)=0$なる條件を附與するときは

$$yz=-\frac{p}{3}.\qquad y^3+z^3+q=0$$
$$y^3z^3=-\frac{p^3}{27}.\qquad y^3+z^3=-q$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

故に次式を得。

$$y^3=\frac{1}{2}\left(-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right)$$

$$Z^3=\frac{1}{2}\left(-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

又は、

$$y=\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$Z=\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

然るに、$x=y+z$ なるを以て、(6)式より y 及 z の兩項を合はすれば x の値を得。

玆に x の値は3根を有す。而して一般に $3\sqrt{1}$ の3根は、x_1 x_2 x_3 にして次の形あり。$x_1=1.$

$$x_2=\omega=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$$

$$x_3=\omega^2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

以上の關係より、$x=y+z$ には次の3個の場合の解を得。

(I) $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=(+)$ 正號なる場合：—

$$x_1=y+z.\quad x_2=\omega y+\omega^2 z\quad x_3=\omega_2 y+\omega z$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

(II) $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=(-)$ 負號なる場合：—

$$y=(m+in)^{\frac{1}{3}}\qquad Z=(m-in)^{\frac{1}{3}}$$

但 $m=\frac{q}{2}$　　$n=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$

$$\therefore x=(m+in)^{\frac{1}{3}}+(m-in)^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots\cdots(9)$$

(9) 式に於いて、

$$m^2+n^2=\gamma^2\qquad \frac{n}{m}=\tan\theta\cdots\cdots\cdots(10)$$

とすると、x の3根は次の形となる。

$$\left.\begin{aligned}x_1&=2\gamma^{\frac{1}{3}}\operatorname{Cos}\frac{\theta}{3}\cdots\cdots\cdots\\ x_2&=2\gamma^{\frac{1}{3}}\operatorname{Cos}\frac{\theta+2\pi}{3}\cdots\cdots\cdots\\ x_3&=2\gamma^{\frac{1}{3}}\operatorname{Cos}\frac{\theta+4\pi}{3}\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\cdots(11)$$

(III) $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=(0)$ 零なる場合：—

$$x_1=2y\qquad x_2=x_3=-y\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

45. 三次方程式(2). 一般式として

$$x^3+bx^2+Cx+d=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今、(1)式に於て、$x=X-h$ を入れて(3)式を求めんとす。但

$$\left.\begin{aligned}h&=\frac{b}{3}.\qquad p=-\frac{b^2}{3}+C\cdots\cdots\\ q&=\frac{2b^3}{27}+d-\frac{bc}{3}\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\cdots(2)$$

$$X^3+pX+q=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

然るときは(3)より、前法の解にて次の X の値を得。

$$X=\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$+\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdots\cdots(4)$$

然るときは、 $x=X-h \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

玆に x の 3 根に付いては、前法の解を適用すべし。

46. 四次方程式(1) 一般式の形

$$x^4+2px^3+qx^2+2rx+S=0 \cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) 式の兩邊に $(ax+b)^2$ を加へて、左邊が完全平方なる樣 $(ax+b)$ を定む。即ち關係は次の如くなる。

$$x^4+2px^3+qx^2+2rx+s+(ax+b)^2$$
$$=(x^2+Px+K)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) 式の兩邊の係數を比較して

$$P=p.\ a^2=p^2+2K-q$$
$$b^2=K^2-s \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$
$$2k^3-qk^2-2(s+r)K+sq-sp^2-r^2=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) 式は k に就きて 3 次方程式なるを以て、前法の解を應用するを得。故に k を求むれば a 及 b を知るべし。即、

$$\left.\begin{aligned}(x^2+Px+K)^2&=(ax+b)^2 \cdots\cdots\cdots\\ x^2+Px+K&=\pm(ax+b) \cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(5)$$

(5) 式より次の結果を得。即ち 2 個の 2 次方程式の解となる。

$$\left.\begin{aligned}x^2+(P-a)x+(K-b)&=0 \cdots\cdots\cdots\\ x^2+(P+a)x+(K+b)&=0 \cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(6)$$

47. 四次方程式(2) 一般式の形

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0 \cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) 式に於て、x^3 の項を消去する爲めに、$x=(y+h)$となす。

$$(y+h)^4+P(y+h)^3+Q(y+h)^2$$
$$+R(y+h)+S=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) 式に於て、y^3 の係數を 0 としたる結果は

$$4h+P=0. \qquad h=-\frac{P}{4} \cdots\cdots\cdots(3)$$

玆に(3)式を(1)式に適合す。然るとき

$$y^4+qy^2+ry+s=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

尙(4)式は次の如く分解せらる。

$$(y^2+ky+l)(y^2-ky+m)=0 \cdots\cdots\cdots(5)$$

但し(5)の k. l. m は各未知數にして、(4)式に對し次の關係を有す。

$$\left.\begin{aligned}2m&=K^2+q+\frac{r}{k} \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2l&=k^2+q-\frac{r}{k} \cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(6)$$

$$k^6+2qk^4+(q^2-4s)k^2-r^2=0 \cdots\cdots(7)$$

茲に (7) 式は k^2 に付き、3 次方程式なり。故に前法に依り (7) 式を解き、次に(6)式を以て、lm の値を知るを得。然るとき、

$$\left.\begin{array}{l} y^2+ky+l=0 \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^2-ky+m=0 \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}(8)$$

(8) 式より y の 4 根を得。然るとき、x は次の値となる。

$$x=y+h=y-\frac{P}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

2. 三 角 法

1. 測角法 角度の測り方は普通 60 分法なり。即ち 1 直角 =60 度。1 度 =60 分、1 分 =60 秒、の關係とす。

【註】 三角法は線の長さと角の大さとを計算するものにして、角の測り方は三角法應用の基礎なり。三角函數表は 60 分法に依る。

2. 弧度法 角度を測る方法として 1 ラヂアンを單位とする測り方あり。即ち圓周の長さを其半徑にひとしく取りたるときの中心角の大さにして、180° は π(3.1416) 個を含む故に 2 直角は π ラヂアンなり。即

$$1\ \text{ラヂアン}=\frac{180}{\pi}=57^\circ\text{、}29577951$$

三角法にては、π を角度の意味に用ふ。

3. 三角函數 三角形 ABC の各角を A.B.C とし、其對邊を a. b. c とす。 尙 C を直角とし、A を底角とすれば、△ABC は直角三角形にして次の關係あり。

$$a^2+b^2=c^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但、c：斜邊、a：垂線、b：底邊、然るとき次の

比を三角函數と稱す。

正弦：sinA＝a：c…………垂÷斜

餘弦：cosA＝b：c…………底÷斜

正切：tanA＝a：b…………垂÷底

餘切：cotA＝b：a…………底÷垂

正割：secA＝c：b…………斜÷底

餘割：cosecA＝c：a…………斜÷垂

上記6個の規約の內、尤も利用多きものは sin A. cosA. tanA にして、之を基礎函數と云ふ。之を記臆し置けば他は夫々其逆數なる故簡單なり。

【暗記法】 sin. cos. tan を暗記するには垂÷斜、底÷斜、垂÷底の順序を音に依りて水車、停車、水底と記臆するを便とす。

4. 直角三角形解法 上記の關係より次の公式を以て、底角と1邊を知れば他の邊を計算するを得。

$$a=c.\sin A=b.\tan A \quad \cdots\cdots (2)$$

$$b=c.\cos A=a.\cot A \quad \cdots\cdots (2')$$

$$c=b.\sec A=a.\mathrm{cosec} A \quad \cdots\cdots (2'')$$

5. 特殊角の三角函數 次表は應用廣し。

角A	0	30	45	60	90
sinA	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosA	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tanA	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cotA	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
secA	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cosecA	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

第1段の sinA を記臆するはば次の如くす。

$$0^\circ \quad 30^\circ \quad 45^\circ \quad 60^\circ \quad 90^\circ$$

$$\sin A=0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 1$$

$$=\sqrt{\frac{0}{4}} \quad \sqrt{\frac{1}{4}} \quad \sqrt{\frac{2}{4}} \quad \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \sqrt{\frac{4}{4}}$$

即ち根號、內の分母を4とし、分子が0.1.2.3.4.と變化す。之を記臆すれば、Cos の値は丁度是と順を逆にしたるものとなる。

6. 恒等函數 直角三角形の各邊の關係よ

り次の公式を得。

$$\left.\begin{aligned}&\sin A\,\mathrm{cosec}\,A=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\\&\cos A\ \sec\ A=1 \cdots\cdots\cdots\\&\tan A\ \cot\ A=1\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin^2A+\cos^2A=1\cdots\cdots\cdots\\&1+\tan^2A=\sec^2A\ \cdots\cdots\cdots\\&1+\cot^2A=\mathrm{Cosec}^2A\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$(4)

$$\left.\begin{aligned}&\tan\ A=\frac{\sin A}{\cos A}=\sin A\ \sec A\cdots\\&\mathrm{Cot}\ A=\frac{\cos A}{\sin A}=\cos A.\,\mathrm{Cosec}A\end{aligned}\right\}(5)$$

7. 餘角の函數　角の三角函數は其餘角の餘函數に等しき公式となる

$$\left.\begin{aligned}&\sin(90^\circ-A)=\cos A\cdots\cdots\cdots\\&\cos(90^\circ-A)=\sin A\cdots\cdots\cdots\\&\tan(90^\circ-A)=\cot A\cdots\cdots\cdots\\&\cot(90^\circ-A)=\tan A\cdots\cdots\cdots\\&\sec(90^\circ-A)=\mathrm{cosec}A\cdots\cdots\\&\mathrm{cosec}(90^\circ-A)=\sec A\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(6)$$

8. 同角函數　一角の函數を他の函數にて

現せば次表を得。

	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
$\sin A$	——	$\sqrt{1-\cos^2 A}$	$\dfrac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$
$\cos A$	$\sqrt{1-\sin^2 A}$	——	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$
$\tan A$	$\dfrac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$	$\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{Cos}^2 A}{\cos A}}$	——

以上の關係は(3)(4)(5)の應用より來る。

9. 三角函數の正負　三角函數の各象限に於ける符號は次の如く變化す。但(1)(2)(3)(4)の記號は象限の名稱とす。尙角の測り方は時計と反對方向にとる。

(2)	sin ＋ cos － tan －	sin ＋ cos ＋ tan ＋	(1)
(3)	sin － cos － tan ＋	sin － cos ＋ tan －	(4)

【記臆法】 上表にて正號をとる函數の名稱を暗誦するには、象限(1)は全部正、(2)：sin(3)：tan(4)：cos なる故、此順序の儘 s tac（スタック）法となし置く。…………………………(7)

10. 同歸角函數

上表の關係を表に示す。

$$
(8)\quad \begin{cases}
\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta \\
\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\mathrm{Cot}\theta \\
\sin(\pi-\theta)=\sin\theta \\
\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta \\
\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta
\end{cases}
$$

$$
(9)\quad \begin{cases}
\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta \\
\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta \\
\tan(\pi+\theta)=\tan\theta \\
\sin(\frac{3}{2}\pi-\theta)=-\cos\theta \\
\cos(\frac{3}{2}\pi-\theta)=-\sin\theta \\
\tan(\frac{3}{2}\pi-\theta)=\cot\theta
\end{cases}
$$

$$
(10)\quad \begin{cases}
\sin(\frac{3}{2}\pi+\theta)=-\cos\theta \\
\cos(\frac{3}{2}\pi+\theta)=\sin\theta \\
\tan(\frac{3}{2}\pi+\theta)=-\cot\theta \\
\sin(-\theta)=-\sin\theta \\
\cos(-\theta)=\cos\theta \\
\tan(-\theta)=-\tan\theta
\end{cases}
$$

(8)(9)(10)の變化を一括すれば、

90° の偶數倍 +θ の函數は同名となる。

90° の奇數倍 +θ の函數は異名となる。

而して正負の符號は Stac 法に從ふ。次に 360° 以上の角に對する函數は

$$
(11)\quad \begin{cases}
\sin\theta=\sin(2n\pi+\theta) \\
\cos\theta=\cos(2n\pi+\theta) \\
\tan\theta=\tan(n\pi+\theta) \\
\cot\theta=\mathrm{Cot}(n\pi+\theta)
\end{cases}
$$

即ち sin. Cos は 2nπ の角を増せば原位置に戻る故、其函數値に變化なし。tan は n が奇數及偶數何れにても、180° の n 倍毎に函數値を同ふする故に上式の如くなる。

11. 複角の函數

2角の和及差の公式

(11) $\sin(A+B)$
$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

(12) $\sin(A-B)$
$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

(13) $\cos(A+B)$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

(14) $\cos(A-B)$
$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

(15) $\sin(A+B)\sin(A-B)$
$$=\sin^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\cos^2 A$$

(16) $\cos(A+B)\cos(A-B)$
$$=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A$$

以上公式の應用より特殊角の函數を求む。

(17) $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(18) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

(19) $\sin(A\pm 45^\circ)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin A\pm\cos A)$

(20) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(21) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

(21) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$

(21′) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$

(22) $\tan(45^\circ+A)=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$

(23) $\tan(45^\circ-A)=\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$

(24) $\begin{cases}\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=2-\sqrt{3}\\ \cot 15^\circ=\cot(45^\circ-30^\circ)=2+\sqrt{3}\end{cases}$

12. 倍角函數　前式の應用より倍角函數を得。即ち $2A=A+A$ となすとき、

(25) $\sin 2A=2\sin A\cos A$

(26) $\begin{cases}\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A\\ \qquad\;\;=2\cos^2 A-1\\ \qquad\;\;=1-2\sin^2 A\end{cases}$

(27) $\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\pm\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2=1\pm\sin\theta$

(28) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(29) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

以上公式の應用より、18° 36° 54° の函數値を求む。$18^\circ=A$ とせば、$5A=90^\circ$、なるを以て餘角の函數關係にて、$\sin 2A=\cos 3A$.

$$(30)\quad \begin{cases} \sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ \mathrm{Cos}\,18^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{cases}$$

$$(31)\quad \begin{cases} \sin 36^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \sin 54^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}. \end{cases}$$

13. 積を和に變ずること

(32) $2\sin A\cos B$

$$=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

(33) $2\cos A\sin B$

$$=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$

(34) $2\cos A\cos B$

$$=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

(35) $2\sin A.\ \sin B$

$$=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

此公式は(11)(12)(13)(14)の公式より求むることを得。

14. 和を積に變ずる事。

(36) $\sin A+\sin B$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

(37) $\sin A-\sin B$

$$=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)$$

(38) $\cos A+\cos B$

$$=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

(39) $\cos B-\cos A$

$$=2\sin(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)$$

此公式は(32)(33)(34)(35)と同形なり。

(40) $\sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A)$

$$=4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

15. 半角の函數

(41) $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 A}{2}}$

(42) $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos^2 A}{2}}$

(43) $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

(44) $\sin\dfrac{A}{2}\pm\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{1\pm\sin^2 A}$

16. 反函數

以上公式の逆用より次式を得。

(45) $\sin^{-1}a+\sin^{-1}b$
$$=\sin^{-1}(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})$$

(46) $\sin^{-1}a-\sin^{-1}b$
$$=\sin^{-1}(a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2})$$

(47) $\cos^{-1}a+\cos^{-1}b$
$$=\cos^{-1}(ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b})$$

(48) $\cos^{-1}a-\cos^{-1}b$
$$=\cos^{-1}(ab+\sqrt{1-a^2}\ \sqrt{1-b^2})$$

(49) $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

17. 三角形の解法 $A+B+C=180°$ のとき.

(50) $$\begin{cases}\sin(A+B)=\sin C\\ \cos(A+B)=-\cos C\\ \tan(A+B)=-\tan C\end{cases}$$

(51) $$\begin{cases}\sin\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}C\\ \cos\frac{1}{2}(A+B)=\sin\frac{1}{2}C\\ \tan\frac{1}{2}(A+B)=\mathrm{Cot}\frac{1}{2}C\end{cases}$$

(52) $$\begin{cases}\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\\ \quad =4\sin A.\ \sin B.\ \sin C\\ \cos A+\cos B+\cos C\\ \quad =1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\ \sin A+\sin B+\sin C\\ \quad =-\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{cases}$$

(53) $$\begin{cases}\tan A+\tan B+\tan C\\ \quad =\tan A\ \tan B\ \tan C\\ \cos\frac{A}{2}+\mathrm{crs}\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\\ \quad =4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}\\ \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\\ \quad +\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1\end{cases}$$

18. 三角形正弦比例 $A+B+C=180°$

a. b. c を對邊とす。

(54) $$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

(55) $$\frac{a+b}{a-c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$$

(56) $$\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B\\ b=c\cos A+a\cos C\\ c=a\cos B+b\cos A\end{cases}$$

19. 三角形の三邊 $A+B+C=180°$

a. b. c を各對邊とす、

(57) $$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos A\\ b^2=c^2+a^2-2ca\ \cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\ \cos C\end{cases}$$

(58)　$\cos A=\frac{b^2+c^2}{2bc}$

(59)　$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+b^2}{2abc}$

又、$\frac{1}{2}(a+b+c)=S$ とするとき、

(60)
$$\begin{cases} \sin\frac{A}{2}\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}} \\ \cos\frac{A}{2}\sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}} \\ \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}} \end{cases}$$

(60) の $\frac{B}{2}$・$\frac{C}{2}$ に對する値は夫々 a. b. c を取替へて求むることを得。

(61)　$\mathrm{Sin}\ A=\frac{2}{bc}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

20. 三角形面積　$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$ のとき、

(62)　$\triangle AFC=\frac{1}{2}bc\sin A$

$$=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

21. 三角方程式

函數の値を與へて、其角度を求むる方法を三角方程式と云ふ。解法上注意すべき點は次の如し。但し A=既知角

(1) 一つの角Aに $2n\pi$ を加へ又は減ずる形は原の位置に歸へる故函數は等値なり。

(2) $2n\pi$ 及 $(2n+1)\pi$ にて表され得る角は $n\pi$ にて表はすことを得。

(3) 三角方程式を解くには 0 より 2π 迄の間に於て、此値を滿足すべき 2ツの角を求め、之に $2n\pi$ を加へ又は減ずること。

(4) 2π(1週歸角)内にて同値を得る角は、

$\sin A=\sin(\pi-A)$

$\cos A=\cos(2\pi-A)=\cos(-A)$

$\tan A=\tan(\pi+A)$

故に一般形は、

$\sin A=\sin(2n\pi+A)=\sin[(2\pi+1)\pi-A]$

$\therefore\ \sin A=\sin[n\pi+(-1)^n\times nA]$ ·(63)

$\cos A=\cos(2n\pi+A)=\cos(2n\pi-A)$

$\therefore\ \cos A=\cos(2n\pi\pm A)$ ··········(64)

$\tan A=\tan(n\pi+A)$ ················(65)

【例】 $2\sin(A+B)=\sqrt{3}$ ················(1)

$2\cos(A-B)=\sqrt{3}$ ················(2)

$2\sin(A+B)=\sqrt{3}$ or $\sin(A+B)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ なる

故に n を正又は負の整數とすれば

$A+B=n\pi+(-1)^n\times\frac{\pi}{3}$

同樣に(2)式より m を用ふれば

$$A-B=2m\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

上に得たる2式を相加へて、

$$2A=(n+2m)\pi+(-1)^n\times\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\quad A=(\tfrac{1}{2}n+m)\pi+(-1)^n\times\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{12}$$

$$B=(\tfrac{1}{2}n+m)\pi+(-1)^n\times\frac{\pi}{6}\mp\frac{\pi}{12}$$

3. 算術

1. 整數、小數、帶小數 整數とは1の集まりたるものにして、數へ得らるゝ數を云ふ。1より小なる數は小數と云ひ、整數と小數とよりなる數を帶小數と云ふ。

2. 基數、有效數字 1より9迄の整數を基數と云ふ。之に0を加へて、僅かに10個の數字を以て無限の數を書き表はすことを得。0に對する他の9個の數字を有効數字と云ふ。

3. 名數、不名數 數に單位の名稱を附して物の量を云ひ表はすときは、此數を名數と云ひ、之と區別して、只の數を不名數と云ふ。

【例】 4.5と云ふときは不名數にて、筆4本、本5冊と云ふときの4又は5は名數なり。

4. 諸等數、單名數 只1個の單位の名稱にて、量を云ひ表はすときの名數は單名數にして、2個以上の單名數を組み合はせて云ふときは複名數なり。之を特に諸等數と云ふ。

【例】 25寸は單名數にて、2尺5寸は諸等

數なり。諸等數には、長さ、桝目、目方、貨幣、時間、等に夫々定まれるものあり。

(註) 單名數を諸等數に直ほすことを名法と云ひ、逆に諸等數を單名數に直ほすことを通法と云ふ。

5. 四捨五入に於ける注意 0.5圓と50錢とは其意味に相違あり。即ち四捨五入に於ける0.5圓の誤差は5錢以下にして、50錢の誤差は5厘以下なり。故に50錢を圓單位にて表はす場合には、其小數部分は其本位が0となりても、必ず之を附し置く必要あり。

6. 加減乘除の式 ＋－×÷の交りたる式の演算は、乘除を先きにし、加減を後にす。即ち×÷の部分は括孤にて包まれたるものと思へば可なり。其他は演算記號の順に倣ふべし。

7. 基本單位、補助單位 量を云ふときの基礎とする單位を基本單位と云ひ、之を若干倍又は分したる桁に命名する單位を補助單位と云ふ。

8. 基本單位の名稱

(尺貫法)(メートル法)(碼斫法)

1. 長さ‥‥尺‥‥‥‥米‥‥‥‥‥‥碼
2. 地積‥歩or坪‥‥アール‥‥‥エークル
3. 容積‥‥升‥‥‥リットル‥‥ガロン
4. 重量‥‥貫‥‥‥‥瓦‥‥‥‥‥听

9. 長さ單位

1. 尺貫法 (長さ);－

1里＝36町＝2160間＝12960尺

1町＝60間＝360尺

1間＝6尺

1鯨尺＝1.25尺 or $\frac{5}{4}$ 尺

1尋(ヒロ)＝6尺(水深測量に用ふ)

1海里(浬)＝16.975町(船の速度には節)

1哩＝0.4098里＝1.6093粁

2. メートル法 (長さ);－

1粍	ミリメートル	＝0.001米	＝3厘3毛
1糎	センチメートル	＝0.01米	＝3分3厘
1粉	デシメートル	＝0.1米	＝3寸3分
1米	メートル		＝3尺3寸
1粁	デカメートル	＝10米	＝3丈3尺
1粨	ヘクトメートル	＝100米	＝330尺
1粁	キロメートル	＝1000米	＝3300尺

3. 碼、斫法 (長さ);－

1碼 ヤード ＝3.0175尺

1哩マイル=80鎖チエーン=14町45間1尺
=1760碼=5280呎
1碼= 3呎
1呎=0.3048米=1.00584尺、1呎=12吋
1浬=6080呎=16町59間1,5尺

10. 面積單位

1. 尺貫法（面積）;—

1平方尺=1尺四方の面積
1町 =10段=100畝=3000歩
1段=10畝=300歩
1畝= 30歩
1歩 =36平方尺
=10合=100勺
1合=10勺
1方里=4665600歩=1555.2町歩

2. メートル法（面積）;—

1亞アール =10米平方の面積
=30.25坪
1センチアール =0.01亞（1平方米）
1ヘクトアール =100亞（1平方粨）
1平方粁…… =0.06484方里
1方里……… =15.42347平方粁

3. 碼听法（面積）:—

1エイカー =4ルード(rood)
=4.0804反
1方哩…… =0.16795方里
=2.58999平方粁

11. 容積單位

1. 尺貫法（容積）:—

1立坪 =1立方間（土砂量に用ふ）
1噸‥ =40才（船舶の載貨量に用ふ）
1才=1立方尺
1噸‥ =10石=100才（鐵道貨物及西洋型商船）
1升‥ =1.8039リットル=64827立方分
1升桝 =內法4寸9分角×深2寸7分
1尺〆 =切口1尺平方×長2間の體積

2. メートル法（容積）:—

1立リットル…… =1立方粉
=35937立方分
=5合5勺4352
1竕デシリットル‥ =0.1立
1竰センチリットル =0.01立
1竡ヘクトリットル =100立
1米ガロン…… =3.78543立

=2.09846 升

3. 碼斤法 (容積):—

1 英ガロン　=4.5 リットル

=2.519 升

12. 目方單位

1. 尺貫法 (目方):—

1 斤‥　=160 匁 (和斤と云ふ)

1 英斤　=120 匁

2. メートル法 (目方):—

15 瓩 キログラム =4 貫

1 瓩 = 攝氏4度の水1立の目方なり。

1 瓸 ヘクトグラム =0.1 瓩

1 瓧 デカグラム‥ =0.01 瓩

1 瓦 グラム‥‥‥ =0.001 瓩

1 瓰 デシグラム‥ =0.1 瓦

1 甅 センチグラム =0.01 瓦

1 瓱 ミリグラム‥ =0.001 瓦

1 佛噸 (米噸)‥‥ =1000 瓩

3. 碼斤法 (目方):—

1 噸 =2240 听 (封度)

1 听 =16 オンス =0.4536 瓩

1 噸 =270.95 貫 =1016 瓩

1 オンス =7.56 匁 =28.35 瓦

13. 貨幣制度

純金の目方2分を以て價格の單位とし　之を1圓とする。次の種類あり。

種類			量目	性合
本位	金	20 圓	4.4444 匁	純銀:900 銅　:100
		10 圓	2.2222 匁	
		5 圓	1.1111 匁	
補助	銀	50 錢	2.7‥ 匁	純銀:800 銅　:200
		20 錢	1.08‥ 匁	
		10 錢	0.6‥ 匁	銀:720 銅:280
	白銅	5 錢	1.2441 匁	ニッケル:250 銅‥‥‥:750
	青銅	1 錢	1.9008 匁	銅‥:950 錫‥:40 亞鉛:10
		5 厘	0.9504 匁	

14. 外國貨幣

外國貨幣と日本貨幣との換算は爲替相場に依り時々多少の相違あれども、次には純金の分量に依りて其比較を示めす。

1. 英國 1 磅(ポンド) =20 志(シリング) =9.763 圓

1 志 =12 片(ペンス)

