漢　譯

# 范氏高等代數學

新亞書店印行

# 范氏高等代數學

# Fine: College Algebra.

沈璿
曹隆 合譯
薛德炯 校訂

新亞書店印行

# 原　　序

本書於啓迪代數學算法之原理,力求簡要,而仍不失聯絡與嚴正,且使算法之形式,適切於實際之演算.

凡有關於代數學,而爲各校學生所需要者,本書靡不羅載,且於編列此各種材料時,所取之順序,務期能適當明示各部分間交相從屬之關係.

本書分爲二部:第一部專述代數學中之數系統,第二部專述代數學本論.

余於論數時,以基數觀念,及自然標尺1,2,3,……中所示順序觀念爲基礎.余之出此,自有論據,玆不必贅.但由余之經驗,縱就教學法論之,亦確信以此法爲最佳.例如無理數之順序的定義,雖一幼年學生,亦能使之領會;蓋以若是之數不採若是之定義,則其義雖眞,每嫌過於抽象,優秀學生亦難正確瞭解也.

或謂本書關於數之討論,不必如是詳密.但著作者於討論基本性質之問題時,若應討論者,而不加以討論,應證明者,而不加以證明,豈能無憾.余所望者,此類討論,在好學者能引起其興趣,在多數學生,能確認實數之順序的性質,及其間推演之關係,與夫明瞭無論對於實數,複素數,其基本運算皆可依交換,結合,及分配三律以定其義.

本書第二部分,即代數學本論中,余先認上舉各律,在文字表數之代數學中,實爲基本運算之定義. 是等代數學上之定義,述之綦詳;且由是推演代數算法之全部原理,及實際演算之法則.

關於此部,余不詳論. 惟有若干要點,所以別於其他各種通行之教科書而當一述者. 余力避僅爲標新立異而採用不普通之方法;但若因欲得理論之一致,而余認爲有必要,或可使理論及實算簡約時,則徑用之而無疑. 特殊方法在本文及習題中所佔篇幅極少;而對於代數學之普通方法,則常設法使學生確實運用之.

因此,如待定係數法,即研究解析法之至要方法,不置諸本書之後部,而儘早提前,自後若利於用,即常用之. 然題目之編列,則不得不因而變化. 又如部分分數,余特納諸分數章中. 揆諸理論,此爲允當,且若適當處理之,可供初步演算最佳之練習.

又余於除法變換及其結果,以全神赴之;且插入有效之綜合除法,以資聯絡.

關於方程式之前數章中,對於解方程式所依據之理由,有詳密之討論;對於可用二次式解之方程組,有較通常更有組織之探討;又對於二元一次,及二元二次之方程式圖解法有較精密之研究.

對於正整指數之二項定理,余視作連乘之特例以論之.由余之經驗,余確信欲令學生體認此重要定理之意義,以此法爲最佳. 分指數之一章中,雖已使用普徧二項定理,但此定

理之證明,及關於無窮級數之諸事,延至近於卷末,始論及之.

在方程式論及行列式諸章中,對於方程式根之對稱函數之基本定理,載有證明,對於結式之重要性質,亦有討論. 是等事項,皆不屬初步代數學園範之內,但專門學校之學生,欲繼續研究算學,則不可不知. 其餘諸章,如無窮級數及卷末所載連續函數之性質亦然.

余編第一部分時,取 Rowan Hamilton, Grassmann, Helmholtz, Dedekind, 及 Georg Cantor 諸家之說為基礎. 以往曾否有人對於順序數之原理,以余所取之見解,作同樣詳細之啓迪,則非余之所知矣.

余編代數學本論時,獲益於他書者匪鮮,尤當誌謝者,為 Chrystal 氏之論文.

本書編纂數年,始底於成. 自 1898 年始,發行人逐年刊一小册,以資 Princeton 大學一年生之用. 小册所載者,為代數學重要部分之論述,乃當時最愜余意者. 余每稿成,輒就商於同事 Eisenhart, Gillespie 二君,存其精華,而去其糟粕. 因是本書之大部分,乃屢經删改始定者. 但當然尚有多處,須賴今後之經驗,檢出而釐訂之. 余所望於是書者,乃是書之行於世,使學生諸君,不獨更能理解代數學,且若對其算法所依據之原理,予以相當之研討,則將更感興味而奮起也.

Henry B. Fine

# 目次

## 第一編——數



## 第二編——代數學

# 第一編　數

## I. 自然數—計數,加法,及乘法

### 物之羣及其基數

**物之羣** (Groups of things)　在吾人日常經驗中,引起吾人注意者,不獨單一之物,且有結合爲羣或集者矣. 1

手之指,家畜之羣,多角形之頂點,物之羣之例也.

所謂若干物組成一羣者,吾人區別此諸物於他物時,以其全體而不以其個體,其全體成一單一之物,而爲吾人所注意也.

爲便利計,凡組織一羣之各物稱爲其羣之元 (Elements).

**等值羣** (Equivalent groups)　一一對應 (One-to-one correspondence)　二文字羣 ABC 及 DEF 之間有次之關係: 吾人能成對的組合其諸元,以一羣之各元一一與他羣之各元結合可矣. 譬如,吾人可以 A 與 D 結合, B 與 E 結合, C 與 F 結合. 2

二羣之諸元可以如此結合時,此二羣爲等值;如此結合諸元之法,稱爲導二羣於一對一之關係,或一一對應之關係.

**定理**　與同一第三羣等值之二羣等值. 3

依假設,吾人可導二羣各與第三羣一一對應.次,凡二羣中

與第三羣之同元結合之二元,吾人皆認爲二羣之對應元而結合之.於是二羣亦一一對應矣.

4 基數(Cardinal number) 吾人設想一切可能之物羣區分爲各類之等値羣,任二與羣之屬於同類或異類,視其能一一對應與否而定.

例如,二文字羣ABCD及EFGH屬於同類,二羣ABCD及EFG屬於異類.

屬於同類之一切羣所公具之性質,亦卽區別一類之羣於他類之羣之性質,爲羣中物之數,或其基數.換言之:

一羣中物之數或其基數者,此羣自身以及凡能與之一一對應之羣所公具之性質也.

吾人亦可云:"一物羣之基數者,吾人變更羣中諸物之排列方法或一一代換之以他物時,此羣之性質有始終不變者是也;"或,"一物羣之基數者,此羣之性質有與羣中諸物自身之特性及其排列方法無關者是也."

何則,變更諸物之排列方法,或以他物一一代換之,凡此僅能變其羣爲一等値之羣而已,§2.又羣中有如此變化而不受影響之性質,自必與諸物之特性及其排列方法無關.

5 部分(Part) 第一羣之諸元爲第二羣之若干元,而非其一切元時,第一羣爲第二羣之部分.

例如,羣ABC爲羣ABCD之部分.

6 由定義立得:如第一羣爲第二羣之部分,而第二羣爲第三羣之部分,則第一羣亦爲第三羣之部分.

7 有窮羣及無窮羣(Finite and infinite groups) 吾人謂羣之不

與其任何部分等值者爲有窮羣,與其某一部分等值者爲無窮羣.於集亦然*

例如,羣ABC爲有窮羣;因此羣不能與BC或任何其他部分一一對應也.

然任一無盡之符號之列,例如無盡數列1, 2, 3, 4,……,則爲無窮集.

以例明之.在1, 2, 3, 4,……全集及其起於2之部分之間,亦卽

在　　1, 2, 3, 4, 5,……　　(a)

及　　2, 3, 4, 5, 6,……　　(b)

之間,吾人能樹立一對一之關係;因(a)之1可與(b)之2結合,(a)之2可與(b)之3結合,餘仿此,任舉(a)之何數,(b)中常有一數與之對應,舉(b)之數亦然故也.

於是集(a)與其部分(b)等值.故(a)爲無窮集.

**基數之大小**　令M及N指示任二有窮羣.則成　8

1. M與N等值,

或　2. M與N之一部分等值,

或　3. N與M之一部分等值,

三者必居其一.

在第一種情形,M及N有同一之基數,§4,或相等之基數:在第二種情形,M之基數小於N之基數;在第三種情形,M之基數大於N之基數.

譬如,若M爲文字羣abc,而N爲羣defg,則M與N之一部分等值.例如與部分def等值.

故M之基數小於N之基數,而N之基數大於M之基數.

**註**　依有窮羣之定義,§7,如此定義之"等","大","小"諸關係,絕不容有所混淆於其間.　9

譬如,此定義不容M之基數同時等於又小於N之基數,因如此則M既

---

*在無窮羣——或無窮集,此名稱引較多——實際上吾人當然不能盡取其諸元而一一思考之.此種之集,但具有可判別各與物屬此不屬此之法則時,吾人卽認爲已知.

與N等值,又與N之一部分等值,故N與自身之一部分等值,§3,而N爲無窮集衆,§7.

10 系 如第一基數小於第二基數,而第二基數小於第三基數,則第一基數亦小於第三基數.

何則,如M,N,P指示具有上述諸基數之任三物羣,則M與N之一部分等值,而N與P之一部分等值;故M與P之一部分等值,§§3,6.

11 基數之系統 自僅含一元之羣開始累次"附加"一新物,可導出下表之基數.

1. 僅含一元之羣(如I)之基數.

2. 附加一元於第一種羣而得之羣(如II)之基數.

3. 附加一元於第二種羣而得之羣(如III)之基數.

4. 餘仿此,無終極.

此諸連續基數,吾人名之爲"一","二","三",……,以符號1,2,3,……,表之.

12 論此系統 吾人稱有窮羣之基數爲有窮基數.關於前表之基數有可得而言者,條舉於下:

其一. 此表中之基數皆爲有窮基數.

何則,羣I不能有何部分與之等值,§7,故爲有窮羣;然附加一物於有窮羣之結果仍爲有窮羣,* 故以後各羣亦皆爲有窮羣.譬如,I爲有窮羣,故II亦然;II爲有窮羣,故III亦然;餘仿此.

*吾人可證之如下[坎托(G. Cantor),算學年刊(Math. Ann.)卷46第490頁]:如M指示有窮羣而e爲單一之物,則附加e於M而得之羣Me亦爲有窮羣.

令G=H指示羣G與羣H等值.

如Me非有窮羣,則必與其某一部分等值,§7

令P指示此部分,則Me=P.

(1) 假定P不含e.

其二. 有窮基數皆在此表中.

何則,依定義每一有窮基數必爲某一有窮羣之基數.然任舉一有窮羣M,吾人常能作一標識之羣 III……I 與之等値,對於每一物作一標識可矣.此標識羣必有最後之標識,故包含於§11之表中,因非然則此羣爲無盡列,故爲無窮羣,而M亦爲無窮羣矣,§7.

其三. 此表中之基數無相等者.

今上巳證明諸羣 I, II, III, ……皆爲有窮羣.故如在此諸羣中任取二羣,則其一必與其他之一部分等値甚明.故據§8之定義即得本定理.

## 自然標尺　等式及不等式

**自然數** (Natural numbers)　符號1, 2, 3, ……——或其名"一", "二", "三", ……——稱爲正整數或自然數.故 13

一自然數爲一基數之符號.

**自然標尺** (Natural scale)　此諸數依其所代表之基數在§11表中之順序而排列時,即得無盡符號列 14

---

[1] 設Me中之e與P中之元f結合,P中其餘之元所成之集以$P_1$代表之.則因$Me=P_1f$而$e=f$,得$M=P_1$.

此事不可能,因M爲有窮羣而$P_1$則M之部分也,§7.

(2) 假定P含e.

P中之e與Me中之e結合爲不可能之事,因如此則P中其餘之元所成之集,旣爲M之部分,又與M等値矣.

則假定P中之e與Me中之他元g結合,而Me中之e與P中之f結合.如$Me=P$在此一假設上成立,則吾人變更e, f, g諸元之組合方法,使P中之e與Me中之e結合,而P中之f與Me中之g結合時,此關係應仍成立.然適巳證明如此則P之一部分將與M等値.故此一假設亦不可能.

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots;$$

或"一","二","三","四","五",…,稱爲自然標尺或自然數之標尺.

15 此標尺中之每一符號,示終於此之標尺之部分所有符號之個數.

譬如,4示符號1, 2, 3, 4, 之個數.何則,符號1, 2, 3, 4之個數,與畫I, II, III, IIII之個數同,而後者又與末一畫IIII之標識之個數同故也, §8. 一般的皆如此.

16 自然標尺之順序的性質 就其本身而論,自然標尺祇一相異符號之集,其中有最先之符號,即1; 此符號有一定之後繼符號,即2; 此符號又有一定之後繼符號,即3; 餘倣此無終極;如此而已.

換言之,自然標尺祇一相異符號之集,其元依一定且已知之順序排列,其中有最先之符號而無最後之符號,如此而已.

由此一觀點論之,自然數自身祇爲順序之標識而已,其順序則默誦標尺時諸數因時間的關係而自然呈現者是矣.

17 不獨此標尺,凡集之以一定且已知之順序排列其元者,皆有下之性質甚明.

1. 關於其任二元,吾人得謂其一"居前"其他"隨後";且此"居前","隨後"二語,用於任一二元組時,與用於任他二元組時有同一之意義.

2. 任舉二元,吾人常能決定何者居前何者隨後.

3. 如$a$, $b$, 及$c$爲任三元,而$a$居$b$前,$b$居$c$前,則$a$居$c$前.

與集有本具以上之性質者,亦有其元經吾人依自擇之法則排列後即然者.吾人皆稱之爲順序系統 (Ordinal system).

第一種集例如: (1) 自然標尺自身; (2) 時間上連續發生之事件; (3) 沿一

橫直線自左至右而排列之點列. 第二種集例如依人名中字母之順序而排列之諸人之羣.

一集亦可有相一致 (Coincident) 之元. 譬如, 在一事件之羣中,二或更多之事件可以同時發生. 18

吾人稱此種之集爲順序系統,如在其不相一致之元之間, 1, 2, 3 諸關係仍爲眞,而關於其相一致之元, 則

4. 如 $a$ 與 $b$ 一致,而 $b$ 與 $c$ 一致,則 $a$ 與 $c$ 一致;

5. 如 $a$ 與 $b$ 一致,而 $b$ 居 $c$ 前,則 $a$ 居 $c$ 前.

基數間之大小關係, 自然數以其標尺中之相關順序指示之. 19

何則,在任二與基數中,其自然數於標尺中在後者爲大.

而"如第一基數小於第二基數,而第二基數小於第三基數,則第一基數小於第三基數"之關係,於標尺則有"如 $a$ 居 $b$ 前,而 $b$ 居 $c$ 前,則 $a$ 居 $c$ 前"之關係代表之.

實則吾人比較基數時除此法外殆絕少用他法者 吾人並不依§8之法直接比較物羣之基數. 反之, 吾人以適當之自然數代表之,而自其標尺中之相關順序推知何者爲大何者爲小. 此事不須若何自覺的推較, 因標尺深印於吾人腦際,故一聞任二自然數之名,何者居前何者居後立辨也. 譬如, 告吾人以 $A$ 城人口 120,000, $B$ 城人口 125,000, 吾人立卽斷定 $B$ 城居民較多,因吾人知於標尺中 125, 000, 在 120, 000, 之後也.

**等式及不等式** 以後凡"數"字皆指自然數而言, §13; 又諸文字 $a, b, c$ 指示任意之自然數. 20

如 $a$ 及 $b$ 指示同一之數,卽於自然標尺中相一致,吾人以下之等式 (Equation) 表之. 21

$a=b$, 讀爲"$a$ 等於 $b$".

22 如於自然標尺中$a$居前而$b$隨後，吾人以下之不等式(Inequality)之一表之.

$a<b$，讀爲"$a$小於$b$."

$b>a$，讀爲"$b$大於$a$."

23 嚴格之言，此"等"，"小"，"大"諸字，當然爲對$a$，$b$所代表之基數而言，而與$a$，$b$自身無關.譬如，"$a$小於$b$"一語，祇爲"$a$所代表之基數小於$b$所代表之基數"之簡言而已.

不等式$a<b$對於$a$及$b$本身所僅有之意義，爲於標尺中$a$居$b$前.

24 推演律(Rules of equality and inequality) 由§§17，18及此諸定義，§§21，22，立得

1. 如$a=b$而$b=c$，則$a=c$.
2. 如$a<b$而$b<c$，則$a<c$.
3. 如$a=b$而$b<c$，則$a<c$.

## 計數

25 算術以論存在於自然數間之順序關係及結合此諸數之若干算法爲先務.

算術之諸算法原始於計數.

26 計數(Counting). 欲知與物羣之基數爲何，則吾人數其羣.

其法人所共知.任取一物，以"一"呼之，取另一物，以"二"呼之，準此進行，盡羣中之物而後已.使用口頭符號"一"，"二"，……時，須依照標尺中之順序，一無遺漏；至於諸物擇取之先後，則隨心所欲，以意爲之.如此則最後所得之符號，即吾人所求之

物羣基數之名.何則,由於標尺之順序的性質,此最後之符號指示所用符號共計若干,§15,從而羣中之物共計若干,§8.

然則計數之法乃導被數之羣與自然標尺之一部分一一對應,此部分起於"一"而終於計數之時所用之最後之數.

注意計數用自然數有二重效果:(1)計數進行時,用自然數之某羣作數號;(2)計數之結果,以此羣中最後之數記之.

吾人曾云計數之結果與諸物擇取之先後無關,今證之如下:

**定理**　數有窮物羣時,無論吾人以何順序擇取諸物,其結果常爲一定. 27

以例明之.假定數某羣時以順序P擇取諸物之結果爲99,而以他順序Q擇取諸物之結結爲97.

則順序P中之前97物組成之羣,將與順序Q中之全羣等値,因依假設二者皆曾與自然標尺之前97數一一結合也,§3.

此事不可能,因如此則所數之羣與其一部分等値,而依假設此羣爲有窮羣也,§7.

**基數之另一定義**　根據適所證明之定理,可定有窮羣之基數之義如下: 28

一有窮物羣之基數者,此羣之性質有能使吾人不論以何順序數其羣常達到同一自然數者是也.

如吾人以§16所定自然標尺之義作爲論數出發點,則此即基數之應有之定義矣.

## 加　法

**加法之定義**　加3於5者,求在自然標尺中佔5後第三個 29

位置者爲何數也.

在標尺中從6起順數三數,計爲6, 7, 8, 即得所求之數爲8.

指示此算法用符號+(讀爲"加"), 書作$5+3=8$.

普徧言之,加$b$於$a$者,求在自然標尺中佔$a$後第$b$個位置者爲何數也.

因標尺中無最後之符號,故其數常可求得.吾人稱之爲$a$與$b$之和,以式$a+b$表之.

30 附註 求$a+b$時在標尺中順數之法,與將$b$物之羣之諸元一一附加於$a$物之羣,步驟完全一致.故(1)後一事之結果,爲$a+b$物之一羣, § 8; (2) 如$a$及$b$指示有窮基數, $a+b$亦然.參看第4頁之附註.

31 因$a+1$, $a+2$, 等指示$a$以後之第一,第二,等數,故數列$a+1$, $a+2$,……指示標尺之$a$以後之部分.

故凡$a$以後之與數,皆得以$a+d$之形式表之,其中之$d$指示一定之自然數.

32 **加法之演算** 用計數之法加大數甚繁.故吾人默記若干之較小之數之和(個位加法表),用說明於下之加法之諸"律",推出較大之數之和.

33 **加法之諸律** 加法爲"交換的"算法,又爲"結合的"算法;即加法遵從下二律:

34 **交換律** (Commutative law) $a+b=b+a$.

加$b$於$a$之結果,與加$a$於$b$之結果同.

35 **結合律** (Associative law) $a+(b+c)=(a+b)+c$.

先加$c$於$b$,然後加所得之和於$a$,與先加$b$於$a$,然後加$c$於所得之和,結果相同.

**註釋**　慣例,式$a+b+c+\cdots\cdots$代表加$b$於$a$,加$c$於其和,準此進行,所得之結果.故實際上吾人以式$a+b+c$代式$(a+b)+c$. 36

**此諸律之證明**　此諸律可證之如下. 37

**其一. 交換律:** $a+b=b+a$.

例如,和3+2與和2+3相等.

何則,3+2代表在自然標尺上先數三數再數二數而得之數.故

被數之羣　　1, 2, 3, 4, 5,　　(a)

數號　　1, 2, 3, 1, 2.　　(b)

然因符號羣(a)與(b)之間有一對一之關係,而凡一對一之關係皆爲交互的,§2,故吾人可交換(a)與(b)之任務;即如以(b)爲被數之羣,(a)將代表數號之羣.

故求3+2等於數符號羣

1, 2, 3, 1, 2.　　(b)

同理,求2+3等於數符號羣

1, 2, 1, 2, 3.　　(c)

然因(b)與(c)係從同樣符號組成,不過排列方法不同而已,計數之結果應相同,§27;即　$3+2=2+3$.

對於任二自然數$a$及$b$得依同法證之.

**其二. 結合律:** $a+(b+c)=(a+b)+c$.

何則,於$a$後數$b$數而至$a+b$,再數$c$數而至$(a+b)+c$,兩次共數$b+c$數.故應達到$a$後第$b+c$個數,即達到$a+(b+c)$.

適所舉之證牽涉基數之概念.然亦可不用此概念而定加法之義及證其諸律,如附註所示.* 38

**關於和之普徧定理**　累用諸律,§§34, 35,得證:

---

*意大利算學家裴阿諾(Peano)之定自然數系之義也,不用基數之概念,而用一組公設.其公設可陳述如下("數"謂"自然數"):

1. 符號1爲一數.
2. 每一數$a$有一後繼之數,稱之爲$a+$.
3. 此數$a+$決非1.　　4. 如$a+=b+$,則$a=b$.
5. 每一與數$a$在數列$1, 1+, (1+)+\cdots\cdots$中.

加任意之有窮數之數時,無論吾人以何順序排列之,或依何法類聚之,其和常爲同一之數.

譬如,　$a+b+c+d=a+c+b+d.$

何則,

$$a+b+c+d=a+(b+c)+d \qquad \S\,35$$

$$=a+(c+b)+d \qquad \S\,34$$

$$=a+c+b+d. \qquad \S\,35$$

---

諸數 2, 3,……之義定之如下: $2=1+$, $3=2+$, …….

和 $a+b$ 謂在公式之列 $a+1=a+$, $a+2=(a+1)+$,……中所決定之數(因 5).

適所舉之公式之列相當於下一公式:

$$6.\quad a+(b+1)=(a+b)+1.$$

依算學歸納法可由 6 得出加法之諸律:

$$7.\quad a+(b+c)=(a+b)+c. \qquad\qquad 8.\quad a+b=b+a.$$

其一.　如 7 在 $c=k$ 時爲眞, 則在 $c=k+1$ 時亦眞. 何則, 依 6 及 7.

$$a+[b+(k+1)]=a+[(b+k)+1]=[a+(b+k)]+1$$
$$=[(a+b)+k]+1=(a+b)+(k+1).$$

然依 6, 7 在 $c=1$ 時爲眞.

故 7 在 $c=2$ 時爲眞,從而在 $c=3$ 時爲眞,餘仿此. 故依 5, 無論 $c$ 爲何數 7 常眞.

其二.　先證 8 之一特例: $8'.\ a+1=1+a.$

如 $8'$ 在 $a=k$ 時爲眞,則依 6, $(k+1)+1=(1+k)+1=1+(k+1).$

故如 $8'$ 在 $a=k$ 時爲眞, 則在 $a=k+1$ 時亦眞.

然 $8'$ 在 $a=1$ 時爲眞,故在 $a=2$ 時亦眞,故在 $a=3$ 時亦眞,餘仿此.

最後, 如 8 在 $b=k$ 時爲眞,則在 $b=k+1$ 時亦眞. 何則,依 7 及 $8'$.

$$a+(k+1)=(a+k)+1=1+(a+k)=1+(k+a)=(1+k)+a=(k+1)+a.$$

故因 8 在 $b=1$ 時爲眞 (依 $8'$), 在 $b=2$ 時亦眞,在 $b=3$ 時亦眞,餘仿此.

參看斯托阿玆 (Stolz) 及格邁湼 (Gmeiner) 所著理論算術 (Theoretische Arithmetik) 第十三頁及以後諸頁,并書中援引裴阿諾之處;又學亭吞(Huntington), 美國算學會會報 (Bulletin of the American Mathematical Society) 第九卷第四十頁 格剌斯曼 (H. Grassmann) 於算術讀本 (Lehrbuch der Arithmetik) 中首先由 6 得出 7 及 8.

和之推演律　其一. 由和之定義, §29, 及 §24 之諸律, 得 39

1. 如 $a=b$, 則 $a+c=b+c$.

2. 如 $a<b$, 則 $a+c<b+c$.

3. 如 $a>b$, 則 $a+c>b+c$.

1 自明, 因如 $a=b$, 則 $a$ 及 $b$ 指示同一之數也.

3 可證之如下, 2 可依同法證之.

如 $a>b$, 令 $a=b+d$, § 31.

則 $a+c=(b+d)+c=(b+c)+d$, §§ 34, 35, $\therefore >b+c$.

其二. 由 1, 2, 3 得其逆定理如下.

4. 如 $a+c=b+c$, 則 $a=b$.

5. 如 $a+c<b+c$, 則 $a<b$.

6. 如 $a+c>b+c$, 則 $a>b$.

譬如, 若 $a+c=b+c$, 則 $a=b$.

因否則必有或 $a<b$ 從而 $a+c<b+c$ (依 2), 或 $a>b$ 從而 $a+c>b+c$ (依 3) 故也.

其三. 由 1, 2, 3 又得

7. 如 $a=b$, 而 $c=d$, 則 $a+c=b+d$.

8. 如 $a<b$, 而 $c<d$, 則 $a+c<b+d$.

9. 如 $a>b$, 而 $c>d$, 則 $a+c>b+d$.

譬如, 若 $a=b$, 則 $a+c=b+c$; 如 $c=d$, 則 $b+c=b+d$; 故 $a+c=b+d$.

## 乘　法

乘法之定義　乘 $a$ 以 $b$ 者, 求各爲 $a$ 之 $b$ 個數之和也. 此和謂之 $a$ 爲 $b$ 乘之積, 以 $a\times b$ 或 $a\cdot b$ 表之, 或簡爲 $ab$. 故依定義. 40

$$ab=a+a+\cdots\cdots \text{達 } b \text{ 項}. \quad 41$$

42 吾人亦稱$a$為被乘數,$b$為乘數,而$a$及$b$為$ab$之因數.

43 **乘法之演算** 累加以求積,為法甚繁.故吾人默記若干之較小之數之積(乘法九九歌),用加法之諸律及說明於下之乘法之諸律,推出較大之數之積.

44 **乘法之諸律** 乘法為交換的兼結合的算法,與加法同,而其關於加法則又為"分配的"算法;即乘法遵從下三律:

45 **交換律** $ab=ba$.

乘$a$以$b$之結果,與乘$b$以$a$之結果同.

例如,$2\cdot3=6$ 又 $3\cdot2=6$.

46 **結合律** $a(bc)=(ab)c$.

乘$a$以積$bc$之結果,與乘積$ab$以$c$之結果同.

例如 $2(3\cdot4)=2\cdot12=24$; 又 $(2\cdot3)\cdot4=6\cdot4=24$.

實際上吾人用$abc$代$(ab)c$. 比較 § 36.

47 **分配律** (Distributive law) $a(b+c)=ab+ac$.

先加$b$及$c$,然後乘$a$以所得之和,與先分別乘$a$以$b$及$c$,然後加所得之積,結果相同.

例如,$3(4+5)=3\cdot9=27$; 又 $3\cdot4+3\cdot5=12+15=27$.

48 **此諸律之證明** 此諸律可證之如下:

**其一. 分配律:** $ab+ac=a(b+c)$. (1)

何則, $ab+ac=(a+a+\cdots\cdots$達$b$項$)+(a+a+\cdots\cdots$達$c$項$)$ § 41

$=a+a+a+\cdots\cdots$達$(b+c)$項$=a(b+c)$. §§ 35, 41

故 $a(b+c+\cdots\cdots)=ab+ac+\cdots\cdots$. (2)

譬如, $a(b+c+d)=a(b+c)+ad=ab+ac+ad$. 依 (1) 及 § 35

又 $ac+bc=(a+b)c$. (3)

何則, $ac+bc=(a+a+\cdots\cdots$達$c$項$)+(b+b+\cdots\cdots$達$c$項$)$

$=(a+b)+(a+b)+\cdots\cdots$達$c$項$=(a+b)c$. § 38

其二. 交換律: $ab=ba$.

$$ab=(1+1+\cdots\cdots\text{達 } a \text{ 項})\,b$$
$$=1\cdot b+1\cdot b+\cdots\cdots\text{達 } a \text{ 項} \qquad \text{依 (3)}$$
$$=b+b+\cdots\cdots\text{達 } a \text{ 項}=ba. \qquad \S\,41$$

其三. 結合律: $(ab)c=a(bc)$.

$$(ab)c=ab+ab+\cdots\cdots\text{達 } c \text{ 項} \qquad \S\,41$$
$$=a(b+b+\cdots\cdots\text{達 } c \text{ 項})=a(bc). \qquad \text{依 (2) 及 } \S\,41$$

**關於積之普偏定理** 此諸律可推廣於任何有窮數之因 49
數之積. 即

任意之有窮數之因數,無論以何順序相乘,其積常爲一定.

**積之推演律** 此諸律爲 50

1. 如 $a=b$, 則 $ac=bc$.
2. 如 $a<b$, 則 $ac<bc$.
3. 如 $a>b$, 則 $ac>bc$.
4. 如 $ac=bc$, 則 $a=b$.
5. 如 $ac<bc$, 則 $a<b$.
6. 如 $ac>bc$, 則 $a>b$.

1 自明, 因如 $a=b$, 則 $a$ 及 $b$ 指示同一之數故也. 3 可證之如下, 2 可依同法證之.

如 $a>b$, 令 $a=b+d$. 則 $ac=(b+d)c=bc+dc$, $\therefore >bc$.

4, 5, 6 爲 1, 2, 3 之逆, 可以 § 39 中之推理證之.

依 § 39 中之推理可由 1, 2, 3 證得

如 $a=b$ 而 $c=d$, 則 $ac=bd$.

如 $a<b$ 而 $c<d$, 則 $ac<bd$.

如 $a>b$ 而 $c>d$, 則 $ac>bd$.

# II. 減法及負數

## 完全標尺

**減法** 由 5 減 3 者, 求在自然標尺中佔 5 前第三個位置者 51

爲何數也.

從標尺中4起逆數三數,計爲4, 3, 2, 卽得所求之數爲2.

指示此算法用符號−(讀爲"減"), 書作$5-3=2$.

普徧言之,由$a$減$b$者,求在自然標尺中佔$a$前第$b$個位置者爲何數也.

吾人稱此數爲由$a$減$b$所得之餘,以式$a-b$表之.吾人亦稱$a$爲被減數, $b$爲減數.

52 **加法及減法互爲逆算法** (Inverse operations) 5前第三個數卽加3可得5之數甚明.

普徧言之,餘$a-b$不獨可稱爲$a$前第$b$個數,而亦可稱爲加$b$可得$a$之數,卽下之等式所確定之數.

53 $$(a-b)+b=a.$$

又,謂7佔4後第三個位置,與謂4佔7前第三個位置等,故有$4+3-3=4$. 普徧言之,

54 $$(a+b)-b=a.$$

55 因$a+b-b=a$, § 54, 減法抵銷加法; 又因$a-b+b=a$, § 53, 加法抵銷減法. 故加法及減法互爲逆算法.

56 **完全標尺** (Complete scale) 自然標尺不足以應減法之需要,因此標尺有最先之數, 1, 逆而數之則爲其所限也.

譬如,在自然標尺上由2減4爲不可能之事.

然逆數如能與順數同其無限制,便利實多.而自然標尺自身旣祇爲依一定順序而排列之符號之系統,則亦殊無理由可以反對吾人置一新符號順序系統於其前以擴充之.

故吾人依次作諸符號: 0, 置於1前; −1, 置於0前; −2, 置於

$-1$前;餘仿此.

如此卽得完全標尺

$$\cdots\cdots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots$$

其中無最先及最後之符號或"數",故順數及逆數皆可至無論何種限度.

注意此標尺關於符號0爲對稱. $-3$所以爲0前第三符號者,因3爲0後第三符號也;其他莫不如此. 57

**新數之意義**　諸新符號之一,卽0,可謂有基數之意義者.譬如,從3逆數與於3物之羣一一取去其元之動作,步驟完全一致.此動作可繼續至諸元皆盡爲止,而吾人亦可謂0卽結果所得無元之"羣"基數之符號.故吾人常認0爲自然數之一. 58

然$-1, -2, -3, \cdots\cdots$無論如何不能有基數之意義.

從他方面言之,則此諸新符號與自然數有相同之順序的特性.此諸符號各在一包含自然數之順序系統中佔一定之位置.此諸符號可謂爲此等之位置所確定,正如自然數可謂爲其標尺中之位置所確定.此一點吾人認爲稱諸符號$-1$, $-2, -3, \cdots\cdots$曰數之充分理由.

**正數及負數**　新數$-1, -2, -3, \cdots\cdots$自成一類,吾人稱之爲負數,以區別於舊有之數,稱舊有之數爲正數. 59

正負數及0,統稱整數,以區別於行將論及之其他之數.

**代數上之等及不等**　命a, b, c指示完全標尺上任意之數.依a之前於,一致於,或後於b,而書作$a<b$, $a=b$,或$a>b$. 60

§24之諸規則適用於完全標尺,因依定義此標尺爲順序系統也, §17;譬如, 61

如 $a<b$ 而 $b<c$, 則 $a<c$.

62 $a<b$ 時,卽於完全標尺中 a 居 b 前時,通常稱 a 爲代數上小於 b,而 b 爲代數上大於 a.

注意"小","大"二字如此用時,除謂於完全標尺中居前,居後,以外別無他義.譬如,"$-20$ 小於 $-18$" 祇謂 "$-20$ 居 $-18$ 前" 而已.

63 **絕對值** (Absolute or numerical value) 吾人稱 3 爲 $-3$ 之絕對值,以符號 $|-3|$ 表之,書作 $|-3|=3$. 凡負數皆仿此.

正數或 0, 絕對值卽其數自身.譬如 $|3|=3$.

64 **數值上之等及不等** 又關於完全標尺中任二數 a 及 b, 吾人稱 a 爲數值上 (Numerically) 小於,等於,或大於 b, 視 $|a|<, =,$ 或 $>b$ 而定.

譬如, $-3$ 雖代數上小於 2, 然數值上大於 2; 又 $-7$ 雖代數上小於 $-3$, 然數值上大於 $-3$.

## 負數之算法

65 **新算法** 吾人又作新算法,俾負數及 0 可以自相結合或與自然數結合,如自然數之爲加法,乘法,及減法所結合.

此諸新算法與自然數之對應算法有相同之名稱及表示方法.

仿 §60 用 a 指示完全標尺上任意之數,而 $a$ 及 $b$ 祇指示自然數,吾人可定此諸新算法之義如下:

66 **加法及減法之定義** 卽

1. $a+b$ 謂 a 後第 $b$ 個數.
2. $a-b$ 謂 a 前第 $b$ 個數.
3. $a+0$ 及 $a-0$ 皆與 a 爲同一之數.

4. $a+(-b)$ 與 $a-b$ 爲同一之數.

5. $a-(-b)$ 與 $a+b$ 爲同一之數.

換言之,加或減一正數 $b$ 於任何數 $a$ 者,即在標尺中順數或逆數 $b$ 個數之謂,其意義蓋同前;而加或減一負數則等於減或加其對應正數.

例如,依 1, $-3+2=-1$, 因 $-1$ 爲 $-3$ 後第二數.

依 2, $2-5=-3$, 因 $-3$ 爲 2 前第五數.

依 4, $-5+(-2)=-5-2=-7$ (依 2).

依 5, $-6-(-2)=-6+2=-4$ (依 1).

**乘法之定義** 即 67

1. $0\cdot a$ 及 $a\cdot 0$ 謂 0.

2. $a(-b)$ 及 $(-a)b$ 謂 $-ab$.

3. $(-a)(-b)$ 謂 $ab$.

換言之,異於 0 之二因數之積,爲正或爲負,視其因數有同號或異號而定.而積之絕對值,則常爲因數絕對值之積.

例如,依 2, $3\times-2=-6$, 又 $-3\times2=-6$.

依 3, $-3\times-2=6$,

**此諸定義之起原及意義** 注意 §§ 66, 67 所述既非假定,亦非待證之定理,祇是所謂新算法之定義而已. 68

譬如,他無憑藉,而欲徑由自然數乘法之定義證明 $2(-3)=-2\cdot3$, 實爲不合理之事,因 $-3$ 非自然數甚明也."2 取 $-3$ 次" 一語,絕無意義可言.

然此種算法何爲而作也.欲負數在數與數以及物與物關係之究研中能有最大之效用而已.

新算法本非虛構者;乃舊算法向新數方面之自然擴張也.

吾人處理自然數時,先定加法之義爲一動作(順數),然後證

明此動作之結果有兩種性質與所加諸數之值無關者,即:

1. $a+b=b+a$ 2. $a+(b+c)=(a+b)+c$.

同樣吾人證得積有三種普徧的性質:

3. $ab=ba$. 4. $a(bc)=(ab)c$. 5. $a(b+c)=ab+ac$.

用文字表數時,(1)至(5)諸性質實際上成爲加法及乘法之運用定義;何則,此時吾人當然不能眞作順數等動作也.

如欲新數之對應算法能稱職,新數必須仍適用(1)至(5)諸性質甚明.而§§66,67不過具述以下問題之解答而已.

推廣加法,乘法,及減法之意義,使完全標尺上任何數之和及積能有(1)至(5)諸性質,且減法仍爲加法之逆.

譬如,(1)吾人定加一正數 b 於 a 之義爲順數,減爲逆數,此僅重述加法及減法之舊定義而已.

(2)由如此之加法定義得 $-b+b=0$.

然如交換律 $a+b=b+a$ 仍適用,必有 $-b+b=b+(-b)$,從而 $b+(-b)=0$;或,因 $b-b=0$,必有 $b+(-b)=b-b$.

此點啟示 $a+(-b)=a-b$ 之定義.

(3)如新加法及減法爲互逆之算法,與舊算法同,則必如§66,5所云,$a-(-b)=a+b$.

(4)再,欲保存加法及乘法間舊有之關聯,§41,則必如§67,2所云,

$$(-a)b=-a+(-a)+\cdots\cdots \text{迄 } b \text{ 項}$$
$$=-a-a-\cdots\cdots \text{迄 } b \text{ 項}=-ab.$$

(5)如交換律 $ab=ba$ 仍適用,必有 $a(-b)=(-b)a=-ba=-ab$,如於§67,2.

(6)同理,$0+0+\cdots\cdots$迄 $a$ 項$=0$,此事及吾人欲遵從律 $ab=ba$ 之願望導吾人於§67,1之定義;即 $0\cdot a=0$ 及 $a\cdot 0=0$.

(7)最後,由(6)得 $(-a)(-b+b)=-a\cdot 0=0$.

然如分配律仍適用,必有 $(-a)(-b+b)=(-a)(-b)+(-a)b=(-a)(-b)-ab$,依(4).

故有 $(-a)(-b)-ab=0$.因此又有 $ab-ab=0$,故吾人定 $(-a)(-b)$ 之義爲 $ab$ 與§67,3.相同.

適所定諸算法之義還從交換,結合,及分配律 今須證新 69
算法與前述諸律完全一致矣.

先用 §§ 37, 52 之推理,由加法減法爲順數逆數之定義得

$$a+(b+c)=a+b+c, \tag{1}$$

$$a-(b+c)=a-b-c, \tag{2}$$

$$a+b-b=a-b+b=a. \tag{3}$$

I. **交換律**, $a+b=b+a$.

其一, $-a+b=b+(-a)$.

何則,如 $a>b$, 令 $a=d+b$. §§ 31, 34.

則 $-a+b=-(d+b)+b$

$=-d-b+b=-d$; 依 (2) 及 (3)

又 $b+(-a)=b-(b+d)$, § 66, 4

$=b-b-d=-d$. 依 (2)

$b>a$ 時仿此.

其二, $-a+(-b)=-b+(-a)$.

何則, $-a+(-b)=-(a+b)=-(b+a)=-b+(-a)$,

依 (2) 及 § 66, 4.

II. **結合律**, $a+(b+c)=(a+b)+c$.

其一, $a+[b+(-c)]=a+b+(-c)$.

何則,如 $b>c$, 令 $b=d+c$ §§ 31, 34

則 $a+[b+(-c)]=a+[d+c+(-c)]=a+d$,

又 $a+b+(-c)=a+d+c+(-c)=a+d$. 依 (3) 及 § 66, 4

$c>b$ 時仿此.

其二, $a+[(-b)+c]=a+(-b)+c$.

可由 1 及適所論者推得.

其三, $a+[-b+(-c)]=a+(-b)+(-c)$.

可由 (2) 及 § 66, 4 推得,因 $-b+(-c)=-(b+c)$ 也.

III. 交換律, $ab=ba$.

其一, $(-a)b=b(-a)$.

何則, $$(-a)b=-ab=-ba=b(-a).\qquad \S\,45;\ \S\,67,\,2$$

其二, $(-a)(-b)=(-b)(-a)$.

何則, $$(-a)(-b)=ab=ba=(-b)(-a)\qquad \S\,45;\ \S\,67,\,3$$

IV. 結合律, $a(bc)=(ab)c$.

其一, $(-a)[(-b)(-c)]=[(-a)(-b)](-c)$.

何則, $$(-a)[(-b)(-c)]=(-a)\cdot bc=-abc,\qquad \S\,46,\ \S\,67,\,2,\,3$$

又 $$[(-a)(-b)](-c)=ab\cdot(-c)=-abc.\qquad \S\,67,\,2,\,3$$

其二, 其他之情形得同樣證明之.

V. 分配律, $a(b+c)=ab+ac$.

其一, $a[b+(-c)]=ab+a(-c)$.

何則, $$[b+(-c)]a=[b+(-c)]+[b+(-c)]+\cdots\cdots\text{達 }a\text{ 項}$$
$$=b+b+\cdots\cdots\text{達 }a\text{ 項}+(-c)+(-c)+\cdots\cdots\text{達 }a\text{ 項}$$
$$=ba+(-c)a\qquad \S\,41;\ \S\,67,\,2;\ \text{II 及 III}$$

故 $$a[b+(-c)]=ab+a(-c).\qquad \text{依 III}$$

其二, 其他之情形得由此推出.

譬如, $$(-a)[b+(-c)]=-a[b+(-c)]$$
$$=-[ab+a(-c)]=(-a)b+(-a)(-c).$$

**79** **普徧結果** 前已述及, § 68, 在文字算術即代數, $a+b=b+a$ 等諸律,於文字 $a, b, c$ 表自然數時,等於加法及乘法之定義.且已證得此種定義適用於完全標尺中之一切數.

此諸律使吾人能變一文字式之形式而不變其值,無論式中文字表完全標尺中何數.

譬如,無論 $a, b, c, d$ 表正整數或負整數,

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$$
$$=ac+bc+ad+bd.$$

**和之推演律** 仿§39得證 71

依 $$a<,=,\text{或}>b,$$

而 $$a+c<,=,\text{或}>b+c,$$

其逆亦眞.

故下之定理對於正負數皆眞.

等式或不等式之兩端加或減同一之數時,等式仍爲等式,不等式其號向不變. 72

**積之推演律** 注意任二數 a, b 之符號變更時,則其在完全標尺上之次序反轉,§57. 73

例如, $-3<-2$, 而 $3>2$; $-5<2$, 而 $5>-2$.

據此依§50之推理可得

依 $$a<,=,\text{或}>b,$$

而 $$ac<,=,\text{或}>bc,$$

又 $$a(-c)>,=,\text{或}<b(-c);$$

其逆亦眞.故

等式之兩端乘同一之正數或負數仍爲一等式. 74

不等式之兩端乘同一之正數時其號向不變.

不等式之兩端乘同一之負數時其號向變,原爲<者變爲>,原爲>者變爲<.

由上述諸法則之第一條及乘0之定義即 $a\cdot 0=0$, 得下之要重定理:

1. 如 $a=b$, 則 $ac=bc$. 75

2. 如 $ac=bc$, 則 $a=b$, 但 $c=0$ 除外.

2之除外之情形應特別注意.

譬如,等式 $2\cdot 0=3\cdot 0$ 雖眞, $2=3$ 當然不可.

76 爲零之積. 如積爲0,其因數之一必爲0.

譬如,若 $ab=0$, 則或 $a=0$, 或 $b=0$.

何則,因 $0\cdot b$ 亦等於 0,

故有 $$ab=0\cdot b,$$

從而 $$a=0,\ 但\ b\neq 0\ 除外.\qquad \S 75$$

77 積之絕對值 二或更多之因數,其積之絕對值爲各因數絕對值之積.

例如, $|(-2)(-3)(-4)|=|-24|=24$; 及 $|-2|\cdot|-3|\cdot|-4|=24$.

78 和之絕對值 二數之和之絕對值,在二數符號相同時爲其絕對值之和,相反時爲其絕對值之差.

例如, $|-3+(-5)|=|-8|=8$; 又 $|-3|+|-5|=3+5=8$.

而 $|2+(-5)|=|-3|=3$; 又 $|-5|-2=3$.

## 測量時整數之用

79 測量 (Measurement) 不獨數各個分離之羣之結果用數記之,測時間,直線,面積等一切之量之結果亦用數示之.

80 測一量時可擇同類之特殊量爲單位與之比較.

81 如此量適含單位若干次,則其次數謂之爲此量之測度 (Measure).

線分之測度特稱爲其線分之長.

譬如,測一線分時,可將選定之單位線分如英尺之類在其上量之,視其能含幾次.

如適含三次,則稱此線分爲三英尺長,或其長——即其測度——爲3.

82 自然數於標尺中之相關位置,示以之爲測度之量之大小關係.測量時自然數所以有用者在此.

**測量時負數之應用** 由一定之"起點"向相反之"方向"作測量,爲常見不鮮之事. 83

譬如,測時間則論紀元前後幾年,測經度則論格林威(Greenwich)或華盛頓(Washington)西東幾度,測溫度則論零點上下幾度.

如作於一方向之測量用正數表之,而作於他方向之測量用負數表之,二者之間即有區別.

譬如,就下圖論之. 84

| ······ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | ······ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ······ | $P_{-4}$ | $P_{-3}$ | $P_{-2}$ | $P_{-1}$ | $O$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | ······ |

則起點,或原點,爲$O$,單位爲$OP_1$,而$P_2, P_3, \cdots\cdots P_{-1}, P_{-2}\cdots\cdots$諸點適合以下條件:

$$OP_1=P_1P_2=P_2P_3=\cdots\cdots=P_{-1}O=P_{-2}P_{-1}=\cdots\cdots.$$

依次書完全標尺之諸數於此諸點之上,使0居$O$上.

則居任一點$P$之上之數,其符號示$P$對於$O$之方向,而其絕對値示$P$至$O$之距離,即線分$OP$之長.

例如,居$P_{-3}$之上之數$-3$,示$P_{-3}$在$O$之左方三單位之距離.

且此諸點於直線上之順序,其對應數以其於標尺中之順序示之.

**以點表數** 因點之系統$\cdots\cdots, P_{-2}, P_{-1}, O, P_1, P_2, \cdots\cdots$與數之系統$\cdots\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\cdots$之間有一對一之關係,每一系統得以他系統代表之.以點表數今後將成爲常見之事. 85

# III. 除法及分數

## 爲累減之法之除法

**兩種除法** 在算術及代數中,算法之名爲除法者有二.其 86

一可謂累減之法,其他可謂乘法之逆.二者有相一致之時,謂之整除之情形.

87 **爲累減之法之除法** 除 7 以 3 於第一種意義上爲求答下二問題:

1. 由 7 減 3 之幾倍始能得小於 3 之餘數?

2. 此餘數若何?

此二問題之解答可由累減 3 得之.譬如,因 $7-3=4$ 而 $4-3=1$,故須減 3 二次,亦即須減 $3\times2$.而餘數爲 1.

故第一種除法與累減同,其於減法如乘法之於加法.

注意 7, 3, 2, 1 四數間之關係可以下式表之.

$$7=3\cdot2+1.$$

普徧言之,如 $a$ 及 $b$ 爲任二自然數,則除 $a$ 以 $b$ 於思考中之意義上爲求二自然數 $q$ 及 $r$,其一可爲 0,俾

88 $$a=bq+r \text{ 而 } r<b.$$

89 $a$ 稱爲被除數,$b$ 爲除數,$q$ 爲商,而 $r$ 爲餘數.

90 [illegible] 已與 $a$ 及 $b$ 時,適合 §88 之二數 $q$ 及 $r$ 常可求得.

譬如,若 $a<b$,則 $q=0$ 而 $r=a$.

若 $a\geqq b$,由於 §§ 31, 35,和 $b+b+\cdots\cdots$ 可繼續至與 $a$ 相等或再加一 $b$ 將大於 $a$ 爲止.如 $q$ 爲此和之項數,則依 § 41 或 $a=bq$,或 $a=bq+r$ 而 $r<b$.

又已與 $a$ 及 $b$ 時祇有一組數 $q$ 及 $r$ 能適合 § 88.

何則,如有第二組如此之數 $q'$ 及 $r'$ 存在,則

$$bq+r=bq'+r', \text{ 從而 } b(q-q')=r'-r.$$

此事不可能,因 $r'-r$ 數值上小於 $b$,而 $b(q-q')$ 數值上不小於 $b$ 也.

91 **整除法** (Exact division) 如被除數 $a$ 爲除數 $b$ 之倍數,例如 $a=12$ 而 $b=3$ 時,餘數 $r$ 爲 0.吾人稱 $b$ 爲能整除 $a$.在此情形 § 88 之等式化爲 $a=bq$.或

92 $$qb=a.$$

故 $a$ 能爲 $b$ 整除時,商 $q$ 亦可謂爲乘 $b$ 可得 $a$ 之數. 93

又在此情形吾人以式 $a \div b$ 指示除法,以 $\frac{a}{b}$ 或 $a/b$ 表商 $q$, 94
書作 $q=\frac{a}{b}$ 或 $qb=a$.

## 關於整除法之定理及公式

**定理 1.** 整除法與乘法互爲逆算法;卽 95

$$a \div b \times b = a, \text{ 又 } a \times b \div b = a.$$

此二等式可由 §93 及 §87 之定義分別得出.

**定理 2.** 在整除之情形,以同數乘被除數及除數,其商不變. 96

何則,如 $a=qb$, 則 $am=q \cdot bm$. §§50, 46

卽,如 $q=\frac{a}{b}$, 則 $q=\frac{am}{bm}$. §94

**定理 3.** 整除法關於加法及減法爲分配的算法,與乘法相同;卽 97

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \text{ 又 } \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

何則,如 $a=qc$ 而 $b=q'c$,

則 $a+b=qc+q'c=(q+q')c$. §§39, 47

故 $\frac{a+b}{c}=q+q'=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$. §94

減法仿此.

例如, $\frac{18}{3}+\frac{9}{3}=6+3=9$; 又 $\frac{18+9}{3}=\frac{27}{3}=9$.

**關於加減商之公式** 公式爲 98

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}; \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

何則，
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$ §§ 96, 97

減法仿此．

例如，
$$\frac{18}{3}+\frac{10}{5}=6+2=8;\ \text{又}\ \frac{18\cdot5+10\cdot3}{3\cdot5}=\frac{120}{15}=8.$$

99 **關於商相乘之公式** 公式爲

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

何則，如 $a=qb$ 而 $c=q'd$，則 $ac=qq'\cdot bd$. §§ 50, 45, 46

故
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=q\cdot q'=\frac{ac}{bd}.$$ § 94

例如，
$$\frac{15}{3}\cdot\frac{6}{2}=5\cdot3=15;\ \text{又}\ \frac{15\cdot6}{3\cdot2}=\frac{90}{6}=15.$$

100 **關於一商整除他商之公式** 公式爲

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

何則，如 $a=qb$，$c=q'd$，而又 $q=q''q'$，

則有
$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=q\div q'=q''.$$ § 94

及
$$\frac{ad}{bc}=\frac{qbd}{bq'd}=\frac{q}{q'}=q''.$$ §§ 96, 94

例如，
$$\frac{24}{6}\div\frac{10}{5}=4\div2=2;\ \text{及}\ \frac{24\cdot5}{6\cdot10}=\frac{120}{60}=2.$$

101 **整除法之於負數** 被除數及除數不皆爲正數，但後者之絕對値能整除前者之絕對値時，§ 93 所述商之定義仍有意義甚明．以 § 94 之法表此等之商，則有下之定理：

102 **定理 4.** 如 $b$ 能整除 $a$，則

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b};\quad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b};\quad \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

何則，如 $a=qb$，則有 $-a=(-q)b$. §§ 73, 67

故
$$\frac{-a}{b}=-q=-\frac{a}{b}.$$ § 94

其他仿此．

零與整除法之關係 1. 反之,除數爲 0 時 §93 所述商之定義絕無意義可言. 103

何則,無論 $a$ 指示何數, $a\times 0=0$. 故 (1) 每一數爲乘 0 可得 0 之數; (2) 無一數乘 0 可得 $a$.

換言之,依 §93 及 §94 之定義,符號 0/0 將指每一數,而 $a/0$ 全不能指示何數.

2. 然如被除數爲 0 而除數爲異於 0 之數 $b$, 則 §93 之定義有意義. $0/b$ 所指示之商實爲 0.

何則,依 §94, $0/b$ 指示乘 $b$ 可得 0 之數,而 0 即其數(且爲唯一之數),因 $0\cdot b=0$ 也.

## 分數 爲乘法之逆之除法

§86 中所云第二種除法,爲 §93 中所定整除法之義之推廣. 其法使數系統中加入分數成爲必要. 今爲此種新數求一順序的定義,如於 §56 已與負數者. 下之定理啓示一種方法. 此定理中之 $a, b, c, d$ 指示自然數.

定理 5. $b$ 能整除 $a$ 而 $d$ 能整除 $c$ 時,商 $a/b$ 及 $c/d$ 於自然標尺中之相關順序,與積 $ad$ 及 $bc$ 之相關順序同;即 104

$$a/b<,=,\text{或}>c/d,\ \text{視}\ ad<,=,\text{或}>bc\ \text{而定}.$$

1. 何則,如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a}{b}bd=\frac{c}{d}db$. §50

然 $\frac{a}{b}b=a$, 而 $\frac{c}{d}d=c$. §§93, 94

故 $ad=bc$.

仿此得證

如 $a/b<c/d$, 則 $ad<bc$; 又如 $a/b>c/d$, 則 $ad>bc$.

2. 雜上所述,又可證逆定理

如 $ad=bc$, 則 $a/b=c/d$.

何則,設或不然,將有 (1) $a/b<c/d$, 從而 $ad<bc$, 或 (2) $a/b>c/d$, 從而 $ad>bc$. 仿此得證

如 $ad<bc$, 則 $a/b<c/d$; 又如 $ad>bc$, 則 $a/b>c/d$.

105 **順序數系之擴充** 然無論 $a, b, c, d$ 之與値能使 $b$ 整除 $a$, $d$ 整除 $c$ 與否, $ad$ 及 $bc$ 於標尺中之相關順序常可知.

故任取二自然數 $a$ 及 $b$, $b$ 不爲 0, 作式 $\frac{a}{b}$ 或 $a/b$.

如 $b$ 能整除 $a$, $a/b$ 仍以示自然數之表 $b$ 除 $a$ 之商者; 否則 $a/b$ 暫時祇作一新符號觀,讀爲"$b$ 分之 $a$," 其與除法之關係尙待規定, § 122.

$a/b$ 前於,一致於,或後於 $c/d$, 視 $ad$ 前於,一致於,或後於 $bc$ 而定.依此法則排列一切之 $a/b$, $c/d$, 等符號,則此諸符號亦具有順序的性質,如表自然數之符號矣.

如仍以符號 $<, =, >$ 表"前於","一致於","後於",則此法則爲

106 令 $a/b<, =,$ 或 $>c/d$, 視 $ad<, =,$ 或 $>bc$ 而定.

例如, $4/5$ 應前於 $7/8$, 卽 $4/5<7/8$, 因 $4\cdot 8<7\cdot 5$. 又 $2/3$ 應介乎 0 與 1 之間,或 $0<2/3<1$. 何則, $0/1<2/3$, 因 $0\cdot 3<2\cdot 1$; 又 $2/3<1/1$, 因 $2\cdot 1<1\cdot 3$.

107 諸符號 $a, b$ 之表自然數者,此法則爲之指定其標尺中固有之位置;其不表自然數者,則爲之指定位置於標尺中連續二數之間.

108 **注意** 欲求任一特殊符號 $a/b$ 關於標尺中之數如此規定之位置,可化 $a$ 爲 $a=bq+r$ 之形式,其中 $r<b$, § 83. 如 $r=0$, $a=bq$, 依法則 $a/b$ 與 $q$ 一致. 如 $r$ 不爲 0, 則依法則位置 $a/b$ 於 $q$ 與 $q+1$ 之間.

109 符號 $a/b$ 之全集,若是定義及排列(如構成其一部分之自然標尺)者,成一順序系統.

何則,列舉於 §§ 17, 18 之順序系統之諸性質,此集皆具有之.

譬如,若 $a/b<c/d$, 而 $c/d<e/f$, 則 $a/b<e/f$.

何則,若 $a/b<c/d$, 而 $c/d<e/f$,

則有 $ad<bc$, 及 $cf<ed$. § 106

第一不等式之兩端各乘以第二不等式之對應端,則有

$adcf<bced$. § 50

故 $af<be$. § 50

從而 $a/b<e/f$. § 106

**分數** $a/b$ 不表自然數時,謂之分數;$a$ 爲其分子,$b$ 爲其分母,通稱爲其項.故 110

分數者,乃 $a/b$ 形式之符號,其意義則視其在包含自然數之順序系統中,所佔之位置而定.

故由順序的觀點言之,分數之稱爲數,實有正當理由.*

**負分數** 吾人更作分子分母二者或其一爲負整數之分數,如 $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$, $\frac{-a}{-b}$, 就順序以定其義如下: 111

1. $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$.

2. 各負分數居 0 前.

3. 負分數關於相互間(及負整數)依下之法則而排列.

$-\frac{a}{b}<, =,$ 或 $>-\frac{c}{d}$, 視 $-ad<, =,$ 或 $>-bc$ 而定.

---

*用 § 106 之法則亦可定 1/0, 2/0, 等符號在順序上之意義.

譬如,依法則 1/0 應後於各數 $a/b$ 之分母 $b$ 不爲 0 者. 何則 $1/0>a/b$, 因 $1\cdot b>a\cdot 0$ 也.

又, 1/0, 2/0, 等應於順序系統中佔同一之位置.何則, $1/0=2/0$, 因 $1\cdot 0=2\cdot 0$ 也.

然此法則不能與符號 0/0 以一定位置. 何則,無論 $a$ 及 $b$ 之値若何,常有 $0/0=a/b$. 因 $0\cdot b=a\cdot 0$ 也.

112 **有理數之系統** 整數及分數,統稱有理數,以區別於尙待探討之其他之數.有理數所組成之系統,稱爲有理數系.

此系統有一重定性質,爲其部分(整數系)所無者,即:

113 有理數系是稠密的(Dense);即任二不等之其理數之間,有其他之有理數存在.

何則,令 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 爲任二分數,$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$. 則分數 $\frac{bc+ad}{2bd}$ 介乎 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 之間,可證之如下;

因 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, 有 $ad<bc$. § 106

1. 如加 $ad$ 於 $ad<bc$ 之兩端依 §§ 39, 50, 106 應有

$$2ad<bc+ad, \quad \therefore \ a(2bd)<b(bc+ad), \quad \therefore \ \frac{a}{b}<\frac{bc+ad}{2bd}.$$

2. 如加 $bc$ 於 $ad<bc$ 之兩端,同前應有

$$bc+ad<2bc, \quad \therefore \ (bc+ad)d<c(2bd), \quad \therefore \ \frac{bc+ad}{2bd}<\frac{c}{d}.$$

例如,$\frac{3}{4}$ 與 $\frac{5}{6}$ 之間,有 $\frac{4\cdot 5+3\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{38}{48}=\frac{19}{24}$.

114 故於論及有理數時,切須避免與數之"繼大或繼小之數"一類之辭句;因如此之數並不存在也.各整數有爲其繼數之整數.然任一有理數與指定爲其繼數者之間,常有其他之有理數存在.

115 **分數之算法** 以下 $a, b, c, d$ 表任與之正負整數.

$a/b$ 及 $c/d$ 表整數時,會於 §§ 98—102 證得

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. 2. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.

3. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. 4. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$, 如 $\frac{ad}{bc}$ 爲整數.

然 1, 2, 3, 4 諸等式之右端,即在 $a/b$ 及 $c/d$ 不表整數時,亦有

意義蓋皆爲一定之分數,其義如 §§ 110, 111 中所定者也.

故 1, 2, 3, 4 直詔吾人以如何推廣加減乘除之意義,使此諸算法亦適用於分數,即:

二分數 $a/b$ 及 $c/d$ 之和謂分數 $(ad+bc)/bd$. 116

由分數 $a/b$ 減分數 $c/d$ 所得之差謂分數 $(ad-bc)/bd$. 117

二分數 $a/b$ 及 $c/d$ 之積謂分數 $ac/bd$. 118

分數 $a/b$ 除以分數 $c/d$ 所得之商謂分數 $ad/bc$. 119

注意此諸定義等於初等算術中計算分數之法則.

交換,結合,及分配之律控制此諸推廣之算法. 120

譬如, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$. §§ 118, 59

推演律, §§ 71, 73, 亦適用於此諸算法. 121

譬如,若 $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$, 則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

何則,如 $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$ 則 $aedf=cebf$. §§ 118, 106, 111

故 $ad=cb$ 從而 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. §§ 73, 106, 111

**分數定義爲商** 分數 $a/b$ 今可定其義爲乘 $b$ 可得 $a$ 之數, 122
即下之等式所確定之數.

$$\frac{a}{b}\cdot b=a. \qquad 123$$

何則, $\frac{a}{b}\cdot b=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{1}=\frac{ab}{1\cdot b}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{b}=a$. §§ 106, 111, 118

**除法爲乘法之逆** 由 §§ 118, 119, 得 124

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b} \text{ 及 } \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b};$$

換言之, §§ 118, 119 所定乘法及除法之義,互爲逆算法.比較 § 55.

何則,依 §§ 118, 119 及 §§ 106, 111 得

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}\cdot\frac{dc}{cd}=\frac{a}{b};\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\div\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\div\frac{c}{d}=\frac{acd}{bdc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{cd}{dc}=\frac{a}{b}.$$

故此種之除法可謂乘法之逆,且得謂

125 除 $a/b$ 以 $c/d$ 者,求乘 $c/d$ 可得 $a/b$ 之數也.

數系中加入分數之結果,使如此之數常可求得,除非除數 $c/d$ 爲 0.

算術及代數中,除法通常之意義如此,而實爲整除法之推廣, § 93.

126 **化分數爲其最低項 不可約分數** 如分數之分子及分母有公因數,雙方消去之不變分數之値.

何則, $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$, 因 $am\cdot b=a\cdot bm$, § 106.

一切之此種公因數皆已消去以後,其分數稱爲最低項分數,或不可約分數.

127 **定理** 如 $a/b$ 爲不可約分數,而他分數 $a'/b'$ 與之相等,則 $a'$ 及 $b'$ 各自爲 $a$ 及 $b$ 之同倍數.

何則因 $a'/b'=a/b$, 從而 $a'b=ab'$, 故 $a$ 爲 $a'b$ 之一因數.

然依假設, $a$ 及 $b$ 無公因數,故 $a$ 必爲 $a'$ 之一因數. § 492, 1.

故有 $a'=ma$, 其中 $m$ 爲整數.

$a'b=ab'$ 中以 $ma$ 代 $a'$, 即得 $mab=ab'$, 從而 $b'=mb$, § 50.

128 **系** 如二不可約分數相等,則其分子分母各自相等.

## 測量時分數之用

129 **以分數表長** § 81 之長之定義,僅適用於線分 $S$ 之整含單位線分 $s$ 者.

然縱S不整含s,不妨S與s可通約;卽S可整含s之二分之一,三分之一,或其他之分盡部分.在此情形吾人定其長之義如下:

如一與線分適含單位線分之$b$分之一$a$次,則稱其線分以分數$a/b$爲長. 130

例如,若S適含s之十分之一7次.則(以s爲單位時)S之長爲7/10.

**附註** 注意如以s爲單位時S之長依定義爲$a/b$,則凡$ma/mb$形式之分數皆爲S之長. 131

何則,如S適含s之$b$分之一$a$次,S自必適含s之$mb$分之一$ma$次.

測量時分數所以有用之理由與整數同:卽,以分數爲長之線分,其大小關係,分數以其於有理數系中之相關位置示之. 132

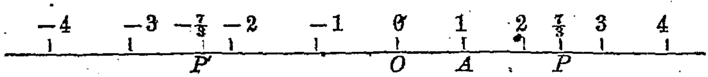
何則,如以s爲單位時S及T之長爲$a/b$及$c/d$,則$ad/bd$及$bc/bd$亦爲S及T之長,§131;卽S適含s之$bd$分之一$ad$次,而T適含$bc$次.

故　　S<, =, 或>T, 視$ad<, =,$ 或 $>bc$而定,

卽　　S<, =, 或>T, 視$a/b<, =,$ 或 $>c/d$而定. §106

**附註** 今之長之定義,卽等於初等算術中分數之定義,又初等算術中以線分或其他之量之大小定其對應分數大小之義,自不待言. 133

**以點表有理數** 分數亦如整數,可以一無限直線上之點表之,§85. 134




譬如,若欲作一點$P$使表7/3如$A$之表1,只須取單位$O$之三分之一在$O$之右方量七次卽得.*

$O$左方之對稱點$P'$爲$-7/3$之跡.

其他之正負分數仿此.

凡此種之點皆在直線上依其所表之有理數之順序而排列.故吾人常稱一有理數居於他有理數之左或右,或介乎他 135

二有理數之間.

# IV. 無理數

## 發端

136 定義. 積 $aa$ 以 $a^2$ 表之,讀爲"$a$ 之平方";積 $aaa$ 以 $a^3$ 表之,讀爲"$a$ 之立方";積 $aaa\cdots\cdots$ 達 $n$ 因數以 $a^n$ 表之,讀爲"$a$ 之 $n$ 次冪".

諸符號 $a^2, a^3, a^n$ 中, $2, 3, n$ 諸數稱爲指數; $a$ 自身稱爲底.

由 $a$ 求 $a^2$ 謂之平方 a; 求 $a^3$, 立方 a; 求 $a^n$, 作 a 之 $n$ 次冪.

作與數之與乘冪,其算法亦稱乘方.

137 方根及對數 如 $a$ 爲有理數,而 $n$ 爲正整數, $a^n$ 亦爲有理數.命其數爲 $b$; 則

$$a^n=b.$$

此方程式啓示二新問題:

其一. 授值於 $n$ 及 $b$, 而求 $a$.

其二. 授值於 $a$ 及 $b$, 而求 $n$.

譬如, (1) 令 $n=2$, $b=9$. 方程式成爲

$$a^2=9.$$

因 $3^2=9$ 又 $(-3)^2=9$, 求得 $a=3$ 或 $-3$.

又, 2 令 $a=2$, $b=8$. 方程式成爲

$$2^n=8.$$

因 $2^3=8$, 求得 $n=3$.

138 如 $$a^n=b,$$

1. $a$ 稱爲 $b$ 之 $n$ 次方根,以符號 $\sqrt[n]{b}$ 表之. $n=2$ 時則用較簡之符號 $\sqrt{b}$, 讀爲"$b$ 之平方根".

2. $n$ 稱爲 $b$ 之以 $a$ 爲底之對數,以符號 $\log_a b$ 表之.

例如,因 $3^2=9$ 又 $(-3)^2=9$, 3 及 $-3$ 皆爲 9 之平方根,皆可以 $\sqrt{9}$ 表之;但宜參看 § 139.

又, 2 爲 9 之以 3 爲底之對數;卽 $2=\log_3 9$.

**注意** 9 之兩平方根雖俱可以 $\sqrt{9}$ 代表,吾人亦可用 $\sqrt{9}$ 表正平方根 3, 而以 $-\sqrt{9}$ 表負平方根 $-3$. 初等代數中表平方根時常用此法,本書從之. 139

**開方及求對數** 已與 $n$ 及 $b$ 求 $\sqrt[n]{b}$,其算法稱爲求 $b$ 之 $n$ 次方根,或開方. 140

已與 $a$ 及 $b$ 求 $\log_a b$,其算法稱爲求 $b$ 之以 $a$ 爲底之對數.

此二算法皆爲乘方之逆, §§ 55, 124.

**注意** 加乘二法各祇有一逆,而乘方有二者,其故可比較下列三等式而知之. 141

1. $a+b=c$.　2. $ab=c$.　3. $a^b=c$.

因 $a+b=b+a$, 又 $ab=ba$. 故於 1 及 2, 與 $c$, $b$ 求 $a$ 及與 $c$, $a$ 求 $b$ 爲性質上相同之問題.

然 $a^b$ 不等於 $b^a$. 故於 3, 與 $c$, $b$ 求 $a$ 及與 $c$, $a$ 求 $b$ 爲性質上全不相同之問題.

**新數成爲需要** 以後當詳論此諸新算法,因在代數上其重要僅次於基本四則也.今須注意者,則爲:此諸新算法使數系之再度擴充成爲必要. 142

蓋顯而易見 $\sqrt[n]{a}$ 僅在例外之情形中能表有理數也.

譬以最簡之例, $\sqrt{-1}$ 及 $\sqrt{2}$ 皆非有理數,何則,

1. 因各有理數之平方皆爲正數,有理數無平方爲 $-1$ 者,故 $\sqrt{-1}$ 不能表有理數.

2. 有理數無平方爲 2 者.何則, 2 非整數之平方甚明. 2 亦非分數之平方,可證之如下:

設 $p/q$ 爲一最低項分數,而

$$(p/q)^2=2, \text{ 或 } p^2/q^2=2/1.$$

則因 $p^2/q^2$ 亦爲最低項分數, § 492, 2, 依 § 128 將有 $p^2=2$. 此事不可能,因 $p$ 爲整數也.

故 $\sqrt{2}$ 不能表有理數.

仿此得證如 $a/b$ 爲任一最低項分數, $\sqrt[n]{a/b}$ 不能表有理數, 除非 $a$ 及 $b$ 皆爲整數之 $n$ 次乘冪.

吾人創二類新數以補數系此種不足. 其一爲無理數, $\sqrt{2}$ 屬之; 他一爲虛數, $\sqrt{-1}$ 屬之.

本章專論無理數, 下一章再論虛數.

## 無理數之順序的定義

在本章中, 文字 $a, b, c,$ 等指示任何有理數, 不論其爲正數或負數, 整數或分數.

143　**有理數系之普偏的性質.** 有理數所組成之系統, 具有以下性質:

1. 此系統爲一順序系統.

2. 此系統是稠密的; 即此系統任二不等之數 $a$ 及 $b$ 之間, 尚有此系統其他之數存在.

3. 此系統任二數之和, 差, 積, 商仍爲此系統之數, 但 0 除任一數之商爲例外.

依後述之定義, 吾人將創一更爲擴大之系統, 具有此三性質, 而包含有理數系統於其中.

144　**第一種之分法** (Separations)　**1.** 數 $\frac{1}{2}$ 分有理數系其餘之數爲二類: 其一爲前於 (小於) $\frac{1}{2}$ 之諸有理數所組成, 他一爲後於 (大於) $\frac{1}{2}$ 之諸有理數所組成. 此數之二類吾人分別名之爲 $C_1$ 及 $C_2$.


圖中在點 $\frac{1}{2}$ 左方之半直線包含類 $C_1$ 諸數之圖象, 在其右方之半直線包含類 $C_2$ 諸數之圖象.

由§§109,111及113立得:

1. $C_1$中各數前於$C_2$中各數.

2. $C_1$中無最後之數,$C_2$中無最先之數.

譬如,若$C_1$中有最後之數,其數與$\frac{1}{3}$之間應有他數存在,§113,此事不可能,因依假設凡小於$\frac{1}{3}$之有理數皆在$C_1$中也.

2. 有理數系如此分爲$C_1$,$\frac{1}{3}$,$C_2$三部分之法,代之以1/3附屬於$C_1$,合成類$C_1'$,而謂: 145

數$\frac{1}{3}$分有理數系全體爲$C_1'$及$C_2$二部分,俾

1. $C_1'$中各數前於$C_2$中各數.

2. $C_1'$中有最後之數,即$\frac{1}{3}$,而$C_2$中無最先之數.

3. 或以$\frac{1}{3}$附屬於$C_2$,合成類$C_2'$而謂: 146

數$\frac{1}{3}$分有理數系全體爲$C_1$及$C_2'$二部分,俾

1. $C_1$中各數前於$C_2'$中各數.

2. $C_1$中無最後之數,而$C_2'$中有最先之數,即$\frac{1}{3}$.

各有理數同樣分有理數系甚明.

反之,如能依任何方法分有理數系全體爲二部分$B_1$及$B_2$,俾$B_1$中各數前於$B_2$中各數,且$B_1$中有最後之數或$B_2$中有最先之數,則此一分法足以區別此最後或最先之數於一切其他之數,而確定其意義如此. 147

譬如,令一切負有理數屬於$B_1$,而其餘之有理數屬於$B_2$.則$B_1$中無最後之數,而$B_2$中0爲最先之數.零稱爲$B_2$中最先之數時亦可區別於一切其他之數,無殊於用符號0也.

**註** $B_1$及$B_2$中不能同時有最後及最先之數甚明.因如則此二數之間必有有理數存在,§113,而依假設各有理數非屬於$B_1$即屬於$B_2$也. 148

149 **第二種之分法** 然亦有種種方法可分有理數系全體爲二部分 $A_1$ 及 $A_2$，俾 $A_1$ 中無最後之數而 $A_2$ 中無最先之數.

譬如，因有理數無平方爲 2 者，§ 142，各有理數非其平方小於 2，即其平方大於 2.

令 $A_2$ 爲平方大於 2 之諸正有理數所組成，而 $A_1$ 爲一切其他之有理數所組成．則

1. $A_1$ 中各數前於 $A_2$ 中各數.

何則，令 $a_1$ 爲 $A_1$ 中任意之數，而 $a_2$ 爲 $A_2$ 中任意之數.
如 $a_1$ 爲負數或 0，$a_1<a_2$ 甚明；如 $a_1$ 爲正數，$a_1^2<a_2^2$，故 $a_1<a_2$.

2. $A_1$ 中無最後之數，$A_2$ 中無最先之數.

何則，任舉一正有理數，$a_1$，其平方小於 2 者，常能求得一較大之有理數其平方亦小於 2，§ 183，2(3)；故 $A_1$ 中無可爲最後之數者．同理，$A_2$ 中無可爲最先之數者.

150 **新數 $a=\sqrt{2}$** 故此數之二類 $A_1$ 及 $A_2$ 間之關係，正與 § 144 所述對應於 $\frac{1}{3}$ 所分之二類 $C_1$ 及 $C_2$ 間之關係相同.

然無一有理數可謂對應於 $A_1$，$A_2$ 之分法或爲其所確定者.

何則，因各有理數非屬於 $A_1$ 即屬於 $A_2$，無一有理數介乎 $A_1$ 與 $A_2$ 之間如 $\frac{1}{3}$ 之介乎 $C_1$ 與 $C_2$ 之間.

又因 $A_1$ 中無最後之數而 $A_2$ 中無最先之數，無一有理數對應於此一方法，如 § 145 所述 $\frac{1}{3}$ 之對應於 $C_1'$，$C_2$ 之分法，或 § 146 所述 $\frac{1}{3}$ 之對應於 $C_1$，$C_2'$ 之分法（比較 § 147）.

故 $A_1$，$A_2$ 之分法設一位置以待一新順序數，即能後於 $A_1$ 中諸數而前於 $A_2$ 中諸數者.

吾人作如此之數．暫時用文字 a 表之．在對於 a 之乘法之義既定以後，將知 $a^2=2$，於是吾人可以較有意義之符號

$\sqrt{2}$ (§ 182) 代 a 矣.

於是吾人定此新數 a 之義爲介乎一切正有理數之平方小於 2 者與平方大於 2 者之間之數. 151

此定義可以公式

$$a_1 < a < a_2$$

表之,其中 $a_1$ 及 $a_2$ 分別指示 $A_1$ 及 $A_2$ 中之不論何數,而 < 仍爲"居前"之意.

**注意** 注意此定義與 §§ 56, 110 所述負數及分數之定義性質上相同. a 亦爲一符號;一若此等之數,在一包含自然數之符號之順序系統中,因其所在之位置而有意義者. 故 a 與彼等有同樣之權利可稱爲數. 152

吾人作此數及類似之數之理由,亦與作負數及分數之理由相同. 此等之新數在吾人已有之數間以及外界諸物間關係之研究中甚有效用*.

**一般的無理數　實數系**　適所論及之有理數系之一特殊分法,僅爲同樣性質之無窮數可能分法中之一而已. 153

此種之分法,吾人一一爲之作新數,而參酌於有理數系之諸數就順序以定其義,一如 § 151 所定數 a = $\sqrt{2}$ 之義.

此諸新數,吾人稱之爲無理數,以區別於有理數.

再,有理數及無理數統稱實數,以區別於尙待探討之虛數. 最後,一切之有理數及無理數,其所組成之系統稱實數系.

於是,用 a 指示任一無理數,得如此之數之普徧的定義如下:

---

* 尤有進者,由順序的觀點言之,殊無理由可以反對吾人作多於一之數與 $A_1$, $A_2$ 之分法對應,譬如,作二數 a 及 b,而以公式 $a_1 < a < b < a_2$ 就順序的以定其義.

然尙有他種反對理由,故吾人不作多於一之如此之數. 詳 63 頁之附註 (3).

154 不論何時但有一法則陳述,能以各與有理數歸屬於二類$A_1, A_2$之一,且祇一,使(1) $A_1$中各數前於$A_2$中各數,且(2) $A_1$中無最後之數而$A_2$中無最先之數,此時卽有一無理數a爲其所確定.此無理數a之定義則爲: a者介乎$A_1$中諸數與$A_2$中諸數之間之一數也.

此處含有下列二義,卽: $A_1$及$A_2$中皆有數存在; $A_1$與$A_2$組成有理數系全體.

155 一無理數, a, 稱爲負數或正數,視其前於或後於0而定.

156 實數系爲一順序系統 卽組成此系統之數依一定且已知之順序而排列, §17. 何則,各無理數對各有理數之相關位置,其定義已指明矣,而任二與無理數相互間之相關位置,亦可自其定義直接推知之.

譬如,令a及b指示任二與無理數;則

1. 如前於a之各有理數亦前於b,又後於a之各有理數亦後於b,則a與b對於有理系之諸數佔同一之相關位置.故依無理數之定義, §154, a與b指示同一之數.吾人以次之公式表之:

$$a=b$$

2. 如後於a之諸有理數中有前於b者,則a自身必前於b(或b後於a).吾人以次之公式表之:

$$a<b \text{ 或 } b>a$$

3. 如前於a之諸有理數中有後於b者,則a自身必後於b(或b前於a).吾人以次之公式表之:

$$a>b \text{ 或 } b<a$$

故任舉二相異之實數,必能推知何者居前何者隨後甚明; 157
又,關於三與實數 a, b, c 常能作下之結論:

如 $a=b$, 而 $b=c$, 則 $a=c$.

如 $a<b$, 而 $b<c$, 則 $a<c$.

如 $a=b$, 而 $b<c$, 則 $a<c$.

**實數系是稠密的**　因不獨任二不等之有理數之間常有有理數存在, § 113, 任二不等之無理數之間,與任二數之一爲有理數而一爲無理數者之間,皆有有理數存在故也, §156. 158

**實數系是綿續的** (Continuous)　故列舉於 § 143 之有理數系之性質,其第一第二兩者實數系皆具有之.然實數系尚有一性質爲有理數系所無者,則爲: 159

如實數系全體分爲二部分 $R_1$ 及 $R_2$, 而 $R_1$ 中各數前於 $R_2$ 中各數, 則非 $R_1$ 中有最後之數, 卽 $R_2$ 中有最先之數, 但不能兼有之.

何則, 實數系分爲二部分 $R_1$ 及 $R_2$ 時, 有理數系亦分爲二部分 $A_1$ 及 $A_2$, $A_1$ 爲 $R_1$ 中之諸有理數所組成, $A_2$ 爲 $B_2$ 中之諸有理數所組成.

各有理數非屬於 $A_1$ 卽屬於 $A_2$, 而 $A_1$ 中各有理數前於 $A_2$ 中各有理數.
令 a 爲 $A_1$, $A_2$ 之分法所確定之數, §§ 147, 154.

則或 a 爲有理數——卽 $A_1$ 中最後之數或 $A_2$ 中最先之數, § 147,——或, 如 $A_1$ 中無最後之數而 $A_2$ 中無最先之數, a 爲介乎 $A_1$ 與 $A_2$ 之間之無理數, § 154.

1. 如 a 爲 $A_1$ 中最後之數, a 亦爲 $R_1$ 中最後之數; 何則, 如 $R_1$ 中尙有後於 a 之數, 則 a 與此數之間將有有理數存在, 卽 $A_1$ 中將有後於 a 之有理數, 此不可能之事也.

2. 同樣, 如 a 爲 $A_2$ 中最先之數, a 亦爲 $R_2$ 中最先之數.

3. 如 a 爲無理數, 則依假設 a 必屬於非 $R_1$ 卽 $R_2$. 如 a 屬於 $R_1$, a 爲 $R_1$ 中最後之數; 何則, 如 $R_1$ 中尙有後於 a 之數, 則 a 與此數之間將有有理數存

在，§ 158，即 $A_1$ 中將有後於 a 之有理數，此不可能之事也，同理，如 a 屬於 $R_2$，a 爲 $R_2$ 中最先之數．

最後，同時 $R_1$ 中有最後之數而 $R_2$ 中有最先之數爲不可能之事．何則，此二數之間將有有理數存在，§ 158，即將有有理數既不屬於 $A_1$ 亦不屬於 $A_2$，此不可能之事也．

爲表明實數系同時具有稠密性及上述之性質起見，吾人稱之爲綿續系統．

160 **定理** 不論何時但有一規則陳述，能分實數系全體爲二部分 $R_1$，$R_2$，俾 $R_1$ 中各數前於 $R_2$ 中各數，此時即有一實數 a，或有理或無理，爲其所確定．此數 a 則或爲 $R_1$ 中最後之數，或爲 $R_2$ 中最先之數．

此定理直接爲 § 147 及 § 159 之結論．

## 無理數之近似值

161 任與無理數 a，定義方法如 § 154 所述．依說明於下之方法，能求得一小於 a 一大於 a 之二有理數，使其相互間差異之微小如吾人意之所欲．此種有理數稱爲 a 之近似値 (Approximate values).

令 a 爲 $\sqrt{2}$，即介乎一切正有理數之平方小於 2 者與平方大於 2 者之間之無理數．

1. 依次作 1, 2, 3,…… 之平方至大於 2 爲止，即可求得夾 a 之二連續整數．

例如，$1^2<2$ 而 $2^2<2$.

故 a 介乎 1 與 2 之間，即 $1<a<2$.

2. 再依次作 $1.1^2$, $1.2^2$,……至大於 2 爲止，即可求得夾 a 之二連續之一位小數之數．

例如，因 $1.4^2=1.96$ 而 $1.5^2=2.25$，求得 $1.4^2<2$ 而 $1.5^2>2$,

故 a 介乎 1.4 與 1.5 之間，即 $1.4<a<1.5$.

3. 仿此可順次得

$1.41<\mathbf{a}<1.42,\quad 1.414<\mathbf{a}<1.415,$　餘類推,無終極.

4. 令$a_1$爲如此求得之數列 1.4, 1.41, 1.414…… 中之第 $n$ 數,而 $a_2$ 爲數列 1.5, 1.42, 1.415,…… 中之第 $n$ 數.

則　$a_1<\mathbf{a}<a_2$ 而 $a_2-a_1=1/10^n$.

擇 $n$ 甚大時可使 $1/10^n$ 小於任何隨意指定之正數 $\delta$,不論 $\delta$ 小至何似.

5. 1.4, 1.41, 1.414 稱爲 $\mathbf{a}=\sqrt{2}$ 之一,二,三位小數之近似值;餘類推.

此種方法適用於任何與無理數 a 甚明.何則,此方法所需要者,僅決定某有理數爲小於或大於 a 之標準而已,而 a 之定義,§154 常供給此種之標準也.故得定理如下:

令 a 指示任與之無理數.如 $\delta$ 爲隨意指定之正數,無論 $\delta$ 小至何似,吾人常能求得二有理數 $a_1$, $a_2$, 俾 162

$$a_1<\mathbf{a}<a_2 \text{ 而 } a_2-a_1<\delta.$$

本定理就有理數言亦眞.

例如,$a$ 指示定有理數,而 $a_1=a-1/10^n$, $a_2=a+1/10^n$, 則 $a_1<a<a_2$, 且吾人若取 $n$ 至相當之大,則可使 $a_2-a_1=2/10^n$ 至所欲之小.

## 加法,減法,乘法,除法.

列舉於 §143 之有理數系之性質,其第三者今須以與實數系矣.因此下之定理爲吾人所需.

**定理**　令 $A_1$ 及 $A_2$ 爲有理數之二類,而 163

1. $A_1$ 中各數小於 $A_2$ 中各數,

2. $A_1$ 中無最後之數, $A_2$ 中無最先之數,

3. 對於每一隨意指定之正數 $\delta$, 無論其小至何似,吾人常能於 $A_1$ 中求得一數 $a_1$, $A_2$ 中求得一數 $a_2$, 俾

$$a_2-a_1<\delta.$$

則吾人可斷定介乎 $A_1$ 與 $A_2$ 之間者有一數且祇有一數.

謂如此之數至少有一個者,於1及2知之(據§154).

謂如此之數不能多於一者,於3知之.

何則,假定介乎 $A_1$ 中各 $a_1$ 與 $A_2$ 中各 $a_2$ 之間者有二有理數 $d$ 及 $d'$ 如下圖所示.

$$\overline{\quad a_1 \qquad\qquad d \qquad\qquad d' \qquad\qquad a_2 \quad}$$

則對於各 $a_1, a_2$ 將有

$$a_2>d', \text{ 及 } -a_1>-d, \qquad §§ 73, 121$$

從而

$$a_2-a_1>d'-d, \qquad §§ 39, 121$$

此事不可能,因與3矛盾也.

介乎各 $a_1$ 與 $a_2$ 之間者二數之一或皆爲無理數者,不能存在.何則,據§158總有二有理數存在於如此之二數之間,從而介乎各 $a_1$ 與 $a_2$ 之間,此事不可能,適已證明矣.

164 **注意** 此定理異於無理數之定義(§154)之處,在各有理數非屬於 $A_1$ 卽屬於 $A_2$ 一事,不爲假設之一部分.

165 **加法** 令a及b指示任與之二實數,有理無理不論,又令 $a_1, a_2, b_1, b_2$ 指示任何有理數之適合下之不等式者.

$$a_1<\mathrm{a}<a_2 \text{ 又 } b_1<\mathrm{b}<b_2. \qquad (1)$$

注意 $a_1$ 或 $b_1$ 所指示之一種數無最後者,而 $a_2$ 或 $b_2$ 所指示之一種數無最先者;又如有任一正數,$\delta$,指定,不論其小至何似,吾人常能擇 $a_1, a_2$ 及 $b_1, b_2$, §162, 俾

$$a_2-a_1<\delta \text{ 又 } b_2-b_1<\delta. \qquad (2)$$

在a及b皆爲有理數時,譬如 a$=\alpha$ 而 b$=\beta$ 時,吾人可依§116之法則求其和 $\alpha+\beta$;而依§121可由(1)得

$$a_1+b_1<\alpha+\beta<a_2+b_2.$$

再者,不論a及b爲有理數或否,依§121可由(1)得

$$a_1+b_1<a_2+b_2. \qquad (3)$$

此等之考慮,使吾人在a及b二者或其一爲無理數時,定其和之義如下:

a與b之和,書作a+b,爲介乎一切之$a_1+b_1$與$a_2+b_2$之間之數;換言之,則公式 466

$$a_1+b_1<a+b<a_2+b_2$$

所確定之數也,其中$a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$指示任何有理數之適合下之不等式者.

$$a_1<a<a_2 \text{ 又 } b_1<b<b_2.$$

欲明此定義爲正當,須證必有一且祇有一如此之數a+b.此事可由§163推得;何則,

1. 各$a_1+b_1$小於各$a_2+b_2$.
2. 無最後之$a_1+b_1$,亦無最先之$a_2+b_2$.

譬如,$a_1'+b_1'$不能爲最後之$a_1+b_1$;何則,因無最後之$a_1$及$b_1$,吾人能擇$a_1$及$b_1$俾$a_1>a_1'$, $b_1>b_1'$,從而$a_1+b_1>a_1'+b_1'$.

3. 如有任意之正有理數,$\delta$,指定,吾人能擇$a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$俾

$$a_2-a_1<\delta/2 \text{ 又 } b_2-b_1<\delta/2, \qquad \S\, 162$$

從而

$$(a_2+b_2)-(a_1+b_1)<\delta. \qquad \S\, 121$$

**−a之定義**　令a, $a_1$, $a_2$之意義同§165所述.與§165所述類似之考慮,使吾人在a爲無理數時,得定−a之義如下: 167

符號−a謂公式 168

$$-a_2<-a<-a_1$$

所確定之數,其中$a_1$, $a_2$指示任何有理數適合下之不等式者.

$$a_1<a<a_2$$

由§163可推得必有一且祇有一如此之數−a;何則,

1. 因$a_1<a_2$,各$-a_2$小於$-a_1$.　§§ 73, 111
2. 無最後之$-a_2$,亦無最先之$-a_1$.譬如,若有最後之$-a_2$,將有最先之$a_2$;而如此之數並不存在.

3. 吾人常能擇 $a_1, a_2$，俾

$$-a_1-(-a_2)=a_2-a_1<\delta.$$ §162

169 **減法** 由 a 減 b 之結果，謂數 a+(−b)，書作 a−b；即

$$\mathrm{a}-\mathrm{b}=\mathrm{a}+(-\mathrm{b}).$$

a+(−b) 自身之意義因 §§166, 168 已明。

由 §§166, 168 得 a−b 亦可以公式

$$a_1-b_2<\mathrm{a}-\mathrm{b}<a_2-b_1$$

確定之，其中 $a_1, a_2, b_1, b_2$ 指示任何有理數適合下之不等式者。

$$a_1<\mathrm{a}<a_2 \text{ 又 } b_1<\mathrm{b}<b_2.$$

170 **二因數皆正時之乘法** 令 a 及 b 爲任與之二正數，而 $a_1$, $a_2, b_1, b_2$ 爲任何正有理數適合下之不等式者。

$$a_1<\mathrm{a}<a_2 \text{ 又 } b_1<\mathrm{b}<b_2. \tag{1}$$

在 a 及 b 爲有理數時，譬如 a=α, b=β 時，依 §121，由 (1) 得

$$a_1b_1<\alpha\beta<a_2b_2,$$

而在一切情形中常有

$$a_1b_1<a_2b_2. \tag{2}$$

故在 a 及 b 二者或其一爲無理數時，得定其積之義如下：

171 二正數 a 及 b 之積，書作 ab，爲介乎一切之 $a_1b_1$ 與 $a_2b_2$ 之間之數；換言之，則公式

$$a_1b_1<\mathrm{ab}<a_2b_2$$

所確定之數也，其中 $a_1, a_2, b_1, b_2$ 指示任何正有理數適合下之不等式者。

$$a_1<\mathrm{a}<a_2 \text{ 又 } b_1<\mathrm{b}<b_2.$$

由 §163 得如此之數 ab 有一，且祇一；何則，

1. 各 $a_1b_1$ 小於各 $a_2b_2$.

2. 無最後之 $a_1b_1$，亦無最先之 $a_2b_2$。(比較 §166, 2 之證)。

3. 任與正數$\delta$,吾人能擇$a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ 俾

$$a_2b_2-a_1b_1<\delta.$$

何則, $$a_2b_2-a_1b_1=a\,(b_2-b_1)+b_1(c_2-a_1),$$

而依後述之方法吾人能擇$a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, § 162, 俾

$$b_2-b_1<\delta/2a_2 \text{ 而 } a_2-a_1<\delta/2b_1, \tag{1}$$

從而 $$a_2(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1)<\delta. \tag{2}$$

擇$a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$之法當如下:

先在$b_2$一種數中任取一特殊數$b_2'$,於是擇$a_1$, $a_2$, 俾

$$a_2-a_1<\delta/2b_2'. \tag{3}$$

次,即用如此求得之$a_2$,擇$b_1$, $b_2$, 俾

$$b_2-b_1<\delta/2a_2, \qquad \text{如於 (1).}$$

因$b_1<b_2'$,故$\delta/2b_2'<\delta/2b_1$,從而由(3)得

$$a_2-a_1<\delta/2b_1, \qquad \text{如於 (1).}$$

**二因數或其一為負或0時之乘法**　命a及b指示任與之 172
二正數.則

1. a(−b)及(−a)b意謂−ab.
2. (−a)(−b)意謂ab.
3. a·0及0·a意謂0.

**1/a之定義**　命a為任與之正數,而$a_1$, $a_2$為任何正有理數 173
適合下之不等式者

$$a_1<\text{a}<a_2$$

與 § 165 所述類似之考慮,使吾人在a為無理數時,得定1/a之義如下:

符號1/a謂公式 174

$$1/a_2<1/\text{a}<1/a_1$$

所確定之數,其中$a_1$, $a_2$指示任何正有理數適合下之不等式者.

$$a_1<\text{a}<a_2$$

由§163可知如此之數$1/a$有一且祗一；何則，

1. 各$1/a_2$小於各$1/a_1$，§106.

2. 無最後之$1/a_2$，亦無最先之$1/a_1$（比較§168, 2之證）.

3. 任與正數$\delta$，吾人能擇$a_1, a_2$，俾

$$1/a_1-1/a_2<\delta.$$

何則，　若$a_2-a_1<\delta\cdot a_1a_2$，　$1/a_1-1/a_2<\delta$.　§§106, 107

然若$a_1'$指示$a_1$一種數中之一特殊數，吾人能擇$a_1, a_2$俾$a_1>a_1'$而$a_2-a_1<\delta a_1'^2$，從而$<\delta a_1a_2$.

175　**$1/(-a)$之定義**　令a指示任與之正數．則$1/(-a)$意謂$-1/a$.

176　**除法**　a被b除之商（b不為0），意謂數$a\cdot 1/b$，即

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}.$$

由前述之諸定義可明$a\cdot 1/b$自身之意義．

在a及b皆正時，由§§171, 174, a/b亦得以公式

$$a_1/b_2<a/b<a_2/b_1$$

確定之，其中$a_1, a_2, b_1, b_2$指示任何正有理數適合下之不等式者．

$$a_1<a<a_2\text{ 及 }b_1<b<b_2.$$

177　**交換結合，及分配之律**　適所定諸算法之義，為有理數之對應算法之推廣．減法仍為加法之逆，除法為乘法之逆．最後，加法及乘法仍遵從交換結合及分配之律．

譬如，若a, b, 及c為任三正數，為公式

$$a_1<a<a_2,\quad b_1<b<b_2,\quad c_1<c<c_2$$

所確定者，§170，則有　$a(b+c)=ab+ac.$

何則，依§§166, 171, $a(b+c)$及$ab+ac$為以下公式所確定之數．

$$a_1(b_1+c_1)<a(b+c)<a_2(b_2+c_2),\tag{1}$$

$$a_1b_1+a_1c_1<ab+ac<a_2b_2+a_2c_2.\tag{2}$$

然因$a_1(b_1+c_1)=a_1b_1+a_1c_1$而$a_2(b_2+c_2)=a_2b_2+a_2c_2$，§120，(1)與(2)所確定者爲同一之數．

178　**推演律**　此諸律亦適用於適所定和及積之義，即：

依　　$a<,=,$ 或 $>b$,

而　　$a+c<,=,$ 或 $>b+c$;

又　　$ac<,=,$ 或 $>bc$,　　若 $c>0$,

然　　$ac>,=,$ 或 $<bc$,　　若 $c<0$.

譬如,若 $a<b$, 則 $a+c<b+c$.

何則,令 $d$ 及 $d+\alpha$ 為 $a$ 與 $b$ 之間之任二有理數,而擇 $c_1$ 俾 $c_1<c<c_1+\alpha$.

則因 $a<d$ 而 $c<c_1+\alpha$, 有 $a+c<d+c_1+\alpha$,　　(1)

又因 $d+\alpha<b$ 而 $c_1<c$, 有 $d+\alpha+c_1<b+c$, § 166.　　(2)

由 (1) 及 (2) 得 $a+c<b+c$, § 157.

依此得證若 $a<b$ 而 $c>0$, 則 $ac<bc$.

但此時應擇 $c_1$ 俾 $c_1<c<c_1(1+\alpha/d)$.

仿 § 39, 由此諸律可得如 $a<b$ 而 $c<d$, 則 $a+c<b+d$, 及其他;又,仿 § 50, 在 $a, b, c, d$ 為正數時,可得如 $a<b$ 而 $c<d$, 則 $ac<bd$, 及其他. 179

關於近似值　1. 無理數之減法之義既定, § 169, 則 § 162 之定理可具述如下: 180

任與無理數 $a$ 時,如有任一正有理數 $\delta$ 指定,則無論 $\delta$ 小至何似,吾人常能求得有理數 $a_1, a_2$, 俾與 $a$ 之差較 $\delta$ 小.

何則,依 § 162, 吾人能求得 $a_1$ 及 $a_2$ 俾 $a_1<a<a_2$ 且 $a_2-a_1<\delta$.

由 $a<a_2$ 得 $a-a_1<a_2-a_1$, § 178, 從而 $a-a_1<\delta$.

仿此,因 $-a<-a_1$ 得證 $a_2-a<\delta$.

例如, § 161, $\sqrt{2}-1.41<.01$ 又 $1.42-\sqrt{2}<.01$.

此種之 $a_1$ 或 $a_2$ 稱為以不超過 $\delta$ 之誤差 (Error) 代表 $a$.

2. 在實際計算上用無理數自身之時少,用其近似值之時多. 如 $a_1$, 及 $b_1$ 分別為 $a$ 及 $b$ 之近似值,則 $a_1+b_1$ 為和 $a+b$ 之近似值. 然欲保證 $a_1+b_1$ 之誤差不超過 $\delta$, 通常必須擇 $a_1$ 及 $b_1$ 俾各自之誤差俱不超過 $\delta/2$. 此由 § 166 之證可知. 同樣之法

則,用以求 $a-b$, $ab$, 及 $a/b$ 之近似值,使誤差不超過 $\delta$ 者,可由 §§ 168, 171, 174 之證明導出.

## 乘方及開方

181 **乘冪** 於無理數項下,吾人以 $a^2$, $a^3$, ……代表 $aa$, $aaa$, ……一如有理數.

182 **方根** 任與之正數 $b$ 之 $m$ 次方根者,$m$ 次冪爲 $b$ 之正數也,書作 $\sqrt[m]{b}$; 卽 $\sqrt[m]{b}$ 指示公式 $(\sqrt[m]{b})^m=b$ 所確定之正數.

欲明此定義爲正當,須證必有一如此之數存在,且祇有一,其證明如下:

183 **定理** 實數系含有各正實數 $b$ 之 $m$ 次方根.

1. 如 $b$ 爲有理數之 $m$ 次冪,定理爲眞甚明.

例如,若 $b=8/27=(2/3)^3$, 則 $\sqrt[3]{b}=2/3$.

2. 如 $b$ 非有理數之 $m$ 次冪,則其 $m$ 次根爲介乎一切正有理數 ($a_1$) 之 $m$ 次冪小於 $b$ 者與 ($a_2$) 大於 $b$ 者之間之實數 $a$. 比較 § 151.

由 § 154 得知此之數 $a$ 有一,且祇一,因 (1) 各正有理數非 $a_1$ 卽 $a_2$, (2) 各 $a_1$ 小於各 $a_2$ 而 (3) 無最後之 $a_1$, 亦無最先之 $a_2$ 也.

(3) 可證明如下:

如有最後之 $a_1$, 命之爲 $p$. 則因 $p^m<b$, $p^m$ 與 $b$ 之間有有理數存在. 令其一爲 $p^m+\delta$. 今證能求得一有理數 $q>p$, 俾 $q^m<p^m+\delta$ 卽 $q^m-p^m<\delta$ 可矣; 因如此則 $p^m<q^m<b$, 而 $p$ 非最後之 $a_1$ 矣.

然 $$q^m-p^m=(q-p)(q^{m-1}+q^{m-2}p+\cdots\cdots+qp^{m-2}+p^{m-1}) \qquad \text{§ 308}$$

$\therefore$ $\qquad < (q-p)ma_2'^{m-1},$ 　　若 $a_2'$ 為任一特殊 $a_2$,*

$\therefore$ $\qquad < \delta,$ 　　若 $q = p + \delta / ma_2'^{m-1}$.

仿此得證無最先之 $a_2$.

此事旣證實, $\mathbf{a} = \sqrt[m]{\mathbf{b}}$ 易明.

何則, 因 $a_1 < \mathbf{a} < a_2$, 得 $a_1^m < \mathbf{a}^m < a_2^m$. 　　§§ 171, 181

然 $\mathbf{b}$ 爲存在於各 $a_1^m$ 與各 $a_2^m$ 之間之唯一之數.

故 $\mathbf{a}^m = \mathbf{b}$, 卽 $\mathbf{a} = \sqrt[m]{\mathbf{b}}$.

**推演律**　令 $a$ 及 $b$ 指示任意之正實數,而 $m$ 指示任一正整數. 則 **184**

依 $\qquad a <, =, 或 > b,$

而 $\qquad a^m <, =, 或 > b^m, \qquad (1)$

又 $\qquad \sqrt[m]{a} <, =, 或 > \sqrt[m]{b} \qquad (2)$

(1) 可累用 § 179 證之.

譬如, 若 $a<b$, 則 $a \cdot a < b \cdot b$, 卽 $a^2 < b^2$; 餘仿此.

(2) 可由 (1) 得出. 譬如, 若 $a=b$, 則 $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$; 何則, 設或 $\sqrt[m]{a} <$ 或 $> \sqrt[m]{b}$, 將有 $a <$ 或 $> b$ 故也.

**指數律** (Rules of exponents)　令 $a$ 及 $b$ 指示任二實數, 而 $m$ 及 $n$ 指示任二正整數. 則 **185**

$$1. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

---

* 譯註 $a_2'$ 爲任一特殊 $a_2$ 則 $p < a_2'$; 然並未證明 $q < a_2'$, 不應遽作 $(q-p)(q^{m-1} + q^{m-2}p + \cdots\cdots + qp^{m-2} + p^{m-1}) < (q-p)ma_2'^{m-1}$ 之結論. 應改作

"$\therefore$ $\qquad < (q-p)mr^{m-1},$ 　　若 $q \leqq r$,

$\therefore$ $\qquad < \delta,$ 　　若 $q = p + \delta / mr^{m-1} \leqq r$.

故問題在如何求得適合下條件之正數 $r$.

$$p + \delta / mr^{m-1} \leqq r. \qquad (A)$$

其數極易求得,何則,如任取之正數 $s$ 不適合 $(A)$, 則

$$p + \delta / ms^{m-1} > s,$$

$\therefore$ $\qquad p + \delta / m(p + \delta / ms^{m-1})^{m-1} < p + \delta / ms^{m-1},$

卽 $p + \delta / ms^{m-1}$ 爲適合 $(A)$ 之正數".

$$2.\quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

$$3.\quad (ab)^m = a^m b^m.$$

譬如，$a^3 \cdot a^2 = aaa \cdot aa = aaaaa = a^5 = a^{3+2}$ § 177

$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{3+3}$ 依 1

$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = aaa \cdot bbb = a^3 \cdot b^3$ § 177

$m$ 及 $n$ 取任何其他之正整數值時仿此.

186 **關於方根之一定理** 令 $a$ 及 $b$ 指示任一正實數，而 $m$ 指示任一正整數．則

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}.$$

何則，$(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m = ab,$ §§ 182, 185, 3

又 $(\sqrt[m]{ab})^m = ab.$ § 132

故 $(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{ab})^m,$

從而 $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}.$ § 184, (2)

## 變數及極限

187 **變數** (Variables)

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots\cdots,\ a_n, \cdots\cdots$$

如一無盡數列 (Never-ending sequence of numbers)，其中指數 $n$ 表示特殊項 $a_n$ 在數列中之位置，若已與 $n$，因而可知或可算出 $a_n$ 之値，則謂此數列爲已與或已知．

吾人常須考變數之假定爲循此種之與無盡數列而遞變者．

譬如，$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\cdots$ 爲此種之與無盡數列，而 $x$ 若爲吾人假定其循此數列而遞變之變數，即順次取 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots$ 諸値．

188 **極限** (Limits). "$x$ 循數列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots$ 而遞變時，其値無限接近於 1，情形如次：如有任一正數 $\delta$ 指定，不論 $\delta$ 小至何似，差

$1-x$最後終能變爲且永爲小於$\delta$. 譬如,$x$達到數列之第100項以後,差$1-x$永爲小於.01.

爲表明此事起見,吾人稱$x$循數列$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots\cdots$而遞變時,趨近1爲極限. 普徧言之:

假定爲循一與無盡數列而遞變之變數$x$,若差$a-x$最後終能變爲且永爲數值上小於各隨意指定之正數$\delta$,則稱爲趨近數a爲極根. 189

注意僅$a-x$變爲小於$\delta$非充足條件;如欲$x$趨近a爲極限,$a-x$尙須永爲小於$\delta$.

譬如,若$x$循數列$\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0,\cdots\cdots$,而遞變,差$1-x$能變爲小於各可指定之$\delta$,然不能永爲小於此$\delta$,而$x$自不能趨近1爲極限.

特例,$a-x$可變爲0;卽$x$可達到其極限a.

$x$之趨於極限a,吾人或以$x\to a$表之,讀爲"$x$趨近a爲極限",或以$\lim x=a$表之,讀爲"$x$之極限爲a". 190

變數$x$趨於極限與否,全視其假定爲遞變時所循之數列之性質爲如何而定. 191

譬如,$x$在循數列$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots\cdots$而遞變時雖趨於一極限,在循數列$1,2,3,4,\cdots\cdots$,或數列$1, 2, 1, 2,\cdots\cdots$而遞變時不趨於極限甚明.

故以下諸定理甚爲重要.

**定理1.** 如變數$x$常增大而又常小於一與數c,$x$趨於一極限. 此極限非c卽一小於c之數. 192

何則,依假設,有$x$所決不超過之數存在. 以一切此種之數歸屬於類$R_2$,而以一切其他之數,卽一切$x$最後終能超過之數歸屬於類$R_1$.

則實數系全體分爲二部分$R_1$, $R_2$,而$R_1$中各數小於$R_2$中各數.

$R_1$中無最後之數甚明.故據§160, $R_2$中有最先之數.命之為a. $x$增大時趨近a為極限.

何則,無論$\delta$小至何似,祇須$\delta$為正數, a$-\delta$屬於數類$R_1$,即$x$最後終能超過者.故$x$最後終能止乎a$-\delta$與a之間,從而$x$與a之差小於$\delta$.

仿此得證:

193 如變數$x$常減小而又常大於一與數c, $x$趨於一極限.此極限非c即一大於c之數.

194 有法數列 (Regular sequences). 雖然, $x$應常增大或常減小,非$x$趨於極限之必要條件.

譬如, $x$循數列 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots$ 而遞變時,有時增大有時減小;然$x$趨近0為極限.

今證$x$能趨於極限與否,視其遞變時所循之值列$a_1, a_2, \cdots\cdots a_n, \cdots\cdots$具有下之定義所述之性質與否而定.

195 於數列$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$,如每一隨意指定之正試數$\delta$有一對應項$a_k$可以求得,其與以後各項之差數值上小於$\delta$,則此數列稱為有法數列.

1. 例如,數列1.4, 1.41, 1.414, ……(.), §16,為有法數列.

何則,第一項1.4與以後各項之差小於1/10;第二項1.41與以後各項之差小於$1/10^2$第$n$項與以後各項之差小於$1/10^n$.

然無論$\delta$小至何似,吾人能與$n$一值使$1/10^n$更小於$\delta$;若$k$指示$n$之如此之值,則1.4, 1.41, ……之第$k$項與以後各項之差小於$\delta$.

譬如,若吾人指定1/500000為$\delta$之值,則$1/10^6<\delta$而1.4, 1.41, ……之第六項與以後各項之差小於$\delta$之如此之值.

2. 以下諸列亦為有法數列.

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \cdots\cdots, \quad (2) \qquad \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \cdots\cdots, \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots, \quad (4) \qquad 2, 1, 1, 1, \cdots\cdots, \quad (5)$$

注意於(2),每一項之後繼以較大之項;於(3),繼以較小之項;於(4),有時繼以較大之項,有時繼以較小之項.

有時有法數列之諸項在某項以後皆相同,如(5),變數循此種之數列而遞變時最後終必變爲常數,即達到其極限,甚明.

3. 以下諸數列非有法數列.

$$1,2,3,4,\cdots\cdots, \qquad (6) \qquad\qquad \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\cdots\cdots, \qquad (7)$$

何則,於(6),一項與以後一項之差可常爲無限大;而於(7),則可常爲$\frac{1}{6}$.從而不小於各隨意指定之數,例如$\frac{1}{8}<\frac{1}{6}$.

**關於有法數列之公式**　1. $a_k$與以後各項,$a_p$,之關係,可以次之公式表之,§63. 196

$$p>k\text{時},\qquad |a_p-a_k|<\delta. \qquad (1)$$

2. 又因不論$a_p$爲何項,如$>a_k$,必介乎$a_k$與$a_k+\delta$之間,如$<a_k$,必介乎$a_k-\delta$與$a_k$之間,(1)亦可書作

$$p>k\text{時},\qquad a_k-\delta<a_p<a_k+\delta. \qquad (2)$$

3. 由(2)可知若在諸$a_p$中有小於$a_k$者亦有大於$a_k$者,則其中任意二項之差可超過$\delta$,然不能超過$2\delta$.

然吾人常能求得一項$a_l$對應於$\delta/2$如$a_k$之對應於$\delta$.於是$a_l$以後每二項之差數值上小於$2(\delta/2)$即$\delta$;即在此等之諸項中,每二項間之關係,可以次之公式表之.

$$p>q>l\text{時},\qquad |a_p-a_q|<\delta. \qquad (3)$$

**定理2.** 如變數$x$假定爲遞變時所循之數列$a_1,a_2\cdots\cdots,a_n,\cdots\cdots$爲有法數列,$x$趨於一極限. 197

因$x$循數列　　$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n,\cdots\cdots$　　(1)

而遞變時,最後終能止乎若干數右.

譬如,若$\delta$及$a_k$之意義同前,則$x$達到$a_k$以後,即止乎$a_k-\delta$之右,§196(2)

以一切此種之數歸屬於類$R_1$,而以一切其他之數,即一切

數之 $x$ 不能止乎其右者,歸屬於類 $R_2$.

則實數系全體分爲二部分 $R_1$ 及 $R_2$,而 $R_1$ 中各數小於 $R_2$ 中各數.據 § 160,此一分法確定一實數 a.

譬如,若數列爲 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots$,則負有理數組成 $R_1$, 0 及正有理數組成 $R_2$;而 a 自身爲 0.

$x$ 循數列 (1) 而遞變時,即趨近此數 a 爲極限.

何則,指定任一正試數 $\delta$, $\delta$ 小至何似無關係.因 (1) 爲有法數列,據 § 196 (3) 吾人能求得一項, $a_m$,適合下之條件.

$$p>q>m \text{ 時}, \qquad |a_p-a_q|<\delta/2. \tag{2}$$

然因 a$-\delta/2$ 屬於 $R_1$,一切 $x$ 之值之在某值以後者居乎 a$-\delta/2$ 之右.又因 a$+\delta/2$ 屬於 $R_2$,此諸值中必有後於 $a_m$ 而居乎 a$+\delta/2$ 之左者;因非然則 $x$ 最後終能止乎 a$+\delta/2$ 之右,而此數將屬於 $R_1$ 矣.

譬如,如數列爲 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots$,而 $\delta=\frac{1}{10}$ 則一切 $x$ 之值之在第四值 $\frac{1}{16}$ 以後者介乎 a$-\delta/2$ 與 a$+\delta/2$ 之間,即 $-\frac{1}{20}$ 與 $\frac{1}{20}$ 之間.

令 $a_q'$ 指示 $x$ 之如此之一值.則

$$\mathrm{a}-\delta/2<a_q'<\mathrm{a}+\delta/2,$$

或

$$|\mathrm{a}-a_q'|>\delta/2. \tag{3}$$

因 $q'>m$,由 (2) 及 (3) 得下列結果, §§ 78, 178.

$$p>q' \text{ 時}, \qquad |\mathrm{a}-a_p|<\delta.$$

換言之, $x$ 達到 $a_q'$ 以後,差 a$-x$ 永爲數值上小於 $\delta$.

故 $x$ 趨近 a 爲極限, § 189.

198 反之,如 $x$ 趨於一極限 a,則其假定爲遞變時所循之數列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 必爲有法數列.

何則,因差 a$-x$ 最後終能變爲且永爲數值上小於各隨意

指定之正數$\delta$, § 189, 吾人能擇$a_k$適合下之條件.

$p>k$時，　$|a-a_k|<\delta/2$ 又 $|a-a_p|<\delta/2$.

由是　$p>k$時，　$|a_p-a_k|<\delta$.

故數列$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$為有法數列, § 196 (1).

§ 197 及 § 198 所述, 合可成一個定理如下:

一變數趨於一極限, 其充足兼必要條件, 為假定此變數遞變時所循之值列為有法數列. 199

## 關於極限之若干重要定理

在本段中$a$及$b$指示任與之實數, 而$x$及$y$指示變數之假定循與無盡值列而遞變者.

極限0. 由極限之定義, § 189, 立得: 200

1. 如變數$x$最後終能變為且永為數值上小於各隨意指定之正數$\delta$, 則$x$趨近0為極限; 其逆亦眞.

2. 如$x$趨近$a$為極限, 則$a-x$趨近0為極限; 其逆亦眞.

譬如, $x$循數列$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots$而遞變時, 趨近極限0; 又$x$循數列$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots$而遞變時, $1-x$趨近極限0.

變數之以0為極限者稱為無窮小 (Infinitesimal).

定理1. 若$x\to 0$又$y\to 0$, 且$x$及$y$遞變時$A$及$B$之絕對值始終小於一定數c, 則$Ax+By\to 0$. 201

何則, 指定任一正數$\delta$, $\delta$小至何似無關係.

因$x\to 0$, $x$最後終能永為數值上小於$\delta/2c$.　§ 200, 1

因$y\to 0$, $y$最後終能永為數值上小於$\delta/2c$.　§ 200, 1

故$Ax+By$最後終能永為數值上小於$2c\frac{\delta}{2c}$, ∴ $<\delta$, 從而趨近0為極限, § 200, 1.

譬如, 若$x\to 0$又$y\to 0$, 則$(xy-3)x+2y\to 0$.

202 [注意] 此定理易推廣於任何有窮數之變數.

譬如,若 $x\to 0$, $y\to 0$, 又 $z\to 0$, 則 $Ax+By+Cz\to 0$.

203 **定理2.** 趨於極限之二變數,其和,差,積,商之極限,爲其極限之和,差,積,商.即如 $x$ 及 $y$ 分別趨於極限 $a$ 及 $b$,則

1. $x+y\to a+b$.　　3. $xy\to ab$.

2. $x-y\to a-b$.　　4. $x/y\to a/b$,但 $b=0$ 除外.

何則,因 $a-x\to 0$ 又 $b-y\to 0$, § 200, 由 § 201 得

$$A(a-x)+B(b-y)\to 0. \tag{1}$$

1, 2, 3, 4 諸公式可由 (1) 得出如下.

1. $a+b-(x+y)=(a-x)+(b-y)\quad \therefore\to 0,$ 依 (1)

即 $x+y\to a+b.$ § 200, 2

2. $a-b-(x-y)=(a-x)-(b-y)\quad \therefore\to 0,$ 依 (1)

即 $x-y\to a-b.$ § 200, 2

3. $ab-xy=(a-x)b+(b-y)x\quad \therefore\to 0.$ 依 (1)

即 $xy\to ab.$ § 200, 2

4. $\frac{a}{b}-\frac{x}{y}=\left(\frac{a}{b}-\frac{x}{b}\right)+\left(\frac{x}{b}-\frac{x}{y}\right)=(a-x)\frac{1}{b}+(b-y)\frac{x}{by}\quad \therefore\to 0,$ 依 (1)

即 $x/y\to a/b,$ § 200, 2

204 **系.** 若 $x\to a$, 則 $x^n\to a^n$.

205 **定理3.** 趨於極限之一變數,其 $n$ 次根之極限,爲其極限之 $n$ 次根:即

$$若\ x\to a,\ 則\ \sqrt[n]{x}\to\sqrt[n]{a},$$

1. $a=0$ 時. 指定任意之正數 $\delta$.

因 $x\to 0$, $x$ 最後終能永爲數值上 $<\delta^n$. § 200, 1

故 $\sqrt[n]{x}$ 最後終能永爲數值上 $<\delta$. § 184

故 $\sqrt[n]{x}\to 0,$ § 200, 1

2. $a$ 不爲 0 時. 由 § 308, 可得 $x-a$ 常能爲 $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}$ 所整除,且其商 $Q$ 在 $x\to a$ 時不趨於極限 0.

故令 $A=1/Q$ 而 $B=0$, 由 § 203 (1) 得

$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}=(x-a)/Q\to 0$, 即 $\sqrt[n]{x}\to\sqrt[n]{a}$. § 200, 2

## 無理數與測量之關係

與單位線分不可通約之線分之長．若線分S及單位線分s不可通約——即，S與s爲一正方形之對角線及邊時，吾人若能證s無一分盡部分爲S所整含，不論此部分小至何似——則§130之長度之定義不適用於S. 206

然線分S與單位線分s不可通約時，有一定之無理數，a，與之發生以下關係：

與s可通約之線分分爲二類，小於S者一類，大於S者一類．

有理數之爲其長者，§130，分爲二對應類，命之爲 $A_1$ 及 $A_2$，各正有理數非屬於 $A_1$ 即屬於 $A_2$，$A_1$ 中各數前於 $A_2$ 中各數，最後，$A_1$ 中無最後之數，$A_2$ 中亦無最先之數.*

於是有一定之無理數，a，介乎 $A_1$ 中諸數與 $A_2$ 中諸數之間，§154，吾人稱此數a爲S之長．故有下之定義：

與單位線分，s，不可通約之任一線分，S，其長爲一無理數，a，此數介乎一切有理數之爲小於S之線分之長者與爲大於S之線分之長者之間． 207

譬如，以正方形之邊爲單位時，其對角線之長爲 $\sqrt{2}$.

如以s爲單位時S之長爲a，則無論a爲有理數抑無理數，皆書作S＝as 208

---

*何則，如 $A_1$ 中有最後之數，則與s可通約而小於S之諸線分中應有最大者，譬如S′.

然如此之線分不能存在．何則，依說明於以下附註之阿基米德公理，吾人能求得s之一分盡部分使小於S－S′；而s之此部分與S′之和應與s可通約，且小於S而大於S′.

209 **以點表實數** 如於§134之圖,任取一直線,在在上取定點 $O$ 爲原點,又取線分 s 爲測長之便宜單位.又凡直線上任一點 $P$ 至 $O$ 之距離,皆指以 s 爲單位時線分 $OP$ 之長而言,§§130,207.

任一與數,a,以直線上之點,$P$,爲其圖象,$P$ 至 $O$ 之距離等於a之絕對值,依a爲正或負而居 $O$ 之右或左.

如 a 爲有理數,$P$ 可實地作出,§134.然如 a 爲無理數時,通常不能作 $P$.於是吾人假定 $P$ 存在,換言之,假定在直線上有單一之點,$P$,介乎一切點之代表小於 a 之有理數者與代表大於 a 之有理數者之間.*

---

*討論幾何公理出乎本書之範圍,然舉其與所思考之測量問題有關係者,固亦無妨也.

1. 阿基米德公理 (Axiom of Archimedes). 若 s 及 S 指任二線分而 s<S,吾人常能求得一整數,$m$,俾 $m$s>S.

2. 綿續公理 (Axiom of continuity). 若直線上之一切點分爲二類 $R_1$ 及 $R_2$,而 $R_1$ 中各點居 $R_2$ 中各點之左,則非 $R_1$ 中有最後之點,即 $R_2$ 中有最先之點.

(1) 以各線分爲可測之假定,中含阿基米德公理.因以 s 測 S 之第一步,即爲求一整數,$m$,使 $(m-1)$s<S<$m$s也.

(2) 公理1及2使吾人能證實§203之假定,即各與無理數 $a$ 有一對應點 $P$ 存在.

何則,$a$ 分有理數系爲二部分,可命之爲 $B$ 及 $C$.又命 $B$ 及 $C$ 中之數之對應點爲 $B$-點及 $C$-點.則證直線上有一定點 $P$ 介乎諸 $B$-點與諸 $C$-點之間可矣.

先以諸 $B$-點及一切中間之點歸屬於類 $R_1$ 而以此諸點右方之一切點歸屬於類 $R_2$,又令 $P$ 指示此一分法,依2,所確定之點.

次以諸 $C$-點及一切中間之點歸屬於類 $S_2$,而以此諸點左方之一切點歸屬於類 $S_1$,又令 $Q$ 指示此一分法,依2,所確定之點.

則 $P$,$Q$ 二點必相重合.因非然,則令 $PQ$ 指示二點間之線分.依1,吾人能

反之,$P$已與時吾人常能求得a,至少可得近似值,祇須測 210
$OP$之長,視$P$居$O$之右或左而附以+或−之號可矣.

譬如,若$P$居$O$之右,而吾人能沿$OP$以s量五次,以其十分之一量七次,以其百分之一量六次,則$a$之值至小數點下二位止爲5.76.

如此吾人於一切實數與直線上一切點之間樹立一一 211
對應之關係,§2,且若a及b指示任二實數,而$P$及$Q$爲其對應點,則$P$居$Q$之左或右,視a小於或大於b而定.

譬如,若a及b爲正數且$a<b$,又$c$指示介乎a與b之間之一有理數而$R$爲其對應點,則,§206,

$$OP<OR \text{ 又 } OR<OQ \text{ 從而 } OP<OQ.$$

**定理** 若以T爲單位時S之長爲a,又以s爲單位時T之 212

---

求得一整數,$m$,使

$$m\cdot PQ>s, \text{ 從而 } PQ>s/m.$$

此事不可能.何則,吾人能自$B$中擇一數$b$而自$C$中擇一數$c$使$c-b<1/m$.若$L$及$M$爲$b$及$c$之對應點時,則

$$LM<s/m \text{ 又 } PQ<LM, \text{ 從而 } PQ<s/m.$$

此一點,$P$或$Q$卽依§209而對應於a之點.

(3) 最後應注意:數系對應於2有§160所述之性質,而對應於1則有下之性質.

若a及b爲任二正實數,則吾人常能求得一整數,$m$,使$mb>a$.

何則.依§§ 08, 176, 178吾人能擇一整數$m$俾$m>a/b$,從而$mb>a$.

若吾人對於§154所述有理數系之分法而欲求得多於一之無理數時,則實數系將不能具有此一性質,至少亦非以若干其他性質之犧牲爲代價不可.

譬如若各有理數非一$a_1$卽一$a_2$,且對於各$a_1$, $a_2$有$a_1<b<c<a_2$,則應有$c-b<a_2-a_1$,(§178,及§163之證明).

然無論吾人指定如何小之正數,$\delta$,吾人終不能求得一整數,$m$,大至足以使$m(c-b)>\delta$.

何則,如此則將有$c-b>\delta/m$,此事不可能,因$c-b<a_2-a_1$,而吾人能擇$a_1$, $a_2$俾$a_2-a_1<\delta/m$也.

長爲b,則以s爲單位時S之長爲ab.

1. a及b爲有理數時.

令 $\mathbf{a}=a/b$ 而 $\mathbf{b}=c/d$, 其中 $a, b, c, d$ 表示整數.

因S含T之 $b$ 分之一 $a$ 次, § 130, $b$S應含T自身 $a$ 次, 卽

$$b\mathrm{S}=a\mathrm{T}. \tag{1}$$

倣此

$$d\mathrm{T}=c\mathrm{s}. \tag{2}$$

然由(1)及(2)易得,

$$bd\mathrm{S}=ad\mathrm{T},\ 及\ ad\mathrm{T}=ac\mathrm{s},$$

從而

$$bd\mathrm{S}=ac\mathrm{s}.$$

故以s爲單位時S之長爲 $\frac{ac}{bd}$ 卽 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$. § 130

2. a及b二者或其一爲無理數時.

令 $\mathrm{S}_1$ 及 $\mathrm{S}_2$ 指示任何與T可通約之線分適合下之不等式者.

$$\mathrm{S}_1<\mathrm{S}<\mathrm{S}_2.$$

又令 $a_1, a_2$ 表以T爲單位時 $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2$ 之長. 故

$$\mathrm{S}_1=a_1\mathrm{T},\ 又\ \mathrm{S}_2=a_2\mathrm{T},\ 而\ a_1<\mathbf{a}<a_2. \quad § 208$$

倣此令 $\mathrm{T}_1$ 及 $\mathrm{T}_2$ 指示任何與s可通約之線分適合下之不等式者.

$$\mathrm{T}_1<\mathrm{T}<\mathrm{T}_2.$$

又令 $b_1, b_2$ 表以s爲單位時 $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ 之長, 故

$$\mathrm{T}_1=b_1\mathrm{s},\ 又\ \mathrm{T}_2=b_2\mathrm{s}\ 而\ b_1<\mathbf{b}<b_2.$$

則因 $\mathrm{S}_1=a_1\mathrm{T}$, 又 $\mathrm{T}>\mathrm{T}_1$, 而 $\mathrm{T}_1=b_1\mathrm{s}$,

依1得

$$\mathrm{S}_1>a_1b_1\mathrm{s}.$$

倣此

$$\mathrm{S}_2<a_2b_2\mathrm{s}.$$

故

$$a_1b_1\mathrm{s}<\mathrm{S}_1<\mathrm{S}<\mathrm{S}_2<a_2b_2\mathrm{s},$$

從而

$$a_1b_1\mathrm{s}<\mathrm{S}<a_2b_2\mathrm{s}.$$

故證得諸數 $a_1b_1$ 及 $a_2b_2$ 各表以s爲單位時小於及大於S之線分之長. 故介乎諸 $a_1b_1$ 與諸 $a_2b_2$ 之間之數ab, § 171, 表以s爲單位時S自身之長, § 207.

213 系 如以s爲單位時S及T之長各自爲a及b,則以T爲單位時S之長爲a/b.

何則,令以T爲單位時S之長爲x.

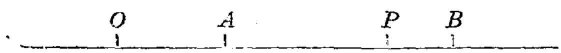
則因以T爲單位時S之長爲x,又以s爲單位時T之長爲b,得以s爲單位時S之長爲xb, § 212. 0

然依假設以s爲單位時S之長爲a.

故　$\mathbf{xb=a}$.

從而　$\mathbf{x=a/b}$.

**綿續變數** (Continuous variable)　綿續運動,爲吾人最熟悉之直觀之一. 214




假定點$P$沿直線$OAB$自$A$向$B$綿續移動.又令a, $x$, 及b各自指示$OA$, $OP$, 及$OB$之長, $O$爲原點.

依§209之假定,凡a與b間有一數,線分$AB$上卽有一對應點.且$P$於自$A$向$B$之移動中自必經過之.此事使吾人謂$P$自$A$向$B$綿續移動時, $x$自a値向b値經歷一切中間値而增加,或自a向b綿續的變化.

此$x$之變化實際上不可追跡甚明,因任舉一値吾人實不能知其緊此之値爲何也.如欲作$x$之算學的論究,則亦唯有定其義如下而已: (1) $x$能取a與b間之每一與値, (2)若$p$及$q$指示任與之二値,而$p<q$,則$x$於取$q$値以前先取$p$値.尤有進者, $x$僅有第一性質時,通常亦稱爲綿續變數.

**比**　令$M$及$N$指示同類之任意二量.如§§ 81, 130, 207中,吾人於$M$及$N$表線分時,謂爲長者之數,曰$M$以$N$爲單位之測度,或$M$與$N$之比. 215

故§§ 212, 213,中關於線分之長之諸定理,適用於任何同類之量之測度或比.特例,

若$M$及$N$對於同一單位之測度各自爲a及b,則$M$對$N$之比爲a/b. 216

# V. 虛數及複素數

## 純虛數

217　實數系不含負數之偶次根;因實數之偶次冪皆爲正數.例如,實數系不含 $-4$ 之平方根.

爲適應此種困難,故創一新符號系統,稱爲虛數或複素數.

218　新符號之最簡單者爲 $i$, 稱虛數單位 (Unit of imaginaries). 用此單位及諸實數, $a$, 作諸符號 $ai$, 且認其爲依諸"係數" $a$ 在實數系中之順序而排列者. 即得一新綿續順序系統,其諸"數"稱爲純虛數 (Pure imaginaries).

譬如,若依獲得實數系之方法進行,則可先作虛數完全標尺

$$\cdots\cdots -3i,\ -2i,\ -i,\ 0,\ i,\ 2i,\ 3i, \cdots\cdots,$$

再加入有理數係數之虛數而擴充之爲稠密系統,然後加入無理係數之虛數而擴充之爲綿續系統.

由今言之, $2i$ 不過新數之一之名而已.其僅有之性質爲在新順序系統中佔一定之位置.然在定乘法之義以後,將見 $2i$ 亦代表積 $2\times i$ 或 $i\times 2$. 各純虛數 $ai$ 皆然.

特例,吾人定 $0\cdot i$ 之義爲0.故 $0i$ 以0代之.

注意0爲實數系及純虛數系唯一之共有之數.

219　爲此諸新數而創稱爲加法及乘法之算法,可以下列等式定其意義.

$$1.\quad ai+bi=(a+b)i. \qquad 2.\quad a\cdot bi=bi\cdot a=abi.$$

$$3.\quad ai\cdot bi=-ab.$$

譬如,3,二純虛數 $ai$ 及 $bi$ 之積,爲乘其係數而變號所得之實數, $-ab$.

仿 § 136 以定乘冪之義.譬如, $(ai)^2=ai\cdot ai$.

純虛數系含實數系中之一切負數之平方根，即： 220

$$\sqrt{-1}=i \qquad 又 \qquad \sqrt{-a^2}=ai,$$

何則， $i^2=i\cdot i=1i.1i=-1.$ § 219, 3

故 $i$ 為 $-1$ 之平方根，§ 138. 以 $\sqrt{-1}$ 記之，則 $i=\sqrt{-1}$.

仿此得證 $-i$ 為 $-1$ 之平方根. 以 $-\sqrt{-1}$ 記之.

仿此，因 $(ai)^2=ai\cdot ai=-a^2$，得 $ai=\sqrt{-a^2}$.

## 複素數

吾人創複素數，俾數系能含負數較高之偶次根. 複素數形如 $a+bi$，由一實數，$a$，及一純虛數，$bi$，以+號結合而成. 通常亦有稱之為虛數者. 221

$a+bi$ 一式應視為單一之符號，而 + 號為此符號之一部分，至已定複素數加法之義後為止.

$a=a+0i$ 又 $bi=0+bi$. 故實數及純虛數皆包含於複素數中. 222

吾人視複素數為依行及列而排列如次：在一切之 $a+bi$ 中，具有同一之 $b$ 者在同一之列，自左而右依其諸 $a$ 之順序而排列；具有同一之 $a$ 者在同一之行，自下而上依其諸 $b$ 之順序而排列. 吾人可謂任何特殊之複素數，為其在此"二向度的順序排列"中之位置所確定. 223

對於 $a$ 及 $b$ 一切之值圖示此排列之法，吾人將於 § 238 說明之. $a$ 及 $b$ 限於整數值時，此排列可示之如下：

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots \\
\cdots & -2+2i & -1+2i & 2i & 1+2i & 2+2i & \cdots \\
\cdots & -2+\ i & -1+\ i & i & 1+\ i & 2+\ i & \cdots \\
\cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \\
\cdots & -2-\ i & -1-\ i & -\ i & 1-\ i & 2-\ i & \cdots \\
\cdots & -2-2i & -1-2i & -2i & 1-2i & 2-2i & \cdots \\
\cdots & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots
\end{array}$$

此排列亦可視爲一順序系統 §17, 特其元爲列(或行), 每一列自身又爲 $a+bi$ 形之符號之順序系統而已.

224 **相等之定義** 二複素數在上述之二向度的順序排列中佔同一之位置時稱爲相等. 故

225 若 $a+bi=c+di$, 則 $a=c$ 及 $b=d$; 而其逆亦眞. 特例, 若 $a+bi=0$, 則 $a=0$ 及 $b=0$; 而其逆亦眞.

關於二不等之複素數, 如 $2+3i$ 及 $3+i$, 不能謂其一小於或大於——卽前於或後於——其他, 因複素數不成爲單純之順序系統也.

226 **加法, 減法, 及乘法之定義** 二複素數 $a+bi$ 及 $c+di$ 之和, 差, 積, 爲以下等式右端之複素數.

1. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$

2. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$

3. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

依 1 及 2, 加法及減法互爲逆算法. 特例, 依 1, $(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(0+b)i=a+bi$; 卽, 依定義 1, $a+bi$ 爲 $a$ 與 $bi$ 之和.

此諸定義與交換, 結合, 及分配之律一致. 蓋本由諸律及以前之定義推得者也. 譬如,

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=(a+bi)c+(a+bi)di\\&=ac+bi\cdot c+a\cdot di+bi\cdot di\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i,\ \text{因 } i^2=-1.\end{aligned}$$

227 系 積之一因數爲 0 時其積亦爲 0.

何則, $(a+bi)(0+0i)=(a\cdot 0-b\cdot 0)+(a\cdot 0+b\cdot 0)i=0.$

228 **除法** $a+bi$ 除以 $c+di$ 之商. 吾人定其義爲乘 $c+di$ 可得 $a+bi$ 之複素數. $c+di$ 不爲 0 時, 如此之數有一且祇一, 卽下方程式右端之數.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

然 $c+di$ 爲 0 時,無確定之商存在.

因易明此方程式右端乘以 $c+di$ 所得之積即爲 $a+bi$ 也, § 226.

此數之爲商,得發見之如下:

若有乘以 $c+di$ 可得 $a+bi$ 之數存在,命之爲 $x+yi$.

則 $$(x+yi)(c+di)=a+bi. \quad (1)$$

即 $$(cx-dy)+(dx+cy)i=a+bi. \quad (2)$$

從而 $cx-dy=a$ 及 $dx+cy=b$. (3) § 225

解此組方程式,得

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2},\quad \text{但 } c^2+d^2=0 \text{ 除外.} \quad (4)$$

又,因 (4) 爲 $x$ 及 $y$ 唯一之能適合 (3) 之一組值,故其對應之數 $x+yi$ 爲唯一之乘 $c+di$ 能得 $a+bi$ 之數.

由 (4) 易明 $c^2+d^2=0$ 時上述商之定義無意義.若 $c^2+d^2=0$, 則 $c$ 及 $d$ 皆爲 0, 因非然則將有一正數等於 0 也.若 $c$ 及 $d$ 皆爲 0, 則除數 $c+di$ 亦爲 0.

**交換,結合,分配之律** 以上所定諸算法之義包含實數之諸對應算法甚明.複素數之諸算法,亦遵從交換,結合及分配之律,與實數同. 229

譬如, $$(a+a'i)(b+b'i)=ab-a'b'+(ab'+a'b)i, \quad (1)$$

又 $$(b+b'i)(a+a'i)=ba-b'a'+(b'a+ba')i. \quad (2)$$

然依 § 177, (1) 與 (2) 之右端相等.

故 $$(a+a'i)(b+b'i)=(b+b'i)(a+a'i).$$

倣此可證其餘諸律.

**等式推演律** 令 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 指示任意之複素數. 230

1. 若 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, 則 $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$.
2. 若 $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$, 則 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.
3. 若 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, 則 $\mathbf{ac}=\mathbf{bc}$.
4. 若 $\mathbf{ac}=\mathbf{bc}$, 則 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, 但 $\mathbf{c}=0$ 除外.

1. 何則,令 $\mathbf{a}=a+a'i$, $\mathbf{b}=b+b'i$, 而 $\mathbf{c}=c+c'i$.

若 $$a+a'i=b+b'i,$$

則 $$a=b \text{ 而 } a'=b'.$$ § 225

故 $$a+c=b+c \text{ 而 } a'+c'=b'+c',$$ § 178

從而 $$(a+c)+(a'+c')i=(b+c)+(b'+c')i,$$ § 225

卽 $$\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c}.$$ § 226

2. 如 $$\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c},$$

則 $$\mathbf{a}+\mathbf{c}+(-\mathbf{c})=\mathbf{b}+\mathbf{c}+(-\mathbf{c}),$$ 依 1

從而 $$\mathbf{a}=\mathbf{b}.$$ § 226

3及4. 此二律之證明各與1及2之證明相彷.

231 系 積爲零時其因數之一必爲零.

可用§76之理由§2 0, 4導出.

232 複素數之絕對值 正實數$\sqrt{a^2+b^2}$稱爲$a+bi$之絕對値,記爲$|a+bi|$.故依定義

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

例如,$|2+i|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

$b=0$時,此定義化爲§63所述對實數之定義.此定義之幾何證明見§239.

233 吾人亦可稱二複素數之一爲數値上小於,等於,或大於其他,視前者之絕對値爲小於,等於,或大於後者之絕對値而定.

例如,$2+3i$數値上大於$3+i$.

何則,$|2+3i|=\sqrt{13}$, $|3+i|=\sqrt{10}$,而$\sqrt{13}>\sqrt{10}$.

234 定理1. 二複素數之積之絕對値,等於各數絕對値之積.

令此二數爲$\mathbf{a}=a+a'i$及$\mathbf{b}=b+b'i$.

因 $$\mathbf{ab}=ab-a'b'+(ab'+a'b)i,$$ § 226

有 $$|\mathbf{ab}|=\sqrt{(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2}.$$ § 232

然實行適所指示之算法,可得

$$(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2=(a^2+a'^2)(b^2+b'^2).$$

故 $$\sqrt{(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2}=\sqrt{a^2+a'^2}\cdot\sqrt{b^2+b'^2}.$$ § 186

卽 $$|\mathbf{ab}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|.$$

235 定理2. 二複素數之和之絕對値,不能超過各數絕對値之和.

仍用§234之同一記號.

則 $$\sqrt{a^2+a'^2}+\sqrt{b^2+b'^2}\geqq\sqrt{(a+b)^2+(a'+b')^2} \qquad (1)$$

若 $$a^2+a'^2+b^2+b'^2+2\sqrt{(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)}$$
$$\geqq a^2+b^2+a'^2+b'^2+2(ab+a'b') \qquad \S\ 184$$

∴若 $$\sqrt{(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)}\geqq ab+a'b' \qquad \S\ 178$$

∴若 $$a^2b^2+a'^2b'^2+a^2b'^2+a'^2b^2\geqq a^2b^2+a'^2b'^2+2aba'b' \qquad \S\ 184$$

∴若 $$a^2b'^2+a'^2b^2\geqq 2aba'b' \qquad \S\ 178$$

∴若 $$(ab'-a'b)^2\geqq 0. \qquad (2) \qquad \S\ 178$$

然因實數之平方常為正數(或0),(2)常為眞.故(1)常為眞,卽定理已證明.

例如, $$|2+i|=\sqrt{5}\ 又\ |1+3i|=\sqrt{10}.$$

但 $$|(2+i)+(1+3i)|=5,\ 而\ 5<\sqrt{5}+\sqrt{10}.$$

**乘冪及方根** 1. $a+bi$之$n$次冪者,各為$a+bi$之$n$因數之積也,書作$(a+bi)^n$.由§226,3知此積為一複素數,如$c+di$. 236

仿§185得證指數律亦適用於如此定義之複素數之乘冪.

2. 如$(a+bi)^n=c+di$.則$a+bi$稱為$c+di$之$n$次根,以$\sqrt[n]{c+di}$記之.

以後將證明每一與複素數有$n$個如此之$n$次根:換言之,在複素數系統中,$n$次冪等於$c+di$之不同之數共有$n$個.

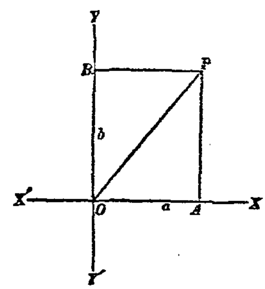
例如,因$(1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2})^2=1/2+2i/2-1/2=i$,$1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}$一數為$i$之一平方根,故為$-1$之一四次根.$-1$之其餘三個四次根為

$$-1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2}.$$

**總結論** 數系再無推廣之必要.何則,適已詳示,§§226,236,複素數系足以應一切四則及開方之需要.雖尚有其他之算法在算學中亦佔位置,譬如求對數之算法卽其一,然此等之算法皆可用各項為複素數之無窮級數如$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$者以定其義;而此種之級數若有和,其和必為複素數. 237

# 複素數之圖示

238 複素數得以一平面上之點代表之,此等之點稱為其對應數之圖象 (Graphs).




取互為垂直而交於原點$O$之任意二直線$X'OX$, $Y'OY$; 又取定線分$s$為測長之單位.

1. 表各實數$a$用$X'OX$上之點$A$, 其至$O$之距離,以$s$為單位時為$|a|$, § 209, $A$之位於$O$之右方或左方視$a$為正或負而定.

2. 表各純虛數$bi$用$Y'OY$上之點$B$, 其至$O$之距離為$|b|$, $B$之在$O$之上方或下方視$b$為正或負而定.

3. 表各複素數$a+bi$用下法所求得之點$P$. 依1與2求$a$及$bi$之圖象$A$及$B$, 過$A$及$B$引直線分別與$Y'OY$及$X'OX$平行.則此二直線之交點$P$卽$a+bi$之圖象.

$X'OX$稱實軸, $Y'OY$稱虛軸.

此法使複素數系與平面上之一切點所組成之集一一對應, § 2. 且複素數系之二向度的順序的性質亦得一適當之表示方法. § 223.

注意凡數具有同一之虛部者,其圖象在平行於$X'OX$之同一直線上;又凡數具有同一之實部者,其圖象在平行於$Y'OY$之同一直線上.

239 任何複素數,其絕對值為其圖象至原點之距離.

何則, § 238 圖中之$OA$及$AP$, 其長各為$a$及$b$, 故$OP$之長為$\sqrt{a^2+b^2}$或$|a+bi|$, § 232.

240 二複素數 $\mathbf{a}=a+a'i$ 及 $\mathbf{b}=b+b'i$, 其和及積之圖象,可依以下方法求得之.

已與$\mathbf{a}$及$\mathbf{b}$之圖象$A$及$B$, 聯結$OA$及$OB$而完成平行四邊形$OACB$, 則$C$為$\mathbf{a}+\mathbf{b}$之圖象.

何則，引諸垂線 $BD, AE, CF, AG$，則 $a, a', b, b'$，各爲 $OE, EA, OD, DB$ 之長，而三角形 $ODB$ 及 $AGC$ 全等。

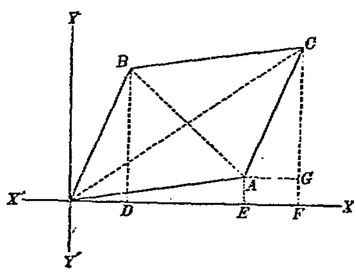
就故長度而論，
$$OF=OE+EF=OE+OD=a+b,$$
而
$$FC=FG+GC=EA+DB=a'+b'.$$

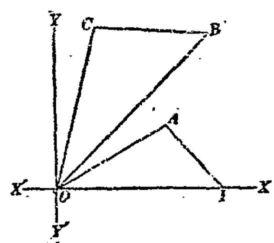
故 $C$ 爲 $a+b+(a'+b')i$ 即 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$(§ 226, 1) 之圖象。

$O, A, B$ 在同直線上時，引 $AC$ 與 $OB$ 等長且同向，即可求得 $C$.

因 $OC \leqq OA+AC$，即 $\leqq OA+OB$，故有 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$.

差 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 之圖象即和 $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ 之圖象。




已與 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 之圖象 $A$ 及 $B$，又 $I$ 指示 1 之圖象。聯結 $OA, OB, IA$。在 $OB$ 上作三角形 $OBC$ 使與 $OIA$ 相似且繞 $O$ 旋轉時，若 $OB$ 與 $OX$ 重合，$OC$ 亦與 $OA$ 重合。則 $C$ 爲 $\mathbf{ab}$ 之圖象。

此法則以後將證之，且將由此導出商及乘羃之圖象之求法。

$\mathbf{b}=i$ 時，將 $OA$ 依反時計向繞 $O$ 轉過 $90°$ 即得 $OC$.

由是複素數間之恆等關係可轉變爲幾何定理。故虛數可表實物間之關係。 **241**

例如，恆等式 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2=\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a})/2$ 示平行四邊形二對角線互相等分；因 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$ 及 $\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a})/2$ 之跡，係第一圖 (§ 240) 中 $OC$ 及 $AB$ 之中點也。

# 第二編　代數學

## I. 發　端

### 論用文字表數

242　常數及變數(Constants and variables)　在代數學中,一文字常用以指示任何數.例如,在公式$ab=ba$中,文字$a$及$b$指示任何二數,公式之意義爲:任一第一數乘任一第二數之積,與第二數乘第一數之積相同.

在多種代數討論中,具有上述意義之二文字,譬如式$x+b$中之$b$及$x$,有區別之如次之必要.

其一.　吾人認其一,$b$,爲在最初即有一特殊值指定.而於討論中始終保持之,但其值爲隨意之數.如此之文字稱爲已知數或常數.

其二.　反之,吾人認其又一,$x$,爲在討論中得任取一切可能之值及由任一值變爲任他值者.如此之文字稱爲變數.

243　未知數　文字又常用以指示其值待定之特殊數.如此之文字稱爲未知數.

未知數之值,不能隨意指定,與常數及變數之情形不同.

譬如,在等式$2x-5=0$中,$x$爲未知數,其值易求得爲5/2.在式$2x-5$中,之值,可隨意指定,然在等式$2x-5=0$中,除5/2外$x$不能有他值.

**文字之選擇** 選擇文字之唯一必要限制，不能使一文字同時代二相異之數而已. 244

但習慣上常用 $a, b, c$, 等居先之羅馬文字代已知數或常數. 而用 $x, y, z$, 等末後之文字代未知數及變數.

單純之文字以外，有時亦用附撇號及足數之文字：例如 $a', a'', a'''$ 讀爲 "$a$ 第一", "$a$ 第二", "$a$ 第三", 又 $a_0$, $a_1$, $a_2$ 讀爲 "$a$ 零", "$a$ 一", "$a$ 二".

**文字之運算** 用 $a, b\ c$ 等文字代數時，祇能採算術中算法結合之以示其結果而已. 譬如，加 $b$ 於 $a$ 意祇謂作式 $a+b$, 故吾人即稱其式爲 $a$ 與 $b$ 之和. 同理，$a$ 乘 $b$ 之積爲式 $ab$. 245

如此求得之文字式，因其表數，故可依算術之算法運算. 但因未與式之值，在此種運算中不能直接應用之. 故祇能用適當之算法符號聯結諸式，然後用各種變化簡化其結果之形式，此種變化無論若何，須不影響結果之值.

然於 §68, 已知凡和及積形式之變化能不影響其値者，皆可以下之公式表之：

1. $a+b=b+a$.
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$.
3. $ab=ba$.
4. $a(bc)=(ab)c$.
5. $a(b+c)=ab+ac$.

故得謂 1 至 5 之公式，即結合文字式時加法及乘法實際上所需或可用之定義；算術之其餘之算法亦如此.

譬如，加 $2x+3y$ 及 $4x+5y$, 意祇謂用 1－5 諸公式將式 $2x+3y+(4x+5y)$, 演化，而併合其與數，以求其最簡形式

$$2x+3y+(4x+5y)=2x+3y+4x+5y \qquad \text{依 2}$$

$$=2x+(3y+4x)+5y=2x+(4x+3y)+5y \qquad \text{依 2 及 1}$$

$=2x+4x+3y+5y=(2x+4x)+(3y+5y)$ 依 2

$=(2+4)x+(3+5)y=6x+8y$, 爲所求之和. 依 3 及 5

## 運算之基本法則

246 依上所述,下之法則及公式可用以定代數學中之加,減,乘,除,及乘方,開方諸算法之義,故吾人稱之爲運算之基本法則 (Fundamental rules of reckoning).

在此諸公式(即本書第一部中就各種數所證實者)中,文字 $a, b, c$ 指示任何有窮數,而等號 = 爲"表同數"之意.

247 **加法** 加 $b$ 於 $a$ 之結果,爲式 $a+b$, 稱爲 $a$ 與 $b$ 之和. 每與 $a$ 及 $b$ 一組值,此式即有,且祇有,一值. 特例, $a+0=0+a=a$.

248 加法爲交換的兼結合的算法;即加法遵從下二律, §§ 34, 35:

$$a+b=b+a, \qquad a+(b+c)=(a+b)+c.$$

249 下之等式推演律於和爲眞. § 39:

如 $a=b$, 則 $a+c=b+c$.

如 $a+c=b+c$, 則 $a=b$*.

250 **減法** 減法爲加法之逆, § 55. 任與二數 $a$ 及 $b$, 常有,且祇有一數,加 $b$ 後可得 $a$. 吾人稱此數爲由 $a$ 減 $b$ 所得之餘,以式 $a-b$ 表之. 故依定義,

$$(a-b)+b=a.$$

特例, $0-b$ 以 $-b$ 表之.

251 **乘法** 乘 $a$ 以 $b$ 之結果,爲式 $ab$. 吾人稱 $ab$ 爲 $a$ 乘 $b$ 之積. 每與 $a$ 及 $b$ 一組值,此式即有,且祇有,一值.

* 以後將見此法則在 $c$ 爲無窮大時不適用.

特例, $a\cdot 0=0\cdot a=0$. 不論 $a$ 所取之有窮值若何.

在 $b$ 爲正整數時, $ab=a+a+\cdots\cdots$ 達 $b$ 項.

乘法爲交換的兼結合的算法,其對於加法又爲分配的算法;卽乘法遵從下三律, §§ 45—47: 252

$$ab=ba, \qquad a(bc)=(ab)c, \qquad a(b+c)=ab+ac.$$

下之等式推演律於積爲眞, §§ 75, 76: 253

如 $a=b$, 則 $ac=bc$.

如 $ac=bc$, 則 $a=b$, 但 $c=0$ 除外.*

如 $ac=0$, 則 $a=0$, 或 $c=0$.

**除法** 除法爲乘法之逆, § 124. 任與二數, $a$ 及 $b$, 常有,且祇有一數,乘 $b$ 後可得 $a$, 除非 $b$ 爲 0. 吾人稱此數爲除 $a$ 以 $b$ 所得之商,以式 $\frac{a}{b}$ 或 $a/b$ 表之. 故依定義 254

$$除 b=0 外時, \left(\frac{a}{b}\right)b=a.$$

**乘方** 乘方爲累乘之一例. 連乘積 $a\cdot a\cdots\cdots$ 達 $n$ 因數, 吾人以 $a^n$ 表之, 稱爲 $a$ 之 $n$ 次冪. 255

於符號 $a^n$, 稱 $n$ 爲指數, $a$ 爲底.

乘方,卽作乘冪,遵從以下三律,稱爲指數律, § 185: 256

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}, \qquad (a^m)^n=a^{mn}, \qquad (ab)^n=a^nb^n.$$

下之等式推演律於乘冪爲眞, § 184: 257

如 $a=b$, 則 $a^n=b^n$.

如 $a^2=b^2$, 則 $a=b$, 或 $a=-b$.

第二法則及以此爲特例之普徧法則,後將證之.

*以後將見此法則在 $c$ 爲無窮大時不適用.

258 開方 開方爲乘方逆算法之一，§§ 138, 140 任與正數$a$，常有，且祗有，一正數，其$n$次羃等於$a$。吾人稱此數爲$a$之主$n$次根 (Principal $n$ th root)，以$\sqrt[n]{a}$表之，在$n=2$時則以$\sqrt{a}$表之。故依定義

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

此正數$\sqrt[n]{a}$，並非唯一之$n$次羃等於$a$之數。反之，$n$次羃等於$a$之相異之數共有$n$個，後將證之；且此不僅於$a$正時爲然。$a$爲任何他種數時皆然。

$a$爲正數而$n$爲奇數時，$-a$之主$n$次根爲$-\sqrt[n]{a}$.

259 以上各法則之逆 以上例舉之法則，其中若干曾稱爲等式推演律，其餘可稱之爲配合律 (Rules of combination).

應注意者，凡配合律及和之等式推演律皆可逆，而積及乘羃之等式推演律則非完全可逆。

例如依分配律，$a(b+c)=ab+ac$，此爲配合律之一，$a(b+c)$可易爲$ab+ac$，反之，$ab+ac$亦可易爲$a(b+c)$.

又，若$a=b$，吾人常能斷言$a+c=b+c$，然其逆亦眞，若$a+c=b+c$，則$a=b$.

然$a=b$時雖常能斷言$ac=bc$，反之，若$ac=bc$，必已知$c$不爲0，始能斷言$a=b$.

又由$a=b$雖常能得$a^2=b^2$；而由$a^2=b^2$祇能得$a=b$，或$a=-b$.

260 不等式推演律 公式$a\neq b$爲"$a$不等於$b$"之意。

二與實數，$a$及$b$，不等，則其一代數上較大，而其又一代數上較小，§ 62.

若$a$大而$b$小，則書作

$$a>b \quad 或 \quad b<a.$$

特例，$a>0$或$a<0$，視$a$爲正或負而定。

261 對於任與之實數$a, b, c$有下之法則，§§ 178, 184：

1. 若 $a=b$ 而 $b=c$, 則 $a=c$.

若 $a=b$ 而 $b<c$, 則 $a<c$.

若 $a<b$ 而 $b<c$, 則 $a<c$.

2. 依 $a<, =,$ 或 $>b$,

而 $a+c<, =,$ 或 $>b+c$,

又 $ac<, =,$ 或 $>bc$, 若 $c>0$;

然 $ac>, =,$ 或 $<bc$, 若 $c<0$.

3. $a$ 及 $b$ 爲正數時,

依 $a<, =,$ 或 $>b$,

而 $a^n<, =,$ 或 $<b^n$;

又 $\sqrt[n]{a}<, =,$ 或 $>\sqrt[n]{b}$.

據前所述,則 2 及 3 中只含 = 號之法則亦適用於虛數.下之法則亦然:若 $a=b$ 而 $b=c$, 則 $a=c$. 此法則可稱爲遞等律 (General rule of equality).

## 其他之代數符號

除已於以上諸節中說明其意義之各種符號外,代數學中常用之符號如下: 262

1. 各種集合符號,如習見之括號( )及[ ],{ },示所括之式須作一個符號用者.

2. 複號 $\pm$,讀爲"加或減"又 $\mp$,讀爲"減或加".

例如,$a\pm b\mp c$ 爲 $a+b-c$ 或 $a-b+c$ 之意,其中在上之各符號同讀,在下之各符號亦然.

3. 符號 $\therefore$ 代故字.

4. 符號…代餘仿此.

5. 又,∵代因字;≯代不大於;≮代不小於;≷代大於或小於.

## 代數式

263　文字,或文字及數,用上述算法結合而成之式,稱爲代數式.

264　注意　代數式含一算法之次數可以有限,如 $1+x+x^2$ 即是,可以無限,如 $1+x+x^2+\cdots\cdots$ 設無限繼續即是.前者稱有窮式 (Finite expression), 後者稱無窮式 (Infinite expression). 目前專論有窮式.

265　習慣上依認爲變數(或未知數)者出現於代數式中之情狀而類別之如下:

266　代數式中不含具變數之式所示之除法者,稱爲整式,否則爲分式.

例如,若 $x$ 及 $y$ 爲變數,而 $a, b, c$ 爲常數,

則　$ax^2+bx+c$ 及 $\frac{y}{b}+\sqrt{x}$ 爲整式.

而　$y+\frac{1}{x}$　及 $\frac{2+x}{1-x}$　爲分式.

267　代數式中不含具變數之式所示之方根者,稱爲有理式,否則爲無理式.

例如,$a+\sqrt{bx}$ 爲有理式,而 $\sqrt{y}+\sqrt{y-x}$ 爲無理式.

268　注意　1. 應用此種名詞於一式時,吾人假定其已化爲其最簡形式.例如,$\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ 爲有理式,以其能化爲有理形式 $x+y$ 故也.

2. 所謂整,所謂有理,與式之數值全無關係,餘仿此.

譬如,$x+2$ 爲有理整式,然僅在 $x$ 取整數值時爲能表整數耳. $x$ 每取一分數值,此式即表一分數,$x$ 每取一無理值,此式亦即表一無理數.

269　代數式 $A$ 由若干部分以＋號或－號聯結而成時,則各部分連帶其前所附之號稱爲 $A$ 之項.

例如，式 $$a+a^2c-(b+c)+[d+e]-\{f+g\}+\overline{h+i}+\left.\begin{array}{c}j\\+k\end{array}\right|-\frac{l+m}{n+p}$$
之項，爲 $a$, $a^2c$, $-(b+c)$, 等，其中有自身又由多項組成者，皆以括號或他種集合符號(§ 262, 1)括之.

270 整式依其項數而稱爲獨項式，二項式，三項式，一般爲多項式.

271 任一獨項式中常數因數之積，稱爲變數因數之積之係數.

例如，於 $4ab^2x^3y^4$, $4ab^2$ 爲 $x^3y^4$ 之係數.

