初中幾何

上冊

許樹龍

教育部編審會

二

初中幾何

上冊

教育部編審會

初中幾何

編輯大意

(1) 本書分實驗幾何和理解幾何兩部分，末附數值三角，最適合初級中學之用.

(2) 實驗幾何用意，原在藉作圖與度量引入基本觀念. 本書從差近作圖入手，次及規矩作圖，然後在理解幾何中講授證法，由簡而繁，由具體而抽象，極合學習心理上的程序.

(3) 幾何圖形特性，本爲直觀教材，而證理則爲邏輯方法，初學不宜同時顧及兩方面. 本書先在實驗幾何中，對各種圖形基本性質，令學生自行實驗，綜合，歸納以培養其自動研究的精神，且至理解幾何講授證法時，已能明瞭題材意義，庶可以全力注意推理方法，則對於邏輯上的條理較易明白.

(4) 初習理解幾何者，最感受證法茫無頭緒的痛苦. 本書於各定理證法前，均先加解析，說明線索，俾學生恍然於證題所取的步驟，不特便於記憶，尤易助其了解. 又對於基本證題方法，亦時時提出，以便初學知運用定理的

方法.

(5) 幾何最重邏輯次序，說理務求嚴正，然對初學，應顧及其學習能力與心理需要.本書於不背謹密精神之中，極力注意學生程度，務使其自覺嚴密的必要，而不生繁瑣沉悶之感.

(6) 本書對應用方面，時加注意，不特使學生有解決實際問題的能力，且可引起其學習的興味.

(7) 本書習題排列勻稱，可使學生每週至少有一次作題的機會.習題的選擇，以能助人了解原理爲原則，此外每章之末另附雜題，使學生有反復練習的機會，不致有學過卽忘之弊.每册之末，更另附總雜題，以便作全册的總溫習.

(8) 幾何中圖形應與說明對照，始便於研習，本書卽係如此編制，學生不至有前後翻閱的不便.

初 中 幾 何

上　冊

目　　次

實 驗 幾 何

第一編　直接度量

第二編　基本觀念與作圖

第三編　幾何計算

理解幾何

第四編 理解幾何基本事項

第五編 直線形(一)

第六編 直線形(二)

初中幾何

上冊

實驗幾何

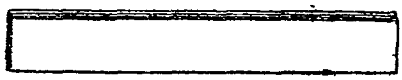
第一編 直接度量

I. 度量用器

1. 儀器 古話說的好:「工欲善其事, 必先利其器,」學幾何應備的儀器, 有下列幾種.

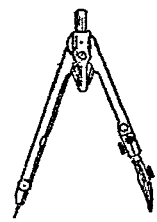
(一) **直尺** 本是一根平直沒有分度的尺. 爲實際測量方便起見, 上面都刻有分度, 例如普通的公尺, 市尺.

(二) **圓規** 或稱兩脚規, 一脚尖銳, 一脚可裝鉛筆或鴨嘴筆.



直尺（無度尺）

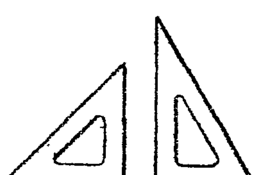
二市寸的尺



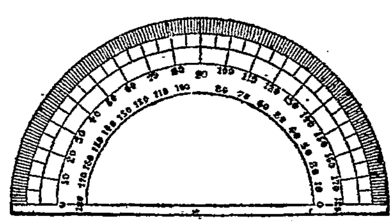
圓規

（三）**三角板一套** 共兩塊，都有一個角是和書本的角一樣形狀（叫做直角）．一塊的最長邊是最短邊的兩倍，另一塊則有兩邊一般長短．

（四）**量角器** 是一個半圓形的器具，在圓形的邊上，分成一百八十份．



三角板

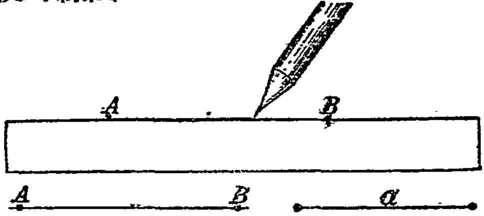


量角器

註 第三四兩種儀器和刻度的尺，本非幾何學理論上所許；但為求手續簡易及實際量法上需要計，也不能不備．

2. 直線畫法 放直尺於紙上，以鉛筆沿邊畫

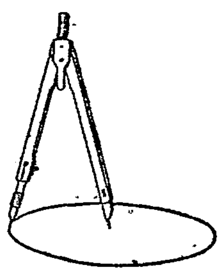
去，便得**直線**．直線只看是否平直，若限定起點終點而論長短，便叫**線段**．



用手指按着尺上一處，尺可轉動，按着兩處，尺即固定．在紙上任取二點，怎樣去作過這二點的直線？

註　點用一個大寫字母記出，直線或線段用二個大寫字母或一個小寫字母記出．

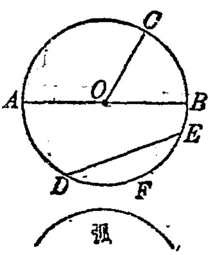
3. 線段量法　測量線段的長短，就是和另一標準線段比較，看是他的若干倍，或幾分之幾．這個標準線段叫做**單位**線段．任何長的線段，都可選作單位，常用的有公尺，市尺，英尺等，量線段長短時，用公尺或別種尺都可，但務須記出單位．



4. 圓規用法　把圓規兩脚分開，一脚上的針尖釘住紙上，轉動他一脚，便可畫成一條封閉

的曲線．在轉動時，兩脚間的開度，不能變更，否則起訖的地方便不能密合．

5．**圓**　像剛才用圓規畫成的那種圖形，叫做圓．針尖釘住的地方，叫**圓心**．圓上任一點到圓心的距離，叫**半徑**．由此可見有圓心和半徑，便可作圓，又一圓的半徑都等長．圓的實例很多，如碗口、車輪、銅元都是．



在圓上取兩點，聯成一線段，如這線段經過圓心像 AB，便叫**直徑**．不經過圓心像 DE 時，叫**弦**．

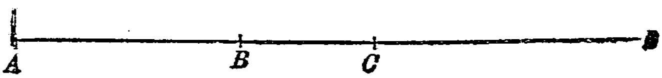
直徑半徑二者長短如何？

圓的一段叫做**弧**．

註　圓上二點，分圓成長短二弧；普通所說二點間的弧，乃是指短的而言，像上面圖中 DE 弧，是指 DFE 而非 DCE．

習　題　一

1．測量線段 AB, BC, CD 的長，用公分及公釐的近似值記出．更用加法求 AD 的長，和直接測得的結果比較．



$AB=$ 公分

$BC=$ 公分　　　$AD=8.4$ 公分

$CD=$ 公分

$AB+BC+CD=8.5$ 公分

2. 用公釐表圖中AC, BC 的長，求其差；再直接量AB來檢驗.

3. 先猜你的書冊的長短邊，然後用尺測量，把結果填入表中：

	猜　得	量　得
長　邊	15.2 公分	17.5 公分
短　邊	12 公分	12.5 公分

4. 取不在一直線上的三點 A, B, C, 用測量證明 $AB+BC$ 常比 AC 爲大.

5. 同上題，用量法驗明 AB, BC 的差，常比 AC 爲小.

6. 任意畫一直線 AB. 用下法平分 AB 爲相等二份：

先量 AB 的長，從 A 點取一段 AC 使等於 $\frac{1}{2}AB$. 量 CB 來驗明分法有無錯誤.

7. 分開圓規的兩脚，使其距離爲 1 公分，2 公分，2.5 公分，3 公分. 並以同一點做心，各畫一圓（像這樣的許多圓，叫做**同心圓**).

8. 用一市寸做半徑，在紙上畫幾個圓，然後將紙疊合，使圓心相重，看二圓是否完全密合. 由此可推出什麼結論？

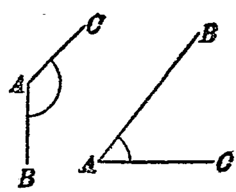
9. 草地上立一竿，一隻羊用長 15 碼的繩繫在竿上. 試給一圖代表這羊能吃到草的範圍（以 1 吋代表 10 碼的長).

10. 畫一半徑 2 寸的圓. 直徑長多少？任畫幾條弦，量他們的長短，和直徑比較，可得什麼結論？

11. 依一圓直徑，將紙摺合，看二個半圓能不能完全密合？

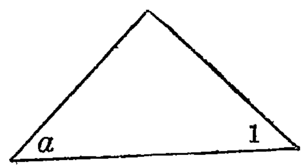
II. 角

6. **角** 鐘錶兩針的開口，叫做角. 放開圓規的兩脚，兩脚中間的開口，也是角. 從一點 A，向不同的二方向各引一直線 AB，

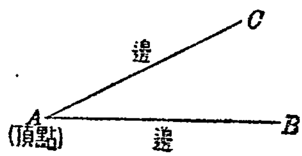


AC, 便成一角, 如圖.

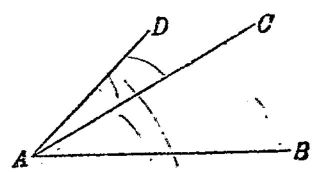
記角的方法有幾種. 上圖的角, 可記爲$\angle BAC$, 或 $\angle CAB$, 或簡作 $\angle A$, 文字前的$\angle$是角的符號.



有時可用小寫英文字母或數字寫在角內來記他. 如圖寫作 $\angle a$, $\angle 1$ 是.



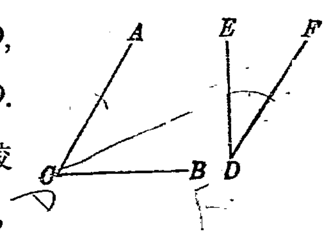
二直線相交的A點叫做角的頂點, 直線 AB, AC 叫做角的兩邊, 記角時必須把頂點的字母寫在中央.



7. 角的和差 右圖. BAD 角爲 BAC, CAD 兩角的和, BAC 角是 BAD, CAD 兩角的差, 以式表明如下:

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD,$$

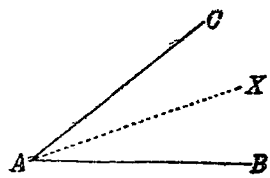
$$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD.$$



8. 角的比較 要比較 $\angle ACB$ 和 $\angle EDF$ 的大小,

從紙上剪下 $\angle ACB$ 放在 $\angle EDF$ 上，使 C 落在 D 上，一邊 CB 落在 DF 上．如果 CA 適落在 DE 上，這兩角便是一般大小；如果 CA 落在 $\angle EDF$ 內，則 $\angle ACB$ 便小于 $\angle EDF$；反之 CA 落在 $\angle EDF$ 外，$\angle ACB$ 便大于 $\angle EDF$.

9. 分角線　任畫一角 BAC，摺紙使 AB 邊和 AC 邊相合，則摺痕 AX 叫做 $\angle BAC$ 的**平分線**，或稱**分角線**.

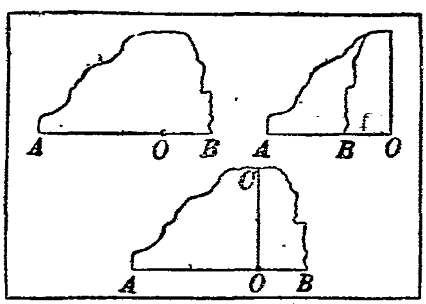


$\angle BAX$ 和 $\angle CAX$ 是不是一般大小？

由摺紙法可見

一角……有……分角線

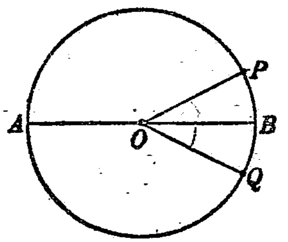
10. 直角　取紙一張，在直線 AB 上任取一點 O，將紙對摺，使 OA 與 OB 相合．放開後依摺痕作直線 OC，



則 $\angle AOC$, 和 $\angle BOC$ 兩角一般大小. 像這樣的兩角，都叫做**直角**，摺痕 OC 叫做 AB 的**垂線**，或稱 OC **垂直**於 AB.

直角的記號爲 rt.$\angle$；垂直的記號爲 $\perp$.

11. 量角原理 任意畫一圓，命圓心爲 O，更作直徑 AB. 在圓周上任取一點 P，用小針穿孔爲記. 沿 AB 直徑對摺，可見兩個半圓完全密合，P 點落下的地方再用針尖穿一小孔爲記，叫這點做 Q. 放開後連結 OP, OQ，由摺紙法知 $\angle POB = \angle QOB$, 且 PB 弧 $= QB$ 弧. 所以**等長的弧對着在圓心處等大的角.** 同圓或等圓一



12. 角的度量 根據以上的理，假如圓周被分成三百六十等分，每一分點，都和圓心相連，那麼在 O 點的周圍，必有三百六十個相等的角. 每一角叫做一度，是角的單位，量角器便是如此做成. 將每一度角分成六十份，每份叫做一分；每分再分爲

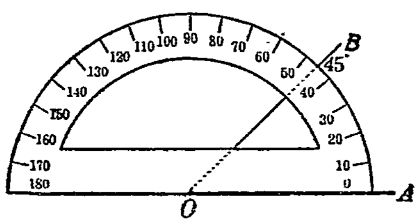
六十份，每份叫做一秒．所以

$$1度=60分, \quad 1分=60秒.$$

分秒太微細，不能在量角器上讀出來．

註 度的記號是 °，分的記號是 ′，秒的記號是 ″．

13. 量角器用法 用量角器量角時，把底線的中心合在角頂上，使底線和角的一邊相合，看他一邊落在量角器上的度數，一讀便知．例如下圖 $\angle AOB=45°$．



依同法可用量角器作已知度數的角．

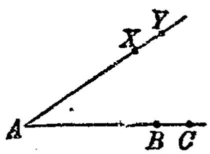
習 題 二

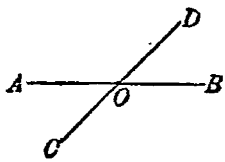
1. 角的兩邊長短變更時，這角的大小變更麼？

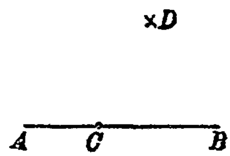
2. 從一點 A 引兩直線 ABC 及 AXY，試用各種方法記出兩線間的角．

3. AB，CD 兩直線相交於 O．在 O 點周圍共有幾個

角？ 將各角記出來.





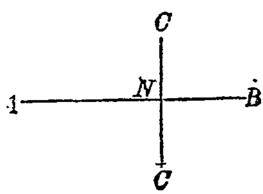


4. 直線 AB 上有一點 C，試用摺紙法過 C 點作 AB 的垂線.

5. 同上題，但 D 爲直線 AB 外一點.

6. 由摺紙法可知：經過直線上或外一點……可作……條直線和原來的線垂直.

7. 畫一直線 AB，從線外一點 C 作 AB 的垂線，有另一作法如下：

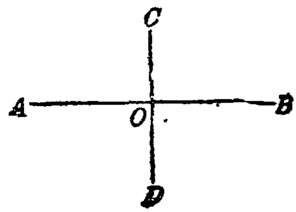


依 AB 對摺，用小針自 C 點穿孔得 C'，放開後連結 CC' 與 AB 直線交於 N，那麼 $CN \perp AB$. 試說明其故.

8. 畫一直線 AB，用摺紙法求 AB 的垂直平分線（平分 AB 並且和 AB 垂直的線）. 在這線上任取 P 點，量 AP 和 BP 的長，得什麼結論？

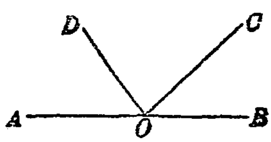
9. 三點鐘和九點鐘時，時鐘的兩針各成若干度的角？

10. AB, CD 兩直線互相垂直，且相交於 O，在 O 點周圍共有幾直角？共有若干度？一直角爲幾度？

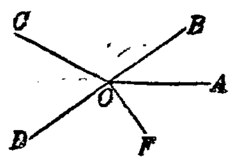


11. $\frac{1}{2}rt.\angle$, $\frac{1}{3}rt.\angle$, $\frac{3}{4}rt.\angle$. 各幾度？

12. 270°，180°，11°15′，各等於直角的幾倍或幾分之幾？



13. 在直線 AB 上取一點 O，作 OC, OD. 量 $\angle BOC$, $\angle COD$ 和 $\angle DOA$，再求其和，看共有幾度？



14. 過一點 O，引 OA, OB, OC, OD, OF 諸直線. 量 $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOF$, $\angle FOA$. 再求總和，看共有幾度？

15. 用量角器量兩塊三角板各角的度數，並求其和.

14. 度量的誤差 用細密的尺去量普通線段的長，可準到百分之一寸，但總不能絕對正確. 測量

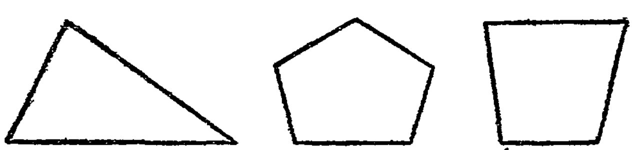
一量時，差誤總是無可避免的．在推求日與地球的距離時，總是幾里的差誤，僅佔全長的極微一部分，所以毫無關係．但如距離很短，好像量機器上圓筒的直徑，那麼百分之一寸的差誤，便會影響結果．所以差誤的限度，應該以全長的百分數表出．

假如量長能正確到$\frac{1}{100}$寸，則量 5 寸長的線段時，差誤僅爲全長之$\frac{1}{500}$或 .002(千分之二)．量的距離愈長，近似差誤的百分數便愈小．所以在實際計算的問題中，如欲得較佳的結果，圖應畫得大些．

III. 三 角 形

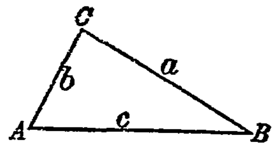
15. 直線形 用直線段圍成的圖形，叫**直線形**．各線段叫**邊**，每兩邊夾一角．邊數和角數總相等．

直線形又叫**多角形**，如**三角形**，**五角形**等等．但四角形普通常稱爲**四邊形**．



三角形　　五角形　　四邊形

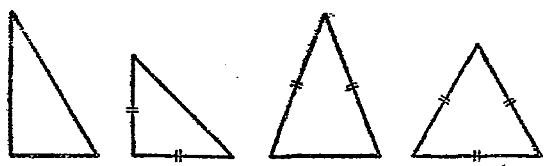
16. 三角形記法　三角形記號是△，後面附記角頂的三字母．如右圖的三角形，記爲$\triangle ABC$.



互對的角頂和邊，常用相同的大小寫字母記出．

17. 三角形元素　三角形中三邊，三角，叫做三角形元素；已知一部分元素，常可求出其他部分．本編先講圖解法．十一，二兩編再論計算方法，便是數値三角．

18. 重要的特殊三角形　我們所用的三角板，就是三角形．這兩三角形各有一直角，叫做**直角三角形**．又有一塊中兩邊相等，叫**等腰三角形**(不論其中有無直角)．三邊都等的叫**等邊三角形**.

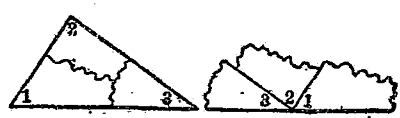


直角三角形　　等腰三角形　等邊三角形

19. 三角形各角總和 任意畫幾個三角形，量三個角，並求其和．填入表中．將結論寫出．

各角＼三角形	第一三角形	第二三角形	第三三角形	第四三角形
第一角	相	相	|	|
第二角	|	等	相	
第三角	等	|	等	
總　和	180°	180°	180°	180°

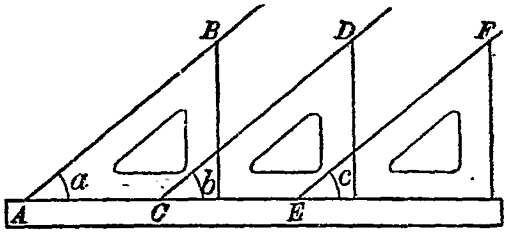
再把三角形三角剪下來，將各頂點集攏一處，各角依次相接如右圖．看外面二邊，作何形狀(看習題二 13 題)．



由上述的實驗，可得什麼結論？

20. 平行線 將直尺緊壓在紙上，另用三角板一塊，一邊緊靠直尺，畫直線 AB，然後將三角板沿直尺移動，再畫 CD，EF 等．試延長這些直線，看能否相交？像這樣作出的線，叫做**平行線**．尋常

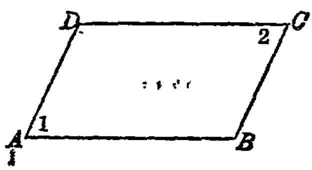
所見平行線的實例很多，如雙輪車在地上行動的痕跡，



火車的軌道，書籍或方桌的對邊等，任意延長，均不相交，所以都是平行線.

由以上平行線的作法，知平行線和直尺間的角 $\angle a, \angle b, \angle c$ 都相等，因爲都等於三角板的一角.

21. 平行四邊形　二組對邊都平行的四邊形，叫**平行四邊形**，常以符號▱來記.



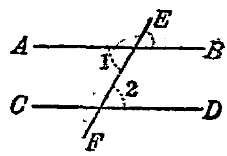
如右圖 $ABCD$ 是▱，其中 $\angle 1, \angle 2$, 叫對角.

習 題 三

1. 假定量長可以正確到 $\frac{1}{5}$ 公釐. 試以百分數表出 (a) 量 10 公分，(b) 2 公分的線段時之差誤.

2. 假定量長能正確到 $\frac{1}{100}$ 寸，量 (a) 10 寸 (b) 4 寸 (c) $2\frac{1}{2}$ 寸之線段時，差誤的百分數如何?

3. 畫兩平行線和另一直線相割如圖. 量1,2兩角, 比較大小.

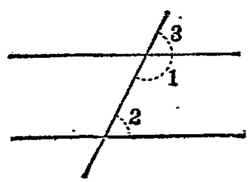


註 像這樣的兩角, 叫做內錯角.

4. 將上題圖中 $BEFD$ 一部分剪下倒轉過來, 放在 $CFEA$ 上, 看 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是否密合.

由上二題, 可知兩平行線與另一截線所成二個內錯角, 有什麼關係? 寫出一條結論來.

5. 畫兩平行線, 和一直線相截. 量直線一側的兩個角1和2, 得什麼結論?



6. 不用量法, 能否由 §20 的理, 直接推出上題的結論?

7. 用量角器, 在一線段兩端, 向同側作相等的角. 延長各邊, 相交成一三角形. 量對等角的邊, 看有什麼關係?

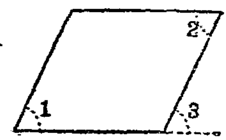
8. 畫幾個等腰三角形, 量各角是否都相等? 有什麼關係?

9. 量等邊三角形各角, 看是幾度?

10. 不用量法，能否由§19和8題預斷上題結果?

11. 任意畫幾個▱，量對邊的長，看是否相等?

12. 量▱的對角，看是否相等?



13. 在右圖的▱中，∠1，∠3有何關係(參看§20)? ∠2和∠3呢(看3，4二題)?

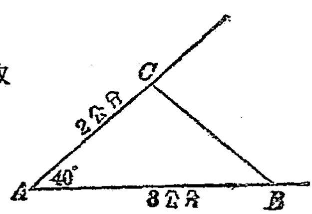
試由第4題的理，推斷上題結果(不用量法).

22. 三角形圖解法一——已知二邊和夾角.

問題 已知三角形的兩邊爲2公分和3公分，兩邊所夾的角爲40°. 求餘一邊之長，和其餘兩角的度數.

解 用量角器作∠A=40°.

用有度尺在角的一邊上截取AB=3公分，另一邊上截取AC=2公分.



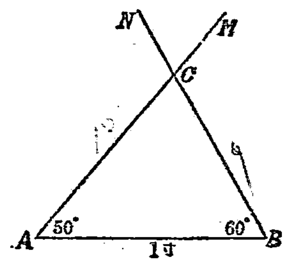
連結BC，成△ABC. 45.0

量得 ∠B=……，∠C=……，BC=…….

23. 三角形圖解法二——已知二角和一邊.

問題 已知三角形的兩角爲50°和60°，兩角間的夾邊長1寸，求餘二邊及一角. 2 a 2

解 畫線段 $AB=1$ 寸



用量角器在兩端作

$\angle MAB=50°$

$\angle NBA=60°$

命 AM, BN 兩邊的交點為 C. 得三角形 ABC.

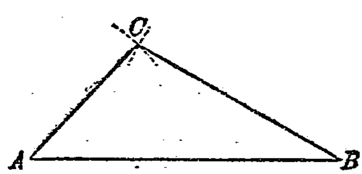
量得 $AC=$ 10寸……, $BC=$ 9寸……, $\angle ACB=$……

註 在上例裏是已知二角和他們的公共邊. 但任知二角時，即可按 §19 的結論算得第三角，解法便知和上相同.

24. 三角形圖解法三——已知三邊.

問題 已知三角形的三邊長為 3 公分，2 公分，4 公分，求三角的大小.

解 畫線段 $AB=4$ 公分，



以 A 為心，2 公分長的半徑作一弧. 又以 B 為心，3 公分的半徑，再作一弧(看圖中虛線).

命二弧之交點為 C，得三角形 ABC.

量得 $\angle A=$……，$\angle B=$……，$\angle C=$……

自线外一点 作一垂线

已量出二角，第三角不必去量，就可知道麼？

25. 完全相等的圖形　二個完全相等的圖形，重疊起來，可以處處密合.

將 §§22－24 各三角形，再畫一個，重疊起來，看是否完全相等？

由上所論，便知：**已知三角形中**

(一) **二邊和夾角，**

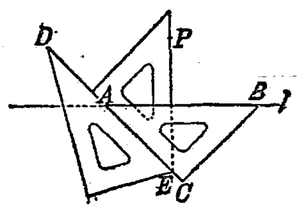
(二) **二角和一邊，**

(三) **三邊，**

三種情形之一，那三角形便完全確定，而其餘未知的三元素可以求得.

註　圖解法，須用量法求結果，不能十分精密. 如需更準確的解答，須用三角的方法計算.

26. 點線間的距離.



問題　自直線外一點作這直線的垂線.

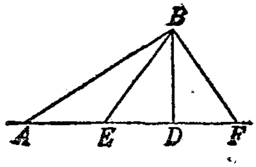
解　將三角板中有等邊一塊的最長邊 AB 橫放，使

∠=角　S=边

靠已知直線 l; 用另一塊的最長邊 DE, 靠着第一塊的短邊 AC. [illegible]

再將先放的一塊，調轉直放，使最長邊 AB 經過已知點 P. 沿這邊畫一直線，即為所求.

作 AF 上垂線 BD, 再作 BA, BE, BF 等線. 比較他們的長短.



自一點到一直線上垂線的長，叫二者間距離. 如圖, BD 是自 B 至 AF 的距離.

27. 三角形圖解法四—已知二邊及一邊的對角.

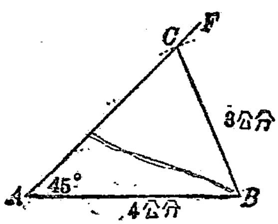
問題 已知三角形的兩邊為 4 公分和 3 公分，長 3 公分一邊的對角為 45°, 求其餘一邊和二角.

解 先作 $AB=4$ 公分

作 $\angle FAB=45°$

以 B 為心，長 3 公分的半徑作弧，交 AF 於 C 點.

連結 BC 成 $\triangle ABC$.



量得　$AC=\cdots\cdots$，$\angle B=\cdots\cdots$，$\angle C=\cdots\cdots$

注意　BC 的長不能短於自 B 到 AF 的距離．何故？

習　題　四

圖解下列各三角形，解答填入空格(長度取適宜單位)．

	$\angle CAB$	$\angle ABD$	$\angle BCA$	BC	CA	AB
1.	30°				7.1	9.7
2.			125°		5.5	226
3.	65°	40°				53.3
4.		60°	75°	7		
5.		75°	60°		4.7	
6.				56	71	60
7.				59	48	77

下列各三角形(8－11題)能不能作圖？何故？

8. $\angle CAB=78°$，$\angle BCA=120°$，$AC=5.5$.

9. $\angle CAB=64°$，$\angle ABC=119°$，$BC=47$.

10. $BC=5.2$，$CA=4.5$，$AB=9.9$.

11. $BC=3.7$，$CA=4.4$，$AB=8.1$.

12. $\angle ABC=30°$，$AB=6$，$AC=2$.

13. §27 的問題中，延長虛線的弧，能不能再與 AC 交於第二點？如有第二點，能否用來當所求三角形的一頂點？試量那三角形中其餘各元素，并和 §27 的解答比較.

14. 如 §27 的問題中，設 45° 是長 4 公分一邊的相對角，問照上題方法求出的第二個三角形是否合用？何故？

15. 在已知二邊和一相對角的情形中，設已知角大於直角 (譬如說110°)，而對這角的邊大於他已知邊，問作出的三角形，能有幾個合用？小於他已知邊的時候呢？

16. 上題中如已知角是直角，在對邊大於他邊時所成的二個直角三角形，是否完全相等？對邊小於或等於他邊時，能不能成功三角形？

17. 試按上列 12 到 16 諸題結果，填寫下表中空格.

