物不知總之普通算法

敖文宗著

李儼校

載科學第十五卷第九期

中華民國二十年九月一日出版

中國科學社刊印

物不知總之普通算法

敖文宗著　　李　儼校

民國二十年 (1931) 四月中國科學社寄來遼寧盤山縣師中學校敖文宗君"物不知總之普通算法"一文,屬為審查. 按敖文宗君所稱"物不知總"題問,似據坊本程大位算法統宗(1593).在此項 ax−by=±c 問題,中外論述,代有其人. 在國中則孫子算經始載此問.孫子算經作者時代,今未確定.[1]入宋而有剪管術,大衍求一術.迄清算家迭出,述此更多,錢寶琮,李儼并有專文論及.[2]

其在日本則稱此為剪管術,為剩一術,為脫一術,并究及精微.

在西洋則 L. Euler (1734-5) J. L. Lagrange (1769), C. Moriconi (1887), C. Spelta (1895), 并有此問題之詳細解法.

敖文宗君此文,不借徑代數,僅憑算術計算,解說自欠明了.且其解法亦多為前人所已發.但為獎勵國人研算起見,此文亦應保留.日本林鶴一因該國香川縣師範學校生徒谷川榮幸君 ax−by=±c 題解法,與 Euler 及 Moriconi 相類,且不惜為長文介紹.[3]竊本此意,將敖君原文以代數術及數論演述,并採敖君原例題,用大號字引入,以存原意,有當與否,尚望明達教正.

二十年五月李儼識於隴贊.

---

(1) 參看李儼孫子算經補註國立北平圖書館月刊四卷四號 pp. 13-29. 十九年七八月北平.

(2) 參看錢寶琮求一術源流考學藝三卷四號 pp. 1-16, 十年八月上海;李儼求一術之過去與未來學藝七卷二號 pp. 1-45, 十四年九月上海.

(3) 參看林鶴一二元一次不定方程式ノ解法ト剩一術及ビ脫一術トニ就テ, 東北數學雜誌, Vol. 30, No. 1,2, pp. 235-255 Sept., 1928 仙臺,日本.

(一)

設某數 N,以 a 除之餘 1,以 b 除之適盡,則可以下二式記之,如:

$$\frac{N}{a}=x+\frac{1}{a},$$

$$\frac{N}{b}=y.$$

幷之,得 $$ax-by=-1.$$

假令 $a>b$,可按連分數方法,將 a,b 二數輾轉相除,算至最後餘數 $r_n=1$ 爲止.

得連分數式:

$$\frac{a}{b}=a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}, a_n>1,\ n=\text{偶數}.$$

若按"輾轉相除法"除之,算至最後除數 $r_n=1$ 爲止,亦與連分數式同義,因:

$$\frac{a}{b}=a_0+\frac{r_1}{b},$$

$$\frac{b}{r_1}=a_1+\frac{r_2}{r_1},$$

$$\frac{r_1}{r_2}=a_2+\frac{r_3}{r_2},$$

$$\frac{r_2}{r_3}=a_3+\frac{r_4}{r_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=a_{n-1}+\frac{1}{r_{n-1}},$$

而 $r_{n-1}=a_n>1$.

或:

$$
(1)\begin{cases}
a = a_0 b + r_1, & (1)\\
b = a_1 r_1 + r_2, & (2)\\
r_1 = a_2 r_2 + r_3, & (3)\\
r_2 = a_3 r_3 + r_4, & (4)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\\
r_{n-2} = a_{n-1} r_{n-1} + 1, & (n)
\end{cases}
$$

其義至顯.