2. 米國 1 弗(ドル) =100 仙(セント) =2.006 圓

3. 佛國 1 法(フラン) =100 山(サンチーム) =0.387 圓

4. 獨逸 1 馬(マーク) =100 布(フェンニヒ) =0.478 圓

5. 露國 1 留(ルーブル) =100 哥(コペツク) =1.090 圓

6. 印度 1 留比(ルーピー) =16 安(アンナ) =0.651 圓

15. 角度 圓周を360等分したるものを1度の弧と稱し、一度の弧に對する圓の中心に於ける角を1度の角と云ふ。

全圓周 =360 度 =21600 分 =1296000 秒
1 〃 = 60 〃 = 3600 〃
1 〃 = 60 〃

（註） 90 度の角を直角と云ひ、90 度の弧を象眼と云ふ。

16. 溫度 溫度は寒暖計に依りて測る。之に攝氏、華氏、列氏の3種の度盛あり。

【1】 攝氏は水の氷點を0度とし、沸騰點を100度とし、其間を100に等分す。

【2】 華氏は氷點と沸騰點の間を180等分し、氷點を32度となす故に、沸點は212度となる。

【3】 列氏は氷點を0とし、沸點を80度としたる度盛なり。

以上3種の換算は次の如くなる。

華氏：$F=\frac{9\times C}{5}+32$ or $F=\frac{9\times R}{4}+32$

攝氏：$C=\frac{5\times(F-32)}{9}$ or $C=\frac{5\times R}{4}$

列氏：$R=\frac{3\times(F-32)}{9}$ or $R=\frac{4\times C}{5}$

17. 經度及時 地球の南北兩極を通過する圓を子午線と云ひ、英國グリニッチの子午線を本初子午線と云ふ。而して、本初子午線を含む平面と、他の子午線を含む平面とが、地球の軸に於て交はる角度を其地の經度と稱し、本初子午線を經度の0度となし、東西に180度となす。即ち西經180°と東經180°とは同所となる。

地球が360°を回轉するに24時間を要する故に、1時間は經度の15°に相當し、經度の1°は4分間に相當す。

1 日 =24 時間 =1440 分 =86400 秒
1 時間 = 60 分 = 3600 秒
1 分 = 60 秒

1ヶ年は365日とすれども、精確には端數を含む。即ち1眞年（太陽の廻りを地球が1周する時日）は365.2422日にして、平年と閏年とを生ず。

1 曆年=平年365日及閏年 =366 日、

又、地球の直徑は赤道に於て 12700 粁なる故

全圓周 ＝40000 粁、經度 1 ＝ 110 粁

一時間 ＝約1650粁、一分間 ＝27.5 粁

更に 110 粁は 60 浬なる故**經度の1分は1浬に當るものなり**。故に地圖の距離を見るときは1度を 60 浬、又は約 30 里と見做す。次に光の速度は1秒間に地球を7卷半する故、約3億粁毎秒の速度なり。（7卷半は藤原秀郷が射たる百足の山を卷いた數に暗誦す。）

又音の速度は空氣中にて 0°C のとき毎秒 0,33 粁にして、1°C の昇降に對し 0,6 米の增減あり。

18. 閏年の算出法 西暦年數が4で整除される年は閏年なり。但、100 にて整除される數なるときは、更に4にて整除さるゝとき閏年にして、然らざるときは平年なり。

西暦年數は皇紀年數より 660 を引きたる數に相當す。故に紀元年數を用ふるときは、之より 660 を引きたる殘りを以て、以上の算出法を應用すべし。

19. 倍數、約數 2數ありて1ッの數が他の數にて整除せらるゝとき、大なる數を倍數と云ひ、小なる數を約數と云ふ。

20. 素數 1及其自身の外に約數なき整數を素數と云ふ。但、1は普通素數の中に入れず。

100. 以下の素數に次の 26 個あり。

1.2.3.5.7	53.59
11.13.17.19	61.67
23.29	71.73.79
31.37	83.89
41.43.47	97

21. 素因數 或整數を素數のみの積にて表はすことを素因數に分解すと云ふ。

22. 最大公約數 2個以上の數に共通なる約數を公約數と云ふ。公約數の中にて最も大なるものを最大公約數と云ふ。故に最大公約數は各數に共通なる因數の積なり。

23. 最小公倍數 2個以上の數に共通なる倍數を其等の數の公倍數と云ふ。公倍數の中にて最小なるものを最小公倍數と云ふ。最小公倍數は共通なる素因數と、共通ならざる素因數と各一種宛連乘したるものなり。

24. 假分數、帶分數、繁分數 (1) 分子が分母より小なる分數を眞分數と云ひ、(2) 分子が分母より大なる分數を假分數と云ふ。(3) 整

數と分數とよりなる數を帶分數と云ふ。(4) 分數の分母又は分子の形が更に分數なるときは、此全體の分數を繁分數と云ふ。

25. 約分、既約分數　分數の値を變せずして、分子及分母を小さき數に變へる事を約分すと云ふ。約分法は其兩項を約數にて除すれば可なり。而して兩項の最大公約數にて約分したる分數を既約分數と云ふ。

26. 通分　2 個以上の値を變へずして、同分母の分數に直すことを通分すると云ふ。通分法は分母の最小公倍數を分母とする分數に書き改むるものとす。此場合特に最小公分母と稱す。

27. 比及比例　比例に關する定理次の如し。

(1) 同種類の 2 量に於て、a が b の何倍なるかを表はす數を a の b に對する比と云ふ。

(2) 2 ツの比が相等しきことを書き表はしたる等式を比例又は比例式と云ふ。

(3) 比例式の外項と內項との積は等とし。

(4) 分數の比例は其分母の反比に等とし。

例、$\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 6 : 3.$

ツの比の積を其等の複比と云ふ。

(6) 複比の等號にて結ばれたる式を複比例と云ふ。

(7) 3 ツ以上の比を連比と云ふ。

28. 按分比例　按分比例を比例配分とも云ふ。A なる量を x. y. z の連比に配分する公式は次の如し。

$$\frac{x}{x+y+z}A.\quad \frac{y}{x+y+z}A.\quad \frac{z}{x+x+z}A.$$

29. 歩合算　計算公式は次の如し。

元　高 ×歩合 =歩合高…………(1)

歩合高 ÷元高 =歩合…………(2)

歩合高 ÷歩合 =元高　…………(3)

元　高 ÷(1+歩合) =合計高……(4)

元　高 ×(1−歩合) =差引高……(5)

30. 利息算　歩合算に更に期間の勘定を入れたるものを利息算と云ふ。卽、元高に對し元金、歩合に對し利率、歩合高に對し利息なる用語を使用す。

元金 ×利率 ×期間 =利息………(1)

元金〔1+〔利率×期間〕〕=元利合計…(2)

31. 割引　利息算に於ける(2)式より次の變形を得。

元利合計 ÷〔1＋利率 ×期間〕＝現價…(3)

元利合計 －現價 ＝割引高…………(4)

(3) 及 (4) は普通利息計算に用ひらるゝ算法にして、(4) 式の方法を眞割引と云ふ。然るに手形の割引は上式の公式に依らず、次の如くす。

元利合計 ×利率 ×期間 ＝割引料…(5)

元利合計 －割引料 ＝割引現價……(6)

(6) 式の割引現價は (3)式の價より小なり。此方法を銀行割引と稱せられ、習慣と簡易との爲めに用ひらる。

32. 內割、外割　普通の步合を內割と云ひ、步合と1との和を元高としたる步合を、外割と云ふ。故に內2割は外割に換算すれば 0.2÷1.2＝2.1666となる。卽ち外割は常に內割より小なり。前項の銀行割引は外割に相當する方法なる故、之を眞割引に引き直せば、其率は大となる。

4. 平面幾何

1. 命題、定義、公理、定理、系

【1】 命題とは或事項の解說なり。

【2】 定義とは用語の意義を定むる解說なり。

【3】 公理とは經驗に依りて眞なりと假定したる命題なり。

【4】 定理とは定義、公理及旣に眞なることを知りたる命題に依りて、推理を以て其の眞なることを知り得る命題なり。定理は假設及終結より成る。而して假設より絡結を得べく論する方法を證明と云ふ。

【5】 系とは或命題に依りて、容易に眞なることを知り得る命題を云ふ。

2. 點、線、直線

【1】 點とは位置ありて大さなきものなり。

【2】 線とは點の連續にして、位置及長さありて大さなきものなり。

【3】 直線とは方向一定せる線にして、二點間の最短距離を示めすものなり。

3. 面、圖形

【1】 面とは線の連續にして、厚さなく廣さあるものなり。

【2】 圖形とは點線、面等の集合を云ふ。圖形を分ちて、直線圖形と、平面圖形となす。何れも平面上に點及線を以てなるものにして、平面幾何學の考究する範圍なり。

4. 角 は平行せざる2直線が相會するとき、2直線の傾きを角と云ふ。

【1】 2直線を此角の邊と云ひ、會點を頂點と云ふ。

【2】 頂點と1邊を共有する2ッの角を隣接角と云ふ。

【3】 相交はる2直線が互ひに兩側に相等しき角をなすとき、此角を直角と云ひ、直線の交はる狀態を互ひに垂直なりと云ふ。

【4】 垂直に交はる2ッの直線の内、1を他の垂線と云ふ。

【5】 直角より小なる角を鋭角と云ふ。

【6】 直角より大なる角を鈍角と云ふ。

【7】 2角の和が2直角に等しきとき、2角を補角と云ふ。又1を他の補角とも云ふ。

【8】 2角の和が4直角に等しきとき、2角を共軛角と云ふ。又1を他の共軛角とも云ふ。

【9】 2角の和が直角に等しきとき、2角を餘角と云ふ。又1を他の餘角とも云ふ。

【10】 2直角なる角を平角と云ふ。

【11】 4直角なる角を周角と云ふ。

【12】 1ッの角の2邊の延長が夾む角を原角の對頂角と云ひ、又2ッを對頂角とも云ふ。對頂角は相等とし。

【13】 平角より小なる角を劣角と云ふ。

【14】 平角より大にして周角より小なる角を優角と云ふ。

5. 割線 :2ッ以上の直線に交はる直線を此等の直線の割線と云ふ。

【1】 2直線と割線とは8ヶの角を作る。而して2直線の外側に出來る4角を外角と云ひ、内側の4角を内角と云ふ。

【2】 内角の内、1ッの角と割線より反對側にある相對角を錯角と云ふ。錯角は2直線が平行なるとき相等し。

【3】 内外角の截線に對し相似の位置に於ける角を同位角と云ふ。同位角は2直線が平行なるとき相等とし。

6. 平行線 :とは2ッの直線が同一の平

面上にありて双方に延長するも、遂に相交はらざるとき、1を他の平行線と云ふ。數個の平行線の距離が相等しときは、割線は等分に分割さる。

7. 三角形

【1】 3邊が皆相等しきとき、等邊三角形又は正三角形と云ふ。

【2】 2邊が相等しきとき、二等邊三角形又は等脚三角形と云ふ。

【3】 三角形の内角の1ッが直角なるとき之を直角三角形と云ふ。

8. 四邊形、;—

【1】 2組の對邊が互ひに平行せる四邊形を平行四邊形と云ふ。

【2】 1組の對邊のみが平行なる四邊形を梯形と云ふ。

【3】 其角が皆直角なる四邊形を矩形と云ふ。

【4】 其角が皆直角にて、邊が相等しき四邊形を正方形と云ふ。

【5】 其邊のみ皆相等しければ、之を菱形と云ふ。

9. 多角形 ;—

【1】 邊數が 3.4.5 等なる多角形を三邊形、四

邊形、五邊形等と云ふ。又は三角形、四角形、五角形とも云ふ。

【2】 等邊にして等角なる多角形を正多角形と云ふ。正多角形は邊の數に依りて特殊の名稱を附す。卽ち正三角形等。

【3】 多角形の對角線とは相隣ならざる頂點を結ぶ直線なり。

10. 圓の解說 ;—

【1】 圓とは1ッの曲線にて圍まれたる平面形にして其曲線上の點は1定點より等距離にあり。

【2】 圓の曲線を圓周と云ひ、圓周の一部分を弧と云ふ。

【3】 圓の定點を中心又は圓心と云ふ。

【4】 中心と圓周間の等距離を半徑と云ふ。

【5】 弧、及其兩端と中心とを結びて圍みたる平面形を扇形と云ふ。

【6】 弧の両端を結ぶ直線を弦と云ふ。

【7】 弧及弦を以て圍みたる平面形を弓形と云ふ

【8】 弦が中心を通過する特殊弦を直徑と云ふ。直徑は圓の最大弦なり。

【9】 2ッの半徑の夾む角を中心角と云ひ、此角は此弧の上に立つと云ふ。

【10】 弦の兩端と圓周上の他の點を結びて夾む角を圓周角又は弓形角と云ふ。

【11】 圓周を分ちたる2ッの弧を共軛弧と云ふ。共軛弧に對する中心角は共軛角なり。

【12】 圓周を2ッの部分に分かつとき、小なる弧を劣弧と云ひ、劣弧に對する中心角を劣角と云ふ。

【13】 同樣に大なる弧に對して優弧と云ひ、優角と云ふ。

【14】 圓周上の2點を通過する直線を割線と云ふ。

【15】 圓周上の只1點と會する直線を切線と云ふ。切線は割線の特殊の場合にして、圓周上の2點が次第に接近して、遂に一致したるものなり。此點を切點と云ふ。

【16】 同一の直線上に在らざる3點は圓を決定す。

【17】 圓の中心と弦の中點とを結べば弦に垂直となる。

11. 比及比例；

或量Aの之と同種類の量Bに對する比とはAよりBを得る爲めにAに乘すべき數なり。

【1】 AのBに對する比をA:Bと記す。

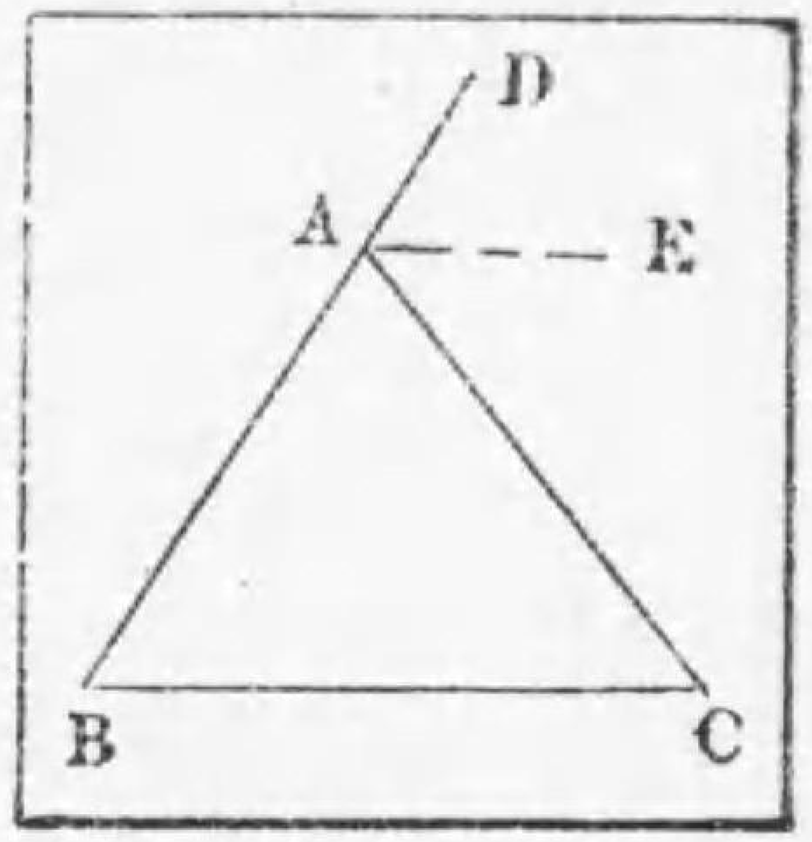
【2】 2ッの比が相等しきとき比例をなす。卽ちA:B=C:Dは比例なり。玆にA及Dを外項と云ひ、BとCとを內項と云ふ。

【3】 A.B.Cの比が次の如く比例をなすとき、A:B=B:CなればBを中例中項と云ふ。

12. 三角形の內角の和；

三角形の內角の和は2直角なり。

【證】 三角形をABCとす。今邊ABを延長してADを引き、AよりBCに平行線AEを引く。然るとき、



$\angle DAE=\angle ABC.$

$\angle EAC=\angle ACB.$

而して、頂角Aと角DACとの和は2直角なるを以て、一般に三角形の內角の和は2直角なり。

13. 三角形の相等しき條件；—

【1】 2邊と夾角が相等しきとき、

【2】 2角と頂點間の邊が相等しきとき、

【3】 3邊が何れも相等しきとき、

以上の何れかが適合すれば、三角形は全等なり。

14. 三角形の相似形條件；—

【1】2角が夫々相等しきとき、

【2】2邊が比例をなし、夾角の等しきとき、

【3】3邊が何れも比例をなすとき、

以上の何れかが適合すれば、三角形は相似なり。

15. 三角形の二邊の和及差；—

【1】三角形の2邊の和は他の1邊より大なり。

【2】三角形の2邊の差は他の1邊より小なり。

16. 三角形の二邊の中點を結ぶ線

三角形の2邊の中點を結ぶ線は、第三邊に平行にして、長さは其半分に等とし。(平行線と割線との關係を以て證明するを得。)

17. 三角形比例の定理

2ッの三角形に於いて、相對する各邊を、A.B, P.Q 及 C.D とす。然るとき、

(1) $\frac{A}{B}=\frac{P}{Q}$ なれば ……$\frac{B}{A}=\frac{Q}{P}$

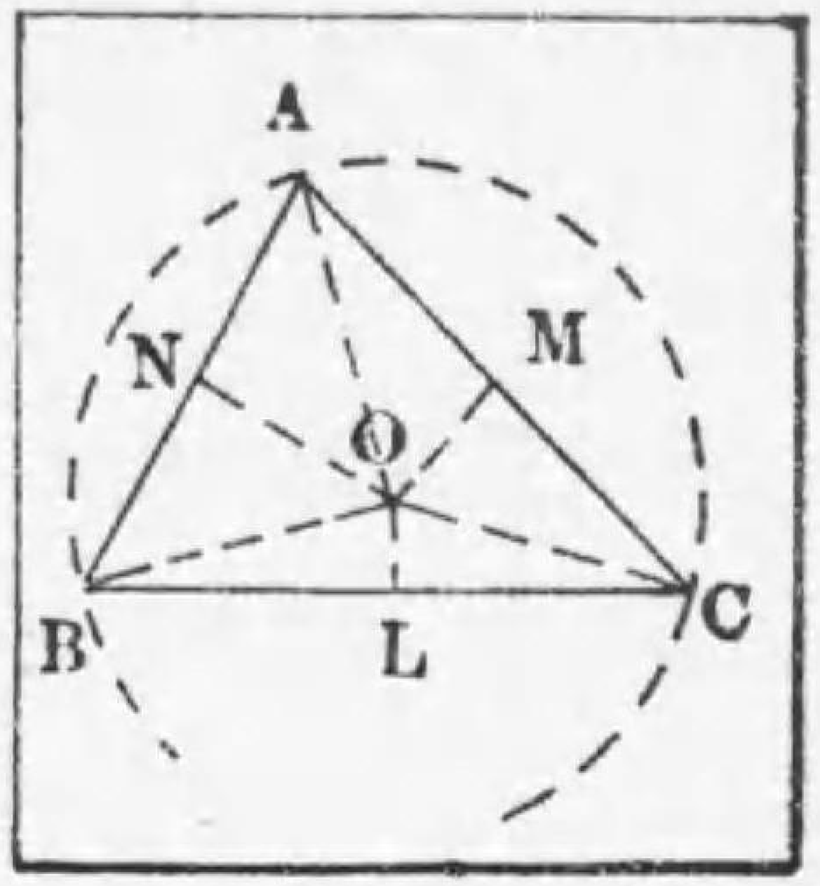
(2) $\frac{A}{B}=\frac{P}{Q}$ 〃 ……$\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$

(3) $\frac{A}{B}=\frac{P}{Q}$ 〃 $\frac{A+B}{B}=\frac{P+Q}{Q}$ 或 $\frac{A+B}{A}=\frac{P+Q}{P}$ or $\frac{A-B}{B}=\frac{P-Q}{Q}$ or $\frac{A+B}{A-B}=\frac{P+Q}{P-Q}$

(4) 三角形の一邊に平行なる直線は他の2邊を同比に分かつ。

18. 三角形の外心

三角形の3ッの邊の垂直2等分線は同一點に於いて交はる。此點は各頂點より等距離にあり。即ち此點は三角形に外接する圓の中心となるを以て、之を外心と云ふ。



【證】三角形をABCとし、垂直2等分線LO. MOをOに於て交はらしむ。BO. COを結べば LOの兩側に出來る三角形は全等形の直角三角形なる故に、

CO=BO 同樣にして、

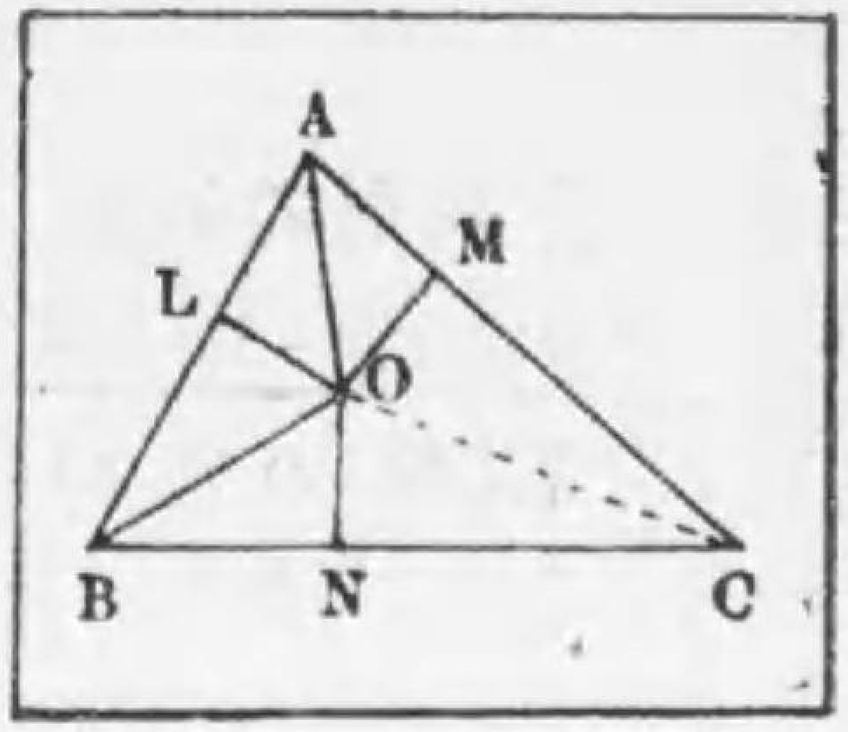
BO=AO となる。

19. 三角形の內心

三角形の各頂角の2等分線は同一の點に交はる。此交點は各邊より等距離にあり。即ち、此點は三角形に內接する圓の中心となるを以て、之を內心と云ふ。

【證】三角形をABCとし、頂角の2等分線A

Oを O に於て交はらしめ、O より垂線 NO. LO を引けば、BO の兩側に出來る三角形は全等形なる故、

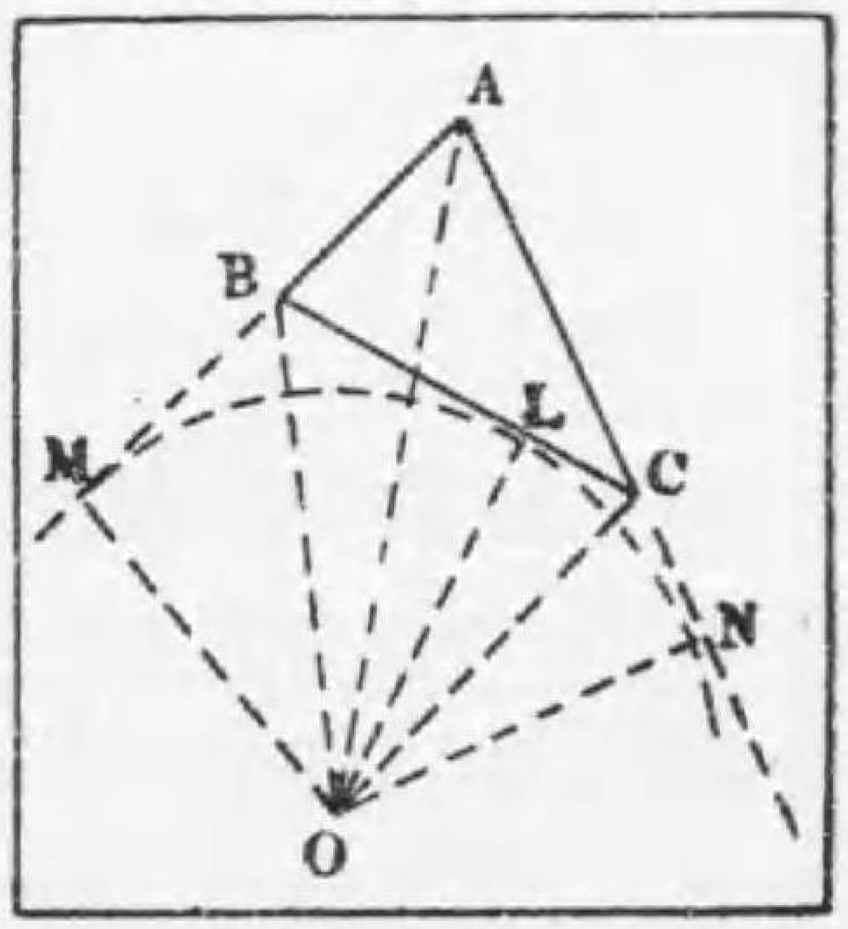


NO＝LO 同樣にして

LO＝MO となる。

20. 三角形の傍心

三角形の1ッの角の2等分線と、他の2ッの外角の2等分線とは、同一の點に交はる。此點は、三角形の外側に於て、3ッの邊より等距離の點なり。故に三角形に傍接する圓の中心となるものにして、之を傍心と云ふ。