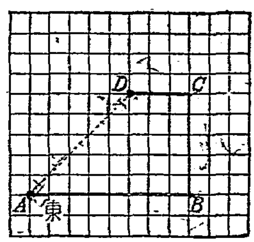
解數 \ 邊 / ∠BAC	$BC<AB$			$BC=AB$	$BC>AB$
	$BC<BD$	$BC=BD$	$BC>BD$		
小於90°	0	1	2	1	1
等於90°	0	0	2	0	2
大於90°	0	0	0	0	1

註 BD 是由 B 到 AC 的距離

IV. 相似圖形

28. 比例推算 以前所講線的長短，角的大小，均可用直尺，量角器等，直接去測量．但事實上有許多問題，不能直接測得．例如樹木的高，江河的闊，都不便用尺去量．這些不能直接測量的距離，可用有關係而能直接量得的線或角作圖，然後再據比例的理來推算．

29. 比例尺圖 路程等很長的距離，可以在紙上縮短若干倍用直線表出．例如某人從某處向東行80里，乃轉北行50里，又轉西行30里，欲求其距動身的點若干里，可於方格紙上取 A 為起點，每格代表10里，作 AB 線，使 $AB=8$ 格，再引 $BC=5$ 格，$CD=3$ 格，D 即為終點．直接量圖中 AD 的長為小格長幾倍，用10去乘，即得所求里數．其行程可以 AB, BC, CD 等線來表．



30. 相似形 一座高大的房子，可以畫在紙上，

縮成幾寸．一個大人．拍在照片上，也可縮成寸許；一個小小的蚊蟲，都可以放大成幾寸．無論放大或縮小，都可以不失其爲相像．但是畫圖畫得不好，鼻子歪了，耳朶大了，便失了那人本來的面目．可見圖形相似，有一定的緣故．現在就最簡單的情形(卽三角形)來說明．

31. 相似三角形 作 ABC 和 $A'B'C'$ 二三角形，令 AB 和 $A'B'$，BC 和 $B'C'$，CA 和 $C'A'$ 的長都不等，但 $\angle A=\angle A'=80°$，$\angle B=\angle B'=60°$，則 $\angle C=\angle C'=$? 量各邊長，

$AB=\cdots\cdots$，　$BC=\cdots\cdots$，　$CA=\cdots\cdots$.

$A'B'=\cdots\cdots$，　$B'C'=\cdots\cdots$，　$C'B'=\cdots\cdots$

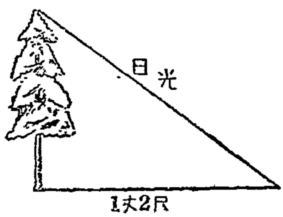
再算出 $\dfrac{AB}{A'B'}$，$\dfrac{BC}{B'C'}$，$\dfrac{CA}{C'A'}$ 的值，看是否相等？

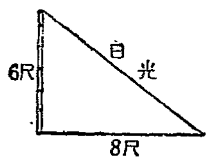
各相當角各相等，各相當邊所成比例也相等的三角形，叫做相似三角形． 這個相似的理，可以推廣到一切圖形．單就三角形說，從上述結果，可見兩三角形的三角各相等，相當邊所成比例便相等，換句話說，**兩三角形的三角各等，便相似．**

相似三角形，可作爲由一個三角形依樣放大或縮小而得.

32. **應用問題** 由相似形相當邊所成比相等的理，可用計算方法求距離. 設例如下:

例 設樹身在地上的陰影爲1丈2尺. 同時有一6尺長的竹竿，直立地上，竿影8尺. 求樹高.



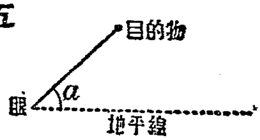


解 直立地面的物件，和影垂直；故樹身，樹影，和日光成直角三角形，與竹竿，竿影，日光所成的直角三角形相似. 今以h代樹高. 得比例式爲

$$\frac{h}{6}=\frac{12}{8}.$$

解這比例式，便得$h=9$尺.

習 題 五



1. 太陽的仰角爲25°時，某樓的影長90尺，求樓高.

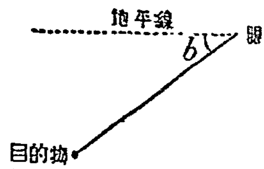
註 從低處向上看，視線

和從眼睛處所引地平線間的角，叫做仰角，如圖$\angle a$是.

2. 某樹高40尺，影長60尺，求日之仰角，

3. 某塔頂有旗柱一支，於地面距塔脚50尺處，求得柱頂的仰角爲35°. 又求得塔頂的仰角爲20°，求旗柱的長.

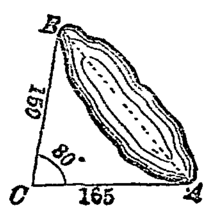
4. 某人於150尺高的塔頂，測得某船的俯角爲25°. 問此船距塔頂若干尺?



註 從高處向下望，視線與從眼睛處所引地平線間的角，叫做俯角，如右圖$\angle b$.

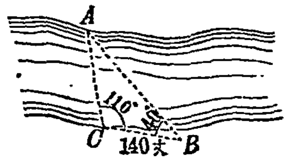
5. 兩人同由一處出發，一向西行5里，乃轉北行3里；第二人向南行4里，又轉東行5里. 問兩人相距若干里?

6, 有長方形，長16丈，寬12丈. 試以1公分代4丈之比例尺繪圖，求此形對角線的長.



7. 某測量家，欲知某澤的長度，如圖AB. 從A樹量至C石，得165尺；再由B樹量至C石，得150尺. C角爲80°. 求AB澤的長.

8. 某人欲測河闊 AC，傍岸量得 BC 長 140 丈，又測得 $\angle C=110^\circ$. $\angle B=40^\circ$. 試作三角形，求河闊 AC.



9. 兩長方形花園，大小不等，形式相似，其一長 3丈，闊 5 丈，另一闊12丈，問應長若干？

10. 某屋簷和脊尖所成三角形，和另外一屋所成的三角形相似；而這三角形的邊爲 7 尺，7 尺，10尺，某屋所成三角形的最長邊爲25尺，求他兩邊.

11. 某人臨窗遠眺，直持鉛筆一枝，長 6 寸；使下端與目齊，眼望上端，和山頂成一直線，已知人距鉛筆 2 尺，距山脚36丈，求山高.

注意 以上各題，均須按題意作相似的圖形，再按比例求其解答.

雜 題

1. 幾何作圖常用的有幾種儀器？那些是主要的？那些是本編裏用着的？

2. 過一點可作幾條直線？幾點方可定一直線？

3. 量角器是根據何理做成？有何用處？如何用法？

4. 試舉幾個常見的直角的例. 把直角和直角疊在一起，看是否一般大小，由此可推得什麼結論？

5. 過已知直線上一點（或外一點）的垂線，可用摺紙法作出，法如下：過這點將紙摺起，使已知直線本身自相疊合，摺痕即是所求的垂線.

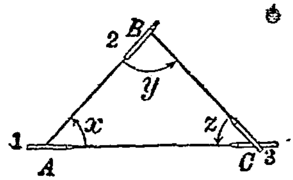
由此推斷：過一直線上或外一點，能作這線的一條垂線.

6. 時鐘的長短針當5點時，4點時，8點時，11點時各成幾度的角？各合若干直角？

7. 怎樣的線叫做平行線？試舉平行線的實例和重要性質.

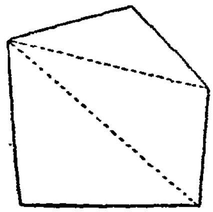
8. 某人面東而立，向左轉，轉一個什麼角？再向左轉，又轉一個什麼角？這時面向何方？此後再向左轉幾次，才可回到東面？從起初到最後共轉若干度？等於幾直角？

9. 任畫△ABC. 將筆放在一頂點上，記其方向. 轉筆經x角，然後平移過AB到第二頂點，如圖轉一個y角，再平移筆過BC到第三頂點，最



後再轉一個 z 角. 看筆的方向所指最後的地位和原來地位的方向，有何差異？這枝筆轉了 $x+y+z$ 度的角，共合若干直角？這實驗表明什麼關係？

10. 從一五角形的頂點，作到他頂點的直線如右圖，則分他成……個三角形. 所以這五角形各角的總和是…….



七角形呢？九角形呢？

11. 三角形的三角爲 $3x, x, 6x$，求三角的度數.

12. 三角形的第一角大於第二角 $25°$，而第三角三倍於第一角. 求三角.

13. 任意畫一圓，命圓心爲 O. 在圓內作一弦 AB，使其長和半徑相等. 連結 OA，OB，量 $\angle AOB$，$\angle OAB$，$\angle OBA$，由此推想如何單用無度尺和圓規（不准用量角器）去作 $60°$ 的角？

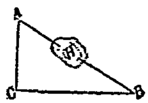
14. 任意畫一圓，並引直徑 AB. 在圓周上任取 P, Q, R 等點，測量 $\angle APB$，$\angle AQB$，$\angle ARB$. 結果如何？

15. B, C 兩地都和 A 地相距 5 里，從 A 望 B, C，則一在西南 $36°$，一在東南 $18°$. 求 BC 的距離.

16. 某煙囪在地上的影長 200 尺，太陽仰角爲 20°. 求煙囪的高.

17. 某燈塔建築在石上. 海上有船，在塔頂測量，俯角爲 20°; 在石上測量，俯角爲 8°; 燈塔高爲 45尺. 求船與石的距離.

18. A, B 兩炮台中隔一山 H. 距山脚不遠處有 C 點，測得 A 在 C 的東北 4 里，C 在 B 的西北 6.25 里. 試求 A, B 的距離.



註 '東北' 就是東偏北 45°, '西北' 就是西偏北 45°.

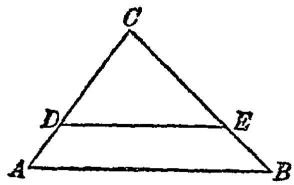
19. 某人欲量一河的廣袤而不過河. 此人立於岸上 A 點望對岸一樹，方向爲東偏北 20°, 乃東向沿岸走 50碼到 B 點，再望樹則方向爲西偏北 60°. 求河闊.

註 河闊是自對岸的樹到 AB 的垂直距離，

20. 在二條不等長的線段上，各作一五角形，使各相當角對對互等. 再量各邊，算相當邊所成比，看是不是相等 (注意照 §31 所述，相似應有二種條件，但三角形只要一種便够)?

21. 作一直線與三角形的一邊平行與餘二邊相遇另成

一三角形，如圖，試證這三角形與原形相似.



提示 用量法證兩三角形的各角各相等各相當邊的比例也相等.

22. 設前題的 $AC=21$，$BC=35$，$DC=3$. 求 EC.

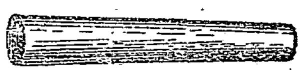
第二編　基本觀念與作圖

I. 幾何圖形

33. 幾何學目的　在第一編裏，我們已曾討論過度量圖形的方法，并由度量去推求圖形性質；又可應用所得的理，來解決實際問題. **幾何學目的即在研究空間內點，線，面，體的各種性質.** 本書第一，二，三編，先據實驗，歸納結果，是爲實驗幾何. 第四編以後，另用邏輯方法，作有系統的研究，而爲理解幾何. 末二編更論數值三角，以明幾何的應用.

34. 立體　凡佔有空間一部份的實物，如鉛筆，墨水瓶，木塊，皮球等件，如只研究形狀，而不去論實質時，便是幾何學中的立體. 例如大小相同的一個鉛球與一個木球，質料雖異，形狀却是一樣.

35. 面　佔有空間一部分的立體，其與空間接觸的部分，叫做面. 所以也可說面包圍立體. 譬如



一枝粉筆，兩頭是平坦的面，周圍是捲成的面．由上所說，便知**面是立體的界**．

36．**平面** 棹面，黑板，靜止的水面，處處平坦，並無凸凹，都是**平面**的例子．不平的面，叫**曲面**，像球面，圓柱表面便是．

要驗一面是否平面，可取直尺，用種種不同的方法，放在面上，若是不論如何放法，直尺都能全部和那面處處密合，便是平面．學生試自用尺，來驗教室中的牆，書棹以及圓柱，皮球等物．

37．**平面幾何，立體幾何** 單研究平面上各種圖形的學問，叫**平面幾何**，論及空間的，叫**立體幾何**．本書理解幾何部份，是平面幾何的初步．對立體幾何，只在下編中略述基本觀念，和量法上各問題．

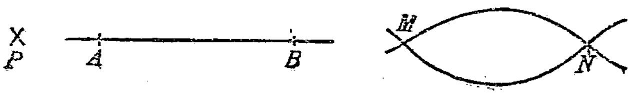
38．**線** 教室中互隣二牆相接處成一線；用刀切水菓，菓皮上的刀痕，也是線；換句話說，**線就是二面銜接的部分**．又可說線圍成面．所以**線是面的界**．

39. 直線　緊張在樂器上的弦，懸掛物件的細繩，從小孔裏漏進室內的太陽光線，都可代表**直線**．若將一根細繩，隨便放在棹上，不復像懸掛物件時的形狀，便是**曲線**．

直線　　　　曲線

40. 點　教室裏隣接二牆和地板三面聚集於牆角，就成一點，用針尖穿紙，亦得一點，一條細繩的兩端，也都是點，又如在日光映射下所見的微塵，也可代表點．總而言之，二線相遇處，便叫**點**．我們又可以說**點是線的界**．

畫圖時常用交叉二細線來表點並用大寫字母記出．



習 題 六

1. 一塊銀元和一塊銅質假銀元就形狀論， 是否相同？何以無相等的價值？在樂器上一條緊張的弦，鬆弛以後，質料有無改變？何以不能再彈出樂音？

2. 黑板有幾個面？幾條線？幾個點？

3. 用教室內實物，來說明點線，面體.

4. 用直尺在黑板上畫出的線，是那一種？

5. 我們能在圓柱上畫出直線來麼？在皮球上呢？

6. 圓是直線還是曲線？

7. 一張紙平鋪棹面上時，可表那種面？捲起來後，還能代表這種面麼？

8. 一張紙捲成筒後，能不能和棹面完全相合？這紙筒能不能和一球面完全相合？ 平面和曲面能不能全部相合呢？二個平面呢？二個曲面呢？

9. 紙筒剪開後，能不能平鋪在棹面上？紙球呢？

10. 隨便畫二根線，看至多有幾交點. 有無不相交的時候？

11. 隨意定三點，我們能不能作一條直線通過他們？

12. 任意畫三直線，看能不能交於一點？

13. 在薄紙一面畫圓，翻過來隨便畫幾根直線．將紙在光中映着；留意直線與圓至多有幾個交點．能不能不相交麼？

14. 在薄紙二面，隨意畫圓，映着日光看每二圓至多有幾交點？又，有沒有不相交的可能？

41. 幾何元素 點，線，面，體，叫做**幾何元素**．照上面的理看來，幾何元素有下列的特性：

（一）**體有長，濶，厚．**

（二）**面有長，濶而無厚．**

（三）**線有長，而無濶和厚．**

（四）**點只有位置；長，濶，厚一樣都沒有．**

42. 元素和實物 上文說過有幾種實物，可以表示幾何中某一種元素．但是我們要注意，任何實物，都有長，寬，厚，只是立體，而非面，線，點．幾何元素，不過是一種抽象的觀念，可用實物表示，而不是實物本身．

譬如一張極薄的紙，還是有厚的；不過來同長，闊比較時，覺得相差很遠，大可不去注意，便可代

表面. 一根細絲, 或是毫毛, 仍舊有粗細; 但因太微, 可不留心, 便可代表線. 又如室內的塵, 天際的星, 微茫已極, 不必注意大小, 如此便代表點.

43. 幾何元素間又一關係 上文說過:

體以面爲界, 面以線爲界, 線以點爲界.

但是諸元素間, 還另有一種重要關係.

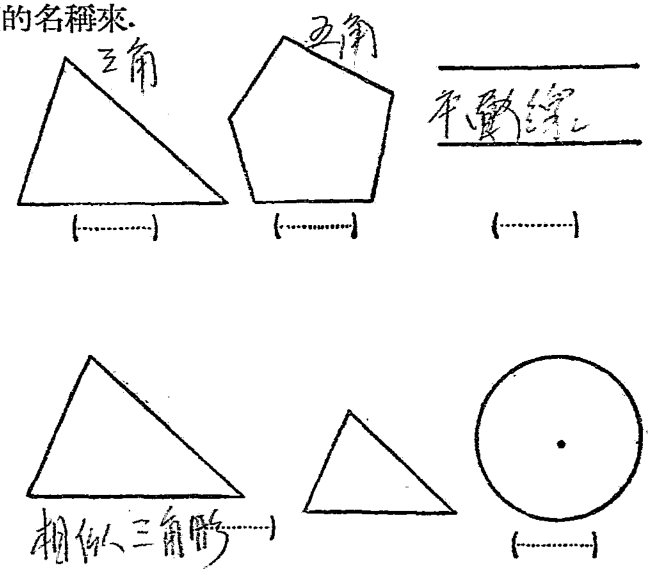
我們平時講 '雨點', 但是文學中, 常有 '雨絲' 的字樣. 這就是說雨點下降時, 看去便成一線. 所以**點動成線**.

用很牢的長線一條, 兩頭緊繫等重的石子或他重物, 平直放在地面上. 用兩指執線中間, 驟然提起, 并作急速的振動, 留心兩端不要相撞, 則線的兩段, 交舞成一圓形平面, 可以灑水不進. 這個游戲表出**線動成面**.

取銅元或銀元一枚豎立棹面上, 一指按頂上, 以他手一指將銅元彈開; 或用二指按頂上用力作旋轉; 則這銅元轉動成一球形, 這就是示明**面動成體**.

44. 平面幾何圖形 在平面上，由線和點合成的圖形，叫**平面幾何圖形**. 不過在初等幾何裏，所用的曲線只有圓和弧.

下面的幾何圖形，已在第一章裏見過，舉出他們的名稱來.



習　題　七

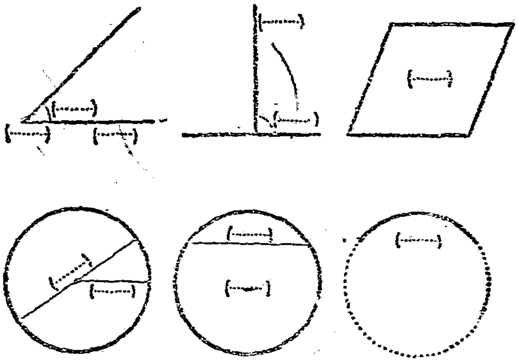
1. 一枝箭射出去，經過的空間，能不能成面？線動有不成面的時候麼？

2. 戲台上幕落下來，像不像成立體？面動有不成體

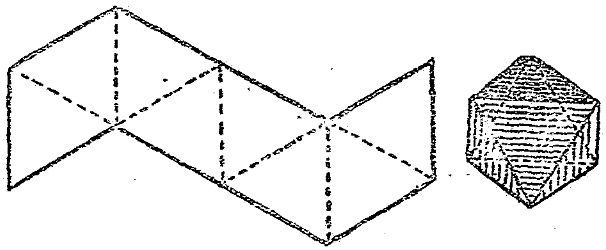
的時候麼？

3. 線如何動法，才不成面？面如何動法，才不成立體？

4. 填寫下列各圖形及其中各部分名稱



5. 用紙板照下圖做出的模型，是不是平面幾何圖形？



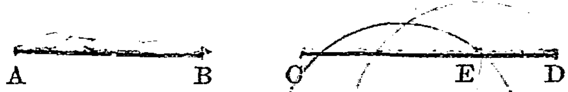
6. 皮球是不是平面幾何圖形？

II. 基本作圖

45. 規矩作圖 在第一章裏，我們講過用有度尺和量角器作圖的方法，這是為實際上便利和應用起見．若是在理論上作圖，只能用無度尺（矩）和圓規（規）兩件儀器．這種作法，叫**規矩作圖**．

注意 本編內的作圖題，只限於這一種．

46. 基本作圖題一 作已知長的線段．



〔已知〕 AB, CD 二線段，而 CD 長於 AB．

〔求作〕 在 CD 上截取一線段，和 AB 等長．

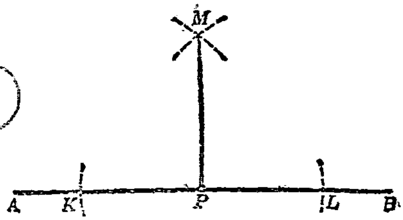
〔作法〕 (一) 以 C 為心，AB 為半徑，作一弧，交 CD 於 E．

(二) CE 即所求的線段．

〔證明〕 依圓的性質，知一圓中半徑都相等．作圓時原以 AB 為半徑，而 CE 是同一半徑，故 $CE=AB$．

注意 以後各作圖題證明方法，須學過理解幾何，方能說到，當在第五第六等編內補充．

47. 基本作圖題二 過已知線上一點作其垂線.



〔已知〕 直線 AB, 和線上一點 P.

〔求作〕 過 P 點而與 AB 垂直的線.

〔作法〕 (一) 以 P 爲心, 任意半徑作弧, 交 AB 於 K 和 L.

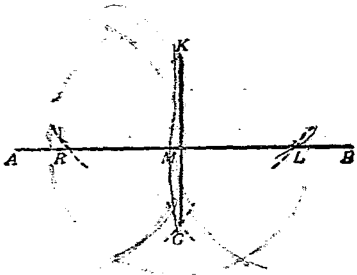
(二) 以 K, L 爲心, 適宜的等半徑交換作兩弧, 交於 M.

(三) 聯 MP, 卽爲所求的垂線.

註 所謂適宜半徑, 只要比 KP $(=PL)$ 稍大卽可.

48. 基本作圖題三 過已知線外一點, 作其垂線.

外



〔已知〕 直線 AB, 和線外一點 K.

作已知線之垂有三种情形
1.过已知線上一点作其垂線
2.过已知線外一点作其垂線
3.过已知線端一点作其垂線

〔求作〕 過 K 而與 AB 垂直的線.

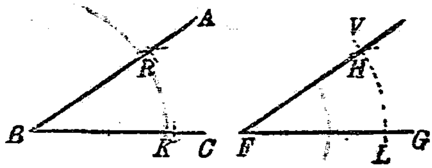
〔作法〕 (一) 在 AB 上任取一點 L，以 K 爲心，KL 爲半徑作弧，交 AB 於另一點 R.

(二) 以 L, R 爲心，適宜的等半徑，交換作弧，交於 G.

(三) 聯 KG，卽爲所求垂線.

註 所謂適宜半徑，只要比 LR 的一半稍大卽可.

49. 基本作圖題四 作角使與已知角相等.



〔已知〕 $\angle ABC$.

〔求作〕 一角以 F 爲頂，以 FG 爲一邊而等於 $\angle ABC$.

〔作法〕 (一) 以 B 爲心，任意半徑作弧，交 BC 於 K，BA 於 R.

(二) 以 F 爲心，與(一)中相同半徑作 VL 弧，交 FG 於 L.

(三) 以 L 爲心，KR 爲半徑作弧，交 VL 弧於 H.

(四) 連 FH，得 $\angle HFG$，卽爲所求的角.

50. 三角形作圖題 第一編中 §§22, 23, 24, 27 是用量角器和有度尺作圖，已知元素須標出邊的尺

寸同角的度數．如已知元素，係用圖形表出，不詳其尺寸和度數，則據基本作圖題一和四的理，不難用規矩作圖，求得所需的三角形．各種作法甚易，學生不難照上面的格式，自行做出來．

習 題 八

1. 單用規矩，怎樣去比較二已知線段的長短？

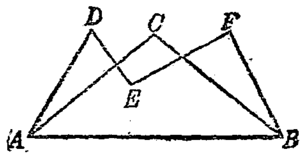
註 本篇內各作圖題，不準用有度尺和量角器．

2. 單用規矩，怎樣去比較二已知角的大小？

3. 單用規矩，怎樣去作二已知線段的和差？

4. 單用規矩，怎樣去作二已知角的和差？

5. 任與 A, B 二點，聯成線段，再以不在一直線上的線段聯接，如圖中 ACB 或 $ADEFB$．試比較 A, B 間的各種線，何者為最短？



6. 作一三角形，任取二邊比較長短，再比較對這二邊的角．看邊的長短和所對角的大小，有什麼關係？

7. 作二個三角形，其一的兩邊等於他一三角形的兩邊，但夾角不等．試比較這二三角形的第三邊．又可以得

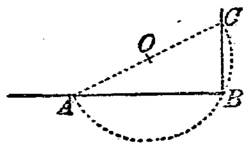
出什麼結論來？

8. 作一圓內的直徑和幾條弦線，比較他們的長短.

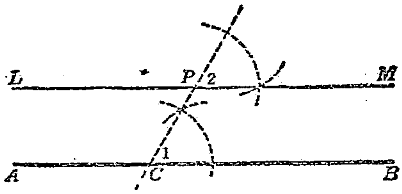
9. 在一直線上，任取二點 A, B，作過這二點的垂線. 儘量延長這二垂線，看能不能相交？這樣的二線，有何種名稱？

10. 過一三角形各頂點，作垂直於對邊的直線，看這三線能不能交於一點？

11 右圖表示不必延長一線段，而在其端點作垂線的方法. 圖中 O 是適當點，AC 是過 A, B, C 三點的圓中直徑. 試說明作法.



51. 基本作圖題五　作直線過已知點，且與已知直線平行.



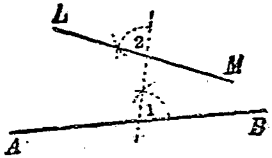
〔已知〕 直線 AB 和其外一點 P.

〔求作〕 過 P 而與 AB 平行的直線.

〔作法〕 (一) 在 AB 上任取一點 C，聯PC.

(二) 以 P 爲頂點，CP 的延長線爲邊，作$\angle 2=\angle 1$.

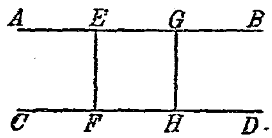
(三) 這樣作出的 LM，即爲所求的平行線.



注意 $\angle 2$ 須與$\angle 1$ 同在 PC 的一側. 否則如右圖時，LM 不能和 AB 平行.

註 實際上作垂線和平行線，都用三角(§§20,26).

52. 平行線間的距離 畫二條平行線，作其一的垂線，看是否和他線也垂直.



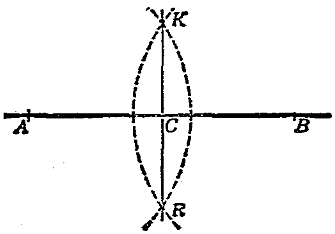
作這樣的幾條垂線，如EF，GH，他們是否相等?

EF 等線叫做AB，CD二平行線間的距離.

53. 垂直平分線 平分一線段的點，叫做這線段的**中點**. 過線段中點而與他垂直的線，叫**垂直平分線**. 如下圖 C 是線段 AB 的中點，KR 是垂直平

分線.

54. 基本作圖題六 作已知線段的垂直平分線.



〔已知〕 線段AB.

〔求作〕 AB 的垂直平分線.

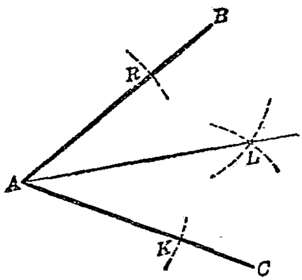
〔作法〕 (一) 以A, B爲心, 適宜的等半徑, 交換作兩弧, 交於 K 與 R 兩點.

(二) 連結 KR, 即爲所求的垂直平分線.

註 所謂適宜的半徑, 只要大於 AB 的一半即可.

又平分一已知線段時, 也是用此作法.

55. 基本作圖題七 平分已知角



〔已知〕 $\angle BAC$.

〔求作〕 $\angle BAC$ 的分角線.

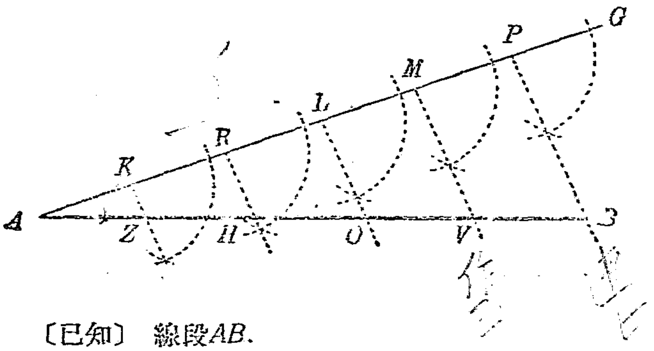
〔作法〕 (一) 以 A 爲心, 任意半徑作弧, 交二邊於K及R.

(二) 以K,R 爲心, 適宜的半徑, 交換作弧, 交於 L.

(三) 聯結AL, 即爲所求的分角線.

註 第二步中適宜的半徑, 應當合於何種情形?

56. 等分線段法 求分一已知線段爲五等分.



〔已知〕 線段AB.

〔求作〕 等分 AB 爲五等分.

〔作法〕 (一) 過A點任作另一直線, AG 於其上取五等長線段.

$$AK=KR=RL=LM=MP$$

(二) 聯PB, 幷過 K, R, L, M 等點, 作PB的平行線.

(三) 所作各平行線, 卽分AB爲五等分.

註 依同法可分一已知線段爲任意幾等分.

注意 我們旣可將一已知線段, 分爲任意幾等分, 似乎也能任意等分一已知角. 但是據高等算學的理, 後面的一種, 非規矩作圖所能解決. 譬如三等分任意角, 便不可能. 在實際問題上, 只能用量角器, 爲差近的作圖.

習　題　九

1. 將一已知角分爲 4 等分， 8 等分， 16 等分.

2. 將一已知線段分爲 3 等分， 7 等分， 9 等分.

3. 在一線段的垂直平分線上，任取一點，比較自這點到那線段兩端的距離，看是否相等，再另取幾點試試看.

4. 在一角的平分線上，任取一點，比較自這點到那角兩邊的距離，看是否相等．再另取幾點試試看.

5. 作一三角形各邊的垂直平分線，看能否相交於一點.

6. 平分一三角形各邊，聯邊之中點和對頂點，所成的線，叫**中線**．作出三條中線，看能否相交於一點?

7. 平分一三角形各角，看三條分角線段能否交於一點?

8. 將一已知線段分爲三份，使成2:3:5的比.

9. 將一已知角分爲三部分，使成1:2:5的比.

10. 作一三角形，使其三邊和一已知三角形各邊平行．試比較這二個三角形的各角．這兩個三角形有什麼名稱?

11. 作一等邊三角形，使各邊總和等於一已知線段.