同時，任何因數得稱爲積之其餘部分之係數.

凡單項式皆應先書係數. 不書係數時，其係數爲 1. 例如，$x^2y$ 之係數爲 1.

272 同類項爲至多祇有係數不同之項.

例如，$-2x^2y$ 及 $bx^2y$ 爲同類項.

273 獨項式之次數，爲式中認爲變數者之指數之和.

例如若變數爲 $x$ 及 $y$, 則 $4ab^2x^3y^4$ 之次數爲七，$ax^3$ 之次數爲三，而 $b$ 之次數爲零(參看 § 595).

274 多項式之次數，爲式中最高次項之次數；而任一整式之次數，則爲由其式化得之最簡多項式之次數.

例如，$ax^3+bx^2y+cy^3+dx^2+ey+f$ 之次數爲三，而 $(x-1)(x-2)$ 之次數爲二.

275 爲便利起見，多項式之項宜依其次數之順序，或遞昇或遞降，排列之. 如有若干項次數相同時，則將此諸項就任一變數依其次數之順序排列.

此順序可於 § 274 所舉之多項式中見之.

276 多項式之各項次數相同時，稱爲齊次式 (Homogeneous expression).

例如，$5x^3-2x^2y+4xy^2+y^3$ 爲齊次式.

277 祇含一變數之多項式　有理整式祇含一變數，如 $x$ 者，特爲重要. 論其作用，此種式之於代數，蓋甚類整數之於算術. 二

者類似之性質甚多,後將見之.此種式常能化爲$x$之多項式之形式,即以下形式之一:

$$a_0x+a_1,\quad a_0x^2+a_1x+a_2,\quad a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,\quad \cdots\cdots,$$

亦即下之形式:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

其中$n$指示式之次數,點…代未書出之諸項,此諸項如書出時,項數應爲$n+1$.

係數$a_0, a_1, \cdots$,指示常數,其值得爲不論何種數.特例,除$a_0$外其他皆可爲0,其時多項式稱爲不完全.

應注意者,各項中$a$之足數與$x$之指數之和,爲多項式之次數.

例如,於$5x^6-x^3+2x^2+x-3$,有$n=6$; $a_0=5$, $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=-1$, $a_4=2$, $a_5=1$, $a_6=-3$.

278 函數(Functions) 含一或多變數之代數式,如$x+2$或$x^2+y$,自身亦爲變數甚明.吾人稱$x+2$爲$x$之函數,以其値隨$x$之値而定,$x$每取一值,$x+2$即有一定值與之對應故也.

同理,吾人稱$x^2+y$爲$x$及$y$之函數,普徧言之,則凡代數式爲其中所含一切變數之函數.

279 向之所謂$x$, $x$及$y$,等之整,分,有理,無理式,亦可稱爲$x$, $x$及$y$等之整,分,有理,無理函數.

280 $x$之與函數,常以符號$f(x)$表之,讀爲"$x$之函數".函數對應於$x=0, 1, b$之值,則以$f(0)$, $f(1)$, $f(b)$表之.

例如,如$f(x)=x+2$,則$f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(b)=b+2$.普徧言之,如$f(x)$表任與之$x$之式,則$f(b)$表式中以$b$代$x$之結果.

如有 $x$ 之二或多函數時,其中一函數可以 $f(x)$ 表之,其他則以 $F(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ 等符號表之.

同理,二變數,$x$ 及 $y$ 之函數,可以 $f(x, y)$ 表之;餘仿此.

## 習 題 I

1. $x^2yz^3+2x^5y^4z^6+3x^7y^2z^3$, 之次數就 $x$, $y$, $z$ 言各若何? 就 $y$ 及 $z$ 二者言又若何? 就 $x$, $y$, 及 $z$ 三者言又若何?
2. $(x+1)(2x^2+3)(x^4-7)$ 之次數若何?
3. 已與 $3x^7+x^6-4x^4+x^3-12$, 如用 § 277 之記法, 則 $n$, $a_0$, $a_1$,……之值若何?
4. 若 $f(x)=2x^3-x^2+3$, 試求 $f(0)$, $f(-1)$, $f(3)$, $f(8)$.
5. 若 $f(x)=(x^2-3x+2)/(2x+5)$, 試求 $f(0)$, $f(-2)$, $f(6)$.
6. 若 $f(x)=x+\sqrt{x}+2$, 試求 $f(1)$, $f(4)$, $f(5)$.
7. 若 $f(x)=2x+3$, 則 $f(x-2)$ 若何? $f(x^2+1)$ 若何?
8. 若 $f(x, y)=x^3+x-y+8$, 試求下列各值:

$$f(0, 0),\quad f(1, 0),\quad f(0, 1),\quad f(1, 1),\quad f(-2, -3).$$

# 恆 等 式

如 $A$ 與 $B$ 指示同一之式,或 $A$ 得用運算法則(§§ 247—258)變換爲 $B$, 則稱 $A$ 爲恆等於 $B$. 281

記法 $A \equiv B$ 卽"$A$ 恆等於 $B$"之意.

例如, $\quad x(x+2)+4$ 恆等於 $x^2+2(x+2)$.

何則, $\quad x(x+2)+4 \equiv (x^2+2x)+4$

$$\equiv x^2+(2x+4) \equiv x^2+2(x+2). \qquad §§ 248, 252$$

吾人稱 $A \equiv B$ 爲恆等式 (Identical equation, or identity). 故

恆等式 $A \equiv B$ 者, 第一式, $A$, 得用運算法則變換爲第二式, $B$, 之敍述也. 282

不含文字之恆等式,例如 283

$$3-8+2 \equiv 4+7-14,$$

特稱數的恆等式 (Numerical identity).

下之重要定理,已包含於 § 282 中.

284 **定理** 若 $x$ 之二多項式恆等,則其對應係數皆相等;即如

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n,$$

則 $$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad \cdots,\quad a_n=b_n.$$

何則,設係數相異,則多項式爲相異之式,而第一式不能用運算法則變換爲第二式矣.

例如,如 $ax^2+3x-3\equiv 2x^2+bx+c$,則 $a=2$, $b=3$, $c=-3$.

如係數 $a_0, a_1,\cdots\cdots, b_0, b_1,\cdots\cdots$ 非常數而爲不含 $x$ 之代數式,則由恆等式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots$ 得 $a_0\equiv b_0$, $a_1\equiv b_1,\cdots\cdots$,換言之,凡對應係數如 $a_0$ 與 $b_0$ 等皆恆等.

285 二多項式各項,爲有常數係數之二或多變數乘冪之積者,恆等時亦有同樣之定理成立.

譬如,如 $a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+\cdots\cdots$

$$\equiv a'+b'x+c'y+d'x^2+e'xy+f'y^2+\cdots\cdots,$$

則 $$a=a',\ b=b',\ c=c',\ d=d',\ e=e',\ f=f',\ \cdots\cdots.$$

286 **恆等式之性質** 下之定理,在代數運算中常見應用.

**定理一** 若 $A\equiv B$,則 $B\equiv A$.

何則,$A$ 變換爲 $B$ 所用之方法,純爲配合律之應用,故可逆,§ 259. 而其逆法即使 $B$ 變換爲 $A$.

例如,§ 281 之例中之變換可逆.

何則, $$x^2+2(x+2)\equiv x^2+2x+4$$
$$\equiv(x^2+2x)+4\equiv x(x+2)+4. \qquad §§ 248, 252$$

**定理二** 若 $A\equiv C$ 又 $B\equiv C$,則 $A\equiv B$.

何則,因 $B\equiv C$, 得 $C\equiv B$. 依定理一

故 $A\equiv C$ 又 $C\equiv B$, 從而 $A\equiv B$,

例如,因 $x(x+2)+4\equiv x^2+2x+4$, §§ 248, 252

又 $x^2+2(x+2)\equiv x^2+2x+4$, §§ 248, 252

得 $x(x+2)+4\equiv x^2+2(x+2)$.

**定理三** 恆等式兩端施以同一運算時仍爲恆等式.

此由等式推演律(§§ 249, 253, 257)而來.

例如, 若 $A\equiv B$, 則 $A+C\equiv B+C$, 餘仿此.

**恆等式之證法** 欲證二與式 $A$, 及 $B$, 恆等, 不必眞將 $A$ 變換爲 $B$. 如 § 286, 2 所示, 能化 $A$ 及 $B$ 爲同一形式 $C$ 足矣. 287

下之定理示另一重要方法.

若一已知恆等式, $C\equiv D$, 能由所設恆等式, $A\equiv B$, 用可逆之方法導出, 則所設恆等式 $A\equiv B$ 亦眞. 288

何則, 因方法可逆, $A\equiv B$ 能由 $C\equiv D$ 導出. 然 $C\equiv D$ 爲眞, 故 $A\equiv B$ 亦眞.

例 試證 $a+b-b$ 恆等於 $a$.

若設 $$a+b-b\equiv a, \qquad (1)$$

卽得 $$[(a+b)-b]+b\equiv a+b. \qquad (2) \qquad § 249$$

然(2)爲已知恆等式, § 250, 而(1)至(2)之步驟可逆. 故(1)爲眞.

若由 $A\equiv B$ 導出 $C\equiv D$ 之方法非可逆, 不能遽作 $A\equiv B$ 之結論. 以例明之.

若設 $$x\equiv -x, \qquad (1)$$

卽得 $$x^2\equiv (-x)^2. \qquad (2)$$

(2)爲眞, 然由此卽謂(1)亦眞則不可. 因(1)至(2)之步驟固未爲可逆也. (1)實謬.

**恆等與相等** 恆等式原爲形式之關係, 非值之關係. 然若 $A$ 及 $B$ 爲有窮式, 而 $A\equiv B$, 則不論所含文字之值若何, $A$ 及 $B$ 之值常相等. 289

何則, 依假設, 欲將 $A$ 變換爲 $B$, 祇須應用 $a+b\equiv b+a$ 等法則有限數回卽可, 然 $a+b$ 及 $b+a$ 之值, 不論 $a$ 及 $b$ 之值若何, 常相等; 餘仿此.

定理中所以有有窮式之限制者, 其故後將知之.

反之, 若 $A$ 及 $B$ 之值, 不論所含文字之值若何, 常相等, 則 $A\equiv B$. 後將證之.

故在有窮式之情形, 吾人常能用表值相等之符號, $=$, 替代表形式恆等之符號, $\equiv$, 而於 $A\equiv B$ 時, 書作 $A=B$. 以後卽從此義.

符號＝如此用法,與 § 325 所述者務須加以辨別.

## 逆命題

290 試取呈下形之命題考之.

$$\text{如 } A,\text{ 則 } B. \tag{1}$$

詳言之,即: 如一敍述, $A$, 爲眞,則他一敍述, $B$, 亦眞.

例如, 若一圖形爲正方形, 則此圖形爲矩形.

若 $x=1$, 則 $x-1=0$.

291 將(1)之假設, $A$, 及結論, $B$, 交換, 即得逆命題 (Converse proposition).

$$\text{如 } B,\text{ 則 } A.^* \tag{2}$$

例如,上二命題之逆爲:

若一圖形爲矩形, 則此圖形爲正方形.

若 $x-1=0$, 則 $x=1$.

292 由第一例可知眞命題之逆不必仍眞.

293 然如由假設 $A$ 導出結論 $B$ 之推理方法可逆,則眞命題: '若 $A$, 則 $B$,' 之逆命題常眞;何則,其逆法即使吾人由 $B$ 導出 $A$, 換言之,證明'若 $B$, 則 $A$,' 故也.

用可逆之方法證明逆命題,因以證原命題爲眞,此法代數學中常用之, § 288 所述者即其一例.

294 命題: 若 $A$, 則 $B$, 爲眞時, $A$ 稱爲 $B$ 之充分條件 (Sufficient condition) 而 $B$ 爲 $A$ 之必要條件 (Necessary condition).

---

*若 $A$ 且 $B$, 則 $C$, 一類之命題, 其假設由二部分組成者, 有二逆命題: 若 $C$ 且 $B$, 則 $A$, 及如 $A$ 且 $C$, 則 $B$, 是也. 同理, 如假設由三部分組成時,即有三逆命題;餘仿此.

例如,命題:若 $x=1$, 則 $(x-1)(x-2)=0$ 為眞. 故 $x=1$ 為 $(x-1)(x-2)=0$ 之充分條件, 而 $(x-1)(x-2)=0$ 為 $x=1$ 之必要條件.

命題:若 $A$, 則 $B$, 及其逆命題:若 $B$, 則 $A$, 皆眞時, $A$ 稱為 $B$ 之充分兼必要條件, $B$ 亦為 $A$ 之充分兼必要條件. 295

例如, (1) 若 $x=1$, 則 $x-1=0$, 及 (2) 若 $x-1=0$, 則 $x=1$, 皆眞. 故 $x=1$ 為 $x-1=0$ 之充分兼必要條件, $x-1=0$ 亦為 $x=1$ 之充分兼必要條件.

# II. 基本算法

## 加法及減法

**和及餘**　令 $A$ 及 $B$ 指示任二代數式. 所謂 $A$ 與 $B$ 之和及由 $A$ 減 $B$ 所得之餘, 即式 $A+B$ 及 $A-B$ 用運算法則(§§247–258)所能化得之最簡形式之意. 296

**若干有用公式**　下列公式在作此種簡化時甚為有用. 297

1. $a+b-c=a-c+b$.　2. $a-(b+c)=a-b-c$.

3. $a+(b-c)=a+b-c$.　4. $a-(b-c)=a-b+c$.

5. $a(b-c)=ab-ac$.

此諸公式可謂交換,結合,分配三律在減法方面之推廣.

1 及 2 可用下之法則證之, § 249:

若二式各加同式之結果相等, 則原二式亦相等.

1. $a+b-c=a-c+b$.

何則, 加 $c$ 於兩端之結果各為 $a+b$.

即　$[(a+b)-c]+c=a+b$,　§ 250

又　$(a-c)+b+c=(a-c)+c+b=a+b$.　§§ 248, 250

2. $a-(b+c)=a-b-c$.

何則, 加 $b+c$ 於兩端之結果各為 $a$.

即 $[a-(b+c)]+(b+c)=a$, § 251

又 $a-b-c+(b+c)=a-b-c+c+b$

$=a-b+b=a$. §§ 248, 250

3, 4, 5 可證之如下:

因 $b=(b-c)+c$, § 250

故得 3. $a+b-c=a+[(b-c)+c]-c$

$=a+(b-c)+c-c$ § 248

$=a+(b-c)$. 依 1 及 § 250

4. $a-b+c=a-[(b-c)+c]+c$

$=a-(b-c)-c+c$ 依 2

$=a-(b-c)$. § 250

5. $ab-ac=a[(b-c)+c]-ac$

$=a(b-c)+ac-ac$ § 252

$=a(b-c)$. 依 1 及 § 250

應注意者,由 § 248 及公式 1 至 4 得一列加法及減法可不拘依任何順序施行之.

譬如, $a-b+c-d+e=a+c-b-d+e$, 依 1

$=a+c-(b+d)+e=a+c+e-(b+d)$, 依 2 及 1

$=a+c+e-b-d$. 依 2

298 **符號律** 下之"符號律"爲公式 3, 4, 5 之特例.

1. $a+(-c)=a-c$. 2. $a-(-c)=a+c$.

3. $a(-c)=-ac$. 4. $(-a)(-c)=ac$.

在 § 297, 3, 4, 5 中置 $b=0$, 即得 1, 2, 3.

4 可證之如下:

$(-a)(-c)=(-a)(0-c)=(-a)0-(-a)c$ § 297, 5

$=0-(-ac)=ac$ 依 2 及 3

**括號律** 由公式§248及§297, 2, 3, 4, 得下之重要法則: 299
括號前有+號者,可徑去之;括號前有-號者,若變所括各項之號,即可去之.

依上律可插入括號.

例如, $$a+b-c-d+e=a+b-(c+d-e).$$

欲簡化括號中有括號之式,祇須依次應用上律於各重括號即可.

例如,
$$\begin{aligned} a-\{b-[c-(d-e)]\} &= a-b+[c-(d-e)] \\ &= a-b+c-(d-e) \\ &= a-b+c-d+e. \end{aligned}$$

去括號時當然不拘依何順序皆可;然由最外一重開始(如於上例),可使各符號至多祇變一次.

**整式之加減法則** 由§§248, 252, 297之公式得下之法則: 300
加(或減)二同類項時,加(或減)其係數,而附公有之文字於後.

加二或若干多項式時,先將各項不變號依次書出,然後合併同類項以簡化之.

由一多項式減他一多項式時,變減式中各項之號而加之.

**例一.** 加 $4ab^2$ 及 $-5ab^2$; 又由 $4ab^2$ 減 $-5ab^2$.

$$4ab^2+(-5ab^2)=(4-5)ab^2=-ab^2; \qquad \S\,248$$

又 $$4ab^2-(-5ab^2)=[4-(-5)]ab^2=9ab^2 \qquad \S\,297,\ 5$$

**例二.** 加 $x^3+ax^2y+2ab^3$ 及 $bx^2y-5ab^3$.

$$\begin{aligned} & x^3+ax^2y+2ab^3+(bx^2y-5ab^3) \\ &= x^3+ax^2y+2ab^3+bx^2y-5ab^3 && \S\,299 \\ &= x^3+ax^2y+bx^2y+2ab^3-5ab^3 && \S\,248 \\ &= x^3+(a+b)x^2y-3ab^3. && \S\S\,252,\ 297,\ 5 \end{aligned}$$

**例三.** 由 $a^3+a^2b+b^3$ 減 $2a^2b-ab^2+b^3$.

$$a^3+a^2b+b^3-(2a^2b-ab^2+b^3)$$

$$=a^3+a^2b+b^3-2a^2b+ab^2-b^3 \qquad \S\ 299$$

$$=a^3-a^2b+ab^2. \qquad \S\S\ 252,\ 297$$

所加(或減)之多項式有同類項時,如將同類項排列成行,而就各行中加(或減)之,較爲便利.

例四. 加 $a^4+a^3b-2a^2b^2-b^4$ 及 $ab^3+3a^2b^2-a^3b$, 而由其結果減 $5a^2b^2-ab^3$.

$$\begin{array}{rrrrr}
a^4 & +a^3b & -2a^2b^2 & & -b^4 \\
 & -a^3b & +3a^2b^2 & +ab^3 & \\
 & & -5a^2b^2 & +ab^3 & \\
\hline
a^4 & & -4a^2b^2 & +2ab^3 & -b^4
\end{array}$$

## 習題 II

1. 加 $4ax^2y,\ -6ax^2y,\ 5bx^2y$, 及 $-3bx^2y$.
2. 加 $7a^2+2a-b^2,\ 3a+b^2-2a^2$, 及 $b^2-4a-4a^2$.
3. 加 $3x^2-5x+6,\ x^2+2x-8$, 及 $-4x^2+3x-7$.
4. 加 $4a^3+a^2b-5b^3,\ 8a^3-6ab^2-a^2b,\ 3a^3+10b^3$, 及 $6b^3-15ab^2-4a^2b-10a^3$.
5. 由 $3a+b-c$ 減 $4a-2b+6c$.
6. 由 $x^3+6x^2+5$ 減 $2x^2-5x+7$.
7. $a^3+5a^2b$ 須加何式始能得 $a^3+b^3$?
8. 由 $x^3+y^3-6x+5y$ 減下二式之和:

   $-2x^2-6x+7y-8,\ x^3+2x^2-5y+9$.
9. 簡化 $-(a+b)+\{-a-(2a-b)\}-6(a-4b)$.
10. 簡化 $6x-\{4x+[2x-(3x+\overline{5x+7}-1)+3]-8\}$.
11. 簡化 $2a-[4a-c+\{3a-(4b-c)-(b+3c)\}-6c]$.
12. 由 $z-[3x+(y+5z)]$ 減 $x-(3y+2z)$.
13. $x^2+8x+5$ 須加於何式始能得 $x^3-7$?
14. $x^4-9x^2+3y$ 須加於何式始能得 $y^2+x-7$?

## 乘法

301 **積** 所謂二代數式, $A$ 及 $B$, 之積, 卽式 $AB$ 用運算法則所能化得之最簡形式之意.

下列法則在作此種簡化時特爲有用:

1. 交換,結合,分配三律.

2. 指數律 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

3. 符號律:

$$a(-b)=(-a)b=-ab;\quad (-a)(-b)=ab.$$

**整式之相乘法則** 1. 二獨項式求積時,先以數字因數之積乘文字因數之積,再加同文字乘羃之指數以簡化後者.視二式有同號或異號而定,其結果附以+號或-號. 302

2. 多項式與獨項式或兩多項式求積時,以乘式之各項乘被乘式之各項,而加所得之積.

第一法則由交換,結合二律及指數律而來.第二法則由分配律而來;譬如,

$$(a+b+c)(m+n)=(a+b+c)m+(a+b+c)n$$
$$=am+bm+cm+an+bn+cn.$$

多於二之獨項式求積時,第一法則仍可應用.有-號之獨項式個數爲奇數時,積之號爲-;否則爲+.

多於二之多項式之積,可累用第二法則以求之.

例一. 求 $-4a^2b^2x^3$, $2bx^4$, 及 $-3a^3x$ 之積.

$$-4a^2b^2x^3 \cdot 2bx^4 \cdot -3a^3x=24a^2b^2x^3bx^4a^3x=24a^5b^3x^8.$$

例二. 求 $a-2b$ 與 $ab-b^2+a^2$ 之積.

爲便利起見,將二因式依 $a$ 之降羃排列,又取較簡之因式爲乘式.卽得

$$(a^2+ab-b^2)(a-2b)=a^3+a^2b-ab^2-2a^2b-2ab^2+2b^3$$
$$=a^3-a^2b-3ab^2+2b^3.$$

**積就任一(或一組)文字之次數,爲各因式就此(或此組)文字之次數之和.** 303

此由§302,1及下之定理而來:卽任何積之最高次項,爲其各因式中最高次項之積.

例如，$x^2+1$ 及 $x^3-1$ 之次數爲二及三，而積 $(x^2+1)(x^3-1)$，卽 $x^5+x^3-x^2-1$ 之次數爲五．

304 兩因式皆爲齊次式 (§276) 時，積亦爲齊次式．

何則，若每一因式其諸項次數皆同，則以一因式之一項乘他一因式之一項而得之積，次數皆同，故此諸積之和爲一齊次多項式．

305 **演算之排列** 兩因式皆爲 $x$ 或他一文字之多項式，或兩者皆爲二文字齊次函數時，如將演算仿下例排列，較爲便利．

例一．以 $x-3+x^2$ 乘 $2x^3-x^2+5$．

$$\begin{array}{rrrrrr}
2x^3 & -\ x^2 & & +5 & & \\
x^2 & +\ x & -3 & & & \\
\hline
2x^5 & -\ x^4 & & +5x^2 & & \\
& 2x^4 & -\ x^3 & & +5x & \\
& & -6x^3 & +3x^2 & & -15 \\
\hline
2x^5 & +\ x^4 & -7x^3 & +8x^2 & +5x & -15
\end{array}$$

兩因式皆依 $x$ 之降(或升)冪排列，乘式置於被乘式之下．

於是將對應於乘式中若干項之"部分積"就若干列分別書出，使同類項，卽同次項，在同一行中．最後，就各行加同類項．

例二．以 $2y+x$ 乘 $x^2-y^2+2xy$．

$$\begin{array}{rrrr}
x^2 & +2xy & -y^2 & \\
x & +2y & & \\
\hline
x^3 & +2x^2y & -\ xy^2 & \\
& 2x^2y & +4xy^2 & -2y^3 \\
\hline
x^3 & +4x^2y & +3xy^2 & -2y^3
\end{array}$$

在此例中兩因式皆爲 $x$ 及 $y$ 之齊次函數

先將兩式依 $x$ 之降冪排列，因而 $y$ 依昇冪而排列，然後仿例一運算．

306 **分離係數** 在§305，例一之演算中，諸項排列之方法，使吾人能由任一項位置知所含 $x$ 之乘冪若何．利用此點，吾人可省去 $x$ 而祇書係數，俾演算得以稍簡．在所與多項式有數字係數時，此法甚爲有用．

如任一多項式爲不完全多項式時，必須注意以0係數表各缺項．

例．以 $x^3+3x^2-2$ 乘 $x^3-3x^2+2$．

$$\begin{array}{rrrrrrr}
1 & -3 & +0 & +2 & & & \\
1 & +3 & +0 & -2 & & & \\
\hline
1 & -3 & +0 & +2 & & & \\
& 3 & -9 & +0 & +\ 6 & & \\
& & & -2 & +\ 6 & -0 & -4 \\
\hline
1 & +0 & -9 & +0 & +12 & -0 & -4
\end{array}$$

演算仿§305，例一排列，但祇書係數，缺項以0係數表之．

省去對應於乘式中0項之部分積．在最後結果中插入 $x$ 之適當乘冪……因兩因式次數之和爲六，故自

$x^6$ 始——即得所求之積爲 $x^6-9x^4+12x^2-4$.

積之次數爲六,得從最後結果 $1+0-9+0+12-0-4$ 之項數爲七知之, §277,

此法稱爲分離係數法 (Method of detached coefficients). 不但祇含一文字之多項式(兩因式皆依此文字之降冪或升冪排列)適用此法,二文字之齊次多項式亦適用此法.何則,如此之二多項式,如依任一文字之降冪排列時,同時卽已依他一文字之升冪排列,故吾人得由任一係數之位置,推知相從二文字之乘冪爲何.

用分離係數法求得之公式. 取下例考之. 307

例一. 試證下之恆等式爲眞.

$$(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=a^5-b^5.$$

$$\begin{array}{r}
1+1+1+1+1\\
1-1\\
\hline
1+1+1+1+1\\
-1-1-1-1-1\\
\hline
1+0+0+0+0-1
\end{array}$$

將左端所示之乘法,用分離係數法演算,卽得依 $a$ 之降冪 $b$ 之升冪排列之積之係數.

吾人預知積之次數爲五,此事亦可於最後結果項數爲六知之,故積爲

$$a^5+0\cdot a^4b+0\cdot a^3b^2+0\cdot a^2b^3+0\cdot ab^4-b^5,\ 卽\ a^5-b^5.$$

例二. 試證下之恆等式爲眞.

$$(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3. \tag{1}$$

$$(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)=a^4-b^4. \tag{2}$$

仿例一求得

$$\begin{array}{r}
1-1+1\\
1+1\\
\hline
1-1+1\\
1-1+1\\
\hline
1+0+0+1
\end{array}\ (1),\ 卽\ a^3+b^3. \qquad
\begin{array}{r}
1-1+1-1\\
1+1\\
\hline
1-1+1-1\\
1-1+1-1\\
\hline
1+0+0+0-1
\end{array}\ (2),\ 卽\ a^4-b^4.$$

仿此得證下之恆等式爲眞,以上諸例皆其特例而已.

對於 $n$ 之各正整數值,有 308

$$(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})(a-b)=a^n-b^n.$$

對於 $n$ 之各正奇數值,有 309

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})(a+b)=a^n+b^n.$$

310 而對於 $n$ 之各正偶數值,則有

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})(a+b)=a^n-b^n.$$

311 **二項式之乘冪** $a+b$ 之各次乘冪,可由累乘求得.如用分離係數法演算,甚爲便利.

因乘式之係數常爲 $1+1$,在各次乘法中,但書諸部分積及其和可矣.於是得

$$\begin{array}{lllll}
(1) & 1+1 & \text{卽} & a+b. & \\
 & \quad\;\; 1+1 & & & \\
(2) & \overline{1+2+1} & \text{卽} & a^2+2ab+b^2 & =(a+b)^2. \\
 & \quad\;\; 1+2+1 & & & \\
(3) & \overline{1+3+3+1} & \text{卽} & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & =(a+b)^3. \\
 & \quad\;\; 1+3+3+1 & & & \\
(4) & \overline{1+4+6+4+1} & \text{卽} & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 & =(a+b)^4.
\end{array}$$

應注意者,在各次乘法中,凡第二部分積之係數,皆爲第一部分積之係數向右移過一位者.故吾人加兩部分積之係數,而求得其次一乘冪之係數時,實祇應用下之法則:

312 已得之乘冪中之任一係數,加其前一係數之和,卽其次一乘冪中之對應係數.

其次一乘冪中之諸係數,除首末兩項之係數外,皆可用此法則求出;首末兩項之係數爲 1 及 1.

例如,(4) 之係數對應於 (3) 之 3, 3, 1 者,爲 3+1 卽 4, 3+3 卽 6, 1+3 卽 4.
應用此法則於 (4),得 4+1 卽 5, 6+4 卽 10, 4+6 卽 10, 1+4 卽 5. 故

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

顯而易見,凡 $a+b$ 之與乘冪之係數,皆可累用此法則以求得之.

例. 依次求 $(a+b)^6$, $(a+b)^7$, $(a+b)^8$

313 **兩一次二項因式之積** 學者宜養成用觀察法求此種積之習慣.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab. \qquad (1)$$

$$(a_0x+a_1)(b_0x+b_1)=a_0b_0x^2+(a_0b_1+a_1b_0)x+a_1b_1. \qquad (2)$$

在積(1)中,$x$之係數爲$a$與$b$之和.而末項爲$a$與$b$之積.

在積(2)中,積之首末項係數,爲兩因式中首末項係數之積,而中項係數爲"交叉乘積"$a_0b_1$及$a_1b_0$之和.

例一. 求積$(x+5)(x-8)$.

$$(x+5)(x-8)=x^2+(5-8)x-40=x^2-3x-40.$$

例二. 求積$(x+3y)(x+10y)$.

$$(x+3y)(x+10y)=x^2+(3+10)xy+30y^2=x^2+13xy+30y^2.$$

例三. 求積$(2x+3)(4x+7)$.

$$(2x+3)(4x+7)=2\cdot4x^2+(2\cdot7+3\cdot4)x+3\cdot7=8x^2+26x+21.$$

例四. 用上述之方法,求下列各積:

$(x-10)(x-15)$, $(3a+4b)(5a-6b)$, $(7x-y)(5x-3y)$.

任二$x$之多項式之積. 取下積考之. 314

$$(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)(b_0x^2+b_1x+b_2)$$
$$=a_0b_0x^5+(a_0b_1+a_1b_0)x^4+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^3$$
$$+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^2+(a_2b_2+a_3b_1)x+a_3b_2.$$

積爲$x$之多項式,其次數爲兩因式次數之和. 其各項之係數,可用下之法則求得之,其中$a_h$指示諸數$a_0, a_1, a_2, a_3$之一,而$b_k$指示諸數$b_0, b_1, b_2$之一. 先求積之次數與項之次數之差,然後盡作$h+k$等於此差之積$a_hb_k$而加之.

例如,欲求$x^2$之係數,先求得差$5-2$即3,然後盡作$h+k=3$之積$a_hb_k$即$a_1b_2$, $a_2b_1$, $a_3b_0$而加之.

此法則適用於任二$x$之多項式之呈$a_0x^m+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_m$及$b_0x^n+\cdots\cdots+b_n$形式者. 兩因式有數字係數時,此法則可用以求積之任一特殊係數.

例一. 求下積中 $x^{100}$ 之係數:

$$(a_0x^{75}+a_1x^{74}+\cdots\cdots+a_{74}x+a_{75})(b_0x^{60}+b_1x^{59}+\cdots\cdots+b_{59}x+b_{60}).$$

積之次數為 $75+60$ 即 $135$; 而 $135-100=35$.

故 $x^{100}$ 之係數為 $a_0b_{35}+a_1b_{34}+\cdots\cdots+a_{34}b_1+a_{35}b_0$.

同理 $x^{35}$ 之係數為 $a_{40}b_{60}+a_{41}b_{59}+\cdots\cdots+a_{74}b_{26}+a_{75}b_{25}$.

例二. 求下積中 $x^3$ 之係數:

$$(3x^4-2x^3+x^2-8x+7)(2x^3+5x^2+6x-3).$$

所求之係數為 $(-2)(-3)+1\cdot6+(-8)5+7\cdot2$, 即 $-14$

例三. 在例一之積中,求 $x^{110}$ 及 $x^{29}$ 之係數.

例四. 在例二之積中,分別求 $x^6$, $x^5$, $x^4$, $x^2$, 及 $x$ 之係數.

315 **用已知恆等式求積** 下之公式即恆等式,甚為重要,應熟記之.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \tag{1}$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \tag{2}$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \tag{3}$$

其中尚可增入 §§ 308-310 所舉之公式,及下之公式, § 311:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \tag{4}$$

因文字 $a$ 及 $b$ 可不拘用何代數式代換,此諸公式為求多種乘積之最簡便之方法.觀以下諸例可知.

例一. 求積 $(3x-5y)^2$.

$$(3x-5y)^2=(3x)^2-2\cdot3x\cdot5y+(5y)^2=9x^2-30xy+25y^2. \qquad \text{依 (2)}$$

例二. 求積 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

$$\begin{aligned}(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)&=[(x^2+y^2)+xy][(x^2+y^2)-xy]\\&=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=x^4+x^2y^2+y^4. \qquad \text{依 (3), (1)}\end{aligned}$$

例三. 說明下之演算中之各步驟.

$$\begin{aligned}&(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)\\&=[x+(y+z)][x-(y+z)]\cdot[x+(y-z)][x-(y-z)]\\&=[x^2-(y+z)^2]\cdot[x^2-(y-z)^2]\\&=[(x^2-y^2-z^2)-2yz]\cdot[(x^2-y^2-z^2)+2yz]\\&=[x^2-(y^2+z^2)]^2-4y^2z^2\end{aligned}$$

$$=(x^2-2x(y^2+z^2)+(y^2+z^2)^2-4y^2z^2$$
$$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2.$$

應特別注意者,凡多項式之平方及立方,皆可用此法由 (1) 及 (4) 求得.

例如,
$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$
$$(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2a+3b^2c+3c^2b+3c^2a+3a^2c+6abc.$$

推廣前者,即得下之定理:

任一多項式之平方,等於各項平方之和,加每二項相乘所得諸積之兩倍. 316

例一. 求積 $(a-b+2c-3d)^2$.
例二. 求積 $(1+2x+3x^2)^2$.
例三. 求積 $(x^3-x^2y+xy^2-y^3)^2$.

**獨項積之乘冪** 所謂任一代數式,$A$,之 $n$ 次冪,即式 $A^n$ 用運算法則所能化得之最簡形式之意. 317

由指數律 $(a^m)^n=a^{mn}$ 及 $(ab)^n=a^nb^n$,得下之法則:

作獨項式 $A$ 之 $n$ 次冪時,其數字係數作 $n$ 次冪,而各文字因數則以 $n$ 乘指數. 318

如 $A$ 之號為 $-$,則其結果視 $n$ 為偶或奇而定,附以 $+$ 號或 $-$ 號.

例如.
$$(-2ax^2y^7)^4=(-2)^4a^4x^8y^{28}=16a^4x^8y^{28}.$$
何則,果用 $(ab)^n=a^nb^n$ 之律,得
$$(-2ax^2y^7)^4=(-2)^4a^4(x^2)^4(y^7)^4,$$
又果用 $(a^m)^n=a^{mn}$ 之律,即得
$$(-2)^4a^4(x^2)^4(y^7)^4=16a^4x^8y^{28}.$$

## 習　題　III

下列各題中,凡乘法皆須用最簡捷之方法演算,能用分離係數法時則宜用之,能用§315之恆等式時亦然.

1. 以 $2x^2-3x+1$ 乘 $3x^5-2x^4-x^3+7x^2-6x+5$.
2. 以 $3x^2-ax-2a^2$ 乘 $5x^3-3ax^2+2a^2x+a^3$.
3. 以 $x+y$ 乘 $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$.
4. 以 $2x^3-3x+5$ 乘 $3x^3-2x^2+7$.
5. 以 $4x-5y$ 乘 $7x-2y$, 用觀察法演算.
6. 以 $b+x$ 乘 $a^2-ax+bx-x^2$.
7. 以 $3+x^2-x$ 乘 $x^4-2x+5x^2-x^3$.
8. 以 $x^{n-2}-x^{n-3}$ 乘 $2x^n-3x^{n-2}+5x^{n-3}$.
9. 以 $a^2+ab-3b^2$ 乘 $a^2-ab+3b^2$.
10. 以 $x-3y+2z$ 乘 $x+3y-2z$.
11. 以 $x-y-1$ 乘 $x^2+xy+y^2+x-y+1$.
12. 以 $a+b-c$ 乘 $a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab$.
13. 以 $x-4y+6$ 乘 $3x-2y+5$
14. 以 $2x+y-8z$ 乘 $x+7y-3z$.
15. 求積 $(b+x)(b-x)(b^2+x^2)$.
16. 又 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.
17. 又 $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$.
18. 作 $x^2+x+1$ 之開首四次乘冪之係數表.
19. 繼續作 $a+b$ 之各次乘冪之係數表,至其十次冪爲止.
20. 求 $(4x-3y)^2$ 及 $(4x-3y)^3$.
21. 求 $(x+2y+3z-4u)^2$.
22. 求 $(x+2y+3z)^3$ 及 $(x+2y-3z)^3$.
23. 以 $(a-2b)^2$ 乘 $(a+2b)^2$.
24. 求下積中 $x^{20}$ 及 $x^{15}$ 之係數

$$(a_0x^{27}+a_1x^{26}+\cdots\cdots+a_{26}x+a_{27})(b_0x^{19}+b_1x^{18}+\cdots\cdots+b_{18}x+b_{19}).$$

25. 求下積中 $x^5$, $x^8$, 及 $x^4$ 之係數

$$(2x^6-3x^5+4x^4-7x^3+2x-5)(3x^5-x^3+2x^2+3x-8).$$

26. 證明下列各恆等式:

   1. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(y+z)(z+x)(x+y)$.

2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.

3. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.

4. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc$.

27. 簡化下列各乘羃:

$$(2a^2x^3y^7)^5,\quad (-a^5y^8z^9)^7,\quad (a^2b^mc^3)^{2n},\quad (a^mb^nc^{3n})^n.$$

28. 簡化下列各積:

$$(-ab^2c^3)(a^3b)^2(-ac^2)^3,\quad (-2x^2y^4)^3(ax^5y^{11})^2.$$

# 除 法

**商** 令 $A$ 及 $B$ 指示任二代數式,而 $B$ 不等於 0. 所謂 $A$ 爲 $B$ 除之商.卽分式 $A/B$ 用運算法則所能化得之最簡形式之意. **319**

**公式** 作此種簡化時,下之公式特爲有用. **320**

1. $\dfrac{ac}{bc}=\dfrac{a}{b}$.

2. $m>n$ 時, $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; $n>m$ 時, $\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{1}{a^{n-m}}$.

3. $\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$.

4. $\dfrac{a+b}{d}=\dfrac{a}{d}+\dfrac{b}{d}$.

1, 3, 及 4 可用下之法則證之, § 253:

如二式乘以任一第三式(不爲 0)之積相等,則原二式必等.

何則,於 1, 兩端乘以 $bc$ 之積各爲 $ac$.

卽 $\dfrac{ac}{bc}bc=ac$ 又 $\dfrac{a}{b}bc=\dfrac{a}{b}b\cdot c=ac$. §§ 254, 252

又於 3, 第一等式兩端乘以 $b$ 之積各爲 $-a$. 而第二及第三等式兩端乘以 $-b$ 之積各爲 $a$ 及 $-a$.

例如, $\dfrac{-a}{b}b=-a$, 又 $\left(-\dfrac{a}{b}\right)b=-\dfrac{a}{b}b=-a$. §§ 258, 254

最後,於4,兩端乘以$d$之積各為$a+b$.

即 $$\frac{a+b}{d}d=a+b \quad \left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}\right)d=\frac{a}{d}d+\frac{b}{d}d=a+b \qquad \S\S\,254,\ 262$$

公式2為公式1之特例.

例如,若 $m>n$, $$a^m=a^{m-n}\cdot a^n. \qquad \S\,258$$

故 $$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{m-n}\cdot a^n}{a^n}=a^{m-n}. \qquad 依1$$

321 **簡化A/B之法則** 由公式1, 2, 及3得$A/B$之簡化法則如下:

1. 約去分子分母公有之諸因數.

2. 分子分母含同文字(或式)之相異乘冪為因數時,約去低次冪而由高次冪之指數減低次冪之指數.

3. 商之號為+或−,視分子分母有同號或異號而定.

例如, $$\frac{bca^5}{ca^2}=ba^{5-2}=ba^3,\quad 又\quad \frac{a^2}{-a^7}=-\frac{1}{a^{7-2}}=-\frac{1}{a^5}.$$

322 **除以獨項式之法則** 由除法之定義及§320, 4,得下之法則:

1. 以獨項式除他一獨項式時,先作分數式,書被除式於除式之上,然後簡化之.

2. 以獨項式除多項式時,以除式除被除式之各項而加所得之商.

譬如, $$-8a^3b^2c\div 6ab^6d=\frac{-8a^3b^2c}{6ab^6d}.$$

約去公因數$2ab^2$,再應用符號律,即得

$$-8a^3b^2c\div 6ab^6d=-\frac{4a^2c}{3b^4d}.$$

又 $$(ax^3-4a^2x^2)\div ax=\frac{ax^3}{ax}-\frac{4a^2x^2}{ax}=x^2-4ax,$$

但 $d$ 與 $a$ 及 $b$ 無公因數時,吾人認爲 $(a+b)/d$ 及 $a/d+b/d$ 二者之中,前者爲商之較簡之形式.

多項式除多項式　如 $A$ 及 $B$ 爲有公因數之多項式,則商爲 $A/B$ 約去公因數時化成之式. 323

例如,若 $A=x^2-y^2$, $B=x^2+2xy+y^2$, 則商爲 $(x-y)/(x+y)$.

何則,
$$\frac{A}{B}=\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}=\frac{x-y}{x+y}.$$

兩多項式之公因數,其求法將於他章中述之.所謂長除法(Long division)者,則於第五章中論之.

繁式　注意 $a\div b\times c$ 意指 $\dfrac{a}{b}c$,而 $a\div bc$ 則如 $a\div(b\times c)$,爲 $a/bc$ 之意.

繁式中含若干之乘法及除法之表示者,將於分式章中論之,特例,可知 324

$$a\times(b\times c\div d)=a\times b\times c\div d. \tag{1}$$

$$a\div(b\times c\div d)=a\div b\div c\times d. \tag{2}$$

於(1),去括號時,括號中之 × 號及 ÷ 號不變;然於(2),則凡 × 皆變爲 ÷,而凡 ÷ 皆變爲 ×.

## 習　題　IV

1. 以 $10ab^2c^2$ 除 $15a^3bc^5$.
2. 以 $-100ax^7z^9$ 除 $75x^2y^4z^{10}$.
3. 以 $28x^my^{m+n}$ 除 $-35x^{2m}y^n$.
4. 以 $-18\{a(b^2c)^2\}^3$ 除 $-54\{(ab^2)^2c\}^5$.
5. 以 $x^2-y^2$ 除 $x^2y-xy^2$.
6. 以 $(x-y)(x^2-xy+y^2)$ 除 $(x^3-y^3)(x^3+y^3)$.
7. 簡化 $\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{(b-a)(c-b)^4(a-c)^3}$.
8. 簡化 $\dfrac{30a^2b^3c^4-25a^3b^2c^5+20a^4b^4c^7}{-5ab^2c^3}$.

9. 簡化 $\frac{3(x-y)^4-2(x-y)^3+5(x-y)^2}{(y-x)^2}$.

10. 簡化 $4a^7\times(3ab^3c^2)^3\div(abc)^2\div 6bc$.

11. 下式(1)依所示之順序演算,(2)先去括號,以簡化之.

$$a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a^3\times a\div a^2)\}.$$

12. $2a(x^2y^3)^2$ 須乘何式始能得 $-4a^2(x^3y^2)^2$?

# III. 一元一次方程式

## 條件等式

325 二式 $3x-4$ 及 $x+6$ 不恆等,§281,故不能對於 $x$ 之一切值皆相等.若問,"$x$ 須取若何之值,此二式之值始能相同?"吾人先<u>假定</u>二式相同,而將此假定敍述之如下:

$$3x-4=x+6.$$

所得之式,稱爲<u>條件等式</u>,以其敍述一條件,爲"未知數" $x$ 所應適合者故也.此等式祇在 $3x-4$ 及 $x+6$ 之值同一時爲眞,故足以限制 $x$ 於適合此條件之值.

同理,$x+y=0$ 爲二未知數 $x$ 及 $y$ 之條件等式.普徧言之:

326 <u>二式 $A$ 及 $B$ 不恆等時,$A=B$ 爲條件等式.此等式爲"$A$ 及 $B$ 假定有相等之值"之意.而限制 $A$ 及 $B$ 中之變數文字之值俾能令此假定爲眞.</u>

凡文字其值爲等式 $A=B$ 如此限制者,稱爲等式之<u>未知數</u>或<u>元</u>.

以後"條件等式"簡稱爲"方程式".

327 方程式中除元 $x, y, z$ 等外不含他文字者,稱爲數字方程式;如尙有已知數 $a, b, c$ 等,則稱文字方程式.

例如，$2x-3y=5$ 爲數字方程式，而 $ax+by=c$ 爲文字方程式．文字方程式並不限制已知數之值．

若 $A$ 及 $B$ 皆爲關於元之有理整式，方程式 $A=B$ 稱爲**有理整方程式**．若 $A$ 或 $B$ 爲無理式或分式，則稱**無理方程式**或**分式方程式**． 328

如此分法並不計及數字或已知數若何．譬如，$\sqrt{2}x+y/b=c$ 爲有理整方程式．

有理整方程式化爲其最簡形式（§ 340）時，其最高次項之次數，即稱爲**方程式之次數**． 329

例如，$ax^2+bx=c$ 之次數爲二；$x^3z^2+y^4=b$ 之次數爲五．方程式之次數應就其一切未知數計之，且祇限於未知數．

一次方程式通常又稱**直線方程式**（Linear equations）；二次，三次，四次之方程式，各稱爲**二次方程式**，**三次方程式**，**四次方程式**． 330

祇含一元，如 $x$，之方程式，限制 $x$ 於有窮數之值．此 $x$ 之各值稱爲適合方程式，亦稱方程式之解或根，故 331

任何數或已知式，以之代 $x$，能使方程式成爲恆等式者，則稱之曰 $x$ 之方程式之根． 332

例如，1 及 $-2$ 爲方程式 $x^2+x=2$ 之根；何則，$1^2+1=2$ 又 $(-2)^2+(-2)=2$．

又 $a-b$ 爲 $x+b=a$ 之根；何則，$(a-b)+b=a$．

**注意** 1. 方程式可以無根，因其所敍述之條件或爲任何數所不能適合也． 333

例如，無一有窮數能適合方程式 $x+2=x+3$．

2. 凡 $x$ 之方程式有根者，其中之 $x$ 不過諸根之一之符號而已．實則方程式自身不過變相的恆等式，以諸根依次代 $x$ 可得若干眞恆等式，方程式即其替代物而已．

例如，$x^2+x=2$ 不過 $1^2+1=2$ 及 $(-2)^2+(-2)=2$ 二恆等式之替代物而已．

# 方程式之解法

234 解一元方程式者,求出方程式之各根或證明其無根也.

解法所基之推理,如以下二例所示.

例一. 解方程式 $3x-4=x+6$.

先設 $x$ 有一值能使此方程式為眞,卽可推論如下:

若 $\qquad 3x-4=x+6, \qquad (1)$

則 $\qquad 3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4), \qquad (2) \qquad$ § 249

卽 $\qquad 2x=10, \qquad (3) \qquad$ § 300

從而 $\qquad x=5. \qquad (4) \qquad$ § 253

故若 $\qquad 3x-4=x+6$, 及 $x=5$. $\qquad (a)$

如此證明之命題 (a), 說明若 (1) 能眞則必在 $x=5$ 時,換言之,只有 5 能為 (1) 之根;但並未說明 5 卽為 (1) 之根,後者之敍述應為

若 $\qquad x=5$, 則 $3x-4=x+6$. $\qquad (b)$

(b) 非卽 (a), 而為 (a) 之逆 § 291.

於 (1) 中以 5 代 $x$, 可證 5 為 (1) 之根;因如此卽得眞恆等式 $3\cdot5-4=5+6$ 也.

然除用以驗演算正確否外,此一步驟實非必要. 何則,一眞命題能用可逆之方法證明時,吾人常能斷言其逆亦眞, § 923. 而 (a) 之情形正如此,因由 (1) 得 (4) 之方法純由可逆之步驟而成,故其全體為可逆之方法也.譬如,

若 $\qquad x=5, \qquad (4)$

則 $\qquad 2x=10, \qquad (3) \qquad$ § 253

卽 $\qquad 3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4), \qquad (2) \qquad$ § 300

從而 $\qquad 3x-4=x+6. \qquad (1) \qquad$ § 249

故用可逆之方法證明命題 (a) 時吾人同時已證明逆命題 (b), 卽吾人不獨證明除 5 外無能為 (1) 之根者,并已證明 5 卽為 (1) 之根.

例二. 解方程式 $x^2=9$.

若 $\qquad x^2=9, \qquad (1)$

則 $\qquad x=3, \quad (2) \quad$ 或 $\quad x=-3. \qquad (3) \qquad$ § 257

故 (1) 除 3 及 $-3$ 外不能有他根.

然 3 及 $-3$ 皆為 (1) 之根, 因由 (1) 得方程式 (2) 及 (3) 之步驟各可逆 卽由 (2) 及 (3) 各可得 (1), § 257.

此二例說明下之通則: 335

求$x$之方程式之根時,先將方程式視若已知恆等式,然後按照運算法則,由此求出一應方程式之呈$x=c$形者.

導出此諸方程式$x=c$中之一之方法,若爲可逆,而$x$之値爲$c$時,吾人即可斷言$c$爲一根;凡方法由可逆之步驟而成者皆可逆.

應切記者,僅$x$之某値得用運算法則由方程式導出一事,不足證明其値卽爲方程式之根.必須所用方法可逆始可. 336

| | | | |
|---|---|---|---|
| 譬如,由 | $x-2=0,$ | (1) | |
| 得 | $(x-2)(x-3)=0,$ | (2) | § 253 |
| 從而 | $x=2,$ 或 $x=3.$ | (3) | § 253 |

然吾人殊無權利可作3爲(1)之根之謬誤結論,何則,$x=3$時上述方法不可逆,吾人不能以$x-3$除(2)之兩端,以除式$x-3$此時爲0故也.

反之,$x=2$時上述方法可逆,因$x-3$此時爲$-1$不爲0;而2爲(1)之根.

## 變換定理

依上所述,則就方程式論,凡運算法則之正當應用,皆可認爲方程式之合理變換(Transformation);又若此種變換爲可逆,則方程式之根不爲所變,可以斷言.故有下之定理. 337

**定理一** 方程式施以下之變換時其根不變.卽: 338

1. 分別應用配合律,§ 259,於各端.
2. 兩端各加以具有窮値之任意式或從而減之.
3. 兩端各以同一常數(不爲0)乘或除之.

因此諸變換中所含之運算法則皆可逆也,§ 259.

2及3又可證之如下:

若$A$及$B$指示$x$之式,則方程式$A=B$之根,爲用以代$A$及$B$中之$x$能使

$A=B$ 之數，§332.

然凡 $x$ 之值能使 $A=B$ 而 $C$ 爲有窮值者，必能使 $A+C=B+C$，其逆亦眞，§249；故 $A=B$ 之根卽 $A+C=B+C$ 之根.

又若 $c$ 指示不爲 0 之任一常數，則凡 $x$ 之值能使 $A=B$ 者，必能使 $cA=cB$，其逆亦眞，§253：故 $A=B$ 之根卽 $cA=cB$ 之根.

例如，於 §334，例一，

$$3x-4=x+6, \tag{1}$$

$$3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4), \tag{2}$$

$$2x=10, \tag{3}$$

$$x=5 \tag{4}$$

諸方程式有同一之根，5.

其中 (2) 係由 (1) 用變換 2 得出，(3) 由 (2) 用變換 1 得出，而 (4) 由 (3) 用變換 3 得出

339　系　方程式施以下之變換時其根不變：

1. 變一端中任一項之號，而移置於他端.
2. 於兩端中約去公有之項.
3. 盡變兩端各項之號.

因系 3 等於以 $-1$ 徧乘方程式之兩端，而系 1 及系 2 等於由兩端各減所述之項也.

例如，如由　$x-a+b=\ \ c+b$　(1)

之兩端減　$-a+b=-a+b$

卽得　$x\ \ =\ \ c+a.$　(2)

減法之作用，於 (1) 之兩端中約去 $b$ 又變 $-a$ 之號由左端移置右端而已.

**340**　應用上述之變換，§§338, 339，凡 $x$ 之有理整方程式，皆可不變其根而化爲下之標準形式：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

方程式應化標準形式而後計其次數 §329. 多元有理整方程式仿此.

例如，$x^2+3x+5=x^2-4x+7$ 得化為 $7x-2=0$ 之形式，故其次數為一，非二.

定理二 $A, B,$ 及 $C$ 為整式時，方程式 341

$$AC=BC$$

與下二方程式有同根：

$$A=B, \quad C=0.$$

何則，凡 $x$ 之值能使 $AC=BC$ 者必能使 $A=B$ 或 $C=0$；反之，凡 $x$ 之值能使 $A=B$ 或 $C=0$ 者，亦必能使 $AC=BC$，§§ 251, 253.

上之證明假定對於所遇之 $x$ 之值 $A, B, C$ 皆具有窮值. $A, B, C$ 為整式如所設時，此事常眞；然 $A, B, C$ 為分式時，則不必常眞.

特例，$A$ 及 $B$ 為整式時，方程式 $AC=0$ 與 $A=0$ 及 $C=0$ 二方程式有同根.

例如，方程式 $x^2=3x$ 之根，即 $x=3$ 及 $x=0$ 二方程式之根，亦即 3 及 0.

同理，$(x-1)(x-2)=0$ 之根，即 $x-1=0$ 及 $x-2=0$ 二方程式之根，亦即 1 及 2.

故整方程式 $A=B$ 之兩端如乘以同一之整函數 $C$，其結 342
果引入增根，即方程式 $C=0$ 之根. 而整方程式 $AC=BC$ 之兩端約去同一之整因式 $C$，其結果使方程式失去根中之某部，即 $C=0$ 之根.

反之，分式方程式之兩端，如乘以諸分式之最低公分母，通常並無增根引入.

例如，如方程式為 $1/x=1/(2x-1)$，而以 $x(2x-1)$ 乘兩端，則得 $2x-1=x$，其根為 1. 因 1 非 $x(2x-1)=0$ 之根，吾人並未引入增根.

系 整方程式 $A^2=B^2$ 與 $A=B$ 及 $A=-B$ 二方程式有同根. 343

何則，$A^2=B^2$ 與 $A^2-B^2=0$ 有同根，§ 339. 又因 $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$，方程式 $A^2-B^2=0$ 與 $A-B=0$ 及 $A+B=0$ 二方程式有同根，§ 341，從而與 $A=B$ 及 $A=-B$ 二方程式有同根，§ 339.

例如，方程式 $(2x-1)^2=(x-2)^2$ 之根，即 $2x-1=x-2$ 及 $2x-1=-(x-2)$ 二方程式之根，亦即 $-1$ 及 1.

故方程式 $A=B$ 之兩端如各作平方，其結果引入增根，即方 344

程式 $A=-B$ 之根.而由 $A^2=B^2$ 如祇得 $A=B$ 一方程式,其結果使原方程式失去根之某部,卽方程式 $A=-B$ 之根.

345 因 $A^n-B^n\equiv(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+B^{n-1})$, § 308, 用 § 343 之推理得證 $A^n=B^n$ 之根,卽 $A=B$ 及 $A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+B^{n-1}=0$ 之根.

例如,因 $x^3-1\equiv(x-1)(x^2+x+1)$, 方程式 $x^3=1$ 與 $x=1$ 及 $x^2+x+1=0$ 二方程式有同根.

346 上述之定理, §§ 338—345, 若易根字爲解字,卽適用於多元方程式, § 355.

譬如,依 § 339, 方程式 $x+2y-3=0$ (1) 與方程式 $x=-2y+3$ (2) 有同解,卽 $x$ 及 $y$ 之各組値能適合 (1) 者亦能適合 (2), 而其逆亦眞.

347 **等值方程式** (Equivalent equations) 二或多方程式有同根(或解)時,稱爲等值.

例如, § 338, $A=B$ 及 $A+C=B+C$ 二方程式等値.又, § 341, 方程式 $AC=BC$ 與 $A=B$ 及 $C=0$ 二方程式等値.

然 $x^2=9$ (1) 及 $x=3$ (2) 雖皆有一根爲 3 而非等値.因 (1) 尙有一根爲 $-3$, 而 (2) 無之也.

## 一次方程式之解法

348 由 §§ 338, 339 之變換定理,立得解一元,如 $x$, 之一次方程式之法則如下:

解 $x$ 之一次方程式時,先化之爲 $ax=b$ 之形式.於是

1. 若 $a\neq0$, 則原方程式祇有一根 $b/a$.
2. 若 $a=0$, 而 $b\neq0$, 則原方程式無根.
3. 若 $a=0$, 且 $b=0$, 則原方程式爲恆等式.

方程式有分數係數時,通常先以諸分數之最小公分母乘

兩端,謂之消去方程式之分式.

於是移未知項於左端,已知項於右端,再就各端集項,而化方程式為 $ax=b$ 之形式,欲驗所得之結果,於原方程式中以之代 $x$ 卽可.

例一. 解 $\frac{2x}{3}-\frac{x-2}{2}=\frac{x}{6}-(4-x)$.

先去分數,以最小公分母6乘兩端.

則 $$4x-3(x-2)=x-6(4-x),$$

卽 $$4x-3x+6=x-24+6x,$$

移項而集合之, $$-6x=-30.$$

故 $$x=5.$$

驗算. $$\frac{2\cdot5}{3}-\frac{5-2}{2}=\frac{5}{6}-(4-5).$$

例二. 解 $mx+n=px+q$.

移項而集合之, $$(m-p)x=q-n.$$

故若 $m\neq p$, 方程式祇有一根 $(q-n)/(m-p)$.

若 $m=p$ 而 $q\neq n$, 方程式無根,

若 $m=p$ 且 $q=n$, 方程式爲恆等式,無論 $x$ 之值若何常適合.

例三. 解 $(x+a)(x+b)=(x-a)^2$.

展開, $$x^2+(a+b)x+ab=x^2-2ax+a^2.$$

約去 $x^2$, 移項而集合之.

則 $$(3a+b)x=a^2-ab.$$

從而 $$x=\frac{a^2-ab}{3a+b}.$$

有時方程式之一根得用觀察法求出,若此方程式爲一次 349
方程式,則已完全得解,因方程式舍此一根外不能再有他根也.

例. 解 $(x-a)^2-(x-b)^2=(a-b)^2$.

此爲一次方程式甚明,且 $x=b$ 時卽成恆等式 $(b-a)^2=(a-b)^2$ 故其根爲 $b$.

呈 $AB=0$ 形式之方程式,其中 $A$ 及 $B$ 表 $x$ 之一次整式者,其 350
根可由兩一次方程式 $A=0$ 及 $B=0$ 解得之,§341. 同理,$A,B,C$

爲一次式時，$ABC=0$，$AC=BC$，及$A^2=B^2$之根皆可由一次方程式解得之，§§ 341, 343.

例一．解 $(x-2)(x+3)(2x-5)(3x+2)=0$.

此方程式與下列四方程式等值 § 347:

$$x-2=0,\ x+3=0,\ 2x-5=0,\ 3x+2=0.$$

故其根爲 $2, -3, 5/2, -2/3$.

例二．解 $4x^2-5x=3x^2+7x$.

此方程式與下二方程式有同根:

$$x=0,\ 4x-5=3x+7.$$

故其根爲0及12.

## 習 題 V

解下列各方程式.

1. $15-(7-5x)=2x+(5-3x)$.
2. $x(x+3)-4x(x-5)=3x(5-x)-16$.
3. $(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)=0$.
4. $x=1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}$.
5. $x-2[x-3(x+4)-5]=3\{2x-[x-8(x-4)]\}-2$.
6. $2\{3[4(5x-1)-8]-20\}-7=1$.
7. $\frac{1}{2}\{\frac{1}{3}[\frac{1}{4}(\frac{1}{5}x-1)-6]+4\}=1$.
8. $3-\frac{5-2x}{5}=4-\frac{4-7x}{10}+\frac{x+2}{2}$.
9. $\frac{3x-1}{3}+3=-\frac{x-4}{6}+\frac{3x+5}{4}-2\frac{1}{2}$.
10. $\frac{5x-0.4}{0.3}+\frac{1.3x-0.05}{2}=\frac{13.95-8x}{1.2}$.
11. $3cx-5a+b-2c=6b-(a+3bx+2c)$.
12. $(b-c)(a-x)+(c-a)(b-x)+(a-b)(c-x)=1-x$.
13. $\frac{x+1}{a+1}+\frac{x}{a}=2$，用觀察法.
14. $\frac{x+1}{a+b}+\frac{x-1}{a-b}=\frac{2x}{a^2-b^2}$.
15. $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)x=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-2x$.
16. $(2x-1)(3x-1)(4x+1)(5x+2)=0$.

17. $(x^2-x)(2x-5)=(x^2-x)(x+9)$.

18. $(x+2)^3-(x-2)^3=32x+16$.

19. $[(a+b)x-c]^2=[(a-b)x+c]^2$.

20. $(x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0$.

# 應用問題

**應用問題之解法** 下列問題中,有若干未知數之值須由所與之關係求出,此諸關係結合已知數及未知數,稱爲問題之條件. 351

吾人先取其中之一未知數以一文字,如$x$,代之.則所與之條件使吾人能以$x$表其餘之未知數,并結合所得之式成一方程式,此方程式卽用代數符號以敍述問題者.就$x$解之.若問題有解,則其解必爲所求之$x$之值及他未知數之對應值.

然所得之$x$之值不適合問題亦常見不鮮之事.因問題或對未知數之性質加以限制,例如未知數須爲整數之類,而由題意譯成之方程式則並不表明此種限制也. 352

故解$x$之方程式所得之結果,須審察其爲所求之一種數與否,始能決定其爲問題之解與否.若並非所求之一種數,則斷此問題爲不可能.

例一. 有二位之數,其數字和爲12.如將數字易位,則得4/7倍原數之數,原數若何?

本題共有四未知數,十位數字,個位數字,原數之值,及易位數之值是也;四者易用個位或十位數字表之.

譬如,令 $x=$ 十位數字.

則 $12-x=$ 個位數字,

$10x+(12-x)=$ 原數之值,

$10(12-x)+x=$ 易位數之值.

依問題中其餘之條件,得

$$10(12-x)+x=\tfrac{4}{7}[10x+(12-x)]. \tag{1}$$

解方程式得 $x=8$, 爲小於 10 之整數,故爲適合問題之解. $12-x$ 卽 4 亦然.故所求之數爲 84.

應注意者,稍加變更問題卽成爲不可能.譬如,若易位數須爲原數之二倍,則所得之方程式非 (1),而爲

$$10(12-x)+x=2[10x+(12-x)]. \tag{2}$$

解 (2) 得 $x=32/9$, 爲一分數,故不能爲適合問題之解.

353 問題中有若干之量,如時間之類者,須知其代數的敍述中之文字,非代量之本身,而代量對於與單位之測度.幷須注意凡同種類量之測度須有同一之單位.

例一. 有一水槽,其注水管 $A$ 能於 3 小時中注滿之,而其排水管 $B$ 則能於 3 小時 40 分中排盡之.若於無水時同開兩管,則水槽之滿須時幾何?

令 $x$ 指示所求小時之數.

則 $1/x$ 爲 $A, B$ 兩管同開時一小時中注滿之部分.

然祇開 $A$ 時,一小時中應注滿之部分爲 $1/3$.

而祇開 $B$ (槽中有水) 時,一小時中應排去之部分爲 $1/3\tfrac{2}{3}$, 卽 $3/11$

故 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{3}{11} \text{ 卽 } \frac{2}{33}.$$

從而 $x=33/2$ 小時,卽 16 小時 30 分.

例二. 舟人於河中行舟二哩,逆流時須 15 分,順流時祇須 10 分.流速若何?又舟人於靜水中行舟時速率若何?

令 $x=$ 流速每分哩數.

因舟人逆流行舟速率每分 $2/15$ 哩,若於靜水中每分應 $2/15+x$ 哩.

又因舟人順流行舟速率每分 $2/10$, 卽 $1/5$ 哩,知於靜水中每分應 $1/5-x$ 哩.

故 $$\tfrac{2}{15}+x=\tfrac{1}{5}-x,$$

從而 $$x=\tfrac{1}{30} \text{ (每分哩數)}.$$

又 $$\tfrac{2}{15}+x=\tfrac{1}{6} \text{ (每分哩數)}.$$

例三. 在二時與三時之間,時計之時針及分針何時成一直線?

令 $x=$ 所求之時間距二時之分數.

因分針係從 XII 出發,其時應已旋過 $x$ 分刻度.

時針係從 II 出發,卽時針出發時在分針之前 10 分刻度,而其速度僅爲分針速度之 1/12.

故分針過 XII $x$ 分刻度時,時針應已過 XII $10+x/12$ 分刻度.

然依問題之條件,於所求之時間,分針應在時針之前 30 分刻度.

故
$$x=\left(10+\frac{x}{12}\right)+30,$$

解之,
$$x=43\tfrac{7}{11}\text{ 分刻度.}$$

故兩針於二時後 $43\frac{7}{11}$ 分卽三時前 $16\frac{4}{11}$ 分成一直線.

有時問題之敍述中用 $a, b, c$ 等文字表已知數.則求得之 $x$ 之值爲含 $a, b, c$ 之式,此諸文字之值有若干組能爲適合問題之解,有若干組則不能.下卽所謂尋差問題,其討論(或譯玩索)可以說明此點. 354

例. 兩尋差 $A$ 及 $B$ 各以每小時 $m$ 及 $n$ 哩之速度同路同向而行.$B$ 今在 $A$ 之前 $d$ 哩.兩人能相會否,又若然則在何時?

令 $x=$ 兩人相會時距今之時間.

則 $A$ 應已行 $mx$ 哩,$B$ 應已行 $nx$ 哩.又因 $B$ 今在 $A$ 之前 $d$ 哩,故

$$mx=nx+d, \tag{1}$$

從而
$$(m-n)x=d, \tag{2}$$

故
$$x=\frac{d}{m-n}\text{ 小時以後} \tag{3}$$

1. 如 $A$ 須越過 $B$, $x$ 之值必須爲正;又依假設因 $d, m, n$ 皆表正數,故須 $m>n$; 卽若 $A$ 須越過 $B$, 行時必須速於 $B$, 此易明之事實也.

2. 同時若設 $m<n$ 爲 $A$ 與 $B$ 在 $d/(n-m)$ 小時以前相會之意,卽可解釋 $x$ 所取之負值.

3. 若 $m=n$, 嚴格言之,吾人不能由(1)得(3), 因演算中含除以爲 0 之 $m-n$ 也.然若 $m$ 與 $n$ 相異,則無論二數之差如何小,吾人常能由(1)得(3).又若於(3)中吾人認 $m$ 爲變數,雖大於 $n$ 而逐漸接近 $n$, 則分數 $d/(m-n)$ 成爲變數,繼續增加大且無限, § 510. 如是, $A$ 速於 $B$ 者愈小, $A$ 追及 $B$ 所需之時間愈多,若 $A$ 之速度同 $B$, $A$ 將永不能追及 $B$, 此皆顯而易明者也.

4. 最後,若設 $m=n$ 且 $d=0$, 則 $x$ 之各值常適合方程式(1); 卽若兩人以同速度前進且現在一處,則兩人永不分離,亦顯而易明者也.

## 習題 VI

1. 有二位之數,其數字和爲14.若將數字易位,則得較原數多18之數.原數若何,

2. 156須以何數除之始能得商11而餘2?

3. 有兩數,其差爲298,若以小數除大數,商及餘皆爲12.兩數若何?

4. 有二位之數,其十位數字爲個位數字之二倍,十位數字加1而個位數字加5所得之數,三倍於易位數中十位數字減1而個位數字減5所得之數.此數若何?

5. 有一數,減2後乘4,等於乘2後加較此數少1之數之半.此數若何?

6. 父年今爲子年之四倍.自今20年後,若父子尙存,則父年爲子年之二倍.父子今各幾歲?又自今幾年後父年爲子年之三倍?

7. 有一水槽,其第一管能於3小時中注滿之,其第二管能於2小時中排盡之,其第三管則能於4小時中排盡之,若於水滿時同開三管,則幾時可以排盡?

8. 一事,$A$及$B$協力作之,10日可成;但僅七日而$A$病,$B$又獨作5日乃成.如兩人皆獨作之,各幾日可成?

9. 在八時與九時之間,時計之兩針何時重合?何時成一直線?

10. 四時後幾時時計之兩針成一直角?

11. 有一不準確之時計,其時針分針兩次之重合,中隔66分之時間.此時計之誤差若何(每小時幾秒)?

12. $A, B, C, D$四人,分金1300圓.$B$所得$\frac{2}{3}$倍於$A$,$C$所得$\frac{3}{2}$倍於$B$,$D$所得$\frac{2}{3}$倍於$C$.各得幾何?

13. 某人以財產之$\frac{1}{2}$又1000圓分與長子,所餘之$\frac{1}{3}$又1000圓分與次子,再餘之$\frac{1}{2}$又1000圓分與幼子.若仍餘3500圓,則此人財產總數若何?

14. 有一正方形,如每邊各增2尺,其面積增大100平方尺.此正方形之面積若何?

15. 有一旗杆,不知其高,但知杆頂所繫之索較杆長2尺,如引之則下端及地之處距杆足18尺,旗杆之高若何?

16. 錢袋中,半圓銀幣之枚數爲一圓銀幣枚數之二倍.一角銀幣之枚數則爲其三倍,如三種銀幣之總金額爲11.50圓,三種銀幣各幾枚?

17. 某人投資共5000圓,一部分利率6%,又一部分利率4%,而全部投資之平均利率則爲$5\frac{1}{2}$%.兩種利率之投資各幾何?

18. 每磅價2角及3角之兩種咖啡,須以何種比混合,始能得每磅價2角6分者?

19. 有一磅合金,含二分銀三分銅.欲得含三分銀七分銅之合金,須加入銅幾何?

20. 一加侖之液體,加一定量之水後,含酒精30%;如所加之水二倍於今,則含酒精20%.每次各加水幾何,又原液體所含酒精之百分率若何?

21. 一列車以每小時45哩之速率於午前10時由費城向澤稷出發,又一列車以每小時50哩之速率於午前10時30分由澤稷向費城出發.假定澤稷與費城相距90哩,何時兩列車相會,又相會處至澤稷之距離若何?

22. 若兩列車於前題中所述之時間出發,而會於距澤稷及費城等遠之處,又若較慢之列車速率$\frac{2}{3}$倍於較快之列車,則兩列車之速率各若何,又何時相會?

23. 兔先行50步,狐追之.兔行5步時狐能行4步,但狐之2步等於兔之3步.兔再行幾步狐始追及?

24. 若19兩之金於水中秤之重18兩,而10兩之銀於水中秤之重9兩,則金銀之某種合金387兩於水中秤之重351兩者,中有金銀各幾兩?

25. 某人持金若干作旅行,每日用去其是時所有之$\frac{1}{2}$又2圓,三日而金盡.最初持金幾何?

26. 有一角錐,底爲正方形,側面諸三角形之高各等於底之一邊.若所述之邊及高各增3寸,則角錐之全面積應增117平方寸.角錐之全面積若何?

27. 有二位之數,其數字和爲$a$. 如將數字易位,則得較原數多$b$之數,原數若何?證明欲得適合問題之解,必須$9a\geqq b$且$9a+b$及$9a-b$皆能爲18所整除.

28. $A$及$B$現今各爲$a$歲及$b$歲,能有$A$年爲$B$年$c$倍之時否?又若然,則在何時?

將結果就$a, b, c$之各種值討論之,如§354.

# IV. 聯立一次方程式

## 聯立方程式

二元,如$x$及$y$,之條件等式,得以此二元無窮多組之值適 355

合之.各組值皆稱方程式之解.多元方程式亦然.

譬如,在方程式 $2x+y=3$ (1) 中,若任以何值與 $x$,而以 $3-2x$ 之對應值與 $y$,常能適合.何則,若於 (1) 中以任一數,$b$,代 $x$ 而以 $3-2b$ 代 $y$,即得眞恆等式 $2b+(3-2b)=3$ 故也.

例如,$x=0$, $y=3$; $x=1$, $y=1$; $x=2$, $y=-1$;……皆為 (1) 之解.

356 注意 方程式 $x=2$ 若作二元,$x$ 及 $y$,之方程式論,其意為 $x$ 須有值 2,而 $y$ 可有不論何值,換言之,$x=2$ 即有無窮數之解.他方程式祇含諸元之一者亦然.

357 故有次之疑問自然發生: $x$ 及 $y$ 能有值同時適合兩個此二元之方程式否?而此種值常有之.

例如,$2x+y=3$ 及 $4x+3y=5$ 兩方程式,當 $x=2$ 而 $y=-1$ 時皆適合;因 $2\cdot2+(-1)=3$, 又 $4\cdot2+3(-1)=5$ 故也.

358 **聯立方程式** 含若干元之二個或多個方程式,其元假定為在諸方程式中各代同一之數時,稱為聯立方程式.

例如,於 $2x+y=3$ (1) 及 $4x+3y=5$ (2) 二方程式中,若設 $x$ 指示同一之數,$y$ 亦然,(1) 及 (2) 即為聯立方程式.

諸元不必皆含於各方程式中.例如,$x=2$, $y=3$ 亦成一組 $x$ 及 $y$ 之聯立方程式.

359 概言之,若干方程式聯立之假定,祇在方程式之數等於或小於元數時為正當.

例如,兩方程式 $x=2$ 及 $x=3$ 不能聯立,因 $x$ 於兩者中必須指示相異之數也.

360 一組聯立方程式之解者,諸元之各組值能適合方程組中一切方程式者也.

例如,$x=2$, $y=-1$ 為下方程組之解:

$$2x+y=3,\ 4x+3y=5.$$

361 解一組聯立方程式者,求出方程組之各解或證明其無解也.

解法所基之推理,與§§334,335中所述者類似. 362

譬如有$x$及$y$之二元方程組,即二式二元之方程組.先設$x$及$y$眞有値能適合兩方程式.根據此假定卽可將兩方程式作爲恆等式處理,而用運算法則將兩方程式設法變換爲一或多方程組之呈$x=a, y=b$形者.導出此方程組$x=a, y=b$之方法若爲可逆,而$x, y$之値爲$a, b$時,吾人卽可斷言$a, b$爲所求之解之一;凡方法由可逆之步驟而成者皆可逆.

凡此祇含一個新原理如下:

**代換原理** (Principle of substitution) 若由所與諸方程式,眞能適合之假定,可推得二式,$A$及$B$,有同値,則於任一方程式中得以一式代他一式. 363

例. 解方程組

$$2x+y=12, \tag{1}$$

$$y=8. \tag{2}$$

由$x$及$y$眞有値能適合兩方程式之假定,於(2)中得$y$之值,因知(1)中$y$之値爲8.

以8代(1)中之$y$,得

$$2x+8=12, \tag{3}$$

從而

$$x=2. \tag{4}$$

故若(1),(2)有解,則解爲$x=2$, $y=8$.

反之,$x=2$, $y=8$爲(1),(2)之解,故由(1),(2)得(4),(2)之方法可逆.

是以,由(4)可得(3),而由(3),(2)可得(1).

**注意一** 代換原理爲各種等式推演律(§§249, 253, 257)及遞等律,若$a=b$,而$b=c$,則$a=c$(§261)之推論. 364

譬如,吾人可證上之代換爲正當如下:

若$y=8$,則$y+2x=8+2x$,卽$2x+8=2x+y$, §249.

又若$2x+8=2x+y$,且$2x+y=12$,則$2x+8=12$, §261.

**注意二.** 當然吾人須有權利假定所與方程式聯立,始能應用代換原理. 365

譬如,吾人不能由$x=2$及$x=3$作$2=3$之謬誤結論,因吾人無權利假定$x=2$, $x=3$聯立也.

## 變換定理

366 依上所述,則就二元方程組而論,凡運算法則之正當應用,皆可認爲方程組之合理變換;又若此種變換可逆,則方程組之解不爲所變,可以斷言.

故下之定理,無論元數幾何之方程式皆得適用之.

367 **定理一** 一方程組中,各方程式如分別施以§§338, 339之變換,其解不變.

因用此種變換不變各個方程式之解故也.

例如,方程組 $3x-2y=1$, $y-2x=5$ 與 $3x-2y=1$, $y=5+2x$ 有同解.

368 **定理二** 方程組

$$y=X, \qquad f(x, y)=0,$$

與下方程組有同解:

$$y=X, \qquad f(x,X)=0.$$

其中 $X$ 指示任何祇含 $x$ 之式(或常數), $f(x, y)$ 爲任何含 $x$ 及 $y$ 之式,而 $f(x, X)$ 則爲於 $f(x,y)$ 中以 $X$ 代 $y$ 之結果, §280.

此定理不外代換原理之特例.

例如,方程組 $y=x+2$, $3x-2y=1$ 與 $y=x+2$, $3x-2(x+2)=1$ 有同解.

369 **定理三** 方程組

$$A=B, \qquad C=D,$$

與下方程組有同解.

$$A+C=B+D, \qquad C=D.$$

何則. $A=B$, $C=D$ 與 $A+C=B+C$, $C=D$ 有同解. §338. 而 $A+C=B+C$, $C=D$ 與 $A+C=B+D$, $C=D$ 有同解, §363.

例如,方程組 $x+y=5$, $x-y=1$ 與 $x+y+(x-y)=5+1$, $x-y=1$ 有同解. 故與 $2x=6$, $x-y=1$ 有同解.

**系** 如先將所與之方程式各以不為 0 之任何常數乘之, 370
卽,乘其兩端,然後應用定理三, §369, 方程組之解亦不變.故若 $k$ 及 $l$ 指示任二不為 0 之常數,則方程組

$$A=B, \qquad C=D,$$

與下方程組有同解:

$$kA\pm lC=kB\pm lD, \qquad C=D.$$

**定理四** $A, B, C$ 為整式時,方程組 371

$$AB=0, \qquad C=0,$$

與下二方程組有同解:

$$A=0,\ C=0;\ 及\ B=0,\ C=0.$$

何則, $AB=0$ 與 $A=0$ 及 $B=0$ 二方程式有同解, § 341.
故方程組 $AB=0, C=0$ 之解,卽 $A=0, C=0$ 及 $B=0, C=0$ 二方程組之解.
例如, $xy=0, x+y=2$ 之解,卽 $x=0, x+y=2$ 及 $y=0, x+y=2$ 之解.

**等值方程組** 兩組聯立方程式有同解時稱為等值. 372

例如, $x+2y=5,\ 2x+y=4$ 及 $3x+y=5,\ 4x+3y=10$ 二方程組等值,二者有同之解 1, 2.
又,方程組 $xy=0,\ x+y=2$ 與 $x=0,\ x+y=2$ 及 $y=0,\ x+y=2$ 二方程組等值.

## 消去法 二元一次方程組之解法

**消去法** 由二方程式消去一元,如 $x$,者,由此二方程式導出一不含 $x$ 之方程式也. 373

由 $x$ 及 $y$ 之二元一次方程組中消去 $x$ 或 $y$, 以及由其結果導出方程組之解,其較重要之方法,具述如下.

**代換法** 此法基於 § 368 之定理. 374

例. 解

$$x+3y=3. \qquad (1)$$

$$3x+5y=1. \qquad (2)$$

視 $y$ 如已知數,就 $x$ 解 (1), $\qquad x=3-3y.$ (3)

於 (2) 中以 $3-3y$ 代 $x$, $\qquad 3(3-3y)+5y=1.$ (4)

解 (4), $\qquad y=2.$ (5)

於 (3) 中以 2 代 $y$, $\qquad x=-3.$ (6)

故 (1), (2) 之唯一之解,爲 $x=-3,\ y=2.$

何則,依§§367, 368, 下列各方程組有同解: (1), (2); (3), (2); (3), (4); (3), (5); (6), (5). 而 (6), (5) 之解爲 $x=-3,\ y=2.$

此結論可直接由§362導出, 因由 (1), (2) 得 (5), (6) 之方法爲可逆也.

驗算. $\qquad -3+3\cdot2=3,$ (1) $\qquad 3(-3)+5\cdot2=1.$ (2)

上之 (4) 由用代換法消去 $x$ 導出.

**用代換法由兩方程式消去一元,如 $x$ 時,由其中一方程式導出以他元表 $x$ 之式,而於他一方程式中以所得之式代 $x$.**

375 次例說明此法之一特例,稱爲比較消去法.

例. 解 $\qquad x+5y=7.$ (1)

$\qquad x+6y=8.$ (2)

視 $y$ 如常數,就 $x$ 解 (1) 及 (2), $\qquad x=7-5y,$ (3)

$\qquad x=8-6y.$ (4)

等置此表 $x$ 之二式, $\qquad 7-5y=8-6y.$ (5)

解 (5), $\qquad y=1.$ (6)

於 (3) 中以 1 代 $y$, $\qquad x=2.$ (7)

故 (1), (2) 之解爲 $x=2,\ y=1.$

376 **加減法** 此法基於§§369, 370之定理.

例. 解 $\qquad 2x-6y=7,$ (1)

$\qquad 3x+4y=4.$ (2)

以 3 乘 (1), $\qquad 6x-18y=21.$ (3)

以 2 乘 (2), $\qquad 6x+8y=8.$ (4)

由 (3) 減 (4), $\qquad -26y=13.$ (5)

從而 $\qquad y=-1/2.$ (6)

於 (1) 中以 $-1/2$ 代 $y$, $\qquad 2x-6(-1/2)=7.$ (7)

從而 $\qquad x=2.$ (8)

故 (1), (2) 之解爲 $x=2,\ y=-1/2.$

何則,依§§367, 368, 370. 下列各方程組有同解: (1), (2); (1), (5); (1), (6); (7), (6); (8), (6); 而 (8), (6), 之解為 $x=2$, $y=-1/2$.

驗算. $2\cdot2-6(-1/2)=7$, (1) $3\cdot2+4(-1/2)=4$. (2)

以上 $x$ 用減法消去.

$x$ 之值亦可直接由 (1), (2) 用加法消去 $y$ 而求得,即.

| | | |
|---|---|---|
| 以 2 乘 (1), | $4x-12y=14$. | (9) |
| 以 3 乘 (2), | $9x+12y=12$. | (10) |
| 加 (9) 與 (10), | $13x \quad =26$. | (11) |
| 故,如前, | $x \quad =2$. | (12) |

用加法或減法由兩一次方程式消去一元,如 $x$ 時,先以適當之數乘兩方程式,使結果所得之方程式中 $x$ 之係數絕對值相等,然後視兩係數有同號或異號而定減或加.

**例外情形** 令 $A=0$, $B=0$ 指示 $x$ 及 $y$ 之一次方程式.由以上各節 (§§374, 376) 可知此方程組 $A=0$, $B=0$ 若 $A$, $B$ 非因消去 $x$ 而同時必消去 $y$ 之式,則有一解且祇有一解.因消去 $x$ 而連帶消去 $y$ 祇能在以下兩種情形發生. **377**

1. 若 $A$, $B$ 二式之間有 $A\equiv kB$ 之關係,其中 $k$ 表常數,則二方程式 $A=0$ 及 $B=0$ 謂之相依方程式.

顯而易見若 $A\equiv kB$, 則凡 $B=0$ 之解皆為 $A=0$ 之解,且其逆亦眞,故方程式 $A=0$, $B=0$ 有無窮多之解.

例如,令 $A=2x+6y-10=0$ (1), $B=x+3y-5=0$ (2).

則 $A\equiv 2B$. 故 $A=0$ 及 $B=0$ 為相依方程式.注意若以 2 乘 (2) 由 (1) 減其結果而消去 $x$, 同時亦消去 $y$.

2. 若 $A$ 與 $B$ 之間有 $A\equiv kB+l$ 之關係,其中 $k$ 及 $l$ 表常數,且 $l$ 不為 0, 則二方程式 $A=0$ 及 $B=0$ 謂之矛盾方程式.

在此種情形,方程式 $A=0$, $B=0$ 無解;何則,凡 $x$, $y$ 之值能使 $B=0$ 者皆使 $A=l$, 而非 $A=0$ 故也.

例如，令 $A=2x+6y-9=0$ (3)，$B=x+3y-5=0$ (4)，

則 $A=2B+1$，故 $A=0$ 及 $B=0$ 爲矛盾方程式．如由(3)，(4)消去 $x$，同時必消去 $y$．

378 **解之公式** 任與之 $x, y$ 之二元一次方程組，可化作下之形式：

$$ax+by=c, \quad (1) \qquad a'x+b'y=c', \quad (2)$$

其中 $a, b, c, a', b', c'$，指示已知之數或式．

依§377，方程式(1)，(2)有一解且祇有一解，除非有一常數 $k$ 可以求得能使 $a'=ka$ 及 $b'=kb$，從而 $ab'-a'b=k(ab-ab)=0$．

欲求此解，可將 $x$ 及 $y$ 各自用加減法消去，§376．其結果爲

$$(ab'-a'b)x=b'c-bc', \quad (3) \qquad (ab'-a'b)y=ac'-a'c. \quad (4)$$

故如 $ab'-a'b\neq 0$，(1)，(2)之解爲

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}, \qquad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}. \quad (5)$$

爲便於記憶起見，上之公式可書作

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{-1}{ab'-a'b}. \quad (6)$$

$ab'-a'b\neq 0$ 時，若非吾人預知方程組(1)，(2)有一解，上之討論僅足以證明方程組(1)，(2)若有解時其解爲(5)．

## 習 題 VII

就 $x$ 及 $y$ 解下列方程組．

1. $\begin{cases} x+y=62, \\ x-y=12. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 6x-5y=25, \\ 4x-3y=19. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 45x-13y=161, \\ 18x+11y=32. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-3=7-x, \\ 8x-3y-61=0. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 12x=9-10y, \\ 8y=7-9x. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2y-3x=0, \\ 5x-3y-2=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x/0.3+5y=3\frac{1}{2}, \\ 5x+3y=1.65. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-y)+10, \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3. \end{cases}$

9. $\begin{cases}(x+2)(y+1)=(x-5)(y-1),\\ x(4+y)=-y(8-x).\end{cases}$ 10. $\begin{cases}ax+by=a^2+2a+b^2,\\ bx+ay=a^2+2b+b^2.\end{cases}$

11. $\begin{cases}ax+by=c,\\ px=qy.\end{cases}$ 12. $\begin{cases}(a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2),\\ (a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2).\end{cases}$

13. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y-x}{2}=5,\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{9}=7.\end{cases}$ 14. $\begin{cases}\dfrac{x-y}{4}-\dfrac{x+2y-5}{6}=\dfrac{y-3}{4}-\dfrac{y+2x-5}{6},\\ 5x-2y+6=0.\end{cases}$

15. $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{c},\\ \dfrac{x}{a'}-\dfrac{y}{b'}=\dfrac{1}{c'}.\end{cases}$ 16. $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1+x,\\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1+y.\end{cases}$

17. 試證下二方程式爲矛盾方程式.

$$1\tfrac{1}{2}x-2\tfrac{1}{2}y=10,\quad 6x-10y=15.$$

18. 於題15中指定$a, b, c, a', b', c'$,之值,俾方程式成爲(1)矛盾方程式,(2)相依方程式.

# 雖非一次而能由解一次方程組得解之二元方程組

方程組對於$x$及$y$非一次者,對於$x$及$y$之某組函數或可爲一次,若將方程式就此組函數而解之,$x$及$y$自身之值往往能由其結果導出. 379

例一. 解$\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{3y}=1,\ \dfrac{9}{x}+\dfrac{10}{y}=5.$

兩方程式對於$1/x$及$1/y$皆爲一次.

就$1/x$及$1/y$解之,得$1/x=1/3,\ 1/y=1/5$. 故$x=3,\ y=5$.

例二. 解$3x+\dfrac{y}{x}=6,\ 7x-\dfrac{2y}{x}=1.$

就$x$及$y/x$解之,得$x=1,\ y/x=3$. 故$x=1,\ y=3$.

設所與之方程組,能化作$AB=0,\ A'B'=0$之形式,其中$A, B,$ 380

$A'$, $B'$ 指示 $x$ 及 $y$ 之一次整式.則由 §371 之定理,此方程組之諸解,可由解下列四組一次方程式得之: $A=0$, $A'=0$; $A=0$, $B'=0$; $B=0$, $A'=0$; $B=0$, $B'=0$.

例. 解
$$x^2-2xy=0, \quad (1)$$
$$(x+y-1)(2x+y-3)=0. \quad (2)$$
此方程組與下列四方程組等值:
$$x=0, \quad x+y-1=0, \quad (3)$$
$$x=0, \quad 2x+y-3=0, \quad (4)$$
$$x-2y=0, \quad x+y-1=0, \quad (5)$$
$$x-2y=0, \quad 2x+y-3=0. \quad (6)$$
解 (3), (4), (5), (6) 四方程組,得 (1), (2) 之四解如下:
$$x,\ y=0,\ 1;\ 0,\ 3;\ 2/3,\ 1/3;\ 6/5,\ 3/5.$$

381 普徧言之,若 $ABC\cdots\cdots$ 及 $A'B'C'\cdots\cdots$ 各表 $x$ 及 $y$ 之 $m$ 及 $n$ 個一次整因式之積,則若將前積各因式等置於 0,而與後積各因式等置於 0 者一一結合,然後解所得之 $mn$ 組一次方程式,即可盡得方程組 $ABC\cdots\cdots=0$, $A'B'C'\cdots\cdots=0$ 之諸解.

若諸一次方程組皆非相依或矛盾,則得 $mn$ 解.即與方程組所有之解之數,等於各方程式之次數之積.

## 習題 VIII

解下列各方程組.

1. $\dfrac{7}{2x}+\dfrac{1}{3y}=0,\quad \dfrac{3}{x}+\dfrac{14}{y}+3=0.$

2. $10x+\dfrac{6}{y}=5,\quad 15x+\dfrac{10}{y}=8.$

3. $\dfrac{y}{x}=\dfrac{2(3-y)}{x}+\dfrac{3}{2},\quad \dfrac{y+3}{x}=\dfrac{3y-5}{x}+1.$

4. $xy=0,\quad (x+2y-1)(3x-y+2)=0.$

5. $xy-y=0,\quad 3x-8y+5=0.$

6. $x(x-y)(x+y)=0,\quad x+2y-5=0.$

7. $(x-1)(y-2)=0$, $(x-2)(y-3)=0$.

8. $y^2=(x-1)^2$, $2x+3y-7=0$.

9. $(2x+y)^2=(x-3y+5)^2$, $(x+y)^2=1$.

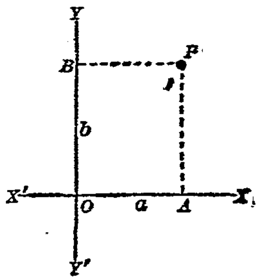
10. $(x-5y+8)(x+3y+5)=0$, $(2x+y+5)(5x+2y-14)=0$.

## 含二變數之一次方程式之圖象

**x及y各組值之圖象** 二變數,如$x$及$y$之各組值,若用平面中之點表之,甚爲便利. 382

先於平面中取互相垂直之二定直線$X'OX$及$Y'OY$爲軸,其交點$O$謂之原點;又取適當之單位爲測長之用.

則如所與之一組值爲 $x=a$, $y=b$, 其法如下:




以$|a|$即$a$之絕對值爲長,在$X'OX$上依$a$爲正或負而於$O$之右或左量一線分,$OA$.

仿此,以$|b|$爲長,在$Y'OY$上依$b$爲正或負而於$O$之上或下量一線分,$OB$.

於是過$A$及$B$各引直線平行於$Y'OY$及$X'OX$.兩直線之交點$P$,吾人取作此組值$x=a$, $y=b$之圖象.

此組值$x=a$, $y=b$ 及其圖象$P$,皆以符號 $(a, b)$ 表之甚便.

數$a$,或等長線分$OA$或$BP$之一,稱爲$P$之橫標;數$b$,或等長線分$OB$或$AP$之一,稱爲$P$之縱標.二者合稱爲$P$之坐標.

$X'OX$稱爲$x$軸或橫軸,$Y'OY$稱爲$y$軸或縱軸.

應注意者,此法導$x$, $y$之各組值使與平面中之點一一對應(§2);即每有一組值$(a, b)$,即有一點$P$,且其逆亦眞,每有一點$P$,即有一組值$(a, b)$,可

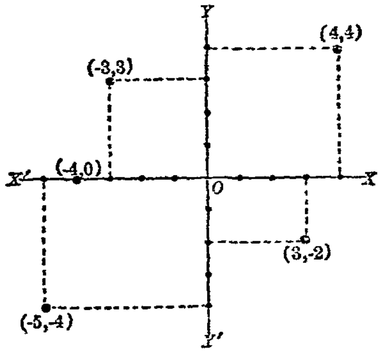
設 $P$ 至 $Y'OY$ 及 $X'OX$ 之距離再附以適當之符號而求得之。

特例，(0, 0) 之圖象即原點，$(a, 0)$ 之圖象為 $x$ 軸上之一點，而 $(0, b)$ 之圖象為 $y$ 軸上之一點。

**例.** 作下列各組值之圖象：(4, 4), (−3, 3), (−4, 0), (−5, −4), (3, −2).

將各組值依次施行上述之作法，即得其圖象如附圖所示。

圖象之位置與坐標之符號，其間之關係應特別注意。



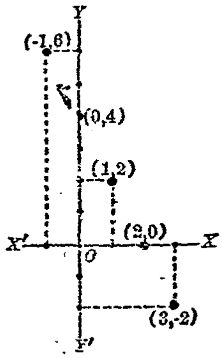

383 **含x及y之方程式之圖象** 普通含 $x$ 及 $y$ 之方程式有無窮多之實解。在此種情形通常有一定之曲線存在，各解之圖象皆含於其中，而此外不含他點。此曲線謂之方程式之圖象。

方程式之圖象，亦有由多於一之曲線組成者。又此處所謂曲線包括直線在內，亦宜注意。

384 **定理** 凡含二文字 $x$ 及 $y$ 或其一之一次方程式，其圖象皆為一直線。

以故一次方程式亦稱直線方程式。

學者如任擇一方程式而作其若干解之圖象，即可知定理所云非謬。




例如，取方程式 $y=-2x+4$，

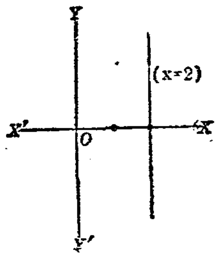
當 $x=0$, 1, 2, 3, ……

$y=4$, 2, 0, −2, ……

作 (0, 4), (1, 2), (2, 0), (3, −2),……各組值之圖象如附圖，即見諸圖象皆在同一直線上。

本定理可證之如下:

1. 當方程式呈$x=a$或$y=b$之形式時.



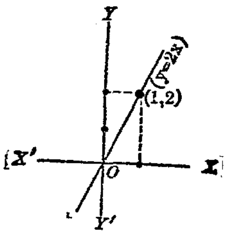

例. 求$x=2$之圖象.

此方程式爲$x$之值2與$y$之一切值所適合.故其圖象爲一平行於$y$軸之直線,在$y$軸之右距離爲2.因此直線含一切之橫標爲2之點而不含他點故也.

普徧言之,$x=a$之圖象爲一平行於$y$軸而距離爲$|a|$之直線,在$y$軸之右或左視$a$爲正或負而定;$y=b$之圖象爲一平行於$x$軸而距離爲$|b|$之直線,在$x$軸之上或下視$b$爲正或負而定.

特例,$y=0$之圖象卽$x$軸,$x=0$之圖象卽$y$軸.

2. 當方程式呈$y=mx$之形式時.

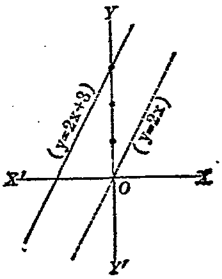



例. 求$y=2x$之圖象.

圖象爲過原點(0, 0)及點(1, 2)之直線;因此直線含一切之縱標二倍於橫標之點而不含他點故也.

普徧言之,$y=mx$之圖象爲過原點及點$(1, m)$之直線.

3. 當方程式呈$y=mx+c$之形式時.




例. 求$y=2x+3$之圖象.

顯而易見所求之圖象可由$y=2x$之圖象增各點之縱標以3而得.然此與將直線$y=2x$平行移動至交$y$軸於原點上方3單位處爲止同.

故普徧言之,$y=mx+c$之圖象爲一平行於$y=mx$之圖象之直線,交$y$軸於距原點$|c|$之處,其交點在原點之上或

下,視$c$爲正或負而定.

385 **此直線之求法** 因兩點足以決定一直線,任一方程式$ax+by+c=0$之圖象,可仿下例求之.

例. 作$3x+y-6=0$之圖象.

其一,當$y=0$時$x=2$. 其二,當$x=0$時$y=6$.

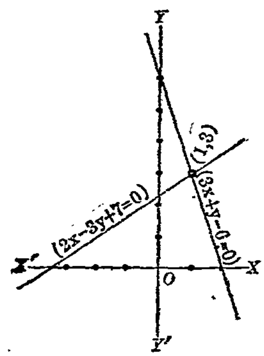
故祇須先作$(2, 0)$及$(0, 6)$二點之圖象,此二點爲直線交兩軸之處,再作此二點所決定之直線即可(參看§386之圖).

方程式呈$x=a$, $y=b$, 或$y=mx$之形式時,此法不適用.其時宜用§384, 1及2中所述之方法.

386 **二元一次方程組之解之圖象**

此即爲各方程式圖象之二直線之交點,因此點且祇有此點兼充兩方程式之解之圖象故也.

例如, $2x-3y+7=0$ (1), $3x+y-6=0$ (2)之解爲$x=1$, $y=3$, 而如圖所示, (1)及(2)之圖象交於點$(1, 3)$.




387 所與兩方程式矛盾(§377, 2)時,其圖象無公共點,即兩直線平行;所與兩方程式相依(§377, 1)時,其圖象上之點皆爲公共點,即兩直線重合.

例如, $y=2x$, $y=2x+3$爲矛盾方程式,兩方程式之圖象(§384, 3)爲二平行線.

又,相依方程式$y=2x$, $3y=6x$有同一之圖象.

388 方程式呈$AB=0$之形式者,其圖象爲$A=0$及$B=0$之圖象所合成;因$AB=0$之解即$A=0$及$B=0$之解(§§341, 346)故也.

例. 求下二方程式及其解之圖象.

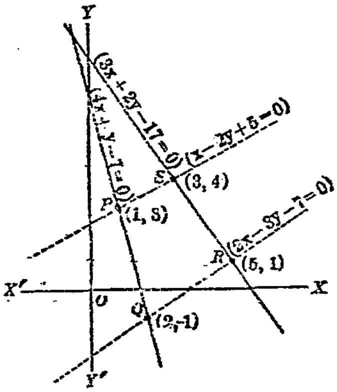
$$(4x+y-7)(3x+2y-17)=0, \qquad (1)$$

$$(x-2y+5)(2x-3y-7)=0. \qquad (2)$$

(1)之圖象為二直線 $PQ$ 及 $RS$ 合成,此二直線各為 $4x+y-7=0$ 及 $3x+2y-17=0$ 之圖象.

(2)之圖象為二直線 $PS$ 及 $QR$ 合成,此二直線各為 $x-2y+5=0$ 及 $2x-3y-7=0$ 之圖象.

$PQ$, $RS$ 二直線交 $PS$, $QR$ 二直線之點,亦即 $P$, $Q$, $R$, $S$ 四點,為(1),(2)之解即 $(1, 3)$, $(2, -1)$, $(5, 1)$, $(3, 4)$ 之圖象.




389

**含 x 及 y 之高次方程式之圖象** 先從方程式求出若干解,作各解之圖象,而過所得之點不用器械信手畫一曲線.取解極密接時,所得曲線可與眞圖象相差極微.

作圖時用附圖所示之方格紙甚便.

例. 求方程式 $y=x^2$ 之圖象.

當 $x=0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad \cdots\cdots$

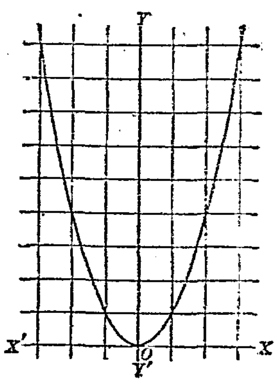
$y=0,\quad 1,\quad 4,\quad 9,\quad 16,\quad \cdots\cdots$

又,當 $x=-1,\ -2,\ -3,\ -4,\cdots\cdots$

則 $y=\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\cdots\cdots$

取方格之一邊為長之單位,作出對應點 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)\cdots\cdots(-1, 1)$, $(-2, 4)$,$\cdots\cdots$.除 $x=-1$ 及 $x=+1$ 之間之部分外,不須甚多之點,即可得圖象之大概,如附圖中之曲線.

圖象全在 $x$ 軸之上方,向上無限伸展;且關於 $y$ 軸為對稱,$y$ 以同值對應於 $x=a$ 及 $x=-a$.




當 $x=\pm 1/2,\ \pm 1/4,\cdots\cdots$

$y=\ 1/4,\ 1/16,\cdots\cdots$

則作一、二對應點之圖象,即見方程式之圖

象與$x$軸相切.

## 習 題 IX

1. 作$x$及$y$下列各組值之圖象.

$(0, 0), (5, 0), (0, -7), (6, 2), (-7, -1), (-4, 3), (5, -9).$

2. 求下列各方程式之圖象.

$x=0,\ y=0,\ 2y+7=0,\ 3y+x=0,\ x+y+5=0,$

$7x+3y-18=0,\ 3x-4y=24.$

3. 求下列各方程式之圖象.

$xy=0,\ (x+y-3)(x-2y)=0,\ x^2-1=0,\ x^2=4y^2,\ x^2+y^2=0.$

4. 用圖示法求下二方程組之解,并用代數方法驗算.

(1) $\begin{cases} x+y-3=0, \\ x-2y=0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3y+2x+19=0, \\ 2y-3x+4=0. \end{cases}$

5. 下二方程組用同法處理.

(1) $\begin{cases} (x-4y+6)(x+3y+6)=0, \\ (3x+2y-10)(2x-y+5)=0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (y-x-2)x=0, \\ (y-x+2)y=0. \end{cases}$

6. 求下二方程式之圖象.

$y=-(x+1)^2, \quad y=x^3.$

# 多元一次方程組

390 **n元n式一次方程組之解法** 兩式三元之方程組通常有無窮多之解.

例如,方程組 $x=2z,\ y=z+1$ 有無窮多之解;何則,若以任一數,$b$,爲$z$之值,而以$2b$及$b+1$爲$x$及$y$之值,兩方程式皆能適合故也.

391 然三式三元之一次方程組通常有一解,且祇有一解,其求法如下例所示.

例. 解方程組

$$3x-2y+4z=13, \tag{1}$$

$$2x+5y-3z=-9, \tag{2}$$

$$6x+3y+2z=7. \tag{3}$$

由兩對方程式間消去$z$如下:

以 3 乘 (1), $9x-6y+12z=39$ (4)

以 4 乘 (2), $8x+20y-12z=-36$ (5)

相加, $17x+14y=3$ (6)

又, (1) 爲 $3x-2y+4z=13$ (7)

以 2 乘 (3), $12x+6y+4z=14$ (8)

由 (8) 減 (7), $9x+8y=1$ (9)

由結果所得兩方程式 (6), (9) 消去 $y$ 如下:

以 4 乘 (6), $68x+56y=12$ (10)

以 7 乘 (9), $63x+56y=7$ (11)

由 (10) 減 (11). $5x=5$ (12)

故 $x=1$.

以 $x=1$ 代入 (9), 得 $y=-1$.

以 $x=1, y=-1$ 代入 (1), 得 $z=2$.

故 (§ 362) 若 (1), (2), (3) 有解, 其解爲 $x=1$, $y=-1$, $z=2$, 然由 (1), (2), (3) 得出 $x=1$, $y=-1$, $z=2$ 之方法可逆. 事實上逆跡之甚易. 故 $x=1$, $y=-1$, $z=2$ 爲 (1), (2), (3) 之解.

$x=1$, $y=-1$, $z=2$ 爲 (1), (2), (3) 之解, 又可證之如下.

依 § 368, $x=1$, $y=-1$, $z=2$, 爲 (12), (9), (1) 之解甚明. 故祇須證方程組 (12), (9), (1) 與原方程組 (1), (2), (3) 有同解卽可.

先移方程式 (1), (2), (3) 之已知項於左端, 而書作

$$A=0, \quad (1) \qquad B=0, \quad (2) \qquad C=0. \quad (3)$$

則由得出 (9) 及 (12) 之方法, 方程式 (1), (9), (12) 可書作

$$A=0, \quad (1) \qquad -A+2C=0. \quad (9) \qquad 19A+16B-14C=0. \quad (12)$$

顯而易見 $x$, $y$, $z$ 之各組値, 凡能使 $A=0$, $B=0$, $C=0$ 者, 必能使 $A=0$, $-A+2C=0$, $19A+16B-14C=0$.

反之, 若 $A=0$ 且 $-A+2C=0$, 則 $C=0$; 若更有 $19A+16B-14C=0$, 則 $B=0$.

故方程組 (1), (2), (3) 與方程組 (1), (9), (12) 有同解, 卽其解爲 $x=1$, $y=-1$, $z=2$.

在上述之情形, 吾人先從所與三式三元, $x$, $y$, $z$, 方程組得出一含 $x$, $y$ 之二式二元方程組, 再從後者, 得出含一元, $x$, 之一方程式. 392

普偏言之, 如從 $n$ 式 $n$ 元之一次方程組開始, 將上述之方

法依次施行 $n-1$ 次，即可得出含一元，如 $x$，呈 $ax-b=0$ 形之一方程式.

則除 $a=0$ 外，方程組有一解，且祇有一解，其中 $x$ 之值卽 $b/a$，而他元之值可於施行上法所得之方程式中依次代換而求出.是常可如上例以證之.

反之，如 $a=0$，方程組當 $b=0$ 時通常有無窮多之解，而當 $b\neq 0$ 時無解，此將於 §394 中證之.

393 解一次方程組有極簡便之方法，將於行列式章中述之.有時用特殊策略亦能減少辛勞.

例. 解

$$x+y+z=8, \tag{1}$$

$$x+y+u=12, \tag{2}$$

$$x+z+u=14, \tag{3}$$

$$y+z+u=14, \tag{4}$$

(1), (2), (3), (4) 相加， $3x+3y+3z+3u=48.$

故 $$x+y+z+u=16. \tag{5}$$

將 (4), (3), (2), (1) 各方程式依次由 (5) 減之，卽得 $x=2,\ y=2,\ z=4,\ u=8.$

394 **例外情形** 令 $A=0, B=0, C=0$ 指示 $x, y, z$ 之一次方程組，又令 $ax-b=0$ 指示消去 $y$ 及 $z$ 所得之方程式，與 § 392 同.

1. 若 $a=0$ 且 $b=0$，則 $A, B, C$ 三函數中必有一函數能以他二函數表之如次：$A\equiv kB+lC$，其中 $k$ 及 $l$ 表常數.此時方程式 $A=0, B=0, C=0$ 爲相依方程式.

由恆等式 $A\equiv kB+lC$，能適合 $B=0$ 及 $C=0$ 者必能適合 $A=0$.故若 $B=0$ 及 $C=0$ 非矛盾方程式，§ 377, 2，方程組 $A=0$, $B=0, C=0$ 有無窮多之解.

例如，取下方程組考之.

$$A=3x-2y+4z-13=0, \tag{1}$$

$$B=2x+5y-3z+9=0, \tag{2}$$

$$C=7x+8y-2z+5=0. \tag{3}$$

由 (1) 及 (2) 消去 $z$,

$$3A+4B\equiv 17x+14y-3=0. \tag{4}$$

由 (1) 及 (3) 消去 $z$,

$$A+2C\equiv 17x+14y-3=0. \tag{5}$$

由 (4) 及 (5) 消去 $y$,

$$2A+4B-2C\equiv 0\cdot x-0=0. \tag{6}$$

最後之方程式 $ax-b=0$ 呈 $0\cdot x-0=0$ 之形式,且在得出此方程式時吾人發見 $A, B, C$ 三式之間有 $2A+4B-2C\equiv 0$ 即 $C\equiv A+2B$ 之關係.

實則祇須審察 (1), (2), (3) 即可見 $C$ 能由以 2 乘 $B$ 再加 $A$ 而得出.

故方程組 (1), (2), (3) 有無窮多之解.

2. 若 $a=0$ 而 $b\neq 0$, 則 $A, B, C$ 三函數中必有一函數能以他二函數表之如下:

$$A\equiv kB+lC+m,$$

其中 $k, l, m$ 指示常數, $m$ 不爲 0. 此時方程式 $A=0, B=0, C=0$ 爲矛盾方程式.

由恆等式 $A\equiv kB+lC+m$, 方程組 $A=0, B=0, C=0$ 無解, 何則, 凡 $x, y, z$ 之值能使 $B\equiv 0$ 且 $C\equiv 0$ 者, 皆使 $A\equiv m$, 而非 $A\equiv 0$ 故也.

例如,取下方程組考之.

$$A=3x-2y+4z-13=0, \tag{1}$$

$$B=2x+5y-3z+9=0, \tag{2}$$

$$C=7x+8y-2z+6=0. \tag{3}$$

仿上消去 $z$ 及 $y$, 得

$$2A+4B-2C\equiv 0\cdot x-2=0.$$

故最後之方程式 $ax-b=0$ 呈 $0\cdot x-2=0$ 之形式, 而 $A, B, C$ 間之關係爲 $C\equiv A+2B+1$, 實則祇須審察 (1), (2), (3) 即可發見此點.

故方程組 (1), (2), (3) 無解.

**一般之一次方程組** 由適所討論得結論如下: 395

通常 $m$ 式 $n$ 元之一次方程組當 $m=n$ 時有一解,當 $m<n$ 時有無窮多之解,當 $m>n$ 時無解.

如有不然,則二或多方程式之間必有恆等關係如 §§ 377, 394 所述者存在.

特例,含二元,$x, y$,之三式一次方程組 $A=0, B=0, C=0$,祇在 $A, B, C$ 之間有 $A\equiv kB+lC$ 之關係,而 $B=0, C=0$ 非矛盾方程式時有一解.

例如,方程組 $x-y=1$ (1), $x+y=7$ (2), $3x-y=10$ (3) 無解;因 (1), (2) 之解 $x=4$, $y=3$ 不適合 (3) 故也.

反之,方程組 $x-y=1$ (1), $x+y=7$ (2), $3x-y=9$ (4) 有一解;因 (4) 爲 $x=4$, $y=3$ 所適合故也.注意 $3x-y-9\equiv2(x-y-1)+(x+y-7)$.

學者試作 (1), (2), (4) 之圖象,將見三直線會於一點.

## 習 題 X

解下列各方程式.

1. $\begin{cases} x+y=11, \\ y+z=13, \\ z+x=12. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=4, \\ x+3y+7z=13. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y-3z=3, \\ 3x-5y+7z=19, \\ 5x-8y-11z=-13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x-2y=-33, \\ x+y-7z=13, \\ x+3y=-10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y-4z=11, \\ 2x-3y=0, \\ y-4z=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-5=2(x-2), \\ (x+1)(y-1)=(x+2)(y-2)+5, \\ 2x+3y+z=6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{6}{z}=9, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}=5. \\ \dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{z}=4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y+z+u=4, \\ x+z+u=3, \\ x+y+u=1, \\ x+y+z=10. \end{cases}$

9. $\begin{cases}4x-3z+u=9,\\5y+z-4u=17,\\3y+u=12,\\x+2y+3u=8,\end{cases}$　　10. $\begin{cases}cx+by=l,\\by+az=m,\\az+cx=n.\end{cases}$

11. $\begin{cases}lx=my=nz,\\ax+by+cz=d.\end{cases}$　　12. $\begin{cases}2x=3y=6z,\\(x+2y+z-16)(3x-2y+20)=0.\end{cases}$

試證下列各方程組爲相依方程式,且求出各組中方程式間之恆等關係.

13. $\begin{cases}x-y=3,\\y-z=-5,\\z-x=2.\end{cases}$　　14. $\begin{cases}3x-8y+7z=10,\\2x+5y-3z=12,\\16x+9y-z=80.\end{cases}$

## 應用問題

下列各問題可用含二或多元,如$x, y,\cdots\cdots$,之一次方程組解之.究竟用若干元最適當,須視問題之條件而定.但選定用$x, y,\cdots\cdots$所代表之未知數并用之以表出其餘未知數後,將見未應用之條件適能產生非相依非矛盾而個數與元數相同之方程式以聯結諸元.實則如式數較元數多,問題將無解,如式數較元數少,問題將有無窮數之解,§395. 396

問題有對於未知數之性質加以限制者,§352中所述之注意,今仍適用.

例一. 有三位之數,其十位數字等於百位及個位數字之和,十位及個位數字之和爲8.如交換百位及個位數字,則較原數增99.求原數.

令　$x$=百位數字,$y$=十位數字,$z$=個位數字.

則原數爲$100x+10y+z$.

依問題之條件,得　　$x+z=y$,　　(1)

$y+z=8$,　　(2)

$$100z+10y+x=100x+10y+z+99 \qquad (3)$$

解 (1), (2), (3), 得 $x=2,\ y=5,\ z=3.$

故原數為 253.

例二. 旅人行某距離後休息 30 分, 然後以原速率之 $\frac{7}{8}$ 倍繼續行程, 到目的地後得知 20 哩之全距離以 6 小時完成. 若以原速率多行 4 哩後再如前休息, 則全程祇須 $5\frac{6}{7}$ 小時可畢. 原速率若何, 又休息處與出發點之距離若何?

令 $x=$ 原速率每小時哩數, 又令 $y=$ 休息處距出發點之哩數.

以 $x$ 及 $y$ 表 (1) 眞行程及 (2) 假想之行程所費之時間, 得

$$\frac{y}{x}+\frac{1}{2}+\frac{20-y}{7x/8}=6, \quad (1) \qquad \frac{y+4}{x}+\frac{1}{2}+\frac{16-y}{7x/8}=5\tfrac{6}{7} \quad (2)$$

就 $y/x$ 及 $1/x$ 解 (1), (2) 得 $y/x=3/2,\ 1/x=1/4.$

故 $x=4,\ y=6.$

例三. 二容器, $A$ 及 $B$, 盛酒精與水之混合液. $A$ 中取 3 分 $B$ 中取 2 分混合之, 則含酒精 40%. $A$ 中取 1 分 $B$ 中取 2 分混合之, 則含酒精 32%, $A$ 及 $B$ 中含酒精之百分率各若何?

令 $x$ 及 $y$ 指示 $A$ 及 $B$ 中所含酒精之百分率.

則依所與之條件

$$\frac{3x}{5}+\frac{2y}{5}=\frac{40}{100}, \quad (1) \qquad \frac{x}{3}+\frac{2y}{3}=\frac{32}{100}. \quad (2)$$

解 (1), (2) 得 $x=52/100$ 即 52%, $y=22/100$ 即 22%.

## 習 題 XI

1. 三數之和為 20, 而 (1) 第一數加第二數之二倍再加第三數之三倍等於 44, (2) 第一第二兩數之和之二倍減第三數之四倍等於 $-14$. 求此三數.

2. 三數之和為 51. 如以第二數除第一數, 商為 2 而餘為 5; 如以第三數除第二數, 則商為 3 而餘為 2. 各數若何?

3. 求適合下二條件之二位之數: (1) 十位數字之二倍加個位數字之三倍等於 37, (2) 如將數字易位則得較原數少 9 之數.

4. $A$ 負債 5000 圓, $B$ 負債 3000 圓. $A$ 除已所有外如得 $B$ 所有之 $\frac{2}{3}$ 足以償債, 而 $B$ 以已所有及 $\frac{1}{2}$ 倍 $A$ 所有償債尚少 100 圓, 求各有金幾何?

5. $A$ 與 $B$ 共有 $p$ 圓; $B$ 與 $C$, $q$ 圓; $C$ 與 $A$, $r$ 圓. 求 $A, B, C$ 三人之財產. $p, q, r$ 須適合若何之條件始能得適合問題之解?

6. 本金若干以單利貸出,二年後本利和2556.05圓,四年後本利和2767.10圓.本金及利率各若何?

7 某人投資於照額面價格之4釐債票及市價110%之5釐債票,投資之進益爲650圓.如4釐債票市價80%,五釐債票市價110%,則可較前多得100圓,共投資幾何?

8. 若一矩形之長及廣各增6吋,則長變爲廣之$\frac{4}{3}$倍而矩形之面積增84平方吋.求矩形之原面積

9. $A$以金與$B$,金額與$B$原有者等;$B$又以金與$A$,金額與$A$所餘者等;$A$復以金與$B$,金額亦與$B$所餘者等.今$A$有16圓$B$有24圓.各人原有金幾何?

10. $A$與$B$合作一事,$5\frac{5}{7}$日可成;$A$與$C$合作之,$4\frac{4}{5}$日可成.三人共作2日而$A$去,$B$與$C$又作$1\frac{2}{17}$日乃成.如三人皆獨作之,各幾日可成?

11. 兩點各以一定之速率沿150尺長之圓周而運動.運動之方向相反時,每5秒相會一次,方向相同時每25秒相會一次.各點之速率若何?

12. 有長240碼及200碼之二列貨車,如相向而行,兩車於25秒中交過;如同向而行,快車於$3\frac{3}{4}$分中越過慢車.各車之速率每小時幾哩?

13. $A, B$兩汽船往復於相距200哩之$C, D$二城之間.$A$能較$B$遲1小時由$C$城出發,而於2小時中追及$B$,到$D$城後停泊4小時,歸途中於距$D$城10哩處與$B$相會.$A$及$B$之速率各若何?

14. $A$於半哩競走中勝$B$ 20碼而勝$C$ 30碼,則$B$勝$C$幾碼?

15. $A$與$B$作440碼競走兩次.第一次$A$讓$B$先行20碼而勝2秒,第二次$A$讓$B$先行4秒而勝6碼.$A$及$B$之速率若何?

16. 兩旅客共有行李500磅.因重量超過免費限額一人納費1.25圓,又一人納費1.75圓,如行李屬於一人,則此人應納費4圓.每人可免費攜帶行李之重量爲幾何?

17. 已與三種合金,其成分如下:$A$,金5分(依重量)銀2分鉛1分;$B$,金2分銀5分鉛1分;$C$,金3分銀1分鉛4分.今欲得含等量(依重量)之金銀鉛之合金9兩,則由$A, B, C$須各取幾兩以鎔成?

18. $A$及$B$爲銀與銅之合金.$A$ 5分$B$ 3分所成之合金含銀52%.$A$ 5分$B$ 11分所成之合金含銀42%.$A$及$B$含銀之百分比各若何?

19. 射手在500碼外打靶,發射後$2\frac{2}{3}$秒聞中靶之聲.離靶600碼而與射手相距210碼之觀者,則於聞鎗聲後$2\frac{1}{10}$秒始聞中靶之聲.假定聲浪及彈丸之速度皆始終不變者,試求速度各幾何.

20. 水槽有二注水管$A$,$B$及一排水管$C$.如於水滿槽時齊開三管,3小時可排盡;如祇開$A$,$C$兩管,1小時可排盡;如祇開$B$,$C$兩管,45分可排盡,如$A$每分注水較$B$多100罌,則水槽之容量若何,又各管每分通過水流幾罌?

# 待定係數法釋例

397 今將進論關於代數學主要事項之一二簡單問題.

問題或關於所論變數之特殊函數而發生.此函數得化爲某種形式否,又若然,則化爲此種形式後其係數如何?

下例足以說明解決此問題之方法.

例. 式$x^2+4x+6$得化爲$x+1$之二次多項式之形式否,又若然,則化爲此形式後其係數如何?

此形式之普徧式可書作$a(x+1)^2+b(x+1)+c$,其中$a$, $b$, $c$指示常數.

故如所述之變換爲可能,則必有

$$x^2+4x+6\equiv a(x+1)^2+b(x+1)+c, \tag{1}$$

即

$$x^2+4x+6\equiv ax^2+(2a+b)x+(a+b+c). \tag{2}$$

依§284,(2)從而(1)爲恆等式之情形,祇在(2)中$x$之同乘冪係數相等之時,即$a=1$, $2a+b=4$, $a+b+c=6$之時.就$a$, $b$, $c$解之,亦即$a=1$, $b=2$, $c=3$之時.

故

$$x^2+4x+6\equiv(x+1)^2+2(x+1)+3.$$

注意吾人令所與式等於呈所求形之式而用待定係數者.因而發見此假想之恆等式欲令爲眞,諸係數必須適合若干條件等式;解之即得諸係數之值.

398 下一類問題更普徧而包括以上所述者.

具述若干條件,而作下之疑問:有能適合此諸條件而呈某種特殊形式之函數存在否,如有之,則其係數若何?

解此種問題時,先作呈所述之形式而用待定係數之式.此諸係數爲問題之未知數,所與之條件則產生未知數必須適合之方程組.若方程組有一解,即得一函數能適合所與之條

件;若方程組無解,此種函數不存在;若方程組有無窮多之解,則問題不定,而有無窮多之函數能適合所與之條件.以上假定所論之函數為有窮式 § 264.

例. 若可能時,求一 $x$ 之二次多項式,俾當 $x=1$ 及 $x=3$ 時其值為 0,而當 $x=4$ 時其值為 6.

所述之多項式應作 $ax^2+bx+c$ 之形式.且依問題之條件

$$a+b+c=0,\quad 9a+3b+c=0,\quad 16a+4b+c=6.$$

就 $a, b, c$ 解之得 $a=2,\ b=-8,\ c=6.$

故所求之多項式為 $2x^2-8x+6$.

若所求者為一次多項式,問題無解;若所求者為三次多項式,問題有無窮多之解.

以上各節說明之方法,稱為待定係數法 (Method of undetermined coefficients). 此為代數中之主要研究方法,以後應用之處極多. 399

## 習題 XII

1. 以 $x-2$ 之多項式表 $3x^3-x^2+2x-5$.
2. 以 $2x+3$ 之多項式表 $4x^2+8x+7$,
3. 求 $f(x)=ax^2+bx+c$ 俾

$$f(-1)=11,\quad f(1)=-5,\quad f(5)=6.$$

4. 求 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 俾

$$f(0)=5,\quad f(-1)=1,\quad f(1)=9,\quad f(2)=31.$$

5. 求 $f(x, y)=ax+by+c$ 俾

$$f(0, 0)=4,\quad f(4, 4)=0,\quad f(1, 0)=6.$$

6. 求一次方程式 $ax+by+1=0$,設已知其二解為 $x=3, y=1$ 及 $x=4, y=-1$.
7. 能求得一方程式 $ax+by+c=0$ 使有 $x=3, y=1$; $x=4, y=-1$; $x=1, y=1$ 三解否?
8. 求以 $(2, 3), (-4, 5)$ 兩點所決定之直線為圖象之一次方程式.
9. 求定 $c$ 之值俾 $3x+y+c=0$ 之圖象能過點 $(-2, 3)$.
10. 求兩一次方程式 $ax+by+1=0$ (1) 及 $a'x+b'y+1=0$ (2),設已知兩者皆為 $x=2, y=3$ 所適合. (1) 又為 $x=7, y=5$ 所適合, (2) 又為 $x=3, y=7$ 所適合.

作此二方程式之圖象.

11. 求方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$, 設已知其根爲 $-2, 1$ 及 $3$.

12. 求一是 $x^2+bxy+cx+dy=0$ 形式之方程式, 俾有 $x=1, y=0$; $x=2, y=1$; $x=-2, y=1$ 三解.

13. 化 $3x+2y-3$ 爲

$$a(x+y-1)+b(2x-y+2)+c(x+2y-3)$$

之形式,其中 $a, b, c$ 表常數.

# V. 除法變換

## 普偏方法

400 發端 $A$ 被 $B$ 除之商已於 §319 中定其義爲分式 $A/B$ 用運算法則所能化得之最簡之形式.

$A$ 及 $B$ 爲就同一文字,如 $x$,之多項式,而 $A$ 之次數不較 $B$ 低時,則求定義若是之商之普偏方法,應如下述:

1. 於是 $B$ 或可爲 $A$ 之因式,換言之,$A$ 得化爲

$$A\equiv QB \tag{1}$$

之形式;其中 $Q$ 爲 $x$ 之整函數.

故 $$\frac{A}{B}\equiv Q.$$

即 $A$ 被 $B$ 除之商爲整函數 $Q$; 在此種情形 $A$ 得爲 $B$ 所整除.

例如,若 $A=x^3+4x^2-2x-5$, $B=x^2+3x-5$, 則 $x^3+4x^2-2x-5=(x+1)(x^2+3x-5)$ 易明.此爲是形式(1)之恆等式, $Q$ 爲 $x+1$.

故 $$\frac{A}{B}=\frac{x^3+4x^2-2x-5}{x^2+3x-5}=x+1.$$

2. 然通常 $B$ 可不爲 $A$ 之因式.則 $A$ 即不得化爲 $QB$ 之形式;但吾人將證明(§401)$A$ 得化爲

$$A\equiv QB+R \tag{2}$$

之形式,其中$Q$及$R$皆爲$x$之整函數,而$R$之次數較$B$低.

於是 $$\frac{A}{B}\equiv Q+\frac{R}{B},$$

卽$A$被$B$除之商爲一整函數,$Q$,與一分式$R/B$之和,分式中分子次數較分母低.

在此種情形,$Q$稱爲商之整式部,$R$爲餘式.

例如,如$A=x^3+2x^2+3x+3$而$B=x^2+2x+2$,則欲化$A$爲(2)之形式,祇須書作
$$x^3+2x^2+3x+3=x(x^2+2x+2)+(x+3)$$
卽可,其中$Q$爲$x$而$R$爲$x+3$,其次數較$B$低.

故 $$\frac{A}{B}=\frac{x^3+2x^2+3x+3}{x^2+2x+2}=x+\frac{x+3}{x^2+2x+2}.$$

**除法變換** 今須說明如何化$A$爲$QB+R$之形式,其中$R$之次數較$B$低或$R$爲0.通常所用之方法,稱爲除法變換或稱"長除法".下例足以說明之. 401

令 $A=2x^4+3x^3+4x^2+x-2$ 而 $B=x^2-x+1$.

$B$之次數爲二,故問題爲求整函數,$Q$,俾由$A$減$QB$所得之餘式$R$,至多爲一次之式或爲0.何則,如能求得此種函數,$Q$,則 $A-QB\equiv R$ 從而 $A\equiv QB+R$.

因$A$之次數爲四而$R$之次數須不大於一,$Q$應爲$A$之前三項必須在減$QB$時消去之式.此點啓示下列求$Q$之法.

$$\begin{array}{rr|l}
A= & 2x^4+3x^3+4x^2+\ x-2 & x^2-\ x+1=B \\
2x^2B= & 2x^4-2x^3+2x^2\qquad\quad & \overline{2x^2+5x+7=Q} \\ \hline
A-2x^2B= & 5x^3+2x^2+\ x-2 & \qquad (1) \\
5xB= & 5x^3-5x^2+5x\quad & \\ \hline
A-(2x^2+5x)B= & 7x^2-4x-2 & \qquad (2) \\
7B= & 7x^2-7x+7 & \\ \hline
A-(2x^2+5x+7)B= & 3x-9=R & \qquad (3)
\end{array}$$

顯而易見凡$B$之倍式與$A$有相同之首項者,由$A$減之皆

能消去其首項.此種倍式中最簡者爲 $2x^2B$,其乘式 $2x^2$ 由以 $B$ 之首項 $x^2$ 除 $A$ 之首項 $2x^4$ 而求得.

由 $A$ 減 $2x^2B$ 如上,得

$$A-2x^2B=5x^3+2x^2+x-2. \tag{1}$$

如此求得之餘式(1)之首項,從而 $A$ 之第二項,可用同法消去.以 $x^2$ 除 $5x^3$,商爲 $5x$;以 $5x$ 乘 $B$ 而由(1)減之,

$$A-(2x^2+5x)B=7x^2-4x-2. \tag{2}$$

最後,以 $x^2$ 除 $7x^2$,商爲 7;以 7 乘 $B$ 而由(2)減之,即可消去餘式(2)之首項,從而消去 $A$ 之第三項.結果爲

$$A-(2x^2+5x+7)B=3x-9. \tag{3}$$

餘式(3)爲一次式,由 $A$ 減 $(2x^2+5x+7)B$ 而得.

故所求之多項式 $Q$ 及 $R$ 爲

$$Q=2x^2+5x+7 \text{ 及 } R=3x-9.$$

因審恆等式(3)爲

$$A=(2x^2+5x+7)B+(3x-9).$$

$A$ 即呈 $QB+R$ 之形式,其中 $R$ 之次數較 $B$ 低.

故得已與 $A, B$ 求 $Q, R$ 之法則如下:

先將 $A$ 及 $B$ 各依 $x$ 之降冪排列.

以 $B$ 之首項除 $A$ 之首項,其商即 $Q$ 之首項.

以 $Q$ 之此首項乘 $B$,由 $A$ 減其積.

用同法處理所得之餘式,以 $B$ 之首項除其首項,餘類推.

仿此進行,至所得之餘式次數較 $B$ 低而止.如是即可盡得 $Q$ 之諸項,而最後之餘式爲 $A-QB$ 即 $R$.

通常將演算排列如上,於是用分離係數法完成之,與乘法

之情形相同.

例一. 已與 $A=2x^5-6x^4+7x^3+8x^2-19x+20$ 及 $B=x^2-3x+4$, 求 $Q$ 及 $R$.

$$
\begin{array}{l|l}
2-6+7+8-19+20 & 1-3+4 \\
\cline{2-2}
2-6+8 & 2+0-1+5 \\
\cline{1-1}
\quad -1+8-19 & \\
\quad -1+3-\ \ 4 & \qquad\qquad \text{故 } Q=2x^3-x+5 \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 5-15+20 & \\
\qquad\quad 5-15+20 & \qquad \text{而 } R=0. \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

應注意者,第一餘式 $-1+8-19+20$ 並不全書出,吾人祇書出在其次之減法中需要之部分 $-1+8-19$; 又 $Q$ 之第二係數爲 0, 因 $A$ 之前二項皆已在第一次減法中消去也.

例二. 已與 $A=x^4+2x^3+3x^2+2x+4$, $B=x^2+2x$, 求 $Q$ 及 $R$.

**關於此法應注意之事**　1. 在除法變換中,各中間餘式皆 402
如新被除式; 又如 $R_1$ 指示任一此種餘式, $Q_1$ 爲 $Q$ 之已得部分,而 $Q_2$ 爲 $Q$ 之其餘部分,則

$$A\equiv Q_1B+R_1 \text{ 而 } R_1\equiv Q_2B+R.$$

2. 求 $Q$ 及 $R$ 之法,本身非爲以 $B$ 除 $A$ 之法,但爲乘法及減法所合成之準備運算,用以化 $A$ 爲 $A\equiv QB+R$ 之形式者,由恆等式 $A\equiv QB+R$ 變爲 $A/B\equiv Q+R/B$ 時, 其間無以 $B$ 除 $A$ 之法存在.

但習慣上常稱求 $Q$ 及 $R$ 之算法爲"除法",且不稱 $Q$ 爲"商之整式部", 而徑稱之爲"商"; 卽在 $R$ 不爲 0 時亦然; 本書從之. 顧如是則"以 $B$ 除 $A$" 非復如 § 254 所云爲求乘 $B$ 可得 $A$ 之式之意, 而爲求 $B$ 之倍式,俾由 $A$ 減之可得次數較 $B$ 低之餘式,并求此餘式若何之意矣. 比較 § 87.

3. 化整式 $A$ 爲 $QB+R$ 形式之各步驟, 不拘 $x$ 之值若何皆可行. 故 $A$ 及 $QB+R$ 對於 $x$ 之一切值其值皆相等, 卽對於能使 $B$ 等於 0 之值亦然. 反之, $A/B$ 及 $Q+R/B$ 當 $B=0$ 時皆無意義.

例如若 $A=x^2+x+1$ 而 $B=x-1$,

則依 § 401, 得 $x^2+x+1=(x+2)(x-1)+3$, (1)

從而 $\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=x+2+\dfrac{3}{x-1}$. (2)

當 $x=1$ 時 $B=0$. 於 (1) 及 (2) 中以 1 代 $x$, 即得 $3=3$ 爲眞, 而 $3/0=3+3/0$ 無意義.

4. $A$ 之化爲 $QB+R$ 形式祇有一種方法,即祇有一組整函數 $Q$ 及 $R$ ($R$ 之次數較 $B$ 低) 存在,能使

$$A\equiv QB+R.$$

何則,如有第二組如此之函數 $Q'$, $R'$ 存在,則

$QB+R\equiv Q'B+R'$ 從而 $(Q-Q')B\equiv R'-R$.

此事不可能,因 $R'-R$ 之次數應較 $B$ 低而 $(Q-Q')B$ 之次數不較 $B$ 低也.

403 **以常數乘被除式或除式之結果** 下列各定理以後須應用.

1. 如以任一常數,如 $c$, 乘被除式,則商及餘式皆爲 $c$ 所乘.

因若 $A\equiv QB+R$, 則 $cA\equiv cQ\cdot B+cR$.

2. 如以 $c$ 乘除式,則商爲 $c$ 所除而餘式不變.

因若 $A\equiv QB+R$, 則 $A\equiv \dfrac{Q}{c}\cdot cB+R$.

3. 如被除式及除式皆以 $c$ 乘之,則餘式爲 $c$ 所乘而商不變.

因若 $A\equiv QB+R$ 則 $cA\equiv Q\cdot cB+cR$.

4. 如在除法變換之任一階段以 $c$ 乘中間餘式或除式,則最後之餘式若變,僅爲 $c$ 所乘而已.

此由於 1 及 2 及 § 402, 1.

此諸定理學者宜就特例驗之.

例如,以 $B=2x-1$ 除 $A=4x^2+6x+1$, 再除以 $2B=4x-2$, 即知第二定理非謬.

$$\begin{array}{r|l} 4+6+1 & 2-1 \\ \cline{2-2} 4-2 & 2+4 \\ \cline{1-1} 8+1 & \\ 8-4 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array} \qquad \therefore\ Q=2x+4,\ R=5.$$

$$\begin{array}{r|l} 4+6+1 & 4-2 \\ \cline{2-2} 4-2 & 1+2 \\ \cline{1-1} 8+1 & \\ 8-4 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array} \qquad \therefore\ Q=x+2,\ R=5.$$

**用待定係數法行除法**　已與$A,B$求$Q,R$之又一法如下: 404

例一. 以 $B=x^2-x+1$ 除 $A=2x^4+3x^3+4x^2+x-2$.

因$A$之次數爲四而$B$之次數爲二,則知$Q$之次數爲二而$R$之次數至多爲一.

故令 $$Q=c_0x^2+c_1x+c_2 \text{ 而 } R=d_0x+d_1.$$

其中係數$c_0, c_1, c_2, d_0, d_1$之值須使

$$\begin{aligned} 2x^4+3x^3+4x^2+x-2 &\equiv (c_0x^2+c_1x+c_2)(x^2-x+1)+d_0x+d_1 \\ &\equiv c_0x^4+\left.\begin{array}{r}-c_0\\+c_1\end{array}\right| x^3+\left.\begin{array}{r}c_0\\-c_1\\+c_2\end{array}\right| x^2+\left.\begin{array}{r}c_1\\-c_2\\+d_0\end{array}\right| x+\left.\begin{array}{r}c_2\\+d_1\end{array}\right| \end{aligned} \tag{1}$$

然欲(1)成恆等式,必須(§ 284)

$$\begin{array}{rlcrlrl} c_0= & 2, & & & & & \\ -c_0+c_1= & 3, & \therefore & c_1= & 3+c_0 & =3+2 & =5. \\ c_0-c_1+c_2= & 4, & \therefore & c_2= & 4-c_0+c_1= & 4-2+5= & 7. \\ c_1-c_2+d_0= & 1, & \therefore & d_0= & 1-c_1+c_2= & 1-5+7= & 3. \\ c_2+d_1= & -2, & \therefore & d_1= & -2-c_2 & =-2-7 & =-9. \end{array}$$

故 $Q=2x^2+5x+7$ 而 $R=3x-9$, 與前同, § 401.

例二. 以 $2x^2+x-2$ 除 $6x^5+13x^4-12x^3-11x^2+11x-2$.

**整除法**　令$A$及$B$指示有文字係數之$x$之多項式,又設 405
$B$之次數爲$m$. 欲$A$能爲$B$所整除,餘式$R$必須恆等於0. 故$R$之諸係數須皆爲0. 因$R$之次數爲$m-1$, $R$有$m$個係數, § 277, 此諸係數皆爲$A$與$B$之係數之函數甚明.故

欲使多項式$A$能爲$m$次之多項式$B$所整除, $A$與$B$之係數必須適合$m$個條件.

下例足以說明此點.

例一. $a$及$b$須有若何之值$x^3+3x^2+bx+2$始能爲$x^2+ax+1$所整除?

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+bx\qquad +2 & x^2+ax+1 \\ \cline{2-2} x^3+ax^2+x & x+(3-a) \\ \cline{1-1} (3-a)x^2+(b-1)x\ \ +2 & \\ (3-a)x^2+(3a-a^2)x+(3-a) & \\ \cline{1-1} \qquad (b-1-3a+a^2)x+(a-1) & \end{array}$$

故 $a$ 及 $b$ 必須適合下二條件.

$$b-1-3a+a^2=0,\qquad a-1=0.$$

解之, $a=1$ 而 $b=3$.

例二. 求定 $l$ 及 $m$ 之值俾 $2x^3+3x^2+lx+m$ 能爲 $x^2+x-6$ 所整除.

406 **依 x 之升冪所排列之被除式及除式** 令 $A$ 及 $B$ 指示依 $x$ 升冪排列之被除式及除式,又設 $A$ 之首項次數不較 $B$ 之首項低,應用 § 401 所述消去首項之法,卽得以 $B$ 表 $A$ 之整式.若 $A$ 能爲 $B$ 所整除,其結果與 $A$ 及 $B$ 依降冪排列時同;然若 $A$ 不能爲所整除,則結果完全不同.以例明之.

$$\begin{array}{r|l} 1+3x+3x^2+x^3 & 1+x \\ \cline{2-2} 1+x\qquad\qquad & 1+2x+x^2 \\ \cline{1-1} 2x+3x^2\qquad & \\ 2x+2x^2\qquad & \\ \cline{1-1} x^2+x^3 & \\ x^2+x^3 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}\qquad(1)\qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1-2x+x^2\qquad & 1+x \\ \cline{2-2} 1+x\qquad\qquad & 1-3x+4x^2 \\ \cline{1-1} -3x+x^2\qquad & \\ -3x-3x^2\qquad & \\ \cline{1-1} 4x^2\qquad & \\ 4x^2+4x^3 & \\ \cline{1-1} -4x^3 & \end{array}\qquad(2)$$

依 § 401 之推理,由上之演算得

$$1+3x+3x^2+x^3=(1+2x+x^2)(1+x)\tag{1}$$

$$1-2x+x^2\qquad=(1-3x+4x^2)(1+x)-4x^3.\tag{2}$$

(1) 與被除式及除式依降冪排列時所得之結果同.在整除之情形此爲必然之事,考 § 402, 4, 可知.

然 (2) 與將 $1-2x+x^2$ 及 $1+x$ 依降冪排列時所得之結果完全不同,後者爲

$$x^2-2x+1=(x-3)(x+1)+4.\tag{3}$$

(2) 及 (3) 皆爲眞恆等式,但用 $x+1$ 表 $x^2-2x+1$ 爲相異之式而已,由此以 $x+1$ 除 $x^2-2x+1$ 之商亦得相異之式如下:

$$\frac{1-2x+x^2}{1+x}=1-3x+4x^2-\frac{4x^3}{1+x},$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x+1}=\quad x-3\quad+\frac{4}{x+1}.$$

407 應注意者,依升冪排列時各餘式首項之次數順次遞增,且除整除之情形外,演算無自然限制.如繼續進行,能得一多項式爲整商其項數之多、次數之高如吾人意之所欲.故

若 $A$ 及 $B$ 指示依 $x$ 升冪排列之多項式，$A$ 不能爲 $B$ 整除，且其首項之次數不較 $B$ 之首項低，則以 $B$ 除 $A$ 之商能化爲

$$\frac{A}{B}=Q'+\frac{R'}{B}$$

之形式，其中 $Q'$ 及 $R'$ 爲依 $x$ 之升冪排列之整函數，$Q'$ 之末項次數之高如吾人意之所欲，而 $R'$ 之首項次數更高.

若 $Q'$ 之項數爲 $n$，則 $Q'$ 稱爲以 $B$ 除 $A$ 至第 $n$ 項之商，而 $R'$ 爲其對應餘式.

$x$ 之值小(如何小，後將示之)時，祇須取 $n$ 甚大卽可使 $R'/B$ 之值小至如吾人意之所欲；卽吾人能求得一多項式 $Q'$，其值與 $A/B$ 之值之差小至如吾人意之所欲. 因之多項式 $Q'$ 亦稱分式 $A/B$ 之近似整式.

譬如，以 $1-x$ 除 1 至第 $n$ 項，卽得

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}.$$

若以絕對値較 1 小之任一値與 $x$，吾人能擇 $n$ 使 $1+x+\cdots\cdots+x^{n-1}$ 與 $1/(1-x)$ 値之差小至如吾人意之所欲. 例如，$x=1/3$，則 $x^3/(1-x)=1/18$，故 $1+x+x^2$ 與 $1/(1-x)$ 之差僅爲 1/18，同理，$1+x+x^2+x^3$ 與 $1/(1-x)$ 之差僅爲 1/54. 餘倣此.

## 用待定係數法求商至第 $n$ 項　以例明之. 408

例一. 求商 $(3-x)/(1-x+2x^2)$ 至第四項.

令
$$\frac{3-x}{1-x+2x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots. \tag{1}$$

以 $1-x+2x^2$ 乘兩端再聚項，得

$$3-x=\begin{array}{l|l|l|l} a_0+a_1 & x+\ a_2 & x^2+\ a_3 & x^3+\cdots\cdots \\ \quad\ -a_0 & \quad -a_1 & \quad -a_2 & \\ & \quad +2a_0 & \quad +2a_1 & \end{array} \tag{2}$$

然欲 (2) 成恆等式，必須 (§284)

$$\begin{aligned}
&a_0=3,\\
&a_1-a_0=-1, &&\therefore\ a_1=-1+a_0=\ \ 2.\\
&a_2-a_1+2a_0=\ \ 0, &&\therefore\ a_2=a_1-2a_0=-4\\
&a_3-a_2+2a_1=\ \ 0, &&\therefore\ a_3=a_2-2a_1=-8.
\end{aligned}$$

故 $(3-x)/(1-x+2x^2)=3+2x-4x^2-8x^3+\cdots\cdots$.

例二. 求 $(2+x+3x^2)/(1+x-x^2)$ 至第五項.

409 **含多變數之多項式** 已與含多變數之兩多項式,$A$ 及 $B$,關於其中一變數若非 $A$ 之次數較 $B$ 低,則 $A$ 有爲 $B$ 所整除之可能,換言之,有一整函數 $Q$ 存在能使 $A/B=Q$ 若先將 $A$ 及 $B$ 作爲其中一變數之多項式而排列,再應用 § 401 之方法,即可發見究竟 $B$ 能整除 $A$ 否,與能整除時 $Q$ 若何.

例一. 以 $x+y+z$ 除 $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

$$\begin{array}{l|l}
x^3-3yz\cdot x+(y^3+z^3), & x+(y+z)\\ \cline{2-2}
\underline{x^3+(y+z)x^2\qquad\qquad} & x^2-(y+z)x+(y^2-yz+z^2)\\
\quad-(y+z)x^2-3yz\cdot x & \\
\quad\underline{-(y+z)x^2-(y+z)^2x} & \\
\qquad\quad(y^2-yz+z^2)x+(y^3+z^3) & \\
\qquad\quad\underline{(y^2-yz+z^2)x+(y^3+z^3)} &
\end{array}$$

故 $(x^3+y^3+z^3-3xyz)/(x+y+z)=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$.

例二. 以 $x+y+4$ 除 $2x^2+5xy+3y^2+7x+11y-4$.

如 $A$ 不能爲 $B$ 所整除,則應用此法之結果,$A/B$ 化爲 $A/B=Q+R/B$ 之形式,其中 $Q$ 及 $R$ 關於排列之文字爲整式,且 $R$ 之次數關於此文字較 $B$ 低.但所得之式之形式,隨所擇排列之文字而異.

例. 以 $2x+y$ 除 $4x^2+6xy+y^2$.

(1) 擇 $x$ 爲排列之文字,得

$$\begin{array}{l|l}
4x^2+6xy+y^2 & 2x+y\\ \cline{2-2}
\underline{4x^2+2xy\qquad} & 2x+2y\\
\quad 4xy+y^2 & \\
\quad\underline{4xy+2y^2} & \\
\qquad\ -y^2 &
\end{array}$$

故 $\dfrac{4x^2+6xy+y^2}{2x+y}=2x+2y-\dfrac{y^2}{2x+y}$.

(二)擇$y$爲排列之文字,得

$$\begin{array}{l|l} y^2+6yx+4x^2 & y+2x \\ \underline{y^2+2yx} & \overline{y+4x} \\ \quad 4yx+4x^2 & \\ \quad \underline{4yx+8x^2} & \\ \qquad -4x^2 & \end{array}$$

故 $\dfrac{y^2+6yx+4x^2}{y+2x}=y+4x-\dfrac{4x^2}{y+2x}.$

## 習 題 XIII

1. 依§401之法并用分離係數法以 $3x^2+x-6$ 除 $6x^4-7x^3-3x^2+24x-20$.

2. 又以 $x^2+2x-7$ 除 $3x^4-2x^3-32x^2+66x-35$.

3. 又以 $x^2-2x+4$ 除 $2x^5-5x^4+13x^3-15x^2+22x$.

4. 又以 $x^3-x+5$ 除 $4x^7-3x^5+19x^4+2x^3+x^2-4x+7$.

5. 用待定係數法(§404)以 $x^2-3x+2$ 除 $2x^3-3x^2+x-5$.

6. 又以 $x^3-3x+2$ 除 $2x^5-3x^4+x^2-5$.

7. 已與 $A=3x^3-5x^2-2x+12$ 及 $B=3x^2+x-5$, 求化 $A$ 爲 $A=QB+R$ 之形式,其中$R$之次數較$B$低,并書出$A/B$之對應式.

8. 求定$a$及$b$之值俾 $x^4+ax^3+x^2+bx+1$ 得爲 $x^2-2x+1$ 所整除.

9. $a$ 及 $b$ 須有若何之值, $(x^4+2x^3+x^2+ax+b)/(x^2+2x+5)$ 始得化爲整式?

10. 以 $x^2+x+1$ 除 $x^6+x^5+x^3+x+1+2(x^4+x^2)$.

11. 以 $x+3y-4$ 除 $2x^2+5xy-y^2-5x+13y-12$.

12. 以 $2a+b-3c$ 除 $2a^2-b^2-6c^2-ab+ac+5bc$.

13. 以 $ab+bc+ca$ 除 $a^2(b+c)+b^2(c+a)-c^2(a+b)+abc$.

14. 以 $x^2-3x+4$ 除 $x^4+(a-3)x^3+(4-a)x^2-2ax+8a$.

15. 用分離係數法以 $2x-3y$ 除 $8x^3-27y^3$.

16. 又以 $x-y$ 除 $x^4-4xy^3+3y^4$.

17. 又以 $2a^2-ab+b^2$ 除 $6a^5+a^4b-a^3b^2+11a^2b^3-5ab^4+4b^5$.

18. 被除式爲 $2x^3+xy^2+y^3$ 而除式爲 $2x+y$, 還定(一)$x$爲排列之文字,(二)$y$爲排列之文字,求$Q$及$R$.

19. 將被除式及除式依$x$之升冪排列,求除至三項之商及餘式,被除式爲 $1-3x+x^2$ 而除式爲 $1+x+3x^2$.

20. 同上但被除式爲 $1+x+3x^2$ 而除式爲 $1-3x+5x^2$.

21. 用待定係數法(§408)求商 $1/(1-2x)$ 至四項.

22. 又求商 $(2+3x+4x^2)/(1-x+2x^2)$ 至四項.

## 綜合除法及餘式定理

410　**綜合除法**(Synthetic division)　今將法除式爲$x-b$形，卽首項係數爲1之一次二項式時，作除法變換(§ 401)之一種極簡便之方法.

以$x-b$除$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$而考其結果.

$$
\begin{array}{l|l}
a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 & x-b \\
\underline{a_0x^3-a_0bx^2} & \overline{a_0x^2+(a_0b+a_1)x+(a_0b^2+a_1b+a_2)} \\
(a_0b+a_1)x^2+a_2x & \\
\underline{(a_0b+a_1)x^2-(a_0b^2+a_1b)x} & \\
\qquad (a_0b^2+a_1b+a_2)x+a_3 & \\
\qquad \underline{(a_0b^2+a_1b+a_2)x-(a_0b^3+a_1b^2+a_2b)} & \\
\qquad\qquad a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=R &
\end{array}
$$

$Q$及$R$之係數如下:

$$a_0,\quad a_0b+a_1,\quad a_0b^2+a_1b+a_2,\quad a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3.$$

應注意者，此諸係數中第一係數卽被除式之首項係數，其餘可用下之法則依次求出:

以$b$乘最近一次求得之係數，再加被除式中其次之未用係數.

例如　$$a_0b^2+a_1b+a_2=(a_0b+a_1)b+a_2,$$

又　$$a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=(a_0b^2+a_1b+a_2)b+a_3.$$

無論被除式之次數若何，上述法則常適用.何則，因除式之首項係數爲1，$Q$中各新係數常與最近一次求得之餘式之首項係數相同也.故此係數亦可由$Q$中前一係數乘$b$再加被除式中一新係數而求得，一如彼係數.同理，若以$b$乘$Q$之末項係數再加被除式之末項係數，卽得$R$.

故當除式呈 $x-b$ 之形式而被除式呈 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots$ 411
$+a_n$ 之形式時,吾人得求 $Q$ 及 $R$ 如下,其中 $c_0, c_1,\cdots\cdots c_{n-1}$ 指示 $Q$ 之係數.

$$\begin{array}{cccccc|l} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & b \\ & c_0b & c_1b & \cdots & c_{n-2}b & c_{n-1}b & \\ \hline c_0 & c_1 & c_2 & & c_{n-1}, & R & \end{array}$$

先將被除式之係數依次書出,書 $b$ 於其右.

書 $c_0$ 於 $a_0$ 之下; $c_0$ 卽 $a_0$, 前已述及.

於是以 $b$ 乘 $c_0$, 書積 $c_0b$ 於 $a_1$ 之下,相加,設得 $c_1$.

仿此,以 $b$ 乘 $c_1$, 書積 $c_1b$ 於 $a_2$ 之下,相加,設得 $c_2$.

仿此進行,每次先乘後加,至諸係數 $a_0, a_1,\cdots\cdots a_n$ 用盡而止.

例. 以 $x-2$ 除 $3x^4-5x^3-4x^2+3x-2$.

$$\begin{array}{ccccc|l} 3 & -5 & -4 & +3 & -2 & 2 \\ & 6 & 2 & -4 & -2 & \\ \hline 3 & 1 & -2 & -1, & -4 & \end{array}$$

故　　$Q=3x^3+x^2-2x-1$ 而 $R=-4$.

此極簡捷之方法稱爲綜合除法.學者宜養成遇除式呈 $x-b$ 之形式時使用此法之習慣.

**關於此法應注意之事項**　1. 如被除式爲不完全多項式,用綜合除法時必須注意以0係數表缺項. 412

2. 因 $x+b=x-(-b)$, 除式呈 $x+b$ 之形式時仍可應用綜合除法,祇須在上述之演算中易 $b$ 爲 $-b$ 可矣.

例一. 以 $x+1$ 除 $x^4-1$.

$x+1=x-(-1)$, 以 $x-(-1)$ 除之,得

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & +0 & +0 & +0 & -1 & -1 \\ & -1 & +1 & -1 & +1 & \\ \hline 1 & -1 & +1 & -1, & 0 & \end{array}$$

故　　$Q=x^3-x^2+x-1$ 而 $R=0$.

3. 除式呈 $\alpha x-\beta$ 之形式時,先書作 $\alpha(x-\beta/\alpha)$.

於是以 $x-\beta/\alpha$ 爲除式行綜合除法,令 $Q$ 及 $R$ 表所得之商及餘式.

則對應於除式 $\alpha x-\beta$ 之商及餘式爲 $Q/\alpha$ 及 $R$, § 403, 2.

例二. 以 $3x-2$ 除 $3x^3-11x^2+18x-3$.

$3x-2=3(x-2/3)$, 以 $x-2/3$ 除之,得

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -11 & +18 & -3 & 2/3 \\ & 2 & -6 & 8 & \\ \hline 3 & -9 & 12, & 5 & \end{array}$$

故所求之商爲 $(3x^2-9x+12)/3$, 即 $x^2-3x+4$ 而餘式爲 5.

例三. 以 $x-3$ 除 $5x^5-x^3+x+2$.

例四. 以 $x+3$ 除 $x^3+6x^2+11x+6$.

例五. 以 $2x-3$ 除 $2x^3-3x^2+8x-12$.

413 **餘式定理** (Remainder theorem) 以 $x-b$ 除 $x$ 之多項式時,所得之餘式與在被除式中以 $b$ 代 $x$ 之結果相等;故若 $f(x)$ 指示被除式,則 $f(b)$ 指示餘式.

此定理 § 410 中已證之矣.何則,因其中曾證明若以 $x-b$ 除 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, 即得餘式 $a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3$. 普徧言之,若以 $x-b$ 除 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$, 則餘式爲 $a_0b^n+a_1b^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$, 即 $f(b)$ 也.

此定理又可證之如下:

若 $f(x)$ 爲被除式, $x-b$ 爲除式, $\phi(x)$ 爲商,而 $R$ 爲餘式,則 (§ 401)

$$f(x)=\phi(x)(x-b)+R.$$

因 $R$ 之次數較 $x-b$ 低,而不含 $x$, 故無論 $x$ 之值若何,其值常相同.

此恆等式無論 $x$ 之值若何,兩端之值常相等.特例,當 $x=b$ 時兩端之值相等.故

$$f(b)=\phi(b)(b-b)+R.$$

然 $b-b=0$; 又因 $\phi(x)$ 爲整式 $\phi(b)$ 爲有窮值.

故 $\phi(b)(b-b)=0$, 從而 $f(b)=R$.

414 下例不僅說明餘式定理之眞實性而已,并示 $b$ 及 $f(x)$ 之係

數爲已與之數時,計算 $f(b)$ 之値最簡便之方法,常用綜合除法以 $x-b$ 除 $f(x)$,——所得之餘式,即 $f(b)$.

例一. 當 $x=4$ 時, $f(x)=5x^4-12x^3-20x^2-43x+6$ 之値若何?

1. 用直接代換法得

$$f(4)=5\cdot4^4-12\cdot4^3-20\cdot4^2-43\cdot4+6=1280-768-320-172+6=26.$$

2. 用綜合除法得

$$\begin{array}{rrrrrl} 5 & -12 & -20 & -43 & +6 & \underline{|4} \\ & 20 & 32 & 48 & 20 & \\ \hline 5 & 8 & 12 & 5 & 26 & =f(4) \end{array}$$

例二. 已與 $f(x)=3x^4-x^3+5x^2-8x+4$. 用綜合除法求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(4)$, $f(-2/3)$.

系一　若 $f(x)$ 當 $x=b$ 時爲 0, 則 $f(x)$ 得爲 $x-b$ 所整除;其逆亦眞. 415

依 §413, 因 $f(b)$ 爲以 $x-b$ 除 $f(x)$ 時之餘式,而餘式爲 0 時即爲整除故也.

例如. $f(x)=x^3-3x^2+2$ 當 $x=1$ 時爲 0 因 $f(1)=1-3+2=0$.

故 $f(x)$ 得爲 $x-1$ 所整除,可實行除算以驗之.

又 $f(x)=x^n-b^n$ 得爲 $x-b$ 所整除, 因 $f(b)=b^n-b^n=0$.

例一. 若 $x^3+3x^2-m$ 得爲 $x-2$ 所整除,則 $m$ 之値若何?

$$2^3+3\cdot2^2-m=0 \quad 即 \quad m=20.$$

例二. 試證若 $n$ 爲奇數, $x^n+b^n$ 得爲 $x+b$ 所整除,若 $n$ 爲偶數則否.

系二　若二或多變數之整函數當其中二變數,如 $x$ 及 $y$, 假定相等時爲 0, 此函數得爲此二變數之差,如 $x-y$, 所整除. 416

因此函數得化爲 $x$ 之多項式之形式,而其係數含他變數者.依假設,此多項式當 $x=y$ 時爲 0. 故得爲 $x-y$ 所整除, §415.

例如, $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ 當 $x=y$ 時爲 0; 因以 $y$ 代 $x$, 可得 $y^2(y-z)+y^2(z-y)+z^2(y-y)=0$.

故 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ 得爲 $x-y$ 所整除.

今可實行除算以驗之如下:

$$\begin{array}{l|l}
(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+(y^2z-z^2y) & x-y \\
\underline{(y-z)x^2-(y^2-yz)x} & \overline{(y-z)x-(yz-z^2)} \\
\quad -(yz-z^2)x+(y^2z-z^2y) & \\
\quad \underline{-(yz-z^2)x+(y^2z-z^2y)} &
\end{array}$$

例. 試證 $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ 得爲 $x-y$, $y-z$ 及 $z-x$ 所整除.

417 **定理** 若多項式 $f(x)$ 當 $x=a$ 時爲 0, 當 $x=b$ 時亦然, 則 $f(x)$ 得爲 $(x-a)(x-b)$ 所整除.