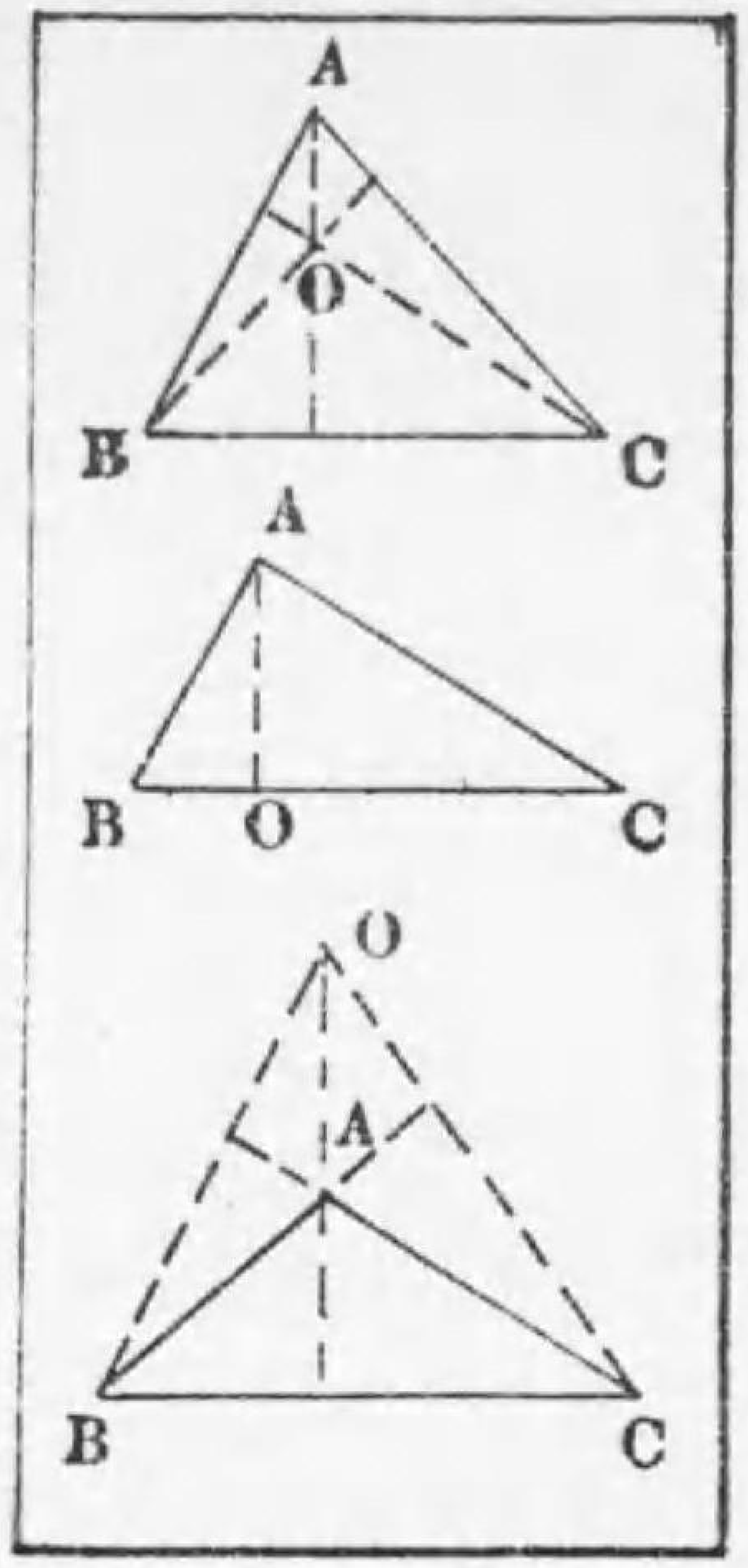


【證】 三角形を ABCとし、2等分線 BO. CO の交りを O とす。然るとき各の垂線は、

MO＝LO＝NO なることを得べし。

21. 三角形の垂心

三角形の各頂點より、對邊に垂線を引けば、同一の點に交はる。此點を垂心と云ふ。而して三角形の形狀に依りて、垂心の位置は次圖の如く變位す。



(1) 鋭角形のとき三角形の內側。

(2) 直角三角のとき、直角の頂點。

(3) 鈍角三角形の時、鈍角より引ける垂線の延長上、三角形の外側となる。

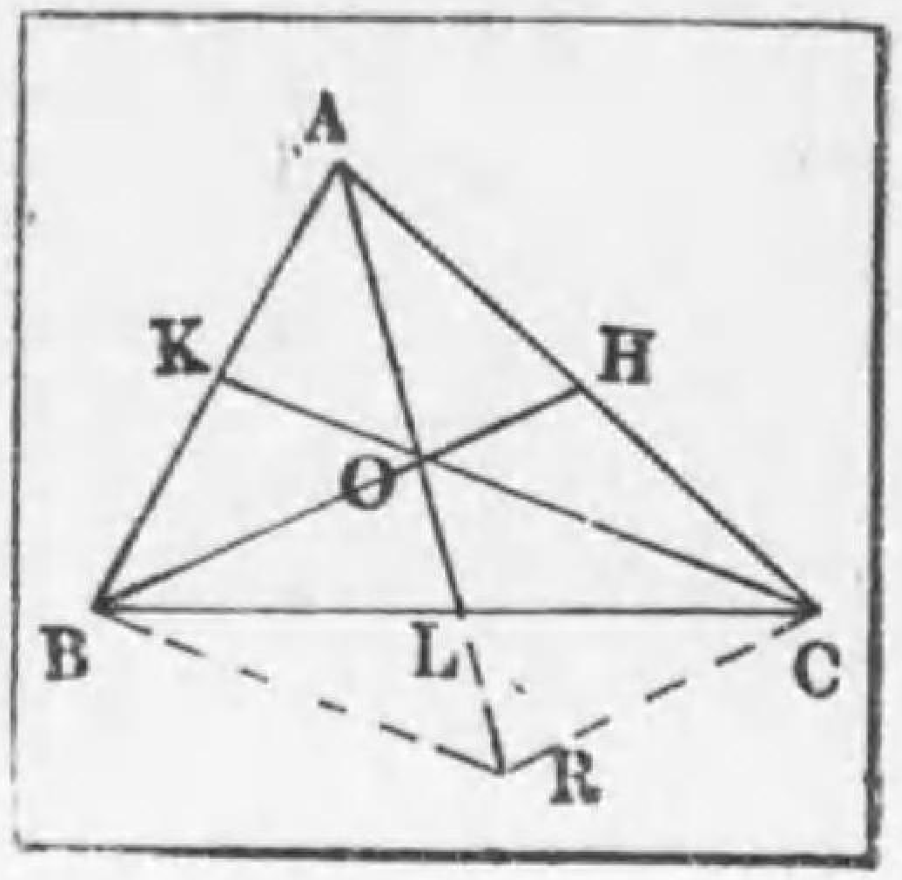
(解)：一略、

22. 三角形の重心

三角形の3ッの中線は同一の點に交はる。此點は各頂點より3分の2の點なり。之を重心と云ふ。

【註】 重心は中線の兩側に三角形の面積を等分に分割する線の交はりなるを以て、此點を通して3角板を吊すときは、重さの平衡を得る點とす。

【解】 圖に於て三角形 ABC の各中線を CK. BH とし、其交點を O とす。AO を結び、其延長に於て、OR=AO に等しくとる。又、BR. CR. を結ぶ。然るときは △ABR に於て、KO は兩邊の中點を結ぶ線なれば、底邊 BR に平行となる。故に四邊形 BOCR は平行四邊形となる故、$LO=\frac{1}{2}AO$. 他も同樣



23. 内心に關する問題

三角形 ABC の内心を I とす、AI の延長が外接圓と交はる點を D とすれば、

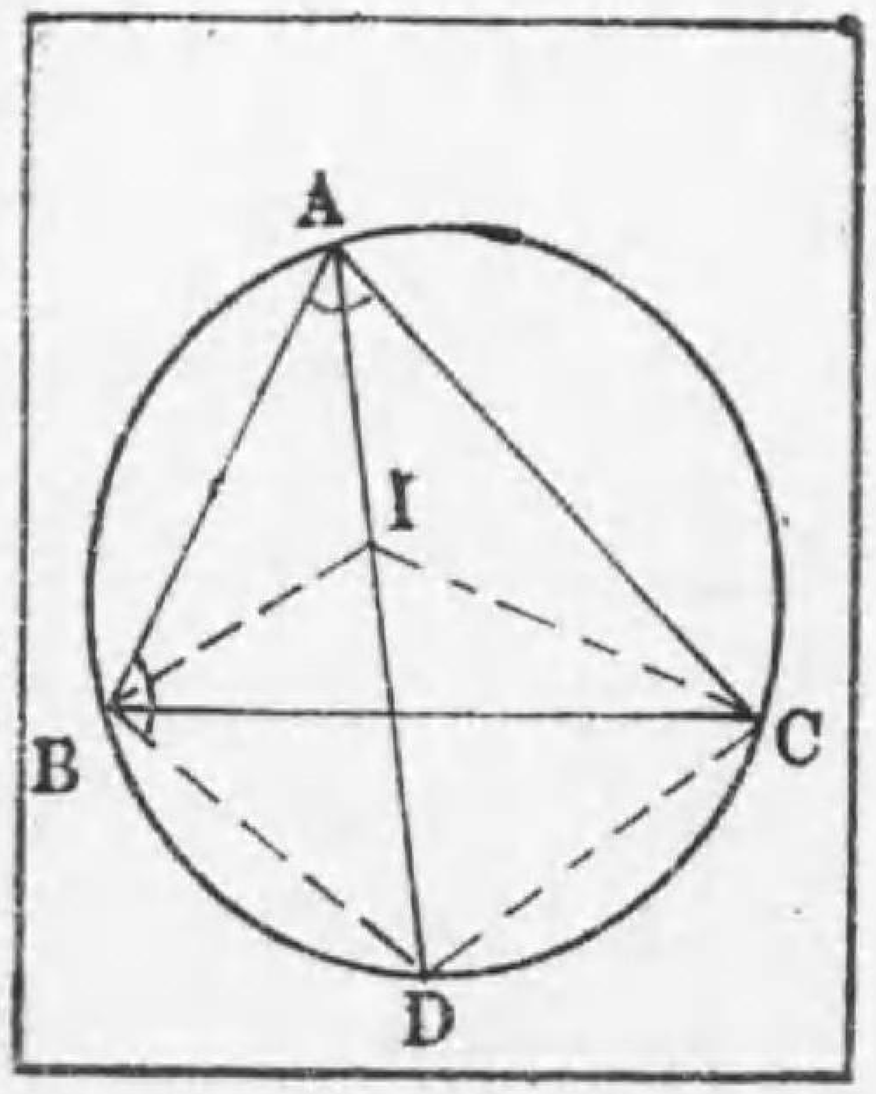
DI=DB=DC なり。

【解】 $\angle BID=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$

CD=BD

$\angle CBD=\angle CAD$

故に $\angle DBI=\angle BID$ 即ち DBI は二等邊三角形となるを以



て、題意の結果を得。

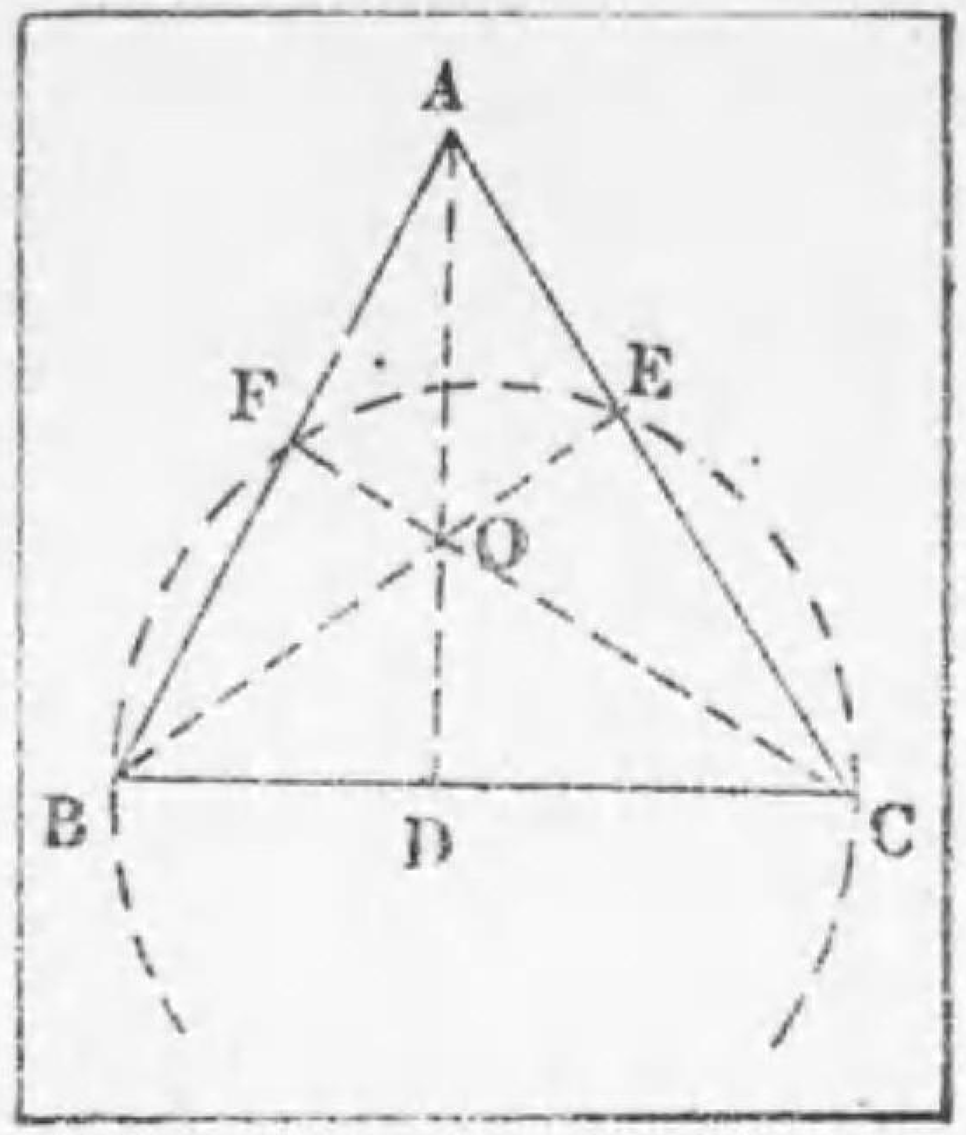
24. 垂心に關する問題

三角形 ABC に於て、O を垂心とすれば、OA. OD=OB. OE=OC. OF

（解） BFEC の4點を通する四邊形を畫くこ事を得。然るときは圓内の1點を通する2弦なるを以て、

OE. OB=OC. OF 同樣にして

OC. OF=OA. OD なるを得。



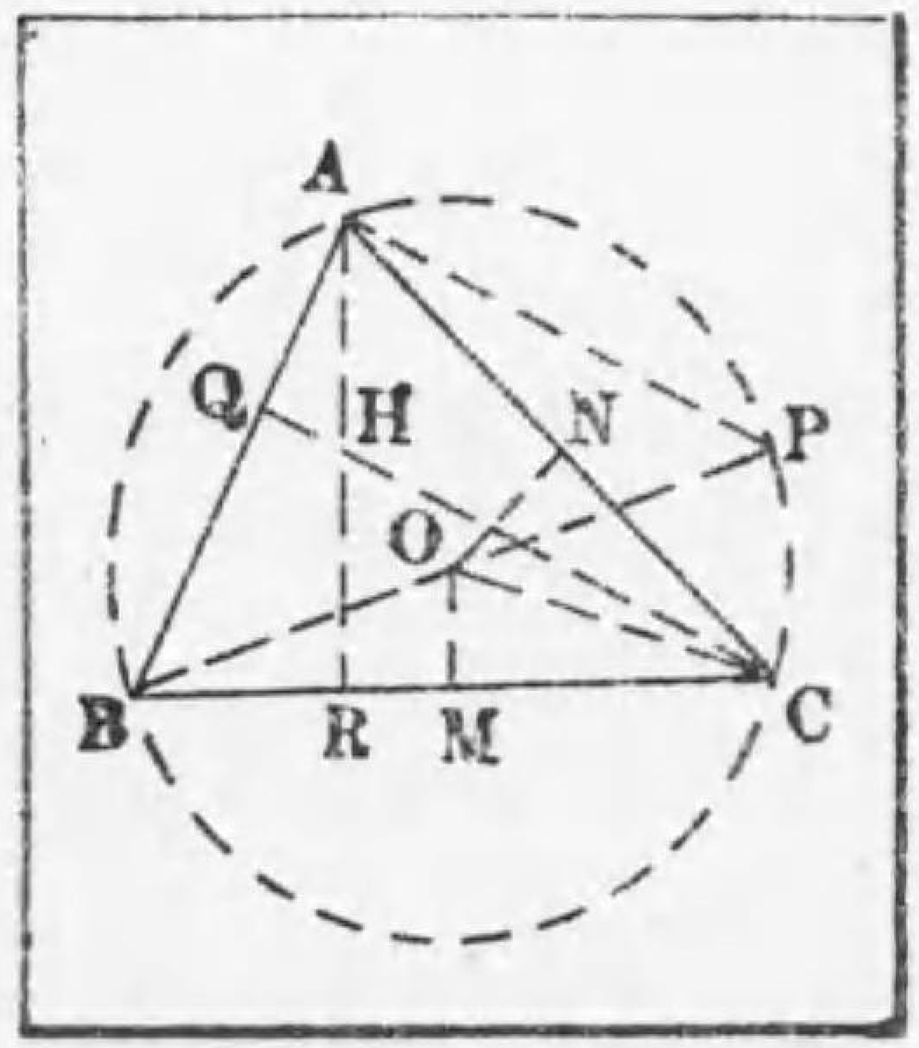
25. 垂心及外心の問題

三角形 ABC の垂心を H とし、外心より邊 BC に垂線 OM を下せば AH=2. OM なり。

（解） 直線 BOP を引けば比例に依り $OM=\frac{1}{2}PC$.

$\angle BCP=\angle BAP=90°$

又△BQC と△A



BR は相似形なる故、

$\angle BAR=\angle BCQ$

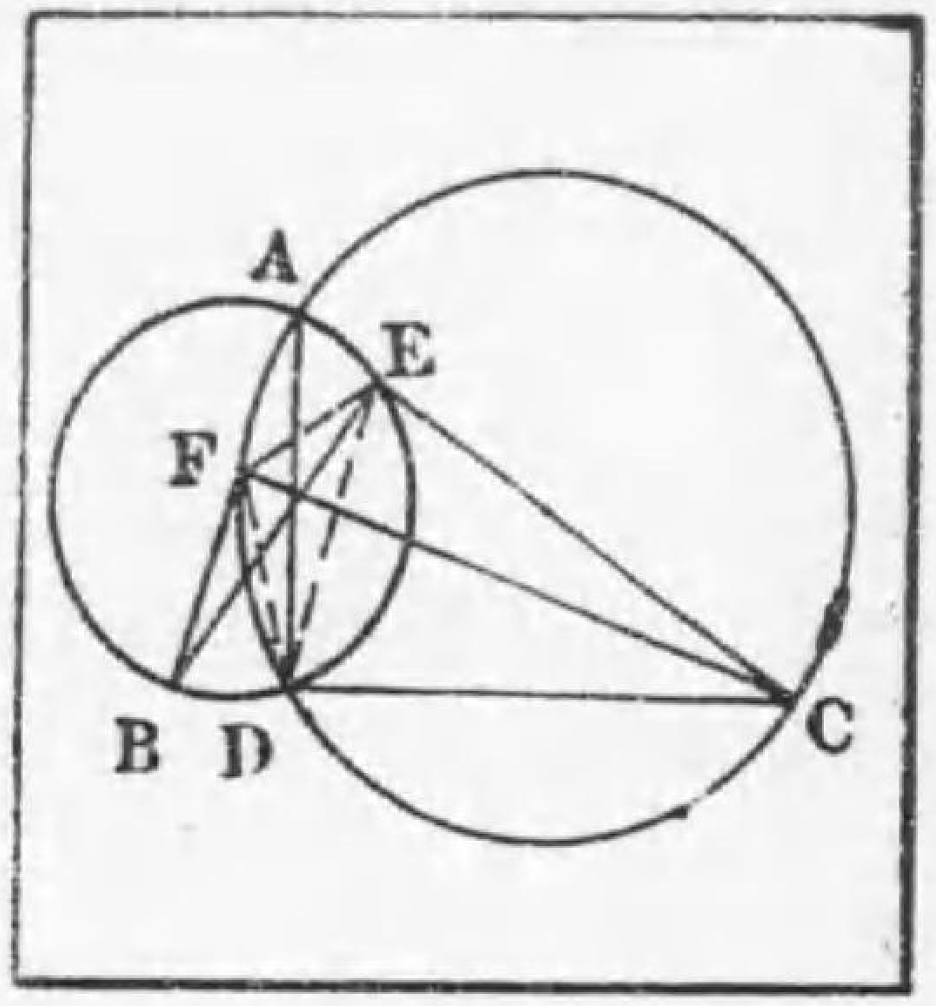
$\therefore$ $\angle PAR=\angle PCQ$

故に □AHCP は平行四邊形にして、$AH=PC$

$\therefore$ $OM=\frac{1}{2}AH$。

26. 垂心及内心の問題 鋭角三角形の垂心は、其垂足三角形の内心となる。

（解） 圖に於て、△ABC. 垂足を E. F. D とす。



然るときは、□AEDB と □ACDF は圓周角が直角となる如き圓に内接する故、 $\angle A=\angle FDB$

又、圓に内接する四邊形の外角と内對角とは相等しきを以て(49解)

$\angle FBD=\angle EDC.$

$\therefore$ ADは $\angle FDE$ を2等分するを以て、△DEF に於て

AD. EB. FC 等は各頂角を2等分するを以て、

H は △DEF の内心となる。

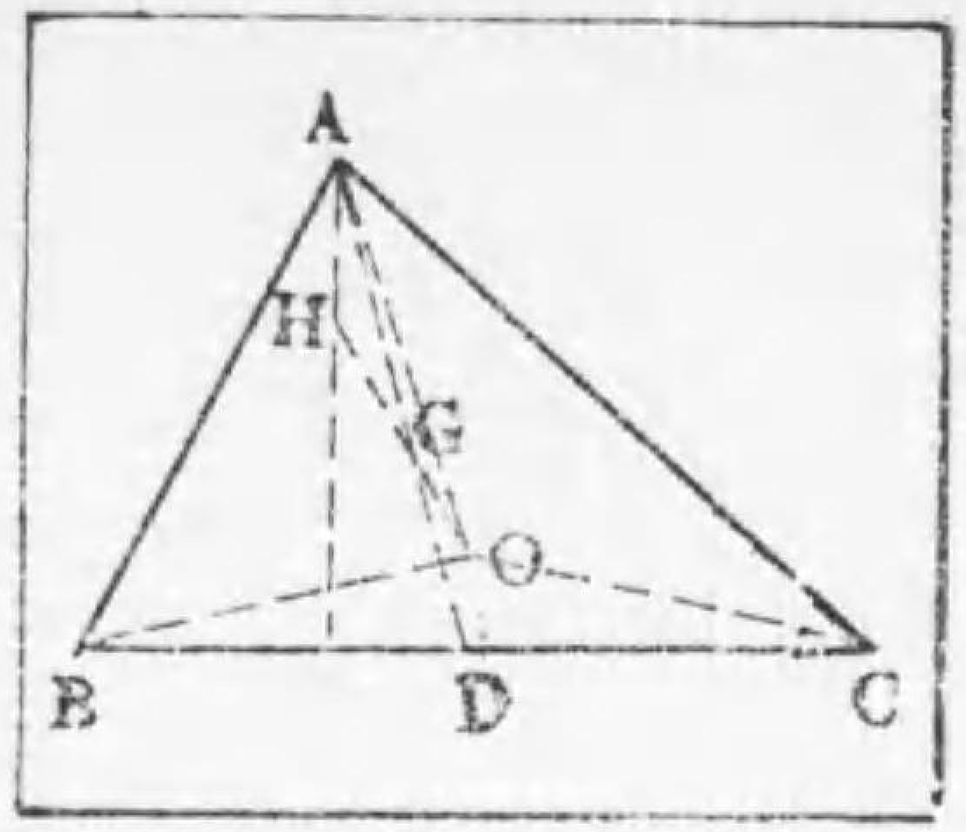
27. 外心、重心、垂心の問題 三角形の外心、垂心、重心は一直線上にあり。

（解） 圖に於て

H……垂心

O……外心

とす。然るとき、HO 上に重心G があることを要す。



O より垂線 OD を引けば、(25) に依りて、

$AH=2.OD.$ 又. $AH /\!/ L\ OD.$

今 AD. OH の交點を G とせば、相似三角形の比例に依り、$AG:DG=2:1$ にして G は重心たるを得。

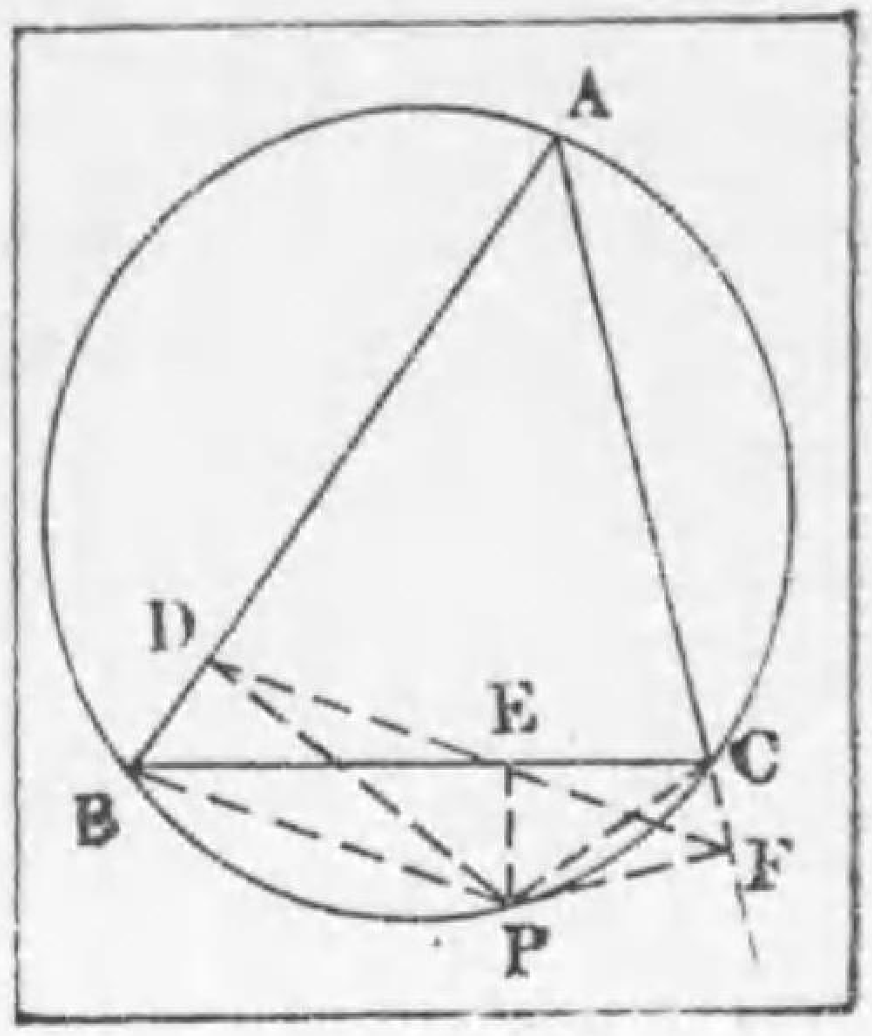
28. 三角形と外接圓 三角形の外接圓上の1點より、各邊に下せる垂足は一直線上にあり。(Simson の定理)

【解】 三角形…………………ABC.

外接圓上の點……………P.

足……………………D. E. F.