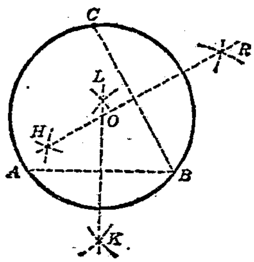
57. 基本作圖題八　作過不在一直線上三已知

點的圓．

〔已知〕 A, B, C三點，不在一直線上．

〔求作〕 過A, B, C三點的圓．

〔作法〕 (一) 聯結AB, BC．



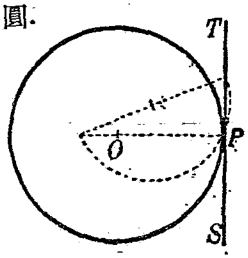
(二) 作 AB 的垂直平分線 LK; BC 的垂直平分線 HR．

(三) LK 和 HR 交於一點 O，卽爲圓心．

(四) 以 O爲心，OA(或OB, OC)爲半徑作圓；卽爲所求的圓．

58. 切線 一條直線普通常和圓交於二點，像上圖的 AB 和以 O 爲心的圓便是．但有時二者只在一點相接觸，如下圖的 ST，便叫圓的**切線**．這點叫**切點**，如下圖的 P．

註 以 O 爲心的圓，常記爲 O 圓．



59. 基本作圖題九 作過圓上一點的切線．

〔已知〕 O 圓和其上 P 點．

〔求作〕 和圓在 P 點相切的切線．

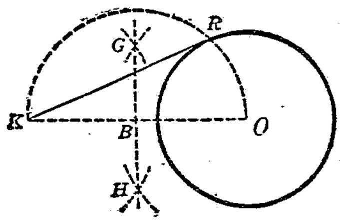
〔作法〕(一) 聯 OP.

(二) 過P點，作ST和OP垂直，便得切線 (看習題八11題).

60. 基本作圖題十　作過圓外一點的切線.

〔已知〕 O 圓和其外一點 K.

〔求作〕 過K而和O圓相切的切線.



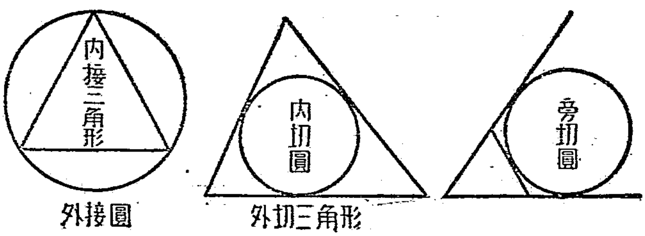
〔作法〕(一)聯結KO.

(二) 平分 KO,得中點 B.

(三) 以 B 爲心，BO(即BK)爲半徑，作半個圓，交O圓於一點R，即爲切點:

(四) 聯 KR 即爲所求的切線.

61. 三角形與圓　在一圓上任取三點，聯成一三角形，叫做這圓的**內接三角形**，也可以說圓是那



三角形的**外接圓**. 如一圓含於一三角形內，而與諸邊均相切，便叫爲三角形的**內切圓**，而稱三角形爲圓的**外切三角形**. 如圓在三角形外，而與各邊都相切，則稱爲三角形的**旁切圓**.

62. 花紋圖形 上面所說的各種圖形，雖很簡單，但是配合起來，可以成功很美麗的花紋圖形，看習題十後面各圖.

習 題 十

1. 經過在一直線上的三點，能不能作圓？照§57的方法試試看.

2. 經過二已知點能作多少圓？這些圓的圓心是否都在一直線上？與二已知點有何關係？

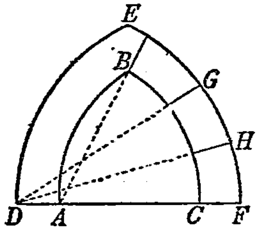
3. 自已知圓內一點，能不能作出切線來？照§60的方法試試看.

4. 從已知圓外一點,能作幾條切線？

5. 從圓外一已知點所作各切線，和這點與圓心的聯線所成的角是否都相等？

6. 下圖表一種哥特式 (*Cothic*) 拱門，作圖法如下：

(一) $DA=CF$.

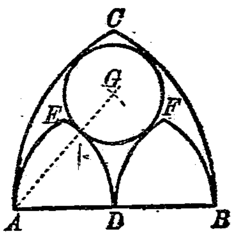


(二) $A, B, C; D, E, F$ 各爲一等邊三角形角頂.

(三) G 點平分 EF 弧，而 H 點平分 GF 弧.

試照樣繪圖，取$AC=2$吋，$DA=1$吋.

7. 右圖是一種哥特式窗門，作法如次：



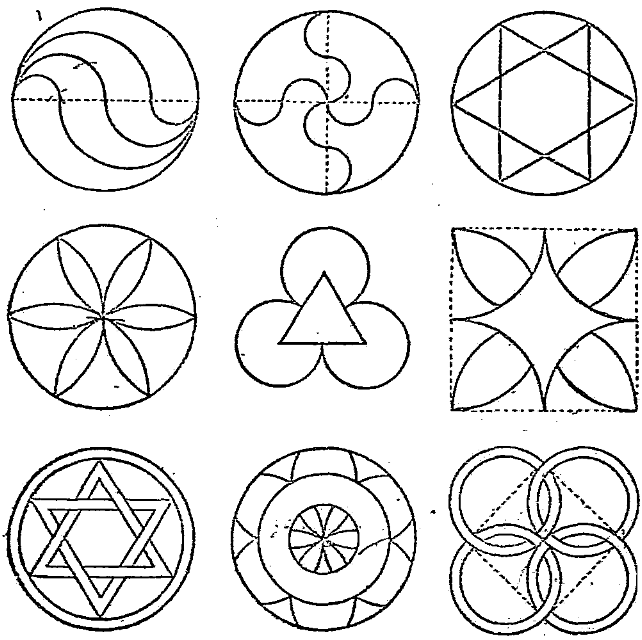
(一) $AD=DB$.

(二) $A, B, C; A, D, E; D, B, F$各 等邊三角形頂點.

(三) 以 A, B 爲心，$\frac{3}{4}AB$ 爲半徑，交換作弧相交得 G.

令$AB=2$寸，照樣畫一圖.

8. 試作下列各花紋圖形(虛線勿畫出)



雜 題

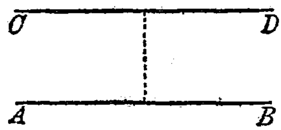
1. 何謂幾何元素？試舉其特性.

2. 試舉幾何元素間的各種關係.

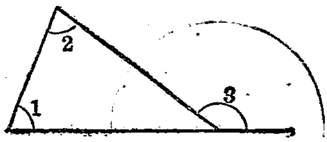
3. 平面和曲面有何區別？

4. 幾何學有什麼目的？

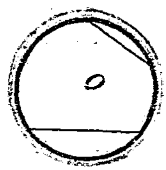
5. 已知一線段，如何用摺紙法去平分他？摺痕所成的線叫什麼名稱？



6. 設有 AB,CD 二直線，今將紙摺合，使 AB 自相重疊，如 CD 同時也自相重疊，則必 AB 平行於 CD. 說出道理來.

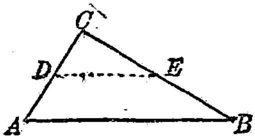


7. 延長三角形一邊，和原來隣邊所成角叫**外角**，如右圖 $\angle 3$ 便是. $\angle 1$,$\angle 2$ 叫 $\angle 3$ 的**內對角**. 試作 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 的和，與 $\angle 3$ 比較.



8. 在一圓內任意作幾弦，看弦的長短，和他們距圓心的距離遠近，有什麼關係？

9. 對摺一圓，使圓與其內一弦各自完全疊合. 摺痕與這弦有何關係？由此可知自圓心到弦的垂線必……這弦.



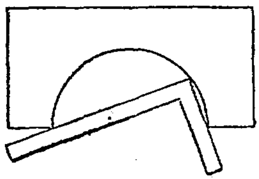
10. D, E 是一三角形二邊中點，問 DE 與 AB 有何關係？

11. AB與DE長短比較如何？

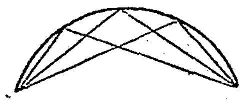
12. 二平行線被一線所截，其中有幾對相等的角？

13. 木匠用曲尺可試出半圓形是否正確，其法如右圖.

試說出道理來.



14. 在一圓弧上任取數點，聯到弧的端點. 所成各角是否都等？



15. 欲在一線上定一點，距其外二點等遠，須用何法？

16. 自三角形各角分角線交點，到各邊距離是否都等？

17. 以上題交點爲心，距離爲半徑，作一圓，這圓和三角形有什麼關係？

18. 三角形二外角分角線與餘一內角分角線，是否交於一點？自這點到各邊的距離是否相等？

19. 以上題交點爲心，距離爲半徑，作一圓. 這圓和三角形有什麼關係？

第三編　幾何計算

I. 間接度量

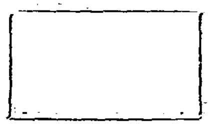
63. 直接度量與間接度量　在前二編內，已經說過怎樣用刻度尺（公尺或市尺）去量線段的長短，用分角器去量角的大小．凡是用度量單位，直接施到所度的量上，讀出這量合於單位量的幾倍或幾分之幾，就叫**直接度量**．這種量法，雖簡而易行，但對過大的量，每因阻礙，不能運用（如山高，河濶）．又所求度的量，如非線或角，也不能直接去量．例如面積體積，須按相關的線長或角度，依幾何的關係計算，這就是本編所要討論的問題．前面一種可利用相似形的理解決，第一編內，已略論及，在本書第十一與十二兩編數値三角，還有較完密的算法．這兩種情形，都叫**間接度量**．

64. 間接度量的精密度　直接度量的結果，只是近似的，不能絕對準確．精密的程度，視所用儀器的精粗而定．間接度量，須據直接度量的結果

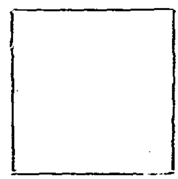
推得，所以求出的值，精密程度，不能比前者爲高.運算時，宜用省略算法.

II. 平面形面積

65. **正方形，長方形** 各邊都垂直的四邊形，叫**長方形**，如果各邊又都相等，便叫**正方形**.



長方形



正方形

66. **面積** 各邊爲單位長的正方形，是量面積的單位．例如每邊長一公分的正方形，叫**平方公分**．平面形的面積，就是看他含有單位面積的幾倍或幾分之幾．所以最簡的面積量法，就是將所求圖形放在每格爲單位面積的方格紙上，再去計數其中含有多少方格．這種直接量法，在計數方格時，很爲不便，不特不能如量直線或角時的一望可知，且不滿一格處，難以估計爲幾分之幾．間接度量面積的方法，可分三種:

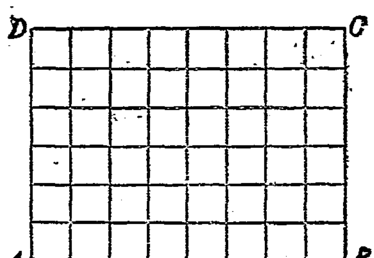
(一) 最易明白的是長方形求法. 由直接度量的理, 即可得長方形面積與邊長關係, 是爲求積基本公式.

(二) 用割補法, 可化任何直線形 (即直線段圍成的平面形) 爲長方形.

(三) 曲線形可用差近的直線形替代再求.

以下各節逐層說明各種求法.

67. 長方形面積 由下面的圖很容易看出長方形 $ABCD$ 含有 48 個正方格. 如以每方格當做面積單位, 則 $ABCD$ 的面積便等於 48.



上述的直接計數法, 很覺不便, 故常以一種簡便計算方法來代, 其法如下:

先數 AB(長) 有 8 單位, 再數 AD(濶) 爲 6 單

位，以 6 和 8 相乘，便得 48，和直接計算結果相同．因為就長 8 單位，濶 6 單位的關係，這長方形可分成 8 條，每條再分 6 段，如此分成的每段，各為面積單位，故其總數，可由乘法求得．

今以 A 記面積 (後文同此)，h 記濶，b 記長，則得

長方形面積公式： $\mathbf{A=hb}$．

註 如長闊含有單位的小數，可用十進低級單位量各邊，求這時面積單位，也須用低級的，結果仍能相合．例如長方形長 2.2 尺，闊 3.4 尺．化長闊為寸，再如法求得此長方形面積 $=22\times34$ 方寸 $=748$ 方寸 $=7.48$ 方尺．

不化為低級單位直接用上面的公式，也得

面積 $=2.2\times3.4$ 方尺 $=7.48$ 方尺．

習題十一

1. 任意畫一條線段，用尺去量，估計到 $\frac{1}{10}$ 分，連量三次，看結果能否完全一致？

2. 畫一條長約 4 寸的線段，隨意分做五段，量各段的長及全長．將量得各段的長加起來，看能否與全長恰好

相等?

3. 任意畫一角，依上面二題的方法度量并比較.

如諸題的結果,不和我們理想完全符合,應如何解釋?

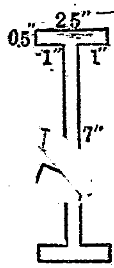
4. 一長方田，長8丈7尺，闊7丈5尺，求面積，并用方丈，方尺二種單位表出.

5. 一長方窗，高4呎5吋，闊3呎6吋，求面積，并用方呎，方吋二種單位表出.

6. 已知正方形邊長，怎樣去求面積? 已知面積，怎樣求邊長?

7. 一長方形，長6吋，面積爲1方呎，求闊.

144

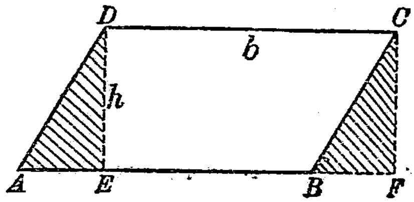


8. 求右圖的面積.

9. 磚長9寸，闊4寸，問需多少塊，方可鋪滿長3丈3尺闊2丈4尺的地?

10. 一長方形，面積50方尺，而長倍於闊，求長和闊.

68. 平行四邊形面積 四邊形中兩組對邊都平行的，叫做什麼? 任一組平行對邊都可作爲底，兩底間的距離叫做高.



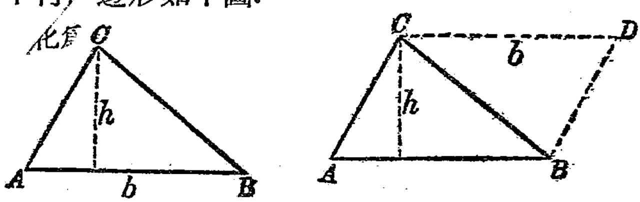
如右圖 $ABCD$ 是平行四邊形. 作 AB 上垂線 DE, 截下直角三角形 AED, 補到 BFC 的位置, 便得長方形 $EFCD$.

今以 A 表面積, b 表底, h 表高, 則得

平行四邊形面積公式: $\mathbf{A=hb}$.

69. 三角形面積 任以三角形的一邊爲底, 則自對頂到底上的距離, 叫做那邊上的**高**.

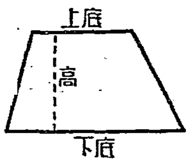
把兩個完全相等的三角形, 顛倒配合起來, 就成一平行四邊形如下圖.

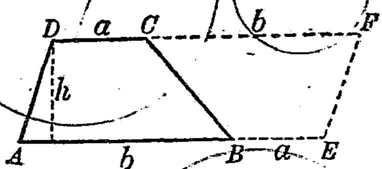


仍以 A 表面積, b 表底, h 表高. 因上述知合兩個全等三角形, 成一平行四邊形, 故前者爲後者之半.

三角形面積公式: $\mathbf{A=\frac{1}{2}hb}$.

70. 梯形面積 只有一組對邊平行的四邊形，稱爲**梯形**. 平行的一組對邊，叫**上底**，**下底**；中間的公共垂線叫**高**.



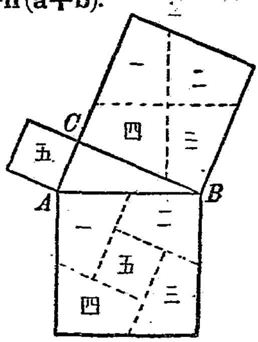


照上節的方法，可將兩個完全相等的梯形，配成一平行四邊形. 這平行四邊形的底是梯形上下底的和，高仍舊是梯形的高.

以 A 表面積，h 表高，a, b 表上下底，即得

梯形面積公式： $\mathbf{A=\frac{1}{2}h(a+b)}$.

71. 割補法的又一應用 在一直角三角形 ACB (C是直角) 各邊上作正方形. 將 AB 上正方形各邊平分，過 AB 及對邊中點作直線平行於 AC，過他二對邊中點，作直線平行於 BC，如此就分那正方形爲五塊，剪下來照圖補到他二正方形上，



恰好相合,

設 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, 由上理便得

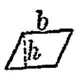
畢氏定理: $c^2=a^2+b^2$.

也可以說:

直角三角形斜邊的平方, 等於他二邊上平方的和.

習 題 十 二

填下列諸題中有虛線各項:

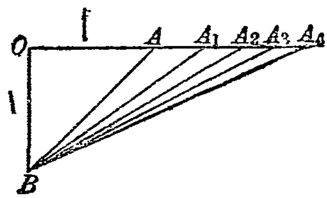
	圖形 \ 量	A	h	b	a
1.	平行四邊形	....	5.8寸	14寸	
2.		18.9方尺	....	54尺	
3.	三角形	....	6呎6吋	5呎3吋	
4.		105方呎	....	28呎	
5.	梯形	....	3寸2分	1尺8分	8寸5分
6.		22.47方公分	....	6.4公分	4.3公分
7.		10.12方公分	2.3公分	....	3.3公分

8. 在細方格紙上，畫幾個平行四邊形，三角形，梯形．將每格長為邊長單位，每一方格就是面積單位．計數各形所含方格個數．遇不滿一格的部分，如估計大於半方格，就算一格，小於半方格的不計．就所得結果，核驗上述各公式．

9. 三角形中任取一中線，都分原三角形面積為相等的二部分，為什麼緣故？

10. 2丈5尺長的梯靠在牆上，梯腳隔牆1丈5尺，求梯頂離地的高．

11. 右圖中$OA=OB=1$，求$OA_1=AB$, $OA_2=A_1B$, $OA_3=A_2B$, $OA_4=A_3B$以及A_4B等的長．

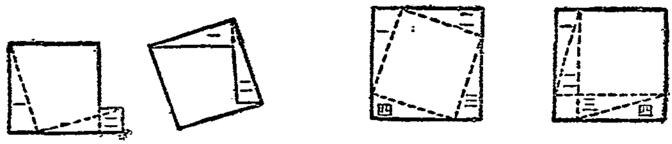


12. 正方形中聯對頂的線長7寸，求邊長和面積．

13. 直角三角形斜邊長13，一邊長5，求

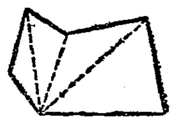
(1) 第三邊 (2) 面積 (3) 斜邊上的高．

14. 就下面二組圖說明畢氏定理．



註 圖中各直角三角形完全相等.

72. 任意直線形面積求法 從形中任一頂點陸續引直線到其餘各頂點，即可分成許多三角形. 再分求各三角形面積，將結果相加求和即得.

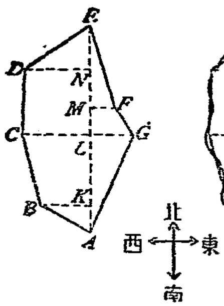


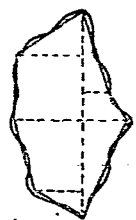
這法看來雖是簡單，但在實際測量時，不甚方便. 測量時所用方法，乃是分成直角三角形和梯形二種去求的.

例 地形$ABCDEFG$如下面左圖. 取適宜的二頂點聯線做底線. 測得自他頂點到底線的垂線，各照左邊格式記入.

（碼為單位）

至	E	
	600	
240	450	
	340	60
240	280	100
180	90	
由	A	向北

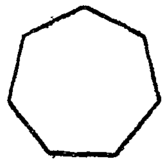




$BK=180,\ CL=DN$ $=240,$	$AKB=\frac{1}{2}\times 90\times 180$ $=8100$
$LG=110,\ MF=60,$	$BKLC=\frac{1}{2}\times 190\times(180+240)$ $=39900$
$AK=90,$	$CLND=170\times 240$ $=40800$
$KL=280-90=190,$	$DNE=\frac{1}{2}\times 150\times 240$ $=18000$
$LN=450-280=170,$	$ALG=\frac{1}{2}\times 280\times 110$ $=15400$
$NE=600-450=150,$	$GLMF=\frac{1}{2}\times 60\times(110+60)$ $=5100$
$AL=280,$	$FME=\frac{1}{2}\times 60\times 260$ $=7800$
$LM=340-280=60,$	$\therefore$全圖 $=135100$
$ME=600-340=260.$	面積共 135100 方碼.

註 這法不僅對於直線形能應用，就是遇不規則的曲線形時，也可改作適當的直線形，使凹凸部分，大致互相抵消(看上面右圖)，再照上法測算.

73. 正多角形 各邊相等，每二隣邊所夾角也都相等的直線形，叫做**正多角形**.



因爲 n 角形各角的總和爲 $(n-2)\times 180°$,故

正 n 角形內角$=\dfrac{n-2}{n}\times 180°$.

例 右圖是正七角形，各角$=\dfrac{7-2}{7}\times 180°=\dfrac{5}{7}\times 180°$

$$=128°\frac{4}{7}=128°34'餘.$$

由此易得已知正多角形邊長時的差近作法如下:

設已知正七角形的邊長爲 a，作法如下:

(一) 作一線段，使其長爲 a.

(二) 在 a 的兩端，用分角器作 $128°34'$ 的角.

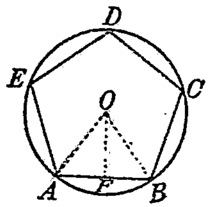
(三) 再在新作各線上，取一段長爲 a.

(四) 依法繼續作去，卽得.

註 只用圓規和無度尺的作法，見下册第十編 *II* (但有些正多角形不能如此作出，例如本題卽是).

74. 正多角形要件 作正多角形各角的分角線，則必在一點 O 相交. 以 O 爲心，OA (或 OB 等) 做半徑作圓，必能經過一切頂點. 自 O 作到一邊的垂線,

必平分那邊，如OF平分AB.



O點叫正多角形的心, OA, OB等叫**頂心距**或**半徑**, OF等叫**邊心距**，或**小幅**.

連接各頂心距，則分正多角形成完全相等的等腰三角形OAB等等. 又作各邊心距，更將每一三角形，分爲二個完全相等的直角三角形. 設以s表邊長, r表一頂心距, a表邊心距，試按畢氏定理填下列公式:

$$r^2 \cdots = \cdots \frac{s^2}{4} \cdots + \cdots a^2.$$

75. 正多角形邊數的關係 已知正多角形邊數n, 則易得各等腰三角形頂角$\angle AOB$, 試填下表:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
各角	60	90	108	120	[illegible]	135	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
頂角	[illegible]	90	72							

又n一定時, a, r, s三量中每二量的比，也有定值，可用本書第十一與十二兩編數值三角的方法求得. 今先列$a{:}s$的比值如下:

108
× 5
540

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a:s$	0.289	0.500	0.688	0.866	1.038	1.207	1.374	1.539	1.702	1.866

已知 $a:s$ 一比，便能推求 $r:s$ 和 $a:r$（用上節公式）.

76. 正多角形面積 只須知邊長，卽可求出.

例 已知正五角形邊長 4 寸，求面積.

解 邊心距 $=4\times0.688$寸 $=2.752$寸

等腰三角形面積$=\frac{1}{2}\times4\times2.752$方寸 $=5.504$方寸正五角形面積5×5.504方寸$=27.52$方寸.

習題十三

1. 照下表試繪地形略圖，并計算面積.

丈

至	B	
	1100	
400	1000	
	800	800
400	600	
自	A	向北

碼

至	B	
	800	
150	700	
100	500	200
	400	350
300	300	
100	200	
自	A	向北

2. 正多角形以外，有沒有單只各邊都等或只各角都

等的直線形? 畫出圖形來試試看.

3. 作邊長 $s=1.5$ 寸的各正多角形(邊數從 3 到 12), 量出頂心距 r 和邊心距 a, 求 $a:s$, 和書中所列結果比較.

4. 就上題求 $r:s$ 和 $a:r$ 二比, 列爲一表.

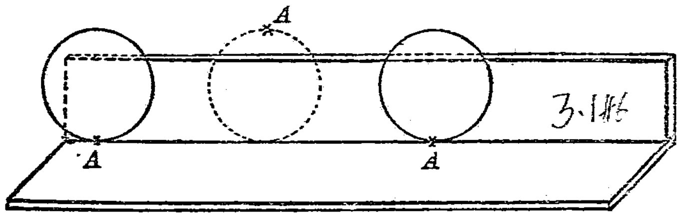
5. 求 $r:s$ 和 $a:r$ 對 $a:s$ 的關係.

6. 由書中所列結果及上題關係式, 推求 $r:s$ 和 $a:r$ 二比, 幷將結果和 4 題比較.

7. 求 3 題中各正多角形面積.

8. 設正多角形各邊長總和爲 p, 邊心距爲 a, 求證正多角形面積公式: $A=\frac{1}{2}pa.$

77. 圓周 取尺二條, 一條平放桌面, 一條豎立. 另取一圓形物(如銀圓)靠住豎立的尺, 就平放的尺上滾動. 當開始滾動時, 圓和尺接觸的點, 做一記號; 等到這記號重新接觸到尺面時, 中間滾過的距離, 即圓的全長, 叫做圓周.



取幾個大小不同的圓形物（用圓規在厚紙板上畫大小不同的圓，半徑約從 5 分到 1 寸，剪下備用），依上法試驗，將結果記入下表，幷計算圓周與直徑的比.

第一次	直徑$d=$·········	圓周 $c=$·········	$\frac{c}{d}=$······
第二次	$d=$·········	$c=$·········	$\frac{c}{d}=$······
第三次	$d=$·········	$c=$·········	$\frac{c}{d}=$······
第四次	$d=$·········	$c=$·········	$\frac{c}{d}=$······

用準確的圓形，精密的尺，作仔細的試驗，求得的比值，一定很近於 $3\frac{1}{7}$. 本書下册 (§306) 用理論的方法，可求得這比值爲 3.14159……，是個定數，與圓大小無關. 這比叫**圓周率**，常以希臘字母 π（讀如派）來記.

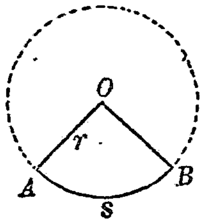
由上所述，可得（c 表圓周，d 表直徑，r 表半徑）

圓周公式:　$\mathbf{c=\pi d=2\pi r}$.

註　π 的值或作 3.1416 或作 $3\frac{1}{7}$ 均可，幷無重大不合.

78. 弧長　圓上的一段弧長，可由這圓的半徑

和弧所對的圓心角求出如下.



設 $\angle AOB = m^{\circ}$,則 (s表弧長)

$m^{\circ} : 360^{\circ} = s : c.$

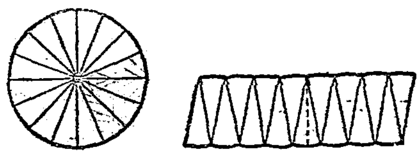
$$\therefore \qquad s = \frac{m}{360} \times c = \frac{m}{360} \times 2\pi r$$

即 $$s = \frac{1}{180} \pi mr.$$

例 $r = 3$寸,$m = 35^{\circ}$,則 $s = \dfrac{1}{180} \times 3\dfrac{1}{7} \times 35 \times 3$寸

$$= 1\frac{5}{6}\text{寸}.$$

79. **圓面積** 在紙板上畫一圓,用直徑分開為



十六等分,再配成一和平行四邊形相像的圖形如上,若是分成份數愈多,就愈加相像.在上圖中,上下二邊;都等於圓周的一半高就是半徑,由此得

圓面積公式: $\quad A = \dfrac{1}{2} cr \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

因 $c = 2\pi r$, 故又 $\quad = \pi r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

80. **扇形** 二半徑和所夾弧圍成的圖形,叫扇

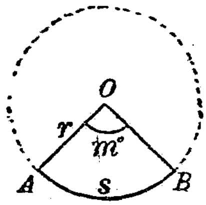
1. $S=\frac{\pi m r}{180}$ ∴ $\pi m r=180S$

$S=\frac{\pi m r}{180}$ ∴ $m=\frac{180S}{\pi r}$

形. 照上節方法，可得

扇形面積 $A=\frac{1}{2}rs$

如 $\angle AOB=m^{\circ}$，則 $s=\frac{1}{180}\pi mr$



∴ $\mathrm{A}=\frac{\pi}{360}mr^2$.

習 題 十 四

1. 設 A 表圓面積，c 表圓周，r 表半徑，d 表直徑，填明下表內各公式.

已 知 c	$r=$……………… ;	$A=$………………
已 知 d	$A=$………………	
已 知 A	$r=$……………… ;	$c=$………………

2. 取長約 1 寸的線段為半徑，在一細方格紙上作圓. 照習題十二中第 8 題的方法，數出圓面積略值；再用公式求出，兩相比較.

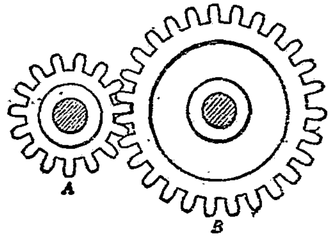
3. 二圓半徑為 9 吋及 1 呎，另一圓面積等於這二圓的和，求後者的半徑.

4. 一圓半徑長 8 寸，求圓心角 $m^{\circ}=50^{\circ}$ 所對的弧長，和所成扇形的面積.

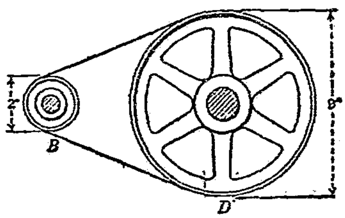
5. 一圓弧長 24 寸, 所對圓心角為20°, 求半徑.

6. 圓半徑為 20寸, 求其上長 5π 寸的弧所對圓心角.

7. 大小二齒輪, 齒數為27及15, 裝置如右圖. 問B輪轉一次時, A輪轉多少次? 又 A 輪轉 30 次時, B 輪應轉幾次?



8. 二輪直徑各為 2″ 與 9″, 一皮帶繞其上, 使同時旋轉如右圖. 如 D 輪每分鐘轉 1200 次, 問B輪每分鐘應轉多少次?