由(1),(2)消去 r_1 得:

$$a_1 a = (a_0 a_1 + 1) b - r_2 \qquad (12)$$

由(12)(3)消去 r_2 得:

$$a_1 a_2 a + r_1 = a_2 (a_0 a_1 + 1) b + r_3$$

代入(1)式消去 r_1 得

$$(a_1 a_2 + 1) a = [a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0] b + r_3, \qquad (13)$$

由(13),(4)消去 r_3, 代入(12)消去 r_2 得:

$$[a_3 (a_1 a_2 + 1) + a_1] a = \left\{a_3 [a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0] + (a_0 a_1 + 1)\right\} b - r_4, \qquad (14)$$

....

上述 a,b 之因數,可用"耦除總積術"[1]記之,即:

$$\boxed{a_1} = a_1 = x_0$$

$$\boxed{a_1 a_2} = a_1 a_2 + 1 = x_1$$

$$\boxed{a_1 a_2 a_3} = a_3 (a_1 a_2 + 1) + a_1 = x_1 a_3 + a_1 = x_2$$

....

(1)參看高均配合論中之一旁支,科學十五卷,四期 pp. 508 — 513, 二十年(1931)四月,上海.

$$\overline{|a_1 a_2 \cdots\cdots a_{n-1}|} = x_{n-1} = x;$$

$$\overline{|a_0 a_1|} = a_0 a_1 + 1 = y_1,$$

$$\overline{|a_0 a_1 a_2|} = a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0 = y_1 a_2 + a_0 = y_2,$$

$$\overline{|a_0 a_1 a_2 a_3|} = \left\{a_3\left[a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0\right] + (a_0 a_1 + 1)\right\} = y_2 a_3 + y_1 = y_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{|a_0 a_1 a_2 \cdots\cdots a_{n-1}|} = y_{n-1} = y.$$

上式亦稱爲"斜加累乘法".

由是(12),(13),(14)各式可書爲:—

$$\overline{|a_1|}\, a = \overline{|a_0 a_1|}\, b - r_2, \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

$$\overline{|a_1 a_2|}\, a = \overline{|a_0 a_1 a_2|}\, b + r_3, \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

$$\overline{|a_1 a_2 a_3|}\, a = \overline{|a_0 a_1 a_2 a_3|}\, b - r_4, \cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由上式歸納得:

$$\overline{|a_1 a_2 a_3 a_4|}\, a = \overline{|a_0 a_1 a_2 a_3 a_4|}\, b + r_5, \qquad (15)$$

$$\overline{|a_1 a_2 a_3 a_4 a_5|}\, a = \overline{|a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5|}\, b - r_6, \qquad (16)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{|a_1 a_2 \cdots\cdots a_{n-1}|}\, a = \overline{|a_0 a_1 \cdots\cdots a_{n-1}|}\, b - 1, \qquad (1n)$$

最後一式,與原式

$$a x - b y = -1$$

比較,知 $y = \overline{|a_0 a_1 \cdots\cdots a_{n-1}|}$,即 $N = by = b\,\overline{|a_0 a_1 \cdots\cdots a_{n-1}|}$ 時,而 $a > b$, $n =$ 偶數.

—

(例 1) 某數(N)以 120 (= a) 除之餘 1,以 101 (= b) 除之適盡,問某數最小若干.

(a) 法術一輾轉相除法.

$b = 101)\ a = 120\ (1 = a_0 \cdots$ 一步

101

$r_1 = 28)\ 101\ (3 = a_1 \cdots$ 二步

84

$r_2 = 17)\ 28\ (1 = a_2 \cdots$ 三步

17

$r_3 = 11)\ 17\ (1 = a_3 \cdots$ 四步

11

$r_4 = 6)\ 11\ (1 = r_4 \cdots$ 五步

6

$a_6 = r_5 = 5)\ 6\ (1 = a_5 \cdots$ 六步

5

1

(b) 法術二斜加累乘法.