然るとき、DEF が一直線上にあるを要す。



DE EF を結ぶ。然るとき四邊形 BDEP と PECF とは直角三角形の併合なる故、圓内の四邊形となるを得。故に、

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \angle PED+\angle PBD=\pi \cdots\cdots(1)$$

又、圓内四邊形 ABPC にて、

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \angle PCF=\angle ABP \cdots\cdots(2)$$

又、圓周角として、$\angle PEF=\angle PCF$ なるを以て、

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \angle PEF=\angle ABP \cdots\cdots(3)$$

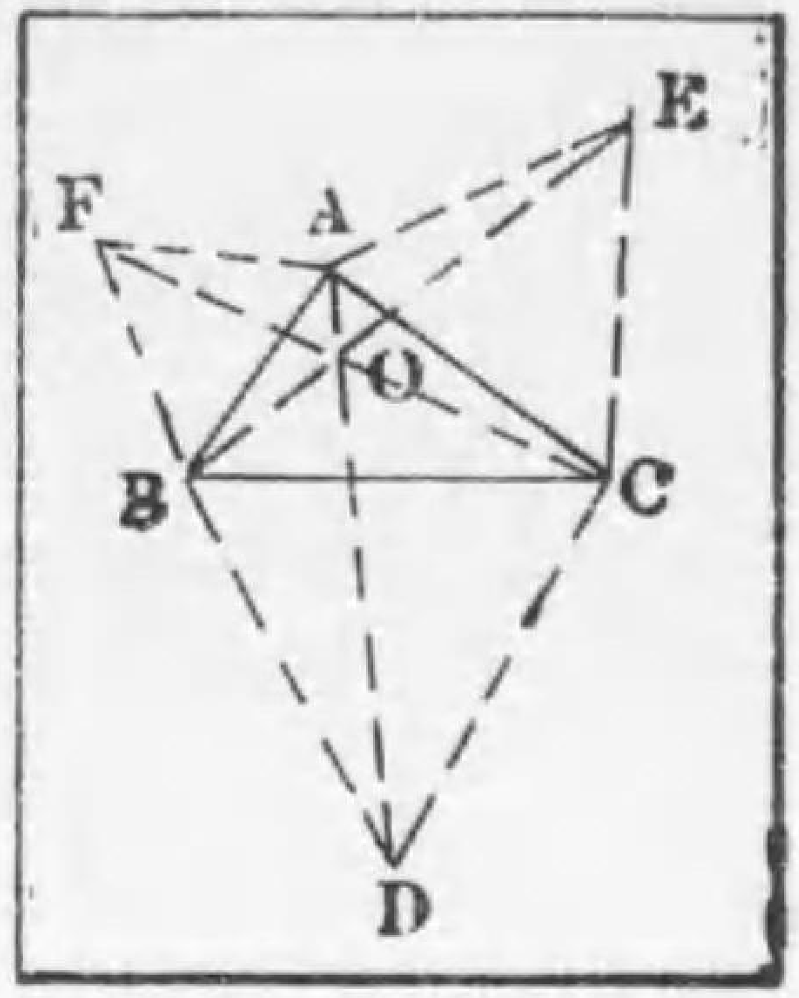
(1) 及(2)より、$\angle PED+\angle PEF=\pi$ なる故に、DF は一直線の上にあり。

29. 三角形、邊上の正三角形(1)

△ABC の各邊を1邊とする正三角形を作るときは、圖に於て、AD=BE=CF

（解） △ABD と △FBC、とは各2邊と夾角とが相等しき故に AD=FC.

故に之を解釋の基礎とすれば、題意の結果を得。



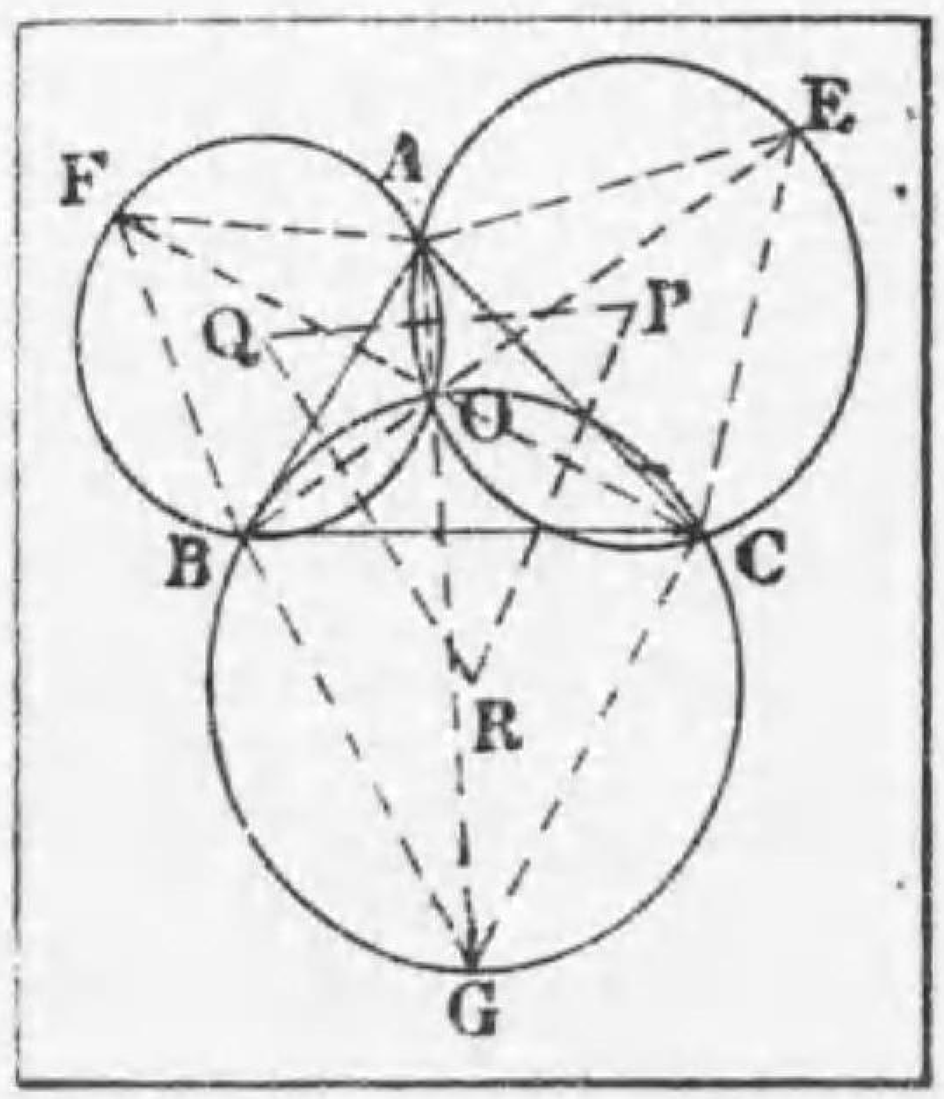
30. 三角形邊上の正三角形(2)

：△ABC の各邊の外側に正三角形を作れば、

（1） 3ッの正三角形の外接圓は一點に交はる。

（2） 3ッの正三角形の中心を結びたる三角形も亦、正三角形となる。

（解） 2個の圓、Q 及 R を交はらしめて、



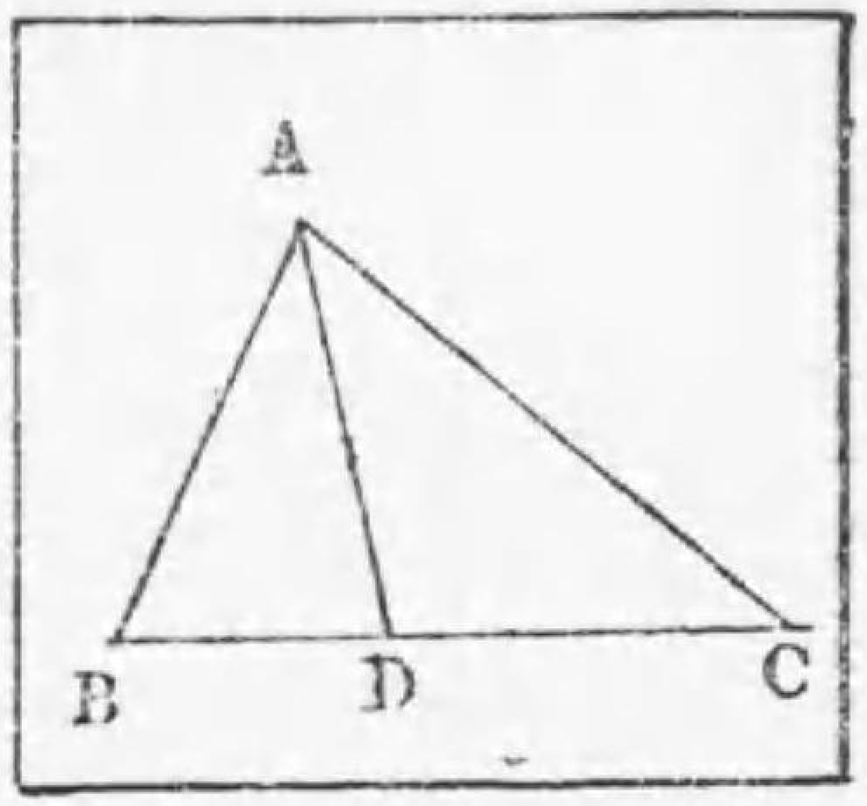
（1） AO.BO.CO. EO. FO を結ぶ。然るとき、2個の圓内四邊形を得。而して $\angle E=\angle F=60^\circ$ なる故に、$\angle AOC=\angle AOB=120^\circ$ となるを以

て、CF. BE は一直線となる。

(2) P.Q.R 等を結びたる線は、2 圓の中心を結びたる線なる故に、其共通弦に垂直なり。故に、

AD. BF. CF の各弦に、各邊が直角をなす如き三角形は正三角形なるべし。

31. 三角形内角の二等分線 三角形の内角の 2 等分線は、其對邊を他の二邊の比に分かつ。外角のとき外分す。



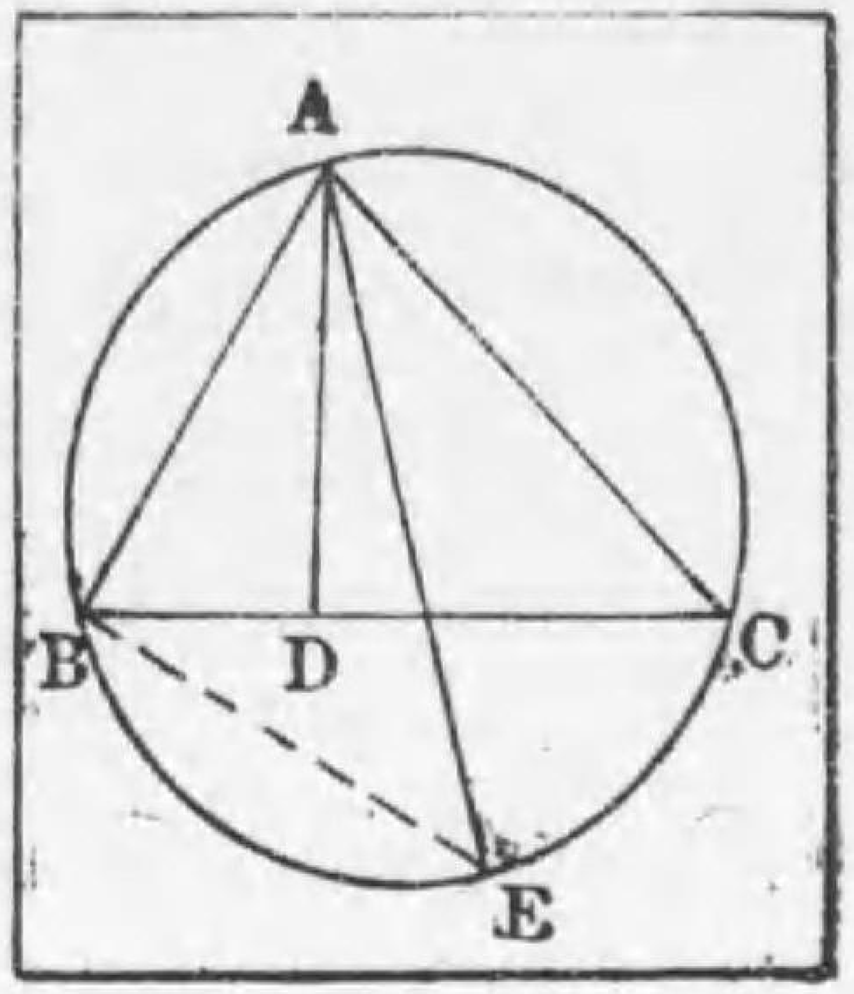
【解】 △ABC三角形A.D..二等分線とするときは

$\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CD}$ なること。

CEをADに平行に、AB 延長上にEを求む。然るときは、AB=AE. ∠E=∠DAB, ∠C=∠DAC なる故、△ACE は二等邊なる故、

AE=AC. 卽ち題意の比例をなす。

32. 三角形の二邊の積(1) 三角形の 2 邊の積は、第三邊への高さと、外接圓の直徑との積に相等とし。



【解】 三角形をABC とし、外接圓の直徑を AE とす。

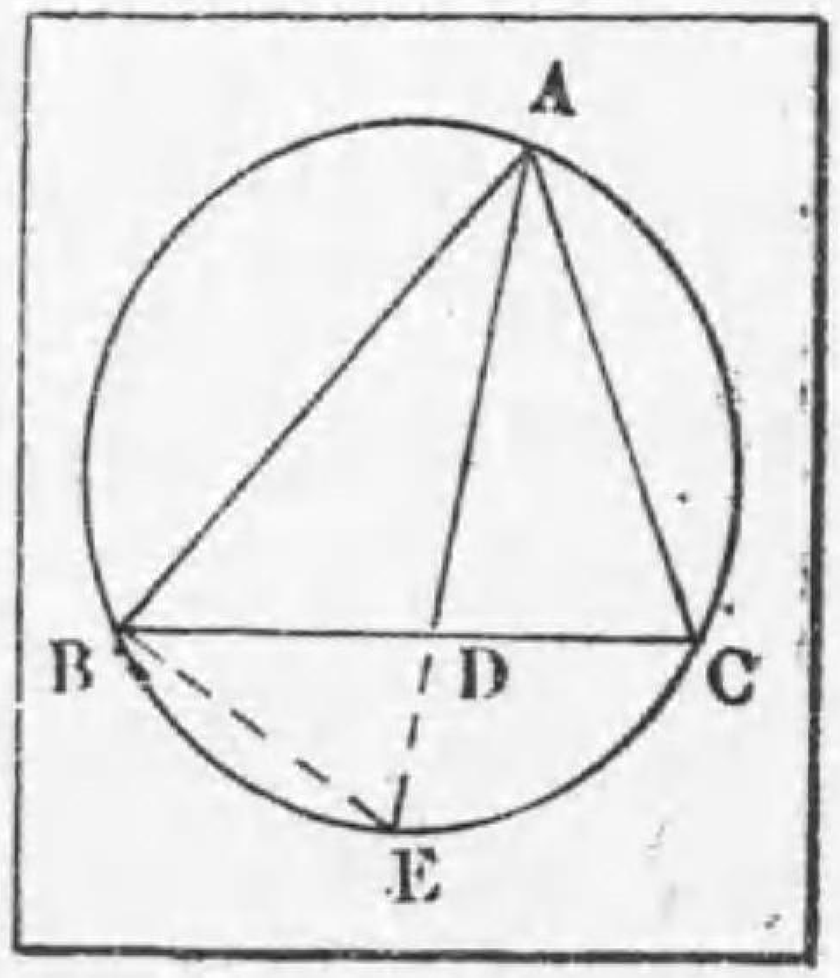
然るとき、

AB. BC=AD. AE なることを要す。

圖に於て、△ABE. 及 △ADC は相似形なるを以て、$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$

故に AB. AC=AD. AE.

33. 三角形の二邊の積(2) 三角形の 2 邊の積は、其夾角の 2 等分線の平方と、之が第三邊を分つ分の積の和にひとし。



【解】 △ABCに於て、AD を ∠A の 2 等分線とするとき、

AB × BC=AC² +BC. BD なることを要す。

今圖に於て、AD を延長して、圓を交はらしむ。然るとき、$\angle E=\angle C$ 故に、

$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$. なるを以て、

$$\therefore \quad \frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC} \text{ 又は } AB.AC=AD.AE$$

$$\therefore \quad AB.AC=AD(AD+DE)=\overline{AD}^2+AD.DE$$

$$=\overline{AD}^2+BD.CD$$

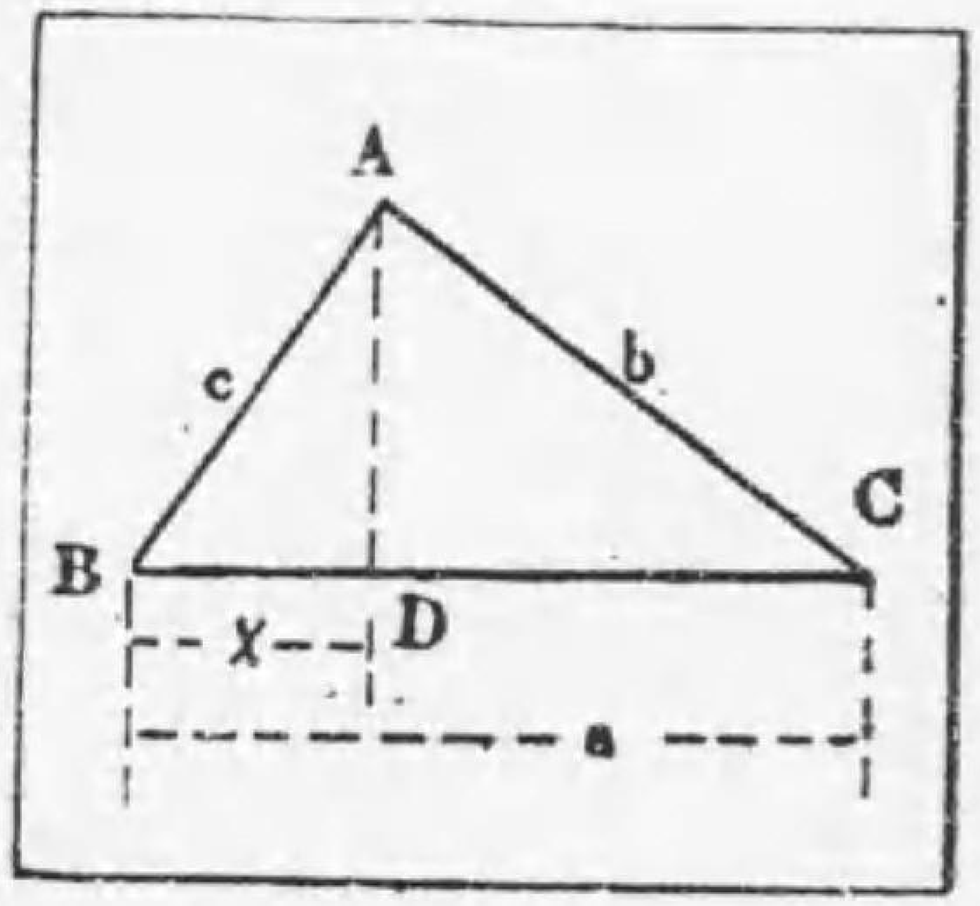
34. 三角形の面積

三角形の三邊を a. b. c とすれば三角形の面積：A

$$=\sqrt{S(s-A)(s-b)(s-c)} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

但、$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$ とす。

【解】 頂角を A. B. C. 對邊を a. b. c. とせば、



$$c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$$

$$x=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$$

故に高、AD は次式の如く、

$$AD=\sqrt{c^2-x^2}=\sqrt{\frac{(a+b+c)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)}{4a^2}} \cdot (2)$$

然るとき、面積：$A=\frac{1}{2}BC\times AD$. にして(1)式の

結果を得。

（註） 三角形の面積は、底邊(a)と高さ(h)との乘積の半に等とし。即ち、$A=\frac{1}{2}\times a\times h$. …(3)

35. 直角三角形の相等條件；—

（1） 斜邊と鋭角が相等しきとき、

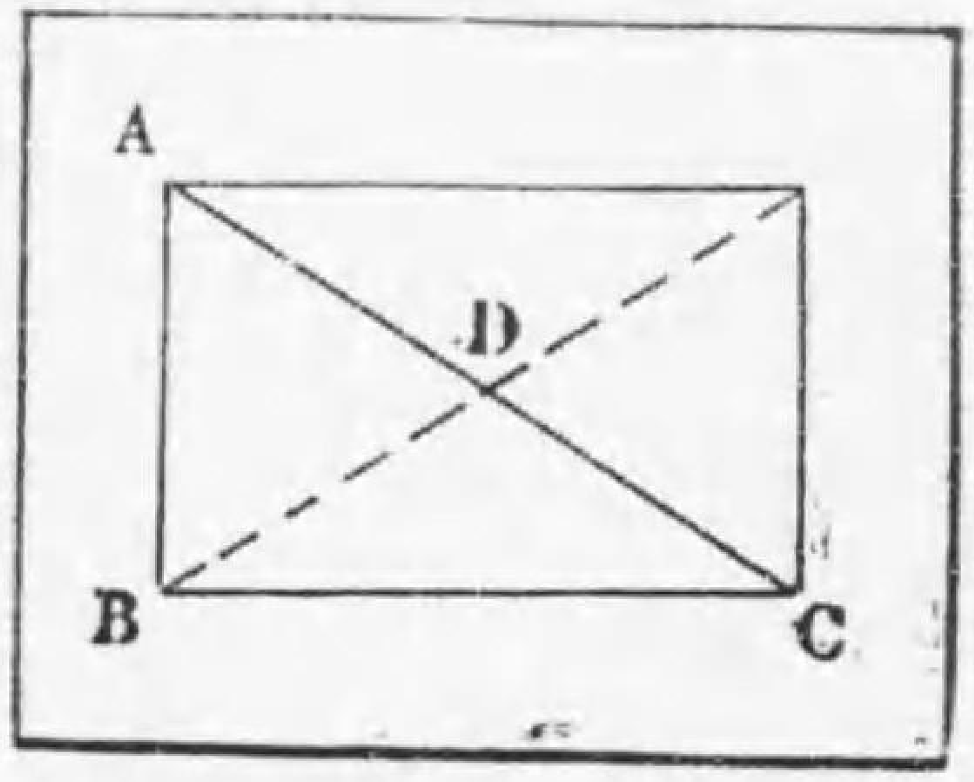
（2） 斜邊と他の一邊が等しき時、

以上の何れかゞ適合せば全等直角三角形を得。

36. 直角三角形の斜邊の中點

直角三角形の斜邊上の中點は３ッの頂點より等距離にあり。

【解】 △ABC を直角三角形とし、D を斜邊の中點とす。今、直角三角形の２個を圖の如く相向はしむれば、矩形となる。



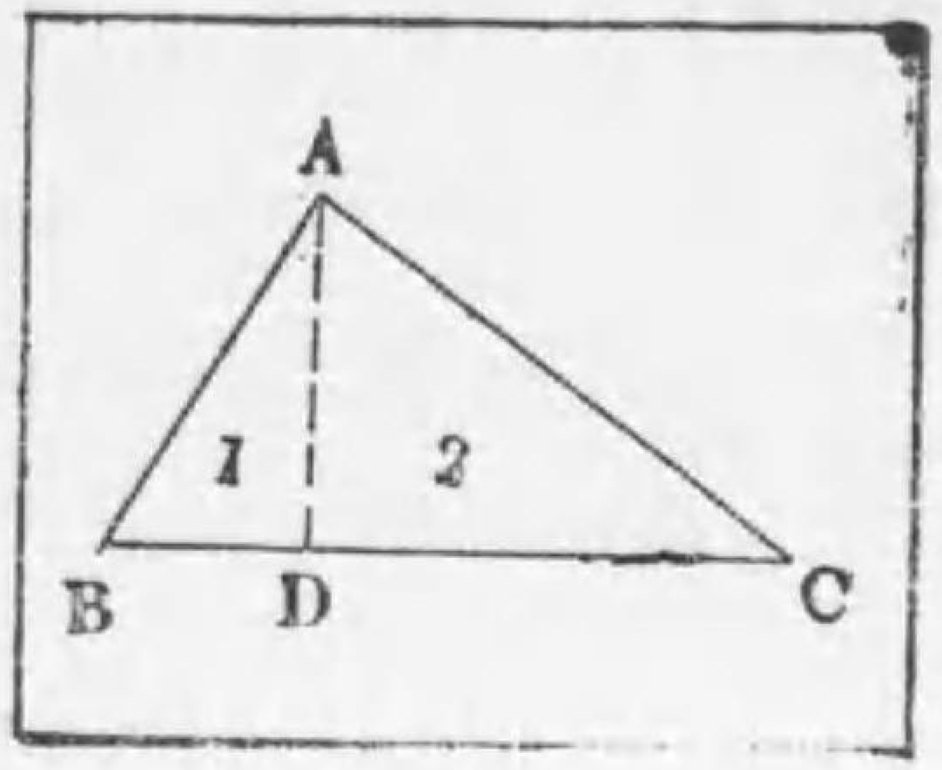
然るときは、斜邊は對角線となる故に、

$AD=BD=CD$.