何則, 因依假設 $f(a)=0$, $f(x)$ 得爲 $x-a$ 所整除, § 415, 若命其商爲 $\phi_1(x)$, 則

$$f(x)\equiv(x-a)\phi_1(x), \text{ 其中 } \phi_1(x) \text{ 爲整式.} \tag{1}$$

若於 (1) 中置 $x=b$, 得

$$f(b)=(b-a)\phi_1(b). \tag{2}$$

然依假設 $f(b)=0$, 而 $b-a\neq0$.

因積爲 0 時其因數之一必爲 0, § 253, 故由 (2) 得 $\phi_1(b)=0$.

然若 $\phi_1(b)=0$, 則 $\phi_1(x)$ 得爲 $x-b$ 所整除, § 415, 若命其商爲 $\phi_2(x)$, 則

$$\phi_1(x)\equiv(x-b)\phi_2(x), \text{ 其中 } \phi_2(x) \text{ 爲整式.} \tag{3}$$

在 (1) 中, 以此式代 $\phi_1(x)$, 即得

$$f(x)\equiv(x-a)(x-b)\cdot\phi_2(x), \tag{4}$$

而 $f(x)$ 得爲 $(x-a)(x-b)$ 所整除證實.

仿此進行得證下之普徧定理:

418 若 $f(x)$ 當 $x=a, b, c, \cdots\cdots$ 時爲 0, 則 $f(x)$ 得爲 $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots$ 所整除.

例如, $2x^3+3x^2-2x-3$ 當 $x=1$ 時爲 0, 因 $2+3-2-3=0$, 當 $x=-1$ 時亦然, 因 $-2+3+2-3=0$.

故 $2x^3+3x^2-2x-3$ 得爲 $(x-1)(x+1)$, 即 $x^2-1$, 所整除, 可實除以驗之.

例一. 求一二次多項式 $f(x)$, 當 $x=2$ 及 $x=3$ 時其値爲 0, $x=4$ 時其値爲 6

因 $f(x)$ 爲二次式且得爲 $(x-2)(x-3)$ 所整除, § 417, 故可以 $f(x)=a_0(x-2)\times(x-3)$ 之形式表之. 其中 $a_0$ 指示常數.

又因 $f(4)=6$, 得 $6=a_0(4-2)(4-3)$, 從而 $a_0=3$.

故 $f(x)=3(x-2)(x-3)=3x^2-15x+18$.

例二. 求一三次多項式 $f(x)$, 當 $x=2$ 及 $x=3$ 時其值爲 0, $x=1$ 時其值爲 6, $x=4$ 時其值爲 18.

仿上得 $f(x)=(a_0x+a_1)(x-2)(x-3)$, 其中 $a_0, a_1$ 爲常數.

又因 $f(1)=6$, 及 $f(4)=18$, 故得

$$6=(a_0+a_1)(1-2)(1-3), \qquad \text{卽} \quad a_0+a_1=3, \tag{1}$$

$$18=(4a_0+a_1)(4-2)(4-3), \qquad \text{卽} \quad 4a_0+a_1=9, \tag{2}$$

解 (1), (2) 得 $a_0=2$, $a_1=1$.

故 $f(x)=(2x+1)(x-2)(x-3)=2x^3-9x^2+7x+6$.

**定理**　使 $n$ 次多項式 $f(x)$ 爲 0 之 $x$ 值, 不能多於 $n$ 個.　419

何則, 若使 $f(x)$ 爲 0 之 $x$ 值, 能多於 $n$ 個, 則 $x-a$ 形之因式, 個數多於 $n$ 者之積須能整除之, § 418. 此事明知其不可能, 以積之次數超過 $n$ 也.

**定理**　若知次數不能超過 $n$ 之某多項式 $f(x)$, 使其爲 0 之 $x$ 值能多於 $n$ 個, 卽可斷言其係數盡爲 0.　420

因係數若不盡爲 0, 則使多項式爲 0 之 $x$ 值不能多於 $n$ 個也, § 419.

如此之多項式吾人稱之爲恆等於 0.

**定理**　若兩個 $n$ 次多項式, $f(x)$ 及 $\phi(x)$, 在 $x$ 值多於 $n$ 個時其值相等, 則其對應係數相等.　421

何則, 令　$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$

及　$\phi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n$;

又令　$\psi(x)=f(x)-\phi(x)$

$$=(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots\cdots+(a_n-b_n).$$

則 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 有同值時 $\psi(x)$ 爲 0，而依假設 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 在 $x$ 值多於 $n$ 個時有同值.

故多項式 $\psi(x)=(a_0-b_0)x^n+\cdots\cdots+(a_n-b_n)$，次數不超過 $n$，而在 $x$ 值多於 $n$ 個時爲 0，則其係數盡爲 0，§ 420.

故 $$a_0-b_0=0,\quad a_1-b_1=0,\ \cdots\cdots,\quad a_n-b_n=0,$$

從而 $$a_0=b_0,\qquad a_1=b_1,\cdots\cdots,\qquad a_n=b_n,$$

即 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之對應係數相等.

例如，若 $f(x)=2x^2+bx+5$ 及 $\phi(x)=ax^2+3x+c$ 當 $x=2,\ 4,\ 6$ 時有同值，則必 $a=2,\ b=3$，及 $c=5$.

## 習 題 XIV

1. 用綜合除法以 $x-4$ 除 $x^4-3x^3-x^2-11x-4$.
2. 又以 $x-3$ 除 $5x^5-6x^4-8x^3+7x^2+6x+3$.
3. 又以 $x+2$ 除 $3x^4+x^2-1$.
4. 又以 $3x+1$ 除 $3x^3+16x^2-13x-6$.
5. 又以 $3x-1$ 除 $3x^3-6x^2+x+2$.
6. 又以 $x-a$ 除 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$.
7. 又以 $x-2y$ 除 $2x^4-x^3y-7x^2y^2+7xy^3-10y^4$.
8. 已與 $f(x)=2x^3-5x+3$. 用 § 414 之法，求
$$f(1),\ f(2),\ f(5),\ f(-1),\ f(-3),\ f(-6).$$
9. 應用餘式定理，試定 $m$ 俾 $x^3+mx^2-20x+6$ 得爲 $x-3$ 所整除.
10. 同上，試定 $l$ 及 $m$ 俾 $2x^3-x^2+lx+m$ 得爲 $(x+2)(x-4)$ 所整除.
11. 應用 § 416，證明 $3bm+am-2an-6bn$ 得爲 $m-2n$ 及 $a+3b$ 所整除.
12. 由 §§ 416, 417 證明 $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ 得爲 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 所整除.
13. 求 $x$ 之三次整函數，當 $x=1,\ 4,\ -2$ 時其值爲 0，$x=2$ 時其值爲 $-16$.
14. 求 $x$ 之三次整函數，當 $x=2,\ 3$ 時其值爲 0，$x=0$ 時其值爲 6，$x=1$ 時其值爲 12.
15. 試證 $2x^3-ax+1$ 及 $x^3+5x+2$ 對於四個 $x$ 值不能有相等之值.

## 以一多項式表又一多項式法

令$A$及$B$指示$x$之兩多項式,$A$之次數較$B$高. 422

以$B$除$A$,命其商爲$Q$,餘式爲$R$;則

$$A \equiv QB+R. \tag{1}$$

若$Q$之次數不較$B$低,以$B$除$Q$,命其商爲$Q_1$,餘式爲$R_1$;則

$$Q \equiv Q_1B+R_1. \tag{2}$$

仿此,若$Q_1$之次數不較$B$低,以$B$除$Q_1$,命其商爲$Q_2$,餘式爲$R_2$;則

$$Q_1 \equiv Q_2B+R_2. \tag{3}$$

假定$Q_2$之次數較$B$低.即得

$$\begin{aligned} A &\equiv QB+R & \text{依 (1)}\\ &\equiv \{Q_1B+R_1\}B+R & \text{依 (2)}\\ &\equiv \{(Q_2B+R_2)B+R_1\}B+R & \text{依 (3)}\\ &\equiv Q_2B^3+R_2B^2+R_1B+R, \end{aligned}$$

其中諸係數$Q_2, R_2, R_1, R$次數皆較$B$低.

普徧言之,若任一多項式$A$次數較$B$高時,依上法進行,至所得之商次數較$B$低而止,即得

$$A \equiv Q_{r-1}B^r+R_{r-1}B^{r-1}+\cdots\cdots+R_1B+R,$$

其中$R, R_1, \cdots\cdots, R_{r-1}, Q_{r-1}$指示各次餘式及最後之商,其次數皆較$B$低.

例. 將$x^5-4x^4+3x^3-x^2+x+4$化爲$x^2+x+1$之多項式之形式,并令其係數之次數皆低於二次.

用分離係數法,可將演算排列如下:

```
1-4+3-1+1+4 | 1+1+1
1+1+1       |---------------
----------- | 1-5+7-3 | 1+1+1
 -5+2-1     | 1+1+1   |------
 -5-5-5     | ------- | 1-6        ∴ Q₁=x-6
 ---------  |  -6+6-3
     7+4+1  |  -6-6-6
     7+7+7  |  -------
     -----  |    12+3   ∴ R₁=12x+3
     -3-6+4
     -3-3-3
     ------
       -3+7   ∴ R=-3x+7.
```

故 $x^5-4x^4+3x^3-x^2+x+4$

$$=(x-6)(x^2+x+1)^2+(12x+3)(x^2+x+1)-(3x-7).$$

423　特例，吾人得用此法變換 $x$ 之任意多項式為 $x-b$ 之多項式，而令其次數與原式同，且係數為常數。

例．變換 $2x^3-x^2+4x-5$ 為 $x-2$ 之多項式．

各次除法可用綜合除法行之，而將演算排列如下：

```
2   - 1   + 4   - 5  |2
      4     6    20
---------------------
2   + 3   +10,   15        ∴ R=15.
      4    14
---------------
2   + 7,   24              ∴ R₁=24
      4
---------
2,   11                    ∴ R₂=11 及 Q₂=2.
```

故 $2x^3-x^2+4x-5=2(x-2)^3+11(x-2)^2+24(x-2)+15.$

## 習　題　XV

1. 用 § 422 之法以 $x^2+1$ 表 $x^4+x^3-1$.
2. 又以 $2x^2+1$ 表 $4x^4+2x^3+4x^2+x+6$.
3. 又以 $x^3-x^2+x+3$ 表 $2x^7-3x^6+2x^5+5x^4-x^2+6$.
4. 又以 $x^2+xy+y^2$ 表 $x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5$.
5. 用 § 423 之法以 $x-3$ 表 $2x^3-8x^2+x+6$.
6. 又以 $x+2$ 表 $x^5+3x^4-6x^3+2x^2-3x+7$.
7. 又以 $x+3$ 表 $x^3+9x^2+27x$.
8. 又以 $x+1$ 表 $x^3+3x^2+x-1$.

# VI. 有理整式之因式

## 發端

**因式** 令 $A$ 指示一或多變數之有理整函數.此諸變數之有理整函數,凡能整除 $A$ 者,皆稱爲 $A$ 之因式. 424

故欲一與函數,$F$,得爲 $A$ 之因式,祇須且必須

1. 關於以 $A$ 爲函數之變數 $F$ 爲有理整式.

2. $A$ 得化爲 $A\equiv GF$ 之形式,其中 $G$ 亦爲整式.

例一. 因 $2x^2-2xy=2x(x-y)$. $x$ 及 $x-y$ 皆爲 $2x^2-2xy$ 之因式.

例二. 因 $3x^2-2y^2=(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y)(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)$. $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y$ 及 $\sqrt{3}x-\sqrt{2}y$ 皆爲 $3x^2-2y^2$ 之因式.

例三. 雖 $x-y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$,吾人不稱 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 及 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 爲 $x-y$ 之因式,因二者皆非關於 $x$ 及 $y$ 之有理式也.

注意一. 因式之係數不須爲整數或有理數.反之得爲任何種類之數或式.例二中之因式,係數爲無理數. 425

以故,因 $x^2-y=(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$,式 $x^2-y$ 視作 $x$ 及 $y$ 二者之函數時,不能分解因式,而視作 $x$ 單獨之函數時,則有因式 $x+\sqrt{y}$ 及 $x-\sqrt{y}$.其他含多文字之式亦如此.

注意二. 除專從事於整係數函數之時外,"數字因式"如例一中之2,習慣上不以爲所與整函數,$A$,之因式之列,蓋因此函數之係數若不須爲整數,則任何數字(或常數)得稱爲能整除 $A$ 故也. 426

同理,若 $F$ 爲 $A$ 之因式,而 $c$ 爲任一常數(不等0),則 $cF$ 亦爲 $A$ 之因式;然吾人認此二因式爲實質上相同,而在 $A$ 之因式之中祇列其一.

例如,於例一,若稱 $2x$ 及 $x-y$ 或 $-2x$ 及 $y-x$ 爲因式,均無不可也.

**定理** 若 $F$ 爲 $B$ 之因式,而 $B$ 爲 $A$ 之因式,則 $F$ 爲 $A$ 之因式. 427

何則,依 § 424, $A$ 及 $B$ 得化爲

$$A\equiv GB \text{ 及 } B\equiv HF$$

之形式,其中 $G$ 及 $H$ 爲整式.

故 $$A\equiv G\cdot HF\equiv GH\cdot F,$$

即 $F$ 爲 $A$ 之因式, §424.

428 質函數,複函數 整函數除自身(或常數)外別無他因式者,謂之質函數(prime). 若有他因式,則稱複函數(Composite).

例如, $x+y^2$ 及 $x-2y$ 爲質函數, 而 $x^2-y^2$ 爲複函數.

429 $n$ 次之複函數, $A$, 爲不較二少,不較 $n$ 多之質函數, $B, C, \cdots\cdots$ 之積. 此諸質函數,稱爲 $A$ 之質因式(prime factors).

430 以後假定

1. 任與之函數 $A$ 祇有一組質因式.
2. $A$ 之其他因式皆爲此諸質因式之積.
3. 此諸質因式中得有二式或多式相等,然以相異質因式乘冪之積表 $A$, 其法唯限於一.

2及3爲1之系. §§ 424, 485 中將就 $A$ 爲單一變數函數之情形證明此諸定理, 然此諸定理得普徧證明之.

例如,因 $x^3y^3-2x^2y^4=xxyyy(x-2y)$, $x^3y^3-2x^2y^4$ 之質因式爲 $x, x, y, y, y, x-2y$. 其他因式如 $x^2, xy$ 等則爲此諸質因式中二式或多式之積. 相異質因式爲 $x, y, x-2y$, 而以此諸因式乘冪之積表原式, 其法唯限於一, 即 $x^2y^3(x-2y)$.

431 因式分解 所謂將與函數, $A$, 完全分解爲因式者,即"將 $A$ 分解之爲其質因式"之意,亦即化之爲 $A\equiv B\cdot C\cdot D\cdots\cdots$ 之形式之意,而 $B, C, D\cdots\cdots$ 指示質函數.

但通常吾人開始並不逕求此諸質因式,乃先將 $A$ 化爲兩因式,如 $F$ 及 $G$, 之積, 次將 $F$ 及 $G$ 再各化爲兩因式之積, 如此進行,至達到質因式而止. 而此法之第一步,即得稱爲 $A$ 之"因式分解".

因式分解爲乘法之逆. 乘法通常由兩主要步驟而成: (1) 分配律之累應用, 如 $(a+b)c$ 之代以 $ac+bc$, 等等; (2) 所得結果中同類項之合併. 欲逆行

此程序須(1)將所合併之各項分離——此即因式分解困難所在——(2)再應用分配律,如 $ac+bc$ 之代以 $(a+b)c$,等等.

如謂凡整函數實際皆得分解為因式則大誤.例如,$x^5+ax^3+bx^2+cx+d$ 為整函數,可以證明,而其因式不能用代數方法(即運用各種代數算法而次數有限時)求出,亦可證明也.

## 各項有公因式之式

式之各項具單項或多項之公因式者,祇須應用分配律 432

$$ab+ac+ad+\cdots\cdots=a(b+c+d+\cdots\cdots),$$

即可分解為因式.

例一. 分解 $2a^2c+2abc+4ac^2-6acd$ 之因式.

各項皆有因式 $2ac$,"析出"後即得

$$2a^2c+2abc+4ac^2-6acd=2ac(a+b+2c-3d).$$

例二. 分解 $a(c-d)+b(d-c)$ 之因式.

兩項各有因式 $c-d$. 析出後即得

$$a(c-d)+b(d-c)=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d).$$

若是之因式應首先析出.

亦有本非此種形式,而將式中有公因式之項合併後,得化成之者. 433

例一. 分解 $ac+bd+ad+bc$ 之因式.

將 $ac$ 與 $ad$ 合併,又 $bc$ 與 $bd$ 合併,得 $a(c+d)+b(c+d)$,為二項式,其各項有公因式 $c+d$.

故 $$ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d).$$

應注意者,用此法析原式為若干部分時,各部分必須有相同之項數.

例二. 分解 $a^2+ab-bd-ad+ac-cd$ 之因式.

原式唯有分為兩個三項之羣或三個二項之羣. 式中 $a^2$, $ab$, $-ad$, $ac$ 四項含 $a$,餘二項,即 $-bd$ 及 $-cd$,含 $d$. 故欲得有相同項數之羣,祇須將 $-ad$ 歸入含 $d$ 之項中,即得

$$a^2+ab+ac-ad-bd-cd=a(a+b+c)-d(a+b+c)=(a-d)(a+b+c).$$

## 習 題 XVI

分解下列各式之因式.

1. $6x^4y^3z^2-12x^3y^4z+8x^2y^2$.
2. $2n^2+(n-3)n$.
3. $ab-a+b-1$.
4. $mx-nx-mn+n^2$.
5. $3xy-2x-12y+8$.
6. $10xy+5y^2+6x+3y$.
7. $x^3y^2-x^2y^3+2x^2y-2xy^2$.
8. $x^4+x^3+x^2+x$.
9. $ac+bd-(bc+ad)$.
10. $a^2c-abd-abc+a^2d$.
11. $ad+ce+bd+ae+cd+be$.
12. $a^2+cd-ab-bd+ac+ad$.

## 藉助於已知恆等式以分解因式

434 在第二章中曾求出若干特別積如 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 等. 若與函數, $A$, 得化作此種積之一之形式時, 其因式可立即書出. 以下各節專論如此分解因式之法.

435 完全三項平方式 (Perfect trinomial squares). 呈 $a^2\pm 2ab+b^2$ 形式之一之式, 謂之完全三項平方式. 如是之式得按下列公式分解之:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2.$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)=(a-b)^2.$$

應注意者, 完全三項平方式(適當排列後)中, 中項為首末二項平方根相乘積之二倍, 而其相等之因式, 可由首末二項之主平方根, 以中項之號聯結而得.

求完全平方式之平方根, 即求相等因式之一之意.

例一. 分解 $9x^2-12xy+4y^2$ 之因式.

此為完全平方式, 因 $12xy=2\sqrt{9x^2}\cdot\sqrt{4y^2}$.

又因 $\sqrt{9x^2}=3x$, $\sqrt{4y^2}=2y$, 而中項之號為$-$, 得

$$9x^2-12xy+4y^2=(3x-2y)(3x-2y)=(3x-2y)^2.$$

例二. 分解 $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ 之因式.

此式聚項如下,即得化爲三項平方式之形式.

$$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=(a+b+c)^2.$$

例三. 分解下列各式之因式.

1. $x^2+14x+49$.
2. $9-6a+a^2$.
3. $9x^2y^2+30xy+25$.
4. $x^2-4xy+4y^2+6x-12y+9$.
5. $64a^8-48a^4+9$.
6. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.

**二平方之差** 呈此種形式,或得化爲此種形式之式,可按下之公式分解因式. 436

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

例如,
$$x^2-y^2-z^2+2yz=x^2-(y^2-2yz+z^2)=x^2-(y-z)^2$$
$$=(x+y-z)(x-y+z).$$

化三項式爲此種形式,最有用之方法,係將適當之量加於式中之一項俾成完全平方式,再從此式減去所加之量.

例如,
$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy).$$

例. 分解下列各式之因式.

1. $x^4-y^6$.
2. $6a^3-6ab^2$.
3. $12a^3x^3-75axy^2$.
4. $25x^{2n}-49x^{2m}$.
5. $36x^4-1$.
6. $x^4-3x^2y^2-y^4$.

**二平方之和** 利用虛數單位 $i=\sqrt{-1}$, §§ 218, 220, 平方之和 $a^2+b^2$ 得化作平方之差之形式,而依 § 436 分解因式,所得者爲虛因式. 437

何則,因 $i^2=-1$, 故得 $b^2=-(-b^2)=-(ib)^2$.

故 $$a^2+b^2=a^2-(ib)^2=(a+ib)(a-ib).$$

$i$ 遵從一切通常之運算法則,吾人已於 §§ 219, 220 知之.故用 $i$ 時祇須記憶 $i^2=-1$ 可矣.

**任二同次乘冪之和及差** §§ 308, 309, 310 中,已證明: 438

其一. 無論 $n$ 為奇或偶,

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).\qquad(1)$$

其二. $n$ 為偶數時,

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1});\qquad(2)$$

其三. $n$ 為奇數時,

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}).\qquad(3)$$

故得下之定理:

1. $a^n-b^n$ 常得為 $a-b$ 所整除.
2. $a^n-b^n$ 在 $n$ 為偶數時得為 $a+b$ 所整除.
3. $a^n+b^n$ 在 $n$ 為奇數時得為 $a+b$ 所整除.
4. 在各種情形,其商皆由

$$a^{n-1}\qquad a^{n-2}b\qquad\cdots\cdots\qquad ab^{n-2}\qquad b^{n-1}$$

諸項組成,除式為 $a-b$ 時,皆以 $+$ 號聯結之,除式為 $a+b$ 時,以交錯之 $-$ 及 $+$ 連結之.

例如, 1. $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

2. $x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$.

3. 
$$\begin{aligned}8a^3+27b^3c^3&=(2a)^3+(3bc)^3\\&=(2a+3bc)[(2a)^2-(2a)(3bc)+(3bc)^2]\\&=(2a+3bc)(4a^2-6abc+9b^2c^2).\end{aligned}$$

例. 分解下列各式之因式.

1. $64x^3-125y^3$.　　2. $27x^3+1$.　　3. $16x^4-81y^4$.

439 **$n$ 為複函數時** 下之定理可直接由 §438, (1), (2), (3) 及 §436 得出.

1. 如 $n$ 為任一整數, $p$, 之倍數,則 $a^n-b^n$ 得為 $a^p-b^p$ 所整除.

例如,
$$\begin{aligned}x^6-y^6&=(x^2)^3-(y^2)^3\\&=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4).\end{aligned}$$

2. 若$n$爲任一整數$p$之偶倍數,則$a^n-b^n$得爲$a^p+b^p$所整除.

例如, $$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3).$$

3. 若$n$爲任一整數,$p$,之奇倍數,不論$n$自身爲奇或偶,$a^n+b^n$得爲$a^p+b^p$所整除,

例如, $$x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4).$$

4. 若$n$爲2之乘冪,則累用§436中所述之方法,$a^n+b^n$得分解爲二次之因式.

例如, $$x^8+y^8=x^8+2x^4y^4+y^8-2x^4y^4=(x^4+y^4)^2-2x^4y^4$$
$$=(x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2)(x^4+y^4-\sqrt{2}x^2y^2).$$

又, $$x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2=x^4+2x^2y^2+y^4-(2-\sqrt{2})x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-(2-\sqrt{2})x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}xy)(x^2+y^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}xy),$$

餘仿此.

因依§444,此諸"二次"因式各得分解爲兩個一次(虛)因式,當$n$爲2之乘冪時,$a^n+b^n$常得完全分解爲因式.

當$n$爲複函數時,最好先將$a^n+b^n$或$a^n-b^n$分解爲次數相近之兩因式,則所得因式中至少有一因式尙得分解爲因式.

例如,分解$x^6-y^6$之因式,當推2法所述爲最善.繼續進行,卽得
$$x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

例. 分解下列各式之因式.

1. $x^4+y^4$. 2. $x^8-y^8$. 3. $x^9+y^9$.

呈$a^m\pm b^n$形式之式,當$m$及$n$爲同一整數$p$之倍數時,亦適用§§438,439之定理. 440

例如, $$x^6-y^{15}=(x^2)^3-(y^5)^3=(x^2-y^5)(x^4+x^2y^5+y^{10}).$$

## 習　題 XVII

下列各題分解因式,須竭盡可能,但不得引入無理數或虛係數.

1. $4x^3y-20x^2y^2+25xy^3$.　　2. $28tx^2-63ty^2$.

3. $x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx$.

4. $(7a^2+2b^2)^2-(2a^2+7b^2)^2$.

5. $(7x^2+4x-3)^2-(x^2+4x+3)^2$.　　6. $4(1-b^2-ab)-a^2$.

7. $x^4+x^2+1$.　　8. $a^4-6a^2b^2+b^4$.

9. $a^4+4a^2+16$.　　10. $9x^4+15x^2y^2+16y^4$.

11. $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$.

12. $576x^6y^3-9y^{15}$.　　13. $x^9-y^9$.　　14. $x^{12}-y^{12}$.

15. $x^{10}+y^{10}$.　　16. $x^5-32$.　　17. $x^7+y^{14}$.

## 聚項以求因式

441　有時$x$之多項式之各項,可類聚為若干羣,各含公因式,如$F$,則此公因式$F$為全式之一因式.比較§433.

例一.　分解$x^3+3x^2-2x-6$之因式.

注意末二係數為首二係數之等倍數,即得

$$x^3+3x^2-2x-6=x^2(x+3)-2(x+3)$$
$$=(x^2-2)(x+3)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3).$$

例二.　分解$x^3+2x^2+2x+1$之因式.

聚有同係數之項,得

$$x^3+2x^2+2x+1=x^3+1+2x(x+1)$$
$$=(x^2-x+1)(x+1)+2x(x+1)$$
$$=(x^2-x+1+2x)(x+1)=(x^2+x+1)(x+1).$$

有時先將與項之一析為兩項,即可適用上述之方法.

例三.　分解$x^3+4x^2+5x+6$之因式.

$$x^3+4x^2+5x+6=x^3+3x^2+x^2+3x+2x+6$$
$$=x^2(x+3)+x(x+3)+2(x+3)$$
$$=(x^2+x+2)(x+3).$$

更取下例考之.

例四. 分解 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ 之因式.

$$x^4+2x^3+3x^2+2x+1=x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1$$
$$=(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1=(x^2+x+1)^2.$$

## 習 題 XVIII

分解下列各式之因式.

1. $x^4-x^3+x-1.$
2. $x^4-x^3-8x^2+8.$
3. $x^4-2x^3+2x-1.$
4. $x^3-7x^2-4x+28.$
5. $x^6-x^4y^2-x^2y^4+y^6.$
6. $x^3+2x^2+3x+2.$
7. $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1.$
8. $x^4+4x^3+10x^2+12x+9.$

## 二次式之因式分解

用觀察法分解二次式 $x^2+px+q$ 之因式 當 $p$ 及 $q$ 爲整數時,此事有時可能. 442

因 $$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$$
若能求出二數, $a$ 及 $b$, 俾 $a+b=p$ 而 $ab=q$, 卽可知 $x^2+px+q$ 之因式.

如此之二數常存在, § 444, 但不常爲有理數耳. 然當其爲有理數時則爲整數, § 454, 且得用觀察法求出,如下例所示.

例一. 分解 $x^2+13x+42$ 之因式.

先求二整數, $a$ 及 $b$, 須積爲 42 而和爲 13. 因 $ab$ 及 $a+b$ 皆爲正數, $a$ 及 $b$ 皆應爲正數. 在積爲 42 之正整數中, 卽 42 及 1, 21 及 2, 14 及 3, 7 及 6 中, 求其和爲 13 者, 得 7 及 6.

故 $$x^2+13x+42=(x+7)(x+6).$$

例二. 分解 $x^2-13x+22$ 之因式.

$a$ 及 $b$ 應皆爲負數,以其積正而其和負故也. 同上在積爲 22 之負整數中求之,得 $-11$ 及 $-2$; 因 $-11-2=-13$ 也.

故 $$x^2-13x+22=(x-11)(x-2).$$

例三．分解 $x^2-9x-22$ 之因式．

因 $ab$ 爲負數，$a$ 及 $b$ 應異號；又因 $a+b$ 爲負數，其絕對值大者應負．認 $-22=-22\times1=-11\times2$，仿上求得 $a=-11$ 而 $b=2$，因 $-11+2=-9$ 也．

故
$$x^2-9x-22=(x-11)(x+2).$$

例四．分解下列各式之因式．

1. $x^2+3x+2$.　　2. $x^2-16x+15$.　　3. $x^2-4x-12$.

4. $x^2+x-30$.　　5. $x^2+20x+96$.　　6. $x^2-21x+80$.

**443　用觀察法分解二次式 $ax^2+bx+c$ 之因式**　當 $a, b,$ 及 $c$ 爲整數時，此事有時可能．

以 $a$ 先乘再除，可將 $ax^2+bx+c$ 化作 $[(ax)^2+b(ax)+ac]/a$ 之形式．然後用上述之方法，即先求二整數，俾積爲 $ac$ 而和爲 $b$ 之法，就 $ax$ 分解括號中之式之因式．

例一．分解 $2x^2+7x+3$ 之因式．

$$2x^2+7x+3=\frac{(2x)^2+7(2x)+6}{2}$$
$$=\frac{(2x+6)(2x+1)}{2}=(x+3)(2x+1).$$

例二．分解 $abx^2+(a^2+b^2)x+ab$ 之因式．

$$abx^2+(a^2+b^2)x+ab=\frac{(abx)^2+(a^2+b^2)abx+a^2b^2}{ab}$$
$$=\frac{(abx+a^2)(abx+b^2)}{ab}=(bx+a)(ax+b).$$

例三．分解 $16x^2+72x-63$ 之因式．

在此情形無以16先乘再除之必要，因

$$16x^2+72x-63=(4x)^2+18(4x)-63=(4x+21)(4x-3).$$

例四．分解下列各式之因式．

1. $6x^2-13x+6$.　　2. $5x^2+14x-3$.

3. $14x^2+x-3$.　　4. $18x^2+21x+5$.

5. $49x^2+105x+44$.　　6. $abx^2-(ac-b^2)x-bc$.

**444　用配平方法分解二次式 $x^2+px+q$ 或 $ax^2+bx+c$ 之因式**

上述之方法僅能適用於特例，下法則完全普徧適用．

因 $$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

欲使 $x^2+px$ 成爲完全平方,祇須加以 $\frac{p^2}{4}$, 即 $x$ 係數之半之平方可矣.

此法名曰爲 $x^2+px$ 配平方.

1. 若吾人以 $\frac{p^2}{4}$ 先加後減,得不影響 $x^2+px+q$ 之值.而如此則原式得變爲二平方之差之形式,可依 §436 分解之.即

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right) \quad (1)$$

2. 因 $$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

欲求此式之因式,於 (1) 中以 $\frac{b}{a}$ 代 $p$ 而 $\frac{c}{a}$ 代 $q$ 即可.簡化其結果,即得

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right). \quad (2)$$

例一. 分解 $x^2-6x+2$ 之因式.

$$x^2-6x+2=x^2-6x+3^2-3^2+2=(x-3)^2-7$$
$$=(x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7}).$$

例二. 分解 $x^2+8x+20$ 之因式.

$$x^2+8x+20=x^2+8x+4^2-4^2+20$$
$$=(x+4)^2+4=(x+4)^2-4i^2$$
$$=(x+4+2i)(x+4-2i).$$

此處吾人先得平方之和, $(x+4)^2+4$, 然後以 $-4i^2$ 代 4, §437, 而變和爲差之形式,所得者爲虛因式.

例三. 分解 $3x^2-5x+1$ 之因式.

$$3x^2-5x+1=3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}\right]$$
$$=3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\right]$$
$$=3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right]$$
$$=3\left(x-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right).$$

例四. 分解下列各式之因式.

1. $x^2+10x+23$.　　2. $x^2-10x+24$.

3. $x^2-12x+45$　　4. $x^2+x+1$.

5. $2x^2+3x+2$.　　6. $x^2-4ax-4b^2+8ab$.

445　**二變數之齊次二次函數**　呈

$$ax^2+bxy+cy^2$$

形式之二次式,亦適用§§ 442—444 之方法.

例一. 分解 $x^2-8xy+14y^2$ 之因式.

$$x^2-8xy+14y^2=x^2-8xy+16y^2-2y^2=(x-4y)^2-2y^2$$
$$=[x-(4+\sqrt{2})y][x-(4-\sqrt{2})y].$$

例二. 分解下二式之因式

1. $x^2+5xy+4y^2$.　　2. $x^2-xy+y^2$.

446　**二變數之非齊次二次函數**　此種函數通常爲質函數.但當其爲複函數時,可依下例之方法分解因式.

例一. 分解 $A=x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$ 之因式.

如 $A$ 爲複函數,則必爲兩一次多項式之積.又其二次項,$x^2+2xy-8y^2$,必爲此二多項式之一次項之積.

用觀察法可求得 $x^2+2xy-8y^2=(x+4y)(x-2y)$.

故 $A$ 若爲複函數,則必有二數,$l$ 及 $m$,存在,能使

$$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x+4y+l)(x-2y+m)$$
$$=x^2+2xy-8y^2+(l+m)x+(4m-2l)y+lm. \quad (1)$$

然欲令(1)爲恆等式,須有(§285)

$l+m=2$　(2),　　$-2l+4m=14$　(3),　　$lm=-3$　(4).

由(2)及(3)得 $l=-1$, $m=3$. 此二值適合(4); 因 $-1\cdot3=-3$ 也.

故 $$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x+4y-1)(x-2y+3).$$

**注意** 由上例可知此種複函數實非常例.若 $A$ 別無變更,但將末項, $-3$, 任易一數, $A$ 卽變爲質函數;因(4)將不復爲 $l=-1$, $m=3$ 所適合故也.

此法亦適用於三變數之齊次二次函數.

例如,欲分解 $x^2+2xy-8y^2+2xz+14yz-3z^2$ 之因式,可置

$$x^2+2xy-8y^2+2xz+14yz-3z^2\equiv(x+4y+lz)(x-2y+mz),$$

再依前法進行,仍得 $l=-1$, $m=3$.

例二. 分解 $2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2$ 之因式.

例三. 試證 $x^2-y^2+2x+y-1$ 爲質函數.

**$n$次之多項式** 前已證明,凡二次多項式, $a_0x^2+a_1x+a_2$, 皆爲一次因式之積.關於此點凡 $x$ 之各次多項式皆然,但無普徧之方法以求此種因式耳;換言之, 447

**定理** 凡 $x$ 之 $n$ 次多項式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

皆爲 $n$ 個一次因式之積; 卽,有 $n$ 個二項式 $x-\beta_1$, $x-\beta_2$, ……$x-\beta_n$ 存在,能使

$$f(x)\equiv a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots\cdots(x-\beta_n).$$

此定理之證明詳後.

**系** 二變數 $x$ 及 $y$ 之齊次 $n$ 次多項式,爲 $n$ 個含 $x$ 及 $y$ 之齊次一次因式之積. 448

譬如,欲得齊次多項式 $a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3$, 祇須於 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 中以 $x/y$ 代 $x$, 再以 $y^3$ 乘其結果卽可.

然依§447, $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3\equiv a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)$, 如於此恆等式中以 $x/y$ 代 $x$, 再以 $y^3$ 乘兩端,卽得

$$a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3\equiv a_0(x-\beta_1y)(x-\beta_2y)(x-\beta_3y).$$

## 習題 XIX

分解下列各式之因式.

1. $x^2-14x+43$.
2. $x^2-21x-120$.
3. $5x^2-53x-22$.
4. $16x^2+64x+63$.
5. $54x^2-21x+2$.
6. $12x^2+20xy-8y^2$.
7. $x^4-13x^2+36$.
8. $x^3y-3x^2y^2-18xy^3$.
9. $x^2-3x+3$.
10. $3x^2+2x-3$.
11. $x^2-4xy-2y^2$.
12. $x^2-6ax-9b^2-18ab$.
13. $abx^2-(a^2+b^2)x-(a^2-b^2)$.
14. $x^2+bd+dx+bx+cx^2+cdx$.
15. $x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$.
16. $x^2+3xy+2y^2+3zx+5yz+2z^2$.

## 餘式定理及綜合除法之應用

449 **藉助於餘式定理以求因式**　令 $f(x)$ 指示 $x$ 之多項式.依餘式定理, § 415, 若 $b$ 爲使 $f(b)=0$ 之數, 則 $x-b$ 爲 $f(x)$ 之因式.如此之數 $b$ 有時可用視察法求出.

例.　分解 $f(x)=x^3-5x+4$ 之因式.

$$\begin{array}{r|l} 1+0-5+4 & 1 \\ 1\quad 1-4 & \\ \hline 1\quad 1-4,\ 0 & \end{array}$$

因 $f(1)=1-5+4=0$, $x-1$ 爲 $f(x)$ 之因式.

以 $x-1$ 除 $f(x)$, 得商 $x^2+x-4$.

故　　$f(x)=(x-1)(x^2+x-4)$.

**注意**　如上例,凡 $f(x)$ 之係數之代數和爲 0 時,須注意 $x-1$ 爲 $f(x)$ 之因式.

450 **整係數多項式**　若欲分解整係數多項式, $f(x)$, 之因式,通常宜先視其有無具整係數之一次因式.此種因式,藉助於下列原則, §§ 451, 452, 常得求出.

451 **整係數多項式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$, 或有呈 $x-b$ 形式之因式,其中 $b$ 爲整數.但若然,則 $b$ 必爲 $f(x)$ 之常數項 $a_n$ 之因數.**

譬如,令 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, 若欲 $x-b$ 爲 $f(x)$ 之因式,須有 (§ 415)

$$f(b)=a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=0,$$

從而　　$$(a_0b^2+a_1b+a_2)b=-a_3.$$

因 $a_0b^2+a_1b+a_2$ 爲整數故 $b$ 爲 $a_3$ 之因數.

故凡此種因式 $x-b$ 皆得用下例之法求之.

例. 分解 $f(x)=3x^5-3x^4-13x^3-11x^2-10x-6$ 之因式.

常數項, $-6$, 之因數為 $\pm1$, $\pm$ , $\pm3$, $\pm6$, 若欲 $x-b$ 為 $f(x)$ 之因式, $b$ 必須以此諸數之一為值.用綜合除法歷試 $b$ 之諸值如下.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3 & -3 & -13 & -11 & -10 & -6 & \underline{-1} \\
 & -3 & +6 & +7 & +4 & +6 & \\
\hline
3 & -6 & -7 & -4 & -6 & 0 & \underline{-1} \\
 & -3 & +9 & -2 & +6 & & \\
\hline
3 & -9 & +2 & -6, & 0 & & \underline{3} \\
 & +9 & 0 & +6 & & & \\
\hline
3 & 0 & 2, & 0 & & &
\end{array}$$

因 $f(1)\neq0$, $x-1$ 非因式, 故先試 $x-(-1)$ 卽 $x+1$, 適能除盡, 商為 $Q_1=3x^4-6x^3-7x^2-4x-6$ 而餘式為 0. 故 $x+1$ 為 $f(x)$ 之一因式,而 $Q_1$ 為其餘因式之積.

次須分解 $Q_1$ 之因式.此式亦能為 $x+1$ 所整除,商為 $Q_2=x^3-9x^2+2x-6$.

次須分解 $Q_2$ 之因式, 其常數項亦為 $-6$, 歷試 $x+1$, $x-2$, $x+2$, 餘式皆不能為 0. 故諸式皆非因式.再試 $x-3$, 知其能整除 $Q_2$, 商為 $Q_3=3x^2+2$ 故

$$f(x)=(x+1)^2(x-3)(3x^2+2).$$

**整係數多項式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$, 或有呈 $ax-\beta$ 形式之因式,其中 $\alpha$ 及 $\beta$ 為互質之整數.但若然,則 $\alpha$ 必為 $a_0$ 之因數,而 $\beta$ 為 $a_n$ 之因數.此定理包括 § 451 之定理.** 452

譬如令 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$. 若欲 $\alpha x-\beta$, 卽 $\alpha(x-\beta/\alpha)$, 為 $f(x)$ 之因式, 須有 (§ 415)

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=a_0\frac{\beta^3}{\alpha^3}+a_1\frac{\beta^2}{\alpha^2}+a_2\frac{\beta}{\alpha}+a_3=0,$$

從而 $$a_0\beta^3+a_1\beta^2\alpha+a_2\beta\alpha^2+a_3\alpha^3=0. \tag{1}$$

由 (1) 得 $$a_0\beta^3=-(a_1\beta^2+a_2\beta\alpha+a_3\alpha^2)\alpha. \tag{2}$$

故因 $a_1\beta^2+a_2\beta\alpha+a_3\alpha^2$ 為整數, $\alpha$ 為 $a_0\beta^3$ 之因數.然 $\alpha$ 與 $\beta^3$ 無公因數, § 492, 2. 故 $\alpha$ 為 $a_0$ 之因數, § 492, 1.

又由 (1), $$(a_0\beta^2+a_1\beta\alpha+a_2\alpha^2)\beta=-a_3\alpha^3. \tag{3}$$

仿上得證 $\beta$ 為 $a_3$ 之因數.

**故凡此種因式 $\alpha x-\beta$ 皆得用下例之法求之.**

例. 分解 $f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$ 之因式.

若欲 $\alpha x-\beta$ 為 $f(x)$ 之因式, $\alpha$ 必須以 $\pm1$, $\pm2$, $\pm3$, $\pm6$, 諸數之一為值, $\beta$ 必須以 $\pm1$, $\pm2$, 諸數之一為值;故 $\beta/\alpha$ 必須以 $\pm1$, $\pm2$, $\pm1/2$, $\pm1/3$, $\pm2/3$, $\pm1/6$ 諸數之一為值.

就此 $\beta/\alpha$ 之諸值試 $\alpha x-\beta$, 用綜合除法以 $x-\beta/\alpha$ 除 $f(x)$. 如適能除盡且 $Q$ 為商,則 $\alpha x-\beta$ 為 $f(x)$ 之一因式,而 $Q/\alpha$ 為其餘因式之積 § 412, 3.

歷試,$x-1$, $x+1$, $x-2$, $x+2$, 皆不能整除 $f(x)$. 但 $x+1/2$ 能整除, 其商爲 $Q_1=6x^3+2x^2+2x-4$. 故 $2x+1$ 爲 $f(x)$ 之一因式, 而其餘因式之積爲 $Q_1/2=3x^3+x^2+x-2$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6 & +5 & +3 & -3 & -2 & -1/2 \\
 & -3 & -1 & -1 & 2 & \\
\hline
6 & +2 & +2 & -4, & 0 & \\
3 & +1 & +1 & -2 & & 2/3 \\
 & 2 & +2 & +2 & & \\
\hline
3 & +3 & +3 & 0 & & \\
1 & +1 & +1 & & &
\end{array}$$

次進而分解 $Q_1/2$ 之因式, 若欲 $\alpha x-\beta$ 爲因式, $\beta/\alpha$ 必須以 $\pm1$, $\pm2$, $\pm1/3$, $\pm2/3$ 諸數之一爲值. 然吾人預知 $x-1$, $x+1$, $x-2$, $x+2$ 非因式, 因諸式非 $f(x)$ 之因式也. 試 $x-1/3$, $x+1/3$, 皆不能整除 $Q_1/2$; 但 $x-2/3$ 能之, 商爲 $Q_2=3x^2+3x+3$. 故 $3x-2$ 爲 $Q_1/2$ 之一因式, 而其餘因式之積爲 $Q_2/3=x^2+x+1$. 故

$$f(x)=(2x+1)(3x-2)(x^2+x+1).$$

453 [illegible] 除式爲 $x-b$ 或 $x-\beta/\alpha$ 時, 通常不待除法完畢, 即可知不能整除.

例如, 在上述演算足以證明 $x-2$ 不能整除 $5x^3-4x^2+x+8$. 何則, '除數' 2, 所得 $Q$ 之最近係數 6, 以及被除式之末用係數 1 及 8, 因皆爲正數, 故 $Q$ 之其餘係數及 $R$ 必爲正數, 即 $R$ 不能爲 0 也.

$$\begin{array}{rrrr|l}
5 & -4 & +1 & +8 & 2 \\
 & 10 & & & \\
\hline
5 & 6 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
3 & +1 & +1 & -2 & 1/3 \\
 & 1 & & & \\
\hline
3 & 2 & & &
\end{array}$$

同理, 由左列之演算可知 $x-1/3$ 不能整除 $3x^3+x^2+x-2$. 何則, 演算中經過之數 $2\cdot1/3$ 即 $2/3$ 爲一分數, 此事能使 $Q$ 之其餘係數及 $R$ 皆成分數, 因而 $R$ 不能爲 0 也.

454 **由 § 452, 首項係數爲 1 而其餘係數爲整數之多項式 $f(x)=x^n+\cdots\cdots+a_n$, 對於 $x$ 之有理分數值不能爲 0.**

何則, 若 $f(\beta/\alpha)=0$, 則 $f(x)$ 必能爲 $\alpha x-\beta$ 整除, 從而 $\alpha$ 必須爲 1 之因數, 而此事僅在 $\alpha=\pm1$ 時爲可能也.

455 **多項式之因式分解與解方程式** 由 § 350, 分解多項式 $f(x)$ 爲一次因式, 實際上與解方程式 $f(x)=0$ 無異.

例一. 解 $f(x)=2x^4+x^3-17x^2-16x+12=0$.

依 § 452 得 $\qquad f(x)=(2x-1)(x+2)^2(x-3)$.

故方程式 $f(x)=0$ 與下四方程式等値:

$$2x-1=0, \qquad x+2=0, \qquad x+2=0, \qquad x-3=0.$$

故 $f(x)=0$ 之根爲 $1/2$, $-2$, $-2$, 及 3.

例二. 解 $x^3+3x^2=10x+24$.

移項, $\qquad x^3+3x^2-10x-24=0$.

分解因式，　　　$(x+2)(x-3)(x+4)=0$.

故所求之根為 $-2, 3,$ 及 $-4$.

## 習　題　XX

分解下列各式之因式：

1. $x^3-7x+6$.
2. $x^3+6x^2+11x+6$.
3. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.
4. $x^4-2x^2+3x-2$.
5. $6x^3-13x^2-14x-3$.
6. $2x^3-5x^2y-2xy^2+2y^3$.
7. $2x^4-x^3-9x^2+13x-5$.
8. $4x^6-41x^4+46x^2-9$.
9. $6x^5+19x^4+22x^3+23x^2+16x+4$.
10. $5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4$.

解下列各方程式：

11. $x^2-4x-12=0$.
12. $6x^2-7x+2=0$.
13. $x^2-5x=14$.
14. $x^2+6x=2$.
15. $x^3-9x^2+26x=24$.
16. $x^4+2x^3-4x^2-2x+3=0$.
17. $x^3-1=0$.
18. $10x^3-9x^2-3x+2=0$.

## 習　題　XXI

下列各式可用本章所述之方法分解因式．分解因式須竭盡可能，但不得引入無理係數或虛係數．

1. $6xy+15x-4y-10$.
2. $a^2bc-ac^2d-ab^2d+bcd^2$.
3. $a^3(a-b)+b^3(b-a)$.
4. $a^5-81ab^4$.
5. $a^4b-a^2b^3+a^3b^2-ab^4$.
6. $3abx^2-6axy+bxy-2y^2$.
7. $3x^6-192y^6$.
8. $(x^2+x)^3-8$.
9. $64x^6y^3-y^{15}$.
10. $x^2-(a-b)x-ab$.
11. $x^{2n}-3x^n-18$.
12. $x-x^2+42$.
13. $3x^4+3x^3-24x-24$.
14. $x^5-9x^3+8x^2-72$.
15. $2xc-a^2+x^2-2ab+c^2-b^2$
16. $x^2(x^2-20)+64$.
17. $a^2-2ab+b^2-5a+5b+6$.
18. $x^4-10x^2y^2+9y^4$.
19. $6x^2-7xy-5y^2-4x-2y$.
20. $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$.
21. $4(xz+uy)^2-(x^2-y^2+z^2-u^2)^2$.
22. $14x^2+19x-3$.
23. $1+19y-66y^2$.
24. $xy^3+55x^2y^2+204x^3y$.
25. $a^4-18a^2b^2c^2+81b^4c^4$.
26. $(x^2-7x)^2+6x^2-42x$.

27. $8(x+y)^3-27(x-y)^3$.
28. $(x-2y)x^3-(y-2x)y^3$.
29. $x^2+a^2-bx-ab+2ax$.
30. $x^5-y^5-(x-y)^5$.
31. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$.
32. $b^4+b^2+1$.
33. $2x^2+7xy+3y^2+9x+2y-5$.
34. $a^4+4$.
35. $x^2-xy-2y^2+4xz-5yz+3z^2$.
36. $4a^4+3a^2b^2+9b^4$.
37. $x^2-8ax-40ab-25b^2$.
38. $x^8+x^4+1$.
39. $(x^2+2x-1)^2-(x^2-2x+1)^2$.
40. $(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.
41. $x^3-ax^2-b^2x+ab^2$.
42. $x^4+bx^3-a^3x-a^3b$.
43. $a^2-9b^2+12bc-4c^2$.
44. $8a^3+12a^2+6a+1$.
45. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$
46. $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.
47. $4x^5+4x^4-37x^3-37x^2+9x+9$.
48. $x^4-4x+3$.
49. $x^2+5ax+6a^2-ab-b^2$.
50. $15x^3+29x^2-8x-12$.
51. $abcx^2+(a^2b^2+c^2)x+abc$.
52. $2x^3-ax^2-5a^2x-2a^3$.
53. $(a-b)x^2+2ax+(a+b)$.
54. $x^{15}-y^{15}$.
55. $x^4-6x^3+7x^2+6x-8$.
56. $4x^3-3x-1$.
57. $3x^5-10x^4-8x^3-3x^2+10x+8$.
58. $5x^4+24x^3-15x^2-118x+24$.
59. $a^2bc+ac^2+acd-abd-cd-d^2$.
60. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$.

# VII. 最高公因式及最低公倍式

## 最高公因式

**最高公因式** 令 $A, B,\cdots\cdots$ 指示一或多變數,如 $x$, 或 $x$ 及 $y$, 之有定整函數.

456 若 $A, B,\cdots\cdots$ 無公因式,則此諸函數謂為互質.若有之,則必有一焉其次數為最高,謂之諸函數之最高公因式 (H.C.F.).

例如, $x^2+y^2$ 及 $x+y$ 為互質.

然 $4xyz^5$, $8xz^4$, 及 $4x^2yz^3$ 有公因式 $x$, $z$, $z^2$, $z^3$, $xz$, $xz^2$, $xz^3$, 而其最高公因式為 $xz^3$.

注意 1. 此處不計及數字公因式. 457

2. 互質之二或多函數,有時稱作以1爲 H. C. F.

3. $A$ 及 $B$ 之 H. C. F. 之數值,不必即爲 $A$ 及 $B$ 之整數值之最大公約數.譬如,$(2x+1)x$ 及 $(x-1)x$ 之 H. C. F. 爲 $x$. 然當 $x=4$ 時,$(2x+1)x$ 及 $(x-1)x$ 之值爲 36 及 12,而 36 與 12 之最大公約數非 4,而爲 12.

**定理一** $A, B, \cdots\cdots$ 之 H.C.F.,爲 $A, B, \cdots\cdots$ 之各相異質公因式在諸函數中所含之最低乘冪之積. 458

若吾人假定 $A, B, \cdots\cdots$ 諸函數皆以相異質因式乘冪之積表出,并假定此種表出方法唯限於一,如 § 430,則此定理之眞實可不待言.

譬如,$xyz^5$, $xz^4$ 及 $x^2yz^3$ 之相異質公因式爲 $x$ 及 $z$,而諸函數所含之 $x$ 及 $z$ 之最低乘冪爲 $x$ 及 $z^3$. 故 H. C. F. 爲 $xz^3$.

應注意者,設或以質因式表與函數,其法不限於一,則由定理中所述之方法,對應於 $A, B, \cdots\cdots$ 之種種表出之法,即可得種種結果,而最高公因式將不限於一矣.

**此定理之應用** 當與函數得完全分解爲因式時,藉助於 § 458 之定理,其 H. C. F. 可立即書出. 459

例一. 求 $x^5y^2-6x^4y^3+9x^3y^4$ 及 $x^4y-9x^2y^3$ 之 H. C. F.

$$x^5y^2-6x^4y^3+9x^3y^4=x^3y^2(x-3y)^2,$$

及
$$x^4y-9x^2y^3=x^2y(x-3y)(x+3y).$$

故 H. C. F. 爲
$$x^2y(x-3y).$$

例二. 求下列各式之 H. C. F.

1. $2x^4y^2z^5$, $3x^5y^3z$, 及 $4x^3y^4$.
2. $x^2-y^2$, $x^2+2xy+y^2$, 及 $x^3+y^3$.
3. $x^2-x-6$, $x^2+6x+8$, 及 $x^2+5x+6$.
4. $x^3-6x^2+11x-6$ 及 $2x^3-9x^2+7x+6$.

若 $A, B, \cdots\cdots$ 諸函數之一其質因式爲已知者,則此諸質因式中,何者爲一切其他函數所公具而何者則否,可由除法或餘式定理決定.藉助於 § 458, H. C. F 即可求出. 460

例一． 求 $f(x)=x^2-3x+2$ 及 $\phi(x)=x^4-3x^3+5x^2-8x+5$ 之 H. C. F.

由觀察法得 $f(x)=(x-1)(x-2)$. 試 $x=1$ 及 $x=2$ 於 $\phi(x)$, 得 $\phi(1)=0$, 而 $\phi(2)\neq 0$; 故 H. C. F. 爲 $x-1$.

例二． 求 $f(x)=x^2+4x+4$ 及 $\phi(x)=x^4+5x^3+9x^2+8x+4$ 之 H. C. F.

因 $f(x)=(x+2)^2$, 不但須決定 $x+2$ 是否 $\phi(x)$ 之因式, 更須決定 $\phi(x)$ 究竟含 $x+2$ 一次抑兩次.以 $x+2$ 除 $\phi(x)$ (用綜合除法),得 $Q_1=x^3+3x^2+3x+2$ 而 $R_1=0$; 以 $x+2$ 除 $Q_1$ 得 $Q_2=x^2+x+1$ 而 $R_2=0$. 故 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之 H. C. F. 爲 $(x+2)^2$.

例三． 求下列各式之 H. C. F.

1. $x^2+x-6$ 及 $2x^3+7x^2+4x+3$.
2. $x^2+5x+6$ 及 $x^4+6x^3+13x^2+16x+12$.
3. $(x-1)^2(x-3)^3(3x+1)^2$ 及 $x^4-5x^3+x^2+21x-18$.

461　**定理二**　令 $A$ 及 $B$ 指示所與之二整函數,而 $M$ 及 $N$ 爲任二整函數或常數.則凡 $A$ 與 $B$ 之公因式皆爲 $MA+NB$ 之因式.

何則,令 $F$ 指示 $A$ 與 $B$ 之公因式.

則　$$A\equiv GF \text{ 及 } B\equiv HF.$$

其中　$$G \text{ 及 } H \text{ 爲整式}.$$

於是　$$MA+NB\equiv M\cdot GF+N\cdot HF\equiv(MG+NH)F,$$

其中　$$MG+NH \text{ 爲整式}.$$

故 $F$ 爲 $MA+NB$ 之因式, § 424.

462　**此定理之應用**　藉此定理,以求二個次數相等之多項式 H. C. F., 可轉變爲分解一低次多項式之因式之問題.

例一． 求 $A=x^2+2x-4$ 及 $B=x^2+x-3$ 之 H. C. F.

由 $A$ 減 $B$, 得 $A-B=x-1$.

故 $x-1$ 爲 $A$ 及 $B$ 唯一可能之公因式, § 461.

然因 $x=1$ 時 $A$ 不爲 0, $x-1$ 非 $A$ 之因式.

故 $A$ 與 $B$ 爲互質.

例二． 求 $A=2x^3-3x^2-3x+2$ 及 $B=3x^3-2x^2-7x-2$ 之 H. C. F.

1. 先以適當之數乘 $A$ 及 $B$ 俾有相同之首項,即以 3 乘 $A$ 而以 2 乘 $B$.

於是由 $3A$ 減 $2B$, 得

$$3A-2B=-5x^2+5x+10=-5(x^2-x-2)=-5(x+1)(x-2).$$

故能為$A$與$B$之公因式者,限於$x+1$及$x-2$.

由餘式定理知二者,皆為$A$與$B$之因式.

故$A$與$B$之H.C.F.為$(x+1)(x-2)$.

2. 試加$A$及$B$,而得

$$A+B=5x^3-5x^2-10x=5x(x^2-x-2)=5x(x+1)(x-2).$$

$x$非$A$或$B$之因式甚明,故祇須仿前試$x+1$及$x-2$.

例三. 求下列各式之H.C.F.

1. $x^4-x^3+3x^2-4x-12$ 及 $x^4-x^3+2x^2+3x-22$.
2. $6x^3+25x^2+5x+4$ 及 $4x^3+15x^2-2x+8$.

**定理三** 若四整函數$A,B,Q,R$之間有$A\equiv QB+R$之關係,則$A$及$B$之公因式與$B$及$R$之公因式同. 463

$$A\equiv QB+R. \tag{1}$$

從而
$$A-QB\equiv R. \tag{2}$$

由(2),依§461,凡$A$與$B$之公因式皆為$R$之因式,從而皆為$B$與$R$之公因式.

反之,由(1),依§461,凡$B$與$R$之公因式皆為$A$之因式,從而皆為$A$與$B$之公因式.

故$A$及$B$之公因式與$B$及$R$之公因式同.

**求$x$之二多項式之H.C.F.之普偏方法** $x$之一多項式為又一式所除時,被除式,除式,商,及餘式之間,有恆等式$A\equiv QB+R$之關係.故由§463,得 464

被除式及除式之公因式,常與除式及餘式之公因式同.

利用此點,$x$之任二多項式之H.C.F.常得求出.其法與算術中求兩整數最大公約數之法相彷.下之法則具述此法,其中$A$及$B$代表與多項式,兩式次數不同時$A$為次數較高者.

465 **法則** 以 $B$ 除 $A$,命其商爲 $q$ 而餘式爲 $R_1$.

次以 $R_1$ 除 $B$,命其商爲 $q_1$ 而餘式爲 $R_2$.

復次以 $R_2$ 除 $R_1$,餘仿此,繼續進行,每次以新餘式除其前一餘式至得不含 $x$ 之餘式爲止.

若最後之餘式不爲 0,$A$ 與 $B$ 無公因式.若爲 0,則最後一次除法中之除式爲 $A$ 與 $B$ 之 H.C.F.

何則,爲明確起見,假定最後之餘式爲 $R_3$.則視 (1) $R_3=c$,其中 $c$ 指示不爲 0 之常數,或 (2) $R_3=0$,而有

$$\begin{array}{llll}
(1) & A\equiv qB+R_1, \quad 或 & (2) & A\equiv qB+R_1 \\
& B\equiv q_1R_1+R_2 & & B\equiv q_1R_1+R_2 \\
& R_1\equiv q_2R_2+c & & R_1\equiv q_2R_2
\end{array}$$

(1) 在此情形 $A$ 與 $B$ 無公因式.

何則,由 (1) 之三恆等式,依 § 463,$A$ 及 $B$ 與 $B$ 及 $R_1$ 有相同之公因式;$B$ 及 $R_1$ 與 $R_1$ 及 $R_2$ 亦然,$R_1$ 及 $R_2$ 與 $R_2$ 及 $c$ 亦然.

故 $A$ 與 $B$,$B$ 與 $R_1$,$R_1$ 與 $R_2$ $R_2$ 與 $c$,各組函數有相同之公因式.

然因 $c$ 爲常數(不爲 0),$R_2$ 與 $c$ 無公因式.故 $A$ 與 $B$ 無公因式.

(2) 在此情形 $R_2$ 爲 $A$ 與 $B$ 之 H.C.F.

何則,因 $R_1\equiv q_2R_2$,凡 $R_2$ 之因式皆爲 $R_1$ 與 $R_2$ 之公因式,而 $R_2$ 自身則爲公因式中之次數最高者.

然因 $R_1$ 及 $R_2$ 之公因式與 $A$ 及 $B$ 之公因式同,$R_1$ 及 $R_2$ 公因式之次數最高者亦爲 $A$ 及 $B$ 公因式之次數最高者.故 $R_2$ 爲 $A$ 與 $B$ 之 H.C.F.

例一. 求 $x^2+x+1$ 與 $x^3+x^2+2x+3$ 之 H. C F

書除式於被除式之左,得

$$
\begin{array}{rr|l|l}
B=x^2+x+1 & x^3+x^2+2x+3 & \underline{x=q} & \\
 & \underline{x^3+x^2+\ \ x} & & \\
R_1= & x+3 & x^2+\ \ x+1 & \underline{x-2=q_1} \\
 & & \underline{x^2+3x\qquad} & \\
 & & -2x+1 & \\
 & & \underline{-2x-6} & \\
 & R_2= & 7 & 
\end{array}
$$

因最後之餘式 $R_2$ 不爲 0, $x^2+x+1$ 與 $x^3+x^2+2x+3$ 無公因式.

例二. 求 $x^3+x^2+2x+2$ 與 $x^3+2x^2+3x+2$ 之 H. C. F.

將演算仿例一排列如下.

$$
\begin{array}{rr|l|l|l}
B=x^3+x^2+2x+2 & x^3+2x^2+3x+2 & \underline{1} & & \\
 & \underline{x^3+\ \ x^2+2x+2} & & & \\
R_1= & x^2+\ \ x & x^3+x^2+2x+2 & \underline{x} & \\
 & & \underline{x^3+x^2\qquad\quad} & & \\
 & R_2= & 2x+2 & x^2+x & \underline{x/2} \\
 & & & \underline{x^2+x} & \\
 & & R_3= & 0 & 
\end{array}
$$

以 $R_2$ 爲除式之除法適除盡, $R_3$ 爲 0. 故略去 $R_2$ 中之數字因式, 2, 不計,得 H. C. F. 爲 $x+1$.

吾人今始眞實證明——對於祇含一變數之函數——若二整函數有公因式,則必有一最高公因式.因於 §§463 465 並未假定以質因式表整函數.其法唯限於一,如於 § 458 也. 466

應注意者,在 § 465 之證明中,下二事得以證明. 467

1. $A, B, R_1, R_2, \cdots\cdots$ 一列函數中,凡連續之二函數,皆與 $A$ 及 $B$ 有相同之 H. C. F.

2. 凡 $A$ 與 $B$ 之公因式皆能整除 $A$ 與 $B$ 之 H. C. F.

**此法之簡約** 1. 若 $A$ 或 $B$ 之質因式有一望可知者,則先將此種因式析出,再求結果所得之式之 H.C.F., 如此求得之結果,乘以最初析出之因式之爲 $A$ 與 $B$ 所公有者, 即爲 $A$ 與 $B$ 之 H. C. F., § 458. 468

$A, B, R_1, R_2, \cdots\cdots$ 一列函數中之任二連續函數,得用同法處理,因凡如此之二函數,皆與 $A$ 及 $B$ 有相同之 H.C.F. 故也,§467.

例如,$A=x^4+x^3+2x^2+2x$ 及 $B=x^4+2x^3+3x^2+2x$ 有公因式 $x$ 甚明.析出 $x$,得 $x^3+x^2+2x+2$ 及 $x^3+2x^2+3x+2$,其 H.C.F 前已求出,爲 $x+1$ (參看 §465,例二).故 $A$ 與 $B$ 之 H.C.F. 爲 $x(x+1)$.

又於例二,因 $x$ 爲 $R_1$ 之因式,而非 $B$ 之因式,$x$ 不能爲 $B$ 與 $R_1$ 之 H.C.F. 之因式,從而不能爲 $A$ 與 $B$ 之 H.C.F 之因式.故吾人棄去因式 $x$ 而以 $R_1$ 之其餘因式 $x+1$ 除 $B$,如此除算回數可以較少.

2. 行除法時,凡除式,被除式,或任一中間餘式,皆得以數字因式乘或除之;蓋因,其結果至多祇能使以後之餘式相差一數字因式,§403,故絕不至影響及 H.C.F.,所與之係數爲有理數時,此法使吾人能避免分數係數.

3. 用分離係數法較便.

例一. 求 $A=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 $B=2x^3+5x^2-x-1$ 之 H.C.F.

以 2 乘 $A$ 而用分離係數法.

```
2+5-1-1 | 2+6+ 4+ 6+2 | 1
        | 2+5- 1- 1
        ------------
            1+ 5+ 7+2
            2
          -----------
          2+10+14+4 | 1
          2+ 5- 1-1
          -----------
          5 | 5+15+5
            ---------
              1+ 3+1 | 2+5-1-1 | 2-1
                     | 2+6+2
                     --------
                       -1-3-1
                       -1-3-1
                       ------
```

故 $A$ 與 $B$ 之 H.C.F. 爲 $x^2+3x+1$.

如將演算排列如下,更爲簡潔.

| | | |
|---|---|---|
| $2+5-1-1$ | $2+6+4+6+2$ | $1+1$ |
| $2+6+2$ | $2+5-1-1$ | |
| $-1-3-1$ | $1+5+7+2$ | |
| $-1-3-1$ | $2+10+14+4$ | |
| | $2+5-1-1$ | |
| | $5+15+5$ | |
| | $1+3+1$ | $2-1$ |

例二. 求 $2x^4+3x^3+4x^2+2x+1$ 與 $2x^4-x^3+2x^2+1$ 之 H. C. F.

**定理** 若 $A$ 及 $B$ 之係數爲有理數,其 H. C. F. 之係數亦然; 469
又若 $A$ 及 $B$ 之係數爲實數,其 H. C. F. 之係數亦然.

何則, $A$ 與 $B$ 之 H. C. F. 得用 § 465 之方法求出.故其係數爲 $A$ 及 $B$ 之係數之有理結合,故此等係數爲有理數時結合亦爲有理數,爲實數時亦爲實數.

由此定理可得重要之推論,後將逃及一二.應用之能使求 H. C. F. 之工作減短.

例. 求 $x^2-2$ 與 $x^3+x^2-5x+6$ 之 H. C. F.

兩多項式非互質卽其 H. C. F. 爲 $x^2-2$ 自身,何則,因 $x^2-2$ 之因式 $x+\sqrt{2}$ 及 $x-\sqrt{2}$ 有無理係數,二者皆不能爲 H. C. F. 也.

然吾人試得 $x^3+x^2-5x+6$ 不能爲 $x^2-2$ 所整除.故兩式爲互質.

**三個以上 $x$ 之多項式之 H. C. F.** 可用下之法則求之. 470

先求諸式中任二式之 H. C. F.,次求所得之結果與第三式之 H. C. F.,餘仿此.最後之結果爲所求之 H. C. F.

譬如,若 $D_1$ 爲 $A$ 與 $B$ 之 H. C. F.,而 $D_2$ 爲 $D_1$ 與 $C$ 之 H. C. F.,則 $D_2$ 爲 $A, B,$ 與 $C$ 之 H. C. F.

何則,因 (1), $D_2$ 爲 $D_1$ 及 $C$ 之因式,而 $D_1$ 爲 $A$ 及 $B$ 之因式,故 $D_2$ 爲 $A, B,$ 及 $C$ 之因式, § 427.

(2), 凡 $A, B,$ 與 $C$ 之公因式皆爲 $D_1$ 與 $C$ 之公因式,從而皆

為 $D_2$ 之因式, § 467. 故 $D_2$ 為 $A, B$, 與 $C$ 之最高公因式.

由 § 453 亦能得此結論.

例. 求 $A=x^4+x^3-x^2+x-2$, $B=2x^4+5x^3-2x^2-7x+2$, 與 $C=3x^4-x^3-x^2-2$ 之 H. C. F.

依 § 465, 求得 $A$ 與 $B$ 之 H. C. F. 為 $D_1=x^2+x-2$, 而 $D_1$ 與 $C$ 之 H. C. F. 為 $x-1$.

故 $A, B$, 與 $C$ 之 H. C. F. 為 $x-1$.

471 **含多變數之多項式之 H. C. F.** 求如是之二多項式之 H. C. F. 普徧問題過於複雜,此處不便討論.但如二式為兩變數,如 $x$ 及 $y$, 之齊次函數,則藉助於 § 465 之法則,其 H. C. F. 極易求出.

## 習題 XXII

求下列各式之 H. C. F.

1. $10x^3y^2z^5$, $4x^5yz^3$, $6x^4y^3z^5$, 及 $8x^2y^4z^4u$.
2. $(a+b)^2(a-b)$, $(a+b)(a-b)^2$, 及 $a^3b-ab^3$.
3. $y^4+y^2+1$ 及 $y^2-y+1$.
4. $a^2-1$, $a^2+2a+1$, 及 $a^3+1$.
5. $x^3-1$ 及 $x^3+ax^2-ax-1$.
6. $x^4-y^4$, $x^6+y^6$, 及 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.
7. $x^2+5x+6$, $x^2+x-2$, 及 $x^2-14x-32$.
8. $(x-1)(x-2)$ 及 $5x^4-15x^3+8x^2+6x-4$.
9. $x^3-1$ 及 $x^3-4x^2-4x-5$
10. $(x^2-1)^2(x+1)^2$ 及 $(x^3+5x^2+7x+3)(x^2-6x-7)$.
11. $(x-1)^2(x-2)^2$ 及 $(x^2-3x+2)(2x^3-5x^2+5x-6)$.
12. $2x^3-3x^2-11x+6$ 及 $4x^3+3x^2-9x+2$.
13. $x^3-2x^2-2x-3$ 及 $2x^3+x^2+x-1$.
14. $3x^3+2x^2-19x+6$ 及 $2x^3+x^2-13x+6$.
15. $x^4-x^3-3x^2+x+2$ 及 $2x^4+3x^3-x^2-3x-1$.
16. $3x^3-13x^2+23x-21$ 及 $6x^3+x^2-44x+21$.

17. $3x^3+8x^2-4x-15$ 及 $6x^4+10x^3-3x^2-2x+5$.

18. $6x^5+7x^4-9x^3-7x^2+3x$ 及 $6x^5+7x^4+3x^3+7x^2-3x$.

19. $6x^4-3x^3+7x^2+x-3$ 及 $2x^4+3x^3+7x^2+3x+9$.

20. $6x^5-4x^4-11x^3-3x^2-3x-1$ 及 $4x^4+2x^3-18x^2+3x-5$.

21. $x^5-x^3-4x^2-3x-2$ 及 $5x^4-3x^2-8x-3$.

22. $x^3-x^2-12x+4$, $x^3-2x^2-5x+6$, 及 $7x^3+19x^2+8x-4$.

23. $x^3+ax^2-3x-3a$, $x^3-x^2-3x+3$, 及 $x^3+x^2-3x-3$.

24. $7x^4y-6x^3y^2-18x^2y^3+4xy^4$ 及 $14x^3y-19x^2y^2-32xy^3+28y^4$.

25. $x(x-1)(x^3+4x^2+4x+3)$ 及 $(x-1)(x+3)(12x^3+x^2+x-1)$.

26. $4x^3-8x^2-3x+9$ 及 $(2x^2-x-3)(2x^2-7x+6)$.

# 最低公倍式

**最低公倍式** 所謂二或較二多之整函數，$A, B, \ldots\ldots$，之公倍式者，卽得爲 $A, B, \ldots\ldots$ 各函數所整除之整函數也． 472

在此種公倍式中有一焉其次數爲最低，謂之爲 $A, B, \ldots\ldots$ 之最低公倍式 (L. C. M.)．

**定理一** 二或較二多之整函數，$A, B, \ldots\ldots$，之 L.C.M.，爲 $A, B, \ldots\ldots$ 中所含最高次異質因式之積． 473

此因 $A, B, \ldots\ldots$ 之公倍式須含 $A, B, \ldots\ldots$ 各函數中之各質因式，次數須不少於其在函數中之次數，故須含定理中述及之諸因式．而次數最低之公倍式，卽 L. C. M.，乃含此諸因式外不含其他因式者．

此處仍不計及數字因式，且假定以相異質因式乘冪之積表整函數，其法唯限於一

**用視察法求 L. C. M.** 若能將 $A, B, \ldots\ldots$ 分解爲質因式，則應用定理一，其 L. C. M. 可立卽求出． 474

例一. 求 $3x^5y^2z$, $xy^4z^3$, 與 $2x^2yz^6$ 之 L. C. M.

諸函數中相異質因式之最高乘冪計爲 $x^5$, $y^4$, $z^6$.

故 L. C. M. 爲 $x^5y^4z^6$.

例二. 求 $x^2y^2-4xy^2+4y^2$ 與 $x^2y-4y$ 之 L. C. M.

$$x^2y^2-4xy^2+4y^2=y^2(x-2)^2 \text{ 及 } x^2y-4y=y(x-2)(x+2).$$

故 L. C. M. 爲 $y^2(x-2)^2(x+2)$.

475 **定理二** 二整函數, $A$ 與 $B$, 之積,除以其H. C. F., 卽爲二者之L. C. M.

何則,令 $D$ 指示 $A$ 與 $B$ 之 H. C. F., 又令 $A_1$ 及 $B_1$ 指示以 $D$ 除 $A$ 及 $B$ 所得之商,俾

$$A \equiv A_1D \text{ 及 } B \equiv B_1D.$$

則 $M$ 若指示 $A$ 與 $B$ 之L. C. M.,

$$M \equiv A_1B_1D \equiv AB/D.$$

因 $A$ 與 $B$ 之公倍式顯而易見須含(1) $A$ 與 $B$ 公有之諸質因式之積, 卽 $D$, (2) 屬 $A$ 而不屬 $B$ 之諸質因式之積,卽 $A_1$, (3) 屬 $B$ 而不屬 $A$ 之諸質因式之積,卽 $B_1$; 而最低公倍式除此諸因式外應不含其他因式.

476 系 二整函數 $A$ 與 $B$ 之積,等於二者之L. C. M. 與 H. C. F. 之積.

477 **求 $x$ 之二多項式之 L. C. M. 之普徧法.** 由 §§ 465, 475, 如是之二多項式, $A$ 及 $B$ 之L. C. M., 常得用下法求出.

欲求 $A$ 與 $B$ 之L. C. M., 以 $A$ 與 $B$ 之 H. C. F. 除 $A$, 再以 $B$ 乘所得之結果.

注意此與乘 $B$ 以 $A$ 中諸質因式之未見於 $B$ 者相等.

例. 求 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 $2x^3+5x^2-x-1$ 之 L. C. M.

依 § 465, 求得 H. C. F. $=x^2+3x+1$,

又 $$(2x^3+5x^2-x-1)/(x^2+3x+1)=2x-1.$$
故 L. C. M. 爲 $(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1)$.

**三以上之$x$之多項式之L.C.M. 可用下之法則求之.** 478

**先於諸式中任取二式求L.C.M.,次再求所得結果與第三式之L.C.M.,餘仿此進行,則最後之結果爲所求之L.C.M.**

**此因方法中之各步驟,皆等於將上一步驟中求得之L.C.M.,乘以次一函數中諸質因式之未含於其L.C.M.者故也.**

例. 求 $A=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$, $B=2x^3+5x^2-x-1$, 與 $C=2x^3-3x^2+2x-3$ 之 L. C. M.

前已求得(§477, 例) $A$ 與 $B$ 之 L. C. M. 爲
$$M_1=(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1),$$
今求 $M_1$ 與 $C$ 之 L. C. M. 可矣.

用除法試得 $2x-1$ 與 $C$ 爲互質, 又依 § 465 求得 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 $C$ 之 H. C. F. 爲 $x^2+1$.

而 $$C/(x^2+1)=2x-3.$$
故 $M_1$ 與 $C$ 之 L. C. M., 即 $A$, $B$, $C$ 之 L. C. M., 爲
$$M=(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1)(2x-3).$$
應注意者,在求 $M_1$ 與 $C$ 之 H. C. F. 之前,吾人並不將 $M_1$ 之因式乘出.

## 習題 XXIII

求下列各式之 L. C. M.

1. $3x-1$, $9x^2-1$, 及 $9x^2+1$.
2. $(a+b)(a^5-b^5)$ 及 $(a-b)(a^5+b^5)$.
3. $a^3+a^2+a$, $a^5-a^3$, 及 $a^6-a^3$.
4. $(x^3-y^3)(x-y)^3$, $(x^4-y^4)(x-y)^2$, 及 $(x^2-y^2)^2$.
5. $x^2-3x+2$, $x^2-5x+6$, 及 $x^2-4x+3$.
6. $x^2-(y+z)^2$, $y^2-(z+x)^2$, 及 $z^2-(x+y)^2$.
7. $2x^2+3xy-9y^2$, $3x^2+8xy-3y^2$, 及 $6x^2-11xy+3y^2$.
8. $x^3+x^2+x+1$ 及 $x^3-x^2+x-1$.
9. $2a^2x+2x^2y+3y^2x+3a^2y$ 及 $(2x^2-3a^2)y+(2a^2-3y^2)x$.

10. $8x^3-18xy^2,\ 8x^3+8x^2y-6xy^2,$ 及 $8x^2-2xy-15y^2.$

11. $x^3+y^3,\ x^3-y^3,$ 及 $x^4+x^2y^2+y^4.$

12. $x^6-1,\ 3x^3-5x^2-3x+5,$ 及 $x^4-1.$

13. $8x^3+27,\ 16x^4+36x^2+81,$ 及 $6x^2+5x-6.$

14. $x^2-4a^2,\ x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3,$ 及 $x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3.$

15. $x^2+2x,\ x^2+bx+2x+2b,$ 及 $x^3+ax^2-b^2x-ab^2.$

16. $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)$ 及 $(x^2+5x+6)(2x^2-3x-5).$

17. $(x^3-8)(27x^3+1)$ 及 $(2x^3+5x^2+10x+4)(x^3-x^2-x-2).$

18. $x^3-6x^2+11x-6,\ 2x^3-7x^2+7x-2,$ 及 $2x^3+x^2-13x+6.$

19. $x^4+5x^2+4x+5,\ 2x^4-x^3+10x^2+4x+5,$ 及 $2x^4+x^3+7x^2+3x+3,$

20. $2x^4-x^3+2x^2+3x-2,\ 2x^4+3x^3-4x^2+13x-6,$ 及 $x^4+3x^3+x^2+5x+2.$

## 祇含一變數之函數之質因式及不可約因式

以下定理中，$A$ 及 $B$ 指示 $x$ 之多項式。

479 **基本定理** 若 $A$ 與 $B$ 互質，則可求得二整函數，$M$ 及 $N$，使

$$MA+NB\equiv 1.$$

何則，如應用§465之方法於 $A$ 與 $B$，應得異於0之常數，$c$，爲最後之餘式。設 $c$ 爲第三餘式，如§465。且沿用彼處之記號，即得

$$\begin{array}{llll}
1. & A\equiv qB+R_1, \quad 從而 & 4. & R_1\equiv A-qB, \\
2. & B\equiv q_1R_1+R_2, & 5. & R_2\equiv B-q_1R_1, \\
3. & R_1\equiv q_2R_2+c, & 6. & c\equiv R_1-q_2R_2.
\end{array}$$

以5所與之 $R_2$ 之值代入6。併合 $R_1$ 及 $B$ 之項，而於其結果中以4所與之 $R_1$ 之值代入，再併合 $A$ 及 $B$ 之項，即得

$$\begin{aligned}
c &\equiv R_1-q_2R_2 \\
&\equiv (1+q_1q_2)R_1-q_2B \\
&\equiv (1+q_1q_2)A-(q+q_2+qq_1q_2)B.
\end{aligned}$$

以 $c$ 除最後之恆等式之兩端，因 $c$ 爲常數，$(1+q_1q_2)/c$ 及 $-(q+q_2+qq_1q_2)/c$ 爲整函數，可書作 $M$ 及 $N$。即得

$$1\equiv MA+NB,$$

其中 $M$ 及 $N$ 爲整函數。

常數餘式，$c$，在第三次除法以前或以後求得時，得用同法證明之。

反之.若$MA+NB\equiv 1$,其中$M$及$N$爲整函數,則$A$與$B$互質. 480

因$A$與$B$之公因式又爲$MA+NB$之因式,§461,從而爲1之因式,此事不可能故也.

上述基本定理之重要推論,尤要者如下.

定理一 若$A$與$B$互質.而積$AC$得爲$B$所整除,則$C$可爲$B$所整除. 481

何則,因$A$與$B$互質,吾人能求得$M$及$N$,§479,俾

$$MA+NB\equiv 1,$$

從而

$$M\cdot AC+NC\cdot B\equiv C.$$

然$AC$及$B$皆含因式$B$,故$B$爲$C$之因式,§461.

定理二 若$A$與函數$B$及$C$各互質,則與其積,$BC$,亦互質. 482

何則,因$A$與$B$互質,吾人能求得$M$及$N$,§479,俾

$$MA+NB\equiv 1,$$

從而

$$MC\cdot A+N\cdot BC\equiv C.$$

是故,若$A$與$BC$有公因式,其公因式必含於$C$,§461.然此爲不可能之事.因$A$與$C$互質也.

系 若$A$與$B,C,D$等函數各互質,則與其積$B\cdot C\cdot D\cdots\cdots$亦互質. 483

何則,上已證明,$A$與$BC$互質.

又因$A$與$BC$互質並與$D$互質,$A$與積$BCD$亦互質;餘仿此.

定理三 複函數有一組且祇有一組質因式. 484

何則,令$P$指示所與之函數,而$n$爲其次數.

若$P$爲複函數,則$P$有某因式$A$.若$A$又爲複函數,則$A$有某因式$B$.如此進行,終必達到質函數;因函數$P$, $A$, $B$,……之次數,自有窮數$n$順次遞減而不能低於1故也.

令$F$指示此質函數.則$F$爲$P$之質因式之一,§427,而$P\equiv FM$,其中$M$爲整函數.

同理,若$M$爲複函數,則有一質函數$F'$存在,能使$M\equiv F'M'$;從而$P\equiv FF'M'$,其中$M'$爲整函數.

如此進行,可達到次之結論:有一組質函數 $F\ F'\ F''\cdots\cdots$ 存在,其個數不超過 $n$,能使

$$P=F\cdot F'\cdot F''\cdots\cdots.$$

故 $P$ 至少有一組質因式.

又 $P$ 祇能有一組如此之因式.何則,假定

$$P=FF'F''\cdots\cdots=G\cdot G'\cdot G''\cdots\cdots,$$

其中 $G, G', G'', \cdots\cdots$ 亦爲質函數.

則 $G$ 不能悉與 $F, F', F'', \cdots\cdots$ 諸函數互質,因,若然,則 $G$ 應與其積 $P$ 互質,§483,而 $G$ 非 $P$ 之因式矣.

故設 $G$ 或與 $F$ 非互質,則 $G$ 與 $F$ 有公因式.然 $G$ 與 $F$ 爲質函數,而兩質函數除自身外不能公有含 $x$ 之因式.故 $G$ 與 $F$ 至多祇差一數字因式,例如 $c$,而 $G=cF$.

以 $G$ 之此值代入恆等式 $FF'F''\cdots\cdots=GG'G'',\cdots\cdots$,而以 $F$ 除兩端,即得

$$F'F''\cdots\cdots=cG'G''\cdots\cdots,$$

由此再用上之推理方法,可知 $G'$ 與 $F', F'', \cdots\cdots$ 諸函數之一至多祇差一數字因式.

如此進行,可達到次之結論:$G, G', G'', \cdots\cdots$ 及 $F, F', F'', \cdots\cdots$ 兩組函數,至多僅在數字因式及排列順序上,略有差別而已.

485　系　以相異質因式乘冪之積表複函數,其法唯限於一.

於恆等式 $P=F\cdot F'\cdot F''\cdots\cdots$,將各組相同因式用此種因式之一之對應乘冪代換,即得本定理.

486　**不可約因式 (Irreducible factors).**　整函數之係數爲有理者,其中具有理係數之最低次因式,通稱爲不可約因式.

例如,$(x-1)(x^2-2)$ 之質因式雖爲 $x-1,\ x-\sqrt{2},\ x+\sqrt{2}$,而不可約因式則爲 $x-1$ 及 $x^2-2$.

487　由上述之諸定理及§469之定理,可知

具有理係數之可約整函數,得以其相異不可約因式乘冪之積表之,然其法唯限於一.

## 有關整數論之事項

488　與上述諸定理類似之定理適用於整數.

今用$a, b$,等文字表正負整數(不爲0),凡能整除$a$之整數,謂之$a$之因數.

整數除自身及1外無他因數者,謂之質數. 489

如二整數,$a$及$b$,除1外別無他公因數,則稱$a$與$b$爲互質. 490

**定理** 若$a$與$b$互質,則常能求得二整數,$m$及$n$,俾 491

$$ma+nb=1.$$

何則:因$a$與$b$互質,如用通常求最大公約數之法,應得1爲最後之餘數.用§479之推理,卽可得出本定理.

例如,令$a=325$, $b=116$.用求G. C. D.之法,得

$$\begin{array}{rrrl}
116 & 325 & 2 & \\
 & 232 & & \\
r_1= & 93 & 116 & 1 \\
 & & 93 & \\
r_2= & 23 & 93 & 4 \\
 & & 92 & \\
r_3= & 1 & &
\end{array}$$

卽 $325=2\cdot116+93$, 亦卽 $93=325-2\cdot116$ (1)

$116=1\cdot 93+23$, 亦卽 $23=116-1\cdot 93$ (2)

$93=4\cdot 23+1$, 亦卽 $1=93-4\cdot 23$ (3)

於(3)中,先以(2)所與之23之值代入,然後以(1)所與之93之值代入,卽得

$$\begin{aligned}1&=93-4\cdot23\\&=5\cdot93-4\cdot116\\&=5\cdot325-14\cdot116.\end{aligned}$$

故 $$5\cdot325+(-14)\cdot116=1.$$

卽吾人求得二整數,$m=5$及$n=-14$,能使

$$m.325+n\cdot116=1.$$

其他之情形仿此.

**例.** 求二整數$m$及$n$,俾$223m+125n=1$.

**系** 由此基本定理,可導出關於整數之定理,與§§481—485中所得關於整函數者類似.特例,吾人能證明下列各事. 492

1. 若$a$與$b$互質,而積$ac$得爲$b$所整除,則$c$得爲$b$所整除.
2. 若$a$與$b$及$c$互質,則$a$與$bc$互質.
3. 複數得以其相異質因數乘冪之積表之,然其法唯限於

# VIII. 有理分式

## 約分

493 **分式** 令 $A$ 及 $B$ 指示任二代數式，$B$ 不爲 $0$. $A$ 除以 $B$ 之商，以 $A/B$ 之形式表之，謂之分式；$A$ 稱爲分子，$B$ 爲分母，二者通稱分式之項.

494 $A$ 及 $B$ 皆爲有理式時，$A/B$ 稱爲有理分式.

495 $A$ 及 $B$ 皆爲整式時，$A/B$ 稱爲簡分式；如 $A$ 或 $B$ 爲分式，$A/B$ 稱爲繁分式.

496 簡分式依分子之次數較分母低或否，而稱爲眞分式或假分式.

例如，$\frac{x-y}{x^2+y^2}$ 及 $\frac{2x^2-3}{x^3+1}$ 爲眞分式，$\frac{2x^2+1}{x^2+1}$ 及 $\frac{x^3-3}{x^2+1}$ 爲假分式.

497 假分式以祇含一變數之函數爲項者，可化爲整式與眞分式之和，§ 400. 其和稱爲帶分式.

例如，
$$\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2-\frac{1}{x^2+1},\qquad \frac{x^3-3}{x^2+1}=x-\frac{x+3}{x^2+1}.$$

498 **分式之變換** 分式之變換基於下之定理，§ 320, 1.

分式之分子及分母，如以同式（不爲 0）乘或除之，分式之值不變.

特例，分子分母得同時變號，此與以 $-1$ 乘二者無異. 單變分子或分母之號，其結果使分式變號，§ 320, 3.

若分子或分母爲多項式，則變其號即變其所有各項之號.

例如，
$$\frac{a+b-c}{a-b+c}=\frac{c-a-b}{b-c-a}=-\frac{c-a-b}{a-b+c}=-\frac{a+b-c}{b-c-a}.$$

若分子或分母或二者爲若干因式之積時，吾人得變其中偶數個因式

之號;然變奇數個因式之號,其結果使分式變號.

例如,
$$\frac{(a-b)(c-d)}{(e-f)(g-h)}=\frac{(b-a)(c-d)}{(e-f)(h-g)}=-\frac{(b-a)(d-c)}{(f-e)(g-h)}.$$

**約分**　所謂簡化一分式者,卽約去其分子及分母之一切公因式.約分變分式之形式而不變其值,§ 498. 499

已約分之分式,稱爲最低項分式或不可約分式.

欲求公因式或證明公因式不存在,可用第七章之方法.先觀其有無單項公因式,以及易用觀察法或剩餘定理求出之其他因式,此等簡易方法無效時,則用§ 465之普徧方法.

下列各例略示此種方法.

例一.　簡化 $(aec-ade)/(bde-ebc)$.
$$\frac{aec-ade}{bde-ebc}=\frac{ae(c-d)}{be(d-c)}=-\frac{a(c-d)}{b(c-d)}=-\frac{a}{b}.$$

例二.　簡化 $(x^3+x^2+x+6)/(x^2+3x+2)$.

用觀察法,求得分母之因式爲 $x+1$ 及 $x+2$.故如分子與分母有公因式,公因式必屬此二式之一.用綜合除法試之,知分子不能爲 $x+1$ 所整除.然得爲 $x+2$ 所整除,商爲 $x^2-x+3$.

故
$$\frac{x^3+x^2+x+6}{x^2+3x+2}=\frac{x^2-x+3}{x+1}.$$

例三.　簡化 $(x^3+7x+10)/(x^3+5x+6)$.

由分子減分母,得
$$x^3+7x+10-(x^3+5x+6)=2(x+2).$$

故如分子與分母有公因式,公因式必爲 $x+2$, § 461. 然 $x=-2$ 時,分子不爲0.故所與之式已屬最低項分式 § 415.

例四.　簡化 $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

有爲公因式之可能者,僅 $a-b$, $b-c$, 及 $c-a$ 而已.於分子中置 $a=b$ 得 $b^2(b-c)+b^2(c-b)$ 卽 0.故分子得爲 $a-b$ 所整除, § 417.仿此得證分子得爲 $b-c$ 及 $c-a$ 所整除.

故分子得爲分母所整除.然就 $a, b, c$ 而論,二者同爲三次式.故二者之商必僅爲一數.又因二者作爲 $a$ 之多項式而排列時,含 $a^2$ 之項各爲 $a^2(b-c)$ 及 $-a^2(b-c)$,故知此數爲 $-1$.

故原分式等於 $-1$.

例五. 簡化 $(2x^3+13x^2-6x+7)/(2x^4+5x^3+8x^2-2x+5)$.

依 § 465, 求得分子分母之 H. C. F. 爲 $2x^2-x+1$. 將分子分母各用 $2x^2-x+1$ 除之, 得

$$\frac{2x^3+13x^2-6x+7}{2x^4+5x^3+8x^2-2x+5}=\frac{x+7}{x^2+3x+5}.$$

## 習 題 XXIV

化下列各分式爲最低項.

1. $\dfrac{x^5y^3-4x^3y^5}{x^3y^2-2x^2y^3}$.  2. $\dfrac{(x^6-y^6)(x+y)}{(x^3+y^3)(x^4-y^4)}$.

3. $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+2x-63}$.  4. $\dfrac{3x^2-8x-3}{3x^2+7x+2}$.

5. $\dfrac{3x^2-18bx+27b^2}{2x^2-18b^2}$.  6. $\dfrac{5x^2+6ax+a^2}{5x^2+2ax-3a^2}$.

7. $\dfrac{(x^2-25)(x^2-8x+15)}{(x^2-9)(x^2-7x+10)}$.  8. $\dfrac{15x^2-46x+35}{10x^2-29x+21}$.

9. $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}$.  10. $\dfrac{x^2-y^2+z^2+2xz}{x^2+y^2-z^2+2xy}$.

11. $\dfrac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{1-x^2}$.  12. $\dfrac{2mx-my-12nx+6ny}{6mx-3my-2nx+ny}$.

13. $\dfrac{2x^3+7x^2-7x-12}{2x^3+3x^2-14x-15}$.  14. $\dfrac{x^3-8x^2+19x-12}{2x^3-13x^2+17x+12}$.

15. $\dfrac{x^4+x^3+5x^2+4x+4}{2x^4+2x^3+14x^2+12x+12}$.  16. $\dfrac{x^3-2x^2-x-6}{x^4+3x^3+8x^2+8x+8}$.

17. $\dfrac{(x^2+c^2)^2-4b^2x^2}{x^4+4bx^3+4b^2x^2-c^4}$.  18. $\dfrac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

## 分式之算法

500 **最低公分母** 加或減分式時, 吾人先化之爲有公分母之等値分式.

與分母之最低公倍式, 卽公分母之次數最低者甚明. 故謂之與分式之最低公分母 (L. C. D.).

例. 化 $\frac{a}{bc}$, $\frac{b}{ca}$, 及 $\frac{c}{ab}$, 俾有最低公分母.

與分母之 L. C. M. 爲 $abc$.

欲化 $a/bc$ 爲有分母 $abc$ 之等值分式,須以 $a$ 乘其兩項.

同理, $b/ca$ 須以 $b$ 乘其兩項, 而 $c/ab$ 須以 $c$ 乘其兩項.

即
$$\frac{a}{bc}=\frac{a^2}{abc},\quad \frac{b}{ca}=\frac{b^2}{abc},\quad \frac{c}{ab}=\frac{c^2}{abc}.$$

欲化二或多分式爲有最低公分母之等值分式, 先求與分母之最低公倍式. 501

然後於各分式中將原分母用最低公倍式代換,而以分母中因而增入之新因式乘分子.

加法及減法. 就分式之有公分母者而論,加及減之法則,已包括於下之公式中, § 320, 4. 502

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a+b-c}{d}.$$

故欲求二或多分式之代數和,

若必要時,先化諸分式,俾有最低公分母.

所得諸分式之分子,即以聯結原分式之號聯結之,而書其結果於公分母之上.

最後,簡化如此求得之結果.

分式中雜有整式時,此法則仍適用,以整式可視作分母爲1之分式故也.

各與分式,若其分子分母之公因式,不見於其他分式之分母中,則最好化爲不可約分式.

留意考察所選之分母是否眞爲最低公分母.如 $a-b$ 及 $b-a$ 僅爲符號相異之因式,而每同納於最低公分母中是乃常蹈之錯誤.

將與分式兩兩合併每較便利.

例一. 簡化 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}$.

最低公分母爲 $a^2-b^2$,

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a^2-b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a-b+a+b-2b}{a^2-b^2}=\frac{2a-2b}{a^2-b^2}=\frac{2}{a+b}.$$

應注意者,化爲最低項時,和之分母,或僅爲最低公分母之一因式.

例二. 簡化 $x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$.

因第一分母爲1,而第二分母爲 $-(x-1)$,最低公分母爲 $x^2-1$,故

$$x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}=\frac{x^3-x}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^3-x+x+1-x^3+3x-1}{x^2-1}=\frac{3x}{x^2-1}.$$

例三. 簡化 $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$.

將與分式兩兩合併較簡.

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-(x-2)}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4}.$$

$$\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}=2\frac{x-1-(x+1)}{x^2-1}=-\frac{4}{x^2-1}.$$

$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-1}=4\frac{x^2-1-(x^2-4)}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{12}{x^4-5x^2+4}.$$

例四. 簡化 $\frac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}$.

藉助於餘式定理,§415,得知 $x-1$ 爲第一分式兩項之公因式,而非第二分母之因式.於第一分式中約去兩項之 $x-1$,得 $(x+1)/(x^3+x^2+2x)$.

依§465, $x^3+x^2+2x$ 與 $2x^3+x^2+3x-2$ 之 H. C. F. 爲 $x^2+x+2$; 而 $x^3+x^2+2x=(x^2+x+2)x$, $2x^3+x^2+3x-2=(2x-1)(x^2+x+2)$,

在化爲公分母之前,先考察 $2x-1$ 究爲分子 $2x^2+3x-2$ 之因式否.試得 $2x-1$ 確爲此分子之因式,約去後第二分式化爲 $(x+2)/(x^2+x+2)$.

故
$$\frac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}=\frac{x+1}{x(x^2+x+2)}+\frac{x+2}{x^2+x+2}$$

$$=\frac{x+1+x^2+2x}{x^3+x^2+2x}=\frac{x^2+3x+1}{x^3+x^2+2x}.$$

**乘法**　二或多分式之積,可用下之定理求之. 503

二或多分式之積爲一分式,其分子爲與分式分子之積,而分母爲與分式分母之積.

譬如,
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

何則,兩端乘$bd$之積各爲$ac$(參看§253).

$$\frac{ac}{bd}bd=ac;\ 又\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot bd=\frac{a}{b}b\cdot\frac{c}{d}d=ac.\qquad §§252, 254$$

特例,以整式乘分式時但乘其分子可矣.

分式$ac/bd$應先化爲最低項,然後完成分子分母中所示之乘法.

例一. 以$(x+1)/(x-1)$乘$(x^3-1)/(x^3+1)$.

$$\frac{x^3-1}{x^3+1}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x^3-1)(x+1)}{(x^3+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

例二. 以$(x+2)/x$乘$1-(x-2)/(x^2+x-2)$.

$$\left(1-\frac{x-2}{x^2+x-2}\right)\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{x^2}{x^2+x-2}\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{x}{x-1}.$$

**乘方**　由§503得下之法則. 504

欲作一分式之任與乘冪,將分子及分母各作此乘冪可矣.

即
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

何則, $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\cdots$迄$n$因式$=\dfrac{a\cdot a\cdots\cdots 迄\ n\ 因式}{b\cdot b\cdots\cdots 迄\ n\ 因式}=\dfrac{a^n}{b^n}$.

例. 求$-ab^2c^3/efg^4$之立方.

$$\left(-\frac{ab^2c^3}{efg^4}\right)^3=-\frac{a^3b^6c^9}{e^3f^3g^{12}}.$$

**除法**　所謂將一分式,如$a/b$,倒轉者,即將分子與分母易位也.所得之分式$b/a$,稱爲$a/b$之倒分式. 505

以一分式除又一分式時,可以除式之倒分式乘被除式.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

何則,因兩端各乘$c/d$,其積為$a/b$也,(參看§253).

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b};\text{及}\ \frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}.\qquad §§\ 252,\ 254,\ 503$$

特例,以整式除分式時,但以其式乘分母可矣.

例一. 以$(x^4+x^2y^2+y^4)/(x^4-y^4)$除$(x^2-xy+y^2)/(x^2-y^2)$.

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\div\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^4-y^4}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^4-y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

例二. 以$x^2+6x+8$除$(x^2+5x+6)/(x+1)$.

$$\frac{x^2+5x+6}{x+1}\div(x^2+6x+8)=\frac{x^2+5x+6}{(x+1)(x^2+6x+8)}$$

$$=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+4)}=\frac{x+3}{x^2+5x+4}.$$

506 **有理式之一般 繁分式及連分式** 上已證明,二分式之和,差,積,商仍為分式.故凡有理式(§267)皆得化為有理簡分式之形式.

關於有理式之化為最簡形式,如何始為最良之方法,並無普徧之法則.努力避免一切非必要之步驟.且特別須留心乘機化分式為最低項,化至無可再化時,始可行多項式之乘法.

507 前曾述及,§435,$A$或$B$或二者為分式時,$A/B$為繁分式.

簡化繁分式$A/B$時,有時宜先依§505之法則以$B$除$A$,有時則先以$A$及$B$中諸分母之L.C.M.乘$A$與$B$較便.取此各種步驟之前,最好先將$A$及$B$各自簡化.

例一. 簡化$\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)\Big/\left(\frac{a-b}{a+b}+1\right)$.

$$\frac{\frac{a+b}{a-b}+1}{\frac{a-b}{a+b}+1}=\frac{\frac{a+b+a-b}{a-b}}{\frac{a-b+a+b}{a+b}}=\frac{\frac{2a}{a-b}}{\frac{2a}{a+b}}=\frac{2a}{a-b}\cdot\frac{a+b}{2a}=\frac{a+b}{a-b}.$$

應注意者,當繁分式之兩項各為簡分式時,兩分式分子間或分母間之公因式可同時約去.例如,在上之第三式中,$2a$可以約去.

例二． 簡化 $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)\Big/\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)$.

可仿例一演算；然先以 $(a+b)(a-b)$ 乘兩項,為法較簡.

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{a(a-b)+b(a+b)}=\frac{a^2+ab-ba+b^2}{a^2-ab+ba+b^2}=1.$$

例三． 簡化 $\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f}}}$

從最下部向上演算,得

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f}}}=\cfrac{a}{b+\cfrac{cf}{df+e}}=\frac{a(df+e)}{b(df+e)+cf}=\frac{adf+ae}{bdf+be+cf}.$$

繁分式如例三所示者,稱為連分式.

## 習 題 XXV

簡化下列各式.

1. $\frac{1}{2a-3b}+\frac{1}{2a+3b}-\frac{6b}{4a^2-9b^2}$.

2. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^3+1}$.

3. $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-4x+3}$.

4. $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}-\frac{x+2}{(2-x)(x-3)}+\frac{x+3}{(3-x)(1-x)}$.

5. $\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}+\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}$.

6. $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

7. $\frac{yz(x+a)}{(x-y)(x-z)}+\frac{zx(y+a)}{(y-z)(y-x)}+\frac{xy(z+a)}{(z-x)(z-y)}$.

8. $x+\frac{1}{3-2x}-\frac{8x^4-33x}{8x^3-27}-\frac{2x+6}{4x^2+6x+9}$.

9. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(xy+\frac{1}{xy}\right)$.

10. $\dfrac{(a+b)^3-c^3}{a+b-c}+\dfrac{(b+c)^3-a^3}{b+c-a}+\dfrac{(c+a)^3-b^3}{c+a-b}$.

11. $\dfrac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+6}-\dfrac{3x^2-14x-5}{3x^3-2x^2-10x-3}$.

12. $\dfrac{1}{x^4-4x^2-x+2}+\dfrac{1}{2x^4-3x^3-5x^2+7x-2}+\dfrac{1}{2x^4+3x^3-2x^2-2x+1}$.

13. $\left(a^4-\dfrac{1}{a^4}\right)\div\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$.　　14. $\left(\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}\right)(a^4+a^3)$.

15. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}\cdot\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\div\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}$.

16. $\dfrac{1}{x}-\left\{1-\left[\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)}\right)\right]\right\}$.

17. $\dfrac{ax+x^2}{2b-cx}\cdot\dfrac{2bx^2-cx^3}{(a+x)^2}$.　　18. $(x^2-y^2-z^2+2yz)\div\dfrac{x-y+z}{x-y-z}$.

19. $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right)\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$.

20. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}}\div\dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+z}}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}}$.　　21. $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}\div\dfrac{\dfrac{1}{a^4}-\dfrac{1}{b^4}}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2}$.

22. $\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}$.　　23. $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}$.

## 不 定 形

508　**極限**　設變數 $x$ 依次取 $1/2, 3/4, 7/8, 15/16$ 等值無終極;則顯而易見 $x$ 逐漸接近值 1, 因而差 $1-x$ 最後終能變爲且永爲小於可指定之各正數,不論此數小至何似. 凡此吾人以一語表之: $x$ 循無盡數列 $1/2, 3/4, 7/8, 15/16, \cdots\cdots$ 而遞變時,趨近 1 爲極限.

普徧言之,若 $x$ 指示一變數,假定此變數循一與無盡數列而遞變,又若有一數 $a$ 存在,差 $a-x$ 之絕對值最後終能變爲

且永爲小於可指定之各正數,則稱 $x$ 趨近此數 $a$ 爲極限.

$x$ 之趨近極限 $a$, 以 $x \to a$ 或 $\lim x = a$ 表之.

應注意者,變數一語在此處之意義.較 § 242 所云爲狹.

究竟此種變數趨近極限與否,全視假定其遞變時所循之數列如何而定.譬如,若數列爲 1, 2, 1, 2,……, 變數即不能趨近極限.

變數與極限之備細討論,詳 §§ 108—205. 學者宜複習一過,至少亦當閱其一部分,俾收聯絡之效.

**關於極限之定理** 於 § 203 已證明,若變數 $x$ 及 $y$ 趨近極限,則其和,差,積,商亦趨近極限,及 509

$$\lim(x+y) = \lim x + \lim y.$$

$$\lim(x-y) = \lim x - \lim y.$$

$$\lim xy = \lim x \cdot \lim y.$$

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \text{ 但 } \lim y = 0 \text{ 除外.}$$

由此諸定理,若 $F(x)$ 指示任與之 $x$ 之有理函數,而 $F(a)$ 爲其 $x=a$ 時之值,則凡 $x$ 趨近 $a$ 爲極限時, $F(x)$ 必趨近 $F(a)$ 爲極限,即

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a),$$

其中 $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ 讀爲"$x$ 趨近 $a$ 時 $F(x)$ 之極限".

例如,
$$\lim_{x \to a}(2x^2 - 3x + 1) = 2a^2 - 3a + 1.$$

**無窮大(Infinity)** 顯而易見若使 $x$ 循無盡數列 1,2,3,4,…… 而遞變, $x$ 最後終能變爲且永爲大於可指定之各數. 510

變數 $x$ 之絕對值最後終能變爲且永爲大於可指定之各數如上時,稱爲趨於無窮大.

無窮大之符號爲 $\infty$, $x$ 趨於無窮大,以 $x \to \infty$ 或 $\lim x = \infty$ 表之.

應特別注意者,如此定義之 $\infty$, 不表一定之數,且不適用數之運算 511

法則.說明詳後.

"$x$趨於無窮大"一語,祇爲"$x$係最後終能變爲且永爲大於可指定之各數之變數"之簡言而已.

爲便利起見,有時書$\lim x=\infty$,此時極限一語,當然不具§503所述之一定意義.

512 **定理** 任與之分式,分子爲常數而分母爲變數.

若分母趨近0爲極限,則分式趨於$\infty$;若分母趨於$\infty$,則分式趨近0爲極限.

譬如,取分式$1/x$考之,

若$x$循數列1, 0.1, 0.01, 0.001,……而遞變以趨近0, $1/x$即循數列1, 10, 100 1000,……而遞變,故趨於$\infty$.

又若$x$循數列1, 10, 100, 1000,……而遞變以趨於$\infty$, $1/x$即循數列1, 0.1, 0.01, 0.001,……而遞變,故趨近0爲極限.

一般亦如此.

513 **不定形**(Indeterminate forms) 就$f(x)/\phi(x)$形式之有理分式而論,除能使$\phi(x)=0$之値外,$x$每有一値,分式卽有一定値與之對應.但當$\phi(x)=0$時,則分式呈$0/0$或$a/0$之形式,二者在算術上皆無意義,§103.雖然,此二種情形之分式若得指定意義,實甚便利.

514 **0/0之形** $x=1$時,分式$(x^2-1)/(x-1)$呈$0/0$之形式.

今將$x=1$之情形除外,則$x^2-1$可以$x-1$除之,而

$$(x^2-1)/(x-1)=x+1.$$

且無論$x$與1之差小至何似,上式常眞.以故,若不令$x$眞取1之値,而使之趨近1爲極限,必能得

$$\lim(x^2-1)/(x-1)=\lim(x+1)=2.$$

然則運算法則雖未指定$(x^2-1)/(x-1)$當$x=1$時之意義,可由運算法則證明,而當$x$趨近1爲極限時,此分式常趨近一

定之極限 2.

然吾人曾證明, § 509, 凡 $F(x)$ 代表有理函數而 $F(a)$ 有意義時, $F(a)=\lim_{x\to a} F(x)$. 以故, 運算法則不指定 $F(a)$ 之意義如今茲時, 將 $\lim_{x\to a} F(x)$ 指定為 $F(a)$ 之值甚便; 換言之, 吾人以公式 $F(a)=\lim_{x\to a} F(x)$ 為 $F(a)$ 之定義.

故吾人指定 2 為 $(x^2-1)/(x-1)$ 在 $x=1$ 時之值. 於是對於 $x$ 之一切值, 1 不除外, $(x^2-1)/(x-1)=x+1$.

同理, 凡分式可書作 $(x-a)f(x)/(x-a)\phi(x)$ 之形, 其中 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 為整式, 且 $\phi(x)$ 不能為 $x-a$ 所整除時, 皆指定 $f(a)/\phi(a)$ 為其 $x=a$ 時之值. 由是對於 $x$ 之一切值, $a$ 不除外,

$$\frac{(x-a)f(x)}{(x-a)\phi(x)}=\frac{f(x)}{\phi(x)}.$$

**a/0 之形**　$x=0$ 時, 分式 $1/x$ 呈 $1/0$ 之形式. 515

吾人雖不能以 0 除 1, 但可以 $x$ 之值與 0 相差之小如吾人意之所欲者除之. 而前已證明, § 512, 若使 $x$ 趨近 0 為極限, $1/x$ 即趨近 $\infty$.

故吾人指定 $\infty$ 為 $1/0$ 之"值", 普徧言之, 則為 $a/0$ 之"值", 其中 $a\neq 0$, 書作

$$\frac{a}{0}=\infty.$$

同理, 凡分式呈

$$f(x)/(x-a)\phi(x)$$

之形式, 其中 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 為整式, 且 $f(x)$ 不能為 $x-a$ 所整除時, 皆指定 $\infty$ 為其 $x=a$ 時之"值"; 其意為 $x$ 趨近 $a$ 為極限時, 分式必趨於 $\infty$.

516　**關於分式之值之結論**　關於呈 $f(x)/\phi(x)$ 形式之簡分式，由 §§ 514, 515 得結論如下.

1. 若 $f(x)/\phi(x)$ 爲最低項分式，則當 $x$ 之值使分子 $f(x)$ 爲 0 時，分式爲 0；而當 $x$ 之值使分母 $\phi(x)$ 爲 0 時，分式爲無窮大. 對於 $x$ 之一切其他有窮值，分式有異於 0 與 $\infty$ 之值.

2. 但若 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 有公因式 $x-a$，且 $f(x)$ 含此因式 $m$ 次，而 $\phi(x)$ 含 $n$ 次，則 $x=a$ 時，若 $m>n$. $f(x)/\phi(x)$ 爲 0，若 $m<n$，分式爲無窮大，又若 $m=n$，分式有異於 0 與 $\infty$ 之值.

例如，當 $x=2$ 時，

$$\frac{x-2}{x+1}=0,\quad \frac{x+1}{x-2}=\infty,\quad \frac{(x-2)^3}{x(x-2)}=0,\quad \frac{x-2}{x(x-2)^2}=\infty,\quad \frac{(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\frac{1}{2}.$$

517　**$\infty/\infty$ 之形**　當 $x$ 無限增大時，卽 $x\to\infty$ 時，分式 $f(x)/\phi(x)$ 之值究竟趨近何等極限，常有考求之必要.

試取下列諸例考之.

前已證明，§ 512，$x\to\infty$ 時，$1/x,\ 1/x^2,\cdots\cdots\to 0.$

故 $x\to\infty$ 時，

$$\frac{x^2-x+3}{2x^2+x-4}=\frac{1-1/x+3/x^2}{2+1/x-4/x^2}\to 1/2, \tag{1}$$

$$\frac{x+2}{x^2+x+5}=\frac{1+2/x}{x+1+5/x}\to 0, \tag{2}$$

$$\frac{x^2+x-7}{2x+3}=\frac{x+1-7/x}{2+3/x}\to\infty. \tag{3}$$

普偏言之，$x\to\infty$ 時，若分子分母次數相同，如 (1)，分式

$$(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m)/(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n)$$

趨近 $a_0/b_0$ 爲極限；若分母次數較高，如 (2)，分式趨近 0 爲極限；若分子次數較高，如 (3)，分式趨於 $\infty$ 爲極限.

在各種情形其極限皆稱爲"$x=\infty$ 時分式所取之值"，卽分式自身作不定形 $\infty/\infty$ 時所取之值.

**$0\cdot\infty$ 及 $\infty-\infty$ 之形** 對於 $x$ 之特殊值, $x$ 之有理函數或作不定形 $0\cdot\infty$ 或 $\infty-\infty$. 然此式必能化為已討論之各形 $0/0$, $a/0$, 或 $\infty/\infty$ 之一. 518

1. 例如, $x=1$ 時, $(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}$ 呈 $0\cdot\infty$ 之形式. 然除 $x=1$ 時外, $(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, 從而

$$\lim_{x\to1}\left[(x^2-1)\cdot\frac{1}{x-1}\right]=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2.$$

故吾人指定 2 為與式當 $x=1$ 時之值.

2. 又當 $x=0$ 時, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x(x+2)}$ 呈 $\infty-\infty$ 之形式. 然除 $x=0$ 時外, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x(x+2)}=\dfrac{x}{x(x+2)}$, 從而

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(x+2)}\right]=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(x+2)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}.$$

故吾人指定 $1/2$ 為 $x=0$ 時與式之值.

**總結論** 以故,祇含一變數之與函數,如 $F(x)$, 若 $x=a$ 時作不定形,可進行如下: 519

將與式化為最簡形式,再求使 $x$ 趨近 $a$ 為極限時,其式之值趨近何等極限.名此極限為 $x=a$ 時函數之值.

**[illegible]** 此法限於祇含一變數之函數,如 $F(x)$. 何則,此法所以能得一定結果之故,蓋因 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 之值全視 $a$ 之值而定,與 $x$ 趨近 $a$ 時所取之值無關,而在多變數函數則不然也. 520

例如,假定 $x$ 與 $y$ 為不相關之變數,試取 $x=0$, $y=0$ 時之分式 $x/y$ 考之.

$x\to0$, $y\to0$ 時, $x/y$ 若能趨近極限, 其極限隨 $x$ 及 $y$ 遞變時所循之數列而定.

例如,變數循下列數列之任一而遞變時,能趨近 0 為極限.

$1/2,\ 1/3,\ 1/4,\cdots\cdots(1);\qquad 1/2^2,\ 1/3^2,\ 1/4^2,\cdots\cdots(2)$

如 $x$ 循 (1), $y$ 循 (2) 而遞變, $x/y$ 即循數列 $2, 3, 4, \cdots\cdots$ 而遞變, 故趨於 $\infty$. 然若 $x$ 循 (2), $y$ 循 (1) 而遞變, 則 $x/y$ 循數列 $1/2, 1/3, 1/4, \cdots\cdots$ 而遞變, 故趨近 0.

以故, 如 $x$ 與 $y$ 為不相關之變數, 吾人認 $x/y$ 在 $x=0$, $y=0$ 時為絕對的不定.一般亦如此.

521 **無窮大與運算法則之關係** 若計及文字之無窮大値,則應述 §§ 249, 251, 253 之法則如下:

1. $a\cdot 0=0$, 但 $a=\infty$ 除外.

2. 若 $ac=bc$, 則 $a=b$, 但 $c=0$ 或 $\infty$ 除外.

3. 若 $a+c=b+c$, 則 $a=b$, 但 $c=\infty$ 除外.

應用運算法則解方程式時,應切記此諸例外情形.

例如,取乘積 $\frac{1}{x^2-1}\cdot x-1$ 考之.當 $x=1$ 時,第二因式, $x-1$, 為 0; 然乘積並不隨第二因式而為 0, 因第一因式 $1/(x^2-1)$ 其時為 $\infty$ 故也.乘積實為 $1/2$, § 518.

522 **方程式之無窮大根** 方程式 $x+2=x+3$ 及其他之得化為 $0.x=b$ 形式之一次方程式,以前稱為無根者,亦可謂以 $\infty$ 為根.

何則,無論 $a$ 小至何似,如不真為 0, $ax=b$ 即有根 $b/a$. 又若 $b$ 保持不變且異於 0, 而使 $a$ 趨近 0 為極限, $b/a$ 即趨於 $\infty$, § 512. 換言之, $ax=b$ 趨近 $0x=b$ 之形式時,其根 $b/a$ 趨於 $\infty$. 故謂 $ax=b$ 呈 $0x=b$ 之形式時,以 $\infty$ 為根,甚與 § 515 中所述一致.

應注意者,認 $x+2=x+3$ 為以 $\infty$ 為根之真方程式,不致陷於 $2=3$ 之謬論,蓋既因 $x=\infty$, 吾人即無權利斷定由兩端減 $x$ 之結果為真等式也, § 521, 3.

523 **聯立方程式之無窮大解** 同理,稱為無解之矛盾一次方程式, § 377, 2, § 394, 2 亦可謂有無窮大解; 何則,由此種方程式可用消去法得一 $0x=b$ 形式之方程式,而依 § 522 此方程式以 $\infty$ 為根也.

例如,矛盾方程式 $y-x=0$ (1), $y-x=1$ (2) 可謂有無窮大解.

應注意者,方程式 (1), (2) 為下方程式 $m\to 1$ 時之極限情形.

$$y-mx=0 (3), \qquad y-x=1 (2).$$

方程式 (3), (2) 之解為

$$x=1/(m-1), \qquad y=m/(m-1),$$

而 $m\to1$ 時, $1/(m-1)$ 及 $m/(m-1)$ 皆趨於無窮大.

此事可用圖示方法說明, §§ 386, 387. 何則, 趨 $m\to1$ 時, (3) 之圖象趨於與 (2) 之圖象平行之位置,而兩圖象之交點退向平面之無窮遠處.

## 習 題 XXVI

指定下列各式適當之值.

1. $x=2$ 時, $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$.
2. $x=1$ 時, $\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-2x+1}$.
3. $x=1$ 時, $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$.
4. $x=a$ 時, $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-(a+b)x+ab}$.
5. $x=-2$ 時, $\dfrac{(3x+1)(x+2)^2}{(x^2-4)(x^2+3x+2)}$.
6. $x=1$ 時, $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$.
7. $x=\infty$ 時, $\dfrac{3x^2-x+5}{2x^2+6x-7}$, $\dfrac{x^2+1}{x}$, $\dfrac{3x}{x^2+1}$, $\dfrac{(2x^2+1)(x^3-5)}{(x^4+1)(x-6)}$.
8. $x=3$ 時, $\dfrac{x-1}{x^2-9}-\dfrac{x-2}{x(x-3)}$.
9. $x=1$ 時, $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x(x-1)}$.
10. $x=2$ 時, $\dfrac{x^2+\dfrac{x+1}{x-2}}{x^2+\dfrac{x-1}{x-2}}$.
11. $x=\infty$ 時, $\dfrac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{3x+1}{x^2+1}}$.

# 分 式 方 程 式

**分式方程式之解法** 任與之分式方程式,若以諸分式之最低公分母 $D$ 乘兩端,可變換為整方程式.此種程序,謂之消去方程式中之分式. 524

由 §§ 341, 342, 如此導出之整方程式具有原方程式之一切根,而此外若尚有他根,則必屬方程式 $D=0$ 之根,故甚易檢出而棄去之.

例一. 解 $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+13}{x(x-1)}=0.$ (1)

乘 $D=x(x-1)$ 以消去分式,

則得 $3(x-1)+6x-(x+13)=0,$ (2)

解 (2), $x=2.$ (3)

因 2 非 $D=x(x-1)=0$ 之根,故 2 爲 (1) 之根,且爲其唯一之根.

例二. 解 $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+5}{x(x-1)}=0.$ (1)

消去分式, $3(x-1)+6x-(x+5)=0.$ (2)

解 (2), $x=1,$ (3)

因 1 爲 $D=x(x-1)=0$ 之根,故 1 非 (1) 之根. 實則 $x=1$ 時, (1) 之左端是 $3+6/0-6/0$ 之形式,依 § 518 可求得其值爲 8, 非 0.

故 (1) 無根.

**概括以上說明之方法,得法則如下:**

525 **欲解分式方程式,先將諸分式之最低公分母 $D$ 乘兩端以消去分式.**

**解所得之整方程式.**

**整方程式之根——若有能使 $D$ 爲 0 者應除外——即原方程式之根.**

526 **附註** 吾人亦可確立此法則如下:

集原方程式之項於左端而加之,令 $N/D=0$ 表其結果;則 $N=0$ 即爲消去分式所得之整方程式.

1. 如 $N/D$ 爲最低項分式, $N/D=0$ 與 $N=0$ 有同根; 何則,最低項分式爲 0,在於且限於分子爲 0 時, § 516.

例如,於 § 524, 例一, $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+13}{x(x-1)}=\frac{8(x-2)}{x(x-1)}=\frac{N}{D}.$

此處 $N/D$ 爲最低項分式,故 $N/D=0$ 之根即 $N=0$ 之根,亦即 2.

2. 如 $N/D$ 非最低項分式, $N=0$ 有 $N/D=0$ 所無之根,即能使 $N$ 與 $D$ 之公因式爲 0 之根.

例如,於 § 524, 例 2, $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+5}{x(x-1)}=\frac{8(x-1)}{x(x-1)}=\frac{N}{D}.$

此處 $N/D$ 非最低項分式,故 $N=0$ 之根,即 1, 非 $N/D=0$ 之根;因當 $x=1$ 時,

$N/D=8$, §514.

顯而易見1,爲普徧情形,而2爲例外情形.

例如.取方程式 $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+a}{x(x-1)}=0$ 考之.

此處 $N/D=[8x-(a+3)]/x(x-1)$, 除 $a=5$ 或 $-3$ 時外,此爲最低項分式.

3. 如由上所述,即謂凡 $N=0$ 之根能適合 $D=0$ 者,必不能適合原方程式,則又不然.

例如,取方程式 $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x(x-1)}=0$ 考之.

此處 $N/D=(x-1)^2/x(x-1)$, 依 §516, $x=1$ 時此式爲0. 然須注意 $N=(x-1)^2=0$ 有根1之次數較 $D=x(x-1)=0$ 爲多.

應用§525之法則時,必須注意勿使選作最低公分母之式,更含餘外之因式. 527

方程式中若有非最低項之分式,宜先簡化之,但若由是約去之因式,含於另一分母中時,此因式可不必約去.

消去分式之前,有時最好將若干分式合併,或化爲帶分式.

例一. 解 $\frac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}-\frac{x^2}{6x-2x^2}=\frac{11}{5}$.

第一分式之兩項有公因式 $x-5$, 第二分式之兩項有公因式 $x$, 約去後得

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{x}{6-2x}=\frac{11}{5}, \text{ 卽 } \frac{x-1}{x-3}+\frac{x}{2(x-3)}=\frac{11}{5}.$$

消去分式, $$10x-10+5x=22x-66.$$

解之, $$x=8.$$

例二. 解 $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+6}{x+7}=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+5}{x+6}$.

先將各分式化爲帶分式,然後簡化,

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+6}.$$

移項,俾各端之兩項間有減號,

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}.$$

兩端各自併項.

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x^2+13x+42}.$$

消去分式，　　$x^2+13x+42=x^2+5x+6.$

解之，　　$x=-9/2.$

就原方程式消去分式亦可得解然繁複遠過於此.

528 **聯立分式方程式** 解分式方程式之普徧方法，先將各方程式消去分式，若可能時，再求結果所得之整方程式之解．如此求得之解——若有能使所與方程式之分母為0者應除外——即分式方程式之解，§371.

但若所與之方程式呈§379所述之形式，或得化為此種形式時，則應依彼處說明之方法解之．

例一．就$x$, $y$解下方程式．

$$\frac{x-1}{y-2}-\frac{x-3}{y-4}=0,\quad \frac{1}{xy-2x}+\frac{1}{4y-2y^2}-\frac{2}{xy}=0.$$

兩方程式消去分式再簡化，

$$x-y+1=0,\quad x+2y-8=0.$$

解之，　　$x=2,\quad y=3.$

$x=2$, $y=3$時，所與方程式中無一分母為0，故方程式以$x=2$, $y=3$為解．

例二．就$x$, $y$, $z$解下方程式．

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6},\quad \frac{yz}{y+z}=-\frac{3}{2},\quad 2(z+x)+xz=0.$$

此諸方程式可化為下之形式，§379.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6},\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{2}{3},\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}.$$

就$1/x$, $1/y$, $1/z$解之，得$1/x=1/2$, $1/y=1/3$, $1/z=-1$.

故所求之解為$x=2$, $y=3$, $z=-1$.

## 習題 XXVII

就$x$解下列各方程式．

1. $\frac{6x-1}{3x+2}-\frac{4x-7}{2x-5}=0.$

2. $\frac{6x}{5x-1}+\frac{8}{3-15x}=\frac{1}{6}$.

3. $\frac{4}{x-2}-\frac{1}{x-4}=\frac{4}{x^2-6x+8}$.

4. $\frac{3}{2x+3}+\frac{1}{x-5}-\frac{8}{2x^2-7x-15}=0$.

5. $\frac{1}{(x+1)(x-3)}+\frac{2}{(x-3)(x+2)}+\frac{3}{(x+2)(x+1)}=0$.

6. $\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+4x-5}+\frac{3}{x^2+6x+5}=0$.

7. $\frac{x+1}{3x+1}+\frac{2x}{5-6x}=\frac{5}{5+9x-18x^2}$

8. $\frac{x+a}{b(x+b)}+\frac{x+b}{a(x+a)}=\frac{a+b}{ab}$.

9. $\frac{x^3+1}{x+1}-\frac{x^3-1}{x-1}=20$.

10. $\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+4}+\frac{x-1}{x^2+3x-4}=0$.

11. $\frac{x-8}{x-3}-\frac{x-9}{x-4}=\frac{x+7}{x+8}-\frac{x+2}{x+3}$.

12. $\frac{x+7}{x+6}+\frac{x+9}{x+8}=\frac{x+10}{x+9}+\frac{x+6}{x+5}$.

13. $\frac{x^3+2}{x-2}-\frac{x^3-2}{x+2}-\frac{15}{x^2-4}=4x$.

14. $\frac{1}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}+\frac{3x^2+x}{1-x^4}=0$.

15. $\frac{3}{x^3-8}+\frac{2x+5}{2x^2+4x+8}-\frac{1}{x-2}=0$.

16. $\frac{ax+c}{x-p}+\frac{bx+d}{x-q}=a+b$.

17. $\frac{x^2+7x-8}{x-1}+\frac{x^2+x+3}{x+2}+\frac{2x^2-x+7}{x+3}=4x$.

18. $\frac{x^2-ax+2bx-2ab}{x-a}+\frac{b^2-x^2}{x-2b}+\frac{3c^2}{x-2c}=0$.

19. $\frac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)}+\frac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)}+\frac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)}=3$.

20. $\frac{3x+2}{x^2+x}-\frac{x-5}{x^2-1}-\frac{x-2}{x^2-x}=0$.

21. $\frac{a}{x+2}+\frac{2}{x-2}-\frac{x+6}{x^2-4}=0.$

就 $x$ 及 $y$ 或就 $x, y$, 及 $z$ 解下列各方程式.

22. $\begin{cases}\frac{3x+y-1}{x-y+2}=\frac{6}{7},\\ \frac{x+9}{y+4}=\frac{x+3}{y+3}.\end{cases}$

23. $\begin{cases}\frac{y-2}{x-3}+\frac{x-y}{x^2-9}=\frac{y-4}{x+3},\\ \frac{2}{x^2-2x}+\frac{3}{xy-2y}+\frac{9}{xy}=0.\end{cases}$

24. $\begin{cases}\frac{xy}{x+y}=a,\\ \frac{yz}{y+z}=b,\\ \frac{zx}{z+x}=c.\end{cases}$

25. $\begin{cases}\frac{2}{x+2y}+2y+2z=3,\\ \frac{y+z}{2}-\frac{5}{z-3x}=\frac{7}{2},\\ \frac{4}{z-3x}-\frac{2}{x+2y}=-1.\end{cases}$

## 部分分式

529 由 §506, 凡祇含一變數, 如 $x$, 之有理函數, 皆得化爲整函數或眞分式, 或整函數與眞分式之和之形式.

爲某種目的, 有作進一步之變換之必要, 即已與眞分式 $A/B$ 時, 須求和爲 $A/B$ 之最簡之一組分式. 其法基於下之諸定理, 其中 $A, B, P, Q$, 等文字指示 $x$ 之有理整函數.

530 **定理一** 二眞分式 $A/B$ 與 $C/D$ 之和及差仍爲眞分式.

何則,
$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD\pm BC}{BD}.$$

因 $A$ 次數較 $B$ 低, 故 $AD$ 次數較 $BD$ 低.

又因 $C$ 次數較 $D$ 低, 故 $BC$ 次數較 $BD$ 低.

故 $AD\pm BC$ 次數較 $BD$ 低.

531 **定理二** 令 $I$ 及 $I'$ 指示整函數, 而 $A/B$ 及 $A'/B'$ 爲眞分式. 若 $I+A/B\equiv I'+A'/B'$, 則 $I\equiv I'$ 而 $A/B\equiv A'/B'$.

何則, 由假設, $I-I'\equiv A'/B'-A/B$.

然 $I-I'$ 指示整函數(或 0), 而 $A'/B'-A/B$ 指示眞分式(或 0), § 530.

因整函數不能恆等於眞分式,故

$$I-I'\equiv 0 \text{ 及 } A'/B'-A/B\equiv 0,$$

即　$$I\equiv I' \text{ 及 } A/B\equiv A'/B'.$$

**定理三**　令 $A/PQ$ 指示眞分式.其分母已分解爲二互質因式 $P$ 及 $Q$. 532

此分式得化爲 $B/P$ 及 $C/Q$ 形式之二眞分式之和.

何則,因 $Q$ 與 $P$ 互質,吾人能求得二整函數 $M$ 及 $N$, § 479, 俾

$$1\equiv MQ+NP, \text{ 從而 } A\equiv AMQ+ANP.$$

故　$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{AMQ+ANP}{PQ}\equiv\frac{AM}{P}+\frac{AN}{Q}. \quad (1)$$

若 $AM/P$ 與 $AN/Q$ 爲眞分式,則定理已得到證明.

若 $AM/P$ 與 $AN/Q$ 非眞分式,可將二者化爲整函數與眞分式之和,而令其結果爲

$$\frac{AM}{P}\equiv I+\frac{B}{P} \text{ 與 } \frac{AN}{Q}\equiv K+\frac{C}{Q}. \quad (2)$$

於 (1) 中以此諸式代 $AM/P$ 及 $AN/Q$, 得

$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}+I+K. \quad (3)$$

然因 $A/PQ$, $B/P$, 與 $C/Q$ 爲眞分式,由 (3), 依 §§530, 531, $I+K\equiv 0$

而　$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q},$$

此即求證之事.

**註**　分式 $A/PQ$ 化成之此種和 $B/P+C/Q$, 祇限於一. 533

何則,設　$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}\equiv\frac{B'}{P}+\frac{C'}{Q}, \quad (1)$$

其中$B'/P$與$C'/Q$亦為眞分式.

則 $$\frac{B-B'}{P}=\frac{C'-C}{Q}\ \text{從而}\ \frac{(B-B')Q}{P}=C'-C. \tag{2}$$

然除$B-B'=0$及$C'-C=0$外,(2)不可能.何則,非然者,(2)將表示$P$得整除$(B-B')Q$,此事不可能,因$Q$與$P$互質,而$B-B'$次數較$P$低也,§481.

534 **部分分式 (Partial fractions)** 已證明其存在之分式$B/P$與$C/Q$,吾人稱之為$A/PQ$之部分分式.

欲分解$A/PQ$形式之眞分式為部分分式$B/P$及$C/Q$,不須依§532所述之方法,但用待定係數法(§397)可矣.以例明之.

例一. 分解$(2x^2+1)/(x^3-1)$為二部分分式之和.

此式為眞分式,其分母為互質因式$x-1$與$x^2+x+1$之積.故$(2x^2+1)/(x^3-1)$等於以$x-1$及$x^2+x+1$為分母之二眞分式之和,§532.第一分式之分子必須為常數,第二分式之分子必須為次數至多為一之式.故應得

$$\frac{2x^2+1}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}, \tag{1}$$

其中$a$, $b$, 及$c$指示常數.

欲求$a$, $b$, $c$先消去(1)之分式.

即得 $$2x^2+1=a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1),$$

亦即 $$2x^2+1=(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c). \tag{2}$$

因(2)為恆等式,$x$之同次乘冪之係數應相等,§284.

故 $$a+b=2,\ a-b+c=0,\ a-c=1. \tag{3}$$

解(3),得 $$a=1,\ b=1,\ c=0.$$

故 $$\frac{2x^2+1}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2+x+1}.$$

例二. 分解$(5x+4)/(x^4+x^3+x^2-x)$為二部分分式之和.

535 **關於部分分式之普徧定理** 由§532之定理得下之結論.

1. 令$A/PQR$指示眞分式,其中分母之三因式$P, Q, R$互質.此分式得化為

$$\frac{A}{PQR}=\frac{B}{P}+\frac{D}{Q}+\frac{E}{R}$$

形式之和,其中$B/P$, $D/Q$, 及$E/R$指示眞分式.

何則,因 $P$ 與 $QR$ 互質, § 482, $A/PQR$ 爲呈 $B/P+C/QR$ 形式之二眞分式之和, § 532; 又因 $Q$ 與 $R$ 亦互質, $C/QR$ 又爲呈 $D/Q+E/R$ 形式之二眞分式之和, § 532.

分母爲任何個數之互質因式之積時仿此.

2. 試取眞分式 $A/PQ^3$ 考之,其中 $P$ 與 $Q$ 互質.依 § 532, 此式可分解爲二部分分式之和如下:

$$\frac{A}{PQ^3}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q^3}.$$

分式 $C/Q^3$ 不適用 § 532 之定理,因 $Q, Q, Q$ 三因式並不互質.

然因 $C$ 次數較 $Q^3$ 低,依 § 422, $C$ 得化爲 $Q$ 之多項式之形式

$$C\equiv C_1Q^2+C_2Q+C_3,$$

其中 $C_1$, $C_2$, 及 $C_3$ 次數較 $Q$ 低.

以 $Q^3$ 除此恆等式之兩端,得

$$\frac{C}{Q^3}\equiv\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\frac{C_3}{Q^3}.$$

故原分式得化爲和

$$\frac{A}{PQ^3}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\frac{C_3}{Q^3},$$

其中 $B$ 之次數較 $P$ 低,而 $C_1$, $C_2$, $C_3$ 次數較 $Q$ 低.

凡分母中所見因式,如 $Q$, 不止一次時,皆仿此.

故有下之定理:

假定所與之眞分式之分母已分解爲互質之因式,各因式或祇見一次,或不止一次.

則原式可分解爲一組,且只有一組,眞分式之和,其中 (1) 對於祇見一次之各因式, $P$, 卽有一 $B/P$ 形之分式存在, (2) 對於

共見 $r$ 次之因式 $Q$，即有一羣 $C_1/Q+C_2/Q^2+\cdots\cdots+C_r/Q^r$ 形之 $r$ 分式存在，而 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_r$ 次數各較 $Q$ 低．

536 **最簡部分分式** 吾人得證，凡具實係數之 $x$ 之多項式，皆爲呈 $x-a$ 及 $x^2+px+q$ 二者或任一形式之因式之積，其中 $a, p$，及 $q$ 爲實數，而 $x^2+px+q$ 之因式有虛係數．

復由 §§ 469, 532，若所與之眞分式，其分子及分母分成之因式具實係數，則其對應部分分式之分子亦然．故依 § 534，

凡分子分母具實係數之眞分式，皆等於一定部分分式之和，其部分分式與分母中因式 $x-a$ 及 $x^2+px+q$ 之關係如下：

1. 對於祇見一次之各因式 $x-a$，即有一 $A/(x-a)$ 形式之分式存在，其中 $A$ 爲實常數．

2. 對於共見 $r$ 次之因式 $x-a$，即有一羣

$$A_1/(x-a)+A_2/(x-a)^2+\cdots\cdots+A_r/(x-a)^r$$

形式之 $r$ 分式存在，其中 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_r$ 爲實常數．

3. 對於祇見一次之各因式 $x^2+px+q$，即有一形式爲 $(Dx+E)/(x^2+px+q)$ 之分式存在，其中 $D$ 及 $E$ 爲實常數．

4. 對於共見 $r$ 次之因式 $x^2+px+q$，即有一羣

$$(D_1x+E_1)/(x^2+px+q)+\cdots\cdots+(D_rx+E_r)/(x^2+px+q)^r$$

形式之 $r$ 分式存在，其中 $D_1, E_1, D_2, E_2, \cdots\cdots D_r, E_r$ 指示實常數．

537 上述諸分式通常稱爲原式之最簡部分分式．用待定係數法求之最便．

例一． 分解 $\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 爲最簡部分分式．

依 § 536，

$$\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}, \tag{1}$$

其中 $A, B, C$ 爲常數.

消去 (1) 之分式,得

$$x^2+x-3=A(x-2)(x-3)+B(x-3)(x-1)+C(x-1)(x-2). \qquad (2)$$

將 (2) 之右端依 $x$ 之乘冪排列,而等置同次乘冪之係數, $A, B, C$ 卽可求出;然因 $A, B, C$ 爲常數,用下法求之,較爲簡便.

於 (2) 令 $x=1$, 得 $-1=A(-1)(-2)$, $\therefore\ A=-1/2$;

次　令 $x=2$, 得 $3=B(-1)\cdot 1$　$\therefore\ B=-3$;

最後　令 $x=3$; 得 $9=C\cdot 2\cdot 1$,　$\therefore\ C=9/2$.

故 $$\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x-2}+\frac{9}{2(x-3)}.$$

例二. 分解 $\dfrac{x+1}{x(x-1)^3}$ 爲最簡部分分式.

依 § 536, $$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3},$$

從而 $$x+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx, \qquad (1)$$

於 (1) 令 $x=0$, 得 $1=A(-1)^3$,　$\therefore\ A=-1$;

次　令 $x=1$, 得 $2=D$　$\therefore\ D=2$.

以 $A$ 及 $D$ 之值代入 (1), 移如此求出之項 $-(x-1)^3$ 及 $2x$ 於左端,再簡化其結果,卽得

$$x^3-3x^2+2x=Bx(x-1)^2+Cx(x-1). \qquad (2)$$

以 $x(x-1)$ 除兩端,得

$$x-2=B(x-1)+C. \qquad (3)$$

等置 (3) 中 $x$ 之同次乘冪之係數,得

$$1=B \text{ 及 } -2=-B+C, \quad \therefore\ B=1 \text{ 而 } C=-1.$$

故 $$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$

或將 (1) 依 $x$ 之乘冪排列,卽得

$$x+1=(A+B)x^3-(3A+2B-C)x^2+(3A+B-C+D)x-A.$$

等置 $x$ 之同次乘冪之係數,

$$A+B=0,\ 3A+2B-C=0,\ 3A+B-C+D=1,\ -A=1.$$

由此諸方程式仍得

$$A=-1,\ B=1,\ C=-1,\ D=2.$$

例三. 分解 $\dfrac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}$ 爲最簡部分分式.

$x^2-x+1$ 之因式有虛係數,故依 § 536,

$$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}=\frac{Ax+B}{(x^2-x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}+\frac{E}{x-3},$$

其中$A, B, C, D, E$爲常數.

消去分式,

$$5x^2-4x+16=(Ax+B)(x-3)$$
$$+(Cx+D)(x^2-x+1)(x-3)+E(x^2-x+1)^2. \qquad (1)$$

將(1)依$x$之乘冪排列,再等置同次乘冪之係數. $A, B, C, D, E$即可求出;然下法較簡便.

於(1),令$x=3$,得$49=49E$, $\therefore E=1$.

以$E$之值代入(1),移如此求出之項$(x^2-x+1)^2$於左端,簡化之,再以$x-3$除兩端,即得

$$-(x^3+x^2+x+5)=Ax+B+(Cx+D)(x^2-x+1). \qquad (2)$$

次以$x^2-x+1$除(2)之兩端,即得

$$-x-2-\frac{2x+3}{x^2-x+1}=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+Cx+D. \qquad (3)$$

依§531, (3)中兩分式部分及兩整式部分各相等.

故 $-x-2=Cx+D$, 從而 $C=-1, D=-2$,

又 $-2x-3=Ax+B$, 從而 $A=-2, B=-3$.

故 $$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}=-\frac{2x+3}{(x^2-x+1)^2}-\frac{x+2}{x^2-x+1}+\frac{1}{x-3}.$$

**538** 原式之分母呈$(x-a)^r$之形式時,最好先將分子以$x-a$之乘冪表之,§423.同理,分母呈$(x^2+px+q)^r$之形式,而$x^2+px+q$之因數有虛係數時,宜將分子以$(x^2+px+q)^r$之乘冪表之.

例. 分解$\dfrac{x^4+x^3-8x^2+6x-32}{(x-2)^5}$爲最簡部分分式.

依§423,

$$x^4+x^3-8x^2+6x-32=(x-2)^4+9(x-2)^3+22(x-2)^2+18(x-2)-28.$$

以$(x-2)^5$除兩端,即得

$$\frac{x^4+x^3-8x^2+6x-32}{(x-2)^5}=\frac{1}{x-2}+\frac{9}{(x-2)^2}+\frac{22}{(x-2)^3}+\frac{18}{(x-2)^4}-\frac{28}{(x-2)^5}.$$

**539** 若所與之式爲假分式,則先化爲整式與眞分式之和,然後分解後者爲部分分式.

**例.** 應用此法於分式 $\dfrac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}$.

$$\frac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}=x+2+\frac{7x-11}{x^2-4x-5}=x+2+\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)};$$

仿上求得

$$\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)}=\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x-5}.$$

## 習　題　XXVIII

分解下列各式為最簡部分分式,而分母具實係數.

1. $\dfrac{2x+11}{(x-2)(x+3)}$.　　2. $\dfrac{6x-1}{(2x+1)(3x-1)}$.

3. $\dfrac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.　　4. $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$.

5. $\dfrac{x^2+2}{1+x^3}$.　　6. $\dfrac{8x+2}{x-x^3}$.

7. $\dfrac{x^3-x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$.　　8. $\dfrac{2x^3-x^2+1}{(x-2)^4}$.

9. $\dfrac{x-1}{2x^3-5x^2-12x}$.　　10. $\dfrac{6}{2x^4-x^2-1}$.

11. $\dfrac{2x^3-3x^2+4x-5}{(x+3)^5}$.　　12. $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

13. $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}$.　　14. $\dfrac{3x-1}{(x-2)(x^2+1)}$.

15. $\dfrac{2x^5-x+1}{(x^2+x+1)^3}$.　　16. $\dfrac{2x^2-x+1}{(x^2-x)^2}$.

17. $\dfrac{3x^2-x+2}{(x^2+2)(x^2-x-2)}$.　　18. $\dfrac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

19. $\dfrac{2x^2-3x-2}{x(x-1)^2(x+3)^3}$.　　20. $\dfrac{x^3+x+3}{x^4+x+1}$.

# IX. 對稱函數

## 絕對對稱及輪換對稱

**絕對對稱 (Absolute symmetry).** 式 $x^2+y^2+z^2$ 中之 $x, y, z$ 540

諸文字,有一特點可以注意.若將諸文字之任二互換,$x^2+y^2+z^2$ 卽變換而爲其恆等式 $y^2+x^2+z^2$, 或 $z^2+y^2+x^2$, 或 $x^2+z^2+y^2$ 凡此吾人以 $x^2+y^2+z^2$ 關於 $x, y, z$ 爲對稱一語表之.

普徧言之,若於含某組文字之函數中,將諸文字之任二互換,而此函數常變換爲其恆等函數,則稱此函數關於此諸文字爲對稱.

其他對稱函數例如:

$$(xy+xz+yz)/(x+y)(x+z)(y+z) \text{ 關於 } x,\ y,\ z \text{ 爲對稱;}$$

$$a+b+c \text{ 及 } (x+a)(x+b)(x+c) \text{ 關於 } a,\ b,\ c \text{ 爲對稱.}$$

反之,$x+y-z$ 非對稱函數;因若將 $y$ 與 $z$ 互換,則得 $x+z-y$, 不等於 $x+y-z$ 也.

541 吾人稱 $2x^2y$ 與 $3y^2z$ 爲關於變數 $x, y, z$ 之同形項 (Terms of the same type), 因將 $x, y, z$ 諸文字兩兩互換,能使此二項之變數部分 $x^2y$ 及 $y^2z$ 相互變換一般仿此.

542 含諸文字,如 $x, y, z$, 之整函數,其關於此諸文字爲對稱之充足兼必要條件,爲凡同形項皆有相同之係數.

此卽若對稱函數含某形式之一項,則必含其形式之一切項之意;換言之,凡由所述之項依一切可能方法互換文字而得之項,皆須有之.

例如,若欲 $ax^2+by^2+cz^2$ 爲對稱函數,須有 $a=b=c$.

又,若 $x, y, z$ 之對稱函數含 $x^2y$ 一項,則必皆含 $x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y$ 諸項.

543 由上之定理,易得關於所與一組文字之所與次對稱函數之普徧形式.

例如,關於 $x, y, z, u$ 之一次對稱函數,其普徧形式爲 $a(x+y+z+u)+b$, 其中 $a$ 及 $b$ 指示常數.

又關於 $x, y, z$ 之最普徧齊次對稱函數,其為一次,二次,及三次者如下:

1. $a(x+y+z)$.　　2. $a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+xz+yz)$.

3. $a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+cxyz$.

**對稱函數之表示方法**　記號 $\Sigma x^2$ 為 $x^2$ 之一切同形項之和之意;例如就 $x, y, z$ 三文字而論, $\Sigma x^2=x^2+y^2+z^2$. 同理, $\Sigma x^2y=x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y$; 餘仿此. 544

任與之對稱函數,可於諸項中每種形式選一項,而書符號 $\Sigma$ 於其和之前以表之.

例如, $\Sigma(2x-x^3y^2)=2x+2y+2z-x^3y^2-y^3x^2-x^3z^2-z^3x^2-y^3z^2-z^3y^2$.

對稱函數全部書出時,諸項最好依一定法則排列.下例示一甚便之法則,可以排列整對稱函數. 545

假定所考之文字為 $a, b, c, d$, 又名 $a, b, c, d$ 之順序為此諸文字之自然順序.

於是可書 $\Sigma ab$ 及 $\Sigma abc$ 如下:

$$\Sigma ab=ab+ac+ad+bc+bd+cd,\ \Sigma abc=abc+abd+acd+bcd.$$

注意各項中文字皆依自然順序而書者.

作 $\Sigma ab$ 時,吾人依次取 $a, b, c$ 各文字,而將其後之各文字附書於後, $\Sigma abc$ 之項則由 $\Sigma ab$ 之項用同法得出.

$m\neq n$ 時,可將 $\Sigma a^mb^n$ 之項排列如下:

$$\Sigma a^2b^3=a^2b^3+b^2a^3+a^2c^3+c^2a^3+\cdots\cdots+c^2d^3+d^2c^3.$$

注意吾人將指數之順序保持不變,而於指數之下,依 $ab$ 及 $ba$ 兩種順序,書 $\Sigma ab$ 之第一項之文字,餘仿此.

同理,可書 $\Sigma a^2b^3c^4=a^2b^3c^4+a^2c^3b^4+b^2c^3a^4+b^2a^3c^4+c^2a^3b^4+c^2b^3a^4$

+(由 $\Sigma abc$ 其餘各項用同法得出之項).

**關於對稱之普徧定理**　由對稱之定義, §540, 以運算法則變對稱函數之形式之結果,仍為對稱函數.特例, 546

二對稱函數之和,差,積,商,仍為對稱函數.

藉助於此定理,以代數算法結合所與對稱函數之結果,可

不煩演算而得出.只須計算各種形式之代表項可矣.

例一. 求 $(\Sigma a)^2=(a+b+c+\cdots\cdots)^2$.

顯而易見所求之結果為齊次二次對稱函數,由 $a^2$ 及 $\Sigma ab$ 兩種形式之項而成者.

故 $$(\Sigma a)^2=\Sigma a^2+2\Sigma ab.$$

例二. 求 $\Sigma x^2\cdot\Sigma x=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$.

顯而易見此積為 $x^3$ 及 $x^2y$ 兩種形式之項之和.

故 $$\Sigma x^2\cdot\Sigma x=\Sigma x^3+\Sigma x^2y=x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y.$$

例三. 求 $(\Sigma x)^3=(x+y+z)^3$.

所求之結果為關於 $x, y, z$ 之齊次三次對稱函數.故必有(§543).

$$(x+y+z)^3=a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+cxyz.$$

欲求 $a, b, c$ 諸常數之值,先為 $x, y, z$ 隨意指定三組值,可得 $a, b, c$ 之方程式,然後解方程式.

例如,置 $x=1,\ y=0,\ z=0$, 得 $1=a$. (1)

又,置 $x=1,\ y=1,\ z=0$, 得 $8=2a+2b$. (2)

最後,置 $x=1,\ y=1,\ z=1$, 得 $27=3a+6b+c$. (3)

解 (1), (2), (3), 得 $a=1,\ b=3,\ c=6$.

故 $$(\Sigma x)^3=\Sigma x^3+3\Sigma x^2y+6\Sigma xyz.$$

547 **輪換對稱 (Cyclo-symmetry)** 式 $x^2y+y^2z+z^2x$ 中之 $x, y, z$ 諸文字,若將 $x$ 換為 $y$, $y$ 換為 $z$, $z$ 換為 $x$, 則得與原式恆等之式 $y^2z+z^2x+x^2y$. 凡此吾人以 $x^2y+y^2z+z^2x$, 關於 $x, y, z$ 諸文字,依 $x, y, z$ 之順序而輪換對稱一語表之.

普徧言之,一式若將其中第一文字換為第二文字,第二文字換為第三文字,仿此進行,而末一文字換為第一文字時,而其式變換為恆等之式,則此式關於依某種順序排列之諸文字為輪換對稱.

如此交換文字之法,稱為輪換法 (Cyclic interchange).

548 應注意者, $x^2y+y^2z+z^2x$ 之項乃依輪換次序排列;蓋若將 $x$ 換為 $y$, $y$ 換為 $z$, 而 $z$ 換為 $x$ 時,第一項即變為第二項,第二項

變爲第三項,而第三項變爲第一項也.輪換式應用之處甚多,如依輪換次序排列,得使演算變爲簡易.

凡對稱函數必爲輪換式甚明,然輪換式不皆爲對稱式. 549

例如, $x^2y+y^2z+z^2x$ 爲輪換式,而非對稱式.若將 $x$ 與 $y$ 互換,其値即變.欲使此式成爲對稱式,須將 $y^2x+z^2y+x^2z$ 一羣之項加入.

由上例可知,輪換函數通常不能盡含所與形式之一切項,但所含各項必有相同之係數. 550

**定理** 二輪換函數之和,差,積,商,仍爲輪換函數. 551

可直接由輪換對稱之定義得出.

例. 求積 $(x^2y+y^2z+z^2x)(x+y+z)$.

顯而易見積爲輪換式而非對稱式.又積含 $x^3y$, $x^2y^2$, $x^2yz$ 諸項各一次,且祇含此種形式之項.

故積爲　$x^3y+y^3z+z^3x+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2yz+y^2zx+z^2xy.$

## 習 題 XXIX

1. 試述式 $x^4-2y^4+z^4+4(x^3-y^3)(y^3-z^3)(x^2+z^2)$ 關於若何之文字爲對稱.

2. 將以下關於 $a, b, c$ 之對稱函數全部書出.

$$\Sigma a^2b^2,\quad \Sigma a^3b^4,\quad \Sigma a^2/b,\quad \Sigma a^2b^3c^5,\quad \Sigma a^2b^2c^4,$$
$$\Sigma(a+b)c,\quad \Sigma(a+b^2)c^3,\quad \Sigma(a+2b+3c).$$

3. 試證 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 爲關於 $a, b, c$ 之輪換式而非對稱式;又 $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ 爲對稱式.

4. $(a-b)^2(b-c)^2(c-d)^2(d-a)^2$ 關於 $a, b, c, d$ 爲對稱否?

5. 將以下各組之式依輪換次序排列之.

$$y^2-x^2,\ z^2-y^2,\ x^2-z^2;\qquad a^2bc,\ abd^2,\ ac^2d,\ b^2cd;$$
$$(a-c)(b-a),\ (a-c)(c-b),\ (a-b)(b-c).$$

6. 試將 $a, b, c, d$ 之輪換函數全部書出,已知其首項如下:

$$ab^3c^2,\ a(b-c),\ (b+2c)(a+d),\ a^2/(a-b)(a-c).$$

7 證明下之恆等式爲眞.

$$\Sigma a^3\cdot\Sigma a=\Sigma a^4+\Sigma a^3b;\qquad \Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3\Sigma abc.$$

## 對稱及輪換函數之因式分解

552 藉助於餘式定理及上述諸原則,複雜之對稱或輪換函數,常得用較少之計算分解因式.

例一. 分解 $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ 之因式.

$y=z$ 時,此函數為 0, 因

$$x^3(z-z)+z^3(z-x)+z^3(x-z)=0.$$

故函數得為 $y-z$ 所整除, § 416; 同理,函數得為 $z-x$ 及為 $x-y$ 所整除,從而得為積 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 所整除.

被除式及除式皆為齊次輪換式,其次數分別為四及三.故商必為一次之齊次輪換函數,從而必為 $k(x+y+z)$ 之形式,其中 $k$ 指示常數.故

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=k(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z). \qquad (1)$$

欲求 $k$, 可為 $x, y, z$ 隨意指定一組值,須不使 $k$ 之係數為 0 者.

例如, 設 $x=2, y=1, z=0$, 得 $6=-6k$, 即 $k=-1$.

或將 (1) 之兩端排列為 $x$ 之多項式,而等置 $x$ 之同次冪之係數,亦可得出 $k$. 例如,在左端之 $x^3$ 項為 $x^3(y-z)$, 在右端則為 $-kx^3(y-z)$, 故得 $k=-1$ 與上同.

故 $$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z).$$

例二. 分解 $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ 之因式.

$x=-y$ 時,此函數為 0, 因

$$(-y+y+z)^5+y^5-y^5-z^5=0.$$

故函數得為 $x+y$ 所整除;同理,函數得為 $y+z$ 及 $z+x$ 所整除,從而得為 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 所整除.

因被除式及除式各自為五次及三次之齊次對稱式,商必為 $k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)$ 之形式, § 543.

故 $$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=(x+y)(y+z)(z+x)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)].$$

置 $$x=1,\ y=1,\ z=0, \text{ 得 } 15=2k+l.$$

置 $$x=2,\ y=1,\ z=0, \text{ 得 } 35=5k+2l.$$

就 $k$ 及 $l$ 解之,得 $k=5, l=5$, 故

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx).$$

例三. 分解 $(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$ 之因式.

$x=0$ 時,此函數為 0, 因

$$(y+z)^3-(y+z)^3-(z-y)^3-(y-z)^3=0.$$

故此函數得爲$x-0$,卽$x$,所整除;同理,此函數得爲$y$及$z$所整除,從而得爲$xyz$所整除.

因被除式及除式二者均爲三次式,商爲一常數,$k$.故

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3\equiv kxyz.$$

置$x=1$, $y=1$, $z=1$,得$k=24$,故

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3\equiv 24xyz.$$

上述之方法有時可用以簡化輪換分式. 553

例. 簡化 $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

此式關於$a, b, c$爲輪換式.

最低公分母爲$(b-c)(c-a)(a-b)$.

化諸分式使有此最低公分母時,得第一分子爲 $-a^3(b-c)$. 故依輪換對稱,第二第三分子爲$-b^3(c-a)$及$-c^3(a-b)$.

三分子相加,分解結果之因式,得$(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$, § 552, 例一.

故原式可化爲$a+b+c$.

## 習 題 XXX

分解下列各式之因式.

1. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.
2. $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$.
3. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$.
4. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$.
5. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$.
6. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.
7. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.
8. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$.
9. $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$.
10. $(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$.
11. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$.
12. $x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)$.

簡化下列各分式.

13. $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$.

14. $\frac{x+a}{(a-b)(a-c)}+\frac{x+b}{(b-c)(b-a)}+\frac{x+c}{(c-a)(c-b)}$.

15. $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

16. $\frac{(b+c)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c+a)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a+b)^2}{(c-a)(c-b)}$.

17. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

# X. 二項定理

554 連乘積之構造 (Structure of continued products) 欲求積

$$(a+b+c+d)(e+f+g)(h+k),$$

可將$a+b+c+d$之各項,以$e+f+g$之各項乘之,所得各積,再以$h+k$之各項乘之,最後乃加末次諸乘法之結果.

以故,若由所與三因式各選一項相乘,卽可得積之一項.如盡以一切可能方法由所與三因式作此種選擇,卽可盡得積之諸項.

例如,由第一因式選$b$,第二因式選$g$,第三因式選$k$,卽得積之$bgk$項;餘仿此.

因由$a+b+c+d$選一項,其法有四,由$e+f+g$選一項,其法有三,由$h+k$選一項,其法有二,全積項數爲$4\cdot3\cdot2$卽24.如是,普徧言之,

凡若干多項式之積,必爲由每因式選一項相乘而得之諸積之和.

而若第一因式有$m$項,第二因式有$n$項,第三因式有$p$項,……,則全積在未合併同類項以前,項數爲$mnp$…….

此定理可用以驗乘法之結果是否正確.同類項已合併之積,若其項代表同號且無數字係數之項之和,亦適用之,因由項之係數,即知所代表之未合併項共幾何也. 555

例如,依定理,積 $(a+b+c)(a+b+c)$ 應有 $3\cdot3$ 即 9 項,皆爲同號.而吾人曾證明,$(a+b+c)(a+b+c)=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$,此式代表 $1+1+1+2+2+2$ 即 9 項未合併項之積,不誤.

同理,積 $(a+b)(a+b)(a+b)$ 應有 $2\cdot2\cdot2$ 即 8 項.而此積簡化時爲 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,代表 $1+3+3+1$ 即 8 項未合併項之積,不誤.

用上章之方法計算對稱函數時,切須記取此定理. 556

例如,學者已證明,p.223,習題之 7,$\Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3\Sigma abc$.

欲驗此公式,可假定祇含 $a, b, c$ 諸文字.

則 $\Sigma ab$ 有 3 項,$\Sigma a$ 有 3 項,$\Sigma a^2b$ 有 6 項,$\Sigma abc$ 有 1 項;而 $3\cdot3=6+3\cdot1$,不誤.