$1 \times 3 + 1$ (= 常數) $= 4 \cdots\cdots$ 一步 $= y_1$

$4 \times 1 + 1 \doteq 5 \cdots\cdots$ 二步 $= y_2$

$5 \times 1 + 4 = 9 \cdots\cdots$ 三步 $= y_3$

$9 \times 1 + 5 = 14 \cdots\cdots$ 四步 $= y_4$

$14 \times 1 + 9 = 23 \cdots\cdots$ 五步 $= y_5$

$\therefore\quad N = by_5 = 23 \times 101 = 2323$ 爲某數.

由上節結論知 $a > b,\ n =$ 奇數時,

$\frac{N}{b} = y + \frac{1}{b},\ \ \frac{N}{a} = x,$ 或方程式 $ax - by = 1$ 時;

某數, $N = ax$, 而 x 由 $x = \overline{|a_1\ a_2 \cdots\cdots a_{n-1}|}$ 求得.

(例 2) 某數(N)以 173 (= b) 除之餘 1，以 904 (= a) 除之適盡，問某數最小若干。

(a) 法術一：輾轉相除法。

```
173) 904 (5
     865
     ----
      39) 173 (4
          156
          ----
           17) 39 (2
               34
               --
                5) 17 (3
                   15
                   --
                    2) 5 (2
                       4
                       -
                       1
```

(b) 法術二：斜加累乘法。

$4 \times 2 + 1 = 9 = a_1 a_2 + 1 = x_1$

$9 \times 3 + 4 = 31 \qquad\qquad = x_2$

$31 \times 2 + 9 = 71 \qquad\qquad = x_3$

$\therefore \quad N = a x_3 = 71 \times 904 = 64184$ 爲某數。

(二)

前已證明：

(A) $ax - by = -1$，則 $\frac{N}{b} = y,\ \frac{N}{a} = x + \frac{1}{a},\ a > b,\ n =$ 偶數時

$$N = by = b \left\lceil a, a_1 \cdots\cdots a_{n-1} \right\rceil, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

(B) $ax - by = 1$，則 $\frac{N}{a} = x,\ \frac{N}{b} = y + \frac{1}{b},\ a > b,\ n =$ 偶數時

$$N = ax = a\,\overline{|a_1 a_2 \cdots\cdots a_{n-1}|}, \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

本應直接進求:

(C) $bx'-ay'=-1$, 即 $\frac{N'}{a}=y'$, $\frac{N'}{b}=x'+\frac{1}{b}$, $a>b$, $n=$ 偶數時之 $N'=ay'$, 及

(D) $bx'-ay'=1$, 即 $\frac{N'}{b}=x'$, $\frac{N'}{a}=y'+\frac{1}{a}$, $a>b$, $n=$ 奇數時之 $N'=bx'$.

今不直接進求 N' 值,祇由 a,b 之關係,如前按 n 之奇耦得 $\overline{|a_0 a_1 \cdots\cdots a_{n-1}|}$ 及 $\overline{|a_1 a_2 \cdots\cdots a_{n-1}|}$ 之值,按 (A),(B) 二式代入,所得 N 值,自與設問意義相反.既得 N 值,再間接求得 N' 值如下:

在求 N' 數之前應知:　　$ax'-by'=\pm c$ 式

與　　$ax-by=\pm 1$ 式

同理,因 $x'=cx''$, $y'=cy''$, 可化爲簡單式

$$ax''-by''=\pm c$$

或　　$ax-by=\pm 1$ 也.

今試以 $n=$ 奇爲例.

由 (B) 知　　$N=ax=by+r_n$.

由 (D) 知　　$N'=bx'=ay'+r_n$.

$$N+N'=a(x+y')+r_n$$
$$=b(x'+y)+r_n.$$

令　$a=a'c$,　$b=b'c$, 則

$$N+N'=a'c(x+y')+r_n$$
$$=b'c(x'+y)+r_n.$$

上二式必有 $b'=x+y'$, $a'=x'+y$ 之關係方合,即:

$$N+N'=a'b'c+r_n$$

結果得:
$$N'=a'b'c+r_n-N \qquad (E)$$

就中 N 爲甲數,N' 爲乙數,$a'b'c$ 爲 a, b 兩數之最小公倍數.