37. 直角三角形の特性

以下直角三角形の一般性質を示めす。今、直角の頂點より斜邊に垂線を立つれば、

(1) △(1) △(2) △(1)+(2) は相似形なり、



(2) $\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}$

or $\overline{AD}^2=BD.CD$

(3) $\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}$

or $\overline{AB}^2=BC.BD$

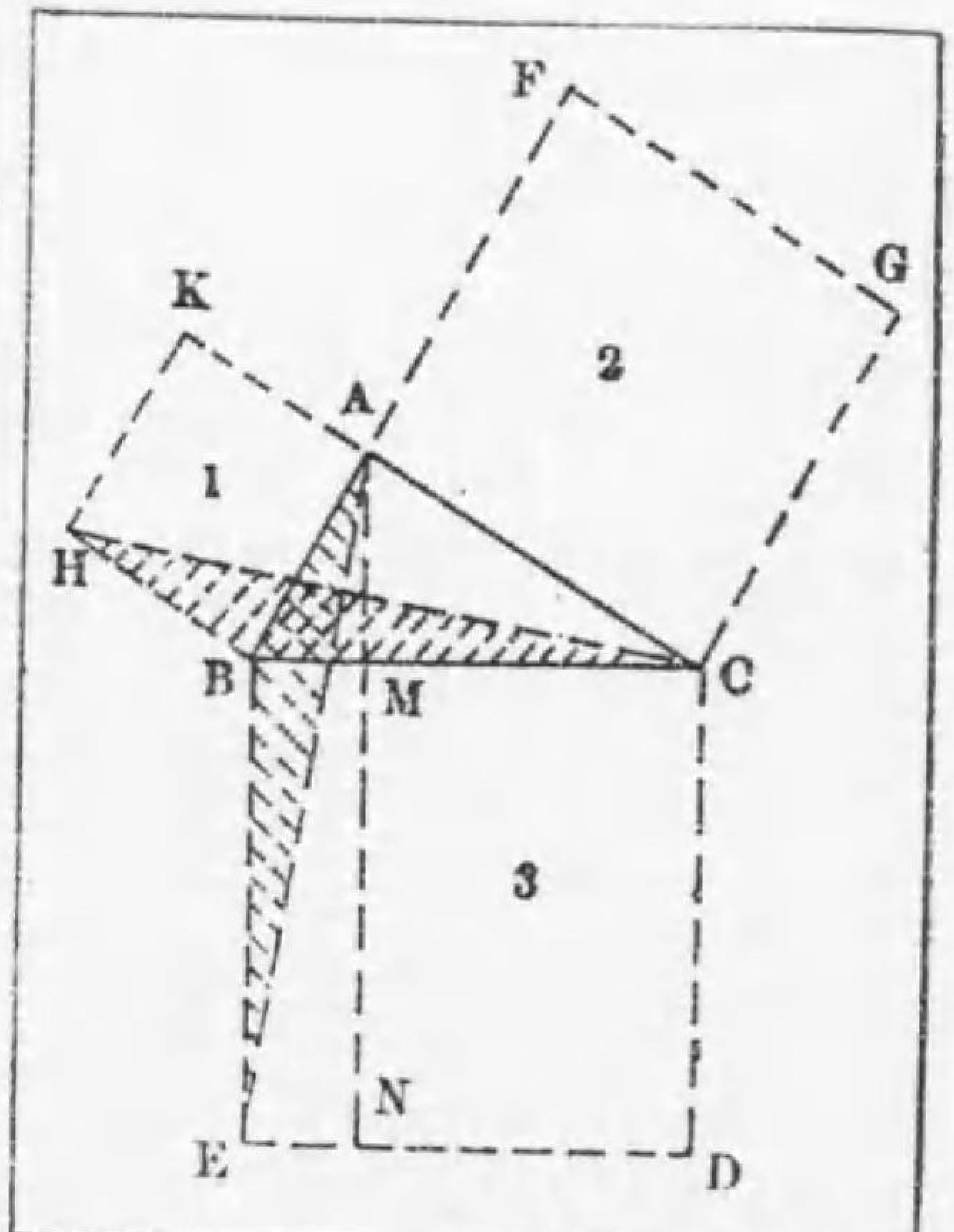
(4) $\frac{CD}{AC}=\frac{AC}{BC}$

or $\overline{AC}^2=BC.CD.$

(5) $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=BD.CD.$

38. 直角三角形の斜邊上の正方形

直角三角形の斜邊上の正方形は他の2邊の上の正方形の和にひとし。



【解】 ABC を直角三角形とし、

□(3)：斜邊上の正方形、

□(1)及(2)を他の2邊上の正方形とす。然るとき、

(1)+(2)=(3) なるを證明すること。

圖に於て、△ABE=½(1)

△ABC=½□BENM. 而して、½(1)=½□BENM

故に、(1)+(2)=(3)

39. 直角三角形の各邊上の相似形

直角三角形の各邊上に、之を對應として、相似多角形を作れば、斜邊上の多角形の面積は、他の2邊上の多角形の面積の和にひとし。

(註) 上記は(38項)の應用なり。

40. 二等邊三邊形の特性 ;—

(1) 二等邊三角形の內心、垂心、外心。重心は一直線上にあり。

(2) 二等邊三角形の中線は等長なり。

(3) 二等邊三角形の底角は相等とし。

(4) 頂角の2等分線は底邊を直角に2等分す。

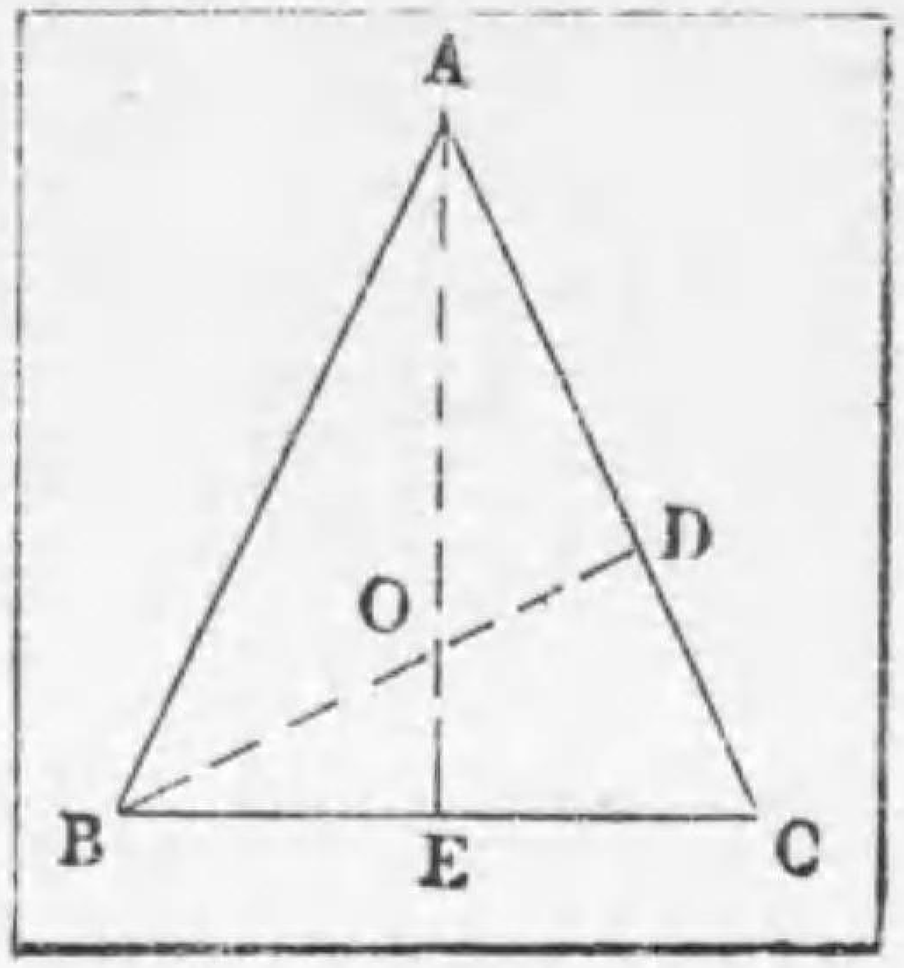
(5) 頂點を過り底邊に平行線を引けば、外角を2等分す。

41. 二等邊三角形の底角

二等邊三

角形 ABC の底角の頂點 B より對邊 AC に垂線 BD を引けば、∠BCD は頂角 A の半角なり。

（解） BD を AC に直角線となし、頂角 A の 2 等分線 AE を引く。然るときは三角形が 2 等邊なる故、

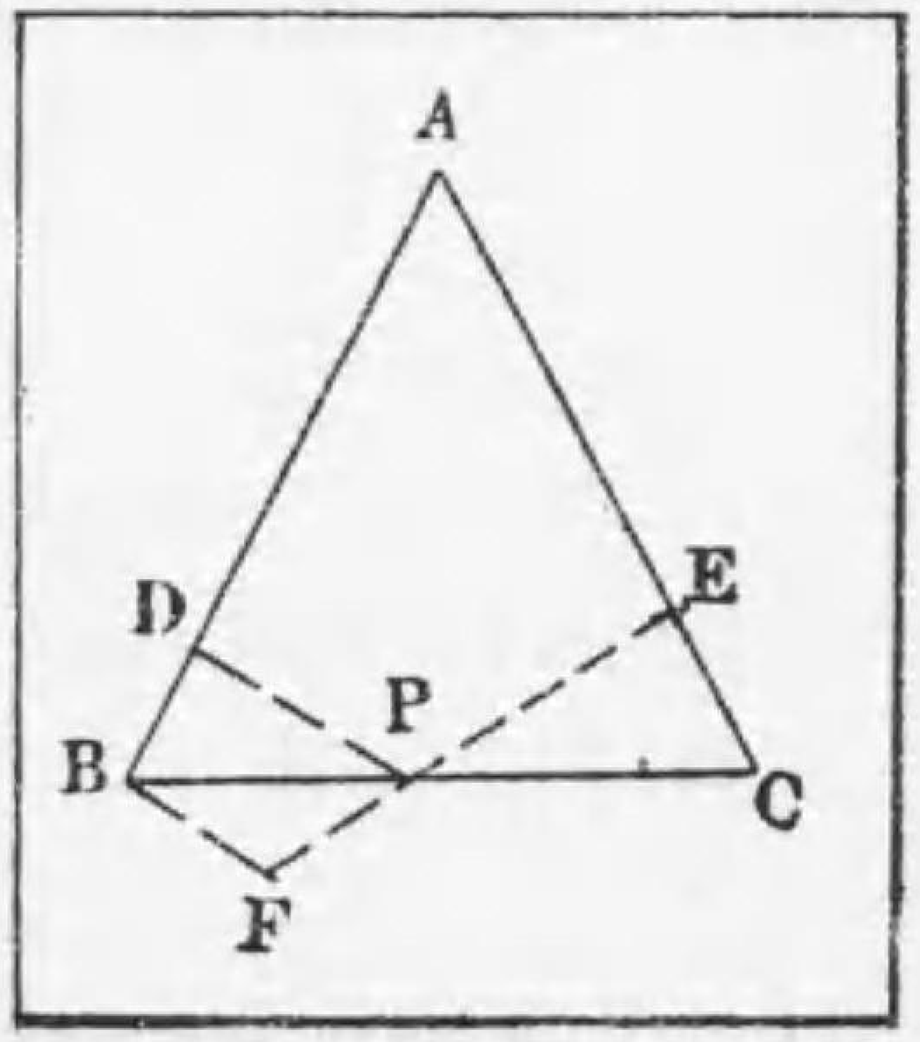


AE は BC に垂直、

即ち、△BDC と △AEC とは ∠BCD が共通なる直角三角形なる故、

$$\angle CAE=\angle DBC=\frac{1}{2}\angle A$$

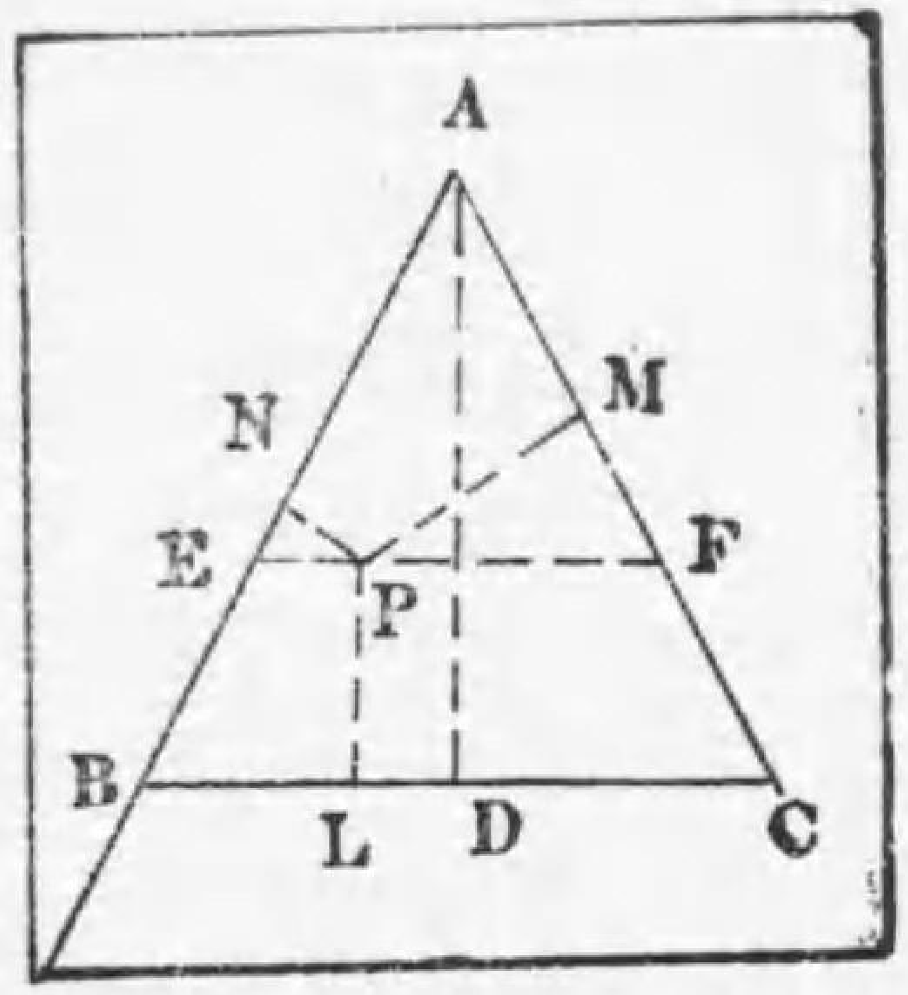
42. 二等邊三角形の底邊よりの距離 二等邊三角形の底邊の上の 1 點より他の 2 邊に至る距離の和は一定なり。但、1 點が底邊の延長上にあるときは其差が一定となる。



【解】 底邊 BC 上の 1 點を P とし、PE, PD を其垂線とす。今、BF を AC に平行に PE を引き延長すれば △BDP と △BFP は相等しき直角三角形にして、EF は一定の長さなる故、之より證明せらる。

43. 正三角形内よりの距離 正三角形 ABC 内の 1 點 P より各邊に引ける垂線の長さの和は一定なり。

（解） PN. PM. PL を各垂線とす。今、P を通して、EF ∥ BC にすれば、(42)に依り、



PM+PN＝一定、又 PL は P が EF より何れの點に移りても、定長なる故、

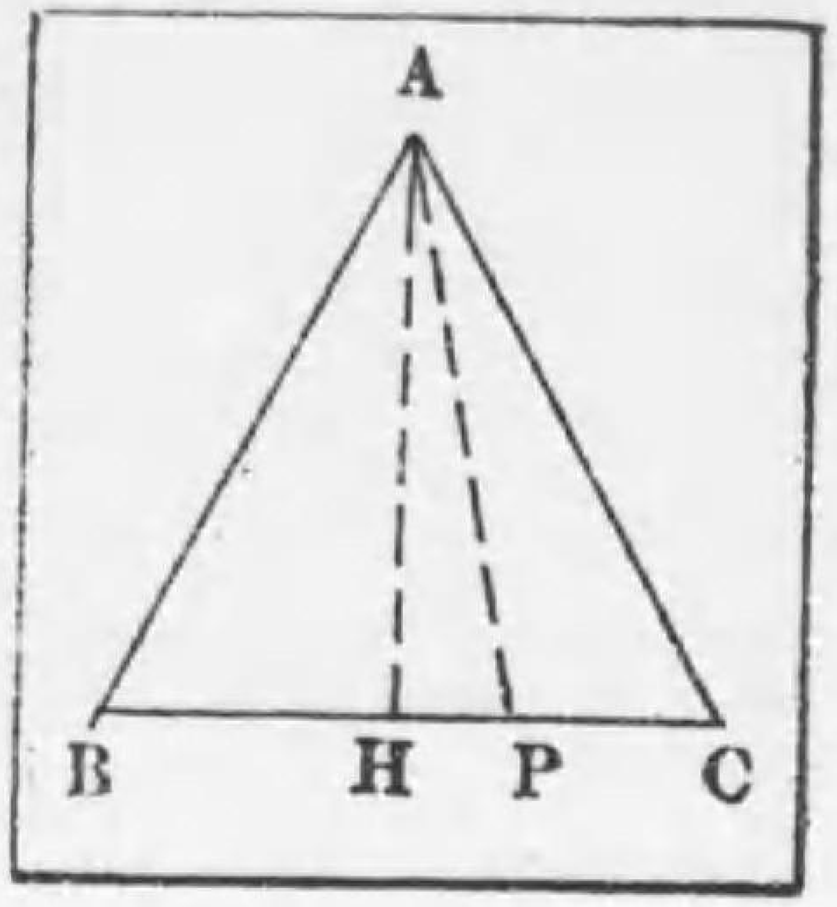
PL+PM+PN＝一定、

44. 等邊三角形の底邊上の線 二等邊三角形 ABC の底邊 BC 上の 1 點 P とせば、

$\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=BP.CP$ なり。

【解】 圖に於いて、

△ABC二等邊三角形
P…… 底邊上の點
AH‥ 頂點より垂線
然るときは
$\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$
$\overline{AP}^2=\overline{AH}^2+\overline{HP}^2$
故に兩式の引算をせば



$$\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=\overline{BH}^2-\overline{HP}^2$$
$$=(BH+HP)(BH-HP)=BP.CP.$$

45. 平行四邊形の條件；—

(1) 2双の對邊が夫々平行なるとき、
(2) 2双の對角が夫々相等しきとき、
(3) 相隣る角が何れも補角なるとき、
(4) 1双の對邊が平行にして等しきとき、
(5) 2個の對角線が互に2等分するとき、

以上は平行四邊形の要件なり。

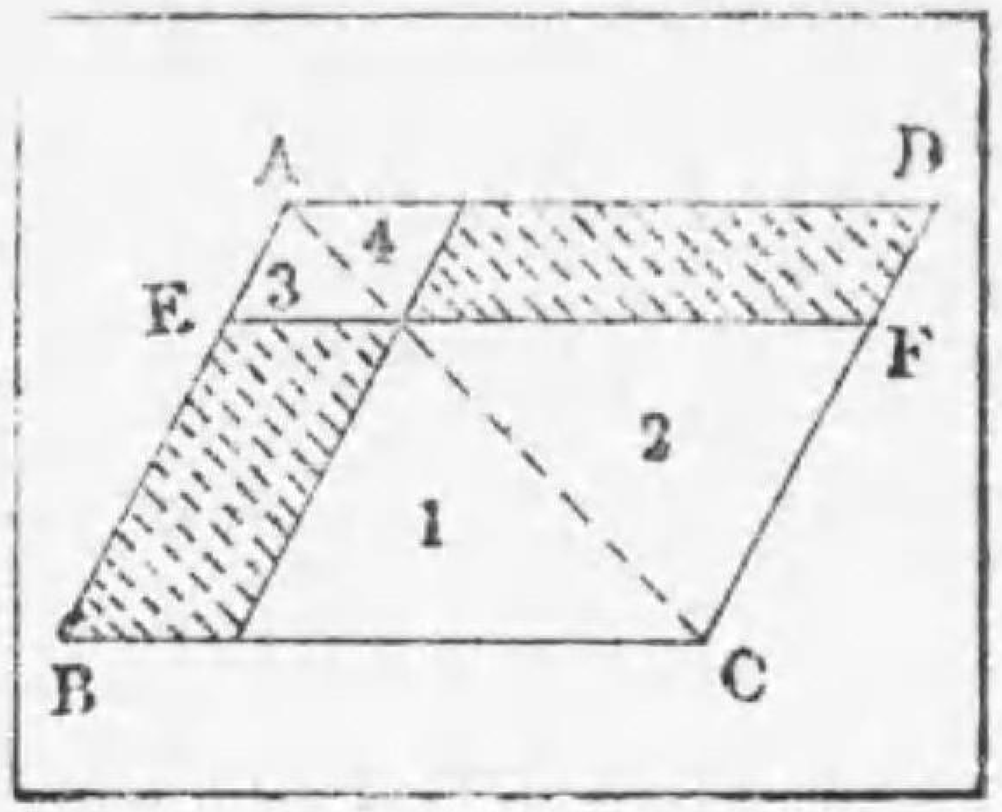
4 6. 梯形； 梯形は1組の對邊のみが平行せる四邊形なり。梯形の平行ならざる2邊の中點を結ぶ線は、他の1双の底邊に平行にして、長さは其和の半分に等し。

【解】 梯形の平行せざる邊の1端より他の邊に

平行に引きて、先づ平行四邊形を作れば、之を證明するを得べし。

47. 平行四邊形の對角線； 平行四邊形ABCDの對角線のAC上の1點Pを過り、各邊に平行にEF. GHを引くとき、平行四邊形の面積、□PB=□PD なり。

【解】 圖に於て、△ABC=△ADC. 又對角線の兩側に陰影せざる面積に就いて、



(1)=(2)、(3)=(4)

∴

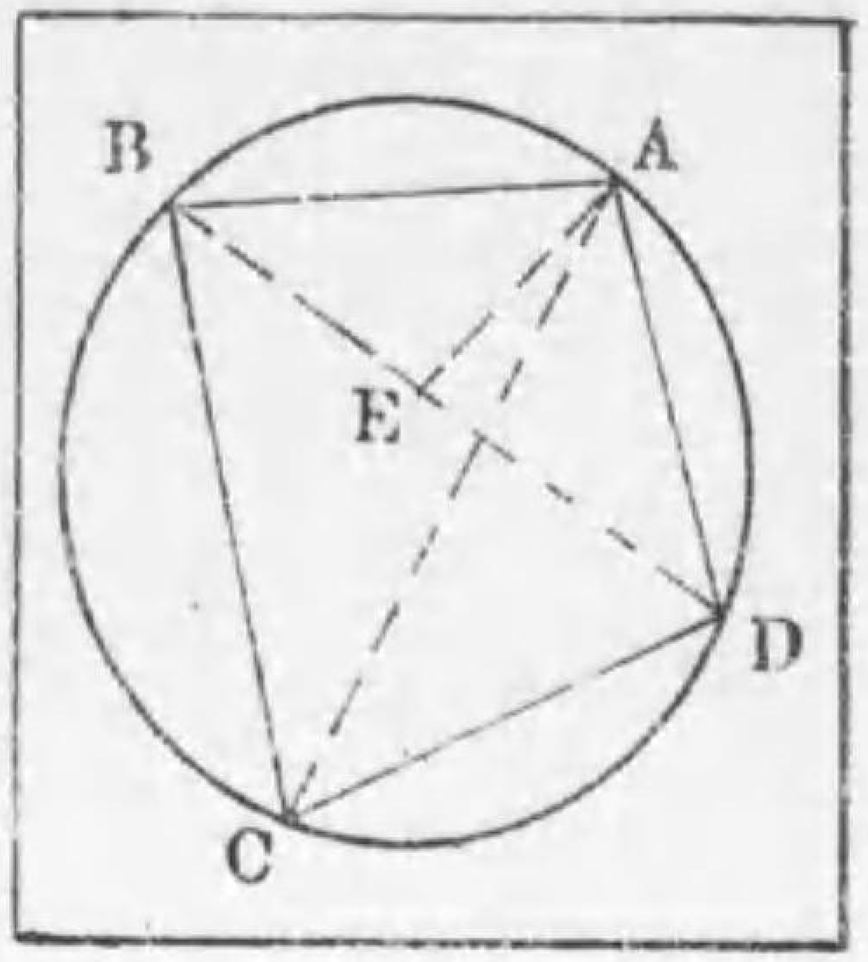
□PB=□PD.

48. 圓に內接する四邊形(1)； 圓に內接する四邊形の相對する邊の積の和は對角線の積に等とし。

【解】 圖に於て、四邊形をABCDとし、對角線AC. BDとするとき、

AB. CD+BC. AD=AC. BD なることを證せよ。

今、∠BAE=∠CAD なる樣 AE を引き、BD との交りを E とす。



然るときは、同一圓弧の上に立つ角の ∠ABE=∠ACD. ∴ △ABE∽△ACD.

然るとき $\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}$. 又は AB.CD=AC.BE‥(1)

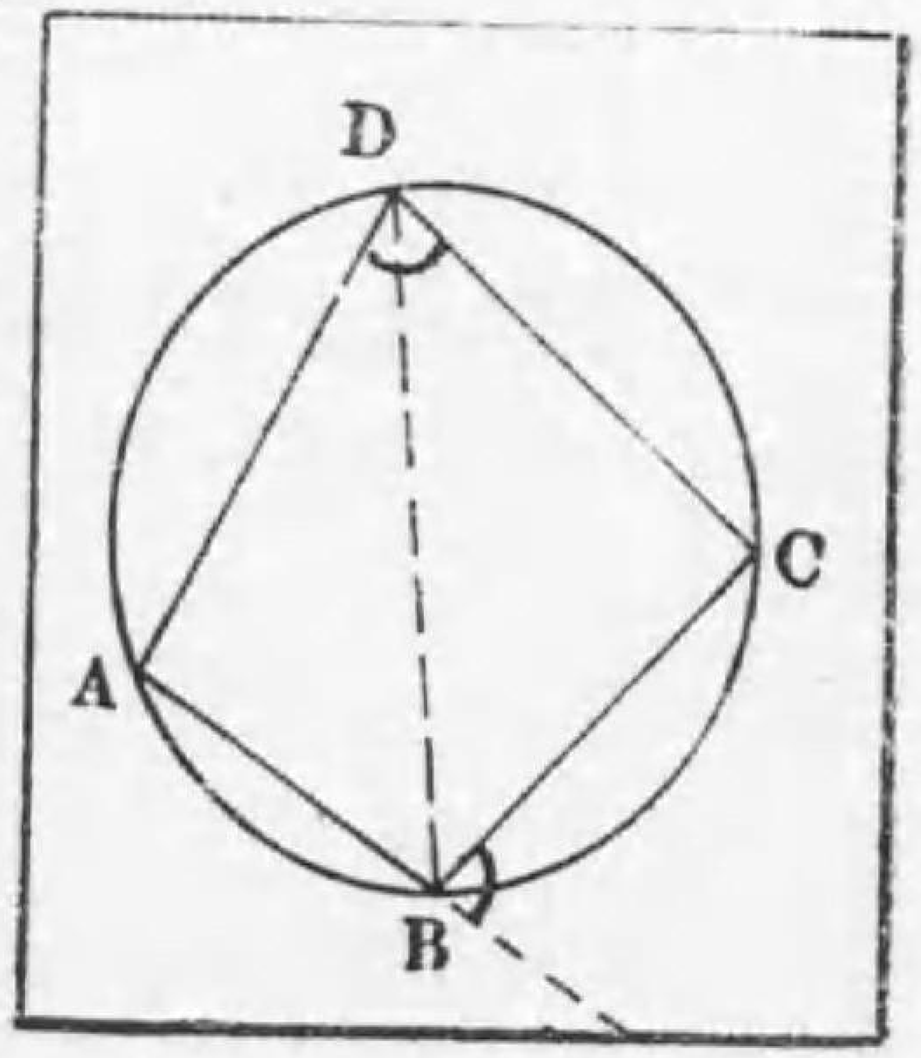
又∠BAC=∠DAE. ∠ACB=∠ADB.