**一次二項因式之積** 藉助於 §554 之定理,凡若干 $x+b$ 形式之因式之積,皆可用視察法求出.例如, 557

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$$
$$=x^3+(b_1+b_2+b_3)x^2+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)x+b_1b_2b_3.$$

何則,由各因式選 $x$,得 $x^3$ 項.

盡以一切可能方法由二因式選各 $x$ 而由餘一因式選一 $b$,得 $b_1x^2, b_2x^2, b_3x^2$ 各項.

盡以一切可能方法由一因式選 $x$ 而由他二因式選 $b$,得 $b_1b_2x, b_1b_3x, b_2b_3x$ 各項.

由三因式盡選 b,得 $b_1b_2b_3$ 一項.

注意如公式中,當積併項以後,$x^2$ 之係數爲 $b_1, b_2, b_3$ 三文字之和,$x$ 之係數爲諸文字兩兩之積之和,而末項爲三文字之積.

故此諸係數爲 $b_1, b_2, b_3$ 之對稱函數,如吾人所預料,以

$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$ 自身關於 $b_1, b_2, b_3$ 爲對稱也.

又須注意 $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$ 既關於 $b_1, b_2, b_3$ 爲對稱,則但將各種形式之代表項求出,如 $x^3$, $b_1x^2$, $b_1b_2x$, $b_1b_2b_3$, 然後將此諸形式之項全部書出,即可得所求之積矣.

558 依上之推理,得證下之普徧公式.

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)\cdots\cdots(x+b_n)=x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\cdots\cdots+B_n,$$

中

$$\begin{aligned}
B_1&=\Sigma b_1 &&=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n,\\
B_2&=\Sigma b_1b_2 &&=b_1b_2+b_1b_3+\cdots\cdots+b_2b_3+\cdots\cdots+b_{n-1}b_n,\\
B_3&=\Sigma b_1b_2b_3 &&=b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+\cdots\cdots+b_{n-2}b_{n-1}b_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
B_n&= &&b_1b_2b_3\cdots\cdots b_n;
\end{aligned}$$

即 $B_1$ 爲 $b_1, b_2, \cdots\cdots b_n$ 諸文字之和, $B_n$ 爲諸文字之積,而中間之係數如次: $B_2$ 爲諸文字每二個之積之和, $B_3$ 爲每三個之積之和,餘仿此.

譬如,每由三因式選各 $b$ 而由其餘因式選各 $x$ 一次,可得積之一項,盡以一切可能方法作此種選擇時,即得 $b_1b_2b_3x^{n-3}$, $b_1b_2b_4x^{n-3}$,……諸項,其和爲 $B_3x^{n-3}$.

應注意者,如前所示,

$$B_1,\ B_2,\ \cdots\cdots,\ B_n$$

諸係數爲關於 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ 諸文字之對稱函數.

559 同理, $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\cdots\cdots(x-b_n)$

$$=x^n-B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^nB_n,$$

其中 $B_1, B_2, \cdots\cdots B_n$ 之意義同上,而聯結諸項之號爲交錯之一及十,末項 $(-1)^nB_n$ 之號,在 $n$ 爲偶數時爲十, $n$ 爲奇數時爲一.

於 §558 之公式中,單變 $b_1, b_2, \cdots\cdots b_n$ 諸文字之號,即得本公式.因諸項爲偶數個 $b$ 之積之各 $B$ 仍不變號,而僅變諸項爲奇數個 $b$ 之積之各 $B$ 之號故也.

例. 依 §§557—559 之方法求下列各積.

1. $(x+1)(x+2)(x+3)$.　　2. $(x+2)(x-3)(x+4)$.

3. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$.　　4. $(x-y)(x+2y)(x-3y)(x+4y)$.

**$\Sigma b_1$, $\Sigma b_1 b_2$, …… 諸和之項數**　令 $n_1, n_2, \cdots\cdots$ 分別爲 $\Sigma b_1$, 561
$\Sigma b_1 b_2, \cdots\cdots$ 之項數.

1. 因 $\Sigma b_1 = b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n$, $n_1 = n$ 甚明.

2. 若將 $n$ 個文字, $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ 依次各以其他 $n-1$ 個文字一一乘之,可共得 $n(n-1)$ 個積.但此 $n(n-1)$ 個積即 $\Sigma b_1 b_2$ 之諸項,每項作兩次計算.故 $\Sigma b_1 b_2$ 之項數, $n_2$, 爲 $n(n-1)/2$, 即

$$n_2 = n_1 \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

即吾人應得

$b_1b_2, b_1b_3, \cdots\cdots, b_1b_n$; $b_2b_1, b_2b_3, \cdots\cdots, b_2b_n$; $\cdots\cdots$; $b_nb_1, b_nb_2, \cdots\cdots, b_nb_{n-1}$.

此諸積成 $n$ 個羣,每羣有 $n-1$ 個積,故共有 $n(n-1)$ 個積.

但積 $b_1b_2$ 共見兩次,一次呈 $b_1b_2$ 之形式,又一次呈 $b_2b_1$ 之形式;餘仿此.

3. 又若將 $\Sigma b_1 b_2$ 之 $n_2$ 個項,各以項中未見之 $n-2$ 個文字一一乘之,可共得 $n_2(n-2)$ 個積.但此 $n_2(n-2)$ 個積即 $\Sigma b_1 b_2 b_3$ 之諸項,每項作三次計算,故 $\Sigma b_1 b_2 b_3$ 之項數, $n_3$, 爲 $n_2(n-2)/3$, 即

$$n_3 = n_2 \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

即吾人應得

$b_1b_2b_3, b_1b_2b_4, \cdots\cdots b_1b_2b_n$; $b_1b_3b_2, b_1b_3b_4, \cdots\cdots, b_1b_3b_n$;

$\cdots\cdots$; $b_{n-1}b_nb_1, b_{n-1}b_nb_2, \cdots\cdots, b_{n-1}b_nb_{n-2}$.

此諸積成 $n_2$ 個羣.每羣有 $n-2$ 個積,故共有 $n_2(n-2)$ 個積.

但 $b_1b_2b_3$ 共見三次,計呈 $b_1b_2 \cdot b_3$, $b_1b_3 \cdot b_2$, $b_2b_3 \cdot b_1$ 三種形式.同理,凡 $\Sigma b_1b_2b_3$ 之項

各見三次;蓋每有一種方法將三文字之二以餘一乘之,即有一次也.

4. 仿此得證 $n_4=n_3\frac{n-3}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$,

普徧言之, $n_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\text{達 } r \text{ 因式}}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}$

例如, $b_1, b_2, b_3, b_4$ 四文字,每次取一個,二個,三個,四個之積之數如下.

$$n_1=4,\ n_2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6,\ n_3=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4,\ n_4=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1.$$

561 **二項定理** (Binomial theorem) 若於 § 558 之公式,即

$$(x+b_1)(x+b_2)\cdots\cdots(x+b_n)=x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\cdots\cdots+B_n$$

中,將 $n$ 個相異之文字 $b_1, b_2,\cdots\cdots b_n$ 悉換爲同一文字 $b$, 又將 $x$ 換爲 $a$, 左端即變爲 $(a+b)^n$.

又因 $B_1$ 之 $n$ 個項各變爲 $b$, $B_2$ 之 $n_2$ 個項各變爲 $b^2$, 餘仿此;得 (§ 560)

$$B_1=nb,\ B_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot2}b^2,\ B_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}b^3,\ \cdots\cdots.$$

故公式化爲下之形式:

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots,$$

其中

1. 右端之項數爲 $n+1$.

2. $a$ 之指數逐項減一, $b$ 之指數逐項增一,各項中指數之和皆爲 $n$.

3. 首項係數爲 1, 次項係數爲 $n$, 其餘係數可依下之法則求出:

將任一項之係數,以項中 $a$ 之指數乘之,再以 $b$ 之指數增1而除之,結果卽爲其次項之係數.

此公式卽所謂二項定理.右端之式稱爲 $(a+b)^n$ 依二項定理之展開式.

例如, $$(a+b)^3=a^3+3a^2b+\frac{3\cdot2}{1\cdot2}ab^2+\frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3}b^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

因 $a+b$ 關於 $a$ 及 $b$ 爲對稱,由 § 542, $(a+b)^n$ 展開式中之同形之項,卽含 $a^n$ 及 $b^n$, $a^{n-1}b$ 及 $ab^{n-1}$ 等各組之項,必須有相同之係數.然此爲首項與末項,第二項與末第二項,普徧言之,則凡距展開式首項與末項等遠之項. 562

故末項爲 $b^n$, 末第二項爲 $nab^{n-1}$, 餘仿此.因項數爲 $n+1$, 故 $n$ 爲偶數時,有一中項, $n$ 爲奇數時,有兩中項.有兩中項時,兩者爲同形項且有相同之係數.又依上所述,中項以後諸項之係數,與中項以前諸項之係數同,但順序相反.

又諸項之係數漸次增加,達中項以後,卽漸次減少,因而中項之係數爲最大,亦易於證明. 563

此由 § 561, 3 之係數法則而來,因中項以前諸項中, $a$ 之指數較 $b$ 之指數增1大,而中項以後諸項中,則較小也.

在上之公式中,變 $b$ 之號而簡化,卽得 564

$$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots.$$

其中含 $b$ 之奇次冪之項有一號,而含 $b$ 之偶次冪者有十號.

例. 求 $(2x-y^3)^6$ 之展開式.

於公式中,以 $2x$ 代 $a$, 以 $y^3$ 代 $b$, 記取末三項之係數與前三項之係數同,但順序相反, § 562, 卽得

$$(2x-y^3)^6=(2x)^6-6(2x)^5y^3+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}(2x)^4(y^3)^2-\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}(2x)^3(y^3)^3+\cdots\cdots$$
$$=(2x)^6-6(2x)^5y^3+15(2x)^4(y^3)^2-20(2x)^3(y^3)^3$$
$$+15(2x)^2(y^3)^4-6(2x)(y^3)^5+(y^3)^6$$
$$=64x^6-192x^5y^3+240x^4y^6-160x^3y^9+60x^2y^{12}-12xy^{15}+y^{18}.$$

565 **普徧項 (General term)** 由 § 561, $(a+b)^n$ 之展開式中第 $r+1$ 項為

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\text{逵 } r \text{ 因式}}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r.$$

此式,當 $r$ 為奇數時則附以 $-$ 號,亦為 $(a-b)^n$ 展開式中之第 $r+1$ 項.

例一. 求 $(x-y)^{16}$ 展開式中第八項.

$n=16$ 而 $r+1=8$, 卽 $r=7$. 故所求之項為

$$-\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}x^9y^7=-11440x^9y^7.$$

例二. $(x^3+1/x)^{12}$ 展開式中有含 $x^{20}$ 之項否?若有之,試求此項.

令 $r+1$ 指示其項數.則因 $n=12$, $a=x^3$, 而 $b=1/x$, 必有

$$a^{n-r}b^r=(x^3)^{12-r}/x^r=x^{36-4r}=x^{20}.$$

若 $36-4r=20$, 卽 $r=4$, 此條件適合.

故第五項含 $x^{20}$. 代入公式,得此項為 $\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^{20}=495x^{20}$.

## 習 題 XXXI

藉助於二項定理展開下列各式.

1. $(3x+2y)^3$. 2. $(a-b)^8$. 3. $(1+2x^2)^7$

4. $(2+1/x)^4$. 5. $(x-3/x)^6$. √6. $(x/y-y/x)^5$.

7. $(1-x+2x^2)^4$. √8. $(a^2+ax-x^2)^3$.

√9. 求 $(1+x/2)^{11}$ 中第六項.

10. 求 $(3a-4b)^{12}$ 中第八項.

11. 求 $(a^2-2bc)^{10}$ 之中項.

12. 求 $(1-x)^9$ 之兩中項.

13. 求 $(1+x)^8$ 中 $x^5$ 之係數.

14. 求 $(3-2x)^7$ 中 $x^4$ 之係數.

15. 求 $(1-x^2)^6$ 中 $x^8$ 之係數.

16. 求 $(1+2x)^9+(1-2x)^{11}$ 中 $x^3$ 之係數.

17. 求 $(x+1/x)^{12}$ 中之常數項.

18. 求 $(2x-1/x)^{15}$ 中 $x^7$ 之係數.

19. 用視察法求 $(x+2y)(x-3y)(x-5y)$.

20. 用視察法求 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$.

21. 積 $(a+b+c+d)(f+g+h)(k+l)(m+n+p+q)$ 之項數若何?

22. 求下列各積中係數之和.

　1. $(1+x^2+x^3+x^4)^3$.　　2. $(1+2x+x^2)^2(1+x+3x^3)^2$.

23. 以下關於 $a, b, c, d$ 四文字之對稱函數,展開時係數之和若何?

　1. $\Sigma a^2\cdot\Sigma a$.　　2. $\Sigma a^3\cdot\Sigma abc$.　　3. $\Sigma ab\cdot\Sigma abc$.

24. 試證 $(a+b)^n$ 展開式中係數之和為 $2^n$.

25. 試證 $(a-b)^n$ 展開式中,正係數之和,數值上與負係數之和相等.

# XI. 開　方

**完全乘冪**(Perfect powers)　已與有理函數 $P$. $P$ 或爲完全 $n$ 次冪;換言之,另有一有理函數 $Q$ 存在,能使 $P=Q^n$. 若然,此有理函數 $Q$ 爲 $P$ 之 $n$ 次根. 566

本章討論之問題如次:已與有理函數 $P$, 欲決定 $P$ 是否爲完全 $n$ 次冪,又若然,則求其 $n$ 次根.但 $n$ 假定指示已與之正整數.

**單項式之方根**　命 $P$ 指示已化爲最簡形式之有理單項式.若 $P$ 爲完全 $n$ 次冪,則 $P$ 之一 $n$ 次根可由下之法則求得之. 567

將 $P$ 之各個文字因式之指數,除以 $n$, 其結果再以 $P$ 之數字係數之主 $n$ 次根乘之.

此法則由乘方之法則(§318)可直接化出.

例如, $(a^kb^l/c^m)^n=a^{kn}b^{ln}/c^{mn}$, §318. 故 $a^kb^l/c^m$ 爲 $a^{kn}b^{ln}/c^{mn}$ 之 $n$ 次根, §566, 而此式可由以 $n$ 除 $a^{kn}b^{ln}/c^{mn}$ 指數得出.

568 如此求得之方根,稱爲 $P$ 之主 $n$ 次根(比較 §258). 凡言 $P$ 之 $n$ 次根或用 $\sqrt[n]{P}$ 之符號時,意皆指此方根.

例一. 求 $-8a^3b^6/27x^3y^9$ 之立方根.

$$\sqrt[3]{\frac{-8a^3b^6}{27x^3y^9}}=-\frac{2ab^2}{3xy^3}.$$

例二. 求下列各方根.

1. $\sqrt{\dfrac{64a^4b^6}{100c^8d^{12}}}$. 2. $\sqrt[4]{81x^4y^8z^{12}}$. 3. $\sqrt[5]{\dfrac{32x^{10}y^{30}}{a^5z^{25}}}$

569 **多項式之根** 取下列諸例考之.

例一. 決定 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 究爲完全平方否,又若然,則其平方根如何.

若此式爲完全平方,則必有 $2x^2+px+q$ 形式之平方根甚明,其中 $p$ 及 $q$ 爲常數.故可得

$$\begin{aligned}4x^4-4x^3+13x^2-6x+9&=(2x^2+px+q)^2\\&=4x^4+4px^3+(p^2+4q)x^2+2pqx+q^2,\end{aligned}$$

此 $p$ 與 $q$ 須適合下方程式, §284:

$$4p=-4\ (1),\quad p^2+4q=13\ (2),\quad 2pq=-6\ (3),\quad q^2=9\ (4).$$

由 (1) 及 (2) 得 $p=-1$, $q=3$, 而此組值適合 (3) 及 (4), 因 $2(-1)3=-6$, 及 $3^2=9$ 也.

故 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 爲完全平方,而 $2x^2-x+3$ 爲其平方根.

例二. 求 $x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$ 之立方根.

若此式爲完全立方,則必有 $x^2+px+q$ 形式之立方根.故可得

$$\begin{aligned}x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27&=(x^2+px+q)^3\\&=x^6+3px^5+3(p^2+q)x^4+(p^3+6pq)x^3\\&\quad+3(p^2q+q^2)x^2+3pq^2x+q^3,\end{aligned}$$

此 $p$ 與 $q$ 須適合下六方程式, §284:

$$3p=6\ (1),\quad 3(p^2+q)=21\ (2),\cdots\cdots\quad q^3=27\ (6).$$

由 (1) 及 (2) 得 $p=2$, $q=3$. 此組值適合其餘方程式 (3)……(6) 易明.

故 $x^6+6x^5+\cdots\cdots+54x+27$ 爲完全立方,其立方根爲 $x^2+2x+3$.

用以上諸例說明之方法,常得決定所與 $x$ 之多項式究爲完全 $n$ 次冪否,又若然,則其 $n$ 次根如何.

令多項式爲 $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m$. 若此式爲完全 $n$ 次冪,則其次數 $m$ 必爲 $n$ 之倍數,因而 $m=kn$, 其中 $k$ 爲整數;且此式必有 $ax^k+A_1x^{k-1}+\cdots\cdots+A_k$ 形式之 $n$ 次根,其中 $a$ 指示 $a_0$ 之主 $n$ 次根,而 $A_1,\cdots\cdots,A_k$ 爲未知常數.吾人稱此根爲主 $n$ 次方根.

欲決定 $a_0x^m+\cdots\cdots+a_m$ 有無如此之根,若存在時,則求出之,吾人置

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m\equiv(ax^k+A_1x^{k-1}+\cdots\cdots+A_k)^n,$$

將右端化爲 $x$ 之多項式之形式,再等置兩端中 $x$ 之同次冪之係數.卽得一組含 $A_1, A_2,\cdots\cdots, A_k$ 之 $nk$ 個方程式.其前 $k$ 個方程式得爲 $A_1, A_2,\cdots\cdots, A_k$ 決定一組值;若 $a_0x^m+\cdots\cdots+a_m$ 爲完全 $n$ 次冪,則此組值必能適合其餘之方程式.

例三. 求 $8x^6-12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1$ 之立方根.

**多項式之平方根**　若多項式 $P$ 爲完全平方,其平方根亦可用下之方法得出. 570

依上節,令 $P$ 指示 $x$ 之偶數次多項式,而依 $x$ 之降冪排列.

假定 $P$ 爲完全平方,而其平方根依 $x$ 之降冪排列時,各項爲 $a, b, c,\cdots\cdots$, 俾 $P\equiv(a+b+c+\cdots\cdots)^2$.

則問題爲已知 $P$, 求 $a, b, c,\cdots\cdots$.

今,無論 $a, b, c\cdots\cdots$ 之值若何,可得

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b,$$

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$

$$=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c,$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c$$
$$+[2(a+b+c)+d]d.$$

餘仿此,凡左方增一新文字,右方必增一羣之新項,此羣係加新文字於二倍原有之文字之和,再將其結果乘以新文字而成.

以故,因依假設 $P\equiv(a+b+c+\cdots\cdots)^2$,得

$$P\equiv a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c$$
$$+[2(a+b+c)+d]d+\cdots\cdots,$$

其中右方各羣之首項,即 $a^2, 2ab, 2ac, 2ad\cdots\cdots$,$x$ 之次數皆較其後之任何項爲高.

由此恆等式,可求 $a, b, c, \cdots\cdots$ 如下:

1. 顯而易見 $a$ 爲 $P$ 之首項之平方根.

2. 由 $P$ 減 $a^2$.因餘式,$R_1$,之首項須等於 $2ab$,以 $2a$ 除此項即可求得 $b$.

3. 既得 $b$,可作 $(2a+b)b$,由 $R_1$ 減之.因餘式,$R_2$,之首項須等於 $2ac$,以 $2a$ 除此項即可求得 $c$.

4. 仿此進行,至得次數較 $a$ 低之餘式爲止.

若最後之餘式爲 0,$P$ 爲完全平方,且其平方根爲 $a+b+c+\cdots\cdots$,與所設符合.

若最後之餘式不爲 0,$P$ 非完全平方;但 $P$ 得化爲

$$P\equiv(a+b+c+\cdots\cdots)^2+R$$

之形式,即化爲完全平方與次數較 $a$ 低之整函數之和.

如將上述之演算仿下例排列甚便.

**例.** 求 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 之平方根.

$$
\begin{array}{rl|ll}
 & P=4x^4-4x^3+13x^2-6x+9 & \underline{2x^2-x+3=a+b+c} & \\
 & a^2=4x^4 & & \\
2a+b=4x^2-x & -4x^3+13x^2-6x+9 & & =R_1=P-a^2 \\
 & -4x^3+\quad x^2 & & =(2a+b)b \\
2(a+b)+c=4x^2-2x+3 & 12x^2-6x+9 & & =R_2=P-(a+b)^2 \\
 & 12x^2-6x+9 & & =[2(a+b)+c]c \\
 & 0 & & =R=P-(a+b+c)^2.
\end{array}
$$

因最後之餘式爲0, $P$爲完全平方.且其平方根爲$2x^2-x+3$.比較§569,例一.

注意每得一新餘式,$R_1, R_2, \cdots\cdots$吾人卽以$2a$除其首項,求出根之次一項.於是將根之已得部分二倍之加根之新項,書於餘式之左方.再以根之新項乘此和,將其結果由上述之餘式減之,卽得其次一餘式.

例. 求$25x^4-40x^3+46x^2-24x+9$之平方根.

含多文字之多項式$P$,若爲完全平方時,亦適用此法.可先將$P$依其中一文字之降冪排列,其餘文字含於係數中,然後準§570進行,但$x$今指所依排列之文字則不待言. 571

**近似平方根** 吾人亦可將此法應用於依$x$之升冪排列之多項式.但$a, b, c, \cdots\cdots$亦將依$x$之升冪排列,且各餘式之次數將逐一增高.以故,§570,4若$P$非完全平方而有常數項,得化之爲 572

$$P\equiv(a+b+c+\cdots\cdots)^2+R'$$

之形式,卽化爲完全平方與一多項式,$R'$,之和,其中$R'$之最低次項,次數之高如吾人意之所欲.

$x$之值甚小時,若將計算儘量進行,可使$R'$之值欲如何小卽如何小.故在此種情形,吾人稱$a+b$, $a+b+c$, $\cdots\cdots$爲$P$之二項,三項,等之近似平方根.

應附及者,此等之近似平方根,用§569之法求之較易.

例一. 求$1+x$之平方根至四項.

依§569, 可寫 $\sqrt{1+x}=1+px+qx^2+rx^3+\cdots\cdots$.

兩端各自平方, $1+x=1+2px+(p^2+2q)x^2+2(pq+r)x^3+\cdots\cdots$.

故, §284,　　$2p=1,\quad p^2+2q=0,\quad pq+r=0,$

解之,　　$p=1/2,\quad q=-1/8,\quad r=1/16.$

故所求之結果爲　　$1+x/2-x^2/8+x^3/16.$

學者可用§§570, 571之法覆驗之.

例二. 求$4-x+x^2$之平方根至三項.

573 **數之平方根**　由§570之公式,又得通常求數之平方根之法.

例. 求53361之平方根.

令$a$指示祇含一位有效數字之最大整數.而其平方小於53361, 其有效數字卽根之首位數字,其餘數字爲0. 可求$a$如下:

凡$a$末有一0, $a^2$末應有二0, 故將53361自右向左每二位分作一段,如5'33'61.

61及33各段各需$a$末有一0, 而其餘一段, 5, 則需首位數字2, 因2爲平方小於5之最大整數也.故$a=200$.

既得$a$, 進行方法與求多項式之平方根完全相同.其法詳下左,其中$b$爲平方根之十位數字乘10, 而$c$爲個位數字.下右示通用之簡約算法.

$$
\begin{array}{r|l}
 & a+\ \ b+c \\
 & 5'33'61 \ \underline{|\,200+30+1} \\
 & 4\,00\,00=a^2 \\
2a=400 & 1\,33\,61=R_1 \\
2a+b=430 & 1\,29\,00=(2a+b)b \\
2(a+b)=460 & 4\,61=R_2 \\
2(a+b)+c=461 & 4\,61=[2(a+b)+c]c \\
 & 0\ =R
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 5'33'61\ \underline{|\,231} \\
 & 4 \\
43 & 1\,33 \\
 & 1\,29 \\
46. & 4\,61 \\
 & 4\,61 \\
 & 0
\end{array}
$$

先減去$a^2$, 次用$2a$除餘式$R_1$以求$b$之有效數字,復次由$R_1$減$(2a+b)b$以求$R_2$, 最後用$2(a+b)$除$R_2$以求$c$.

完成此種計算之最簡之法,如上右所示,爲將數末之0省去,且每次祇者由一段,於是每得一新餘數,卽書根之已得部分之二倍於其左爲"試除數",將試除數除餘數以求根之次一數字,此數字附加於試除數之後,成爲全除數.以根之新數字乘全除數,減之,卽得其次一餘數.於進程中任一段落若所採數字過大,以致所得之積大於當時之餘數時,可取較小之數字試之

**數之近似平方根**　非完全平方之數,可用上述之方法,求其平方根之近似值. 574

例.　求7.342之平方根之近似值準確至第三位小數.

```
      7.34'20'00 |2.709
      4
 47  | 3 34
     | 3 29
5409 | 5 20 00
     | 4 86 81
         33 19
```

故 $\sqrt{7.342}=2.709\cdots\cdots$

顯而易見凡平方根有一位小數,原數必有兩位小數.故將原數之小數部分,從小數點起向右每兩位分作一段.仍將原數之整數部分,從小數點起向左分段,如於§573.

應注意者,有奇數位小數之數,不能爲完全平方.

**多項式之立方根**　多項式$P$爲完全立方時,求其立方根亦有特法,其法與上述之求平方根之法類似. 575

令$P$指示$x$之多項式,次數爲3之倍數,且依$x$之降冪排列者.

假定$P$爲完全立方,而其立方根依$x$之降冪排列時,各項爲$a, b, c, \cdots\cdots$,俾$P\equiv(a+b+c\cdots\cdots)^3$.

則問題爲已知$P$,求$a, b, c, \cdots\cdots$.

今,無論$a, b, c, \cdots\cdots$之值若何,可得

$$(a+b)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b,$$

$$(a+b+c)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$$
$$+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c,$$

餘仿此,凡左方增一新文字,右方必增一羣之新項,此羣係將三倍原有文字之和之平方,三倍原有文字之和乘以新文字之積,與新文字之平方相加,再將其結果乘以新文字而成.

以故,因依假設$P\equiv(a+b+c+\cdots\cdots)^3$,得

$$P\equiv a^3+(3a^2+3ab+b^2)b+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c+\cdots\cdots,$$

其中右方諸羣之首項,卽 $a^3, 3a^2b, 3a^2c, \cdots\cdots$, $x$ 之次數皆較其後之任何項爲高.

由此恆等式,可求 $a, b, c, \cdots\cdots$ 如下:

1. 顯而易見 $a$ 爲 $P$ 之首項之立方根.

2. 由 $P$ 減 $a^3$. 因餘式 $R_1$ 之首項須等於 $3a^2b$, 以 $3a^2$ 除此項卽可求得 $b$.

3. 旣得 $b$, 作 $(3a^2+3ab+b^2)b$, 由 $R_1$ 減之. 因餘式 $R_2$ 之首項須等於 $3a^2c$, 以 $3a^2$ 除此項卽可求得 $c$.

4. 仿此進行,至得次數較 $a^2$ 低之餘式爲止.

若最後之餘式爲 0, 則 $P$ 爲完全立方,且其立方根爲 $a+b+c+\cdots\cdots$, 與所設符合.

若最後之餘式不爲 0, 則 $P$ 非完全立方,但得化之爲

$$P \equiv (a+b+c+\cdots\cdots)^3+R$$

之形式,其中 $R$ 次數較 $a^2$ 低.

將演算排列如下較便.

**例.** 求 $x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$ 之立方根.

$$\begin{array}{r|l|l}
3a^2=3x^4 & x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27 & \underline{x^2+2x+3} \\
 & \underline{x^6} & \\
3(x^2)^2=3x^4 & 6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27 & =R_1 \\
3x^2\cdot 2x+(2x)^2=6x^3+\ \ 4x^2 & & \\
\hline
3x^4+\ \ 6x^3+\ \ 4x^2 & \underline{6x^5+12x^4+\ \ 8x^3} & \\
\hline
3(x^2+2x)^2=3x^4+12x^3+12x^2 & 9x^4+36x^3+63x^2+54x+27 & =R_2 \\
3(x^2+2x)3+3^2=\qquad 9x^2+18x+9 & & \\
\hline
3x^4+12x^3+21x^2+18x+9 & \underline{9x^4+36x^3+63x^2+54x+27} & \\
 & 0 & =R
\end{array}$$

因最後之餘式爲 0, 故 $x^6+6x^5+\cdots\cdots+54x+27$ 爲完全立方,且其立方根爲 $x^2+2x+3$. 比較 § 569, 例二.

注意每得一新餘式,吾人卽以 $3a^2$ 除其首項.求出根之次一項.於是將三倍根之已得部分之平方,三倍此部分乘新項之

積,與新項之平方相加,而書其和於餘式之左.再以新項乘此和,將其結果由上述之餘式減之,卽得其次一餘式.

576 含多文字之多項式,若爲完全立方時,亦適用此法(比較§571).

此法亦可應用於依 $x$ 之升冪排列之多項式(若式中不缺常數項).若多項式非完全立方,則得近似立方根(比較§572).

577 **數之立方根**　藉助於§575之公式,又可求數之立方根.

**例.** 求12487168之立方根.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & \quad a+\ b+c \\
 & N=12'487'168 & \underline{200+30+2=232} \\
 & 8\ 000\ 000 & \\
3a^2=120000 & 4\ 487\ 168 & =R_1=N-a^3 \\
3ab=\ 18000 & & \\
b^2=\quad 900 & & \\
\overline{138900} & 4\ 167\ 000 & =(3a^2+3ab+b^2)b \\
3(a+b)^2=158700 & 320\ 168 & =R_2=N-(a+b)^3 \\
3(a+b)c=\ 1380 & & \\
c^2=\quad 4 & & \\
\overline{160084} & \underline{320\ 168} & =[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c \\
 & 0 & =R=N-(a+b+c)^3.
\end{array}
$$

欲求 $a$,卽祇含一位有效數字且立方小於 $N$ 之最大整數,先將 $N$ 自右向左(如有小數時,并須從小數點向右),每三位分作一段,如 12' 487' 168. 而 168 及 487 各段各需 $a$ 末有一0,而末段,12,則需首位數字2,因2為立方小於12之最大整數也.故 $a=200$.

演算之其餘部分,已明示於上矣.

注意根之各位新數字,皆由用根之已得部分平方之三倍,除所得前一餘數而求出;卽 $b$ 之有效數字由用 $3a^2$ 除 $R_1$ 而求出,而 $c$ 由用 $3(a+b)^2$ 除 $R_2$ 而求出.若所得數字過大時,則取較小者試之.

演算之簡約方法,與求平方根時所用者同.

非完全立方之數,亦可用此法以求其近似立方根(比較§574).

578 **多項式之高次根**　多項式爲完全四次冪者,但求其平方根之平方根,卽可得其四次根;同理,多項式爲完全六次冪

者,但求其平方根之立方根,卽可得其六次根.

吾人亦可創與§§ 570, 575 所述類似之特法,以求任何方根.然既有§ 569 之普徧方法,此事成爲不必要.實則§§ 570, 575 中,所以欲闡明求平方根及立方根之特法者,僅以其有歷史的趣味,及與求數之平方根及立方根之問題有關而已.

## 習　題　XXXII

簡化下列各式:

1. $\sqrt[3]{-\frac{27x^6y^{15}}{125a^9z^{12}}}$.　　2. $\sqrt{\frac{52+a^4b^6}{625c^2d^8}}$.　　3. $\sqrt[6]{(x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4)^3}$.

依§ 569 或§ 570 求下列各式之平方根:

4. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.
5. $x^2-2x^4+6x^3-6x+x^6+9$.
6. $4x^6+12x^5y+9x^4y^2-4x^3y^3-6x^2y^4+y^6$.
7. $4x^2-20x+13+30/x+9/x^2$.
8. $49-84x-34x^2+60x^3+25x^4$.
9. $x^8+2x^7-x^6-x^4-6x^3+5x^2-4x+4$.
10. $(x^2+1)^2-4x(x^2-1)$.
11. $4x^4+9x^2y^2-12x^3y+16x^2-24xy+16$.
12. $x^2/y^2+y^2/x^2+2+2x^2+2y^2+x^2y^2$

求下二式之近似平方根至四項.

13. $1-2x$.　　14. $4-x+3x^2$.

依§ 569 或§ 575 求下列各式之立方根.

15. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$.
16. $27x^{12}+27x^{10}-18x^8-17x^6+6x^4+3x^2-1$.
17. $8x^6-36ax^5+90a^2x^4-135a^3x^3+135a^4x^2-81a^5x+27a^6$.
18. $x^3/y^3+y^3/x^3+3x^2/y^2+3y^2/x^2+6x/y+6y/x+7$.
19. 求式 $1-x+x^2$ 之近似立方根至三項.
20. 依§ 569 或§ 578 求下式之四次根.

$$x^8-4x^7+10x^6-16x^5+19x^4-16x^3+10x^2-4x+1.$$

21. 依§ 569 求下式之五次方根.

$x^{10}+5x^9+15x^8+30x^7+45x^6+51x^5+45x^4+30x^3+15x^2+5x+1.$

22. 欲使 $x^4+6x^3+11x^2+ax+b$ 成爲完全平方,須指定 $a$ 及 $b$ 爲若何之值?

求下列各數之平方根.

| | | |
|---|---|---|
| 23. 27889. | 24. 2313.61. | 25. 583.2225. |
| 26. 4149369. | 27. 0.00320356. | 28. 9.024016. |

求下列各數之近似平方根準確至第三位小數.

| | | |
|---|---|---|
| 29. 2. | 30. 55.5. | 31. 234.561. |

求下列各數之立方根.

| | | |
|---|---|---|
| 32. 1860867. | 33. 167284.151. | 34. 1036.433728. |

# XII. 無理函數 根式與分指數

## 根式之化法

**方根**　以下 $a, b, \cdots\cdots$ 等文字指示正數或假定有正值之文字式. 579

又, $\sqrt[n]{a}$ 指示 $a$ 之主 $n$ 次根,即 $n$ 次冪爲 $a$ 之正數;換言之,則爲公式 $(\sqrt[n]{a})^n=a$ 所確定之正數.

最後, $n$ 爲奇數時, $\sqrt[n]{-a}$ 指示 $-a$ 之主 $n$ 次根,即 $-\sqrt[n]{a}$.

又凡用方根一語時,皆指主根而言.

**注意**　此爲方根一語之限制用法.因凡 $n$ 次冪等於 $a$ 之任何數,本身乃 $a$ 之 $n$ 次根,而吾人即將證明,此種數常有 $n$ 個也. 580

例如,因 $2^2=4$ 及 $(-2)^2=4$,而 2 及 $-2$ 皆爲 4 之平方根.吾人以 $\sqrt{4}$ 表主根 2,而以 $-\sqrt{4}$ 表他一根 $-2$.

$n$ 爲奇數而 $a$ 爲實數時, $a$ 之 $n$ 次根有一爲實數且與 $a$ 同號,其餘皆爲虛數.

$n$ 爲偶數而 $a$ 爲正數時, $a$ 之 $n$ 次根有二爲實數,值相等而符號相反,其餘皆爲虛數.

$n$ 爲偶數而 $a$ 爲負數時, $a$ 之 $n$ 次根悉屬虛數.

在高等算學中 $\sqrt[n]{a}$ 常用以指示 $a$ 之任何 $n$ 次根,不若此處之僅指示主根而言也.

281 **根式** 凡呈$\sqrt[n]{a}$或$b\sqrt[n]{a}$形式之式,皆稱根式;$n$稱爲根指數,$a$爲被開方數,而$b$爲根式之係數.

$a$及$b$皆爲有理之數或式時,$b\sqrt[n]{a}$稱爲單純根式.

例如,$5\sqrt[3]{4}$爲單純根式,其根指數爲3,被開方數爲4,而係數爲5.

282 **根式之運算公式** 根式之運算法則,基於下之公式,其中$m, n, p$指示正整數.

1. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$.
2. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.
3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
4. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

特須注意者,依1,根指數及被開方數之指數,皆乘以同一正整數,或約去任何公因數,根式之值不變;例如,$\sqrt[9]{a^6}=\sqrt[3]{a^2}$.此法則與簡化分式之法則,類似點極爲明顯.

此諸公式可藉助於$(\sqrt[n]{a})^n=a$之定義,指數律$(a^m)^n=a^{mn}$,$(ab)^n=a^nb^n$,及下之等式推演律(§261,3)以證之.

若二正數之任一同次冪相等,則此二數相等.即

1. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$,因二者之$np$次冪相等也.

因$(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp}$;及$(\sqrt[n]{a^m})^{n\cdot p}=(a^m)^p=a^{mp}$.

2. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$,因二者之$n$次冪相等也.

因$(\sqrt[n]{ab})^n=ab$;及$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab$.

3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,因二者之$n$次冪相等也.

因$\left(\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\right)^n=\dfrac{a}{b}$;及$\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\dfrac{a}{b}$.

4. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$,因二者之$n$次冪相等也.

因$(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$;及$[(\sqrt[n]{a})^m]^n=[(\sqrt[n]{a})^n]^m=a^m$.

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$,因二者之 $mn$ 次乘冪相等也.

因 $(\sqrt[mn]{a})^{mn}=a$; 及 $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{m\cdot n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$.

下列各例足以說明此諸公式之功用.

1. $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$.

2. $\sqrt{8ab^3}=\sqrt{4b^2}\cdot\sqrt{2ab}=2b\sqrt{2ab}$

3. $\sqrt[3]{\dfrac{3c}{d^2e^5}}=\dfrac{\sqrt[3]{3c\cdot}}{\sqrt[3]{d^3e^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3c}}{de^2}$.

4. $\sqrt[5]{\sqrt{32x^{15}y^5}}=\sqrt[10]{32x^{15}y^5}=\sqrt{2x^3y}$.

5 $(\sqrt[3]{2xy^2})^2=\sqrt[3]{(2xy^2)^2}=\sqrt[3]{4x^2y^4}=y\sqrt[3]{4x^2y}$.

**論簡化根式** 根式中之被開方數能為最簡整式,則認其形式為最簡.由上所證諸公式,立得根式之簡化法則如下. 583

1. 如被開方數為一冪數,其指數與根指數有公因數,則由指數及根指數中約去之.

例如, $\sqrt[9]{27x^3y^6}=\sqrt[9]{(3xy^2)^3}=\sqrt[3]{3xy^2}$.

2. 若被開方式之任一因式為一冪數,其指數得為根指數所整除,則以根指數除其指數,而移因式於根號之外.

例如, $\sqrt[4]{16x^7y^9}=\sqrt[4]{2^4x^4x^3y^8y}=2xy^2\sqrt[4]{x^3y}$.

3. 若被開方式為一分式,則以最簡之式乘分子及分母,俾分母得移出根號之外.

例如, $\sqrt[3]{\dfrac{xy}{2z^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{4xyz}{8z^3}}=\dfrac{1}{2z}\sqrt[3]{4xyz}$.

**同類根式** 若干根式化為最簡形式時,僅其係數相異者,稱為同類根式. 584

例如, $\sqrt{4x^3y}$ 與 $\sqrt{81x^5y^3}$ 為同類根式,因二者之最簡形式 $2x\sqrt{xy}$ 及 $9x^2y\sqrt{xy}$ 僅其係數相異也.

**論移根式之係數於根號內** 因 $b\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b^na}$, 根式之係數,若以根指數乘其指數,即可移入根號內. 585

## 習題 XXXIII

化下列各根式爲最簡形式.

1. $\sqrt{18}$.　2. $\sqrt{588}$.　3. $\sqrt[3]{(-27)^2}$　4. $\sqrt[3]{-1000}$

5. $\sqrt{3/2}$.　6. $\sqrt[3]{3/2}$.　7. $\sqrt[3]{3/4}$.　8. $\sqrt[5]{3/16}$.

9. $\sqrt[5]{25a^5b^{10}c^{15}d^6}$.　10. $\sqrt[8]{128a^2b^4c^8}$.　11. $\sqrt[12]{8x^6y^9z^{15}}$.

12. $\sqrt[2n]{25a^2b^4c^6}$　13. $\sqrt[3n]{a^nb^{2n}c^{3n}}$.　14. $\sqrt[n]{a^{3n+1}b^{3n+2}c^{4n}}$.

15. $\sqrt{x^2y^2-x^2z^2}$.　16. $\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}$.

17. $\sqrt[3]{x^6-x^3y^3}$.　18. $\sqrt[4]{a^4b^4-2a^3b^5+a^2b^6}$.

19. $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{32ab^2}}$.　20. $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$.　21. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{9(x+1)^2}}$.

22. $\sqrt[3]{1-\dfrac{a^3}{b^3}}$.　23. $\sqrt[3]{\dfrac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{5n+2}}}$.　24. $\sqrt{\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{2ax}{b^2}+\dfrac{1}{b}}$.

將下列各根式之係數移入根號內.

25. $3a\sqrt{3a}$.　26. $\dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$.　27. $3ax\sqrt[4]{1/27a^3x^3}$.

證明下列各組根式爲同類根式.

28. $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, 及 $\sqrt{1/8}$.　29. $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{192}$, 及 $\sqrt[3]{8/9}$.

30. $\sqrt{(x^3-y^3)(x-y)}$ 及 $\sqrt{x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4}$.

## 根式之算法

586 **加法及減法** 法則如下:

**欲化二或多根式之代數和爲最簡形式,先簡化各根式,然後將其中之同類根式加其係數而合併之.**

例. 加 $\sqrt{16a^2b}$, $-\sqrt{9a^2b}$, $3\sqrt{2}$ 及 $-2\sqrt{1/2}$.

$$\sqrt{16a^2b}-\sqrt{9a^2b}+3\sqrt{2}-2\sqrt{1/2}$$
$$=4a\sqrt{b}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{2}-\sqrt{2}=a\sqrt{b}+2\sqrt{2}.$$

**應注意者,兩個不同類根式之和,不能化爲一個根式.**

例如,除 $x$ 或 $y$ 爲 0 時外;吾人不能得 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}$, 因兩端各作平方,即

得 $x+y+2\sqrt{xy}=x+y$, $\therefore\ 2\sqrt{xy}=0$, $\therefore\ xy=0$, $\therefore$ 非 $x=0$ 卽 $y=0$ 也.

**化根式爲有公根指數者** 由公式 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$, 二或多根式常得化爲有公根指數之等値根式.最小公根指數爲所與根指數之最小公倍數. 587

例. 化 $\sqrt[6]{a^5}$ 及 $\sqrt[8]{b^3}$ 使有最小公根指數.

所與根指數 6 及 8 之最小公倍數爲 24. 而 $\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[24]{a^{20}}$, $\sqrt[8]{b^3}=\sqrt[24]{b^9}$.

**根式之比較** 欲比較所與之根式時,吾人須先化之使有公根指數. 588

例一. 比較 $\sqrt[15]{16}$, $\sqrt[10]{6}$ 及 $\sqrt[6]{3}$.

所與根指數 15, 10, 6 之最小公倍數爲 30; 而

$$\sqrt[15]{16}=\sqrt[30]{16^2}=\sqrt[30]{256};\quad \sqrt[10]{6}=\sqrt[30]{6^3}=\sqrt[30]{216};\quad \sqrt[6]{3}=\sqrt[30]{3^5}=\sqrt[30]{243}.$$

因 $256>243>216$, 故 $\sqrt[15]{16}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[10]{6}$.

例二. 比較 $2\sqrt{3}$ 及 $\sqrt[3]{41}$.

將第一根式之係數移入根號內,然後化兩根式使有公根指數6, 卽得

$$2\sqrt{3}=\sqrt{12}=\sqrt[6]{12^3}=\sqrt[6]{1728};\quad \sqrt[3]{41}=\sqrt[6]{41^2}=\sqrt[6]{1681}.$$

因 $1728>1681$, 故 $2\sqrt{3}>\sqrt[3]{41}$.

**乘法及除法** 由 589

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \text{ 及 } \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}$$

二公式,得法則如下:

欲以一根式乘或除他一根式,必要時先化二者使有最小公根指數.然後分別求二者之係數及被開方數之積或商.

例一. 以 $2\sqrt[3]{x^2y^2}$ 乘 $4\sqrt{xy}$.

$$4\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt[3]{x^2y^2}=8\sqrt[6]{x^3y^3}\cdot\sqrt[6]{x^4y^4}=8\sqrt[6]{x^7y^7}=8xy\sqrt[6]{xy}.$$

例二. 以 $2\sqrt[4]{xy}$ 除 $6\sqrt{xy}$.

$$6\sqrt{xy}/2\sqrt[4]{xy}=3\sqrt[4]{x^2y^2}/\sqrt[4]{xy}=3\sqrt[4]{xy}.$$

**乘方** 由 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ 及 $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ 590

二公式,得法則如下:

欲作 $\sqrt[n]{a^q}$ 形根式之 $m$ 次冪,先約去 $m$ 與根指數間或有之公因數,然後以 $m$ 之其餘因數乘被開方數之指數.

例. 作 $2\sqrt[6]{xy^2}$ 之九次乘冪.

$$(2\sqrt[6]{xy^2})^9=2^9(\sqrt[6]{xy^2})^9=512(\sqrt{xy^2})^3=512\sqrt{x^3y^6}=512xy^3\sqrt{x}.$$

591 **開方** 由 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ 及 $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ 二公式,得法則如下:

欲求 $\sqrt[n]{a^q}$ 形根式之 $m$ 次根,先約去 $m$ 與被開方式之指數間或有之公因數,再以 $m$ 之其餘因數乘根指數.

例一. 求 $\sqrt[5]{x^2y^4}$ 之六次方根.

$$\sqrt[6]{\sqrt[5]{x^2y^4}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{xy^2}}=\sqrt[15]{xy^2}.$$

例二. 求 $54a\sqrt{b}$ 之立方根.

$$\sqrt[3]{54a\sqrt{b}}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2a\sqrt{b}}=3\sqrt[3]{\sqrt{4a^2b}}=3\sqrt[6]{4a^2b}.$$

592 **單純根式函數** (Simple radical expressions) 所謂單純根式函數者,意指祇含單純根式之代數式.例如, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 為單純根式函數.分母中無含根式之分式者,則稱整單純根式函數.

由上述諸法則,整單純根式函數之和,差,積,及冪,可化為單純根式之代數和.於商亦然,將於§607中證之.然單純根式函數之方根,例如 $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$,通常不能化為單純根式函數.

例一. 以 $2\sqrt{3}-\sqrt{10}$ 乘 $3\sqrt{6}+2\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}(3\sqrt{6}+2\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{10})&=6\sqrt{18}+4\sqrt{15}-3\sqrt{60}-2\sqrt{50}\\&=8\sqrt{2}-2\sqrt{15}.\end{aligned}$$

例二. 作 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ 之平方.

$$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2=2+2\sqrt{2}\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}=2+4\sqrt[6]{2}+2\sqrt[3]{2}.$$

## 習題 XXXIV

化下列各根式使有最小公根指數.

1. $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[10]{3}$, 及 $\sqrt[15]{3}$. 2. $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{2a^3b^2}$, 及 $\sqrt[6]{7b^5}$.

比較下列各根式.

3. $3\sqrt{2}$ 及 $2\sqrt[3]{3}$. 4. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, 及 $\sqrt[4]{5}$.

化下列各式為最簡形式之單純根式.

5. $\sqrt{35}\div\sqrt{7/5}$. 6. $10\div\sqrt{5}$. 7. $4\div\sqrt[3]{2}$.

8. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$. 9. $\sqrt[3]{60}\cdot\sqrt[3]{90}\cdot\sqrt[3]{15}$. 10. $2\sqrt{3}\div3\sqrt{2}$.

11. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$. 12. $\sqrt[6]{3}\div\sqrt[4]{3}$. 13. $2\sqrt{35}\cdot\sqrt{65}\div\sqrt{91}$.

14. $\sqrt{a^3b^5c^7}\cdot\sqrt[3]{a^2b^4c^8}$. 15. $\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[3n]{a}$.

16. $\sqrt{a^3b^3}\div\sqrt[6]{a^5b^5}$. 17. $\sqrt[3]{a^2bc^2}\cdot\sqrt[3]{ab^2c^4}$.

18. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6n]{a}$. 19. $\sqrt[6]{a/b}\div\sqrt[9]{a/b}$.

20. $\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{ab^5}\div(\sqrt[10]{a^7b^9}\cdot\sqrt[15]{a^{12}b^{14}})$.

21. $(\sqrt{12})^3$. 22. $(\sqrt[3]{a^2})^6$. 23. $(2\sqrt[4]{xy^2z^3})^6$.

24. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}$. 25. $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$. 26. $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^3b^6/c^9}}$.

27. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}$. 28. $\sqrt{2\sqrt{2}}$. 29. $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$.

30. $\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}$. 31. $\sqrt[2m]{\sqrt[n]{a^m}}$ 32. $(\sqrt[2m]{2\sqrt[n]{a}})^{mnp}$.

簡化下列各式,盡力之所及.

33. $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{147}$. 34. $\sqrt{125}+\sqrt{175}-\sqrt{28}+\sqrt{1/20}$.

35. $\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{1/2}$. 36. $\sqrt{a/bc}+\sqrt{b/ca}+\sqrt{c/ab}$.

37. $\sqrt{50}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}$. 38. $\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt{a^2c}-\sqrt{b^2c}$.

39. $\sqrt{ax^3+6ax^2+9ax}-\sqrt{ax^3-4a^2x^2+4a^3x}$.

40. $(x+y)\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}-(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2-y^2}}$.

41. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}$. 42. $(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{14})\div\sqrt{2}$.

43. $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{15})$. 44. $\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

45. $(1+\sqrt{3})^3$. 46. $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1)$.

## 分指數及負指數

在多種情形,分指數之應用,使根式之計算大為簡易. 593

$a^n$ 式,前此函義限於 $n$ 指示正整數.此種式之運算法則,

即 1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, 2. $(a^m)^n=a^{mn}$, 3. $(ab)^n=a^nb^n$,

爲代數學法則中之最簡單者．故 $n$ 非正整數時,吾人能爲 $a^n$ 求得有用之意義,與以上諸法則一致否?此乃自然疑問也．

594　**$a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$ 之定義**　以 $a^{\frac{1}{2}}$ 爲例.若可能時,吾人欲爲此符號求得與 1, 2, 3 諸法則一致之意義．

然欲與 1 一致,須有

$$(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a,$$

即 $a^{\frac{1}{2}}$ 須爲 $\sqrt{a}$ 或 $-\sqrt{a}$ 之意．

於兩種意義中擇其便利者,定 $a^{\frac{1}{2}}$ 之義爲 $\sqrt{a}$.

則求得所欲 $a^{\frac{1}{2}}$ 適合之條件之一,已足以確定其義．

同理,得定 $a^{\frac{1}{3}}$ 之義爲 $\sqrt[3]{a}$, $a^{\frac{2}{3}}$ 之意義爲 $\sqrt[3]{a^2}$, 普徧言之,定 $a^{\frac{p}{q}}$ 之義爲 $\sqrt[q]{a^p}$, 即,爲 $a^p$ 之主 $q$ 次方根．

應注意者,因 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[qm]{a^{pm}}=a^{\frac{pm}{qm}}$, 故 $p/q$ 換爲等值分式時, $a^{\frac{p}{q}}$ 之值不變．

例如, $a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{6}{9}}$; 又 $a^2=a^{\frac{4}{2}}=a^{\frac{6}{3}}$.

595　**$a^0=1$ 之定義**　又,欲與 1 一致,須有

$$a^0a^m=a^{0+m}=a^m,$$

從而
$$a^0=a^m/a^m=1.$$

故定 $a^0$ 之義爲 1.

596　**$a^{-s}=1/a^s$ 之定義**　最後,欲與 1 一致須有 (§ 595)

$$a^{-s}\cdot a^s=a^{-s+s}=a^0=1,$$

從而
$$a^{-s}=1/a^s.$$

故定 $a^{-s}$ 之義爲 $1/a^s$.

如是,依定義, $a^{-3}=1/a^3$, $a^{-\frac{5}{2}}=1/a^{\frac{5}{2}}=1/\sqrt[2]{a^5}$.

今須證$a^{\frac{p}{q}}$, $a^0$, 及$a^{-s}$如此求得之義,與指數律完全一致.

**定理一** 定律$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$對於$m$及$n$之一切有理值皆眞. 597

令$p, q, r, s$指示任何正整數. 則

1. $m=p/q$ 及 $n=r/s$ 時,依 § 582, 得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{qr}}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

2. $m=-p/q$ 及 $n=-r/s$ 時,依 1, 得

$$a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}=a^{-\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}.$$

3. $m=p/q$, $n=-r/s$, 及 $p/q>r/s$ 時,得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}/\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}/\sqrt[qs]{a^{qr}}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps-qr}}=a^{\frac{ps-qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}.$$

4. $m=p/q$, $n=-r/s$, 及 $p/q<r/s$ 時,依 3, 得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}=a^{\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}.$$

**定理二** 定律$(a^m)^n=a^{mn}$,對於$m$及$n$之一切有理值皆眞. 598

何則,令$m$指示任一有理數,則

1. $n$為正整數時,依 § 597, 得

$$(a^m)^n=a^m\cdot a^m\cdots\cdots\text{迨 }n\text{ 因式}=a^{m+m+\cdots\cdots\text{迨 }n\text{ 項}}=a^{mn}.$$

2. $n=p/q$, 而其中$p$及$q$為正整數時,依 1, 得

$$(a^m)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(a^m)^p}=\sqrt[q]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{q}}=a^{m\cdot\frac{p}{q}}.$$

3. $n=-s$, 而其中$s$為任一正有理數時,依 1, 2, 得

$$(a^m)^{-s}=\frac{1}{(a^m)^s}=\frac{1}{a^{ms}}=a^{-ms}=a^{m(-s)}$$

599 **定理三** 定律 $(ab)^n=a^nb^n$ 對於 $n$ 之一切有理值皆爲眞.

1. 令 $n=p/q$, 其中 $p$ 及 $q$ 指示正整數. 則

$$(ab)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^pb^p}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[q]{b^p}=a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}.$$

2. 令 $n=-s$, 其中 $s$ 指示任一正有理數,爲整數抑爲分數不論. 則依 1,

$$(ab)^{-s}=\frac{1}{(ab)^s}=\frac{1}{a^sb^s}=a^{-s}b^{-s}.$$

600 **應用** 以下諸例足以說明分指數及負指數之功用. 使用此種記法時,根式計算之繁複部分常變簡易.

例一. 簡化 $\sqrt{a/\sqrt[3]{a}}$.

$$\sqrt{a/\sqrt[3]{a}}=(aa^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}.$$

例二. 簡化 $\sqrt[4]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[3]{a^2b^2}$.

$$\sqrt[4]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[3]{a^2b^2}=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}.$$

$$=a^{\frac{1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{a^5b^3}.$$

例三. 展開 $(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}})^3$.

$$(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}})^3=(x^{\frac{2}{3}})^3+3(x^{\frac{2}{3}})^2y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}(y^{-\frac{2}{3}})^2+(y^{-\frac{2}{3}})^3$$

$$=x^2+3x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{3}}+y^{-2}.$$

例四. 以 $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ 除 $x-y$.

將演算依 §401 排列,即得

$$\begin{array}{r|l}
x \qquad\qquad\qquad -y & x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \\
\underline{x+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\quad} & \overline{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}} \\
-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y & \\
\underline{-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y} &
\end{array}$$

故商爲 $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$.

## 習題 XXXV

力避根號,簡化下列各式:

1. $\sqrt[12]{a^8}$.　　2. $\sqrt[4]{c^{\frac{2}{3}}}$.

3. $a^{\frac{5}{2}}/\sqrt[3]{a^{\frac{9}{5}}}$.　　4. $b\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[6]{b^5}$.

下列各式試不用負指數或分指數表之.

5. $a^{\frac{14}{21}}$.　　6. $c^{-1.5}$.

7. $(d^{\frac{2}{3}})^{-6}$.　　8. $(e^{-3\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{7}}$.

不用根號,以正指數表下列各式.

9. $a^{-1}/b^{-3}c^{-2}$.　　10. $x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{y^{-3}}$.

11. $(1/\sqrt{x^{-5}})^{-4}$.　　12. $x^{-2}\sqrt{y^{-3}}/y^{-2}\sqrt{x^{-3}}$.

力避分母,簡化下式.

13. $\frac{a}{bc}-\frac{b^{-1}}{c^{-1}}+\frac{a^{-1}(b^{-1}+c^{-1})}{a^{-2}(b+c)}+\frac{b+c}{b^{-1}+c^{-1}}$.

化下列各式為最簡之指數形

14. $(3\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}}$.　　15. $81^{\frac{3}{4}}$.　　16. $(-27)^{\frac{2}{3}}$.

17. $8^{-\frac{5}{3}}$.　　18. $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{5}{6}}$.　　19. $a^{\frac{2}{5}}a^{-\frac{1}{3}}a^{-\frac{11}{15}}$.

20. $a^{\frac{5}{2}}b)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}$.　　21. $ab^{-2}/a^{-3}b$.　　22. $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{5}}$.

23. $(a^{-1}b^{-2}c^3)^{-2}$.　　24. $(-32a^{10})^{\frac{3}{5}}$.　　25. $(-a^6b^{-9})^{-\frac{2}{3}}$.

26. $b^{-\frac{1}{3}}\sqrt[12]{b^{-5}}\div b^{-1}\sqrt{b^{-1}}$.　　27. $(a^{-\frac{5}{2}}\sqrt{bc^5})^{\frac{2}{3}}$.

28. $(8a^{-15}/\sqrt{125a^3})^{-\frac{2}{3}}$.　　29. $\sqrt{a^{\frac{2}{3}}(bc^{-1})^{-2}}$.

30. $\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt[4]{a^3}}$.　　31. $\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-3}}}/\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\cdot\sqrt[3]{a}}$.

32. $[(x^x)^x]^x$.　　33. $(x^{x^2+xy}y^{y^2+xy})^{\frac{xy}{x+y}}$.

34. $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})/(x^{-\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}})$.

35. 以 $x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}$ 乘 $x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}$.

36. 以 $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}$ 除 $a^2-b^3$.

37. 展開 $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{4}})^4$.　　38. 簡化 $[(e^x+e^{-x})^2-4]^{\frac{1}{2}}$.

39. 求 $x^2+4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+4xy+6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+12y^2+9x^{-1}y^3$ 之平方根.

40. 求 $x^3+3x^2+6x+7+6x^{-1}+3x^{-2}+x^{-3}$ 之立方根.

## 指數為負數或分數時之二項定理

601 若於二項展開式(§561)

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$

中,爲 $n$ 指定分數值或負值,則右方得無盡,即無窮,級數;因 $n$, $n(n-1)/2\cdots\cdots$ 諸係數將無一爲 0 也.

以後當證明若 $b<a$, 此級數前 $m$ 項之和,當 $m$ 無限增大時,趨近 $(a+b)^n$ 之值爲極限;換言之,儘量加級數之項,能使所得之結果,與 $(a+b)^n$ 之值相近之程度,如吾人意之所欲.

當 $n$ 爲分數或負數,而 $b<a$ 時,謂二項定理對於 $(a+b)^n$ 能成立者,蓋即此意.

例一. 展開 $(8+x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$ 至四項.

於公式中置 $n=1/3$, $a=8$, $b=x^{-\frac{1}{2}}$, 即得

$$(8+x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\cdot 8^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2}8^{-\frac{5}{3}}(x^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{2\cdot 3}8^{-\frac{8}{3}}(x^{-\frac{1}{2}})^3+\cdots\cdots$$

$$=2+\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{12}-\frac{x^{-1}}{288}+\frac{5x^{-\frac{3}{2}}}{20736}\cdots\cdots.$$

例二. 求 $1/(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}})^2$ 即 $(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}})^{-2}$ 展開式中第六項.

於第 $r+1$ 項之公式(§565)中,置 $n=-2$, $a=a^{\frac{1}{2}}$, $b=x^{\frac{2}{3}}$, $r=5$, 即得

$$\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(a^{\frac{1}{2}})^{-2-5}(x^{\frac{2}{3}})^5=-6a^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{10}{3}}.$$

例三. 展開 $\sqrt{1+x}$ 至四項.

因 $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$, 得 $n=\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=x$.

故
$$\sqrt{1+x}=1+\tfrac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3}x^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\cdots\cdots.$$

結果與§572, 例一所得者同.

例四. 求 $\sqrt{10}$ 之近似值.

$$\sqrt{10}=(3^2+1)^{\frac{1}{2}}=3(1+\tfrac{1}{9})^{\frac{1}{2}},$$

而 $$3\left(1+\tfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=3\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2\cdot3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\cdots\cdots\right]$$

$$=3+\frac{1}{6}-\frac{1}{216}+\frac{1}{3888}+\cdots\cdots$$

$$=3+0.16666-0.00462+0.00025+\cdots\cdots=3.1623$$ 左右.

## 習 題 XXXVI

展開下列各式至四項.

1. $(1+x)^{\frac{1}{3}}$.　　2. $(a^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$.　　3. $\sqrt[3]{(27-2x)^2}$.

4. $(a^m+x)^{\frac{1}{m}}$.　　5. $(a^{-1}-b^{-\frac{1}{2}})^{-4}$.　　6. $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^{-6}$.

7. $\dfrac{1}{2+3x}$.　　8. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{(1+x)^2}}$.　　9. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+3\sqrt{x}}}\right)^3$.

10. 求 $(1+x)^{-3}$ 中第十項.

11. 求 $(x^{-2}-2y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}$ 中第七項.

12. 求 $(1-x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}}$ 中含 $x^{\frac{9}{2}}$ 之項.

13. 求 $x^{-\frac{2}{3}}(2+x^{-\frac{1}{3}})^{-3}$ 中含 $x^{-2}$ 之項.

14. 用 § 601, 例四說明之方法,求下列各數之近似值.

 1. $\sqrt{99}$　　2. $\sqrt[3]{62}$.　　3. $\sqrt[5]{31}$.

# 有 理 化 因 式

**有理化因式 (Rationalizing factors)** 二與根式之積爲有理式時,則二式各稱爲他式之有理化因式. 602

例如, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$. 故 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 爲 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 之有理化因式, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 亦爲 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 之有理化因式.

凡有窮式祇含簡根式者,皆有有理化因式,可以證明.以下各節足以說明此普徧定理.

**平方根之函數之有理化因式** 關於 $\sqrt{x}$ 之有理整式,皆得 603

化爲$A+B\sqrt{x}$之形式,其中$A$及$B$爲關於$x$之有理整式;而$A+B\sqrt{x}$,關於$x$,有有理化因式$A-B\sqrt{x}$,祇須變$\sqrt{x}$之號即可得出.

例如,$2(\sqrt{x})^4+3x(\sqrt{x})^3$可書作$2x^2+3x^2\sqrt{x}$,故此式有有理化因式$2x^2-3x^2\sqrt{x}$.

關於任何有窮數個平方根,如$\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$, ……, 之有理整式,其有理化因式,累用上述之方法,可以求得之.因若將原式乘以其有理化因式之關於$\sqrt{x}$者,再將所得之積乘以其有理化因式之關於$\sqrt{y}$者,如此進行,終必得完全有理之結果也.

例. 求$1+\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{xy}$之有理化因式.

可書作　　$1+\sqrt{y}+\sqrt{x}(1+2\sqrt{y}).$　　(1)

乘(1)以　　$1+\sqrt{y}-\sqrt{x}(1+2\sqrt{y}).$　　(2)

得　　$(1+\sqrt{y})^2-x(1+2\sqrt{y})^2,$

即　　$1-x+y-4xy+2\sqrt{y}(1-2x).$　　(3)

乘(3)以　　$1-x+y-4xy-2\sqrt{y}(1-2x).$　　(4)

得　　$(1-x+y-4xy)^2-4y(1-2x)^2.$　　(5)

因(5)爲完全有理式,故(2)與(4)之積爲(1)之有理化因式.

604 **二項根式之有理化因式**　式之呈$\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$形式者,其有理化因式可如下例求之.

例. 求$\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}$之有理化因式.

可書　　$\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}}=(a^2)^{\frac{1}{6}}+(b^3)^{\frac{1}{6}}$　　(1)

然據§438, $(a^2)^{\frac{1}{6}}+(b^3)^{\frac{1}{6}}$能整除有理式$a^2-b^3$,商爲

$$(a^2)^{\frac{5}{6}}-(a^2)^{\frac{4}{6}}(b^3)^{\frac{1}{6}}+\cdots\cdots-(b^3)^{\frac{5}{6}}.\qquad(2)$$

605 故(2)爲(1)之有理化因式

**將分式之分母有理化**　凡呈$A/B$形之無理式,其中$B$祇含簡根式者,皆可用$B$之有理化因式乘$A$及$B$,化之爲與其等值而具有理分母之式.

例一. 將$1/\sqrt[4]{a^3}$之分母有理化.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a}=\sqrt[4]{a}/a.$$

例二. 將 $\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}$ 之分母有理化.

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2})^2}{(\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2})(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2})}$$

$$=\frac{x^2+\sqrt{x^4-a^4}}{a^2}.$$

計算含根式之分數式之近似值時,應先將分母有理化,庶幾可避免非必要之計算. 606

例. 求 $(1+\sqrt{8})/(3-\sqrt{2})$ 之近似值正確至第三位小數.

$$\frac{1+\sqrt{8}}{3-\sqrt{2}}=\frac{(1+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=1+\sqrt{2}=2.414\cdots\cdots.$$

**根式之除法** 欲以一根式除他一根式時,可書商爲分式之形式,然後將分式之分母有理化. 607

例. 以 $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 除 $4+2\sqrt{5}$.

$$\frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{(4+2\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}=\frac{-3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{(-3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{10})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=1-\sqrt{2}+\sqrt{5}$$

**普徧結果** 由§592及§607,凡代數式祇含簡根式者,皆得化爲簡根式之代數和. 608

## 習 題 XXXVII

求下列各式之有理化因式.

1. $\sqrt[7]{a^5}$.  2. $\sqrt[5]{a^2}\sqrt{b^3}$.  3. $x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}}$.

4. $\sqrt{a}+\sqrt{bc}$.  5. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$  6. $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$.

7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}-\sqrt{u}$.  8. $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+1$.

9. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$.  10. $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b^2}$.  11. $x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}$.

12. $x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{2}{3}}$.  13. $1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$.  14. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1$.

15. $3-\sqrt{5}$.  16. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.  17. $1+\sqrt[3]{2}$.

18. $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$.　　19. $\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}$.

化下列各分式,令其分母爲有理數或有理式.

20. $\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt[5]{b^2}}$.　　21. $\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$.　　22. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{3}}$.

23. $\frac{1}{b+\sqrt{b^2-a^2}}$.　　24. $\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$.

25. $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.　　26. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

27. $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}}$.　　28. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$.

求下列各式之近似值,正確至第三位小數.

29. $\frac{5}{\sqrt{125}}$.　　30. $\frac{2+\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$.　　31. $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

# 無理方程式

609 **無理方程式之解法**　解無理方程式之普徧方法,具下述之法則.

最先,將方程式有理化.

其次,解所得之有理方程式.

最後,將所得各解代入原方程式驗之,不適合者棄去.

何則,令 $P=0$ 指示原方程式,而 $PR=0$ 爲以 $P$ 之有理化因式,$R$,乘 $P=0$ 之兩端所得之有理方程式.依 §341, $PR=0$ 之根即 $P=0$ 與 $R=0$ 兩方程式之根.就原方程式驗之,即可知何者爲 $P=0$ 之根.

例.　解 $x-7-\sqrt{x-5}=0$.

以有理化因式 $x-7+\sqrt{x-5}$ 乘兩端,得

$$(x-7)^2-(x-5)=0.$$

簡化,

$$x^2-15x+54=0.$$

依 §455 解之,

$$x=9\text{ 或 }6.$$

於 $x-7-\sqrt{x-5}=0$ 中以 9 代 $x$，得 $9-7-\sqrt{9-5}=0$，不謬，故 9 爲根.

然以 6 代入之結果，$6-7-\sqrt{6-5}=0$，不合理. 故 6 非根.

應注意者，6 爲等置有理化因式於 0 所得之方程式 $x-7+\sqrt{x-5}=0$ 之根，因 $6-7+\sqrt{6-5}=0$ 爲眞故也.

欲將含根式 $\sqrt[n]{A}$ 之方程式關於此根式有理化，可聚含 $\sqrt[n]{A}$ 之項於一端，其餘之項悉置他端，然後兩端各作 $n$ 次冪. 累用此法，可將祇含平方根之方程式完全有理化. 由 § 345，此法即等於 § 669 所述之法，但計算則簡易多矣. 610

例一. 解 $\sqrt[3]{\sqrt{x}+a}=\sqrt{b}$.

兩端各自立方，　$\sqrt{x}+a=b^{\frac{3}{2}}$.

移項，兩端各自平方，　$x=(b^{\frac{3}{2}}-a)^2$.

將結果代入原方程式，知其爲根.

例二. 解 $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}=9$.

移項，　$\sqrt{x-4}=9-\sqrt{x+5}$.

兩端各自平方，　$x-4=81-18\sqrt{x+5}+x+5$.

簡化，　$\sqrt{x+5}=5$.

兩端各自平方，　$x+5=25$.

解之，　$x=20$.

於原方程式中以 20 代 $x$，得 $\sqrt{25}+\sqrt{16}=9$，不謬，故 20 爲根.

注意 1. 應注意者，如於例一吾人祇將方程式關於元有理化，並不消去不含元之根式. 611

5

2. 又須注意無理方程式亦可無根.

例如，方程式 $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}=9$ 無根. 何則，欲解此方程式，不過重作例二之演算，結果仍得 $x=20$；而 $\sqrt{25}-\sqrt{16}=9$ 不合理也.

3. 應附及者，欲將 $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}=0$（或 $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+E=0$）形式之方程式有理化，最簡之法，爲先將方程式書作

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=-\sqrt{C}-\sqrt{D}\text{（或 }\sqrt{A}+\sqrt{B}=-(\sqrt{C}-E)\text{）}.$$

然後兩端各自平方，結果所得之方程式祇含兩根式，可如例二將其有理化.

**聯立無理方程式**　欲解無理方程組時，可先將各方程式 612

有理化,然後解所得之有理方程組,最後將結果代入原方程組驗之.

但方程式呈§379所述之形式時,應依彼處說明之方法解之.

例一.　解 $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+5}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$　　(1)

$$x+2y=17.\qquad(2)$$

(1)之兩端各自平方,

$$x-5+y+5+2\sqrt{xy+5x-5y-25}=x+y+2\sqrt{xy},$$

即

$$\sqrt{xy+5x-5y-25}=\sqrt{xy}.\qquad(3)$$

(3)之兩端各自平方再簡化,　$x-y=5.$　　(4)

解(4),(2),　$x=9,\ y=4.$　　(5)

以 $x=9,\ y=4$ 代入(1),得 $\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{9}+\sqrt{4}$,不誤.故 $x=9,\ y=4$ 為(1),(2)之解.

例二.　解 $\sqrt{x+6}+2/\sqrt{y}=4,$　　(1)

$$2\sqrt{x+6}+6/\sqrt{y}=9.\qquad(2)$$

就 $\sqrt{x+6}$ 及 $1/\sqrt{y}$ 解之,得 $\sqrt{x+6}=3,\ 1/\sqrt{y}=1/2.$　　(3)

由(3)得 $x=3,\ y=4$,此為(1),(2)之解.

## 習　題　XXXVIII

就 $x$ 解下列各方程式.

1. $x^{\frac{1}{4}}=4.$　　2. $x^{-\frac{1}{2}}=3.$　　3. $x^{\frac{2}{3}}=8.$

4. $(\sqrt{2x-1})^{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}.$　　5. $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=2.$

6. $\sqrt{ax}+\sqrt{bx}+\sqrt{cx}=$ [illegible].　　7. $\sqrt{4x^2+x+10}=2x+1.$

8. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7.$　　9. $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+1}-\sqrt{9x+10}=0.$

10. $\sqrt{x+1}+\dfrac{x-6}{\sqrt{x+2}}=0.$　　11. $\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x-1}=2.$

12. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}.$

13. $\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}}=2.$　　14. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0.$

就 $x$ 及 $y$ 解下列方程式.

15. $\begin{cases}\sqrt{x+17}+\sqrt{y-2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{y+6}.\\ \sqrt{y-x}=\sqrt{3-x}+\sqrt{y-3}.\end{cases}$

16. $\begin{cases} 3\sqrt{x-2y}-\sqrt{x+y-4}=3. \\ \sqrt{x-2y}+2\sqrt{x+y-4}=8. \end{cases}$

17. 證明 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d}=0$ 得化為一次有理方程式.

18. 證明若 $\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{e}=0$,則 $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}-\sqrt{ex+f}=0$ 得化為一次有理方程式.

## 二次不盡根數

**不盡根數 (Surds)** 根數如 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt[3]{5}$,其中被開方數爲有理數而根數自身爲無理數者,稱爲不盡根數.二次,三次,等不盡根數名稱,依其根指數爲二,三,等而定. 613

**定理一** 兩個不同類二次不盡根數之積,仍爲二次不盡根數. 614

假定當不盡根數化爲最簡形式時,其根數因式爲 $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$. $\sqrt{a}$ 與 $\sqrt{b}$ 之積爲 $\sqrt{ab}$,仍爲不盡根數,除非 $ab$ 爲完全平方.

然 $ab$ 不能爲完全平方,因依假設 $a$ 及 $b$ 爲整數,其因數無一爲平方數,且 $a$ 中至少有一個因數與 $b$ 之各因數悉異.

例如, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$, $\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$.

**定理二** 兩個不相等之二次不盡根數,其和及差爲無理數. 615

在同類不盡根數之情形,定理爲眞自明.

故令 $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$ 指示不同類之不盡根數,

如可能時,假定 $$\sqrt{a}+\sqrt{b}=c, \qquad (1)$$

其中 $c$ 爲有理數.

(1)之兩端各自平方再移項,

$$2\sqrt{ab}=c^2-a-b, \tag{2}$$

此爲不可能之事,因$2\sqrt{ab}$爲無理數,§ 614,而$c^2-a-b$爲有理數也.

616　**定理三**　若$a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$,其中$\sqrt{b}$及$\sqrt{d}$爲不盡根數,則$a=c$及$b=d$.

何則,依假設,$\sqrt{b}-\sqrt{d}=c-a$.

此事不可能,除非$\sqrt{b}-\sqrt{d}=0$且$c-a=0$,因非然,則$\sqrt{b}-\sqrt{d}$爲無理數,§ 615,而$c-a$爲有理數,二者不能相等也.

故　$$b=d \text{ 及 } a=c.$$

617　**二項不盡根數之平方根**

$$(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2=x+y\pm2\sqrt{xy}.$$

故若$a+2\sqrt{b}$指示所與之二項不盡根數,而吾人能求得二正有理數$x$及$y$,俾

$$x+y=a \text{ 及 } xy=b,$$

則$\sqrt{x}+\sqrt{y}$爲$a+2\sqrt{b}$之平方根,而$\sqrt{x}-\sqrt{y}$爲$a-2\sqrt{b}$之平方根,兩平方根皆爲二項不盡根數.

此種數$x, y$存在時,可用視察法求出.

**例一.**　求$37-20\sqrt{3}$之平方根.

化之爲$a-2\sqrt{b}$之形式,$37-20\sqrt{3}=37-2\sqrt{300}$.

然　$$300=25\cdot12 \text{ 而 } 37=25+12.$$

故　$$\sqrt{37-2\sqrt{300}}=\sqrt{25}-\sqrt{12}=5-2\sqrt{3}.$$

**例二.**　求$13/12+\sqrt{5/6}$之平方根.

$$\frac{13}{12}+\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{13}{12}+\frac{\sqrt{30}}{6}=\frac{13+2\sqrt{30}}{12}.$$

因$30=10\cdot3$而$13=10+3$, $\sqrt{13+2\sqrt{30}}=\sqrt{10}+\sqrt{3}$.

故　$$\sqrt{\frac{13+2\sqrt{30}}{12}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{120}+\sqrt{36}}{12}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

[illegible] 吾人得求出 $x$ 及 $y$ 之公式如下: 618

依假設, $$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a+2\sqrt{b}}. \quad (1)$$

而 $$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{a-2\sqrt{b}}. \quad (2)$$

以 (2) 乘 (1), $$x-y=\sqrt{a^2-4b}. \quad (3)$$

然 $$x+y=a. \quad (4)$$

解 (3), (4). $$x=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2},\quad y=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

應注意者,此諸值僅在 $a^2-4b$ 爲完全平方時,始爲有理數.故 $a+2\sqrt{b}$ 之平方根亦僅在此種情形始爲二項不盡根數.

## 習 題 XXXIX

求下列各式之平方根.

1. $9+\sqrt{56}$　　2. $20+2\sqrt{96}$.　　3. $32-2\sqrt{175}$.

4. $1+\frac{2\sqrt{6}}{5}$.　　5. $7-3\sqrt{5}$.　　6. $8\sqrt{2}+2\sqrt{30}$.

7. $2(a+\sqrt{a^2-b^2})$.　　8. $b-2\sqrt{ab-a^2}$.

簡化下列各式

9. $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$.　　10. $\sqrt{9+4\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

# 虛數及複素數

**複素數** 凡負數之偶次冪皆爲正數,故負數之偶次根不能爲實數.此種根爲虛數. 619

虛數及其算法之定義,具見§§ 217—228,學者宜加複習.

依此等定義,

1. 符號 $i=\sqrt{-1}$ 稱爲虛數單位.

2. $a$ 爲實數時,$ai$ 形式之符號稱爲純虛數.

3. $a$ 及 $b$ 爲實數時,$a+bi$ 形式之符號稱爲複素數.

4. 二複素數相等,在於,且限於,其實部及虛部各自相等時,

故 $$\text{若 } a+bi=c+di.\ \text{則 } a=c \text{ 及 } b=d.$$

5. 二複素數之和,差,積,商,仍爲複素數(在特殊情形爲實數或純虛數),可用通常運算法則及 $i^2=-1$ 之關係求出.複素數之任何正整數次冪亦然,因依定義 $(a+bi)^n=(a+bi)(a+bi)\cdots\cdots$ 達 $n$ 因式也.

例一. 加 $5+3i$ 及 $2-4i$.

$$5+3i+(2-4i)=(5+2)+(3-4)i=7-i.$$

例二. 由 $3+2i$ 減 $6+2i$.

$$3+2i-(6+2i)=(3-6)+(2-2)i=-3.$$

例三. 以 $1+4i$ 乘 $2+3i$.

$$(2+3i)(1+4i)=2+3i+8i+12i^2=2+3i+8i-12=-10+11i.$$

例四. 展開 $(1+i)^2$.

$$(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i.$$

例五. 求 $x, y$ 之實數值,俾能適合方程式.

$$(x+yi)i-2+4i=(x-yi)(1+i).$$

完成所示之運算,得

$$-(y+2)+(x+4)i=(x+y)+(x-y)i.$$

等置實部於虛部 §619, 4,

$$-(y+2)=x+y, \text{ 及 } x+4=x-y.$$

解之, $$x=6,\ y=-4.$$

於 §§238—241 曾述複素數用其圖象之點表示之法,及由二複素數之圖象以求其和及積之圖象之法則.學者試應用之於一,二,三諸例.

620 共軛虛數 (Conjugate imaginaries) 二複素數如 $a+bi$ 及 $a-bi$,僅其聯結虛實兩部之符號相異者,稱爲共軛虛數.

621 二共軛虛數之積爲正實數.

例如, $$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

622 故如 $(a+bi)/(c+di)$ 一類分式,若以分母之共軛虛數乘其兩項,即可化爲複素數之形式.

例. 以 $2-4i$ 除 $5+7i$,

$$\frac{5+7i}{2-4i}=\frac{(5+7i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}$$
$$=\frac{-18+34i}{20}=-\frac{9}{10}+\frac{17}{10}i.$$

**i之乘冪**　由等式 $i^2=-1$, 凡 $i$ 之偶次冪非 $-1$ 卽 $1$, 其奇次冪非 $i$ 卽 $-i$. 623

例如, $i^3=i^2\cdot i=-i$; $i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-i^2=1$; 餘仿此.

任與 $n$ 一值, 欲求 $i^n$ 之值, 可以 4 除 $n$. 於是 $i^n$ 之值爲 $1, i, -1, -i$, 視餘數爲 0, 1, 2, 3 而定.

例如, $i^{24}=(i^4)^6=1$; $i^{25}=i^{24}\cdot i=i$; 餘仿此.

**負數之偶次方根**　$-4$ 一數有 $2i$ 及 $-2i$ 二平方根, 因 $(2i)^2=2^2i^2=-4$, 及 $(-2i)^2=(-2)^2i^2=-4$, 吾人擇 $2i$ 爲主平方根, 書作 $\sqrt{-4}=2i$ 而 $-\sqrt{-4}=-2i$. 624

同理, 任與之負數 $-a$, 主平方根爲 $\sqrt{a}i$, 卽 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$.

由此主平方根之定義, 若 $-a$ 及 $-b$ 爲任二負數, 則 625

$$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}.$$

何則, $\qquad \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\sqrt{a}i\cdot\sqrt{b}i=i^2\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}.$

如此, 二負數 $-a$, $-b$ 之主平方根之積, 雖亦爲其積 $ab$ 之一平方根, 然非其積之主平方根, 與實數之情形不同.

計算虛數時, 必須切記法則 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 之此種變更. 如先將一切之 $\sqrt{-a}$ 換爲 $\sqrt{a}i$, 各種錯誤卽無從發生.

例一. 簡化 $\sqrt{-2}\cdot(\sqrt{-3})^5\cdot(\sqrt{-5})^7$.

$$\sqrt{-2}\cdot(\sqrt{-3})^5\cdot(\sqrt{-5})^7=\sqrt{2}i\cdot(\sqrt{3}i)^5\cdot(\sqrt{5}i)^7$$
$$=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3})^5\cdot(\sqrt{5})^7i^{13}=1125\sqrt{30}i.$$

例二. 以 $1+\sqrt{-1}$ 乘 $2+\sqrt{-9}$.

$$(2+\sqrt{-9})(1+\sqrt{-1})=(2+3i)(1+i)=-1+5i.$$

負數之高偶次根爲複素數, 後將證之. 626

例如，$-4$ 之四次根，其一爲 $1+i$，因

$$(1+i)^4=1+4i+6i^2+4i^3+i^4=1+4i-6-4i+1=-4.$$

627 **複素數之平方根** 以後當證明凡複素數之一切根仍爲複素數.其平方根之求法如下.

$$(\sqrt{x}\pm i\sqrt{y})^2=x-y\pm 2i\sqrt{xy}.$$

故若 $a+bi$ 爲所與之複素數，其中 $b$ 爲正數，而吾人能求得二正數 $x$ 及 $y$，俾

$$x-y=a, \quad (1) \qquad 及 \qquad 2\sqrt{xy}=b, \quad (2)$$

則 $\sqrt{x}+i\sqrt{y}$ 爲 $a+bi$ 之平方根，而 $\sqrt{x}-i\sqrt{y}$ 爲 $a-bi$ 之平方根.

此種數 $x$ 及 $y$ 可如下求之.

依假設，
$$\sqrt{x}+i\sqrt{y}=\sqrt{a+bi}. \tag{3}$$

而
$$\sqrt{x}-i\sqrt{y}=\sqrt{a-bi}. \tag{4}$$

以 (4) 乘 (3)，
$$x+y=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{5}$$

然依 (1)，
$$x-y=a. \tag{6}$$

解 (5) 與 (6)，即得
$$x=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

而
$$y=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

因 $\sqrt{a^2+b^2}>a$，故此二值皆爲正數.

例. 求 $-1+4\sqrt{5}i$ 之平方根.

今
$$a=-1 \text{ 及 } \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-1)^2+(4\sqrt{5})^2}=9.$$

故
$$x=(-1+9)/2=4 \text{ 及 } y=(1+9)/2=5.$$

故
$$\sqrt{-1+4\sqrt{5}i}=2+\sqrt{5}i.$$

## 習題 XL

簡化下列各式.

1. $\sqrt{-49}$.　2. $\sqrt{-18}$.　3. $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-12}$.　4. $\sqrt{-2^2}$.

5. $(\sqrt{-2})^2$.　6. $i^{12}$.　7. $i^{-7}$.　8. $i^{15}$.

9. $\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{y-x}$.　10. $(2+\sqrt{-3})(1+\sqrt{-2})$.

11. $(\sqrt{-2})^7(\sqrt{-3})^9$.　12. $(1+2i)^3+(1-2i)^3$.

13. $\dfrac{a}{\sqrt{-a^2}}-\dfrac{b}{i\sqrt{b^2}}$.　14. $\dfrac{4+6i}{1+i}+\dfrac{4-6i}{1-i}$.

15. $(\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i})^2$

16. $(1+i^3)/(1+i)$.

17. $\dfrac{a+bi}{a-bi}$.

18. $\dfrac{9+3\sqrt{2}i}{(3+\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)}$.

19. 以 $1+\sqrt{-3}$ 除 4.

20. 求 $-16$ 之一個四次根.

21. 證明 $(-1+\sqrt{3}i)/2$ 爲 1 之立方根.

22. 證明 $(1+i)/\sqrt{2}$ 爲 $-1$ 之四次根.

23. 求 $x$ 及 $y$ 之實數值,俾適合方程式

$$3+2i+x(i-1)+2yi=(3i+4)(x+y).$$

求下列各式之平方根.

24. $5+12i$.　　25. $2i$.　　26. $4ab+2(a^2-b^2)i$.

# XIII. 二次方程式

**二次方程式之普徧形式**　凡二次方程式祇含一元,如 $x$, 者,皆得化爲 628

$$ax^2+bx+c=0$$

之形式,其中 $a, b$, 及 $c$ 指示已知數.

設或 $b=0$, 則此時之方程式稱爲純二次方程式 (Pure quadratic); 若 $b\neq0$, 則稱爲雜二次方程式 (Affected quadratic).

**用視察法求根**　方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根,卽 $x$ 之特殊值能使多項式 $ax^2+bx+c$ 爲 0 者, § 332. 此種根有二. 629

若知 $ax^2+bx+c$ 之因式,卽知 $ax^2+bx+c=0$ 之根,因根卽 $x$ 之值能使 $ax^2+bx+c$ 之因式爲 0 者故也, §§ 253, 341. 若因式爲 $x-\alpha$ 及 $x-\beta$, 則根爲 $\alpha$ 及 $\beta$.

**例一.** 解方程式 $x^2+x-6=0$.

$$x^2+x-6=(x+3)(x-2).$$

$x=-3$ 時則 $x+3$ 一因式爲 0, 而 $x=2$ 時則 $x-2$ 一因式爲 0. 故根爲 $-3$ 及 2.

例二. 解 $abx^2-(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)=0$.

依 § 443, 先析因式, $[ax-(a+b)][bx-(a-b)]=0$.

故根爲 $(a+b)/a$ 及 $(a-b)/b$.

特例,因 $x^2-q=(x-\sqrt{q})(x+\sqrt{q})$, 故純二次方程式 $x^2-q=0$ 之根爲 $\sqrt{q}$ 及 $-\sqrt{q}$.

又,因 $ax^2+bx=(ax+b)x$, 故二次方程式呈 $ax^2+bx=0$ 之形式者,根爲 $-b/a$ 及 $0$.

例如, $4x^2=9$ 之根爲 $3/2$ 及 $-3/2$; $2x^2-x=0$ 之根爲 $0$ 及 $1/2$; $5x^2=0$ 之根爲 $0$ 及 $0$.

630 反之,欲求根爲二與數,如 $\alpha$ 及 $\beta$, 之二次方程式. 但作 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 之積而等置之於 0, 可矣.

例如,根爲 $-2$ 及 $1/3$ 之二次方程式,爲 $(x+2)(x-1/3)=0$, 卽 $3x^2+5x-2=0$.

例一. 解下列各二次方程式:

1. $x^2+2x-8=0$. 2. $2x^2-7x+3=0$.

3. $(2x-1)(x-2)=x^2+2$. 4. $(x-1)(x-3)=(2x-1)^2$.

例二. 試求以下列各組數爲根之二次方程式.

1. $-2/3, -3/2$. 2. $a, -a$. 3. $1/4, 0$.

631 **根之普徧公式** 然 $ax^2+bx+c$ 常得分解因式;因 § 444 曾證明

$$ax^2+bx+c=a\left[x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right].$$

是以
$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

之根卽 $x$ 之値能使 $ax^2+bx+c$ 之因式爲 0 者,此等根爲

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 及 } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

通常書作
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

公式 (2) 切宜熟記,因凡二次方程式之巳化爲 (1) 之形式者,祇須代換公式卽可得根也.

例. 解 $4x^2+105x=81$.

化作 (1) 之形式, $4x^2+105x-81=0$.

則因 $a=4$, $b=105$, 及 $c=-81$.

故 $x=\dfrac{-105\pm\sqrt{105^2+4\cdot4\cdot81}}{8}$, 卽, $\dfrac{3}{4}$ 或 $-27$.

$b$ 爲偶整數, 而 $a$ 及 $c$ 皆爲整數時, 用下之公式較便. 632

$$x=\frac{-b/2\pm\sqrt{(b/2)^2-ac}}{a}. \tag{3}$$

此公式由以 2 除 (2) 之分子及分母而得.

例. 解 $3x^2+56x-220=0$.

因 $b/2=28$, 代入 (3) 得

$$x=\frac{-28\pm\sqrt{28^2+3\cdot220}}{3},\ 卽,\ \frac{10}{3}\ 或\ -22.$$

任與之二次方程式,亦可直接應用配平方法(§ 444)解之如 633
下例. 但因此法含不必要之計算,通常僅於遺忘 § 631 之公式時始一用之.

例, 解 $3x^2-6x+2=0$.

移已知項於右端, 然後以 $x^2$ 之係數除兩端,

$$x^2-2x=-2/3.$$

左端配平方, $x^2-2x+1=1/3$.

兩端開平方, $x-1=\pm\sqrt{3}/3$, 故 $x=(3\pm\sqrt{3})/3$.

凡分式方程式消去分式後成爲二次方程式者,皆可用上 634
述之方法解之. 然宜參看 §§ 524—527.

例一. 解 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}$.

消去分式並簡化, $2x^2+10x+11=0$.

解之, $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{2}$.

此 $x$ 之二值皆爲原方程式之根, 因二者均不致使其分母爲 0 也.

例二. 解 $\dfrac{x+3}{x^2-1}+\dfrac{x-3}{x^2-x}+\dfrac{x+2}{x^2+x}=0$.

乘以最低公分母 $x(x^2-1)$ 以消去分式並簡化之，得

$$3x^2+2x-5=0. \text{ 從而 } x=1 \text{ 或 } -5/3.$$

然 1 不能爲原方程式之根，因 $x=1$ 時致使式中首二分母爲 0 也. 故該方程式祇有 $-5/3$ 一根.

## 習 題 XLI

解下列各方程式.

1. $x^2+2x=35.$
2. $4x^2-4x=3.$
3. $x^2=10x-18.$
4. $9x^2-6x+5=0.$
5. $2x^2+3x-4=0.$
6. $(2x-3)^2=8x.$
7. $x^2+9x-252=0.$
8. $12x^2+56x-255=0.$
9. $8x^2-82x+207=0.$
10. $15x^2-86x-64=0.$
11. $x^2-3x-1+\sqrt{3}=0.$
12. $x^2-(6+i)x+8+2i=0.$
13. $(x-2)^2(x-7)=(x+2)(x-3)(x-6).$
14. $\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{x+2}{2x}=2.$
15. $\dfrac{x+1}{x}+1=\dfrac{x}{x-1}.$
16. $\dfrac{3}{2(x^2-1)}+\dfrac{x}{4x+4}=\dfrac{3}{8}.$
17. $\dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{1}{4x-2}-\dfrac{2x}{1-4x^2}=\dfrac{7}{8}.$
18. $\dfrac{2x-1}{x-2}+\dfrac{3x+1}{x-3}=\dfrac{5x-14}{x-4}.$
19. $\dfrac{x+1}{x(x-2)}-\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{1}{2x}=0$
20. $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{4-x}=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{3-x}.$
21. $\dfrac{x+3}{4(x+2)(3x-1)}+\dfrac{2x+1}{3(3x-1)(x+4)}-\dfrac{17x+2}{6(x+4)(x+2)}=0.$
22. $\dfrac{x+7}{2x^2-7x+3}+\dfrac{x}{x^2-2x-3}+\dfrac{x+3}{2x^2+x-1}=0.$
23. $3x^2+(9a-1)x-3a=0.$
24. $x^2-2ax+a^2-b^2=0.$
25. $c^2x^2+c(a-b)x-ab=0.$
26. $x^2-4ax+4a^2-b^2=0.$
27. $x^2-6acx+a^2(9c^2-4b^2)=0.$
28. $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0.$
29. $1/(x-a)+1/(x-b)+1/(x-c)=0.$
30. $\dfrac{(x-a)^2-(x-b)^2}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{4ab}{a^2-b^2}=0,$

## 習 題 XLII

1. 二連續整數之積爲 506，求此二數.

2. 二連續整數之平方之和爲481,求此二數.

3. 二連續整數之立方之差爲91,求此二數.

4. 三連續整數兩兩之積之和爲587,求此三數.

5. 由下開條件求二位之數:兩數字之積爲48.若將數字易位,其數減小18.

6. 有一分數,其分子較分母多2,又其自身較其倒數多$\frac{24}{35}$.求此分數.

7. 販牛者以1260圓買牛若干頭.除失去四頭外,餘牛每頭增價10圓賣之,計尚獲利260圓.則此人原買牛幾頭?

8. 一人將貨物以48圓售出,獲利之百分數,等於貨物原價圓數之半.貨物之原價若何?

9. 本金4000圓,以複利法貸出,利息每年加入本中,若二年後本利和達到4410 ,則利率若何?

10. 一人繼承遺產25,000圓,但除繳去遺產稅後,又提出若干成充費用,其百分數較遺產稅率多一,故僅得22,800圓.遺產稅率若何?

11. 一人以4500圓購入有折扣之50圓股票若干張,除10張外,其餘徑以5550圓售出.其時溢價之百分數三倍於購入時之折扣率,此人購入股票幾張?

12. 貨車後輪之周圍,較前輪之周圍長8吋,而車行1哩,後輪較前輪少轉88次.求各輪之周圍.

13. 正方形之四周有邊緣,緣之闊較正方形每邊之長之四分之一少1吋,其面積之平方吋數,較正方形四周之長之吋數多64.求正方形及邊緣之面積.

14. 正方形每邊之長爲2.截去四角得正八角形 此八角形每邊之長若何?

15. 酒商由裝滿63嚳之桶中取出一定量之酒,仍用水將桶注滿,復取出同量之液體,其時桶中僅含純酒28嚳.求其每次取出幾嚳?

16. 一人附甲車行50哩,停留5分鐘後,復附乙車返,乙車較甲車每小時快5哩.全程共費時$2\frac{2}{3}$小時.兩車之速率若何?

17. 旅人於一定時間內步行6哩.若時間少1/2小時,則速率每小時應多2哩.求時間及速率.

18. 旅人以一定速率行12哩後,復以每小時較前多1/2哩之速率前行6哩.若此人以第二次之速率行全程,時間應省20分鐘.此旅人行上述18哩所費之時間若何?

19. 兩直路成直交,甲乙二人由交點同時出發,甲以每小時3哩之速率進行一路,乙以每小時4哩之速率進行他一路.幾小時後二人相距30哩?

20. 若甲與乙,各以每小時2哩及3哩之速率於上述之兩路行走,而甲先乙兩小時出發,則乙出發後幾小時二人相距10哩?

21. 在離地面$a$呎高處,以每秒$b$呎之初速將物體鉛直上拋,$t$秒後物體之高當如公式$h=a+bt-16t^2$所示.若使物體鉛直下落,則其對應公式爲$h=a-bt-16t^2$.

(1) 若在地上以每秒32呎之初速將物體鉛直上拋,何時物體高達7呎?何時高達16呎?物體能高達17呎否?

(2) 在離地面64呎高處,以每秒48呎之初速使物體鉛直下落.何時物體高達36呎?

(3) 若物體在離地面36呎高處落下,何時達到地面?

# XIV. 二次方程式之討論

## 極大與極小

635. **根之性質 判別式** 令$\alpha$及$\beta$指示$ax^2+bx+c=0$之根,俾(§631)

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

被開方式$b^2-4ac$稱爲

$$ax^2+bx+c=0$$

之判別式.係數$a, b, c$爲實數時,判別式之符號顯示根$\alpha, \beta$之性質.即

1. $b^2-4ac$爲正數時,二根爲實數且相異.
2. $b^2-4ac$爲0時,二根爲實數且相等.
3. $b^2-4ac$爲負數時,二根爲共軛虛數.

同時應注意者，

1. $b^2-4ac=0$ 時，$ax^2+bx+c$ 爲完全平方．

2. $a$ 正而 $c$ 負時，二根常爲實數，因 $b^2-4ac$ 爲正數也．

3. 若 $a, b, c$ 爲有理數，則於，且祇於，$b^2-4ac$ 爲完全平方時，二根爲有理數．

例一．試證 $x^2-6x+10=0$ 之根爲虛數．

因 $b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot1\cdot10=-4$，故根爲虛數．

例二．$m$ 必須有若何之值，$mx^2+3x+2=0$ 之二根始能相等？

須有 $3^2-4\cdot m\cdot 2=0$，即，$m=9/8$．

例三．若可能時，分解 $y^2+xy-2x^2+11x+y-12$ 之因式．

將多項式依 $y$ 之乘冪排列再等置於 0，得 $y^2+(x+1)y-(2x^2-11x+12)=0$．

解之，
$$y=\frac{-(x+1)\pm\sqrt{9x^2-42x+49}}{2},$$

即
$$y=x-4,\ 或\ y=-2x+3.$$

故 (§ 631) $\qquad y^2+xy-2x^2+11x+y-12=(y-x+4)(y+2x-3)$.

應注意者，因式分解所以可能，祇因被開方式 $9x^2-42x+49$ 爲完全平方之故．

**根與係數之關係** 若 $\alpha$ 及 $\beta$ 表 $ax^2+bx+c=0$ 之根，則 (§ 631) 636

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-\alpha)(x-\beta).$$

以 $a$ 除恆等式之兩端再完成右端之乘法，卽得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\equiv x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta.$$

因此式爲恆等式，故兩端中 $x$ 之同次冪之係數應相等，§ 264，卽

$$\alpha+\beta=-b/a\ 又\ \alpha\beta=c/a.$$

將 § 631 得出之 $\alpha$ 與 $\beta$ 之值相加及相乘，亦可證實此結果．因 $\alpha, \beta$ 爲 $x^2+bx/a+c/a=0$ 之根，故有下之定理：

凡二次方程式呈 $x^2+px+q=0$ 之形式者，$x$ 之係數變號後

等於二根之和,而常數項等於二根之積.

例如,二次方程式 $6x^2+x=2$, 即 $x^2+x/6-1/3=0$, 其二根之和爲 $-1/6$, 而其積爲 $-1/3$.

例一. 解 $9x^2-10x+1=0$.

因 $9-10+1=0$, 顯而易見一根爲1. 以故,因二根之積爲 $1/9$, 是以他一根爲 $1/9\div 1$ 即 $1/9$.

例二. 求一方程式,其根須爲 $3x^2+8x+5=0$ 之根之三倍者.

令 $\alpha$ 及 $\beta$ 指示 $3x^2+8x+5=0$ 之根.

則 $$\alpha+\beta=-8/3 \text{ 而 } \alpha\beta=5/3.$$

故所求之方程式爲

$$x^2-(3\alpha+3\beta)x+3\alpha\cdot 3\beta=x^2-3(\alpha+\beta)x+9\alpha\beta=x^2+8x+15=0.$$

**根之對稱函數** §540. $\alpha+\beta$ 及 $\alpha\beta$ 二式爲根 $\alpha, \beta$ 之對稱函數. $\alpha$ 及 $\beta$ 之一切其他有理對稱函數,皆可以含此二函數, $\alpha+\beta$ 及 $\alpha\beta$, 之項作有理的表示,故得以含方程式之係數之項作有理的表示.

何則,凡此種函數皆得化爲整對稱函數或二整對稱函數之商之形式. 若一整對稱函數含一 $k\alpha^p\beta^{p+q}$ 形式之項,則必并含 $k\alpha^{p+q}\beta^p$ 之項, §532, 故必含 $k\alpha^p\beta^p(\alpha^q+\beta^q)$. 然 $\alpha^p\beta^p=(\alpha\beta)^p$, 而果用二項定理,易證 $\alpha^q+\beta^q$ 得以含 $\alpha+\beta$ 及 $\alpha\beta$ 之乘冪之項表之.

例如,因 $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, 故 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$.

同理,可求得 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

例. $x^2+px+q=0$ 之根爲 $\alpha, \beta$, 求以含 $p$ 及 $q$ 之項表 $1/\alpha+1/\beta$ 及 $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$.

$$1/\alpha+1/\beta=(\alpha+\beta)/\alpha\beta=-p/q,$$

而 $$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]=q(p^2-2q).$$

**無窮大根** 假定 $ax^2+bx+c=0$ 之係數非常數而爲變數,則吾人能證明若 $a$ 趨近0爲極限,則二根之一趨於 $\infty$; 若 $a$ 及 $b$ 皆趨近0爲極限(但 $c$ 不然),則二根皆趨於 $\infty$.

何則,根之公式爲

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

以 $-b-\sqrt{b^2-4ac}$ 乘分式 $\alpha$ 之兩項，而以 $-b+\sqrt{b^2-4ac}$ 乘分式 $\beta$ 之兩項，卽得

$$\alpha=-\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}},\quad \beta=-\frac{2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

依 §§ 203, 205,　　若 $a\to 0$，則 $\sqrt{b^2-4ac}-b$.

故　　若 $a\to 0$，則 $\alpha\to -c/b$ 而 $\beta\to\infty$，

若 $a\to 0$，且 $b\to 0$，則 $\alpha\to\infty$ 而 $\beta\to\infty$。

習慣上敍述此諸結論如下（§ 519）：

$a$ 爲 0 時，$ax^2+bx+c=0$ 有一根變爲無窮大，而 $a$ 及 $b$ 同時爲 0（但 $c$ 不然）時，則其二根皆變爲無窮大.

**極大與極小 (Maxima and minima)**　令 $y$ 爲 $x$ 之函數，§ 278. 若 $x$ 增大時，$y$ 先增大至一値，$m$，然後始減小，或先減小至一値，$m'$，然後始增大，則稱 $m$ 爲 $y$ 之極大値，而 $m'$ 爲其極小値. 639

例如，$x=1$ 時，$y=(x-1)^2-4$ 有極小值，其值爲 $-4$. 何則，若 $x$ 由小於 1 之值而增大時，$(x-1)^2$ 先減小至 0 然後增大也.

同理，$x=1$ 時，$y=4-(x-1)^2$ 有極大值，4.

凡具實係數之二次三項式 $ax^2+bx+c$，皆有一極大或極小値，其値可用下例之法求之. 640

例一. 求 $y=x^2+6x-7$ 之極大或極小値.

配平方，　　$x^2+6x-7=(x+3)^2-16$.

故 $x=-3$ 時，$y$ 有極小値，卽 $-16$.

例二. 分一與線分爲二部分，俾所包矩形有最大面積.

令 $2a$ 指示所與線分之長，$x$ 及 $2a-x$ 爲二部分之長，而 $y$ 爲所包矩形之面積.

則　　$y=x(2a-x)=2ax-x^2=a^2-(a-x)^2$.

故 $x=a$ 時，$y$ 有極大値，其時所與線分等分爲二，而矩形成爲正方形，面積爲 $a^2$.

二次三項式及若干種較複雜之函數，其極大及極小値亦可用下法求之. 641

例. $y=(4x^2-2)/(4x-3)$ 如有極大及極小値，求之.

消去分式而就$x$解之,得

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-3y+2}}{2}=\frac{y\pm\sqrt{(y-1)(y-2)}}{2}.$$

依假設,$x$限於實數值.故$y$祇能取使被開方式$(y-1)(y-2)$爲正(或0)之值,即1及較小之值與2及較大之值.

由此可知1爲$y$之極大值,而2爲其極小值.

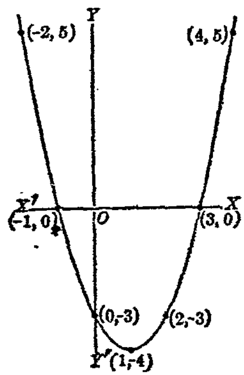
何則,$y$增大至1時,$x$之二值,即$(y-\sqrt{y^2-3y+2})/2$及$(y+\sqrt{y^2-3y+2})/2$各自增大及減小至1/2.反之,故$x$增大而經過1/2時,$y$先增大至1然後減小.

642　**二次三項式之變化**　已與$y=ax^2+bx+c$,其中$a$爲正數.配平方,得

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

故$x=-b/2a$時,$y$有極小值,此極小值爲$(4ac-b^2)/4a$.

$x$由$-\infty$向$+\infty$增大時,$y$先由$+\infty$減小至$(4ac-b^2)/4a$,然後再向$+\infty$增大.




例如,令$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$.

$x$由$-\infty$向$+\infty$增大時,$y$先由$\infty$減小至$-4$,然後由$-4$向$\infty$增大.

又當$x^2-2x-3=0$,即$x=-1$或3時,$y=0$.

$x$之值未達$-1$時,$y$爲正.此後$x$未達3時$y$仍爲負,其後$y$又變爲正.

$x=\cdots\cdots-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,3,4,\ 5,\cdots\cdots,$

時,$y=\cdots\cdots\ 12,\ 5,\ 0,\ -3,\ -4,\ -3,0,5,12,\cdots\cdots.$

作以上各組值之圖象,而過所得諸點作一曲線,如於§389,可得$y=x^2-2x-3$之圖象.

應注意者,對於$y$之0值,有圖象交$x$軸之點與之對應,而對於$y$之極小值,則有圖象之最低點與之對應.此點又爲曲線之轉換點(Turning point).

## 習　題　XLIII

1. $m$須有若何之值,$(m+2)x^2-2mx+1=0$之二根始能相等?

2. $m=-1$ 時, $(m^2+m)x^2+3mx-2=0$ 之根若何? $m=0$ 時又若何?

3. 若可能時分解 $3x^2+5xy-2y^2-5x+4y-2$ 之因式.

4. $m$ 須有若何之值, $x^2-y^2+mx+5y-6$ 始得分解因式?

5. $x^2+px+q=0$ 之根爲 $\alpha$ 及 $\beta$, 試將 $(\alpha-\beta)^2$, $\alpha^4+\beta^4$, 及 $\alpha/\beta+\beta/\alpha$ 以含 $p$ 及 $q$ 之項表之.

6. $2x^2-3x+4=0$ 之根爲 $\alpha$ 及 $\beta$. 求 $\alpha/\beta^2+\beta/\alpha^2$ 及 $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ 之值.

7. $x^2+x+2=0$ 之根爲 $\alpha$ 及 $\beta$, 試求方程式, 令其根分別爲 $-\alpha$, $-\beta$; $1/\alpha$, $1/\beta$; $2\alpha$, $2\beta$; $\alpha+1$, $\beta+1$.

8. 求下列各式之極大及極小值.

(1) $x^2-8x+3$. (2) $2x^2-x+4$. (3) $1+4x-x^2$.

(4) $x/(x^2+1)$. (5) $1/x+1/(1-x)$. (6) $(x+1)/(2x^2-1)$.

9. 求內接於定圓之最大矩形; 又求其周之最大者.

10. 一人在舟中, 距海岸上最近點爲2哩, 欲盡其力之所及, 速至距最近點6哩之岸上. 若此人每小時划船能4哩, 步行能5哩, 則此人應向何點划行?

11. 在地面上以每秒48呎之初速將物體鉛直上拋, 此物體能達之高度若何? 又何時可達此高度? 參閱第272頁, 21題.

# XV. 高次方程式可由二次方程式得解者

**可分解因式之方程式** 已與 $A=0$ 形式之整方程式. 若得分解 $A$ 爲一次或二次之因式, 則將 $A$ 之各個因式等置於 0, 而解所得諸方程式, 可盡得 $A=0$ 之諸根. 何則, 若 $A\equiv BC\cdots\cdots$, 則 $A=0$ 與 $B=0$, $C=0$, ……聯合等值故也, § 341. 643

例一. 解 $x^4+x^2+1=0$.

依 § 436,
$$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

故 $x^4+x^2+1=0$ 與下二方程式等值.
$$x^2+x+1=0 \quad 及 \quad x^2-x+1=0.$$

解之,
$$x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \quad 或 \quad \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

例二. 解 $x^4-x^3-5x^2-7x+12=0$.

依 §451 之法分解因式,得

$$x^4-x^3-5x^2-7x+12=(x-1)(x-3)(x^2+3x+4).$$

故 $x^4-x^3-5x^2-7x+12=0$ 與下之三方程式等值.

$$x-1=0,\quad x-3=0,\quad x^2+3x+4=0.$$

故根為 $1,\ 3,$ 及 $(-3\pm i\sqrt{7})/2$.

例三. 解下列各方程式.

(1) $6x^3-11x^2+8x-2=0$. (2) $x^4-5x^3+x^2+11x+4=0$.

644 **$au^2+bu+c=0$ 型之方程式,其中 $u$ 指示 $x$ 之一函數** 若就 $u$ 解 $au^2+bu+c=0$, 得根 $\alpha$ 及 $\beta$, 則原方程式與 $u=\alpha$ 及 $u=\beta$ 二方程式等值,因依 §631,

$$au^2+bu+c\equiv a(u-\alpha)(v-\beta)$$

也.故欲就 $x$ 解 $au^2+bu+c=0$, 祇須就 $x$ 解 $u=\alpha$ 及 $u=\beta$ 二方程式即可.

例一. 解 $3x^4+10x^2-8=0$.

就 $x^2$ 解之, $x^2=2/3$ 或 $-4$.

故 $x=\pm\sqrt{6}/3$ 或 $\pm 2i$.

例二. 解 $x^{\frac{2}{3}}+3-10x^{-\frac{2}{3}}=0$.

以 $x^{\frac{2}{3}}$ 乘之, $x^{\frac{4}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-10=0$.

就 $x^{\frac{2}{3}}$ 解之, $x^{\frac{2}{3}}=2$ 或 $-5$.

故 $x=\pm 2\sqrt{2}$ 或 $\pm 5i\sqrt{5}$.

例三. 解 $(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=6$.

此方程式可化為下之形式.

$$(x^2+3x)^2+9(x^2+3x)+14=0.$$

就 $x^2+3x$ 解之,得

$$x^2+3x=-2 \text{ 及 } x^2+3x=-7$$

二方程式,其根為 $-1,\ -2,$ 及 $(-3\pm i\sqrt{19})/2$.

例四. 解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

將第一因式與第四因式相乘,而第二因式則與第三因式相乘,方程式即化為 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$

之形式,可用例三之法解之.

例五. 解 $x^4+10x^3+31x^2+30x+5=0$.

首二項配平方,　　$(x^2+5x)^2+6(x^2+5x)+5=0$.

就 $x^2+5x$ 解之,得

$$x^2+5x=-5 \text{ 及 } x^2+5x=-1$$

兩方程式,其根爲 $(-5\pm\sqrt{5})/2$ 及 $(-5\pm\sqrt{21})/2$.

例六. 解 $8\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}+3\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}-11=0$.

注意第二分式爲第一分式之倒分式,以第一分式乘方程式之兩端,即得

$$8\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)^2-11\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)+3=0.$$

就 $\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$ 解之,得

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1}=1 \text{ 及 } \frac{x^2+2x}{x^2-1}=\frac{3}{8}$$

兩方程式,其根爲　　$-1/2$ 及 $-3,\ -1/5$.

如此求得之 $x$ 值皆爲原方程式之根,因此諸值均不致使其分母爲0也.

例七. 解下列各方程式.

(1) $3x^4-29x^2+18=0$.　　(2) $x^4-6x^3+8x^2+3x=2$.

(3) $(x-a)(x+2a)(x-3a)(x+4a)=24a^4$.

(4) $(4x^2+2x)/(x^2+6)+(x^2+6)/(2x^2+x)-3=0$.

**倒數方程式 (Reciprocal equations)**　倒數方程式者,於式 645
中以 $1/x$ 代 $x$,然後消去分式,而方程式不變者也.若將此種方程式之項依 $x$ 之降冪排列,則其首末兩係數相同,第二係數與末第二係數相同,餘類此;或則上述各對係數絕對值相同而符號相反.

例如,　　$2x^4+3x^3+4x^2+3x+2=0$

及　　$x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-1=0$

皆爲倒數方程式.

四次之倒數方程式,可化爲二次方程式之形式而解之如下.

例一. 解 $2x^4-3x^3+4x^2-3x+2=0$.

聚係數相同之項而以 $x^2$ 除之,則原方程式即化爲下之形式.

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

因 $x^2+1/x^2=(x+1/x)^2-2$, 此方程式又可化爲

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

就 $x+1/x$ 解之,得

$$x+\frac{1}{x}=0 \quad 及 \quad x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$$

兩方程式,其根爲 $\qquad i,\ -i$ 及 $(3\pm i\sqrt{7})/4$.

凡奇次之倒數方程式,皆有一根爲 1 或 $-1$; 若將其對應因式 $x-1$ 或 $x+1$ 除去,所得之"降次" (Depressed) 方程式仍爲倒數方程式. 故三次及五次之倒數方程式,可藉助於二次方程式解之.

例二. 解 $2x^3-3x^2-3x+2=0$.

聚項, $$2(x^3+1)-3(x^2+x)=0.$$

其兩端皆得爲 $x+1$ 所整除,故此方程式與

$$x+1=0 \text{ 及 } 2x^2-5x+2=0.$$

兩方程式等值,其根爲 $\qquad -1$, 及 $2,\ 1/2$.

例三. 解 $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$.

聚項, $$(x^5-1)-5x(x^3-1)+9x^2(x-1)=0.$$

以 $x-1$ 除之,知此方程式與

$$x-1=0 \text{ 及 } x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$$

兩方程式等值,其根爲 $\quad 1$, 及 $(1\pm i\sqrt{3})/2$, $(3\pm\sqrt{5})/2$.

例四. 解下列各方程式.

(1) $x^3-2x^2+2x-1=0$. $\qquad$ (2) $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$.

(3) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

646 **二項方程式 (Binomial equations)** 呈 $x^n+a=0$ 形式之方程式,稱爲二項方程式. 如 $x^n+a$ 得分解爲一次或二次之因式時,可用以上各節之方法解之.

例一. 解 $x^3-1=0$.

因 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, 方程式 $x^3-1=0$ 與下二方程式等值.

$$x-1=0,\ x^2+x+1=0.$$

解之, $x=1$ 或 $(-1\pm i\sqrt{3})/2$.

例二. 解 $x^5-32=0$.

置 $x=\sqrt[5]{32}y=2y$, 由 $x^5-32=0$ 得 $y^5-1=0$.

依 §§ 438, 643, $y^5-1=0$ 與下二方程式等值.

$$y-1=0,\ y^4+y^3+y^2+y+1=0.$$

解之, $y=1$, $(-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/4$.

或 $(-1\pm\sqrt{5}-i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/4$.

故 $x=2y=2$, $(-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/2$,

或 $(-1\pm\sqrt{5}-i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/2$.

凡二項方程式 $x^n\pm a=0$, 皆可用上法化爲倒數方程式 $y^n\pm1=0$ 之形式.

例三. 解下列各方程式.

(1) $x^3+8=0$. (2) $x^4+1=0$. (3) $x^6+1=0$.

647 以上各例說明次之定理: 每數有 $n$ 個 $n$ 次根. 例如, 1 之立方根者, 任何數之適合方程式 $x^3=1$ 者也; 而吾人於例一共求得三個如此之數, 計爲 1, $(-1+i\sqrt{3})/2$, 及 $(-1-i\sqrt{3})/2$.

648 **無理方程式** 解無理方程式時, 通常先將方程式有理化, § 609. 然亦有可用較簡之法以處理者, 具述於後. 無論用何種方法, 在承認所得之值爲原方程式之根以前, 均須代入原方程式驗之.

例一. 解 $\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0$.

移項, $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{5x-6}$.

兩端各自平方再簡化, $\sqrt{(2x-3)(3x-5)}=1$.

兩端各自平方再簡化, $6x^2-19x+14=0$.

解之, $x=2$ 或 $7/6$.

代入原方程式驗之, 知 2 爲根, 而 7/6 則否

或用§603之法亦可將原方程式有理化.於是即見 $-4(6x^2-19x+14)$ 恆等於

$$(\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5})(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x-6}-\sqrt{3x-5})$$
$$(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5})(\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}-\sqrt{3x-5}).$$

$x$ 僅有二值可使 $6x^2-19x+14$ 爲0,一值,2,能使右端之第一因式爲0,他一值,7/6,能使第二因式爲0.故 $x$ 無值可使第三第四兩因式爲0.

例二. 解 $\sqrt{4x+3}+\sqrt{12x+1}=\sqrt{24x+10}.$

有時祇含一個根式之方程式,可化爲關於此根式之二次方程式之形式.是則宜先就此根式解之.

例三. 解 $2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}-5^3=0.$

注意根號外含 $x$ 之項,適爲根號內含 $x$ 之項之二倍,故將方程式書作下之形式:
$$2(x^2-3x-1)-5\sqrt{x^2-3x-1}-3=0.$$

就 $\sqrt{x^2-3x-1}$ 解之,即得下二方程式:
$$\sqrt{x^2-3x-1}=3,\quad \sqrt{x^2-3x-1}=-1/2.$$

後者不得不棄去,因依§579中所規定,$\sqrt{a}$ 形之根式不能有負值也.

第一方程式兩端各自平方,得
$$x^2-3x-1=9,$$
其根爲
$$5 \text{ 及 } -2.$$

將5及 $-2$ 代入原方程式驗之,知二者皆爲根.

例四. 解 $2x^2-14x-3\sqrt{x^2-7x+10}+18=0.$

有時方程式可化爲次之形式:兩端皆爲完全平方,或一端爲完全平方而他端爲常數.

例五. 解 $4x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}=9.$

本方程式可書作下之形式.
$$3x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}+x^2=9.$$

左端爲完全平方,兩端各自開平方,得下二方程式.
$$\sqrt{3x^2+x}+x=3,\quad \sqrt{3x^2+x}+x=-3.$$

解之,
$$x=1,\ -9/2,\text{ 或 } (5\pm\sqrt{97})/4.$$

驗之,知唯1及 $-9/2$ 爲原方程式之根.

有時用適當方法聚項後,諸項有無理之公因式.

例六. 解 $\sqrt{x^2-7ax+10a^2}-\sqrt{x^2+ax-6a^2}=x-2a.$

首二項與 $x-2a$ 皆有公因式 $\sqrt{x-2a}$.

分離此因式，知原方程式與下二方程式等值.

$$\sqrt{x-2a}=0,\ \sqrt{x-5a}-\sqrt{x+3a}=\sqrt{x-2a}.$$

解之， $x=2a,\ -10a/3$, 或 $6a$.

驗之，知唯 $2a$ 及 $-10a/3$ 為原方程式之根.

例七. 解 $\sqrt{3x^2-5x-12}-\sqrt{2x^2-11x+15}=x-3$.

若方程式中有一項或數項為具無理分母之分式時，通常宜先將此諸分母有理化.

例八. 解 $(\sqrt{x}+\sqrt{x-3})/(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})=2x-5$. X3

將左端中之分母有理化然後簡化之，得

$$\sqrt{x^2-3x}=2x-6.$$

解之， $x=3$ 或 $4$.

驗之，知 3 及 4 皆屬原方程式之根.

例九. 解 $(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})/(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})=x-3$.

## 習　題　XLIV

解下列各方程式

1. $4x^4-17x^2+18=0$.
2. $3x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{3}{4}}=7$.
3. $(x^2-4)(x^2-9)=7x^2$.
4. $(2x^2-x-3)(3x^2+x-2)=0$.
5. $x^4+x^3+x^2+3x-6=0$.
6. $x^4-2x^3+x^2+2x-2=0$.
7. $(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12=0$.
8. $x^4-12x^3+33x^2+18x-28=0$.
9. $4x^4+4x^3-x^2-x-2=0$.
10. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$.
11. $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$.
12. $x^5-11x^4+36x^3-36x^2+11x-1=0$.
13. $x^5-243=0$.
14. $(2x-1)^3=1$.
15. $(1+x)^3=(1-x)^3$.
16. $(x-2)^4-81=0$.
17. $(a+x)^3+(b+x)^3=(a+b+2x)^3$.
18. $(a-x)^4-(b-x)^4=(a-b)(a+b-2x)$.
19. $\dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-3\dfrac{4x^2+6x-1}{x^2+3x+1}-2=0$.
20. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}$.
21. $3x^2-2x-5\sqrt{3x^2-2x+3}+9=0$.
22. $4x^2-2x-1=\sqrt{2x^2-x}$.
23. $\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=\sqrt{5-2x}$.
24. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=0$.

25. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}-x=\sqrt{\dfrac{6}{x}}.$ 26. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$

27. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+3x}=0.$ 28. $\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt{x}+6\sqrt[4]{x}=0.$

29. $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}-3\sqrt{\dfrac{x-2}{2x-5}}+2=0.$ 30. $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=x-3.$

31. $\sqrt{5x^2-6x+1}-\sqrt{5x^2+9x-2}=5x-1.$

32. $\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x}}+3=0.$ 33. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}=2.$

34. $(x+a)^{\frac{1}{3}}+(x+b)^{\frac{1}{3}}+(x+c)^{\frac{1}{3}}=0.$ 35. $x(x-1)(x-2)(x-3)=6\cdot5\cdot4\cdot3.$

36. $(x+a)^2+4(x+a)\sqrt{x}=a^2-4a\sqrt{x}.$ 37. $\sqrt[3]{1+\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x^2-1}}=6.$

# XVI. 聯立方程式可由二次方程式得解者

## 二個X, Y之方程式一爲一次而他一爲二次者

649

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$
$$\phi(x,y)=a'x+b'y+c'=0$$

形式之方程組,可用下例之法解之.

例. 解 $y^2-x^2+2x+2y+4=0,$ (1)

$2x-y-7=0.$ (2)

由 (2), $y=2x-7.$ (3)

以 (3) 代入 (1), $3x^2-22x+39=0.$ (4)

解 (4), $x=13/3$ 或 $3.$ (5)

代入 (3), $y=5/3$ 或 $-1.$ (6)

(1), (2), 之解爲以下二組值:

$x=13/3,\ y=5/3;\ x=3,\ y=-1.$ (7)

因依 §§ 368, 371, 下列各方程組等值:

(1), (2) 之於 (4), (2);　(4), (2) 之於 (5), (2);　(5), (2) 之於 (7).

故 (7) 之解可記作 13/3, 5/3; 3, −1. 但應注意須將 $x$ 及 $y$ 之對應值配合.

如此之方程組通常有二個有窮解. 但 $\phi(x, y)$ 之一次項之羣, $a'x+b'y$, 若為 $f(x, y)$ 之二次項之羣, $ax^2+bxy+cy^2$, 之因式,而 $\phi(x, y)$ 自身非 $f(x, y)$ 之因式,則祇能有一個有窮解,或竟全無此種解. 而 $\phi(x, y)$ 若為 $f(x, y)$ 之因式時,則將有無數解. 650

例一. 解 $$y^2-x^2+2x+2y+4=0, \quad (1)$$
$$y-mx=0. \quad (2)$$

消去 $y$, $$(m^2-1)x^2+2(m+1)x+4=0. \quad (3)$$

若 $m^2-1\neq 0$, 則 (3) 有二個有窮根, 而 (1), (2) 有二個有窮解.

但 $y-mx$ 若為 $y^2-x^2$ 之因式, 卽若 $m=\pm 1$, 則 $m^2-1=0$, 而 (3) 不能有二個有窮根.

例如,若 $m=1$, (3) 成為 $x+1=0$, 祇有一個有窮根, 他一根為無窮大, § 638. 且若 $m=-1$, (3) 成為 $4=0$, 全無有窮根, 兩根皆為無窮大 § 638.

故 (2) 若是 $y-x=0$ 之形式,方程組 (1), (2) 祇有一組有窮解,他一組解為無窮大, 且 (2) 若是 $y+x=0$ 之形式, 則方程組 (1), (2) 全無有窮解, 其二解皆爲無窮大.

例二. 解 $$y^2-x^2+2x+2y=0, \quad (1)$$
$$y+x=0. \quad (2)$$

消去 $y$, $$x^2-x^2+2x-2x=0. \quad (3)$$

然 (3) 為恆等式, $x$ 之各個值皆能適合之.

故各組數 $x=a$, $y=-a$ 皆為 (1), (2) 之解.

所以得如此結果之故, 全因 $y+x$ 為 $y^2-x^2+2x+2y$ 之因式也.

$A$, $B$, $C$ 爲整函數時, 方程組 $AB=0, C=0$ 與 $A=0, C=0$ 及 $B=0, C=0$ 二方程組等值, § 371. 整方程組 $f(x, y)=0$, $\phi(x, y)=0$, 當 $f(x, y)$ 得分解爲一次或二次之因式, 而 $\phi(x, y)$ 得分解爲一次之因式時,可應用此原理及 § 649 解之. 651

例. 解 $$x^3+xy^2-5x=0. \quad (1)$$
$$(2x-y)(x+y-1)=0. \quad (2)$$

此方程組與下列四組方程式等值.

$$x=0,\quad 2x-y=0; \tag{3}$$

$$x=0,\quad x+y-1=0; \tag{4}$$

$$x^2+y^2-5=0,\quad 2x-y=0; \tag{5}$$

$$x^2+y^2-5=0,\quad x+y-1=0. \tag{6}$$

解 (3), (4), (5), (6) 四組方程式,得 (1), (2) 之解爲 0, 0; 0, 1; 1, 2; −1, −2; 2, −1; −1, 2.

652 $x, y$ 之整方程組,唯有呈 § 649 或 § 651 之形式,或其等値方程組呈此種形式之一者,得由二次方程式解之.

譬如,二次方程組 $y^2-x+1=0$, $y=x^2$ 不能由二次方程式解之.因欲解此方程組,除消去 $y$ 外別無較簡之法,而消去 $y$ 之結果所得之 $x^4-x+1=0$,爲一四次方程式,不能由二次方程式以解之也.

653 以上各節說明下述重要定理之眞.

次數各爲 $m$ 及 $n$ 之二個整方程式 $f(x, y)$, $\phi(x, y)$, 有 $mn$ 解.

例如,方程組 $x^3+xy^2-5x=0$, $(2x-y)(x+y-1)=0$ 有 3·2, 卽 6, 個解, § 651. 再參看 § 381.

654 應附及者,若 $f(x, y)$ 及 $\phi(x, y)$ 中之最高次項之羣有公因式,而 $f(x, y)$ 及 $\phi(x, y)$ 自身無此公因式,則有窮解之數較 $mn$ 少.例如,$f(x, y)$ 及 $\phi(x, y)$ 中最高次項之羣每有一個一次公因式,則至少有一組無窮大解;若次一高次項之羣亦有類此之公因式,則至少有二組無窮大解;餘仿此.若 $f(x, y)$ 及 $\phi(x, y)$ 自身有公因式,則方程組之解爲數無窮.

例如,方程組 $x^3-xy^2+xy-y^2-y=0$ (1), $x^2-y^2-1=0$ (2) 之有窮解,其數不能多於三.何則,解之總數爲 3·2, 卽 6, 然因 (1) 及 (2) 中最高次項之羣,$x^3-xy^2$ 及 $x^2-y^2$, 有公因式 $x+y$, 至少有一組之解爲無窮大,又因 (1) 及 (2) 中最高次項之羣及次一高次項之羣, $x^3-xy^2$, $x^2-y^2$ 及 $xy-y^2$, $0(x-y)$, 有公因式 $x-y$, 至少又有二解爲無窮大也.

## 習　題　XLV

解下列各方程組.

1. $\begin{cases}7x^2-6xy=8,\\2x-3y=5.\end{cases}$　　2. $\begin{cases}xy=1,\\3x-5y=2.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x^2+x=4y^2,\\3x+6y=1.\end{cases}$　　4. $\begin{cases}3x^2-3xy-y^2-4x-8y+3=0,\\3x-y-8=0.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x^2+5y^2-8x-7y=0,\\x+3y=0.\end{cases}$　　6. $\begin{cases}2x^2-xy-3y=0,\\7x-[illegible]y-4=0.\end{cases}$

7. $\begin{cases}x^2+3xy+2y^2-1=0,\\x+y=0.\end{cases}$　　8. $\begin{cases}2x+3y=37,\\1/x+1/y=14/45.\end{cases}$

9. $\begin{cases}1/y-3/x=1,\\7/xy-1/y^2=12.\end{cases}$　　10. $\begin{cases}x^2+xy+2=0,\\(3x+y)(2x+y-1)=0.\end{cases}$

11. $\begin{cases}x^2+y^2-8=0,\\(x+1)^2=(y-1)^2.\end{cases}$　　12. $\begin{cases}x^2-xy-2y^2+y=0,\\(x-2y)(x+y-3)=0.\end{cases}$

13. 求定 $m$,俾方程式 $y^2+4x+4=0$, $y=mx$ 之二解能相等.

14. 求定 $m$ 及 $c$,俾方程式 $x^2+xy-2y^2+x=0$, $y=mx+c$ 之二解皆爲無窮大.

15. 用 § 650,例二之法,證 $2x-y+4$ 爲 $2x^2+xy-y^2+10x+y+12$ 之因式.

16. 試證方程組 $xy=1$, $xy+x+y=0$ 之有窮解之數,不能多於二,又方程組 $x^2y+xy=1$, $x^2y+y^2=2$ 之有窮解之數,不能多於四.

# 方程組可由分解因式

# 或加減法得解者

**關於 x 及 y 之一組函數,兩方程式皆屬一次時**　先用 **655**
§§ 374—376 之法,就此組函數解方程組.

例一. 解
$$2x^2-3y^2=-58, \tag{1}$$
$$3x^2+y^2=111. \tag{2}$$

就 $x^2$, $y^2$ 解之,得　$x^2=25$, $y^2=36$,

從而　$x=\pm 5$, $y=\pm 6$.

依 §§367–372, 方程組 (1), (2) 與 $x=5$, $y=6$; $x=-5$, $y=6$; $x=5$, $y=-6$; $x=-5$, $y=-6$ 四組等值.

故 1), (2) 之解為 5, 6; $-5$, 6; 5, $-6$; $-5$, $-6$.

例二. 解下列各方程組:

(1) $\begin{cases} ax^2+by^2=a, \\ bx^2-ay^2=b. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x^2-1/y^2=2, \\ 5x^2+3/y^2=120. \end{cases}$

656 **二方程式之一可分解因式時** 究所與之方程式呈

$$ax^2+bxy+cy^2=0$$

之形式,普徧言之,得化為

$$au^2+bu+c=0$$

之形式,其中 $u$ 指示 $x$, $y$ 之一函數時,則可分解因式.

例一. 解
$$x^2+y^2+x-11y-2=0, \tag{1}$$
$$x^2-5xy+6y^2=0. \tag{2}$$

視 $y$ 如常數就 $x$ 解 (2) 以分解其因式,

$$x=2y, \tag{3}$$
或
$$x=3y. \tag{4}$$

解 (1), (3) 及 (1), (4), 得 (1), (2) 之諸解為 4, 2; $-2/5$, $-1/5$; 3, 1; $-3/5$, $-1/5$.

例二. 解
$$2x^2+4xy+2y^2+3x+3y-2=0, \tag{1}$$
$$3x^2-32y^2+5=0. \tag{2}$$

變 (1) 為:
$$2(x+y)^2+3(x+3)-2=0.$$

解之,
$$x+y=1/2, \tag{3}$$
或
$$x+y=-2. \tag{4}$$

解 (2), (3) 及 (2), (4), 得 (1), (2) 之諸解為 1, $-1/2$; 3/29, 23/58; $-3$, 1; $-41/29$, $-17/29$.

例三. 解下列各方程組.

(1) $\begin{cases} x^2+xy-6=0, \\ x^2-5x+6=0. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{26}{5}, \\ y^2-2x^2=1. \end{cases}$

657 **由加減法,原方程式得變為可分解因式之方程式時** 當原方程式皆呈 $ax^2+bxy+cy^2=d$ 之形式時,此事常屬可能.

例一. 解
$$6x^2-xy-2y^2=56, \tag{1}$$

$$5x^2-xy-y^2=49. \tag{2}$$

結合 (1), (2) 以消去常數項.

以 7 乘 (1), $$42x^2-7xy-14y^2=392. \tag{3}$$

以 8 乘 (2), $$40x^2-8xy-8y^2=392. \tag{4}$$

由 (3) 減 (4), $$2x^2+xy-6y^2=0. \tag{5}$$

就 $x$ 解 (5), $$x=3y/2, \tag{6}$$

或 $$x=-2y. \tag{7}$$

解 (2), (6) 及 (2), (7), 得 (1), (2) 之諸解為 $\pm3\sqrt{35}/10$, $\pm\sqrt{35}/5$; $\pm2\sqrt{21}/3$, $\mp\sqrt{21}/3$.

普徧言之,當原方程式皆為二次,且用加減法以消去 (1) 一切之二次項; (2) 除二次項外一切其他之項; (3) 一切含 $x$(或 $y$) 之項;或 (4) 一切不含 $x$ (或 $y$) 之項,而兩式得結合時,必能得一可分解因式之方程式.

例二. 解 $$2x^2+4xy-2x-y+2=0. \tag{1}$$
$$3x^2+6xy-x+3y=0. \tag{2}$$

以 3 乘 (1) 以 2 乘 (2) 而減之, 可消去一切之二次項. 即得
$$4x+9y-6=0. \tag{3}$$

解 (2), (3), 得 $-3$, $2$; $-2$, $14/9$, (1), (2) 之有窮解盡在於此. 參看 § 654.

例三. 解 $$x^2-3xy+2y^2+4x+3y-1=0. \tag{1}$$
$$2x^2-6xy+y^2+8x+2y-3=0. \tag{2}$$

以 2 乘 (1) 然後減 (2), 可消去一切含 $x$ 之項. 即得
$$3y^2+4y+1=0. \tag{3}$$

解 (1), (3), 得 (1), (2) 所有之四個解如下:

$$1/3,\ -1/3;\ -16/3,\ -1/3;\ (-7\pm\sqrt{57})/2,\ -1.$$

更取下例考之.

例四. 解 $$x^2+2xy+2y^2+3x=0, \tag{1}$$
$$xy+y^2+3y+1=0. \tag{2}$$

以 2 乘 (2) 而加於 (1). 即得
$$(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0. \tag{3}$$

解 (3), $$x+2y=-1, \tag{4}$$

或 $$x+2y=-2. \tag{5}$$

解 (2), (4) 及 (2), (5), 得 (1), (2) 之諸解為 $-3\pm2\sqrt{2}$, $1\mp\sqrt{2}$; $-3\pm\sqrt{5}$, $(1\mp\sqrt{5})/2$.

例五. 解下列各方程組:

$$(1)\ \begin{cases}2x^2+xy+7y=0,\\x^2+y^2+10y=0.\end{cases}\qquad(2)\ \begin{cases}x^2+y^2-13=0,\\xy+y-x=-1.\end{cases}$$

658 **消去 x 或 y 所得之方程式可分解因式時** 凡二次方程組皆可用下法消去 $x$ 或 $y$. 所得之方程式,通常爲四次方程式,不能由二次方程式解之.然此方程式若得分解爲一次或二次之因式,則吾人能解之,以得原方程組之解.

例一. 解 $$10x^2+5y^2-27x-4y+5=0, \tag{1}$$
$$x^2+y^2-3x-y=0. \tag{2}$$

以 5 乘 (2) 由 (1) 減之先消去 $y^2$, 得

$$5x^2-12x+y+5=0,\ 即\ y=-5x^2+12x-5. \tag{3}$$

以 (3) 代入 (2), $$5x^4-24x^3+40x^2-27x+6=0. \tag{4}$$

依 § 451, 分解因式,

$$(x-1)(x-2)(5x^2-9x+3)=0. \tag{5}$$

解 (5), § 643, $$x=1,\quad 2,\ (9\pm\sqrt{21})/10. \tag{6}$$

以 (6) 代入 (3), $$y=2;\ -1,\ (7\pm3\sqrt{21})/10. \tag{7}$$

(6), (7) 各組對應值, 即 (1), (2) 之解.

例二. 解 $$x^2-2xy+2y^2+3x-3y=0,$$
$$2x^2+xy-y^2+x-2y+3=0.$$

## 習 題 XLVI

解下列各方程組.

1. $\begin{cases}x^2+3y^2=31,\\7x^2-2y^2=10.\end{cases}$

2. $\begin{cases}36/x^2+1/y^2=18,\\1/y^2-4/x^2=8.\end{cases}$

3. $\begin{cases}y^2+xy+3=0,\\y^2-y-2=0.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x^2+y^2-6x+2y-39=0,\\3x^2-17xy+10y^2=0.\end{cases}$

5. $\begin{cases}y^2-x^2-5=0,\\4x^2+4xy+y^2+4x+2y=3.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x^2+5xy-2x+3y+1=0,\\3x^2+15xy-7x+8y+4=0.\end{cases}$

7. $\begin{cases}x^2-15xy-3y^2+2x+9y=98,\\5xy+y^2-3y=-21.\end{cases}$

8. $\begin{cases}2x^2+3xy-4y^2=25,\\15x^2+24xy-31y=200.\end{cases}$

9. $\begin{cases} x(x+3y)=18, \\ x^2-5y^2=4. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x^2-3xy+3y^2=x^2y^2, \\ 7x^2-10xy+4y^2=12x^2y^2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=38, \\ x^2-xy+y^2=14. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21(x-y), \\ xy=20. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2+y-8=0, \\ y^2+15x-46=0. \end{cases}$

## 方程組可由除法得解者

解方程組,有時宜用乘法或除法以結合之,但須注意勿引 659
入假解,亦勿失去眞解(參看§§362,342).

若所與之方程組呈 $AB=CD$ (1), $B=D$ (2) 之形式,其中 $A$, 660
$B, C, D$ 指示 $x, y$ 之整函數,可於(1)中以 $D$ 代 $B$,即得方程組 $AD=CD, B=D$,顯而易見與 $A=C, B=D$, 及 $D=0, B=0$ 二組等值.以(2)之各端除(1)之對應各端,即可得 $A=C, B=D$ 一組.然若僅解此 $A=C, B=D$ 一組而止,必至失去(1),(2)之若干解,但 $B$ 或 $D$ 爲常數時, $B=0, D=0$ 一組無解,是則當然爲例外也.

例一. 解 $$x^4+x^2y^2+y^4=21, \quad (1)$$
$$x^2+xy+y^2=7. \quad (2)$$
以(2)除(1), $$x^2-xy+y^2=3. \quad (3)$$
解(2),(3),得(1),(2)之諸有窮解爲 $2, 1$; $-2, -1$; $1, 2$; $-1, -2$. 參看§654.

例二. 解 $$x^3-y^3=-3(x+1)y, \quad (1)$$
$$x^2+xy+y^2=x+1. \quad (2)$$
以(2)除(1), $$x-y=-3y. \quad (3)$$
方程組(1),(2)與(2),(3)及 $x^2+xy+y^2=0$ (4), $x+1=0$ (5) 兩方程組有相同之有窮解.(2),(3)及(4),(5)之解爲 $2, -1$; $-2/3, 1/3$; $-1, (1\pm i\sqrt{3})/2$.

例三. 解 $$(x+y)^2=x, \quad (1)$$
$$x^2-y^2=-6y. \quad (2)$$
以(2)除(1). $$(x+y)/(x-y)=-x/6y. \quad (3)$$

消去分式, $x^2+5xy+6y^2=0.$ (4)

方程組 (2), (4) 有 0, 0; 0, 0; 4, −2; 9/4, −3/4 四解.

由 (1), (2) 得出 (4) 之方法, 在 $x$, $y$ 取 4, −2 或 9/4, −3/4 爲值時爲可逆, 在 $x$, $y$ 取 0, 0 爲值時爲不可逆. 故以上計算僅能證明 4, −2 及 9/4, −3/4 爲 (1), (2) 之解而已, § 362.

用觀察法知 0, 0 爲 (1), (2) 之解; 然此組解祇能作一次計算, 不能作兩次計算, 與 (2), (4) 之情形不同. 蓋因 (1), (2) 之有窮解之數祇能有三個故也, § 654. 吾人亦可證之如次: 於 (1), (2) 中作 $y=tx$ (5) 之代換. 即得 $(1+t)^2x^2=x$ (1'), $(1-t^2)x^2=-6tx$ (2'). 而由 (5), (1'), (2') 能得出 $x=0$, $y=0$ 一次, 且祇一次.

## 習題 XLVII

解下列各方程組.

1. $\begin{cases}x^3-y^3=63,\\x-y=6.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y=98,\\\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x^4+x^2y^2+y^4=931,\\x^2+xy+y^2=49.\end{cases}$

4. $\begin{cases}(x+y)(x^2-2y^2)=-70,\\(x-y)(x^2-2y^2)=14.\end{cases}$

5. $\begin{cases}(x+y)^2(x-y)=3xy+6y,\\x^2-y^2=x+2.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=6x,\\x^2-y^2=-5y.\end{cases}$

# 對稱方程組

661 含 $x$, $y$ 之方程組, 如將 $x$ 與 $y$ 互易, 而方程組不變者, 謂之對稱方程組.

例如, 下之 (a) 及 (b) 爲二對稱方程組.

(a) $\begin{cases}2x^2+2y^2+3x+3y=0,\\x^2y^2+xy+1=0.\end{cases}$ (b) $\begin{cases}x^2=2x+3y,\\y^2=2y+3x.\end{cases}$

就對稱方程組言之, 可分爲二型, 一爲將 $x$ 及 $y$ 互易時, 其中各個方程式皆不變動者, 如 (a) 是; 一爲將 $x$ 及 $y$ 互易時, 兩方程式互易位置者, 如 (b) 是.

**第一型對稱方程組** 對稱方程組之最簡者,爲 $x+y=a$, $xy=b$. 此方程組可依 § 649 解之,然下述者爲較對稱之方法. 662

例. 解 $$x+y=5, \qquad (1)$$
$$xy=6. \qquad (2)$$
(1) 之兩端各自平方, $$x^2+2xy+y^2=25. \qquad (3)$$
以 4 乘 (2), $$4xy=24. \qquad (4)$$
由 (3) 減 (4), $$x^2-2xy+y^2=1. \qquad (5)$$
故 $$x-y=1, \qquad (6)$$
或 $$x-y=-1. \qquad (7)$$
由 (1), (6), 得 $x=3$, $y=2$; 復由 (1), (7), 得 $x=2$, $y=3$.

若遇較複雜之對稱方程組,可將各個方程式化爲 $x+y$ 及 $xy$ 之方程式, § 637, 然後就此二函數解之;或於原方程式中置 $x=u+v$, $y=u-v$, 而就 $u$ 及 $v$ 解之亦可.後法與就 $x+y$ 及 $x-y$ 解原方程式大概相同,因由 $x=u+v$, $y=u-v$, 可得 $u=(x+y)/2$, $v=(x-y)/2$ 也. 663

例一. 解 $$2x^2+5xy+2y^2+x+y+1=0, \qquad (1)$$
$$x^2+4xy+y^2+12x+12y+10=0. \qquad (2)$$
於 (1) 及 (2) 中以 $(x+y)^2-2xy$ 代 $x^2+y^2$.
案項, $$2(x+y)^2+xy+(x+y)+1=0, \qquad (3)$$
$$(x+y)^2+2xy+12(x+y)+10=0 \qquad (4)$$
消去 $xy$, $$3(x+y)^2-10(x+y)-8=0. \qquad (5)$$
解之. $$x+y=4, \qquad (6)$$
或 $$x+y=-2/3. \qquad (7)$$
故由 (3), $$xy=-37, \qquad (8)$$
或 $$xy=-11/9. \qquad (9)$$
就 $x$, $y$ 解 (6), (8) 及 (7), (9), 得
$$x, y=2\pm\sqrt{41},\ 2\mp\sqrt{41};\ (-1\pm2\sqrt{3})/3,\ (-1\mp2\sqrt{3})/3.$$

例二. 解 $$x^4+y^4=97, \qquad (1)$$
$$x+y=5. \qquad (2)$$
於 (1) 及 (2) 中置 $$x=u+v,\ y=u-v.$$

即得 $(u+v)^4+(u-v)^4=97,$ (3)

及 $2u=5.$ (4)

消去 $u$, $16v^4+600v^2-151=0.$ (5)

解之, $v=\pm 1/2$ 或 $\pm i\sqrt{151}/2.$ (6)

於公式 $x=u+v,\ y=u-v$ 中,以 $u=5/2$ (4) 及 (6) 中 $v$ 之四值代入即得

$$x,\ y=2,\ 3;\ 3,\ 2;\ (5\pm i\sqrt{151})/2,\ (5\mp i\sqrt{151})/2.$$

若 $x=\alpha, y=\beta$ 爲對稱方程組之一解,顯而易見 $x=\beta, y=\alpha$ 必爲他一解.除 $\alpha=\beta$ 時外,此二解均相異;然 $xy$ 及 $x+y$ 對於 $x=\alpha$, $y=\beta$ 與對於 $x=\beta, y=\alpha$, 其值均相同, 而 $x-y$ 之對應值, $\alpha-\beta$ 及 $\beta-\alpha$, 亦僅符號不同而已.

故由對稱方程組得出之 $xy$ 或 $x+y$ 之值,其數應較 $x$ 或 $y$ 之值少,即由方程組用消去法求得(如於例一)之 $xy$ 或 $x+y$ 之方程式,其次數應較用同樣方法所得 $x$ 或 $y$ 之方程式之次數低.就 $x-y$ 之方程式而論,則 $c$ 若爲其一根時, $-c$ 必爲其他一根.故此方程式應祇含 $x-y$ 之偶次冪,(如於例二),或祇含無常數項之奇次冪.

664 **註** 關於 $x$ 及 $-y$ 或 $x, y$ 之其他函數組爲對稱之各方程組,上述方法仍可適用.例如, $x^4+y^4=a,\ x-y=b$ 可書作 $x^4+(-y)^4=a,\ x+(-y)=b.$

665 **第二型對稱方程組** 此種方程組有時可解之如下.

例. 解 $x^3=7x+3y,$ (1)

$y^3=7y+3x,$ (2)

(1) 與 (2) 相加, $x^3+y^3=10(x+y).$ (3)

由 (1) 減 (2), $x^3-y^3=4(x-y).$ (4)

依 § 341, (3) 與下二方程式等值.

$x+y=0,$ (5)

$x^2-xy+y^2=10.$ (6)

同理, (4) 與下二方程式等值

$x-y=0.$ (7)

$$x^2+xy+y^2=4. \tag{8}$$

解 (5), (7); (5), (8); (6), (7); (6), (8), 得 0, 0; 2, $-2$; $-2$, 2; $\pm\sqrt{10}$, $\pm\sqrt{10}$; $(1\pm\sqrt{13})/2$, $(1\mp\sqrt{13})/2$; $(-1\pm\sqrt{13})/2$, $(-1\mp\sqrt{13})/2$.

## 習　題　XLVIII

解下列各方程組.

1. $\begin{cases} x+y=5, \\ xy+36=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=200, \\ x+y=12. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=293, \\ xy=34. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2=85, \\ x-y=7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^3+y^3=513, \\ x+y=9. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^3+y^3=468, \\ x^2y+xy^2=420. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 27x^3+64y^3=65, \\ 3x+4y=5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ x-y=2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^5+y^5=32, \\ x+y=2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=1/2, \\ 56\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+113=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} xy+x+y+19=0, \\ x^2y+xy^2+20=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^4+y^4-(x^2+y^2)=72, \\ x^2+x^2y^2+y^2=19. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ 1/x+1/y=3/10. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2+3xy+y^2+2x+2y=8, \\ 2x^2+2y^2+3x+3y=14. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^3=5y, \\ y^3=5x. \end{cases}$

## 多 元 方 程 組

三元三式之方程組,如一式爲二次而他二式爲一次時,可 666
由二次方程式解之;如能化爲一個或若干等值方程組,而各組中祇有一式爲二次,其餘各式皆爲一次時,亦可由二次方程式解之.四元四式之方程組及其他仿此.

若 $A, B, C$ 爲 $x, y, z$ 之整函數,次數各爲 $m, n, p$, 且其中並無二函數有公因式, 則方程組 $A=0, B=0, C=0$ 應有 $mnp$ 解, 但

其中有若干組成爲無窮大.

例一. 解

$$z^2-xy-7=0, \tag{1}$$

$$x+y+z=0, \tag{2}$$

$$3x-2y+2z+2=0. \tag{3}$$

視 $z$ 如常數,就 $x$ 及 $y$ 解 (2), (3),

$$x=-(4z+2)/5, \tag{4}$$

$$y=(-z+2)/5. \tag{5}$$

代入 (1) 且簡化,

$$7z^2+2z-57=0. \tag{6}$$

解 (6),

$$z=-3 \text{ 或 } 19/7.$$

故由 (4), (5),

$$x,\ y,\ z=2,\ 1,\ -3;\ -\frac{18}{7},\ -\frac{1}{7},\ \frac{19}{7}.$$

例二. 解方程組

$$xy=6, \tag{1}$$

$$yz=12, \tag{2}$$

$$zx=8. \tag{3}$$

以 (1) 除 (2),

$$z/x=2 \text{ 即 } z=2x. \tag{4}$$

以 (4) 代入 (3),

$$x^2=4,\ \therefore x=\pm 2. \tag{5}$$

由 (5), (4), (1) 得

$$x,\ y,\ z=2,\ 3,\ 4;\ -2,\ -3,\ -4.$$

## 習 題 XLIX

解下列各方程組.

1. $\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=2, \\ x^2-yz=19. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(y+z)=12, \\ y(z+x)=6, \\ z(x+y)=10. \end{cases}$

3. $\begin{cases} (y+b)(z+c)=a^2, \\ (z+c)(x+a)=b^2, \\ (x+a)(y+b)=c^2. \end{cases}$

## 習 題 L

任用本章中何法,解下列各方程組.

1. $\begin{cases} 7x^2-6xy=8, \\ 2x-3y=5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y=a, \\ xy=(b^2-a^2)/4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{y^2}=a^2+b^2, \\ x^2+y^2=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{x}=1, \\ \dfrac{7}{xy}-\dfrac{1}{y^2}=12. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+y=a+b, \\ \dfrac{a}{x+b}+\dfrac{b}{y+a}=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{1001}{125}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{5}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=5, \\ \dfrac{ab}{xy}=2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{17}{4}xy, \\ x-y=\dfrac{3}{4}xy. \end{cases}$

10. $a(x+y)=b(x-y)=xy$.

11. $40xy=21(x^2-y^2)=210(x+y)$.

12. $\begin{cases}4x^2-25y^2=0,\\ 2x^2-10y^2-3y=4.\end{cases}$

13. $\begin{cases}x^2+3xy-8y^2=9,\\ x^2-13xy+21y^2=-9.\end{cases}$

14. $\begin{cases}x^2-7y^2-23=0,\\ x^2-6xy+9y^2-2x+6y=3.\end{cases}$

15. $\begin{cases}x/y+y/x=65/28,\\ 3(x^2+y^2)+(x-y)=34\end{cases}$

16. $\begin{cases}x^2y=a,\\ xy^2=b.\end{cases}$

17. $\begin{cases}x^2y+xy^2=a,\\ x^2y-xy^2=b.\end{cases}$

18. $\begin{cases}x=a(x^2+y^2),\\ y=b(x^2+y^2).\end{cases}$

19. $\begin{cases}(x+y)/(x-y)=5/3,\\ (2x+3y)(3x-2y)=110a^2.\end{cases}$

20. $\begin{cases}3(x^3-y^3)=13xy.\\ x-y=1\end{cases}$

21. $\begin{cases}x^4+y^4=a^4\\ x+y=a\end{cases}$

22. $\begin{cases}21(x+y)=10xy,\\ x+y+x^2+y^2=68.\end{cases}$

23. $x^2+y^2=xy=x+y$,

24. $x^2-xy+y^2=3a^2=x^2-y^2$

25. $\begin{cases}x^2+xy+y^2=21,\\ x+\sqrt{xy}+y=7.\end{cases}$

26. $\begin{cases}4x^2-2y^2=12(x-y),\\ xy=0.\end{cases}$

27. $\begin{cases}x^2+y^2=x+y+20,\\ xy+10=2(x+y).\end{cases}$

28. $\begin{cases}x^2+4x-3y=0,\\ y^2+10x-9y=0.\end{cases}$

29. $\begin{cases}28(x^5+y^5)=61(x^3+y^3),\\ x+y=2.\end{cases}$

30. $\begin{cases}xy-x/y=a\\ xy-y/x=1/a.\end{cases}$

31. $\begin{cases}(x+1)^3+(y-2)^3=19,\\ x+y=2.\end{cases}$

32. $\begin{cases}x^2+y=8/3,\\ x+y^2=34/9.\end{cases}$

33. $\begin{cases}y^2-xy-yz=3,\\ x+4y+z=14,\\ x-y+2z=0.\end{cases}$

34. $\begin{cases}x+y+z+u=0,\\ 3x+z+u=0,\\ 3y+2z=0,\\ x^2+y^2+zu=5.\end{cases}$

35. $\begin{cases}(y+z)(x+y+z)=10,\\ (z+x)(x+y+z)=20,\\ (x+y)(x+y+z)=20.\end{cases}$

36. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ xy+yz+zx=-1,\\ 2x+y-2z=-3.\end{cases}$

## 習　題　LI

1. 二數立方之差爲218，而其差之立方爲8，求此二數.

2. 有二數.其和之平方減其積爲63，而其立方之差爲189.此二數若何?

3. 有一分數，其二項之和爲11，其與他一分數之積爲2/3，但後者之

分子分母各較前者之分子分母多3,4.求原分數.

4. 求分37爲三部分,俾三者之積爲1440,且其中二者之積較第三者之三倍多12.

5. 矩形之對角綫長13尺.若各邊增2尺,則面積應增38平方尺.各邊長幾何?

6. 直角三角形之周爲36寸,而其面積爲54平方寸.求各邊之長.

7. 直角三角形之斜邊較他二邊各長3寸及24寸.求三角形之各邊.

√8. 由下開條件求室之深廣及高:地板爲矩形,面積224平方尺,兩側壁之面積各爲126及144平方尺.

9. 矩形之周圍有闊5寸之邊緣.矩形之面積爲168平方寸,邊緣之面積爲360平方寸.求矩形之長及闊.

10. 甲乙二人購煤,每付價135圓.甲比乙多得3噸,甲所付4噸之價較乙所付5噸之價少7圓.求二人所付每噸之價.

√11. 本金若干,以單利計算,一年後之本利和爲1248圓.若本金增100圓,利率增$1\frac{1}{2}$倍則二年後之本利和爲1456圓.本金及利率若何?

√12. 一人以金60,000圓與其子及孫,計共七人,每人所得,子較孫多2000圓,而諸子共得總數之$\frac{1}{3}$.求子及孫各幾人.又各得金幾何?

13. 舟人以常速划船15哩所費之時間,順流較逆流少5小時.如速率加倍,則順流較逆流少1小時.此人靜水中之常速若何.又流速若何?

14. 甲乙丙三人合作一工,1小時又20分可畢.各人獨作此工所費之時間,丙倍於甲而較乙多2小時.問獨作此工各須時幾何?

√15. 在20尺長之圓周上,有甲乙兩物以一定速率依同方向運動.甲行一周所費之時間較乙少2秒,甲與乙每分鐘相會一次.甲與乙之速率各若何?

16. 二直線成直角相交於$O$,其上有二點$A$及$B$以一定速率向$O$移動.現今$A$距$O$爲28寸,$B$距$O$爲9寸;二秒鐘後,$A$及$B$相距13寸,三秒鐘後,相距5寸.$A$及$B$之速率各若何?

√17. 甲乙丙三人同時出發步行某距離.甲每小時行$4\frac{1}{2}$哩,先乙2小時完成行程.乙每小時比丙快1哩,先丙3小時完成行程.求此距離.

√18. 甲乙兩腳夫同時各由$P$及$Q$出發,相向而行.兩人相會時甲已比乙多行12哩.兩人相會後甲以原速又行$4\frac{2}{3}$小時而至$Q$,乙亦以原速又行$7\frac{1}{3}$小時而至$P$.由$P$至$Q$之距離若何?

# x, y 之二次方程式之圖象

**此種圖象舉例** 任與之 $x, y$ 之二次方程式，其圖象可用下例之法求之. 667

例一. 求下式之圖象. $$y^2=4x. \tag{1}$$

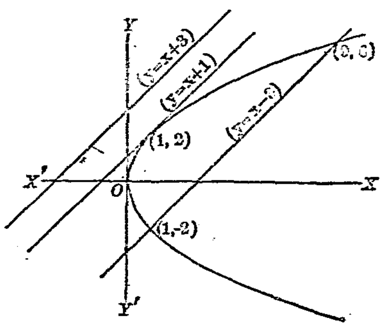
就 $y$ 解之， $$y=\pm 2\sqrt{x}. \tag{2}$$

由 (2)，知 $x$ 爲負數時，$y$ 爲虛數；$x$ 爲 0 時，$y$ 爲 0；$x$ 爲正數時，$y$ 有二實數值，且其絕對值相等而符號相反. 故 (1) 之圖象過原點，而全在 $y$ 軸之右，且關於 $x$ 軸爲對稱.