(例 3)　某數 (N') 以 $266\,(=a)$ 除之,餘 $2\,(=r_n)$,以 $62\,(=b)$ 除之適盡,問某數最小若干.

先由 (a) 法術一:輾轉相除法.

```
62) 266 (4
    248
    ---
     18) 62 (3
         54
         --
          8) 18 (2
             16
             --
              2
```

(b) 法術二:斜加累乘法.

$$3\times 2+1=7 \;=a_1a_2+1=x_1$$

求得甲數　$N=ax_1=7\times 266=1862$

因與原題目的相反,蓋 $\frac{1862}{266}=7$; $\frac{1862}{62}=30\frac{2}{62}$,

乃由 (c) 法術三:反求其本法.

先求 $266\,(=a)$, $62\,(=b)$ 之最小公倍數

$$2\,(=c)\,\underline{\big|\,266\,(=a),\ 62\,(=b)}$$
$$133\,(=a'),\ 31\,(=b')$$

得　$a'b'c=133\times 31\times 2=8246$.

由 (E) 式得:　$8246+2$ (丙數) -1862 (甲數) $=6386$ (乙數).

卽　$N' = 6386$.

此理由分五條說明如後：

(1)　甲數 (N) 以 $62\,(=b)$ 除之餘 $2\,(=r_n)$, 且爲 $266\,(=a)$ 之倍數.

乙數 (N') 以 $266\,(=a)$ 除之餘 $2\,(=r_n)$, 且爲 $62\,(=b)$ 之倍數.

(2)　甲數加乙數 $(N+N')$ 卽爲 $62\,(=b)$ 及 $266\,(=a)$ 除之均餘 2 之數,亦卽其最小公倍數加 $2\,(=r_n)$ 之數,命爲丙數.

(3)　甲數以 $62\,(=b)$ 除之餘 $2\,(=r_n)$, 加乙數,因何仍餘 $2\,(=r_n)$, 蓋乙數爲 $62\,(=b)$ 之倍數也.

(4)　乙數以 $266\,(=a)$ 除之餘 $2\,(=r_n)$, 加甲數,因何仍餘 $2\,(=r_n)$, 蓋甲數爲 $266\,(=a)$ 之倍數也.

(5)　甲數 (N) 加乙數 (N') 得丙數 $(N+N'=a'b'c+r_n)$, 所以丙數減去甲數,則得乙數矣.

(例 4)　某數 (N') 以 $78\,(=a)$ 除之餘 $1\,(=r_n)$, 以 $7\,(=b)$ 除之適盡,問某數最小若干.

先由 (a) 法術一:輾轉相除法.

得:

$$\begin{array}{r} 7)\ 78\ (11 \\ \underline{77} \\ 1 \end{array}$$

次由 (b) 法術二:斜加累乘法.

得　$N = 1 \times 78 = 78$　與原題目的相反.

終由 (c) 法術三:反求其本法.

$$N' = 7 \times 78 \times 1 + 1 - 78 = 469.$$

(三)

(習題1) $\frac{N}{30}=x+\frac{4}{30}$, $\frac{N}{102}=y+\frac{22}{102}$. 求 N.

由題意得: $N=30x+4=102y+22$, 令 $N'=N-4=30x=102y+18$,

或 $30x-102y=18$, 即 $5x-17y=3$

(a) 30) 102 (3 即 5) 17 (3

$$\begin{array}{l} 30)\,102\,(3 \\ \underline{90} \\ 12)\,30\,(2 \\ \underline{24} \\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5)\,17\,(3 \\ \underline{15} \\ 2)\,5\,(2 \\ \underline{4} \\ 1 \end{array}$$

(b) $3\times2+1=7$ 即 $3\times2+1=7$

$N'_{r=6}=7\times30=210$ $N'_{r=1}=7\times5=35$

同理 $N'_{r=18}=210\times3=630$ $N'_{r=18}=35\times18=630$

因 $N'=N-4$, 故 $N=N'+4=630+4=634$ 爲某數.