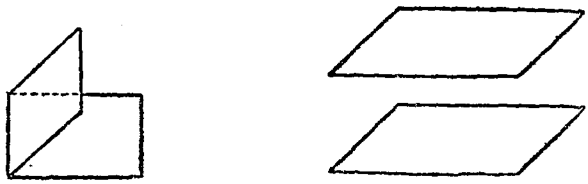


9. 一大鐘, 分針長 4 寸, 時針長 3 寸. 自上午八時半到下午二時一刻, 二針針尖經過多少距離?

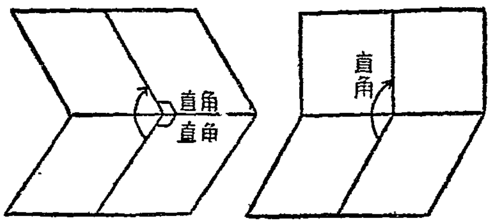
10. 一自由車, 車輪半徑為 28 吋, 每小時行 20 哩. 問一小時內, 車輪共轉若干次?

III. 空間圖形及其度量

81. **平面的關係** 教室內相隣兩牆交於一直線. 但相對兩牆, 不管怎樣延長, 永不相交, 便叫**平行面**.



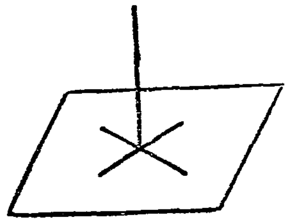
二平面相交，所成圖形，叫**二面角**．在交線上任取一點，而就二平面內作這交線的垂線．這二垂線的交角，便可定二面角的大小，如下左圖．在特例，如成直角，則稱二平面互為**垂面**，像牆和地板便是(看下右圖)．



82. 直線和平面　如二平面相交，則其一平面上的直線，在一般的情形，都與第二面相交．但平面上的直線，決不和平行面相交，這就叫做和平面平行．所以直線和平面，可相交也可平行．

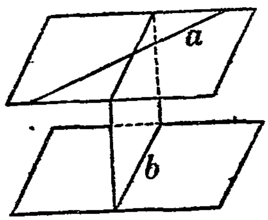
設一直線與平面相交，在平面上過交點的直線，

如都與那相交的線垂直，便叫這交線爲平面的垂線．例如掛燈的線，是天花板的垂線．



平面上直線不相交的便平行．反過來說，空間內二相交或平行直線都可定一平面．又一點和不過這點的直線．或不在一直線上三點，也可定一平面．

如在二平行面上，各作一直線，使他們不在一平面內，如右圖的 a, b, 則這二線既不相交，却也非平行．



綜合上文所說，可列下表．

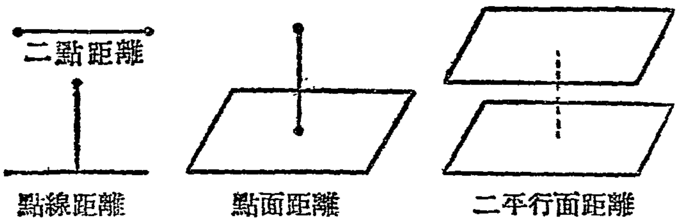
(一) 二平面 ……… (1)平行 (2)相交(於一直線)

(二) 平面與直線… (1)平行 (2)相交(於一點)

(三) 二直線 ……… (1) 平行 (2)相交——可定平面 (3)不平行也不相交．

83. 距離 二點，或一點及一直線，總在平面內，故空間內這二種距離，仍和平面情形相同．

從一點至一平面的距離，即自那點到面上的垂線長．二平行面間距離，即其公共垂線長．



二點距離，在過二點的各種線中，算他最短；點線距離是自那點到線上各種線中的最短線；點面距離和二平面距離，也有這種特性．

習題十五

1. 在教室中舉出實物的例，來說明（一）垂直平面（二）平行平面，（三）平面的垂線．

2. 我們能不能說，'空間二直線無論如何延長總不相交的，便是平行線'？

3. 在平面上一點或其外一點，能作這平面的幾條垂線？

4. 在空間內，從直線外一點，能作這線的幾條垂線？在線上一點呢？

5. 過直線上或其外一點，能作幾個平面，和這線垂直？

6. 過空間一點，我們能作幾條直線，使其中任取二條，都互相垂直？能作幾個平面？

7. 經過平面上一直線，能作幾個平面和原來的平面垂直？經過平面上一點呢？

8. 經過一平面上垂線的平面，必定和原來的平面互相垂直，為什麼緣故？

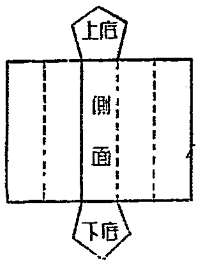
9. 二平面相交，我們能不能在一平面上，作他平面的平行線？怎樣方能作出？

84. **可展面** 可用平面捲成或摺成的面，叫**可展面**. 例如用紙板可捲成圓筒，或摺成方盒. 本書將論及幾種最簡單可展面的關係度量.

我們能不能用紙板捲成一球？

85. **立體模型** 凡可展面易於用紙板做成模型.

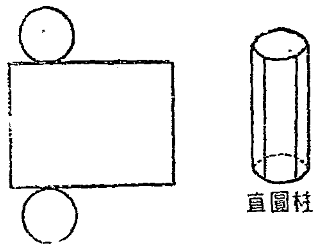
(一) 柱體 最簡單的有直角柱和直圓柱二種.



直角柱

右圖中上下底是二個

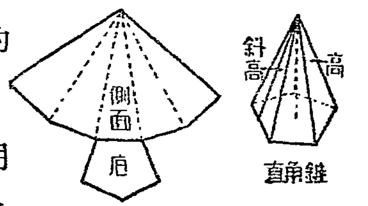
完全相等的多角形，側面由一長方形摺成（摺痕叫稜），展開來的長方形的闊和多角形各邊長的和一定相等．這種立體叫做**直角柱**．



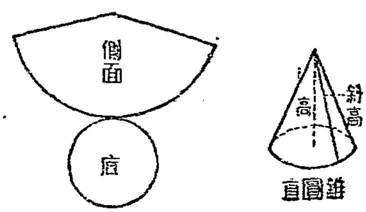
如將上下底換爲相等圓形，則可捲成**直圓柱**．

柱體內，上下二底平行，中間的距離叫**高**．直柱體側面各平面，直或圓柱上直線都和二底垂直．

（二）錐體　最簡單的分直角錐和直圓錐．



一正多角形爲底，用幾個完全相等的等腰三角形合成側面如右圖，便叫**直角錐**．摺痕叫**稜**，從頂點到底上各邊的距離叫**斜高**．到底上距離叫**高**．



如用圓做下底，以扇

形爲側面，則成**直圓錐**. 從頂點到圓上和底上的距離仍舊各稱爲**斜高**和**高**.

注意高必過底的中心(正多角形心或圓心).試按畢氏定理求高、斜高、邊心距(或半徑)三者的關係.

86. **表面積，側面積** 包圍立體各面的全部面積叫**表面積**，常記爲 S. 除去底，單論側面，就叫**側面積**，記爲 L. 所以表面積是側面積與底的和.

87. **柱體，錐體的面積** 柱體，錐體既是由平面摺成或捲成，所以兩種面積，不難求出，例如下表:

表中 L=側面積，S=表面積，A=底面積；

l=斜高 h=高.

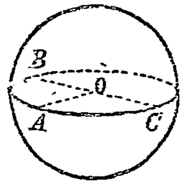
a=直角錐底面的邊心距.

r=直圓柱或錐底面的半徑.

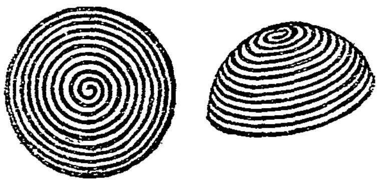
p=直角柱或錐底面各邊長的和.

柱體	直角柱	$L=ph$	$S=ph+2A$
	直圓柱	$L=2\pi rh$	$S=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi r(h+r)$
錐體	直角錐	$L=\frac{1}{2}pl$	$S=\frac{1}{2}pl+\frac{1}{2}pa=\frac{1}{2}p(l+a)$
	直圓錐	$L=\pi rl$	$S=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)$

88. **球**　曲面上任何點都和一定點等距的，叫做**球**．這定點叫**心**．定距離叫**半徑**．半徑的二倍叫**直徑**．過圓心的平面截球所成的圓叫**大圓**．如右圖 O 是球心，$OA=OB=OC$ 都是半徑，BC 是直徑．ABC 是個大圓．



89. **球的表面積**　球非可展面，所以表面積求法．不像上面所說幾種立體的簡易．在初中程度，只能用實驗方法來推斷．

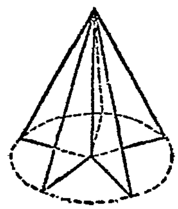


二條細線，一條繞滿半個球面，一條繞滿底上的平面(卽一大圓)，再比較他們的長，便知半球的表面積，恰好二倍於底面的面積．以 r 表球半徑，卽得

球面積公式:　　$S=4\pi r^2$.

習題十六

1. 用一塊三角板豎立棹上，使一邊合於棹面，一邊

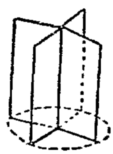


和棹面垂直．用手指按定直立一邊的端點，令合在棹面的一端旋轉，問成功什麼圖形？

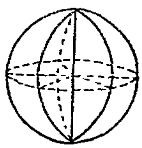
2. 如用一長方形，照上題方法旋轉，問成功什麼圖形？

3. 如用一半圓，照前題方法旋轉，問成功什麼圖形？

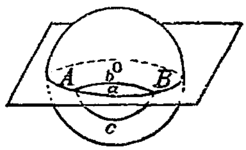
註 這樣旋轉成功的圖形，叫**旋轉面**．



(1)



(2)



(3)

4. 球面上 A, B 二點，不在一直徑兩端的，是否和球心共在一直線上？由此推斷過這樣的兩點，可定幾個大圓？

5. 過上題 A,B 二點，作一大圓（可畫在皮球上），并任意聯幾條線．量這二點間各種線的長，如 a, b, c，看那一種最短．

6. 一圓筒，高18公分，直徑爲9公分，求表面積．

7. 埃及一金字塔，高488呎，底爲正方形，邊長756呎，求

(一)稜長　(二)斜高　(三)面積.

8. 已知直圓錐的 h 同 r，求 L 和 S.

9. 一直九角錐中 $h=7$寸，$a=1.5$寸，求 L 和 S.

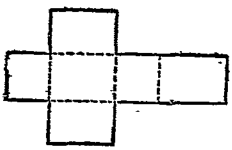
10. 地球直徑平均長8000哩，求地球面積.

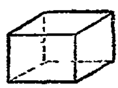
11. 一半球的表面積共 27π 方寸，求這球的半徑.

12. 直圓柱底面的直徑和高，和一球的直徑相等，求前者側面積與球面積的比.

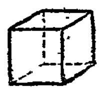
13. 半球恰好含於一同底直圓柱內，求二者表面積的比.

90. **立方體** 上下底是長方形的直角柱，叫**長方體**；如爲正方，而高等於底邊的，便叫**正方體**.





長方體

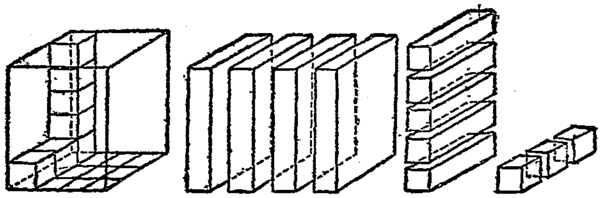


正方體

試用紙板作長方體和正方體的模型.

91. **體積** 各邊長爲單位的正方體，是量體積

的單位，例如每邊長一公分的，叫**立方公分**. 一立體的體積，就是看他含有單位體積的幾倍或幾分之幾.



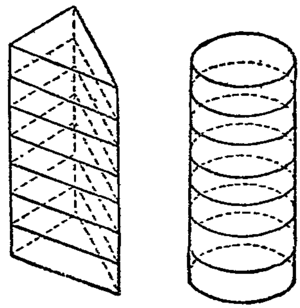
像上圖的長方體，高5單位，底面長4單位，闊3單位，便可直剖成同樣大小的四片，每片又可分為五條，每條還可切成三段. 所以共分為$4\times5\times3=60$個體積單位. 同理當長方體高，闊，長為a,b,c時，得

長方體積公式: $V=abc.$

92. 柱體和錐體體積 要嚴格證明各種體積求法公式，須先明立體幾何的理. 在此只能用淺顯的說明，或藉實驗來示明公式的可靠性.

(一) 直柱體 將柱體剖為單位高的薄片; 底面的面積，即所含面積單位的個數，故每片所含體積

單位個數等於底面面積數值．設以 h 表高，A 表底面積（在直圓柱時，用 r 表底面半徑）則得

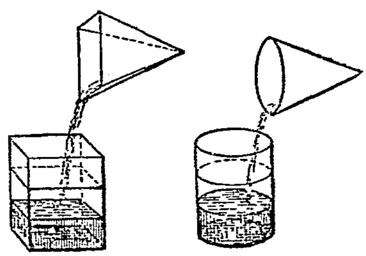


直角柱體積公式：

$$V=hA.$$

直圓柱體積公式： $V=\pi hr^2$.

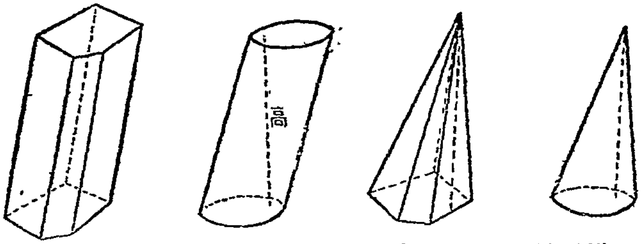
（二）直錐體　用紙板或洋鐵做成同底且等高的直柱體和直錐體．將後者盛滿水或細砂注入柱體內，便可驗出前者體積是後者的三分之一．故得



直角錐體積公式： $V=\frac{1}{3}hA$.

直圓錐體積公式： $V=\frac{1}{3}\pi hr^2$.

93.　**斜柱體和斜錐體**　用不和底平行的平面去截直柱體或直錐體，便得**斜柱體**或**斜錐體**，如下圖．

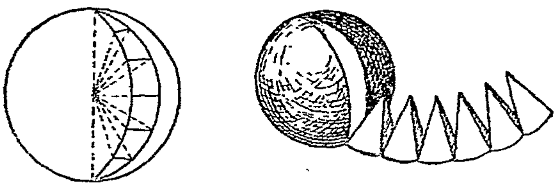


斜角柱　斜圓柱　斜角錐　斜圓錐

斜柱體的高仍是二平行底間距離，斜錐體高仍是自頂到底面距離．斜柱(錐)體體積公式，與上節者同．

94. 球的體積 作過一直徑的若干平面，直剖球成若干片，再過球心作平面橫切各片爲幾份．分得很細時，各份可以當做錐體來看，其高即球半徑 r．而各錐體總和即是球體積．故得**球體公式**：

$$V=\frac{1}{3}rS=\frac{1}{3}r\times 4\pi r^2=\frac{4}{3}\pi r^3.$$



註　體積相等的各種立體，以球表面積爲最小．這理在物理上有應用，但不能用初等方法證明(看下面 11,12 兩

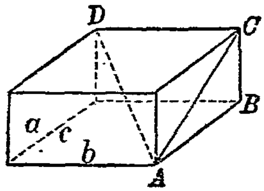
題).

習題十七

1. 一長方體高長闊各爲 a, b, c, 求表面積.

2. 求右圖中 AD 的長.

注意 DC 垂直於 AC. 何故?



3. 取紙板或洋鐵作一直圓柱, 使底面直徑和高都與一球直徑相等. 將球放入, 再用細砂或水塡滿空隙. 取出球後, 看細砂所佔部份, 是圓柱的幾分之幾. 由此核驗球體積公式.

求下列 4 至 8 題中圖形體積:

4. 圓柱: $r=2.7$ 寸, $h=1.4$ 寸.

5. 底面爲正六角形的角柱: $h=5.2$ 寸, $a=1.7$ 寸.

6. 底面爲正八角形的直角錐: $h=3.8$ 寸, $l=5.5$ 寸.

7. 直圓錐: $r=2.3$ 寸, $l=6.6$ 寸.

8. 球: $r=7.7$ 寸.

9. 已知球面積 S, 求 r 和 V(公式均用 S 表出).

10. 已知球體積 V, 求 r 和 S (公式均用 V 表出).

11. 一正方體和球體積相等，求二者表面積的比.

12. 與 4 至 8 題體積相等的球，面積是多少？試分別求出.

13. 甲球比乙球面積大 4 倍，問體積應大幾倍？

14. 銀的比重為 10.5，銅的比重為 8.9. 今有銀銅二球，重量相等，求他們半徑的比.

IV. 結 論

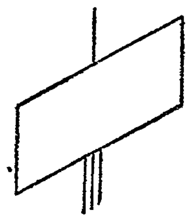
95. 實驗方法的缺點 在這學期裏，由實驗的方法明白了幾何圖形的好幾種性質. 但是總覺到所得知識，是零星散亂，不能成為一貫. 又因量法的精密度，有一定的限制，結果也不過是近似的，例如我們量了多少個三角形的內角，加得的和，總同180° 小有出入；即使說完全符合，還許有極微細的尾數，譬如說幾百分之一秒，為量法所不能發覺的.

況且實驗多數特例歸納而得的結果，可靠性雖是很大，但是難斷其普遍成立. 我們雖沒有重瞳子的朋友，也從未聽人說過，但是不能斷定沒有這種

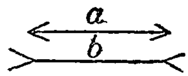
人，而疑心歷史上說虞舜和項羽有重瞳的記載是造謠言．這層也大足減少實驗方法的價值．

96. 幾何上亂眞的例 我國有句成語，叫‘魚目混珠’，就是指明了我們觀察的易於受欺．在幾何上．也不少僞可亂眞的例．略舉幾個如下：

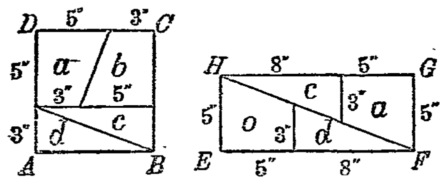
(一) 右圖中上邊一段線是下面三段線中那一條的延長線？試由觀察下一結論，再用直尺核驗．



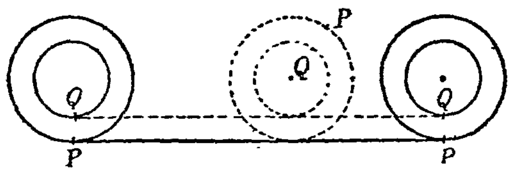
(二) 右圖 a, b, 二線段，孰長孰短？先估計，再用尺量．



(三) 照下圖可將一面積爲64的正方形，割補成面積爲65的長方形．



(四) 取大小二圓，疊合圓心，并釘定．如二圓在二平行線上滾動如下圖，則可推斷大小二圓周相等．



觀察既這樣易於受欺，實驗結果，自也難免錯誤，

雜　　題

1. 試彙錄本編中所載各求積公式.

2. 求平面積的基本公式是什麼？各種直線形應用何法化爲何種圖形，以得求積公式？

3. 本書所講簡單的立體有幾種，試列爲一表.

4. 那一種立體面積可化爲平面積？求出量法公式.

5. 試指出圓面積和球體積求法相似的地方.

6. 實驗方法有什麼缺點？分條舉出來.

填下列各題中用(?)記明的空格：

	量＼形	V	S	p	h	r或a	l
7.	直九角柱	?	?	?	2.5公寸	3公寸	——
8.	直圓錐	?	63方寸	——	?	2寸	?
9.	直圓錐	?	?	——	?	3寸	5寸
10.	直九角錐	?	?	?	?	1呎	1呎3吋
11.	直角錐	?	?	26呎	3尺	4尺	?

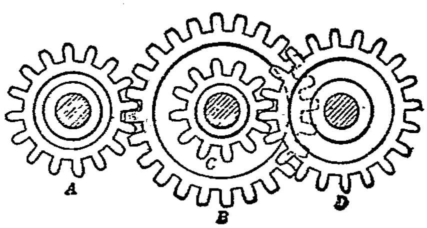
12. 木箱一個，用半寸厚的木板做成，長 5 尺，闊 4 尺，高 1尺 5 寸．問要木板多少？容量如何？

13. 木板厚 1 分，要造成一木箱，能容 2000 立方分，問需用木板若干？

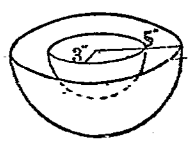
14. 半徑爲 5 吋的球，包上$\frac{1}{2}$吋的銅皮，需銅若干立方吋？

15. 用銅鑄成空球一個，厚 1 分，外面表面積爲 201 方分．問需銅多少立方分？

16. 右圖中 A, B, C, D 四輪齒數爲 16, 24, 12, 20, 而 B, C 二齒輪，係一塊鐵鑄成．A 輪轉 24 次時，B, C, D 諸輪各轉幾次？



17. 右圖爲一半球形中空的鉢．內半徑長 3″, 外半徑長 5″, 求表面積．



18. 圓上一段弧和連接端點的弦所成圖形叫**弓形**．如

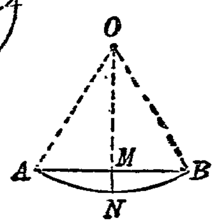
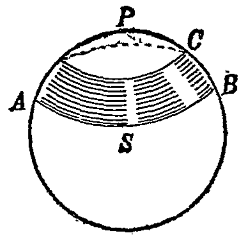


圖 M 爲 AB 弦中點，N 爲 AB 弧中點，設 $MN=h$, $AB=k$, 則有

弓形面積差近公式： $A=\dfrac{h^3}{2k}+\dfrac{2hk}{3}$

如 AB 弧爲全圓四分之一，半徑爲 2 寸，試求弓形面積確值，再用差近公式算出結果來比較．

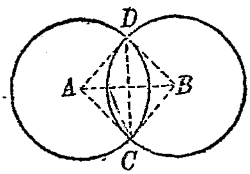
19. 用二平行面截一球，所成圖形叫**球帶．**



設二截面距離爲 h，半徑爲 r，則得**球帶側面積公式**如下：

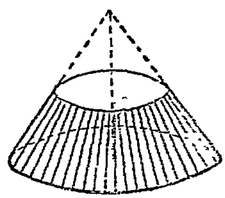
$$L=2\pi hr.$$

地球半徑爲 4000 哩，北溫帶的高度爲半徑的 $\dfrac{13}{25}$，求北溫帶面積．



20. 如右圖 A, B 是二等圓的心，$ABCD$ 成一正方，邊長 1 寸．求二圓共含部分的面積．

註 AB, CD 分原正方爲四個完全相等的等腰直角三角形．



21. 一直圓錐高 4 寸，底面半徑長 3 寸，在一半高的地方，作一面平行於底面．求截體表面積．

註 這截面也平分斜高，并且仍與高垂直.

22. 令 $n=1,2,3,\cdots 30$，求 n^2+n+41 的值，看所得諸數，是不是皆質數？我們是否就可斷定當 n 表任何正整數時，n^2+n+41 的值，都是質數呢？

令 $n=40$ 代入再試.

註 由此可知由多數特例未必能歸納成通則(看§95).

〔附〕 小於1000的質數表

百位數	個十位數
0	1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 77, 73, 79, 83, 89, 97.
1	01, 03, 07, 09, 13, 27, 31, 37, 39, 49, 51, 57, 63, 67, 73, 79, 81, 91, 93, 97, 99.
2	11, 23, 27, 29, 33, 39, 41, 51, 57, 63, 69, 71, 77, 81, 83, 93.
3	07, 14, 13, 17, 31, 37, 47, 49, 53, 59, 67, 73, 79, 83, 89, 97.
4	01, 09, 19, 21, 31, 33, 39, 43, 49, 57, 61, 63, 67, 79, 87, 91, 99.
5	03, 09, 21, 23, 41, 47, 57, 63 69, 71, 77, 87, 93, 99.
6	01, 07, 13, 17, 19, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 73, 77, 83, 91.
7	01, 09, 19, 27, 33, 39, 43, 51, 57, 61, 69, 73, 87, 97.
8	09, 11, 21, 23, 27, 29, 39, 53, 57, 59, 63, 77, 81, 83, 87.
9	07, 11, 19, 29, 37, 41, 47, 53, 67, 71, 77, 83, 91, 97.

理 解 幾 何

第四編 理解幾何基本事項

I. 緒 論

97. 理解幾何的性質和方法 在實驗幾何中，我們已經知道許多幾何的事理和應用．這些事理，都是由度量歸納而得，不特不能絕對正確，也無從證其是否普遍成立，且又嫌沒有系統．為補救這些缺點起見，就有理解幾何的需要．

理解幾何和實驗幾何并不是內容不同，乃是研究方法上性質的差異．理解幾何不從那些難精確，欠普遍的量法入手，而認定若干簡明到無可致疑的理為出發點，再用邏輯的方法，逐漸推求出各種圖形的特性；這些特性，多數都已在經驗幾何裏講過，我們自不難明白其意義；此後應當注意的，乃在於推證步驟的如何完密，根據的如何可靠。

理解證法雖是比經驗量法可靠，但是沒有後者

的淺近易明. 故本編對基本事項細加解釋，以作過渡.

98. 證法的依據 理解幾何推證法中可以依據的理由有下列幾種:

(一) 題中所設的已知件,

(二) 題中所言及圖形的定義,

(三) **公理** 即簡明到無可致疑的事理，或是關於圖形性質，或是關於一般數量.

(四) 已證明過的**定理** 凡需要證明的理，叫定理. 已經證過的定理，就可用作推證新定理的根據.

99. 作圖的依據 我們雖然學過好幾種作圖的方法，也很明白作法的正確，但是還沒知道何以作出的圖能合於所預定條件. 在理解幾何中，到相當的程度，就可以分別證明.

理論上作圖，只可用無度尺和圓規兩種 (§45). 這就相當於下面的三條假設:

(一) **過二點可作一直線，而只可作一條.**

(二) **直線可任意延長.**

公理不加證明而即[illegible]可致者謂之公理
定理須加以證明[illegible]

（三）**有圓心和半徑可作一圓**（看 §5 和後文114）．

一切作圖的手續，都由這三條引伸得來．

100．定義　敍述一種幾何圖形特有性質，可以表明與他種圖形不同的地方，就是那圖形的**定義**．一條定義裏，大抵總含有‘稱爲’‘叫做’等一類的字句．

凡是幾何圖形，都該有簡潔明白的字義．但有些基本圖形，意義已極淸楚，不特沒有加定義的必要，並且也無從作更淺顯的說明．例如‘直線’‘平面’等便是．

註　在實驗幾何中，已經講過許多的定義，學生應當自行逐條查明抄出，以便與後文正式敍述時，作一比較．

101．幾何命題　記述算理的陳述語，叫做**命題**．公理，定理，作圖題都是一種命題．

每一命題中所述事項，都可分爲‘前提’和‘結論’二部份．譬如‘一三角形中若有二邊相等，則對等邊的角必等’一命題中，‘二邊相等’是假設的條件，叫做**前提**；‘對等邊的角必等’是需要證明的事項，

叫做結論．大凡一命題中，前面一部份的陳述語是前提，其中常含有‘假若’一類的字句，用‘則’字等連接的一段是結論．

但在簡單的情形中，往往將前提暗含於陳述語的主詞內．例如‘長方形面積等於底和高的乘積’一命題中，‘長方形’是前提，‘面積等於底和高的乘積’是結論．詳細說來，這命題應當寫做‘如一圖形爲長方形，則其面積爲底和高的乘積’．凡公理以及較簡單的定理多用這種命題的形式．

命題的前提不很複雜時，也可改爲第二種形式．譬如第一例可改爲，三角形中對等邊的角必相等’．

習題十八

1. 實驗幾何裏講過那幾種作圖題？有一題用幾種作法的麼？那幾種是合於理論上限制的？

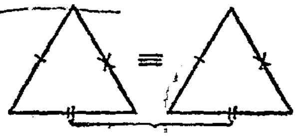
分別下列各命題的前提和結論．如遇主詞暗含前提的情形，試將敍述加詳，分開前提和結論．

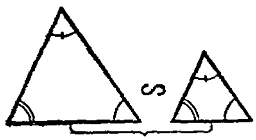
命題中涉及各名詞的定義，分別在實驗幾何中查明．

2. 二個三角形的三邊，如彼此相等，則這二個三角

形必完全相等（≡是全等的記號）.

3. 二個三角形的三角，如彼此相等，則這二個三角形爲相似形（∽是相似的記號）.

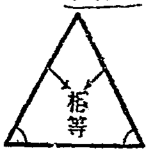

(2)


(3)

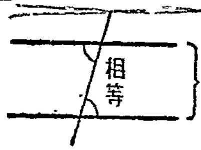
4. 如三角形中有二角相等，則對着等角的邊也相等.

5. 二平行線被一線所截，所成的內錯角必相等.

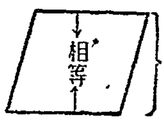
6. 平行四邊形的任一組對邊，必等長并且平行.



(4)



(5)

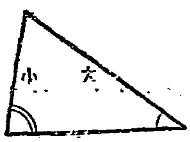


(6)

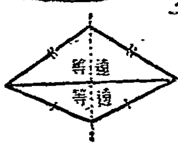
7. 三角形中對大邊的角較大.

8. 一線段的垂直平分線上任何點，都距兩端等遠.

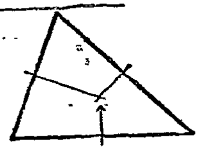
9. 三角形三邊的垂直平分線必相交於一點.



(7)

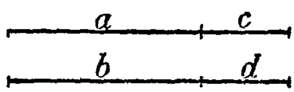


(8)


(9)

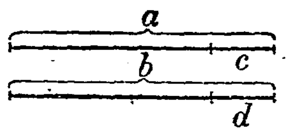
10. 三角形的面積等於底高相乘積的一半.

102. 等量公理 代數中的**等量公理**,是普遍成立的,對於幾何圖形當然也能應用. 今列舉如下,并用圖說明.