當 $x=0,\ 1/4,\ 1/2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,$

時， $y=0,\ \pm1,\ \pm\sqrt{2},\ \pm2,\ \pm2\sqrt{2},\ \pm2\sqrt{3},\ \pm4,\cdots\cdots.$

定 $(0, 0)$, $(\frac{1}{4}, 1)$, $(\frac{1}{4}, -1)$, …… 諸解之圖象，而過所得之點引曲線，即得方程式圖象之一部分，如附圖所示. 比較 § 349. 圖象與 $y$ 軸相切.




此曲線稱爲抛物線(Parabola). 抛物線由一"無窮支線"(Infinite branch)而成，今向右方無限伸張.

例二. $y^2=4x$ (1) 之圖象，與 $y=x-3$ (2), $y=x+1$ (3), $y=x+3$ (4) 之圖象各相遇於何點?

1. (1), (2) 之解爲 $1, -2$; $9, 6$ 故 (§ 386) (1), (2) 之圖象相交於 $(1, -2)$, $(9, 6)$ 二點，如上圖所示.

2. (1), (3) 之二解相等，即 $1, 2$; $1, 2$. 故 (3) 之圖象在 $(1, 2)$ 遇 (1) 之圖象於二重合點. 其意爲 (3) 之圖象與 (1) 之圖象在 $(1, 2)$ 相切，如上圖所示.

3. (1), (4) 之解，$-1\pm2\sqrt{2}i, 2\pm2\sqrt{2}i$, 爲虛數. 故 (1), (4) 之圖象不相遇，如上圖所示.

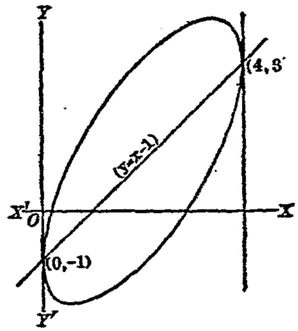
例三. 求下方程式之圖象.

$$y^2-2xy+2x^2-6x+2y+1=0. \tag{1}$$

就 $y$ 解之，得 $$y=x-1\pm\sqrt{4x-x^2}. \tag{2}$$

被開方式 $4x-x^2$，即 $x(4-x)$，爲正數(或 0)時，亦即 $x$ 介乎 0 與 4 之間(或爲

0或4)時，(2)所決定之$y$之值爲實數.故(1)之圖象介乎$x=0$及$x=4$二直線之間.




當$x=0$及$x=4$時，(2)所決定之$y$之二值相等;即$x=0$時,$y$之二值爲$-1$, $-1$;及$x=4$時則爲3, 3.其意爲(1)之圖象與直線$x=0$在點$(0, -1)$相切,而與直線$x=4$在點$(4, 3)$相切,參看例二, 2.直線$y=x-1$經過兩切點,因$4x-x^2$爲0時,(2)所決定之$y$之值與$y=x-1$所決定者相同故也.

$x$每有一值介乎0與4之間,$y$即有二相異實數值爲方程式(2)所決定,可由$x-1$之值增減$\sqrt{4x-x^2}$之值而求得.故$x$每有一如此之值,(1)之圖象上即有二點與之對應.是可先引直線$y=x-1$,然後按所究之$x$之值以$\sqrt{4x-x^2}$之值增減其縱標,極易求得之.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 例如 | $x=$ 0, | 1, | 2, | 3, | 4, |
| 時,對於直線有 | $y=-1$, | 0, | 1, | 2, | 3, |
| 而對於(1)之圖象有 | $y=-1$, | $\pm\sqrt{3}$, | $1\pm2$, | $2\pm\sqrt{3}$, | 3. |

所得之點決定一卵形曲線,如上圖所示.此曲線稱橢圓(Ellipse).

就$x$解(1)再應用§641之法,可證此曲線上之最高及最低之點爲$(2+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$, $(2-\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$.

例四. 求下方程式之圖象.

$$y^2-x^2+2x+2y+4=0. \tag{1}$$

就$y$解之,復分解所得之被開方式之因式,

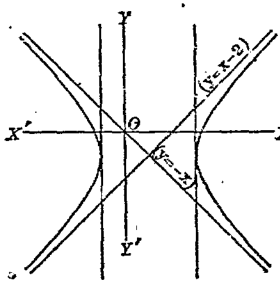
$$y=-1\pm\sqrt{(x+1)(x-3)}. \tag{2}$$

在$x=-1$及$x=3$時,被開方式$(x+1)(x-3)$爲0,其時(2)所決定之$y$之兩對值皆相等,且皆爲$-1$, $-1$.其意爲(1)之圖象與直線$x=-1$在點$(-1, -1)$相切,而與直線$x=3$在點$(3, -1)$相切.直線$y=-1$經過此兩切點.

被開方式$(x+1)(x-3)$在,且祇在,$x<-1$或$x>3$時爲正.$x$每有一如此之值時,$y$即有二相異實數值爲方程式(2)所決定,從而(1)之圖象上即有二點與之對應.是可先引直線$y=-1$,然後以$\sqrt{(x+1)(x-3)}$之值增減其定標

縱標 $-1$，以求得之.

故(1)之圖象由二無窮支線而成，其一與直線 $x=-1$ 相切，而向左方無限伸張，其又一與直線 $x=3$ 相切，而向右方無限伸張，如附圖所示.




此曲線稱雙曲線(Hyperbola).

有二直線稱爲漸近線(Asymptotes)者，雙曲線之無窮支線逐漸與之接近，稱爲在無窮遠相切.此二直線爲 $y=x-2$ 及 $y=-x$ 兩方程式之圖象，吾人求得之如下.比較 § 650，例一.

由(1)及方程式 $$y=mx+c \tag{3}$$

間消去 $y$，即得 $$(m^2-1)x^2+2(mc+m+1)x+(c^2+2c+4)=0. \tag{4}$$

欲(4)之二根皆爲無窮大，祇須(§ 638)

$$m^2-1=0 \text{ 及 } mc+m+1=0.$$

即 $$m=1,\ c=-2,\ \text{或}\ m=-1,\ c=0.$$

故欲(1)，(3)之解皆爲無窮大，祇須(3)是以下二形式之一即可.

$$y=x-2, \tag{3'}$$

$$y=-x. \tag{3''}$$

故(3')及(3'')之圖象，各與(1)之圖象在無窮遠相遇於二重合點.

例五. 求下方程式之圖象.

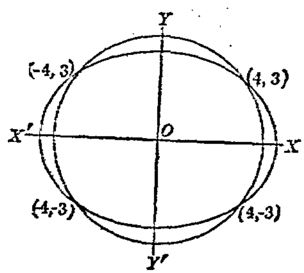
$$y^2-4xy+3x^2+6x-2y=0, \tag{1}$$

就 $y$ 解之，得 $$y=2x+1\pm\sqrt{x^2-2x+1}, \tag{2}$$

即 $$y=3x \text{ 或 } y=x+2.$$

故(1)之圖象由 $y=3x$ 及 $y=x+2$ 二直線而成.

除被開方式爲0，即 $x-1=0$ 時外，$y$ 常有二相異實數值爲(2)所決定.然當 $x-1=0$ 時，則 $y$ 有二相等之值，3，3，爲(2)所決定.故直線 $x-1=0$ 與(1)之圖象在(1，3)相遇於二重合點.若作二者在(1，3)相切之解釋，當然不可.其意蓋爲組成(1)之圖象之 $y=3x$ 及 $y=x+2$ 二直線，與直線 $x-1=0$ 之二交點相重合而已.




例六 求下二方程式之圖象及其交點.

$$x^2+y^2=25, \tag{1}$$

$$x^2/16+y^2/9=2 \tag{2}$$

(1) 之圖象爲圓,其中心爲原點, $O$, 半徑爲 5. (2) 之圖象爲橢圓.

二者相交於 $(4, 3)$, $(-4, 3)$, $(-4, -3)$, $(4, -3)$ 四點,此諸點卽 (1), (2) 之解之圖象.

例七. 求下二方程式之圖象及其交點.

$$xy-3y-2=0, \tag{1}$$

$$xy+2y+3=0. \tag{2}$$

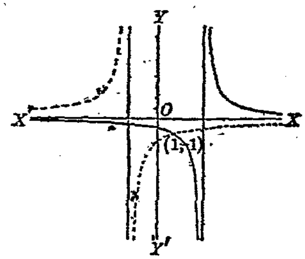
由 (1) 得 $$y=2/(x-3). \tag{3}$$

$x$ 每有一實數值, $y$ 亦有一實數值,故圖象上卽有一點與之對應.

當 $x=-\infty,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2\frac{3}{4},\ 3,\ 3\frac{1}{4},\ 4,\ \infty,$

時, $y=\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ -1,\ -2,\ -8,\ \pm\infty,\ 8,\ 2,\ 0.$

定此諸解之圖象,得一雙曲線,圖中用實線所繪之曲線,卽其二無窮支線,其漸近線爲 $y=0$ (用例四之法求得)及 $x-3=0$ (因 $x=3$ 時, $y=\infty$).




倣此,可得 (2) 之圖象亦爲一雙曲線,圖中用虛線所繪者卽是,其漸近線爲 $y=0$ 及 $x+2=0$.

方程組 (1), (2) 祇有 $x=1, y=-1$, 一個有窮解,其餘三解皆爲無窮大, § 654.

爲 (1), (2) 之圖象之二雙曲線,僅相遇於 $(1,-1)$ 一點,然因二雙曲線有一公漸近線 $y=0$, 故認二者在 $(\infty, 0)$ 有二無窮遠重合交點;又因二者有互相平行之漸近線 $x-3=0$ 及 $x+2=0$, 故認二者在 $(0,\infty)$ 有一無窮遠交點.

668 **二次方程式圖象通論** 推廣以上各例之結果,得結論如下.

設有 $x, y$ 之任何二次方程式,具實係數者,如

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0. \tag{1}$$

若 $b$ 不爲 0, 可就 $y$ 解之,卽得

$$by=-(hx+f)\pm\sqrt{R}, \tag{2}$$

其中 $$R=(h^2-ab)x^2+2(hf-bg)x+(f^2-bc).$$

$x$ 每有一使被開方式 $R$ 爲正之值, $y$ 卽有二實數值可由

(2)得出.對於此二值,圖象上有二點與之對應,是可先引直線

$$by=-(hx+f),$$

再以$\sqrt{R}/b$之值按所究之$x$之值增減其縱標,以求得之;參看§667,例一,例三,例四.

圖象之形式,視$R$之因式之性質而定.

1.　$(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)=0$時.

在此種情形$R$爲完全平方,§635,而(1)之左端可分解爲一次因式,§635,例三.此諸因式若有實係數,(1)之圖象爲二直線.參看§667,例五.

2.　$(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)>0$時.

在此種情形,除$h^2-ab=0$外,被開方式$R$可化爲$R=(h^2-ab)(x-\alpha)(x-\beta)$ (3)之形式,其中$\alpha$及$\beta$爲實數而$\alpha<\beta$,§635.

若$h^2-ab<0$,積(3)在,且祇在,$x$介乎$\alpha$與$\beta$之間時爲正.故(1)之圖象爲一閉曲線,介乎$x-\alpha=0$及$x-\beta=0$二直線之間,與之相切.故曲線爲橢圓(或圓).參看§667,例三.

若$h^2-ab>0$,積(3)在,且祇在,$x<\alpha$及$x>\beta$時爲正.故圖象由二無窮支線而成;其一與直線$x-\alpha=0$相切而向左方伸張,其又一與直線$x-\beta=0$相切而向右方伸張.故曲線爲雙曲線.參看§667,例四.

若$h^2-ab=0$,則$R=2(hf-bg)x+(f^2-bc)$,其中$hf-bg\neq0$而$R$在,且祇在,$x>-(f^2-bc)/2(hf-bg)$時爲正,故圖象由一無窮支線而成,全在直線$2(hf-bg)x+(f^2-bc)=0$之一側,與之相切.故曲線爲拋物線.參看§667,例一.

3.　$(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)<0$時.

$by=-(hx+f)\pm\sqrt{R}$　$R=(h^2-ab)x^2+2(hf-bg)x+f^2-bc$

① $R=0$ 一根直線

② $R\neq0$

$\Delta>0$ ① $h^2-ab>0$ [illegible]

② —— $<0$ [illegible]

③ $h^2-ab=0$ —— 拋物線

$\Delta=0$ —— $>0$ 二根直線

$\Delta<0$ —— $>0$ 双曲線

在此種情形$R=0$之二根爲共軛虛數，§635. 若命之爲$\lambda+\mu i$及$\lambda-\mu i$，$R$可化爲$R=(h^2-ab)[(x-\lambda)^2+\mu^2]$ (4) 之形式.

若$h^2-ab>0$，無論$x$之值若何積 (4) 常爲正.故 (1) 之圖象由二無窮支線而成，二者分居直線$by=-(hx+f)$之兩側.故曲線爲雙曲線. $y^2-x^2=1$即其一例.

若$h^2-ab<0$，無論$x$之值若何，積 (4) 常爲負.故 (1) 之圖象全無實跡. $x^2+y^2+1=0$即其一例.

以上之討論中乃假定$b\neq0$者.但若$b=0$，而$a\neq0$，吾人可不就$y$而就$x$解 (1)，亦得類同之結論.若$a=0$及$b=0$，則 (1) 之圖象爲一雙曲線，如於§667，例七，或爲二直線，而一與$x$軸平行，一與$y$軸平行者.

## 習　題　LII

求下列各方程式之圖象.

1. $y^2=-8x$.　　2. $x^2+y^2=9$.　　3. $(y-x)^2=x$.

4. $x^2+xy+2y^2=8$.　　5. $y^2-4xy+3x^2+4x=0$.

6. $y^2-2xy+1=0$.　　7. $y^2-2xy-1=0$.

8. $2x^2+3y^2-4x+6y=0$.　　9. $y^2-x^2-3x+y-2=0$

10. $2x^2+4xy+4y^2+x+4y-5=0$.　　11. $4x^2-12xy+9y^2+3x-6y=0$.

求下列各組方程式之圖象及其交點.

12. $\begin{cases}xy=1,\\3x-5y=2.\end{cases}$　　13. $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\x^2-xy+x=0.\end{cases}$　　14. $\begin{cases}x^2+y^2=3,\\y^2=2x.\end{cases}$

15. $\begin{cases}y^2-xy-2x^2-2x-2y-2=0,\\y^2-xy-2x^2+2=0.\end{cases}$　　16. $\begin{cases}(x-2y)(x+y)+x-3y=0,\\(x-2y)(x-y)+2x-6y=0.\end{cases}$

17. 求$x^2+y^2-6x-2y+1=0$之圖象及其與$x$軸$y$軸之交點.

18. 求證$(x-y)^2-2(x+y)+1=0$之圖象與$x$軸及$y$軸相切.

19. 求證直線$y=3x+5$與$10x^2+y^2-16=0$之圖象在點$(-3/5,16/5)$相切.

20. $m$須有若何之值，直線$y=mx+3$始能與$x^2+2y^2=6$之圖象相切?

21. $c$須有若何之值，直線$7x-4y+c=0$始能與$3x^2-y^2+x=0$之圖象相切?

22. 求證 $y=0$ 及 $x-2y+1=0$ 二直線爲 $xy-2y^2+y+6=0$ 之圖象之漸近線.

23. 求下方程式之圖象之漸近線.

$2x^2+$[illegible]$xy-$[illegible]$y^2+x+2y+2=$[illegible].

24. $\lambda$ 須有若何之值, $x^2+\lambda xy+y^2=x$ 之圖象始能爲橢圓?爲拋物線?爲雙曲線? Lamda

# XVII. 不等式

單一不等式　絕對不等式,對於所含文字之一切實數值皆能成立,如 $x^2+y^2+1>0$ 卽是;條件不等式,對於所含文字之一切實數值不能皆成立,且反於此諸文字之值加一限制,如 $x-1>0$ 卽是. 669

控制不等式之運算之原理,已具述於§261. 由此諸原理,可知若將不等式之一項變號,由一端移置他端,或以同一正數乘不等式之兩端,聯結兩端之 $>$ 號或 $<$ 號仍不變;但若以同一負數乘兩端,則 $>$ 變爲 $<$, 而 $<$ 變爲 $>$. 670

例一. 證明　$a^2+b^2>2ab.$

因　$(a-b)^2>0,$

卽　$a^2-2ab+b^2>0,$

故　$a^2+b^2>2ab.$

例二. 求證　$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca.$

因　$a^2+b^2>2ab,\quad b^2+c^2>2bc,\quad c^2+a^2>2ca.$

以上三不等式,左端右端各自相加,結果再以2除之卽得

$$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca.$$

例三. 解不等式 $3x+5>x+11$, 卽,求其對於 $x$ 之值加何限制.

移項,　$2x>6,$

從而　$x>3.$

例四. 解　$x^2-2x-3<0.$

分解因式,　$(x+1)(x-3)<0.$

欲適合此不等式,必須一因式爲正,一因式爲負.故須有 $x>-1$ 及 $<3$. 卽 $-1<x<3$.

671 聯立不等式——二個或若干個

$$ax+by+c>0$$

形式之一組不等式，可用簡單圖解方法就變數 $x, y$ 解之，其法基於下之討論.

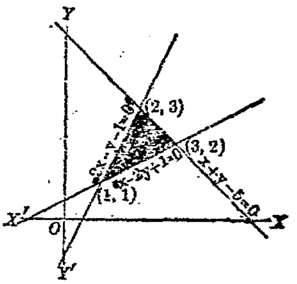
$ax+by+c=0$ 之圖象爲一直線，§385，作此直線，則對於圖象在直線一側之 $x, y$ 之各組值，應爲 $ax+by+c>0$，而對於圖象在直線他一側之 $x, y$ 之各組值，應爲 $ax+by+c<0$.

譬如，令 $(x_1, y_1)$ 爲 $y-(mx+c)=0$ 之圖象上之一點俾 $y_1-(mx_1+c)=0$. 於是，若 $y_2<y_1$ 因而點 $(x_1, y_2)$ 在直線之下方時，則 $y_2-(mx_1+c)<0$，若 $y_3>y_1$ 因而點 $(x_1, y_3)$ 在直線之上方時，則 $y_3-(mx_1+c)>0$.

例. 解聯立不等式

$$k_1=x-2y+1<0, \quad k_2=x+y-5<0, \quad k_3=2x-y-1>0.$$

求 $k_1=0, k_2=0, k_3=0$ 之圖象，如附圖所示.




$x, y$ 之各組值，其圖象與原點在直線 $k_2=0$ 之同側者，適合不等式 $k_2<0$；因 $x=0, y=0$ 時，$k_2=-5$，即 $<0$ 也. 同理，$x, y$ 之各組，其圖象與原點不在直線 $k_1=0, k_3=0$ 之同側者，適合不等式 $k_1<0, k_3>0$.

故 $x, y$ 之各組值，其圖象在三直線圍成之三角形內者，適合所與之不等式

$$k_1<0, \quad k_2<0, \quad k_3>0.$$

## 習 題 LIII

下列各題中 $a, b, c$ 諸文字假定指示不相等之正數.

1. 試證 $a/b+b/a>2$.
2. 試證 $(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2$.
3. 試證 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.
4. 試證 $a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c>6abc$.
5. 試證 $a^3+b^3+c^3>3abc$.

6. 解 $x+7>3x/2-8$.

7. 解 $2x^2+4x>x^2+2x+8$.

8. 解 $(x+1)(x-3)(x-6)>0$.

9. 用圖解法解 $y-x-2<0,\ x-3<0,\ y+1>0$.

10. 又 $y-x>0,\ y-2x<0$.

11. 又 $x+y+3>0,\ y-2x-4<0,\ y+2x+4>0$.

12. 試證 $x^2+2x+5>0$ 對於 $x$ 之一切值皆能成立.

13. 用圖解方法解 $x^2+y^2-1<0,\ y^2-4x<0$.

# XVIII. 一次不定方程式

**含二變數之單一方程式** 已與 672

$$ax+by=c$$

形式之任一方程式,其中 $a, b, c$ 指示整數,且 $a$ 與 $b$ 無公因數,以求表示得適合此方程式之 $x$ $y$ 之各組整數值之式;並求表示如是之各組正整數值之式.

**定理一** 凡屬上述情形之方程式 $ax+by=c$,皆有整數解. 673

何則,因 $a$ 與 $b$ 互質,用 §491 所述之方法,可求得二整數 $p$ 及 $q$,俾 $ap+bq=1$,從而 $a(pc)+b(qc)=c$;而此式證明 $x=pc,\ y=qc$ 爲 $ax+by=c$ 之解.

**定理二** 若 $x=x_0,\ y=y_0$ 爲類此一方程式 $ax+by=c$ 之一整數解,則其一切整數解皆藉公式 674

$$x=x_0+bt,\ y=y_0-at$$

以得之,但 $t$ 中則以一切可能之整數值代入之.

其一, $x=x_0+bt,\ y=y_0-at$ 常爲下式之解:

$$ax+by=c, \tag{1}$$

何則,代入 (1), $a(x_0+bt)+b(y_0-at)=c,$

簡化之,則 $ax_0+by_0=c,$

故此式能成立,因依假設, $x=x_0,\ y=y_0$ 爲 (1) 之解也.

其二，凡 (1) 之整數解皆可由 $x=x_0+bt,\ y=y_0-at$ 得之.

何則，令 $x=x_1,\ y=y_1$ 指示另一整數解.

則
$$ax_1+by_1=c \text{ 及 } ax_0+by_0=c$$

減之，則
$$b(y_1-y_0)=-a(x_1-x_0). \tag{2}$$

由 (2)，知 $b$ 為 $a$ 與 $x_1-x_0$ 二整數之積之因數.以故，因 $b$ 與 $a$ 互質，$b$ 必能整除 $x_1-x_0$；§ 492，1，若命其商為 $t'$，即得
$$x_1-x_0=bt',\ \text{即 } x_1=x_0+bt'. \tag{3}$$

以 (3) 代入 (2) 再簡化，又得
$$y_1=y_0-at'. \tag{4}$$

675 由 §§ 673, 674，可知凡屬上述情形之方程式 $ax+by=c$，皆有無數之整數解.$a$ 與 $b$ 異號時，並有無數之正整數解；$a$ 與 $b$ 同號時，則此種之解，為數僅屬有限.或竟無之.

例如，$2x+3y=18$ 有一解為 $x=3,\ y=4$.

故普偏解 (General solution) 為 $x=3+3t,\ y=4-2t$.

正整數解，與 $t=-1, 0, 1, 2$ 對應，計有 $x, y=0, 6;\ 3, 4;\ 6, 2;\ 9, 0$.

676 藉助於定理二，凡屬上述情形之方程式，但知其一特解，即可將其普偏的整數解書出，特解往往得由視察法求出.例如，$10x+3y=12$ 有一解為 $x=0,\ y=0$. 用 § 673 中所指示之方法，常能求得一特解；用下例之法亦然.

例. 求下式之整數解：
$$7x+19y=213, \tag{1}$$

就係數較小之元，$x$，解之，可化得
$$x=\frac{213-19y}{7}=30-2y+\frac{3-5y}{7}. \tag{2}$$

故 $y$ 為整數時 $x$ 若亦為整數，$(3-5y)/7$ 亦應為整數.命此整數為 $u$，俾 $(3-5y)/7=u$.

則
$$5y+7u=3. \tag{3}$$

再用處理 (1) 之法以處理 (3)，得
$$y=\frac{3-7u}{5}=-u+\frac{3-2u}{5}. \tag{4}$$

$(3-2u)/5$ 須爲整數,等諸之於 $v$.

則 $$2u+5v=3. \tag{5}$$

再用處理 (1) 及 (3) 之法以處理 (5), 得

$$u=\frac{3-5v}{2}=1-2v+\frac{1-v}{2}. \tag{6}$$

當 $v=1$ 時,分式項 $(1-v)/2$ 爲 0, 而 $u$ 有整數值 $-1$.

將 $u=-1$ 代入 (4), 得 $y=2$.

將 $y=2$ 代入 (2), 得 $x=25$.

故 (1) 之普徧解爲 $x=25+19t,\ y=2-7t$

正整數解有二,各與 $t=-1$ 及 $t=0$ 對應,計爲: $x, y=6, 9;\ 25, 2$.

應注意者, (2), (4), (6) 之分式項中, $y, u, v$ 之係數之絕對值, 5, 2, 1, 實卽 677
求原係數 7 及 19 之最大公約數時, 連續所見之餘數而已. 7 與 19 無公因數,最後所以能得餘數,卽係數, 1, 之故,實在於此應用此法於任何方程式 $ax+by=c$, 而其中 $a$ 與 $b$ 無公因數者,無不皆然.故應用此法於類此之方程式常能得一解.

然實際上殊無完成上述計算之必要. 譬如, 旣得 (4), 易知 $u=-1$ 能使 $(3-2u)/5$ 成爲整數,而 $y=2$ 可立卽得出, $x=25$ 亦可由 (2) 求得.

應注意者,方程式 $ax+by=c$ 之有整係數者,其中 $a$ 與 $b$ 有公因數,如 $d$, 時,除 $d$ 亦爲 $c$ 之因數外,不能有整數解.因 $x$ 及 $y$ 若爲整數, $d$ 將爲 $ax+by$ 之因數,從而爲 $c$ 之因數也. 例如, $4x+6y=7$ 無整數解.

**聯立方程式** 聯立二方程式含有具整係數之三變數者, 678
若有整數解時,可用下例之法求之.

**例.** 求下方程組之整數解.

$$3x+6y-2z=22, \tag{1}$$
$$5x+8y-6z=28. \tag{2}$$

先消去 $z$ 并簡化所得之方程式.

卽得 $$2x+5y=19. \tag{3}$$

次求 (3) 之普徧解,如 § 676.

卽得 $$x=7+5t,\ y=1-2t. \tag{4}$$

復次以 (4) 代入 (1) 并簡化其結果.

卽得 $$2z-3t=5.\qquad(5)$$

復次求(5)之普徧解.

卽得 $$z=1-3u,\ t=-1-2u,\qquad(6)$$

其中 $u$ 指示任何整數.

最後以 $t=-1-2u$ 代入(4)并簡化.

卽得 $$x=2-10u,\ y=3+4u,\ z=1-3u,\qquad(7)$$

爲所求之普徧解.

唯一之正整數解爲 $x=2,\ y=3,\ z=1$,與 $u=0$ 對應.

應注意者,若由原方程組導出之兩方程式含二變數者一無整數解,則原方程組亦無整數解.

含四變數之三方程式等,可用同法處理之.

679 **含多變數之單一方程式** 單一方程式含具整係數之多變數者,可用下例之法求其整數解之公式.

例. 求下式之整數解. $$5x+8y+19z=50.\qquad(1)$$

就 $x$ 解之. $$x=10-y-3z-\frac{3y+4z}{5}.\qquad(2)$$

$(3y+4z)/5$ 須爲整數,等置之於 $u$.

則 $$3y+4z=5u.\qquad(3)$$

就 $y$ 解之, $$y=u-z+\frac{2u-z}{3}.\qquad(4)$$

$(2u-z)/3$ 須爲整數,等置之於 $v$.

則 $$z=2u-3v.\qquad(5)$$

以(5)代入(4), $$y=-u+4v.\qquad(6)$$

以(5)及(6)代入(2),
$$x=10-6u+5v.\qquad(7)$$

公式(5),(6),(7),其中 $u,v$ 得有任何整數值,組成所求之普徧解.

以 $u=2,\ v=1$ 代入公式(5),(6),(7)中,得(1)之正整數解爲 $x=3,\ y=2,\ z=1$.

## 習題 LIV

求下列各方程式或方程組之普徧整數解及正整數解.

1. $6x-17y=18$.
2. $43x-12y=158$.
3. $16x+39y=1$.
4. $72x+23y=845$.

5. $49x-27y=28$.　　6. $47x-97y=501$.

7. $\begin{cases}2x+5y-8z=27,\\3x+2y+z=11.\end{cases}$　　8. $\begin{cases}5x+2y=42,\\3y-7z=2.\end{cases}$

9. $4x+2y=2z+3$.　　10. $2x+3y+4z=17$.

11. 求方程式$3x+7y=1043$之正整數解之個數.

12. 求化分數41/35為以5及7作分母之二正分數之和.

13. 一人以金110圓購牛羊若干頭,牛每頭7圓而羊每頭6圓.此人買牛羊各幾頭?

14. 求分23為三部分,俾三倍第一部分,兩倍第二部分,與五倍第三部分之和能為79.

15. 求最小之數,除以5, 7, 9能得餘數4, 6, 8者.

16. 等長之二棒,各自等分為250及253部分.二棒相並而齊其端,則最接近之劃分線在何處?

# XIX. 比及比例　變數法

## 比 及 比 例

**比**　算術及代數中,慣將比之一詞(§215)廣其用於數,若 $a$ 680
及 $b$ 指示任二數,定 $a$ 對 $b$ 之比之意義如商 $a/b$. (比較§216).

$a$ 對 $b$ 之比,記為 $a/b$ 或 $a:b$.

比 $a:b$ 中,稱 $a$ 為前項, $b$ 為後項.

**比之性質**　因比(如 $a:b$)為分數,比之性質即分數之性質. 681
故以同數乘或除比之兩項,比值不變.

例如,　$a:b=ma:mb=a/n:b/n$.

反之,比 $a:b$, 除 $a=b$ 時外,其兩項各自作同次冪,或各加以同數,比值必變.特例,

若 $a$, $b$, 及 $m$ 為正數,則加 $m$ 於比 $a:b$ 之兩項之結果,當 $a<b$ 時,比值增大; $a>b$ 時,比值減小.

何則，
$$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)},$$
而 $m(b-a)/b(b+m)$ 為正或為負，視 $a<b$ 或 $a>b$ 而定．

682 **比例** 二比 $a:b$ 及 $c:d$ 相等時，$a, b, c, d$ 四數稱為成比例．此比例可書作下之任一形式．

$$a/b=c/d,\ 或\ a:b=c:d,\ 或\ a:b::c:d.$$

讀為"$a$ 比 $b$ 如 $c$ 比 $d$"．

比例 $a:b=c:d$ 中，$a$ 及 $d$ 稱為外項，$b$ 及 $c$ 為內項．$d$ 又稱為 $a, b$，及 $c$ 之第四比例項．

683 **定理** 比例式中兩外項之積，等於其兩內項之積；即

若 $$a:b=c:d,\ 則\ ad=bc.$$

因由 $a/b=c/d$ 消去分式即得 $ad=bc$ 也．

例．有一比例，其第一，第二，及第四項各為 $1/2$, $-3$, 及 $5$；求其第三項．

令第三項為 $x$，則 $$1/2:-3=x:5.$$

故 $$5\cdot 1/2=-3\cdot x.$$

就 $x$ 解之； $$x=-5/6.$$

684 反之，如二數之積與他二數之積相等，則無論將此四數依何順序排列，祇須令一組數為內項而他組數為外項，比例常能成立．

何則，令 $$ad=bc.$$

以 $bd$ 除兩端，即得 $a/b=c/d$．故

$$a:b=c:d \quad (1) \qquad 及 \qquad c:d=a:b. \quad (2)$$

同理，依次以 $cd, ab$，及 $ac$ 除 $ad=bc$ 之兩端，可得

$$a:c=b:d \quad (3) \qquad 及 \qquad b:d=a:c, \quad (4)$$
$$d:b=c:a \quad (5) \qquad 及 \qquad c:a=d:b, \quad (6)$$
$$d:c=b:a \quad (7) \qquad 及 \qquad b:a=d:c. \quad (8)$$

685 **比例諸項得容許變更之順序** 由 §§ 683, 684，可知 $a, b, c, d$ 若依 (1)—(8) 諸順序之任一排列時，比例能成立，則依諸順序

之另一排列時,比例亦成立.特例,

1. 任何比例式中之二比,前後項得同時互易.

即如, $a:b=c:d$, 則 $b:a=d:c$,

2. 任何比例式中之二內項可互易,二外項亦然.

例如,若 $a:b=c:d$, 則 $a:c=b:d$.

上述變換 1 及 2 各稱爲反比變換 (Inversion) 及更比變換 (Alternation).

**比例之其他正當變換** 686

若已知 $a:b=c:d$, 即可斷言

1. $a+b:b=c+d:d$.
2. $a-b:b=c-d:d$.
3. $a+b:a-b=c+d:c-d$.
4. $ma:mb=nc:nd$.
5. $ma:nb=mc:nd$.
6. $a^n:b^n=c^n:d^n$.

何則,於變換1取內項及外項之積,即得 $ad+bd=bc+bd$, 即 $ad=bc$, 此爲眞,因 $a:b=c:d$ 也.故變換1爲眞.仿此得證變換2至6皆眞.

將 $a:b=c:d$ 變換爲如上述1,2,3之形式,各稱爲合比變換 (Composition), 分比變換 (Division), 及合分比變換 (Composition and division).

例. 解 $x^2+2x+3:x^2-2x-3=2x^2+x-1:2x^2-x+1$.

依變換 3, $2x^2:2(2x+3)=4x^2:2(x-1)$.

故 $$x^2=0. \quad (1)$$

或依變換 4, 5 $$1:2x+3=2:x-1. \quad (2)$$

解 (1) 及 (2), $x=0,\ 0$, 或 $-7/3$.

**定理** 若干等比之中,任一前項比其後項,如諸前項之和比諸後項之和. 687

譬如,若 $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$,

則 $a_1:b_1=a_1+a_2+a_3:b_1+b_2+b_3$.

何則,令 $r$ 指示諸等比公有之值.即得

$$a_1/b_1=r,\quad a_2/b_2=r,\quad a_3/b_3=r.$$

故 $$a_1=rb_1,\quad a_2=rb_2,\quad a_3=rb_3.$$

三式相加, $$a_1+a_2+a_3=r(b_1+b_2+b_3).$$

故 $$\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=r=\frac{a_1}{b_1}.$$

例一. 若 $$x:(b-c)yz=y:(c-a)zx=z:(a-b)xy,$$

則 $$x^2+y^2+z^2=0.$$

何則,以 $x$ 乘第一比之兩項,以 $y$ 乘第二比之兩項,以 $z$ 乘第三比之兩項,然後應用本定理,即得

$$\frac{x^2}{(b-c)xyz}=\frac{y^2}{(c-a)xyz}=\frac{z^2}{(a-b)xyz}=\frac{x^2+y^2+z^2}{0},$$

顯而易見非 $x^2+y^2+z^2=0$ 不可.

以上證明中所用之方法,用以處理複雜之比例題,功效甚偉.

例二. 試證:若 $$a:b=x:y,$$

則 $$a^3+2b^3:ab^2=x^3+2y^3:xy^2.$$

置 $a/b=x/y=r$, 因而 $a=rb$, $x=ry$.

則 $$(a^3+2b^3)/ab^2=(r^3b^3+2b^3)/rb^3=(r^3+2)/r,$$

而 $$(x^3+2y^3)/xy^2=(r^3y^3+2y^3)/ry^3=(r^3+2)/r.$$

688 **連比例** 若 $a:b=b:c=c:d=\cdots\cdots$, 則 $a, b, c, d,\cdots\cdots$ 諸數稱為成連比例.

若 $a, b, c$ 三數成連比例,因而 $a:b=b:c$, 則 $b$ 稱為 $a$ 及 $c$ 之比例中項, $c$ 稱為 $a$ 及 $b$ 之第三比例項.

若 $a, b, c$ 成連比例,則 $b^2=ac$.

何則,因 $a:b=b:c$, 依 §683, 得 $b^2=ac$.

## 習題 LV

1. 求 15, 24, 及 20 之第四比例項; 15 及 24 之第三比例項; $5a^3b^2$ 及 $20ab^2$ 之比例中項; $\sqrt{12}$ 及 $\sqrt{75}$ 之比例中項.

2. 若 $3x-2y=x-5y$, 求 $x:y$; 及 $x+y:x-y$

3. 若 $2x^2-5xy-3y^2=0$, 求 $x:y$, 及 $y:x$.

4. 若
$$ax+by+cz=0 \text{ 及 } a'x+b'y+c'z=0,$$
則
$$x:y:z=bc'-b'c:ca'-c'a:ab'-a'b.$$

5. 若 $a:b=c:d$, 則 $cb+ad$ 為 $a^2+c^2$ 及 $b^2+d^2$ 之比例中項.

6. 若 $(a^2+b^2)cd=(c^2+d^2)ab$, 則非 $a:b=c:d$ 卽 $a:b=d:c$.

7. 若 $a:b=c:d$, 則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}:\sqrt{a+b}=\sqrt{c}+\sqrt{d}:\sqrt{c+d}$.

8. 若 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, 則 $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=3\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}$.

9. 若諸數 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$; $l_1, l_2, \cdots\cdots, l_n$ 皆為正數,則比 $l_1a_1+l_2a_2+\cdots\cdots+l_na_n:l_1b_1+l_2b_2+\cdots\cdots+l_nb_n$ 之值,介乎 $a_1:b_1, a_2:b_2, \cdots\cdots, a_n:b_n$ 諸比之最大者與最小者之間.

10. 若 $a-b:k=b-c:l=c-a:m$, 而 $a, b, c$ 不相等,則 $k+l+m=0$.

11. 若 $x:mz-ny=y:nx-lz=z:ly-mx$ 則 $lx+my+nz=0$, 又 $x^2+y^2+z^2=0$.

12. 若 $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$, 則此三比各等於下比:
$$(l_1a_1^n+l_2a_2^n+l_3a_3^n)^{\frac{1}{n}}:(l_1b_1^n+l_2b_2^n+l_3b_3^n)^{\frac{1}{n}}.$$

13. 藉助於§686, 解下列各方程式.

(1) $\frac{x^2+ax-a}{x^2-ax+a}=\frac{2x^2+a}{2x^2-a}$.

(2) $\frac{2x^3-3x^2+2x+2}{2x^3-3x^2-2x-2}=\frac{3x^3-x^2+10x-26}{3x^3-x^2-10x+26}$.

14. 求以 $2:3:5$ 之比分520為三部分.

15. $A, B$ 二酒桶貯上下兩種酒之混合物,其混合量之比,在 $A$ 桶中者為 $3:5$, 在 $B$ 桶中者為 $3:7$. 今欲得上酒6嗧下酒12嗧之混合物,二桶中各須取出幾嗧?

# 變　數　法

**一個自變數**　若二變數 $y$ 及 $x$ 相關,二者之值雖變而其比不變,則稱 $y$ 隨 $x$ 而變,或稱 $y$ 及 $x$ 按比例而變. 689

簡言之,當 $y/x=c$, 卽 $y=cx$, 其中 $c$ 指示常數時, $y$ 稱為隨 $x$ 而變.

記法 $y\propto x$, 卽"$y$ 隨 $x$ 而變"之意.

690 若知$y$隨$x$而變,即可書作$y=cx$;若更知$x$及$y$之一組對應值,則可求得$c$.於是聯結$y$與$x$之方程式既得,任與$x$以何值,吾人常能算出$y$所對應之值.

例. 若$y$隨$x$而變,且$x=2$時$y=12$,則$x=20$時$y$之值若何?

因
$$y=cx$$
依假設,$x=2$, $y=12$時,此方程式能適合.

故
$$12=c\cdot 2,\quad 即\quad c=6.$$
故
$$y=6x.$$
故$x=20$時,$y=6\cdot 20=120$.

691 $y$除隨$x$自身而變外,亦可隨$x$之某一函數而變,例如$y$可隨$x^2$, $x+1$, $1/x$等之一而變.特例,如$y$隨$1/x$而變,則稱$y$隨$x$而反變.

例. 已知$y$為常數與隨$x$反變之一項之和,并知$x=-1$時$y=1$, $x=1$時$y=5$.求聯結$x$及$y$之方程式.

依假設,$y=a+b/x$,其中$a$及$b$為常數.

因此方程式為$x=-1$, $y=1$及$x=1$, $y=5$所適合,故得
$$1=a-b\ 及\ 5=a+b.$$
故$a=3$, $b=2$,而所求之方程式為$y=3+2/x$.

692 **二個以上之自變數** 令$x$及$y$指示不相關之二變數.若另一變數$z$隨積$xy$而變,因而$z=cxy$,則稱$z$為隨$x$及$y$聯變;若$z$隨商$x/y$而變,因而$z=c\cdot x/y$,則稱$z$隨$x$正變而隨$y$反變.

例如,矩形之面積隨底及高聯變;其高隨面積正變而隨底反變.

693 **定理** 若$x$為常數時$z$隨$y$而變,$y$為常數時$z$隨$x$而變,則$x$及$y$皆變時,$z$隨積$xy$而變.

何則,取$x$及$y$之任三組值如$x_1, y_1$; $x_1, y_2$; $x_2, y_2$者考之.令$z_1, z_2, z_3$指示$z$之對應值,因而

$$x_1,\quad y_1,\quad z_1, \tag{1}$$
$$x_1,\quad y_2,\quad z_2, \tag{2}$$
$$x_2,\quad y_2,\quad z_3, \tag{3}$$

爲三變數之三組對應值.

則因(1)中之$x$值與(2)中者相同,且依假設,對於$x$之任何定值,$z$隨$y$而變,故由§689,得

$$z_1/y_1=z_3/y_2. \qquad (4)$$

同理,因$y_2$爲(2)及(3)所公有,得

$$z_3/x_1=z_2/x_2. \qquad (5)$$

(4)及(5)之對應端相乘,

$$z_1/x_1y_1=z_2/x_2y_2. \qquad (6)$$

故$z$及$xy$之對應值成比例,即$z$隨$xy$而變,§689.

## 習　題　LVI

1. 若$y$隨$x$而變,且$x=5$時$y=-2$,則$x=7$時$y$之值若何?

2. 若$y$隨$x^2$反變,且$x=2$時$y=1$,則對於$x$若何之值可有$y=3$?

3. 已知$y$爲常數與隨$x^2$而變之一項之和,并知$x=1$時$y=1$,$x=2$時$y=0$.求聯結$x$及$y$之方程式.

4. 若$y$隨$x^2$正變而隨$z^3$反變,且$x=-1$而$z=2$時$y=1$,則$x=3$而$z=-1$時$y$之值若何?

5. 若$y$隨$x$而變,試證$x^2-y^2$隨$xy$而變.

6. 若$y$之平方隨$z$之立方而變,且$z$隨$x$反變,試證$xy$隨$x$之平方根反變.

7. 三人作工四星期,工資爲108圓,則五人作工幾星期可得135圓?

8. 圓盤之體積,隨其厚及底面半徑之平方聯變.今將厚爲3及2而半徑爲24及36之二金屬圓盤熔化,另鑄一圓盤,令其半徑爲48.則其厚若何?

9. 高爲$a$之直圓錐爲一平行於底面之平面所截.截面之面積爲底面積之半時,則此平面距圓錐之頂點幾何?截分圓錐爲等體積之二部分時,則此平面距頂點幾何?

# XX. 等差級數

**等差級數**　由一與數$a$累加一與數$d$而衍出之一列數,即凡數列之呈下記形式者,名曰等差級數. 694

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots\cdots,\ a+(n-1)d. \qquad (\mathrm{I})$$

因 $d$ 爲 (I) 中每二連續項之差, $d$ 稱爲此等差級數之公差.

例如, 2, 5, 8, 11 爲等差級數,其公差 $d=3$, 又 2, $-1$, $-4$, $-7$ 爲等差級數,其公差 $d=-3$.

695 **第 $n$ 項** 注意在 (I) 之各項 $a, a+d, a+2d, \cdots\cdots$ 中, $d$ 之係數較本項之序數少 1. 故普徧項即第 $m$ 項爲 $a+(m-1)d$. 若共有 $n$ 項,命末項爲 $l$, 即得下之公式.

$$l=a+(n-1)d. \tag{II}$$

例. 等差級數之第七項爲 15 而第十項爲 21; 求首項 $a$ 及公差 $d$; 又若共有 20 項,求 $l$.

$$a+6d=15, \quad a+9d=21.$$

就 $a$ 及 $d$ 解之, $\quad a=3, \quad d=2.$

故 $\quad l=3+19\cdot 2=41.$

696 **和** 顯而易見 (I) 之末第二項可書作 $l-d$, 更前一項則 $l-2d, \cdots\cdots$, 首項則 $l-(n-1)d$.

故若 $S$ 指示 (I) 之諸項之和,應有

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+[a+(n-1)d],$$

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+[l-(n-1)d].$$

將兩方程式之對應端相加,即得 $2S=n(a+l)$. 故

$$S=\frac{n}{2}(a+l). \tag{III}$$

例. 有六項之等差級數,首項爲 5 而公差爲 4, 求此級數之和.

因 $n=6$, $\quad l=5+5\cdot 4=25.$

故 $\quad S=\frac{6}{2}(5+25)=90.$

697 **應用** 藉助於公式 (II) 及 (III), 等差級數之五數 $a, l, d, n, S$, 若任與其三,他二數即可求出. 關於與數之惟一限制,乃須由其導出 $n$ 之正整數值而已.

例. 已與 $d=-1/2$, $l=3/2$, $S=-15/2$; 求 $a$ 及 $n$.

代入 (II), (III).
$$\frac{3}{2}=a+\frac{n-1}{2}, \tag{1}$$
$$-\frac{15}{2}=\frac{n}{2}\left(a+\frac{3}{2}\right). \tag{2}$$
消去 $a$,
$$n^2-7n-30=0. \tag{3}$$
解 (3),
$$n=10 \text{ 或 } -3.$$
$n=-3$ 一值不合理.以 $n=10$ 代入 (1), 得 $a=-3$. 故 $n=10$, $a=-3$, 而等差級數爲 $-3, -2\frac{1}{2}, -2, -1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}$.

**等差中項** 若三數成等差級數,中間之數稱爲他二數之 698
等差中項.

任二數 $a$ 與 $b$ 之等差中項爲其和之半.

何則,若 $x$ 爲 $a$ 與 $b$ 之等差中項,則數列 $a, x, b$ 成等差級數.

故
$$x-a=b-x,$$
從而
$$x=(a+b)/2.$$

任何等差級數中,介乎首末二項間之各項,皆可稱爲首末二項之等差中項.在任二與數 $a$ 及 $b$ 之間,常可"插入"任意若干個等差中項.

例. 在3與5之間插入四個等差中項.

所求者爲 $a=3$, $l=5$, $n=4+2$ 卽 6, 之等差級數之中間各項.

以 $l=5$, $a=3$, $n=6$ 代入 (II), 卽得
$$5=3+5d, \text{ 從而 } d=2/5.$$
故所求之等差中項爲 $3\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5}, 4\frac{1}{5}, 4\frac{3}{5}$.

## 習 題 LVII

1. 求 (1) 3, 6, 9, ……, (2) $-3, -1\frac{1}{2}, 0$, ……之第二十項及開首二十項之和.
2. 求 (1) 1, 2, 3, ……, (2) 1, 3, 5, ……, (3) 2, 4, 6, ……至 $n$ 項之和之公式.
3. 有 $6r+1$ 形式之數於此,其中 $r$ 指示 0 或正整數;求開首 $n$ 個數之和.
4. 求十項之等差級數,令其第五項爲1而第八項爲2.
5. 在 $-1$ 與 2 之間插入五個等差中項.
6. 已與 $n=16$, $a=0$, $d=4/3$; 求 $l$ 及 $S$.

7. 已與 $n=7$, $l=-7$, $d=-5/3$; 求 $a$ 及 $S$.

8. 已與 $n=12$, $a=-5/3$, $l=31\frac{1}{3}$; 求 $d$ 及 $S$.

9. 已與 $a=2$, $l=-23\frac{1}{2}$, $S=-559$; 求 $n$ 及 $d$.

10. 已與 $n=7$, $a=3/7$, $S=45$; 求 $d$ 及 $l$.

11. 已與 $a=4$, $d=1/5$, $l=9\frac{3}{5}$; 求 $n$ 及 $S$.

12. 已與 $n=9$, $d=-4$, $S=135$; 求 $a$ 及 $l$.

13. 已與 $n=10$, $l=-2$, $S=115$; 求 $a$ 及 $d$.

14. 已與 $d=5$, $l=-47$, $S=-357$; 求 $n$ 及 $a$.

15. 已與 $a=-10$, $d=7$, $S=20$; 求 $n$ 及 $l$.

16. 試證若 $a^2, b^2, c^2$, 成等差級數,則 $1/(b+c)$, $1/(c+a)$, $1/(a+b)$ 亦然.

17. 試證若 $n$ 爲奇數,任 $n$ 個連續整數之和得爲 $n$ 所整除.

18. 求一等差級數,令其首項爲1,又關首三項之和爲其次四項之和之半.

19. 三數成等差級數,其和爲15,其平方之和爲83. 求此三數.

20. 求爲9之倍數之一切三位正整數之和.

21. 一人每年儲金130圓,年利率4%,以單利計算. 11年後之儲金總額若何?

22. 甲乙二人由相距72哩之兩地同時出發,相向而行.如甲以每小時4哩之速率而行,而乙第一小時行2哩,第二小時行$2\frac{1}{2}$哩,第三小時3哩,餘依此類推,則二人何時又在何處相會?

# XXI. 等比級數

699 **等比級數** 由一與數 $a$ 累乘一與數 $r$ 而衍出之一列數,即凡數列之呈下記形式者,名曰等比級數.

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots\cdots,\ ar^{n-1}. \qquad \text{(I)}$$

$r$ 稱爲等比級數(I)之公比.等比級數之爲遞增(Increasing)或遞減(Decreasing),視 $r$ 之絕對值大於或小於1而定.

例如, 1, 2, 4, 8 及 1, −2, 4, −8 爲遞增等比級數,其公比 $r$ 各等於 2 及 −2; 又 1, 1/2, 1/4, 1/8 爲遞減等比級數,其公比 $r=1/2$.

700 **第 $n$ 項** 注意在(I)之各項中, $r$ 之指數較本項之序數少

一.故首項爲$a$公比爲$r$之$n$項等比級數,末項$l$之公式如下:

$$l=ar^{n-1}. \tag{II}$$

和　令$S$指示等比級數(I)之和. 701

則　$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$$

而　$$rS=\quad ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n.$$

由上式減下式,即得$(1-r)S=a-ar^n$.故

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}. \tag{III}$$

應用此公式於遞增等比級數時,書作下之形式較便.

$$S=a(r^n-1)/(r-1).$$

由(II)得$rl=ar^n$.故(III)又可書作:$S=(a-rl)/(1-r)$,或$S=(rl-a)/(r-1)$.

例.等比級數2, −4, 8, −16,……至八項止.求$l$及$S$.

於此　$a=2,\ r=-2$,而$n=8$.

故依(II),　$l=2(-2)^7=-256$,

又依(III),　$S=2\frac{1-(-2)^8}{1-(-2)}=-\frac{510}{3}$.

應用　等比級數之五數$a, l, r, n, S$,若任與其三,他二數即爲公式(II)及(III)所決定.且除在與數爲$a, n, S$或$l, n, S$時外,此二數得用上述之方法實地求出.若有一未知數爲$n$,則其値須用視察法求出;但與數有合理之値指定時,此事常可能,因其時$n$應爲正整數也. 702

例一.已與$r=3, n=6, S=728$;求$a$及$l$.

以所與之値代入(II)及(III),即得

$$l=a\cdot3^5=243\,a,\text{而 } 728=a\frac{3^6-1}{3-1}=364\,a.$$

解此二方程式,得　$a=2,\ l=486$.

例二.已與$a=6, n=5, l=2/27$;求$r$及$S$.

依(II),　　$2/27=6r^4$, 從而 $r^4=1/81$, 卽 $r=\pm 1/3$.

以故,依(III),若　　$r=1/3$,　則 $S=6\frac{1-(1/3)^5}{1-1/3}=\frac{242}{27}$,

若　　$r=-1/3$, 則 $S=6\frac{1-(-1/3)^5}{1-(-1/3)}=\frac{122}{27}$.

故 $a=6$, $n=5$, 而 $l=2/27$ 之等比級數有二.

例三. 已與 $a=-3$, $l=-46875$, $S=-39063$; 求 $r$ 及 $n$.

代入公式 $S=(a-rl)/(1-r)$ 中, §701, 卽得

$$-39063=\frac{-3+46875r}{1-r},\text{ 從而 } r=-5.$$

於是依(II),　　$-46875=-3(-5)^{n-1}$, 卽 $(-5)^{n-1}=15625$.

然分解 15625 之因數得 $15625=5^6=(-5)^6$.

故　　$n-1=6$, 卽 $n=7$.

例四. 已與 $a=3$, $n=5$, $S=93$; 求 $r$ 及 $l$.

依(III),　　$93=3\frac{1-r^5}{1-r}=3(1+r+r^2+r^3+r^4)$.

故　　$r^4+r^3+r^2+r-30=0$.

卽問題常涉解四次方程式;普徧言之,在與數爲 $a$, $n$, $S$ 時,欲求 $r$ 之值須解 $n-1$ 次方程式.然就本題而論,則 $r$ 有一值可用 §455 之法求出.此值爲 2.

以 $r=2$ 代入(II), 得 $l=3\cdot 2^4=48$.

703 **等比中項**　若三數成等比級數,中間之數稱爲他二數之等比中項.

**任二數 $a$ 與 $b$ 之等比中項爲其積之平方根.**

何則,若 $x$ 爲 $a$ 與 $b$ 之等比中項,則數列 $a$, $x$, $b$ 成等比級數.

故　　$x/a=b/x$, 從而 $x=\pm\sqrt{ab}$.

任何等比級數中,介乎首末二項間之各項,皆可稱爲首末兩項之等比中項.在二與數 $a$ 及 $b$ 之間,可如下例插入任意若干個等比中項.

例. 在 18 及 2/27 之間,插入四個等比中項.

所求者爲 $a=18$, $l=2/27$, $n=4+2=6$, 之等比級數之中間各項.

以與值代入(II), 卽得

$$2/27=18r^5,\text{ 從而 } r=1/3$$

故等比中項為 6, 2, 2/3, 2/9.

**無窮遞減等比級數** (Infinite decreasing geometric series) **704**

式之具下列形式而連續無限者,稱為無窮等比級數,

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots \tag{1}$$

依公式(III), (1)之開首 $n$ 項之和為 $a(1-r^n)/(1-r)$.

設數值上 $r$ 小於 1, 則當 $n$ 無限增大時, $r^n$ 趨近 0 為極限, §724, 故 $a(1-r^n)/(1-r)$ 趨近 $a/(1-r)$ 為極限.吾人稱此極限為無窮級數(1)之和.故 $S$ 若指示(1)之和,則

$$S=\frac{a}{1-r}. \tag{2}$$

例一. 求 $1+1/2+1/4+1/8+\cdots\cdots$ 之和.

於此　　$a=1$ 而 $r=1/2$.

故　　$S=1/[1-1/2]=2$.

例二. 求循環小數 0.72323……之值.

循環部分可書作 $\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\cdots\cdots$, 依(2), 此無窮級數之和為 $\frac{0.023}{1-0.01}$ 即 $\frac{23}{990}$. 再加不循環部分 0.7, 即得原數之值為 $\frac{358}{495}$.

## 習　題　LVIII

1. 求等比級數 $2, -6, 18, \cdots\cdots$ 之第五項及開首五項之和.
2. 求等比級數 $4, 6, 9, \cdots\cdots$ 之第四項及開首四項之和.
3. 求下列各無窮等比級數之和:

$$12-6+3-\cdots\cdots;\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots\cdots;\quad \frac{5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots.$$

4. 求下列各循環小數之值.

　　0.341341……, 0.0567272……, 8.45164516…….

5. 已與 $a=-0.03$, $r=10$, $n=6$; 求 $l$ 及 $S$.
6. 已與 $n=7$, $a=48$, $l=3/4$; 求 $r$ 及 $S$.
7. 已與 $a=1/16$, $r=2$, $l=8$; 求 $n$ 及 $S$.
8. 已與 $n=5$, $r=-3$, $l=81$; 求 $a$ 及 $S$.

9. 已與 $a=54$, $r=1/3$, $S=80\frac{2}{3}$; 求 $n$ 及 $l$.

10. 已與 $n=4$, $a=-3$, $S=-468$; 求 $r$ 及 $l$.

11. 已與 $a=-9/16$, $l=-16/9$, $S=-781/144$; 求 $n$ 及 $r$.

12. 已與 $n=6$, $r=-2/3$, $S=665/216$; 求 $a$ 及 $l$.

13. 已與 $r=3/2$, $l=30\frac{3}{8}$, $S=83\frac{1}{8}$; 求 $n$ 及 $a$.

14. 已與 $n=4$, $l=54/25$, $S=544/25$; 求 $a$ 及 $r$.

15. 已與 $n=5$, $l=48$, $S=93$; 求 $a$ 及 $r$.

16. 求 $a^3/b$ 及 $b^3/a$ 之正等比中項.

17. 在 5 與 405 之間插入三個等比中項.

18. 有一等比級數,第三項為 3 而第六項為 $-3/8$. 求第七項.

19. 求四項之等比級數,令其首末兩項之和為 133, 而中間兩項之和為 70.

20. 三數成等比級數,其和為 7, 其平方之和為 91. 求此三數.

21. 三數成等差級數,其和為 36. 若各加 1, 4, 43, 結果成等比級數,求此三數.

22. 有四數,前三數成等差級數而後三數成等比級數.首末兩數之和為 16, 中間兩數之和為 8. 求此四數.

23. 有一彈性球,從離地 15 尺高處下落,如每次返躍之高為下落距離之 2/3, 則在靜止以前此球應經過之距離若何?

# XXII. 調和級數

705 **調和級數** 一列之數,其倒數成等差級數者,即凡數列呈下記形式者,名曰調和級數.

$$1/a,\ 1/(a+d),\ 1/(a+2d),\ \cdots\cdots,\ 1/[a+(n-1)d].$$

例如 1, 1/2, 1/3, 1/4 及 3/2, 3/4, 3/6, 3/8 均為調和級數.

例. 若 $a, b, c$ 成調和級數,則 $a:c=a-b:b-c$, 試證之.

因 $1/a, 1/b, 1/c$ 成等差級數,故

$$1/b-1/a=1/c-1/b.$$

故 $$c(a-b)=a(b-c),\text{ 即 } a:c=a-b:b-c.$$

706 欲求調和級數之任一特殊項,祇須求對應的等差級數中

佔同一位置之項,而作其倒數卽可.

例. 求調和級數 3/5, 3/7, 3/9,……之第十項.

依 §695, 對應的等差級數 5/3, 7/3, 9/3,……之第十項爲 23/3. 故 3/5, 3/7, 3/9,……之第十項爲 3/23.

**調和中項** 若三數成調和級數,中間之數稱爲他二數之調和中項.又凡調和級數中,介乎首末二項間之各項,皆可稱爲其首末兩項之調和中項. 767

例一. 求 $a$ 與 $b$ 之調和中項.

若調和中項爲 $x$, 則 $1/a, 1/x, 1/b$ 成等差級數.

故 $$1/x-1/a=1/b-1/x, \text{ 卽 } 2/x=1/a+1/b.$$

故 $$x=2ab/(a+b).$$

例二. 試證二數 $a$ 與 $b$ 之等比中項,亦爲其等差,調和兩中項之等比中項.

令 $A, G, H$ 分別指示 $a$ 與 $b$ 之等差,等比,調和三中項.

則 $$A=\frac{a+b}{2},\ G=\sqrt{ab},\ H=\frac{2ab}{a+b}.$$

故 $$AH=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2.$$

例三. 試證 $a$ 及 $b$ 爲正數時, $A>G>H$.

$$A-H=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}.$$

以故,因 $(a-b)^2/2(a+b)$ 爲正數,故知 $A>H$.

又因,由例二, $G$ 之值介乎 $A$ 與 $H$ 之間,故知 $A>G>H$.

## 習 題 LIX

1. 試爲調和級數 3/5, 3/7, 1/3, 再續二項.
2. 求 3/4 與 5 之調和中項.
3. 在 10 與 15 之間插入四個調和中項.
4. 調和級數之第二,第四兩項爲 4/5, −4. 求第三項.
5. 二數之等差中項爲 4, 調和中項爲 15/4. 求此二數.
6. 二數之等比中項爲 4, 調和中項爲 16/5. 求此二數.
7. 試證若 $a, b, c$ 成調和級數,則 $a/(b+c), b/(c+a), c/(a+b$ 亦然.

8. 三數成調和級數.試證各數減以中項之半,其結果成等比級數.

9. 試證若$x$為$a$與$b$之調和中項,則$1/(x-a)+1/(x-b)=1/a+1/b$.

10. 三角形$ABC$之頂角$C$,其二等分線交底邊$AB$於$D$,其外角之二等分線交$AB$之延長線於$E$.試證$AD$, $AB$, $AE$成調和級數.

11. 點$P$在中心為$O$之圓外,由$P$所引之二切線與圓相切於$T$及$T'$.若直線$PO$交圓於$A$及$B$,交$TT'$於$C$,試證$PC$為$PA$與$PB$之調和中項.

# XXIII. 遞差法.高階等差級數.插值法

## 高階等差級數

708 **各階遞差** 在任與之數列中,若由各項減其前一項,即得一列之數,稱為所與數列之一階差,用同法處理此新數列,即得所與數列之二階差,餘仿此.

例如,若所與數列為$1^3, 2^3, 3^3, \cdots\cdots$,即得

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 所與數列 | 1, | 8, | 27, | 64, | 125, | 216, | ……, |
| 一階差 | 7, | 19, | 37, | 61, | 91, | ……, | |
| 二階差 | 12, | 18, | 24, | 30, | ……, | | |
| 三階差 | 6, | 6, | 6, | …… | | | |

四階差及以後各階差皆為0.

709 **$r$階等差級數** (Arithmetical progression of the rth order) 此名用於$r$階差皆相等,從而以後各階差皆為0之數列.

例如,$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \cdots\cdots$為三階等差級數,因由上節知其三階差皆相等,通常之等差級數(§694)為一階等差級數,其一階差各等於公差$d$.

710 **r階等差級數之第n項** 已與任一$r$階等差級數

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots\cdots. \qquad (1)$$

令$d_1, d_2, \cdots\cdots, d_r$指示其各階差之首項.今欲求一公式,用$a_1$, $d_1$,

$d_2,\cdots\cdots,d_r,$ 及 $n$ 以表 $a_n$.

(1) 之一階差爲

$$a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ a_4-a_3,\ \cdots\cdots,\ a_{n+1}-a_n,\ \cdots\cdots. \qquad (2)$$

(2) 之首項爲 $d_1$, 其一階, 二階, ……等遞差之首項爲 $d_2$, $d_3,\cdots\cdots$, 因 (2) 之一階差卽 (1) 之二階差也,餘仿此.

故當吾人已求出表 (1) 之任一特殊項之式時,吾人可用下法以由其衍出表 (2) 之對應項之式.

$$a_1,\ d_1,\ d_2,\ \cdots\cdots \text{代以}\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ \cdots\cdots. \qquad (3)$$

今因 $d_1=a_2-a_1$, 故 $a_2=a_1+d_1$. 由此表 $a_2$ 之公式出發,可算出 $a_3,a_4,\cdots\cdots$ 如下:

$$a_2=a_1+d_1$$

故依 (3), $\quad a_3-a_2=\quad d_1+d_2$

相加, $\quad a_3=a_1+2d_1+d_2$

故依 (3), $\quad a_4-a_3=\quad d_1+2d_2+d_3$

相加, $\quad a_4=a_1+3d_1+3d_2+d_3$

餘仿此,無終極,單就係數而論,此計算與 §.311 中用以求 $a+b$ 之各次乘冪之係數者正相同. 故依 § 561, 得下之公式.

$$a_n=a_1+(n-1)d_1$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2+\cdots\cdots+\frac{(n-1)\cdots\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}d_r. \qquad (\text{I})$$

**例.** 由此公式計算 $1^3, 2^3,\cdots\cdots$ 之第十五項.

於此, § 708, $\quad a_1=1,\ d_1=7,\ d_2=12,\ d_3=d_r=6.$

故 $\quad a_{15}=1+14\cdot 7+\frac{14\cdot 13}{2}\cdot 12+\frac{14\cdot 13\cdot 12}{2\cdot 3}\cdot 6=3375.$

**r 階等差級數開首 n 項之和**　命 $S_n$ 指示此和,數列爲 711

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots\cdots, \qquad (1)$$

而 $d_1, d_2, \cdots\cdots, d_r$ 之意義同上(§ 710).

作以(1)爲一階差之數列如下:

$$0, a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \cdots\cdots, a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n, \cdots\cdots. \qquad (2)$$

則 $S_n$ 爲(2)之第 $n+1$ 項.又因(2)爲 $r+1$ 階等差級數,其首項爲0,其各階差之首項爲 $a_1, d_1, d_2, d_3, \cdots\cdots d_r$ 依(I)得

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d_1+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots\cdots(r+1)}d_r. \qquad (\text{II})$$

例 求 $1^3, 2^3, 3^3, \cdots\cdots$ 開首十五項之和.

於此, § 708, $n=15$, $a_1=1$, $d_1=7$, $d_2=12$, $d_3=d_r=6$.

故 $$S_{15}=15+\frac{15\cdot 14}{2}\cdot 7+\frac{15\cdot 14\cdot 13}{2\cdot 3}\cdot 12+\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot 6=14400.$$

**712** 彈積 (Piles of Spherical Shot). 1. 彈積之形爲三角錐狀時,求彈丸之數.

最上層有1個彈丸,第二層有1+2個彈丸,第三層有1+2+3個彈丸,餘仿此.

故若有 $n$ 層,彈丸之數爲數列 $1, 3, 6, 10, 15, \cdots\cdots$ 之 $n$ 項之和.

此數列之一階差爲 $2, 3, 4, 5, \cdots\cdots$, 二階差爲 $1, 1, 1, \cdots\cdots$.

故 $1, 3, 6, \cdots\cdots$ 爲二階等差級數, 而 $a_1=1$, $d_1=2$, $d_2=1$.

故依(II), $$S_n=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

例如,在二十層之彈積中,有彈丸 $20\cdot 21\cdot 22/6=1540$ 個.

2. 彈積之形爲有正方底面之角錐時,求彈丸之數.

列舉各層彈丸之數如上,得數列 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots\cdots$.

一階差爲 $3, 5, 7, \cdots\cdots$; 二階差爲 $2, 2, \cdots\cdots$.

故 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots\cdots$ 爲二階等差級數, 而 $a_1=1$, $d_1=3$, $d_2=2$.

故依(II), $$S_n=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 3+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

例如，$n=20$ 時，彈積有 $20\cdot21\cdot41/6=2870$ 個彈丸.

3. 彈積之底面為矩形，而最上層祇有一列彈丸共 $p$ 個時，求彈丸之數.

列舉各層彈丸之數，得數列 $p,\ 2(p+1),\ 3(p+2),\ 4(p+3),\cdots\cdots$.

一階差為 $p+2,\ p+4,\ p+6,\cdots\cdots$；二階差為 $2,\ 2,\cdots\cdots$.

故 $p,\ 2(p+1),\ 3(p+2),\cdots\cdots$ 為二階等差級數，而 $a_1=p,\ d_1=p+2,\ d_2=2$.

故依 (II)，
$$S_n=np+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(p+2)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot2$$
$$=\frac{n(n+1)(3p+2n-2)}{1\cdot2\cdot3}.$$

例如，$n=20$ 而 $p=5$ 時，彈丸之數為 $20\cdot21\cdot53/6=3710$.

**關於等差級數之一定理**　試一察 $r$ 階等差級數第 $n$ 項之公式，§ 710，(I)，易知若完成所示乘法，而將結果依 $n$ 之降冪排列，可化之成下之形式. 713

$$a_n=b_0n^r+b_1n^{r-1}+\cdots\cdots+b_r.$$

其中係數 $b_0,b_1,\cdots\cdots,b_r$ 均不含 $n$.

例如，$r=2$ 時，
$$a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}d_2$$
$$=\frac{d_2}{2}n^2+\left(d_1-\frac{3}{2}d_2\right)n+(a_1-d_1+d_2).$$

故一 $r$ 階等差級數之諸項，$a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots$，乃關於 $n$ 為 $r$ 次之多項式 $b_0n^r+b_1n^{r-1}+\cdots\cdots+b_r$ 在 $n=1,2,3,\cdots\cdots$ 時之值.今將進而證明其逆定理.

**定理**　設 $\phi(x)$ 指示任一 $r$ 次有理整函數，例如 714

$$\phi(x)=b_0x^r+b_1x^{r-1}+\cdots\cdots+b_r,$$

則於 $\phi(x)$ 中依次置 $x=1,2,3,\cdots\cdots$，所得之數列 $\phi(1),\phi(2),\phi(3),\cdots\cdots$，為 $r$ 階等差級數.

於此所與之數列為

$$\phi(1),\ \phi(2),\ \phi(3),\ \phi(4),\cdots\cdots, \tag{1}$$

而須證明者爲其 $r$ 階差皆相等.

顯而易見 (1) 之一階差,即

$$\phi(2)-\phi(1),\ \phi(3)-\phi(2),\ \phi(4)-\phi(3),\ \cdots\cdots, \tag{2}$$

爲 $\phi(x+1)-\phi(x)$ 在 $x=1,2,3,\cdots\cdots$ 時之值.

然 $\phi(x+1)-\phi(x)$ 得化其形爲 $x$ 之多項式. 命此多項式爲 $\phi_1(x)$, 其次數爲 $r-1$.

何則,由二項定理, § 561, 卽得

$$\begin{aligned}\phi(x+1)-\phi(x)&=b_0(x+1)^r+b_1(x+1)^{r-1}+\cdots\cdots-(b_0x^r+b_1x^{r-1}+\cdots\cdots)\\&=b_0x^r+rb_0x^{r-1}+\cdots\cdots+b_1x^{r-1}+\cdots\cdots-(b_0x^r+b_1x^{r-1}+\cdots\cdots)\\&=rb_0x^{r-1}+\cdots\cdots\end{aligned}$$

同理,若書作

$$\phi_1(x+1)-\phi_1(x)=\phi_2(x),\ \ \phi_2(x+1)-\phi_2(x)=\phi_3(x),$$

餘仿此,則 $\phi_2(x), \phi_3(x),\cdots\cdots,\phi_r(x)$ 在 $x=1,2,3,\cdots\cdots$ 時之值,卽爲 (1) 之二階,三階,$\cdots\cdots$, $r$ 階差.

然 $\phi_r(x)$ 爲常數,故 (1) 之 $r$ 階差皆相等,何則,因 $\phi_2(x)$ 之次數爲 $(r-1)-1$, 卽 $r-2$; $\phi_3(x)$ 之次數爲 $r-3$; 最後, $\phi_r(x)$ 之次數爲 $r-r$, 卽 0, 故也.

例如,若 $\phi(x)=2x^3-x+1$, 則

$$\phi_1(x)=2(x+1)^3-(x+1)+1-(2x^3-x+1)=6x^2+6x+1.$$

$$\phi_2(x)=6(x+1)^2+6(x+1)+1-(6x^2+6x+1)=12x+12,$$

$$\phi_3(x)=12(x+1)+12-(12x+12)=12.$$

故 $6x^2+6x+1$, $12x+12$, $12$ 在 $x=1,2,3,\cdots\cdots$ 時之值,爲 $2x^3-x+1$ 之對應值之一階,二階,三階差;而此第三階差皆相等,皆爲 12.

例如,在 $x=1,2,3,4,5,\cdots\cdots$ 時,

$$2x^3-x+1=2,\quad 15,\quad 52,\quad 125,\quad 246,\quad \cdots\cdots, \tag{1}$$

$$6x^2+6x+1=13,\quad 37,\quad 73,\quad 121,\quad 181,\quad \cdots\cdots, \tag{2}$$

$$12x+12=24,\quad 36,\quad 48,\quad 60,\quad 72,\quad \cdots\cdots, \tag{3}$$

$$12=12,\quad 12,\quad 12,\quad 12,\quad 12,\quad \cdots\cdots, \tag{4}$$

比較 (1), (2), (3), (4) 知 (2), (3), (4) 確係 (1) 之一階, 二階, 三階差, 此爲必然之事.

**系一**　連積整數之 $r$ 次乘冪成 $r$ 階等差級數.　**715**

因 $1^r, 2^r, 3^r, \cdots\cdots$ 即 $r$ 次有理整函數 $\phi(x)=x^r$ 在 $x=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 時之值故也.

**系二**　一爲 $r$ 階而一爲 $s$ 階之二等差級數, 其對應項之積成 $(r+s)$ 階等差級數.　**716**

因 $r$ 次及 $s$ 次兩有理整函數之積, 爲 $(r+s)$ 次之有理整函數故也.

## 習　題　LX

1. 求數列 $1, 2, 4, 7, \cdots\cdots$ 之第二十項及開首二十項之和.

2. 求數列 $3, 8, 15, 24, 35, \cdots\cdots$ 之第八十項及其開首八十項之和.

3. 下列等差級數各屬於何階?試決定之.

(1) $3, 0, -1, 0, 3, \cdots\cdots,$　　(2) $10, 38, 88, 166, 278, 430, \cdots\cdots,$

(3) $285, 204, 140, 91, 55, \cdots\cdots,$　　(4) $2, 20, 90, 272, 650, 1332, \cdots\cdots,$

並求 (1) 之第十八項, (2) 之第二十項, (3) 之第十二項, 及 (4) 之第十項.

4. $1\cdot2\cdot3, 2\cdot3\cdot4, 3\cdot4\cdot5, \cdots\cdots$ 屬於何階?其第 $n$ 項若何?開首 $n$ 項之和若何? $1\cdot4\cdot2^2, 2\cdot6\cdot3^2, 3\cdot8\cdot4^2, \cdots\cdots$ 屬於何階?其第 $n$ 項若何?

5. 求十四層之三角錐狀彈積中彈丸之數.最下層有彈丸幾個?

6. 若由十五層之正方形彈積撤去六層, 尙餘彈丸幾何?

7. 最上層有 5 個彈丸之十二層矩形彈積, 共有彈丸幾個?

8. 最下層有彈丸 253 個之三角錐狀彈積, 共有彈丸幾個?

9. 三角錐狀彈積與正方形彈積層數相同, 而前者彈丸之數爲後者彈丸之數之 $\frac{3}{5}$. 各有彈丸幾個?

10. 最上層有 9 個而最下層有 240 個之矩形彈積, 共有彈丸幾個?

11. 試證 $1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+\cdots\cdots+n)^2$.

12. 試證 $1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4=\dfrac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

13. 第 $n$ 項爲 (1) $n^2-n+1$, (2) $n(n+1)(n+2)/6$ 之級數屬於何階?其開首 $n$ 項之和若何?

14. 若將 $d=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 之各個一階等差級數書出, 再求各個級數之一項, 二項, 三項, 四項, $\cdots\cdots$ 之和, 即得

$$1, 3, 6, 10, \cdots\cdots;\ 1, 4, 9, 16, \cdots\cdots;\ 1, 5, 12, 22\cdots\cdots;\ \cdots\cdots$$

諸數列,分別稱之爲三角數,四角數,五角數,……

試證此諸數列中之第$k$個,其第$n$項及開首$n$項之和.各爲$n(kn-k+2)/2$及$n(n+1)(kn-k+3)/6$.

15. 屬於任何階之等差級數,其各項加以他一低階等差級數之對應項時,結果仍屬原階.證之. 設 $f(x)$, $F(x)$

16. $n$次多項式,$f(x)$,中若以一階等差級數之各項依次代$x$,即得$n$階等差級數;普偏言之,若以$r$階等差級數之各項依次代$x$,即得$nr$階等差級數.試證之.

# 插值法

717 **插值法 (Interpolation)** 設$y$因$x$而定,對於$x$在$a$與$b$間之每一值,$y$有一個定值.又設$y$之諸值對應於此種$x$值中之某值者,確屬已知.於是由此諸已知值,應用稱爲插值法之方法,得衍出$y$之各值對應於$x$在$a$與$b$間之他值者.

不知以$x$表$y$之公式時,或雖知之而其式過於複雜,用以計算$y$之特殊值仍不便利時,即可應用此方法.

簡言之,方法如次:將$y$等置於$x$之最簡整式,此式須能取所與之值者,然後由此方程式衍出所求之$y$之值.如此求得之值,通常當然僅爲近似值而已.

718 **待定係數法** 其法如下例所示.

例. 對於$x=2, 3, 4, 5$,已知$y=5, 4, -7, -34$.求$x=5/2$時$y$若何.

因$x$之最簡多項式,對於$x$之四與值能取定值者,通常爲三次,可假定

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3,$$

然後求其係數$b_0, b_1, b_2, b_3$如下.

| | |
|---|---|
| 因$x=2$時$y=5$, | $5=b_0+2b_1+4b_2+8b_3$. |
| 因$x=3$時$y=4$, | $4=b_0+3b_1+9b_2+27b_3$. |
| 因$x=4$時$y=-7$, | $-7=b_0+4b_1+16b_2+64b_3$. |
| 因$x=5$時$y=-34$, | $-34=b_0+5b_1+25b_2+125b_3$. |

解以上方程式, $b_0=1$, $b_1=-2$, $b_2=4$, $b_3=-1$.

故 $$y=1-2x+4x^2-x^3.$$

故 $x=5/2$ 時, $$y=1-5+25-125/8=43/8.$$

普徧言之, 若 $y$ 有 $r+1$ 值已知, 設為 $y=y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{r+1}$, 各分別與 $x=x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{r+1}$ 對應, 則可假定

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots+b_rx^r, \tag{1}$$

用以上所說明之方法求 $b_0, b_1, \cdots\cdots, b_r$, 然後用 (1) 為公式, 以計算 $y$ 之值對應於 $x$ 介乎 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{r+1}$ 間之各值者.

**遞差法** (Method of differences). 當 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{r+1}$ 為連續 **719**
整數時, §718 之公式 (1), 得化為下之形式:

$$y=y_1+(x-x_1)d_1+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{1\cdot 2}d_2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_r)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}d_r \tag{1}$$

其中 $d_1, d_2, \cdots\cdots, d_r$ 指示 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{r+1}$ 之依次各階差之首項.

何則, 因 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{r+1}$ 為連續整數, $b_0+b_1x+\cdots\cdots+b_rx^r$ 之對應值, 卽 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{r+1}$, 成 $r$ 階等差級數, §714. 故以 $n=1, 2, \cdots\cdots$ 代入 §710 之公式 (1), 卽

$$y=y_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2+\cdots\cdots+\frac{(n-1)\cdots\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}d_r$$

中, 亦可將 $y_1, y_2, \cdots\cdots$ 求出.

然在此公式中置 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$, 與在 (2) 中置 $x=x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots=x_1, x_1+1, x_1+2, \cdots\cdots$, 結果完全相同.

故 (2) 之右端與 (1) 之右端 (§718) 對於 $r+1$ 個 $x$ 值有等值; 然二者皆為 $r$ 次. 故二者恆等, §421.

例如, 於 §718, 對於 $x=2, 3, 4, 5$, 令 $y=5, 4, -7, -34$, 卽得

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y_1, y_2, y_3, y_4=$ | 5, | 4, | $-7$, | $-34$. |
| 一階差 | $-1$, | $-11$, | $-27$. | |
| 二階差 | $-10$, | $-16$. | | |
| 三階差 | $-6$. | | | |

以 $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$, $y_1=5$, $d_1=-1$, $d_2=-10$, $d_3=-6$ 代入 (2), 卽得 $y=5-(x-2)-5(x-2)(x-3)-(x-2)(x-3)(x-4)$, 可化爲 $y=1-2x+4x^2-x^3$, 如於 § 718.

例. 已與 $\sqrt[3]{30}=3.1072$, $\sqrt[3]{31}=3.1414$, $\sqrt[3]{32}=3.1748$, $\sqrt[3]{33}=3.2075$; 求 $\sqrt[3]{31.6}$.

| | |
|---|---|
| $y_1, y_2, y_3, y_4=$ | 3.1072, 3.1414, 3.1748, 3.2075. |
| 一階差 | 0.0342, 0.0334, 0.0327. |
| 二階差 | −0.0008, −0.0007. |
| 三階差 | −0.0001. |

以 $x_1=30$, $x_2=31$, $x_3=32$, $y_1=3.1072$, $d_1=0.0342$, $d_2=-0.0008$, $d_3=0.0001$, 及 $x=31.6$ 代入 (2), 卽得

$$3.1072+(1.6)(0.0342)+\frac{(1.6)(0.6)}{2}(-0.0008)+\frac{(1.6)(0.6)(-0.4)}{2.3}(-0.0001)$$
$$=3.1072+0.05472-0.000384+0.0000064=3.1615+.$$

720 拉格郎奇公式 (Lagrange's formula). 由於拉格郎奇氏之發見, § 718 之公式 (1) 又可化爲下之形式:

$$y=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_{r+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots\cdots(x_1-x_{r+1})}$$
$$+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_{r+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots\cdots(x_2-x_{r+1})}$$
$$+\cdots\cdots+y_{r+1}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_r)}{(x_{r+1}-x_1)(x_{r+1}-x_2)\cdots\cdots(x_{r+1}-x_r)}. \qquad (3)$$

何則, (3) 之右端爲 $x$ 之 $r$ 次整函數, 其對於 $x=x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{r+1}$ 之值爲 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{r+1}$. 例如, 若置 $x=x_1$, 其首項變爲 $y_1$ 而其餘各項皆變爲 0. 故 (3) 之右端與 (1) 之右端 (§ 718) 對於 $r+1$ 個 $x$ 值有等值. 故二者恆等, § 421.

例如, 於 § 718. 對於 $x=2, 3, 4, 5$, 令 $y=5, 4, -7, -34$, 代入 (3), 卽得

$$y=5\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)}$$
$$+4\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-2)(3-4)(3-5)}-7\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)}-34\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)}.$$

此式可化爲 $y=1-2x+4x^2-x^3$, 如 § 718.

## 習 題 LXI

1. 對於 $x=-3, -2, -1, 0$, 已知 $y=-20, 6, 0, 4$. 求 $x=-5/2$ 時及 $x=-1/2$ 時 $y$ 若何.

2. 已與 $f(4)=10, f(6)=-12, f(7)=-20, f(8)=-18$; 試求 $f(x)$ 而藉以計算 $f(12)$.

√3. 已與 $25^2=625$, $26^2=676$, $27^2=729$; 用遞差法求 $26.54^2$.

√4. 已與 $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$; 用遞差法求 $4.8^3$.

5. 已與 $1/22=0.04546$, $1/23=0.04348$, $1/24=0.04167$, $1/25=.04$; 用遞差法求 $1/23.6$.

6. 已與 $\sqrt{432}=20.7846$, $\sqrt{433}=20.8087$, $\sqrt{434}=20.8327$, $\sqrt{435}=20.8567$, $\sqrt{436}=20.8806$; 用遞差法求 $\sqrt{435.7}$.

√7. 藉助於拉格耶奇公式,求三次多項式,已知其對於 $x=-2, 0, 4, 5$ 之值爲 $5, 3, -2, -4$.

# XXIV. 對 數

## 關於指數之預備定理

**定理一** $a$ 若指示大於 1 之任一實數,而 $p, q$ 爲正整數,則 $a^{\frac{p}{q}}>1$. 721

何則, $a>1$, $\therefore a^p>1$, $\therefore \sqrt[q]{a^p}>1$, $\therefore a^{\frac{p}{q}}>1$, § 261.

**定理二** $a$ 若指示大於1之任一實數,而 $r, s$ 爲 $r>s$ 之任二有理數,則 $a^r>a^s$. 722

何則, $r-s>0$, $\therefore a^{r-s}>1$, $\therefore a^{r-s}\cdot a^s>a^s$, $\therefore a^r>a^s$, §§ 721, 261.

**定理三** 若 $a>1$ 而 $n$ 常取整數值,則 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=\infty$. 723

何則,因 $a>1$, 可書作 $a=1+d$, 其中 $d$ 爲正數.

則 $a^n=(1+d)^n$, 又因 $(1+d)^n>1+nd$, § 561, 故得 $a^n>1+nd$.

因 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+nd)=\infty$，故得 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\infty$.

724 **定理四** 若 $0<a<1$，而 $n$ 常取整數值，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$.

何則，令 $a=1/b$，其中 $b>1$，以 $a<1$ 故也.

則因 $\lim\limits_{n\to\infty}b^n=\infty$，§ 723，是以 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=1/\lim\limits_{n\to\infty}b^n=0$，§ 512.

725 **定理五** 若 $n$ 常取整數值，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

1. $a>1$ 時，$a^{\frac{1}{n}}>1$，§ 721，因而 $a^{\frac{1}{n}}=1+d_n$，其中 $d_n$ 爲一正數，其值因 $n$ 而定.

於是 $a=(1+d_n)^n$，$\therefore a>1+nd_n$，$\therefore d_n<(a-1)/n$.

以故，因 $\lim\limits_{n\to\infty}(a-1)/n=0$，§ 512，得 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+d_n)=1$.

2. $0<a<1$ 時，令 $a=1/b$，其中 $b>1$，因 $a<1$ 故也.

於是依 1，$\lim\limits_{n\to\infty}b^{\frac{1}{n}}=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1/\lim\limits_{n\to\infty}b^{\frac{1}{n}}=1$.

726 **定理六** 若 $b$ 爲有理數，$x$ 爲經歷有理數值以趨近 $b$ 之變數，則 $\lim\limits_{x\to b}a^x=a^b$.

1. $x$ 之極限 $b$ 爲 0 時，此定理爲眞.

何則，在此情形可選定一祇取整數值之變數 $n$，俾常能有 $-1/n<x<1/n$ 且 $x\to0$ 時 $n=\infty$.

則 $a^x$ 常在 $a^{\frac{1}{n}}$ 與 $a^{-\frac{1}{n}}$ 之間，§ 722. 然 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{-\frac{1}{n}}=1$，§ 725，故 $\lim\limits_{x\to0}a^x=1=a^0$.

2. $b\neq0$ 時，此定理爲眞.

何則，因 $a^x=a^b\cdot a^{x-b}$，依 1，$\lim\limits_{x\to b}a^x=a^b\cdot\lim\limits_{x\to b}a^{x-b}=a^b$.

727 **定理七** 若 $b$ 爲無理數，$x$ 爲經歷有理數值以趨近 $b$ 之變數，則 $x\to b$ 時 $a^x$ 趨近一極限，且此極限之值與 $x$ 趨近 $b$ 時所取之值無關.

無論 $a>1$ 抑 $a<1$，推理皆同. 但爲使意義明確起見，可假定 $a>1$.

有理數值之列 $x$ 可經歷之以趨近 $b$ 爲極限者，爲數無窮. 在其中選一遞增數列，當 $x$ 假定爲循此數列而遞變時，以 $x'$ 表之. 則 $x'\to b$ 時，變數 $a^{x'}$ 繼續增大，§ 722，然常取有窮值——例如，若 $c$ 指示大於 $b$ 之任一有理數，則其

值較 $a^c$ 爲小. 故 $a^{x'}$ 趨近一極限, § 192, 命此極限爲 $L$.

今須證除 $x'$ 所經歷者外, $x$ 經歷他一有理數值之列以趨近 $b$ 時, $a^x$ 趨近此同一極限 $L$. 然 $a^x=a^{x'}\cdot a^{x-x'}$, 而 $\lim x^{x-x'}=1$, § 726. 故 $\lim a^x=\lim a^{x'}\cdot\lim a^{x-x'}=L$.

**無理指數**　使 $x$ 經歷任何有理數值之列以趨近 $b$ 時 $a^x$ 所趨近之極限, 吾人以符號 $a^b$ 表之. 故 $b$ 爲無理數時, $a^b$ 爲 $\lim\limits_{x\to b} a^x$ 之意. 728

$x$ 爲無理數時, $a^x$ 之意義既定之如此, 則 $x$ 經歷無理數值之列以趨近 $b$ 時, $\lim\limits_{x\to b} a^x=a^b$ 即易證明. 729

何則, 令 $x', x, x''$ 指示三變數, 皆各趨近 $b$ 爲極限, $x'$ 及 $x''$ 經歷有理數值之列, 而 $x$ 經歷無理數值之列, 且 $x'<x<x''$. 則由 §§ 726, 727, $a^x$ 之值在 $a^{x'}$ 與 $a^{x''}$ 之間, 且因 $\lim\limits_{x'\to b} a^{x'}=\lim\limits_{x''\to b} a^{x''}=a^b$, 故 $\lim\limits_{x\to b} a^x=a^b$.

**定理八**　指數律對於無理指數仍爲有效. 730

何則, 令 $b$ 及 $c$ 指示無理數, 而 $x$ 及 $y$ 爲各趨近 $b$ 及 $c$ 爲極限之變數. 又設 $x$ 及 $y$ 祇取有理數值.

1. $a^b\cdot a^c=a^{b+c}$.

何則; 因 $a^xa^y=a^{x+y}$, $\lim a^xa^y=\lim a^{x+y}$.

然　$\lim a^xa^y=\lim a^x\cdot\lim a^y=a^ba^c$,　§§ 203, 728

$\lim a^{x+y}=a^{\lim(x+y)}\quad=a^{b+c}$.　§§ 203, 728

2. $(a^b)^c=a^{bc}$.

何則,　$(a^x)^y=a^{xy}$.

故　$\lim\limits_{x\to b}(a^x)^y=\lim\limits_{x\to b} a^{xy}$, 卽 $(a^b)^y=a^{by}$.　§ 728

故　$\lim\limits_{y\to c}(a^b)^y=\lim\limits_{y\to c} a^{by}$, 卽 $(a^b)^c=a^{bc}$.　§§ 728, 729

3. $(ab)^c=a^cb^c$.

何則,　$(ab)^y=a^yb^y$.

故　$\lim(ab)^y=\lim a^yb^y=\lim a^y\cdot\lim b^y$.　§ 203

卽　$(ab)^c=a^cb^c$.　§ 728

## 對數. 對數之普徧性質

731 **對數** 取1以外之任一正數$a$爲底數即標準數.凡$a$之實數冪,如$a^{\mu}$,皆指示一定正數,如$m$,前已證明.而其逆亦眞,凡正數,$m$,皆可以$a^{\mu}$之形式表之,其中$\mu$爲實數,將於後節證之.

732 若$a^{\mu}=m$,則稱$\mu$爲以$a$爲底$m$之對數,以符號$\log_a m$表之.故以$a$爲底$m$之對數,即將$a$昇高以等於$m$所達之冪指數,亦即$a^{\log_a m}=m$.

例如, $3^4=81$, $\therefore 4=\log_3 81$; $2^{-3}=1/8$, $\therefore -3=\log_2 1/8$.

733 因$a^0=1$,故$\log_a 1=0$常眞;又因$a^1=a$,故$\log_a a=1$常眞.

734 $a>1$時,依§722,由$a^{\mu}=m$,可知凡$m$之値有增加時,其對數$\mu$之値亦必有增加與之對應,又$m$若大於1,其對數$\mu$爲正數,$m$若在1與0之間,其對數$\mu$爲負數.

735 又,$a>1$時,由§723,

$$\lim_{\mu\to\infty} a^{\mu}=\infty,\text{ 而 }\lim_{\mu\to\infty} a^{-\mu}=\lim_{\mu\to\infty} 1/a^{\mu}=0.$$

故謂,$a>1$時,$\log_a\infty=\infty$,而$\log_a 0=-\infty$.

736 **定理一** 凡積以任何數爲底之對數,等於各因數以同數爲底之對數之和.

何則,令 $$m=a^{\mu},\text{ 即 }\mu=\log_a m,$$
而 $$n=a^{\nu},\text{ 即 }\nu=\log_a n.$$
則 $$mn=a^{\mu}a^{\nu}=a^{\mu+\nu},$$
即 $$\log_a mn=\mu+\nu=\log_a m+\log_a n.$$

737 **定理二** 商之對數,等於被除數之對數減除數之對數.

何則,若 $$m=a^{\mu}\text{ 而 }n=a^{\nu},$$
則 $$m/n=a^{\mu}/a^{\nu}=a^{\mu-\nu},$$
即 $$\log_a m/n=\mu-\nu=\log_a m-\log_a n.$$

**定理三**　一數之任何羃之對數,等於此數之對數乘以羃指數.　738

何則,若　$m=a^{\mu}$,

則　$m^r=(a^{\mu})^r=a^{\mu r}$,

即　$\log_a m^r=r\mu=r\log_a m$.

**定理四**　一數之任何根之對數,等於此數之對數除以根指數.　739

何則,若　$m=a^{\mu}$,

則　$\sqrt[s]{m}=\sqrt[s]{a^{\mu}}=a^{\frac{\mu}{s}}$,

即　$\log_a\sqrt[s]{m}=\mu/s=(\log_a m)/s$

對數所以有實用之故,即由於 §§ 736—739 所列舉之性質.將諸數以10爲底之對數算出,排列成表.利用此表,積之値可由加法得出,商之値可由減法得出,羃之値可由乘法得出,而根之値可由除法得出.　740

例如,

$$\log\frac{\sqrt[7]{5}\sqrt[8]{6}}{3^{25}}=\log\sqrt[7]{5}+\log\sqrt[8]{6}-\log 3^{25} \qquad §§\ 736,\ 737$$

$$=(\log 5)/7+(\log 6)/8-25\log 3. \qquad §§\ 738,\ 739$$

故欲求 $\sqrt[7]{5}\sqrt[8]{6}/3^{25}$ 之値,祇須在表中查出 $\log 5$, $\log 6$, 及 $\log 3$ 之値,再算出 $(\log 5)/7+(\log 6)/8-25\log 3$ 之値,最後在表中查出以此値爲對數之數即可.

## 習　題　LXII

1. 求 $\log_2 4$, $\log_4 2$, $\log_{\sqrt{2}} 8$, $\log_5 625$, $\log_3 729$, $\log_{10} 0.001$, $\log_2 1/64$, $\log_2 0.125$, $\log_a \sqrt[5]{a^{-2}}$, $\log_8 128$, $\log_{a^2} a^3$.

2. 若 $\log_{10} 2=0.3010$ 而 $\log_{10} 3=0.4771$, 求 12, 9/2, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$ 以 10 爲底之對數.

3. 將 $\log_a 600^{\frac{1}{5}}$ 以 $\log_a 2$, $\log_a 3$, 及 $\log_a 5$ 表之.

4. 將下列各式對於底 $a$ 之對數, 以 $\log_a b$, $\log_a c$, $\log_a d$ 表之.

(1) $b^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{1}{2}}/d^{\frac{1}{5}}$.　　(2) $\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt{b^6}}\div\sqrt{b^5\sqrt{a^{-3}}}$.

5. 試證 $\log_3\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\cdot 9^{-\frac{1}{3}}}}=31/18$.

6. 試證 $\log_a\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=2\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$.

## 常用對數

741 常用對數之計算　爲數值上之計算起見，吾人採用以10爲底之對數．此種對數稱爲常用對數．以後凡 $\log m$ 皆爲 $\log_{10}m$ 之意．

742 因 $10^0=1$, $\therefore \log 1=0$;　$10^1=10$, $\therefore \log 10=1$;

$10^2=100$, $\therefore \log 100=2$, ……; $10^{-1}=0.1$, $\therefore \log 0.1=-1$;

$10^{-2}=0.01$. $\therefore \log 0.01=-2$;　…………，　…………．

於是以整數爲其常用對數之數，得表如下：

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 數 | …… | 0.001, | 0.01, | 0.1, | 1, | 10, | 100, | 1000, | ……, |
| 其對數 | …… | −3, | −2, | −1, | 0, | 1, | 2, | 3, | ……. |

應注意者，在上表中，諸數構成一公比爲10之等比級數，而其對數則構成一公差爲1之等差級數．

743 上表中之數，僅爲有理數之常用對數爲有理數者，因凡10之分數乘冪皆爲無理數也．然各正數皆有常用對數，且吾人能求此對數之值準至若干位小數，位數之多如吾人意之所欲，此事吾人卽將證明之．

先求10之平方根，再求所得結果之平方根，準此進行，每次算至第五位小數爲止，卽得下表：

$$10^{\frac{1}{2}}=3.16228,\quad 10^{\frac{1}{32}}=1.07461,\quad 10^{\frac{1}{512}}=1.00451,$$

$$10^{\frac{1}{4}}=1.77828,\quad 10^{\frac{1}{64}}=1.03663,\quad 10^{\frac{1}{1024}}=1.00225,$$

$$10^{\frac{1}{8}}=1.33352,\quad 10^{\frac{1}{128}}=1.01815,\quad 10^{\frac{1}{2048}}=1.00112,$$

$$10^{\frac{1}{16}}=1.15478,\quad 10^{\frac{1}{256}}=1.00904,\quad 10^{\frac{1}{4096}}=1.00056,$$

等.如繼續進行,則所得之結果趨近 1 為極限,(比較 § 725).左方之指數1/2,1/4,……,即右方對應數之對數.

藉助於此表,凡數在 1 與10之間者,皆可用下例之法計算其常用對數. 744

例. 求4.26之常用對數.

以表中次一較小於4.26之數 3.16228 除4.26.

商為1.34719.故 $4.26=3.16228\times1.34719$.

以表中次一較小於1.34719之數1.33352除1.34719.

商為1.0102.故 $4.26=3.16228\times1.33352\times1.0102$.

仿此進行,每得一商,即以表中次一較小於此商之數除之.

若 $q_n$ 指示第 $n$ 次除得之商,則4.26可以自表中所採 $n$ 個數與 $q_n$ 之積表之,結果為

$$4.26=3.16228\times1.33352\times1.00904\times\cdots\cdots\times q_n$$
$$=10^{\frac{1}{2}}\cdot10^{\frac{1}{8}}\cdot10^{\frac{1}{256}}\cdots\cdots q_n=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}+\cdots\cdots\text{達 }n\text{ 項}}q_n$$

當 $n$ 增大時,指數 $1/2+1/8+1/256+\cdots\cdots$ 達 $n$ 項亦增大.然此式常小於1,因其常為無窮級數 $1/2+1/4+1/8+\cdots\cdots$ 之一部分,而後者之和則為1也, § 704.例一.故此式趨近一極限,其值為一小於1之數, § 192.此極限可以 $1/2+1/8+1/256+\cdots\cdots$ 表之.

又,當 $n$ 增大時, $q_n$ 趨近1為極限.因各商之值,皆在除得此商之除數與1之間,而如是繼續進行時,除數趨近1為極限也.

故 $4.26=\lim\limits_{n\to\infty}10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}+\cdots\cdots\text{達 }n\text{ 項}}q_n=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}+\cdots\cdots}$,因此,得 $\log 4.26=1/2+1/8+1/256+\cdots\cdots=0.6294\cdots\cdots$.

一切其他正數之常用對數,可由在1與10間之數之常用對數,加以正整數或負整數而得. 745

例. 求42.6及0.426之常用對數.

1. $$42.6=10\times4.26.$$

故 $$\log 42.6=\log 10+\log 4.26=1+\log 4.26=1.6294.$$

2. 又，$0.426=4.26/10=10^{-1}\times 4.26$.

故 $\log 0.426=\log 10^{-1}+\log 4.26=-1+\log 4.26=\bar{1}.6294$.

同理，$\log 426=2.6294$, $\log 0.0426=\bar{2}.6294$，餘準此；即凡數之數字列與 4.26 相同者，其對數皆可由 $\log 4.26$ 加一正整數或負整數而得.

746 **首數及尾數** 於上例所示之對數,其小數部分謂之尾數，而整數部分謂之首數.

例如，$\log 42.6=1.6294$ 及 $\log 0.426=\bar{1}.6294$ 有同一尾數 0.6294，而二者之首數各爲 1 及 $-1$.

747 若 $n$ 爲以整數或小數表示之正數，則 $\log n$ 之尾數全因 $n$ 中之數字列而定，而其首數則因 $n$ 中小數點之位置而定，已於 §745 明釋之矣.

748 若 $n$ 在 1 與 10 之間，即 $n$ 之整數部分若祇有一位數字，$\log n$ 之首數爲 0, §744. 若將類此之數 $n$ 之小數點向右移過一位，即，$n$ 若乘以 10，則 $\log n$ 之首數原爲 0 者即增 1. 同理，若將小數點向右移過二位，$\log n$ 之首數即增 2. 餘準此，§745. 故有下之法則：

若 $n>1$，則 $\log n$ 之首數較 $n$ 之整數部分之位數少一.

例如，$\log 426000=5.6294$, $\log 42600000=7.6294$，餘準此

749 同理，整數部分祇有一位數字之數 $n$，若將小數點向左移過 $\mu$ 位，即，$n$ 若乘以 $10^{-\mu}$，則 $\log n$ 之首數原爲 0 者即增 $-\mu$. 例如，$\log 0.426=-1+\log 4.26=\bar{1}.6294$, $\log 0.0426=\bar{2}.6294$，餘準此，§745.

實際上將 $\bar{1}, \bar{2}, \ldots\ldots$ 等負首數書作 $9-10, 8-10, \ldots\ldots$ 之形式，置 $9, 8, \ldots\ldots$ 等正數部分於尾數之前，而書 $-10$ 於其後，較爲

便利.例如,$\bar{1}.6294$可書作$9.6294-10$.故有下之法則:

若$n<1$,則$\log n$之首數爲負數.如欲求之,可將$n$中緊接於小數點右之0之個數,由9減之,書其結果於尾數之前,而書$-10$於其後.

例如,$\log 0.00426=7.6294-10$, $\log 0.000000426=3.6294-10$.

若緊接於小數點右之0,爲數較九多而較十九少,可由19減其數,書其結果於尾數之前,而書$-20$於其後;餘準此.

例. 已與$\log 2=0.3010$,求$2^{25}$中共有幾位數字.

**對數表**　第345,346頁所載之表,含有一切三位數之對數之尾數,計算至小數第四位者,按其大小,分列連載,惟尾數前之小數點則從略. 750

藉下述原理之助,對於三位以上之數,亦可由此表衍出尾數.

一數所蒙之變化,與此數之本身相較,爲最極小時,則其對數之變化殆與所蒙之變化成比例.

用此表所求得數值上之結果,在四位數字以外卽不能信爲正確.欲得更精密之結果,須求表載尾數在四位小數以上者用之.五位,六位,七位,之對數表,在學者當不難獲得之也.

**由此表求一數之對數**　可仿下例進行. 751

**例一.** 求0.00589之對數.

先將首二位有效數字,58,在對數表之$N$行中查出,然後自58向右沿其所在之列至頂上標明第三位數字,9,之行而止.卽得7701.此(附小數點於其前)卽所求之尾數.而首數爲$7-10$. § 749,故

$$\log 0.00589=7.7701-10.$$

**例二.** 求8及46之對數.

所求之二對數,其尾數各與800及460之對數中之尾數同.故仿例一得

$$\log 8=0.9031,\qquad \log 46=1.6628.$$

例三. 求 0.4673 之對數.

其尾數與 log 467.3 之尾數同,故必介乎 log 467 之尾數與 log 468 之尾數之間.

查表得 log 467 之尾數為 6693 而 log 468 之尾數為 6702, 二者之差為 9.

卽若加 1 於 467, 應加 9 於 log 467 之尾數,故若加 1 之 0.3 於 467, 卽應加 9 之 0.3, 約 3, 於 log 467 之尾數.

故 log 467.3 之尾數 $=6693+3=6696$, 從而

$$\log 0.4673=9.6696-10.$$

應注意者,在未引用首數以前,吾人略去尾數前應有之小數點.

例三所說明者,為三位以上之數求其對數之尾數之法,得述之如下:

查表求對應於前三位數字之尾數 $m$, 并 $m$ 與次一尾數之差 $d$.

附小數點於原數所餘部分之前以乘 $d$, 加其積之整數部分(如小數部分為 0.5 或更多則增 1) 於 $m$.

752 求已與其對數之數. 祇將以上各節所述之法逆行之卽可.

例一. 求以 5.9552 − 10 為對數之數.

查表,在標 90 之一列與標 2 之一行之相交處得尾數 9552. 故所求之數字列為 902.

然因首數為 5 − 10, 是以所求之數為一小數,其小數點之右應有 9 − 5, 卽 4, 個 0, 於 749. 故所求之數為 0.000902.

例二. 求以 7.5520 為對數之數.

查表知所與尾數 5520, 介乎 5514 與 5527 二假數之間,二者各自對應於 356 及 357. 二假數之小者, 5514, 較大者, 5527; 少 13, 較所與尾數, 5520, 少 6.

卽,若加 13 於尾數 5514, 應加 1 於數 356. 故若加 6 於尾數 5514, 應加 1 之 6/13, 約 0.5, 於 356.

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 |

故所求之數字列爲3565, 因而依首數法則, §748, 所求之數爲35650.00.

故求一數字列,對應於所與尾數之不載於表中者,有下之法則.

查表求其次一較小之尾數$m$,及對應之三位數字,幷$m$與其次一較大之尾數之差$d$.

由所與尾數減$m$,以$d$除其餘數,而附所得之數字於已得之三位數字之後.

**餘對數**　一數之餘對數,爲此數之倒數之對數. 753

因 $\operatorname{colog} m=\log 1/m=\log 1-\log m=-\log m$, §§733, 737, 欲求一數之餘對數,祇須變其對數之號卽可.但爲利於吾人用表起見,一切對數之小數部分皆須保持爲正,故進行如下.

例一.　求 colog 89.2.

$$\begin{array}{lrl} & \log 1 = & 10 \qquad -10 \\ \text{而} & \log 89.2 = & 1.9504 \\ \hline \text{故} & \operatorname{colog} 89.2 = & 8.0496-10 \end{array}$$

例二.　求 colog 0.929.

$$\begin{array}{lrl} & \log 1 = & 10 \qquad -10 \\ \text{而} & \log 0.929 = & 9.9680-10 \\ \hline \text{故} & \operatorname{colog} 0.929 = & 0.0320 \end{array}$$

故欲求一數之餘對數,可就其對數從首數起將各位數字由9減之,至末位有效數字爲止,其末位有效數字則由10減之.於是附$-10$於其結果之後或否,視所用對數未附或原附$-10$而定.如此凡不多於三位數字之數,其餘對數皆可由表直接得出.

**用對數計算**　藉助於對數,凡數之積,商,羃,根,其近似値皆可迅速算出(比較§740),下列各例足以說明之. 754

例一 求 $0.0325\times0.6425\times5.26$ 之值.

$$\log(0.0325\times0.6425\times5.26)=\log 0.0325+\log 0.6425+\log 5.26.$$

然

$$\begin{aligned}\log 0.0325&=\ 8.5119-10\\ \log 0.6425&=\ 9.8079-10\\ \log 5.26&=\ \underline{0.7210}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \text{積之對數}=19.0408-20=9.0408-10$$

故所求之積為 0.1099.

例二. 求 $46.72/0.0998$ 之值.

$$\log(46.72/0.0998)=\log 46.72-\log 0.0998.$$

然

$$\begin{aligned}\log 46.72&=11.6695-10\\ \log 0.0998&=\ \underline{8.9991-10}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \text{商之對數}=\ 2.6704$$

故所求之商為 468.2.

所以將 $\log 46.72$ 卽 1.6695 書作 $11.6695-10$ 之形式者, 因須減去 $8.9991-10$, 欲令前者之正數部較後者之正數部大故也.

例三. 求 $295\times0.05631\div806$ 之值.

$$\log(295\times0.05631\div806)=\log 295+\log 0.05631+\operatorname{colog} 806.$$

然

$$\begin{aligned}\log 295&=\ 2.4698\\ \log 0.05631&=\ 8.7506-10\\ \operatorname{colog} 806&=\ \underline{7.0937-10}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \text{所求結果之對數}=18.3141-20=8.3141-10.$$

故所求之結果為 0.02061.

例四. 求 0.7929 之六次冪.

$$\log(0.7929)^6=6\times\log 0.7929.$$

然

$$\begin{aligned}\log 0.7929&=\ 9.8992-10\\ &\qquad\qquad\underline{\quad 6}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \log(0.7929)^6=59.3952-60=9.3952-10.$$

故 $(0.7929)^6=0.2484$.

例五. 求 0.00898 之七次根.

$$\log\sqrt[7]{0.00898}=(\log 0.00898)\div7.$$

然

$$\begin{aligned}\log 0.00898&=\ 7.9533-10\\ &\ \ 7\underline{)67.9533-70}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \log\sqrt[7]{0.00898}=\ 9.7076-10$$

故 $\sqrt[7]{0.00898}=0.510$.

應注意者,吾人遭遇將一數除負對數如上時,可先加10之同倍數於其正負兩部,使負部之商適爲 $-10$.

因凡10之實數冪皆爲正數,故負數無以10爲底之實對數.欲求含負因數之式之值,宜先用對數求其式之絕對值,再附適當符號於其結果.

例如,若所與之式爲 $456\times(-85.96)$,應先用對數求 $456\times85.96$ 之值,然後附一號於其結果.

## 習　題　LXIII

用對數求下列各式之近似值.

1. $79\times470\times0.982$.
2. $(-9503)\times(-0.0086578)$.
3. $1375600\times8799000$.
4. $0.0356\times(-0.00049)$.
5. $\dfrac{8075}{364.9}$.
6. $\dfrac{0.00542}{0.04708}$.
7. $\dfrac{24617}{-0.00054}$.
8. $\dfrac{0.643\times7095}{67\times9\times0.462}$.
9. $\dfrac{9097\times5.4086}{-225\times593\times0.8665}$.
10. $(2.388)^5$.
11. $(0.57)^{-4}$.
12. $(19/11)^9$.
13. $(1.014)^{25}$.
14. $\sqrt{67.54}$.
15. $\sqrt[3]{-0.30892}$.
16. $8^{\frac{5}{4}}$.
17. $(0.001)^{\frac{2}{3}}$.
18. $(29\frac{2}{11})^{\frac{1}{2}}$.
19. $\sqrt{\frac{5}{6}}\times\sqrt[3]{\frac{79}{45}}$.
20. $\sqrt{0.1}\div(0.009)^{\frac{2}{5}}$.
21. $(0.00058)^{-\frac{5}{4}}$.
22. $(6\frac{2}{3})^{3.4}$.
23. $(-9306)^{\frac{2}{7}}$.
24. $(0.0057)^{2.5}$.
25. $(5648)^{\frac{1}{2}}\times(-0.94)^{\frac{1}{3}}$.
26. $28927^3\div(0.8)^{\frac{2}{5}}$.
27. $\dfrac{\sqrt[7]{0.0476}\times\sqrt[5]{222}}{\sqrt[3]{5059\times0.0088}}$.
28. $\dfrac{\sqrt[6]{943\times7298}}{\sqrt[5]{0.00005\times0.99}}$.
29. $\sqrt{\dfrac{854\times\sqrt[3]{0.042}}{7.9856\times\sqrt[4]{0.0005}}}$.
30. $\sqrt[3]{\dfrac{7^{\frac{1}{4}}\times92^{\frac{1}{5}}\times(0.01)^2}{(0.00026)^5\times5952^{\frac{1}{3}}}}$.

# 常用對數之應用

**不以10爲底之對數**　藉助於下之定理,由一數以10爲底 

之對數,得衍出此數以1之外其他任何正數爲底之對數.

一數 $m$ 關於二相異之底 $a$ 及 $b$ 之兩對數間之關係,可以公式 $\log_b m=\log_a m/\log_a b$ 表之.

何則,令 $m=a^{\mu}$, 卽 $\mu=\log_a m$,

又令 $b=a^{\nu}$, 卽 $\nu=\log_a b$.

因 $a^{\nu}=b$, 得 $a=b^{\frac{1}{\nu}}$.

故 $m=a^{\mu}=(b^{\frac{1}{\nu}})^{\mu}=b^{\frac{\mu}{\nu}}$,

卽 $\log_b m=\mu/\nu=\log_a m/\log_a b$.

例. 求0.586以7爲底之對數.

$$\log_7 0.586=\frac{\log_{10}0.586}{\log_{10}7}=\frac{9.7679-10}{0.8451}=-\frac{2321}{8451}=-0.2746.$$

以上將9.7679－10化爲一個負數之形式,卽 $-0.2321$,更用對數完成最後之除法.

756 $m=a$ 時,由公式得 $\log_b a=1/\log_a b$.

757 除10以外,有實用之底,僅一用文字 $e$ 指示之某無理數而已,此數之近似値爲2.718.以之爲底之對數,稱曰自然對數.以後尙須論及.

758 **指數方程式及對數方程式** 指數或對數式中含未知數之方程式,有時可解之如下.

例一. 解方程式 $13^{2x+5}=14^{x+7}$.

兩端各取對數, $(2x+5)\log 13=(x+7)\log 14$.

解之, $$x=\frac{7\log 14-5\log 13}{2\log 13-\log 14}=\frac{2.4532}{1.0317}=2.268.$$

例二. 解方程式 $\log\sqrt{x-21}+\frac{1}{2}\log x=1$.

依§§736, 739,此方程式可化爲下之形式.

$$\log\sqrt{x(x-21)}=1=\log 10.$$

故 $x^2-21x=100$.

解之, $x=25$ 或 $-4$.

例三. 解方程式 $x^{3\log x}=10x$.

取對數，　$2(\log x)^2=\log x+1.$

就 $\log x$ 解之，　$\log x=1$ 或 $-1/2,$

故　$x=10$ 或 $1/\sqrt{10}.$

**複利**　設有金 $P$ 圓存放起利，以複利計算，時期 $n$ 年，利息每年併入本中，而每圓一年間之利息爲 $r$. 759

則一年後之本利和爲 $P+Pr$ 卽 $P(1+r)$，二年後之本利和爲 $P(1+r)\cdot(1+r)$ 卽 $P(1+r)^2$，餘仿此.故若 $A$ 爲 $n$ 年後之本利和，則

$$A=P(1+r)^n.$$

若利息每半年併入本中，$A=P(1+r/2)^{2n}$；若每季併入本中，$A=P(1+r/4)^{4n}$，餘仿此.

$P$ 稱爲 $A$ 之現價.若已知 $A, n,$ 及 $r$，卽可由公式 $P=A(1+r)^{-n}$ 求出 $P$.

例一.　本金2500圓，以複利計算，年利率4%.求十八年後之本利和.

$$\log A=\log 2500+18\log 1.04=3.7039.$$

故　$A=$ 約5057圓.

例二.　十年間每年開始須付保險費120圓.若依4%複利計算此諸保險費十年後總計幾何？

所求之值爲　$120[1.04+(1.04)^2+\cdots\cdots+(1.04)^{10}],$

依§701，卽　$120\times 1.04\times\dfrac{(1.04)^{10}-1}{1.04-1}.$

由對數，$(1.04)^{10}=1.479.$

故所求之值爲 $120\times 1.04\times 0.479\div 0.04$；用對數計算卽約得1494圓.

**年金**　按一定時期，例如每年，支付之金額，稱爲年金. 760

每圓每年利息爲 $r$，今求從一年後起，$n$ 年間每年支金 $A$ 圓之年金之現價.

第一次支金之現價爲 $A(1+r)^{-1}$，第二次支金之現價爲 $A(1+r)^{-2}$ 餘準此.

故由§701，總額之現價爲

$$A\left[\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(1+r)^n}\right]=\frac{A}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

若爲永續年金,卽,若 $n=\infty$,則 $(1+r)^n=\infty$,而現價之公式化爲 $A/r$.

例. 年利率3%,須一次付金幾何,始能得二十年間每年支金1000圓之年金?

現價, $P$, 爲 $\frac{1000}{0.03}\left[1-\frac{1}{(1.03)^{20}}\right]$.

用對數,求得 $(1.03)^{20}=1.803$.

故 $P=\frac{1000}{0.03}\left[1-\frac{1}{1.803}\right]=\frac{1000\times0.803}{0.03\times1.803}=$ 約 14845 圓.

## 習 題 LXIV.

1. 求 $\log_5 555$, $\log_7 0.0463$, $\log_{100} 47$.

2. 解下列各指數方程式

 (1) $3^x=729$. (2) $a^{x^2+2}=a^{3x}$. (3) $213^x=513^{-x+4}$.

3. 解下列各對數方程式

 (1) $\log x+\log(x+3)=1$. (2) $\log x^2+\log x=2$.

 (3) $\log(1-2x)^3-\log(3-x)^3=6$. (4) $x^{\log x}=x$.

4. 年利率5%,利息每年併入本中,求本金7500圓三十五年後之本利和.

5. 年利率3%,利息每半年併入本中,求本金5500圓二十年後之本利和.

6. 試證本金一宗若以5%複利計算,則十五年後金額應增至一倍以上,而九十五年後應增至百倍以上.

7. 年利率4%,以複利計算,十五年後本利和達1250圓,則本金若何?

8. 某人每年存入儲蓄銀行200圓,年利率$3\frac{1}{2}$%.二十五年後本利合計若干?

9. 年利率4%,須一次付金幾何,始能得三十年間每年支金1200圓之年金?又若爲永續年金則如何?

10. 若 $c$ 表直角三角形斜邊之長,而 $a$, $b$ 爲他二邊之長,則 $b=\sqrt{(c+a)(c-a)}$. 今知 $c=586.4$, $a=312.2$,試用對數求 $b$ 及三角形之面積.

11. 若 $a$, $b$, $c$ 指示三角形諸邊之長,而 $s=(a+b+c)/2$,則三角形之面積

為$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. 今知$a=416.8$, $b=424$, $c=2$[illegible]$.68$, 求三角形之面積.

12. 假定$\pi=3.1416$, 藉助於公式$S=4\pi r^2$, $V=4\pi r^3/3$, 求半徑為23.6之球之表面積及體積.

# XXV. 排列及配合

**排列及配合之定義** (Permutation and combination)　設有一羣$n$個文字,例如$a, b, c, \cdots\cdots, k$, 指示任何種類之物. 761

此類文字$r$個成一組,順序在所不計者,稱為$n$個文字每次取$r$個之配合,簡言之,則為$n$文字之$r$元配合.

此種配合之數,特用符號$C_r^n$表之.

例如$a, b, c, d$四文字之二元配合為

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd.$$

此種配合之數為六,卽$C_2^4=6$.

反之,凡$n$個文字中$r$個按一定順序排成一列之法,稱為$n$個文字每次取$r$個之排列,簡言之,則為$n$文字之$r$元排列.

此種排列之數,特用符號$P_r^n$表之.

例如,$a, b, c, d$四文字之二元排列為

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd.$$
$$ba,\ ca,\ da,\ cb,\ db,\ dc.$$

此種排列之數為十二,卽$P_2^4=12$.

注意$ab$及$ba$雖非不同配合,然為不同排列.

以上所述,蓋假定$a, b, \cdots\cdots, k$諸文字悉相異,且各文字在同一之排列或配合中不得複見.除特别聲明者外,本章悉從此例.

**預備定理**　下述原則,於§554曾見應用. 762

若作某事有 $m$ 法，而已作此事後更作他事有 $n$ 法，則依次作兩事共有 $mn$ 法．

其理如次：每有一法作第一事，即有 $n$ 法作兩事，今作第一事有 $m$ 法，故作兩事有 $mn$ 法．

普徧言之，若作第一事有 $m$ 法，更作第二事有 $n$ 法，更作第三事有 $p$ 法，餘仿此，則依次作此諸事共有 $m\cdot n\cdot p\cdots\cdots$ 法．

例．用 1, 2, 3, ……, 9 諸數字，可作數字相異之三位數幾何？

可於九個數字中任擇其一爲第一位數字，更於所餘八個數字中任擇其一爲第二位數字，最後於尙餘之七個數字中任擇其一爲第三位數字．故可作 9·8·7，即 504，個所云之數．

763 **n 個相異文字之 r 元排列數**　依上例所用之推理，易證求此數 $P^n_r$ 之公式如下：

$$P^n_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots \text{迄 } r \text{ 因數}. \tag{1}$$

何則，作 $n$ 文字之 $r$ 元排列時，可於 $n$ 文字中任擇其一爲第一文字，更於所餘 $n-1$ 文字中任擇其一爲第二文字，更於尙餘之 $n-2$ 文字中任擇其一爲第三文字，餘仿此．

故，依 §762，選第一，第二，第三，……，第 $r$ 諸文字之法，換言之，作 $n$ 文字之 $r$ 元排列之法，其總數爲 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots$ 迄 $r$ 因數．

例如，$a, b, c, d, e$ 諸文字之一元，二元，三元，四元，五元排列之數如下．

$$P^5_1=5,\ P^5_2=5\cdot4,\ P^5_3=5\cdot4\cdot3,\ P^5_4=5\cdot4\cdot3\cdot2,\ P^5_5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1,$$

顯而易見在積 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots$ 中，第 $r$ 個因數爲 $n-(r-1)$，即 $n-r+1$．故公式 (1) 可書作

$$P^n_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)=\frac{|\underline{n}}{|\underline{n-r}} \tag{2}$$

當 $r=n$ 時，$n-r+1$ 一因數爲 $n-n+1$，即 1，而 $P^n_n=n(n-1)\cdots\cdots$

若 $\frac{|\underline{n}}{|\underline{0}}=|\underline{n}$　$P^n_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots=|\underline{n}$ .

$|\underline{0}$ 以'=1.　$\underline{n-n}=|\underline{0}=1$ ∴ $P^n_n=\frac{|\underline{n}}{|\underline{n-n}}=\frac{|\underline{n}}{1}=|\underline{n}$

2·1, 即 1·2……$(n-1)n$. 連乘積 1·2……$n$ 稱爲 $n$ 之階乘 (Factorial $n$), 以符號 $n!$ 或 $\underline{|n}$ 表之.故 $n$ 文字每次全取之排列總數,可由下之公式求之.

$$P_n^n=n! \tag{3}$$

符號 $0!$ 本無意義,吾人特指定其值爲 1, 理由詳後, § 775.

例一. 顏色不同之四旗,或單出,或數旗縱列,共可作幾種不同信號?

無論每次取一旗,二旗,三旗,抑四旗,總之,每有一種排列方法, 即可作一種信號.故所求之數爲 $P_1^4+P_2^4+P_3^4+P_4^4$ 即 64.

例二. 'fancies' 一字中之字母每次全取之排列,其中

(1) 以子音始以子音終者幾何?

選首位之字母有 4 法,更選末位之字母有 3 法, 更選中間各位之字母有 $5!$ 法.故所求之數爲 $4·3·5!$ 即 1440.

(2) 母音在偶數位置上者幾何?

在偶數位置上母音有 $3!$ 種排列方法, 在奇數位置上子音有 $4!$ 種排列方法,而凡母音之排列方法皆可與子音之各種排列方法結合. 故所求之數爲 $3!·4!$ 即 144.

(3) $c$ 不在中央者幾何?

$c$ 在中央之排列數爲 $6!$ 甚明,因其餘之文字可依一切可能之方法排列也.故 $c$ 不在中央之排列數爲 $7!-6!$ 即 4320. $P_7^7-P_6^6=7P_6^6-P_6^6=P_6^6(7-1)$

$=6P_6^6$

例三. 試證 $P_6^8=4·P_7^7$, 又 $P_3^{16}=2·P_4^8$.

例四. 若 $P_4^{2n}=127P_3^{2n}$, 試求 $n$.

例五. 若鐵路有二十站,公司須售幾種車票?

例六. $a, e, i, o, u, y$ 諸文字每次全取之排列, 其中 $a, e, i$ 不被隔離者共幾何?

例七. 'numerical' 一字中之字母每次取五個之排列, 其中子音在奇數位置上者幾何?

例八. 試證用 0, 1, 2, ……, 9 諸數字共可作數字相異之四位數 $P_4^{10}-P_3^9$ 個.

例九. 用 3, 4, 5, 7, 8, 諸數字,共可作數字相異之數幾何?

例十. 七童排成一行, 其中一指定之童不得在行首或行尾. 共有幾種排列方法?

3, $P_6^8=\frac{8!}{2!}=\frac{8\times7!}{2!}=4\times7!=4P_7^7$,

764 **環狀排列(Circular permutations)** 在圓或其他任意閉曲線之周上將$n$相異文字排列,其不同順序數爲$(n-1)!$.

何則,若將$n$文字沿曲線移過同數之位置,諸文字相互間之順序不變.故但令任一文字位置固定,而將其餘之$n-1$文字依一切可能方法排列,$n$文字之各種不同順序已盡在於此矣.但$n-1$文字則可依$(n-1)!$種方法排列,§763,(3).

例如,八人圍圓桌而坐,不同順序之數爲7!,卽5040.

例一. 試證$n$相異文字之環狀$r$元排列數爲$P_r^n/r$.

例二. 記取圓形之環若以直徑爲軸旋轉180°,還與自身重合,試證顏色不同之珠$n$粒,可穿成$(n-1)!/2$種不同項圈.

例三. 四男四女圍圓桌而坐,男女相間,共有幾種坐法?

765 **許重複時相異文字之排列** 若在一排列中同一文字可重複取用,則由$n$相異文字可作成每次取$r$個之排列$n^r$個.

何則,欲得此種排列,可於$n$文字中任擇其一爲第一文字,又因同一文字得重複取用,可更於$n$文字中任擇其一爲第二文字,餘仿此.故依§762,作此種排列之法,其總數爲$n\cdot n\cdot n$……達$r$因數,卽$n^r$.

例如,由1,2,3,……,9諸數字,共可作$9^3$,卽729,個三位之數.

例一. 由1,2,3,5,7諸數字,共可作一位,二位,三位之數幾何?

例二. 今將三種獎分給七生,若各生皆有得獎之資格,共有幾種分法?

766 **不盡相異之n文字之n元排列數** 試取$a, a, a, b, c$ (1) 諸文字考之,其中有三文字相同,若每次全取,可得不同排列幾何?

試將此等排列與$a, a', a'', b, c$ (2) 之對應排列作比較,(2)中諸文字爲全相異者.若任取一(1)之排列,例如$abaca$,不變$b, c$之位置,但將諸$a$互換,結果排列仍舊.然若用同法處理(2)

之對應排列,卽 $aba'ca''$, 則得 3! 個不同排列,卽 $aba'ca''$, $aba''ca'$, $aba''ca$, $a'baca''$, $a''baca'$, $a'ba'ca$. 故凡 (1) 之排列,皆有 3! 個 (2) 之排列與之對應. (2) 之排列數爲 5!, § 763, (3) 之排列數爲 $5! \div 3!$.

普徧言之,由以上所用之推理,可證明 $n$ 文字中若有 $p$ 個各自相同, $q$ 個亦各自相同,其他準此,則其不同 $n$ 元排列數之公式如下:

$$N=\frac{n!}{p!q!\cdots\cdots}.$$

例一. 'independence' 一字中之字母,可依幾種方法排列?

此字中之十二字母,爲 e 者有四,爲 n 者有三,爲 d 者有二.

故所求之結果爲 $12!/4!\cdot3!\cdot2!$, 卽 1,663,200.

例二. 'Antioch' 一字中之字母,共有幾種排列方法?但不得變更母音間或子音間之相互順序.

由上述之證明,易知所求之排列數,無異三母音悉相同而四子音亦悉相同時之排列數.故所求之數爲 $7!/3!\cdot4!$, 卽 35.

例三. $\Sigma x^3y^2z$, $\Sigma x^3y^2z^2$, $\Sigma x^3yzu$, 及 $\Sigma x^3y^3z^2u^2$, 各爲 $x, y, z, u, v$ 五變數之對稱函數,各函數之項數若何?

若將 $\Sigma x^3y^2z$ 之指數 3, 2, 1 之位置保持不變,而書 $x, y, z, u, v$ 諸文字之各三元排列於其下,卽可盡得 $\Sigma x^3y^2z$ 之項.故項數爲 $P_3^5$ 卽 60.

若用同法處理 $\Sigma x^3y^2z^2$, 則 $x^3y^2z^2$ 一項共見二次,一次是 $x^3y^2z^2$ 之形式,又一次是 $x^3z^2y^2$ 之形式.同理,各項皆見二次,因其文字得依兩種順序書於指數之下故也.故 $\Sigma x^3y^2z^2$ 之項數爲 $P_3^5/2$, 卽 30.

仿此得 $\Sigma x^3yzu$ 之項數爲 $P_4^5/3!$ 卽 20, 又 $\Sigma x^3y^3z^2u^2$ 之項數爲 $P_4^5/2!2!$, 卽 30.

例四. 以辨士五枚,及五分銀幣六枚,一角銀幣四枚,分給十五童子,令其各得一枚,共有幾種分法?

例五. 市區共有南北通道十,東西通道五,有人從市區之西南隅行向東北隅,若常經由最短距離,共有幾種行法?

**n 相異文字之 r 元配合數** 是數, $C_r^n$, 之公式示之如下: 767

$$C_r^n=P_r^n\div r!=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}. \tag{1}$$

因若先作一切 $r$ 元配合,再依次就各配合,將文字依一切可能之順序排列,則顯然必能盡得一切 $r$ 元排列也.

但因每一配合應產生 $r!$ 個排列, § 763, (3),今有 $C_r^n$ 個配合,合計應產生 $r!\times C_r^n$ 個排列.

故 $r!\times C_r^n=P_r^n$, 因而 $C_r^n=P_r^n\div r!$

例如, $a, b, c, d, e$ 諸文字,每次取一個,二個,三個,四個,五個之配合數如下:

$$C_1^5=\frac{5}{1},\ C_2^5=\frac{5\cdot4}{1\cdot2},\ C_3^5=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3},\ C_4^5=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4},\ C_5^5=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}.$$

以上所得表 $C_r^n$ 之式,依據二項定理,即 $(a+b)^n$ 展開式中第 $(r+1)$ 項之係數, § 565. 而 § 560 之討論,則不啻公式 (1) 之別證.

768 若於此式中以 $(n-r)!$ 兼乘分子及分母,則得形式較對稱之公式如下:

$$C_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{2}$$

769 由公式 (2) 知 $n$ 文字之 $r$ 元配合數,與 $(n-r)$ 元配合數同.

何則, $C_{n-r}^n=\dfrac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}=C_r^n.$

由每次擇取 $r$ 物必有 $n-r$ 物餘剩一事,亦可推得此結果

例如, $C_{12}^{14}=C_2^{14}=14\cdot13/1\cdot2=91$. 用此法以求 $C_{12}^{14}$ 則甚易,而直接應用公式 (1) 則甚繁,是宜注意.

例一. 一平面上有十五點,其中無三點在一直線上者.求聯結諸點所成三角形之數.

三角形之數,顯然爲諸點中每次擇取三點之配合數.故三角形之數爲 $C_3^{15}$, 即 $15\cdot14\cdot13/1\cdot2\cdot3$, 亦即 455.

例二. 由十人中選舉三人組織委員會. (1) 若某甲必須入選共有幾種選法? (2) 若某甲必須除外共有幾種選法?

(1) 他二人可於其餘九人中選之,故有$C^9_2$ 卽 $9\cdot8/1\cdot2=36$ 種選法.

(2) 全體委員可於其餘九人中選之,故有$C^9_3$ 卽 $9\cdot8\cdot7/1\cdot2\cdot3=84$ 種選法.

例三. 由$a, e, i, o$諸母音及$b, c, d, f, g$諸子音,每次擇取母音二個子音三個之排列數若何?

擇取母音之法有$C^4_2$,擇取子音之法有$C^5_3$.每組選出之母音皆可與各組選出之子音結合,再依$5!$種方法排列.故所求之數爲$C^4_2\cdot C^5_3\cdot5!$,卽7200.

例四. 書籍十八册,分給甲,乙,丙三人,各得六册共有幾種分法?

擇取甲應得之書籍有$C^{18}_6$法,更擇取乙應得之書籍有$C^{12}_6$法,更擇取丙應得之書籍有$C^6_6$ 卽1,法故依§762,所求之結果爲$C^{18}_6\cdot C^{12}_6\cdot C^6_6$,卽$18!/(6!)^3$.

欲求分書籍18册爲三組,每組6册,共有幾種分法,須以$3!$除上之結果卽得$18!/(6!)^3 3!$.因此時三組之先後次序在所不計也.

例五. 由'mathematical'一字中之字母,每次擇取四個,共有幾種不同選擇法,幾種不同排列法?

因諸文字不盡相異,專恃$C^n_r$及$P^n_r$之公式,不能得出所求之結果.

今諸文字爲a, a, a; m, m; t, t; h, e, i, c, l.

故將可能之選擇法及排列法,分類而列舉於下:

1. 有三文字相同者.

將三個a依次與其他七文字之各個結合,卽得7種選擇法,及$7\cdot4!/3!$,卽28,種排列法.

2. 四文字兩兩相同者.

共有3種選擇法及$3\cdot4!/2!\cdot2!$,卽18,種排列法.

3. 二文字相同,他二文字相異者.

選擇法之數,爲$3\cdot C^7_2$,卽63;排列法之數,爲$63\cdot4!/2!$,卽756.

4. 四文字悉異者.

選擇法之數,爲$C^8_4$,卽70;排列法之數,爲$70\cdot4!$,卽1680.

故選擇法之總數,爲$7+3+63+70$,卽143;排列法之總數,爲$28+18+756+1680$,卽2482.

例六. 求$C^{17}_{13}$, $C^{10}_5$及$C^{28}_{19}$之值.

例七. 若$C^n_8=C^n_7$,求$n$.

例八. 若$2C^n_4=5C^n_2$,求$n$.

例九. 有十二點,其中無四點在同一平面上者.此諸點能決定若干平面?

例十. 由十二人中選出五人成一組,有幾種選法?又有某人在內者共

幾組?某人不在內者共幾組?

例十一. 在上例所述之各組中,有甲,乙二人在內者共幾組?甲,乙二人一在內一不在內者共幾組?二人皆不在內者共幾組?

例十二. 由共和黨員20名民主黨員18名中,選出共和黨員4名民主黨員3名組總委員會,共有幾種選法?

例十三. 由五母音十四子音,每次擇取三母音四子音,所得之排列數若何?

例十四. 將紙牌五十二張分給甲,乙,丙,丁四人,每人十三張,共有幾種分法?若將紙牌分作四堆,每堆十三張,則有幾種分法?

例十五. 由2, 3, 4, 2, 5, 2, 3, 6, 7諸數字,可作五位數若

770 **配合總數** 若在$(a+b)^n$之公式(§561)中,置$a=b=1$,更由兩端減1,即得

$$C_1^n+C_2^n+\cdots\cdots+C_n^n=2^n-1.$$

故$n$相異文字每次取一個,二個,……,$n$個之配合總數,為$2^n-1$. 換言之,由$n$物擇取一物或多物之方法總數為$2^n-1$.

此理又可證之如次:無論何物,或取或捨,皆得就二法之一以處理之. 故處理$n$物之法之總數為$2\cdot 2\cdots\cdots$達$n$因數,即$2^n$, §762. 將$n$物悉捨之一情形除外,即得$2^n-1$,與上相同.

例一. 今有一角,二角,半圓,一圓銀幣各一枚,可付幾種不同數項?

例二. 試用上述之推理,證明若在$p+q\cdots\cdots$物中,$p$物相同,$q$物亦相同,但與$p$物異,其他準此,則由諸物擇取一物或多物之方法總數,為$(p+1)(q+1)\cdots\cdots-1$.

例三. 今有一角銀幣二枚,兩角五分銀幣五枚,半圓銀幣四枚,可付幾種不同款項?　$(2+1)(13+1)-1=41$　將半元幣化為日兩5分.

771 **$C_r^n$之最大值** 試取表$C_r^n$之式$n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)/r!$考之,則見分子中之$r$個因數遞減,而分母中之諸因數則遞增. 故$n$之值若一定,則$C_r^n$之值,在$r$之次一較大之值能使

$$(n-r+1)/r<1$$

時爲最大.由是立得結論如次:若 $n$ 爲偶數,則 $r=n/2$ 時,$C_r^n$ 之值爲最大;若 $n$ 爲奇數,則 $r=(n-1)/2$ 或 $r=(n+1)/2$ 時,$C_r^n$ 之值爲最大,對於 $r$ 之此二值,$C_r^n$ 有同值,§769.

例. $C_r^{12}$ 之最大值若何?又 $C_r^{15}$ 之最大值若何?

**許重複時之配合** 試取次之問題考之:由1,2,3,4四數字中擇取三個,如許重複,共有幾種方法? 772

此種選擇法可以 111, 112, 124 爲例,一則三數字皆同,一則二數字相同,一則三數字悉異.

若就111, 112, 及124依次加0, 1, 2於諸數字,卽得123, 124, 及136,是爲三個三元配合,其中1, 2, 3, 4, 5, 6諸數字不重複者.而稍加反省易明,若將111, 112, 124等選擇法,各依大小順序排列其數字,悉數書出,列成一表,然後就各選擇法依次加0, 1, 2於諸數字,卽可盡得1, 2, 3, 4, 5, 6諸數字不重複之三元配合,無遺漏,亦無複見者.因數字之數爲 $4+(3-1)$ 卽 6,此種配合數爲 $C_3^6$.故 $C_3^6$ 卽所求之數.

$n$ 個數 $1, 2, \cdots\cdots, n$ 之重複 $r$ 元配合仿此.而 $n$ 個數得與任何種類之 $n$ 個不同物對應,故得定理如下:

$n$ 不同物之重複 $r$ 元配合數,與 $n+r-1$ 不同物之不重複 $r$ 元配合數相同,二者皆爲 $C_r^{n+r-1}$,卽 $n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)/r!$.

例一. 四顆骰子有幾種不同擲法?

因標明1, 2, 3, 4, 5, 6各面之任一,皆能同時出現一隻,二隻,三隻,或四隻,故可能之擲法爲1, 2, 3, 4, 5, 6之重複四元配合數,卽 $C_4^{6+3}$,或126.

例二. $x, y, z$ 三變數之 $r$ 次完全齊次多項式,共有幾項?

以含 $x, y$, 或 $z$ 之項爲因式之 $r$ 次之積有若干種,此多項式顯然卽有若

773. 右 $C^{n-1}_{r}+C^{n-1}_{r-1}=\dfrac{|n-1}{|r\,|n-r-1}+\dfrac{|n-1}{|r-1\,|n-r}=|n-1\cdot\dfrac{(n-r)+r}{|r\,|n-r}=\dfrac{|n}{|r\,|n-r}$
$=C^{n}_{r}$



干項.故所求之數為

$$C^{3+r-1}_{r}=C^{r+2}_{r}=C^{r+2}_{2}=(r+1)(r+2)/2.$$

773 **聯結配合數之公式 對應的代數恆等式** 下列兩關係式,至富意趣且極重要.

$$C^{n}_{r}=C^{n-1}_{r}+C^{n-1}_{r-1}. \qquad (1)$$

何則,$n$ 文字之 $r$ 元配合可分二類,一類為含某特殊文字.如 $a$, 者,又一類為不含此文字者.欲盡得第一類配合,祇須盡作其餘 $n-1$ 文字之 $(r-1)$ 元配合,再將 $a$ 加入各配合即可;故第一類配合之數為 $C^{n-1}_{r-1}$. 第二類配合即其餘 $n-1$ 文字之 $r$ 元配合,故其數為 $C^{n-1}_{r}$.

$$C^{m+n}_{r}=C^{n}_{0}C^{m}_{r}+C^{m}_{r-1}\cdot C^{n}_{1}+C^{m}_{r-2}\cdot C^{n}_{2}+\cdots\cdots+C^{m}_{1}\cdot C^{n}_{r-1}+C^{n}_{r}\cdot C^{m}_{0} \quad (2)$$

何則,任取 $m+n$ 文字,分為兩組,一組 $m$ 文字,又一組 $n$ 文字.欲盡得 $m+n$ 文字之一切 $r$ 元配合,祇須類別之如下,即可無遺漏,無重複.計有

(a) 第一組諸文字之 $r$ 元配合.此種配合數為 $C^{m}_{r}$.

(b) 含第一組中 $r-1$ 文字及第二組中一文字之配合.擇 $r-1$ 文字之法有 $C^{m}_{r-1}$, 擇一文字之法有 $C^{n}_{1}$, 故此種配合數為 $C^{m}_{r-1}\cdot C^{n}_{1}$.

(c) 含第一組中 $r-2$ 文字及第二組中二文字之配合.擇 $r-2$ 文字之法有 $C^{m}_{r-2}$, 擇二文字之法有 $C^{n}_{2}$, 故此種配合數為 $C^{m}_{r-2}\cdot C^{n}_{2}$. 仿此,最後為第二組諸文字之 $r$ 元配合,其數為 $C^{n}_{r}$.

例如, $C^{9}_{3}=84$ 又 $C^{5}_{3}+C^{5}_{2}\cdot C^{4}_{1}+C^{5}_{1}\cdot C^{4}_{2}+C^{4}_{3}=10+40+30+4=84$.

774 若在 (1) 及 (2) 中,將各符號 $C$ 代以 $m,n,r$ 為項之式 §767, (1), 即得聯結 $m,n,r$ 之公式.由以上之證明,祇能斷言此諸公式當 $m,n,r$ 指示正整數時能適合.實則單就 $m$ 及 $n$ 而論此諸

公式爲代數恆等式,無論 $m$ 及 $n$ 之值若何常能適合.用代數方法簡化可以證明之.

例如,
$$C^{n-1}_r+C^{n-1}_{r-1}=\frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r)}{1\cdot2\cdots\cdots r}+\frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdots\cdots(r-1)}$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdots\cdots(r-1)}\cdot\left[1+\frac{n-r}{r}\right]$$
$$=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdots\cdots r}=C^n_r.$$

然欲證此等公式爲恆等式,此種簡化並非必要.蓋若以 $m$, $n$, $r$ 表之,(2) 之兩端各爲 $m$ 及 $n$ 之整函數,就各文字而言,次數皆爲 $r$. 此二函數必須恆等,因非然者,隨意指定一整數爲 $m$ 之值,(2) 之兩端卽成爲祗含 $n$ 之函數,故在 $n$ 值多於 $r$ 個時不能相等,§421,而實際上則兩端對於 $n$ 之一切整數值皆相等,上巳證明也.

## 習 題 LXV

1. 由甲地至乙地,有通道三,由乙地至丙地有通道二,由丙地至丁地有通道四.今有人由甲地行向丁地共有幾種行法?

2. 人數五,編號之椅數爲六,共有幾種坐法?

3. 八人作半英里競走,其第一名,第二名,第三名之獲得方法有幾?

4. 由水手十人中選四人盪槳,共有幾種方法?又諸人列坐艇上共有幾種方法?

5. 由兵士一百名中選哨兵三名,共有幾種方法?

6. 五組壘球隊,共商一比賽次序表,欲令每組與其他各組各比賽三次.則此表中應共有比賽幾次?

7. 1, 2, 1, 3, 2, 1, 5 諸數字,每次全取,共有幾種排列方法?

8. 'factoring' 一字中諸字母每次全取之排列,其中 (1) 以母音始以子音終者幾何? (2) f 不在首位置上者幾何? (3) 母音在最先三個位置上者幾何?

9. 在上述排列中,母音不變 a, o, i 之次序者幾何?子音不變 f, c, t, r, n, g 之次序者幾何?母音子音俱不變此等次序者幾何?

10. 由'resident'一字中每次取五字母,但第一,第三,及第五字母須爲母音,共可作幾種排列?

11. 壘球隊九人,三人在外場,六人在內場.今有十五人候選,其中六人能在外場,九人能在內場;共有幾種選法?

12. 由1, 2, 3, 8, 9, 10諸數中選取二數,其和須爲偶數,共有幾種選法?

13. 用1, 2, 3, 4, 5, 6, 7諸數字作一位,二位,及三位之數,(1)數字許重複時共可作成若干數?(2)數字不許重複時共可作成若干數?

14. 用1, 2, 3, 4, 5, 6,諸數字,可作五位不同之奇數幾何?

15. 在3000與8000之間,有數字不重複之奇數幾何?其能爲5所整除者又幾何?

16. 某人邀其五友中一人或多人午餐,共有幾種方法?

17. 今將蘋果十五隻分給三童子,令一人得六隻,一人得五隻,又一人得四隻,共有幾種分法?

18. 六+號與五-號書作一列,共有幾種方法?

19. 用1, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 4, 5, 3, 6, 7諸數字,共可作成若干四位之數?

20. 由法文書十五冊及德文書十二冊中,選出法文書八冊及德文書七冊,列置書架上,共有幾種方法?

21. 由同套紙牌十三張中擇取五張,須有king(王)或queen(女王)或二者在內,共有幾種方法?

22. 由五美國人及六英國人中選出四人,(1)若祇有一英國人在內,共有幾種方法?(2)若至少有一英國人在內,共有幾種方法?

23. 一組平行線,其數爲十,他一組平行線,其數爲十二,二組相交,共成若干平行四邊形?

24. 有$n$點在一平面上,其中$m$點在一直線上,此外無三點在同一直線上者.試證聯結諸點所得之直線,其數爲$C_2^n-C_2^m+1$.

25. 用同樣珍珠五粒,同樣紅寶石六粒,同樣金剛石五粒,穿成一手鐲,其穿法有幾?

26. 十人圍兩圓桌而坐,每桌五人,共有幾種坐法?

27. 今有五男六女,欲舉行雙打網球比賽,兩方須各爲一男一女,共有幾種配合?　$C_2^5 C_2^6 \times 2$

28. 十五人投票互選,被選者一人,候選者五人,共有幾種投票方法?所投之票平均分配於五候選者之間,共有幾種方法?

29. 艇上水手八人,二人常居左舷,另一人常居右舷,則諸人列坐之法共

幾何?　$C^{5}_{2}(4)^2$

30. 由十八人選九人成一組壘球隊,其十八人中十人祇能在內場,五人祇能在外場,餘三人無此種限制,共有幾種選法?

31. 試證六相異文字每次全取作排列,若有二文字各須避免一特殊位置,則排列數為$6!-2\cdot5!+4!$.

32. $p, q, r, s, t, v$ 諸文字每次取四文字之重複配合數若何?

33. 五粒骰子能擲出幾種不同結果?

34. 若變數之個數為十, $\Sigma x^4y^3z^2u$, $\Sigma x^2y^2z^2u$, $\Sigma x^5y^3z^2u^2v$ 諸對稱函數各有幾項?

35. 試證四變數之$n$次完全齊次函數之項數為$(n+1)(n+2)(n+3)/3!$.

# XXVI. 多項定理

**多項定理 (Multinomial theorem)**　令$a+b+\cdots\cdots+k$指示任 775
一多項式,又令$n$為正整數.則

$$(a+b+\cdots\cdots+k)^n=\Sigma\frac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\cdots\kappa!}a^\alpha b^\beta\cdots\cdots k^\kappa,$$

其中右方之和,對於$\alpha, \beta, \cdots\cdots, \kappa$之各組值凡由$0, 1, 2, \cdots\cdots, n$選出而能使$\alpha+\beta+\cdots\cdots+\kappa=n$者,皆有一項,但$\alpha=0$時$\alpha!$須以1代換,於$\beta, \cdots\cdots, \kappa$皆然,不待言也.

何則,$(a+b+\cdots\cdots+k)^n$指示下之連乘積:

$$(a+b+\cdots\cdots+k)(a+b+\cdots\cdots+k)\cdots\cdots\text{達}n\text{因式}.$$

若將乘法完成,所得之部分積,在未合併同類項以前,各呈次之形式:第一括號中之一項,乘第二括號中之一項,再乘第三括號中之一項,……,最後乘第$n$括號中之一項.

但因由各括號內選出之文字,得為$a, b, \cdots\cdots, k$諸文字中之任一,上述之部分積,應盡含$a, b, \cdots\cdots, k$諸文字之一切重複$n$元排列在內.而$\alpha, \beta, \cdots\cdots, \kappa$若指示和為$n$之任一組數$0, 1, \cdots\cdots,$

$n$,則此等部分積中,$\alpha$ 個因式爲 $a$, $\beta$ 個因式爲 $b$, ……, $\kappa$ 個因式爲 $k$ 者,其數與 $n$ 文字中 $\alpha$ 個相同, $\beta$ 個相同,……之重複 $n$ 元排列數同,故爲 $n!/\alpha!\beta!\cdots\cdots\kappa!$, § 766. 又因此諸部分積各等於 $a^{\alpha}b^{\beta}\cdots\cdots k^{\kappa}$, 其和爲 $\dfrac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\cdots\kappa!}a^{\alpha}b^{\beta}\cdots\cdots k^{\kappa}$.

二項定理蓋卽本定理之特例.

例如, $(a+b+c+d+e)^4$ 之展開式,由 $abcd$, $a^2bc$, $a^2b^2$, $a^3b$, $a^4$ 五種形式之項而成,其係數如次: $4!/1!1!1!1!$, 卽 24; $4!/2!1!1!$, 卽 12; $4!/2!2!$, 卽 6; $4!/3!1!$, 卽 4; $4!/4!$, 卽 1. 合併同類項,得

$$(a+b+c+d+e)^4=\Sigma a^4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12\Sigma a^2bc+24\Sigma abcd.$$

例. 求 $(2+3x+4x^2)^8$ 展開式中 $x^5$ 之係數.

此展開式之項之普徧形式爲 $\dfrac{8!}{\alpha!\beta!\gamma!}2^{\alpha}3^{\beta}4^{\gamma}x^{\beta+2\gamma}$, 其中 $\alpha+\beta+\gamma=8$ (1), 而所求之項須能使 $\beta+2\gamma=5$ (2). 然 (1), (2) 之正整數(包含 0 在內)解僅有 $\alpha, \beta, \gamma=3, 5, 0$; $4, 3, 1$; $5, 1, 2$. 故所求之係數爲

$$\frac{8!}{3!5!}2^3\cdot3^5+\frac{8!}{4!3!}2^4\cdot3^3\cdot4+\frac{8!}{5!2!}2^5\cdot3\cdot4^2 \text{ 卽 } 850,752,$$

(1)−(2) $\alpha-\gamma=3$ (3)
$\alpha_0=4$, $\gamma_0=1$
$\alpha=4-t$
$\gamma=1-t$
代入(2)中
$\beta+2(1-t)=5$
$\beta-2t=3$
令 $\beta_0=5$, $t_0=1$
$\beta=5-2u$
$t=1-u$
$\alpha=4-t=4-(1-u)$
$=3+u$.
$\beta=5-2u$.
$\gamma=1-t=1-1+u=u$

| $u$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 3 | 4 | 5 |
| $\beta$ | 5 | 3 | 1 |
| $\gamma$ | 0 | 1 | 2 |

## 習 題 LXVI

1. 求 $(a+b+c+d)^3$ 之展開式,但須合併同類項.
2. 再求 $(a+b+c+d)^5$ 之展開式.
3. 求 $(a+b+c+d)^{12}$ 展開式中 $a^3b^4c^2d^3$, $a^4b^4c^4$, 及 $a^3b^5c^4$ 之係數.
4. 求 $(a-b+c-d)^{10}$ 展開式中 $ab^2c^3d^4$ 之係數.
5. 求 $(a+3b+2c)^8$ 展開式中 $a^4b^3c$ 之係數.
6. 求 $(1+x+x^2+x^3)^{10}$ 展開式中 $x^6$ 之係數.
7. 求 $(1-x+3x^2)^9$ 展開式中 $x^7$ 之係數.

# XXVII. 或然率

## 簡單事象

776 或然率(Probability) 對於任何未來事象,吾人若加以一度

試行,卽,與以一發生之機會;無論其爲成敗得失,必能生出某種結果.而此種結果之現象若何,初非吾人於事前所能臆斷;蓋各種不同現象之出現,皆具有相若,相等之機會也,譬如骰子戲之擲么,卽其一例.事前吾人僅得知其停下之時,六面之一必將向上,苟於六面中預斷其必爲某面,則毫無理由可言也.

上述結果之現象,或得或失,因其所自生出之機會相等,吾人統稱之曰或然情形 (Possible cases).其有成就之可能者稱爲得的情形 (Favorable cases).其有失敗之可能者稱爲失的情形 (Unfavorable cases).

或然率卽成就此項事象之機會,乃得的情形對於或然情形之比.而或然情形乃概括得的情形與失的情形而言.

故假定 $m$ 爲或然情形之數, $a$ 爲得的情形之數, $p$ 爲或然率,則根據定義可得下式:

$$p=a/m.$$

例如,骰子戲之擲么,其或然率爲1/6;蓋此處 $m=6$ 而 $a=1$ 也.

再如,一囊盛白球3枚及黑球2枚,則從囊中引取一白球之機會爲3/5.

系一　若某項事象之成就爲必然,則其或然率爲1;若此 777
事象必趨失敗,則其或然率爲0;此外各種情形,其或然率均爲正眞分數.

蓋此項事象旣然必能成就,則當然不再有失敗之道,則 $a=m$, 亦卽 $a/m=1$. 若此項事象必趨失敗,則必不再有成就之道,故 $a=0$, 而 $a/m=0$. 此外各種情形, $a$ 大於0而小於 $m$, 故 $a/m$ 必爲正眞分數.

778 系二 若某項事象能成就之或然率為 $p$, 則其不能成就之或然率為 $1-p$.

因為,若 $m$ 個或然情形中 $a$ 個情形為得以成就者,則其餘之 $m-a$ 個當然為不能成就者; 故其不能成就之或然率為 $(m-a)/m=1-a/m=1-p$.

779 機比 (Odds) 設對於某項事象之得的情形之種數為 $a$, 失的情形之種數為 $b$, 而 $a>b$, 則機比為 $a$ 對 $b$ 而偏於此項事象之成就.若 $b>a$, 則機比為 $b$ 對 $a$ 而偏於此項事象之失敗.若 $a=b$, 則機比對於此項事象之得失為平衡.據此,則或然率, $a/(a+b)$, 在第一種情形大於 $1/2$; 在第二種情形小於 $1/2$; 在第三種情形則等於 $1/2$.

例如,一囊盛白球3枚及黑球2枚,則其機比為3對2而利於白球,為3對2而不利於黑球.

780 希冀 (Expectation) 設有定額之銀 $M$, 某人可以博得此銀之機會為 $p$, 則積 $Mp$ 名曰關於定額 $M$ 此人之希冀之值.

例如,博者投擲骰子,現么者可得銀十二元.則此人之希冀之值應為 $\$12\times1/6=\$2$.

781 或然率例題 應用 § 776 或然率之定義時,吾人必須歸納各種得的情形於相若相等.參觀以下例題,則當更可明瞭此項注意之不可少也.

例一. 設同時擲出銅圓二枚,問其結果二個正面同時向上之機會若何? 二個背面同時向上之機會若何? 一正一背之機會又若何?

驟見此題吾人或者以為具有三種或然情形: 得第一種者一,得第二種者一,得第三種者又一,故各種結果之機會皆為 $1/3$.

其實乃大誤,蓋相若相等之得的情形為四而非三也.設吾人命此二銅圓各為 $A, B$; 則其相若相等之情形當為: $A$ 正, $B$ 正; $A$ 背, $B$ 背; $A$ 正,背 $B$; 以及 $A$ 背, $B$ 正;共計四種.而此中之一種結果為二個正面,一種結果為二

個背面,二種結果爲一正一背,故此等結果之機會當各爲1/4, 1/4 及2/4.

例二. 二骰同擲,得和爲八點之機會若何?

二骰擲下,可分 6·6, 卽 36, 種情形出現;蓋一骰之每面均可與他骰之任何一面同時出現也.

若二骰之點爲2與6; 3與5,或4與4,則其和爲八點.但2與6之出現可有二路 或者2在$A$骰而6在$B$骰,或者6在$A$而2在$B$.同理, 3與5之出現亦有二路;但4與4之出現則僅一路耳 故得的情形凡五,而本題所求機會當爲5/36.

例三. 三骰同擲而得和爲八點,其中至少一骰現么,則其機會若何?

三骰擲下,可分6·6·6, 卽216, 種情形出現.

既須和爲八點而又至少須有一骰現么,則其出現當爲1, 1, 6或1, 2, 5,或1, 3, 4. 但1, 1, 6之出現之順序可以顚倒散佈於三骰,故其出現之情形有3!/2!, 卽3, 種.同理, 1, 2, 5與1, 3, 4之出現各有3!, 卽6, 種情形 由此,共得3+6+6, 卽15, 適得的情形.故本題所求機會爲15/216, 亦卽5/72.

例題四. 一甕盛白球六枚,紅球四枚,黑球二枚,問:

(1) 從中引取四球,所得爲全白之機會若何?

甕中有白球六枚,故取出四枚全白之法當爲四元配合,亦卽$C^6_4$.同理,從總數中取出任何四球之方法爲$C^{12}_4$.故所求機會爲$C^6_4/C^{12}_4$, 卽1/33.

(2) 從中引取六球,得三白二紅一黑,則其機會又若何?

取三枚白球有$C^6_3$法;取二枚紅球有$C^4_2$法;取一枚黑球有$C^2_1$法;故引取此六球之法則爲$C^{12}_6$.故所求機會爲$C^6_3 \cdot C^4_2 \cdot C^2_1/C^{12}_6$, 卽20/77.

例五. 由十三張同套紙牌中取出三張紙牌,問:

(1) 既無king (王) 又無queen (女王),則其引取之機會爲若何?

除出king與queen,則此套紙牌尚有十一張.若取三張無king與queen爲一組之紙牌,則共有$C^{11}_3$組.故所求或然率爲$C^{11}_3/C^{13}_3$, 卽15/26.

(2) 若king與queen必須雜入,單獨或共同雜入不論,則其引取之機會又若何?

上節(1)所放棄者,卽本節問題之所求.故此節所求或然率爲1-15/26, 卽11/26. (參觀§773).

(3) 若king與queen必須同時雜入,則又若何?

三張紙牌之中, king與queen二張已爲一定,故祇須於其餘十一張中任取一張與之相配,卽成一組;故所求機會爲$11/C^{13}_3$, 卽1/26.

**或然率之種種意義** 1. 在§776中,吾人稱分數$a/m$爲某 782

項事象之或然率.但若根據一度之試行,或極少數之試行,所生結果而加以討論,則此分數成爲毫無意義.必將此試行無限的繼續行之,則在其過程中所遇頻率 (Frequency) 乃可以此分數指示.

例如,即以投擲骰子爲試行,若能繼續進行,以至千次,則所得么點之次數與投擲總次數之比,吾人可以發現其漸趨於數值 1/6; 投擲之次數愈多,則其値愈近.

2. 對於多種重要事象——譬如人生之久暫——§776之定義卽難於適用;蓋此類事象之相若相等之成敗之道,乃不能計算者.然而吾人亦可從此類事象之諸多過去的試行而推得其頻率.如是,則吾人亦可稱此頻率之分數爲此類事象之或然率,有類乎 1/6 之於骰子,吾人可以依據此頻率以推測諸多未來的試行過程中發現類此之事象也.

例如,設國勢調查報告書中 1880 年有 100,000 人爲六十歲,至 1890 年尙有其中之 2/3 生存於世,則吾人可以假定現在六十歲之人,十年後尙生存之或然率爲 2/3.