∴ △BAC∽△EAD にして、

BC:AC=ED:AD 又は BC.AD=AC.ED ……(2)

(1)及(2)式を組合はすれば、

AB.CD+BC.AD=AC.BD. ……(3)



49. 圓に內接する四邊形

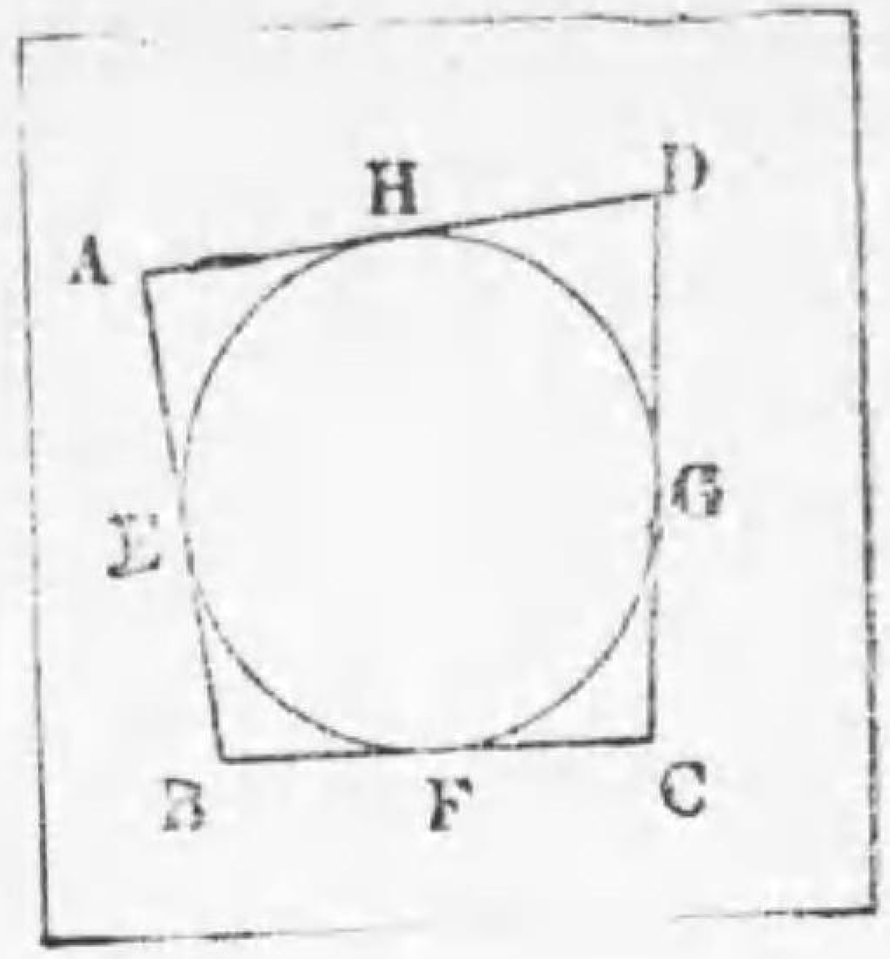
圓に內接する四邊形の相對する角は

互に補角をなし、外角は其內對角に等し。

【解】 四邊形を ABCD とす。今 DB の對角線を結べば、直ちに題意を解することを得。

50. 圓に外接する四邊形; 圓に外接する四邊形の相對する邊の和は相等し。

【解】 四邊形：ABCC. 內接圓：EFGH とす。

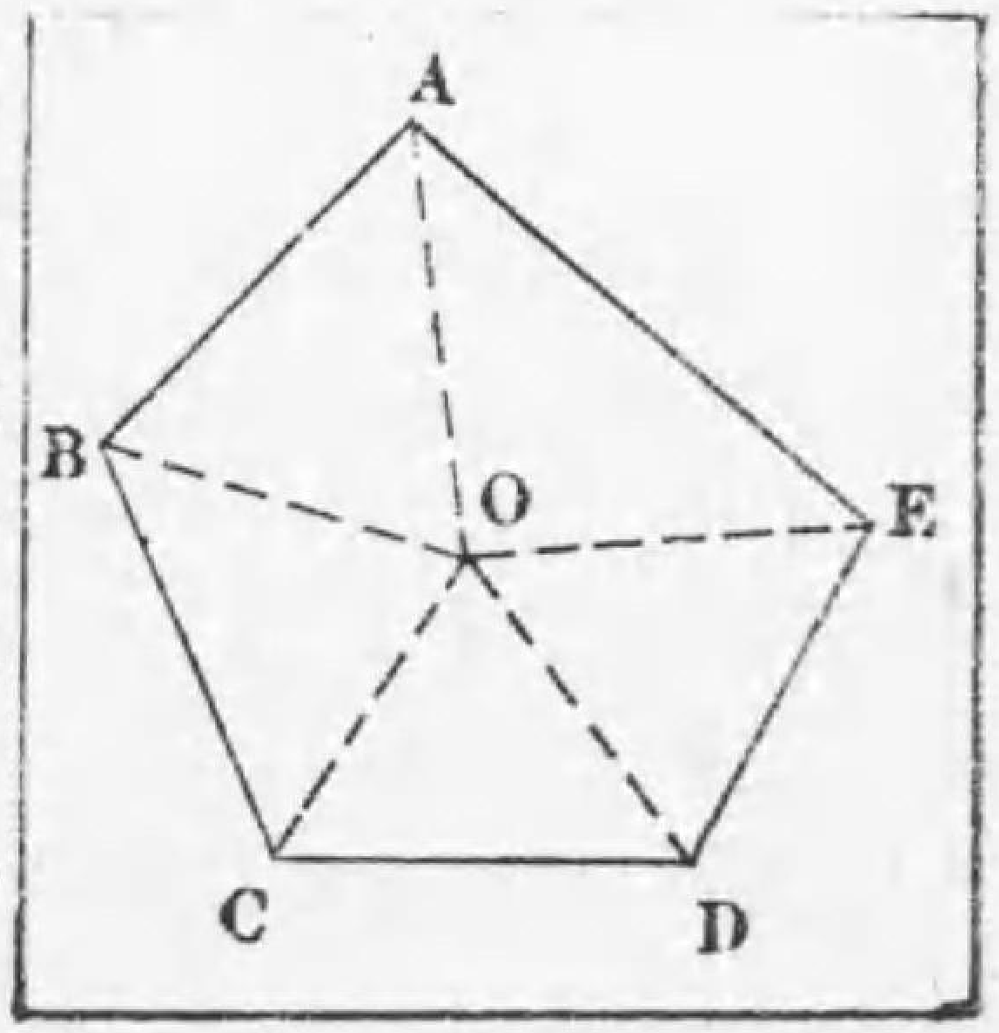


然るときは各邊は、頂點より等長なる切線を引きたるものに相等し。

故に、

AB+CD=BC+AD ……(1)

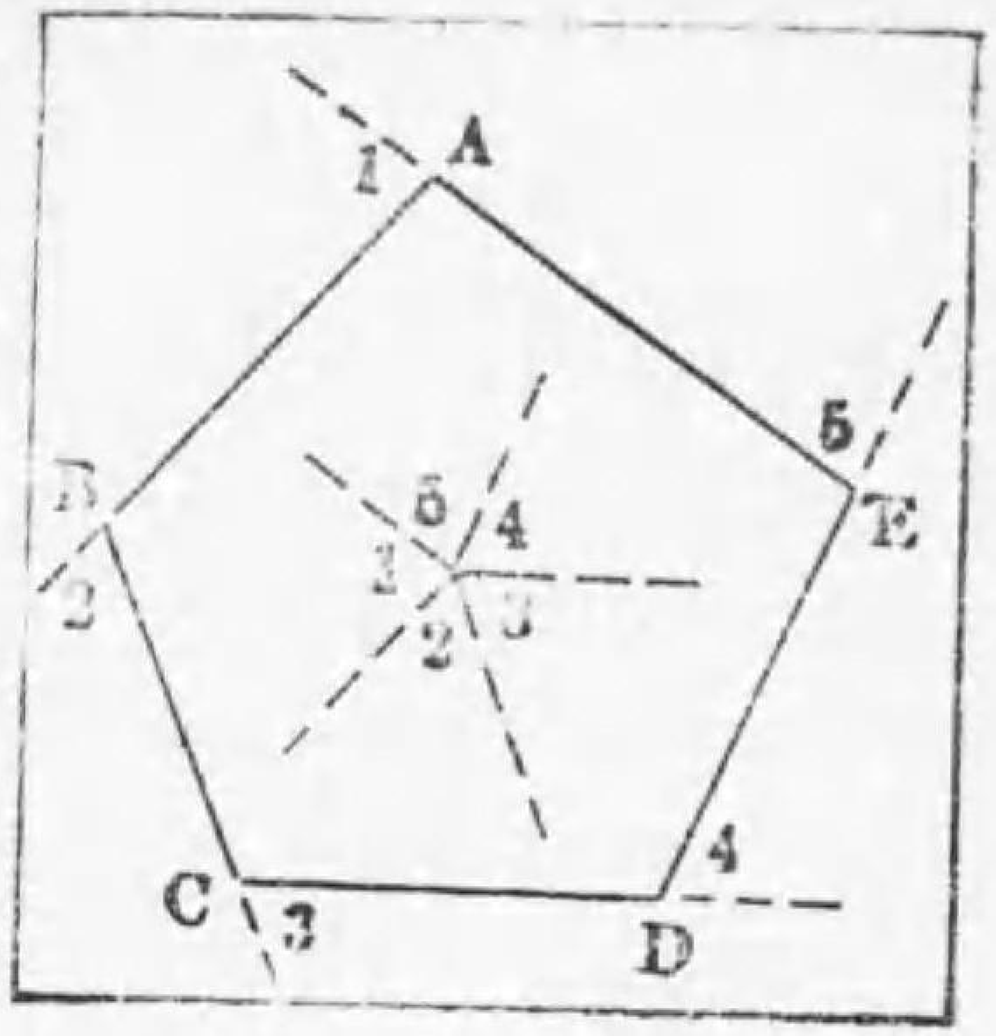
51. 多角形の內角の和; n 邊の凸多角形の內角の和は (2n−4) 直角なり。



【解】 ABCDE を凸多角形と

す。1點0と各項點A. B. C. D. E.とを結び、三角形を作れば、三角形の内角の和は2直角なる故に、一般多角形の内角和は……(2n−4)直角なり。

52. 多角形の外角の和； 多角形の各邊を延次に邊長して生ずる外角の總和は四直角なり。



【解】今、ABDEの各外角を、多角形内の1點0に集むる樣、各邊に平行線を引くとき、其和は四直角なり。故に此定理を生ず。

53. 多角形の面積；—

(1) 三角形の底邊及高が相等しければ等積なり。

(2) 三角形の面積は底邊及高が相等しき平行四邊形の面積の半にひとし。

(3) 梯形の面積は兩底邊の平均と高さの乘積に等し。

(4) 三角形の中線は等積なる2個の三角形に分つ。

(5) a^2 を邊a上の正方形、$a\times b$ を邊a及bなる矩形とせば、一般に次の關係あり。

$$(a+b)c=ac+bc \cdots\cdots (1)$$

$$(a-b)c=ac-bc \cdots\cdots (2)$$

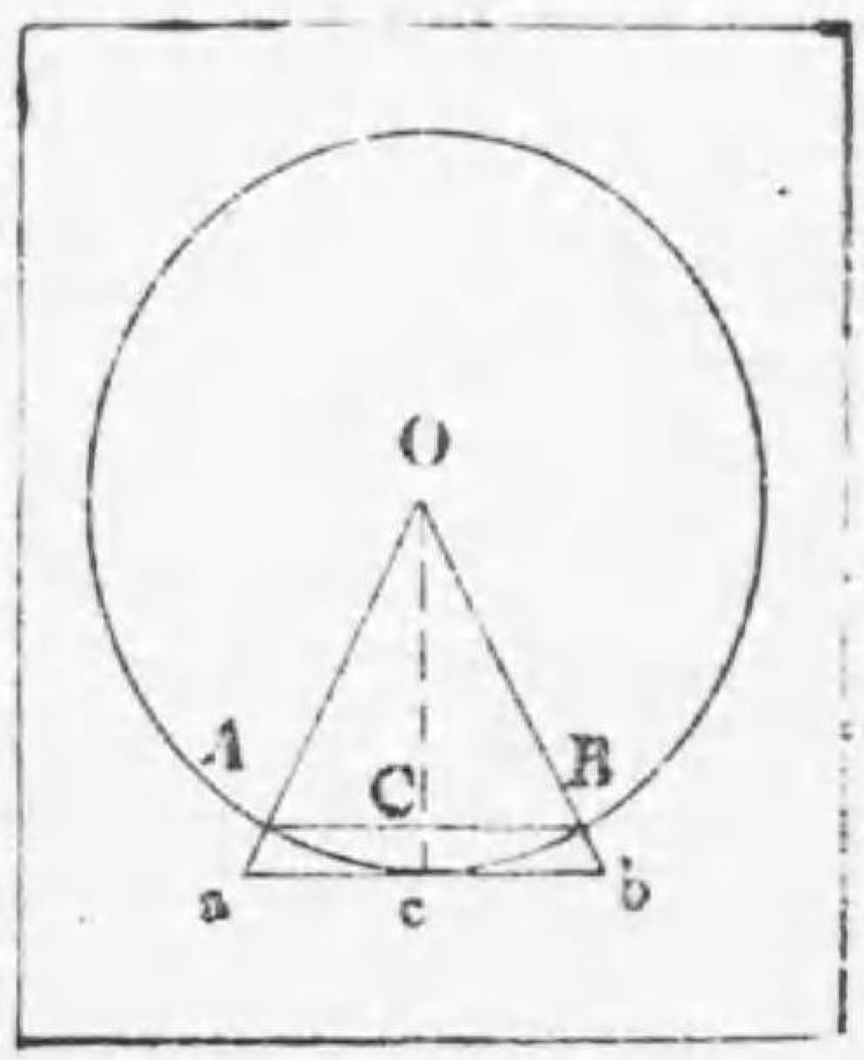
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \cdots\cdots (3)$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \cdots\cdots (4)$$

54. 正多角形の邊(1)； 半徑がrなる圓に内接及外接する正多角形の邊をa及a′とすれば、

$$a'=\frac{a'r}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}} \quad (1)$$

$$a=\frac{a'r}{\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}} \quad (2)$$



【解】圖に於てABを正多角形の内接邊の長さとす。即ち

OA=r AB=a

ab=a′ とせば △OAB∽△Oab

$$\therefore \frac{a'}{a}=\frac{Oc}{OC}=\frac{r}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}} \cdots\cdots (1)$$

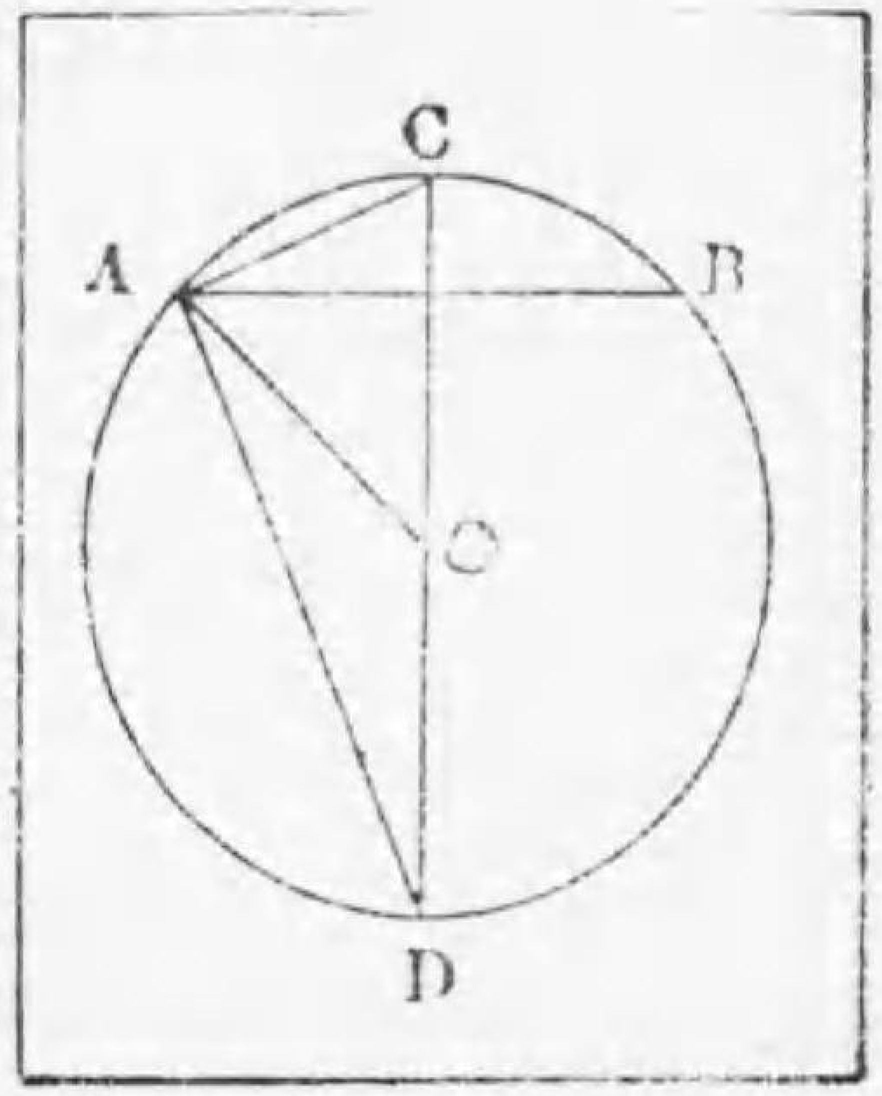
$$\frac{a}{a'}=\frac{OA}{Oa}=\frac{r}{\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

55. 正多角形の邊(2); 半經が r なる圓に內接する正多角形の邊數を倍するときの邊の比を求む。

【解】 正多角形の1邊を a とし、其邊數が2倍なる正多角形の1邊を a' とすれば、

$$a'=\sqrt{2r\left(r-\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}\right)},\quad a=\frac{a'}{r}\sqrt{4r^2-a'^2}$$

【解】 圖に於て、



AB=a AC=r,

AC=a'

然るとき、

$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{CE}^2$

$=CD(OC-OE)$

$\because\ a'^2$

$=2r\left(r-\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}\right)$

又、2△ACD=CD. AE=AC. AD

$\therefore\ 2r\times\frac{1}{2}a=a'\sqrt{4r^2-a^2}$

(1) 及(2)式より a 及 a' を求むることを得。

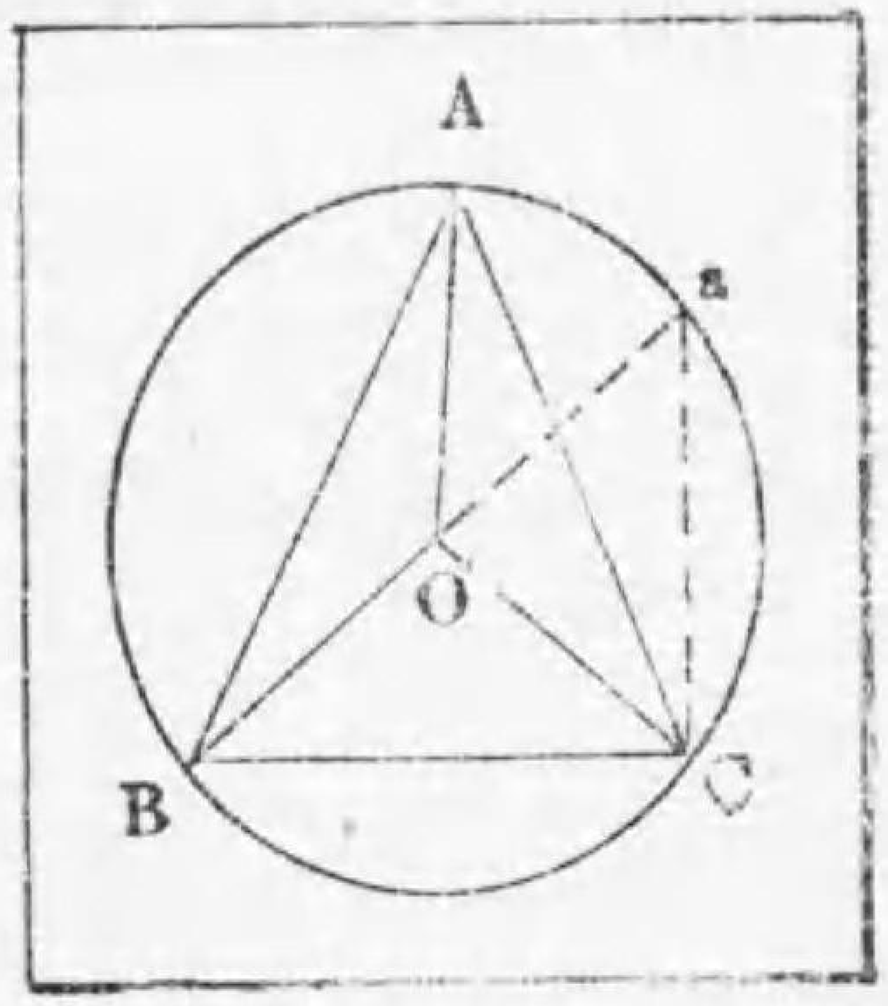
56. 圓外の一點より引く切線;—

(1) 圓外の1點より引ける2個の切線の長は相等し。

(2) 此點と中心とを結ぶ直線は切線のなす角を2等分す。

57. 圓周角; 同じ圓弧の上に立つ圓周角は相等しく、且其中心角の半に等とし。但し特別なる場合として、圓弧が半圓周なるときは、弦は2直角をなすを以て、圓周角は直角となり、半經を斜邊とする直角三角形を作る。

【解】 圖に於て、



圓內の三角形 ABC の各頂點と中心 O とを結び BO を延長す。

然るときは2個の2等邊三角形を得。故に、

$\angle BOC=2\pi-2\phi$

$\angle A=\ 2\pi-2\phi-\angle A$ 但 $\phi=\angle DBC$

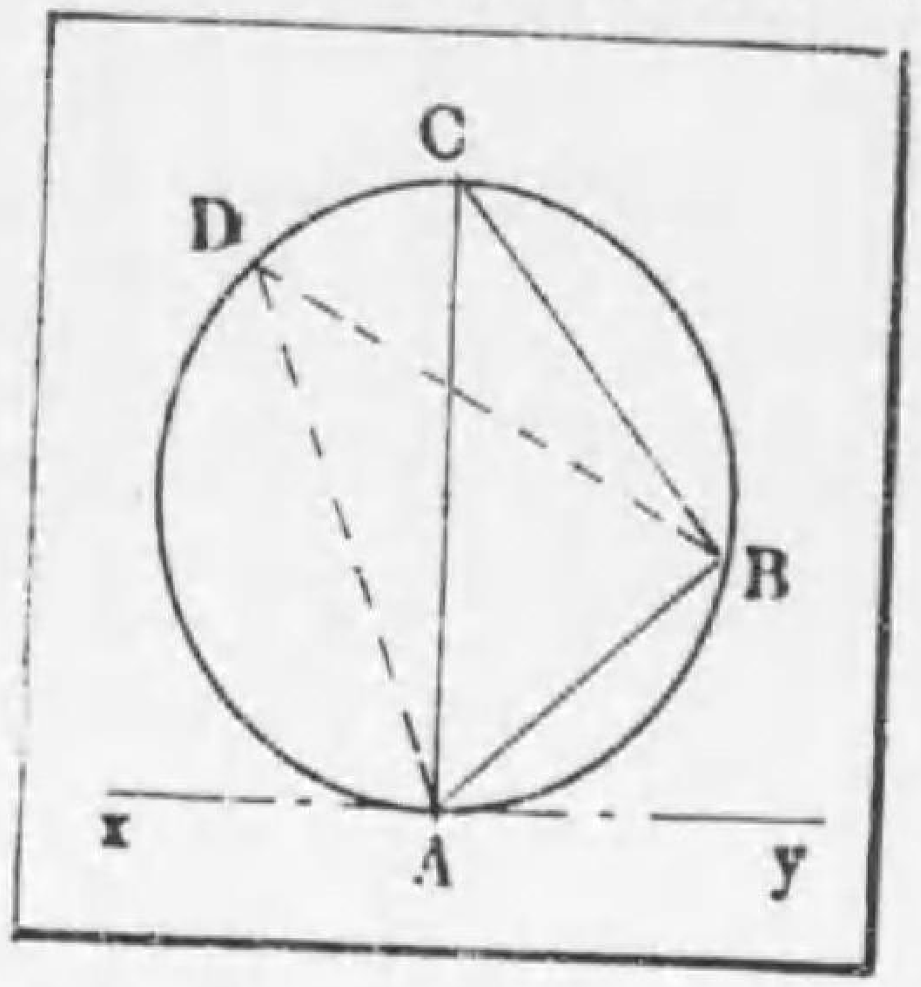
$\therefore\ \angle A=\ \angle BOC-\angle A$

$2\angle A=\angle BOC$

$\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC.$

58. 切線と弦のなす角; 圓の切線と

切點を過る弦とのなす角は反對の側の圓周角に相等し。



【解】 圖に於て切線 XY. 圓を ABC とす。然るとき、

圓周角：$\angle C=\angle BAX$ なることを。證明すること。

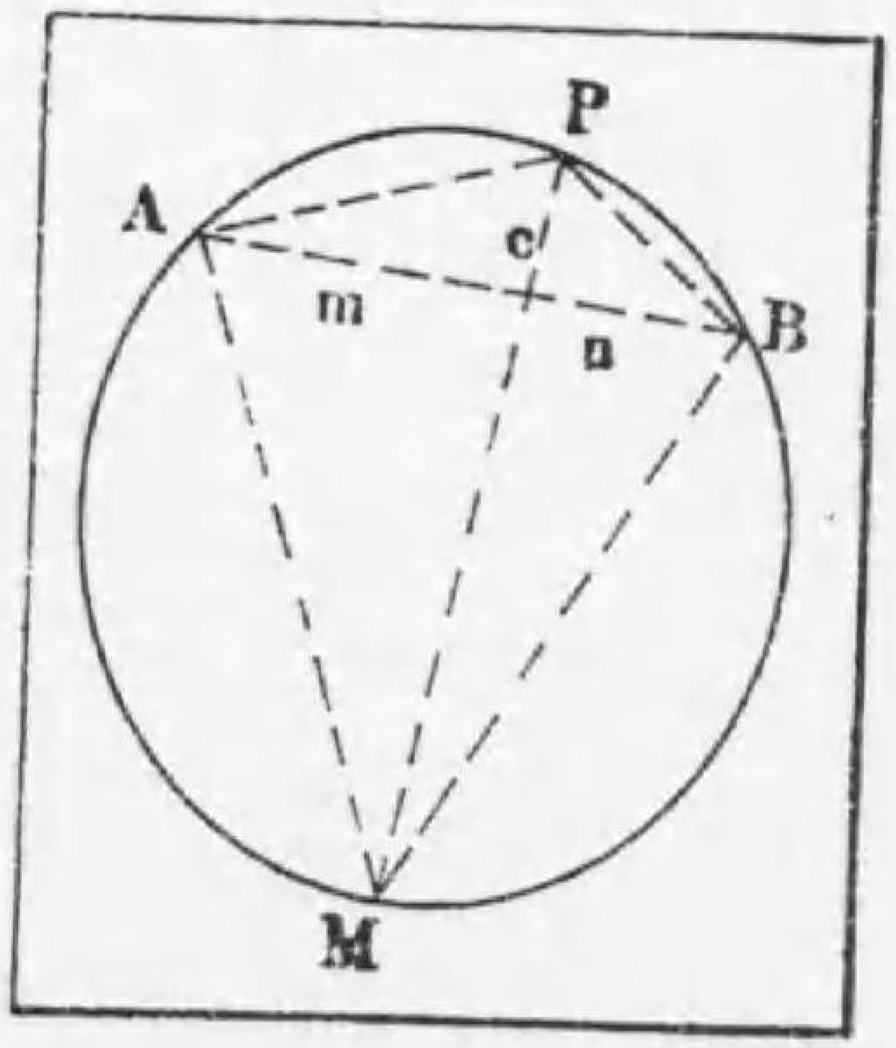
圖に依り、$AC\perp XY$. 今 CB を結ぶ。然るときは、

$$\angle BAC+\angle C=\tfrac{1}{2}\pi.=\angle BAC+\angle BAX.$$

$$\therefore\ \angle C=\angle BAX\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