次求 30, 102 二數之最小公倍數.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 30 & 102 \\ \hline 3 & 15 & 51 \\ \hline & 5 & 17 \end{array}$$

得 $2\times3\times5\times17=510$, 以減某數得最小某數 $634-510=124$

(習題2) $\frac{N'}{30}=x'+\frac{22}{30}$, $\frac{N'}{102}=y'+\frac{4}{102}$, 求 N'.

由題意得 $N'=30x'+22=102y'+4$

或 $30x'-102y'=-18$, 即 $5x'-17y'=-3$,

如前題得: $N_{r=6}=210$, 與原題目的相反.

用(2)反求其本法．先求 30, 102 之最小公倍數．

$N'_{r=5} = 2 \times 3 \times 5 \times 17 + 6 - 210 = 306$

$N'_{r=18} = \frac{18}{6} \times 306 = 918$, $N = 918 + 4 = 922$ 爲某數．

次如前題求 30, 102 之最小公倍數爲 510, 以減某數,得最小某數 922－510＝412．

(習題 3)　某數以 5 除之餘 1, 且爲 7 及 9 之倍數(卽 7×9＝63 除之適盡),問某數最小若干．

(a)　$7 \times 9 = 63$

$$
\begin{array}{l}
5)\,63\,(12 \\
\underline{\;\;60} \\
\quad 3)\,5\,(1 \\
\quad \underline{\;\;3} \\
\qquad 2)\,3\,(1 \\
\qquad \underline{\;\;2} \\
\qquad\;\; 1
\end{array}
$$

(b)　$1 \times 1 + 1 = 2$

$2 \times 63 = 126$　爲某數．

(習題 4)　某數以 7 除之餘 1, 且爲 5 及 9 之倍數(卽 5×9＝45 除之適盡),問某數最小若干．

(a)　$5 \times 9 = 45$

$$
\begin{array}{l}
7)\,45\,(6 \\
\underline{\;\;42} \\
\quad 3)\,7\,(2 \\
\quad \underline{\;\;6} \\
\qquad 1
\end{array}
$$

(b)　$6 \times 2 + 1 = 13$

$13\times 7=91$，與原題目的相反，用反求其本法。

(c)　$7\times 45\times 1+1-91=225$ 爲某數。

(習題5)　某數以 9 除之餘 1，又爲 5 及 7 之倍數（卽 $5\times 7=35$ 除之適盡），問某數最小若干。

(a)　$5\times 7=35$

$$
\begin{array}{l}
9)\,35\,(3 \\
\underline{\;27\;} \\
\quad 8)\,9\,(1 \\
\quad\;\; \underline{\;8\;} \\
\quad\;\; 1
\end{array}
$$

(b)　$3\times 1+1=4$

$4\times 9=36$，與原題目的相反，用反求其本法。

(c)　$9\times 35\times 1+1-36=280$ 爲某數。

(習題6)　某數(N)以 13 除之餘 8，以 10 除之餘 9，以 16 除之餘 5，問某數最小若干。

如題意　$\frac{N}{13}=x+\frac{8}{13}=y+\frac{9}{10}=z+\frac{5}{16}$.

$N=13x+8=10y+9=16z+5$.

令　$N_1=N-5=13x+3=10y+4=16z$.

先求　$N_2=13x_1+3=10y_1\cdot 16z_1=80z''$ 之 N_2.

(a)

$$
\begin{array}{l}
13)\,80\,(6 \\
\underline{\;78\;} \\
\quad 2)\,13\,(6 \\
\quad\;\; \underline{\;12\;} \\
\quad\;\;\; 1
\end{array}
$$

或　$13\times 3=39)\,80\times 3=240\,(6$

$$
\begin{array}{l}
\underline{\;234\;} \\
\quad 6)\,39\,(6 \\
\quad\;\; \underline{\;36\;} \\
\quad\;\;\; 3
\end{array}
$$

(b)　$6\times 6+1=37$　　或　$6\times 6+1=37$

$37 \times 13 = 481$　　　　　$37 \times 39 = 1443$

與原題目的相反,用反求其本法.