3. 然而吾人亦可認此分數 $a/m$ 作爲某項事象單次試行之希冀的強度.得的情形對於或然情形之比愈大,或卽某項同様性質之事象過去所得頻率,吾人所知者愈大,則考慮此某特殊事象之時,其希冀亦愈強.

根據此層意義,則吾人可以推考任何未來事象之或然率.例如: $A$, $B$ 兩足球隊未曾開賽之時,吾人聽得利於 $A$ 隊獲勝之機比爲 3 對 2, 亦卽 $A$ 隊獲勝之或然率爲 3/5. 此種對於 $A$ 隊獲勝之普偏希冀,與自盛有三枚白球與二枚黑球之甕中,

吾人取出一枚白球時之希冀,其強度正相若也.

## 習　題　LXVII

1. 某事之或然率爲3/8;試問其機比偏於成功抑偏於失敗?此等機比爲何?其不致發生之或然率爲何?

2. 利於某甲得勝某種遊戲之機比爲10對9,則其得勝之機會若何?其失敗又若何?

3. 賭金$10,利於*A*之機比爲5對3,試問此希冀爲若何?

4. 法國哲學家達蘭貝耳氏(D'Alembert)有言"對於任何未來事象,僅有兩種可能的結果,一曰成,一曰敗.故任何事象之機會均爲1/2,而或然率之定義乃爲無意識耳."試問將如何以對答之?

5. 某盌有球十六枚,七枚爲白色,六枚黑色,三枚紅色.問:

(1) 從中引取一球,則白色球之機會若何?黑色球若何?紅色球又若何?

(2) 從中引取兩球,則同爲黑色球之機會若何?一白及一紅之機會若何?

(3) 從中引取三球,則全爲紅色球之機會若何?無紅色球者若何?一白一黑一紅者又若何?

(4) 從中引取四球,一枚爲白色而其餘非白色之機會若何?二枚爲白色而他二枚非白色之機會若何?

(5) 同時引取十球,必須五枚爲白色,三枚爲黑色,二枚爲紅色,則其機會如何?

6. 二骰擲下,試問其擲出同點之機會若何?以三枚骰子投擲時又若何?

7. 二骰擲下得和爲七點之機會若何?試示此爲最易擲得之點.

8. 試問擲下二骰至少有一爲么之機會若何?其中僅一爲么之機會又若何?

9. 從factor與banter二字中胡亂取出一個字母,試問得以取出同一字母之機會若何?

10. 一箱藏有紙券九張,各以數字1, 2……9標明.若胡亂引取二張,則所得二券數字相乘積爲偶數之機會若何?爲奇數之機會若何?

11. 承上題從箱中引取五券,試求下列各項之機會: (1) 1, 2, 3三券均被取出; (2) 1, 2, 3任何一券單獨被取出; (3) 引取之券不雜有此三券之任何一張.

12. 整包撲克牌五十二張,從中任取四張,則得四張爲ace, king, queen, 及knave之機會若何? ace, king, queen及knave爲同花者之機會若何?

13. 以鬪 whist 爲戲,某人手有 trumps 四張,其餘三張則各隸別花,試求其機會.

14. 三骰同擲,得和爲五點之機會若何?其和小於五點之機會又若何?

15. 八人同圍圓桌而坐,試問某某二人連座之機會若何?

## 複雜事象 互斥事象

783 **獨立事象** (Independent events) 兩項或兩項以上之事象,若其一項之成敗不因他項之成敗而影響者,則此等事象稱爲獨立.反之,則稱爲相賴.

例如,自囊中每次取一球,若第一次取出後仍將此球還入囊中者,則兩次引取之結果皆爲獨立.若不將此球還入者,則稱相賴.

784 **定理一** 一組獨立事象全體出現之或然率等於其各單獨事象之或然率之相乘積.

設二單獨事象之或然率各爲$a_1/m_1$及$a_2/m_2$.

則發生第一事象之或然情形爲$m_1$種,第二事象爲$m_2$種.因其各自獨立,故發生$m_1$種之任一情形時$m_2$種之任一情形亦得而發生.是以對於此二者之或然情形,當爲$m_1m_2$種,同理,對於二者得以成就之情形爲$a_1a_2$種.故對於二者之或然率爲$\dfrac{a_1a_2}{m_1m_2}$,亦卽所欲證明之$\dfrac{a_1}{m_1}\cdot\dfrac{a_2}{m_2}$矣.

兩項以上之事象,得以同理證明之.

兩層證明僅適用於§776所述事象之類;但根據§782所述理由,則此定理亦得適用於各種未來事象,下述例二,卽屬此例.

譬如,以一顆骰子擲么,其得二次接連爲么之機會,爲$1/6\times1/6$,卽$1/36$.

再如一囊盛白球五枚及黑球四枚,從中引取一白球,每次引取之後卽

行還入,然後再行引取,則得以接連二次皆爲白球之機會,爲 $5/9\times5/9$; 卽 $25/81$.

**定理二**　設第一事象之或然率爲 $p_1$, 若此事象發生後第二事象之或然率爲 $p_2$, 則此二事象依次發生之或然率當爲 $p_1p_2$. 二項以上之事象仿此. 785

此定理得以定理一之證法證明之. 而此定理顯然可以概括定理一也.

譬如,一甕盛白球五枚及黑球四枚,第一次取得白球後不再還入甕中,則第二次引取白球之機會成爲 $4/8$. 故若第一次取得白球而不還入,則欲得連接二次爲白球之機會當爲 $5/9\times4/8$, 卽 $5/18$.

例一. 以骰子一顆爲戲,每三次投擲至少須有一次爲么,則其機會若何?

除出每次投擲均屬失敗之外,至少必有一次爲么,一次投擲之失敗之機會爲 $5/6$, 則三次皆失敗之機會爲 $5/6\times5/6\times5/6$, 卽 $125/216$. 故至少一次爲么之機會爲 $1-125/216$; 卽 $91/216$.

例二. 某項問題, $A$ 能解答之機會爲 $3/4$; $B$ 能解答之機會爲 $2/3$. 問: $A$ $B$ 二人同時各自解答之,則此題被解答之機會若何?

若非 $A$, $B$ 二人之解答均屬失敗,此項問題必能解出, $A$ 之失敗機會爲 $1/4$, $B$ 之失敗機會爲 $1/3$. 故二人同屬失敗之機會爲 $1/4\times1/3$, 卽 $1/12$. 故此項問題得被解答之機會爲 $11/12$.

例三. 錢袋兩隻,一藏銀幣五枚及金幣一枚,一藏銀幣三枚. 若從前袋取幣四枚置後袋中,然後再從後袋取出五枚置入前袋,問金幣在後袋之機會若何? 在前袋之機會又若何?

此金幣在前袋被取出而置入後袋之機會爲 $C_3^5/C_4^6$, 卽 $2/3$, 參觀 § 781, 例五. 第二次引取時金幣被遺留於後袋之機會爲 $6/C_5^7$, 卽 $2/7$. 故兩次引取後金幣在後袋之機會爲 $2/3\times2/7$ 卽 $4/21$. 其在前袋之機會則爲 $1-4/21$, 卽 $17/21$.

$C_5^6=C_1^6=6.$

例四. 同時擲出銅元四枚,試求至少有一枚之正面向上之機會.

例五. $A, B, C, D$ 四人同出遊獵鷓鴣,若平均 $A$ 君每二鎗可打中一次, $B$ 則三鎗可中二次, $C$ 則五鎗可中四次, $D$ 則七鎗可中五次. 試求此四人同時鎗擊一鳥時之機會若何?

例六. $A$ 甕盛有白球五枚及紅球四枚. $B$ 甕則盛白球六枚及黑球二

枚.問自 $A$ 甕引取一枚白球之機會;再問,此白球投 $B$ 甕中以後,自 $B$ 甕引取一枚白球之機會若何?

例七. 延壽五年之機會,$A$ 爲 $3/4$,$B$ 爲 $5/6$,試求此五年間下列各種情形之機會;(1) $A$,$B$ 皆生存;(2) $A$ 存,$B$ 歿;(3) $A$ 歿,$B$ 存;(4) 二人均歿.

786 **互斥事象** 若兩項或兩項以上之事象,僅有一項得此發生,則稱此等事象爲互斥.

譬如,投擲骰子,在同一骰子上么點與兩點之出現屬互斥事象.

787 **定理三** 一組互斥事象.其中成就任一事象之或然率,等於其各個單獨事象之或然率之和.

設有互斥事象 $A$ 與 $B$.

對於兩項互斥事象之或然情形可分三類如下:(1) $A$ 成,$B$ 敗;(2) $A$ 敗,$B$ 成;(3) $A$ 敗,$B$ 敗.

設此三類或然情形之種數各爲 $l, m, n$,則

(a) $A$ 或 $B$ 之任一,得以成就之機會等於 $\dfrac{l+m}{l+m+n}$.

蓋共有 $l+m+n$ 個或然情形及 $l+m$ 個得的情形也.

(b) 單獨 $A$ 得以成就之機會爲 $\dfrac{l}{l+(m+n)}$.

蓋,非 $B$ 失敗則 $A$ 不能成就,故 $A$ 成 $B$ 敗之 $l$ 種情形,即 $A$ 得成就之全體情形:而 $A$ 敗 $B$ 成及 $A$ 敗 $B$ 敗之 $m+n$ 種情形,即 $A$ 失敗之情形也.

(c) 同理,單獨 $B$ 得以成就之機會爲 $\dfrac{m}{m+(l+n)}$.

但,
$$\frac{l+m}{l+m+n}=\frac{l}{l+(m+n)}+\frac{m}{m+(l+n)}.$$

故 $A$ 或 $B$ 之任一,得以成就之機會等於單獨事象 $A$ 及 $B$ 之機會之和.

對於兩項以上之事象,可準此以證明之.

例如,一囊盛白球四枚,黑球五枚,及紅球七枚.從中引取1球,則此球爲白球之機會當爲1/4,爲黑球者爲5/16,不論黑白時則當爲1/4+5/16,卽9/16.依據§776或然率之定義,可逕得此結果;故在實際上是項定義亦可視爲定理三之特別情形也.

**注意,此項定理不得應用於事象之非互斥者.**

例如,在§785,例二之所問,$A$及$B$同時各自解答某題之機會,而$A$得成功之機會爲3/4,$B$爲2/3,吾人不得以3/4及2/3,相加而求其答案,誠以$A$之成就,並不與$B$之成就互斥也.解答此題之互斥情形乃爲:$A$成,$B$敗;$A$敗,$B$成;$A$成,$B$成.依據§784,此等情形之機會爲$3/4\times1/3$,卽3/12;$1/4\times2/3$,卽2/12;$3/4\times2/3$,卽6/12;三種機會之和,11/12,方爲是題被解答之機會也.

例一. 一甕盛球十枚,其中三枚爲白色;另有一甕盛球十二枚,其中四枚爲白色.設任擇一甕以引取一球,則得白球之機會若何?

依據命題之意,吾人必於下列二項互斥事象之中,擇一以求機會:(1)擇$A$甕而引取一白球,(2)擇$B$甕而引取一白球.

擇$A$甕之機會爲1/2,而自此引取白球之機會則爲3/10.故(1)之機會爲$1/2\times3/10$,卽3/20.同理,(2)之機會爲$1/2\times4/12$,卽1/6.

故本題所求之機會等於3/20+1/6,亦卽19/60.

例二. 一袋盛有五枚一元幣及七枚五角幣,某君得任取二枚,試求某君之希冀之值.

若某君所取得兩幣均屬一元幣,則其希冀之值等於$\$2\times C_2^5/C_2^{12}=\$2\times5/33=\$0.30$;若均屬五角幣,則等於$\$1\times C_2^7/C_2^{12}=\$1\times7/22=\$0.32$;若一爲一元幣而一爲五角幣,則爲$\$1.50\times5.7/C_2^{12}=\$1.50\times35/66=\$0.80$.

故其希冀之總值等於$\$0.30+\$0.32+\$0.80$,卽$\$1.42$.

例三. 一甕盛白球三枚及黑球二枚,$A$,$B$二君輪流從甕取球,限定每次一球,球被取出後卽不再放入,而自$A$君起始;試求各人先得白球之機會若何?

$A$君第一次引取得以成功之機會等於3/5.

若$A$君失敗而$B$君繼之,而$B$君卽得成功,則其機會爲$2/5\times3/4$,卽3/10;蓋$B$君此時引取,甕中僅有四球而有三枚爲白色也.

若$A$君失敗而$B$君亦失敗,$A$君再起爲之,則其機會爲$2/5\times1/4\times3/3$,卽1/10.蓋$A$君此時引取,甕中所餘三球已盡爲白色.

故$A$君之機會共爲3/5+1/10,卽7/10;而$B$君爲3/10.

例四. 設例三,$A$,$B$二君所取之球隨手放入,則二君之機會又若何?

在第一次輪流中,$A$之機會爲$3/5$, $B$爲$2/5\times3/5$,即$6/25$,究竟輪流幾次雖不可知,而二人於以後每次輪流中之機會則同上.

是以二君機會總數之比等於$3/5:6/25$,即$5:2$;亦即$A$君機會之總數等於$5/7$,而在$B$君則等於$2/7$.

例五. 室中有桌三張,桌上各有書籍九册,十册及十一册.余欲得某某六册中之任何一册,而此六册則散置於三桌之上,第一桌有其二,第二桌有其三,第三桌有其一.設有友人任取室中之一册予余,則此書爲余所欲者之機會若何.

例六. 某畜馬主人以其二馬加入某次賽馬會,而此二馬得勝之機會各爲$1/2$及$1/3$.試求馬主得標之機會.

例七. $A$, $B$二人以二顆骰子對賭,而以最先擲出一個二點者爲贏,問:若$A$先擲,則二人得勝之機會各若何?

788 **單獨事象之重複試行** 下列諸定理將論及某事象在連續試行中成就特定次數之機會,而其單一試行所遇之機會爲已知.

789 **定理四** 設某事象單一試行得以成就之或然率爲$p$,則在$n$次試行得以成就$r$次之或然率爲$C^n_rp^rq^{n-r}$,而$q=1-p$.

因在任何某組$r$次試行中皆成就及其餘$n-r$次試行中皆失敗之或然率爲$p^r(1-p)^{n-r}$,若$q=1-p$,即得$p^rq^{n-r}$, § 784.

但因共有$n$次試行,吾人可用$C^n_r$種方法配合此$r$次試行;而此等方法當然屬於互斥者也.

故所討論之或然率爲$C^n_rp^rq^{n-r}$, § 787.

例如,以一顆骰子擲五次而適得二次爲幺之機會,或者以五顆骰子同擲而適得二顆爲幺之機會,等於$C^5_2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$,即$625/3888$.

注意:依據二項定理,此$C^n_rp^rq^{n-r}$乃$(p+q)^n$之展開式中含有$p^r$之項,因$C^n_r=C^n_{n-r}$故也.

790 **定理五** 在$n$次試行中某事象至少成就$r$次之或然率等於$(p+q)^n$之展開式中開首$n-r+1$項之和,即

$$p^n+C^n_1p^{n-1}q+C^n_2p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+C^n_{n-r}p^rq^{n-r}.$$

蓋,若某事象確成就 $r$ 次或確多於 $r$ 次,即爲某事象至少成就 $r$ 次,而 $p^n$, $C^n_1p^{n-1}q$, ……, $C^n_{n-r}p^rq^{n-r}$ 各項代表此事象確成就 $n, n-1$, ……, $r$ 次之或然率 §789.

例如,一顆骰子投擲五次至少有二次現么之機會爲

$$\left(\frac{1}{6}\right)^5+5\left(\frac{1}{6}\right)^4\frac{5}{6}+10\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2+10\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3,\ 即\ \frac{763}{3888}.$$

例一. $A$, $B$ 二人爲某種遊戲,不得中途引退,而 $A$ 之技能則倍於 $B$. 設以五次爲一回合,則 $A$ 能得勝其中三次之機會若何?

$A$ 能得勝一次之機會爲 2/3, 而失敗爲 1/3. 故 $A$ 於一個回合中得勝三次之機會等於 $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^5$ 之開首三項之和,即 $\left(\frac{2}{3}\right)^5+5\left(\frac{2}{3}\right)^4\frac{1}{3}+10\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2$, 即 64/81.

例二. 承例一,而於 $B$ 勝二次之前 $A$ 得勝三次之機會若何?

所究機會爲 $A$ 於開首四次中至少得勝三次;故爲 $\left(\frac{2}{3}\right)^4+4\left(\frac{2}{3}\right)^3\frac{1}{3}$, 即 $\frac{16}{27}$.

而,一般的情形之下,於 $B$ 得勝 $n$ 次之前 $A$ 得勝 $m$ 次之機會與開首 $m+n-1$ 次中 $A$ 至少得勝 $m$ 次之機會相同.

例三. 以銅元十枚同擲,其適有六枚正面向上之機會若何? 又,至少有六枚正面向上之機會若何?

例四. 四骰同擲,則適得三枚爲么之機會若何? 至少三枚爲么之機會又若何?

例五. 承例一,則五次遊戲中,$A$ 至少得勝四次之機會若何?

例六. 承例一,則於 $B$ 勝一次之前 $A$ 先勝四次之機會若何?

## 習　題　LXVIII

1. 一囊盛有白球三枚,黑球五枚,及紅球七枚,每次從中引取一球而即隨手放入,試求下列各種引取之機會:(1) 先爲白球一枚,繼以紅球一枚,終爲黑球一枚;(2) 白,紅,黑球各一枚而次序不論. ① $\frac{3}{15}\cdot\frac{7}{15}\cdot\frac{5}{15}=\frac{7}{225}$ ② $\frac{7}{225}\cdot 6$

2. 上題中設球取出後不復收入,則每三次引取中第一次即得一白球之機會若何? $\frac{3}{15}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{11}{13}$

3. 一袋盛有五角幣五枚,一元幣四枚,五元幣三枚,設讓某君從中任取二枚,則其希冀之值若何?

4. 某門不知是否上鎖,故其上鎖之機會為1/2,鑰匙一束共有八枚,其一為啟此門之用.設余於此八枚鑰匙中任取三枚而前往啟門.則余得開啟此門之機會若何? $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{C_3^7}{C_3^8}$

5. 有獨立事象三,其機會各為1/2, 2/3, 及3/4. 其中無一得以成就之機會若何?僅有一事象成就則若何?僅有二事象成就則若何?三事象皆得成就又若何?

6. 二骰同擲,則得和為七點或十一點而不利於其一之機比若何?

7. 三骰同擲而不利於總和十點之機比若何? 利於總和大於五點之機比又若何?

8. 箱中有券十一張,各以1, 2,……11 標明,從中引取三券,則其數之和得為十二之機會若何? 其和為奇數之機會又若何? $\frac{7}{C_3^{11}}$, $\frac{C_3^6+C_2^5\cdot C_1^6}{C_3^{11}}$

9. $A$, $B$二賭徒以二骰為賭具,議定擲得十一點則為$A$勝,七點則為$B$勝,其餘點數則將賭注均分.試比較二人之機會.

10. 若上題二賭徒議定$A$先擲得六點而後$B$得七點則為$A$勝,$B$先得七點而$A$方得六點則為$B$勝,以$A$開首而輪流投擲.試比較二人之機會.

11. 一囊盛有白球四枚及黑球八枚,$A$, $B$, $C$三賭徒議定誰能先行取得一枚白球者為勝;依$A$, $B$, $C$為引取之先後,若球被取出後不再投入,則其各人之機會若何?若球被取出後卽復投入則又若何?

12. 某種獎券發行百張,其中有五張之獎額為\$100,十張為\$50,二十張為\$5,則一券之值當為幾何?

13. 囊$A$盛球五枚,其一白色;囊$B$盛球六枚,無一為白色.設自囊$A$取球三枚置之囊$B$,然後再自囊$B$取球三枚置於囊$A$,則此白球在囊$A$之機會若何?

14. 囊$A$有球$m$枚,而$a$枚為白色;囊$B$有球$r$枚而$b$枚為白色.試問任從二囊之一引取一球而得為白色之機會是否等於諸球置於一囊以任取一球而得為白色之機會?

15. 連元旦在內,某市鎮七天內共死五人.問:元旦日不死人之機會若何?

16. 設平均三個六十歲之老人中,有二人可以活至七十歲,則現在五個六十歲之老人中至少有三人再活十歲之機會若何?

17. 某童能力,平均於五個問題中可以解答其三.若某次考試共有八題而須解答五題為及格,則某童得以及格之機會若何?

18. 某人以二骰同擲,若和為七點,卽可得洋一元,若在第二次方擲得則亦可得洋一元,如是以至擲得七點為止.試求其希冀之總值.

17, $C_5^8\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^3+C_6^8\left(\frac{3}{5}\right)^6\left(\frac{2}{5}\right)^2+C_7^8\left(\frac{3}{5}\right)^7\frac{2}{3}+C_8^8\left(\frac{3}{5}\right)^8=$

19. $A$君與$B$君作網球戲,平均$A$於四盤中可勝三盤.問一局中其勝$B$之比為六與三之機會若何?若和局不計,則其勝$B$一局之總機會又若何?

20. 承上題所述條件,若二人已打至四比二而不利於$A$,則$A$之得勝之機會若何?

21. $A$,$B$二人各注\$32對賭,而以得三分(Three points)者為勝;若$A$得二分$B$得一分之時中斷,則彼等將如何以分此\$64?

# XXVIII. 算學的歸納法

**算學的歸納法** 最近諸章所論及者中,有諸多公式均得以所謂算學的歸納法之證法而成立之,其解釋如下例: 791

例. 求證開首$n$個奇數之和等於$n^2$.

吾人所欲證明者為

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2 \tag{1}$$

$n$之某種數值,如1或2,則以吾人之觀察亦可知(1)式為正確.設$n$為代表$n$之某特定數值,如$k$,而上式為正確,亦即

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=k^2 \tag{2}$$

已知其為正確.於(2)式之兩端各加以其次一奇數$2(k+1)-1$,亦即$2k+1$,而以$(k+1)^2$代$k^2+2k+1$,則得

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k+1)=(k+1)^2 \tag{3}$$

但,若吾人在(1)式以$(k+1)$代$n$,亦可得(3)式.故吾人可知若$n$具特定數值$k$時(1)式為正確.則$n$具次一較大數值$k+1$時是式亦屬正確.

又,吾人以觀察之所及,已知$n$具特定數1時(1)式為正確.則$n=1+1$,即2,時是式亦正確;而$n=2+1$,即3,時亦然;以至$n$為一切正整數值時莫不皆然.此即本問題所求之證明矣.

普徧言之,若已求得含有$n$之公式對於$n=1$為正確,且能證明若$n=k$時為正確,因而$n=k+1$時亦正確,則吾人可以斷言$n$對於一切正整數值皆正確.蓋因$n=1$時此公式既屬正確,則$n=1+1$,即2,時亦屬正確,$n=2+1$,即3,時亦然,以至$n$為一切正整數值時莫不皆然.

爲明釋是法起見,吾人可益以下列二項定理之證明:

$n$之爲數不大時,吾人可用實際的乘法而求得:

$$(a+b)^n=a^n+C_1^n a^{n-1}b+C_2^n a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+C_r^n a^{n-r}b^r+\cdots\cdots \qquad (1)$$

(1)式之兩端同以$a+b$乘之,則依§773, 1, 可得

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\left.\begin{array}{l}C_1^n\\ +1\end{array}\right| a^n b+\left.\begin{array}{l}C_2^n\\ +C_1^n\end{array}\right| a^{n-1}b^2\cdots\cdots+\left.\begin{array}{l}C_r^n\\ +C_{r-1}^n\end{array}\right| a^{n-r+1}b^r+\cdots\cdots$$

$$=a^{n+1}+C_1^{n+1}a^n b+C_2^{n+1}a^{n-1}b^2+\cdots\cdots$$

$$+C_r^{n+1}a^{(n+1)-r}b^r+\cdots\cdots. \qquad (2)$$

但若以$n+1$代$n$則(2)式與(1)式相同.

故$n=k$時(1)式若屬正確,則$n=k+1$時亦必正確.但$n=1$時已知(1)式正確.故$n=1+1$,或2,時亦正確,$n=2+1$,或3,時亦然,如是可推及其他.

因公式$C_r^n+C_{r-1}^n=C_r^{n+1}$可單獨以§774配合之原則而得證明,此處二項定理之證明固未倚賴之而證明也.

## 習　題　LXIX

試以算學的歸納法證明下列諸公式, §§701, 712.

1. $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=a(1-r^n)/(1-r)$.
2. $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$.
3. $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=n^2(n+1)^2/4$.
4. $1+3+6+\cdots\cdots+n(n+1)/2!=n(n+1)(n+2)/3!$

# XXIX. 方程式論

## 基本定理. 有理根

792　**一元n次普徧方程式之兩種標準形式**　凡有理整方程式僅含一元,如$x$,而其次數爲$n$次者,皆得化爲下之標準形式:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0. \qquad 1)$$

若係數$a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$爲已知數,則(1)式曰數字方程式,若全部爲待定之數,則(1)式曰$n$次普徧方程式.

最後之一係數 $a_n$ 常稱爲絕對項.

若係數 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 中,無一爲 0,則 (1) 式曰完全方程式;否則曰不完全方程式.完全方程式之項數爲 $n+1$.

嗣後若遇係數 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$ 皆爲實數,則其第一係數 $a_0$ 可視爲正,若皆爲有理數,則其全體可視爲無公因式之整數.

以 $a_0$ 除 (1) 之兩端,則此式即可化爲下之第二標準形式

$$x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n=0, \tag{2}$$

其中第一係數爲 1,而 $b_1=a_1/a_0$,餘類推.通常 (2) 之形式,較爲便利.

在本章中,形式 (1) 或 (2) 之方程式,常以 $f(x)=0$ 表之.

**方程式之根**　方程式 $f(x)=0$ 之根,爲使多項式 $f(x)$ 爲 0、 793
之 $x$ 值,§§ 332, 333. 有時方程式之根,稱爲多項式之根,較爲便利.

由根之定義,可知 $a_n$ 若爲 0,則 $f(x)=0$ 有一根爲 0;若方程 794
式 $f(x)=0$ 之係數皆爲正,則其根必無正者,又,若完全方程式 $f(x)=0$ 之係數,正負相間,則其根必無負者.

例如,$2x^3+x^2+1=0$ 不能有正根,因 $x$ 若爲正,則多項式 $2x^3+x^2+1$ 不能爲 0 故也;又 $2x^3-x^2+3x-1=0$ 不能有負根,因 $x$ 若爲負,則 $2x^3-x^2+3x-1$ 不能爲 0 故也.

**定理一**　若 $b$ 爲 $f(x)=0$ 之根,則 $f(x)$ 得爲 $x-b$ 所整除;反之, 795
若 $f(x)$ 得爲 $x-b$ 所整除,則 $b$ 爲 $f(x)=0$ 之根.

何則,由 § 413, $f(x)$ 除以 $x-b$ 時所得之餘式爲 $f(b)$. 但 $b$ 若爲 $f(x)=0$ 之根,則此餘式 $f(b)$ 爲 0, § 793, 故 $f(x)$ 得爲 $x-b$ 所整除.反之,若 $f(x)$ 得爲 $x-b$ 所整除,則餘式 $f(b)$ 爲 0,故 $b$ 爲 $f(x)=0$ 之根.

例. 求證 3 爲 $f(x)=x^3-2x^2-9=0$ 之根.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & +0 & -9 & \underline{3} \\ & 3 & 3 & 9 & \\ \hline 1 & 1 & 3, & 0 & =f(3) \end{array}$$

用綜合除法, § 411, 以 $x-3$ 除 $x^3-2x^2-9$, 可知餘式 $f(3)$ 爲 0, 故 3 爲 $f(x)=0$ 之根.

796 若 $b$ 爲 $f(x)=0$ 之根, 則 $f(x)$ 得爲 $x-b$ 所整除; 玆命其商爲 $\phi(x)$, 則有

$$f(x)=(x-b)\phi(x).$$

故 $f(x)=0$ 其餘之根, 爲使多項式 $\phi(x)$ 爲 0 之 $x$ 值; 換言之, 即爲降次方程式 $\phi(x)=0$ 之根, § 341.

例. 解方程式 $x^3-3x^2+5x-3=0$. 正係數加負係數等於零則必有一根

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & +5 & -3 & \underline{1} \\ & 1 & -2 & +3 & \\ \hline 1 & -2 & +3, & 0 & \end{array}$$

由觀察, 知 1 爲一根, 以 $x-1$ 除 $x^3-3x^2+5x-3$, 則得降次方程式 $x^2-2x+3=0$. 依據 § 631, 此二次方程式之根爲 $1\pm i\sqrt{2}$. 故所設方程式之根爲 1, $1+i\sqrt{2}$, 及 $1-i\sqrt{2}$.

797 玆假定凡有理整方程式 $f(x)=0$ 至少有一根, 其證見後.

由此假定及 § 795, 可導得代數學之基本定理如下.

798 **定理二** 凡 $n$ 次方程式, 如

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

皆有, 且祇有, $n$ 個根.

由 § 797, $x$ 必有一值能使 $f(x)$ 爲 0, 命之爲 $\beta_1$. 於是 $f(x)$ 得爲 $x-\beta_1$ 所整除, § 795, 而其商之第一項爲 $a_0x^{n-1}$. 故

$$f(x)=(x-\beta_1)(a_0x^{n-1}+\cdots\cdots). \tag{1}$$

依據同理, $x$ 必有一值能使多項式 $a_0x^{n-1}+\cdots\cdots$ 爲 0, 命之爲 $\beta_2$, 則 $a_0x^{n-1}+\cdots\cdots=(x-\beta_2)(a_0x^{n-2}+\cdots\cdots)$. 故由 (1), 得

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(a_0x^{n-2}+\cdots\cdots). \tag{2}$$

如是繼續進行, 經 $n$ 回除法後, 即得

$$f(x)=a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots\cdots(x-\beta_n). \tag{3}$$

由是可知爲有 $n$ 個一次因式,卽,$x-\beta_1, x-\beta_2, \cdots\cdots, x-\beta_n$ 存在,而 $f(x)$ 爲其積,且由 § 419,除此諸因式及其積外,$f(x)$ 不能更有其他因式.

若積之諸因數之一爲 0,則積亦爲 0,因此由 (3) 可知若 $x=\beta_1$,或 $\beta_2, \cdots\cdots$,或 $\beta_n$,則 $f(x)$ 爲 0.故由 § 793,$n$ 個數 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n$ 爲方程式 $f(x)=0$ 之諸根,且其根盡於此.

由此定理,可知以下各事.解方程式 $f(x)=0$ 之問題,與分解 799
多項式 $f(x)$ 爲因式之問題,大同而小異.欲作一方程式,令其根爲所設各數,祇須以此各數,依次減 $x$,而後命所得諸二項因式之積等於 0 卽得.

例. 作一方程式,令其根爲 2, 1/2, −1, 0.

所求方程式爲 $(x-2)(x-1/2)(x+1)(x-0)=0$,亦卽 $2x^4-3x^3-3x^2+2x=0$.

**重根**　注意,有時諸根 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n$ 中,有兩個或更多個 800
相等.若其中有兩個或更多個等於 $\beta$,則名 $\beta$ 曰重根.依照等於 $\beta$ 之根之個數爲二,三,……,普徧之,爲 $r$,而名 $\beta$ 曰二重根,三重根,普徧之,$r$ 重根.單一之根,可謂一重根.由 § 798 顯然可知.欲令 $\beta$ 爲 $f(x)=0$ 之 $r$ 重根,則 $f(x)$ 須得爲 $(x-\beta)^r$ 所整除,但不爲 $(x-\beta)^{r+1}$ 所整除.

故吾人謂凡 $n$ 次方程式有 $n$ 個根時,須知其中各 $r$ 重根,皆重複 $r$ 回也.但謂凡 $n$ 次方程式,皆有 $n$ 個不同之根,則當然不可.

例如,$x^3-3x^2+3x-1=0$ 爲一三次方程式;但因多項式 $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$,故其各根皆爲1.*

**求數字方程式之有理根**　命 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ 801

爲有整係數之方程式，$b$ 爲一整數，$b/c$ 爲最簡有理分數．於是由 §§451, 795. 若 $b$ 爲 $f(x)=0$ 之一根，則 $b$ 爲 $a_n$ 之一因式；又由 §§452, 795，若 $b/c$ 爲一根，則 $b$ 爲 $a_n$ 之一因式，而 $c$ 爲 $a_0$ 之一因式．故若 $a_0=1$，而 $c\neq\pm1$，換言之，$b/c$ 非整數 $\pm b$，則 $b/c$ 不能爲一根．故有下之定理，§454：

方程式之呈 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ 形式，而 $a_1, \cdots\cdots, a_n$ 表整數者，不能有有理分數根．

802　由上文可知，係數爲有理數之方程式，其一切有理根皆可用若干回之試測以求得之．此種試測，用綜合除法爲之甚易．

例．求方程式 $3x^5-8x^4+x^2+12x+4=0$ 之有理根．

所有可能有理根，盡在 $\pm1$, $\pm2$, $\pm4$, $\pm1/3$, $\pm2/3$, $\pm4/3$ 中．由觀察，知 $\pm1$ 非根．以 2 試之，知其爲一根，且得降次方程式 $3x^4-2x^3-4x^2-7x-2=0$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
3 & -8 & +0 & +1 & +12 & +4 & 2 \\
 & 0 & -4 & -8 & -14 & -4 & \\
\hline
3 & -2 & -4 & -7 & -2, & 0 & 2 \\
 & 6 & 8 & 8 & 2 & & \\
\hline
3 & 4 & 4 & 1, & 0 & & -1/3 \\
 & -1 & -1 & -1 & & & \\
\hline
3 & 3 & 3, & 0 & & &
\end{array}
$$

又 2 亦爲此降次方程式之一根，且第二降次方程式爲 $3x^3+4x^2+4x+1=0$. 此方程式之各項皆爲正，故必無正根，§794．以 $-1$ 試之，知其非根．以 $-1/3$ 試之知其爲一根．且得第三降次方程式 $x^2+x+1=0$.

故所設方程式之有理根爲 2, 2, $-1/3$. 解 $x^2+x+1=0$. 所得其餘之根爲 $(-1\pm i\sqrt{3})/2$.

803　欲令試測之計算較簡，當牢記以下三事：第一，§453 所載之注意；第二，若已知一數非原方程式之根，則此數不能復爲降次方程式之根；第三，以下之定理：

若 $b$ 爲正，且用綜合除法，以 $x-b$ 除 $f(x)$ 所得之結果中，各係數之符號皆爲正，則 $f(x)=0$ 不能有大於 $b$ 之根；若 $b$ 爲負，且仿前所得符號，正負相間，則 $f(x)=0$ 不能有代數上小於 $b$ 之根．

蓋依據綜合除法之性質，若於上述二情形中，增加 $b$ 之絕

對值,則結果中次於第一係數之各係數皆將增加其絕對值,而不變其符號,從而最後之係數,即餘式,不能爲0故也.

例一. 求證 $2x^3+3x^2-4x+5=0$ 無大於1之根.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & +3 & -4 & +5 & \underline{1} \\ & 2 & 5 & 1 & \\ \hline 2 & +5 & +1, & 6 & \end{array}$$

以 $x-1$ 除之,則所得僅正係數.故無大於1之根.若更以 $x-2$ 除之,則所得正係數更大,即爲 $2+7+10, 25$.

例二. 求證 $3x^3+4x^2-3x+1=0$ 無小於 $-2$ 之根.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & +4 & -3 & +1 & \underline{-2} \\ & -6 & +4 & -2 & \\ \hline 3 & -2 & +1, & -1. & \end{array}$$

以 $x+2$ 除之,則得正負相間之係數.故無小於 $-2$ 之根.

若以 $x+3$ 除之,則所得係數之符號同前,而絕對值較大,即爲 $3-5+12, -35$.

據上所述,無論何數,若已知其代數上大於 $f(x)=0$ 之一切 804
實根,則可謂爲此諸根之上限;若已知其代數上小於 $f(x)=0$ 之一切實根,則可謂爲此諸根之下限.

例如,由以上之證明,可知1爲 $2x^3+3x^2-4x+5=0$ 之諸根之上限,及 $-2$ 爲 $3x^3+4x^2-3x+1=0$ 之諸根之下限.

## 習　題　LXX

1. 作方程式,令其根爲
   (1) $a, -b, a+b$.　　(2) $3, 4, 1/2, -1/3, 0$.

2. 求證 $-3$ 爲下方程式之三重根:
$$x^4+8x^3+18x^2-27=0.$$

3. 求證1及1/2爲下方程式之二重根:
$$4x^5-23x^3+33x^2-17x+3=0.$$

4. 試用§803之方法,求 $x^5-5x^4-5x^3+4x^2-7x-250=0$ 之諸根之上限及下限.

5. 求證 $x^4-6x^3+4x^2-10x-3=0$ 無有理根.

以下各方程式皆有一個或多於一個之有理根解之.

6. $x^3-x^2-14x+24=0$.　　7. $x^3-2x^2-25x+50=0$.

8. $3x^3-2x^2+2x+1=0$.　　9. $2x^4+7x^3-2x^2-x=0$.

10. $x^4+4x^3+8x^2+8x+3=0$.　　11. $2x^4+7x^3+4x^2-7x-6=0$.

12. $3x^4+11x^3+9x^2+11x+6=0.$

13. $x^5-9x^4+2x^3+71x^2+81x+70=0.$

14. $2x^5-8x^4+7x^3+5x^2-8x+4=0.$

15. $x^5+3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0.$

16. $12x^4-32x^3+13x^2+8x-4=0.$

17. $x^5-7x^4+10x^3+18x^2-27x-27=0.$

18. $2x^4-17x^3+25x^2+74x-120=0.$

19. $4x^5-9x^3+6x^2-13x+6=0.$

20. $x^5+8x^4+3x^3-80x^2-52x+240=0.$

21. $2x^5+11x^4+23x^3+25x^2+16x+4=0.$

22. $6x^4-89x^3+359x^2-254x+48=0.$

23. $10x^4+41x^3+46x^2+20x+3=0.$

24. $36x^4-108x^3+107x^2-43x+6=0.$

25. $12x^5+20x^4+29x^3+77x^2+69x+18=0.$

26. $2x^6+7x^5+8x^4+7x^3+2x^2-14x-12=0.$

27. $2x^6+11x^5+24x^4+22x^3-8x^2-33x-18=0.$

28. $5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4=0.$

## 根與係數之關係

805 **根與係數之關係.** 以 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n$ 爲根之方程式,若化爲第二標準形式,§792, (2); 則 §798 之恆等式, (3), 變爲

$$x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+b_3x^{n-3}+\cdots\cdots+b_n$$
$$=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)\cdots\cdots(x-\beta_n).$$

上式右端實行乘法,將所得結果排列爲$x$之多項式, §559. 再將兩端$x$同次冪之係數,以等號聯結之, §284. 於是可得係數 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ 與根 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n$ 間之關係如下:

$$-b_1=\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots\cdots+\beta_n, \tag{1}$$

$$b_2=\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\cdots\cdots+\beta_2\beta_3+\cdots\cdots+\beta_{n-1}\beta_n, \tag{2}$$

$$-b_3=\beta_1\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_2\beta_4+\cdots\cdots+\beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n, \tag{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-)^nb_n=\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\cdots\beta_n. \tag{n}$$

其中 (2), (3), ⋯⋯ 之右端,分別爲諸根兩兩之積之總和,三三之積之總和,餘類推;又右端各項中根之個數若爲偶數,則左端之符號爲正;若爲奇數,則爲負. 故有下之定理:

**定理** 凡已化爲 806

$$x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_n=0$$

形式之方程式中,第二項之係數 $b_1$ 與各根之和,絕對值相等,符號相反;絕對項 $b_n$ 與各根之積之和,絕對值相等,符號之同否,視 $n$ 之爲偶奇而定;又各中間項之係數 $b_r$ 與諸根 $r$ 之積之和,絕對值相等,符號之同否,視 $r$ 之爲偶奇而定.

若方程式之第一係數非 1,則在應用本定理之前,須以此係數除全方程式.若方程式不完全,則須知其缺項之係數爲 0.

如是,吾人可不解方程式 $3x^3-6x+2=0$ 而知其根 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 之關係如下.將原方程式化爲適當之形式,以便應用定理,則得 $x^3+0x^2-2x+2/3=0$.故

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=0,\ \beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3=-2,\ \beta_1\beta_2\beta_3=-2/3.$$

807 若方程式之各根僅有一者未知,則欲求此根,可由 $-b_1$ 減各已知根之和;或以各已知根之積除 $b_n$ 卽得,但 $n$ 若爲奇數,則 $b_n$ 在事前須變號.

例. $2x^3+3x^2-23x-12=0$ 之二根爲 3 及 $-4$;他根若何?

他根爲 $-3/2-[3+(-4)]=-1/2$,或爲 $6\div3(-4)=-1/2$.

808 若諸根本身間具有某種關係,則必有一對應關係存於諸係數間.欲求此關係,可用 §806 之定理.

例一. 欲令 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根成等比級數,其條件如何?

命諸根爲 $a/\beta$, $a$, $a\beta$,則

$$\frac{a}{\beta}+a+a\beta=-p,\quad \frac{a^2}{\beta}+a^2+a^2\beta=q,\quad \frac{a}{\beta}\cdot a\cdot a\beta=-r.$$

將第三方程式化爲 $a^3=-r$,於是 $a=\sqrt[3]{-r}$.

以第一方程式除第二方程式,以 $a=\sqrt[3]{-r}$ 代入結果,簡化,卽得 $q^3-p^3r=0$.

例二. 設方程式 $x^3+8x^2+5x-50=0$ 有二重根,求解.

以 $\alpha, \alpha, \beta$ 表諸根,則

$$2\alpha+\beta=-8,\quad \alpha^2+2\alpha\beta=5,\quad \alpha^2\beta=50.$$

就 $\alpha$ 及 $\beta$ 解第一第二方程式，則得 $\alpha=-5$, $\beta=2$, 及 $\alpha=-1/3$, $\beta=-22/3$.

二值 $\alpha=-5$, $\beta=2$ 適合方程式 $\alpha^2\beta=50$, 但他二值 $\alpha=-1/3$, $\beta=-22/3$ 不適合此方程式.

故所求之根爲 $-5, -5, 2$.

809 **根之對稱函數** §805 中，以根表係數之諸式，皆爲根之對稱函數，§540. 根之一切其他有理對稱函數，皆得以此諸函數表之成有理函數. 因之又得以方程式之係數表之成有理函數，其證見後 §868.

例一. 求方程式 $2x^3-3x^2-4x-5=0$ 之根之平方和.

命諸根爲 $\alpha, \beta, \gamma$, 則

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(3/2)^2+4=6\tfrac{1}{4}.$$

例二. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根爲 $\alpha,\beta,\gamma$, 則以 $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ 爲根之方程式如何?

以 $p'$, $q'$, $r'$ 表所求方程式之係數，則

$$-p'=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=q,$$

$$q'=\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta+\alpha\beta\cdot\beta\gamma$$

$$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=(-r)(-p)=rp,$$

$$-r'=\beta\gamma\cdot\gamma\alpha\cdot\alpha\beta=(\alpha\beta\gamma)^2=r^2.$$

故所求方程式爲 $x^3-qx^2+prx-r^2=0$.

## 習題 LXXI

1. $2x^3-7x^2+10x-6=0$ 之二根爲 $1\pm i$; 求其第三根.
2. 設以下各方程式之根皆成等比級數，試求之.
   (1) $8x^3-14x^2-21x+27=0$, (2) $x^3+x^2+3x+27=0$.
3. 設以下各方程式之根皆成等差級數，試求之.
   (1) $x^3+6x^2+7x-2=0$. (2) $x^3-9x^2+23x-15=0$.
4. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之二根僅符號相異，求證 $pq=r$.
5. 欲令 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之一根爲他根之倒數，其條件若何?
6. 設方程式 $x^4+4x^3+10x^2+12x+9=0$ 有兩個二重根，求解.
7. 設方程式 $14x^3-13x^2-18x+9=0$ 之根成調和級數，求解.

8. 設方程式 $x^4-x^3-56x^2+36x+720=0$ 之二根有比 $2:3$, 他二根之差爲 1, 求解.

9. 設 $\alpha, \beta, \gamma$ 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根, 試作方程式, 令其根爲

(1) $-\alpha,\ -\beta,\ -\gamma$.　(2) $k\alpha, k\beta, k\gamma$.

(3) $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$.　(4) $\alpha+k,\ \beta+k,\ \gamma+k$.

(5) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.　(6) $-1/\alpha^2,\ -1/\beta^2,\ -1/\gamma^2$.

10. 設 $\alpha, \beta, \gamma$ 爲 $2x^3+x^2-4x+1=0$ 之根, 求以下各式之值:

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.　(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

(3) $1/\beta\gamma+1/\gamma\alpha+1/\alpha\beta$.　(4) $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+\beta\gamma^2+\gamma\beta^2+\gamma^2\alpha+\alpha^2\gamma$.

11. 設 $\alpha, \beta, \gamma$ 爲 $x^3-2x^2+x-3=0$ 之根, 求以下各式之值:

(1) $\alpha/\beta\gamma+\beta/\gamma\alpha+\gamma/\alpha\beta$.　(2) $\alpha\beta/\gamma+\beta\gamma/\alpha+\gamma\alpha/\beta$.

(3) $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$.　(4) $(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)$.

(5) $\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+\beta\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$.

# 方程式之變換

**幾種重要變換**　有時若將一與方程式 $f(x)=0$ 變換爲另 810
一方程式, 令其根與原方程式 $f(x)=0$ 之根有一定關係, 則較爲有利. 最常用之變換如下:

將一與方程式, $f(x)=0$ 變換爲另一方程式, 令其根與原方 811
程式之根同絕對值而異號.

所求方程式爲 $f(-y)=0$. 因以任何數, 如 $\beta$, 代 $f(x)$ 中之 $x$, 與以 $-\beta$ 代 $f(-y)$ 中之 $y$ 所得之結果相同故也. 因此, 若 $f(x)$ 在 $x=\beta$ 時爲 0, 則 $f(-y)$ 在 $y=-\beta$ 時爲 0; 換言之, 若 $\beta$ 爲 $f(x)=0$ 之根, 則 $-\beta$ 爲 $f(-y)=0$ 之根.

故 $f(x)=0$ 之各根變號, 即成 $f(-y)=0$ 之根; 且 $f(-y)=0$ 除此諸根外更無他根, 因 $f(x)=0$ 與 $f(-y)=0$ 同次故也.

若與方程式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0,$$

則所求方程式爲

$$a_0(-y)^n+a_1(-y)^{n-1}+a_2(-y)^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0,$$

簡化之,則爲

$$a_0y^n-a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^na_n=0.$$

故由一與方程式作所求方程式時,若$n$爲偶數,則變其奇數次項之號卽得;若$n$爲奇數,則變其偶數次項及絕對項之號卽得.

變換方程式中之未知數$y$,可代以$x$,是以可書$f(-x)=0$以代$f(-y)=0$.

例. 試將$4x^5-9x^3+6x^2-13x+6=0$之根變號.

變偶數次項之號,則得

$$4x^5-9x^3-6x^2-13x-6=0$$

按諸事實,則此與方程式之根爲$1/2$, $3/2$, $-2$, $\pm i$, 而變換方程式之根爲$-1/2$, $-3/2$, $2$, $\mp i$.

812　將一與方程式$f(x)=0$變換爲另一方程式,令其根等於原方程式之根乘一常數,如$k$,所得之積.

所求方程式爲$f(y/k)=0$. 因$f(x)$若在$x=\beta$時爲0,則$f(y/k)$在$y/k=\beta$,卽$y=k\beta$時,爲0故也(比較§811).

若與方程式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0,$$

則所求方程式爲

$$a_0\left(\frac{y}{k}\right)^n+a_1\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{y}{k}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0,$$

去分母,則爲

$$a_0y^n+ka_1y^{n-1}+k^2a_2y^{n-2}+\cdots\cdots+k^na_n=0.$$

故作所求方程式時，可以$k$乘原方程式之第二項，以$k^2$乘其第三項，餘準此，但若有缺項，須計及之，如是卽得.

若$k=-1$，則此變換與§811者同.

例. 以2乘$x^4+2x^3-x+3=0$之根. 又以2除之.

第一所求方程式為$x^4+4x^3-8x+48=0$. 又除以2與乘以1/2同，故第二所求方程式為

$$x^4+x^3-x/8+3/16=0, \text{ 或 } 16x^4+16x^3-2x+3=0.$$

下例示今所論之變換之一重要應用. 813

例. 試將方程式$36x^3+18x^2+2x+9=0$，變換為另一方程式，令其第一係數為1，其餘係數為整數.

以36除之，則得 $$x^3+x^2/2+x/18+1/4=0. \tag{1}$$

以$k$乘其根， $$x^3+kx^2/2+k^2x/18+k^3/4=0. \tag{2}$$

由視察，能消去各分母之最小$k$值為6. 以6代(2)中之$k$,

$$x^3+3x^2+2x+54=0, \tag{3}$$

此卽所求方程式. (3)之各根除以6，卽得方程式(1)之各根.

將一與方程式$f(x)=0$變換為另一方程式，令其根等於原方程式之根之倒數. 814

所求方程式為$f(1/y)=0$. 因$f(x)$若在$x=\beta$時為0，則$f(1/y)$在$1/y=\beta$，卽$y=1/\beta$時，為0故也.

若與方程式為

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

則所求方程式為

$$a_0/y^n+a_1/y^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}/y+a_n=0,$$

去分母，則得

$$a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots\cdots+a_1y+a_0=0,$$

故作所求方程式時，僅須將所設方程式中係數之順序倒轉卽得.

例. 試將 $2x^4-x^3-3x+4=0$ 之各根,易為其倒數.

倒轉其係數,則得 $4x^4-3x^3-x^2+2=0$.

815 如 $2x^3+3x^2-3x-2=0$ 一類之方程式雖經此種變換,換言之,其係數之順序雖倒轉,而其形不變時,名之曰倒數方程式,§645. 若 $\beta$ 為其一根,則 $1/\beta$ 亦必為其一根.故其次數若為偶數,則其所有根之半部,為其他半部之倒數.其次數若為奇數,則除一根以外,其他諸根亦然;但此時必有一根為其本身之倒數,換言之,必有一根為1或 $-1$. 例如 $2x^3+3x^2-3x-2=0$ 之一根為1,他根為 $-2$ 及 $-1/2$.

816 由此變換之性質,可知下事:設一方程式有變係數,而其第一係數為0時,則必有一根變為無窮大;其首二係數為0時則必有二根變為無窮大;餘準此.

例一. 求證 $m$ 為0時,$mx^3+3x^2-2x+1=0$ 之一根變為無窮大.

應用§814於 $$mx^3+3x^2-2x+1=0, \tag{1}$$

則得 $$x^3-2x^2+3x+m=0. \tag{2}$$

設(2)之根為 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$,則(1)之根為 $1/\beta_1, 1/\beta_2, 1/\beta_3$.

由§806,$\beta_1\beta_2\beta_3=-m$. 故 $m$ 若趨近0為極限,則諸根 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 中,必有一根亦趨近0為極限,命此根為 $\beta_1$,則(1)之對應根,即 $1/\beta_1$,必趨近 $\infty$, §512.

例二. 求證 $m$ 為0時,$mx^3+m^2x^2+x+1=0$ 之二根變為無窮大.

應用§814於 $$mx^3+m^2x^2+x+1=0, \tag{1}$$

則得 $$x^3+x^2+m^2x+m=0. \tag{2}$$

設(2)之根為 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$,則(1)之根為 $1/\beta_1, 1/\beta_2, 1/\beta_3$.

又, $$\beta_1\beta_2\beta_3=-m,\quad \beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3=m^2.$$

由(3),可知 $m$ 若趨近0,則諸根 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 中有二根亦趨近0,命此二根為 $\beta_1, \beta_2$,則(1)之對應根,即 $1/\beta_1, 1/\beta_2$,必趨近 $\infty$.

817 將一與方程式 $f(x)=0$ 變換為另一方程式,令其根等於原方程式之根減以一常數,如 $k$,所得之差.

所求方程式為 $f(y+k)=0$. 因 $f(x)$ 若在 $x=\beta$ 時為0,則 $f(y+k)$

在 $y+k=\beta$, 卽 $y=\beta-k$, 時爲 0 故也.

若與方程式爲

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

則所求方程式爲

$$f(y+k)=a_0(y+k)^n+a_1(y+k)^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0,$$

依照二項定理,展開其各項,且類集之,則得

$$\phi(y)=c_0y^n+c_1y^{n-1}+\cdots\cdots+c_{n-1}y+c_n=0,$$

其中 $c_0=a_0$, $c_1=nka_0+a_1$, 餘類推.

用此法由 $f(x)$ 求 $\phi(y)$, 常極費力. 下法較前簡捷遠甚, 至少當 $f(x)$ 之係數爲所設有理値時爲然.

若 $x=y+k$, 則 $y=x-k$ 於是有

$$f(x)=f(y+k)=\phi(y)=\phi(x-k),$$

亦卽, $c_0(x-k)^n+\cdots\cdots+c_{n-1}(x-k)+c_n\equiv a_0x^n+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

若以 $x-k$ 除此恆等式之兩端, 更以 $x-k$ 除所得之商, 如是以往, 則左端歷次所得之餘式, 卽 $c_n, c_{n-1}, \cdots\cdots$, 與右端者同. 故 $\phi(y)$ 可依下法由 $f(x)$ 求得之: 以 $x-k$ 除 $f(x)$, 以 $x-k$ 除所得之商, 仿此進行. 歷次餘式爲 $c_n, c_{n-1}, \cdots\cdots, c_1$, 最後之商爲 $c_0$ (比較 § 423). 此除法當用綜合除法爲之.

**例一.** 以 4 減小 $2x^3-7x^2-3x+1=0$ 之根.

**第一法.** 以 $y+4$ 代 $x$, 則得

$$\begin{aligned}2x^3-7x^2-3x+1&=2(y+4)^3-7(y+4)^2-3(y+4)+1\\&=2y^3+17y^2+37y+5.\end{aligned}$$

**第二法.** 依照 § 423, 排列演算, 則得

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & -7 & -3 & +1 & \underline{4} \\
 & 8 & 4 & 4 & \\ \hline
2 & +1 & +1, & 5 & \quad\therefore\ c_3=5. \\
 & 8 & 36 & & \\ \cline{1-3}
2 & +9, & 37 & & \quad\therefore\ c_2=37. \\
 & 8 & & & \\ \cline{1-2}
2, & 17 & & & \quad\therefore\ c_1=17 \text{ 及 } c_0=2.
\end{array}$$

故知前得所求方程式 $2y^3+17y^2+37y+5=0$.

例二. 以4增大 $x^3+4x^2+x+3=0$ 之根.

增4於根,卽由根減 $-4$. 故欲得所求方程式,可將 $y-4$ 代 $x$, 或以 $-4$ 爲除數行綜合除法卽得. 故所求方程式爲 $y^3-8y^2+17y-1=0$.

818 一與方程式,由 §817 之助,得變換爲缺乏未知數某次冪之另一方程式.

a型式之缺第二項則原根減小 $-\frac{b}{na}$

例一. 試將方程式 $x^3-3x^2+5x+6=0$ 變換爲另一方程式,而消失其未知數之二次冪.

$x=y-\frac{b}{na}$

以 $x=y+k$ 代入,則得 $y^3+(3k-3)y^2+\cdots\cdots$. 故須 $3k-3=0$, 卽 $k=1$. 於是以1減小 $x^3-3x^2+5x+6=0$ 之根,卽得 $x^3+2x+9=0$.

例二. 試將方程式 $x^3-5x^2+8x-1=0$ 變換爲另一方程式,而消失其未知數之一次冪.

以 $x=y+k$ 代入,則得

$$y^3+(3k-5)y^2+(3k^2-10k+8)y+\cdots\cdots=0.$$

故須 $3k^2-10k+8=0$, 卽, $k=2$ 或 $4/3$.

以2減小 $x^3-5x^2+8x-1=0$, 則得 $x^3+x^2+3=0$.

819 設以 $k$ 減小 $f(x)=0$ 之根時,所得方程式 $\phi(x)=0$, 其各項皆爲正,則 $k$ 爲 $f(x)=0$ 之各正根之上限, §804. 何則,此時 $\phi(x)=0$ 無正根, §794. 故 $f(x)=0$ 所有之一切正根減小之以 $k$ 時,皆得負值. 是以是等正根皆小於 $k$, 故云.

令 $\phi(x)=0$ 中各項爲正之最小正數 $k$, 可按綜合除法實行觀察及試行以得之. 此種工作之完成,大多較爲省力.

欲求 $f(x)=0$ 之諸負根之下限,可求 $f(-x)=0$ 之諸根之上限卽得. 何則,設 $k$ 爲 $f(-x)=0$ 之諸根之上限,則 $-k$ 卽爲 $f(x)=0$ 之諸根之下限故也, §811.

例. 求方程式 $f(x)=x^4-6x^3+14x^2+48x-121=0$ 之諸根之上限及下限.

由觀察及試行,知 $k=1$ 及 $k=2$ 皆不能令變換方程式 $\phi(x)=0$ 之各項爲正,但 $k=3$ 則能之,若實行以3減小 $f(x)=0$ 之根,則得 $\phi(x)=x^4+6x^3+14x^2+78x+68=0$. 故3爲 $f(x)=0$ 之根之上限.

方程式 $f(-x)=0$ 爲 $x^4+6x^3+14x^2-48x-121=0$. 由視察及試行,知 3 爲其正根之上限,故 $-3$ 爲 $f(x)=0$ 之負根之下限.

**普偏之有理變換** 由兩方程式 $f(x)=0$, 及 $y=-x$ 消去 $x$, 即得 $f(-y)=0$. §811 中業已證明 $f(-y)=0$ 之根 $y$, 與 $f(x)=0$ 之根 $x$ 間,具 $y=-x$ 之關係. 此可解釋下之普徧定理: 由 $f(x)=0$, 及任意方程式之呈 $y=\phi(x)$ 形式而 $\phi(x)$ 爲有理式者,適當消去 $x$, 則得方程式 $F(y)=0$, 其根與 $f(x)=0$ 之根間有 $y=\phi(x)$ 之關係,因此設 $f(x)=0$ 之根爲 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n$. 則 $F(y)=0$ 之根爲 $\phi(\beta_1), \phi(\beta_2), \cdots\cdots, \phi(\beta_n)$. §§812, 814, 817 之變換可資爲本定理進一層之解釋.其中第一種變換中,方程式 $y=\phi(x)$ 爲 $y=kx$; 第二種變換中,爲 $y=1/x$; 第三種變換中,爲 $y=x-k$ 若 $y=\phi(x)$ 得如上述各款,就 $x$ 解之,則 $x$ 之消去,即甚易完成. 820

例一. 作一方程式,令其根等於 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之諸根之平方.

此處 $y=\phi(x)$ 之關係爲 $y=x^2$.

就 $x$ 解 $y=x^2$, 得 $x=\pm\sqrt{y}$. 以 $\pm\sqrt{y}$ 代入原方程式之 $x$, 而有理化之,則得

$$y^3+(2q-p^2)y^2+(q^2-2pr)y-r^2=0.$$

例二. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根爲 $\alpha, \beta, \gamma$, 作一方程式,令其根爲 $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$.

先設法以所設根 $\alpha, \beta, \gamma$ 之一,及係數 $p, q, r$ 表所擬根 $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$. 此事甚易爲之.因 $-r=\alpha\beta\gamma$, 故 $\beta\gamma=\alpha\beta\gamma/\alpha=-r/\alpha$, $\gamma\alpha=\alpha\beta\gamma/\beta=-r/\beta$, $\alpha\beta=\alpha\beta\gamma/\gamma=-r/\gamma$.

故所求方程式之各根 $y$, 與所設方程式之各根 $x$ 間,有 $y=-r/x$ 之關係.

就 $x$ 解 $y=-r/x$, 得 $x=-r/y$.

以 $-r/y$ 代 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之 $x$, 簡化之,得所求方程式

$$y^3-qy^2+pry-r^2=0.$$

## 習　題　LXXII

1. 試將 $x^7+3x^4-2x^2+6x+7=0$ 之根變號.
2. 試以 $-2$ 乘 $2x^4+x^3-4x^2-6x+8=0$ 之根.又試以 3 除之.
3. 試將 $5x^6-x^4+3x^3+9x+10=0$ 之根易爲其倒數.
4. 試以 2 減小 $2x^5+x^4-3x^2+6=0$ 之根.又試以 1 增大之.

5. 試將 $x^4-x^3/3+x^2/4+x/25-1/48=0$ 變換爲另一方程式,令其係數皆爲整數,且第一係數爲1.

6. 試將方程式 $3x^4-36x^3+x-7=0$ 變換爲另一方程式,令其缺 $x^3$ 項.

7. 試將下二方程式變換爲缺 $x$ 項之方程式.

(1) $x^3+6x^2+9x+10=0$. (2) $x^3-x^2-x-3=0$.

8. 設 $x^4+x^3-x+2=0$ 之根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 試以 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$ 爲根作方程式.

9. 設 $x^4+3x^3+2x^2-1=0$ 之根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 試以 $\beta+\gamma+\delta, \alpha+\gamma+\delta, \alpha+\beta+\delta, \alpha+\beta+\gamma$ 爲根作方程式.

10. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根爲 $\alpha, \beta, \gamma$, 試以

(1) $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}, \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}, \dfrac{\gamma\alpha}{\beta}$. (2) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}, \dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}, \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

爲根,作方程式.

11. 設 $x^3+2x^2+3x+4=0$ 之根爲 $\alpha, \beta, \gamma$, 作方程式,令其根爲

(1) $\beta^2+\gamma^2, \gamma^2+\alpha^2, \alpha^2+\beta^2$. (2) $\alpha(\beta+\gamma), \beta(\gamma+\alpha), \gamma(\alpha+\beta)$.

(3) $\beta\gamma+\dfrac{1}{\alpha}, \gamma\alpha+\dfrac{1}{\beta}, \alpha\beta+\dfrac{1}{\gamma}$. (4) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}, \dfrac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}, \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$.

(5) $\alpha\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right), \beta\left(\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}\right), \gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$.

12. 求以下各方程式之實根之上限及下限.

(1) $x^4+3x^3-13x^2-6x+28=0$. (2) $2x^5-120x^2-38x+27=0$.

(3) $x^4-29x^2+50x+12=0$. (4) $2x^5-26x^3+60x^2-92=0$.

(5) $x^4-14x^3+44x^2+28x-92=0$. (6) $3x^6-35x^3+77x^2-50x-110=0$.

## 虛根　笛卡兒符號律

821　**定理**　命 $f(x)=0$ 爲有實係數之方程式.若此方程式有虛根,則諸虛根必成對存在;換言之,若 $a+ib$ 爲一根,則 $a-ib$ 亦必爲一根.

何則,若 $a+ib$ 爲 $f(x)=0$ 之根,則 $f(x)$ 得爲 $x-(a+ib)$ 所整除,§795;又若得證 $f(x)$ 得爲 $x-(a-ib)$ 所整除,則 $a-ib$ 可斷爲一根,或若得證 $f(x)$ 得爲積 $[x-(a+ib)][x-(a-ib)]$ 所整除,則亦

可得同一之結論.

上述之積有實係數,蓋因 $i^2=-1$, 而

$$[x-(a+ib)][x-(a-ib)]=(x-a)^2+b^2=x^2-2ax+(a^2+b^2)$$

故也.

因多項式 $f(x)$ 及 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 有公因式 $x-(a+ib)$, 故此二多項式有最高公因式. 此最高公因式非 $x-(a+ib)$, 卽 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$. 但不能爲 $x-(a+ib)$, 因此式有虛係數,而有實係數之兩多項式,其最高公因式須有實係數故也, §469. 故 $f(x)$ 及 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 之最高公因式爲 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$; 換言之, $f(x)$ 得爲 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 所整除,此卽所欲證者也.

例. 設 $2x^3+5x^2+46x-87=0$ 之一根爲 $-2+5i$, 試解之.

因 $-2+5i$ 爲一根,故 $-2-5i$ 亦爲一根. 但所有根之和爲 $-5/2$, §806, 故第三根爲 $$-5/2-(-2+5i-2-5i)=3/2.$$

系一　凡有實係數之各多項式 $f(x)$ 皆爲一次或二次實因式之積. 822

因 $f(x)=0$ 有一實根 $c$, $f(x)$ 卽有一實因式 $x-c$ 與之對應, §795; 且 $f(x)=0$ 有一對虛根 $a+ib, a-ib$, $f(x)$ 卽有一實因式 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 與之對應故也, §821.

系二　$f(x)$ 之諸因式中,凡對應於 $f(x)=0$ 之虛根者之積,爲 $x$ 之函數對於 $x$ 之一切實値皆爲正者. 823

因此函數得表示爲 $(x-a)^2+b^2$ 形之因式之積, §821, 而如是之各因式爲平方和,因而對於 $x$ 之一切實値皆爲正故也.

系三　凡有實係數之奇次方程式,至少有一實根. 824

因若有虛根,其個數必爲偶數, §821, 而奇次方程式所有虛

實根之總個數爲奇數,§798,是以至少有一根爲實數故也.

例如,有實係數之三次方程式,其根或皆爲實,或一實而二虛.

825 仿§821得證 $a+\sqrt{b}$ 若爲具有理係數之一與方程式之一根,則 $a-\sqrt{b}$ 亦必爲其一根;但 $a$ 及 $b$ 本身皆爲有理數,而 $\sqrt{b}$ 爲無理數,自不待論.

826 **不可約方程式** 命 $\phi(x)=0$ 爲一方程式,其係數實而有理.若 $\phi(x)$ 之一切因式中,無具實而有理之係數者,則謂 $\phi(x)=0$ 爲不可約(比較§468).

例如,$x^2-2=0$ 及 $x^2+x+1=0$ 爲不可約方程式,但 $x^2-4=0$ 乃非不可約者.

827 **定理** 命 $f(x)=0$ 爲任意方程式,其係數實而有理,又命 $\phi(x)=0$ 爲一不可約方程式,其次數與前方程式之次數同或較低.

若 $\phi(x)=0$ 之一根爲 $f(x)=0$ 之根,則 $\phi(x)=0$ 之各根皆爲 $f(x)=0$ 之根.

此可仿§821證之.若 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 公有一根 $c$,則 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 必有一公因式 $x-c$,§795,故又必有一最高公因式,而此公因式若非 $x-c$,或 $\phi(x)$ 之諸因式中含 $x-c$ 者,即爲 $\phi(x)$ 本身.

但由假設,因 $\phi(x)=0$ 爲一不可約方程式,故以上所舉種種因式中,具 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之最高公因式所必具之有理實係數者,惟 $\phi(x)$,§469.

故 $\phi(x)$ 本身爲 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之最高公因式;換言之,$f(x)$ 得爲 $\phi(x)$ 所整除.

故 $f(x)$ 得以 $f(x)=Q\phi(x)$ 之形式表之,其中 $Q$ 爲一整式.由此恆等式,可知 $\phi(x)$ 若爲 0,則 $f(x)$ 亦必爲 0;換言之,凡 $\phi(x)=0$ 之

根,皆爲 $f(x)=0$ 之根.

**連續及變化**　在具實係數之任意多項式 $f(x)$, 或方程式 828
$f(x)=0$ 中,若某項與其前一項同號,則謂符號連續於其處;又若某項與其前一項異號,則謂符號變化於其處.

例如,在 $x^6-x^4-x^3+2x^2+3x-1=0$ 中,符號之連續,見於 $-x^3$ 及 $3x$ 二項,其變化見於 $-x^4$, $2x^2$, 及 $-1$ 三項.

**定理**　若 $f(x)$ 得爲 $x-b$ 所整除,但 $b$ 爲正,且 $f(x)$ 之係數爲 829
實,則商 $\phi(x)$ 所有之變化,較 $f(x)$ 所有者至少少一.

何則,因 $b$ 爲正,故由綜合除法之法則, §411, 可知 $f(x)$ 除以 $x-b$ 時,在到達 $f(x)$ 之第一負係數以前,商之各係數恆保持正.若其時或此後商之一係數變爲負或 0, 則在到達 $f(x)$ 之次一正係數以前,商之係數恆保持負,餘準此.故 $\phi(x)$ 所有之變化,或爲見於 $f(x)$ 之同一項者.或爲見於 $f(x)$ 之前數項者,此外不能更有其他變化.但由假設,除法爲整除法,故 $\phi(x)$ 中之最後符號,與 $f(x)$ 中之最後符號相異,因而 $\phi(x)$ 無 $f(x)$ 中之最後變化.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
1 & +1 & -2 & -10 & -1 & +12 & -4 & \underline{2} \\
 & 2 & +6 & +8 & -4 & -10 & +4 & \\
\hline
1 & +3 & +4 & -2 & -5 & +2, & 0 &
\end{array}$$

例如, $f(x)=x^6+x^5-2x^4-10x^3-x^2+12x-4$ 得爲 $x-2$ 所整除,其商爲 $\phi(x)=x^5+3x^4+4x^3-2x^2-5x+2$. $f(x)$ 中之首二變化,皆重見於 $\phi(x)$ 中,但第三變化則否.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -1 & +1 & -7 & +2 & \underline{2} \\
 & 2 & +2 & +6 & -2 & \\
\hline
1 & +1 & +3 & -1, & 0 &
\end{array}$$

又, $f(x)=x^4-x^3+x^2-7x+2$ 得爲 $x-2$ 所整除,其商爲 $\phi(x)=x^3+x^2+3x-1$. 在本例中, $f(x)$ 中之四變化,僅有一者重見於 $\phi(x)$ 中,又本例可爲下事之說明:

若 $f(x)$ 之中間變化不見於 $\phi(x)$, 則必成對不見.

**定理(笛卡兒符號律 Descartes's rule of signs)**　方程式 830
$f(x)=0$ 所有正根之個數,不能大於其所有變化之個數,又其

所有負根之個數,不能大於$f(-x)=0$中所有變化之個數.

1. 命$\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_r$爲$f(x)=0$之正根.

設以$x-\beta_1$除$f(x)$,以$x-\beta_2$除所得之商,餘準此,則最後所得商$\phi(x)$中所有之變化較$f(x)$中所有者,至少少$r$, § 829, 於是因$\phi(x)$不能有少於零個變化,故$f(x)$至少必有$r$個變化,換言之,$f(x)$所有變化之個數,至少與$f(x)=0$所有正根之個數相等.

2. $f(x)=0$之負根,爲$f(-x)=0$之正根. § 811. 又,依適所證,$f(-x)=0$不能有多於變化之正根,故$f(x)=0$所有之負根,不能多於$f(-x)=0$所有之變化.

例如,方程式$f(x)=x^6-x^5-x^3+x-1=0$之正根不能多於三,負根不能多於一.因$f(x)=0$有三個變化,$f(-x)=0$,卽$x^6+x^5+x^3-x-1=0$,有一個變化故也

831 系 一完全方程式所有負根之個數,不能大於其所有連續之個數.

何則,設$f(x)=0$爲一完全方程式,則其連續一一對應於$f(-x)=0$之變化,因$f(x)=0$中每有兩個相隣同號,卽有一個在$f(-x)=0$中變號也, § 811.

例如,設 $f(x)=0$ 爲 $x^5+x^4-6x^3-8x^2-7x+1=0$, (1)

則 $f(-x)=0$ 爲 $x^5-x^4-6x^3+8x^2-7x-1=0$. (2)

(1)式所有連續,見於$x^4$, $-8x^2$, $-7x$,而(2)式所有變化,則見於對應項$-x^4$, $8x^2$, $-7x$.

因(1)式有兩個變化,及三個連續,故$f(x)=0$之正根不能多於二,負根不能多於三.

832 **虛根之偵察** 不完全方程式之虛根,常可藉笛卡兒符號律之助,以證明其存在.

命$f(x)=0$爲一$n$次方程式,其根無爲零者,命$v$及$v'$分別爲

$f(x)=0$ 及 $f(-x)=0$ 中所有變化之個數.於是方程式 $f(x)=0$ 至少必有 $n-(v+v')$ 個虛根.

因 $f(x)=0$ 之正根不能多於 $v$ 個,負根不能多於 $v'$ 個,§ 830,故其所有實根不能多於 $v+v'$ 個,從而其 $n$ 個根中之他根皆爲虛根.

完全方程式之虛根,不受本定理之約束,因在此種方程式中,$v+v'$ 等於 $n$ 故也.

例. 求證 $x^5+x^2+1=0$ 有四個虛根.

本例中 $f(x)=0$ 爲 $x^5+x^2+1=0$, 而 $f(-x)=0$ 爲 $x^5-x^2-1=0$.

故 $n-(v+v')=5-(0+1)=4$, 因此虛根不能小於四.但根之總個數爲五,且因 $x^5+x^2+1=0$ 之次數爲奇數,故有一根爲實根, § 824, 因此虛根不能多於四.故 $x^5+x^2+1=0$ 確有四虛根.

## 習　題　LXXIII

1. 設 $2x^4-x^3+5x^2+13x+5=0$ 之一根爲 $1-2i$, 求解.
2. 設 $2x^4-11x^3+17x^2-10x+2=0$ 之一根爲 $2+\sqrt{2}$, 求解.
3. 以 $-5+2i$ 及 $-1+\sqrt{5}$ 爲二根,作一具有理係數之最低次方程式.
4. 作一不可約方程式,令其一根爲 $\sqrt{2}+i$.
5. 藉笛卡兒符號律及 § 832 之助,以研討下列各方程式之根,可得何種結論?

(1) $x^4+1=0$.　　(2) $x^4-x^2-1=0$.

(3) $x^4+2x^3+x^2+x-1=0$.　　(4) $x^4-2x^3+x^2-x+1=0$.

(5) $x^7+x^5+x^3-x+1=0$.　　(6) $x^7+x^4-x^2-1=0$.

(7) $x^5-4x^2+3=0$.　　(8) $x^{3n}-x^{2n}+x^n+x+1=0$.

6. 設一完全方程式之根皆爲實數,求證其正根之個數等於其變化之個數,其負根之個數等於其連續之個數.
7. 設 $x^5+3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0$ 之根皆爲實數,則若干爲正,若干爲負?
8. 試用笛卡兒符號律證 $x^{2n}+1=0$ 無正根,又用同律研討 $x^{2n+1}+1=0$, $x^{2n}-1=0$, $x^{2n+1}-1=0$ 之根,可得如何之結論?

9. 具正係數之方程式,若僅含 $x$ 之偶次冪,則不能有正根或負根.試證之.

10. 具正係數之方程式,若僅含 $x$ 之奇次冪,則除 0 外不能有實根,試證之.

11. 設方程式 $x^3+px+q=0$ 中, $p$ 及 $q$ 皆為正,求證此方程式僅有一實根,且此根為負.

12. 設一不完全方程式無零根,求證此方程式必有兩個或更多個虛根,但若在異號之二項間有一缺項如 $x^4-3x^2+1=0$ 者則否.

13. 在具實係數之任意方程式 $f(x)=0$ 中,必有奇數個變化介乎兩不相鄰之異號間,且必有偶數個,或無變化,介乎兩不相鄰之同號間.

14. 由具實係數之方程式,取其對應於負根及虛根之因式作積,則積之最後項皆為正,試證之;又此積若有變化,則其個數必為偶數.

15. 若變化之個數超過正根之個數,則超過之個數為一偶數.試證之.

16. 求證 $x^4+x^3-x^2+x-1=0$ 之正根之個數,非一即三,而負根之個數為一.

17. 凡絕對項為負之各偶次方程式至少有一正根及一負根.試證之.

## 無理根之定位法

833 **定理一** 若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 有異號,則 $f(x)=0$ 有一根介乎 $a$ 與 $b$ 之間.

此可如下例證之,其普徧之證則見後.

例. 證 $f(x)=x^3-3x+1=0$ 有一根介乎 1 與 2 之間.

$f(1)=-1$ 之符號為負, $f(2)=3$ 之符號為正.

命 $x=1.1,\ 1.2,\ 1.3,\cdots\cdots$ 而依次計算 $f(x)$ 之值,則可知介乎 1 及 2 之間兩相鄰之一位小數,即 1.5 及 1.6, 使 $f(x)$ 所生之符號,分別與 $x=1$ 及 $x=2$ 使之發生者同;因 $f(1.5)=-0.125$ 為負,而 $f(1.6)=0.296$ 為正故也.

由同法可知介乎 1.5 及 1.6 之間兩相鄰之二位小數,即 1.53 及 1.54, 使 $f(x)$ 所生之符號,分別與 $x=1$ 及 $x=2$ 使之發生者同,因 $f(1.53)=-0.008423$ 為負,而 $f(1.54)=0.032264$ 為正故也.

此法可無限繼續之,而決定以下兩種不盡數列:

(a) $1,\ 1.5,\ 1.53,\ 1.532,\cdots\cdots$, (b) $2,\ 1.6,\ 1.54,\ 1.533,\cdots\cdots$,

其中各項,趨近同一之極限值, §§192, 193. 命此極限值為 $c$, 此為 $f(x)=0$ 之

一根,卽 $f(c)=0$.

何則,由 §509,若令 $x$ 通過任一數列 (a) 或 (b),則 $f(x)$ 趨近 $f(c)$ 爲極限但因 $x$ 通過數列 (a) 時,$f(x)$ 常爲負,故其極限 $f(c)$ 不能爲正;又因 $x$ 通過數列 (b) 時 $f(x)$ 常爲正,故其極限 $f(c)$ 不能爲負.故 $f(c)$ 爲零.

**定理二**　若 $a$ 及 $b$ 皆非 $f(x)=0$ 之根,但 $f(x)=0$ 有奇數個根介乎 $a$ 與 $b$ 之間,則 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有異號;然若無根或有偶數個根介乎 $a$ 與 $b$ 之間,則 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有同號. 834

反之;若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有異號,則 $f(x)=0$ 有奇數個根介乎 $a$ 與 $b$ 之間;然若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有同號,則 $f(x)=0$ 無根或有偶數個根介乎 $a$ 與 $b$ 之間.

設 $a<b$,命 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_r$ 爲 $f(x)=0$ 所有介乎 $a$ 與 $b$ 間之諸根.於是 $f(x)$ 得爲 $(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots\cdots(x-\beta_r)$ 所整除,§418,又若命其商爲 $\phi(x)$,則有

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots\cdots(x-\beta_r)\phi(x). \tag{1}$$

先以 $a$,次以 $b$ 代入 (1) 式中之 $x$,又以第二結果除第一結果,則得

$$\frac{f(a)}{f(b)}=\frac{a-\beta_1}{b-\beta_1}\cdot\frac{a-\beta_2}{b-\beta_2}\cdots\cdots\frac{a-\beta_r}{b-\beta_r}\cdot\frac{\phi(a)}{\phi(b)}. \tag{2}$$

積 (2) 中之因式 $\phi(a)/\phi(b)$ 爲正.何則,蓋由 §833,若 $\phi(a)$ 及 $\phi(b)$ 異號,則 $\phi(x)=0$ 將有一根介乎 $a$ 與 $b$ 之間,因而由 (1),$f(x)=0$ 除 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_r$ 外,將更多一根介乎 $a$ 與 $b$ 之間,而違反假設,是以 $\phi(a)$ 與 $\phi(b)$ 應同號,故 $\phi(a)/\phi(b)$ 爲正.

反之,$r$ 個因式 $(a-\beta_1)/(b-\beta_1), \cdots\cdots$ 則皆爲負.因 $r$ 個根 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_r$ 皆大於 $a$ 而小於 $b$ 故也.

故 $r$ 若爲奇數,則 $f(a)\,f(b)$ 爲負,卽,$f(a)$ 及 $f(b)$ 有異號;但 $r$ 若

爲偶數或 0, 則 $f(a)/f(b)$ 爲正,即 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有同號.

反之,若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有異號,則 $f(a)/f(b)$ 爲負,因而由 (2) 可知 $r$ 爲奇數;又若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有異號.則可知 $r$ 爲偶數或 0.

835 注意,以上各定理之證明, §§ 833, 834, 並未利用凡方程式 $f(x)=0$ 皆有一根之假定.又應用此諸定理時, $r$ 重根當作 $r$ 個單根計.

由 § 834, 可知 $x$ 由 $a$ 變至 $b$ 時, $x$ 經歷 $f(x)=0$ 之每一單根,或奇數重根之介乎 $a$ 與 $b$ 間者, $f(x)$ 即變號一次;且除此種種變號外, $f(x)$ 不經其他變號.

例如,設 $f(x)=(x-2)(x-3)^2(x-4)^3$, 令 $x$ 由 1 變至 5, 則 $f(x)$ 之符號,在 $x=1$, $x=2$ 之間爲正,在 $x=2$, $x=4$ 之間爲負,在 $x=4$, $x=5$ 之間爲正.

836 **無理根之定位法** 藉 § 833 之定理,常可決定一與數字方程式之各分數根及無理根位於若何之兩相隣整數間.

例. 試定 $f(x)=x^4-6x^3+x^2+12x-6=0$ 之根之位置.

由笛卡兒符號律, § 830, 此方程式之正根不能多於三,負根不能多於一.

欲定正根之位置,可依次計算 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$,……, 至三根得用 § 833 證明爲止,或至 $x$ 值之爲根之上限者爲止, § 803.

如是,仿 § 414, 用綜合除法,得 $f(0)=-6$, $f(1)=2$, $f(2)=-10$, $f(3)=-42$, $f(4)=-70$, $f(5)=-46$, $f(6)=102$.

故由 § 833, 一根介乎 1 與 0 間,另一根介乎 1 與 2 間,第三根介乎 5 與 6 間.在以上任何界限間,不能有多於一個根,因正根之總個數僅三故也.

依同法偵求負根,則得 $f(0)=-6$, $f(-1)=-10$, $f(-2)=38$, 故負根介乎 $-1$ 及 $-2$ 之間.

若 $f(x)$ 有兩個或更多個根介乎相隣二整數之間,則單以整數代 $f(x)$ 中之 $x$ 時,當然不能將 $f(x)$ 之實根完全偵得.此種情形嘗於 § 844 中論及之,並於 § 864 中求得一法,以確定在任意二數之間,究有幾根存在.

## 習　題　LXXIV

試定以下各方程式實根之位置.

1. $2x^3-3x^2-9x+8=0$.
2. $x^3+x^2-4x-2=0$.
3. $x^3-3x^2-2x+5=0$.
4. $2x^3+3x^2-10x-15=0$.
5. $x^3-4x^2-4x+12=0$.
6. $x^3+13x^2+54x+71=0$.
7. $x^3+5x+19=0$.
8. $x^4-95=0$.
9. $x^4-8x^3+4x^2+4x-8=0$.
10. $x^4+5x^3+x^2-13x-7=0$.
11. $x^4-11x^3+32x^2-4x-46=0$.
12. $x^5+2x^4-16x^3-24x^2+48x+32=0$.

13. 設 $x$ 之絕對值甚大時, $f(x)$ 之符號與其最高次項同,求證:

(1) 具實係數之各方程式 $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n=0$ 至少有一正根及一負根,但 $n$ 爲偶數, $b_n$ 爲負數.

(2) 方程式

$$k^2(x-b)(x-c)+l^2(x-c)(x-a)+m^2(x-a)(x-b)-x(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

之四根,分別介乎 $-\infty$ 與 $a$, $a$ 與 $b$, $b$ 與 $c$, $c$ 與 $\infty$ 之間,但假定 $a, b, c, k, l, m$ 爲實數,且 $a<b<c$.

14. 設 $a\geqq3$, 求證凡呈 $x^3+(x-1)(ax-1)=0$ 形式之方程式,有二根介乎 0 與 1 之間,即,一根介乎 $1/a$ 與 $1-1/a$ 之間,一根介乎 $1-1/a$ 與 1 之間.

15. 設 $a\geqq5$, 求證 $x^4+(x-1)(2x-1)(ax-1)=0$ 有介乎 0 與 $1/a$, $1/a$ 與 $1-2/a$, $1-2/a$, 與 1 間之根.

# 無理根之計算

**霍納法 (Horner's method) 正根**　計算數字方程式無理 837
根近似值之方法,雖有數種,要推英國算學家霍納氏所創之方法,最爲簡捷而有完善之形式.此法宜用例相輔說明之.

**例.** 求 $f(x)=2x^3+x^2-15x-59=0$ 之正根.

1. 用 §836 之方法,可知所求根介乎 3 與 4 之間.故若以小數表之,則呈 $3.\beta\gamma\delta\cdots\cdots$ 之形式,其中 $\beta, \gamma, \delta\cdots\cdots$ 表其所在小數位之數字.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | +1 | −15 | −59 | \|3 |
| | 6 | 21 | 18 | |
| | 7 | 6 | −41 | |
| | 6 | 39 | | |
| | 13 | 45 | | |
| | 6 | | | |
| | 19 | | | |

2. 以 3 減小 $f(x)=0$ (1) 之根,則得變換方程式

$$\phi(x)=2x^3+19x^2+45x-41=0, \tag{2}$$

其根爲 $0.\beta\gamma\delta\cdots\cdots$,而介乎 0 與 1 之間.

就 $\phi(x)$,以 $x=0.1, 0.2, 0.3,\cdots\cdots$ 試之,可知 $\phi(0.6)$ 爲負,$\phi(0.7)$ 爲正,故 (2) 式之根介乎 0.6 與 0.7 之間,即 $\beta$ 爲 6,故 (1) 式之一位小數根爲 3.6.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | +19 | +45 | −41 | \|0.6 |
| | 1.2 | 12.12 | 34.272 | |
| | 20.2 | 57.12 | −6.728 | |
| | 1.2 | 12.84 | | |
| | 21.4 | 69.96 | | |
| | 1.2 | | | |
| | 22.6 | | | |

3. 以 0.6 減小 (2) 式之根,則得

$$\psi(x)=2x^3+22.6x^2+69.96x-6.728=0. \tag{3}$$

其根爲 $0.0\gamma\delta\cdots\cdots$,而介乎 0 與 0.1 之間.

就 $\psi(x)$,以 $x=0.01, 0.02,\cdots\cdots$ 試之.可知 $\psi(0.09)$ 爲負,$\psi(0.1)$ 爲正,故 (3) 式之根介乎 0.09 及 0.1 之間,即,$\gamma$ 爲 9,故 (1) 式之二位小數根爲 3.69.

4. 以 0.09 減小 (3) 式之根,而仿前行之.

838 以上之演算,更可簡捷行之如下節所示.但在由上例轉入下節之前,當注意一事,即第一第二變換方程式,(2) 及 (3),之絕對項,即 $-41$ 及 $-6.728$,有同號.此固其所,因 $-41=\phi(0)$,$-6.728=\phi(0.6)$ 故也.若 $\phi(0)$ 及 $\phi(0.6)$ 有異號,則 $\phi(x)=0$ 之根將介乎 0 與 0.6 之間,§833,從而 0.6 非其第一位小數矣.依據同理,其後諸變換方程式亦莫不然,普偏言之:

設與方程式僅有一根具整數部分 $\alpha$,而求此根之演算無誤,則推求時所用各變換方程式之絕對項皆有同號.

839 在上舉例中,吾人皆用代換法以求各變換方程式根之第一數字,換言之,即與方程式根之各小數位之數字.但自第二以下諸變換方程式根之第一數字,通常僅須先將絕對項變號,而後以 $x$ 之係數除之即得.是曰試除數法.

例如,取上例中之第二變換方程式考之:

$$\psi(x)=2x^3+22.6x^2+69.96x-6.728=0. \tag{3}$$

此方程式有小於0.1之根$c$.而$c$之二次及更高次冪小於$c$本身遠甚.即如$(0.09)^2$亦僅爲0.0081.故設$c$爲已知,代入(3)而得數字恆等式,

$$2c^3+22.6c^2+69.96c-6.728=0,$$

則其開首二項小於末二項遠甚.

故$c$之第一數字,與由方程式

$$69.96x-6.728=0 \tag{3'}$$

所得根之第一數字,無所出入.但(3')係由(3)略去$x^3$及$x^2$二項而得者.

解(3')則得$x=6.728/69.96=.09+$,換言之,即如上求得(3)式根之第一數字爲9.

若欲正確求得第一變換方程式根之第一數字,則此法不足恃.但此法至少常可指示此數字大概爲何,因而應用代換法時,可減少試測之回數.有時即第二變換方程式根之第一數字,亦不能由此法正確求得之.但此時之誤差,在行下一變換時,極易發覺;因此數字若過大,則下一變換方程式之絕對項變號,§838,此數字若過小,則此方程式根之第一數字將超過10故也.

如欲避免在第一變換以後所發生之繁雜之小數,可先以十乘各變換方程式之根,§812,而後行下一變換.實施時,可以一個0附於所究方程式之第二係數後,以兩個0附於其第三係數後,餘準此.於是可將下一變換中所用根之數字視若整數而處理之. 840

例如,在§837所舉例中,其第一變換方程式爲

$$2x^3+19x^2+45x-41=0, \tag{2}$$

且知其根呈0.6+之形式.

以10乘(2)之根,則得

$$2x^3+190x^2+4500x-41000=0, \tag{2'}$$

其根呈6+之形式.

以6減小(2')之根,則得

$$2x^3+226x^2+6996x-6728=0, \tag{3'}$$

其演算所與前不同者,僅在小數點而已,又(3′)之根爲下式之根之十倍:

$$2x^3+22.6x^2+69.96x-6.728=0. \tag{3}$$

由試除數法得(3′)之根爲 0.9+,故(3)之根爲 0.09+.

**841**　於是計算 $2x^3+x^2-15x-59=0$ 之根至小數第三位之演算,可排列之如下:

$$\begin{array}{rrrrl}
2 & +1 & -15 & -59 & \lfloor 3.693 \\
 & 6 & 21 & 18 & \\
\hline
 & 7 & 6 & -41 & \\
 & 6 & 39 & & \\
\hline
 & 13 & 45 & & \\
 & 6 & & & \\
\hline
2 & +190 & +4500 & -41000 & \lfloor 6 \\
 & 12 & 1212 & 34272 & \\
\hline
 & 202 & 5712 & -6728 & \\
 & 12 & 1284 & & \dfrac{6728}{6996}=0.9+ \\
\hline
 & 214 & 6996 & & \\
 & 12 & & & \\
\hline
2 & +2260 & +699600 & -6728000 & \lfloor 9 \\
 & 18 & 20502 & 6480918 & \\
\hline
 & 2278 & 720102 & -247082 & \\
 & 18 & 20664 & & \\
\hline
 & 2296 & 740766 & & \\
 & 18 & & & \dfrac{247082}{740766}=0.3+ \\
\hline
 & 2314 & & &
\end{array}$$

注意,此處用試除數法所得各數字,皆爲小數第一位之數字,如 0.9, 0.3. 然第二變換方程式之最後係數若非 $-6728$,而爲 $-672$,則得 $672/6996=0.09$ 爲下二數字.於是至此所得之根,非 3.69,而爲 3.609 矣;又在行下一變換之前,當以 100 乘此第二變換方程式,換言之,即當附兩個 0 於第二係數,四個 0 於第三係數,六個 0 於第四係數.

**842**　此法可連續至於無窮.但甚大之數,立即隨之而起,又自得根之少許小數位數字後,即可依下之省略方法,用極少之演算,求至所需之位數.

以上演算中之最後變換方程式爲

$$2x^3+2314x^2+740766x-247082=0. \tag{4}$$

今不附 0 於係數,而以 $x/10$ 代(4)中之 $x$,以增大(4)之根 10 倍,§812,於是得

$$0.002x^3+23.14x^2+74076.6x-247082=0. \tag{4'}$$

其中係數之小數部分甚小,不致影響根之其次少數數字,故可依四捨五入法删去之,於是得二次方程式

$$23x^2+74077x-247082=0. \tag{4''}$$

故演算可連續如下:

$$\begin{array}{rrrl}
23 & +74077 & -247082 & \underline{|0.003332} \\
 & 69 & 222438 & \\
\hline
 & 74146 & -\ \ 24644 & \\
 & 69 & & \\
\hline
\cancel{2}3 & +7421\cancel{5} & -\ \ 24644 & \\
 & & 22266 & \\
\hline
 & 742\cancel{2} & -\ \ 2378 & \\
 & & 2226 & \\
\hline
 & 74\cancel{2} & -\ \ 152 & \\
 & & 148 & \\
\hline
 & & -\ \ 4 &
\end{array}$$

即,先以3減小二次方程式(4″)之根,於是得變換方程式$23x^2+74215x-24644=0$ (5). 用試除數法,知根之下一數字亦爲3.

在行下一變換之前,先當如前删簡數字,於是(5)式變爲一次方程式$7422x-24644=0$. 欲求根之下二數字, 3, 2, 僅須用省略除法,卽不附0於被除數後,而删去除數末之數字,以7422除24644卽得.

**負根** 欲求$f(x)=0$之負無理根,可求$f(-x)=0$之對應正根而變其符號卽得 843

**例.** 求$f(x)=x^3+x^2-10x+9=0$之負根.

此處$f(-x)=0$爲$x^3-x^2-10x-9=0$. 由霍納法,其正根約爲4.03293,故$f(x)=0$之負根約爲$-4.03293$.

**幾於相等之根** 若所與方程式有二根介乎相隣二整數間,則可如下例求得之. 844

**例.** 求$f(x)=x^3+x^2-10x+9=0$之正根.

用代換法,可知$f(0)=9$, $f(1)=1$, $f(2)=1$, $f(3)=15$; 且由演算知3爲根之上限, §803. 故由§834, 在0與1, 1與2, 或2與3間,或無正根,或有二正根.但$f(1)$與$f(2)$較$f(0)$與$f(3)$近於0. 故若有正根,則與其求此二根於0與1,或2與3間,毋寧求諸1與2間.

因此以1減小$f(x)=0$之諸根,則得

$$\phi(x)=x^3+4x^2-5x+1=0,$$

若$f(x)=0$有二根介乎1與2間,則此所得方程式有二根介乎0與1間.

命 $x=0.1, 0.2, 0.3, \cdots\cdots$ 而計算 $\phi(x)$ 之值,知 $\phi(0.2)$ 為正, $\phi(0.3)$ 為負, 且 $\phi(0.7)$ 為負,而 $\phi(0.8)$ 為正. 故 $\phi(x)=0$ 有一根介乎 0.2 與 0.3 間,另一根介乎 0.7 與 0.8 間. 由霍納法, 知此二根約為 0.25560 及 0.77733.

故 $f(x)=0$ 有兩正根 1.2556, 及 1.77733.

845 **定大根之位置** 所與方程式 $f(x)=0$ 若有大於十之根,則可如下法以求整數部分之數字.

欲求第一數字,可命 $x=10, 20, \cdots\cdots$, 必要時,或命 $x=100, 200, \cdots\cdots$, 餘準此,而應用 § 833 以計算 $f(x)$ 之值.例如,若發現 $f(400)$ 及 $f(500)$ 有異號,則根介乎 400 與 500 之間,而其第一數字為 4. 欲求其餘數字,可如求小數位數字時,依次行方程式之變換. 例如在適所引用之情形中,當以 400 減小 $f(x)=0$ 之根,於是得一方程式 $\phi(x)=0$, 其根在 0 與 100 之間,若發現此根在 70 與 80 之間,則根之第二數字為 7. 於是以 70 減小 $\phi(x)=0$ 之根,而得方程式 $\psi(x)=0$, 其根介乎 0 與 10 之間.若發見此根在 8 與 9 間,則可知 $f(x)=0$ 之根,其整數部分為 478.

846 **解數字方程式** 所與方程式 $f(x)=0$ 之實根,若欲完全求出,則以依據 § 802 之方法先求有理根為最佳,至少在係數為有理數時為然.用此法之結果,可得一降次方程式 $\phi(x)=0$, 此方程式若有實根,則盡為無理根,於是可用 §§ 833, 844, 845 之方法定此諸根之位置,再用霍納法求其近似值.

尤有進者,分數根亦可用霍納法求之,但分母若僅含因數 2 及 5, 則所得為確值,否則為近似值.

## 習題 LXXV

計算以下所示各根至小數第六位.

1. $x^3+x-3=0$; 在 1 與 2 間之根.

2. $x^3+2x-20=0$; 在 2 與 3 間之根.

3. $x^3+6x^2+10x-2=0$; 在 0 與 1 間之根.

4. $3x^3+5x-40=0$; 在 2 與 3 間之根.

5. $x^3+10x^2+8x-120=0$; 在 2 與 3 間之根.

6. $x^3-x^2-9x+1=0$; 在 $-1$ 與 $-2$ 間之根.

7. $x^3+x^2-5x-1=0$; 在 1 與 2 間之根.

8. $x^3-2x^2-23x+70=0$; 在 $-5$ 與 $-6$ 間之根.

9. $x^4-10x^2-4x+8=0$; 在 3 與 4 間之根.

10. $x^4+6x^3+12x^2-11x-41=0$; 在 $-2$ 與 $-3$ 間之根.

11. $x^3-3x^2-4x+11=0$; 在 2 與 3 間之二根.

求下列各方程式所有各根至小數第三位.

12. $x^3-3x^2-4x+10=0$.　　13. $x^3+x^2-2x-1=0$.

14. $x^3-3x+1=0$.　　15. $x^4+5x^3+x^2-13x-7=0$.

16. 試應用霍納法於方程式 $x^3-17=0$ 以計算 $\sqrt[3]{17}$ 至小數第四位.

17. 用同法計算 $2\sqrt[3]{3}$ 及 $\sqrt[4]{87}$ 至小數第三位.

18. 試藉 § 845 之助及霍納法以求 $x^3+x^2-2500=0$ 之實根至小數第二位.

19. 試藉 § 844 之助,以定 $x^3+5x^2-6x+1=0$ 之根之位置.

20. 求 $3x^5+x^4-14x^3-x^2+9x-2=0$ 所有一切之根.

## 泰羅定理. 重根

**導來函數 (Derivatives)**　將呈 $ax^n$ 形式之任一單項式乘以 $x$ 之指數, $n$, 並以 1 減小此指數.於是得 $nax^{n-1}$, 是曰 $ax^n$ 之導來函數,更精密言之,則爲 $ax^n$ 關於 $x$ 之導來函數.特例,常數 $a$, 卽 $ax^0$, 之導來函數爲 0. 847

多項式 $f(x)$ 各項之導來函數之總和,稱曰 $f(x)$ 之導來函數,或更精密稱之曰,其第一導來函數,而表以 $f'(x)$.

$f'(x)$ 之導來函數,曰 $f(x)$ 之第二導來函數,而表以 $f''(x)$, 餘準此.

凡 $n$ 次多項式 $f(x)$ 顯見有成組之 $n$ 個導來函數;其最後者,$f^{(n)}(x)$,爲一常數.

例如,設
$$f(x)=3x^4-8x^3+4x^2-x+4,$$
則
$$f'(x)=12x^3-24x^2+8x-1,$$
$$f''(x)=36x^2-48x+8,$$
$$f'''(x)=72x-48,$$
$$f''''(x)=72.$$
其後諸導來函數皆爲0.

注意,$f(x)$ 之第二,第三,……導來函數,爲 $f'(x)$ 之第一,第二,……導來函數.

848 泰羅定理 (Taylor's theorem) 在 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ 中,以 $x+h$ 代 $x$,則得

$$f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+\cdots\cdots+a_n.$$

依二項定理展開 $(x+h)^n$, $(x+h)^{n-1}$, 等,類集各項,則此式可化爲 $h$ 之多項式之形式,其結果爲

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots\cdots+f^n(x)\frac{h^n}{n!}, \tag{1}$$

其中 $f'(x)$, $f''(x)$ …… 爲 $f(x)$ 之依次各導來函數.此恆等式曰泰羅定理.茲證之.

依二項定理,§561,展開 $(x+h)^m$,以常數 $a$ 乘其結果,且書成下之形式:

$$a(x+h)^m=ax^m+max^{m-1}\cdot h+m(m-1)ax^{m-2}\cdot\frac{h^2}{2!}$$
$$+m(m-1)(m-2)ax^{m-3}\cdot\frac{h^3}{3!}+\cdots\cdots.$$

其中各係數

$$max^{m-1},\ m(m-1)ax^{m-2},\ m(m-1)(m-2)ax^{m-3},\ \cdots\cdots,$$

皆爲緊接其前一係數之導來函數.

故若將 $f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$

中各項之展開式排成如上之形式,則其中各第一項之和爲 $f(x)$;各第二項之和爲各第一項之導來函數和之 $h$ 倍,即 $f'(x)h$;各第三項之和爲各第二項之導來函數和之 $h^2/2!$ 倍,即 $f''(x)h^2/2!$;餘準此.換言之,即得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots\cdots+f^n(x)\frac{h^n}{n!}.$$

例如,設 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$,

則

$$\begin{aligned} f(x+h)&=a_0(x+h)^3+a_1(x+h)^2+a_2(x+h)+a_3\\ &=\begin{array}{r|l|l|l} a_0x^3 & +3a_0x^2 & h+6a_0x & \frac{h^2}{2!}+6a_0\frac{h^3}{3!}\\ +a_1x^2 & +2a_1x & \;\;+2a_1 & \\ +a_2x & +\;\;a_2 & & \\ +a_3 & & & \end{array}\\ &=f(x)+f'(x)h+f''(x)h^2/2!+f'''(x)h^3/3!. \end{aligned}$$

因 $x=a+(x-a)$,故 $f(x)=f[a+(x-a)]$.故 $f(x)$ 得化爲以 $x-a$ 之羃爲項之式,§423,此式僅須在恆等式(I)中,以 $a$ 代 $x$,以 $x-a$ 代 $h$ 即得.結果爲 849

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$
$$+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}. \qquad \text{(II)}$$

例 試以 $x-1$ 爲羃表 $x^3-1$.

因 $f(x)=x^3-1,\ f'(x)=3x^2,\ f''(x)=6x,\ f'''(x)=6.$

故 $f(1)=0,\ f'(1)=3,\ f''(1)/2!=3,\ f'''(1)/3!=1.$

故 $x^3-1=3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3.$

**重根** $f'(x)$ 之第一,第二,…… 導來函數爲 $f(x)$ 之第二,第三,……導來函數.故 §849 中之多項式 $f(x)$ 及其第一導來函數 $f'(x)$ 以 $x-a$ 表之爲 850

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2!+\cdots\cdots, \qquad (1)$$

$$f'(x)=f'(a)+f''(a)(x-a)+f'''(a)(x-a)^2/2!+\cdots\cdots. \qquad (2)$$

$f(x)$ 若得爲 $x-a$ 所整除,而不能爲 $(x-a)^2$ 所整除,則由 (1) 可知 $f(a)=0$, 但 $f'(a)\neq0$, 故由 (2) 可知 $f'(x)$ 不能爲 $x-a$ 所整除.又,$f(x)$ 若得爲 $(x-a)^2$ 所整除,而不能爲 $(x-a)^3$ 所整除,則由 (1) 可知 $f(a)=f'(a)=0$, 但 $f''(a)\neq0$, 故由 (2) 可知 $f'(x)$ 得爲 $x-a$ 所整除,但不能爲 $(x-a)^2$ 所整除.普徧言之,$f(x)$ 若得爲 $(x-a)^r$ 所整除,而不能爲 $(x-a)^{r+1}$ 所整除,則由 (1) 可知 $f(a)=f'(a)=\cdots\cdots f^{(r-1)}(a)=0$, 但 $f^{(r)}(a)\neq0$, 故由 (2) 可知 $f'(x)$ 得爲 $(x-a)^{r-1}$ 所整除,但不能爲 $(x-a)^r$ 所整除.

故由 §800, 可得下之定理.

851 **定理** $f(x)=0$ 之單根,非 $f'(x)=0$ 之根;但 $f(x)=0$ 之二重根則爲 $f'(x)=0$ 之單根;普徧言之,$f(x)=0$ 之 $r$ 重根爲 $f'(x)=0$ 之 $r-1$ 重根.

例如,$f(x)=x^3-x^2-8x+12=0$ 之根爲 2, 2, $-3$, 而 $f'(x)=3x^2-2x-8=0$ 之根爲 2, $-4/3$.

852 故 $f(x)=0$ 若有重根,可用下法發見之.用 §465 之方法,求 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之最高公因式.若由是發見 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 互質,則 $f(x)=0$ 僅有單根.但若由是發見 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 有最高公因式 $\phi(x)$, 則 $\phi(x)=0$ 之各單根皆爲 $f(x)=0$ 之二重根,$\phi(x)=0$ 之各二重根,皆爲 $f(x)=0$ 之三重根;餘準此.蓋由 §850, 若 $\phi(x)$ 得爲 $(x-a)^r$ 所整除,則 $f'(x)$ 得爲 $(x-a)^r$ 所整除,而 $f(x)$ 得爲 $(x-a)^{r+1}$ 所整除故也.

注意,設商 $f(x)/\phi(x)$ 爲 $F(x)$, 則 $F(x)=0$ 之根即 $f(x)=0$ 之根,但各根僅見一次.

**例**　求方程式 $f(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0$ 之重根.

此處 $f'(x)=5x^4-4x^3-15x^2+2x+8$, 由§465, 求得 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之最高公因式為 $\phi(x)=x^3-3x-2$.

由§802, 求得 $\phi(x)=0$ 之根為 $-1, -1, 2$. 故 $f(x)=0$ 有三重根 $-1$, 二重根 2, 即其根為 $-1, -1, -1, 2, 2$.

注意，

$$f(x)=(x+1)^3(x-2)^2,$$

及

$$f'(x)=(x+1)^2(x-2)(5x-4),$$

又

$$F(x)=f(x)/\phi(x)=(x+1)(x-2).$$

尤有進者,若任意二方程式 $f(x)=0$ 及 $\psi(x)=0$ 有一公根,則可由求 $f(x)$ 及 $\psi(x)$ 之最高公因式以發見之. 853

**例**　設 $f(x)=x^4-x^3-3x^2+4x-4=0$ 之一根為其他一根之負數, 試解之.

所述二根顯見為 $f(x)=0$ 及 $f(-x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4=0$ 之公根,故可由求 $f(x)$, 及 $f(-x)$ 之最高公因式以求得之.

由§465 求得此最高公因式為 $x^2-4$ 故所述二根為 $2, -2$. 以 $x^2-4$ 除 $f(x)$, 則得降次方程式 $x^2-x+1=0$, 由是得 $f(x)=0$ 之他二根為 $(1\pm i\sqrt{3})/2$.

## 習　題　LXXVI

1. 求 $2x^5-4x^4+x^2-20x$ 之第一,第二,……導來函數.
2. 設 $f(x)=x^4-2x^3+1$, 試由泰羅定理求 $f(x+h)$.
3. 用§849之公式(II), (1) 以 $x+1$ 為冪表 $x^4+x^2+1$; (2) 以 $x-2$ 為冪表 $x^5-32$; (3) 以 $x-1$ 為冪表 $(x^3+1)/(x^2+1)$.
4. 設以下各方程式有重根,試解之.

(1) $x^3-3x-2=0$.　　(2) $9x^3+12x^2-11x+2=0$.

(3) $4x^4+12x^2+9=0$.　　(4) $x^4-4x^3+8x+4=0$.

(5) $2x^4-12x^3+19x^2-6x+9=0$.　　(6) $x^5-x^3-4x^2-3x-2=0$.

(7) $x^4-2x^3-x^2-4x+12=0$.　　(8) $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$.

(9) $3x^5-2x^4+6x^3-4x^2+3x-2=0$.

5. 求證 $x^n-a^n=0$ 不能有重根.
6. 設方程式 $x^3-12x+a=0$ 有一重根,求 $a$.
7. 試定 $a$ 及 $b$ 之值,俾 $3x^3+ax^2+x+b=0$ 有三重根.且求此根.
8. 求證 $x^4+qx^2+s=0$ 不能有三重根.

9. 欲令 $x^5-px^2+r=0$ 有二重根，其條件若何？

10. 設 $f(x)$ 得爲 $f'(x)$ 所整除，則 $f(x)$ 之形式如何？

11. 設方程式 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$ 及 $x^4+x^3-x-1=0$ 有公根，試並解之.

12. 設方程式 $x^3-20x-16=0$ 有一根爲 $x^3-x^2-3x-1=0$ 之一根之二倍，試並解之.

13. 設具有理係數之三次方程式有重根，求證此根必爲有理數.

14. 設具有理係數之四次方程式 $f(x)=0$ 有重根，而 $f(x)$ 非完全平方，則此根必爲有理數，試證之

15. 設 $a$ 爲 $f(x)=0$ 之一 $r$ 重根，則 $a$ 又爲方程式 $f'(x)=0$, $f''(x)=0$, ……, $f^{(r-1)}(x)=0$ 之根，試證之.

## 有理整函數之變化

854　**定理**　命 $f(x)$ 爲依 $x$ 之升冪順序排列之多項式，命 $b$ 爲其第一係數之絕對值，$g$ 爲絕對值上最大之係數之絕對值. $f(x)$ 之第一項，對於絕對值上小於 $b/(b+g)$ 之一切 $x$ 值，絕對值上大於其他各項之和.

先命 $f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots$，因此 $b=|b_0|$，並命 $x'$ 表 $x$ 之絕對值

於是 $b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots$ 絕對值上小於(或等於) $gx'+gx'^2+\cdots\cdots$ 或 $g(x'+x'^2+\cdots\cdots)$，§235，故 $x<1$ 時，則又小於 $gx'/(1-x')$. §704.

但 $gx'/(1-x')$ 在 $x'<b/(b+g)$ 時小於 $b$.

次，命 $f(x)=b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots$，因此 $b=|b_1|$. 於是可知 $|b_2x+b_3x^2+\cdots\cdots|<|b_1|$ 時，卽 $x'<b/(b+g)$ 時，則 $|b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots|<|b_1x|$，餘準此

例如，若 $f(x)=5x+3x^2-9x^4$，則可知 $x'<5/(5+9)$ 時，卽 $x'<5/14$ 時，則 $|3x^2-9x^4|<|5x|$.

855　**定理**　命 $f(x)$ 爲依 $x$ 之降冪順序排列之多項式，命 $a$ 爲

其第一係數之絕對值，$g$ 爲絕對值上最大之係數之絕對值。$f(x)$ 之第一項，對於絕對值上大於 $(a+g)/a$ 之一切 $x$ 值，絕對值上大於其他各項之和.

命 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$，於是 $a=|a_0|$，並命 $x'$ 表 $x$ 之絕對值.

而 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=x^n(a_0+a_1/x+\cdots\cdots+a^n/x^n)$.

故 $|a_0|>|a_1/x+\cdots\cdots+a_n/x^n|$ 時，則 $|a_0x^n|>a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n|$.

但由 § 854，若 $1/x'<a/(a+g)$，卽 $x'>(a+g)/a$，則 $|a_0|>|a_1/x+\cdots\cdots+a_n/x^n|$.

例如，設 $f(x)=3x^3+x^2-7x+2$. 則 $x'>(3+7)/3$，卽 $x'>10/3$，而 $|3x^3|>|x^2-7x+2|$.

由本定理，顯然可知 $(a+g)/a$ 一數，不問方程式 $f(x)=0$ 之根，爲虛爲實，較其任何根之絕對值均大.

**定理** 若 $a$ 爲 $f(x)=0$ 之一根，則 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之值在 $x$ 略小於 $a$ 時有異號，略大於 $a$ 時有同號. 856

$|x|<\frac{b}{b+g}$

何則，以 $x-a$ 爲冪表 $f(x)$ 及 $f'(x)$，§ 849，且以第二式除第一式.若 $a$ 爲一單根，從而 $f(a)=0$，但 $f'(a)\neq 0$，則結果可化成下形：

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=(x-a)\frac{f'(a)+f''(a)(x-a)/2!+\cdots\cdots}{f'(a)+f''(a)(x-a)+\cdots\cdots}.$$

右端分式之分子分母，皆爲 $x-a$ 之多項式. 故對於小至能適應 § 854 之需要之一切 $x-a$ 值此分子分母之符號，與其公有第一項 $f'(a)$ 之符號同，因而分數本身爲正.於是 $f(x)/f'(x)$ 之符號與 $x-a$ 之符號同，故視 $x<a$ 或 $x>a$ 而爲負或正. 但若 $(x)/ff'(x)$ 之符號爲負，則 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 有異號；又若 $f(x)/f'(x)$ 之符號爲正，則 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 有同號.

若 $a$ 爲一 $r$ 重根，則由 § 850，得

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=(x-a)\frac{f^{(r)}(a)/r!+\text{含}(x-a)\text{之各項}}{f^{(r)}(a)/(r-1)!+\text{含}(x-a)\text{之各項}},$$

由是仿$a$爲單根時之同一推理,得證本定理.

857　**洛爾定理** (Rolle's theorem)　在$f(x)=0$之相隣二根間,常有$f'(x)=0$之一根.

只少　(奇數個根)

何則,命$\beta_1$及$\beta_2$爲所究二根,命$c$爲略大於$\beta_1$之數,$d$爲略小於$\beta_2$之數,於是$\beta_1<c<d<\beta_2$.

於是$f(c)$與$f'(c)$有同號,§856,又$f(c)$與$f(d)$有同號,§834,但$f(d)$與$f'(d)$有異號,§856.故$f'(c)$與$f'(d)$有異號.因此$f'(x)=0$之一根介乎$c$與$d$間,即介乎$\beta_1$與$\beta_2$間,§833.

例如,設$f(x)=x^2-3x+2=0$,則$f'(x)=0$爲$2x-3=0$. $f(x)=0$之二根爲1及2,$f'(x)=0$之根爲3/2,而3/2在1與2間.

例. 求證$f(x)=x^3+x^2-10x+9=0$有二根介乎1與2間.(比較§844,例).

因$f(1)=1$,及$f(2)=1$,故有二根或無根介乎1與2間.若有二根,則$f'(x)=0$亦必有一根介乎1與2間,且此根必介乎$f(x)=0$之二根間.

今$f'(x)=3x^2+2x-10=0$有一根介乎1與2間,因$f'(1)=-5$,而$f'(2)=6$故也.解之,此根約爲1.5.及$f(1.5)=-0.375$爲負.於是因$f(1)$及$f(2)$皆爲正,故$f(x)=0$有二根介乎1與2間,即一根介乎1與1.5間,他根介乎1.5與2間.

858　**定理**　若變數$x$增大,則當其經歷$a$值時,$f(x)$之值視$f'(a)>0$,或$f'(a)<0$而增加或減小.

若$f'(a)=0$,而$f''(a)\neq 0$,則$f(a)$視$f''(a)<0$,或$f''(a)>0$而爲$f(x)$之極大值或極小值.

何則,由§849,得

$+f'''(a)(x-a)^3/3!-$

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2!+\cdots\cdots,$$

其中右端係$x-a$之多項式,其第一項,對於$x$之一切值,能使$x-a$絕對值上小至適應§854之需要者,可左右全式之符

$f(x)=0$, $f'(x)=0$. 则和の同符号.

$f(x)$

$f'(x)=0$

$f''(x)$

號,從而又可左右 $f(x)-f(a)$ 之符號.茲設 $x$ 之值受如此之限制.於是

1. 若 $f'(a)>0$,則 $f'(a)(x-a)$ 與 $(x-a)$ 有同號,從而 $f(x)-f(a)$ 亦與 $(x-a)$ 有同號.於是因 $x$ 經歷 $a$ 時,$x-a$ 由負變至正,故 $f(x)-f(a)$ 亦然,即,此時 $f(x)$ 由小於 $f(a)$ 之值增大至大於 $f(a)$ 之值.

2. 若 $f'(a)<0$,則 $f'(a)(x-a)$ 與 $(x-a)$ 有異號.故仿1之推理,得證 $x$ 經歷 $a$ 時,$f(x)$ 減小.

3. 若 $f'(a)=0$,但 $f''(a)\neq 0$,則 $f(x)-f(a)$ 與 $f''(a)(x-a)^2/2$ 有同號,從而又與 $f''(a)$ 有同號,因無論 $x<a$,或 $x>a$,$(x-a)^2$ 常為正故也.因此 $f''(a)<0$ 時,則在 $x$ 到達 $a$ 前,或在 $x$ 經過 $a$ 後,$f(x)<f(a)$,即 $f(a)$ 為 $f(x)$ 之極大值,§ 639.

仿此,得證 $f''(a)>0$ 時,則 $f(a)$ 為 $f(x)$ 之極小值.

進而言之,若 $f''(a)=0$,而 $f'''(a)\neq 0$,則 $f(a)$ 非 $f(x)$ 之極大或極小值(參閱 § 859,例二).普徧言之,若 $r$ 為奇數而非偶數,自第一導來函數至第 $r$ 導來函數,在 $x=a$ 時皆為0,但第 $(r+1)$ 導來函數不為0,則 $f(a)$ 為極大或極小.

例. $x$ 增加而經歷2時,$f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ 增大抑減小?求 $f(x)$ 之極大及極小值.

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$.故 $f'(2)=-3$ 為負,因此 $x$ 經歷2時 $f(x)$ 減小.

又 $x=1$ 及 $x=3$ 時 $f'(x)=0$,而 $f''(x)=6x-12$,從而 $f''(1)=-6$ 為負,$f''(3)=6$ 為正.故 $f(1)=3$ 為 $f(x)$ 之極大值,$f(3)=-1$ 為極小值.

**f(x)之變化** 茲討論 $x$ 由 $-\infty$ 連續變化至 $+\infty$ 時,§ 214,具實係數之多項式 $f(x)$ 之值,呈如何之變化. 859

例一. 討論 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ 之變化.

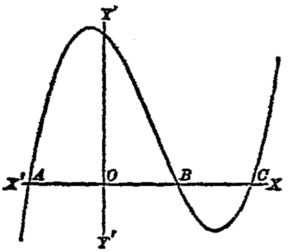
$f(x)=0$ 之根為 $-1, 1, 2$, 而 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$.

故 $x=-\infty$ 時, $f(x)=-\infty$; $x$ 在 $-\infty$ 與 $-1$ 之間時, $f(x)$ 為負; $x=-1$ 時, $f(x)=0$; $x$ 在 $-1$ 與 $1$ 之間時, $f(x)$ 為正; $x=1$ 時, $f(x)=0$; $x$ 在 $1$ 與 $2$ 之間時, $f(x)$ 為負; $x=2$ 時, $f(x)=0$; $x$ 在 $2$ 與 $\infty$ 之間時, $f(x)$ 為正; $x=\infty$ 時, $f(x)=\infty$.

$f'(x)=3x^2-4x-1=0$ 之根為 $(2\pm\sqrt{7})/3$, 或約為 $-0.2$ 及 $1.5$. 在 $x<(2-\sqrt{7})/3$ 及 $x>(2+\sqrt{7})/3$ 時, $f'(x)$ 為正, 但 $x$ 在 $(2-\sqrt{7})/3$ 及 $(2+\sqrt{7})/3$ 時, $f'(x)$ 為負.

故由 §858, $x$ 由 $-\infty$ 變化至 $(2-\sqrt{7})/3$ 時, $f(x)$ 連續增加; $x$ 由 $(2-\sqrt{7})/3$ 變化至 $(2+\sqrt{7})/3$ 時, 連續減小; $x$ 由 $(2+\sqrt{7})/3$ 變化至 $\infty$ 時, 再連續增加.

由是可知, §639, $x=(2-\sqrt{7})/3$ 時, $f(x)$ 有極大值, $x=(2+\sqrt{7})/3$ 時有極小值. 此與 §858 相符, 因 $x=(2-\sqrt{7})/3$ 時, $f''(x)=6x-4$ 為負, 而 $x=(2+\sqrt{7})/3$ 時為正故也.




命 $y=f(x)$, 依 §389 之方法作此方程式之圖象, 則 $f(x)$ 之變化, 卽可一覽無遺. 此時所得之曲線如附圖所示. 曲線截 $x$ 軸之點 $A, B, C$ 為 $f(x)=0$ 之根 $-1, 1, 2$ 之圖象. 曲線之在 $x$ 軸上方者, 對應於 $f(x)$ 之正值, 在下方者對應於負值. 在 $A$ 與 $B$ 間之曲線最高點, 對應於 $f(x)$ 之極大值, 在 $B$ 與 $C$ 間之最低點對應於極小值.

$x$ 由 $-\infty$ 變化至 $\infty$ 時, 曲線上之對應點自 $x$ 軸下方之無窮遠向右上方移動, 經 $A$ 而達極大點, 於是下移經 $B$ 而達極小點, 於是又向上移經 $C$ 而至 $x$ 軸上方之無窮遠.

若漸漸增加 $f(x)$ 之絕對項, 則 $y=f(x)$ 之圖象漸向上方垂直移動, 而 $B$ 及 $C$ 點漸漸趨近而相合於切點, 於是消失 $f(x)=0$ 之對應根漸漸接近而相等, 於是變為虛根.

例二. 討論 $f(x)=x^4-2x^3+2x-1$ 之變化.

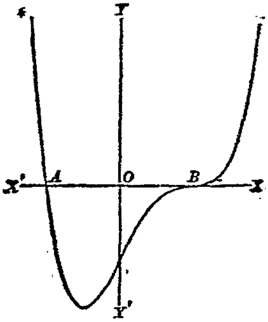
$f(x)=0$ 之根為 $-1, 1, 1, 1$, 而 $f(x)=(x+1)(x-1)^3$.

故 $x=\pm\infty$ 時, $f(x)=\infty$; $x=\pm1$ 時, $f(x)=0$; $x<-1$, 且 $x>1$ 時, $f(x)$ 為正, $x$ 在 $-1$ 與 $1$ 間時, $f(x)$ 為負.

此處 $f'(x)=4x^3-6x^2+2=2(2x+1)(x-1)^2$, 而 $f'(x)=0$ 之根為 $-1/2, 1, 1$. $x<-1/2$ 時, $f'(x)$ 為負, $x$ 在 $-1/2$ 與 $1$ 間, 及 $x>1$ 時, $f'(x)$ 為正, 故由 §858, $x$ 由 $-\infty$ 變化至 $-1/2$ 時, $f(x)$ 連續減小, $x$ 由 $-1/2$ 變化至 $1$, 由 $1$ 變化至 $\infty$ 時, 則連續增加. 故 $x=-1/2$ 時, $f(x)$ 有極小值; 但 $x=1$ 時, 則既無極大值, 亦無極小值.

此與§858相符. 因 $f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$, 且 $f'''(x)=24x-12$. 從而 $x=-1/2$ 時, $f''(x)$ 爲正, 而 $x=1$ 時, $f''(x)=0$, 而 $f'''(x)\neq 0$ 故也.

$y=f(x)$ 之圖象,其形式如附圖所示.曲線截 $x$ 軸之點 $A$,對應於 $f(x)=0$ 之根 $-1$. 又曲線既切且截 $x$ 軸之點 $B$,對應於三重根 1. 曲線之最低點對應於 $f(x)$ 之極小值.其坐標爲 $-1/2$, $-27/16$.




即以上各例以言普偏情形,若 860
$f(x)$ 之次數爲奇數,其第一係數爲正,則 $x$ 由 $-\infty$ 變化至 $+\infty$ 時, $f(x)$ 由 $-\infty$ 增大至其第一極大值,於是減小至其第一極小值,準此以往,最後由末一極小值增大至 $+\infty$. 但有時亦可無極大或極小值,因方程式 $f'(x)=0$ 之次數爲偶數,有時可無實根也.又 $y=f(x)$ 之圖象,由 $x$ 軸下方之無窮遠,引延至 $x$ 軸上方之無窮遠,其截 $x$ 軸之回數爲奇數,——至少爲一.

反之,若 $f(x)$ 之次數爲偶數,則 $f(x)$ 最初由 $+\infty$ 減小至第一極小值,結果由最後極小值增大至 $+\infty$. 又此時 $y=f(x)$ 之圖象不必截 $x$ 軸.若截 $x$ 軸,則必截偶數回.

欲得 $y=f(x)$ 之充分精確之圖象,通常可用§389之方法得之,即名舉 $x$ 之一列值,計算 $y$ 之對應值,定所得各組 $x,y$ 值之對應點,過此諸點作一光滑之曲線 如是之曲線,可約略指出眞圖象截 $x$ 軸之點,及極大值與極小值所在之點.但欲得眞確之截點,則必須解方程式 $f(x)=0$. 欲得極大值與極小值眞確之位置,則必須解方程式 $f'(x)=0$. 方程式 $f(x)=0$ 每有一個重根,則圖象上即有一個切 $x$ 軸之點與之對應.若重根之重複回數爲奇數,則圖象且截 $x$ 軸於此點.

## 習 題 LXXVII

1. 討論 $f(x)=(x+1)(x-2)^2=x^3-3x^2+4$ 之變化，求其極大與極小值，並作 $y=f(x)$ 之圖象.

2. 承上題之意處理以下各函數.

| | |
|---|---|
| (1) $2x^2-x+1$. | (2) $(x+1)(x-2)(2x-1)$. |
| (3) $x^3-12x+14$. | (4) $x^3-5x^2+3x+9$. |
| (5) $x^3-3x^2+5$. | (6) $(x+1)^2(x-2)^2$. |
| (7) $(x^2+x+1)(x+2)$. | (8) $x(x-1)(x+2)(x+3)$. |

3. 命 $x=-1,\ -1/2,\ 0,\ 1/2,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 4$，以定其對應點而求下列分方程式之圖象.

(1) $y=\dfrac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}$. (2) $y=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)(x-3)}$.

# 斯 圖 模 定 理

861 斯圖模函數 (Sturm functions) 命 $f(x)=0$ 爲無重根之任意方程式，又命 $f_1(x)$ 爲 $f(x)$ 之第一導來函數.

以 $f_1(x)$ 除 $f(x)$，命其商爲 $q_1$，變其餘式之號而命爲 $f_2(x)$.

次，以 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$，命其商爲 $q_2$，變其餘式之符號而命爲 $f_3(x)$.

如是以往，此法與 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 間最高公因式之通常求法不同之點，僅爲：每一餘式皆變號，且留意不更行其他變號.

因 $f(x)=0$ 無重根，故 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 間無公因式，§ 851；因此最後所得之餘式應爲一異於 0 之常數，§ 465. 變此餘式之符號，而命爲 $f_m$.

由原多項式，其第一導來函數，及歷次所得變號之餘式所成之函數列

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \cdots\cdots,\ f_m$$

曰斯圖模列,或斯圖模函數列.

**斯圖模函數間之關係**　由定義,此諸函數間有下之一組恆等式所表之關係, 862

$f(x)\equiv q_1f_1(x)+R$　$R=-f_2(x)$

$\equiv q_1f_1(x)-f_2(x)$

$$f(x)\equiv q_1f_1(x)-f_2(x), \tag{1}$$

$$f_1(x)\equiv q_2f_2(x)-f_3(x), \tag{2}$$

$$f_2(x)\equiv q_3f_3(x)-f_4(x), \tag{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{m-2}(x)\equiv q_{m-1}f_{m-1}(x)-f_m. \tag{m-1}$$

由此諸恆等式,可得結論如下:

1. $x$之同一值,不能使二相隣函數爲0.

例如,設$f_1(x)$及$f_2(x)$同在$x=c$時爲0,則由(2)可知$f_3(x)$亦爲0;從而由(3)可知$f_4(x)$亦爲0;從而,最後,可知$f_m$亦爲0.但此違反假設.

2. 設$x$之某值,使中間函數$f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots, f_{m-1}(x)$之一爲0,則緊接其前後之二函數有異號.

例如,若　$f_2(c)=0,$

則由(2)可知　$f_1(c)=-f_3(c).$

**斯圖模定理** (Sturm's theorem)　命$a$與$b$爲二任意實數,但皆非$f(x)=0$之根. 863

$$f(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ \cdots\cdots,\ f_m$$

一列中符號之變化數,與

$$f(b),\ f_1(b),\ f_2(b),\ \cdots\cdots,\ f_m$$

一列中符號之變化數之差,等於$f(x)=0$所有介乎$a$與$b$間之

$f_m$应异……

根之個數.

為便於推考起見,假定 $a<b$, 且假定 $x$ 由 $a$ 連續變化至 $b$, § 214.

$x$ 由 $a$ 變化至 $b$ 時,常數 $f_m$ 之符號始終不變,其他函數中符號之可能變化,以 $x$ 經歷方程式 $f(x)=0$, $f_1(x)=0$, 等之根時所可發生之變化為限, § 835, 從而

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots\cdots,\ f_m$$

一列中之符號變化之數亦然.但

1. 列中除第一函數, $f(x)$, 外,其他任意函數變號時,全列之變化數不因之而增或減.

例如假定 $c$ 為 $f_2(x)=0$ 之一根, $x$ 經歷 $c$ 時, $f_2(x)$ 由正變為負.

因 $c$ 為 $f_2(x)=0$ 之根,故 $c$ 不能又為 $f_1(x)=0$ 或 $f_3(x)=0$ 之根, § 862. 取一適當小之正數 $h$, 令 $c-h$ 與 $c$ 間,或 $c$ 與 $c+h$ 間無 $f_1(x)=0$ 或 $f_3(x)=0$ 之根,則 $x$ 由 $c-h$ 變化至 $c+h$ 時, $f_1(x)$ 及 $f_3(x)$ 皆不變其符號, § 835.

但 $x=c$ 時, $f_1(x)$ 及 $f_3(x)$ 有異號, § 862. 假定 $f_1(c)$ 為正,則 $f_3(c)$ 為負,因此 $x$ 在 $c-h$ 與 $c+h$ 間時, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ 之符號如下:

| | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ |
|---|---|---|---|
| $x=c-h$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $x=c$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x=c+h$ | $+$ | $-$ | $-$ |

對於此諸 $x$ 值,三函數

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$$

之符號常呈一個變化. $f_2(x)$ 之變號之唯一影響,僅為改變變

化之位置,至少在列之此一部分爲然.

又 $x$ 經歷 $c$ 時,列之在 $f_3(x)$ 以後之部分,其變化之數不變.蓋 $x$ 經歷 $c$ 時,$f_3(x)$ 以後之函數,皆不變其符號,即或有之,則亦不過步函數 $f_2(x)$ 之後武,其唯一影響,僅爲又一變化之位置改變而已.

2. $x$ 由 $a$ 變至 $b$ 時,每經 $f(x)=0$ 之一根,列中即失去一個變化.

命 $c$ 爲 $f(x)=0$ 之一根.

函數 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 在 $x$ 之値略小於 $c$ 時有異號,略大於 $c$ 時有同號,§ 856.

換言之,$f(x)$ 與 $f_1(x)$ 間,在 $x$ 將達 $c$ 之前,有一變化,而在 $x$ 甫過 $c$ 之後,此變化即消失.

故 $x$ 由 $a$ 變至 $b$ 時,斯圖模函數列不能增多一變化.反之,$x$ 每經 $f(x)=0$ 之一根,此函數列即消失一變化,且唯限於一.

故　　$f(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ \cdots\cdots,\ f_m$

及　　$f(b),\ f_1(b),\ f_2(b),\ \cdots\cdots,\ f_m$

中之變化數之差,即 $x$ 經歷 $f(x)=0$ 所有介乎 $a$ 與 $b$ 間之諸根時所失去之各變化數,換言之,即爲此諸根之數,是即所欲證者.

設 § 861 之方法,應用於有重根之方程式 $f(\ )=0$,則函數列 $f(x),\ f_1(x),\ \cdots\cdots,\ f_m(x)$, (1) 其最後一項爲其他各項之最高公因式, § 465. 以 $f_m(x)$ 除 (1) 之各項,則得呈 $\phi(x),\ \phi_1(x),\cdots\cdots,\ 1$, (2) 形式之函數列,此函數列有斯圖模定理所賴以成立之一切性質,甚易證之.故 $\phi(x)=0$ 之根,即 $f(x)=0$ 之相異根, § 852, 其介乎 $a$ 與 $b$ 間者之個數等於 $\phi(a),\ \phi_1(a),\ \cdots\cdots,\ 1$ 及 $\phi(b),\ \phi_1(b),\cdots\cdots,\ 1$ 中之變化數之差.此差與 $f(a),\ f_1(a),\cdots\cdots,\ f_m(a)$ 及 $f(b),\ f_1(b),\ \cdots\cdots,\ f_m(b)$ 中之變化數之差同;因以 $f_m(a)$ 及 $f_m(b)$ 分別乘 $\phi(a),\cdots\cdots,\ 1$ 及 $\phi(b),\cdots\cdots,\ 1$ 並不影響

其變化也.

864 **斯圖模定理之應用**　由斯圖模定理,可求得與數字方程式所有一切相異實根之確實個數.且可求得其在任意二相隣整數間者之個數.總之,由此定理可解定根之位置之問題.但用此法以定根之位置,頗為費力,故僅當§836之較簡方法無能為力時,始一用之.

例一. 定 $x^3+3x^2-4x+1=0$ 之根之位置.

此處 $f(x)=x^3+3x^2-4x+1$, 及 $f_1(x)=3x^2+6x-4$.

計算其餘函數,可將演算仿§468, 3排列之,即

$$
\begin{array}{r|r|l}
3+6-4 & 1+3-4+1 & 1+1 \\
6+12-8 & 3+9-12+3 & \\
6-3 & 3+6-4 & \\
\hline
15-8 & 3-8+3 & \\
30-16 & 3+6-4 & \\
30-15 & -14+7 & \\
\hline
-1 & \therefore\ f_2=2-1 & 3+15. \\
\therefore\ f_3=1 & &
\end{array}
$$

故

$f(x)=x^3+3x^2-4x+1$,

$f_1(x)=3x^2+6x-4$,

$f_2(x)=2x-1$,

$f_3=1$.

注意,此處所得之 $f_2(x)$ 及 $f_3$, 並非§861中所確定之 $f_2(x)$ 及 $f_3$, 乃以正的常數乘之而得者.

若以 $f_2(x)=2(x-0.5)$ 依綜合除法除 $f_1(x)$, 則可減縮演算.最後除法中,常以用綜合除法為最佳.

1. $x$之絕對值甚大時,多項式之符號與其最高次項之符號同, §855, 故有下表.

| | $f(x)$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x=-\infty$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$, | 三個變化. |
| $x=0$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$, | 兩個變化. |
| $x=\infty$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$, | 無變化. |

故 $f(x)=0$ 有一個負根,及兩個正根.

2. 欲定正根之位置,可以 $x=0, 1, \cdots\cdots$ 代入,即得

| | $f(x)$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$, | 兩個變化. |
| $x=1$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$, | 無變化. |

故兩正根介乎0與1間.

因負根僅一,故可用§836之方法定其位置.由是知其介乎$-4$與$-5$之間.

例二. $f(x)=2x^3-x^2-2x+2=0$ 有若干實根?

仿例一進行,得 $f_1(x)=3x^2-x-1$ 及 $f_2(x)=13x-17$.

$f_3$ 僅須求其符號,而此符號可不以 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$ 而求得之.

何則,因 $f_2(x)=13(x-17/13)$, 故以 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$ 所得之餘式爲 $f_1(17/13)$. 但 $17/13>1$, 又 $x>1$ 時 $f_1(x)$ 爲正. 故 $f_1(17/13)$ 爲正, 從而 $f_3$ 爲負.

$x=-\infty$ 時, $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3$ 之符號爲 $-$, $+$, $-$, $-$; $x=\infty$ 時,則爲 $+$, $+$, $+$, $-$. 故 $f(x)=0$ 僅有一實根.

最後函數 $f_m$ 之性質,爲§863中之證所利用者,僅其符號之不變,故計算 $f(x)=0$ 之斯圖模函數,以求 $a$ 與 $b$ 間根之個數時,若計算至一函數 $f_p(x)$, 對於一切 $a$ 與 $b$ 間之 $x$ 値,此函數之符號始終不變,則此後之函數,卽不必計算.因由§863之證,可知根之所求個數,乃 $f(a)$, ……, $f_p(a)$ 及 $f(b)$, ……, $f_p(b)$ 中之變化數之差也.

例三. $f(x)=x^3+x^2+x+1=0$ 有若干實根?

此處 $f_1(x)=3x^2+2x+1$, 又因 $2^2<4\cdot3$, 故此函數對於 $x$ 之一切實數値常爲正, §§635, 823. 故 $f_2(x)$ 及 $f_3$ 不必計算.

$f(x)$, $f_1(x)$ 之符號,在 $x=-\infty$ 時爲 $-$, $+$; 在 $x=\infty$ 時,爲 $+$, $+$. 故 $f(x)=0$ 有一實根.

## 習 題 LXXVIII

以下各方程式之實根之位置,試藉斯圖模定理以定之.

1. $x^3-6x^2+5x+13=0$.
2. $x^3-4x^2-10x+41=0$.
3. $x^3+5x+2=0$.
4. $x^3+3x^2+8x+8=0$.
5. $x^3-x^2-15x+28=0$.
6. $x^4-4x^3-5x^2+19x+20=0$.
7. $2x^4-3x^2+3x-1=0$.
8. $x^4-8x^3+19x^2-12x+2=0$.
9. $x^4-12x^2+12x-3=0$.
10. $x^4+2x^3-6x^2-8x+9=0$.

以下各方程式之實根之個數,試藉斯圖模定理以定之.

11. $4x^3-2x-5=0$.
12. $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.
13. $x^n+1=0$.
14. $x^4-6x^3+x^2+14x-14=0$.
15. 設 $f(x)=0$ 爲一無重根之 $n$ 次方程式. 求證令 $f(x)=0$ 之根皆爲實數

之條件爲其斯圖模函數列 $f(x), f_1(x)\cdots\cdots, f_m$ 中,須有 $n+1$ 項,且此諸函數之第一項須皆有同號.

16. 欲令三次方程式 $x^3+px+q=0$ 之根皆爲實數而不相等,必須 $4p^3+27q^2$ 爲負.試藉上題之定理以證之.

## 根之對稱函數

865 **定理一** 設 $f(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n=0$ 之根爲 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots \beta_n$,從而 $f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots\cdots(x-\beta_n)$,則

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-\beta_1}+\frac{f(x)}{x-\beta_2}+\cdots\cdots+\frac{f(x)}{x-\beta_n}.$$

例如,設 $n=3$,從而

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3). \tag{1}$$

以 $x+h$ 代入 (1) 中之 $x$ 則得

$$f(x+h)=[(x-\beta_1)+h][(x-\beta_2)+h][(x-\beta_3)+h]. \tag{2}$$

(2) 之各端,皆可化成 $h$ 之多項式,左端可用泰羅定理化之,§848,右端可仿 §558 用連乘法化之.

因 (2) 式爲一恆等式,故如上所得之兩多項式中,$h$ 之同次冪之係數必相等,§284.

但因 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\cdots\cdots$, §848, 故第一多項式中 $h$ 之係數爲 $f'(x)$. 而在第二多項式中,此係數爲 $(x-\beta_2)(x-\beta_3)+(x-\beta_3)(x-\beta_1)+(x-\beta_1)(x-\beta_2)$,故

$$\begin{aligned} f'(x)&=(x-\beta_2)(x-\beta_3)+(x-\beta_3)(x-\beta_1)+(x-\beta_1)(x-\beta_2)\\ &=\frac{f(x)}{x-\beta_1}+\frac{f(x)}{x-\beta_2}+\frac{f(x)}{x-\beta_3}, \end{aligned} \tag{3}$$

因 $(x-\beta_2)(x-\beta_3)=f(x)/(x-\beta_1)$,等故也.

此理可適用於方程式之爲任意次 $n$ 者.在普遍情形中,(2)

之右端有 $n$ 個因式,而此端化爲 $h$ 之多項式時,$h$ 之係數爲由二項式 $x-\beta_1, x-\beta_2, \cdots\cdots, x-\beta_n$ 每次取 $n-1$ 個所作種種積之和, § 558. 此種種積中,缺因式 $x-\beta_1$ 之一積,可書作 $f(x)/(x-\beta_1)$, 餘準此.

例如,設 $\qquad f(x)=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3),$

則 $\qquad f'(x)=3x^2-12x+11,$

而 $\qquad (x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)+(x-1)(x-2)=3x^2-12x+11.$

**定理二** 方程式 $f(x)=0$ 所有諸根之同次羃之和,得以方 866
程式之係數表成有理式.

例如,設方程式爲

$$f(x)=x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0. \tag{1}$$

命 $\alpha, \beta, \gamma$ 爲 (1) 式之根,並命 $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_r$ 爲

$$s_1=\alpha+\beta+\gamma,\ s_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,\ \cdots\cdots,\ s_r=\alpha^r+\beta^r+\gamma^r,$$

於是所欲證者,爲 $s_1, s_2, \cdots\cdots$ 等得以係數 $b_1, b_2, b_3$ 表成有理式.

1. 由上一定理, § 865, 得

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-\alpha}+\frac{f(x)}{x-\beta}+\frac{f(x)}{x-\gamma}. \tag{2}$$

因 $f(x)$ 得爲 $x-\alpha, x-\beta$, 及 $x-\gamma$ 所整除,故 (2) 中之各分式皆係代表 $x$ 之多項式者,此各多項式可用 § 410 之法則求得之. 應用此法則,加其結果,則得

$$\begin{aligned}
f(x)/(x-\alpha)&=x^2+(\alpha+b_1)x+(\alpha^2+b_1\alpha+b_2)\\
f(x)/(x-\beta)&=x^2+(\beta+b_1)x+(\beta^2+b_1\beta+b_2)\\
f(x)/(x-\gamma)&=x^2+(\gamma+b_1)x+(\gamma^2+b_1\gamma+b_2)\\
\hline
f'(x)&=3x^2+(s_1+3b_1)x+(s_2+b_1s_1+3b_2)
\end{aligned} \tag{3}$$

但由定義，§847，又得

$$f'(x)=3x^2+2b_1x+b_2 \tag{4}$$

令(3)及(4)兩式中$x$同次冪之係數相等，就$s_1, s_2$解之，則得

$$s_1+3b_1=2b_1, \qquad \therefore \quad s_1=-b_1, \tag{5}$$

$$s_2+b_1s_1+3b_2=b_2, \qquad \therefore \quad s_2=b_1^2-2b_2. \tag{6}$$

2. 由上得之$s_1, s_2$值，可如下依次求得$s_3, s_4, \cdots\cdots$之值：

因$\alpha, \beta, \gamma$爲(1)式之根，故

$$\alpha^3+b_1\alpha^2+b_2\alpha+b_3=0. \tag{7}$$

$$\beta^3+b_1\beta^2+b_2\beta+b_3=0, \tag{8}$$

$$\gamma^3+b_1\gamma^2+b_2\gamma+b_3=0. \tag{9}$$

將此諸恆等式相加，卽得

$$s_3+b_1s_2+b_2s_1+3b_3=0, \tag{10}$$

由是可求得$s_3$，其値成以$b_1, b_2, b_3, s_1, s_2$表示之有理式，從而由(5)，(6)，又可成以$b_1, b_2, b_3$表示之有理式.

次，以$\alpha, \beta, \gamma$分別乘恆等式(7)，(8)，(9)，將所得結果相加，則得

$$s_4+b_1s_3+b_2s_2+b_3s_1=0, \tag{11}$$

由此式及(5)，(6)，(10)可得$s_4$，其値成以$b_1, b_2, b_3$表示之有理式.

倣此，以$\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$，及$\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$，等分別乘(7)，(8)，(9)，在每組乘法後，加其結果，卽得恆等式

$$s_5+b_1s_4+b_2s_3+b_3s_2=0, \quad s_6+b_1s_5+b_2s_4+b_3s_3=0, \cdots\cdots,$$

由是可得$s_5, s_6, \cdots\cdots$，其値成以$b_1, b_2, b_3$，表示之有理式.

對於任意$n$次方程式$f(x)=0$，本定理得倣上證之.

**例一.** 設$\alpha$ $\beta, \gamma$爲$x^3-2x^2+4x+2=0$之根，求

$\Sigma 1/\alpha=1/\alpha+1/\beta+1/\gamma$, $\Sigma 1/\alpha^2=1/\alpha^2+1/\beta^2+1/\gamma^2$, $\Sigma 1/\alpha^3=1/\alpha^3+1/\beta^3+1/\gamma^3$.

應用 $x=1/y$ 之變換,以 $y^3$ 之係數除變換方程式,則得 $y^3+2y^2-y+1/2=0$.

以 $b_1=2$, $b_2=-1$, $b^3=1/2$ 代入上述公式 (5), (6), (10) 中,則所得方程式中,卽得 $s_1=-2$, $s_2=6$, $s_3=-31/2$.

從而由 § 814, $\quad \Sigma 1/\alpha=-2$, $\Sigma 1/\alpha^2=6$, $\Sigma 1/\alpha^3=-31/2$.

例二. 就方程式 $f(x)=x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4=0$, 求證 $s_1+4b_1=3b_1$, $s_2+b_1s_1+4b_2=2b_2$. $s_3+b_1s_2+b_2s_1+4b_3=b_3$, $s_4+b_1s_3+b_2s_2+b_3s_1+4b_4=0$, $s_5+b_1s_4+b_2s_3+b_3s_2+b_4s_1=0$, 並以 $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ 計算 $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$.

由上之各公式,亦可知方程式之第一係數,如 (1) 式,爲 1 時, 867
則 $s_1, s_2, s_3$, …… 皆爲各係數之整函數.

**定理三** 方程式 $f(x)=0$ 之諸根之有理對稱函數,皆得以 868
方程式之係數表成有理式.

命 $f(x)=0$ 之諸根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots, \nu$.

$\alpha, \beta, \cdots, \nu$ 之各有理對稱函數,皆得以 $\Sigma\alpha^p$, $\Sigma\alpha^p\beta^q$, $\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r$, 等範式之函數表成有理式, § 544. 故欲證本定理,僅須就足以上幾種範式之函數證之. 對於 $\Sigma\alpha^p=s_p$ 之範式,業已證之於 § 866, 現所欲證者,爲 $\Sigma\alpha^p\beta^q$, 等皆得以此 $s_p$ 範式之函數表成有理式.

1. 範式 $\Sigma\alpha^p\beta^q=\alpha^p\beta^q+\beta^p\alpha^q+\cdots\cdots$.

積 $$(\alpha^p+\beta^p+\cdots\cdots)(\alpha^q+\beta^q+\cdots\cdots) \tag{1}$$

爲項之下列兩對稱羣之和:

$$\alpha^{p+q}+\beta^{p+q}+\cdots\cdots, \tag{2}$$

$$\alpha^p\beta^q+\beta^p\alpha^q+\cdots\cdots. \tag{3}$$

但 (1) 及 (2) 爲係數之有理函數, § 866. 而 (3), 卽 $\Sigma\alpha^p\beta^q$, 可由 (1) 減 (2) 得之,故亦爲係數之有理函數.

因 (1) 爲 $s_ps_q$, (2) 爲 $s_{p+q}$, 故得公式

$$\Sigma\alpha^p\beta^q=s_ps_q-s_{p+q} \tag{4}$$

若 $p=q$, 則 (3) 之諸項兩兩相等而 (3) 變爲 $2\Sigma\alpha^p\beta^p$. 於是得

$$2\Sigma\alpha^p\beta^p=s_p^2-s_{2p}.$$

2. 範式 $\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r=\alpha^p\beta^q\gamma^r+\beta^p\alpha^q\gamma^r+\cdots\cdots$.

積 $$(\alpha^p\beta^q+\beta^p\alpha^q+\cdots\cdots)(\alpha^r+\beta^r+\gamma^r+\cdots\cdots) \tag{5}$$

爲項之下列三對稱羣之和:

$$\alpha^{p+r}\beta^q+\beta^{p+r}\alpha^q+\cdots\cdots, \tag{6}$$

$$\alpha^p\beta^{q+r}+\beta^p\alpha^{q+r}+\cdots\cdots, \tag{7}$$

$$\alpha^p\beta^q\gamma^r+\beta^p\alpha^q\gamma^r+\cdots\cdots. \tag{8}$$

但前已證明 (5), (6), 及 (7) 爲係數之有理函數, 而 (8), 即 $\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r$, 可由 (5) 減 (6) 與 (7) 之和得之; 故 $\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r$ 亦爲係數之有理函數.

若 $p=q$, 則 (8) 變爲 $2\Sigma\alpha^p\beta^p\gamma^r$; 若 $p=q=r$, 則變爲 $6\Sigma\alpha^p\beta^p\gamma^p$.

3. 範式 $\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r\delta^u$, 等等.

連續用 1, 2 兩款中所說明之方法, 即可證此諸範式爲係數之有理函數. 證時當由以 $\alpha^u+\beta^u+\gamma^u+\cdots\cdots$ 乘 $\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r$ 始.

**例.** 求證 $\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r=s_ps_qs_r+2s_{p+q+r}-s_{p+q}s_r-s_{q+r}s_p-s_{r+p}s_q$.

## 習　題　LXXIX

1. 設方程式 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$, 試用 $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ 以求 $s_3$ 及 $s_4$.

2. 設 $\alpha, \beta, \gamma$ 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根, 試用 $p, q, r$ 以求 $\Sigma 1/\alpha^2$, $\Sigma 1/\alpha^3$ 及 $\Sigma\alpha\beta^2$.

3. 試作一方程式, 令其根爲 $x^3-2x^2+3x-1=0$ 之根之立方.

4. 設 $\alpha, \beta, \gamma$ 爲方程式 $x^3-x^2+3x+4=0$ 之根, 試用 §§ 866, 867 之方法, 求此諸根之以下各對稱函數之值.

(1) $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$.　　(2) $\Sigma\alpha^3\beta^2$.　　(3) $\Sigma\alpha^3\beta\gamma$.

(4) $\Sigma\alpha^3\beta^2\gamma$.　　(5) $\Sigma 1/\alpha^4$.　　(6) $\Sigma\alpha^2\beta^2/\gamma$.

# XXX. 普徧之三次及四次方程式

**代數的解法** 在前章中業已證明,數字方程式之實根,常可確實或約略求得;且其所用之法,亦可用諸此種方程式之複根.但此種種方法,當然不適用於文字方程式,可不待言.欲解此種方程式,須求得以其係數表根之式. 869

一方程式若應用有限回數之若干代數運算,即加法,減法,乘法,除法,乘方,及開方後,即得以其係數表根之式,則謂此方程式得用代數的解法解之.

前§631中業已證明普徧二次方程式有此種代數的解法,玆當證普徧之三次及四次方程式亦然.但高於四次之普徧方程式不能用代數的解法解之.

**1之立方根** 在§646中業已證明方程式$x^3=1$之根爲1, 870
$(-1+i\sqrt{3})/2$, $(-1-i\sqrt{3})/2$.故此諸數皆爲1之立方根.第三數爲第二數之平方,故若以$\omega$表第二數,則第三數當以$\omega^2$表之.因$x^3-1=0$缺$x^2$項,故$1+\omega+\omega^2=0$, §805.

仿此各數$a$皆有三立方根,即方程式$x^3=a$之三根.若此諸根之一爲$\sqrt[3]{a}$,則其他二者爲$\omega\sqrt[3]{a}$及$\omega^2\sqrt[3]{a}$.

**普徧三次方程式. 卡爾丹公式 (Cardan's formula)** 由前 871
§818之方法,凡三次方程式皆可化爲下之形式:

$$x^3+px+q=0, \tag{1}$$

其中缺$x^2$項.

(1) 中命　　$$x=y+z,\tag{2}$$

則得　　$$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+p(y+z)+q=0,$$

即　　$$y^3+z^3+(3yz+p)(y+z)+q=0.\tag{3}$$

因變數 $y,z$ 單受條件 (3) 之限制,故又可限之以第二條件.

假定　　$$3yz+p=0,\tag{4}$$

從而由 (3),　　$$y^3+z^3+q=0.\tag{5}$$

由 (5),　　$$y^3+z^3=-q,\tag{6}$$

又由 (4),　　$$y^3z^3=-p^3/27.\tag{7}$$

因此,由 §636, $y^3$ 及 $z^3$ 爲呈以下形式之二次方程式之根:

$$u^2+qu-p^3/27=0.\tag{8}$$

解 (8) 命所得表根之式分別爲 $A$ 及 $B$, 則

$$y^3=A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\quad z^3=B=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.\tag{9}$$

由此二方程式 (9), 可得三 $y$ 值及三 $z$ 值,而由 §870, 此諸值爲

$$y=\sqrt[3]{A},\qquad \omega\sqrt[3]{A},\qquad \omega^2\sqrt[3]{A},\tag{10}$$

$$z=\sqrt[3]{B},\qquad \omega\sqrt[3]{B},\qquad \omega^2\sqrt[3]{B}.\tag{11}$$

但由 (4), $yz=-p/3$; 在 (10), (11) 中之各組 $y,z$ 值, 適合此條件者爲

$$y,z=\sqrt[3]{A},\ \sqrt[3]{B};\ \ \omega\sqrt[3]{A},\ \omega^2\sqrt[3]{B};\ \ \omega^2\sqrt[3]{A},\ \omega\sqrt[3]{B}.$$

以此各組值代入 (2), 即得 (1) 之三根如下:

$$x_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\quad x_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\quad x_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}.$$

但　　$$A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\qquad B=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.\tag{12}$$

**例一.** 解 $x^3-6x^2+6x-2=0$.

由 §818, 可知所設方程式中若作 $x=y+2$ 之代換,即可變換爲 $y^3+py+q=0$

之形式.於是得

$$y^3-6y-6=0.$$

以 $p=-6$, $q=-6$ 代入上得之公式卽知此方程式之根爲

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4}\omega+\sqrt[3]{2}\omega^2,\ \sqrt[3]{4}\omega^2+\sqrt[3]{2}\omega.$$

故原方程式之根爲

$$2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2},\ 2+\sqrt[3]{4}\omega+\sqrt[3]{2}\omega^2,\ 2+\sqrt[3]{4}\omega^2+\sqrt[3]{2}\omega.$$

例二. 解方程式 $x^3+3x^2+6x+5=0$.

**解之討論** 若 $p$.及 $q$ 爲實數,則根之性質視 $q^2/4+p^3/27$ 之值而定之,如下: 872

1. 若 $q^2/4+p^3/27>0$, 則一根爲實數,二根爲虛數.

因此時 $A$ 及 $B$ 爲實數,從而 $x_1$ 爲實數,而 $x_2$, $x_3$ 爲共軛虛數, § 870, 故也.

2. 若 $q^2/4+p^3/27=0$, 則各根皆爲實數,而二根相等.

因此時 $A=B=-q/2$, 從而 $x_1=-2\sqrt[3]{q/2}$, 又 $x_2=x_3=-(\omega+\omega^2)\times\sqrt[3]{q/2}=\sqrt[3]{q/2}$, 以 $\omega+\omega^2=-1$ 故也, § 870.

3. 若 $q^2/4+p^3/27<0$, 則各根皆爲實數而不相等.

此可用斯圖謨定理證之(參閱第 428 頁, 習題 16). 但 $q^2/4+p^3/27<0$ 時, $A$ 及 $B$ 爲複素數; 表 $x_1$, $x_2$, $x_3$ 之式,雖爲實數,但不能用代數的變換化之成實數之形式.職是之故,名之曰三次方程式之不可約情形(參閱 § 885).

$q^2/4+p^3/27$ 一式曰三次方程式 $x^3+px+q=0$ 之判別式,蓋此式之等於 0, 乃令二根相等之條件也(比較 § 635). 873

**普徧四次方程式. 斐刺里解法 (Ferrari's solution)** 凡四次方程式皆可用 § 818 之方法,化成下之形式: 874

$$x^4+ax^2+bx+c=0. \tag{1}$$

(1) 之左端以 $x^2u+u^2/4$ 加減之,俾變換爲平方差,但 $u$ 表待

求其值之一常數.於是得

$$x^4+x^2u+u^2/4-x^2u-u^2/4+ax^2+bx+c=0,$$

即
$$(x^2+u/2)^2-[(u-a)x^2-bx+(u^2/4-c)]=0. \tag{2}$$

欲令第二項爲完全平方,必須

$$b^2=4(u-a)(u^2/4-c),$$

即
$$u^3-au^2-4cu+(4ac-b^2)=0. \tag{3}$$

此爲 $u$ 之三次方程式,命其一根爲 $u_1$. 以 $u_1$ 代 (2) 中之 $u$,則第二項變爲 $\sqrt{u_1-a}x-b/2\sqrt{u_1-a}$ 之平方,而 (2) 遂與以下兩個二次方程式等值:

$$x^2+\sqrt{u_1-a}x+\left(\frac{u_1}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0, \tag{4}$$

$$x^2-\sqrt{u_1-a}x+\left(\frac{u_1}{2}+\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0, \tag{5}$$

故解 (4) 及 (5) 卽得 (1) 之根.

例一. 解 $x^4+x^2+4x-3=0$.

此處 $a=1, b=4, c=-3$, 故三次方程式 (3) 爲

$$u^3-u^2+12u-28=0.$$

此三次方程式之一根爲 2, 在 (4) 及 (5) 中,命 $u_1=2$, 則得

$$x^2+x-1=0 \text{ 及 } x^2-x+3=0.$$

解此二方程式,得 $x=(-1\pm\sqrt{5})/2$, $(1\pm i\sqrt{11})/2$.

例二. 解方程式 $x^4-4x^3+x^2+4x+1=0$.

因三次方程式 (3) 有三根,其中任何一根皆可取爲 (4) 及 (5) 中之 $u_1$, 故由上述之方法,似可得 $3\cdot4$ 卽 12 個 $x$ 值;而所與方程式 (1), 則固僅能有四根也.然 $u_1$ 之選擇,並不影響 (4) 及 (5) 共同所有之四根之值,僅此四根分配於 (4) 及 (5) 間之方法,因之不同而已,此不難證明之也.

**倒數方程式** 一倒數方程式,§815,有無爲 1 或 $-1$ 之一根,可由視察發見之;若有,則可由原方程式得一降次方程式 $\phi(x)=0$,其根無爲 1 或 $-1$ 者.由 §815,可知此降次方程式 $\phi(x)=0$ 必呈下之形式: 875

$$a_0x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\cdots\cdots+a_mx^m+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0, \quad (1)$$

換言之,其次數必爲偶數,凡距 $\phi(x)$ 之首尾等遠之二係數皆相等.

茲將證此方程式 $\phi(x)=0$ 若作 $z=x+1/x$ 之代換,則可變換爲 $z$ 之方程式,其次數爲 $\phi(x)=0$ 之次數之半.於是可知若 $\phi(x)=0$ 之次數不大於八,則可藉 §§631, 871, 874 之助以求其根.