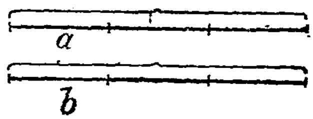
(一) 如 $a=b, c=d$ 則

$$a+c=b+d.$$

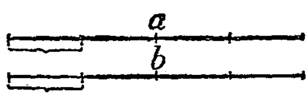


(二) 如 $a=b, c=d$, 則

$$a-c=b-d.$$



註 在這裏須假設 a 大於 c(則 b 也大於d).



(三) 如 $a=b, m=n$, 則

$$ma=nb.$$

(四) 如$a=b, m=n$, 則 $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$ 但$m\neq 0$.

這幾條公理,也可從下列的一條推出. 即:

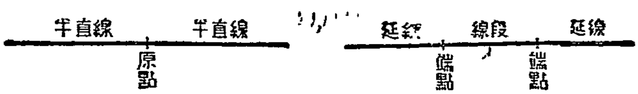
(五) 代換公理 在任何對於數量的運算中,一量都可用他的等量來代替.

譬如在 $a+c$ 一式裏,用 a 的等量 b, c 的等量 d 代入,得 $b+d$, 即 $a+c=b+d$. 又 $a=b, b=c$ 時,則

$a=c$. 故

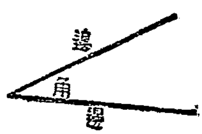
等於同量或等量的量，必互相等.

103. **線段，半直線，延線**　直線是可以無限延長的. 在一直線上取一點，分為兩部，每部分叫**半直線**，那點叫**原點**. 如取二點，則其中一段叫**線段**，二端都叫**端點**. 在線段以外的部分，叫做這線段的**延線**.



註　直線，線段，半直線等有時簡稱為線.

104. **角**　從一點引二條半直線，所成的圖形，叫做**角**. 這點叫**頂點**. 二半直線叫**邊**.



註　角的記號為 $\angle$，幾個角記為$\measuredangle$.

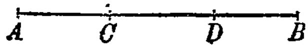
105. **移形公理**　移形公理是度量圖形的根據.

我們比較兩線段的長短，可比齊一端，而使二線重合，看那一線的他端在外. 比較兩角時，可使頂點及一邊相合，而看那一角的第二邊在外. 用尺

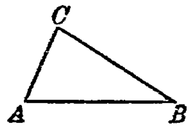
量線，用量角器度角，都不外此理.

移形公理　**幾何圖形可從一處移到他處，而不改其形狀大小.**

106. 幾何公理　下面幾條公理，也用圖形說明.



(一) **全量等於一切分量的和.**



如圖 $AB=AC+CD+DB$.

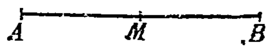
(二) **二點間的線，以直線段為最短.**

如圖 AB 小於 $AC+CB$.

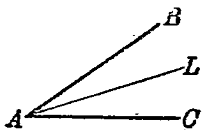
註　聯兩點線段的長，稱為兩點間距離.

(三) **一線段可被其內一點所平分，但只有一點.**

如圖 M 點平分 AB.



(四) **一角可被過頂點的一線所平分，但只有一線.**



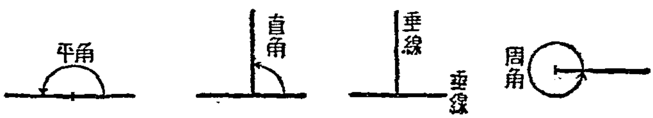
如圖 AL 平分 $\angle BAC$.

註　平分一線段的點，叫**中點.**

平分一角的線，叫**分角線.**

107.　直角，平角　固定角的一邊，而旋轉他邊，則角漸漸增大．到他邊與定邊成一直線時，叫**平角**．

分平角爲二等分，所成的角叫**直角**．直角的兩邊，互稱爲**垂線**，或互相**垂直**．平角的二倍叫**周角**．



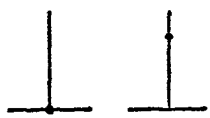
註　直角記爲 $rt.\angle$，平角記爲 $st.\angle$，垂直的記號爲 $\perp$．由此可知 1 **周角** $=2st.\angle s=4rt.\angle s$，$1st.\angle=2rt.\angle s$

108.　直角性質和推論．

直角公理　**凡直角皆相等．**

~~由一理易於推出的他理，~~叫做**系**．因平角二倍於直角，故按等量公理(三)立刻可得下：

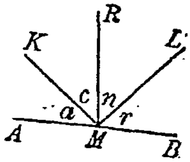
系　**凡平角皆相等．**



垂線公理　**過線上或線外一點，可作一垂線，但只可作一垂線．**

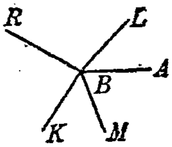
註　自一點到一線上，垂線的長稱爲點線間距離．

由全量等於分量和公理及平角，周角定義，即得.



平角定理　**在一直線同側，而角頂集於一點的諸角，總和為二直角.**

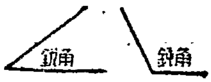
如圖 $\angle a+\angle c+\angle n+\angle r=2rt.\angle s.$



周角定理　**在一點四周各角的總和角為四直角.**

如圖 $\angle ABL+\angle LBR+\angle RBK+\angle KBM+\angle MBA=4rt.\angle s.$

109. 鈍角，銳角　小於直角的角，叫銳角，大於直角而小於平角的角叫鈍角.

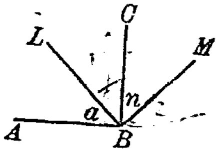


習 題 十 九

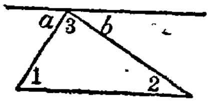
1. 用角為例，說明各等量公理.
2. 平分角的分角線，與邊有什麼關係?
3. 證明凡周角都相等. 四直角
4. 右圖中 $\angle a=\angle n$，試證 $\angle x=\angle z$.

如果 $\angle x=\angle z$，我們能證 $\angle a=\angle n$ 麼？

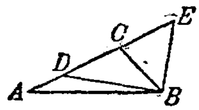
5. 右圖中 $BL\perp BM$，$AB\perp BC$．證明 $\angle a=\angle n$．



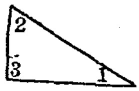
如 $\angle a=\angle n$，我們能證 $\angle LBM=\angle ABC$ 麼？能證這二角都是直角麼？



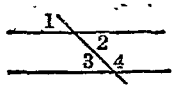
6. 右圖中 $\angle a=\angle 1$，$\angle b=\angle 2$，試證 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=2rt.\ \angle s$．



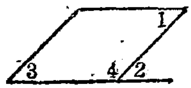
7. 右圖中 $DC=CE=CB$，求證 $AE>AB$，且 $AD<AB$．



8. 右圖中 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=2rt.\ \angle s$，而 $\angle 1+\angle 2=\angle 3$．求 $\angle 3$ 等於幾直角．



9. 右圖中 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle 3$，試證 $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2+\angle 4=2rt.\ \angle s$．



10. 右圖中 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 2$，試證 $\angle 1=\angle 3$，$\angle 3+\angle 4=2rt.\ \angle s$．

11. 疊合二等長線段，他們的中點是否也相合？何故？

12. 疊合二等角，他們的分角線是否也相合？何故？

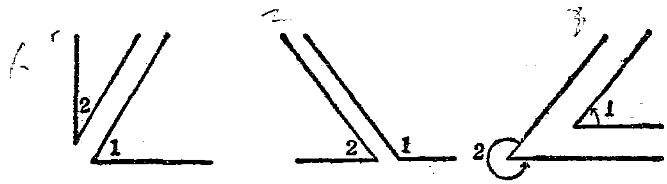
II. 相關角

110. 數量的相關 二角在數量方面成下述關係:

(一) 餘角 二角的和爲一直角時，互稱爲**餘角**.

(二) 補角 二角的和爲一平角時，互稱爲**補角**.

(三) 共軛角 二角的和爲一周角時，互稱爲**共軛角**.



註 二角共軛時，必有一角大於平角，這種角叫**優角**或**反角**；對於優角言，鈍角，直角，銳角總稱**劣角**. 二線成一角，同時可當做優劣二角來看；但在初等幾何中總是指劣角來說.

111. 補角定理 **等角或同角的補角必定相等.**

〔已知〕 $\angle 1=\angle 2$; $\angle a$是$\angle 1$的補角，$\angle b$是$\angle 2$的補角.

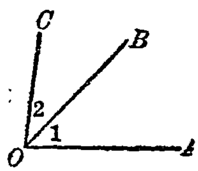
〔求證〕 $\angle a=\angle b$.

〔證明〕 敍　述	理　由
(一) $\angle 1+\angle a=\angle 2+\angle b$ $=st.\ \angle.$	(一) 補角定義，直角公理系.
(二) $\angle 1=\angle 2.$	(二) 假設.
(三) $\therefore\ \angle a=\angle b.$	(三) 等量相減.

系　**等角或同角的餘角必定相等.**

112.　位置的相關　二角就位置言，成下述關係：

(一) 隣角　同一頂點，共有一邊，而各不相含的兩角，互稱為**隣角**. 不公共的邊叫**外邊**.



隣角無數量關係；但若二隣角相餘，便叫**餘隣角**，相補時，叫**補隣角**.

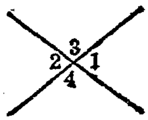
如上圖 $\angle 1$, $\angle 2$是隣角, OA, OC 是外邊.

(二) 對頂角　二線交角中不相隣二角，叫**對頂角.**

下圖中 $\angle 1$, $\angle 2$或 $\angle 3$, $\angle 4$都是.

113.　對頂角定理　對頂角必相等.

〔已知〕 $\angle 1$, $\angle 2$是對頂角.



〔求證〕 $\angle 1=\angle 2$.

〔解析〕 我們試先推考證明如何入手.

前面已說過的道理中，能證明二角相等的，有(一)等量公理(§102),(二)直角公理(§108),(三)補角定理(§111)三條. 但$\angle 1$與$\angle 2$,旣非由等角加，減，倍分而得，又不等於同角，也不等於直角. 故(一)(二)皆不能直接應用. 再就已知件來看，知$\angle 1$, $\angle 2$同爲$\angle 3$的補隣角，所以可用(三)；由此便得證明如下：

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) $\angle 1+\angle 3=2\,rt\angle s$, $\angle 2+\angle 3=2\,rt\angle s$.	(一) 平角定理.
(二) $\angle 1$,$\angle 2$同爲$\angle 3$的補角.	(二) 補角定義.
(三) $\therefore\ \angle 1=\angle 2$.	(三) 補角定理.

同理可證 $\angle 3=\angle 4$.

註 解析一層，可啓發學生自己思考能力，免流於機械式的呆記，教師對此，宜特加留意，務使學生已透澈明瞭解析，方可進授證明. 後文爲省篇幅計，解析只能略述要點. 又遇很容易的證明，常常不寫出，學生應按解析所

$\angle a+\angle b=$ $\angle a-2\angle b=0$ $\{\angle a-\angle b=\frac{1}{4}\times 90$ $2\angle a+\angle b=$

述，逐步補明．

習題四十

1. 下列各圖中，那一組 $\angle a, \angle b$ 是鄰角？那一組是？何故？

三角形三邊

2. $\angle a, \angle b$ 互爲餘角，且合於下列各條件之一．

(一) $\angle a=2\angle b$，(二) $\angle a-\angle b=\frac{1}{4}rt\angle$，

(三) $2\angle a+\angle b=rt.\angle$．求這二角．

3. 二補隣角的分角線成功什麼角？

4. 如二隣角的分角線垂直，試證其必互爲補角．

5. 一角平分線的垂線，必平分其補隣角，試加證明．

6. 試證等角或同角的共軛角必相等．

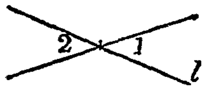
7. 二直線交成四角中，有一直角，求其餘各角．

8. 試證一角的分角線，必平分其對頂角．

9. 對頂角的二分角線，交成什麼角？

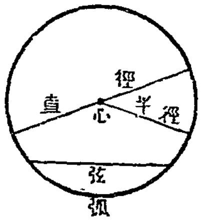
10. 試證二餘隣角的對頂角，還是餘隣角．

11. 自直線 l 上一點,向兩側各引一線如右圖．試證如 $\angle 1=\angle 2$,則他們成功一直線．



III. 圓

114. 圓 一閉形曲線上任何點都和其內一定點等遠時，便叫做**圓**．定點叫**圓心**．從圓心到圓上任何點聯線叫**半徑**．圓上二點聯線叫**弦**．過圓心的弦叫**直徑**．圓的一段叫**弧**．



115. 全等形 兩個圖形重疊起來，處處相合的，叫**全等形**．全等形的記號為≡，基本的全等形如下：

(一) 兩條直線，只要兩點相重，便完全疊合．所以**凡直線皆為全等形**．

注意 所說直線，指無限長的而言．

(二) 兩圓半徑相等，如使圓心相重，則兩圓也必完全密合．反過來說，全等的圓(簡稱**等圓**)的半徑必等，故

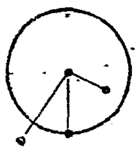
(*a*) **同圓或等圓的半徑皆相等**．

(*b*) **等半徑的圓爲等圓.**

(三) 就一般情形說，如二形同與一形全等，即都可和後者疊合，故必可自相重合. 所以

二圖形與他一形全等的，必爲全等形.

116. 圓的特性 除上文(二)外，圓還有他種重要特性，今列舉如下:



(一) **一圓內直徑是半徑的兩倍.**

(二) **一點與圓心的距離如等於半徑，便在圓上；小於半徑，便圓在圓內；大於半徑，便在圓外.**

註 這些性質或由定義卽明，或一望可知，故不另加正式的證明.

117. 圓和直線 **二點定一直線**，是直線最基本，最重要的特性. 圓也有一條相類的重要特性，卽

(一) **圓由不在一直線上的三點決定.**

這理就 §57 基本作圖題八，卽可明白. 但正式的證明，須到第七編方能講到.

又因二點卽決定直線，所以

（二）**二直線至多只能有一交點．**

圓既不能與同直線交於三點，且三點即定一圓，故

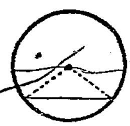
（三）**直線與圓至多只可有二交點．**

（四）**圓與圓至多也只可有二交點．**

這些交點，在作圖方面，非常重要．

習題二一

1. 二圓不等時，半徑能否相等？直徑能否相等？
2. 二等圓疊合時，圓心是否一定相重？
3. 直線是全等形？任取二線段，是不是必爲全等形？
4. 將大小二圓圓心相合，他們能不能相交？何故？
5. 證明圓內的弦必小於直徑．
6. 過不在一直線上的三點，可定幾條直線？
7. 任取四點，是不是總在一圓上？在普通情形下，四點可以定幾個圓？



雜題

1. 理解幾何與實驗幾何，有何相同處？不同處？
2. 列舉本編中各命題，而分別其前提與結論．
3. 凡直角是否都等？銳角呢？平角呢？鈍角呢？

4. 如說角是由一點引二線段而成（比較§6），則二等角是否能重疊起來，使處處密合.

5. 什麼角和他的餘角相等？補角相等？共軛角相等？

6. 兩銳角的和成功什麼角？兩鈍角呢？一銳角和一鈍角的和至少比什麼角大至多不能大於何角？

7. 那一種角小於其餘角？大於其餘角？

8. 兩角互爲餘角，他們的補角和如何？互爲補角的兩角呢？

9. 從一點 O，引 OA, OB, OC, OD，四線，如 $OA\perp OC$，且 $OB\perp OD$，試證 $\angle AOB$ 和 $\angle COD$ 或相等或相補.

10. 自一點 O，順次引 OA, OB, OC, OD 四線，如 $\angle AOB=\angle COD$，$\angle BOC=\angle DOA$，則 AOC，BOD 各成一直線，試加以證明.

11. OP 爲 $\angle AOB$ 的分角線，自 O 引不在這角內的任意直線 OX 試證 $\angle POX=\frac{1}{2}(\angle AOX+\angle BOX)$.

12. 同上題，如 OX 在 $\angle POB$ 內，則 $\angle POX=\frac{1}{2}(\angle AOX-\angle BOX)$.

13. 同上題，但 OX 在 $\angle POA$ 內，求 $\angle POX$.

14. P是AB線段的中點，X是AB延長線上任意一點，試證$PX=\frac{1}{2}(AX+BX)$.

15. 同上題，如X點在線段BP內，則$PX=\frac{1}{2}(AX-BX)$.

16. 同上題，但X在線段AP內，求PX.

17. 證明一圓內任意二點的距離都比直徑小.

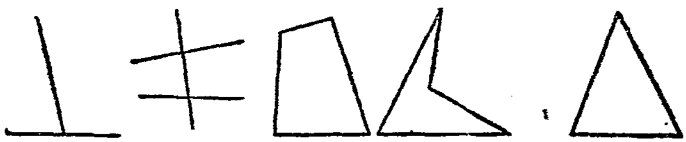
18. 二圓相交時，半徑的和必大於二圓心的距離，試加證明.

第五編　直線形（一）

I. 全等三角形

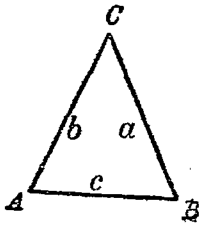
118. **平面形，閉形**　幾何圖形在同一平面上的叫**平面形**．本書所論，以平面形爲限．平面形如將全平面分成不相通的兩部份，則稱**閉形**，例如圓便是．

119. **直線形，三角形**　單由直線組織成功的圖形叫**直線形**．最簡單的直線閉形爲**三角形**，即由三線段圍成的閉形．各線段叫**邊**，各邊端點叫**頂點**，



直 線 形　　　　直線閉形　　　　三角形

每兩邊所成含於形內的角叫**內角**，或簡稱**角**．



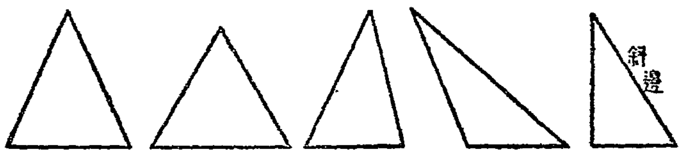
註　三角形的記號爲△，幾個三角形，記爲㕕，頂點與角，常用大寫

字母 A, B, C 去記. 相對的邊記以相同的小寫字母如 a, b, c

120. 三角形分類 可因邊或角去分類.

(一) 因邊分類 有二邊相等的, 叫**等腰三角形**, 二等邊稱**腰**, 餘一邊稱**底**. 三邊都等的, 叫**等邊三角形**.

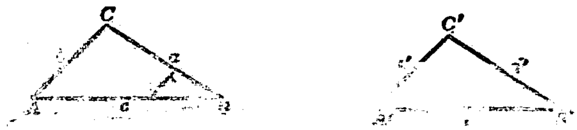
(二) 因角分類 三角都是銳角的, 叫**銳角三角形**. 有一鈍角的, 叫**鈍角三角形**, 有一直角的, 叫**直角三角形**, 其中對直角的邊, 叫**斜邊**或**弦**, 他二邊叫**腰**或**股**.



等腰△ 等邊△ 銳角△ 鈍角△ 直角△

註 平常所言的三角形, 指無等邊及直角的而言. 凡未言明有何種特殊情形的圖形, 都是指最普通的一種.

121. 全等三角形定理一 兩三角形中, 其一的兩邊和夾角, 等於他形中兩邊和夾角, 則為全等形.



〔已知〕 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中 $c=c'$, $b=b'$, $\angle A=\angle A'$。

〔求證〕 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$。

〔解析〕 將這兩三角形相重，使已知的相等部分疊合，看其餘各部分，是否也各相合？

〔證明〕

敘述	理由
(一) 將△ABC 放在△$A'B'C'$ 上，使 c 與 c' 重合，則 A 合於 A', B 合於 B'.	(一) 移形公理. 又因假設 $c=c'$
(二) 則 b 必落於 b' 上.	(二) 因假設 $\angle A=\angle A'$.
(三) C 必落於 C' 上.	(三) 因假設 $b=b'$.
(四) $\therefore a$ 與 a' 完全疊合.	(四) 二點定一線 (99).
(五) $\therefore \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.	(五) 全等形定義.

註 以後引用這定理時，簡記為 $s.a.s.$

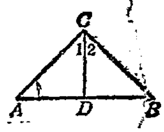
122. 全等形對應部分 兩全等形既可完全疊合，故一形中各部分與其全等形中對應部分各相等.

證等量的最直接方法，是用疊合法，或等量公理，但運用時很不方便，在幾何學中，證明等量最普通的方法，乃是設法指示求證的等量，爲全等形對應部分.

〔例〕等腰三角形等腰夾角的分角線平分對邊

〔已知〕$\triangle ABC$ 中，$AC=CB$，CD是$\angle ACB$的分角線，即 $\angle 1=\angle 2$.

〔求證〕$AD=DB$.

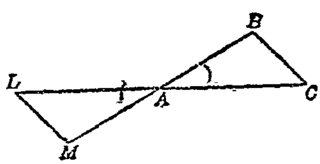


〔證明〕

敍　述	理　由
(一) $AC=CB$, $\angle 1=\angle 2$.	(一) 假設.
(二) $CD=CD$.	(二) 公用.
(三) $\triangle ACD=\triangle BCD$.	(三) s. a. s.
(四) $AD=DB$.	(四) 對應邊.

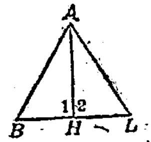
習題二二

1. 右圖中 $AL=AC$, $AM=AB$, 那兩個三角形爲全等形?

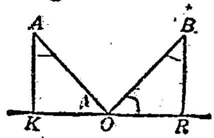


2. 證明上題中 $\angle ALM=\angle ACB$.

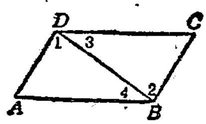
3. 右圖中 $AH\perp BL$, $HB=HL$, 試指示全等△并證 $AB=AL$.



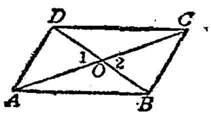
4. 右圖中 O 爲 KR 中點, $AK=BR$, 且都是 KR 的垂線.證明 $OA=OB$, $\angle AOK=\angle BOR$.



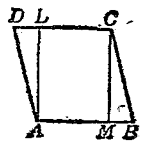
5. 右圖中 $AD=BC$, $\angle 1=\angle 2$, 求證 $\angle 3=\angle 4$, $\angle A=\angle C$.

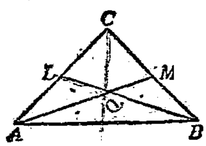


6. 右圖中 AC, BD 二線在 O 點互相平分，指出各全等△來，并證明 $AD=BC$. $AB=CD$



7. 右圖中 $AB=BC=CD=DA$, 又 $\angle D=B$, $LC=AM$, 試證 $AL=CM$.



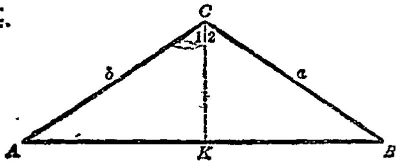


8. 右圖中 $AC=CB$, L 爲 AC 中點, M 爲 BC 中點, 試指出圖中的各組全等三角形來.

9. 試證如二 rt. $\triangle$s 的兩股對應相等，則斜邊也等.

10. 在一圓作二直徑，試證二組端點的聯線等長.

123. 等腰三角形性質定理　等腰三角形中對等腰的兩角，必定相等.



〔已知〕 在$\triangle ABC$中，$a=b$.

〔求證〕 $\angle A=\angle B$.

〔解析〕 作 $\angle C$ 的分角線，證明這線分 $\triangle ABC$ 成兩個全等$\triangle$，而 $\angle A$, $\angle B$ 是其中對應角.

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 作 CK 平分$\angle ACB$，卽 $\angle 1=\angle 2$.	(一) 一角有一分角線(§106).
(二) $AC=BC$.	(二) 假設. 已知
(三) $CK=CK$.	(三) 公用.
(四) $\triangle ACK\equiv\triangle BCK$.	(四) s. a. s.
(五) $\therefore \angle A=\angle B$.	(五) 對應角.

系一　等邊三角形中各角都相等

系二　等腰三角形兩腰夾角的分角線平分底邊，幷且互相垂直.

提示　上圖中已證$\triangle ACK\equiv\triangle BCK$，$\therefore AK=KB$. 又因 $\angle AKC+\angle BKC=2rt.\angle s$，而 $\angle AKC=\angle BKC$，故 CK

$\perp AB$.

注意 定理中未提及的直線或曲線，而爲證題時所不能少的，叫**補助線**. 在圖中常以虛線表示，如上圖的 CK. 由上題可知補助線的功用，在顯出求證的線或角爲全等形對應部分.

124. **全等三角形定理二 兩三角形中，其一的兩角和公共邊，等於他形兩角和公共邊，則爲全等形.**

〔已知〕 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $c=c'$.

〔求證〕 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

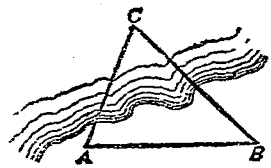
〔解析〕 將這兩三角形相重，使已知的相等部分疊合，看其餘各部分，是否也重合?

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 將$\triangle ABC$放在$\triangle A'B'C'$上，使 c 與 c' 重合，則 A 合於A', B合於B'.	(一) 移形公理.

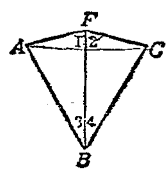
(二) 則 a 與 a' 合.	(二) 假設 $\angle B=\angle B'$.
(三) b 與 b' 合.	(三) 假設 $\angle A=\angle A'$.
(四) C 落於 a', b'交點上，即與 C' 合.	(四) 二線定一點(§117).
(五) $\therefore \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.	(五) 全等形定義.

註　本定理簡記爲 $a.\ s.\ a.$

應用　海船或飛機駛行遇霧時，可用上述定理，來定他的位置．法由已知經緯的 A,B 兩站與船C互通無線電，以測定$\angle CAB$, $\angle CBA$. 再由 AB 距離，即可定 C 點的位置.



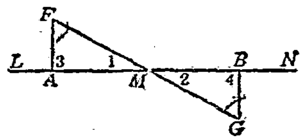
習 題 二 三



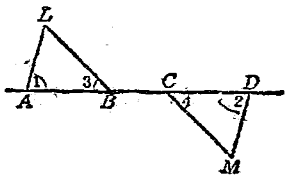
1. 右圖中 BF 平分$\angle AFC$ 及$\angle ABC$, 試證$\angle A=\angle C$.

2. 聯接上圖的 AC, 試證(一) $\angle FAC=\angle FCA$, (二) $\angle BAC=\angle BCA$.

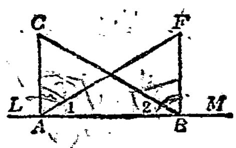
3. 右圖中，M 為 AB 中點，FA，GB 都是 LN 的垂線，FMG 為直線，試證 $FA=GB$，$\angle AFM=\angle BGM$.



4. 右圖中，$AC=BD$，$\angle 1=2$，且 $\angle 3=\angle 4$，試證 $AL=DM$，$\angle L=\angle M$.



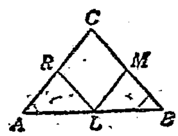
5. 右圖中，$\angle CAF=\angle FBC$，$\angle 1=\angle 2$，試證 $AF=BC$，$AC=BF$.



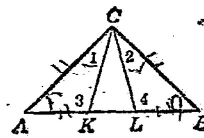
6. $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle ACB$ 的分角線 $CK=\frac{1}{2}AB$，試證 $\angle ACB=2\angle A$. (§123圖).

7. 右圖中 $AC=BC$，而 L，M，R 為三邊中點，試證 $LM=LR$.

提示 證 $\triangle ALR\equiv\triangle BLM$.

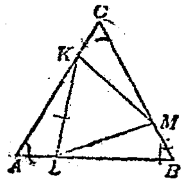


8. 右圖中 $AC=BC$，$\angle 1=\angle 2$，試證 $CK=CL$，$\angle 3=\angle 4$.

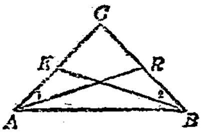


9. 將等腰三角形底邊分為三等分，證明自對頂到三等分點

的距離相等.



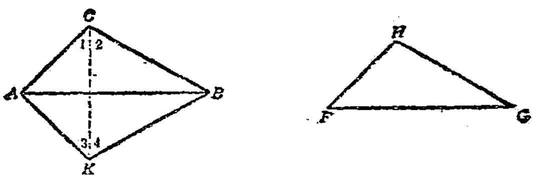
10. 右圖中 ABC 爲等邊三角形, 而$AL=BM=CK$,試證 LMK 也是等邊三角形.



11. 右圖中 $AC=BC$, K, R 爲二邊中點, 試證$\angle 1=\angle 2$, $\angle RAB=\angle KBA$.

12. 上題中如 AR, BK 各爲 $\angle A$, $\angle B$ 的分角線, 試證 $AR=BK$.

125. 全等三角形定理三 兩三角形中, 其一的三邊, 等於他形的三邊, 則爲全等形.



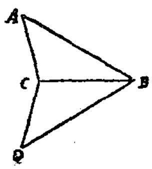
〔已知〕 $\triangle ABC$, $\triangle FGH$ 中 $AB=FG, BC=GH, AC=FH$.

〔求證〕 $\triangle ABC\equiv\triangle FGH$.

〔解析〕 將 $\triangle FGH$ 移放至$\triangle ABK$ 的位置,聯CK. 注意 ACK, BCK 都是等腰$\triangle$故 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$, 即 $\angle C=\angle K=\angle H$. 再按 s. a. s. 證明二三角形全等.

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 將$\triangle FGH$放在$\triangle ABC$下面，使FG與AB密合，即F與A合，G與B合．H落到K的位置．	(一) 移形公理．
(二) 聯CK．	(二) 過二點可作一線 (§99)．
(三) $AC=AK$．	(三) 假設．
(四) 故$\angle 1=\angle 3$．	(四) 對等邊的角相等．
(五) $BC=BK$．	(五) 假設．
(六) 故$\angle 2=\angle 4$．	(六) 對等邊的角相等．
(七) 故$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$ 即$\angle ACB=\angle AKB$．	(七) 等量相加 代換公理．
(八) $\triangle ABC\equiv\triangle ABK$．	(八) s. a. s.
(九) $\triangle ABC\equiv\triangle FGH$．	(九) $\triangle ABC$, $\triangle FGH$都與$\triangle ABK$全等 (§115)．

註 本定理簡記爲 s. s. s.