59. 圓弧の定比分割；

與へられたる圓弧 APB の上に P 點を求め、弦 PA：PB=m：n の定比に分つこと。



【解】 本題は31題の應用にして、PC が ∠P の2等分となり、且つ AC：CB=m：n

の比なることを要す。

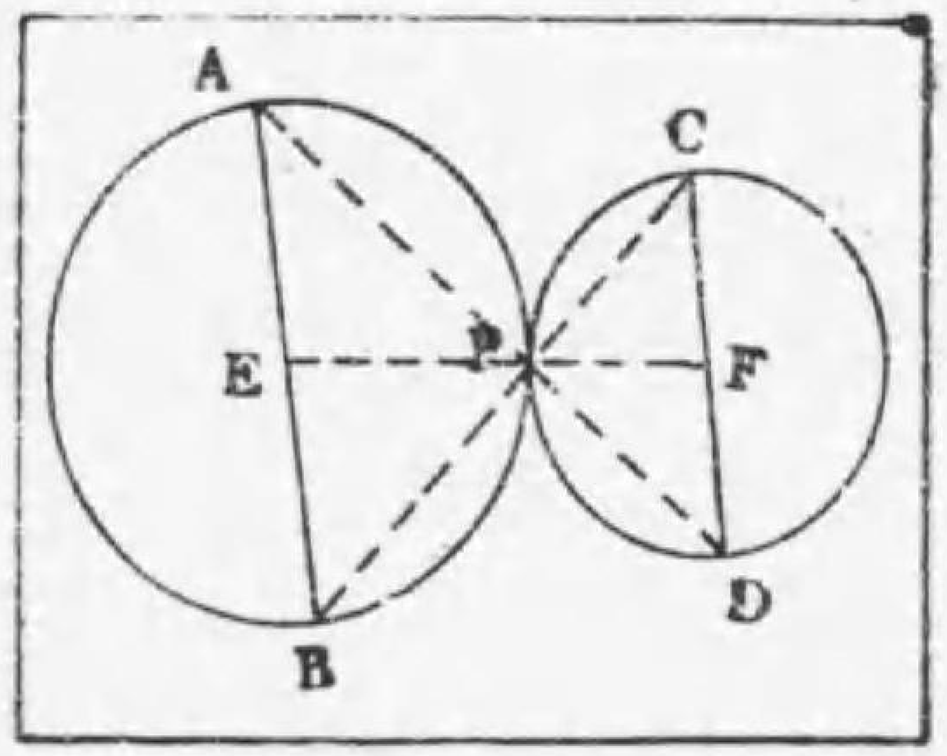
【作圖】 弧 AMB を M に於て2等分し、弦 AB を、

AC：BC=m：n の比に分かつ。MC を結び、其延長が弧と交る點を P とせば、AP：BP=m：n

【證】 作圖に依り、AM=BM なる故に、∠P は MP に依りて2等分せらる。故に此圖法は適法なり。

60. 相切する圓(1)；

2圓が相切するとき、兩圓の直徑が平行なれば其兩端を結ぶ線の內、2個は此切點を通る。



【解】 兩圓を APB. CPD とし E 及 F を各中心とす。今 EF を結べば、切點を通る。次に PD を結べば、

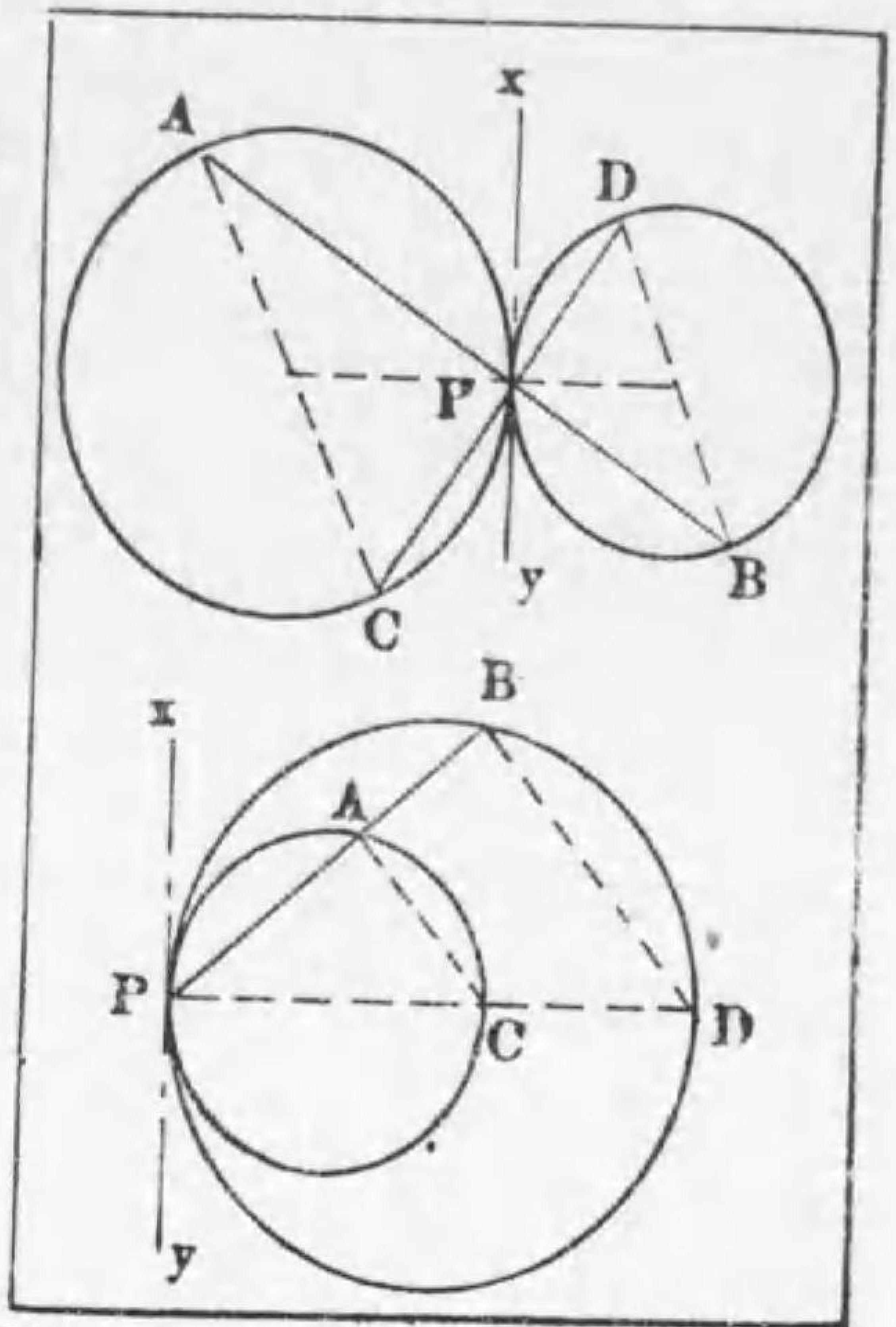
△APE と △DPF は相似形となる故に、AP. PD は一直線上にあることを示めす。

61. 相切する圓(2)；

2圓が相切するとき、切點を過ぎる2ツの割線が、各の圓より切り

取る弧の弦は平行なり。

【解】圖に於てAC及DPが平行なることを證せよ。



今、切線XYを引く。然るとき切線が外接2圓に切するとき、

$\angle A=\angle CPY$

$\angle B=\angle DPX$

$\therefore \ \angle CPY=\angle DPX$

故に $AC \parallel DB$.

次に切線が内接する2圓に切線なるときは、

$\angle A=\angle CPY.\ \angle B=\angle CPY$

故に、$AC \parallel DB$ なり。

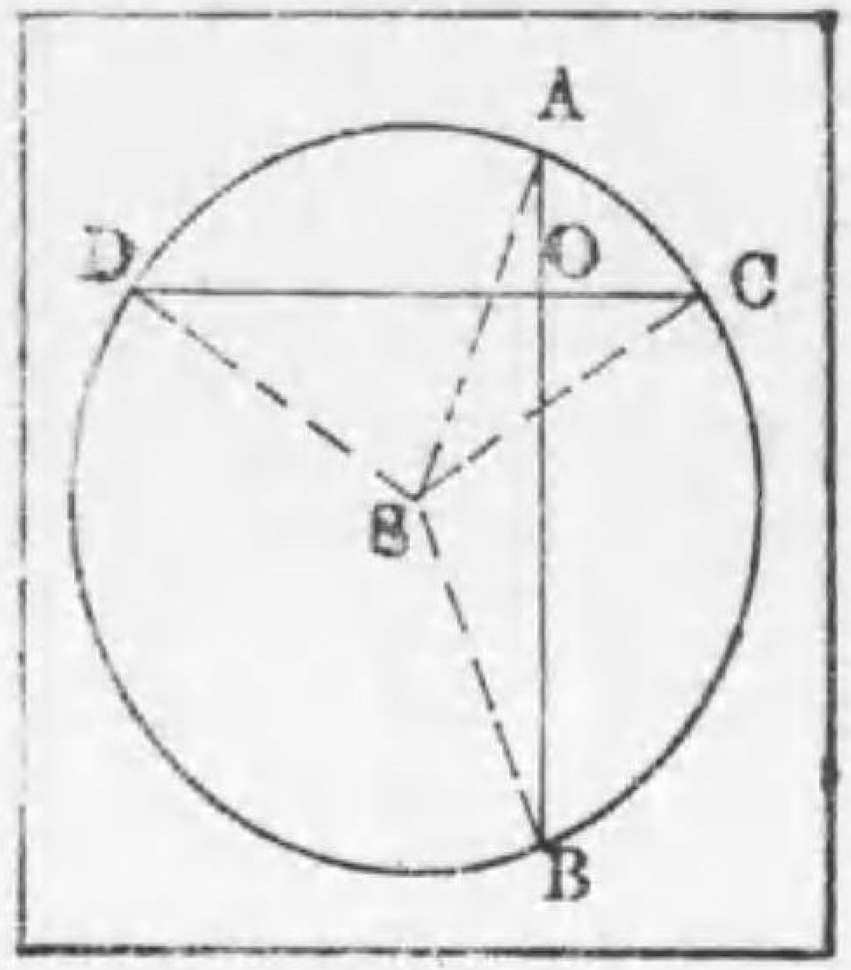
62. 圓と弦との關係； 圓内又は圓外の一點を通る數多の弦が、此點に依りて別たるゝ分

の積は相等し。

【解】Oを1點とし、之を過ぎる直線をAB及DDとす。然るとき

$OA.OB=CO.DO$

なることを證せよ。



圓の中心をSとし、半徑をRとす。中心とA.B.C.Dの各點とを結ぶ。然る時、

△ABS及△CDSの2個の三角形は2等邊なり。

故に、$OB.OA=\overline{AS}^2=R^2$

$OC.OD=\overline{SD}^2=R^2$ 故に $OB.OA=OC.OD$.

63. 圓の面積及圓周を求むる公式；

圓の半徑をRとす。

圓周：$S=2\pi R$ ……………………(1)

面積：$A=\pi R^2$ ……………………(2)

茲にπは圓周率と稱するものにして、其値は

$$\pi=\frac{2\text{直角(半圓周の上に立つ角)}}{\text{圓弧を半徑と同等にとりたる中心角}} \quad (1)$$

即ちπは(1)式の如き比にして、分母の如き角の單位を1ラヂアン(Radian)と云ふ。約57°18′.

44″ に當る。π の數値は 3.14159265 ……にして、普通 3.1416 を用ひ、又は $\frac{22}{7}$ or $\frac{335}{113}$ の分數を用ふ。

【解】 π の値は (1) 式の如き比なるを以て、又半圓周と半徑との比、或は圓周と半徑との比なり。

故に 圓周：$S=3\pi R$ ……………… (1′)

次に圓の面積は、圓の中心を頂點として、中心を共有する三角形が多數集合せる面積の總和にして、其三角形の底邊を C. 半徑を R とすれば、三角形の面積は

三角形の面積：$a=\frac{1}{2}CR$.

今 C の長さをなる可く小にとりて無數に集合すれば、遂に圓周と同一の長さとなる。

故に圓の面積＝圓周×半徑×$\frac{1}{2}$ ……… (3)

(3) 式より、圓の面積：$A=\pi R^2$ ……… (2′)

64. 二次方程式圖式解法； 二次方程式は圓の問題を應用して、幾何學的に解するを得。

【解】 二次方程式の根を α 及 β とすれば、

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha)(x-\beta)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}(1)$$

(1) 式を變形すれば (2)式を得。

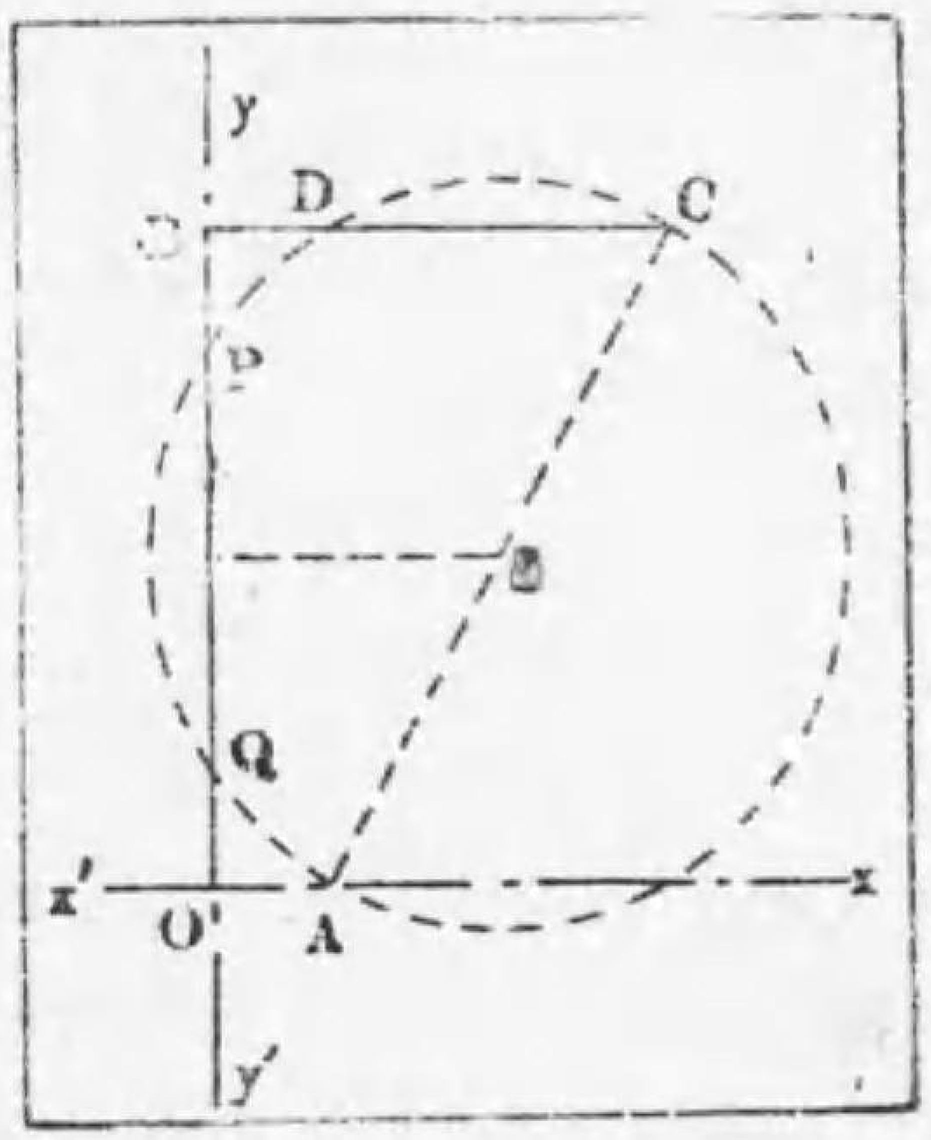
$$\left.\begin{array}{l}x^2-px+q=0 \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p=-(\alpha+\beta) \quad q=\alpha\beta \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}(2)$$

(2) 式を圖法の基礎とす。

縱軸 yy′ より右方を(＋)記號、左方を(－)記號、

横軸 xx′ より上方を(＋)記號、下方を(－)記號、

XY 兩軸を原點とし、其位置の値を O とす。



【圖法】 次の順序に x^2.x の係數を採る。

(1.) x^2 の係數を OA=I にして(＋)側にとる。

(2.) x の係數 p を OB にとる。但 −p のときは(＋)側にとり、＋p のときは(－)側にとることを要す。之は x の係數が、α 及 β が正號なれば $-(\alpha+\beta)$ となる故なり。

(3.) q の値を BC にとる。但し q の正負と、BC の正負は一致せしむ。

(4.) AC を結び、AC を直徑とする圓を書き、

Y軸と圓周との交りをP.及Qとす。然るとき
$OP=\alpha$. $OQ=\beta$ の2根を得。

但、P及Qの原點よりの位置は2根の正負を示めす。

【證】 圖法に依りて、$OP=QB$. $DB=OA$ なる故、

$$OP+OQ=OP+QD=\alpha+\beta.$$

而して、$\alpha+\beta$は其位置を反對にとりたる故 $-p$ なり。

次にO及B點は圓心Sより等距離にして、OB. BCの2線は定點を過ぎる割線なる故62題の定理に依り、

$$OP.OQ=BD.BC=\alpha\beta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\therefore\ BD.BC=BC.OA=q\times 1=\alpha\beta\cdots\cdots (2)$$

(1)及(2)式より此圖法は二次方程式の解として適法なるを得。玆に圓周を書きたるとき、XY軸を適當に交はらざるときは、α及βは虚根なり。

5. 立體幾何

1. 平面を決定する條件; 平面の決定とは、數個の直線、又は點を含む平面が唯一つあり、且唯一つに限るときに、此等の直線又は點が、其平面を決定すると云ふ。其條件に次の4項あり。

【1】 一直線と此直線外の一點とは平面を決定す。

【2】 同一の直線上にあらざる三點は平面を決定す。

【3】 相交はる二直線は平面を決定す。

【4】 平行なる二直線は平面を決定す。

2. 平面の交り。交線及平行: 2個の平面が唯一ツの直線を共有するときは、2平面は相交ると云ひ、其直線を交線と云ふ。玆に2平面が直角に交はるときは、直交と云ひ、然らざるとき、斜交と云ふ。

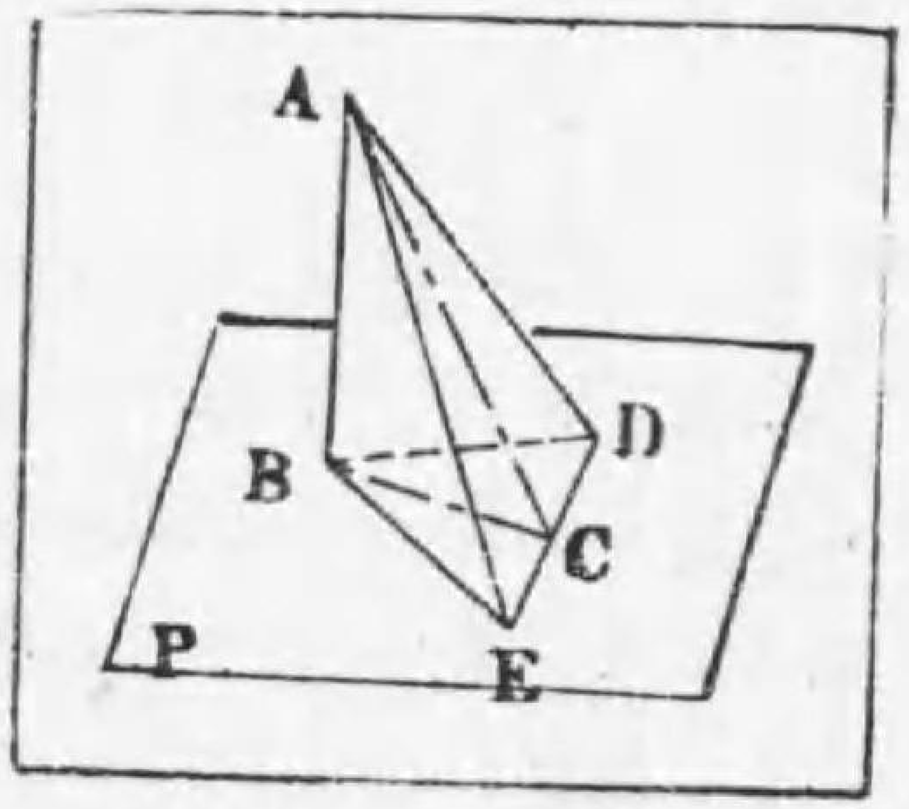
二平面が全く共有線を有せざるときは、此二平面は平行と云ふ。

3. 同一平面上にあらざる二直線の

角：同一平面上にあらざる二直線の角とは、任意の點より之れ等に平行に引ける二直線の角なり。

4. 平面の垂線、斜線及直線の足 一平面に交はる直線が、其交點を通過する此平面上の總ての直線に垂直なるとき此の直線を垂線と云ふ。垂線に非ざるものを斜線と云ふ。又直線と平面との交點を此直線(垂線又は斜線)の足と云ふ。

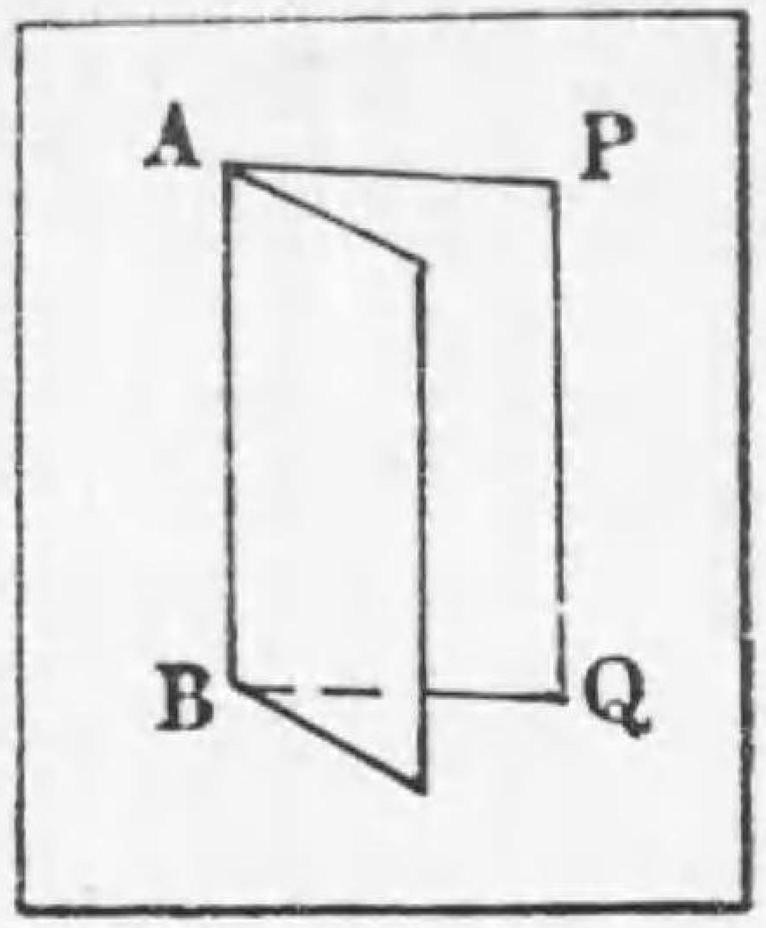
5. 二點間に等距離の軌跡： 2定點より等距離に在る點の軌跡は、其2點を結ぶ線分の中點を過ぎて、之に垂直なる平面なり。茲に1點と1平面との間の垂線の長さを1點と1平面間の距離と云ふ。



6. 三垂線の定理： 平面(P)の垂線(AB)の足(B)より、此平面上の任意の直線(DE)へ垂線(BC)を引くとき、第二の垂線の足(C)と第一の垂線上の任意の一點(A)とを結ぶ直線(AC)は平面上の此直線(DE)に垂直なり。

7. 平行二平面間の距離： 平行せる2平面間の距離とは、其間に夾まれたる垂線の部分の長さを云ふ。

8. 二面角、稜及面： 同一の直線にて終る2ツの平面よりなる圖形を二面角と云ひ、此直線を其稜と云ふ。又各の平面を其面と云ふ。



二面角は圖の如くABQの平面がABを軸とし、PABの位置迄廻轉したるものと考へらる。此廻轉角を二面角の大さと云ふ。

9. 二面角の種類： 相交はる2平面は四ッの二面角を形る。此二面角の互に相隣る2個を隣接二面角と云ひ、其他の二面角の名稱は、直線の交はりに於ける角の名稱を應用す。

即ち直線の交りに於ける直角、補角、餘角、鋭角、鈍角、は此儘二面角の名稱に用ふ。特に命名するもの如次。

【直線に於ける名稱】　【二面角の名稱】

對頂角…………………對稜二面角
錯　角…………………錯二面角
同位角…………………同位二面角

10. 二面角の平面角： 二面角の平面角とは、其稜中の1點より各面上にて稜に垂直に引ける直線間の二面角內にある角なり。

11. 正射影： (a) 平面上に投する1點の正射影とは此の點より此平面に下せる垂線の足なり。

(b) 又一平面上に投する線の正射影とは此線上の總べての正射影の軌跡なり。

12. 直線と平面との角： 直線と平面とのなす角とは此直線と、其正射影とのなす銳角を云ふ。

13. 多面角又は立體角： 1點を共有し、互ひの2ッ宛が相交はる3個以上の平面よりなる圖形を多面角又は立體角と云ふ。

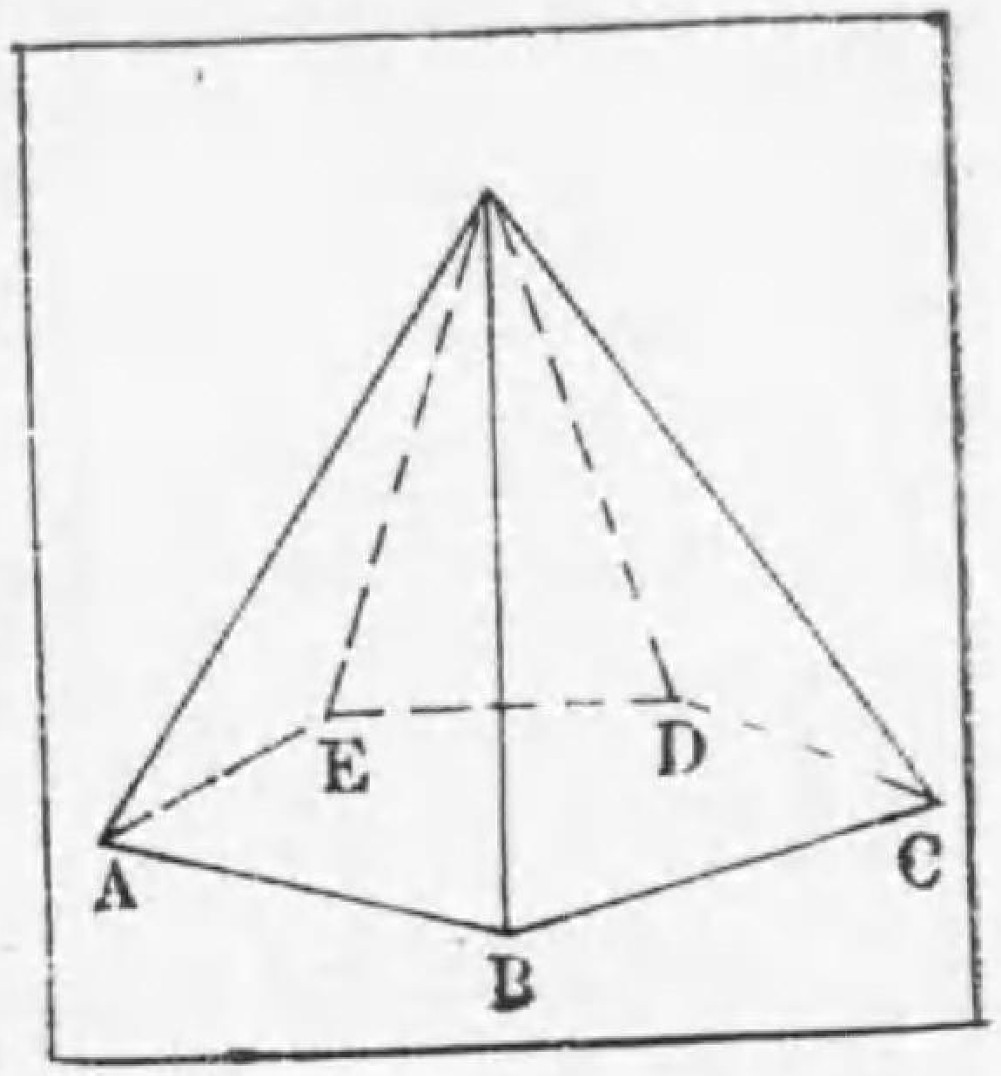
茲に1點を多面角の頂點と云ひ、各平面を其面、交線を稜、及稜間の角を其面角と云ふ。又各2面間の多面角の內部にある二面角を其稜角と云ふ。

(註) 多面角をなせる平面は皆隣接せる2面の交線にて終るものと見做す。多面角は其面の數に

依りて三面角、四面角、五面角等と名稱す。

14. 對頂多面角： 對頂多面角とは2ッの多面角が頂點を共有し、且つ1ッの多面角の稜の延長が、他の多面角の稜と一致したる、相對せる多面角を云ふ。

15. 截面 or 底面： 多面角の總べての稜を切る可き平面を作れば、此面と各面との交線は、多角形をなす。之を多面角の截面 or 底面と云ふ。



茲に截面が凸多角形なる多面角を凸多面角と云ふ。

【例】 五面角の圖にて之を記するには、O - ABC DE とす。但Oは頂點、OA、OB …… は其稜、AOB, BOC …… は面角、及 ABC(AB, BC⊥OB なるとき) は稜角なり。

16. 多面角の定理：—!