以 $x^m$ 除 (1),結合其項,則得

$$a_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+a_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\cdots\cdots+a_m=0, \quad (2)$$

實行所示演算,則可知

$$x^{p+1}+\frac{1}{x^{p+1}}=\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right); \quad (3)$$

若 $z=x+1/x$,且在 (3) 中依次命 $p=1, 2, 3\cdots\cdots$,則得

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2, \qquad x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \quad (4)$$

換言之,即得 $z$ 之 $p$ 次式以表 $x^p+1/x^p$.以此若干式代入 (2),則得 $z$ 之 $m$ 次方程式,是即所欲證者(比較 §645).

例一. 解 $2x^8-x^7-12x^6+14x^5-14x^3+12x^2+x-2=0$.

此爲一倒數方程式,有根 1 及 $-1$.

去因數 $x^2-1$,

$$2x^6-x^5-10x^4+13x^3-10x^2-x+2=0.$$

以 $x^3$ 除之，

$$2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+13=0.$$

於是由 (4)，$$2(z^3-3z)-(z^2-2)-10z+13=0,$$

或 $$2z^3-z^2-16z+15=0.$$

解之，$$z=1,\ -3,\ 或\ 5/2.$$

故 $$x+1/x=1,\ -3,\ 或\ 5/2,$$

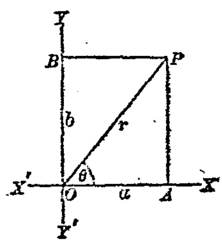
從而 $$x=(1\pm i\sqrt{3})/2,\ (-3\pm\sqrt{5})/2,\ 2,\ 或\ 1/2.$$

例二. 解 $x^6-x^5+x^4+x^2-x+1=0$.

876 凡二項方程式 $x^n+a=0$，皆可以 $x=\sqrt[n]{a}\,y$ 代入，而化之成倒數方程式之形式，代入之結果為 $y^n+1=0$ (比較 §646，例二).

877 **用絕對值及幅角表複素數之式** 在附圖中，$P$ 為複素數 $a+bi$ 之圖象，其作圖法與 §238 所述者同.

$OP$ 之長為 $\sqrt{a^2+b^2}$，乃 $a+bi$ 之絕對值，§239. 茲以 $r$ 表之.




以 $\theta$ 表角 $XOP$ 之弧度，卽以 $O$ 為中心所作單位半徑之圓周上，此角所對之弧長. 名 $\theta$ 曰 $a+bi$ 之幅角 (Amplitude).

名比 $b/r$ 曰 $\theta$ 之正弦，記作 $b/r=\sin\theta$.

名比 $a/r$ 曰 $\theta$ 之餘弦，記作 $a/r=\cos\theta$.

於是 $$a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta,$$

從而 $$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

若 $\theta=0$，則 $b=0$，而 $a=r$. 故 $\sin 0=0$，而 $\cos 0=1$.

878 $360^\circ$ 之弧度為 $2\pi$，此為單位半徑之圓周之長. 故由 $r, \theta$ 所定之一點 $P$，亦可由 $r, \theta+2\pi$；$r, \theta-2\pi$；普徧言之，$r, \theta+2m\pi$ 定之，但 $m$ 表任意整數. 故謂 $a+bi$ 之幅角之普徧值為 $\theta+2m\pi$.

879 **定理** 兩複素數之積之絕對值，為原二數之絕對值之積；

其幅角為原二數之幅角之和.

因 $$r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$$
$$=rr'[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')$$
$$+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')]$$
$$=rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')],$$

而在三角法中,業已證明

$$\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta',$$
$$\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'$$

故也.

在 §240 所述之作圖法,乃基於本定理者.

系一 累用 §879, 則得 880

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot r'(\cos\theta'+i\sin\theta')\cdot r''(\cos\theta''+i\sin\theta'')\cdots\cdots$$
$$=rr'r''\cdots\cdots[\cos(\theta+\theta'+\theta''+\cdots\cdots)$$
$$+i\sin(\theta+\theta'+\theta''+\cdots\cdots)].$$

系二 在 §880 中,命 $r=r'=r''=\cdots\cdots$, 及 $\theta=\theta'=\theta''=\cdots\cdots$ 則得 881
下之公式,是曰棣美弗定理 (Demoivre's theorem):

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

系三 對於商可得公式 882

$$\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r'(\cos\theta'+i\sin\theta')}=\frac{r}{r'}[\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')]$$

因 $$\frac{r}{r'}[\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')]\cdot r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$$
$$=r(\cos\theta+i\sin\theta). \qquad \S 879$$

系四 設定 $k$ 為 $0, 1, 2, \cdots\cdots, (n-1)$ 等 $n$ 個值,則複素數之 $n$ 883
個 $n$ 次根,為

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

因 $$\left[r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]^n$$

$$=r[\cos(\theta+2k\pi)+i(\sin\theta+2k\pi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

故也. §§ 881, 878.

884 **二項方程式** $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 之 $n$ 個 $n$ 次根, 爲方程式 $x^n-r(\cos\theta+i\sin\theta)=0$ 之 $n$ 個根. 故在特殊情形下, $r$ 爲實數, 從而 $\theta$ 爲 0 時,方程式 $x^n-r=0$ 之 $n$ 個根爲

$$\sqrt[n]{r}(\cos 2k\pi/n+i\sin 2k\pi/n),\quad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1.$$

例如,方程式 $x^3-1=0$ 之根爲

$$\cos 0+i\sin 0,\quad \cos 2\pi/3+i\sin 2\pi/3,\quad \cos 4\pi/3+i\sin 4\pi/3.$$

諸值,可證其分別等於

$$1,\ (-1+i\sqrt{3})/2,\ (-1-i\sqrt{3})/2.$$

885 **三次方程式不可約情形之三角解法** 在三次方程式 $x^3+px+q=0$ 之不可約情形中, § 872, 3, 式 $A$ 及 $B$, § 871, 爲共軛虛數.蓋在此情形中,因 $q^2/4+p^3/27$ 爲負,故

$$A=-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)},\quad B=-\frac{q}{2}-i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}.$$

故用絕對值及幅角以表 $A$ 與 $B$ 之式, §877, 則呈下之形式:

$$A=r(\cos\theta+i\sin\theta),\quad B=r(\cos\theta-i\sin\theta).\tag{1}$$

其中 $$r=\left(\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$$

而 $$\cos\theta=\frac{-q/2}{r}=-\frac{q}{2}\left(-\frac{27}{p^3}\right)^{\frac{1}{2}}\tag{2}$$

若知 $p$ 及 $q$ 之值,則 $\theta$ 之值可由 $\cos\theta$ 之值,藉餘弦表之助以求得之.

在 $x^3+px+q=0$ 之根之公式,§871,(12)中,以(1)式代 $A$ 及 $B$,並以§884所得之式代 $\omega$ 及 $\omega^2$. 簡化此結果,則爲

$$x_1=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3},\quad x_2=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3},\quad x_3=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}.$$

其中 $r$ 及 $\theta$ 之值,可由(2)知之,由此諸公式及餘弦表之助卽可計算根之值.

例. 解 $x^3-x+1/3=0$.

此處 $q^2/4+p^3/27=-1/108$, 故爲不可約情形.

代入公式(2)而簡化之,則得

$$r=1/\sqrt{27},\ \cos\theta=-\sqrt{3}/2.\ \text{從而}\ \theta=150^\circ.$$

故由對數表及餘弦表之助,得

$$x_1=\frac{2}{\sqrt[6]{27}}\cos 50^\circ=0.7422;\quad x_2=\frac{2}{\sqrt[6]{27}}\cos 170^\circ=-1.1371;$$

$$x_3=\frac{2}{\sqrt[6]{27}}\cos 290^\circ=0.3949.$$

## 習　題　LXXX

用§871及§874之方法,解方程式1至10.

1. $x^3-9x-28=0$.　　2. $x^3-9x^2+9x-8=0$.
3. $x^3-3x-4=0$.　　4. $4x^3-7x-6=0$.
5. $x^3+3x^2+9x-1=0$.　　6. $3x^3-9x^2+14x+7=0$.
7. $x^4+x^2+6x+1=0$.　　8. $x^4-4x^3+x^2+4x+1=0$.
9. $x^4+12x-5=0$.　　10. $x^4+8x^3+12x^2-11x+2=0$.
11. 解 $3x^6-2x^5+6x^4-2x^3+6x^2-2x+3=0$.
12. 解 $2x^8-9x^7+18x^6-30x^5+32x^4-30x^3+18x^2-9x+2=0$.
13. 解 $6x^7-x^6+2x^5-7x^4-7x^3+2x^2-x+6=0$.
14. 解 $x^7-1=0$ 時,依照§875,所當用之 $z$ 之三次方程式如何?
15. 欲令 $x^3+3ax^2+3bx+c=0$ 之根皆爲實數,其條件如何?
16. 試求各三角式,以表 $x^5-1=0$ 及 $x^6+1=0$ 之根.
17. 解以下不可約三次方程式:

(1) $x^3-3x-1=0$.　　(2) $x^3-6x-4=0$.

18. 底面爲正方形之直角柱,內接於直徑爲 $3\sqrt{3}$ 之球中.設此直角柱之

體積爲27,則其高如何?

19. 設一直圓柱之體積爲$50\pi$,其全表面積爲$105\pi/2$,求其底面之半徑及高.

√20. 一直圓錐之高爲6,其底面之半徑爲4.一直圓柱,其面積爲圓錐面積之九分之四,而內接於圓錐.求此圓柱之高.

# XXXI. 行列式及消去法

## 行列式之定義

886 **反轉 奇數排列及偶數排列** 當討論一組事物,如文字及數字之排列時,可取是等事物之一種特別順序,定爲標準順序.於是任意一種排列中,若後於某事物之事物,在標準順序中前於此事物,則可列舉如是之例,能得若干,卽謂此種排列有若干反轉(inversion).視排列中之反轉數爲奇或偶(包括0),而名之爲奇數排列或偶數排列.

例如,設數字1, 2, 3, 4, 5爲有標準順序之事物.則排列45312中,有八個反轉,卽43, 41, 42, 53, 51, 52, 31, 32.從而此45312爲偶數排列.

887 **定理** 若排列中之二事物互換,則反轉數增加或減少奇數個.

蓋若兩相隣事物互換,則反轉數增加或減少1個.例如,取$ApqB$ (1) 及 $AqpB$ (2) 比較之,其中$A$及$B$表前於及後於互換物$p, q$之物羣.$A$及$B$中所得發生之任何反轉,及因$A, p$,與$q$在$B$前而得發生之任何反轉,皆爲(1)及(2)所公有.故在(1)及(2)中,關於反轉之唯一不同,僅爲下事:若$pq$爲一反轉,則$qp$非反轉,因此(2)較(1)少一個反轉;但若$pq$非反轉,則$qp$爲一反轉,因此(2)較(1)多一個反轉.

又欲互換任意二物,可將相隣之物,互換奇數回以完成之.例如,由 $pabq$ 可將相隣文字互換五回.而得 $qabp$.先依次將 $p$ 與其下每個文字互換,於是逐次得 $apbq$, $abpq$, $abqp$, 再將 $q$ 與其前每個文字互換.而得 $aqbp$, $qabp$. 此過程中,第二部較第一部少一步驟,因第二部開始時,$q$ 已依所需方向,移過一位故也若 $p$ 及 $q$ 間有 $\mu$ 個文字,則第一部過程有 $\mu+1$ 個步驟,而在第二部中有 $\mu$ 個步驟,而 $(\mu+1)+\mu$, 即 $2\mu+1$, 常爲奇數.

因相隣物每互換一回,反轉數卽發生 1 個或 $-1$ 個變化,且奇數個 1 及 $-1$ 之和爲奇數,故本定理成立.

例如,若將 21457368 (1 之 4 與 6 互換,則得 21657348 (2). 考其反轉數,則 (1) 有五, (2) 有八,而 $8-5$ 爲奇數.

同時盡取 $n$ 物而得之 $n!$ 排列, §763, 半爲奇數排列,而半爲 888
偶數排列.蓋由其中任一排列,逐次將其二物互換,卽盡得其餘之排列.如是所得之排列,交錯爲奇偶數排列,或交錯爲偶奇數排列, § 887. 而 $n!$ 爲偶數,故所有種種排列,半爲奇而半爲偶.

以下將論究附有足數之各組文字,如 $a_1, a_2, \cdots\cdots, b_1, b_2, \cdots\cdots$, 889
餘類推.由此種種符號中,擇其文字及足數皆不同者成一組,依某種順序排列之,而後求其文字及足數之反轉數之和.此和若爲偶數,則此等符號排成任意他種順序時,仍爲偶數.若爲奇數,則仍爲奇數.因若將其中任二符號互換,則文字及足數二者之反轉數,各發生奇數個變化, § 887, 從而共發生偶數個變化故也.

特例,文字成標準順序時之足數反轉數,及足數成標準順

序時之文字反轉數,或同為奇數,或同為偶數.

例如,$a_2b_3c_1$中之足數反轉數為二;$c_1a_2b_3$中之文字反轉數為二;$b_3a_2c_1$中之文字反轉數及足數反轉數之和為四.

890　**行列式之定義**　任何組之$2^2$個數,$3^2$個數,普徧言之,$n^2$個數,皆可排成正方陣之形式,如:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{matrix}$$

餘準此.其中文字表一特別數所在之列(row),足數表其所在之行(column).

茲名諸數曰方陣之元(element).

由此種方陣之每行每列取一元,且僅取一元,以為因數,作一切所能作之積.

排列各積之因數時,令其列號(文字)成標準順序,而計算引號(足數)之反轉.若其個數為偶數(或0),則與其積以正號;若為奇數,則與以負號.

此種種正積負積之代數和曰方陣之行列式(determinant),而以方陣自身表之,但其兩旁須添二縱線.

例如,
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

又.
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

891　由§889,可知欲定上述各積之符號,亦可於排其因數時,

令其行號成標準順序,而後依照列號反轉數之爲偶爲奇,而與積以正號或負號.

否則,可將因數排成任何順序,而後依照其列號及行號反轉數之和爲偶爲奇,而與積以正號或負號.

例如,取積 $a_3b_2c_1$ 考之,依照第一法則,此積應有負號.改書之,令其足數成標準順序,則得 $c_1b_2a_3$;因文字 $c\,b\,a$ 呈三反轉,故依照第二法則,此積仍應有負號.若此積書作 $b_2c_1a_3$,則文字呈二反轉足數呈一反轉,而 $2+1$ 爲奇數故依照第三法則,此積仍應有負號

行列式所由組成之方陣中,其列或行之數曰行列式之階 892
(order).

上述之積連同其本身應有之符號,曰行列式之項. 893

展開一行列式,卽列書其各項之謂. 894

各元 $a_1, b_2, c_3, \cdots\cdots$ 所成之對角線曰首對角線,積 $a_1b_2c_3, \cdots\cdots$ 895
曰行列式之首項.

夾以縱線之首項,如,$|a_1\,b_2\,c_3\cdots\cdots|$,常用作表行列式本身之記號.

$n$ 階行列式之項數爲 $n!$,此諸項之半有正號,半有負號. 896

蓋文字若保持於標準順序,則 $n$ 個足數可排成 $n!$ 種排列,§763,且每有一種排列,行列式卽有一項,§890.

再者,此 $n!$ 種排列,半爲偶數排列,而半爲奇數排列,§888.

例如,$n=3$ 時,有 $3!$ 或 6 項;$n=4$ 時,有 $4!$ 或 24 項.

**其他記法** 吾人須牢記文字及足數僅爲列及行之順序之記號.其他任何符號,可作此用者,皆得取而代之. 897

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例如,行列式之元,常用一文字附二足數表之,如 $a_{23}$ 其第一足數表列,第二足數表行.符號 $a_{23}$ 讀作"$a$ 二,三,"餘準此.

898 **展開三階行列式之法則**　欲得三正項,可依次由第一列之各元始,務須依照首對角線之方向,例如:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$a_1b_2c_3,\ a_2b_3c_1,\ a_3b_1c_2.$$

欲得三負項,可仿前行之,但須依照另一對角線之方向,例如:

$$-a_1b_3c_2,\ -a_2b_1c_3,\ -a_3b_2c_1.$$

例如,

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1)(-1)+3(-3)2+2(-1)4 \\ -5(-3)4-3(-1)(-1)-2(-1)2=40.$$

本法則不適用於高於三階之行列式,例如四階行列式有二十四項,而由本法則僅能得其八.

## 習　題　LXXXI

展開下之行列式:

1. $\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & p & s \\ r & s & p \end{vmatrix}.$　　2. $\begin{vmatrix} 1 & x & a \\ 1 & y & b \\ 1 & z & c \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} p & -q & r \\ q & p & -s \\ -r & s & p \end{vmatrix}.$　　4. $\begin{vmatrix} 0 & -q & -r \\ q & 0 & -s \\ r & s & 0 \end{vmatrix}.$

求以下各行列式之值.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$　　6. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$　　7. $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$

試展開各行列式而證其間之關係:

8. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

10. 在行列式 $|a_1\,b_2\,c_3\,d_4|$ 之展開式中,集其含有以下因數之各項:

(1) $c_3d_4$ (2) $a_1d_2$, (3) $a_2b_3d_1$, (4) $a_1$, (5) $c_3$.

11. 求行列式 $|a_1\,b_2\,c_3\,d_4\,e_5|$ 之展開式中以下諸項之符號:

$a_2b_4c_3d_1e_5$. $a_4b_2c_1d_5e_3$. $a_5b_4c_3d_2e_1$.

$c_1d_2a_3e_4b_5$. $c_1b_2e_3a_4d_5$. $d_3a_2e_4b_1c_5$.

## 行列式之性質

**定理一** 若行列式之列易爲行,行易爲列,而不變其相關之順序,則行列式之值不變. 899

例如,
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (2)$$

蓋行列式 (1) 之展開式中各項,如 $a_2b_3c_1$, 皆含有由 (1) 之每列及行取得之一元,且僅一元. 故此各項又含有由 (2) 之每行及列取得之一元,且僅一元,從而又爲 (2) 之項,但符號容或不同,然各項在 (1) 中之符號,實際與其在 (2) 中之符號同. 蓋若此各項之因數,依照文字 $a, b, c$ 之順序排列之,則足數之反轉卽可決定其在 (1) 及 (2) 中之符號, 其在 (1) 中者,依 § 890 之法則定之,在 (2) 中者,依 § 891 之法則定之.

反之, (2) 之展開式中之各項,皆爲 (1) 之展開式中之項.

故關於行列式之列,每有一定理,則關於其行,卽有一對應定理. 900

**定理二** 若行列式之一列或一行之諸元皆爲 0, 則行列式之值爲 0. 901

蓋行列式之各項,皆含有所究列或行之一元爲因數, §890,

從而皆等於0故也.

902 **定理三** 若行列式之兩列(或行)互換,則行列式僅變其號.

例如
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}(1) = -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}(2)$$

蓋(1)中之各項,其因數依照(1)中列之順序排列時,若將其第一及最後一因數互換,即成(2)中之項,而其因數依照(2)中列之順序排列.反之亦然.然互換之後,項中足數之反轉即增加或減少奇數個,§887,而在(1)及(2)中,足數之標準順序皆爲123,故項之符號從而改變.

例如,$a_2b_3c_1$ 爲(1)中之項,而 $-c_1b_3a_2$ 爲(2)中之對應項.蓋在 $a_2b_3c_1$ 中,足數呈兩個反轉,而在 $c_1b_3a_2$ 中僅呈一個反轉也.

例. 試展開行列式(1)及(2),以證前定理.

903 系 行列式之二列(或行)若恆等,則行列式等於0.

蓋設行列式之值爲 $D$,將兩恆等列互換,則 $D$ 仍不變.然由§902,則 $D$ 應變爲 $-D$.

因此,$D=-D$,即 $2D=0$,或 $D=0$.

例如,
$$\begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = abf+aec+dbc-aec-abf-dbc=0.$$

904 **定理四** 若以同一之數,如 $k$,乘一列(或行)之諸元,則行列式增大 $k$ 倍.

蓋乘以 $k$ 之諸元中,必有一元,且僅一元,爲行列式各項之一因數也,§890.

行列式之計值,應用本定理常得簡化.

例如，$\begin{vmatrix} -6 & 8 & 2 \\ 15 & -20 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 3\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 480.$

系　若兩行(或列)之對應元成比例，則行列式等於 0. 905

例如，$\begin{vmatrix} ra & a & d \\ rb & b & e \\ rc & c & f \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = r\cdot 0 = 0.$　　§§ 903, 904.

定理五　若一行(或列)有二項元，則行列式得表為二行列式之和，如下所示. 906

$$\begin{vmatrix} a_1+a' & a_2 & a_3 \\ b_1+b' & b_2 & b_3 \\ c_1+c' & c_2 & c_3 \end{vmatrix}(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}(2) + \begin{vmatrix} a' & a_2 & a_3 \\ b' & b_2 & b_3 \\ c' & c_2 & c_3 \end{vmatrix}(3)$$

蓋 (1) 之各項，為 (2) 及 (3) 之對應項之和也.例如，

$$(a_1+a')b_2c_3 = a_1b_2c_3 + a'b_2c_3.$$

諸數 $a', b', c'$ 中，任何數可為 0，應注意之.

有多項元之任何行列式，可累用本定理而化成有單項元之行列式之和.

例．試將行列式 $\begin{vmatrix} a_1+a'_1 & a_2+a'_2 & a_3+a'_3 \\ b_1+b'_1 & b_2+b'_2 & b_3+b'_3 \\ c_1+c'_1 & c_2+c'_2 & c_3+c'_3 \end{vmatrix}$ 表為八個行列式之和.

定理六　以同一之數，如 $k$，乘任意一行(或列)之諸元，加其積於任意他行(或列)之對應元，則行列式之值不變. 907

例如，由 §§ 905, 906 之定理，得

$$\begin{vmatrix} a_1+ka_3 & a_2 & a_3 \\ b_1+kb_3 & b_2 & b_3 \\ c_1+kc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_3 & a_2 & a_3 \\ kb_3 & b_2 & b_3 \\ kc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

此例可概其餘.

由本定理,可知一行列式若其中之一列得由其餘各列中任何列之倍數相加而得之者,則此行列式等於0.

例如, $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 5 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$. 因 $4, 7, 7=2(5, -4, 2)+3(-2, 5, 1)$ 故也.

908　**定理七**　設一行列式之諸元為一變數,如 $x$,之有理整函數,且在 $x=a$ 時此行列式等於0,則得爲 $x-a$ 所整除.

蓋此行列式展開後,可化成 $x$ 之多項式之形式.而 $x=a$ 時此多項式等於0,故 $x-a$ 得整除之也,§415.

行列式之因數,常可藉本定理之助以求得之.

**例.**　求證 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$.

由§903,若 $a=b$,若 $b=c$,或若 $c=a$,則此行列式等於0,故得爲 $a-b$, $b-c$ 及 $c-a$ 所整除,§416,從而又得爲積 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 所整除.而此積與行列式本身,關於 $a, b, c$ 同爲三次,故此二者祇差一數字因數.

今行列式之一項爲 $bc^2$,而 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 之對應項爲 $bc^2$.故今所論之數字因數爲1,因而行列式等於 $(a-b)(b-c)(c-a)$.

## 習　題　LXXXII

1. 計算以下行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix}$.　(2) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$.　(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$.

2. 求證 $\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

3. 試藉§907之定理,以證下各行列式之值爲0.

(1) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}$. (2) $\begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & p+s \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix}$. (3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$.

4. 求證 $\begin{vmatrix} 1 & p & p^3 \\ 1 & q & q^3 \\ 1 & r & r^3 \end{vmatrix}=(p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r)$.

5. 求證 $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3$.

## 子式. 行列式之乘法

**子式** 在任何行列式$\Delta$中,删其某元$e$所在之列與行,取其餘諸元,而不亂其相關之位置,作一行列式.此新行列式曰元$e$之相餘子式,得以$\Delta e$表之. 909

例如,在$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$中,$c_1$之子式爲$\Delta c_1=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

**定理** 在任何行列式$\Delta$之展開式中,含有首元$a_1$之諸項之和爲$a_1\Delta a_1$. 910

例如,在$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$ (1) 中,此和爲$a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$ (2)

蓋置符號不論,$\Delta$中含有$a_1$之各項,乃$a_1$與$\Delta$中其餘每列每行各出一元所得諸元之積,換言之,乃$a_1$與$\Delta_{a_1}$中各項之積.又$\Delta$項之符號,即其對應之$\Delta_{a_1}$項之符號,因附$a$於後者之

前,於足數之反轉不生影響也.例如 (1) 之項 $-a_1b_4c_3d_2$ 為 $a_1$ 與 (2) 之項 $-b_4c_3d_2$ 之積.反之,$a_1$ 與 $\Delta_{a_1}$ 之各項之積為 $\Delta$ 之項.

911 系 設 $e$ 為 $\Delta$ 中第 $i$ 列及第 $k$ 行之元,則 $\Delta$ 中含有 $e$ 之諸項之和為 $(-1)^{i+k}e\Delta_e$.

蓋將 $e$ 移至首元之位置時,可不亂 $e$ 所在列及行以外諸元之相關位置,即可先將 $e$ 所在之列,依次與其前一列互換,再將 $e$ 所在之行與其前一行互換.實施行及列之逐次互換時行列式僅變其符號 $(i-1)+(k-1)$ 或 $i+k-2$ 次,§ 902. 故設如此所得之最後行列式為 $\Delta'$,則得

$$\Delta'=(-1)^{i+k-2}\Delta=(-1)^{i+k}\Delta.$$

由 § 910, $\Delta'$ 中含 $e$ 之諸項之和為 $e\Delta'_e$. 故在 $\Delta$ 中,此和為 $(-1)^{i+k}e\Delta_e$. 因 $\Delta$ 中 $e$ 之子式與 $\Delta'$ 中 $e$ 之子式相同故也.

例如,在 $\Delta=|a_1\,b_2\,c_3\,d_4|$ 中,就 $d_3$ 而言,$i=4$, $k=3$, 故 $d_3$ 可如下移至首項之位置:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}_{(1)} = -\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}_{(2)} = -\begin{vmatrix} d_3 & d_1 & d_2 & d_4 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_4 \\ b_3 & b_1 & b_2 & b_4 \\ c_3 & c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}_{(3)}.$$

將 (1) 之第四列依次與第三,第二,第一列互換,則得 (2), 其前置以負號者,因列互換三次,即 $i-1$ 次,故也.

於是將 (2) 之第三行,依次與第一,第二互換,則得 (3), 其前所置之符號與 (2) 前所置之符號同者,因行互換二次,即 $k-1$ 次,故也.

(1) 中 $d_3$ 之子式與 (3) 中 $d_3$ 之子式同. 故 (1) 中含 $d_3$ 之諸項之和為 $-d_3\cdot|a_1b_2\,c_4|$.

912 定理 一行列式,得用其一行或一列之諸元之相餘子式,其符號交錯為正與負,或負與正者,表成此諸元之積之和.

例如,在四階行列式$\Delta=|a_1\,b_2\,c_3\,d_4|$中,得

$$\Delta=a_1\Delta_{a_1}-a_2\Delta_{a_2}+a_3\Delta_{a_3}-a_4\Delta_{a_4}.$$

蓋$\Delta$展開式中之各項,皆含有$a_1, a_2, a_3, a_4$之一,且僅一.而由§§910,911,含$a_1$之諸項之和爲$a_1\Delta_{a_1}$,含$a_2$之諸項之和爲$-a_2\Delta_{a_2}$,餘準此.

同樣,
$$\Delta=-b_1\Delta_{b_1}+b_2\Delta_{b_2}-b_3\Delta_{b_3}+b_4\Delta_{b_4}$$
$$=a_1\Delta_{a_1}-b_1\Delta_{b_1}+c_1\Delta_{c_1}-d_1\Delta_{d_1},$$

餘準此.

**餘因式 (Cofactor)** 有時上述表$\Delta$之式若書作下之形式, 913
則更爲便利:
$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4$$
$$=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+b_4B_4.$$

餘準此,其中$A_1=\Delta_{a_1}$, $A_2=-\Delta_{a_2}$,餘準此,名$A_1, A_2, \cdots$爲$a_1, a_2, \cdots$之餘因式.

例如.在$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$中,$a_1, a_2, a_3$之餘因式爲$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, $-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$.

凡取一列之各元,與他列各對應元之餘因式相乘所得之 914
積之和,如$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+b_4A_4$,皆等於0.

蓋$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+b_4A_4$表一行列式,其最後之三列與$\Delta=|a_1\,b_2\,c_3\,d_4|$中之最後三列同,但其第一列則爲$b_1, b_2, b_3, b_4$.於是此行列式中之第一列與第二列皆爲$b_1, b_2, b_3, b_4$.故此行列式等於0, § 903.普徧言之,亦然.

**行列式之增階 (Bordering a determinant)** 任何行列式皆 915
可表爲較高階之行列式.蓋由§ 912,可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$，餘準此.

916 **行列式之計值法(Evaluation of a determinant)** 任意階數字行列式之值，可藉§912，之定理及§898之方法以求得之.

例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -18 + 87 = 69.$$

917 但數字行列式之值，大多可依下法，用較少之演算求得之.由§§904, 907, 910可知

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} (1) \quad = \frac{1}{a_1^{n-1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots \\ b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ c_1 & a_1c_2 & a_1c_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} (2)$$

$$= \frac{1}{a_1^{n-2}} \begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & \cdots \\ a_1c_2 - a_2c_1 & a_1c_3 - a_3c_1 & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} (3)$$

此處(1)表一$n$階行列式.以$a_1$乘(1)中第一行後之各行，則得(2).(2)中第二行減以第一行與$a_2$之積，第三行減以第一行與$a_3$之積，餘類推.如是所得行列式之第一行為$a_1, 0, 0, \cdots\cdots$

故此行列式等於$a_1$與其子式之積,而此子式爲$(n-1)$階行列式(3).

注意,(3)中各元之求法如下:(1)中$a_1$之子式之對應元,乘以$a_1$,復由其結果,減(1)中第一列及第一行之對應元之積.

例如,由上述之兩種化法,得

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^2}\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -6 & 6 & -4 \\ -10 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 10 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -15 & 3 \\ -17 & 11 \end{vmatrix} = -38,$$

因 $2\cdot 1-2(-2)=6$, $2\cdot 3-(-1)(-2)=4$, 等故也.

首元爲0時,可用§911之方法,先以他元移至首位.

例. 用上述之二法,求以下各行列式之值.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

**行列式之乘法** 兩同階行列式,$\Delta$及$\Delta'$,之積,可表爲第三行列式$\Delta''$之形式,其法如下: 918

以$\Delta'$中第$k$列之諸元,乘$\Delta$中第$i$列之諸對應元.所得諸積之和爲$\Delta''$中第$i$列及第$k$行之元.

例如, $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1p_1+a_2p_2 & a_1q_1+a_2q_2 \\ b_1p_1+b_2p_2 & b_1q_1+b_2q_2 \end{vmatrix}.$$

蓋由§906,第三行列式爲以下各行列式之和也.

$$\begin{vmatrix} a_1p_1 & a_1q_1 \\ b_1p_1 & b_1q_1 \end{vmatrix}, (1) \quad \begin{vmatrix} a_1p_1 & a_2q_2 \\ b_1p_1 & b_2q_2 \end{vmatrix}, (2) \quad \begin{vmatrix} a_2p_2 & a_1q_1 \\ b_2p_2 & b_1q_1 \end{vmatrix}, (3) \quad \begin{vmatrix} a_2p_2 & a_2q_2 \\ b_2p_2 & b_2q_2 \end{vmatrix}, (4)$$

但(1)及(4)等於0,因其各行成比例故也,§905. 由§§902, 904

簡化(2)及(3)而相加，得

$$p_1q_2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+p_2q_1\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}=(p_1q_2-p_2q_1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

又如，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3 & a_1q_1+a_2q_2+a_3q_3 & a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3 \\ b_1p_1+b_2p_2+b_3p_3 & b_1q_1+b_2q_2+b_3q_3 & b_1r_1+b_2r_2+b_3r_3 \\ c_1p_1+c_2p_2+c_3p_3 & c_1q_1+c_2q_2+c_3q_3 & c_1r_1+c_2r_2+c_3r_3 \end{vmatrix},$$

此可倣前將第三行列式，分解爲行列式之各行單純者之和以證之．如是可得二十七個此種行列式，但其中二十一個有兩或三行成比例，從而等於 0. 其餘六個行列式各等於行列式$|a_1\,b_2\,c_3|$乘以$|p_1\,q_2\,r_3|$之積，故其和等於$|a_1\,b_2\,c_3|\cdot|p_1\,q_2\,r_3|$.

此證法甚易普偏之．

上述之法則，極易擴諸異階行列式，僅須先將較低階之行列式增階，§ 915，使成同階行列式卽可．

## 習題 LXXXIII

計以下行列式之值．

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 9 \\ 7 & 5 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 10 \\ 6 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 30 \\ 12 & 4 & 8 & 20 \end{vmatrix}$.　　4. $\begin{vmatrix} 6 & -4 & 10 & 28 \\ 18 & 6 & -30 & 21 \\ 12 & 24 & 40 & 28 \\ 9 & -2 & 20 & 14 \end{vmatrix}$

試將以下之積,表為行列式.

5. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & b & -a \end{vmatrix}$.　　6. $\begin{vmatrix} p & 0 & r \\ p & q & 0 \\ 0 & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ a & b & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} a & -a & a & a \\ -b & b & b & b \\ c & c & -c & c \\ d & d & d & -d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.　　8. $\begin{vmatrix} l & m & n \\ m & n & l \\ n & l & m \end{vmatrix}^2$.

9. 求證 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^3$.

10. 若行列式中首對角線任一側之元皆為零,則行列式之值等於其首項.試證之.

# 消去法. 一次方程式

**聯立一次方程式之解法**　茲就$x_1, x_2, x_3$解以下之一方程組: **919**

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=k \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=l \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=m \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

將$x_1, x_2, x_3$之係數如(1)排列之,作行列式$|a_1 b_2 c_3|$,而以$\Delta$表之.又仿§913以$A_1, A_2, \cdots\cdots$表$\Delta$中$a_1, a_2, \cdots\cdots$之餘因式.

欲消去$x_2$及$x_3$,可以$A_1$乘第一方程式,以$B_1$乘第二方程式,以$C_1$乘第三方程式而加之,於是得

$$\left.\begin{array}{l} a_1A_1 \\ b_1B_1 \\ c_1C_1 \end{array}\right| x_1 + \left.\begin{array}{l} a_2A_1 \\ +b_2B_1 \\ +c_2C_1 \end{array}\right| x_2 + \left.\begin{array}{l} a_3A_1 \\ +b_3B_1 \\ +c_3C_1 \end{array}\right| x_3 = \left.\begin{array}{l} kA_1 \\ +lB_1 \\ +mC_1 \end{array}\right|. \qquad (2)$$

在此方程式中，$x_2$ 及 $x_3$ 之係數爲0，§914；$x_1$ 之係數爲 $\Delta$，§913；右端表一行列式，此行列式乃以 $k, l, m$ 代 $\Delta$ 中之第一行而得者．故此方程式可書作

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} k & a_2 & a_3 \\ l & b_2 & b_3 \\ m & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

準此，以 $A_2, B_2, C_2$ 分別乘所與方程式而加之，則可得單含 $x_2$ 之方程式；及以 $A_3, B_3, C_3$ 乘所與方程式而加之，則可得單含 $x_3$ 之方程式．此兩方程式爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & k & a_3 \\ b_1 & l & b_3 \\ c_1 & m & c_3 \end{vmatrix} (3), \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & k \\ b_1 & b_2 & l \\ c_1 & c_2 & m \end{vmatrix} (4)$$

故若 $\Delta \neq 0$，則所求之解爲

$$x_1 = \frac{|k \ \ b_2 \ \ c_3|}{|a_1 \ \ b_2 \ \ c_3|}, \quad x_2 = \frac{|a_1 \ \ l \ \ c_3|}{|a_1 \ \ b_2 \ \ c_3|}, \quad x_3 = \frac{|a_1 \ \ b_2 \ \ m|}{|a_1 \ \ b_2 \ \ c_3|},$$

換言之，各未知文字 $x_1, x_2, x_3$ 之值，可表爲一分式，其分母爲 $\Delta$，其分子爲一行列式，此行列式之異於 $\Delta$ 者，僅爲所究未知文字之係數，代以對應的已知項而已．

仿此得證，$n$ 元 $n$ 式之一次方程組亦然．

**例．解**

$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=4, \\ x+y-z&=2, \\ 4x-y+3z&=1. \end{aligned}$$

$\Delta=0$ $|k\ b_2\ c_3|$, $|a_1\ l\ c_3|$, $|a_1\ b_2\ m|$ 不全爲0.



$|k\ b_2\ c_3| = |a_1\ l\ c_3| = |a_1\ b_2\ m| = 0$ $\Delta=0$

$$x=\begin{vmatrix}4 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix} \div \begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}=\frac{26}{20}=\frac{13}{10}.$$

同樣,可求得 $y=-21/20$, $z=-35/20=-7/4$.

若 $\Delta$ 爲 0,而行列式 $|k\ b_2\ c_3|$, $|a_1\ l\ c_3|$, $|a_1\ b_2\ m|$ 中無爲 0 者,則由 (2), (3), (4) 可知所與方程式 (1) 無有窮解 (比較 § 394). 920

若 $\Delta$ 及各行列式 $|k\ b_2\ c_3|$, $|a_1\ l\ c_3|$, $|a_1\ b_2\ m|$ 皆等於 0, 則方程式 (2), (3), (4) 並不限制 $x_1, x_2, x_3$, 之值,此時所與方程式 (1) 不獨立. 若諸子式 $A_1, A_2, \cdots\cdots$ 不皆等於 0, 則由 § 394, 此結果乃因由 (1) 導出 (2), (3), (4) 之方法而來者. 若諸子式等於 0, 則三方程式 (1) 僅常數因式相異,故其中一方程式之各解,卽他二方程式之解,此甚易證之.

以上種種結果,極易擴諸 $n$ 元 $n$ 式之方程組.

**齊次一次方程式** 若 $k=l=m=0$, 則 § 919 之方程式 (1) 變爲 $x_1, x_2, x_3$, 之一齊次方程組, 921

$$\left.\begin{aligned}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0\\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

而 § 919 之方程式 (2), (3), (4) 變爲

$$\Delta x_1=0, \quad \Delta x_2=0, \quad \Delta x_3=0. \qquad (2)$$

方程式 (1) 顯然有解 $x_1=x_2=x_3=0$, 且由 (2) 可知若非 $\Delta=0$, 則此爲唯一之解.

但若 $\Delta=0$, 則方程式 (1) 爲

$x_1:x_2:x_3=A_1:A_2:A_3$, $\frac{x_1}{A_1}=\frac{x_2}{A_2}=\frac{x_3}{A_3}=r$,

$$x_1=rA_1, \quad x_2=rA_2, \quad x_3=rA_3 \qquad (3)$$

所適合,其中 $r$ 可表任意常數.

$r(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)=r\Delta$ 已設 $\Delta=0$ ∴ $a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=0$

同理 $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0$,

$c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0$



蓋以此諸值代入(1)而簡化之,則得

$$a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=0,\quad b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0,$$
$$c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0,$$

此皆爲眞恆等式,第一式因 $\Delta=0$ 而然,他二式可由 §914 知之.此事又可證之如下:若就 $x_1$ 及 $x_2$ 解(1)之第二及第三方程式,而以 $x_3$ 爲項表之,則得 $x_1/A_1=x_2/A_2=x_3/A_3$,或,以 $r$ 表此諸等比 $x_1=rA_1$, $x_2=rA_2$, $x_3=rA_3$ 之值.若 $\Delta=0$,則此諸值亦適合(1)之第一方程式,如適所證者.

由此第二證,可知若 $\Delta=0$,則

$$x_1:x_2:x_3=A_1:A_2:A_3=B_1:B_2:B_3=C_1:C_2:C_3,$$

卽,$\Delta$ 之列中,其對應元之子式成比例,但假定此諸子式不爲0.

922 在 $x, y$ 之三非齊次方程組

$$\left.\begin{aligned}a_1x+a_2y+a_3=0\\ b_1x+b_2y+b_3=0\\ c_1x+c_2y+c_3=0\end{aligned}\right\}\qquad(1')$$

中,以 $x=x_1/x_3$, $y=x_2/x_3$ 代換,去分母,則得導出 §921 之齊次方程組(1).

故 $\Delta=0$ 爲方程式(1′)有公解之條件.

## 習 題 LXXXIV

用行列式解以下各組方程式.

1. $\begin{cases}2x+3y-5z=3,\\ x-2y+z=0,\\ 3x+y+3z=7.\end{cases}$

2. $\begin{cases}2x+4y-3z=3,\\ 3x-8y+6z=1,\\ 8x-2y-9z=4.\end{cases}$

3.f21 $\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 & (1)\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0 & (2)\\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0 & (3)\end{cases}$ 據(2)(3)求$x_1$, $x_2$ (將$x_3$代之)

$x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}-b_3x_3 & b_2\\ -c_3x_3 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}}=\dfrac{\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}x_3}{\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}}=\dfrac{A_1x_3}{A_3}\quad\therefore\ \dfrac{x_1}{A_1}=\dfrac{x_3}{A_3}$

$x_2=\dfrac{\begin{vmatrix}b_1 & -b_3x_3\\ c_1 & -c_3x_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}}=\dfrac{-\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}x_3}{\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}}=\dfrac{A_2x_3}{A_3}\quad\therefore\ \dfrac{x_2}{A_2}=\dfrac{x_3}{A_3}$

3. $\begin{cases} ax+by+cz=d,\\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2,\\ a^3x+b^3y+c^3z=d^3.\end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-4y+3z+4t=-3\\ 3x-2y+6z+5t=-1,\\ 5x+8y+9z+3t=9,\\ x-10y-3z-7t=2.\end{cases}$

求證以下各方程組一致，且藉比 $x:y:z$ 解之.

5. $\begin{cases} x+2y-z=0,\\ 3x-y+4z=0,\\ 4x+y+3z=0.\end{cases}$

6. $\begin{cases} a_1x+b_1y+(ka_1+lb_1)z=0,\\ a_2x+b_2y+(ka_2+lb_2)z=0.\\ a_3x+b_3y+(ka_3+lb_3)z=0.\end{cases}$

$\lambda$ 有何值，則下方程式一致?

$$4x+3y+z=\lambda x,$$
$$3x-4y-7z=\lambda y,$$
$$x+7y-6z=\lambda z.$$

## 結式

**結式(Resultants)** 所謂二方程式 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式 923
即 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之係數之某種有理整函數之意，而此函數之為 0，乃 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 有一公根之必要兼充分條件也.

例如，$a_0x^2+a_1x+a_2=0$ (1) 及 $x-b=0$ (2) 之結式為 $a_0b^2+a_1b+a_2$；因當 $a_0b^2+a_1b+a_2=0$ 時，(1)，(2) 兩方程式有公根 $b$ 故也.

任何二方程式 $f(x)=0$，$\phi(x)=0$ 之結式，可據下列西薇士德 924
氏 (Sylvester) 所創之法，由二方程式中消去 $x$ 以求之.

為明確起見，命

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0, \qquad (1)$$

$$\phi(x)=b_0x^2+b_1x+b_2=0. \qquad (2)$$

依次以 $x$ 及 1 乘 (1)，以 $x^2$, $x$, 及 1 乘 (2)，即得

$$\begin{aligned}
a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x \quad &=0,\\
a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3&=0,\\
b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2 \quad &=0,
\end{aligned}$$

$$b_0x^3+b_1x^2+b_2x \qquad =0,$$

$$b_0x^2+b_1x+b_2=0.$$

以上諸式,可視爲五數量 $x^4, x^3, x^2, x, 1$ 之五個齊次一次方程式所聯立者.故依 § 921,此諸式,除非

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

不能有公解.

故 (3) 爲 (1) 與 (2) 有一公根之必要條件.又爲充分條件;蓋以 $x^4, x^3, x^2\ x$ 分別乘前四行而加入末行,則將 $D$ 變換爲等值行列式, § 907, 其末行之各元爲 $xf(x), f(x), x^2\phi(x), x\phi(x), \phi(x)$ 故也.故 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ 若指示 $D$ 之末行各元之餘因式,則依 § 913, 得

$$D=(\mu_1x+\mu_2)f(x)+(\mu_3x^2+\mu_4x+\mu_5)\phi(x)\equiv 0.$$

由此恆等式,可知 $f(x)$ 之各因式 $x-\beta$, 必爲 $(\mu_3x^2+\mu_4x+\mu_5)\phi(x)$ 之因式,且因 $f(x)$ 爲三次式,而 $\mu_3x^2+\mu_4x+\mu_5$ 僅爲二次式,故 $f(x)$ 至少必有一因式 $x-\beta$ 爲 $\phi(x)$ 之因式,換言之, $f(x)=0$ 之諸根之一必爲 $\phi(x)=0$ 之一根, § 795.

以上乃假定子式 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_5$, 不皆爲 0 者.若 $D$ 之各元之子式皆爲 0, 則 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 公有之根,其數多於一個,可以證明.

925 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_5$ 指示 $D$ 中任一列之元之餘因式,則依 § 921, $D=0$ 時

$$x^4 : x^3 : x^2 : x : 1 = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_5,$$

從而 $x=\lambda_1/\lambda_2=\lambda_2/\lambda_3=\cdots=\lambda_4/\lambda_5$. 故 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 有一公根時,則此根之值爲 $\lambda_1/\lambda_2$.

926 普徧言之,$f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之次數各爲 $m$ 及 $n$ 時,結式 $D$ 爲 $(m+n)$ 階行列式,其開首 $n$ 列由 $f(x)$ 之係數及若干之 0 而成,其餘 $m$ 列由 $\phi(x)$ 之係數及若干之 0 而成,排列次序如 § 924, (3). 故 $D$ 之各項中,$f(x)$ 之諸係數循 $\phi(x)$ 之冪次以列入,而 $\phi(x)$ 之係數則循 $f(x)$ 之冪次以列入.

例. 用上述方法證明方程式 $x^2+3x+2=0$ 及 $x+1=0$ 有一公根.並求此根.

因 $D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1+2-3=0$, 故二方程式有一公根.

$D$ 之第一列中之 1 及 3, 其餘因式之值爲 1 及 $-1$. 故公根爲 $1:-1$, 卽 $-1$.

927 用上述方法,可由 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 形式之代數方程組中,將未知數 $x, y$ 之任一消去.

例. 解

$$x^2-2y^2-x=0, \tag{1}$$

$$2x^2-5y^2+3y=0. \tag{2}$$

將 (1) 及 (2) 視爲 $x$ 之二次方程式, (1) 用 $1, -1, -2y^2$ 作係數, 而 (2) 用 $2, 0, -5y^2+3y$ 作係數.

故消去 $x$ 之結果爲

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & -2y^2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2y^2\\ 2 & 0 & -5y^2+3y & 0\\ 0 & 2 & 0 & -5y^2+3y\end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

展開後而簡化之,卽得

$$y^4-6y^3-y^2+6y=0. \tag{4}$$

解 (4), 得 $y=0, 1, -1, 6$.

由 § 924, 可知 $y$ 以此諸數之任一爲值時, (1) 及 (2) 得爲 $x$ 之同值所適合. 事實上 $y=0$ 時, (1) 與 (2) 分別成爲 $x^2-x=0$, $2x^2=0$, 而有公根 $x=0$; $y=1$ 時, (1) 及 (2) 分別成爲 $x^2-x-2=0$, $x^2-1=0$, 而有公根 $x=-1$, 因 $x^2-x-2$ 及

$x^2-1$ 有公因式 $x+1$ 也，§ 853；餘仿此．如是得 (1) 及 (2) 之解爲 $x,y=0,0$; $-1,1$; $2,-1$; $9,6$. 應用 § 925 之法，$x$ 之值亦可從 $y$ 之值以求之（參看 § 926，例）．

上例足以說明由 $f(x,y)=0$，$\phi(x,y)=0$ 消去 $x$ 之結果，若爲 $R(y)=0$，而 $R(y)=0$ 之一根爲 $\beta$，則 $x$ 一對應值，或多值，常可由求 $f(x,\beta)$ 及 $\phi(x,\beta)$ 之最高公因式而得之．通常此最高公因式在 $x$ 祇有一值對應 $y=\beta$ 時爲一次．但在 $x$ 有多值對應 $y=\beta$ 時，則爲較高次者．

928 **結式之性質** 設有呈下列形式之一組方程式．

$$f(x)=x^m+\cdots+a_m=0, \quad \phi(x)=x^n+\cdots+b_n=0.$$

命 $\alpha_i$ 指示 $f(x)=0$ 之任一根，而 $\beta_k$ 爲 $\phi(x)=0$ 之任一根．$\alpha_i-\beta_k$ 形式之差共有 $mn$ 個，命 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 指示其乘積．

$\Pi(\alpha_i-\beta_k)=0$ 顯然爲 $\alpha_i$ 諸根之一與 $\beta_k$ 諸根之一相等之必要兼充分條件．再者，因 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 爲 $\alpha_i$ 諸根又爲 $\beta_k$ 諸根之對稱整函數，故 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之係數之有理整函數，§§ 867, 868．是以 $R(f,\phi)$ 若指示 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式，§ 923，則

$$R(f,\phi)=\Pi(\alpha_i-\beta_k).$$

積 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 可書作

$$\begin{array}{c}(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\cdots(\alpha_1-\beta_n),\\ (\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\cdots(\alpha_2-\beta_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\alpha_m-\beta_1)(\alpha_m-\beta_2)\cdots(\alpha_m-\beta_n).\end{array}$$

但因 $\phi(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n)$，故首列諸因式之積爲 $\phi(\alpha_1)$，次列諸因式之積爲 $\phi(\alpha_2)$，餘仿此．故

$$\Pi(\alpha_i-\beta_k)=\phi(\alpha_1)\cdot\phi(\alpha_2)\cdots\phi(\alpha_m).$$

又因 $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)$，故第一行諸因式之積爲

$-1)^m f(\beta_1)$, 稱第二行諸因式之積爲 $(-1)^m f(\beta_2)$, 餘仿此. 故

$$\Pi(\alpha_i-\beta_k)=(-1)^{mn} f(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\cdots f(\beta_n).$$

所與方程式呈

$$f(x)=a_0x^m+\cdots+a_m=0,\quad \phi(x)=b_0x^n+\cdots+b_n=0$$

之形式時, 即各第一係數不爲 1 時, 第一列諸因式之積爲 $\phi(\alpha_1)/b_0$, 餘仿此; 第一行諸因式之積爲 $(-1)^m f(\beta_1)/a_0$, 餘仿此. 故在此情形, 欲使 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 成爲 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之係數之整函數, 須以 $a_0^n b_0^m$ 乘之. 即得

$$\begin{aligned}R(f,\phi)&=a_0^n b_0^m \Pi(\alpha_i-\beta_k)\\&=a_0^n\phi(\alpha_1)\cdot\phi(\alpha_2)\cdots\phi(\alpha_m)\\&=(-1)^{mn}b_0^m f(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\cdots f(\beta_n).\end{aligned}$$

二方程式 $f(x)=0$, $\phi(x)=0$ 之結式中, $f(x)=0$ 之係數, 循 $\phi(x)=0$ 之冪次以列入. 而 $\phi(x)$ 之係數循 $f(x)=0$ 之冪次以列入. 929

因積 $\phi(\alpha_1)\phi(\alpha_2)\cdots\phi(\alpha_m)$ 有 $m$ 個因式, 各含 $\phi(x)=0$ 之係數至一次; 而積 $f(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\cdots f(\beta_n)$ 有 $n$ 個因式, 各含 $f(x)=0$ 之係數至一次故也.

如此, 則 §§ 924, 926 所述行列式 $D$, 爲 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式, 卽 $D=R(f,\phi)$, 又得一證明.

在 $R(f,\phi)$ 之各項中, $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之係數之足數之和爲 $mn$. 930

何則, 依 § 812, 若將 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之各係數乘以用足數表示之 $r$ 之冪, 卽得下列二方程式.

$$f_1(x)=a_0x^m+ra_1x^{m-1}+r^2a_2x^{m-2}+\cdots+r^m a_m=0,$$

$$\phi_1(x)=b_0x^n+rb_1x^{n-1}+r^2b_2x^{n-2}+\cdots+r^n b_n=0.$$

二式之根為$f(x)=0$及$\phi(x)=0$之根之$r$倍.

$R(f_1,\phi_1)$各項,等於$R(f,\phi)$之對應項乘以$r$之冪,而$r$之指數為是項所含$f(x)$與$\phi(x)$之係數之足數和.故在各項中若得顯示此指數為$mn$,本定理即已證明.但因積$\Pi(\alpha_i-\beta_k)$有$mn$個因式,故得

$$R(f_1,\phi_1)=a_0{}^n b_0{}^m\Pi(r\alpha_i-r\beta_k)=r^{mn}\cdot R(f,\phi).$$

931 **判別式** $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n=0$之判別式,為$f(x)$之係數之整函數;此函數之為0,乃$f(x)=0$具一重根之必要兼充分條件(比較§§ 635, 873).

若$D$指示$f(x)=0$之判別式,則

$$D=R(f,f')/a_0.$$

何則,依§ 851,在$f(x)=0$及$f'(x)=0$具一有窮公根時,且僅在此時,$f(x)=0$具一有窮重根.依§ 928,$f(x)=0$及$f'(x)=0$公有一根之條件,為$R(f,f')=0$.然$a_0$為$R(f,f')$之因式,將$R(f,f')$用§ 924行列式之形式表出,即可證實.故$a_0=0$時$R(f,f')=0$.然在此根之為$f(x)=0$及$f'(x)=0$所公有者為$\infty$,§ 816.又因除$a_0$及$a_1$皆為0外,$\infty$非$f(x)=0$之重根,故$D=R(f,f')/a_0$.

例如,對於$a_0x^2+a_1x+a_2=0$, $D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 2a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \end{vmatrix}\div a_0=-(a_1^2-4a_0a_2)$.

932 $f(x)=0$之判別式,等於$f(x)=0$諸根兩兩之差之平方積,乘以第一係數$a_0$之某次冪.

例如,若 $$f(x)=a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3), \quad (1)$$

則(§ 865) $$f'(x)=a_0[(x-\beta_2)(x-\beta_3)+(x-\beta_3)(x-\beta_1)+(x-\beta_1)(x-\beta_2)]. \quad (2)$$

依§ 928, $$R(f,f')=a_0^2f'(\beta_1)f'(\beta_2)f'(\beta_3). \quad (3)$$

然由(2), $$f'(\beta_1)=a_0(\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3),\text{餘仿此}. \quad (4)$$

以(4)代入(3)而簡化之,即得

$$R(f,f')=-a_0^5(\beta_1-\beta_2)^2(\beta_2-\beta_3)^2(\beta_3-\beta_1)^2,$$

從而 $$D=-a_0^4(\beta_1-\beta_2)^2(\beta_2-\beta_3)^2(\beta_3-\beta_1)^2. \qquad (5)$$

**關於二元二式方程組之解之個數** 設於方程式$f(x,y)=0$ 933
中作$x=x_1/x_3$, $y=x_2/x_3$之代換而消去分式,則$f(x,y)=0$變換爲$x_1, x_2, x_3$,次數相同之齊次方程式.譬如,$x^3+xy+y+1=0$之變爲$x_1^3+x_1x_2x_3+x_2x_3^2+x_3^3=0$是.

應注意者,$x_2, x_3$之$n$次齊次方程式,若不能爲$x_3$所整除,則可決定比$x_2/x_3$之$n$個有窮值.例如,由$x_2^2-3x_2x_3+2x_3^2=0$可得$x_2/x_3=1$或2是.

命 $$f(x,y)=0 \text{ 及 } \phi(x,y)=0$$ 934

表次數各爲$m$及$n$之二方程式.若二式中有$x^m$項及$x^n$項.則作$x=x_1/x_3$, $y=x_2/x_3$,之代換,而消去分式,類集其項,即可化爲

$$F(x_1,x_2,x_3)=a_0x_1^m+a_1x_1^{m-1}+\cdots+a_m=0, \qquad (1)$$

$$\Phi(x_1,x_2,x_3)=b_0x_1^n+b_1x_1^{n-1}+\cdots+b_n=0 \qquad (2)$$

之形式,其中$a_0$ $a_1,\cdots,b_0, b_1,\cdots$各係數指示$x_2, x_3$之齊次函數,而其次數如其足數所示.故(1)及(2)關於$x_1$之結式$R$爲$x_2, x_3$之$mn$次齊次函數,§930.

依§928,(1)及(2)欲爲$x_1$之同值所適合,其必要兼充分條件爲

$$R=0. \qquad (3)$$

若$R$不能爲$x_3$所整除,則$x_2/x_3$,即$y$,有$mn$個有窮值適合$R=0$, §933.若$\beta$指示此諸值之任一,二方程式$f(x,\beta)=0$, $\phi(x,\beta)=0$有一公根,若此根爲$\alpha$,則$x=\alpha$, $y=\beta$爲$f(x,y)=0$ $\phi(x,y)=0$之一組解(比較§927).更可證明$f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$有一組解如是對應於$R=0$之各單根,則$f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$

卽有全異或若干相等之 $r$ 組解對應於 $R=0$ 之一 $r$ 重根. 故 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 有 $mn$ 組有窮解.

若 $R$ 能爲 $x_3^{\mu}$ 所整除, 則 $x_2/x_3$, 卽 $y$, 祇有 $mn-\mu$ 個有窮値能適合 $R=0$, 因此, $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 祇有 $mn-\mu$ 組有窮解. 但因 $x=x_1/x_3$ 及 $y=x_2/x_3$, 而 $x_3=0$ 時, $x$ 及 $y$ 二者, 或其一爲無窮大. 以故, 在此情形吾人稱 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 有 $\mu$ 組之無窮解.

所與方程式 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 若不含 $x^m$ 項及 $x^n$ 項, 藉 $y=y'+cx$ 形式之代換, 卽可變換爲次數相同含此二項之方程式. 據以上所證明, 含 $x$, $y'$ 之變換方程式有 $mn$ 組解. 然若 $x=\alpha$, $y'=\beta$ 爲此諸解之任一, 則 $x=\alpha$, $y=\beta+c\alpha$ 卽爲 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 之一解. 故 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 亦有 $mn$ 組解.

上述討論中, 假定 $R$ 不恆等於 0. 若 $R$ 恆等於 0, 則 $f(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 有公因式, 而 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 有無數解.

故得下述定理:

若 $f(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 各爲 $m$ 次及 $n$ 次, 且無公因式, 則方程組 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 有 $mn$ 組解.

## 習題 LXXXV

1. 用 §§ 924, 925 之法證明二方程式 $6x^2+5x-6=0$ 及 $2x^3+x^2-9x-9=0$ 有公根, 並求此根.
2. 試作 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ 及 $b_0x^2+b_1x+b_2=0$ 之結式.
3. 求 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 及 $x^3=1$ 之結式.
4. 用 § 931 之法求下列方程式之判別式.

   (1) $x^3+px+q=0$.　　　　(2) $ax^3+bx^2+c=0$.
5. 藉助於 § 931, 試證 $x^3+x^2-8x-12=0$ 有一二重根, 並求此根.
6. 用 § 927 之法解下之方程組.

$$x^2-3xy+2y^2-16x-28y=0,$$
$$x^2-xy-2y^2-5x-5y=0.$$

# XXXII. 無窮級數之收斂

## 收斂之定義

**無窮級數** 若 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 指示一任何所設無盡數列, 935
§187, 則下式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

稱爲無窮級數(比較§704).

$u_1+u_2+\cdots$可書作$\Sigma u_n$, 讀爲"$u_n$達無窮項之和".

級數$\Sigma u_n$之各項$u_1, u_2\cdots$皆爲實數時,稱實級數,皆爲正數時,稱正項級數. 本書以下所論,均以實級數爲限.

一級數常舉其第$n$項$u_n$之公式以示其全體. 例如,若$u_n=\sqrt{n}/(n+\ )$, 則級數爲$\sqrt{1}/2+\sqrt{2}/3+\sqrt{3}/4+\cdots\cdots$.

有時書出級數之開首三四項以表類此之公式. 例如, 舉$1/2+1\cdot3/2\cdot4+1\cdot3\cdot5/2\cdot4\cdot6+\cdots\cdots$, 即知$u_n=1\cdot3\cdots\cdots(2n-1)/2\cdot4\cdots\cdots2n$.

**收斂及發散** (Convergence and divergence). 令$S_n$指示級數$u_1+u_2+\cdots$開首$n$項之和, 即$S_1=u_1, S_2=u_1+u_2$, 故普徧言之, 936
$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$.

$S_n$隨$n$之增大,陸續取$u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3, \cdots$, 以爲値, 而於下列數種情形,必居其一:

$S_n$趨近一有窮數爲極限,

或 $S_n$趨於無窮大,

或 $S_n$不定.

在第一種情形,級數 $u_1+u_2+\cdots$ 稱爲收斂的 (convergent), 而 $\lim S_n$ 則稱爲此級數之和.在其他二種情形之級數,則稱爲發散的 (divergent).

$u_1+u_2+\cdots$ 爲收斂級數時,則可以 $S$ 表其和, $\lim S_n$, 而書作 $S=u_1+u_2+\cdots$,是蓋認此級數乃定數 $S$ 之另一表示方式耳.

例如,等比級數 $1/2+1/4+1/8+1/16+\cdots\cdots$ 爲收斂的,其和爲 1. 因 $S_n$ 隨 $n$ 之增大陸續取 $1/2, 3/4, 7/8, 15/16,\cdots\cdots$ 以爲值,故趨近 1 爲極限, § 704. 在此所宜注意者, $\lim u_n=0$, 凡收斂級數皆然.

級數 $1+1+1\cdots\cdots$ 爲發散的,因 $S_n$ 陸續取 $1, 2, 3,\cdots\cdots$ 爲值,而趨近於 $\infty$ 也.

級數 $1-1+1-1+\cdots$ 爲發散的,因 $S_n$ 陸續取 $1, 0, 1, 0.\cdots$ 爲值,而不定也.

937 於是得下述定義:

無窮級數,其開首 $n$ 項之和,隨 $n$ 之無限增大而趨近一有窮極限者稱爲收斂的,非然者稱爲發散的.

收斂級數開首 $n$ 項之和之極限,稱爲此數級之和.

此爲和字之新用法.以前所謂和,乃有窮數次加法連續演算所得結果之謂.今則爲此種結果之極限之謂.故有窮項和之特性,卽,遵從交換,結合諸律,究否屬於無窮項和,尙須權論,未容臆斷也,(參看 §§ 941, 961).

938 在決定一與級數究爲收斂的抑發散的時,可將其諸項中之有窮個數略去不計.

因所略諸項之和有一定之有窮値故也.

939 若 $u_1+u_2+\cdots$ (1) 爲收斂級數,其和爲 $S$, 而 $c$ 爲任一有窮數,則 $cu_1+cu_2+\cdots$ (2) 亦爲收斂級數,而其和爲 $cS$. 然 (1) 若爲發散級數,則 (2) 亦然.

何則,蓋 (1) 之開首 $n$ 項之和若爲 $S_n$, 則 (2) 之開首 $n$ 項之和爲 $cS_n$; 及 $\lim cS_n=c\lim S_n=cS$ 故也.

940 收斂級數,若祇將其項結合爲數羣而不變其順序,則其和不變.

譬如,若原級數為 $u_1+u_2+\cdots\cdots$,而 $g_1, g_2, \cdots\cdots$ 指示原級數開首二項之和,及其次四項之和,……等,則級數 $g_1+g_2+\cdots\cdots$ 與原級數有同一之和.

何則,蓋 $u_n$ 若指示 $g_m$ 中之末項,則等式

$$g_1+g_2+\cdots\cdots+g_m=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$$

之兩端隨 $m$ 及 $n$ 之無限增大而趨近同一之極限故也.

仿此得證正項發散級數,其項結合為羣後,結果仍為發散級數.

故於收斂級數中得隨意插入括號.除如下例所得結果為發散級數外,解除括號亦無不可. 941

收斂級數 $1/2+1/4+1/8+\cdots\cdots$(§ 936) 可書作 $(1\frac{1}{2}-1)+(1\frac{1}{4}-1)+(1\frac{1}{8}-1)+\cdots$. 因 $1\frac{1}{2}-1+1\frac{1}{4}-1+1\frac{1}{8}-1+\cdots\cdots$ 為發散的,故此處之括號則不可解除.

有時,某級數之和可由去括號而得. 942

例如, $1/1\cdot2+1/2\cdot3+1/3\cdot4+\cdots\cdots$ 之和為 1.

何則,
$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

故
$$S=\lim S_n=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

例. 求第 $n$ 項 $u_n$ 為 $1/n(n+2)$ 之級數之和.

**n項後之餘式(Remainder after n terms).** 級數 $u_1+u_2+\cdots$ (1) 若為收斂的,則其第 $n$ 項後之部分 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ (2) 仍為收斂級數, § 938. 命 $R_n$ 指示 (2) 之和.則 $R_n$ 稱為 (1) 之 $n$ 項後之餘式. 943

$\lim R_n=0$, 顯而易見.

## 正項級數

**定理一** 正項級數 $u_1+u_2+\cdots$ 若 $S_n$ 隨 $n$ 之增大而仍常小於一有窮數 $c$, 則此數為收斂的. 944

因級數既爲正項，$S_n$ 則隨 $n$ 之增大而連續增大．第以 $S_n$ 常小於 $c$，故 $S_n$ 趨近一極限，§ 192．是以此級數爲收斂的，§ 937．

945 **定理二** 命 $u_1+u_2+\cdots\cdots$(1) 指示一所與之正項級數，又命 $a_1+a_2+\cdots$(2) 指示已知爲收斂之正項級數．在下列各款之任一，級數(1)爲收斂的：

1. (1)之各項小於(2)之對應項時．

2. (1)之各項與(2)之對應項之比小於一有窮數 $c$ 時．

3. (1)中各項與緊接其前之一項之比小於(2)中之對應比時，

1. 何則，命 $S_n$ 指示 $u_1+u_2+\cdots$ 開首 $n$ 項之和，又命 $A$ 指示級數 $a_1+a_2+\cdots$ 之和．若 $u_1<a_1$，$u_2<a_2$，$\cdots$，則常有 $S_n<A$．故 $u_1+u_2+\cdots$ 爲收斂的，§ 944．

2. 何則，若 $\dfrac{u_1}{a_1}<c$，$\dfrac{u_2}{a_2}<c$，$\cdots$，則 $u_1<ca_1$，$u_2<ca_2$，$\cdots$．

因 $ca_1+ca_2+\cdots$ 爲收斂的，§ 939，故依 1 款，知級數 $u_1+u_2+\cdots$ 爲收斂的．

3. 何則，若 $$\frac{u_2}{u_1}<\frac{a_2}{a_1},\quad \frac{u_3}{u_2}<\frac{a_3}{a_2},\quad \frac{u_4}{u_3}<\frac{a_4}{a_3},\quad \cdots\cdots,$$

則 $$\frac{u_2}{a_2}<\frac{u_1}{a_1},\quad \frac{u_3}{a_3}<\frac{u_2}{a_2},\quad \frac{u_4}{a_4}<\frac{u_3}{a_3},\quad \cdots\cdots.$$

由以上諸不等式，可知 $u_2/a_2$，$u_3/a_3$，$\cdots\cdots$ 諸比各小於有窮數 $u_1/a_1$．故依 2 款，知 $u_1+u_2+\cdots$ 爲收斂的．

由 § 938，可知 1，2，3 款諸關係之任一，對於級數(1)與(2)所有之項，除爲數有窮者外，若皆能成立，則得同一之結論．

例．試將 $$1+1/2+1/2\cdot3+1/2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots \quad (1)$$
與收斂等比級數 $$1+1/2+1/2\cdot2+1/2\cdot2\cdot2+\cdots\cdots \quad (2)$$

比較,依次用1, 2, 3各款之法,證其為收斂的.

其一. (1)之第二項後之各項小於(2)之對應項.故依1款,知(1)為收斂的.

其二. (1)之各項對於(2)之對應項之比,即1, 1, 2/3, 2·2/3·4,……為有窮數.故依2款,知(1)為收斂的.

其三. (1)中各項與緊接其前之一項之比,即1/2, 1/3, 1/4,……,小於(2)中之對應比,即1/2, 1/2, 1/2,…….故依3款,知(1)為收斂的.

**定理三.** 命 $u_1+u_2+\cdots$(1) 指示一所與正項級數,又命 $b_1+b_2+\cdots$(2) 指示已知為發散之正項級數.在下列各款之任一,級數(1)為發散的. 946

1. (1)之各項大於(2)之對應項時.
2. (1)之各項與(1)之對應項之比大於一正數$c$時.
3. (1)中各項與緊接其前之一項之比大於(2)中之對應比時.

本定理之證明與§945中所述者相仿,學者可自為之.

試測級數 (Test series) 以上§§945, 946所舉各試法,在實際上之應用,顯然有待於已知為收斂或發散之試測級數.其中之最重要者,為等比級數$a+ar+ar^2+\cdots$,在§704已證明$r<1$時此級數為收斂的,至於$r\geqq 1$時,則此級數顯然為發散的.下舉試測級數,亦一極有用者. 947

級數$1+1/2^p+1/3^p+\cdots+1/n^p+\cdots$當$p>1$時為收斂的,$p\leqq 1$時為發散的. 948

1 $p>1$.結合從$1/2^p$起之二項,從$1/4^p$起之四項,從$1/8^p$起之八項,……等,即得等值級數如下,§940:

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots\cdots. \qquad (1)$$

(1)之第一項後之各項顯見小於級數

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\cdots\cdots \tag{2}$$

之對應項,即小於　　$1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{1}{8^{p-1}}\cdots=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{2^{2(p-1)}}+\frac{1}{2^{3(p-1)}}$

$$1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}\cdots,\text{或 } 1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^{p-1})^2}+\cdots\cdots \tag{3}$$

$m^{np}=(m^p)^n$

之對應項.

$\therefore 2^{2(p-1)}=(2^{p-1})^2$

然因 $p>1$,是以 $1/2^{p-1}<1$,等比級數(3)爲收斂的.故(1)亦爲收斂的,§945,1.

2. $p=1$. 結合至 $1/4$ 止之二項,至 $1/8$ 止之四項,至 $1/16$ 止之八項,……等,即得

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots \tag{4}$$

(4)之第二項後之各項,顯見大於級數

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots \tag{5}$$

之對應項,即,大於

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots\cdots,\text{或 } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots \tag{6}$$

之對應項.

然(6)爲發散的.故(4)亦爲發散的,§946,1.

3. $p<1$. 在此情形級數 $1+1/2^p+1/3^p+\cdots$ 爲發散的,因其各項大於級數 $1+1/2+1/3+\cdots$ 之對應項,而此級數適已證明爲發散的也,§946,1.

949　**以上各定理之應用**　以下各例將以釋明§945,946之定理之爲用.

comparison

例一. 試證 $1/1\cdot2+1/2\cdot3+1/3\cdot4+\cdots\cdots$ 為收斂的.

此級數第一項以後各項,皆小於收斂級數 $1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdots\cdots$ 之對應項,故為收斂的, §945, 1.

例二. 試證 $1+1/3+1/5+1/7+\cdots\cdots$ 為發散的

此級數之各項與發散級數 $1+1/2+1/3+1/4+\cdots\cdots$ 之對應項之比,即 $1, 2/3, 3/5, 4/7, \cdots\cdots, n/(2n-1)$, 皆大於 $1/2$. 故 $1+1/3+1/5+\cdots\cdots$ 為發散的. §946, 2. $\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

例三. $u_n=(2n+1)/(n^3+n)$ 之級數係收斂的抑發散的? $\frac{u_n}{b_n}>c$ 發散 $\frac{n}{2n-1}>\frac{1}{2}$

$$u_n=\frac{2n+1}{n^3+n}=\frac{n}{n^3}\cdot\frac{2+1/n}{1+1/n^2}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{2+1/n}{1+1/n^2}.$$

故 $u_n$ 與 $1/n^2$ 之比為 $(2+1/n)/(1+1/n^2)$ 無論 $n$ 之值若何此式常為有窮值; 且隨 $n$ 之增大,而趨近有窮極限 2. 然 $1/n^2$ 為收斂級數 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots\cdots$ 之第 $n$ 項.故原級數為收斂的, §945, 2.

若 $u_n$ 呈 $u_n=f(n)/\phi(n)$ 之形式,而其中 $f(n)$ 及 $\phi(n)$ 皆指示 $n$ 之 950
整函數,則 $\phi(n)$ 之次數較 $f(n)$ 之次數大過於 1 時,此級數為收斂的;非然者,則為發散的,是可藉例三所用方法以證明之.

例一. 試證下列各級數為收斂的.

(1) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots\cdots$. (2) $\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{3\cdot4\cdot5}+\frac{6}{4\cdot5\cdot6}+\cdots\cdots$.

(3) $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\cdots\cdots$.

例二. 試證下列各級數為發散的.

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$. (2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+2b}+\cdots\cdots$.

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots$. (4) $\frac{2}{1+2\sqrt{2}}+\frac{3}{1+3\sqrt{3}}+\frac{4}{1+4\sqrt{4}}+\cdots\cdots$.

例三 各級數 $u_n$ 項之值如下列者,其開首四項若何?試書出之.並決定此諸級數中何者為收斂的,何者為發散的.

(1) $u_n=\frac{2n-1}{(n+1)(n+2)}$. (2) $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$. (3) $u_n=\frac{n^2-(n-1)^2}{n^3+(n+1)^3}$.

**定理四** 正項級數 $u_1+u_2+\cdots$ 中,各項與緊接其前之一項 951
之比若小於一數 $r$,而 $r$ 自身則小於 1 者,則此級數為收斂的.

何則,在 $u_1+u_2+u_3+\cdots(1)$ 中,各項與緊接其前之一項之比

小於等比級數 $u_1+u_1r+u_1r^2+\cdots$(2) 中之對應比，因所究之比在 (1) 中常小於 $r$，而在 (2) 中則等於 $r$ 也。但因 $r<1$，(2) 爲收斂的。故依 § 945, 3, 知 (1) 亦爲收斂的。

上述之比若等於 1，或大於 1，則級數爲發散的，因在此情形 $\lim u_n \neq 0$ 也。

952 系 比 $u_{n+1}/u_n$ 若隨 $n$ 之增大而趨近某定極限 $\lambda$，則 $\lambda<1$ 時此級數爲收斂的，$\lambda>1$ 時爲發散的。

1. 何則若 $\lambda<1$，可任取一數 $r$，俾 $\lambda<r<1$。

於是，因 $\lim(u_{n+1}/u_n)=\lambda$，則隨 $n$ 之某值而常得 $u_{n+1}/u_n-\lambda<r-\lambda$，§ 189，因而 $u_{n+1}/u_n<r$。故此級數爲收斂的，§ 938, 951.

2. 若 $\lambda>1$，則隨 $n$ 之某值而常得 $u_{n+1}/u_n>1$，故此級數爲發散的，§ 951.

$u_{n+1}/u_n>1$ 而 $\lim(u_{n+1}/u_n)=1$ 時，此級數爲發散的；然 $u_{n+1}/u_n<1$ 而 $\lim(u_{n+1}/u_n)=1$ 時，則不能自 § 951 之定理而得結論。

例一. 試證 $\frac{3}{5}+\frac{3\cdot5}{5\cdot10}+\frac{3\cdot5\cdot7}{5\cdot10\cdot15}+\cdots\cdots$ 爲收斂的

此級數之第 $n$ 項爲 $3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)/5\cdot10\cdot15\cdots\cdots5n$，而此項與其前一項之比爲 $(2n+1)/5n$

然因 $(2n+1)/5n=2/5+1/5n$，$\lim(2n+1)/5n=2/5$，而 $<1$ 故此級數爲收斂的。

例二. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+3x^3}+\cdots\cdots$ 何時爲收斂的？但 $x$ 爲正值。

此處
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1+nx^n}{1+(n+1)x^{n+1}}=\frac{x^n+1/n}{x^{n+1}(1+1/n)+1/n}.$$

故
$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{x}.$$

故 $1/x<1$ 時，$1/x>1$ 時，此級數爲收斂的。

例三. 試證 $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot3}{1\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot7}+\cdots\cdots$ 爲收斂的。

例6. ① $x>1$ 时 $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{\frac{1}{x^n}+1}{\frac{1}{x^n}+x}=\frac{1}{x}<1$ 时为收敛. ∴ $x>1$
② $x<1$ 时 $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$，$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ [∵ $x<1$ 时 $x^n>x^{n+1}$，$1+x^n>1+x^{n+1}$] 故为发散
③ $x=1$ 时 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ------ 也为发散



例四. 試證 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\cdots\cdots$ 為收斂的。

例五. $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots$ 何時為收斂的?但 $x$ 為正值。

例六 $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}+\cdots\cdots$ 何時為收斂的?但 $x$ 為正值。 $\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}$ 僅 $x>1$ 时收敛.

953 $\lim(u_{n+1}/u_n)=1$ 之級數 在此種級數,比 $u_{n+1}/u_n$ 可化為

$$u_{n+1}/u_n=1/(1+a_n/n)$$

之形式,其中 $\lim(a_n/n)=0$. 今將證明:若 $a_n$ 隨 $n$ 之增大,終變為大於一數之本身大於1者,而永滯於此,則此級數為收斂的,但 $a_n$ 若終變為小於1而永滯於此,則此級數為發散的。

1. 何則,假定隨 $n$ 之某值,(可令之為 $k$),而得 $a_n>1+a$, 且 $a$ 為正數.

則 $n\geqq k$ 時, $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+a_n/n}<\frac{1}{1+(1+a)/n}$$

此不等式可化為下之形式

$n\geqq k$ 時, $$u_{n+1}<\frac{1}{a}[nu_n-(n+1)u_{n+1}] \tag{1}$$

在(1)中陸續置 $n=k, k+1,\cdots\cdots, k+l-1$, 而加所得諸不等式,即得

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots\cdots+u_{k+l}<\frac{1}{a}[ku_k-(k+l)u_{k+l}]. \tag{2}$$

由(2),可知正項級數 $u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots\cdots$ 開首 $l$ 項之和隨 $l$ 之增大而常小於有窮數 $ku_k/a$, 是乃證明此級數為收斂者, §944 故完全級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 為收斂的, §938.

2. 假定 $n>k$ 時而得 $a_n<1$ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\cdots$

則 $n>k$ 時, $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+a_n/n}>\frac{1}{1+1/n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$ 尼級數 $p=1$. 发散.

然 $1/(1+1/n)$ 為發散級數 $1+1/2+1/3+\cdots\cdots$ 中之對應項之比;因 $1/(n+1)\div1/n=1/(1+1/n)$ 也.

故原級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 為發散的, §946, 3.

若 $a_n$ 常大於1而趨近1為極限,則上述試測之法不得決定此級數為收斂的或為發散的.然在此情形 $a_n$ 可化為 $a_n=1+\beta_n/n$ 之形式,其中 $\lim\beta_n/n=0$; 若 $\beta_n$ 常小於一定數 $b$, 則此

級數爲發散的.

何則,因 $\beta_n<b$,則得

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n/n}=\frac{1}{1+1/n+\beta_n/n^2}>\frac{1}{1+1/n+b/n^2}.$$

然 $1/(1+1/n+b/n^2)$ 又大於發散級數 $1/(1-b)+1/(2-b)+1/(3-b)+\cdots\cdots$ 之諸對應項之比. $\frac{1}{(n-b)}=(n-b)^{-1}=\frac{1}{n}+\frac{b}{n^2}+\cdots\cdots$

蓋因, $$\frac{1}{n-b}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-b/n}=\frac{1}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{b^2}{n^3}+\cdots\cdots,$$ (当 $|b|<|n|$ 时方可展开) (令 b 为一定值 n 可为任何大于 b 之数)

是以 $$\frac{1}{(n+1)-b}\div\frac{1}{n-b}=\frac{n-b}{(n-b)+1}=\frac{1}{1+1/(n-b)}<\frac{1}{1+1/n+b/n^2}.$$

故原級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 爲發散的, § 946, 3.

954 根據上述討論,可知某級數,其 $u_{n+1}/u_n$ 可化爲

$$u_{n+1}/u_n=(n^p+an^{p-1}+\cdots)/(n^p+a'n^{p-1}+\cdots)$$

之形式者,在 $a'-a>1$ 時,此級數爲收斂的,$a'-a\leqq 1$ 時爲發散的.

何則以分式之分子除其分母,卽得

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+an^{p-1}+\cdots\cdots}{n^p+a'n^{p-1}+\cdots\cdots}=\frac{1}{1+(a'-a)/n+\beta_n/n^2},$$

其中 $\beta_n$ 取有窮值.

**例** 試證"超比級數" (Hypergeometric series)

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\cdots\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{1\cdot2\cdots(n+1)\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n)}$$

$\gamma-\alpha-\beta>0$ 時爲收斂的 $\gamma-\alpha-\beta\leqq 0$ 時爲發散的. $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}=\frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(1+\gamma)n+\gamma}$

## 習 題 LXXXVI

$\alpha'-\alpha=1+\gamma-(\alpha+\beta)>1$ 收, $\leqq 0$ 發.

試定下列各級數爲收斂的抑爲發散的

$\therefore$ $\gamma-\alpha-\beta>0$ 收斂, $\gamma-\alpha-\beta\leqq 0$ 时發散

1. $\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots\cdots$
2. $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot2}{1\cdot3}+\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot3\cdot5}+\cdots\cdots$
3. $\frac{2}{2\cdot3}+\frac{4}{3\cdot4}+\frac{6}{4\cdot5}+\cdots\cdots$
4. $\frac{2}{3}+2\left(\frac{2}{3}\right)^2+3\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots$
5. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots\cdots$
6. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{a^2+2}+\cdots\cdots$

7. $\frac{2}{4}+\frac{2\cdot 4}{4\cdot 7}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{4\cdot 7\cdot 10}+\cdots\cdots+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2n}{4\cdot 7\cdot 10\cdots\cdots(3n+1)}+\cdots\cdots.$

8. $\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 3}{4\cdot 5}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\cdots+\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots(n+1)}{4\cdot 5\cdot 6\cdots\cdots(n+3)}+\cdots\cdots.$

9. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2n}+\cdots\cdots.$

各級數 $u_n$ 項之值如下列者,其開首四項若何?試書出之,並決定其為收斂的抑發散的.

10. $u_n=\frac{n+1}{n(n+1)}$.　　11. $u_n=\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^5+1}}$.

12. $u_n=\sqrt{n^2+1}-n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$

各級數之 $u_{n+1}/u_n$ 項其值如下,試定此諸級數為收斂的抑發散的

13. $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n}{2n+3}$.　　14. $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n^3-n^2}{3n^3+n^2+1}$.

$x$ 須有若何之正值,則下列各級數方為收斂的?

15. $1+\frac{3}{5}x+\frac{3\cdot 6}{5\cdot 8}x^2+\frac{3\cdot 6\cdot 9}{5\cdot 8\cdot 11}x^3+\cdots$.　16. $\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^3}+\frac{x^3}{1+x^4}+\cdots\cdots.$

17. 試證 $a$ 取正值時, $\frac{a}{1}+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots$ 為發散的.

18. 若對於 $n$ 之一切值皆有 $\sqrt[n]{u_n}<r$, 其中 $r$ 為正數且小於1 試將 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 與收斂級數 $r+r^2+r^3+\cdots\cdots$ 比較而證明其為收斂的.

## 兼含正負項之級數

**收斂之普徧試測法** 依§937之定義,無論何種無窮級數 955
$u_1+u_2+\cdots\cdots$, 若 $S_n$ 隨 $n$ 之無限增大而趨於有窮極限, 則此級數為收斂的.然依§§195, 197, 若 $S_n$ 隨 $n$ 之增大而其經歷所循之值列, $S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots$, 有下述之性質, 卽對於每一不論小至何似之正與數 $\delta$, 可求得一對應項 $S_k$, 而此項與以後各項 $S_{k+p}$ 之差數值上小於 $\delta$, 則 $S_n$ 趨於極限.若不能適合此條件,則 $S_n$ 不能趨於極限, §198.

因 $$S_k=u_1+\cdots\cdots+u_k,$$

及 $$S_{k+p}=u_1+\cdots\cdots+u_k+u_{k+1}+\cdots\cdots+u_{k+p},$$

故得 $$S_{k+p}-S_k=u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots\cdots+u_{k+p}.$$

是以收斂之普徧試測法如下:

任何無窮級數$u_1+u_2+\cdots\cdots$若對於每一不論小至何似之正與數$\delta$,能求得一項$u_k$,俾$u_k$以後無論若干項之和數值上小於$\delta$;換言之,即對於$p$之一切值,能得

$$|u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots\cdots+u_{k+p}|<\delta.$$

則此無限級數爲收斂的.若此級數不具此性質,則爲發散的.

是以在特殊情形下,級數$u_1+u_2+\cdots\cdots$除$\lim u_n=0$外,不能爲收斂的.然僅此一條件對於收斂猶爲未足,必須兼有$\lim(u_n+u_{n+1})=0$, $\lim(u_n+u_{n+1}+u_{n+2})=0$,等等始可.

例如,級數$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$,雖$\lim u_n=\lim(1/n)=0$,而仍爲發散的.因,在此級數中,$1/k$一項後之$k$項之和常大於$1/2$也.蓋

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k+k}>\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}+\cdots\cdots \text{迄 } k \text{ 項,即} >\frac{1}{2k}\cdot k,\ \text{亦即} >\frac{1}{2}.$$

故$k$之能令$u_{k+1}+\cdots\cdots+u_{k+k}$小於每一可名言之數者不可選擇.是以此級數爲發散的(比較§948, 2).

956 系一 兼含正負項之級數,若其對應正項級數爲收斂的,則原級數亦爲收斂的.

何則,令$u_1+u_2+\cdots\cdots$(1)爲原級數,而$u_1'+u_2'+\cdots\cdots$(2)爲原級數中一切負項變號之同種級數.則

$$|u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots\cdots+u_{k+p}|\leqq u'_{k+1}+u'_{k+2}+\cdots\cdots+u'_{k+p}.$$

以故,若吾人所取之$k$,其大足使

$$u'_{k+1}+u'_{k+2}+\cdots\cdots+u'_{k+p}<\delta,$$

則就$|u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots\cdots+u_{k+p}|$而言,亦應同樣爲眞.故(2)若爲收斂的,則(1)亦然,§ 955.

含虛數項之級數$u_1+u_2+\cdots\cdots$,若$u_1, u_2,\cdots\cdots$之絕對值(§ 232)所成之級數,即$|u_1|+|u_2|+\cdots\cdots$,爲收斂的,則此級數亦爲收斂的,是可由上述論證以明之. 957

例如,$i/1+i^2/2^2+i^3/3^2+\cdots\cdots$爲收斂的,因$1+1/2^2+1/3^2+\cdots\cdots$爲收斂的故也.

系二 正負項交錯之級數,若各項數值上皆小於緊接其前之一項,且第$n$項之極限爲0,則級數爲收斂的. 958

何則,令級數爲$a_1-a_2+a_3-\cdots\cdots$,其中$a_1, a_2,\cdots\cdots$爲正數,用§ 955之記法,應有

$$|u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots\cdots+u_{k+p}|=|a_{k+1}-a_{k+2}+\cdots\cdots+(-1)^{p-1}a_{k+p}|.$$

然 $$a_{k+1}-a_{k+2}+\cdots\cdots+(-1)^{p-1}a_{k+p}, \tag{1}$$

可書作 $$(a_{k+1}-a_{k+2})+(a_{k+3}-a_{k+4})+\cdots\cdots \tag{2}$$

之形式,又可書作 $$a_{k+1}-(a_{k+2}-a_{k+3})-\cdots\cdots \tag{3}$$

之形式.

因$a_{k+1}>a_{k+2}>a_{k+3}>\cdots\cdots$,故(2)及(3)中各個括號內之式皆爲正.故由(2)可知(1)之值爲正,由(3)可知(1)之代數值小於$a_{k+1}$,而合(2)及(3)以言之,卽知(1)之絕對值小於$a_{k+1}$.

然因$\lim a_n=0$,吾人能擇$k$俾$a_{k+1}<\delta$.故$a_1-a_2+a_3-\cdots\cdots$爲收斂的.§ 955.

絕對收斂及條件收斂(Absolute and conditional convergence). 收斂的實級數,將其所有負項悉行變號後,若仍爲收斂者,稱之爲絕對收斂的;若變號後卽變爲發散者,則稱之爲條件收斂的. 959

例如，$1-1/2+1/4-1/8+\cdots\cdots$ 爲絕對收斂的，因級數 $1+1/2+1/4+1/8+\cdots\cdots$ 爲收斂的故也

而 $1-1/2+1/3-1/4+\cdots\cdots$ 依 § 958 雖證明爲收斂的，然僅爲條件收斂的，因 $1+1/2+1/3+1/4+\cdots\cdots$ 爲發散的故也.

960 **定理** 絕對收斂級數中，諸正項自成一收斂級數，諸負項亦然.而此二級數之和若各爲 $P$ 及 $-N$，則全級數之和爲 $P-N$.

然在條件收斂級數，則諸正項及諸負項所成之二個級數皆爲發散的.

何則，令 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 爲有無窮數之正項及負項之收斂級數.

設此級數開首 $n$ 項中，$p$ 項爲正而 $q$ 項爲負.於是 $S_n$ 若指示此 $n$ 項之和，$P_p$ 爲 $p$ 個正項之和，而 $-N_q$ 爲 $q$ 個負項之和，則應得 $S_n=P_p-N_q$.

$n$ 無限增大時，$p$ 及 $q$ 皆應無限增大.又因 $S_n$ 應趨於有窮極限 $S$，故非 (1) $P_p$ 及 $N_q$ 皆趨於有窮極限 (可分別命之爲 $P$ 及 $N$)，卽 (2) $P_p$ 及 $N_q$ 皆趨於無窮大；二者之中必居其一.

在第一種情形，$\lim S_n=\lim(P_p-N_q)=\lim P_p-\lim N_q$ § 203，卽，$S=P-N$.此級數爲絕對收斂的.事實上將負項變號後此級數之和爲 $P+N$.

在第二種情形，此級數爲條件收斂的.何則，$S'_n$ 若指示負項變號後所得級數開首 $n$ 項之和，應得 $\lim S'_n=\lim(P_p+N_q)=\infty$.

961 **系** 條件收斂級數之各項得排列之使此級數之和取任何可名言之實數値.

因條件收斂級數中，諸正項及諸負項各自成一發散級數，

其第$n$項之極限皆爲0,適已證明也.

故若隨意名舉一正數,例如$c$,而不變諸正項或諸負項各自之相關順序,先加正項,至其和大於$c$而止,然後加負項,至其和小於$c$而止,準此進行,無終極,以作級數$S_n$,則所成$S_n$之極限隨$n$之無限增大而爲$c$.

故加法之交換律不適用於條件收斂級數.

## 習題 LXXXVII

1 試決定下列各級數究爲收斂的抑爲發散的.

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\cdots\cdots$　　(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\cdots\cdots$.

(3) $\frac{3}{3}-\frac{3\cdot5}{3\cdot6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{3\cdot6\cdot9}-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{3\cdot6\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots$

2. 對於$x$若何之實值下列各級數爲收斂的.對於若何之值爲發散的?

(1) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-3x}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+(-1)^n nx}+\cdots\cdots$

(2) $\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+2x^4}+\frac{x^5}{1+3x^6}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n-1}}{1+nx^{2n}}+\cdots\cdots$.

3. 若$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$爲絕對收斂的,而$a_1$, $a_2$, $a_3\cdots\cdots$指示一列之數.各數之絕對值皆小於一定數$c$者,試用§956之法,證明級數$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\cdots\cdots$亦爲收斂的.

4. 若$S$指示§958所述之一種級數之和,試證$a_1$, $a_1-a_2$, $a_1-a_2+a_3$,……諸和交相大於$S$及小於$S$

# 冪級數之收斂

**冪級數 (Power series)**　冪級數爲呈$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+$ 962
$a_nx^n+\cdots\cdots(1)$形式之任一級數,其中$x$爲變數而$a_0, a_1,\cdots\cdots$爲常數.$x$及$a_0, a_1, a_2,\cdots\cdots$之值,實數或虛數皆可.

依§957,若$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots\cdots+|a_nx^n|+\cdots\cdots(2)$爲收斂

的,則級數 (1) 亦為收斂的. (2) 為收斂的時, (1) 稱為絕對收斂的. (1) 之為收斂,為發散,須視 $x$ 之值而定.故下之定理極為重要.

963 定理一 若 $x=b$ 時, $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 之各項數值上皆小於一有窮正數 $c$, 則 $x<|b|$ 時此級數為絕對收斂的.

蓋因對於各 $n$, $|a_nb^n|<c$,

故對於各 $n$, 應得

$$|a_nx^n|=|a_nb^n|\cdot\left|\frac{x}{b}\right|^n<c\left|\frac{x}{b}\right|^n.$$

故 $|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots\cdots$ (1) 之各項,小於 $c+c\left|\frac{x}{b}\right|+c\left|\frac{x}{b}\right|^2+\cdots\cdots$ (2) 之對應項.

然 (2) 為等比級數,故在 $|x/b|<1$ 時,即 $|x|<|b|$ 時,收斂.而 (2) 收斂時, (1) 亦然, § 945, 1.

例如, $|x|<1$ 時, $1+2x+x^2+2x^3+\cdots\cdots$ 收斂.

964 系一 $x=b$ 時,若 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 為收斂的,則 $|x|<|b|$ 時此級數為絕對收斂的.

此可由 § 963 直接知之.蓋因 $x=b$ 時 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 既為收斂的,則其各項在 $x=b$ 時必皆取有窮值故也.

965 系二 $x=b$ 時若 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 為發散的,則 $|x|>|b|$ 時此級數亦為發散的.

因 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 對於數值上大於 $b$ 之 $x$ 值若收斂,則此級數對於 $x=b$ 亦將收斂也, § 964.

966 收斂之限界 (Limits of convergence). 由 §§ 964, 965, 可知若盡以 $x$ 之一切正值之能使 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 收斂者歸屬於類

$A_1$, 而以能使級數發散者歸屬於類 $A_2$, 則 $A_1$ 中每一數小於 $A_2$ 中各數.故依 § 159, 非 $A_1$ 中有最大之數, 即 $A_2$ 中有最小之數. 命此數爲 $\lambda$, 則 $\lambda$ 卽表 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 之收斂之限界; $|x|<\lambda$ 時,此級數爲絕對收斂的, $|x|>\lambda$ 時,則爲發散的.

例如, 在 $x+x^2/2+x^3/3+\cdots\cdots(1)$ 及 $x+x^2/2^2+x^3/3^2+\cdots\cdots(2)$, 收斂之限界 $\lambda$ 皆爲 1. 注意 $x=\lambda=1$ 時, (1) 發散而 (2) 收斂. 欲作 $\lambda=0$ 之級數亦非不可能, 如 $x+2!x^2+3!x^3+\cdots\cdots$ 卽其一例.

吾人所謂收斂之限界,通常多稱爲收斂圓之半徑 (Radius of the circle of convergence). 因若依 § 238 所述之方法用平面上之點,描寫複素數之圖象, 更以原點爲中心以 $\lambda$ 爲半徑作圓, 則對於圖象在圓內之一切 $x$ 值, 級數 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 收斂,而對於圖象在圓外之一切 $x$ 值,此級數發散故也, § 239.

**定理二** $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 中,比 $|a_n/a_{n+1}|$ 若趨於一定之極限 $\mu$, 967
則 $\mu$ 爲收斂之限界.

何則, 依 § 952, $\lim\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|<1$ 時, 卽 $|x|<\lim\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 時, 級數 $|a_0|+|a_1x|+\cdots\cdots$ 收斂.

同理, $|x|>\lim\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 時,此級數發散.

例一 求下列級數之收斂之限界.

$$1+\frac{3}{5}x+\frac{3\cdot5}{5\cdot10}x^2+\cdots\cdots+\frac{3\cdot5\cdots\cdots(2n+1)}{5\cdot10\cdots\cdots5n}x^n+\cdots\cdots.$$

因 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{5(n+1)}{2n+3}=\frac{5+5/n}{2+3/n},\ 故\ \mu=\lim\frac{5+5/n}{2+3/n}=\frac{5}{2}.$$

例二 求下列級數之收斂之限界

$$\cdots\cdots+2^3x^{-3}+2^2x^{-2}+2x^{-1}+1+x/3+x^2/3^2+x^3/3^3+\cdots\cdots.$$

此處 $1+x/3+x^2/3^2+\cdots\cdots$ 爲 $x$ 之等比冪級數,在 $|x|<3$ 時收斂, 因 $a_n/a_{n+1}=3$ 故也.

反之, $2x^{-1}+2^2x^{-2}+2^3x^{-3}+\cdots\cdots$ 爲 $x^{-1}$, 卽 $1/x$, 之等比冪級數在 $|x^{-1}|<1/2$ 時, 卽 $|x|>2$ 時收斂.

是以原級數在 $2<|x|<3$ 時收斂.

例三 $x$須有若何之實數值,下列級數始收斂?

$$x/(1+x)+2x^2/(1+x)^2+3x^3/(1+x)^3+\cdots\cdots$$

此爲 $x/(1+x)$ 之冪級數,在 $|x/(1+x)|<1$ 時收斂,因 $\lim a_n/a_{n+1}=\lim n/(n+1)=1$ 故也.

然對於$x$之一切正值及大於 $-1/2$ 之負值,$|x/(1+x)|<1$. 故 $x>-1/2$ 時,原級數收斂.

968 **二項級數,指數級數,及對數級數 (The binomial, exponential, and logarithmic series)** 今將上述諸定理應用於三種特要之冪級數.

1. 指數級數, § 990, 即:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots = e^x = \left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)^x$$

對於$x$之一切有窮值皆爲收斂的.

因此時 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{n!}\div\frac{1}{(n+1)!}=n+1$$

故 $$\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim(n+1)=\infty,\ 即\ \mu=\infty.$$

2. 對數級數, § 992, 即:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots = \log_e(1+x).$$

在 $|x|<1$ 時,此級數爲收斂的. $|x|>1$ 時則為發散的.

因此時 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\frac{1}{n}\div\frac{1}{n+1}=-\frac{n+1}{n}.$$

故 $$\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\lim\frac{n+1}{n}=-\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=-1,\ 即\ \mu=1.$$ 絕對值

$x=1$ 時,此級數收斂, § 953, $x=-1$ 時發散, § 948.

3. 二項級數,即:

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\cdots$$

其中 $m$ 不爲正整數. $|x|<1$ 時,爲收斂的, $|x|>1$ 時,爲發散的.

因此時 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdots n} \div \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{1\cdot2\cdots(n+1)} = \frac{n+1}{m-n}$.

故. $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{n+1}{m-n} = -\lim\frac{1+1/n}{1-m/n} = -1$, 即 $\mu=1$.

$x=1$ 時,若 $m>-1$ 此級數收斂,若 $m\leqq-1$, 則發散(參看 §1001, 例二)。

$x=-1$ 時,若 $m>0$, 此級數收斂,若 $m<0$, 則發散.

因 $x=-1$ 時,置 $m=-a$, 此級數可化爲下之形式,

$$1+a+\frac{a(a+1)}{1\cdot2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots.$$

從某項以後所有各項皆爲同號,故 §954 之試驗法頗可適用 §954.

然此時 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n-1}{n} = \frac{n+(a-1)}{n}$.

故依 §954, 若 $-(a-1)>1$, 即,若 $-a>0$, 此級數收斂.然 $-a=m$, 故若 $m>0$, 此級數收斂.但若 $-(a-1)<1$, 即若 $m<0$, 此級數發散.

## 習題 LXXXVIII

決定下列各級數之收斂之限界.

1. $1+mx+m^2x^2/2!+m^3x^3/3!+\cdots\cdots$.
2. $2(2x)^2+3(2x)^3+2(2x)^4+3(2x)^5+\cdots\cdots$.
3. $mx+\frac{m(m-2)}{2!}x^2+\frac{m(m-2)(m-4)}{3!}x^3+\cdots\cdots$.

$x$ 須有若何之實數值,下列各級數始收斂?

4. $\frac{3x}{x+4}+\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{x+4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{x+4}\right)^3+\cdots\cdots$
5. $\frac{x}{x^2+1}+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3+\cdots\cdots$
6. $\cdots\cdots(3x)^{-3}+(3x)^{-2}+(3x)^{-1}+1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\cdots\cdots$.

# XXXIII. 無窮級數之算法

## 準備定理

一與冪級數 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 爲收斂的時,其和爲 $x$ 之定函數. 962
此函數可以 $f(x)$ 表之,書作 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots$. 以後凡書

$f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots$時,皆假定$a_0+a_1x+\cdots\cdots$有大於0之收斂之限界$\lambda$,并假定$|x|<\lambda$.

970 定理一 已與$\phi(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$,且$x$取正值$b$時,$\phi(x)$之各項數值上皆小於一有窮正數$c$.

若名舉不論小至何似之一正數$\delta$,則$|x|<b\delta/(c+\delta)$時,$|\phi(x)|<\delta$.

因如§963之證明中所示,$|x|<b$時,

$$|\phi(x)|<c\left|\frac{x}{b}\right|+c\left|\frac{x}{b}\right|^2+\cdots\cdots,$$

從而 $$<c\left|\frac{x}{b}\right|\frac{1}{1-|x/b|},\ 即,\ <\frac{c|x|}{b-|x|}.$$ §704

故$\dfrac{c|x|}{b-|x|}<\delta$時,即,$|x|<\dfrac{b\delta}{c+\delta}$時,$|\phi(x)|<\delta$.

971 系 若$f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots$,則$\lim\limits_{x\to0}f(x)=a_0=f(0)$.

因依上所述,$\lim\limits_{x\to0}(a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots)=0$故也,§200.

972 定理二 若級數$a_0+a_1x+\cdots\cdots$對於一切能使其收斂之$x$值為0,則$a_0=0$, $a_1=0$, $\cdots\cdots$.

何則,置$x=0$,可立得$a_0=0$.

故對於一切能使其收斂之$x$值,

$$a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots=0. \tag{1}$$

若$x\neq0$吾人得以$x$偏除(1)式.

故除$x=0$或為例外以外,對於一切能使其收斂之$x$值,

$$a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots\cdots=0. \tag{2}$$

然由此即可得$a_1=0$;何則,若$a_1\neq0$,吾人能擇$x$小(但不使其為0)至使$|a_2x+a_3x^2+\cdots\cdots|<|a_1|$, §970,而如此之$x$值將不適

合 (2), 與以上所證明必須適合者矛盾.

故 $a_1=0$. 仿此得證 $a_2=0$, $a_3=0$, 等等.

就 $a+bx^{\frac{1}{2}}+cx+dx^{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots$, 及 $x$ 之指數爲正而相異之各級數而言, 亦同樣爲真; 因上述推理皆得適用於類此之各級數故也.

$a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 對於一切能使其收斂之 $x$ 值爲 0 之假設中所含者, 較 $a_0=0$, $a_1=0$, …… 之證明所需者爲多. 何則, 由上述推理, 易知若 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n, \cdots\cdots$ 指示任與之無盡數列, 而 $\lim\beta_n=0$, 且 $x=\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots \beta_n, \cdots\cdots$ 時, $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 爲 0, 則 $a_0=0$, $a_1=0$, ……. 特例, $\beta_1, \beta_2$ …… 諸數得皆爲有理數.

**定理三** 對於能使二級數收斂之各 $x$ 值, 若 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots$, 則 $x$ 之同次冪之係數皆各相等, 即, $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, 餘準此. 973

何則, 由所與等式之兩端減第二級數, 則依 § 974, 對於一切能使原級數收斂之 $x$ 值,

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots\cdots=0.$$

故依 § 972, $a_0-b_0=0$, $a_1-b_1=0$, $a_2-b_2=0$, ……,

即, $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, ……

此定理稱爲待定係數之定理 (Theorem of undetermined coefficients). 此定理所確立者, 爲以 $x$ 之冪級數表 $x$ 之與函數, 其法唯限於一 (比較 § 421).

## 冪級數之算法

因諸多 $x$ 之函數得僅用冪級數確定之, 故此等級數之運算法則有確立之必要. 此等法則基於下二定理, §§ 974, 976, 今就一般之無窮級數證明之.

**定理一** 若 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 及 $v_1+v_2+\cdots\cdots$ 二級數均收斂且各有和 $S$ 及 $T$, 則 $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots\cdots$ 亦收斂且有和 $S+T$. 974

何則,依 § 203, $\lim[(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots\cdots+(u_n+v_n)]$

$=\lim(u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n)+\lim(v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n)$

$=S+T.$

975 就有窮數個無窮級數之對應項相加所得之級數而言,亦同樣爲眞.故任何有窮數個函數用 $x$ 之羃級數所確定者相加之法則,卽加各級數之對應項,亦卽合 $x$ 之同次羃之項.

例如,設 $f(x)=1+x+x^2+\cdots\cdots$ 及 $\phi(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots$,則此二級數收斂時,卽,$|x|<1$ 時,

$$f(x)+\phi(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots.$$

若有無窮數個級數,其和爲 $S, T,\cdots\cdots$,將此等級數之對應項相加,則級數 $S+T+\cdots\cdots$ 縱屬收斂時,仍常得一發散級數,然在下定理所述之情形,則用此法可得一收斂級數,且其和爲 $S+T+\cdots\cdots$.

976 定理二 令 $U_1+U_2+\cdots\cdots$ 指示一收斂級數,其各項皆爲絕對收斂級數之和,卽:

$$U_1=u_1^{(1)}+u_2^{(1)}+\cdots\cdots(1),\ U_2=u_1^{(2)}+u_2^{(2)}+\cdots\cdots(2),\cdots\cdots.$$

又令 $U_1', U_2',\cdots\cdots$ 指示 (1), (2),…… 中之各項以其絕對值代換所得級數之和,因而

$$U_1'=|u_1^{(1)}|+|u_2^{(1)}|+\cdots\cdots,\ U'_2=|u_1^{(2)}|+|u_2^{(2)}|+\cdots\cdots,$$

等.

若級數 $U_1'+U_2'+\cdots\cdots$ 爲收斂的,則將 (1), (2),…… 之對應項相加而得之各個級數,卽,級數 $u_1^{(1)}+u_1^{(2)}+\cdots$, $u_2^{(1)}+u_2^{(2)}+\cdots$, 等等,亦皆爲收斂的,又此諸級數之和若爲 $V_1, V_2,\cdots\cdots$,則得

$$U_1+U_2+U_3+\cdots\cdots=V_1+V_2+V_3+\cdots\cdots.$$

何則,級數 (1), (2),…… 中之 $n$ 項後之餘式,表之以 $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}$, ……, § 943. 則

$$U_1=u_1^{(1)}+u_2^{(1)}+\cdots\cdots+u_n^{(1)}+R_n^{(1)},$$
$$U_2=u_1^{(2)}+u_2^{(2)}+\cdots\cdots+u_n^{(2)}+R_n^{(2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_k=u_1^{(k)}+u_2^{(k)}+\cdots\cdots+u_n^{(k)}+R_n^{(k)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

各行所成之級數,即 $u_1^{(1)}+u_1^{(2)}+\cdots\cdots$, $u_2^{(1)}+u_2^{(2)}+\cdots\cdots$, 等等,皆爲收斂的,以此種級數之各項,數值上皆小於收斂級數 $U'_1+U'_2+\cdots\cdots$ 之對應項故也, § 945, 1. 命此諸級數之和爲 $V_1, V_2,\cdots\cdots, V_n$ $R_n$.

若將此 $n+1$ 個行級數之對應項相加,即得原級數 $U_1+U_2+\cdots\cdots$. 因 $n$ 爲有窮數,故依 § 975, 得

$$U_1+U_2+\cdots\cdots+U_n+\cdots\cdots=V_1+V_2+\cdots\cdots+V_n+R_n.$$

故欲證明本定理,祇須證明 $n$ 無限增大時, $\lim R_n=0$, 即可.

然 $R_n^{(1)}+R_n^{(2)}+\cdots\cdots$ 中之 $k$ 項後之餘式若爲 $S_n^{(k)}$, 則得

$$R_n=R_n^{(1)}+R_n^{(2)}+\cdots\cdots+R_n^{(k)}+S_n^{(k)}.$$

命 $\delta$ 指示任一正數,如何小可不論. 因 $R_n^{(1)}+R_n^{(2)}+\cdots\cdots(a)$ 之各項數值上皆小於 $U_1'+U_2'+\cdots\cdots(b)$ 之對應項, $(a)$ 中 $k$ 項後之餘式數值上應小於 $(b)$ 中之對應餘式. 然因 $(b)$ 爲收斂的,吾人能擇 $k$ 使 $(b)$ 中之餘式小於 $\delta/2$. 故吾人能擇 $k$ 使不論 $n$ 之值爲何, $S_n^{(k)}$ 數值上常小於 $\delta/2$.

其次,因各列所成之級數,即 $u_1^{(1)}+u_2^{(1)}+\cdots\cdots$, $u_1^{(2)}+u_2^{(2)}+\cdots$, 等

等,皆為收斂的, $k$ 個餘式, $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \cdots\cdots, R_n^{(k)}$ 隨 $n$ 之增大數值上終變為小於 $\delta/2k$ 而永滯於此,故此諸餘式之和,即, $R_n^{(1)}+R_n^{(2)}+\cdots\cdots+R_n^{(k)}$ 數值上終變為小於 $(\delta/2k)k$, 即 $\delta/2$, 而永滯於此.

以故,隨 $n$ 之增大, $R_n=R_n^{(1)}+R_n^{(2)}+\cdots\cdots+R_n^{(k)}+S_n^{(k)}$ 數值上終變為小於 $\delta/2+\delta/2$, 即 $\delta$, 而永滯於此.

故 $\lim R_n=0$, §200; 因而

$$U_1+U_2+U_3+\cdots\cdots=V_1+V_2+V_3+\cdots\cdots,$$

如所欲證者.

級數 $U_1+U_2+\cdots\cdots$ 其各項自身又為無窮級數者,稱曰二重無窮級數 (Doubly infinite series).

例如,取對於大於 $-1/2$ 一切 $x$ 之實值收斂(對於實部大於 $-1/2$ 之 $x$ 之虛數值亦然)之級數

$$x/(1+x)-x^2/(1+x)^2+x^3/(1+x)^3-\cdots\cdots. \tag{1}$$

考之,可變換(1)為 $x$ 之冪級數否?換言之,可變換(1)為對於非 0 之任何 $x$ 值能收斂之級數否?

$|x|<1$ 時,(1)之各項皆為冪級數之和,是可由二項定理以求得者, §98, 例如.

$$\left.\begin{aligned} x/(1+x) &= x(1+x)^{-1}=x-x^2+x^3-x^4+\cdots\cdots,\\ -x^2/(1+x)^2 &= -x^2(1+x)^{-2}= -x^2+2x^3-3x^4+\cdots\cdots,\\ x^3/(1+x)^3 &= x^3(1+x)^{-3}= x^3-3x^4+\cdots\cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

將第一級數之各項以其絕對值代換,即得 $|x|+|x^2|+|x^3|+\cdots\cdots$, 其和為 $|x|/(1-|x|)$.

用同法處理其餘之級數,所得級數乃和為 $|x^2|/(1-|x|)^2$, $|x^3|/(1-|x|)^3$, 等者.

故本定理之級數 $U_1'+U_2'+U_3'+\cdots\cdots$ 為

$$|x|/(1-|x|)+|x^2|/(1-|x|)^2+|x^3|/(1-|x|)^3+\cdots\cdots,$$

此級數在 $|x|<1/2$ 時收斂.

以故,將級數(2)中之對應項相加而得之冪級數,即 $x-2x^2+4x^3-8x^4+\cdots$, 在 $|x|<1/2$ 時收斂,且等於原級數(1);即, $|x|<1/2$ 時,得

$$x/(1+x)-x^2/(1+x)^2+x^3/(1+x)^3-\cdots\cdots=x-2x^2+4x^3-8x^4+\cdots\cdots.$$

**交換律對於絶對收歛級數有效** 今可證絕對收歛級數之諸項得隨意改排而級數之和絕不以此而變更. 977

1. 得改排諸項俾另成一單純無窮級數.

何則,令 $u_1+u_2+\cdots\cdots$(1) 指示任一絕對收斂級數,且令 $u_1'+u_2'+\cdots\cdots$(2) 爲其諸項改排所得之同一級數.又令 (1) 開首 $n$ 項之和爲 $S_n$, (2) 開首 $m$ 項之和爲 $S'_m$.

先爲 $n$ 指定一任意值;然後擇 $m$ 俾 (1) 之開首 $n$ 項可於 (2) 之開首 $m$ 項中求之;最後擇 $p$ 俾 (2) 之開首 $m$ 項可於 (1) 之開首 $n+p$ 項中求之.

則 $S'_m-S_n$ 由 $S_{n+p}-S_n$ 中之若干項而成,卽,由和 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots+u_{n+p}$ 中之若干項而成.

故 $|S'_m-S_n|\leqq|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots\cdots+|u_{n+p}|$.

然因 (1) 爲絕對收斂的, $\lim(|u_{n+1}|+\cdots\cdots+|u_{n+p}|)=0$.

故 $\lim|S'_m-S_n|=0$, 卽 $\lim S'_m=\lim S_n$.

2. 得裂分級數爲若干個(有窮數個或無窮數個)級數,而此諸級數中各項之順序與在原級數中時同.何則,應用 §§ 974, 976 中二定理之一,仍可從此類級數之各組以得原級數故也.

譬如,若由 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 中,取出奇足數之項成一級數,偶足數之項亦成一級數,依 § 974, 卽得

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots=(u_1+u_3+u_5+\cdots\cdots)+(u_2+u_4+u_6+\cdots\cdots).$$

其次,將 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 之諸項排列如下:

| | |
|---|---|
| $u_1$ | 圖中之行數無窮,每行成一無窮級數. $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 之和, |
| $u_2+u_3$ | 等於圖中之項按列相加所得之和, § 970. 而按列相加所得 |
| $u_4+u_5+u_6$ | 之和,等於按行相加所得之和, § 976. |
| $u_7+u_8+u_9+u_{10}$ | 故 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots=(u_1+u_2+u_4+\cdots\cdots)+(u_3+u_5+\cdots\cdots)+\cdots\cdots$. |
| ………………… | 其他之情形類此. |

3. 合 1, 2 兩款而言,可得

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

之項之可能改排.

978 **冪級數之積**　$|x|<\lambda$ 時,函數 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 若得用冪級數 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots(1)$, $\phi(x)=b_0+b_1x+\cdots\cdots(2)$ 以確定,則 $|x|<\lambda$ 時,二者之積 $f(x)\cdot\phi(x)$ 可用一冪級數確定,而此冪級數乃由 (1) 與 (2) 依通常乘法以導出者(比較§314).

即

$$\begin{array}{lllll|r}
f(x)=a_0 & +a_1x & +a_2x^2 & +a_3x^3 & +\cdots\cdots & (1)\\
\phi(x)=b_0 & +b_1x & +b_2x^2 & +b_3x^3 & +\cdots\cdots & (2)\\
\hline
f(x)\cdot\phi(x)=a_0b_0+ & a_1b_0 \,x+ & a_2b_0\,x^2+ & a_3b_0\,x^3+ & \cdots\cdots, & (3)\\
 & +a_0b_1 & +a_1b_1 & +a_2b_1 & & \\
 & & +a_0b_2 & +a_1b_2 & & \\
 & & & +a_0b_3 & &
\end{array}$$

何則,當 $|x|<\lambda$ 因而 (1) 及 (2) 爲收斂的時,依§939, 得

$$f(x)\phi(x)=f(x)b_0+f(x)b_1x+f(x)b_2x^2+\cdots\cdots.$$

此爲§976 所述之一種級數,因若將 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之諸項盡以其絕對值代換,此級數仍爲收斂的故也.以此之故,吾人得將 $f(x)b_0=a_0b_0+a_1b_0x+\cdots\cdots$, $f(x)b_1x=0+a_0b_1x+\cdots\cdots$, 等等之對應項相加.其結果即爲級數(3.

例. 將 $(1+x+x^2+\cdots\cdots)(1+2x+3x^2+\cdots\cdots)$ 以冪級數表之.

979 **冪級數之變換**　假定 $|y|<\lambda$ 時,冪級數 $a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots\cdots$ (1) 收斂.

又設 $y$ 可藉 $|b_0|<\lambda$ 之冪級數 $y=b_0+b_1x+\cdots\cdots(2)$, 以 $x$ 表示之.

將 (2) 累次自乘,即得表 $y, y^2, y^3, \cdots\cdots$ 之諸式,而其形爲 (2) 收斂時亦收斂之 $x$ 之冪級數者.若將此諸式代入 (1) 之諸項 $a_1y$, $a_2y^2, \cdots\cdots$ 中,即得呈 $a_0+a_1(b_0+b_1x+\cdots\cdots)+a_2(b_0^2+2b_0b_1x+\cdots\cdots)+\cdots\cdots(3)$ 形之級數,此級數在含 $x$ 之同次冪之項類集以後,即變爲 $(a_0+a_1b_0+\cdots\cdots)+(a_1b_1+2a_2b_0b_1+\cdots\cdots)x+\cdots\cdots(4)$ 形之 $x$ 之冪級數.

此最後之級數對於使 $|b_0|+|b_1x|+\cdots\cdots<\lambda$ 之一切 $x$ 值

能收斂,且與(1)有同一之和.何則,在此情形下,二重無窮級數(3)適合§976之條件,級數 $U_1'+U_2'+\cdots\cdots$ 變爲 $|a_0|+|a_1|(|b_0|+|b_1x|+\cdots\cdots)+\cdots\cdots$,依據假設 $|b_0|+|b_1x|+\cdots\cdots<\lambda$ 時此級數收斂故也.

**冪級數之商** 分子分母皆爲冪級數之分式.如 980

$$(a_0+a_1x+\cdots\cdots)/(b_0+b_1x+\cdots\cdots),$$

其中 $b_0\neq 0$ 者,得變換爲一冪級數,而此冪級數乃對於使 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 收斂及 $|b_1x|+|b_2x^2|+\cdots\cdots<|b_0|$ 之一切 $x$ 值能收斂者.

何則,令
$$y=b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots. \tag{1}$$
則
$$\frac{1}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots}=\frac{1}{b_0+y}=\frac{1}{b_0}\cdot\frac{1}{1+y/b_0}$$
$$=\frac{1}{b_0}\left(1-\frac{y}{b_0}+\frac{y^2}{b_0^2}-\cdots\cdots\right), \tag{2}$$
因依據假設及§232, $|y|\leqq|b_1x|+|b_2x^2|+\cdots\cdots<|b_0|$ 也.

於(2)中將 $y$ 以其值(1)代換,然後應用§973.如是得將(2)變換爲 $x$ 之冪級數,而
$$|b_1x|+|b_2x^2|+\cdots\cdots<|b_0|$$
時,此冪級數收斂.

以 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 乘此冪級數,§978.

結果仍爲 $x$ 之冪級數,而此冪級數乃對於使 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 收斂及 $|b_1x|+|b_2x^2|+\cdots\cdots<|b_0|$ 之一切 $x$ 值能收斂且等於所與分式者.

商級數得求至無論若干項,用§406中所述之消去首項之法可,用§408所述之待定係數法亦可.

**例.** 展開 $(1+2x+2^2x^2+\cdots\cdots)/(1+x+x^2+\cdots\cdots)$ 至四項.

用分離係數,即得

$$\begin{array}{r|l}
1+2+4+8+\cdots\cdots & 1+1+1+1+\cdots\cdots \\
\underline{1+1+1+1} & \overline{1+1+2+4+\cdots\cdots} \\
1+3+7+\cdots\cdots & \\
\underline{1+1+1} & \\
2+6+\cdots\cdots & \\
\underline{2+2+\cdots\cdots} & \\
4+\cdots\cdots &
\end{array}$$

故商級數爲

$$1+x+2x^2+4x^3+\cdots\cdots$$

$|x|<1/2$ 時,此級數收斂.

981 若分子分母非無窮級數而爲$x$之多項式,因而分式呈$(a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_mx^m)/(b_0+b_1x+\cdots\cdots+b_nx^n)$之形式,則商級數對於一切$x$值之絕對的小於方程式$b_0+b_1x+\cdots\cdots+b_nx^n=0$絕對值最小之根者能收斂.此理易由下之第一例明之.下之第二例,明釋$b_0=0$時商級數之形式,第三例明釋以$1/x$之冪級數表分式之法.

例一. 級數之爲$(3x+8)/(x^2+5x+6)$之展開式者,其收斂之限界若何?

用部分分式法,§537, 得

$$\frac{3x+8}{x^2+5x+6}=\frac{3x+8}{(x+2)(x+3)}=\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+3}.$$

然$|x|<2$時, $$\frac{2}{x+2}=\frac{1}{1+x/2}=\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}-\cdots\cdots,$$

而 $|x|<3$時, $$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x/3}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{3}-\frac{x}{3^2}+\frac{x^2}{3^3}-\cdots\cdots.$$

故 $|x|<2$時, $$\frac{3x+8}{x^2+5x+6}=\frac{4}{3}-\frac{11x}{18}+\frac{31x^2}{108}-\cdots\cdots.$$

例二. 就$x$之遞增乘冪展開$(1-x)/(x^2+4x^3)$.

$$\frac{1-x}{x^2+4x^3}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1-x}{1+4x}=\frac{1}{x^2}(1-5x+20x^2-80x^3+\cdots\cdots)$$

$$=x^{-2}-5x^{-1}+20-80x+\cdots\cdots.$$

例三. 就$1/x$之乘冪展開$(2x^2+x-3)/(x^3+2x+4)$.

$$\frac{2x^2+x-3}{x^3+2x+4}=\frac{1}{x}\cdot\frac{2+1/x-3/x^2}{1+2/x^2+4/x^3}=\frac{1}{x}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}\cdots\cdots\right)=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{7}{x^3}\cdots\cdots.$$

982 **級數之逆轉**(Reversion of series) 從方程式$y=a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$用$x$以確定$y$者,得衍出另一方程式$x=b_1y+b_2y^2+\cdots\cdots$用$y$以確定$x$者.其法稱爲與級數$a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$之逆轉.應注意者,此級數缺常數項$a_0$,且默認$a_1\neq0$.若$a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$有大於0之收斂限界,其逆轉級數$b_1y+b_2y^2+\cdots\cdots$亦然,可以證明.

例. 試將級數$y=x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots$逆轉之.

假定 $$x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\cdots\cdots. \tag{1}$$

用§978之法,由原方程式計算 $y^2, y^3, \cdots\cdots$,將結果所得之級數代入(1),卽得

$$x=\begin{array}{l|l|l} b_1x+2b_1 & x^2+3b_1 & x^3+\cdots\cdots \\ \quad +\ b_2 & \quad +4b_2 & \\ & \quad +\ b_3 & \end{array} \tag{2}$$

等置係數, $1=b_1$, $0=2b_1+b_2$, $0=3b_1+4b_2+b_3$, $\cdots$,從而 $b_1=1$, $b_2=-2$, $b_3=5$, $\cdots$.

故 $$x=y-2y^2+5y^3+\cdots\cdots. \tag{3}$$

用同法,由 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 或 $y-a_0=a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 形式之方程式,得衍出 $x=b_1(y-a_0)+b_2(y-a_0)^2+\cdots\cdots$ 形式之另一方程式.又由 $y=a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$ 形式之方程式,得衍出 $x=b_1y^{\frac{1}{2}}+b_2y+b_3y^{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots$ 形式之他二方程式.

**代數函數之展開** $f(x, y)=0$ 形式之代數方程式,其中缺常 983
數項者,得爲 $x=0$, $y=0$ 所適合.故若設 $f(x, y)=0$ 用 $x$ 就 $y$ 而解出.則其一解或多解必爲含 $x$ 之式,且 $x$ 爲 0 時亦爲 0 者.此等之式得展開爲 $x$ 之遞增乘羃之級數,且有大於 0 之收斂之限界,可證明之.在通常之情形,此等級數得用下列各例說明之方法求至無論若干項.

例一. 方程式 $y^2+y-2x=0$ 缺常數項.試求對於 $x=0$ 時亦爲 0 之 $y$ 値之展開式.

$x=0$ 時,方程式 $$y^2+y-2x=0 \tag{1}$$
變爲 $y^2+y=0$.因此方程式之諸根中有一爲 0,且唯限於一.故(1)之解對於 $x$ 爲 0 時亦爲 0 者有一,且唯限於一.

設此解展開爲 $x$ 之遞增乘羃之級數時首項爲 $ax^\mu$,因而
$$y=ax^\mu+\cdots\cdots \tag{2}$$

以(2)代入(1),卽得 $$a^2x^{2\mu}+\cdots\cdots+ax^\mu+\cdots\cdots-2x=0. \tag{3}$$

依據假設,因(3)爲恆等式,其同次項之係數之和須爲 0.故至少須有二個最低次項;又因 $\mu$ 爲正數,此二項須爲 $ax^\mu$ 及 $-2x$.故 $\mu=1$ 且 $a-2=0$,卽 $a=2$.

故假定 $$y=2x+bx^2+cx^3+\cdots\cdots. \tag{2'}$$

以(2')代入(1),卽得 $(4+b)x^2+(4b+c)x^3+\cdots\cdots=0$.

故 $4+b=0$, $4b+c=0$, ……, 從而 $b=-4$, $c=16$, ……。

故所求之解爲 $y=2x-4x^2+16x^3+\cdots\cdots$。

例二. 用 $x$ 表示之 $y$ 之值,有適合方程式 $y^3-xy+x^2=0$ 且 $x=0$ 時爲 $0$ 者,試求其展開式.

$x=0$ 時,方程式
$$y^3-xy+x^2=0 \tag{1}$$
變爲 $y^3=0$, 其三根皆爲 0. 故吾人預期所求之一種展開式有三.

令 $ax^\mu$ 指示此等展開式之一之首項,因而
$$y=ax^\mu+\cdots\cdots. \tag{2}$$
以 (2) 代入 (1), 卽得
$$a^3x^{3\mu}+\cdots\cdots-ax^{\mu+1}+\cdots\cdots+x^2=0. \tag{3}$$
依例一之推理, $3\mu$, $\mu+1$, 及 $2$, 三指數至少須有二個相等,且須小於 (3) 中 $x$ 之其他任何指數.

置 $3\mu=\mu+1$, 卽得 $\mu=1/2$. 此值可適用,因 $\mu=\frac{1}{2}$ 時, $3\mu$ 及 $\mu+1$ 皆小於 $2$ 也.

置 $\mu+1=2$, 卽得 $\mu=1$. 此值亦可適用,因 $\mu=1$ 時, $\mu+1$ 及 $2$ 皆小於 $3\mu$ 也.

置 $3\mu=2$, 卽得 $\mu=2/3$. 此值不適用,因 $\mu=2/3$ 時, $3\mu$ 及 $2$ 大於 $\mu+1$ 也.

故 $\mu$ 須取 $1$ 與 $1/2$ 二者之一以爲值.

$\mu=1$ 時, (3) 變爲 $a^3x^3+\cdots\cdots-ax^2+\cdots\cdots+x^2=0$, 由是可知 $-a+1=0$, 卽 $a=1$.

當 $\mu=1/2$ 時, (3) 變爲 $a^3x^{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots-ax^{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots+x^2=0$, 由是可知 $a^3-a=0$, 因 $a\neq0$, 故 $a=\pm1$.

故假定所求之解呈下之形式.
$$y=x+bx^2+cx^3+\cdots\cdots,\quad y=x^{\frac{1}{2}}+bx+cx^{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots,\quad y=-x^{\frac{1}{2}}+bx+cx^{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots.$$
以此等之式代入 (1), 而依例一之法決定係數,卽得
$$y=x+x^2+3x^3+\cdots\cdots,\quad y=x^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}-\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8}+\cdots\cdots,\quad y=-x^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}+\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8}+\cdots\cdots.$$

上法中假設一事:卽若所求展開式之一其首項爲 $ax^{\frac{p}{q}}$, 則此展開式以 $x^{\frac{1}{q}}$ 爲冪.在例外情形此事不成立,因而上法無效.然下法可以普徧適用.卽如前舉各例中求得展開式之首項 $ax^\mu$ 以後,可於原方程式中置 $y=x^\mu(a+v)$. 則原方程式變爲 $v$ 及 $x$ 之方程式.再從此方程式以 $x$ 爲冪求出 $v$ 之展開式之首

項,餘仿此*.

譬如,在例二,可於 $$y^3-xy+x^2=0 \tag{1}$$
中置 $y=x^{\frac{1}{2}}(1+v)$ 再簡化之,即得
$$v^3+3v^2+2v+x^{\frac{1}{2}}=0; \tag{2}$$
故 $v=-x^{\frac{1}{2}}/2+\cdots\cdots$, 從而 $y=x^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{1}{2}}/2+\cdots\cdots)=x^{\frac{1}{2}}-x/2+\cdots\cdots$.

欲求其次一項,可於(2)中置 $v=x^{\frac{1}{2}}(-1/2+v')$, 餘仿此.

**泰羅定理** $|x|<\lambda$ 時,若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$, 將 $x$ 換為 $x+h$, 即得 984
$$f(x+h)=a_0+a_1(x+h)+a_2(x+h)^2+\cdots\cdots$$
由 § 976, 可知 $|x|+|h|<\lambda$ 時,得變此級數之形為 $h$ 之冪級數.祇須將 $(x+h)^2, (x+h)^3,\cdots\cdots$ 依二項定理展開,然後將含 $h$ 之同次冪之項,類集即可.據 § 848 所用之法,得證其結果為
$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}+\cdots\cdots,$$
其中 $f(x), f''(x),\cdots\cdots$ 指示若干級數之和,此等級數乃以原級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 各項之第一,第二,$\cdots\cdots$ 導來函數為項者,即
$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots,$$
$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots\cdots,$$
餘仿此.

若於上之恆等式中,將 $x$ 換為 $a$, $h$ 換為 $x-a$, 其中 $|a|+|x-a|<\lambda$, 即得 $f(x)$ 以 $x-a$ 為冪之展開式如下: 985
$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+\cdots\cdots.$$

*本節各法較詳之討論,及其與牛頓(Newton)氏平行四邊形之聯合應用,見 Chrystal's Algebra, II, pp. 349—371; 又見 Frost's Curve Tracing 及 Johnson's Curve Tracing.

986　由此展開式及§971，可知$|x|<\lambda$時，若$f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots$，及$|a|<\lambda$，則

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

## 習　題　LXXXIX

1. 證明$(1+x+x^2+\cdots\cdots)^2=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$.

2. 證明$(1+x+x^2+\cdots\cdots)^3=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$.

3. 證明$(1+x^2+x^4+\cdots\cdots)/(1+x+x^2+\cdots\cdots)=1-x+x^2-\cdots\cdots$.

4. 假定$(1-x+2x^2)^{\frac{1}{2}}=1+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$，試平方之並應用§973以求$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$.

5. 用同法求下列二式之展開式之開首四項.

　(1) $(8-3x)^{\frac{1}{3}}$.　　　(2) $(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}$.

6. 用§980例中之法，以$x$之遞增乘冪展開下列各分式至四項.

　(1) $\dfrac{2+x-3x^2+5x^3}{1+2x+3x^2}$.　　　(2) $\dfrac{x+5x^2-x^3}{1-x+x^2-x^3}$.

7. 用待定係數法，以$x$之遞增乘冪展開下列各分式至四項.

　(1) $\dfrac{3x^2+x^3}{1+x+x^2}$.　　　(2) $\dfrac{x+7x^4}{x^3+2x^4+3x^5}$.

8. 用§981例一之法，展開下列各分式至五項，並示此等展開式之收斂限界.

　(1) $\dfrac{9x-22}{(x^2-4)(x-3)}$.　　　(2) $\dfrac{5x+6}{(2x+3)(x+1)^2}$.

9. 以$x$之遞減乘冪展開下列各分式至四項. $x$須有若何之值，首一展開式始收斂?

　(1) $\dfrac{2x+3}{2x^2+x-15}$.　　　(2) $\dfrac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$.

10. 將下列各級數逆轉，求至四項.

　(1) $y=x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots$.　　　(2) $y=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\cdots$.

11. 由$y=1+x+x^2/2+x^3/3+\cdots\cdots$，求以$y-1$爲冪表$x$之級數至四項.

12. 由$y=x^2+3x^3$，求以$y^{\frac{1}{2}}$爲冪表$x$之級數至四項.

13. 適合下方程式之$y$之值，有$x=0$時爲0者，試用§983之法，求其展開式之開首三項.

(1) $x^2+y^2+y-3x=0$.　　(2) $x^3+y^3-xy=0$.

14. 藉助於§976之定理,證明

$$\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\cdots\cdots=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{x^3}{(1-x^3)^2}+\cdots\cdots.$$

# XXXIV. 二項級數,指數級數,及對數級數

**二項級數**　$m$ 爲正整數時, 987

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\cdots \quad (1)$$

爲有窮級數,即有盡級數,其和爲 $(1+x)^m$.

$m$ 非正整數時,(1)爲無窮級數,然此級數在 $|x|<1$ 時收斂,即,此級數有和,§968. 今將進而證明若 $m$ 取有理值,則無論其值如何,此和爲 $(1+x)^m$.

級數(1)爲 $x$ 及 $m$ 二者之函數,但今因側重(1)與 $m$ 之關係,不妨即以 $\phi(m)$ 表之.

爲便利起見,命 $m_r$ 指示(1)中 $x^r$ 之係數,故

$$m_r=m(m-1)\cdots\cdots(m-r+1)/r!$$

於是 $m$ 及 $n$ 若爲任何二數,則

$$\phi(m)=1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots\cdots, \quad (2)$$

$$\phi(n)=1+n_1x+n_2x^2+n_3x^3+\cdots\cdots, \quad (3)$$

$$\phi(m+n)=1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+\cdots\cdots. \quad (4)$$

吾人能證明　$\phi(m)\cdot\phi(n)=\phi(m+n)$.

何則,$|x|<1$,因而(2)及(3)收斂時,

$$\phi(m)\cdot\phi(n)=1+\left.\begin{array}{l}m_1\\+n_1\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{l}m_2\\+m_1n_1\\+n_2\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}m_3\\+m_2n_1\\+m_1n_2\\+n_3\end{array}\right|x^3+\cdots\cdots. \qquad (5)$$

然於§§773, 774曾證明

$$m_1+n_1=(m+n)_1,\ m_2+m_1n_1+n_2=(m+n)_2,\ \cdots\cdots,$$

$$m_r+m_{r-1}n_1+\cdots\cdots+m_1n_{r-1}+n_r=(m+n)_r.$$

故 $\phi(m)\cdot\phi(n)=1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+(m+n)_3x^3+\cdots\cdots$

$$=\phi(m+n). \qquad (6)$$

迭用(6)式,即得

$$\phi(m)\cdot\phi(n)\cdot\phi(p)=\phi(m+n)\cdot\phi(p)=\phi(m+n+p),$$

凡 $\phi(m)$, $\phi(n)$, $\phi(p)$, $\phi(q)$, ……形式之有窮數個因式相乘皆準此.

今所欲證者,對於指數 $m$ 之一切有理值之二項定理,如下:

988 **定理** 若 $m$ 為任何有理數,則 $|x|<1$ 時,級數

$$\phi(m)=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\cdots$$

之和為 $(1+x)^m$.

首須注意者, $m=0$ 時級數變為1, 及 $m=1$ 時級數變為 $1+x$.

故 $\phi(0)=1$ 及 $\phi(1)=1+x$. (1)

1. 命 $m$ 為正整數.

則 $\phi(m)=\phi(1+1+\cdots\cdots$ 達 $m$ 項$)$

$=\phi(1)\cdot\phi(1)\cdots\cdots$ 達 $m$ 因式

$=[\phi(1)]^m=(1+x)^m$, 依 (1), (2)

故本定理對於正整指數能成立.

2. 命$m$爲任一正有理分數$p/q$.

則
$$[\phi(p/q)]^q=\phi(p/q)\cdot\phi(p/q)\cdots\cdots\text{達 } q \text{ 因式}$$
$$=\phi(p/q+p/q+\cdots\cdots\text{達 } q \text{ 項})$$
$$=\phi(p)=(1+x)^p,\ \text{依 } (2).$$

故
$$\phi(p/q)=(1+x)^{\frac{p}{q}}. \tag{3}$$

何則，由方程式$[\phi(p/q)]^q=(1+x)^p$及§986，可知對於使$|x|<1$之一切$x$值，$\phi(p/q)$所取之值，須爲$(1+x)^p$之同一$q$次根之一對應值.

更有進者，此根必須爲主$q$次根，即，$(1+x)^{\frac{p}{q}}$；何則，$(1+x)^p$之諸$q$次根，在$x=0$時與$\phi(p/q)$有相同之值者，僅此一根而已.

3. 命$m$爲任一負有理數$-s$.

因
$$\phi(-s)\cdot\phi(s)=\phi(-s+s)=\phi(0)=1 \qquad \text{依 } (1)$$

即得
$$\phi(-s)=1/\phi(s)=1/(1+x)^s \qquad \text{依 } (3)$$
$$=(1+x)^{-s}. \tag{4}$$

故本定理對於任何有理指數能成立.

本定理不難推廣之使指數得取無理值.

**例.** 按$x$之昇冪展開$(1+2x+3x^2)^{\frac{1}{3}}$.

$$(1+2x+3x^2)^{\frac{1}{3}}=[1+(2x+3x^2)]^{\frac{1}{3}}$$
$$=1+\frac{1}{3}(2x+3x^2)+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2}(2x+3x^2)^2$$
$$+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{2\cdot3}(2x+3x^2)^3+\cdots\cdots$$
$$=1+\frac{2x}{3}+\frac{5x^2}{9}-\frac{68x^3}{81}-\cdots\cdots.$$

此展開式，在 $2|x|+3|x^2|<1$
時收斂；因而在 $9|x^2|+6|x|+1<4$
時收斂；因而在 $3|x|+1<2$
時收斂；因而在 $|x|<1/3$
時收斂.

989　系　若$m$爲有理數而$|x|<|a|$,則

$$(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}a^{m-2}x^2+\cdots\cdots.$$

因　$$(a+x)^m=a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$$

$$=a^m\left[1+m\frac{x}{a}+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}\frac{x^2}{a^2}+\cdots\cdots\right] \tag{1}$$

$$=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}a^{m-2}x^2+\cdots\cdots, \tag{2}$$

其中若$|x/a|<1$,即$|x|<|a|$,則(1)收斂而(2)亦收斂也.

990　指數級數　對於$x$之一切有窮值,級數

$$1+x/1+x^2/2!+x^3/3!+\cdots\cdots+x^n/n!+\cdots\cdots \tag{1}$$

收斂,此已於§968中證明之矣.

命$e$指示$x=1$時此級數之和,故

$$e=1+1+1/2!+1/3!+\cdots\cdots=2.71828\cdots\cdots.$$

今所欲證者,對於$x$之任何實數值,(1)之和爲$e^x$.

何則,命$f(x)$指示(1)之和,故

$$f(x)=1+x/1+x^2/2!+x^3/3!+\cdots\cdots+x^n/n!+\cdots\cdots,$$

$$f(y)=1+y/1+y^2/2!+y^3/3!+\cdots\cdots+y^n/n!+\cdots\cdots.$$

則依乘無窮級數之法則,§978,

$$f(x)\cdot f(y)=1+(x+y)+\left(\frac{x^2}{2!}+xy+\frac{y^2}{2!}\right)$$

$$+\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}\frac{y}{1}+\frac{x}{1}\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}\right)+\cdots\cdots$$

$$=1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$$=f(x+y).$$

由此結果可得

$$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)=f(x+y)\cdot f(z)=f(x+y+z),$$

等等.

以故,注意 $f(0)=1$ 及 $f(1)=e$, 仿 § 988 中所爲,可依次證得

1. $x$ 爲正整數 $m$ 時,

$$f(m)=[f(1)]^m=e^m.$$

2. $x$ 爲正分數 $p/q$ 時,

$$f(p/q)=\sqrt[q]{[f(1)]^p}=\sqrt[q]{e^p}=e^{\frac{p}{q}}.$$

3. $x$ 爲負有理數 $-s$ 時,

$$f(-s)=1/f(s)=1/e^s=e^{-s}.$$

故 $x$ 取有理值時, $f(x)=e^x$, 即

$$e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots\cdots+x^n/n!+\cdots\cdots. \qquad (2)$$

更有進者,對於指數 $x$ 之無理值 (2) 仍爲眞.何則,若 $b$ 指示任與之無理數,令 $x$ 循一列之有理值以趨於 $b$ 爲極限,則對於 $x$ 之此諸有理值, $f(x)=e^x$, 故 $\lim\limits_{x\to b}f(x)=\lim\limits_{x\to b}e^x$.

但 $\lim\limits_{x\to b}f(x)=f(b)$, § 989, 且 $\lim\limits_{x\to b}e^x=e^b$, § 728. 故 $f(b)=e^b$, 即, $1+b+b^2/2!+\cdots\cdots=e^b$.

$x$ 爲虛數時,(2)之右端仍爲收斂級數,即,仍有和.故對於指數 $x$ 之虛數值可用(2)以確定 $e^x$. 例如,依定義,

$$e^i=1+i+i^2/2!+i^3/3!+\cdots\cdots+i^n/n!+\cdots\cdots.$$

**對於 $a^x$ 之級數** 命 $a$ 指示任一正數,而 $x$ 爲任一實數. 991

因 $a=e^{\log_e a}$, § 732, 得 $a^x=e^{x\log_e a}$, § 730.

以故, § 990 中之級數 (2) 中若以 $x\log_e a$ 代 $x$, 即得

$$a^x=1+x\log_e a+x^2(\log_e a)^2/2!+\cdots\cdots+x^n(\log_e a)^n/n!+\cdots\cdots.$$

仿§968, 1中所爲,得證對於 $x$ 之一切有窮值,此級數收斂.

992 對數級數 若於以上所得對於 $a^x$ 之級數中,將 $a$ 換爲 $1+x$, $x$ 換爲 $y$, 即得

$$(1+x)^y=1+\log_e(1+x)\cdot y+[\log_e(1+x)]^2y^2/2!+\cdots\cdots. \qquad (1)$$

但依二項定理, §988, $|x|<1$ 時,

$$(1+x)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\cdots. \qquad (2)$$

實行所示乘法再類集其項, (2) 即變換爲 $y$ 之冪級數.

此級數中 $y$ 之係數爲

$$x+\frac{(-1)x^2}{1\cdot 2}+\frac{(-1)(-2)x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots, \text{ 即 } x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots.$$

等置之於 (1) 中之 $y$ 之係數.若 $|x|<1$, 即得

$$\log_e(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+\cdots\cdots. \qquad (3)$$

此級數稱爲對數級數. $|x|<1$ 時,此級數收斂.則§968中已證明矣.

上述證明中假定級數 (2) 變換爲 $y$ 之冪級數後,仍與 $(1+x)^y$ 相等者.然 $|x|<1$ 時,則可由§976得此結果,何則,若 $x'$ 與 $y'$ 分別指示 $|x|$ 及 $|y|$, §976之級數 $U_1'+U_2'+\cdots\cdots$, 對於 (2) 者,爲.

$$1+y'x'+\frac{y'(y'+1)}{1\cdot 2}x'^2+\frac{y'(y'+1)(y'+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x'^3+\cdots\cdots.$$

$x'<1$ 時,此級數爲收斂的,其和爲 $(1-x')^{-y'}$, §988.

因二項定理之眞確,吾人祇對於指數之有理值證明,是以宜注意,縱屬 $y$ 限制於有理值時, (3) 亦可由 (1) 及 (2) 得出(參看§972末後之附言).

**例.** 試證 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

$$\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=n\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\cdots\cdots\right)=1-\frac{1}{2n}+\cdots\cdots.$$

是以 $\lim\limits_{n\to\infty}\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^1=e$.

何則, $\lim u=\lim e^{\log_e u}=e^{\lim(\log_e u)}$, §§723—729, 731.

$a=e^{\log_e a}$ $\lim\limits_{x\to b}a^x=a^{\lim\limits_{x\to b}x}=a^b$.

**自然對數之計算** 數之對數以 $e$ 爲底者,稱爲數之自然對數.自然對數表得如下法計算之: 993

$$\log_e(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+\cdots\cdots, \tag{1}$$

故
$$\log_e(1-x)=-x-x^2/2-x^3/3-x^4/4-\cdots\cdots. \tag{2}$$

由 (1) 減 (2), 因

$$\log_e(1+x)-\log_e(1-x)=\log_e\frac{1+x}{1-x},$$

得
$$\log_e\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right). \tag{3}$$

於 (3) 中置 $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$, 從而 $x=\frac{1}{2n+1}$.

即得
$$\log_e\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right),$$

即
$$\log_e(n+1)=\log_e n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right) \tag{4}$$

於 (4) 中置 $n=1$,

$$\log_e 2=2(1/3+1/3^3+1/5\cdot3^5+\cdots\cdots)=0.6931\cdots\cdots.$$

於 (4) 中置 $n=2$,

$$\log_e 3=\log_e 2+2(1/5+1/3\cdot5^3+\cdots\cdots)=1.0986.$$

對於 $n$ 之其他整數值準此行之.

**模數 (Modulus)** 依 § 755, $\log_a n=\log_e n/\log_e a$. 故數之以任何數 $a$ 爲底之對數,可以 $1/\log_e a$ 乘其自然對數而得之.$1/\log_e a$ 或其等值, $\log_a e$, § 756, 稱爲以 $a$ 爲底之對數系統之模數.特例,常用對數之模數爲 $\log_{10}e=0.43429\cdots\cdots$. 994

∴ $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$

令 $b=N$

則 $\log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}$

$\log_b b=1$

$\log_a b\cdot\log_b a=1$,

$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d\cdots\log_k l\cdot\log_l a=1$

## 習 題 XC

1. 計算 $\log_e 4$ 及 $\log_e 5$ 各至第四位小數止.

2. 試證 $e^{-1}=2/3!+4/5!+6/7!+\cdots\cdots$.

3. 用乘法證明

$$\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\right)=1.$$

4. 證明 $(e^{ix}+e^{-ix})/2=1-x^2/2!+x^4/4!-x^6/6!+\cdots\cdots$.

5. 證明 $(e^{ix}-e^{-ix})/2i=x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+\cdots\cdots$.

6. 試證 $(1-x)^{-n}$ 依二項定理展開時,其第 $(r+1)$ 項為

$$\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)}{r!}x^r.$$

7. 求 $(8+x)^{\frac{2}{3}}$ 展開式中含 $x^4$ 之項.

8. 求 $(1-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ 展開式中含 $x^3$ 之項.

9. $x$ 須有若何之值,則 $(9-4x^2)^{\frac{1}{2}}$ 及 $(12+x+x^2)^{\frac{2}{3}}$ 按 $x$ 之昇冪展開之式始收斂?

10. 以 $x$ 為冪展開 $(1-x+2x^2)^{\frac{3}{4}}$ 至含 $x^4$ 之項止.

11. $(8+3x)^{\frac{2}{3}}(9-2x)^{-\frac{1}{2}}$ 以 $x$ 為冪之展開式中,其開首三項若何? $x$ 須有若何之值,此展開式始收斂?

12. 求下列各式之極限值.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{3x}$.　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-(1+4x)^{\frac{1}{4}}}$.

13. 試證 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{nx}=e^x$.

14. 試證 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e^2$.

15. 以 $x$ 為冪展開 $\log_e(1+x+x^2)$ 至含 $x^4$ 之項止. $x$ 須有若何之值,此展開式始收斂?

16. 試證 $\log_e\dfrac{m}{n}=\dfrac{m-n}{n}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m-n}{n}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{m-n}{n}\right)^3-\cdots\cdots$.

17. 試證 $\log_e\dfrac{n^2}{n^2-1}=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{2n^4}+\dfrac{1}{3n^6}+\cdots\cdots$.

18. 試證 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2(n+1)^2}+\dfrac{1}{3(n+1)^3}+\cdots\cdots=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{3n^3}-\cdots\cdots$.

# XXXV. 循環級數

循環級數 (Recurring series)　級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 中,每 $r+1$ 個連續係數,得以 995

$$a_n+p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}+\cdots\cdots+p_ra_{n-r}=0$$

形之恆等式結合之,其中 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_r$ 對於 $n$ 之一切值爲常數者,稱爲 $r$ 階之循環級數,而此恆等式,則稱循環級數之關係標尺 (Scale of relation).

例如,
$$1+3x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots+(2n+1)x^n+\cdots\cdots \tag{1}$$
中,每三個連續係數可用公式
$$a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0 \tag{2}$$
結合;蓋因 $5-2\cdot3+1=0$, $7-2\cdot5+3=0$, $2n+1-2(2n-1)+2n-3=0$, 故也.

故 (1) 爲二階循環級數,其關係標尺爲 (2).

等比級數爲一階循環級數.

凡冪級數之爲眞分式之展開式者,若此眞分式之分母爲 $r$ 次式則此冪級數卽爲 $r$ 階循環級數. 996

譬如,若
$$\frac{2+x}{1+2x+3x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots, \tag{1}$$
則
$$2+x=\begin{array}{r|r|r|l} a_0+ & a_1 & x+ \; a_2 & x^2+\cdots\cdots+ \; a_n \\ & +2a_0 & +2a_1 & \qquad\qquad +2a_{n-1} \\ & & +3a_0 & \qquad\qquad +3a_{n-2} \end{array}\; x^n+\cdots\cdots$$
故
$$a_0=2,\; a_1+2a_0=1,\; a_2+2a_1+3a_0=0,$$
普徧言之,
$$a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}=0. \tag{2}$$
故 (1) 爲二階之循環級數,其關係標尺爲 (2).

已與冪級數之開首數項,常可求得一關係標尺,爲此諸項所適合.憑此標尺得將級數續成循環級數至無論若干項. 997

例. 已與 $1+4x+7x^2+10x^3+13x^4+\cdots\cdots$. 求此諸項所適合之關係標尺,然後再求續增二項.

因 $1+4x+7x^2+\cdots\cdots$ 非等比級數,可先試測二階標尺, $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$.
若所與各項皆適合此標尺,必有

$$7+4p+q=0,\ 10+7p+4q=0,\ 13+10p+7q=0.$$

解開首二方程式,得 $p=-2,\ q=1$.

此等之值適合第三方程式,因 $13-10\cdot2+7=0$ 也.

故所求之標尺為 $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0$.

故可求得所求之係數 $a_5, a_6$ 如下:

$$a_5-2\cdot13+10=0,\quad \therefore a_5=16;\quad a_6-2\cdot16+13=0,\quad \therefore a_6=19.$$

此所與諸項為 $1+4x+7x^2+10x^3+14x^4$, 即不能適合 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$ 形之標尺.然此時可隨意名舉一第六項 $ax^5$,就 $p, q, r$ 解方程式

$$10+7p+4q+r=0,\ 14+10p+7q+4r=0,\ a+14p+10q+7r=0.$$

以求得此六項皆適合之三階標尺 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$.

由上例易明,通常在已與 $2r$ 個項時,將級數續成 $r$ 階循環級數之道唯一,而在已與 $2r+1$ 個項時,則將級數續成 $(r+1)$ 階循環級數之道多至無限.

998 **循環羃級數之母函數** 凡 $r$ 階循環羃級數,皆為真分式之分母為 $r$ 次式者之展開式(比較 § 996).此分式稱為級數之母函數(Generating function).級數為收斂的時,此分式為級數之和.

譬如,令

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots \tag{1}$$

為二階循環級數,其關係標尺為

$$a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0. \tag{2}$$

設

$$\begin{aligned}
S_n&=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\\
\therefore\ pxS_n&=\qquad pa_0x+pa_1x^2+\cdots\cdots+pa_{n-2}x^{n-1}+pa_{n-1}x^n\\
\therefore\ qx^2S_n&=\qquad\qquad qa_0x^2+\cdots\cdots+qa_{n-3}x^{n-1}+qa_{n-2}x^n+qa_{n-1}x^{n+1}\\
\hline
\therefore\ (1+px+qx^2)S_n&=a_0+(a_1+pa_0)x\qquad+(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n+qa_{n-1}x^{n+1}
\end{aligned}$$

右端之其餘各項皆因(2)之關係而不現.

若(1)為收斂的, $S_n$ 則隨 $n$ 之增大而趨於(1)之和 $S$ 為極限,而 $x^n$ 則趨於0.

故

$$(1+px+qx^2)S=a_0+(a_1+pa_0)x,$$

即 $$S=\frac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}. \tag{3}$$

**循環冪級數之普徧項** 是可於已知母函數時,用下例所 999
說明之法求得之.

例. 循環級數之標尺為 $a_n-a_{n-1}-2a_{n-2}=0$, 而其開首二項為 $5+4x$, 求其母函數及普徧項.

此處 $$p=-1,\ q=-2\ \ a_0=5,\ a_1=4.$$

故依 § 998, (3), $$S=\frac{5-x}{1-x-2x^2}=\frac{5-x}{(1+x)(1-2x)}. \tag{1}$$

分解 (1) 為部分分式, § 537,

$$\frac{5-x}{(1+x)(1-2x)}=\frac{2}{1+x}+\frac{3}{1-2x}=2(1+x)^{-1}+3(1-2x)^{-1}.$$

然若 $|x|<1$, 則 $$2(1+x)^{-1}=2[1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^nx^n+\cdots\cdots].$$

又若 $|x|<1/2$, 則 $$3(1-2x)^{-1}=3[1+2x+4x^2+\cdots\cdots+2^nx^n+\cdots\cdots].$$

故普徧項為 $[(-1)^n2+3\cdot 2^n]x^n$.

## 習　題　XCI

1. 若三階循環級數之開首三項為 $2-3x+5x^2$, 而關係標尺為 $a_n+2a_{n-1}$ $a_{n-2}+3a_{n-3}=0$, 求其第四項及第五項.

2. 求下列各級數之關係式及續後二項.

   (1) $1+3x+2x^2-x^3-3x^4+\cdots\cdots$.

   (2) $2-5x+4x^2+7x^3-26x^4+\cdots\cdots$.

   (3) $1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-21x^5+\cdots\cdots$.

3. 求下列各級數之母函數及普徧項.

   (1) $2+x+5x^2+7x^3-17x^4+\cdots\cdots$.

   (2) $3+7x+17x^2+43x^3+113x^4+\cdots\cdots$.

4. 試證三階循環級數 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$, 若其關係標尺為 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$, 則母函數為 $\dfrac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2}{1+px+qx^2+rx^3}$.

5. 藉助於上之公式,求下列級數之母函數及普徧項.

$$1+2x+11x^2+24x^3+85x^4+238x^5+\cdots\cdots.$$

6. 試證 $a+(a+d)x+(a+2d)x^2+(a+3d)x^3+\cdots\cdots$ 為二階之循環級數,並求其母函數.

7. 試證 $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots\cdots$ 爲三階循環級數;而其母函數爲 $(1+x)/(1-x)^3$ 者.

8. 試證 $1\cdot2+2\cdot3x+3\cdot4x^2+4\cdot5x^3+\cdots\cdots$ 爲三階循環級數,並求其收斂時之和.

# XXXVI. 無窮連乘積

1000 **無窮連乘積 (Infinite products)** 無窮連乘積爲

$$\Pi(1+a_r)=(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_r)\cdots\cdots$$

形式之式,其中因式之個數假定爲無窮.

無窮連乘積之稱爲收斂的或發散的,當視 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n)$ 隨 $n$ 之無限增大而趨於有窮極限與否而定.

1001 **定理** 若諸數 $a$ 皆爲正,則無窮連乘積 $\Pi(1+a_r)$ 爲收斂的或發散的,視無窮級數 $\Sigma a_r$ 爲收斂的抑發散的而定.

其一,假定 $\Sigma a_r$ 爲收斂的并有和 $S$.

則因 $x$ 取正値時, $1+x<e^x$, § 990,

應有 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n)<e^{a_1}\cdot e^{a_2}\cdots\cdots e^{a_n}$,

即, $<e^{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}<e^S$

以故, $(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n)$ 隨 $n$ 之增大而增大,但常小於有窮數 $e^S$. 故必趨於一極限, § 192, 即, $\Pi(1+a_r)$ 爲收斂的.

其二,假定 $\Sigma a_r$ 爲發散的.

在此情形 $\lim(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)=\infty$.

然 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n)>1+(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$.

故 $\lim(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n)=\infty$, 即, $\Pi(1+a_r)$ 爲發散的.

例如, $p>1$ 時, $\Pi(1+1/n^p)$ 爲收斂的, $p\leqq1$ 時,則爲發散的.

例一. 若 $\Sigma a_r$ 爲正項發散級數,其各項皆小於 1, 試證 $\Pi(1-a_r)=0$.

因 $a_r<1$ 及 $1-a_r^2<1$, 數値上 $1-a_r<1/(1+a_r)$.

故 $$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)<1/(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n).$$

然 $$\lim(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n)=\infty.$$

故 $$\Pi(1-a_r)=\lim(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)=0.$$

例二. 試證 $x=1$ 時,若 $m+1>0$, 則二項級數 (§ 987) 收斂,若 $m+1<0$, 則發散.

$x=1$ 時,二項級數變為

$$1+m+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdots\cdots n}+\cdots\cdots. \tag{1}$$

於此級數中 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{m-n+1}{n}=-1+\frac{m+1}{n}. \tag{2}$$

以故,若 $m+1<0$, 則 $|u_{n+1}/u_n|>1$, 而 (1) 為發散的, § 951.

然若 $m+1>0$, 則從某項以後此級數成為 § 958 中所述之一種級數.故應收斂.

何以言之,若 $r$ 指示大於 $m+1$ 之第一個整數,則由(2),可知 $n>r$ 時, $u_{n+1}/u_n$ 為負,且數值上小於 1. 故 (1) 之各項從 $u_r$ 以後迭為正負,且數值上常減小. 故若 $\lim u_n=0$, 則 (1) 收斂.