注意 在此處證明中，設AB是$\triangle ABC$中最長邊，FG是$\triangle FGH$中最長邊．否則依法配起來，或成右圖

的形狀．那時應當如何去證明本定理？

126. 等量證法 §§121,124,125中所述全等三角形條件，爲證等量的基本定理．欲證二量相等時．

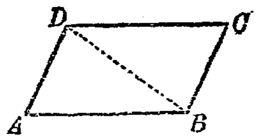
（一）先看二量是否爲**全等形對應部分**(§122)，

（二）如其不然，看能否用**補助線**顯出全等形(§123)．

（三）倘若還不然，**先求出另一組或數組全等形，就其中對應部分顯出求證的等量間關係．**

先求出的全等形，叫**輔助形．**

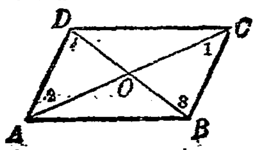
〔例一〕 右圖中 $AB=CD$，$AD=BC$，求證$\angle A=\angle C$．



〔解析〕 作**補助線**BD，便得證明$\triangle ABD\equiv\triangle CDB$(何故？)，故$\angle A=\angle C$．

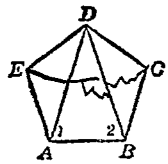
如欲證$\angle B=\angle D$，應作什麼補助線？

〔例二〕 同上題，求證AC，BD二線在交點O互相平分．



〔解析〕 用$\triangle ABC$，$\triangle CDA$

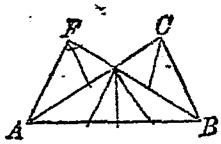
爲輔助形，得$\angle 1=\angle 2$. 用什麼做輔助形，可得$\angle 3=\angle 4$? 由此可得何種全等形，以OA, OD, OC, OB做對應部分?



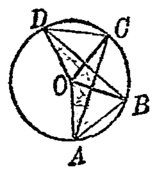
〔例三〕 右圖中$ABCDE$各邊都等，各角也互等. 求證$\angle 1=\angle 2$.

〔解析〕 用$\triangle AED, \triangle BCD$爲輔助形，得$AD=BD$, 即知$\angle 1=\angle 2$.

習題二十

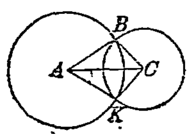


1. 右圖中$AF=BC, AC=BF$, 求證$\angle F=\angle C$, $\angle FAC=\angle CBF$.



2. 右圖中O爲圓心，$AB=CD$, 試證$\angle AOB=\angle COD$.

3. 上題圖中，已知O爲圓心，但$AC=BD$, 試證$AB=CD$.

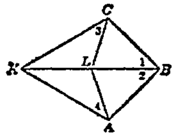


4. 右圖中A, C爲圓心，求證AC平分$\angle BAK$與$\angle BCK$.

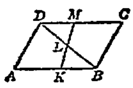
5. 同上題，求證$\angle ABC=$

$\angle AKC$.

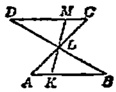
6. 右圖中 $AB=BC$, $\angle 1=\angle 2$, L 爲 KB 上任意點，求證 $\angle 3=\angle 4$.



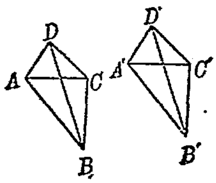
7. 右圖中 $ABCD$ 對邊都相等，L 爲 DB 中點，KLM 爲任意一直線，試證 $KL=LM$.



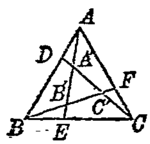
8. AC, BD 二線互相平分於 L，過 L 任作一線交 AB 於 K，CD 於 M，試證 $KL=LM$.



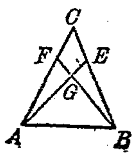
9. 右圖中 $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CD=C'D'$, $DA=D'A'$, $AC=A'C'$. 試證 $BD=B'D'$.



10. 三角形三邊固定，其大小形狀是否卽定？ 有四邊的直線形呢？



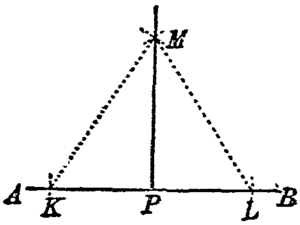
11. 右圖中，ABC 爲等邊△，$AD=BE=CF$. 求證 $A'B'C'$ 也爲等邊△.



12. 右圖中 $\angle CAB=\angle CBA$, $AF=BE$, 求證 (一) $\angle FAE=\angle EBF$, (二) $AG=BG$, (三) $FG=EG$.

II. 基本作圖題

127. 基本作圖題二(過線上點作垂線)的證明.



〔已知〕 直線 AB 和線上一點 P.

〔求作〕 過 P 而與 AB 垂直的線.

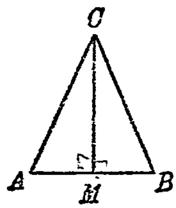
〔作法〕 見第二編§47.

〔證明〕 敍　述	理　　由
(一) 聯 KM 和 LM.	(一) 過二點可作一線 (§99).
(二) $KP=PL$; $KM=LM$; $MP=MP$	(二) 作法, 公用.
(三) $\therefore \triangle MPK\equiv\triangle MPL$.	(三) s. s. s.
(四) $\angle MPK=\angle MPL$.	(四) 對應角.
(五) 但 $\angle KPL=St.\angle$.	(五) 平角定義 (§107).
(六) $\therefore MP\perp AB$.	(六) 直角定義 (§107).

註 作法學生應自己補出 (最好能不查前書).

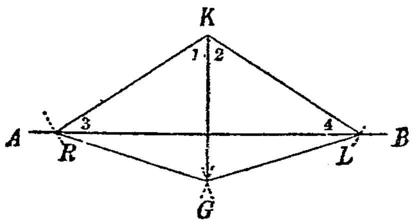
128. 證直角法 證明一角爲直角的普通方法,是設法示出這角等於他的補隣角.

例 等腰三角形中底邊中點與對頂聯線必與底垂直.



〔解析〕 如右圖 $AC=BC$, $AM=BM$, 用 s. s. s. 證$\triangle AMC\equiv\triangle BMC$.

129. 基本作圖題三(作過線外點垂線)的證明.



〔已知〕 直線 AB 和線外一點K.

〔求作〕 過K而與AB垂直的線.

〔作法〕 見§48.

〔證明〕

敍 述	理 由
(一) $\triangle KGR$, $\triangle KGL$內, $KR=KL$, $GR=GL$.	(一) 作法.
(二) $KG=KG$.	(二) 公用.
(三) $\therefore\triangle KGR\equiv\triangle KGL$.	(三) s. s. s

(四) $\therefore \angle 1=\angle 2$.	(四) 對應角.
(五) 在$\triangle KRL$中, $KR=KL$.	(五) 作法.
(六) $\therefore KG\perp RL$, 即$\perp AB$.	(六) 等腰△兩腰夾角的分角線，平分底邊，并且互相垂直(§123系二)

130. 中點垂線定理 距一線段兩端等遠的二點所定直線平分這線段，并和他垂直.

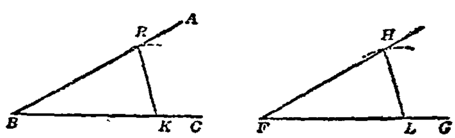
〔已知〕 線段RL, $KR=KL$, $GR=GL$(見上圖).

〔求證〕 KG平分RL, 并且$\perp RL$.

〔解析〕 學生照上節的證明，自己寫出解析來.

〔證明〕 與上節全同. 仍由§123可知KG平分RL.

131. 基本作圖題四(作已知角的等角)的證明



〔已知〕 $\angle ABC$.

〔求作〕 一角以F爲頂，以FG爲一邊，而等於$\angle ABC$.

〔作法〕 見§49.

〔證明〕 敍　述	理　由
(一) $BK=BR=FL=FH$, $RK=HL$.	(一) 作法.
(二) $\triangle BKR\cong\triangle FLH$.	(二) s. s. s.
(三) $\therefore\angle B=\angle F$.	(三) 對應角.

習題二五

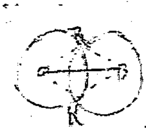
下列各作圖題，除述明作法外，還要加以證明 (1—9 題)；

1. 已知一△的二邊 b, c 和夾角 A，求作這△.
2. 已知一△的二角 $\angle A$, $\angle B$ 和公共邊 c，求作這△.
3. 已知一△的三邊 a, b, c，求作這△.
4. 已知等腰△底邊，和對角平分線，求作這△.
5. 已知等腰△底邊和一腰，求作這△.
6. 已知 $rt.$△二腰，求作這△.
7. 已知 $rt.$△一腰和一相隣銳角，求作這△.
8. 已知 $rt.$△一腰和斜邊．求作這△.
9. 已知 $rt.$△斜邊和一隣角 (為銳角)；求作這△.

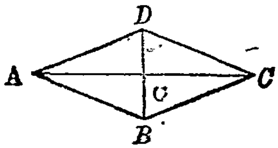
10. 二圓相交，證明聯圓心的線平分聯交點的弦，并和他垂直.

11. 求证 …平分且⊥KR

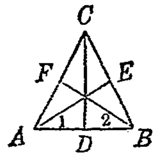
证明



11. 右圖中 $AB=BC=CD=DA$, 求證 $AC\perp BD$, 且互相平分.

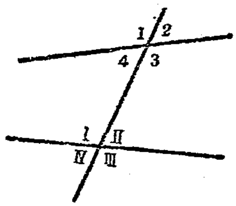


12. 如右圖 $AC=BC$, $\angle 1=\angle 2$, 求證 $CD\perp AB$.



III. 平 行 線

132. 截線 一條直線與他二線或數線相交的, 叫截線. 以一線截另二線在交點得八個角, 名稱如下:



(一) 對被截線關係

(a) **內角** 在二被截線內的, 如 $\angle 3, \angle 4, \angle I, \angle II$.

(b) **外角** 在二被截線外的, 如 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle III$, $\angle IV$.

(二) 各角相互關係

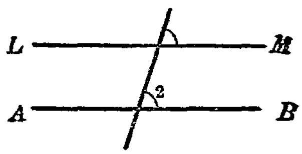
(a) **錯角**　內角(或外角)分居截線兩側的，如$\angle I$與$\angle 3$, $\angle II$與$\angle 4$, $\angle 1$與$\angle III$都是.

(b) **同位角**　位置相當的，如$\angle 1$, $\angle I$, $\angle 3$, $\angle III$.

(c) **同側角**　在截線同側的，如$\angle 2$, $\angle 3$, $\angle II$等.

學生試就上頁的圖，指出各組(一)內錯角(二)外錯角,(三)同側內角,(四)同側外角.

133. 平行線　二線被另一線所截，如所成一組同位角相等，便叫**平行線**.



平行線的記號為//，如右圖$\angle 1 = \angle 2$，故$LM // AB$.

由對頂角定理，補角定理，便知如一組同位角相等，其餘各組也都各相等.

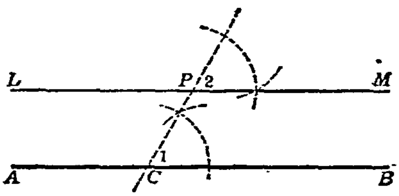
註　普通稱同一平面上無論如何延長，總不相交的直線為平行線(看§20).但這種定義，只說出平行線消極的性質，又'無論如何延長，總不相交'一語，也令初學難於想像

故另立定義如上．到後文（§143）即可明瞭這兩種說法，實是一致的．

134. 基本作圖題五（作平行線）的證明．

〔已知〕 直線 AB 和其外一點 P．

〔求作〕 過 P 而與 AB 平行的直線．

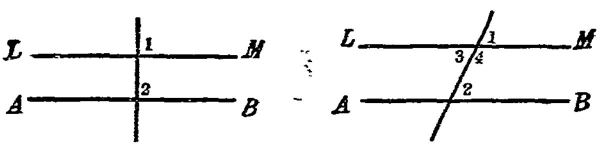


〔作法〕 見 §51．

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) $\angle 1=\angle 2$．	(一) 作法．
(二) $LM /\!/ AB$．	(二) 平行線定義．

135. 平行線的判別

欲證明二線平行時，除按定義同位角相等的條件，還可用下列各條件之一：



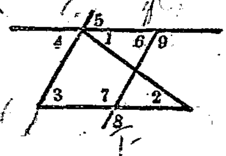
(一) **同線垂線** 如 LM 與 AB 同垂直於一線，則 $\angle 1=\angle 2=rt.\ \angle$（何故？）故 $LM /\!/ AB$．

(二) **錯角相等** 按對頂角定理 $\angle 1=\angle 3$，故如

$\angle 3=\angle 2$，則$\angle 1=\angle 2$，因而 $LM /\!/ AB$.

(三) **同側內或外角互補**　因$\angle 1+\angle 4=st.\angle$，如$\angle 2+\angle 4=st.\angle$，則按補角定理知$\angle 1=\angle 2$，因而 $LM /\!/ AB$.

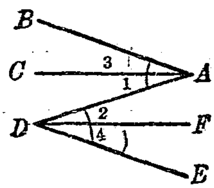
習題二六



1. 說出下列各組角名稱：

$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4; \angle 3, \angle 5; \angle 6, \angle 7; \angle 7, \angle 9; \angle 8, \angle 9$.

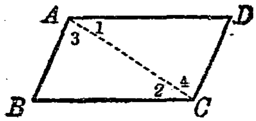
2. 指出上圖中各組等角，使圖中有兩組平行線.



3. 右圖中$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$，證明 $AB /\!/ DE$.

4. 上圖中$\angle BAD=\angle EDA$, $\angle 3=\angle 4$.證明 $AC /\!/ DF$,

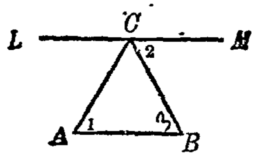
5. 二線段互相平分，試證兩組端點聯線必平行.



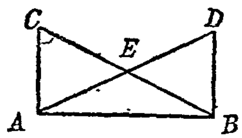
6. 右圖中 $AB=DC$, $AD=BC$，證明 $AD /\!/ BC$、$AB /\!/ CD$.

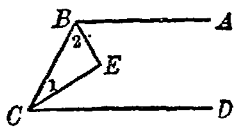
7. 下圖中 $AC=BC$, $\angle 1=\angle 2$，試證 $LM /\!/ AB$.

8. 右圖中 BE 平分$\angle ABC$, CE 平分$\angle BCD$, 如$\angle 1+\angle 2=rt.\ \angle$, 試證 $BA \parallel CD$.



9. 右圖中 $CA \perp AB$, $AE=BE$; $CE=DE$, 試證 $BD \parallel AC$. 如 CA 不垂直於 AB, 仍有同一的結果否?





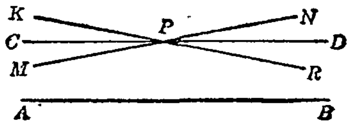
136. 逆定理 將一定理中結論改爲前提，前提改爲結論，所得的另一定理，叫**逆定理**. 例如等腰三角形性質定理（§123）的逆定理是，有兩角相等的三角形，必爲等腰三角形'.

我們應當注意**逆定理未必也爲眞**. 例如對頂角定理（§113）的逆理：'凡等角必是對頂角' 便不能成立. 在日常情形，也不少這種例子，譬如住在北京的人，必爲河北省居民，但河北省居民，未必都住在北京.

137. 平行公理 經過線外一點，只有一線

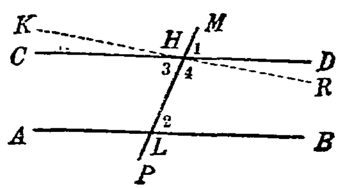
和他平行.

右圖中 CD 過 P 點而 $\parallel AB$. 其他直線如 KR, MN 都不能和 AB 平行.



138. 平行性質定理　二平行線被一直線所截，所成的同位角必相等.

〔已知〕 $CD \parallel AB$, 被截線 MP 交於 H, L.



〔求證〕 $\angle 1 = \angle 2$.

〔解析〕 過 H 作 $KR \parallel AB$. 證明 KR 和 CD 相合.

〔證明〕 敍　述	理　由
(一) 過 H 作 $\angle MHR = \angle 2$.	(一) 作等角法.
(二) 則 $KR \parallel AB$,	(二) 同位角相等（$\parallel$定義）.
(三) 但 $CD \parallel AB$, 且過 H 點.	(三) 假設.
(四) $\therefore KR$, CD 相合.	(四) 平行公理.
(五) $\therefore \angle 1 = \angle MHR = \angle 2$.	(五) 代換公理.

上圖中如 $\angle 1 = rt. \angle$, 則 $\angle 2$ 亦為直角，故得

系一 二平行線中一線的垂線，也和他線垂直.

註 二平行線間公共垂線長，叫二平行線間距離.

因 $\angle 3=\angle 1$ (對頂角)，故$\angle 2=\angle 3$而為

系二 一線截二平行線，所成錯角必相等，

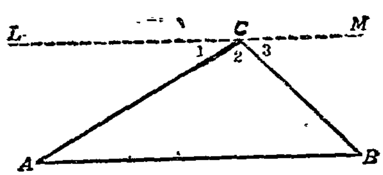
又$\angle 4+\angle 1=st.\angle$，按代換公理，以$\angle 2$代$\angle 1$，便可得$\angle 4+\angle 2=st.\angle$. 同理可知二同側外角也相補，所以有.

系三 一線截二平行線，所成同側內角（或同側外角）必相補.

註 本定理和三條系，依次各為 §135 各判別定理的逆定理.

139. 三角形內角和 三角形內角和等於二直角.

〔已知〕 $\triangle ABC$.



〔求證〕 $\angle A+\angle B+\angle C$ 2rt. ∠s.

〔解析〕 過任一頂點C，作對邊AB的平行線. 再證在C點居LM下側諸角

和等於△ABC三內角和.

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 過 C 作 $LM \parallel AB$.	(一) 平行線作法.
(二) $\angle 1=\angle A$, $\angle 3=\angle B$.	(二) 錯角相等 (§138).
(三) 但 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=2rt.$	(三) 平角定理 (§108).
(四) $\therefore \angle A+\angle C+B=2rt.$ ∠s.	(四) 代換公理.

系一 **直角三角形中，直角外二角，必互爲餘角.**

設 $\angle C=rt.\ \angle$，則因 $\angle A+\angle B+\angle C=2rt.$ ∠s $\therefore \angle A+\angle B=rt.\ \angle$.

系二 **兩三角形中，如有其一的二角，等於其他的二角，則第三角也必相等，**

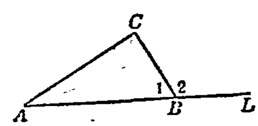
因 $\angle A+\angle B+\angle C=\angle A'+\angle B'+\angle C'=2rt.$ ∠s 如 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$，則減去等量二次，便得 $\angle C=\angle C'$.

由系二和 $a.s.a.$ 易得

系三 **二三角形中，如一三角形的二角和一對邊等於他形的二角和對應邊，則二形全等** ($a.a.s.$)

系四 **二直角三角形中，如其一的斜邊（或一腰）和一銳角等於他形斜邊（或一腰）和一銳角，則爲全等.**

140. 外角，內對角 三角形一邊與他邊延線所成角，叫**外角**. 不與外角相隣的二角，叫外角的**內對角**.



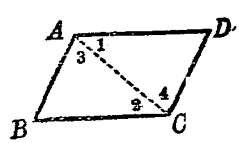
如圖$\angle 2$是外角，$\angle A$，$\angle C$是$\angle 2$的內對角.

由△內角和定理卽得

內對角和定理 三角形外角等於內對角的和，

〔解析〕 因$\angle A+\angle C+\angle 1=2rt.\angle s=\angle 2+\angle 1$，減去同量$\angle 1$，便得$\angle 2=\angle A+\angle C$（圖如上），

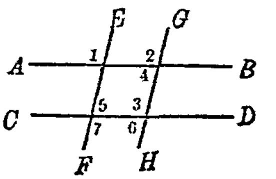
習 題 二 七



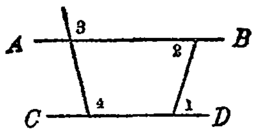
1. 右圖中，如$AD=BC$，$AD /\!/ BC$，試證$\angle 3=\angle 4$.

2. 上圖中，如$AB /\!/$

CD, $AD \parallel BC$, 試證 $\angle B = \angle D$,



3. 右圖中 $AB \parallel CD$, $EF \parallel GH$, 試證 $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 4 = \angle 5$, $\angle 4 + \angle 7 = 2rt.\angle s$.



4. 右圖中如 $\angle 1 = \angle 2$, 則 $\angle 3 = 4$.

5. 證明等腰△底邊的平行線與兩腰相交成等角.

6. 求等邊三角形各內角大小.

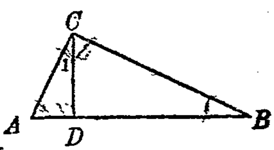
7. 求等腰直角三角形中各銳角大小.

8. 二平行線爲一線所截，求證二同側內角分角線必互相垂直.

9. 已知等腰△底邊上一角（即等角）如 a, 求頂角.

10. 已知等腰△頂角爲 m, 求底邊上角.

11. 如 CD, AE 爲一三角形中自頂點到對邊的二垂線, 求證 $\angle BCD = \angle BAE$.



12. 右圖中 $AC \perp BC$, $CD \perp AB$, 求證 $\angle 1 = \angle ABC$.

13. 自等腰△底邊中點,作到二腰上垂線,試證其相等.

14. 自等腰△底邊端點,作到對邊上垂線,試證其相等.

IV. 間接證法

141. 定一證法 由定理前提,逐漸推到結論的證法,叫**直接證法**. 像 §138 平行性質定理的證法,並不如此,而係另作一合於結論的圖形,再證所作圖形,和題設的相同. 這種就結論入手的方法,稱為**定一證法**,也叫做**僞設證法**.

142. 歸謬證法 還有一種證法,也是從結論着手,即先設定理的結論不眞. 如由這反面的理,推到一條謬妄的結果,則可見反面不成立,因此便知結論的正面是對的. 這法稱為**歸謬證法**,我們推到平常事理時,也常用此法.

例 戎幼而穎悟,嘗與羣兒戲於道側,見李樹多實,等輩競趣之,戎獨不往. 或問其故. 戎曰:樹在道邊而多子,必苦李也,(他以為如非苦李,必已被人摘完) 取之信然.(晉書王戎傳).

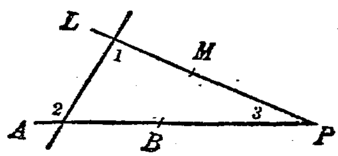
註 定一證法，歸謬證法都是一種間接證法.

143. 歸謬證法舉例.

(一) 鈍角三角形定理 **一直角三角形或鈍角三角形中餘二角必爲銳角.**

〔解析〕 因如再有一角非銳角而爲直角或鈍角)，則二角的和已等於或大於二直角，這層結果和△內角和定理沖突，不能成立，所以餘二角只能爲銳角.

(二) 二線平行定理 **二條平行線，無論如何延長，總不相交.**



〔解析〕 如 $LM /\!/ AB$，而交於 P 點，成一三角形，則按內對角和定理 (§140) 知$\angle 2=\angle 1+\angle 3$，而與$\angle 2=\angle 1$(何故？) 矛盾，故 $LM /\!/ AB$.

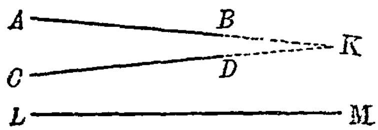
由這定理證法．又可知**二相交直線不能平行.** 我們更易設想這理的逆也眞，是爲.

交線公理 **二線或平行，或相交，必居其一.**

(三) 三線平行定理 **二線同與一線平行的，必**

互相平行.

〔解析〕 設 AB, CD 同∥於 LM. 如 AB, CD 不平行, 必在一點 K 相交, 如此則過 K 點可作二線與 LM 平行, 而與平行公理相背.

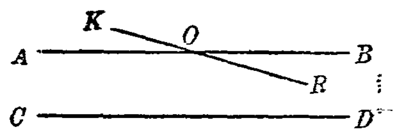


註 用間接證法時, 須從一不合結論的假設入手, 故所作的圖, 必不能使其正確.

144. **交線的判別** 判別二線相交的條件如下:

(一) 截線定理 **一線如與二平行線之一相交, 則和其他一線也必相交.**

〔已知〕 $AB \parallel CD$, 而 KR 與 AB 相交於 O.



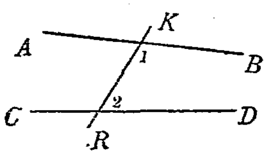
〔求證〕 KR 與 CD 相交.

〔解析〕 如 KR, CD 不相交, 則二者平行. 這結論合理麼?

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 設KR, CD不相交，則$KR \parallel CD$.	(一) 交線公理.
(二) 如此則過O有AB及$KR \parallel CD$.	(二) 假設及 (一).
(三) 結論不成立.	(三) 與平行公理相犯.
(四) 故KR應與CD相交.	(四) 交線公理.

(二) 二線相交定理 **如一截線與兩線所成同側二內角的和不為$2rt.\angle s$，則兩線延長時，必至相交.**

〔已知〕 KR截AB, CD，所成同側內角$\angle 1+\angle 2$不為$2rt.\angle s$.



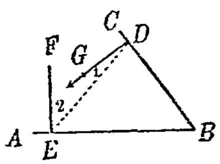
〔求證〕 AB, CD延長時，必定相交.

〔解析〕 如$AB \parallel CD$，則$\angle 1+\angle 2=2rt.\angle s$. 便和假設矛盾.

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) $\angle 1+\angle 2$不為$2rt.\angle s$.	(一) 假設.
(二) 如AB, CD不相交，則$AB \parallel CD$.	(二) 交線公理.

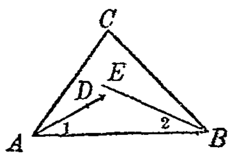
(三) 而$\angle 1+\angle 2=2rt.\angle s$，不能成立.	(三) 與 (一) 相犯.
(四) 故AB和CD延長時必相交.	(四) 交線公理.

系一　二線相交，各引一垂線，也必相交.



如右圖$EF\perp AB, DG\perp BC$,聯DE，則$\angle 1+\angle 2$小於$2rt.\angle s$（何故?).

系二　過三角形二頂點向形內各引一線，這二線必相交.



如右圖 $\angle CAB+\angle CBA$小於$2rt.\angle s$，故$\angle 1+\angle 2$更小於$2rt.\angle s$.

習 題 二 八

1. §120　銳角三角形定義爲何要限定三內角皆爲銳角? 鈍角（或直角）三角形定義，爲何只限定一鈍角（或直角)?

2. 過三角形二邊中點，作其垂線，試證這樣的二垂線必相交.

3. 從三角形二頂點各作至對邊的垂線，試證其必相交.

4. 聯三角形頂點與對邊中點，這樣的二聯線必相交.

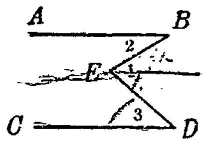
5. 三角形任二角的分角線必相交，試加證明.

6. 三角形任二外角的分角線必相交，試加證明.

7. 試證三角形外角分角線必和內對角分角線相交.

8. 二線相交，各作一平行線亦必相交，試加證明.

9. 右圖中 $AB \parallel CD$，求證 $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$.



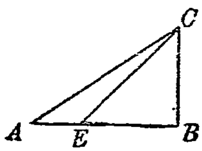
提示 過 E 作 AB 的平行線.

10. 求證上題的逆定理.

11. 求證二線相交定理中，二線的交點必在內角和小於 $2rt.\angle s$. 的一側

提示 如交於內角和大於 $2rt.\angle s$ 的一側，則所成△內角和大於 $2rt.\angle s$.

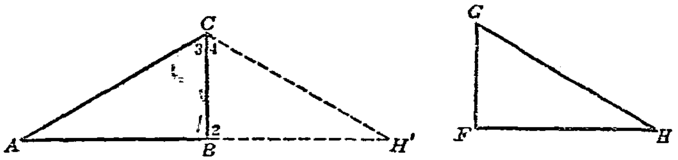
12. 右圖中 $\angle B = rt.\angle$，$CA = CE$，求證 CE 必和 CA 相合.



註 由這理及疊合法，本可證明 §145 的定理. 但幾何上非不得已時，不宜用間接證法.

V. 證 法 總 論

145. 全等直角三角形定理 二直角三角形中,如其一的斜邊和一腰,與其他的斜邊和一腰各相等,則爲全等形.



〔已知〕 $rt.\triangle ABC$, $rt.\triangle HFG$中$\angle B$, $\angle F$爲$rt.\angle$, $AC=HG$, $BC=FG$.

〔求證〕 $rt.\triangle ABC \equiv rt.\triangle HFG$.

〔解析〕 將這兩三角形中相等兩腰重合,兩形分居兩側,證明可配合成等腰$\triangle$. 再由$\angle A=\angle H'$ (何故?) 證明兩形全等.

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 配合$\triangle ABC$, $\triangle HFG$, 使F合於B,G合於C,H落在H'的位置.	(一) 移形公理.
(二) $\angle 1=\angle 2=rt.\angle$, $\angle 1+\angle 2=st.\angle$.	(二) 假設代換公理.

(三) 故 ABH' 爲直線，即 $ABH'C$ 成△	(三) 平角定義.
(四) 在△ $AH'C$ 中，$AC=H'C$.	(四) 假設.
(五) $\angle A=\angle H'$.	(五) 等角對等邊.
(六) $\therefore \triangle ABC \cong \triangle H'BC$.	(六) §139系四.
(七) $\triangle ABC \cong \triangle HFG$.	(七) §115 (三).

[illegible]

146. 證法總論　綜合上文所說，證題法有三種:

(一) 疊合證法　是最直接的方法，基本的全等三角形定理，即由此證明．但運用時不甚便利.

(二) 直接證法　即最常用的普通方法.

(三) 間接證法　分定一證法，歸謬證法兩種，有幾種基本定理，非此不能證，但嫌周折，非不得已時勿用.

上節定理係合用 (一) (二) 兩法證明，下節只用 (二) 法.