(c)　$13 \times 80 \times 1 + 1 - 481 = 560$, 或　$13 \times 80 \times 3 + 3 - 1443 = 1680$

$N_2 = 560 \times 3 = 1680$　或　$N_2 = 1680$

$$N_2 = 1680$$

次求　$N_3 = 10y_2 + 4 = 13x_2 \cdot 16z_2 = 13 \times 16x''$ 之 N_3.

(a)　$13 \times 16 = 208$

10) 208 (20　　　或　20) 416 (20
200　　　　　　　　400
8) 10 (1　　　　　　16) 20 (1
8　　　　　　　　　16
2　　　　　　　　　4

(b)　$20 \times 1 + 1 = 21$　或　$20 \times 1 + 1 = 21$.

$21 \times 10 = 210$　或　$21 \times 20 = 420$.

與原題目的相反,用反求其本法.

(c)　2 | 10　208　　或　2 | 20　416
　　| 5　104　　　或　2 | 10　208
　　　　　　　　　　　　5　104

$2 \times 5 \times 104 = 1040$　　　$2 \times 2 \times 5 \times 104 = 2080$

$N_3 = 1040 + 2 - 210 = 832$,　或　$N_3 = 2080 + 4 - 420 = 1664$

$$N_3 = 1664$$

最後　$N_1 = N_2 + N_3 = 13(x_1 + 16x_2z_2) + 3$

$$= 10(y_2 + 16y_1z_1) + 4$$

$$= 16(13x_2z_2 + 10y_1z_1)$$

$$= 13X + 3 = 10Y + 4 = 16Z$$

$N_0 = (1680 + 1664) + 5 = 3349$

次如前數題求10, 13, 16之最小公倍數, $2 \times 5 \times 13 \times 8 = 1040$, 以減某數:

$$\begin{array}{r} 1040)\,3349\,(3 \\ \underline{3120} \\ 229 \end{array}$$

最後得 $N = 3349 - 3 \times 1040 = 229$ 爲某數.

(習題 7) 某數以3除之餘2, 5除之餘3, 7除之餘1, 問某數最小若干.

如題意 $\frac{N}{3} = x + \frac{2}{3} = y + \frac{3}{5} = z + \frac{1}{7}$

$N = 3x + 2 = 5y + 3 = 7z + 1$

$N_1 = N - 1 = 3x + 1 = 5y + 2 = 7z$

先求 $N_2 = 3x_1 + 1 = 5y_1 \cdot 7z_1 = 35z''$ 之 N_2

(a) $5 \times 7 = 35$

$$\begin{array}{l} 3)\,35\,(11 \\ \;\;\underline{33} \\ \;\;\;2)\,3\,(1 \\ \;\;\;\;\;\underline{2} \\ \;\;\;\;\;1 \end{array}$$

(b) $11 \times 1 + 1 = 12$

$12 \times 3 = 36$, 與原題目的相反,用反求其本法.

(c) $3 \times 35 \times 1 + 1 - 36 = 70$

$N_2 = 70$

次求 $N_3 = 5y_2 + 2 = 3x_2 \cdot 7z_2 = 21x''$ 之 N_3.

(a)　$5\overline{)21}(4$　或　$10\overline{)42}(4$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40 \\ \hline 2 \end{array}$$

(b)　$0+1=1$　或　$0+1=1$

$1\times 21=21$　　$1\times 42=42$

$$N_3=42.$$

最後　$N_1=N_2+N_3=70+42=112$

$N_0=112+1=113.$

如前題　$113-105=8.$為某數

(完)