然 $$u_{n+1}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n}$$
$$=(-1)^n\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right),$$

而由例一可知右方之積隨 $n$ 之增大而趨於 0 為極限.

## 習題. XCII

1. 試證 $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{17}{16}\cdots\cdots$ 及 $\frac{5}{4}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{26}{25}\cdots\cdots$ 為收斂的.

2. $x$ 須有若何之正值,下列各無窮連乘積始為收斂的?

   (1) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{n^2}\right)=\left(1+\frac{x}{1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2}\right)\left(\frac{x^3}{3^2}\right)\cdots\cdots.$

   (2) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{n!}\right)=\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x^3}{3!}\right)\cdots\cdots.$

   (3) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)=\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x^2}{9}\right)\left(1+\frac{x^3}{27}\right)\cdots\cdots.$

3. 試證 $\lim\frac{a(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots\cdots(b+n)}=\infty$ 或 0, 視 $a>b$ 或 $a<b$ 而定.

# XXXVII. 連分式

1002 **連分式 (Continued fractions)** 連分式爲 $a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cdots\cdots}}$

形式之式，通常書作 $a+\frac{b}{c+}\frac{d}{e+}\cdots\cdots$.

本書所論以簡單連分式爲限，其形如 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$，其中 $a_1$ 爲正整數或 0，而 $a_2, a_3, \cdots\cdots$ 皆爲正整數.

諸數 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ 稱爲連分式之第一，第二，……部分商 (partial quotient).

依此等部分商之個數爲有窮或無窮，而稱連分式爲有盡 (terminating) 或無盡 (nonterminating).

1003 **有盡連分式** 凡有盡之簡單連分式顯然皆有正有理值，以此等之式可化爲簡分式也.

例如，
$$2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4}=2+\frac{4}{13}=\frac{30}{13};\quad \frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4}=\frac{13}{30}.$$

反之，凡正有理數皆可變爲有盡之簡單連分式. 是可由下例明之.

例. 變 67/29 爲連分式.

應用求二整數之最大公約數之法於 67 及 29，得

$$\begin{array}{l}
29)67(2=a_1\\
\quad\ 58\\
\quad\ \overline{\ 9)29(3=a_2}\\
\qquad\ 27\\
\qquad\ \overline{\ 2)9(4=a_3}\\
\qquad\quad\ 8\\
\qquad\quad\ \overline{\ 1)2(2=a_4}\\
\qquad\qquad\ 2\\
\qquad\qquad\ \overline{0}
\end{array}$$

$$\therefore\ \frac{67}{29}=2+\frac{9}{29}=2+\frac{1}{29/9}. \tag{1}$$

$$\therefore\ \frac{29}{9}=3+\frac{2}{9}=3+\frac{1}{9/2}. \tag{2}$$

$$\therefore\ \frac{9}{2}=4+\frac{1}{2}. \tag{3}$$

以 (2) 代入 (1)，其結果中再以 (3) 代入，即得所求之連分式爲

$$\frac{67}{29}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}.$$

因 $29/67=1\div 67/29$, 又得

$$\frac{29}{67}=\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}.$$

**近值** (Convergents)　諸分式 $\frac{a_1}{1}$, $a_1+\frac{1}{a_2}$, $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3}$, ……,　1004

稱爲連分式 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$ 之第一,第二,第三……近值.

$a_1$ 爲 0 時,則第一近值書作 $\frac{0}{1}$.

**定理一**　凡序次屬奇之近值皆較以後各近值小,而序次　1005
屬偶之近值,皆較以後各近值大.

是可由分母增大則分式必減小而知之也.

譬如,

1. $a_1<a_1+\cdots\cdots$.

2. $a_1+\frac{1}{a_2}>a_1+\frac{1}{a_2+\cdots\cdots}$, 因 $\frac{1}{a_2}>\frac{1}{a_2+\cdots\cdots}$ 也.

3. $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}<a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots\cdots}}$, 因依 2 款 $a_2+\frac{1}{a_3}>a_2+\frac{1}{a_3+\cdots\cdots}$ 也;餘仿此.

**近值之簡化**　將 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$ 之第一,第二,第三,[illegible]　1006
值化爲簡分式之形式,即得

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_1a_2+1}{a_2},\ \frac{a_1a_2a_3+a_1+a_3}{a_2a_3+1},\ \cdots\cdots. \tag{1}$$

命此等近值如此簡化後之分子爲 $p_1, p_2, p_3$, ……,而分母爲 $q_1, q_2, q_3$, ……,則

$$p_1=a_1,\ p_2=a_1a_2+1,\ p_3=a_1a_2a_3+a_1+a_3,\ \cdots\cdots \tag{2}$$

$$q_1=1,\ q_2=a_2,\qquad q_3=a_2a_3+1,\qquad \cdots\cdots. \tag{3}$$

因 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 爲正整數,由(2)及(3),可知 $p_n$ 及 $q_n$ 隨 $n$ 之增大而繼續增大,且知所與連分式若無盡,則二者趨於∞.

審察(2)及(3),可得

$$p_3=a_3p_2+p_1 \text{ 及 } q_3=a_3q_2+q_1. \qquad (4)$$

是爲下述定理之一例.

1007 定理二 任何近值之分子分母,與其前二近值之分子分母間之關係,以公式

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$$

而結合.

何則,設此二公式對於第 $k$ 個近值能成立,則

$$p_k=a_kp_{k-1}+p_{k-2},\quad q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2}, \qquad (1)$$

$$\frac{p_k}{q_k}=\frac{a_kp_{k-1}+p_{k-2}}{a_kq_{k-1}+q_{k-2}}. \qquad (2)$$

第 $(k+1)$ 個近值可由第 $k$ 個近值衍出,祇須將 $a_k$ 換爲 $a_k+1/a_{k+1}$ 即可,§1004. 因 $p_{k-1}, p_{k-2}, q_{k-1}, q_{k-2}$ 不含 $a_k$,故由(2)得

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\frac{(a_k+1/a_{k+1})p_{k-1}+p_{k-2}}{(a_k+1/a_{k+1})q_{k-1}+q_{k-2}}$$

$$=\frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1}+p_{k-2})+p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1}+q_{k-2})+q_{k-1}}=\frac{a_{k+1}p_k+p_{k-1}}{a_{k+1}q_k+q_{k-1}} \qquad \text{依 (1);}$$

即,
$$p_{k+1}=a_{k+1}p_k+p_{k-1},\quad q_{k+1}=a_{k+1}q_k+q_{k-1}.$$

由是得證公式 $p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}$, $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$ 若對於任一特殊近值能成立,則對於其次一近值亦必成立.然吾人已知此二公式對於第三近值能成立.故對於第四近值亦能成立,對於第五近值亦能成立,推而至於第三近值以後之各近值皆能成立(比較§791).

例. 計算 $3+\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5}$ 之各近值.

因 $3=3/1$ 而 $3+1/2=7/2$, 得 $p_1=3,\ p_2=7,\ q_1=1,\ q_2=2.$

故 $\quad p_3=3\cdot7+3=24,\ p_4=4\cdot24+7=103,\ p_5=5\cdot103+24=539,$

而 $\quad q_3=3\cdot2+1=7,\ q_4=4\cdot7+2=30,\ q_5=5\cdot3+7=157.$

故所求之近值為 $\frac{3}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{24}{7},\ \frac{103}{30},\ \frac{539}{157}.$

**定理三**　凡二個連續近值之分子與分母間之關係,以公式

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$$

而結合. 1008

$n=2$ 時,此公式能成立.因依 §1006, $p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1a_2=1=(-1)^2$ 也.

吾人更能證明公式在 $n=k$ 時若能成立,則 $n=k+1$ 時亦必成立.

蓋 $$p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}=(a_{k+1}p_k+p_{k-1})q_k-p_k(a_{k+1}q_k+q_{k-1})$$
$$=-(p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k) \qquad \S 1007$$

故,若 $$p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^k,$$

則 $$p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}=(-1)^{k+1}.$$

以故,因公式對於 $n=2$ 為真,對於 $n=2+1$, 卽 3, 亦必為真,從而對於 $n=3+1$, 卽 4, 亦必為真,推而廣之,對於 $n$ 之任何正整數值皆眞.

**系一**　各近值 $p_n/q_n$ 皆為不可約分式. 1009

何則,若 $p_n$ 及 $q_n$ 有公因數,則由 $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$ 之關係,可知此公因數為 $(-1)^n$ 之一除數,事屬不可能也.

**系二**　對於二近值之差,得公式如下: 1010

$$1.\ \frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}. \qquad 2.\ \frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_nq_{n-2}}.$$

1, $c_1<c_2>c_3<c_4>c_5<c_6$, 2, $c_1<c_3<c_5<c_7$
$c_2>c_4>c_6>c_8$

联1,2,则 $c_1<c_2, c_3, c_4, c_6, c_6 \cdots$, $c_5<c_4, c_7, c_8, c_9, c \cdots\cdots$
$c_3<c_4, c_6, c_8, c_7 \cdots$

第一公式乃 $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$ 之關係之直接結果.

第二公式由§§1007,1008之事實,即

$$p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-2}-p_{n-2}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})$$
$$=a_n(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})=(-1)^{n-1}a_n.$$

而來.

§1005之定理可由此二公式導出之.

1011 定理四 無盡之簡單連分式之第 $n$ 個近值,隨 $n$ 之無限增大而趨於一定之極限.

何則,依§1005,序次屬奇之近值 $p_1/q_1$、$p_3/q_3$,…… 成一無盡之遞增列,其中各項皆小於有窮數 $p_2/q_2$.故依§192,循此列以遞變之變數常增大,而趨於一定數 $\lambda$ 為極限.

同理,循序次屬偶之近值列 $p_2/q_2$, $p_4/q_4$,…… 以遞變之變數常減小,而趨於一定數 $\mu$ 為極限.

因
$$\mu-\lambda=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{p_{2m}}{q_{2m}}-\frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}\right]=\lim_{m\to\infty}\frac{(-1)^{2m}}{q_{2m}q_{2m-1}}=0,$$

故
$$\mu=\lambda$$

故循近值之全列 $p_1/q_1$, $p_2/q_2$, $p_3/q_3$,…… 以遞變之變數,趨於 $\lambda$ 為極限.

1012 所謂無盡之簡單連分式之值,即數 $\lim_{n\to\infty}(p_n/q_n)$ 之意.由§1003,可知此數常為無理數.

有盡連分式之值,即其末一近值(§1004)而已.

在以下各定理(§§1013, 1014)之敍述中,應知連分式有盡時,所謂"近值"乃作末一近值外之任何近值解.

1013 系一 簡單連分式之值,常在每二個續連近值之值之間.

系二　連分式之值,與其第$n$個近值之值之差,數值上小 1014
於$1/q_nq_{n+1}$而大於$a_{n+2}/q_nq_{n+2}$.

何則,命$\lambda$指示連分式之值,為明確起見,并設$n$為奇數,

則 $$\frac{p_n}{q_n}<\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}<\lambda<\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}. \qquad \S\S 1005, 1013$$

故 $$\lambda-\frac{p_n}{q_n}<\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}, \quad \therefore \quad <\frac{1}{q_nq_{n+1}}, \qquad \S 1010, 1$$

又 $$\lambda-\frac{p_n}{q_n}>\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}-\frac{p_n}{q_n}, \quad \therefore \quad >\frac{a_{n+2}}{q_nq_{n+2}}, \qquad \S 1010, 2$$

顯而易見,$1/q_nq_{n+1}<1/q_n^2$,又,利用$q_{n+2}=a_{n+2}q_{n+1}+q_n$之關係,§1007,易明$a_{n+2}/q_nq_{n+2}\geqq 1/q_n(q_n+q_{n+1})$.故$\lambda$與$p_n/q_n$之差,小於$1/q_n^2$而大於$1/q_n(q_n+q_{n+1})$.

系三　各近值皆較其前任一近值更接近連分式之值. 1015

何則,依§1014,若$\lambda$指示連分式之值,則$\lambda$與$p_n/q_n$之差,數值上小於$1/q_nq_{n+1}$,而$\lambda$與$p_{n-1}/q_{n-1}$之差,數值上大於$a_{n+1}/q_{n-1}q_{n+1}$;且因$q_{n-1}<a_{n+1}q_n$ §1006,故$1/q_nq_{n+1}<a_{n+1}/q_{n-1}q_{n+1}$.

系四　近值$p_n/q_n$較分母不超過$q_n$之其他任何有理分式 1016
更接近連分式之值.

何則,若$a/b$較$p_n/q_n$更接近連分式之值,$a/b$亦必較$p_{n-1}/q_{n-1}$更接近連分式之值,§1015,故必在$p_n/q_n$與$p_{n-1}/q_{n-1}$之間,§1013.

為明確起見,假定$n$為偶數.

即得 $$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{a}{b}<\frac{p_n}{q_n}.$$

故 $$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}>\frac{a}{b}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}};$$

即
$$\frac{1}{q_n q_{n-1}}<\frac{aq_{n-1}-bp_{n-1}}{bq_{n-1}},$$

亦即
$$b>q_n(aq_{n-1}-bp_{n-1}).$$

然因 $a/b>p_{n-1}/q_{n-1}$ 故 $aq_{n-1}-bp_{n-1}$ 爲正數．是以 $b>q_n$；即，$a/b$ 若較 $p_n/q_n$ 更接近連分式之值，則其分母 $b$ 必須大於 $q_n$．

1017 循環連分式 (Recurring fractions) 無盡之連分式，以一個部分商或一羣連續部分商循環不已者，稱爲循環連分式．其以此等循環部分商始者稱曰純 (pure) 循環連分式，不以此等循環部分商始者稱曰混 (mixed) 循環連分式．

循環連分式之值，可求之如下．

例一．求 $\dot{2}+\frac{1}{\dot{3}+}\cdots\cdots=2+\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\cdots\cdots$ 之值．

此爲純循環連分式，其循環週 (period) 爲 $2+\frac{1}{3}$．故若以 $x$ 指示其值，即得

$$x=2+\frac{1}{3+}\frac{1}{x},\quad \therefore x=\frac{7x+2}{3x+1},\quad \therefore 3x^2-6x-2=0,\quad \therefore x=\frac{3+\sqrt{15}}{3}.$$

例二　求 $4+\frac{1}{5+}\frac{1}{\dot{2}+}\frac{1}{\dot{3}+}\cdots\cdots$ 之值．

此爲混循環連分式，其循環週爲 $2+1/3$．故若以 $x$ 指示循環部分 $\dot{2}+\frac{1}{\dot{3}+}\cdots$ 之值，而以 $y$ 指示全分式之值，依例一，即得

$$y=4+\frac{1}{5+}\frac{1}{x}=\frac{21x+4}{5x+1}=\frac{21(3+\sqrt{15})/3+4}{5(3+\sqrt{15})/3+1}=\frac{75+21\sqrt{15}}{18+5\sqrt{15}}.$$

普偏言之，若 $x$ 指示純循環連分式之值，而其循環週爲 $a_1+\cdots\cdots\frac{1}{+a_k}$，依 § 1007，即得

$$x=a_1+\cdots\cdots\frac{1}{+a_k+}\frac{1}{x}=\frac{p_k x+p_{k-1}}{q_k x+q_{k-1}},$$

從而
$$q_k x^2+(q_{k-1}-p_k)x-p_{k-1}=0.$$

因此二次方程式之絕對項 $-p_{k-1}$ 爲負，故此方程式有一正根，且唯限於一，而此根爲連分式之值．

其次,若 $y$ 指示混循環連分式

$$a_1+\cdots\cdots\frac{1}{+a_r}+\frac{\dot{1}}{a_{r+1}}+\cdots\cdots+\frac{\dot{1}}{a_{r+k}}+\cdots\cdots$$

之值,祇須如上先求循環部分之值 $x$,然後依 § 1007,即得

$$y=a_1+\cdots\cdots\frac{1}{+a_r}+\frac{1}{x}=\frac{p_r x+p_{r-1}}{q_r x+q_{r-1}}.$$

**變無理數爲連分式**　凡正無理數皆爲一定之無盡簡單連分式之值,此連分式得用下法求至無論若干部分商. 1018

若 $b$ 指示所究之數,可先求 $a_1$,即,小於 $b$ 之最大整數.於是 $b=a_1+1/b_1$,其中 $b_1$ 爲一大於 1 之無理數.次求 $a_2$,即,小於 $b_1$ 之最大整數.於是 $b_1=a_2+1/b_2$,其中 $b_2$ 爲一大於 1 之無理數.準此以往,即得

$$b=a_1+\frac{1}{b_1}=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\cdots\cdots=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots.$$

$b$ 爲二次不盡根數時,如是求得之連分式得證明其爲循環連分式.

例. 變 $\sqrt{11}$ 爲連分式.

小於 $\sqrt{11}$ 之最大整數爲 3,而 (§ 603)

$$\sqrt{11}=3+(\sqrt{11}-3)=3+\frac{2}{\sqrt{11}+3}=3+\frac{1}{(\sqrt{11}+3)/2}.$$

小於 $(\sqrt{11}+3)/2$ 之最大整數爲 3,而

$$\frac{\sqrt{11}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{11}-3}{2}=3+\frac{2}{2(\sqrt{11}+3)}=3+\frac{1}{\sqrt{11}+3}. \qquad (2)$$

小於 $\sqrt{11}+3$ 之最大整數爲 6,而

$$\sqrt{11}+3=6+(\sqrt{11}-3)=6+\frac{2}{\sqrt{11}+3}=6+\frac{1}{(\sqrt{11}+3)/2}. \qquad (3)$$

(3) 之末一分式與 (1) 之末一分式相同.故從 (3) 以後之步驟迭爲 (2),(3) 而無已時;即部分商 3 及 6 循環不已.以故,以 (2) 代入 (1),又於其結果中以 (3) 代入,準此以往,即得 $\sqrt{11}=3+\frac{\dot{1}}{3}+\frac{\dot{1}}{6}+\cdots\cdots$

1019 一與無理數以簡單連分式表示之道惟一.此因二無盡之簡單連分式,非其對應部分商悉等,決不能相等故也.

何以言之,若$a+\alpha=c+\gamma$,其中$a$及$c$指示正整數,而$\alpha$及$\gamma$爲小於1之正數,則$a=c$,因非然者,由$a-c=\gamma-\alpha$,將有不爲0之整數數值上小於1也.

以故,若$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots=c_1+\frac{1}{c_2+}\frac{1}{c_3+}\cdots\cdots$,其中$a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots, c_1, c_2, c_3,\cdots\cdots$指示正整數,則$a_1=c_1$, $\therefore \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots=\frac{1}{c_2+}\frac{1}{c_3+}\cdots\cdots$, $\therefore a_2+\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots=c_2+\frac{1}{c_3+}\cdots\cdots$, $\therefore a_2=c_2$,餘仿此.

1020 若計算等於所與無理數$b$之連分式直至第$n$個部分商,則其第$n$個近值$p_n/q_n$卽可求出,又依§1014,此有理分式$p_n/q_n$以小於$1/q_n^2$之誤差代表$b$.更有進者,$p_n/q_n$較分母不超過$q_n$之其他任何有理分式更接近於$b$, §1016.

例如,$\sqrt{11}=3+\frac{1}{3+}\frac{1}{6+}\frac{1}{3+}\cdots\cdots$之開首四近值爲$\frac{3}{1}, \frac{10}{3}, \frac{63}{19}, \frac{199}{60}$,而$\frac{199}{60}$以小於$\frac{1}{60^2}$之誤差代表$\sqrt{11}$.

1021 **一次不定方程式之解法** 已與$ax+by=c$形式之任何方程式,其中$a, b, c$指示整數,且$a$與$b$無公因式者,§672.若變$a/b$爲連分式,此連分式之末一近值卽爲$a/b$自身,又若末第二近值爲$p/q$,則有$aq-bp=\pm1$, §1008.由此結果吾人常能求得$x$及$y$之一組整數值適合$ax+by=c$者.其法可以下例說明之.

例. 求出$205x+93y=7$之一組整數解.

$x=x_1+93t$

$y=y_1-205t$

如於§1003之例,求得$\frac{205}{93}=2+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{8+}\frac{1}{2}$.

如於§1007之例,求得其近值爲$\frac{2}{1}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{97}{44}, \frac{205}{93}$.

$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$

故 $$205\cdot44-93\cdot97=-1,$$

更以$-7$乘之,卽得 $$205(-44\cdot7)+93(97\cdot7)=7.$$

故$x=-308$, $y=679$爲$205x+93y=7$之一解.

普遍解爲$x=-308+93t$, $y=679-205t$, §674,

同法得證 $205x-93y=7$ 有解 $x=-308$, $y=-679$.

## 習　題　XCIII

計算下列各連分式之近值.

1. $3+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5}$.　　2. $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{10+}\frac{1}{12}$.

變下列各數為連分式,對於末後三數並各須計算其第四個近值及估定以此為分式之值時之誤差.

3. $\frac{10}{12}$.　　4. $\frac{457}{56}$.　　5. $\frac{142}{513}$.　　6. $3.54$.

7. $0.1457$.　　8. $\frac{253}{177}$.　　9. $\frac{421}{972}$.　　10 $\frac{23456}{31827}$.

變下列各數為循環連分式,對於開首四數並各須計算其第五個近值及對應之誤差.

11. $\sqrt{17}$.　　12. $\sqrt{26}$.　　13 $\sqrt{6}$.　　14. $\sqrt{38}$.

15. $\sqrt{105}$.　　16. $1/\sqrt{23}$.　　17. $\sqrt{19}$.　　18. $\sqrt{71}$.

19. $3\sqrt{3}$.　　20. $(\sqrt{10}-2)/2$.　　21. $(\sqrt{2}+1)/(\sqrt{2}-1)$.

求下列各循環連分式之值.

22. $\frac{\dot{1}}{1+}\frac{1}{2+}\frac{\dot{1}}{3+}\cdots$　　23. $\frac{\dot{1}}{2+}\frac{1}{1+}\frac{\dot{1}}{3+}\cdots$　　24. $3+\frac{1}{4+}\frac{\dot{1}}{5+}\frac{\dot{1}}{2+}\cdots$

25. $\dot{2}+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{\dot{1}}{5+}\cdots$　　26. $\frac{1}{2+}\frac{1}{7+}\frac{\dot{1}}{1+}\frac{1}{2+}\frac{\dot{1}}{1+}\cdots$

27. 試證 $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{2a+}\frac{1}{2a+}\cdots\cdots$.

28. 試證 $\sqrt{a^2+2}=a+\frac{1}{a+}\frac{1}{2a+}\frac{1}{a+}\frac{1}{2a+}\cdots\cdots$.

29. 試證 $\frac{\dot{1}}{a+}\frac{1}{b+}\frac{\dot{1}}{c+}\cdots\cdots=\frac{-(abc+a-b+c)+\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)}$.

30. 變 $x^2+x-1=0$ 之正根為連分式.

31. 試證 $\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$.

32. 試證 $\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots=\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\frac{1}{q_3q_4}-\cdots\cdots$.

33. 以分母小於1000之有理分數表正方形之對角線與一邊之比,則與此最接近者若何?試估定以此分數為比值時之誤差

34. 求以小於0.000001之誤差代表$\pi=3.14159265\cdots\cdots$之最簡分數.

35. 計算$e=2.71828\cdots\cdots$之第六個近值,並估定以此爲$e$之值時之誤差.

36. 求$127x-214y=6$之一整數解.

37. 求$235x+412y=10$之一整數解.

38. 求$517x-323y=31$之普徧解.

# XXXVIII. 綿續函數之性質

## 一變數函數

1022 **函數** 若變數$y$隨變數$x$而定,$x$每取一值,$y$即有一定值或數定值與之對應,則稱$y$爲$x$之函數.

以後稱$y$爲$x$之函數及書$y=f(x)$,其意義爲$y$爲單值函數(One-valued function);換言之,$x$每取一值,$y$即有一值,且祇有一值,與之對應.與$x$之值$a$對應之$y$之值,以$f(a)$表之.

若$y$等於$x$之代數式,例如,$y=x^2+1$,則$y$顯然爲$x$之函數.然確定$y$爲$x$之函數之關係,符爲方程式所不能表示者.譬如,對於$x$之一切有理值,$y$若爲1,而對於$x$之其他一切之值,$y$若爲$-1$,則$y$即爲$x$之函數.而$y$與$x$間之此種關係即爲方程式所不能表示者

有時對於$x$之若干除外之值由所舉$y$與$x$間之關係,決定$y$之值縱屬失敗,§ 1024,而吾人仍稱之爲$x$之函數.

有時確定$y$之爲$x$之函數,祇對於$x$之某類之值,或某限界內之值而言.譬如,單就方程式$y=x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots$考之,$y$之決定祇對於數值上小於1之$x$值而言也.

1023 **函數之綿續性(Continuity of a function)** 命$f(x)$指示$x$之與函數.若$f(a)$有一定之有窮值.且$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$,則稱$f(x)$爲於$a$綿續者(continuous),即於$x=a$時綿續者.

在相反之情形,稱$f(x)$爲於$a$不綿續者(discontinuous).

自此以後,記號 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ 作 $x$ 趨近 $a$ 為極限時,$f(x)$ 趨近 $f(x)$ 為極限解,至於 $x$ 趨近 $a$ 為極限,所循之數列若何,可不論也。

由與方程式 $y=f(x)$ 所確定之函數 $y$ 在 $x=a$ 時 $f(x)$ 一式每 1024
有呈不定形者,§§ 513–518. 就方程式 $y=f(x)$ 本身而論,$x=a$ 時 $y$ 並不能為此式所確定.但 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 若有一定之有窮值,吾人得名舉之以為 $f(a)$ 之值,§ 519,遂使 $f(x)$ 為於 $a$ 綿續者.若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$,吾人得以 $\infty$ 為 $f(a)$ 之值,§ 515,於是 $f(x)$ 為於 $a$ 不綿續者.最後,$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 若為不定,吾人沒由名舉任何一數以為 $f(a)$ 之值.蓋能使 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ 之值顯然無從名舉也.在此情形 $f(x)$ 亦為於 $a$ 不綿續者.

1 譬如,各有理函數 $f(x)$ 乃綿續者,但其中所含分式之分母時或為 0 則為例外.

例如,取函數 $f(x)=(x-1)/(x^2-1)$ 考之.

除 $x^2-1=0$,即,$x=1$ 或 $x=-1$ 時外,此函數為綿續者.因 $a$ 若非 1 亦非 $-1$,則 $f(a)=(a-1)/(a^2-1)$ 有一定之有窮值,且 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(a)$ 故也,§ 509.

$x=1$ 時,$(x-1)/(x^2-1)$ 一式呈不定形 $0/0$. 然 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)/(x^2-1)]=\lim\limits_{x\to 1}[1/(x+1)]=1/2$,將 $1/2$ 指定為 $f(1)$ 之值,則在 $x=1$ 時即可使 $f(x)$ 綿續.

$x=-1$ 時,$f(x)$ 為不綿續者;因 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\infty$ 故也.

2. 取下之函數考之.

$$f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}+3}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{1+3/2^{\frac{1}{x}}}{1+1/2^{\frac{1}{x}}}=\frac{1/2^{-\frac{1}{x}}+3}{1/2^{-\frac{1}{x}}+1}.$$

此處 $f(0)$ 呈不定形 $\infty/\infty$,§ 517.

然若將 $f(x)$ 書作第二形式,然後使 $x$ 循正值以趨於 0,即得 $\lim 2^{\frac{1}{x}}=\infty$,從而 $\lim f(x)=1$.

若將 $f(x)$ 書作第三形式,然後使 $x$ 循負值以趨於 0,即得 $\lim 2^{-\frac{1}{x}}=\infty$,從而 $\lim f(x)=3$.

最後,若使$x$循迭爲正負之值以趨於$0$,$f(x)$不能趨近何等極限.

故$f(x)$於$0$爲不綿續者.對於$f(0)$並無能使$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$之值可以指定也.

1025 由§1023綿續性之定義,直接可知(§189).

$f(x)$於$a$爲綿續者,其充分兼必要條件,爲$f(a)$有一定之有窮值,及對於每一可指定之正數$\delta$,必能求得一對應正數$\epsilon$俾 $|x-a|<\epsilon$時,$|f(x)-f(a)|<\delta$.

例如$f(x)$於$x$之一值,如$a$,爲綿續者,則在$a$之鄰近,$x$之值有極小之變動,則$f(x)$之值亦隨之而起極小之變動.且$x$之值所採之變動,其小也,足使$f(x)$之值之對應變動小至如吾人意之所欲.$f(x)$於$x$之一值爲不綿續者,則在含此$x$值之區間內,$f(x)$不能有上述情事.參閱§1024之例可知也.

1026 **定理一** 若二函數$f(x)$及$\phi(x)$於$a$皆爲綿續者,則$f(x)\pm\phi(x)$及$f(x)\cdot\phi(x)$於$a$亦然,又除$\phi(a)=0$外$f(x)/\phi(x)$亦然.

若$f(x)$於$a$爲綿續者,則$\sqrt[n]{f(x)}$亦然.

本定理直接可從下列二事知之:於$a$爲綿續之定義§1023,及§§203–205之定理以得$\lim[f(x)+\phi(x)]=\lim f(x)+\lim \phi(x)$等.

1027 **實函數(Real functions)** 此後$x$指示實變數(Real variable),卽,祇取實值之變數,而$f(x)$指示$x$之實函數,卽,$x$爲實數時有實值之函數.

1028 **數之區間(Number intervals)** 以直線上之點表實數一事,§§134,209,啓示下列便利之命名法.

$a$與$b$間一切實數(包括$a$及$b$本身)所成之集,命其名曰數之區間$a,b$,以符號$(a,b)$表之.

默認 $a<b$,而稱 $a$ 爲區間 $(a,b)$ 之左極 (left extremity) $b$ 爲其右極 (right extremity). 又,設 $c=(a+b)/2$,則稱 $(a,b)$ 分爲二相等區間 $(a,c)$ 及 $(c,b)$ 於 $c$;餘準此.

例如,(1, 7) 分爲二相等區間 (1, 4), (4, 7) 於 4;又分爲三相等區間 (1, 3), (3, 5), (5, 7) 於 3 與 5.

函數 $f(x)$ 對於在區間 $(a,b)$ 內 $x$ 之各值,若皆爲綿續者,則稱 $f(x)$ 徧歷區間 $(a,b)$ 爲綿續者. 1029

**定理二** 若 $f(x)$ 徧歷區間 $(a,b)$ 爲綿續者,而 $f(a)$ 及 $f(b)$ 符號相反,則 $(a,b)$ 中含一能使 $f(x_0)=0$ 之數 $x_0$. 1030

爲明確起見,假定 $f(a)$ 爲 + 而 $f(b)$ 爲 −. 將 $(a,b)$ 隨意分爲若干相等區間,設分爲二相等區間 $(a,c)$ 及 $(c,b)$.

若 $f(c)=0$,本定理已證實,$c$ 即 $x_0$. 然若 $f(c)\neq 0$,則區間 $(a,c)$ 與 $(c,b)$,二者之中,$f(x)$ 於其左極爲 + 而於其右極爲 − 者必有一爲眞. 譬如,若 $f(c)$ 爲 −. $(a,c)$ 即是,若 $f(c)$ 爲 +,$(c,b)$ 即是. 選定此一區間,便宜上,命名曰 $(a_1,b_1)$. 於是 $f(a_1)$ 爲 + 而 $f(b_1)$ 爲 −.

用處理 $(a,b)$ 之法,以處理新區間 $(a_1\,b_1)$,循是以往,行之無窮. 究乎其極,終必有 $f(x)$ 於其上爲 0 者,是即所求之 $x_0$;否則亦得確定一無盡列爲區間內之區間逐層相因以組成者.

即 $\qquad (a,b),\ (a_1,b_1),\ (a_2,b_2),\ \cdots\cdots,\ (a_n,b_n),\ \cdots\cdots,$

$\qquad f(a),\ f(a_1),\ f(a_2),\ \cdots\cdots,\ f(a_n),\ \cdots\cdots$ 爲 +

而 $\qquad f(b),\ f(b_1),\ f(b_2),\ \cdots\cdots,\ f(b_n),\ \cdots\cdots$ 爲 −.

由 §§ 192, 193, 可知 $a_n$ 及 $b_n$ 隨 $n$ 之增大,而趨近同一之數爲極限. 因 $a_n$ 常小於 $b$ 而不減,$b_n$ 常大於 $a$ 而不增,且 $\lim(b_n-a_n)=\lim(b-a)/2^n=0$ 故也:

命此極限爲 $x_0$,則 $f(x_0)=0$.

何則,因 $f(x)$ 於 $x_0$ 爲綿續者,故 $\lim f(a_n)=\lim f(b_n)=f(x_0)$.

但因 $f(a_n)$ 常爲正,其極限 $f(x_0)$ 不能爲負,又因 $f(b_n)$ 常爲負,其極限 $f(x_0)$ 不能爲正.故 $f(x_0)$ 爲 0.

例如,若 $f(x)=1-x^2/2!+x^4/4!-x^6/6!+\cdots\cdots$,則 $f(1)$ 爲正而 $f(2)$ 爲負,易於明示.故對於 1 與 2 間之 $x$ 之某值,此 $f(x)$ 能爲 0.

此定理之較簡例證可於 §§ 833, 836 中求之.

**1031** **極大值及極小值　上限及下限** (Superior and inferior limits) 取下列數之無窮集考之.

$$2,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{4},\ 1\frac{1}{8},\ \cdots\cdots(A),\quad 2,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{4},\ 2\frac{7}{8},\ \cdots\cdots(B).$$

$(A)$ 中有最大之數,2,而無最小之數;$(B)$ 中有最小之數,2,而無最大之數.

反之,$(A)$ 中雖無最小之數,然小於 $(A)$ 中諸數之數,其中有最大者,卽 1.同理,大於 $(B)$ 中諸數之數,其中有最小者,卽 3.

凡有窮數所成之無窮集,卽,二有窮與數 $a$ 與 $b$ 間之數所成者,莫不皆然.換言之,

**1032** **定理三**　命 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots(A)$ 指示有窮數所成之任一無窮集.則

1. 非 $(A)$ 中之相異各數,其中有最大者,卽大於 $(A)$ 中諸數之數,其中有最小者.

2. 非 $(A)$ 中之相異各數,其中有最小者,卽小於 $(A)$ 中諸數之數,其中有最大者.

欲證 1 款,可將一切大於 $(A)$ 中諸數之數,歸屬於類 $R_2$,而將一切其他之實數包括 $(A)$ 中諸數在內;歸屬於類 $R_1$.於是因 $R_1$ 中每一數小於 $R_2$ 中各數,依 § 159,非 $R_1$ 中有最大之數,卽

$R_2$ 中有最小之數；前者之意義，爲 $(A)$ 中之相異各數，其中有最大者，而後者之意義，爲大於 $(A)$ 中諸數之數，其中有最小者；故如1款所言。

2款得仿此以證明之。

若數集中相異各數，其中有最大者，則稱其數爲數集之極大數；若有最小者，爲其極小數。 1033

所謂數集之上限，若集中有極大數，卽爲此極大數，否則爲最小數之大於集中各數者。

所謂數集之下限，若集中有極小數，卽爲此極小數，否則爲最大數之小於集中各數者。

數集如 $1, 2, 3, 4, \cdots\cdots$，其中所含之數較任何可名言之數更大者，稱爲有上限 $\infty$。仿此，數集如 $-1, -2, -3, -4, \cdots\cdots$，稱爲有下限 $-\infty$。

若數集具有窮上限 $\lambda$，則顯見非 $\lambda$ 爲其極大數，卽吾人必能於集中求得若干數，其與 $\lambda$ 之差，小至如吾人意之所欲。

所謂"$f(x)$ 在 $(a, b)$ 內之值"，意卽 $f(x)$ 之值對應於 $x$ 在 $(a, b)$ 1034
內之值者，若此數集有極大值或極小值，則稱之爲 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 內之絕對極大值或絕對極小值。§639 中所謂極大值或極小值，得爲絕對極大值或絕對極小值，然亦有不盡然者。

**定理四** 若 $f(x)$ 徧歷區間 $(a,b)$ 爲綿續者，則在 $(a, b)$ 內必有 1035
一絕對極大值及一絕對極小值。

何則，因 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 內之值爲有窮值，§1023，此等之值必具有窮上限及下限。可分別命此二限爲 $\lambda$ 及 $\mu$。

今所欲證者，爲在 $(a, b)$ 內有一數 $x_0$ 存在，能使 $f(x_0)=\lambda$，又有

一數$x_1$存在,能使$f(x_1)=\mu$.

此二定理之證明大致相同,故祇證前者如下.

將$(a,b)$分爲任意若干相等區間,設分爲二相等區間.此兩半區間,$f(x)$之諸值至少在其一內者,顯然仍以$\lambda$爲上限.便宜上命此半區間曰$(a_1,b_1)$.

用處理$(a,b)$之法,以處理新區間$(a_1,b_1)$,循是以往,行之無窮.

如此卽得一無盡列爲區間內之區間逐層相因以組成者如下:
$$(a,b),\ (a_1,b_1),\ (a_2,b_2),\ \cdots\cdots,\ (a_n,b_n),\ \cdots\cdots,$$
$f(x)$在以上各區間內之値,皆以$\lambda$爲上限.

$a_n$與$b_n$隨$n$之無限增大而趨近同一之數爲極限(叅看§1030).

若命此極限爲$x_0$,則$f(x_0)=\lambda$.

蓋設或不然,則因$f(x_0)$及$\lambda$皆爲常數,故其差必爲一異於0之常數,如$a$,是以
$$\lambda-f(x_0)=a. \tag{1}$$

然因$f(x)$於$x_0$爲綿續者,故得令區間$(a_n,b_n)$對於在$(a_n,b_n)$內$x$之各値,§1025,小至能得
$$|f(x)-f(x_0)|<a/2. \tag{2}$$

又因$\lambda$爲$f(x)$之諸値在$(a_n,b_n)$內者之上限,故可在$(a_n,b_n)$內及(2)中選擇$x$,以使(§1033)
$$\lambda-f(x)<a/2. \tag{3}$$

然由(2)及(3)可知 $\lambda-f(x_0)<a$. (4)

以故,因(4)與(1)矛盾,(1)不能成立;卽,$\lambda-f(x_0)=0$,亦卽,$\lambda=f(x_0)$,如所欲證者.

系 若$f(x)$偏歷區間$(a,b)$爲綿續者,則$f(x)$之各值介乎此 1036
區間內之極大值及極小值者,亦在$(a,b)$內.

何則,令$c$指示所究之值,取函數$f(x)-c$考之.依§1026,此函數在$(a,b)$內爲連續者.

若$f(x_0)$及$f(x_1)$表$f(x)$在$(a,b)$內之絕對極大值及絕對極小值,則$f(x_0)-c$爲$+$而$f(x_1)-c$爲$-$.以故,§1030,在$x_0$與$x_1$之間必有一數,命之爲$x_2$,能使$f(x_2)-c=0$,卽$f(x_2)=c$,如所欲證者.

函數之振動(Oscillation of a function) $f(x)$在$(a,b)$內之 1037
值,其上限及下限間之差,作$f(x)$在$(a,b)$內之振動解.

定理五 命$f(x)$偏歷$(a,b)$爲綿續者.若隨意指定一正數 1038
$\alpha$,不論小至何似,必能分$(a,b)$爲有窮數個相等區間,在各區間內$f(x)$之振動皆小於$\alpha$.

何則,可將$(a,b)$分爲任意若干相等區間,設分爲二相等區間,再將此二區間各分爲二相等區間,循是以往,區間漸小,終必能得$f(x)$在其中之振動皆小於$\alpha$者,

設或不然,則在$(a,b)$內至少必有一半區間,$f(x)$在其內之振動爲不小於$\alpha$者;其次在此區間內又有一半區間,$f(x)$在其內之振動爲不小於$\alpha$者;循是以往而無終極.

令此區間內之區間.逐層相因所組成之無盡列爲

$$(a,b),\ (a_1,b_1),\ (a_2,b_2),\ \cdots\cdots,\ (a_n,b_n),\ \cdots\cdots,$$

又,如§1030,令$\lim a_n=\lim b_n=x_0$.

因$f(x)$偏歷$(a,b)$爲綿續者,故在各區間$(a,b),(a_1,b_1),\cdots\cdots,(a_n,b_n),\cdots\cdots$內,$f(x)$皆有一絕對極大值及一絕對極小值,§1035.

令 $f(x)$ 在 $(a_n, b_n)$ 內之絕對極大值爲 $f(\alpha_n)$，絕對極小值爲 $f(\beta_n)$.

則依假設，
$$f(\alpha_n)-f(\beta_n)\geqq a,$$

從而
$$\lim f(\alpha_n)-\lim f(\beta_n)\geqq a.$$

然此乃不可能者．蓋因 $\alpha_n$ 及 $\beta_n$ 在 $(a_n, b_n)$ 內，且 $\lim a_n=\lim \beta_n=x_0$，故 $\lim \alpha_n=\lim \beta_n=x_0$ 也．

以故，因 $f(x)$ 於 $x_0$ 爲綿續者，$\lim f(\alpha_n)=\lim f(\beta_n)$；即，$\lim f(\alpha_n)-\lim f(\beta_n)=0$，∴並不 $\geqq a$.

## 二自變數之函數

1039 **二變數之函數** 若二變數 $x$ 及 $y$ 每取一組值，變數 $u$ 即有一定值或一組定值與之對應，則稱 $u$ 爲 $x$ 及 $y$ 之函數．

本書所論，以對應於 $x, y$ 之各組值，$u$ 祇取一個值者爲限．

記號 $u=f(x, y)$ 即 $u$ 爲 $x$ 及 $y$ 之函數之意，又 $f(a,b)$ 爲 $x=a$, $y=b$ 時 $u$ 所取之值之意．

例如，若 $u=f(x, y)=x^2-2y+1$，$u$ 爲 $x$ 及 $y$ 之函數．則 $x=1, y=2$ 時，$u=f(1, 2)=1-4+1=-2$.

§1022 末之附註，加以必要之變更 (mutatis mutandis)，在此仍適用．

1040 **二變數函數之綿續性** 令 $f(x, y)$ 指示 $x$ 及 $y$ 之與函數．若 $f(a,b)$ 有一定之有窮值，且 $x$ 及 $y$ 若各趨近 $a$ 及 $b$ 爲極限時，$f(x,y)$ 將趨近 $f(a,b)$ 爲極限，則稱 $f(x, y)$ 爲於 $a, b$，即，$x=a, y=b$ 時，爲綿續者．

在相反之情形，稱 $f(x, y)$ 於 $a, b$，即，$x=a, y=b$ 時，爲不綿續者．

由上之定義及 §189，直接可知

$f(x,y)$於$a,b$為綿續者,其充分兼必要條件,為$f(a,b)$有一定之有窮值,及對於每一可指定之正數$\delta$,必能求得一對應正數$\epsilon$,俾 1041

$$|x-a|<\epsilon,\ |y-b|<\epsilon\text{時},\ |f(x,y)-f(a,b)|<\delta.$$

**定理一** 若二函數$f(x,y)$及$\phi(x,y)$於$a,b$皆為綿續者,則$f(x,y)\pm\phi(x,y)$及$f(x,y)\cdot\phi(x,y)$亦為綿續者,又除$\phi(a,b)=0$外$f(x,y)/\phi(x,y)$亦然. 1042

若$f(x,y)$於$a,b$為綿續者,則$\sqrt[n]{f(x,y)}$亦然.

本定理直接可從§1040及§§203–205知之.

**數之區域 (Number regions)** 此後$x$及$y$專指實變數,又$f(x,y)$專指此等變數之實函數(比較§1027) 1043

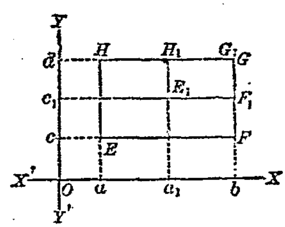
如§382中所顯示,$x$及$y$之各組值得以平面上之點表之.若用此法畫出直線之為方程式$x=a, x=b, y=c, y=d$之圖象者,§384,顯見此等直線所圍成之矩形,含適合$a\leqq x\leqq b, c\leqq y\leqq d$之$x,y$各組值之圖象.記取此矩形,可命上述$x,y$之各組值所成之集為數之區域$(a,b;c,d)$.

若對於在區域$(a,b;c,d)$內之$x,y$各組值,$f(x,y)$皆為綿續者,則稱$f(x,y)$徧歷區域$(a,b;c,d)$為綿續者. 1044

**定理二** 若$f(x,y)$徧歷區域$(a,b;c,d)$為綿續者,則在此區域內必有一極大值及一極小值. 1045

因$f(x,y)$徧歷$(a,b;c,d)$為綿續者,其在此區城內之值具有窮上限及下限,§§1032,1040.命此二限為$\lambda$及$\mu$.

今所應證明者,在$(a,b;c,d)$內有一組值$x_0,y_0$存在能使$f(x_0,y_0)=\lambda$;同理,又有一組值$x_1,y_1$存在,能使$f(x_1,y_1)=\mu$.




作矩形 $EFGH$ 以示數之區域 $(a,b;c,d)$,§1043.又,$f(x,y)$ 之值對應於 $(a,b;c,d)$ 內 $x,y$ 之各組值者,可簡言"$f(x,y)$ 在 $EFGH$ 內之值".

將 $EFGH$ 分爲四個相等矩形如圖.此四個小矩形,$f(x,y)$ 之諸值至少在其一之內者.顯然仍以λ爲上限.可命此四小矩形之一爲 $E_1F_1G_1H_1$.

用處理 $EFGH$ 之法,以處理新矩形 $E_1F_1G_1H_1$,循是以往,行之無窮,如此即得一無盡列爲矩形中之矩形層層相因以組成者如下: $EFGH,\ E_1F_1G_1H_1,\ \cdots\cdots,\ E_nF_nG_nH_n,\ \cdots\cdots,$ (1)

$f(x,y)$ 在以上各矩形內之值,皆以λ爲上限.

令 $E_n$ 之橫標爲 $a_n$,其縱標爲 $c_n$.如§1030中所證,$n$ 無限增大時,$a_n$ 及 $c_n$ 趨近一定極限.

若 $\lim a_n=x_0$, $\lim c_n=y_0$,則 $f(x_0,y_0)=\lambda$.

設或不然,令 $$\lambda-f(x_0,y_0)=\alpha. \quad (2)$$

因 $f(x,y)$ 於 $x_0,y_0$ 爲綿續者,故得選擇 $E_nF_nG_nH_n$,令對於在此矩形內 $x,y$ 之各組值,§1041,可得

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\alpha/2. \quad (3)$$

又因λ爲 $f(x,y)$ 在 $E_nF_nG_nH_n$ 內之值之上限,故可在 $E_nF_nG_nH_n$ 內及(3)中選擇 $x,y$,以使

$$\lambda-f(x,y)<\alpha/2. \quad (4)$$

由(3)及(4)可知 $$\lambda-f(x_0,y_0)<\alpha. \quad (5)$$

然(5)與(2)矛盾.故(2)不能成立,故 $f(x_0,y_0)=\lambda$,如所欲證者.

# 代數學之基本定理

今可證凡有理整方程式必有一根(§ 797)矣.其程序如下.

**定理**　已與 $\phi(z)=1+bz^m+cz^{m+1}+\cdots\cdots+kz^n$,其中 $b,c,\cdots\cdots,k$ 指示常數,爲實數或爲複素數皆可,而 $z$ 爲複變數;則必常可擇 $z$,俾 $|\phi(z)|<1$. 1046

何則,令以絕對值及幅角表 $z$ 及 $b$ 之式(§ 877)爲

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),\quad b=|b|\cdot(\cos\beta+i\sin\beta).$$

則　$$bz^m=\rho^m|b|\cdot[\cos(m\theta+\beta)+i\sin(m\theta+\beta)].\qquad §§ 879, 881$$

先擇 $\theta$,俾　$$m\theta+\beta=\pi.\qquad (1)$$

則因　$$\cos\pi=-1 \text{ 而 } \sin\pi=0.\qquad §§ 877, 878$$

卽得　$$bz^m=\rho^m|b|\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=-\rho^m|b|.$$

次擇 $\rho$,俾,§ 854,　$$|c|\rho^{m+1}+\cdots\cdots+|k|\rho^n<|b|\rho^m<1.\qquad (2)$$

若 $z_0$ 指示與如此擇定之 $\theta$ 及 $\rho$ 之值對應之 $z$ 之值,則 $|\phi(z_0)|<1$.

何則,因　$$\phi(z_0)=(1-\rho^m|b|)+cz_0^{m+1}+\cdots\cdots+kz_0^n,$$

由 § 235,卽得

$$|\phi(z_0)|\leqq 1-\rho^m|b|+|c|\rho^{m+1}+\cdots\cdots+|k|\rho^n,\ \therefore\ <1.\qquad \text{依 (2)}$$

**系**　已與函數 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$;若 $z=b$ 時 $f(z)$ 不爲 0,則必可擇 $z$,俾 $|f(z)|<|f(b)|$. 1047

何則,於 $f(z)$ 中置 $z=b+h$,而依泰羅定理(§ 848)展開之,$z=b$ 時,$f(z),f'(z)$,等導來函數,其中容或有爲 0 者,然決不能盡爲 0,以 $f^{(n)}(z)=n!a_0$ 也.令 $f^{(m)}(z)$ 指示不爲 0 之第一導來函數.

則 $$f(b+h)=f(b)+f^{(m)}(b)\frac{h^m}{m!}+\cdots\cdots+f^{(n)}(b)\frac{h^n}{n!},$$

從而 $$\frac{f(b+h)}{f(b)}=1+\frac{f^{(m)}(b)}{f(b)}\cdot\frac{h^m}{m!}+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(b)}{f(b)}\cdot\frac{h^n}{n!}.$$

末一方程式之右端,爲$h$之多項式,呈§1046中所述之形式,故必可擇$h$,俾$|f(b+h)/f(b)|<1$,從而$|f(b+h)|<|f(b)|$.

1048 **定理** 已與$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$;則必有一個$z$之值存在,能使$f(z)$爲0.

何則,於$f(z)$中置$z=x+iy$,其中$x$及$y$取實值.藉助於二項定理,展開$a_0(x+iy)^n$, $a_1(x+iy)^{n-1}$, ……,而於其結果中分別類集諸實項及諸虛項.如此即將$f(z)$化爲$f(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$之形式.其中$\phi(x,y)$及$\psi(x,y)$指示$x,y$之實多項式,故得(§232)

$$|f(z)|=[\phi(x,y)^2+\psi(x,y)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

依§855,吾人能求得一正數,如$c$,俾$f(z)=0$若有根時,其根數值上皆小於$c$.又若$c'=c/\sqrt{2}$,則$|z|$,即$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$,對於適合$-c'<x<c'$, $-c'<y<c'$之$x,y$各組值,顯然小於$c$.

然在數之區域$(-c',c';\ -c',c')$內,$[\phi(x,y)^2+\psi(x,y)^2]^{\frac{1}{2}}$一式爲$x$及$y$之綿續函數,§1042.故此式(譬如)當$x=x_0, y=y_0$時在此區域內必有一極小值,§1045.

若$z_0=x_0+iy_0$,則$|f(z_0)|=[\phi(x_0,y_0)^2+\psi(x_0,y_0)^2]^{\frac{1}{2}}=0$.

蓋因$|f(z_0)|$爲$|f(z)|$之極小值,吾人不能使$|f(z)|<|f(z_0)|$故$|f(z_0)|=0$,因非然者,吾人必可擇$z$,俾$|f(z)|<|f(z_0)|$也,§1047.

故$z=z_0$時,$|f(z)|$爲0,從而$f(z)$亦爲0,即,$z_0$爲方程式$f(z)=0$之一根.

# 答　案

## I.　第83頁

1. 七，四，八，十，十七.　　　2. 七

3. $n=7,\ a_0=3,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=-4,\ a_4=1,\ a_5=a_6=0,\ a_7=-12.$

4. $f(0)=3,\ f(-1)=0,\ f(3)=48,\ f(8)=963.$

5. $f(0)=2/5,\ f(-2)=12,\ f(6)=20/17.$

6. $f(1)=5,\ f(4)=9,\ f(5)=8+\sqrt{5}.$

7. $f(x-2)=2x-1,\ f(x^2+1)=2x^2+5.$

8. $f(0,0)=8,\ f(1,0)=10,\ f(0,1)=7,\ f(1,1)=9,\ f(-2,-3)=1.$

## II.　第90頁

1. $2x^2y(b-a).$　2. $a^2+a+b^2.$　3. $-9.$　4. $-4a^3-4a^2b-21ab^2+11b^3$

5. $-a+3b-7c.$　6. $x^3+4x^2+5x-2.$　7. $b^3-\ a^2b$

8. $y^3+3y-1.$　9. $-10a+24b.$　10. $8x+11.$

11. $-5a+5b+9c.$　12. $2y-4x-2z.$　13. $x^3-x^2-8x-12.$

14. $-x^4+9x^2+y^2+x-3y\quad 7.$

## §316.　第97頁

1. $a^2+b^2+4c^2+9d^2-2ab+4ac-6ad-4bc+\ bd-12cd.$

2. $1+4x+10x^2+12x^3+9x^4.$

3. $x^6-2x^5y+3x^4y^2-4x^3y^3+3x^2y^4-2xy^5+y^6.$

## III.　第98頁

1. $6x^7-13x^6+7x^5+15x^4-34x^3+35x^2-21x+5.$

2. $15x^5-14x^4a-x^3a^2+7x^2a^3-5xa^4-2a^5.$

3. $x^6-y^6.$　　4. $6x^6-4x^5-9x^4+35x^3-1\ x^2-21x+35.$

5. $28x^2-43xy+10y^2$. 6. $a^2b+(a^2-ab+b^2)x-ax^2-x^3$.

7. $x^6-2x^5+9x^4-10x^3+17x^2-6x$. 8. $2x^{2n-2}-2x^{2n-3}-3x^{2n-4}+8x^{2n-5}-5x^{2n-6}$.

9. $a^4-a^2b^2+6ab^3-9b^4$. 10 $x^2-9y^2-4z^2+12yz$.

11 $x^3-y^3-3xy-1$ 12. $a^3+b^3-c^3+3abc$.

13. $3x^2-14xy+8y^2+23x-32y+30$. 14. $2x^2+7y^2+24z^2+15xy-59yz-14zx$.

15. $b^4-x^4$. 16. $x^8+x^4+1$.

17. $2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$.

18. $1+1+1$, $1+2+3+2+1$, $1+3+6+7+6+3+1$,
$1+4+10+16+19+16+10+4+1$.

19. $1+5+10+10+5+1$
$1+6+15+20+15+6+1$
$1+7+21+35+35+21+7+1$
$1+8+28+56+70+56+28+8+1$
$1+9+36+84+126+126+84+36+9+1$
$1+10+45+120+210+252+210+120+45+10+1$.

20. $16x^2-24xy+9y^2$, $64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$.

21. $x^2+4y^2+9z^2+16u^2+4xy+6xz-8xu+12yz-16yu-24zu$

22. $x^3+8y^3+27z^3+6x^2y+12xy^2+9x^2z+27xz^2+36y^2z+54yz^2$
$+36xyz$, $x^3+8y^3-27z^3+6x^2y+12xy^2-9x^2z+27xz^2-36y^2z$
$+54yz^2-36xyz$.

23. $a^4-8a^2b^2+16b^4$

24. $a_0b_{17}+a_1b_{16}+\cdots\cdots+a_{17}b_0$ $a_{12}b_{19}+a_{13}b_{18}+\cdots\cdots+a_{27}b_4$.

25. $-4$, $-14$, $-55$.

27. $32a^{10}x^{15}y^{35}$, $-x^{35}y^{56}z^{63}$, $a^{4n}b^{2mn}c^{6n}$; $a^{mn}b^{n^2}c^{2n^2}$.

28. $a^{12}b^4c^{18}$, $-8a^2x^{16}y^{31}$.

## IV. 第101頁

1. $3a^2/2b$. 2. $-3y^4z/4ax^5$. 3. $-5x^m/4y^m$.

4. $2a^7b^3/c$. 5. $xy/(x+y)$. 6. $(x^2+xy+y^2)(x+y)$.

7. $(a-b)(b-c)(c-a)$. 8. $-6abc+5a^2c^2-4a^3b^2c^4$.

9. $3(x-y)^2-2(x-y)+5$. 10. $6a^7b^3c$.

11. $a^3$. 12 $-2ax^2/y^3$.

## V. 第110頁

1. $-1/2$. 2 $-2$. 3. $-5/2$ 4. $16$.

5. 6.　　6. 1.　　7. 5.　　8. $-13/4$.

9. $-39/5$.　　10. 779/1439.　　11. $(4a+5b)/3(b+c)$.

12. 1.　　13. $a$.　　14. $(a+b)/a$.

15. $(m-n)/(m+n)$.　　16. $1/2, 1/3, -1/4, -2/5$.　　17. 0, 1, 14.

18. 0, 8/3.　　19. $c/b$, 0.　　20. 1, 1, 2.

## VI. 第114頁

1. 68.　　2. 14.　　3. 26及324.

4. 84.　　5. 5.　　6. 40及10；5年後.

7. 2小時及24分.　　8. $A$, 2[illegible]日；$B$, $16\frac{2}{3}$日.

9. 8時$43\frac{7}{11}$分；8時$10\frac{10}{11}$分.

10. $5\frac{5}{11}$分鐘.　　11. 每小時30秒.

12. $A$. 540圓, $B$. 360圓, $C$. 240圓, $D$. 160圓.

13. 42 000圓.

14. 576平方尺.　　15. 80尺.

1 . 一圓銀幣5枚,半圓銀幣10枚,一角銀幣15枚.

17. 6%者3750圓. 4%者1250圓.

18. 以比2:3.　　19. $\frac{1}{3}$磅.

20. 第一次一加侖,第二次二加侖,原液含酒精60%.

21. 二列車在11:$12\frac{4}{13}$時相會,離澤稷$35\frac{10}{13}$哩.

22. 一爲每小時60哩,一爲36哩,在上午11:15相會.

23. 250.　　24. 金57兩,銀330兩.

25. 28圓.　　26 75平方寸.

27. 單位數字爲$(9a+b)/18$, 十位數字爲$(9a-b)/18$.

28. 距今$(bc-a)/(1-c)$歲

## VII. 第122頁

1. $x=37, y=25$.　　2. $x=10, y=7$　　3. $x=3, y=-2$.

4. $x=5, y=-7$.　　5. $x=1/3, y=1/2$.　　6. $x=4, y=6$.

7. $x=-3/20, y=4/5$.　　8 $x=5/2, y=1$.　　9. $x=-2, y=1$.

10. $x=(a^2+b^2)/(a+b)+2,\ y=(a^2+b^2)/(a+b)$.

11. $x=cq/(aq+bp),\ y=cp/(aq+bp)$.

12. $x=a+b, y=a-b$.　　13. $x=10, y=8$.　　14. $x=-1, y=1/2$.

15. $x=(bc'+b'c)aa'/(ab'+a'b)cc',\ y=(ac'-a'c)bb'/(ab'+a'b)cc'$.

16. $x=y=ab/(a+b-ab)$.

## VIII.　第124頁

1. $x=48,\ y=-32/7$.
2. $x=1/5,\ y=2$.
3. $x=2,\ y=3$.
4. $x,\ y=0,\ 1/2;\ 0,\ 2;\ 1,\ 0;\ -2/3,\ 0$.
5. $x,\ y=1,\ 1;\ -5/3,\ 0$.
6. $x,\ y=0,\ 5/2;\ 5/3,\ 5/3;\ -5,\ 5$.
7. $x,\ y=1,\ 3;\ 2,\ 2$.
8. $x,\ y=2,\ 1;\ -4,\ 5$.
9. $x,\ y=-1/3,\ 4/3;\ -3,\ 2;\ -3/5,\ 8/5;\ -7/5,\ 2/5$.
10. $x,\ y=-3,\ 1;\ 2,\ 2;\ -2,\ -1;\ 4,\ -3$.

## X.　第134頁

1. $x=5,\ y=6,\ z=7$.
2. $x=1,\ y=-3,\ z=3$.
3. $x=5,\ y=2,\ z=2$.
4. $x=-7,\ y=-1,\ z=-3$.
5. $x=33/5,\ y=22/5,\ z=11/10$.
6. $x=1,\ y=-1,\ z=7$.
7. $x=1/8,\ y=1/7,\ z=1$.
8. $x=2,\ y=3,\ z=5,\ u=-4$.
9. $x=0,\ y=4,\ z=-3,\ u=0$.
10. $x=\dfrac{l-m+n}{2c},\ y=\dfrac{l+m-n}{2b},\ z=\dfrac{-l+m+n}{2a}$.
11. $x=\dfrac{mnd}{amn+bnl+clm},\ y=\dfrac{nld}{amn+bnl+clm},\ z=\dfrac{lmd}{amn+bnl+clm}$.
12. $x=-12,\ y=-8,\ z=-4$.
13. $(x-y-3)+(y-z+5)+(z-x-2)=0$.
14. $2(3x-8y+7z-10)+5(2x+5y-3z-12)-(16x+9y-z-80)=0$.

## XI.　第136頁

1. 5, 6, 9.
2. 33, 14, 4.
3. 87.
4. A, 460 圓; B, 600 圓.
5. A, $(p-q+r)/2$; B, $(p+q-r)/2$; C, $(-p+q+r)/2$.
6. 2345 圓, $4\frac{1}{2}$%.
7. 15,500 圓.
8. 12 平方吋.
9. A, 27 圓; B, 13 圓.
10. A, 12 日; B, 9 日; C. 8 日.
11. 每秒 18 呎及 12 呎.
12. 每小時 20 哩及 16 哩.
13. A, 每小時 15 哩; B, 每小時 10 哩.
14. 10[illegible] 碼.
15. A, 每秒 7[illegible] 碼. B. 每秒 7 碼.
16. 100 磅.
17. A, 1/3, B, 11/3; C, 5.
18. A, 含 64%; B, 含 32%.

19. 聲浪之速度,每秒 1100 呎;彈丸則每秒 $1447\frac{7}{11}$ 呎.

20. 水槽之容量 18,000 加侖. 每分鐘通過 $A$ 者 300 加侖, 通過 B 者 200 加侖,通過 C 者 600 加侖.

## XII. 第 139 頁

1. $3(x-2)^3+17(x-2)^2+34(x-2)+19$.
2. $(2x+3)^2-2(2x+3)+4$.
3. $f(x)=43x^2/24-8x+29/24$.
4. $f(x)=3x^3+x+5$.
5. $f(x, y)=2x-8y+4$.
6. $2x+y-7=0$.
7. 否.
8. $x+3y-11=0$.
9. $c=3$.
10. $2x-5y+11=0$, 及 $4x-y-5=0$.
11. $x^3-2x^2-5x+6=0$.
12. $x^2+xy-x-4y=0$.
13. $3x+2y-3=-(x+y-1)+(2x-y+2)+2(x+2y-3)$.

## § 401. 第 143 頁

2. $Q=x^2+3$, $R=-4x+4$.

## § 404. 第 145 頁

2. $Q=3x^3+5x^2-11x/2+9/4$, $R=-9x/4+5/2$.

## § 405 第 146 頁

2. $l=-11$, $m=-6$

## § 408 第 148 頁

2. $2-x+6x^2-7x^3+13x^4$.

## § 409. 第 148 頁

2. $2x+3y-1$

## XIII. 第 149 頁

1. $Q=2x^2-3x+4$, $R=2x+4$.
2. $Q=3x^2-8x+5$, $R=0$.
3. $Q=2x^3-x^2+3x-5$, $R=20$.
4. $Q=4x^4-x^2-x+3$, $R=-2x^2+4x-8$.
5. $Q=2x+3$, $R=6x-11$.
6. $Q=2x^2-3x+6$, $R=-12x^2+24x-17$.

7. $3x^3-5x^2-7x+12=(x-2)(3x^2+x-5)+2.$

8. $a=-3/2,\ b=-3/2.$ 9. $a=-2,\ b=5.$

10. $Q=x^4+x^2+1,\ R=0.$ 11. $Q=2x-y+3,\ R=0.$

12. $Q=a-b+2c,\ R=0.$ 13. $Q=a+b-c,\ R=0.$

14. $Q=x^2+ax+2a,\ R=0.$ 15. $Q=4x^2+6xy+9y^2,\ R=0.$

16. $Q=x^3+x^2y+xy^2-3y^3,\ R=0.$ 17. $Q=3a^3+2a^2b-ab^2+4b^3,\ R=0.$

18. $Q=x^2-yx/2+3y^2/4,\ R=y^3/4.\ Q'=y^2-xy+2x^2,\ R'=-2x^3.$

19. $Q=1-4x+6x^2,\ R=6x^3-18x^4$

20. $Q=1+4x+10x^2,\ R=10x^3+50x^4.$

21. $1+2x+4x^2+8x^3.$ 22. $2-5x+5x^2-5x^3.$

## § 412. 第 152 頁

3. $Q=5x^4+15x^3+44x^2+132x+397,\ R=1193.$

4. $Q=x^2+3x+2,\ R=0.$ 5. $Q=x^2+4,\ R=0.$

## § 414. 第 153 頁

2. $f(2)=48,\ f(-2)=96,\ f(4)=756,\ f(-2/3)=112/9.$

## XIV. 第 156 頁

1. $Q=x^3+x^2+3x+1,\ R=0.$

2. $Q=5x^4+9x^3+19x^2+64x+198,\ R=597.$

3. $Q=3x^3-6x^2+13x-26,\ R=51.$

4. $Q=x^2+5x-6,\ R=0.$ 5. $Q=x^2-5x/3-2/9,\ R=16/9.$

6. $Q=x^2-(b+c)x+bc,\ R=0.$ 7. $Q=2x^3+3x^2y-xy^2+5y^3,\ R=0.$

8. $f(1)=0,\ f(2)=9,\ f(5)=228,\ f(-1)=6,\ f(-3)=-36,\ f(-6)=-399.$

9. $m=3.$ 10. $l=-22,\ m=-24.$ 13. $2x^3-6x^2-12x+16.$

14. $5x^3-24x^2+25x+6.$

## XV. 第 158 頁

1. $(x^2+1)^2+(x-2)(x^2+1)-x.$ 2. $(2x^2+1)^2+x(2x^2+1)+5.$

3. $(2x+1)(x^3-x^2+x+3)^2-(2x^2+8x)(x^3-x^2+x+3)+(6x^2-3).$

4. $(x-2y)(x^2+xy+y^2)^2+(2x+3y)y^2(x^2+xy+y^2)-2xy^4.$

5. $2(x-3)^3+10(x-3)^2+7(x-3)-9.$

6. $(x+2)^5-7(x+2)^4+10(x+2)^3+30(x+2)^2-99(x+2)+85.$

7. $(x+3)^3-27$.　　8. $(x+1)^3-2(x+1)$.

## XVI. 第162頁

1. $2x^2y^3(3x^2z^2-6yz+4)$.　　2. $3n(n-1)$.　　3. $(a+1)(b-1)$.
4. $(m-n)(x-n)$.　　5. $(3y-2)(x-4)$.　　6. $(2x+y)(5y+3)$.
7. $xy(x-y)(xy+2)$.　　8. $x(x+1)(x^2+1)$.　　9. $(a-b)(c-d)$.
10. $a(c+d)(a-b)$.　　11. $(d+e)(a+b+c)$.　　12. $(a+d)(a-b+c)$.

## §435. 第163頁　例3

1. $(x+7)^2$　　2. $(3-a)^2$.　　3. $(3xy+5)^2$.
4. $(x-2y+3)^2$.　　5. $(8a^4-3)^2$.　　6. $(a-b+c)^2$.

## §436. 第163頁

1. $(x^2+y^3)(x^2-y^3)$.　　2. $6a(a+b)(a-b)$.
3. $3ax(2ax+5y)(2ax-5y)$.　　4. $(5x^n+7x^m)(5x^n-7x^m)$.
5. $(6x^2+1)(\sqrt{6}x+1)(\sqrt{6}x-1)$.　　6. $(x^2+xy-y^2)(x^2-xy-y^2)$.

## §438. 第164頁

1. $(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$.　　2. $(3x+1)(9x^2-3x+1)$.
3. $(4x^2+9y^2)(2x+3y)(2x-3y)$.

## §439. 第165頁

1. $(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)(x^2-\sqrt{2}xy+y^2)$.　　2. $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.
3. $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$.

## XVII. 第166頁

1. $xy(2x-5y)^2$.　　2. $7t(2x+3y)(2x-3y)$.
3. $(x-2y+3z)^2$.　　4. $45(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$.
5. $48x(x+1)^2(x-1)$.　　6. $(2+a+2b)(2-a-2b)$.
7. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.　　8. $(a^2+2ab-b^2)(a^2-2ab-b^2)$.
9. $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$.　　10. $(3x^2+3xy+4y^2)(3x^2-3xy-4y^2)$.
11. $(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$.
12. $9y^3(2x+y^2)(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)(4x^2-2xy+y^4)$.
13. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$.

14. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+x^4)$.

15. $(x^2+y^2)(x^8-x^6x^2+x^4y^4-x^2y^6+y^8)$.

16. $(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$.

17. $(x+y^2)(x^6-x^5y^2+x^4y^4-x^3y^6+x^2y^8-xy^{10}+y^{12})$.

## XVIII. 第167頁

1. $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)$.
2. $(x+1)(x-1)(x-2)(x^2+2x+4)$.
3. $(x+1)(x-1)^3$
4. $(x+2)(x-2)(x-7)$.
5. $(x+y)^2(x-y)^2(x^2+y^2)$.
6. $(x+1)(x^2+x+2)$.
7. $(x+1)(x^4+x^3+2x^2+x+1)$.
8. $(x^2+2x+3)^2$.

## § 442. 第168頁 例4

1. $(x+1)(x+2)$.
2. $(x-1)(x-15)$.
3. $(x+2)(x-6)$.
4. $(x+6)(x-5)$.
5. $(x+5)(x+12)$.
6. $(x-5)(x-16)$.

## § 443. 第168頁 例4

1. $(3x-2)(2x-3)$.
2. $(x+3)(5x-1)$.
3. $(2x+1)(7x-3)$.
4. $(3x+1)(6x+5)$.
5. $(7x+4)(7x+11)$.
6. $(ax+b)(bx-c)$.

## § 444. 第170頁 例4

1. $(x+5+\sqrt{2})(x+5-\sqrt{2})$.
2. $(x-4)(x-6)$.
3. $(x-6+3i)(x-6-3i)$
4. $[x+(1+\sqrt{3}i)/2][x+(1-\sqrt{3}i)/2]$.
5. $2[x+(3+\sqrt{7}i)/4][x+(3-\sqrt{7}i)/4]$.
6. $(x-2b)(x-4a+2b)$.

## § 445. 第170頁 例2

1. $(x+y)(x+4y)$.
2. $\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}y\right)$.

## § 446. 第171頁

2. $(2x-y+z)(x-3y+2z)$.

## XIX. 第171頁

1. $(x-6)(x-8)$.
2. $[x-(21+\sqrt{921})/2][x-(21-\sqrt{921})/2]$.

3. $(x-11)(5x+2)$.

4. $(4x+7)(4x+9)$.

5. $(6x-1)(9x-2)$.

6. $4(x+2y)(3x-y)$.

7. $(x+2)(x+3)(x-2)(x-3)$.

8. $xy(x+\ y)(x-6y)$.

9. $[x-(3+\sqrt{3}i)/2][x-(3-\sqrt{3}i)/2]$

10. $3[x+(1+\sqrt{10})/3][x+(1-\sqrt{10})/3]$.

11. $[x-(2+\sqrt{6})y][x-(2-\sqrt{6})y]$.

12. $(x+3b)(x-6a-3b)$.

13. $(ax+a-b)(bx-a-b)$.

14. $[(1+c)x+b][x+d]$.

15. $(x-3y-1)(x-5y+2)$.

16. $(x+y+2z)(x+2y+z)$.

## XX 第175頁

1. $(x-1)(x-2)(x+3)$.

2. $(x+1)(x+2)(x+3)$.

3. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

4. $(x-1)(x+2)(x^2-x+1)$.

5. $(x-3)(2x+1)(3x+1)$.

6. $[x-(1+\sqrt{3})y][x-(1-\sqrt{3})y](2x-y)$.

7. $(x-1)^3(2x+5)$.

8. $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)(2x+1)(2x-1)$.

9 $(x+2)(2x+1)(3x+2)(x^2+1)$.

10. $(x+1)(x-1)(x-2)(5x-2)(x^2+x+1)$.

11. $x=-2$, [illegible].

12. $x=1/2,\ 2/3$

13. $x=7,\ -2$.

14. $x=-3\pm\sqrt{11}$.

15. $x=2,\ 3,\ 4$.

16. $x=1,\ 1,\ -1,\ -3$.

17. $x=1,\ (-1\pm\sqrt{3}i)/2$.

18. $x=1,\ 2/5,\ -1/$[illegible].

## XXI. 第175頁

1. $(3x-2)(2y+5)$.

2 $(ac-bd)(ab-cd)$.

3. $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$.

4. $a(a+3b)(a-3b)(a^2+9b^2)$.

5. $ab(a-b)(a+b)^2$.

6. $(2ax+y)(bx-2y)$.

7. $3(x+2y)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$.

8. $(x-1)(x+2)(x^4+2x^3+3x^2+2x+4)$.

9. $y^3(2x+y^2)(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)(4x^2-2xy^2+y^4)$.

10. $(x-a)(x+b)$.

11. $(x^n+3)(x^n-6)$.

12. $-(x+6)(x-7)$.

13 $3(x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$.

14. $(x+2)(x+3)(x-3)(x^2+2x+4)$.

15. $(x+a+b+c)(x-a-b+c)$.

16. $(x+2)(x+4)(x-2)(x-4)$.

17. $(a-b-2)(a-b-3)$.

18. $(x+y)(x+3y)(x-y)(x-3y)$.

19. $(2x+y)(3x-5y-2)$.

20. $(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$.

21. $(-x+y+z+u)(x-y+z+u)(x+y-z+u)(x+y+z-u)$.

22. $(2x+3)(7x-1)$.

23. $(1+22y)(1-3y)$.

24. $xy(y+4x)(y+51x)$.

25 $(a+3bc)^2(a-3bc)^2$.

26. $x(x-1)(x-6)(x-7)$.
27. $(5y-x)(7y^2-10xy+1)x^2)$.
28. $(x+y)(x-y)^3$.
29. $(x+a)(x+a-b)$.
30. $5xy(x-y)(x^2-xy+y^2)$.
31. $(x+1)^2(x-1)^3$.
32. $(b^2+b+1)(b^2-b+1)$
33. $(2x+y-1)(x+3y+5)$.
34. $(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$.
35. $(x+y+3z)(x-2y+z)$.
36. $(2a^2+3ab+3b^2)(2a^2-3ab+3b^2)$.
37. $(x+5b)(x-8a-5b)$.
38. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.
39. $4x^2(2x-1)$.
40. $(a+b)(a-b)(x+y)(x-y)$.
41. $(x-a)(x+b)(x-b)$.
42. $(x-a)(x+b)(x^2+ax+a^2)$.
43. $(a+3b-2c)(a-3b+2c)$
44. $(2a+1)^3$.
45. $(x^2-x+1)^2$.
46. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.
47. $(x+1)(x+3)(x-3)(2x+1)(2x-1)$.
48. $(x-1)^2(x^2+2x+3)$.
49. $(x+2a+b)(x+2a-b)$.
50. $(x+2)(3x-2)(5x+3)$.
51. $(cx+ab)(abx+c)$.
52. $(x+a)(x-2a)(2x+a)$.
53. $(x+1)[(a-b)x+(a+b)]$.
54. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
$(x^8-x^7y+x^5y^3-x^4y^4+x^3y^5-xy^7+y^8)$.
55. $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$.
56. $(x-1)(2x+1)^2$.
57. $(x-1)(x-4)(3x+2)(x^2+x+1)$.
58. $(x-2)(x+3)(x+4)(5x-1)$.
59. $(ab+c+d)(ac-d)$.
60. $(x+y+z)(x-y-z)(-x+y-z)(-x-y+z)$.

## § 459　第 177 頁　例 2

1. $x^3y^2$.　2. $x+y$.　3. $x+2$.　4. $(x-2)(x-3)$.

## § 460　第 178 頁　例 3

1. $x+3$.　2. $(x+2)(x+3)$　3. $(x-1)(x-3)^2$.

## § 462.　第 179 頁　例 3

1. $x-2$.　2. $x+4$.

## § 468.　第 183 頁

2. $2x^2+x+1$.

## XXII.　第 184 頁

1. $x^3y^3$.　2. $(a+b)(a-b)$.　3. $y^2-y+1$.

| | | |
|---|---|---|
| 4. $a+1$. | 5. $x-1$. | 6 $x^2+y^2$. |
| 7. $x+2$. | 8. $(x-1)(x-2)$. | 9. $x^2+x+1$. |
| 10. $(x+1)^3$. | 11. $(x-1)(x-2)^2$. | 12. $x+2$. |
| 13. $x^2+x+1$. | 14. $x^2+x-6$. | 15. $x^3+x^2-x-1$. |
| 16. $3x-7$. | 17. $3x+5$. | 18. $x(6x^2+7x-3)$. |
| 19. $2x^2-x+3$. | 20. $2x^3-4x^2+x-1$. | 21. $x^2+x+1$. |
| 22. $x+2$. | 23. $x^2-3$. | 24. $y(x-2y)$. |
| 25. $(x-1)(x+3)$. | 26. $(2x-3)^2(x+1)$. | |

## XXIII. 第187頁

1. $(9x^2+1)(9x^2-1)$　2. $(a^5+b^5)(a^5-b^5)$.　3. $a^3(a+1)(a^3-1)$.
4. $(x-y)^4(x+y)^2(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)$.　5. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
6. $(x+y+z)(x-y-z)(-x+y-z)(\ x-y+z)$.
7. $(2x-3y)(x+3y)(3x-y)$,　8. $(x+1)(x-1)(x^2+1)$.
9. $(a^2+xy)(2x+3y)(2x-3y)$.　10. $x(2x+3y)(2x-3y)(2x-y)(4x+5y)$.
11. $(x^3+y^3)(x^3-y^3)$.　12. $(x^2-1)(x^4+x^2+1)(3x-5)(x^2+1)$.
13. $(2x+3)(4x^2-6x+9)(4x^2+6x+9)(3x-2)$.
14. $(x^2+4a^2)(x+2a)(x-2a)$.　15. $x(x+2)(x+b)(x-b)(x+a)$.
16. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(2x-5)$.
17. $(x-2)(x^2+2x+4)(3x+1)(9x^2-3x+1)(2x+1)(x^2+x+1)$.
18. $(x-1)(x-2)(x-3)(x+3)(2x-1)$.
19. $(2x^4-x^3+10x^2+4x+5)(x^2+x+1)(x^2+3)$.
20. $(2x^4+3x^3-4x^2+13x-6)(x+1)^2$.

## § 491. 第191頁

Ex. $m=5,\ n=-14$.

## XXIV. 第194頁

| | | |
|---|---|---|
| 1. $xy(x+2y)$. | 2. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$. | 3. $\dfrac{x+3}{x+9}$. |
| 4. $\dfrac{x-3}{x+2}$. | 5. $\dfrac{3(x-3b)}{2(x+3b)}$. | 6. $\dfrac{5x+a}{5x-3a}$. |
| 7. $\dfrac{(x+5)(x-5)}{(x+3)(x-2)}$. | 8. $\dfrac{3x-5}{2x-3}$. | 9. $\dfrac{1}{x^2-y^2}$. |
| 10. $\dfrac{x-y+z}{x+y-z}$. | 11. $1-y^2$. | 12. $\dfrac{m-6n}{3m-n}$. |

13. $\frac{2x^2+5x-12}{2x^2+x-15}$. 14. $\frac{x-1}{2x+1}$. 15. $\frac{x^2+4}{2(x^2+6)}$.

16. $\frac{x-3}{x^2+2x+4}$. 17. $\frac{x^2-2bx+c^2}{x^2+2bx-c^2}$. 18. 3.

## XXV. 第199頁

1. $\frac{2}{2a+3b}$. 2. $\frac{x^3-x^2+2x-1}{(x^3+1)(x-1)}$. 3. $\frac{3}{(x-1)(x-3)}$.

4. $\frac{3x^2-11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. 5. $\frac{2x(b^2-c^2)}{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}$. 6. 0.

7. $a$. 8. $-\frac{8x^2+6x-9}{8x^3-27}$. 9. 4.

10. $3a^2+3b^2+3c^2+4ab+4ac+4bc$. 11. $\frac{7}{x^2-x-3}$.

12. $\frac{2}{x^4-4x^2-x+2}$ 13. $\frac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3}$. 14. $a^3+1$.

15. $\frac{x+1}{x-1}$. 16. $\frac{2x-3}{x(x+1)}$ 17. $\frac{x^3}{x+a}$.

18. $x^2-y^2+z^2-2xz$. 19. $\frac{4ab}{(a-b)^2}$. 20. $\frac{-x+y+z}{x-y+z}$.

21. $-\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}$. 22. $\frac{x^2-3x+1}{x^2-4x+1}$. 23. $\frac{x^4+3x^2+1}{x^3+2x}$.

## XXVI. 第207頁

1. 1/2. 2. $-3$. 3. $\infty$. 4. 0.

5. $-5/4$. 6. $\infty$. 7. 3/2, $\infty$, 0, 2. 8. $-1/9$.

9. $\infty$. 10. 3. 11. 2/3.

## XXVII. 第210頁

1. $x=1$. 2. $x=15/31$. 3. $x=6$.

4. $x=4$. 5. $x=5/6$. 6. $x=-5/3$.

7. $x=0$. 8. $x=-(a+b)$. 9. $x=-10$.

10. $x=-2$. 11. $x=-2/3$. 12. $x=-7$.

13. $x=3/4$. 14. $x=3$. 15. $x=-4$.

16. $x=\frac{cq+dp+(a+b)pq}{c+d+ap+bq}$. 17. $x=-71/33$.

18. $x=2bc/(b+c)$. 19. $x=(a+b+c)/3$. 20. $x=-5$.

21. 無根. 22. $x=3$, $y=-2$. 23. $x=1$, $y=3$.

24. $x=\dfrac{2abc}{ab+bc-ca},\ y=\dfrac{2abc}{-ab+bc+ca},\ z=\dfrac{2abc}{ab-bc+ca}.$

25. $x=2,\ y=-2,\ z=4.$

## §534.　第214頁

2. $-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4x^2+4x+9}{x^3+x^2+x-1}.$

## XXVIII.　第219頁

1. $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}.$

2. $\dfrac{8}{5(2x+1)}+\dfrac{3}{5(3x-1)}.$

3. $-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{8}{x+2}-\dfrac{6}{x+3}$

4. $-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{11}{2(x-2)}-\dfrac{9}{x-3}+\dfrac{9}{2(x-4)}.$

5. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-x+1}.$

6. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{1+x}+\dfrac{5}{1-x}.$

7. $x+2+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x-2}.$

8. $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{11}{(x-2)^2}+\dfrac{20}{(x-2)^3}+\dfrac{13}{(x-2)^4}.$

9. $\dfrac{1}{12x}+\dfrac{3}{44(x-4)}-\dfrac{10}{33(2x+3)}.$

10. $-\dfrac{4}{2x^2+1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}.$

11. $\dfrac{2}{(x+3)^2}-\dfrac{21}{(x+3)^3}+\dfrac{76}{(x+3)^4}-\dfrac{98}{(x+3)^5}.$

12. $\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x-1}{x^2+2}.$

13. $\dfrac{3}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x-3)}+\dfrac{13}{(x-3)^2}.$

14. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x-1}{x^2+1}.$

15. $\dfrac{2x-4}{x^2+x+1}+\dfrac{2x+6}{(x^2+x+1)^2}-\dfrac{3x+1}{(x^2+x+1)^3}.$

16. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$

17. $\dfrac{1}{x^2+2}+\dfrac{2}{5(x-2)}-\dfrac{2}{3(x+1)}.$

18. $\dfrac{a^2+pa+q}{(a-b)(a-c)}\cdot\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{b^2+pb+q}{(b-a)(b-c)}\cdot\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{c^2+pc+q}{(c-a)(c-b)}\cdot\dfrac{1}{x-c}.$

19. $-\dfrac{2}{27x}+\dfrac{25}{256(x-1)}-\dfrac{3}{64(x-1)^2}-\dfrac{163}{6912(x+3)}-\dfrac{35}{288(x+3)^2}-\dfrac{25}{48(x+3)^3}.$

20. $\dfrac{4x+3}{2(x^2+x+1)}-\dfrac{2x-3}{2(x^2-x+1)}.$

## XXIX.　第223頁

1. $x$ 及 $z$.

2. $\Sigma a^2b^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$

$\Sigma a^3b^4=a^3b^4+b^3a^4+b^3c^4+c^3b^4+c^3a^4+a^3c^4.$

$\Sigma a^2/b=a^2/b+b^2/a+b^2/c+c^2/b+c^2/a+a^2/c.$

$\Sigma a^2b^3c^5=a^2b^3c^5+a^2c^3b^5+b^2c^3a^5+b^2a^3c^5+c^2a^3b^5+c^2b^3a^5.$

$\Sigma a^2b^2c^4 = a^2b^2c^4 + a^2c^2b^4 + b^2c^2a^4$

$\Sigma(a+b)c = (a+b)c + (b+c)a + (c+a)b.$

$\Sigma(a+b^2)c^3 = (a+b^2)c^3 + (b+a^2)c^3 + (b+c^2)a^3 + (c+b^2)^5 + (c+a^2)b^3 + (a+c^2)b^3.$

$\Sigma(a+2b+3c) = (a+2b+3c) + (a+2c+3b) + (b+2c+3a)$

$\qquad + (b+2a+3c) + (c+2a+3b) + (c+2b+3a).$

4. 否.

5. $y^2-x^2,\ x^2-z^2,\ z^2-y^2;\ a^2bc,\ b^2cd,\ c^2da,\ d^2ab;\ (a-c)(b-a),$
$(b-a)(c-b),\ (c-b)(a-c).$

6. $ab^3c^2 + bc^3d^2 + cd^3a^2 + da^3b^2,\ a(b-c) + b(c-d) + c(d-a) + d(a-b),$
$(b+2c)(a+d) + (c+2d)(b+a) + (d+2a)(c+b) + (a+2b)(d+c),$
$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-d)} + \frac{c^2}{(c-d)(c-a)} + \frac{d^2}{(d-a)(d-b)}.$$

## XXX. 第225頁

1. $-(x-y)(y-z)(z-x).$ 2. $-(x-y)(y-z)(z-x).$

3. $3(x-y)(y-z)(z-x).$ 4. $(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$

5. $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx).$

6. $-(x+y)(y+z)(z+x)(x-y)(y-z)(z-x).$

7. $3(x+y)(y+z)(z+x).$

8. $5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$

9. $80xyz(x^2+y^2+z^2).$ 10. $-2(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$

11. $(x+y)(y+z)(z+x).$

12. $-(x-y)(y-z)(z-x)(x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y+xyz).$

13. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$ 14. 0. 15. 4. 16. 1.

17. $\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$

## XXXI. 第232頁

1. $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3.$

2. $a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8.$

3. $1+14x^2+84x^4+280x^6+560x^8+672x^{10}+448x^{12}+128x^{14}.$

4. $16+\dfrac{32}{x}+\dfrac{24}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}.$

5. $x^6-18x^4+135x^2-540+\dfrac{1215}{x^2}-\dfrac{1458}{x^4}+\dfrac{729}{x^6}.$

6. $\dfrac{x^5}{y^5}-5\dfrac{x^3}{y^3}+10\dfrac{x}{y}-10\dfrac{y}{x}+5\dfrac{y^3}{x^3}-\dfrac{y^5}{x^5}.$

7. $1-4x+14x^2-28x^3+49x^4-56x^5+56x^6-32x^7+16x^8$.

8. $a^6+3a^5x-5a^3x^3+3ax^5-x^6$.　　9. $231x^5/16$.

10. $-3153199104a^5b^7$.　　11. $-8064a^{10}b^5c^5$,　　12. $126x^4$, $-126x^5$.

13. 56.　　14. 15120.　　15. 15.

16. $-648$.　　17. 924.　　18. 2, 795, 520.

19. $x^3-6x^2y-xy^2+30y^3$.　　20. $x^4-4x^3-19x^2+46x+120$.

21. 96.　　22. 64, 400.　　23. 16, 16, 24.

## § 568.　第234頁

1. $\frac{8a^2b^3}{5c^4d^6}$.　　2. $3xy^2z^3$.　　3. $\frac{2x^2y^6}{az^5}$.

## § 569.　第235頁

3. $2x^2-x+1$.

## § 570.　第237頁

$5x^2-4x+3$.

## § 572.　第238頁

2. $2-\frac{x}{4}+\frac{15x^2}{64}$.

## XXXII.　第242頁

1. $-\frac{3x^2y^5}{5a^3z^4}$.　　2. $\frac{23a^2b^3}{25cd^4}$.　　3. $xy(x-y)$.

4. $x^2-x+1$.　　5. $x^3-x+3$.　　6. $2x^3+3x^2y-y^3$.

7. $2x-5-3/x$.　　8. $7-6x-5x^2$.　　9. $x^4+x^3-x^2+x-2$.

10. $x^2-2x-1$.　　11. $2x^2-3xy+4$.　　12. $\frac{x}{y}+xy+\frac{y}{x}$.

13. $1-x-x^2/2-x^3/2$.　　14. $2-x/4+47x^2/64+47x^3/512$.

15. $x^2+x+1$.　　16. $3x^4+x^2-1$.　　17. $2x^2-3ax+3a^2$.

18. $\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}$.　　19. $1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$.　　20. $x^2-x+1$.

21. $x^2+x+1$.　　22. $a=6$, $b=1$.　　23 167.

24. 48.1.　　25. 24.15.　　26. 2037.

27. .0566.　　28. 3.004.　　29. 1.414.

30. 7.449. 31. 15.315. 32. 123.
33. 55.1. 34. 10.12.

## XXXIII. 第246頁

1. $3\sqrt{2}$. 2. $14\sqrt{3}$. 3. $-9$. 4. $-\sqrt[5]{10}$.
5. $\sqrt{6}/2$. 6. $\sqrt[3]{12}/2$. 7. $\sqrt[3]{6}/2$. 8. $\sqrt[5]{6}/2$.
9. $ab^2c^3d\sqrt[5]{25d}$. 10. $2c\sqrt[5]{2a^2b^4c^2}$. 11. $z\sqrt[4]{2x^2y^3z}$. 12. $\sqrt[n]{5ab^2c^3}$.
13. $\sqrt[3]{ab^2c^3}$. 14. $a^2b^3c^4\sqrt[n]{ab^2}$. 15. $x\sqrt{y^2-z^2}$. 16. $(x+y)\sqrt{(x-y)}$.
17. $x\sqrt[3]{x^3-y^3}$. 18. $b\sqrt{a(a-b)}$. 19. $\frac{1}{4ab}\sqrt[3]{2a^2b(a^3+b^3)}$.
20. $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$. 21. $\frac{1}{3(x+1)}\sqrt[3]{3(x^3+1)}$. 22. $\sqrt[3]{b^3-a^3}/b$.
23. $\frac{c}{a^nb^{n+1}}\sqrt[3]{bc^n}$. 24. $\frac{ax-b}{b^2}\sqrt{b}$. 25. $\sqrt{27a^3}$. 26. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$.
27. $\sqrt[4]{3ax}$. 28. $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $\sqrt{2}/4$. 29. $2\sqrt[3]{3}$, $4\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt[3]{3}/3$.
30. $(x-y)\sqrt{x^2+xy+y^2}$, $xy\sqrt{x^2+xy+y^2}$.

## XXXIV. 第248頁

1. $\sqrt[30]{243}$, $\sqrt[30]{27}$, $\sqrt[30]{9}$. 2. $\sqrt[12]{a^8}$, $\sqrt[12]{8a^9b^6}$, $\sqrt[12]{49b^{10}}$.
3. $3\sqrt{2}=\sqrt[6]{5832}$ $2\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{576}$, $\therefore 3\sqrt{2}>2\sqrt[3]{3}$.
4. $\sqrt{3}=\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{256}$, $\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{125}$, $\therefore \sqrt{3}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}$.
5. 5. 6. $2\sqrt{5}$. 7. $2\sqrt[3]{4}$. 8. 30.
9. $30\sqrt[3]{3}$. 10. $\sqrt{6}/3$. 11. $2\sqrt[12]{2}$. 12. $\sqrt[12]{17578125}/5$.
13. 10. 14. $a^2b^3c^6\sqrt[6]{ab^5c}$. 15. $\sqrt[6n]{a^5}$. 16. $\sqrt[3]{a^2b^2}$.
17. $abc^2$. 18. $\sqrt[6n]{a^{2n+1}}$. 19. $\sqrt[18]{ab^{11}}/b$. 20. $\frac{1}{ab}\sqrt[3]{b^2}$.
21. $24\sqrt{3}$. 22. $a^4$. 23. $64xy^3z^4\sqrt{xz}$. 24. $\sqrt[5]{a}$.
25. $\sqrt{2}$. 26. $\sqrt[10]{ab^2c^7}/c$. 27. $\sqrt[3]{4}$. 28. $\sqrt[4]{8}$.
29. $\sqrt[3]{4}$. 30. $\sqrt[12]{32}$. 31. $\sqrt[2n]{a}$. 32. $\sqrt[4]{a^p}$.
33. $10\sqrt{3}$. 34. $\frac{51}{10}\sqrt{5}+3\sqrt{7}$. 35. $\frac{5}{2}\sqrt[3]{4}$. 36. $\frac{a+b+c}{abc}\sqrt{abc}$.
37. $\frac{7}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$. 38. 0. 39. $(3+2a)\sqrt{ax}$. 40. $\frac{1}{x^2-y^2}\sqrt{x^2-y^2}$.
41. $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+6$. 42. $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$. 43. $7\sqrt{3}+4\sqrt{10}$.
44. $\sqrt{17}$. 45. $10+6\sqrt{3}$. 46. $a+\sqrt{a}+1$.

## XXXV. 第252頁

1. $a^{\frac{2}{3}}$.　2. $c^{\frac{2}{3}}$.　3. $a^{\frac{6}{5}}$.　4. $b^{\frac{13}{6}}$.

5. $\sqrt[3]{a^2}$.　6. $\frac{1}{c^2}\sqrt{c}$.　7. $\frac{1}{d^4}$.　8. $\sqrt{e}$.

9. $\frac{b^3c^2}{a}$.　10. $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}}$.　11. $\frac{1}{x^{10}}$.　12. $\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$.

13. $bc-c^2b^{-1}$.　14. $125\cdot 2^{\frac{1}{2}}/32$.　15. 27.　16. 9.

17. $\frac{2^{\frac{1}{3}}}{256}$.　18. $a^{\frac{9}{4}}$.　19. 1.　20. $(ab)^{\frac{5}{4}}$.

21. $a^4b^{-3}$.　22. $a^{\frac{1}{6}}$.　23. $a^2b^4c^{-6}$.　24. $-8a^6$.

25. $b^6a^{-4}$.　26. $b^{\frac{3}{4}}$.　27. $a^{-1}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}}$.　28. $5a^{11}/4$.

29. $a^{\frac{1}{3}}b^{-1}c$.　30. $a^{-\frac{1}{12}}$.　31. $a^2$.　32. $x^{x^3}$

33. $x^{x^2y}y^{xy}$.　34. $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$.　35. $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$.

36. $a^{\frac{5}{3}}+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{2}}+ab+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{3}}b^2+b^{\frac{5}{2}}$.　37. $x^2-4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}+6xy^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}}+yz$

38. $e^x-e^{-x}$.　39. $x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$.　40. $x+1+x^{-1}$.

## XXXVI. 第255頁

1. $1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}$　2. $a^{-\frac{1}{2}}-\frac{a^{-1}x^{-\frac{2}{3}}}{2}+\frac{3a^{-\frac{5}{3}}x^{-\frac{4}{3}}}{8}-\frac{5a^{-\frac{7}{3}}x^{-2}}{16}$.

3. $9-\frac{4x}{3^2}-\frac{4x^2}{3^6}-\frac{32x^3}{3^{11}}$.

4. $a+\frac{1}{m}a^{1-m}x+\frac{1-m}{m^2 2!}a^{1-2m}x^2+\frac{(1-m)(1-2m)}{m^3 3!}a^{1-3m}x^3$.

5. $a^4+4a^5b^{-\frac{1}{2}}+10a^6b^{-1}+20a^7b^{-\frac{3}{2}}$.　6. $x^{-3}-6x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{1}{3}}+21x^{-4}y^{\frac{2}{3}}-56x^{-\frac{9}{2}}y$.

7. $\frac{1}{2}-\frac{3x}{4}+\frac{9x^2}{8}-\frac{27x^3}{16}$.　8. $1-\frac{2x}{5}+\frac{7x^2}{25}-\frac{28x^3}{125}$.

9. $1-\frac{9x^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{135x}{8}-\frac{945x^{\frac{3}{2}}}{16}$.　10. $-55x^9$.

11. $\frac{-663}{2^{10}}x^{\frac{21}{2}}y^9$.　12. $-\frac{19\cdot 23\cdot 31\cdot 33}{2^{25}}x^{\frac{2}{3}}$.

13. $-\frac{5}{2^5}x^{-2}$.　14. 1. 9.9493.　2. 3.9578.　3. 1.9873.

## XXXVII 第257頁

1 $a^{\frac{5}{7}}$.　2. $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$.　3. $x^{\frac{1}{2}}$.　4. $\sqrt{a}-\sqrt{bc}$

5. $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(x+y-z-2\sqrt{xy})$.

6. $(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}-\sqrt{zx})(xy+yz-zx-2y\sqrt{xz})$.

7. $[\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{u}][x+y-u-z-2(\sqrt{xy}-\sqrt{uz})]$
$[x^2+y^2+z^2+u^2-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu-2zu-8\sqrt{xyzu}]$.

8. $(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$. 9. $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

10. $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}$. 11. $(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$.

12. $(x^9)^{\frac{11}{12}}-(x^9)^{\frac{10}{12}}(y^8)^{\frac{1}{12}}+(x^9)^{\frac{9}{12}}(y^8)^{\frac{2}{12}}-\cdots\cdots+(y^8)^{\frac{11}{12}}$.

13. $(1-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})(1+xy^{\frac{2}{3}}+x^2y^{\frac{4}{3}})$. 14. $(x^{\frac{1}{3}}-1)$.

15. $3+\sqrt{5}$. 16. $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}$. 17. $(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

18. $(1-\sqrt[3]{3})$. 19. $\sqrt[3]{3^2}(1-\sqrt[3]{2})$. 20. $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{b^3}}{ab}$.

21. $\dfrac{a^2+2a\sqrt{b}+b}{a^2-b}$. 22. $\dfrac{3-\sqrt{6}}{15}$. 23. $\dfrac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}$.

24. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$. 25. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. 26. $\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$.

27. $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})}{2}$. 28. $\dfrac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3^2}+1)}{4}$.

29. 0.447. 30. 2.756. 31. 1.732.

## XXXVIII. 第260頁

1. 256. 2. 1/9. 3. $\pm16\sqrt{2}$.

4. 14. 5. 1. 6. $\left(\dfrac{d}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)^2$.

7. 3. 8. 5. 9. $-1$.

10. 34/15. 11. 2. 12. 2.

13. 6. 14. 5/4. 15. $\begin{cases} x=-1,\ y=3. \\ x=3,\ y=(73-10\sqrt{10})/9. \end{cases}$

16. $x=10,\ y=3$.

## XXXIX. 第263頁

1. $\sqrt{7}+\sqrt{2}$. 2. $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. 3. $5-\sqrt{7}$. 4. $(\sqrt{10}+\sqrt{15})/5$.

5. $(3\sqrt{2}-\sqrt{10})/2$. 6. $\sqrt[4]{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$. 7. $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$.

8. $\sqrt{a}-\sqrt{b-a}$. 9. $1+\sqrt{2}$. 10. $1+2\sqrt{3}$.

## XL. 第266頁

1 $7i$. 2. $3\sqrt{2}i$. 3. $-4\sqrt{6}$.

4. $2i$.　5. $-2$.　6. 1.
7. $i$.　8. $-i$.　9. $(x-y)i$.
10. $2-\sqrt{6}+(2\sqrt{2}+\sqrt{3})i$.　11. $648\sqrt{6}$.　12. $-22$.
13. 0.　14. 10.　15. 16.
16. $-i$.　17. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$.　18. $1-\sqrt{2}i$.
19. $1-\sqrt{3}i$.　20. $\sqrt{2}(1+i)$.　23. $x=5/3,\ y=-4/3$.
24. $3+2i$.　25. $1+i$.　26. $(a+b)+(a-b)i$.

## §630　第268頁　例1,2

1. 2, $-4$.　2. 3, 1/2.　3. 0, 5.　4. $\pm\sqrt{6}/3$.
1. $6x^2+13x+6=0$.　2. $x^2-a^2=0$.　3. $4x^2-x=0$.

## XLI.　第270頁

1. 5, $-7$.　2. 3/2, $-1/2$.　3. $5\pm\sqrt{7}$.
4. $(-1\pm2i)/3$.　5. $(-3\pm\sqrt{41})/4$.　6. 9/2, 1/2.
7. 12, $-21$.　8. 17/6, $-15/2$.　9. 23/4, 9/2.
10. 32/5, $-2/3$.　11. $1+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$.　12. 2, $4+i$.
13. 4, 4.　14. 2, 2.　15. $(1\pm\sqrt{5})/2$.
16. 3, $-5$.　17. 3/2.　18. 5, 16/7.
19. 1/2.　20. 5, 5/2.　21. 1, $-58/91$
22. $-2$, 1/4.　23. 1/3, $-3a$.　24. $a+b$, $a-b$.
25. $b/c$, $-a/c$.　26. $2a+b$, $2a-b$.　27. $a(3c\pm2b)$.
28. $\frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$.　29. $\frac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}$.
30. $\frac{a^2+b^2}{2a}, \frac{a^2+b^2}{2b}$.

## XLII.　第270頁

1. 22, 23.　2. 5, 16.　3. 5, 6.
4. 13, 14, 15.　5. 86.　6. 7/5.
7. 42.　8. \$40.　9. 5%.
10. 4%.　11. 100.　12. 6, $6\frac{2}{3}$ 呎.
13. 144, 112 平方吋.　14. $2(\sqrt{2}-1)$.　15. 21 審.
16. 每小時 40, 45 哩.　17. $1\frac{1}{2}$ 小時,每小時 4 哩.　18. 4 小時 20 分.
19. 6.　20. 2 小時.

21. (1) 1/4 秒; 1 秒; 否. (2) 1/2 秒中. (2) 3/2 秒中.

## XLIII. 第276頁

1. 2 與 $-1$. 2. $\infty, -2/3; \infty, \infty$. 3. $(x+2y-2)(3x-y+1)$.

4. $\pm 1$. 5. $p^2-4q,\ p^4-4p^2q+2q^2,\ (p^2-2q)/q$. 6. $-45/32,\ -7/2$.

7. $x^2-x+2=0,\ 2x^2+x+1=0,\ x^2+2x+8=0,\ x^2-x+2=0$.

8. 1. 極小 $=-13$. 2. 極小 $=31/8$.
3. 極大 $=5$. 4. 極小 $=-1/2$, 極大 $=1/2$.
5. 極小 $=4$. 6. 極大 $=-(2+\sqrt{2})/4$, 極小 $=-(2-\sqrt{2})/4$.

9. 正方形. 10. 離向距最近點 $2\frac{2}{3}$ 哩之點. 11. 36 呎, 3/2 秒.

## §643 第278頁 例3

1. $1/2,\ (1\pm i\sqrt{2})/3$. 2. $-1,\ 4,\ 1\pm\sqrt{2}$.

## §644. 第279頁 例7

1. $\pm 3,\ \pm\sqrt{6}/3$. 2. $(3\pm\sqrt{5})/2,\ (3\pm\sqrt{17})/2$.

3. $0,\ -a,\ -a(1\pm\sqrt{57})/2$. 4. $-3,\ 2,\ -(1\pm\sqrt{19})/3$.

## §645. 第280頁 例4

1. $1,\ (1\pm i\sqrt{3})/2$. 2. $(3\pm\sqrt{5})/2,\ (1\pm i\sqrt{3})/2$.

3. $-1,\ (1\pm i\sqrt{3})/2,\ (-1\pm i\sqrt{3})/2$.

## §646. 第281頁 例3

1. $-2,\ 1\pm i\sqrt{3}$. 2. $\sqrt{2}(1\pm i)/2,\ -\sqrt{2}(1\pm i)/2$.

3. $\pm i,\ (\sqrt{3}\pm i)/2,\ (-\sqrt{3}\pm i)/2$.

## §648. 第282, 383頁

2. $1/4,\ -3/4$. 4. $1,\ 6$. 7. $3,\ 7$. 9. $(6+\sqrt{6})/3$.

## XLIV. 第283頁

1. $\pm 3/2,\ \pm\sqrt{2}$. 2. $\sqrt[3]{63}/9$.

3. $\pm 2,\ \pm 3\sqrt{2}$. 4. $-1,\ -1,\ -1,\ 2/3,\ 2/3,\ 3/2$

5. $1,\ -2,\ \pm\sqrt{3}i$. 6. $1,\ -1,\ 1\pm i$.

7. $1,\ -1,\ 5, 3,\ -1/3$. 8. $7,\ -1,\ 3\pm\sqrt{5}$.

9. $(-1\pm\sqrt{17})/4$, $(-1\pm\sqrt{7}i)/4$.

10. $1, 1, \pm i$.

11. $\pm i$, $(-1\pm i\sqrt{3})/2$.

12. $1, 2\pm\sqrt{3}, 3\pm2\sqrt{2}$.

13. $3, 3(-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/4$, $3(-1\pm\sqrt{5}-i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/4$.

14. $1, (1\pm i\sqrt{3})/4$.

15. $0, \pm\sqrt{3}i$.

16. $5, -1, 2\pm3i$.

17. $-a, -b, -(a+b)/2$.

18. $(a+b)/2$, $[a+b\pm\sqrt{2-(a-b)^2}]/2$.

19. $0, -9/5, -(15\pm\sqrt{401})/22$.

20. $\pm a, \pm1/a$.

21. $1, -1/3, (1\pm\sqrt{19})/3$.

22. $1, -1/2$.

23. $2, 3$.

24. $3, -2$.

25. $3/2$.

26. $16/25$.

27. $1, -3$,

28. $0, 16, 81$.

29. $3$.

30. $(6+\sqrt{6})/3$.

31. $1/5$.

32. $4/5$.

33. $1$.

34. $\dfrac{27abc-(a+b+c)^3}{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$.

35. $6, -3, (3\pm i\sqrt{71})/2$.

36. $0, -2a$.

37. $\pm\sqrt{182}/14, \pm3\sqrt{7}/7$.

## XLV.　第287頁

1. $2/3, -11/9; -4, -13/3$.

2. $-1, -1; 5/3, 3/5$.

3. $1/15, 2/15$; 一無窮解.

4. $3, 1; -1/15, -41/5$.

5. $0, 0; 51/14, -17/14$.

6. $1, 1/2; 12/5, 32/15$.

7. 無有窮解.

8. $5, 9; 333/28, 185/42$.

9. $1, 1/4; -12/13, -4/9$.

10. $1, -3; -1, 3; -1, 3; 2, -3$.

11. $2, -2; -2, 2; -1\pm\sqrt{3}, 1\pm\sqrt{3}$.

12. $0, 0; 15/8, 9/8$; 二無窮解.

13. $m=1$, 或 $-1$.

14. $m=1, c=1/3; m=-1/2, c=-1/3$.

15. $(2x-y+4)(x+y+3)$.

## § 655.　第288頁　例2

1. $1, 0; -1, 0$.

2. $3, 1/5; 3, -1/5; -3, 1/5; -3, -1/5$.

## § 656.　第288頁　例3

1. $2, 1; 3, -1$; 二無窮解.

2. $3i\sqrt{14}/14, i\sqrt{14}/7; 3i\sqrt{14}/14, -i\sqrt{14}/7; -3i\sqrt{14}/14,$
$i\sqrt{14}/7; -3i\sqrt{14}/14, -i\sqrt{14}/7$.

## § 657　第290頁　例5

1. $0, 0; 0, 0; 5, -5; -3, -9$.

2. $-2, 3; -3, 2; (3\pm\sqrt{17})/2, (-3\pm\sqrt{17})/2$.

## § 658. 第290頁 例2

1. $2$; $-1, 1$; $(1\pm i\sqrt{23})/4$, $(1\pm i\sqrt{23})/4$.

## XLVI. 第290頁

1. $2, 3$; $2, -3$; $-2, 3$; $-2, -3$.
2. $2, 1/3$; $2, -1/3$, $-2, 1/3$; $-2, -1/3$.
3. $7, -1$; $-5, 2$; 二無窮解.
4. $-5, -1$; $15/2, 3/2$; $2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$; $-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}$.
5. $2, -3$; $-2/3, 7/3$; $(-6\pm2\sqrt{6})/3$, $(3\mp4\sqrt{6})/3$.
6. $1, 0$; $-1, 2$; 二無窮解.
7. $5, -1$; $5, -21$; $-7, 19\pm2\sqrt{85}$
8. $5, 5$; $-5, -5$; $\sqrt{5}i, -\sqrt{5}i$; $-\sqrt{5}i, \sqrt{5}i$.
9. $3, 1$; $-3, -1$; $3\sqrt{5}i, -7\sqrt{5}i/5$; $-3\sqrt{5}i, 7\sqrt{5}i/5$.
10. $1, 1/2$; $-1, -1/2$; $\sqrt{91}/5, \sqrt{91}/16$; $-\sqrt{91}/5, -\sqrt{91}/16$;
    $0, 0$; $0, 0$; $0, 0$; $0, 0$; 八無窮解.
11. $3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$; $-3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$.
12. $5, 4$; $-4, -5$; $10\pm2\sqrt{30}$, $-10\pm2\sqrt{30}$.
13. $2, 4$; $3, -1$; $(-5\pm\sqrt{13})/2$, $(-3\pm\sqrt{13})/2$.

## XLVII. 第292頁

1. $4, 1$; $-1, -4$; 一無窮解.
2. $125, -27$; $-27, 125$; 一無窮解.
3. $5, 3$; $-5, -3$; $3, 5$; $-3, -5$; 四無窮解.
4. $2, 3$; $-1+\sqrt{3}i, 3(-1+\sqrt{3}i)/2$; $-1-\sqrt{3}i, -3(1+\sqrt{3}i)/2$; 六無窮解.
5. $-2, 2$; $-2, -2$; $(2\pm2\sqrt{7})/3, (1\pm\sqrt{7})/3$; 二無窮解.
6. $0, 0$; $6, 9$; $50/21, -20/21$; 一無窮解.

## XLVIII. 第295頁

1. $9, -4$; $-4, 9$.
2. $14, -2$; $-2, 14$.
3. $17, 2$; $-17, -2$; $2, 17$; $-2, -17$.
4. $9, 2$; $-2, -9$.
5. $8, 1$; $1, 8$; 一無窮解.
6. $7, 5$; $5, 7$; $7\omega, 5\omega$; $5\omega, 7\omega$; $7\omega^2, 5\omega^2$; $5\omega^2, 7\omega^2$,
   而 $\omega=(-1+\sqrt{3}i)/2$; 三無窮解.

7. $4/3,\ 1/4;\ 1/3,\ 1;$ 一無窮解.

8. $3,\ 1;\ -1,\ -3;\ 1\pm i\sqrt{10},\ -1\pm i\sqrt{10}.$

9. $2,\ 0;\ 0,\ 2;\ 1\pm i\sqrt{3},\ 1\mp i\sqrt{3};$ 一無窮解.

10. $4,\ -7/2,\ -7/2,\ 4.$

11. $5,\ -4;\ -4,\ 5;\ -10+3\sqrt{11},\ -10-3\sqrt{11};\ -10-3\sqrt{11},$
$-10+3\sqrt{11},$ 二無窮解.

12. $3,\ 1;\ 1,\ 3;\ -3,\ -1;\ -1,\ -3;\ \pm\sqrt{5}i,\ \pm\sqrt{6}i;\ \pm\sqrt{6}i,\ \pm\sqrt{5}i.$

13. $2,\ -5;\ -5,\ 2;\ (3\pm\sqrt{31}i)/2,\ (3\mp\sqrt{31}i)/2.$

14. $0,\ 2;\ 2,\ 0;\ (-23\pm\sqrt{389})/12,\ (-23\mp\sqrt{389})/12.$

15. $0,\ 0;\ \pm\sqrt{5},\ \pm\sqrt{5};\ \pm\sqrt{5}i,\ \mp\sqrt{5}i;\ \pm\sqrt{10}(1+i)/2,\ \mp\sqrt{10}(1-i)/2;$
$\pm\sqrt{10}(1-i)/2,\ \mp\sqrt{10}(1+i)/2.$

## XLIX. 第296頁

1. $4,\ -1,\ 3;\ -2,\ 5,\ -3.$

2. $4,\ 1,\ 2;\ -4,\ -1,\ -2.$

3. $-(a^2\pm bc)/a,\ -(b^2\pm ca)/b,\ -(c^2\pm ab)/c.$

## L. 第296頁

1. $2/3,\ -11/9;\ -4,\ -13/3.$

2. $4,\ 3;\ -3,\ -4.$

3. $(b+a)/2,\ (b-a)/2;\ (a-b)/2,\ -(a+b)/2.$

4. $\sqrt{\dfrac{a-b}{a^2+b^2}},\ \pm\sqrt{\dfrac{b-a}{a^2+b^2}},\ -\sqrt{\dfrac{a-b}{a^2+b^2}},\ \pm\sqrt{\dfrac{b-a}{a^2+b^2}}.$

5. $1,\ 1/4;\ -12/13,\ -4/9.$

6. $a,\ b;\ 2a-b,\ 2b-a.$

7. $5,\ 1/2;\ 1/2,\ 5.$

8. $a,\ b/2;\ -a,\ -b/2;\ a/2,\ b;\ -a/2,\ -b.$

9. $4,\ 1;\ -1,\ -4;\ 0,\ 0;\ 0,\ 0.$

10. $\dfrac{2ab}{b-a},\ \dfrac{2ab}{b+a};\ 0,\ 0.$

11. $3,\ -7;\ 35/2,\ 15/2;\ 0,\ 0;\ 0,\ 0.$

12. $5,\ 2;\ -5,\ 2;\ 2,\ -4/5;\ -2,\ -4/5.$

13. $3,\ 1;\ -3,\ -1;\ 6,\ 3;\ -6\ -3.$

14. $6,\ 1;\ -27,\ -10;\ (7\pm3\sqrt{65})/2,\ (3\pm\sqrt{65})/2.$

15. $7/2,\ 2;\ -2,\ -7/2;\ 136/65,\ 238/65;\ -238/65,\ -136/65.$

16. $\alpha,\ \beta;\ \alpha\omega,\ \beta\omega;\ \alpha\omega^2,\ \beta\omega^2;$ 而 $\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{b},\ \beta=\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{a},$
及 $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2;$ 六無窮解.

17. $\alpha,\ \beta;\ \alpha\omega,\ \beta\omega;\ \alpha\omega^2,\ \beta\omega^2;$ 而 $\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{4(a^2-b^2)^2}}{2(a-b)},\ \beta=\dfrac{\sqrt[3]{4(a^2-b^2)^2}}{2(a+b)},$
及 $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2;$ 六無窮解.

18. $a/(a^2+b^2), b/(a^2+b^2)$; 0, 0; 二無窮解.

19. $4a, a; -4a, -a$. 20. 3/2, 1/2; −1/2, −3/2; 一無窮解.

21. $a, 0; 0, a; a(1\pm\sqrt{7}i)/2, a(1\mp\sqrt{7}i)/2$.

22. $7, 3; 3, 7; (-17\pm\sqrt{646})/5, (-17\mp\sqrt{646})/5$.

23. $(3\pm\sqrt{3}i)/2, (3\mp\sqrt{3}i)/2$; 0, 0; 0, 0.

24. $\pm a\sqrt{3}, 0; 2a, a; -2a, -a$. 25. 1, 4; 4, 1; 一無窮解.

26. 3, 0; 0, 4; 0, 0; 0, 0.

27. $5, 0; 0, 5; \sqrt{10}, -\sqrt{10}; -\sqrt{10}, \sqrt{10}$.

28. 2, 4; −9, 15; −1, −1; 0, 0.

29. $3/2, 1/2; 1/2, 3/2; 1\pm i\sqrt{1155}/35, 1\mp i\sqrt{1155}/35$.

30. $\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}, \sqrt{a^2+1}; \dfrac{-\sqrt{a^2+1}}{a}, -\sqrt{a^2+1}$.

31. 2, 0; −3, 5; 一無窮解.

32. $1, 5/3; 2, -4/3; (-9\pm\sqrt{21})/6, (-1\pm3\sqrt{21})/6$.

33. 1, 3, 1; 149/5, −1/5, −15.

34. 1, 2, −3, 0; −1, −2, 3, 0.

35. 3, 1, 1; −3, −1, −1.

36. $1, -1, 2; -14/13, 23/13, 17/13; (-29\pm3\sqrt{105})/26, (-11\mp2\sqrt{105})/13, (-1\pm\sqrt{105})/26$.

## LI. 第297頁

1. 7, 5. 2. 6, 3. 3. 5/6.

4. 8, 9, 20. 5. 12 呎, 5 呎. 6. 15 吋, 9 吋, 12吋.

7. 39 吋, 36 吋, 15 吋. 8. 16 呎, 14 呎, 9 呎. 9. 14 吋, 12 吋.

10. $A$, \$4.50; $B$, \$5. 11. \$1200, 4%.

12. 子二人,各得\$10,000; 孫五人,各得\$8000.

13. 每小時 4 哩, 2 哩. 14. $A$, 3 小時; $B$, 4 小時; $C$, 6 小時.

15. $A$, 每秒 24 吋; $B$, 20 吋. 16. $A$, 每秒 8 吋; $B$, 2 吋.

17. 18 哩. 18. 96 哩.

## LII. 第304頁

17. 交 $x$ 軸於點 $3\pm\sqrt{8}, 0$; 切 $y$ 軸於點 0, 1.

20. $m=\pm1$ 21. $c=1$, 或 4/3. 23. $y=2x+1$ 及 $x+2y=0$.

24. $|\lambda|=2$ 時, 拋物線; $|\lambda|<2$ 時, 橢圓; $|\lambda|>2$ 時, 雙曲線.

## LIII.　第306頁

6. $x<30$.　　7. $x<-2$, 或 $>4$.　　8. $-1<x<3$, 或 $x>6$.

## LIV.　第310頁

1. $x=20-17t$, $y=6-6t$. 對應於 $t=0$, $-1$, $-2$,……之解爲正.
2. $x=2-12t$, $y=-6-43t$. 對應於 $t=-1$, $-2$,……之解爲正.
3. $x=-17+39t$, $y=7-16t$. 無正解.
4. $x=-2+23t$, $y=43-72t$. 無正解.
5. $x=16-27t$, $y=28=49t$. 對應於 $t=0$, $-1$, $-2$,……之解爲正.
6. $x=54-97t$, $y=21-47t$. 對應於 $t=0$, $-1$, $-2$, $-3$,……之解爲正.
7. $x=2+21t$, $y=3-26t$, $z=-1-11t$. 無正解.
8. $x=10-14t$, $y=-4+35t$, $z=-2+15t$. 無正解.
9. $x=u$, $y=2v+1$, $z=2u+3v$. 對應於正值 $u$ 及 $v$ 之解爲正.
10. $x=7-3u-2v$, $y=1+2u$, $z=v$. 正解爲 7, 1, 0; 5, 1, 1; 3, 1, 2; 1, 1, 3; 4, 3, 0; 2, 3, 1; 0, 3, 2; 1, 5, 0.
11. 五十正解.　　12. $\frac{41}{35}=\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$.
13. 2牛, 16羊; 或8牛, 9羊; 或14牛, 2羊.
14. 15, 2, 6; 12, 4, 7; 9, 6, 8; 3, 10, 10.　　15. 314.
16. 距一端之第167及第169劃分綫.

## LV.　第314頁

1. 32; 192/5; $10a^2b^2$; $\sqrt{30}$.　　2. $-3:2$; $1:5$.
3. $x:y=-1:2$, 或 $3:1$. $y:x=-2:1$, 或 $1:3$.
13. (1) 0, 0, 3/2. (2) 0, 0, 5, 8/7.　　14. 104, 156, 260.
15. 從 $A$ 取8番, 從 $B$ 取10番.

## LVI.　第317頁

1. $-14/5$.　　2. $\pm 2\sqrt{3}/3$.　　3. $x^2+3y-4=0$.　　4. $-72$.
7. 3.　　8. 15/8.　　9. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\frac{a\sqrt[3]{4}}{2}$.

## LVII.　第319頁

1. 60, 630; $25\frac{1}{2}$, 225.　　2. $n(n+1)/2$; $n^2$; $n(n+1)$.
3. $n(3n-2)$.　　4. $-1/3$, 0, $1/3$, $2/3$, 1, $4/3$, $5/3$, 2, $7/3$, $8/3$.

5. $-1/2, 0, 1/2, 1, 3/2$. 6. $l=20, S=160$. 7. $a=3, S=-14$.

8. $d=3, S=178$. 9. $n=52, d=-1/2$. 10. $d=2, l=12\frac{3}{7}$.

11. $n=28, S=187\frac{3}{5}$. 12. $a=31, l=-1$. 13. $a=25, d=-3$.

14. $n=6, a=-72$. 15. $n=5, l=18$. 18. $1, 1\frac{1}{6}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{5}{6}, 2, \cdots$.

19. 3, 5, 7. 20. 55,350. 21. \$1716.

22. 9小時,兩出發點間之中途.

## LVIII. 第323頁

1. 162, 122. 2. $13\frac{1}{2}, 32\frac{1}{2}$. 3. 8; 2/3; 25/12.

4. $\frac{241}{999}, \frac{73}{1375}, 8\frac{4516}{9999}$. 5. $l=-3000, S=-3333.33$. 6. $r=1/2, S=95\frac{1}{4}$.

7. $n=8, S=255/16$. 8. $a=1, S=61$. 9. $n=5, l=2/3$.

10. $r=5, l=-375$. 11. $n=5, r=4/3$. 12. $a=45/8, l=-20/27$.

13. $n=6, a=4$. 14. $a=10, r=3/5$. 15. $a=3, r=2$.

16. $ab$. 17. 15, 45, 135.

18. 3/16. 19. 8, 20, 50, 125.

20. $1, -3, 9$. 21. 3, 12, 21, 或 63, 12 $-39$.

22. $-2, 2, 6, 18$. 23. 75呎.

## LIX. 第325頁

1. 3/11, 3/13. 2. 30/23. 3. 75/7, 150/13, 75/6, 150/11.

4. 2. 5. 3, 5. 6. 2, 8.

## LX. 第331頁

1. 191; 1350. 2. 6560; 180,360.

3. (1) 二階;第十八項爲224. (2) 三階;第二十項爲10,118.
(3) 三階;第十二項爲 $-1$. (4) 四階;第十項爲10,100.

4. 三階;第 $n$ 項爲 $n(n+1)(n+2)$. 開首 $n$ 項之和爲 $n(n+1)(n+2)(n+3)/4$.
四階;第 $n$ 項爲 $2n(n+1)^3$.

5. 560, 105. 6. 1149. 7. 962.

8. 2024. 9. 220, 385. 10. 1274.

13. 二階;開首 $n$ 項之和爲 $n(n^2+2)/3$.
三階;開首 $n$ 項之和爲 $n(n+1)(n+2)(n+3)/4!$

## LXI. 第335頁

1. $y=4+23x+26x^2+7x^3$; $x=-5/2$ 時, $y=-3/8$; $x=-1/2$ 時, $y=-15/8$.

2. $f(x)=-90+73x-16x^2+x^3$; $f(12)=210$.

3. 704.3716.　　4. 110.592.　　5. .04237.　　6. 20.8734.

7. $(2520-806x-9x^2-13x^3)/840$.

## LXII.　第339頁

1. 2, 1/2, 6, 4, 6, −3, −6, −3, −2/3, 7/3, 3/2.

2. 1.0791, .6532, .1505, .2594.　　3. $(3\log_a 2+\log_a 3+2\log_a 5)6$.

4. (1) $\frac{2}{3}\log_a b-\frac{1}{2}\log_a c-\frac{5}{6}\log_a d$.　　(2) $\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\log_a b$.

## LXIII.　第349頁

下列答案皆用第345, 346頁之四位表求得, 並隨在應用§751末之法則.

1. 36, 460.　　2. 82.28.　　3. $1.210\times10^{13}$.　　4. $-1.744\times10^{-5}$.

5. 22.13.　　6. .1151.　　7. $-4.558\times10^{7}$.　　8. 16.38.

9. −.4255.　　10. 77.　　11. 9.472.　　12. 137.

13. 1.413.　　14. 8.218.　　15. −.676.　　16. 13.46.

17. .01.　　18. 5.461.　　19. 1.101.　　20. 5.34.

21. 9108.　　22. 632.8.　　23. −50.22.　　24. $2.453\times10^{-5}$.

25. −73.6.　　26. $2.647\times10^{13}$.　　27. .5381.　　28. 96.56.

29. 15.77.　　30. $2.652\times10^{5}$.

## LXIV.　第352頁

第351頁第8行之公式, 如係每半年, 每三個月, …… 之複利, 須改作 $A=P(1+r/2)^{2n}$, $A=P(1+r/4)^{4n}$, …….

1. 3.925, −1.578, .8361.

2. (1) $x=6$.　　(2) $x=1$, 或 2.　　(3) $x=2.152$.

3. (1) $x=2, -5$.　　(2) $x=4.642$.　　(3) $x=3.051$.　　(4) $x=3.537$.

4. $41, 410.　　5. $10, 010.　　7. $694.80.

8. $8030.　　9. $20,730, $30,000.　　10. $b=496.4$, 面積=77,560.

11. 5179.　　12. 表面積, 6998; 體積, 55050.

## §763.　第355頁

4. 65.　　5. 380.　　6. 144.

7. 1800.　　9. 325.　　10. 3600.

## § 764. 第 356 頁

3. 144.

## § 765. 第 356 頁

1. 5, 25, 125.  2. 343.

## § 766. 第 357 頁

4. 630, 630.  5. 715.

## § 769. 第 359, 360 頁

6. 136, 252, 8855.  7. 15.  8. 8.  9. 220.
10. 792, 330, 462.  11. 120, 420, 252.  12. 3,953,520.
13. 10010.7!.  14. $52!/(13!)^4$, $52!/(13!)^4 \cdot 4!$.  15. 2250.

## § 770. 第 360 頁

1. 15.  3. 41.

## § 771. 第 361 頁

$C_6^{12}=924$, $C_7^{15}=6435$.

## LXV 第 363 頁

1. 24.  2. 720.  3. 336.  4. 210, 5040.  5. 161, 700.
6. 30.  7. 420.  8. (1) 90, 720. (2) 322,560. (3) 4320.
9. 60, 480, 504, 84.  10. 60.  11. 1680.
12. 6.  13. (1) 399. (2) 252.  14. 360.
15. 1232, 224.  16. 31.  17. 3,783,780.
18. 462.  19. 1446.  20. 5096520.15!.
21. 825.  22. (1) 60. (2) 325.  23. 2970.
25. 63, 063.  26. 145, 152.  27. 300.
28. $5^{15}$, $15!/(3!)^5$.  29. 5760.  30. 37, 740.
32. 126.  33. 252.  34. 5040, 840, 7560.

## LXVI. 第 366 頁

1. $\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6\Sigma abc$.

2. $\Sigma a^5+5\Sigma a^4b+10\Sigma a^3b^2+20\Sigma a^3bc+30\Sigma a^2b^2c+60\Sigma a^2bcd$.

3. 83160, 34,650, 16,632.　　4. 12,600.　　5. 15,120.

6. 4455.　　7. 26,396.

## LXVII. 第371頁

1. 5對3偏於失敗. 5/8.　　2. 10/19, 9/19.　　3. \$37.50.

5. (1) 7/16, 3/8, 3/16.　　(2) 1/8, 7/40.　　(3) 1/560, 143/280, 9/40

(4) 31/65, 27/65.　　(5) 45/236.

6. 1/6, 4/9.　　7. 1/6.　　8. 11/36, 5/18.　　9. 1/12.

10. 13/18, 5/18.　　11. 5/42, 5/14, 1/21.　　12. 256/270725, 4/270725.

13. $10(143)^4 13!\,39!/52!$.　　14. 1/36, 1/54.　　15. 2/7.

## §785. 第373, 374頁

4. 255/256.　　5. 104/105.　　6. 35/81.　　7. 5/8, 1/8, 5/24, 1/24.

## §787. 第376頁

5. 697/2070.　　6. 5/6.　　7. 6/11, 5/11.

## §790. 第377頁

3. 105/512, 193/512.　　4. 5/324, 7/432.　　5. 112/243.　　6. 16/81.

## LXVIII. 第377頁

1. (1) 7/225. (2) 14/75.　　2. 66/455.　　3. \$3.58.

4. 11/16.　　5. 1/24, 1/4, 11/24, 1/4.　　6. 7對2.

7. 7對1, 103對5.　　8. 7/165, 16/33.　　9. 13對11.

10. 30對31.　　11. 7/15, 53/165, 7/33; 9/19, 6/19, 4/19

12. \$11.　　13. 3/5.　　14. 否.

15. 59049/100000　　16. 64/81.　　17. $191.3^5/5^7$.

18. \$1.　　19. 5103/32768, 1012581/1048576.

20. 81/128.　　21. \$48, \$16.

## LXX. 第385頁

1. (1) $x^3-2ax^2+(a^2-ab-b^2)x+a^2b+ab^2=0$.

(2) $6x^5-43x^4+78x^3-5x^2-12x=0$.

4. $6, -2.$

6. $2, 3, -4.$

7. $2, 5, -5.$

8. $-1/3, (1\pm\sqrt{3}i)/2.$

9. $0, 1/2, -2\pm\sqrt{3}.$

10. $-1, -1, -1\pm\sqrt{2}i.$

11. $1, -1, -2, -3/2.$

12. $-3, -2/3, \pm i.$

13. $-2, 5, 7, (-1\pm\sqrt{3}i)/2.$

14. $-1, 2, 2, (1\pm i)/2.$

15. $-1, 2, 3, -3, -4.$

16. $2, 1/2, -1/2, 2/3.$

17. $-1, -1, 3, 3, 3.$

18. $-2, 4, 5, 3/2.$

19. $-2, 1/2, 3/2, \pm i.$

20. $2, 2, -3, -4, -5.$

21. $-2, -2, -1/2, (-1\pm\sqrt{3}i)/2.$

22. $6, 8, 1/2, 1/3.$

23. $-1/2, -3/5, (-3\pm\sqrt{5})/2.$

24. $1/2, 1/3, 2/3, 3/2.$

25. $-1/2, -2/3, -3/2, (1\pm\sqrt{11}i)/2.$

26. $1, -1, -2, -3/2, \pm\sqrt{2}i.$

27. $1, -1, -2, -3/2, -1\pm\sqrt{2}i.$

28. $1, -1, 2, 2/5, (-1\pm\sqrt{3}i)/2.$

## LXXI. 第388頁

1. $3/2.$

2. (1) $1, -3/2, 9/4.$ (2) $1+2\sqrt{2}i, -3, 1-2\sqrt{2}i.$

3. (1) $-2-\sqrt{5}, -2, -2+\sqrt{5}.$ (2) $1, 3, 5.$

5. $r^2-rp+q-1=0.$

6. $-1\pm\sqrt{2}i, -1\pm\sqrt{2}i.$

7. $-1, 3/2, 3/7.$

8. $-4, -6, 6, 5.$

9. (1) $x^3-px^2+qx-r=0.$

(2) $x^3+kpx^2+k^2qx+k^3r=0.$

(3) $rx^3+qx^2+px+1=0.$

(4) $x^3+(p-3k)x^2+(q-2kp+3k^2)x+(r-kq+pk^2-k^3)=0.$

(5) $x^3+(2q-p^2)x^2+(q^2-2pr)x-r^2=0.$

(6) $r^2x^3+(q^2-2pr)x^2-(2q-p^2)x+1=0.$

10. (1) $17/4.$ (2) $-37/8.$ (3) $1.$ (4) $5/2.$

11. (1) $2/3.$ (2) $-11/3.$ (3) $-1.$ (4) $-31.$ (5) $-7/3.$

## LXXII. 第395頁

1. $x^7-3x^4+2x^2+6x-7=0.$

2. (1) $x^4-x^3-8x^2+24x+64=0.$

(2) $162x^4+27x^3-36x^2-18x+8=0.$

3. $10x^6+9x^5+3x^3-x^2+5=0.$

4. (1) $2x^5+21x^4+88x^3+181x^2+180x+74=0.$

(2) $2x^5-9x^4+16x^3-17x^2+12x+2=0$.

5. $x^4-10x^3+225x^2+1080x-16{,}875=0$.

6. $3x^4-162x^2-647x-733=0$.

7. (1) $x^3-3x^2+10=0$, 或 $x^3+3x^2+6=0$.

(2) $x^3+2x^2-4=0$, 或 $27x^3-54x^2-76=0$.

8. $x^4-x^3+6x^2-x+4=0$.　　9. $x^4+9x^3+29x^2+39x+17=0$.

10. (1) $rx^3+(q^2-2pr)x^2+r(p^2-2q)x+r^2=0$.

(2) $(r-pq)x^3+(p^3-2pq+3r)x^2+(3r-pq)x+r=0$.

11. (1) $x^3+4x^2-3x+2=0$.　　(2) $x^3-6x^2+17x-8=0$.

(3) $4x^3-9x^2+18x-27=0$.　　(4) $8x^3+16x^2+9x+2=0$.

(5) $16x^3+24x^2+27x-8=0$.

12. (1) 2, −6.　　(2) 4, −1.　　(3) 4, −7.

(4) 2, −5.　　(5) 9, −2.　　(6) 2, −1.

## LXXIII. 第401頁

1. $-1,\ -1/2,\ 1\pm 2i$.　　2. $1,\ 1/2,\ 2\pm\sqrt{2}$.

3. $x^4+12x^3+4$[illegible]$x^2+18x-116=0$.　　4. $x^4-2x^2+9=0$.

5. (1) 四個虛根.

(2) 至少二個虛根.實根之中,爲正者不能多於一個,爲負者亦不能多於一個.

(3) 無正根.　　(4) 無負根.

(5) 至少四個虛根.實根之中,爲正者不能多於二個,爲負者不能多於一個.

(6) 至少四個虛根.實根之中,爲正者不能多於一個,爲負者不能多於二個.

(7) 至少二個虛根.實根之中,爲正者不能多於二個,爲負者不能多於一個.

(8) $n$爲奇數時,至少$3n-3$個虛根,實根之中爲正者不能多於二個.爲負者不能多於一個.

$n$爲偶數時,至少$3n-6$個虛根.實根之中,爲正者不能多於兩個,爲負者不能多於四個.

7. 二正及三負.

8. $x^{2n+1}+1=0$ 有一個實根及$2n$個虛根; $x^{2n}-1=0$ 至少有$2n-2$個虛根,爲正者不能多於一個,爲負者不能多於一個; $x^{2n+1}-1=0$ 有一個

正根及$2n$個虛根.

## LXXIV. 第405頁

1. 介乎0與1, 2與3, −1與−2之間.
2. 介乎1與2, 0與−1, −2與−3之間.
3. 介乎1與2, 3與4, −1與−2之間.
4. 介乎2與3, −1與−2, −2與−3之間.
5. 介乎1與2, 4與5, −1與−2之間.
6. 介乎−2與−3, −4與−5, −6與−7之間.
7. 介乎−2與−3之間.
8. 介乎3與4, −3與−4之間.
9. 介乎0與1, 2與3, 5與6, 0與−1之間.
10. 介乎1與2, 0與−1, −1與−2, −4與−5之間.
11. 介乎1與2, 4與5, 5與6, 0與−1之間.
12. 介乎1與2, 3與4, 0與−1, −2與−3, −3與−4之間.

## LXXV. 第410頁

1. 1.213411. 2. 2.469545. 3. .179939. 4. 2.137811.
5. 2.768345. 6. −1.945341. 7. 1.903211. 8. −5.134578.
9. 3.236067. 10. −2.157451. 11. 2.356895與2.692021.
12. 1.602, 3.292, 與 −1.895. 13. 1.246, 與 −.445, −1.802.
14. .347, 1.532, 與 −1.879. 15. 1.558, −.578, −1.904, −4.075.
16. 2.5712. 17. 2.884, 3.054. 18. 13.24.
19. 二根在0與1間,一根在0與−1間.
20. 2/3, −1, .254, 1.860, −2.114.

## LXXVI. 第415頁

1. $10x^4-16x^3+2x-20,\ 40x^3-48x^2+2,\ 120x^2-96x,\ 240x-96,\ 240$.
2. $(x^4-2x^3+1)+2(2x^3-3x^2)h+6(x^2-x)h^2+2(2x-1)h^3+h^4$.
3. (1) $3-6(x+1)+7(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4$.

   (2) $80(x-2)+80(x-2)^2+40(x-2)^3+10(x-2)^4+(x-2)^5$.

   (3) $\dfrac{2+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3}{2+2(x-1)+(x-1)^2}$.
4. (1) −1, −1, 2. (2) 1/3, 1/3, −2.

(3) $\pm\sqrt{5}i/2$, $\pm\sqrt{6}i/2$.　　(4) $1\pm\sqrt{3}$, $1\pm\sqrt{3}$.

(5) $3, 3, \pm\sqrt{2}i/2$.　　(6) $(-1\pm\sqrt{3}i)/2$, $(-1\pm\sqrt{3}i)/2$, $2$.

(7) $2, 2, -1\pm\sqrt{2}i$.　　(8) $1, 1, 1, -1, -1$.

(9) $\pm i, \pm i, 2/3$.

6. $a=\pm 16$.

7. $a=3, b=1/9, x=-1/3$; 或 $a=-3, b=-1/9, x=1/3$.

9. $108p^5=3125r^3$.　　10. $(ax+b)^n$.

11. $(-1\pm\sqrt{3}i)/2, \pm i$; $(-1\pm\sqrt{3}i)/2, \pm 1$.

12. $2\pm 2\sqrt{2}, -4$; $1\pm\sqrt{2}, -1$.

## LXXVII. 第422頁

1. 極大值對照於$x=0$而爲4;極小值對照於$x=2$而爲0.
2. (1) $x=1/4$時爲極小.
   (2) $x=(1-\sqrt{3})/2$時極大, $x=(1+\sqrt{3})/2$時極小.
   (3) $x=-2$時極大, $x=2$時極小.
   (4) $x=1/3$時極大, $x=3$時極小.
   (5) $x=0$時極大, $x=2$時極小.
   (6) $x=1/2$時極大, $x=-1$或2時極小.
   (7) 無極大亦無極小.
   (8) $x=-1$時極大, $x=-(2\pm\sqrt{10})/2$時極小.

## LXXVIII. 第42[illegible]頁

1. 二根介乎3與4,一根介乎$-1$與$-2$.
2. 二根介乎3與4,一根介乎$-3$與$-4$.
3. 一根介乎0與$-1$,二根爲虛根.
4. 一根介乎$-1$與$-2$,二根爲虛根.
5. 二根介乎2與3,一根介乎$-4$與$-5$.
6. 二根介乎3與4,二根介乎$-1$與$-2$.
7. 一根介乎0與1,一根介乎$-1$與$-2$,二根爲虛根.
8. 二根介乎0與1,二根介乎3與4.
9. 二根介乎0與1,一根介乎2與3,一根介乎$-3$與$-4$.
10. 一根介乎0與1,一根介乎1與2,二根介乎$-2$與$-3$.
11. 一個實根.
12. 無實根.

13. $n$爲偶數時,無實根;$n$爲奇數時,一個實根。

14. 二個實根.

## LXXIX. 第432頁

1. $s_3=-(a_1^3-3a_0a_1a_2+3a_0^2a_3)/a_0^3$.

   $s_4=(a_1^4-4a_0a_1^2a_2+4a_0^2a_1a_3+2a_0^2a_2^2)/a_0^4$.

2. $\Sigma 1/\alpha^2=(p^2-2q)/r^2$. $\Sigma 1/\alpha^3=(p^3-3pq+3r)/r^3$. $\Sigma\alpha\beta^2=3r-pq$.

3. $x^3+7x^2+12x-1=0$.

4. (1) $s_1=1,\ s_2=-5,\ s_3=20,\ s_4=-9$.

   (2) $29$. (3) $20$. (4) $-60$. (5) $-9/256$. (6) $-111/4$.

## § 871. 第435頁

2. $-1+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ -1+\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ -1+\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$.

   其中 $A=(-1+\sqrt{5})/2, B=(-1-\sqrt{5})/2$.

## § 874. 第436頁

2. $(1\pm\sqrt{5})/2,\ (3\pm\sqrt{13})/2$.

## § 875. 第438頁

2. $(1+\sqrt{3}i)/2,\ \sqrt{2}(1\pm i)/2,\ \sqrt{2}(-1\pm i)/2$.

## LXXX. 第441頁

1. $4,\ -2\pm i\sqrt{3}$.

2. $8,\ (1\pm i\sqrt{3})\ 2$.

3. $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ \omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ \omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{A}$,

   其中 $A=2+\sqrt{3},\ B=2-\sqrt{3}$.

4. $A=3/4+\sqrt{1887}/72,\ B=3/4-\sqrt{1887}/72$.

5. $-1+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ -1+\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ -1+\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$,

   其中 $A=4+2\sqrt{6},\ B=4-2\sqrt{6}$.

6. $1+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ 1+\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ 1+\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$,

   其中 $A=-5/2+5\sqrt{749}/54,\ B=-5/2-5\sqrt{749}/54$.

7. $(-\sqrt{3}\pm\sqrt{4\sqrt{3}-5})/2,\ (\sqrt{3}\pm i\sqrt{5+4\sqrt{3}})/2$.

8. $(1\pm\sqrt{5})/2,\ (3\pm\sqrt{13})/2$.

9. $-1\pm\sqrt{2},\ 1\pm 2i$.

10. $(-5\pm\sqrt{33})/2,\ (-3\pm\sqrt{13})/2$.

11. $(1\pm\sqrt{3}i)/2,\ (-1\pm\sqrt{3}i)/2,\ (1\pm2\sqrt{2}i)/3.$

12. $\pm i,\ (1\pm\sqrt{3}i)/2,\ (3\pm\sqrt{5})/2,\ (1\pm\sqrt{15}i)/4.$

13. $1,\ 1,\ -1,\ (-1\pm\sqrt{15}i)/4,\ (-1\pm\sqrt{35}i)/6.$

14. $z^3+z^2-2z-1=0.$

15. $(2a^2-3ab+c)^2/4+(b-a^2)^3 \gtreqless 0.$

16. $\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5},\ k=0,\ \cdots\cdots,\ 4;\ \cos\frac{(2k+1)\pi}{6}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{6},\ k=0,\ \cdots\cdots,\ 5.$

17. (1) $2\cos 20^\circ,\ 2\cos 140^\circ,\ 2\cos 260^\circ.$

(2) $2\sqrt{2}\cos 15^\circ,\ 2\sqrt{2}\cos 135^\circ,\ 2\sqrt{2}\cos 255^\circ.$

18. 3.　　19. 底之半徑為$2\frac{1}{2}$,高為8.

20. 本題原意無解.就事實論,若能設法將高求出,可得一頁結果,內接於圓錐之最大圓柱之體積等於圓錐之九分之四,則可證明.學者試證例中所述之圓錐,其內接之最大圓柱之高為2.

## LXXXI. 第446頁

1. $x^3-p(q^2+r^2+s^2)+2qrs.$　　2. $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$

3. $p(x^2+q^2+r^2+s^2).$　4. 0.　5. 18.　6. 74.　7. $-30.$

10. (1) $a_1b_2c_3d_4-a_2b_1c_3d_4.$　(2) $a_1b_2c_3d_4-a_1b_3c_2d_4.$　(3) $-a_2b_3c_4d_1.$

(4) $a_1b_2c_3d_4+a_1b_3c_4d_2+a_1b_4c_2d_3-a_1b_4c_3d_2-a_1b_3c_2d_4-a_1b_2c_4d_3.$

(5) $a_1b_2c_3d_4+a_2b_4c_3d_1+a_4b_1c_3d_2-a_4b_2c_3d_1-a_2b_1c_3d_4-a_1b_4c_3d_2.$

11. $a_2b_4c_3d_1e_5,\ -a_4b_2c_1d_5e_3,\ a_3b_4c_3d_2e_1,\ -c_1d_2a_3e_4b_5,\ -c_1b_2e_3a_4d_5,\ -d_3c_2e_4b_1a_5.$

## LXXXII. 第450頁

1. (1) $-22,680.$　(2) 0.　(3) $4abcdef.$

## LXXXIII. 第456頁

1. 0.　2. $-4.$　3. 0.　4. $-357,840.$

5. $\begin{vmatrix} 0 & bc-a^2 & b^2-ac \\ b^2-ac & 0 & bc-a^2 \\ bc-a^2 & b^2-ac & 0 \end{vmatrix}.$　6. $\begin{vmatrix} ap+cr & ap & cr \\ ap & ap+bq & bq \\ cr & bq & bq+cr \end{vmatrix}.$

7. $\begin{vmatrix} a & -a & a^2+ab & ac+ad \\ -b & b & ab+b^2 & bc+bd \\ c & c & -ac+bc & -c^2+cd \\ d & d & ad-bd & cd-d^2 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} l^2+m^2+n^2 & lm+mn+nl & ln+ml+nm \\ ml+nm+ln & m^2+n^2+l^2 & mn+nl+lm \\ nl+lm+mn & nm+ln+ml & n^2+l^2+m^2 \end{vmatrix}$.

## LXXXIV. 第460頁

1. $x=10/7,\ y=1,\ z=4/7.$ 2. $x=1,\ y=1/2,\ z=1/3.$

3. $x=\dfrac{d(d-b)(d-c)}{a(a-b)(a-c)},\ y=\dfrac{d(d-c)(d-a)}{b(b-c)(b-a)},\ z=\dfrac{d(d-a)(d-b)}{c(c-a)(c-b)}.$

4. $x=1,\ y=1/2,\ z=1/3,\ t=-1.$ 5. $x:y:z=-1:1:1.$

6. 若$a_1b_2-a_2b_1\neq0$, 則$x:y:z=k:l:-1.$ 7. $\lambda=0$, 或 $-3\pm2\sqrt{21}.$

## LXXXV. 第468頁

1. 公根為 $-3/2$.

2. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

3. $(a+d)^3+b^3+c^3-3bc(a+d).$ 4. (1) $4p^3+27q^2.$ (2) $c(4b^3+27a^2c).$

5. 二重根為 $-2$.

6. $x, y=0, 0;\ 3, -1;\ -2, 2;$ 及一無窮解.

## §950. 第475頁 例3

(1) $\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{3}{3\cdot4}+\dfrac{5}{4\cdot5}+\dfrac{7}{5\cdot6}+\cdots\cdots$; 發散的.

(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{10}+\dfrac{2}{17}+\cdots\cdots$; 收斂的.

(3) $\dfrac{1}{9}+\dfrac{3}{35}+\dfrac{5}{91}+\dfrac{7}{189}+\cdots\cdots$; 收斂的.

## §952. 第477頁

5. $x<1$ 時. 6. $x>1$ 時.

## LXXXVI. 第478頁

1. 收斂的. 2. 收斂的. 3. 發散的.
4. 收斂的. 5. 發散的. 6. 發散的.
7. 收斂的. 8. 收斂的. 9. 發散的.

10. $\frac{2}{1\cdot3}+\frac{3}{2\cdot4}+\frac{4}{3\cdot5}+\frac{5}{4\cdot6}$; 發散的，

11. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}+\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{28}}+\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{65}}$; 發散的.

12. $(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{10}-3)+(\sqrt{17}-4)$; 發散的.

13. 收斂的.　　14. 發散的.

15. $x<1$ 時.　　16. $x<1$ 時.

## LXXXVII. 第483頁

1. (1) 收斂的.　(2) 發散的.　(3) 收斂的.

2. (1) 除 $x=0, 1, -1/2, 1/3, \cdots\cdots, (-1)^{n-1}/n, \cdots\cdots$ 外,對於 $x$ 之一切實數值皆爲收斂的.

   (2) $x$ 小於 1 時爲收斂的,此外爲發散的.

## LXXXVIII. 第487頁

1. $\infty$.　　2. $1/2$.　　3. $1/2$.

4. 對於 $x=-1$ 及對於 $x$ 介乎 $-1$ 與 2 間之一切值.

5. 對於 $x$ 之一切實數值.

6. 對於 $x$ 之值之大於 $1/3$ 及小於 $1/2$ 者.

## LXXXIX. 第500頁

4. $a_1=-1/2, a_2=7/8, a_3=7/16, a_4=-21/64$.

5. (1) $2-x/4-x^2/32-5x^3/768$.　(2) $1+3x/2-9x^2/8-13x^3/16$.

6. (1) $2-3x-3x^2+20x^3+\cdots\cdots$.　(2) $x+6x^2+4x^3-x^4+\cdots\cdots$.

7. (1) $3x^2-2x^3-x^4+3x^5+\cdots\cdots$.　(2) $x^{-2}-2x^{-1}+1+9x+\cdots\cdots$.

8. (1) $-11/6+5x/36-89x^2/216+67x^3/1296-761x^4/7776+\cdots\cdots$;

   $|x|<2$ 時收斂.

   (2) $2-11x/3+46x^2/9-173x^3/27+616x^4/81+\cdots\cdots$; $|x|<1$ 時收斂.

9. (1) $x^{-1}+x^{-2}+7x^{-3}+4x^{-4}+\cdots\cdots$; $|x|>3$ 時收斂.

   (2) $1-x^{-1}+x^{-4}-x^{-6}+\cdots\cdots$.

10. (1) $x=y-y^2+y^3-y^4+\cdots\cdots$.　(2) $x=y+y^2/2+y^3/6+y^4/24+\cdots\cdots$

11. $x=(y-1)-(y-1)^2/2+(y-1)^3/6-(y-1)^4/24+\cdots\cdots$.

12. $x=y^{\frac{1}{2}}-3y/2+45y^{\frac{3}{2}}/8-27y^2+\cdots\cdots$.

13. (1) $y=3x-10x^2+60x^3+\cdots\cdots$.

(2)　$y=x^2+x^5+3x^8+\cdots\cdots$. $y=x^{\frac{1}{2}}-x^2/2-3x^{\frac{7}{2}}/8+\cdots\cdots$.

$y=-x^{\frac{1}{2}}-x^2/2+3x^{\frac{7}{2}}/8+\cdots\cdots$.

## XC.　第508頁

1. $\log_e 4=1.3862$. $\log_e 5=1.6093$.　　7. $-7x^4/5^5.2^{18}$.　　8. $231x^3/2^{10}$.

9. 第一級數 $|x|<3/2$ 時收斂;第二級數 $|x|<3$ 時收斂.

10. $1-3x/4+45x^2/32+43x^3/128-333x^4/2048$.

11. $4/3+13x/27+53x^2/1296$; $|x|<8/3$ 時收斂.

12. (1)　$4/3$.　(2)　$\infty$.

15. $x+x^2/2-2x^3/3+x^4/4\cdots\cdots$; $|x|<(\sqrt{5}-1)/2$ 時收斂.

## XCI.　第511頁

1. $-19x^3+52x^4$.

2. (1)　標尺爲 $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}=0$; 項爲 $-2x^5+x^6$.

　(2)　標尺爲 $a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}=0$; 項爲 $31x^5+16x^6$.

　(3)　標尺爲 $a_n+3a_{n-1}+3a_{n-2}+a_{n-3}=0$; 項爲 $28x^6-36x^7$.

3. (1)　母函數爲 $(2-x)/(1-x-2x^2)$; 普徧項爲 $[2^n+(-1)^n]x^n$.

　(2)　母函數爲 $(3-8x)/(1-5x+6x^2)$; 普徧項爲 $(2^{n+1}+3^n)x^n$.

5. 母函數爲 $(1+x+4x^2)/(1-x-5x^2-3x^3)$; 普徧項爲 $[3^n+(-1)^n n]x^n$.

6. 母函數爲 $[a-(a-d)x]/(1-2x+x^2)$.

8. 和爲 $2/(1-3x+3x^2-x^3)$.

## XCII.　第513頁

(1)　$x<1$.　　(2)　$x<\infty$.　　(3)　$x<3$.

## XCIII.　第523頁

1. $\frac{3}{1}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{93}{29}$.　　2. $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{41}{72}, \frac{496}{871}$.

3. $\frac{1}{1+}\frac{1}{5}$.　　4. $8+\frac{1}{6+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}$.　　5. $\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4}$.

6. $3+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3}$.　　7. $\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{3+}\frac{1}{9+}\frac{1}{7}$.

8. $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{6+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}$; 第四近値爲 $\frac{104}{79}$; 誤差 $<\frac{1}{79^2}$ (確實誤差爲 $1/79.177.$).

10. $\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{19+}\frac{1}{8+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5}$; 第四近值爲 $\frac{3}{4}$; 誤差 $<1/4\cdot 19$.

11. $4+\frac{1}{8+}\frac{1}{8+}\cdots\cdots$; 第五近值爲 $\frac{17684}{4289}$; 誤差 $<\frac{1}{4289^2}$.

12. $5+\frac{1}{10+}\frac{1}{10+}\cdots\cdots$; 第五近值爲 $\frac{52525}{10.01}$; 誤差 $<\frac{1}{10301^2}$.

13. $2+\frac{\dot{1}}{2+}\frac{\dot{1}}{4+}\cdots\cdots$; 第五近值爲 $\frac{218}{89}$; 誤差 $<\frac{1}{89^2}$.

14. $6+\frac{\dot{1}}{6+}\frac{\dot{1}}{12+}\cdots\cdots$; 第五近值爲 $\frac{33294}{5401}$; 誤差 $<\frac{1}{5401^2}$.

15. $10+\frac{\dot{1}}{4+}\frac{\dot{1}}{20+}\cdots\cdots$.

16. $\frac{1}{4+}\frac{\dot{1}}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{\dot{1}}{8+}\cdots\cdots$.

17. $4+\frac{\dot{1}}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{\dot{1}}{8+}\cdots\cdots$.

18. $8+\frac{\dot{1}}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{\dot{1}}{16+}\cdots\cdots$.

19. $5+\frac{\dot{1}}{5+}\frac{\dot{1}}{10+}\cdots\cdots$.

20. $\frac{1}{1+}\frac{\dot{1}}{1+}\frac{1}{2+}\frac{\dot{1}}{1+}\cdots\cdots$.

21. $5+\frac{\dot{1}}{1+}\frac{\dot{1}}{4+}\cdots\cdots$.

22. $(\sqrt{37}-4)/3$.

23. $(\sqrt{37}-5)/3$.

24. $\frac{3\sqrt{35}+50}{\sqrt{35}+15}$.

25. $\frac{\sqrt{1806}+36}{34}$.

26. $\frac{20+\sqrt{10}}{43+2\sqrt{10}}$.

30. $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots\cdots$.

33. 577/408; 誤差 $<1/408^2$.

34. 355/113.

35. 87/32 誤差 $<1/32^2$.

36. $x=546,\ y=324$.

37. $x=1350,\ y=-770$.

38. $x=155+323t,\ y=248+517t$.

# 索　引

## (排列依畫數次序,數字表頁數)

## 五畫



## 六畫

## 七 畫



## 八 畫



## 九 畫

## 十 畫

## 十一畫



## 十二畫

## 十三畫



## 十四畫



## 十五畫

## 十六畫



## 十七畫



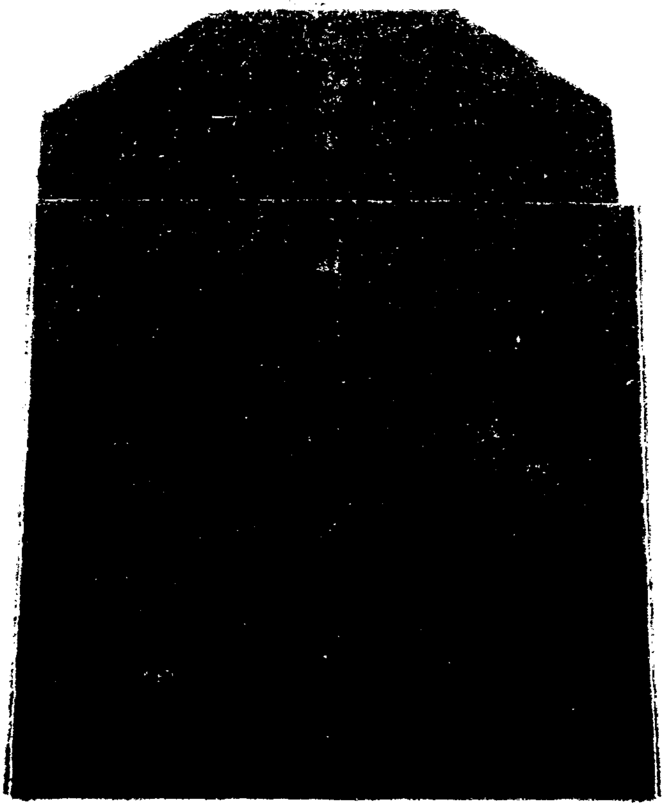
## 十八畫



## 二十二畫



## 外來字



# 漢譯范氏高等代數學

定價國幣

（外埠酌加寄費）

| | |
|---|---|
| 譯述者 | 沈璿<br>曹𨨏 |
| 校訂者 | 吳靜山 |
| 發行者 | 陳邦楨 |
| 印刷者 | 新亞書店 |
| 發行所 | 新亞書店<br>上海河南路一五九號 |

中華民國二十二年九月初　版
中華民國二十九年一月二十版
中華民國三十一年八月重排後初版
中華民國三十四年九月重排後二版

B. 5128　　15/9/34　　2001—4000