147.　如在一三角形中有

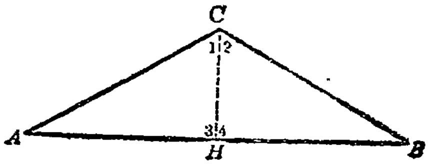
[illegible]

兩角相等，則對等角的邊也必相等.

〔已知〕 $\triangle ABC$中$\angle A=\angle B$.

〔求證〕 $AC=BC$.

〔解析〕 作$CH\perp AB$,而證$rt.\triangle AHC\equiv rt.\triangle BHC$ (§139系四).



〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 作$CH\perp AB$.	(一) 垂線作法.
(二) 在$rt.\triangle AHC$, $rt.\triangle BHC$中，$CH=CH$.	(二) 公用.
(三) $\angle A=\angle B$.	(三) 假設.
(四) $\therefore$ $rt.\triangle AHC\equiv rt.\triangle BHC$.	(四) §139系四.
(五) $\therefore AC=BC$.	(五) 對應邊.

系 **三角都等的三角形各邊皆等.**

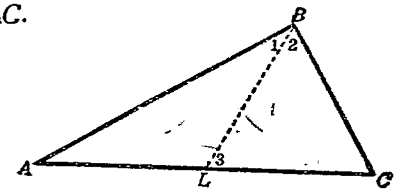
148. 代數的應用 有許多幾何定理可運用代數計算去證，甚覺便利. 其法按題理**將圖形中已知未知諸量聯成方程式，再按代數中法則解出.**

註 推證這類定理時，不必拘泥於幾何證法格式.

149. 半個等邊三角形定理一　如一直角三角形的一銳角為$\frac{1}{3}$rt.∠，則其對邊等於斜邊的一半.

〔已知〕　$rt.\triangle ABC$中$\angle A=\frac{1}{3}rt.\angle$，$AC$為斜邊.

〔求證〕　$BC=\frac{1}{2}AC$.



〔解析〕　作BL分直角B為二份，使$\angle 1=\angle A$，$\angle 2=\angle C$，即得一等腰$\triangle ABL$，一等邊$\triangle CBL$．由此可證$BL=AL=LC=BC$.故$BC=\frac{1}{2}AC$.

〔證明〕　(一)　作BL使$\angle 1=\angle A=\frac{1}{3}rt\angle$，則$AL=BL$.(?)

(二)　$\angle 2=rt.\angle-\frac{1}{3}rt.\angle=\frac{2}{3}rt.\angle=\angle C$ (?) $=\angle 3$.(?)

(三)　$\therefore BL=LC=LA$. (?)　$\therefore BC=\frac{1}{2}AC$. (?)

150. 半個等邊三角形定理二　如一直角三角形斜邊倍於一腰，則對那腰的角為$\frac{1}{3}$rt∠.

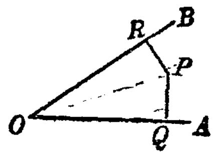
〔已知〕　$rt.\triangle ABC$中，AC為斜邊，而$AC=2BC$.

〔求證〕　$\angle A=\frac{1}{3}rt.\angle$.

〔解析〕 作BL使$\angle 1=\angle A$，則$\angle 2=\angle C$. 故$LA=LB=LC$. 又$BC=\frac{1}{2}AC$，故$BC=LC$，即LBC為等邊△，$\angle C=\frac{2}{3}rt.\angle$.

〔證明〕 學生試自行補出.

習 題 二 九



1. 右圖中$OQ=OR$，$PQ\perp OA$，$PR\perp OB$，試證$PQ=PR$.

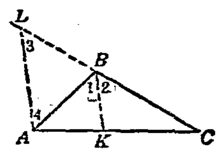
2. 如從一三角形一邊中點，向他二邊所作二垂線相等，則必為等腰三角形，試加證明.

3. 證明等腰△底邊平行線截二腰，仍成一等腰△.

4. 如一△外角分角線，平行於對邊，則為等腰△.

5. 一等腰△中底邊兩隣角分角線相交，必成等腰△.

6. 在一角分角線上取一點，作一線平行於一邊，試證這線與分角線及他邊成一等腰△.

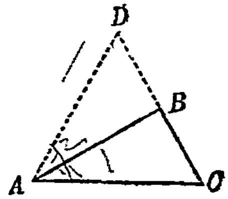


7. 右圖中$\angle 1=\angle 2$，$AL /\!/ BK$，試證$AB=BL$.

8. 設△ABC為等邊△，自AB中

點M，作$MP \perp BC$，試證$MP=\frac{1}{2}MC$.

9. 在等腰$\triangle ABC$內，$AB=BC$，延長AB到K，使BK和AB等長，試證$KC \perp AC$.



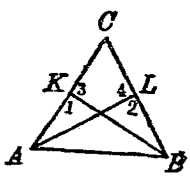
10. 從線段AB中點M，任引一直線，在其上取$MC=\frac{1}{2}AB$，試證$AC \perp BC$.

11. $rt. \triangle ABC$合於§149(或§150)的條件，作$\triangle ABD \cong \triangle ABC$，由此證明§149（或§150）的定理.

雜　題

1. 試列舉全等三角形的各種條件.

2. 試列舉全等直角三角形的各種條件.



3. 右圖中$\angle CAB=\angle CBA$，AL平分$\angle CAB$，BK平分$\angle CBA$.試證$AK=BL$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

4. 由全等△定理一證明等腰△性質定理（§123）法如次：上圖中$AC=CB$，取$CK=CL$而證(一)$\triangle ACL \cong \triangle BCK$；(二)$\angle 1=\angle 2$；(三)$\triangle AKB \cong \triangle BLA$；(四)$\angle CAB=\angle CBA$.

5. 由全等△定理一和二證明等腰△判別定理（§147）

法如次；上圖中$\angle CAB=\angle CBA$，取$AK=BL$而證（一）$\triangle AKB$與$\triangle BLA$全等；（二）$\angle 3=\angle 4$；（三）$\triangle ALC\equiv\triangle BCK$；（四）$AC=BC$.

6. 二△中如有一形的二邊和其一中點與對頂聯線，分別和他形中者相等，試證二△爲全等形.

7. 如兩個等腰△中，其一的腰和兩腰中點聯線，分別和他形中相等，則爲全等△，試加證明.

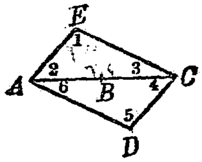
8. 在任意△一邊上取一點，作他邊的平行線，試證其必與第三邊相交，且所成△諸角與原△的分別相等.

9. 三角分別相等的兩個三角形，是全等形麼?何故?

10. 如一角的兩邊，與他角兩邊，分別平行，試作這兩角或相等，或相補.

11. 如一角兩邊，與他角兩邊，分別垂直，試作這兩角或相等，或相補.

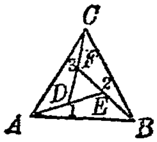
12. 過△各頂點，引對邊的平行線，試證所作諸線必定相交，而與原△諸邊成同原△全等的三個三角形.



13. 求右圖中直線形諸角總和.

14. 上圖中$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 4+\angle 5+\angle 6$，試證$A,B,C$在一直線上.

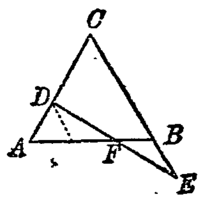
15. 右圖中 ABC 爲等邊△, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. 試證 DEF 也爲等邊△.



16. 上圖等邊△ DEF 中 $AD = BE = CF$, 試證 ABC 也是等邊△.

17. 證明等腰△底邊端點到腰上垂線與底邊所成角, 等於底邊所對內角的一半.

18. 證明等腰△中相等角的分角線所成角等於在底邊的外角.



19. 右圖中 $CA = CB$, $AD = BE$, 試證 AB 平分 DE.

20. 如上圖 $AC = BC$, $BE = BF$, 試證 $\angle CDE = 3\angle CED$.

21. 證明過 *rt.* △兩腰中點而與那腰垂直的二線相交點, 必在這 *rt.* △的斜邊上.

第六編　直線形（二）

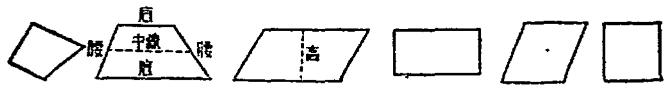
I.　多角形，平行四邊形

151.　折線，多角形　許多不在一直線上的線段，首尾銜接聯成的圖形，叫做**折線**．在一平面上閉形折線所圍成的圖形，叫做**多角形**，例如三角形，五角形，八角形．但有四邊的多角形，叫做**四邊形**．

152.　四邊形的類別

(一) 梯形　有一組對邊平行的四邊形，叫做**梯形**，平行的兩邊，叫做**底**，平行線間的距離，叫做**高**，不平行的二邊，叫做**腰**，兩腰中點的聯線，叫做**中線**．

(二) 平行四邊形　兩組對邊都平行的四邊形，叫**平行四邊形**，記號爲▱．任一組對邊都可做底，兩底間距離叫**高**．平行四邊形中，各角都是直角而隣邊不等長的叫**長方形**；各角非直角，但各邊都等長的，叫**菱形**；各角均直角，且各邊也都等長的，叫**正方形**．



四邊形　梯形　平形四邊形　長方形　菱形　正方形

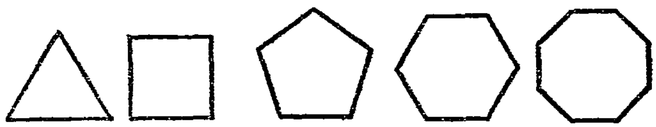
註　平常說的四邊形，都是指兩組對邊都不平行的而言．說平行四邊形時，都指各角非直角，隣邊不相等的而言．

153.　多角形的類別

(一) **等邊多角形**　是各邊都相等的多角形．

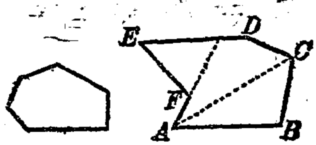
(二) **等角多角形**　是各角都相等的多角形．

(三) **正多角形**　是各邊相等，各角也等的多角形．



等邊三角形　正方形　正五角形　正六角形　正八角形

154.　凸多角形和凹多角形　多角形的各角都小於兩直角的，叫做**凸多角形**；任一角大於兩直角的．叫做**凹多角形**．一直線與凸多角形的交點，不能多於二，但與凹多角形的交點，可有四個或四個以上．



凸多角形　　　凹多角形

如上圖 *ABCDEF* 爲凹多角形，因在 *F* 處的內角大於兩直角.

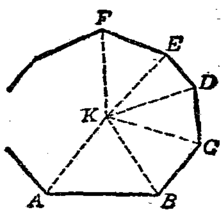
本書僅論凸多角形，以後簡稱多角形.

155. 對角線 多角形不相隣兩頂點的聯線，叫做對角線，如上圖的 *AC* 是一對角線.

156. 多角形內角和定理 n 邊的多角形，內角和 $S=2(n-2)rt.\angle s$

〔已知〕 n 邊多角形 *ABCDEF*…

〔求證〕 *ABCDEF*…的內角和等於 $2(n-2)rt.\angle s$

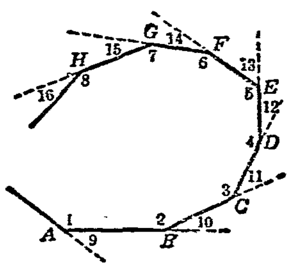


〔解析〕 從形內任一點 *K* 至各頂點各引直線，則多角形內角和，等於所有三角形內角和，減去 *K* 點周圍的 $4rt.\angle s$

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 從形內任意點 *K*，至各	(一) 過二點可作一線

頂點各引直線，分原形成 n 個 $\triangle$.	(§99).
(二) 每個 $\triangle$ 的內角和 $=2\,rt\,\angle$.	(二) $\triangle$內角和.
(三) n 個 $\triangle$ 的內角總和 $=2\,nrt.\angle$.	(三) 等量相加.
(四) K 點周圍各角的和 $=4\,rt.\angle$.	(四) 周角定理 (§108).
(五) $\therefore$ 多角形內角和 $S=2\,(n-2)\,rt.\angle$.	(五) 等量相減.

157. 多角形外角和定理 順次延長多角形的各邊，所成各外角的和，等於四直角.



〔已知〕 n 邊多角形 $ABCDE\cdots$

〔求證〕 延長各邊所成各外角的和 $=4rt.\angle$.

〔解析〕 求各頂點內外角的和，再減去內角和便得.

〔證明〕 學生自己補寫出來.

習題三十

1. 設多角形的內角和爲 $28rt.\angle s$，求其邊數.

2. 設多角形的內角和爲 $5400°$，求其邊數.

3. 求正 n 角形的內角和外角.

4. 正多角形的一內角 $=172°$，求其邊數.

5. $ABCDEF$ 爲正六角形，試證對角線 AC, CE 和 EA 圍成一等邊三角形.

6. 設多角形內角和等於外角和，求其邊數.

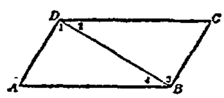
7. 設多角形外角和等於內角和二倍，求其邊數.

8. 設多角形外角和等於內角和的 $\frac{2}{3}$，求其邊數.

9. 自一頂點作多角形各對角線，而證內角和定理.

△158. **平行四邊形性質定理一　平行四邊形的對角線，分原形成兩全等三角形.**

〔已知〕 $\square ABCD$.



〔求證〕 $\triangle ABD \cong \triangle BDC$.

〔解析〕 用 $a.s.a.$

〔證明〕

敍　述	理　由
(一) $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$.	(一) 錯角相等 (§138 系二).
(二) $BD=BD$.	(二) 公用.

(三) $\therefore \triangle ABD \cong \triangle BDC$.	(三) $a.s.a.$

同理可證 AC 分原形爲兩全等三角形.

系一 平行四邊形的對角相等.

系二 平行四邊形的對邊相等.

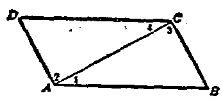
由此又得兩條推論如下:

系三 夾在兩平行線間的平行線段相等.

系四 兩平行線間的距離，處處相等.

159. 平行四邊形判別定理一 四邊形有一組對邊相等且平行，便是平行四邊形.

〔已知〕 四邊形 $ABCD$ 中 $AB = DC$ 且 $AB \parallel DC$.



〔求證〕 $ABCD$ 爲 $\square$.

〔解析〕 引 AC 證明 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, 於是 $\angle 2 = \angle 3$, BC 便 $\parallel AD$.

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 引對角線 AC.	(一) 過二點可作一直線.
(二) $AB \parallel DC$, $AB = DC$.	(二) 假設.
(三) $\angle 1 = \angle 4$.	(三) 錯角相等 (§138 系二).
(四) $AC = AC$.	(四) 公用.

(五) $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$.	(五) s.a.s.
(六) $\angle 2 = \angle 3$.	(六) 對應角
(七) $AD \parallel BC$.	(七) 平行判別 (二)(§135).
(八) $\therefore ABCD$ 爲▱.	(八) ▱定義.

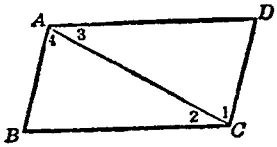
習題三一

1. 試證連結平行四邊形各邊中點，成一平行四邊形.
2. 試證平行四邊形相隣兩角的平分線互相垂直.
3. 試證平行四邊形的隣角互爲補角.
4. 試證平行四邊形有一直角時，便是長方形.
5. 試證四邊形的四角都相等，便是長方形.
6. 長方形的對角線相等.
7. 述前題的逆理并加證明.
8. 試證菱形或正方形的對角線互相垂直，且平分各角.
9. 順次聯正方形各邊中點的線，圍成一正方形.
10. 證明兩組對角都相等的四邊形必爲平行四邊形.

160. 平行四邊形判別定理二　四邊形的兩組對邊各相等，便是平行四邊形.

〔已知〕 四邊形 $ABCD$ 中 $AB = DC, AD = BC$.

〔求證〕 $ABCD$ 爲▱.



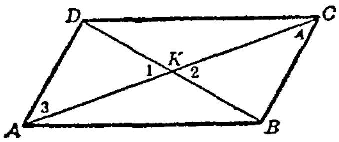
〔解析〕 引對角線 AC，則在 $\triangle ABC$，$\triangle ADC$ 中，$AB = DC$，$AD = BC$（何故？）所以爲全等形（S. S. S.），由此知 $\angle 1 = \angle 4$，$\angle 2 = 3$（何故？）這時能不能斷定 $AD \parallel BC$，$AB \parallel DC$？說出理由來.

〔證明〕 敍　述	理　由
(一) 引對角線 AC.	(一) 過二點可作一線.
(二) $AB = DC$，$AD = BC$.	(二) 假設.
(三) $AC = AC$.	(三) 公用.
(四) $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.	(四) S. S. S.
(五) $\angle 1 = \angle 4$，$\angle 2 = 3$.	(五) 對應角.
(六) $AD \parallel BC$，$AB \parallel DC$.	(六) 平行判別（二）.
(七) $\therefore ABCD$ 爲▱.	(七) ▱定義.

161. 平行四邊形判別定理三　四邊形的對角線互相平分，便是平行四邊形.

〔已知〕 四邊形 $ABCD$ 中 $AK = KC$，$DK = KB$.

〔求證〕 $ABCD$ 爲▱.



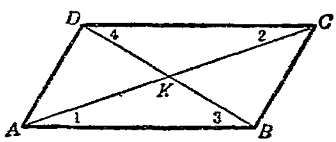
〔解析〕 證明 $\triangle AKD \equiv \triangle CKB$, 便得 $AD=BC$, $\angle 3 = \angle 4$, 因此 $AD /\!/ BC$, $ABCD$ 便是▱.

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) $AK=KC, BK=KD$.	(一) 假設.
(二) $\angle 1 = \angle 2$.	(二) 對頂角.
(三) $\triangle AKD \equiv \triangle CKB$.	(三) *s. a. s.*
(四) $AD=BC$, $\angle 3 = \angle 4$.	(四) 對應邊角.
(五) $AD /\!/ BC$.	(五) 平行判別 (二).
(六) $ABCD$ 是▱.	(六) ▱判別定理一.

162. 平行四邊形性質定理二 平行四邊形的對角線互相平分.

〔已知〕 ▱$ABCD$ 對角線 AC, BD 相交於 K.

〔求證〕 $AK=KC$, $BK=KD$.

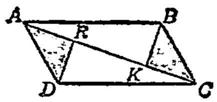


〔解析〕 證明 $\triangle AKB \equiv \triangle CKD$, 便得對應線段相等.

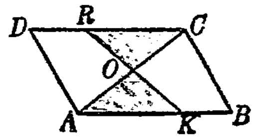
〔證明〕 敍　述	理　　由
(一) $\angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4.$	(一) 內錯角相等.
(二) $AB=CD.$	(二) ▱性質定理一系二.
(三) $\triangle AKB\equiv\triangle CKD.$	(三) $a.s.a.$
(四) $AK=KC, BK=KD.$	(四) 對應邊.

習題三二

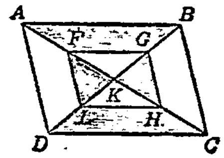
1. 右圖 $ABCD$ 爲▱, DR, BK 均$\perp AC$, 試證 $BK=DR$.



2. $ABCD$ 爲▱過對角線 AC 的中點 O, 引一直線與 DC 交於 R, AB 交於 K, 試證 $KO=OR$.



3. $ABCD$ 爲▱，對角線 AC, BD 交於 K, F, G, H, L 順次爲 AK, BK, CK, DK 的中點，試證 $FGHL$ 爲▱.



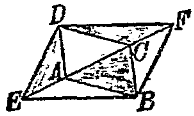
4. 梯形的底角相等，則不平行的兩邊必等（這樣的梯形，叫做等腰梯形）.

5. 等腰梯形的對角線相等.

6. 在▱ $ABCD$ 的對邊上，取

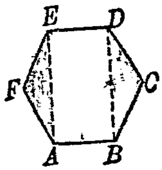
$BE=DF$, 證明 $AECF$ 也是▱.

7. 設 $ABCD$ 為▱, 在對角線 AC 的延線上取 E, F 兩點, 使 $AE=CF$, 則 $EBFD$ 也是▱.

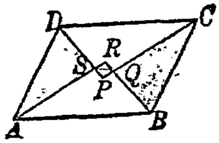


8. 順次聯長方形各邊中點的線, 圍成一菱形.

9. 六邊形 $ABCDEF$ 的對邊都兩兩平行, 且有一對相等, 例如 $AB=DE$, 證明其餘各組平行對邊也各相等.



10. 右圖▱$ABCD$, AR, BR, CP, DP, 為四角的平分線, 求證

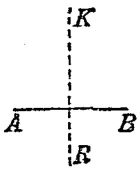


(1) $PQRS$ 是長方形或正方形.

(2) 連結 SQ, RP 則 $SQ \parallel AB, RP \parallel BC$.

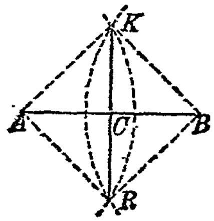
II. 作圖題及其相關諸定理

163. 垂直平分線 平分一線段, 并和他垂直的線, 叫那線段的**垂直平分線**. 如右圖 KR, 是 AB 的垂直平分線.



164. 基本作圖題六(垂直平分線)的證明.

〔已知〕 線段 AB.



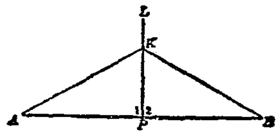
〔求作〕 AB 的垂直平分線.

〔作法〕 見第二編§54.

〔證明〕 敍　述	理　由
(一) 連結 AK, BK, AR, BR,	(一) 過二點可作一線.
(二) $AR=BR, AK=BK$	(二) 作法.
(三) $\therefore AC=CB, KR\perp AB$.	(三) 中點垂線定理 (§130)

165. 垂直平分線定理一　在線段的垂直平分線上的任何點，距線段兩端等遠.

〔已知〕 $LP\perp AB, AP=PB$, K 是 LP 上的任意點.



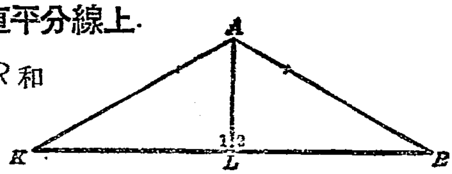
〔求證〕 $KA=KB$.

〔證明〕 敍　述	理　由
(一) $\triangle APK$, BPK 中 $AP=PB$	(一) 假設.
(二) $\angle 1=rt.\angle=\angle 2$.	(二) 假設 $LP\perp AB$.

(三) $KP=KP$.	(三) 公用.
(四) $\triangle APK\equiv\triangle BPK$.	(四) s. a. s.
(五) $\therefore KA=KB$.	(五) 對應邊.

166. 三角形的高，中線 從三角形任一頂點所作到對邊的垂線叫**高**，到對邊中點的聯線叫**中線**.

167. 垂直平分線定理二 距線段兩端等遠的點，必在線段的垂直平分線上.



〔已知〕 線段 KR 和一點 A, $AK=AR$.

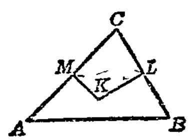
〔求證〕 A 點在 KR 的垂直平分線上.

〔解析〕 從 A 點引 $AL\perp KR$, 證明 rt. $\triangle ALK\equiv$ rt. $\triangle ALR$, 便得 $KL=LR$.

〔證明〕 學生自己補出.

系一 **三角形三邊的垂直平分線會於一點.**

〔註〕 這點叫做三角形的**外心**.



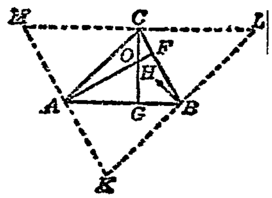
〔提示〕 命 AC,BC 的垂直平分線的交點爲 K. 證明 K 點距 A, B 等遠，由此便知 K 在 AB 的垂直

平分線上.

系二　三角形的三個高，會於一點.

〔註〕 這邊叫做三角形的垂心.

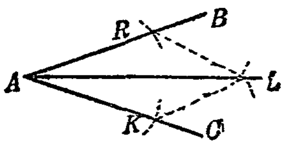
〔提示〕 過△ABC 三頂點各作直線和對邊平行，另成一△MKL. $ABLC$, $BAMC$等是何種圖形？證明A, B, C 三點順次是 MK, KL, ML的中點，再應用系一.



168. 基本作圖題七(平分已知角)的證明.

〔已知〕 $\angle BAC$.

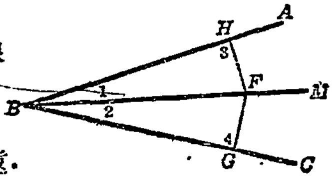
〔求作〕 $\angle BAC$ 的分角線.



〔作法〕 見第二編 §55.

〔證明〕 敍　述	理　由
(一) 連結 LR, LK.	(一) 過二點可作一線.
(二) $AR=AK$, $RL=KL$.	(二) 作法.
(三) $AL=AL$.	(三) 公用.
(四) $\triangle ARL\equiv\triangle AKL$.	(四) $S.S.S.$
(五) $\therefore \angle BAL=\angle CAL$.	(五) 對應角.

169. 分角線定理一 在一角的分角線上的任何點，距角的兩邊等遠.



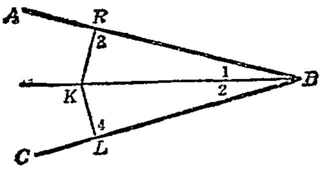
〔已知〕 $\angle ABC$ 的分角線 BM, F 爲 BM 上的任意點.

〔求證〕 F 距 BA,BC 等遠.

〔解析〕 證明 $rt.\triangle FHB \cong rt.\triangle FGB$.

〔證明〕 敘 述	理 由
(一) 在 $\triangle BFH,\triangle BFG$ 內，$\angle 1=\angle 2$.	(一) 假設.
(二) $\angle 3=\angle 4=rt.\angle$.	(二) 點線距離定義.
(三) $BF=BF$.	(三) 公用.
(四) $\triangle BFH \cong \triangle BFG$.	(四) §139 (系四).
(五) $FH=FG$.	(五) 對應邊.

170. 分角線定理二 距角的兩邊等遠的點，必在分角線上.



〔已知〕 $\angle ABC$ 內一點 K, $KR \perp AB$, $KL \perp BC$, 且 $KR=KL$.

〔求證〕 K 點在 $\triangle ABC$ 的

分角線上.

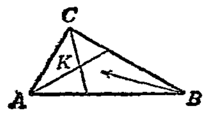
〔解析〕　連結BK,證明$rt.\triangle RKB\equiv rt.\triangle LKB$,便得$\angle 1=\angle 2$.

〔證明〕　學生自已補出來.

系　**三角形三內角的分角線會於一點.**

註　這點叫做三角形的**內心**.

提示　命$\angle A,\angle C$分角線的交點為K.證明K點距BA,BC等遠.



習 題 三 三

1. 在一已知圓上，求距兩定點等遠的一點.

2. 求在一已知線段上，與已知角兩邊等遠的點.

3. 在一已知圓上，求作與兩已知直線等距離的一點.

4. 求作一點使(一)距三點(二)距三直線等遠.

5. 三角形一內角的分角線，與餘二外角的分角線會於一點(這點叫做三角形的**傍心**，傍心共三個).

6. 聯三角形內心和傍心的直線，必過頂點.

7. 聯三角形兩傍心的直線，必過頂點.

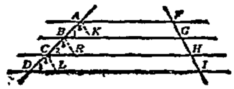
8. 直角三角形的垂心在何處？外心在何處？

直角頂

171.　平行截線定理　一組平行線，倘分割一

截線成相等線段，必分割他截線成相等線段.

〔已知〕 線段$AF \parallel BG \parallel CH \parallel DI$，在截線 AD 上截取 $AB=BC=CD$，在截線 FI 上截取 FG, GH, HI.



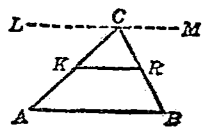
〔求證〕 $FG=GH=HI$.

〔解析〕 過 A,B,C 等點引 FI 的平行線，證明所成各小$\triangle$全等，便可求得 $FG=GH=HI$.

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 過A,B,C各點各引直線$\parallel FI$，與BG交於K，CH交於R，DI交於L，	(一) 平行線作法.
(二) 則$AK \parallel BR \parallel CL$.	(二) 三線$\parallel$定理(§143(三)).
(三) $\angle 6=\angle 5=\angle 4$.	(三) 同位角.
(四) $\angle 1=\angle 2=\angle 3$.	(四) 假設 $AF \parallel BG \parallel CH \parallel DI$.
(五) $AB=BC=CD$.	(五) 假設.
(六) $\triangle ABK \equiv \triangle BCR \equiv \triangle CDL$.	(六) a. s. a.

(七) $AK=BR=CL$.	(七) 對應邊.
(八) $AK=FG, BR=GH$, $CL=HI$.	(八) ▱性質.
(九) $\therefore FG=GH=HI$.	(九) 代換公理.

系　過三角形一邊中點，并和底邊平行的直線，必平分第三邊.

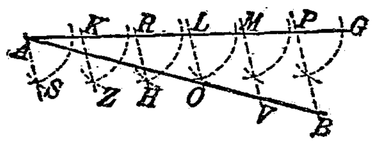


提示　過 C 作 $LM \parallel KR \parallel AB$.

172.　等分線段法的證明.

〔已知〕　線段 AB.

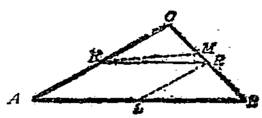
〔求作〕　分 AB 為任意等分(假定為五等分).



〔作法〕　見 §56.

〔證明〕　作 AS 和 PB 等平行，卽可證明，學生試自補出.

173.　三角形兩邊中點聯線定理　三角形兩邊中點的聯線，必平行於第三邊，且等於第三邊之半.



〔已知〕　△ABC 內，K, R 順

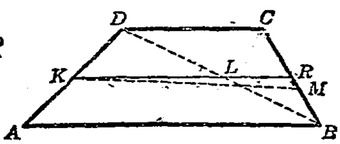
次為 AC, BC 的中點.

〔求證〕 $KR /\!\!/ AB$, 且 $KR=\frac{1}{2}AB$.