【1】 三面角の2ッの面角が相等しければ、之

に對する稜角も亦相等し。逆も眞なり。

【2】 三面角の各面角は、他の面角の和より小なり。

【3】 凸多面角の面角の和は4直角より小なり。

17. 多面體: 數個の平面にて圍まれたる立體を多面體と云ふ。

【1】 多面體の限界は多角形にして、之等の多角形を面と稱し、其邊及頂點を夫々多面體の稜及頂點と云ふ。

【2】 多面體の同一の平面上にあらざる頂點を結びたる直線を對角線と云ふ。

【3】 多面體の最小限は四面體なり。此上に五面體、六面體等ありて、多面體と通稱するは此等の凸多面體のみに云ふ。

【4】 正多面體の解說:—

F＝面の數　　n＝各面の邊の數

V＝頂點の數　　m＝各點に會する稜の數、

E＝稜の總數………………とすれば

名　稱	F	n	V	m	E
正4面體	4	3	4	3	6
正6面體	6	4	8	3	12
正8面體	8	3	6	4	12
正12面體	12	5	20	3	30
正20面體	20	3	12	3	30

【註】 圓壔、圓錐、球を曲面體と云ふ。

18. 角壔: とは2面平行にして、他の面は同一直線に平行なる多面體なり。(a) 平行せる2面を角壔の底面と云ひ、(b) 側面の光線を側稜と云ひ、(c) 兩底面の距離を角壔の高さと云ふ。(d) 角壔の種類には三角壔、四角壔、五角壔等あり。

【1】 直角壔とは側稜が底面に垂直なる角壔にして、然らざるものを斜角壔と云ふ。

【2】 正角壔とは底面が正多角形なる直角壔を云ふ。

【3】 斜角壔の傾きとは側稜と底面の垂線との角なり。

【4】 平行六面體とは底面が平行四邊形なる角壔なり。

【5】 平行六面體の底面が矩形なるとき、直角平行六面形 or 直方體と云ふ。

【6】 直方體の稜が皆相等しきものを正六面體 or 立方體と云ふ。

【7】多面體の截面とは1ツの平面が其多面體の面と交りて生ずる多角形にして角壔の直截面とは側稜に垂直なる截面なり。

【8】角壔の側面積は直截面の周と側稜との積なり。

【9】直角壔の側面積は其底面の周と高さの積なり。

【10】角壔の體積：(a) 斜角壔の體積は其直截面を底面とし、其稜を高さとする直角壔と等積なり。(b) 斜角壔の體積は又其底面と高さの積と云ふを得。

今、底面積：A. 稜の長：H 高：h 傾斜：θ とすれば、

(a) 體積：$V=A\cos\theta\times H=A\times H\cos\theta$ ··(1)

(b) 體積：$V=A\times h=A\times H\cos\theta$.······(2)

19. 角錐： とは1ツの多角形と、其邊を夫々底邊とし、其平面外の1點を共通なる頂點とする三角形を以て圍む多面體なり。(a) 底面外の1點を角錐の頂點と云ひ、(b) 之に對する面を底面と云ひ、(c) 頂點より底面に下せる垂線の長を角錐の高と云ひ、(d) 頂點に集まる稜及面を夫々角錐の側稜及側面と云ふ。

【1】正角錐とは角錐の底面が正多角形をなし、其底面の中心を足とする垂線の上に頂點を有する處の多角體なり。

【2】正角錐の側面は等邊三角形なり。

【3】正角錐の頂點より底面の1邊に下せる垂線の長さを其斜高と云ふ。

【4】角錐を其底面に平行なる平面にて切りたる截面は、底面に相似形を得。其面積の比は、之より頂點迄の距離の2乘に比例す。

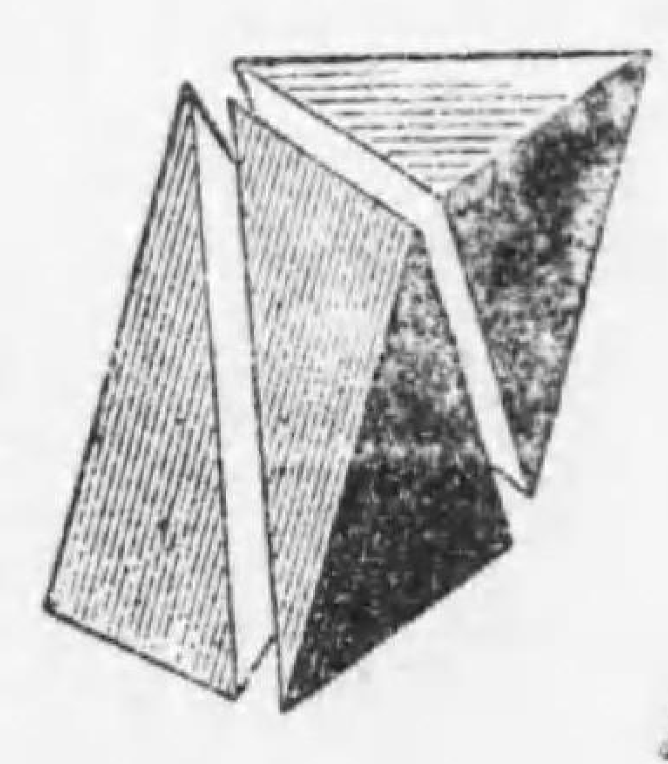
【5】高さの等しき2個の角錐を同じ高さにて底面に平行なる截面を作れば、其面積の比は各底面の比に等とし。

【6】正角錐の側面積$=\frac{1}{2}\times$(底面周)$\times$(斜高)

【7】三角錐の體積は其底面(A)と高さ(h)との積の3分の1にひとし。卽ち

體積：$V=\frac{1}{3}Ah$ ····················(3)

【證】圖の如く三角壔を3ツに分割すれば、互ひに等底等高の三角錐を得。然るに三角壔の體積は、底面に高さを乘じたる



46

ものに等とし。故に(3)式の結果を得。

【8】一般に角錐の體積は底面と高さの積の3分の1にひとし。

20. 角錐臺： とは角錐の底面に平行なる截面と、底面との間にある角錐の部分なり。(a)截面及底面は何れも角錐臺の底面と云ふ。(b)兩面間の距離を高さと云ふ。(c)正角錐臺の場合、兩面上平行なる2邊間の距離を斜高と云ふ。

【1】正角錐臺の側面積は、其兩底より等距離にある截面の周と、斜高との積にひとし。

【2】角錐臺の體積は兩底(a^2及b^2)と其比例中項との和に、高さ(h)を乘じたるものゝ3分の1なり。

即、體積：$V=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$ …………(5)

【證】角錐臺は角錐の差なる故に、今角錐臺の高hを、各角錐の高さの差(H−k)と見做し、h=H−kとするとき、

體積：$V=\frac{1}{3}Ha^2-\frac{1}{3}kb^2$ ……………(6)

然るに底面の比は高さの2乘に比例する故、

$H^2:a^2=k^2:b^2$ ……………………(7)

$$\frac{a}{H}=\frac{b}{k}=\frac{a-b}{H-k}=\frac{a-b}{h} \quad \cdots\cdots(8)$$

(6)及(8)式より、

$$V=\frac{a^3h}{3(a-b)}=\frac{b^3h}{3(a-b)}=\frac{h(a^3-b^3)}{3(a-b)}$$

$$=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2) \quad \cdots\cdots(9)$$

21. 直圓壔： とは矩形が其1邊を軸として廻轉し、原位置に歸りたるとき、他の3邊の廻轉によりて生ずる面にて圍まるゝ立體を云ふ。(a)直圓壔の軸に垂直なる兩面を底面と云ふ。(b)廻轉に依りて生ずる面は曲面にして、之を側面と云ふ。(c)廻轉せる軸の長さを直圓壔の高さと云ふ。(d)軸に對し他の邊の各の位置を側面の母線と云ふ。

【1】直圓壔の側面積は底面の圓周と高さとの積なり。即、底面圓の半徑をR、高さをHとせば、

側面積：$a=2\pi RH$ ……………………(10)

同樣にして兩面積を加へたる全面積を求むれば、

全面積：$A=2\pi(R+H)R$ …………(11)

【2】直圓壔の體積は底面(A)と高さ(H)との積なり。即、底面の半徑をRとせば、

體積：$V=A\times H=\pi R^2H$ …………(12)

22. 直圓錐： とは直角三角形が其直角の1邊を軸として廻轉するとき、斜邊及他の1邊に依りて生ずる面にて圍まるゝ立體なり。茲に(a)軸の長を直圓錐の高さといふ。(b)軸に垂直

なる邊の廻轉によりて生ずる面を底面といふ。(c)斜邊の長さを直圓錐の斜高と云ふ。(b) 斜邊の廻轉に依りて生ずる面を其側面と云ふ。(c) 斜邊の各の位置を側面の母線と云ふ。(f)各母線の交はる點を直圓錐の頂點と云ふ。

【1】 直圓錐の側面積は底面の圓周と斜高との積の半に等し。卽ち底面の半徑:R. 斜高:K とせば、

側面積:$A=\frac{1}{2}\times 2\pi R\times K=\pi RK$ ……(13)

次に直圓錐の高さを H として底面を加へたる全面積は、次の如し。

全面積:$S=\pi RK+\pi R^2=\pi R(K+R)$ ……(14)

但、$K=\sqrt{H^2+R^2}$ ……………(15)

【2】 直圓錐の側面積は高さの中點を通過する底面に平行なる截面の周と、斜高との積にひとし。(系)

本體は公式 13 より知り得る關係なり。

【3】 直圓錐の體積は底面と高さの積の 3 分の 1 にひとし。卽ち直圓錐の底面半徑:R 高:H とせば、

體積:$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$ ……………(16)

23. 直圓錐臺: とは直圓錐の底面と、之に平行なる截面の間に夾まれる圓錐の部分なり。

之を次の如く云ふを得。(a) 梯形の 1 邊が其兩底に垂直なるとき、此邊を軸として廻轉し、原位置に歸るとき、他の邊が作る面にて圍む立體なり。茲に (b) 軸に對する他邊の長を其斜高と云ふ。

【1】 直圓錐の側面積は兩底面の圓周の和と斜高との積の 2 分の 1 に等し。又は、軸を垂直に 2 等分する截面の圓と斜高との積に等し。

【2】 直圓錐臺の體積は次式にて表はさる。

兩底面の半徑:R 及 r. 高:H

體積:$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$ ……(17)

此式は公式 (5) と類似の式なり。

24. 球: とは半圓が其直徑を軸として廻轉し、原の位置に歸るとき、其弧の生ずる曲面にて圍む立體なり。茲に (a) 此曲面を球面と云ふ。(b)原圓の中心、半徑、直徑を夫々球の中心、半徑、直徑と云ふ。(c) 直徑の兩端を球の對點と云ふ。

【1】 球の截面:1 ツの平面が球面と交れば、其交線は圓周なり。 今、球の半徑:R 截面の半徑:r、其兩中心距離:d …とすれば、

$r^2=R^2-d^2$

【2】 球の中心を通過する截面を球の大圓と云ひ、然らざるものを小圓と云ふ。

【3】 球の大圓又は小圓の中心を過り、其面に

垂直なる直線を此圓の**軸**と云ふ。

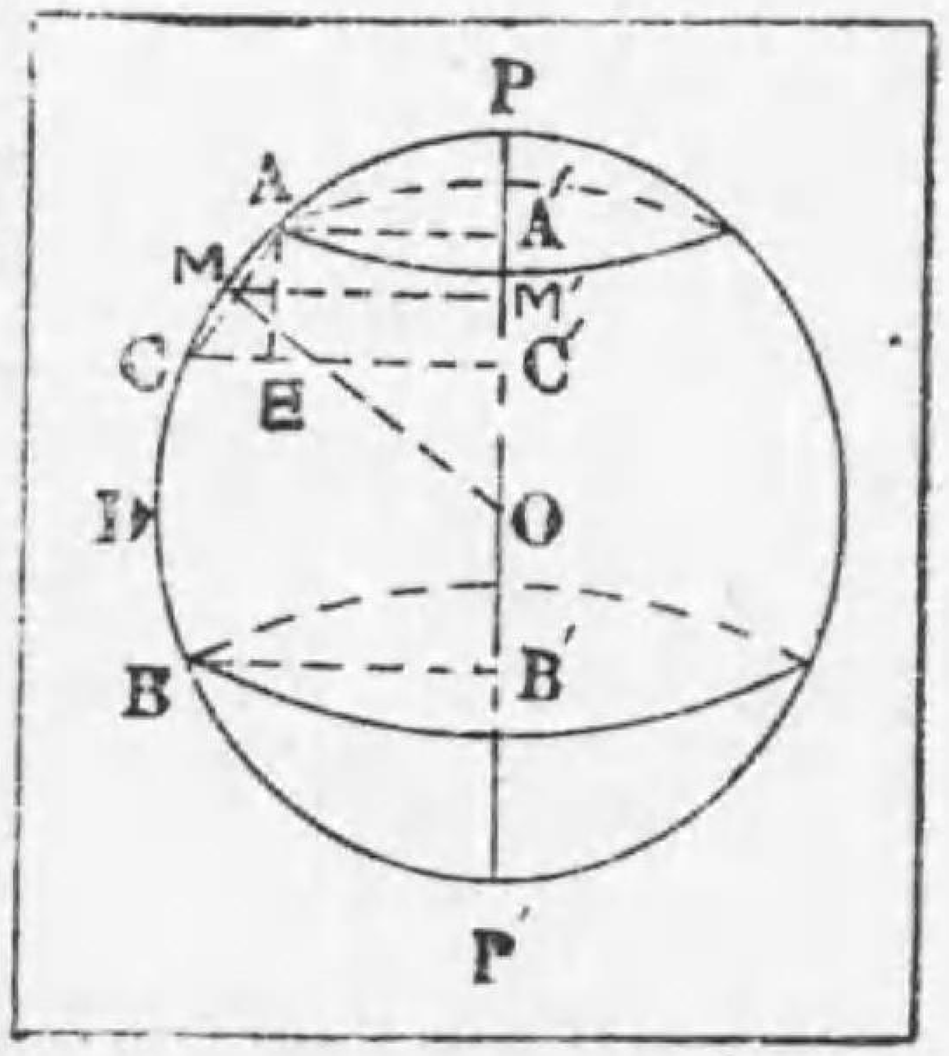
【4】 此軸と球面との2交點を**極**と云ふ。

【5】 直線又は平面が、球と只1ッの點を共有するときは之を**相切**すと云ひ、此點を**切點**と云ふ。又線或は平面を**切線**又は**切平面**と云ふ。

【6】 球と球とが只1ッの點を共有するときも、此點を**切點**と云ひ、其切する方法に依り、**內接**又は**外接**と云ふ。

【7】 **球の表面積**は直徑と大圓周との積に等とし。之を解するに、圖に於て、中心Oなる圓の直徑PP′を軸とし、弧 PCP′ を廻轉したる球と見る。

今、弧PCP′の1小部分ACを取りて、弦ACに垂直なる半徑OMを引き、PP′上に各射影A′.C′.M′をとる。



然るに弧ACの廻轉に依りて出來る曲面は、直圓錐臺の側面積と見るを得る故に、

曲面 : $a=2\pi MM'.AC$ ……………(19)

次に垂線 AE を引けば、

$$\frac{AC}{AE}=\frac{OM}{MM'} \quad \therefore MM'.AC=OM.AE \cdots(20)$$

又、$AE=A'C'$ なる故、

$$MM'.AC=OM.A'C' \cdots\cdots(21)$$

(9)及(21)式より、

曲面 : $a=2\pi\ OM.A'C'$ ……………(22)

(22) 式にて、CM は球の半徑なるを以て、2π OM は大圓周なり。故に球の全體の面積は、AC なる弧をなる可く小さくとりたる射影 A′C′ を無數に集めたる總和と大圓周との積となる。

故に、$A=a+a'+a''+\cdots\cdots$

$$=2\pi.OM(A'C'+C'D'+D'E'+\cdots\cdots)$$

$$=2\pi.R.\times 2R=4\pi R^2 \cdots\cdots(23)$$

【8】 **球の體積**: は其表面積と半徑との積の3分の1にひとし。

之を解するに、球の體積は、球の中心を頂點とし、球面の一小部分を底面とする如き三角錐の無數に集合したるものと考ふる事を得。

然るに三角錐の體積 : $V=\frac{1}{3}\times$(底面積)×(高) ……(24) 而して、此場合の高は球の半徑にして一定値なり。此如き三角錐の底面積のみを集合すれば、其總和は球の表面となる故に、球の體積:

V は、

體積：$V=\frac{1}{3}\times$(球表面積)$\times$(半徑)$\cdots\cdots$(25)

今、球の半徑を R とすれば

體積：$V=\frac{1}{3}\times 4\pi R^2\times R=\frac{4}{3}\pi R^3\cdots\cdots\cdots$(26)

25. 球帶： とは平行せる 2 平面の間にある球の部分なり。玆に (a) 2 平面間の距離を球帶の高さと云ひ、(b) 平行せる兩面を底面と云ふ。

【1】 球帶の表面積は其高さと大圓周との積にひとし。此關係は、球の面積を求めたると同樣にして、球の直徑の代りに球帶の高さを用ふれば可なり。

故に球帶の大圓周の半徑：R 高：H とせば

曲面積：$S=2\pi R\times H\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(27)

【2】 球帶の體積は次式にて表はさる。但 R. 及 r＝兩底面の半徑、H＝高

體積：$V=\frac{1}{6}\pi H(H^2+3R^2+3r^2)\cdots$(28)

26. 欠球： とは小圓にて截りたる球の部分なり。玆に小圓を底面と云ひ、其極と底面との距離を高と云ふ。

【1】 缺球の表面積は球帶と同樣にして、

曲面積：$S=2\pi RH\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(27′)

【2】 缺球の體積は球帶に於ける 1 ッの底面の半徑の O なる場合にして、r=O. R 及 H を底面の半徑及高とするときは、

體積：$V=\frac{1}{6}\pi H(H^2+3R^2)\cdots\cdots$(28′)

27. 造酒樽の容積：── 近値算式次の如し。但

口徑：d, 底徑：D. 胴徑：O.

高さ：H $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ とせば

容積：$V=\frac{\pi H}{24}[(d+O)^2+(D+O)^2-O(D+d)]\cdots\cdots$(29)

d=D なるとき、

〃 ：$V=\frac{\pi H}{12}(d^2+dO+O^2)\cdots\cdots$(30)

28. 球面多角形： とは 3 ッ以上の大圓弧にて圍まれたる球面の部分なり。卽椀形のフチが曲線をなす多角形なり。

(a) 其弧を此多角形の邊と云ふ。

(b) 其弧の間の角を此多角形の角と云ふ。

(c) 其弧の交點を此多用形の頂點といふ。

(d) 角は頂點に於ける各弧の切線のなす角を以て測る。

(e) 球面多角形は其邊數に從ひ、球面三角形、球面四角形等と各稱す。

29. 球面三角形： 球面三角形の 3 角の

和は2直角より大にして、6直角より小なり。

【1】 球面三角形の3角の和が2直角より大なる差を球面過剰と云ふ。

【2】 球面三角形の1邊は他の2邊の和より小なり。

【3】 球面三角形の邊と對角とは比例す。

【4】 2ツの球面三角形が順序を反對にして、邊及角が互に相等しきとき、兩形を對稱形と云ふ。

【5】 尙頂點が互ひに對點するとき、對稱形を對頂形と云ふ。

【6】 3角が皆直角なれば、三直球面三角形と云ふ。卽ち球の中心を通して、球を8等分したる球面に相當す。

30. 月形： 2大圓の半圓周にて圍まれたる球面の部分を月形と云ふ。

【1】 2大圓の間の角を月形の角と云ふ。

【2】 等徑の球に於て、2ツの月形の比は其角に比例す。

【3】 等徑の球に於ける月形と球面との比は其角と4直角との比なり。

【4】 月形の面積：今三直球面三角形を單位にとれば球面の$\frac{1}{8}$なる故、$a=\frac{1}{2}\pi R^2$········(1)

月形は球面三角の倍形なるを以て、

月形の面積$=2\times$(月形の角)$\times a$······(2)

31. 球面三角形の面積： 曲面積は其球面過剰に比例す。

【解】 今、球面三角形、ABCの各角を$x.y.z.$とする、然るとき、各邊を延長し、球面に沿ふて月形をつくれば3個の月形を得。

此3個の月形の各面積を$2ax$ $2ay.$ $2az$とし、又、球面三角の面積をAとす。然るときは$(2ax-A)$.$(2ay-A)$$(2az-A)$は夫々月形の殘りの部分にして、之等の3個とAとを加ふれば、半球面を得。半球は$4a$なり。故に

$$(2ax-A)+(2ay-A)+(2az-A)+A=4a.$$

$$A=a\{(x+y+z)-2\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式に於ける$x+y+z$は各角の和にして、$(x+y+z)-2$は球面過剰なり。故に(3)式に依り、球面三角形の面は球面過剰に依りて測る事を得。

32. 圓錐曲線： 直圓錐の母線が雙方へ限りなく延長されたるものと考へ、之を平面にて切りたる截面の曲線を圓錐曲線と云ふ。

【1】 頂點を通らざる平面にて截るときは楕圓を得。

【2】 平面が母線の1ツに平行なるときは截面は**拋物線**を得。

【3】 平面が頂點の兩側に於て直圓錐を截るときは其截面は**雙曲線**となる。

大正十一年八月廿日印刷
大正十一年九月一日發行

數學要項

【定價金四拾錢】

著作者　理學研究會

發行者　甲斐俊次
東京市外西巣鴨町池袋十一番地

印刷者　中野鉄太郎
東京市麻布區本村町十八番地

印刷所　東洋印刷株式會社
東京市芝區愛宕町三丁目二番地

發行所
理學研究社
東京市外池袋十一番地
振替東京三一三二七番

日用計算表

目次

右の表御入用の方は切手四錢封入御申込下さい。直ちに送ります。

◎改良簿記棒（代金壹圓五十錢　送料十二錢）

（一）本器は紙面を轉ぶ金屬製ローラーを定規で支持したる構造で其前方に尺度を附しものであります。

（二）本器の使用はペンが直接ローラーに觸れざる故紙面を汚損する事は絶對にありません。

（三）本器は紙面に傾きますから輕く押へればローラーの轉びを防ぎ使用上の熟練を要せず。

（四）本器はローラーの側を上又は横にして置けば机上の斜面でも轉び落ちることはありません。

（五）本器の尺度は任意に寸法を付けるに便で尙直角線を引くに重寶な補助となります。

平易解說　參考物理學（四年修了程度）合本一冊

【內容】（一）物性　（二）熱學　（三）重學

・クロス表紙一部定價金九拾錢（送料不要）

本書は讀んで直ちに理解される樣、口語を以て解說したものにて、教科書で一行の處が二行にも三行にも涉り難解の公式及理論を平易ならしめたる參考書なり

（三六版）

理學研究會編

◈改良吸取器（ブロッター）（代金參拾錢　送料不要）

（一）本器は楕圓形の中央で上下に割れ其一端が蝶番で他方に口を開きますから之に吸取紙を一周り巻き付けたる折込を挿みます。

（二）本器は兩面が使へますから使用上の時間を延長し吸取紙の折込み損失を片面器に比し半減します。

（三）本器の寸法は吸取紙を縦に四ッ切にしたものを挿めば折込みが三分位になる様出來て居ます。

（四）本器の内部にはペン先入れの木箱（マッチ大）を包擁して居ますからペン先の保存に便であります。

終