〔解析〕 引$KM /\!\!/ AB$, 證明 KM 平分 BC, 因此和 KR相合.

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 引$KM /\!\!/ AB$.	(一) 平行線作法.
(二) KM平分BC (卽過R點).	(二) $/\!\!/$截線定理系.
(三) KM與KR相合.	(三) 二點定一線(§99(一)).
(四) $\therefore KR /\!\!/ AB$.	(四) 按(一)及(三).
(五) 引$RL /\!\!/ CA$.	(五) 平行線作法.
(六) L為AB中點 (卽$AL=LB$).	(六) $/\!\!/$截線定理系.
(七) $ALRK$為$\square$.	(七) $\square$定義.
(八) $KR=AL=\frac{1}{2}AB$.	(八) $\square$性質, 代換公理.

174. 梯形中線定理　梯形的中線, 和兩底平行, 且等於兩底和的一半.



〔已知〕 梯形$ABCD$. KR為中線.

〔求證〕 $KR /\!\!/ AB$和DC,

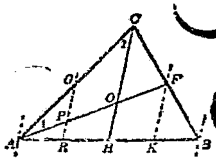
且 $KR=\frac{1}{2}(AB+DC)$.

〔解析〕 引 $KM /\!/ AB$，證明 KM 平分對角線 DB 及 BC 邊，因此和 KR 相合. $KL=\frac{1}{2}AB$，$LR=\frac{1}{2}DC$.

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 引 $KM /\!/ AB$ (亦即 $/\!/ DC$).	(一) $/\!/$ 線作法；三線 $/\!/$ 定理.
(二) KM 平分 BC (卽過 R 點).	(二) 平行截線定理.
(三) KR 和 KM 相合.	(三) 二點定一線.
(四) $\therefore KR /\!/ AB$ 和 DC.	(四) 由(一)與(三)；三線 $/\!/$ 定理.
(五) 引對角線 DB 與 KR 交於 L.	(五) 過二點可作一線.
(六) L 是 DB 的中點.	(六) 平行截線定理系.
(七) $KL=\frac{1}{2}AB$, $LR=\frac{1}{2}DC$.	(七) △兩邊中點聯線定理.
(八) $\therefore KR=\frac{1}{2}(AB+DC)$.	(八) 等量相加.

175. 三角形重心定理 **三角形的三中線會於一點，從這點到各邊中點距離，等於相當中線長的 $\frac{1}{3}$.**

〔已知〕 $\triangle ABC$ 中線 AF, CH 和 AC 邊的中點 G.



〔求證〕 (a) AF, CH 相交於 O. (b) $AF=3OF$, $CH=3OH$. (c) 中線 BG 經過 O 點, $BG=3OG$.

〔解析〕 (a) 證 AF, CH 必相交. (b) 過 G, F 各引 CH 的平行線，證這些線等分 AB. 所以 AF 爲三等分. (c) 證 BG 和 AF 也必相交於 O.

〔證明〕 敘　述	理　由
(a) (一) AF, CH 必相交.	(一) §144 系二.
(b) (一) 過 G 引 $GR \parallel CH$, 過 F 引 $FK \parallel CH$.	(一) $\parallel$ 線作法.
(二) 因 $AG=GC$, 故 $AR=RH$	(二) 平行截線定理系.
(三) 同理知 $BK=KH$.	(三) 同(二).
(四) $AH=HB$.	(四) 假設.
(五) $\therefore AR=RH=HK=KB$.	(五) 等量等分.
(六) $\therefore AP=PO=OF$, 即 $AF=3OF$.	(六) 平行截線定理系.
同理可證 $CH=3OH$.	

(c) 同理 BG, AF, 可證相交於一點Q, 而$AF=3QF$. 即 Q 與 O 相合，故三中線會於一點. 學生試逐步自己寫出.

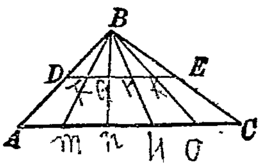
〔註〕 三角形三中線相會的一點，叫做重心.

習題三■

1. 等腰三角形一腰上的高和底所夾的角，等於頂角的一半.

2. 順次連結三角形三邊中點，則成四個全等的三角形.

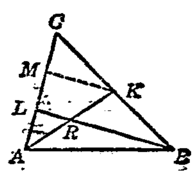
3. 等分$\triangle ABC$的底 AC 爲五分，將各分點和 B 連結. 證明諸線分 BA, BC 中點聯線 DE 爲五等分.



4. 連結四邊形相隣兩邊中點的直線，等於且平行於餘二邊中點的聯線.

5. 自等腰三角形兩腰中點聯底邊的中點，所得的二直線及夾頂的二邊組成一菱形.

6. 過梯形一腰中點幷平行於底的直線，必平分他腰.



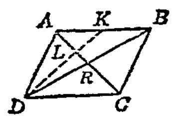
7. 右圖K是 BC 的中點，R 是 AK

的中點，延長 BR 交 AC 於 L. 證明 $AL=\frac{1}{3}AC$.

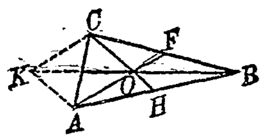
8. 連結四邊形對邊中點的直線，必互相平分.

9. 連結平行四邊形任一頂點至兩對邊中點的直線，分一對角線為三等分.

10. $ABCD$ 是▱，對角線相交於 R. 直線 DK 平分 AB 於 K，幷割 AC 於 L. 證明 $DL=2LK$，且 $LR=\frac{1}{6}AC$.



11. 三角形 ABC 的 AF, CH 二中線在 O 點相交，聯 BO 延長到 K，使 $OK=BO$. 由此證重心定理.



12. 聯三角形各邊中點，成功一個三角形. 原形的重心是新三角形的什麼?

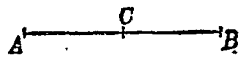
III. 不等元素

176. 不等記號 不等記號為 $>$ 和 $<$，前者讀作大於，後者讀作小於. 只表二量不等，而不必區別何者為大，何者為小時，用不等號 $\neq$. 兩個不等式，同用 $>$ 或 $<$ 聯成的，稱為**同向**，否則叫**異向**.

例如$a>b$, $c>d$為同向, $p>q$, $r<s$為異向.

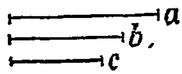
177. 不等公理

(一) 全量大於其任何分量.



如右圖中$AB>AC$, 又$AB>CB$.

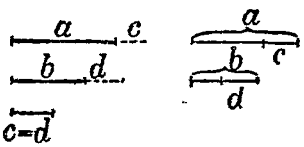
(二) 如$a>b$, $b>c$, 則$a>c$.



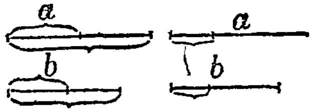
看右圖卽明(下同).

(三) 如$a>b$, $c=d$, 則

$a+c>b+d$, $a-c>b-d$.



註　設a, b都大於c.

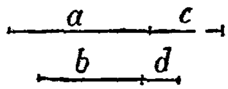


(四) 如$a>b$, $m=n$, 則

$ma>nb$, $\frac{a}{m}>\frac{b}{n}$.

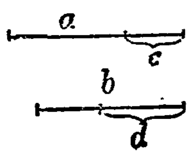
(五) 如$a>b$, $c>d$, 則

$a+c>b+d$.



(六) 如$a>b$, $c<d$, 則

$a-c>b-d$.

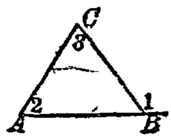


註　設$a>c$, $b>d$.

〔注意〕 學生更可設數字的例, 去說明上述各公理.

178. 關於三角形的基本不等定理.

(一) 外角定理 **三角形的外角大於任一內對角.**



因 $\angle 1=\angle 2+\angle 3$ (何故?)

故 $\angle 1>\angle 2, \angle 1>\angle 3$ (何故?)

(二) 二邊和差定理 **三角形任兩邊的和大於第三邊，其差小於第三邊.**

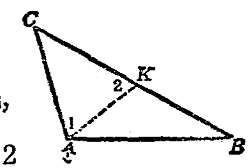
如上圖 $AB+BC>AC$ (幾何公理(二)).

故 $BC>AC-AB$ (何故?)

179. 三角形不等元素定理一 三角形的兩邊不等，則所成的角也不等，長邊所對的角大.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 中 $CB>CA$.

〔求證〕 $\angle CAB>\angle B$.



〔解析〕 在長邊CB上截$CK=CA$，聯AK. 證$\angle 1=\angle 2$，由$\angle CAB>\angle 1$，$\angle 2>\angle B$. 得 $\angle CAB>\angle B$，

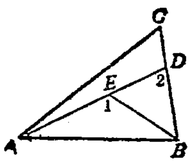
〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 在CB上截取$CK=CA$，聯AK.	(一) 過二點可作一線.
(二) K在G與B中間.	(二) 假設$CB>CA$.

(三) $\angle CAB > \angle 1$.	(三) 不等量公理(一)
(四) $\angle 1 = \angle 2$.	(四) 等腰△性質(§123).
(五) $\angle CAB > \angle 2$.	(五) 代換公理.
(六) $\angle 2 > \angle B$.	(六) 外角定理.
(七) $\therefore \angle CAB > \angle B$.	(七) 不等公理(二).

習題三五

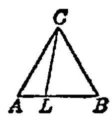
1. 四邊形的任一邊，小於餘三邊的和，試加證明.

2. 如上圖試證 $\angle 1 > \angle C$.



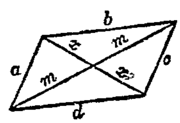
3. 如右圖，試證 $EA + EB < CA + CB$.

4. 右圖△ABC 中 $AC = BC$, L 爲 AB 上任一點，引 CL. 證名 $\angle BLC > \angle ABC$.



5. 上圖 ABC 爲等邊△, 引 CL, 使 $AL < BL$. 證明 $\angle ALC$ 不等於 $rt. \angle$.

6. 試證平行四邊形的周，大於對角線的和.

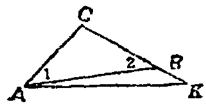


7. 試證三角形內或外任一點到各頂點距離的和必大於三邊和的一半.

8. △ABC 中, $AB = 10$, $BC = 12$, $CA = 15$, 那一角最

大？那一角最小？

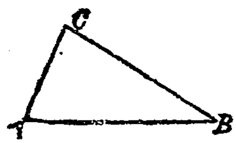
9. $\triangle ABC$中，$AC=BC$，延長CB至K，連結AK. 證明$\angle CAK>\angle K$.



180. 三角形不等元素定理二 三角形的兩角不等，則所對的邊也不等，角大所對的邊長.

〔已知〕 $\triangle ABC$中，$\angle A>\angle B$.

〔求證〕 $BC>AC$.



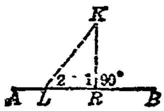
〔解析〕 BC 和AC 的關係，只有三種：

(a) $BC<AC$, (b) $BC=AC$, (c) $BC>AC$. 證明(a) (b) 兩種情形都不能成立.

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) BC和AC的關係如下：$BC<AC$, $BC=AC$, $BC>AC$.	(一) 二量關係，只有這三種.
(二) 設$BC<AC$，則$\angle A>\angle B$.	(二) △三角不等元素定理一
(三) 設 $BC=AC$，則$\angle A=$	(三) 等腰△性質(§123).

$\angle B$.	
這二層結論都與假設不合	
(四) $\therefore BC > AC$.	(四) 因 $(a)(b)$ 二層都不成立.

系 **從線外一點，到線上所引諸線中，垂線最短.**



提示 比較$\angle 1$和$\angle 2$.

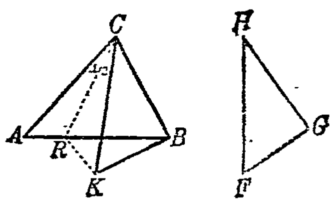
註 任一點到一線上垂線的長，叫點線間距離.

181. 窮舉證法 上節定理的證法，是將關於結論的一切可能情形都舉出，然後證明除了某種情形外，其餘都不成立，故只有某種情形可合．這便叫窮舉證法，爲歸謬證法中情形較複雜的一種.

182. 非全等三角形定理一 **兩三角形有兩邊彼此相等，而夾角不等，那麼第三邊也不等，夾角大的第三邊也大.**

〔已知〕 $\triangle ABC, FGH$ 中 $AC = FH; BC = GH, \angle ACB > \angle H$.

〔求證〕 $AB > FG$.

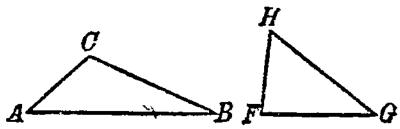


〔解析〕 移$\triangle FGH$合於$\triangle ABC$，使GH與BC合，HF落於CK，引CR平分$\angle ACK$，聯RK. 證$\triangle CRK\equiv\triangle CRA$. 卽得$RA=RK, BA=BR+RK>BK$.

〔證明〕 敍 述	理 由
(一) 移$\triangle FGH$於$\triangle ABC$上，使GH落於BC，G點合於B，H合於C.	(一) 移形公理.
(二) HF落於$\angle ACB$內CK的位置.	(二) 假設$\angle H<\angle ACB$.
(三) 引CR平分$\angle ACK$交AB於R.	(三) 幾何公理三(§106).
(四) 聯RK.	(四) 過二點可作一線.
(五) $CR=CR$, $\angle 1=\angle 2$.	(五) 公用，作法.
(六) $AC=HF=CK$	(六) 假設.
(七) $\triangle ACR\equiv\triangle KCR$.	(七) s. a. s.
(八) $RA=RK$.	(八) 對應邊.
(九) $BR+RK>BK$.	(九) △二邊和差定理.
(十) $BR+RA>BK$.	(十) 代換公理.
(十一) $\therefore\ AB>FG$.	(十一) 代換公理.

183. 非全等三角形定理二 兩三角形有二邊彼此相等，而第三邊不等，那麼所對的角也不等，邊大的所對的角也大.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 和 FGH 中，$AC=FH$, $BC=GH$, $AB>FG$.



〔求證〕 $\angle C>\angle H$.

〔解析〕 $\angle C$ 和 $\angle H$ 的關係，只有三種：(a) $\angle C<\angle H$, (b) $\angle C=\angle H$, (c) $\angle C>\angle H$ 證明(a)(b)兩種情形不合.

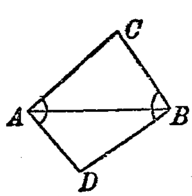
〔證明〕 學生自己補出來.

習 題 三 六

1. 直角三角形中那一邊最長？鈍角三角形呢？

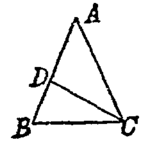
2. $\triangle ABC$ 中，$\angle A=50°$, $\angle B=60°$, 那一邊最長？那一邊最短？

3. 右圖 $AC>BC$, $AD\perp AC$, $DB\perp BC$. 試證 $BD>AD$.

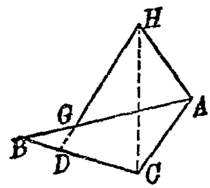


4. 設 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\frac{2}{3}rt.\angle$, 外角 $\angle DBC=110°$, 問這△的那一邊最長？那一邊最短？

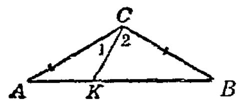
5. 如右圖 $\triangle ABC$中，$AB=AC$. D 爲AB上任點證明$DC>DB$.



6. $\triangle ABC$ 中，$AC>BC$，$\angle A$ 和$\angle B$ 的平分線相交於D. 證明$AD>BD$.



7. 右圖中 $AH=AC$，$HG=BC$. 證明在 $\triangle CDH$ 中 $\angle HCD>\angle CHD$. 因此直接證明 §183 的定理.



8. 右圖 $AC=BC$，K 爲 AB 上任意點. 求證 $CK<AC$ 或 BC.

9. 上圖 $\angle 1$爲銳角，$AK=KC$. 求證 $BC<BA$.

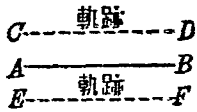
10. 平行四邊形的兩對角線不等，試加證明（長方形正方形例外）.

11. $\triangle ABC$ 中，$BC>AC$，CK爲中線，試證 $\angle BKC$爲鈍角.

12. 於等腰$\triangle ABC$ 的底 AB 上取 K 點，使 $AK<BK$. 證明$\angle AKC>\angle BKC$.

IV. 軌　　跡

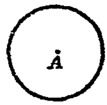
184. 軌跡實例 (一) 距已知線段 AB 半寸的一切點，在什麼地方？這問題很易回答，那些點顯然在 AB 兩側，距 AB 半寸的兩條平行線上．此處



(a) 在 CD 或 EF 上的每一點，都是距 AB 半寸．

(b) 距 AB 半寸的點，都在 CD 或 EF 上．

(二) 距定點 A 半寸的一切點，在什麼地方？這問題也很易回答．那些點顯然在以 A 點為心，半徑等於半寸的圓上．故



(a) 在圓上的每一點，都是距 A 點半寸．

(b) 距 A 點半寸的點，都在圓上．

185. 軌跡定義　由合乎固定條件的一切點所構成的圖形，叫做軌跡． 換句話說，**一動點依着固定條件移動，他經過的路程，就是軌跡．**

例如火車每一點，當火車開行時，都依着鐵軌的平行線

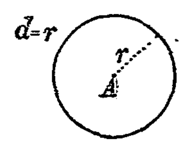
移動．所以車上每點的軌跡，都是一條水平直線（車輪除外）．又如升降機上每一點，當機上下時，都依着地的垂直線上下移動，所以在昇降機上每點的軌跡，都是一條垂直線．

186. 軌跡的證明 軌跡可以是極複雜的曲線，但本書所論，祇限於直線及圓或兩者合成的圖形．學者解軌跡問題時，可先作出所求軌跡上的三點，便能推測軌跡是直線或圓．然後再設法證明．

證明軌跡，須分兩層：(I) **軌跡上任何點，都合於題中條件．** (II) **凡合於題中條件的點，都在軌跡上．** 或用 (II') **軌跡以外任何點，都不能合於題中條件**代 (II) 也可．

註 注意 (I)(II) 兩層互為逆定理．

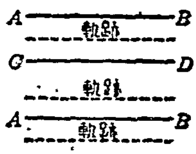
187. 基本軌跡定理 有幾條很重要的簡單軌跡，今列舉如下（證明由學生自己補出）：



（一）與一定點的距離為定長的點的軌跡，為以定點為心，定長為半徑的圓．

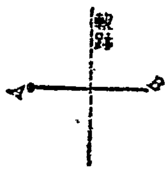
（二）距兩平行線等遠點的軌跡，為過平行線距

離中點的另一平行線.

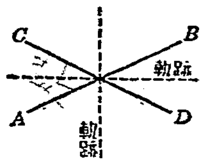


(三) 與一直線距離為定長的點所成軌跡，為直線兩側與直線距離為定長的兩平行線.

(四) 與線段兩端等遠點的軌跡，為其垂直平分線.

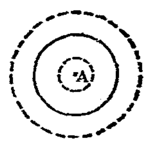


前已證明 (a) 在線段垂直平分線上的每一點，都距線段兩端等遠; (b) 距線段兩端等遠的點，都在其垂直平分線上.



(五) 與相交兩直線等遠點的軌跡為其兩分角線.

前已證明 (a) 在分角線上每一點都距角的兩邊等遠; (b) 距角兩邊等遠的點，都在分角線上.



(六) 與半徑 R，圓心 A 的定圓，距離為 r 的點的軌跡，為半徑等於 $R+r$ 和 $R-r$ 的兩個同心圓.

習題三七

1. 兩平行線相距 2 寸，求距兩平行線等遠點的軌跡.

2. 長方形長 4 寸，闊 3 寸，求在形內作距一邊半寸的點的軌跡. ~~完全的軌跡成什麼圖形?~~

3. $AB \mathbin{/\!/} CD$, AB, CD 相距 3 寸，求作與 AB 的距離，等於 CD 距離之二倍的點的軌跡.

4. 求一圓內半徑上中點的軌跡.

5. AB, CD 兩平行線相距 3 寸，求作與 AB 距離等於與 CD 距離之半之點的軌跡.

6. 我們為何不說基本軌跡一是圓上的一段弧? 何以要說基本軌跡五是二條分角線.

7. K 為 AB 外一點，從 K 引直線到 AB. 求作此等直線中點的軌跡.

8. AB, CD 是梯形平行的兩邊，從 AB 上任何點至 CD 上任何點引直線，求作這些線段中點的軌跡.

9. 過相距 3 寸的兩定點，能作多少圓? 求作這些圓圓心的軌跡.

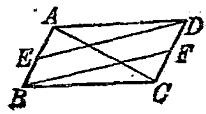
10. 在$\triangle ABC$內，作平行於AB邊的直線，止於 AC 和 BC. 求作這些平行線中點的軌跡.

11. 在平行四邊形內作夾於兩對邊內而和他二對邊平行的線段. 求這些線段中點的軌跡.

雜　題

1. 在▱$ABCD$的對角線上，取$AE=CG$，$BF=DH$. 證$EFGH$也是▱.

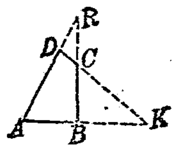
2. $ABCD$是▱，E,F各爲AB，CD的中點,求證ED,BF三等分AC.



3. 在▱$ABCD$的AB邊上取一點K，使$AK=\frac{1}{5}AB$. 直線DK與AC交於R. 證明

$$AR=\frac{1}{6}AC.$$

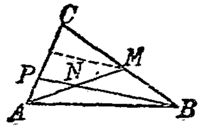
4. 延長四邊形$ABCD$的AB，CD邊使交於K，AD，BC邊使交於R. 試證　$\angle RCK=\angle R+\angle K+\angle A$



5. 三角形一邊的中線，平分其餘兩邊中點的聯線.

6. 任意四邊形兩對邊中點和兩對角線中點成一平行四邊形.

7. 在$\triangle ABC$的一中線AM上，取中點N,聯BN交AC於P點. 證明$AP=\frac{1}{3}AC$.



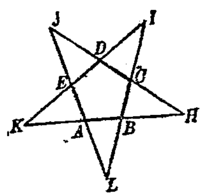
8. 證明梯形兩對角線上中點的距離，等於上下兩底差的一半.

9. 正多角形的外角，等於正三角形的內角，這正多角形有幾邊?

10. 等分四邊形各外角的直線，所成新四邊形的對角互為補角.

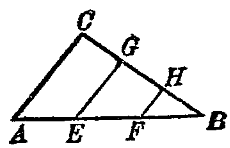
11. 從$\triangle ABC$的頂點B, C所引垂線交於形內的X點，若$AB>AC$. 求證$XB>XC$.

12. 延長五角形$ABCDE$各邊相交於H, I, J, K, L成一星形，證明$\angle H=\angle I=\angle J=\angle K=\angle L$，并求各角的大小.



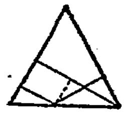
13. 自$\triangle ABC$中，$\angle C$的平分線上任取一點D，證明從D點到A, B兩頂點距離的差，小於AC, BC的差.

14. $\triangle ABC$中，$\angle A$和$\angle C$的平分線相交於D，過D引AC的平行線交AB於R, BC於S. 證明$RS=AR+SC$.



15. $\triangle ABC$中$AE=BF$, $AC\mathbin{/\mkern-5mu/}$

$EG /\!/ FH$. 證明 $EG+FH=AC$.



16. 從等腰三角形底上任一點，到兩腰上垂線之和，等於一腰上的高.

17. 從三角形內任一點，至各頂點所引直線之和，大於三角形三邊之和之半.

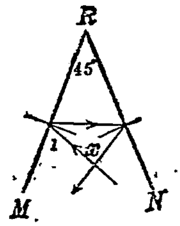
18. 四邊形 $ABCD$ 中，AD 爲最長邊，BC 爲最短邊，證明 $\angle B > \angle D$，$\angle C > \angle A$.

19. $\triangle ABC$ 中，K 爲 AB 上任一點，R 爲 BC 上任一點，證明 $AB+BC \geqq AK+KR+RC$.

20. 一點 O 距半徑 5 釐的圓的中心爲 3 釐，設 P 點在圓周上移動，求作 OP 中點的軌跡.

總　雜　題

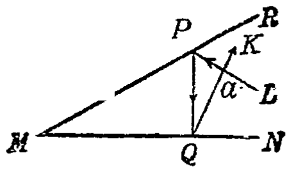
1. MR, NR 表平面鏡，夾角 45°，光線進行及反射的路程用箭頭表示，如 (1) $\angle 1=70^\circ$, (2) $\angle 1=m^\circ$, 試求 $\angle x$.



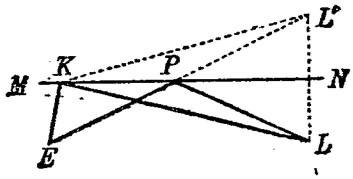
註　光線的射入角與反射角相等.

2. MR, MN 表平面鏡，光線進行反射如箭頭表示，求證

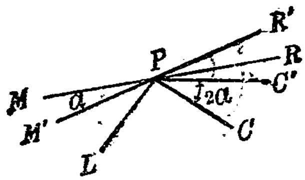
$$\angle a=2\angle M.$$



3. 光線由 L 經平面鏡 MN 反射到 E, 其路程如 LPE, 試證此線較其他 LKE 線要短些.

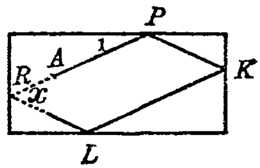


4. MR 是平面鏡, LP 是射入線, PC 是反射



線. 如 MR 轉到 $M'R'$ 的位置, PC 成為 PC', 試證 $\angle CPC' = 2a$.

5. 彈子的反躍, 和光線的反射, 情形一樣, 就是去的方向同桌沿所成的角, 和桌沿同反躍的方向所成的角相等. 右圖



(1) $\angle 1 = 42^\circ$, (2) $\angle 1 = m^\circ$, 求 $\angle x = ?$

6. 求證上題的圖中 $PKLR$ 是一個▱, 卽證明 $\angle R = \angle K$, $\angle L = \angle P$.

7. 證明二全等三角形中對應邊上的中線, 高, 分角線, 均彼此相等.

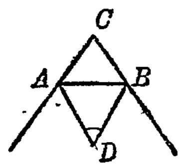
8. 一三角形的二邊和一高和別一三角形的二邊和相當高對應相等, 試證二者為全等形.

9. 二平行四邊形中, 有二隣邊和夾角對應相等, 試證二者為全等形.

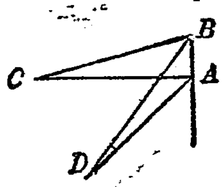
如係二隣邊和一相對角對應相等, 是否仍為全等形?

提示 用疊合法, 並注意 §137 的平行公理.

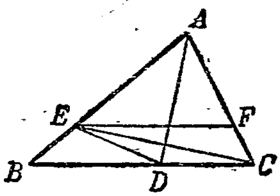
10. 如右圖 AD, BD 各為在 A, B 處外角的分角線，求證 $\angle ADB$ 與 $\frac{1}{2}\angle C$ 互為餘角.



11. 如右圖 BD 平分 $\angle B$, AD 平分 A 處外角，求證 $\angle D=\frac{1}{2}\angle C$.



12. $\triangle ABC$中 $AC=BC$，將這三角形翻過來自相疊合，使 C 角仍落在原位置，CB, CA 二邊互易位置，由此以證明等腰三角形性質定理. (看 §123 和第五編後雜題中的 4 題).



13. $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\angle B$，倣上題用疊合法以證 $AC=BC$. (看 §147, 和第五編雜題中第 5 題).

14. AD 平分$\angle A$, $AE=AC$, $EF \parallel BC$, 證 EC 平分 $\angle DEF$.

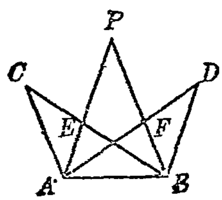
15. 同上題設 EC 平分 $\angle DEF$, 證$EF \parallel BC$.

16. 下左圖中 $\triangle ABC\equiv\triangle ABD$, $AP \parallel BD$, $BP \parallel AC$, 試證$\triangle ACE\equiv\triangle BDF$.

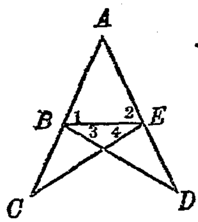
17. 下中圖，設$AC=AD$，$\angle C=\angle D$，試證

(一) $BC=DE$，(二) $\angle 1=\angle 2$，(三) $\angle 3=\angle 4$.

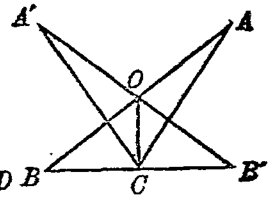
18. 下右圖，$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C$；$B, C, B'$ 在一直線上，試證 $OC\perp BB'$.



(16)



(17)



(18)

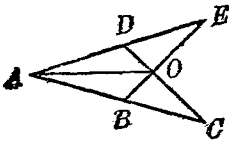
19. 下左圖 $AB=AD$，$AC=AE$，試證AO平分 $\angle BAD$.

註 由此題可得一角平分線的作法.

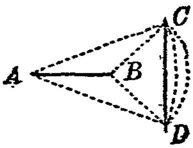
20. 下中圖，如 AB線段的垂直線 CD 不與他相交，可不延長 AB 而照圖中的方法作垂線，試加申述幷證明之.

21. 下右圖中，$\triangle ABC$ 由$AC=BC$，$CE>CD$，試證 $\triangle ABE$ 三邊的和大於 $\triangle ABD$ 三邊的和.

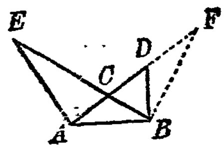
提示 作$\triangle ABF\equiv\triangle ABE$.



(19)

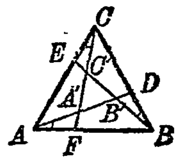


(20)



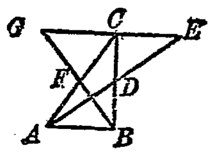
(21)

22. $\triangle ABC$ 是等邊三角形，取 $AE=BF=CD$，聯 AD, BE, CF 成 $\angle A'B'C'$. 證此亦爲等邊三角形.

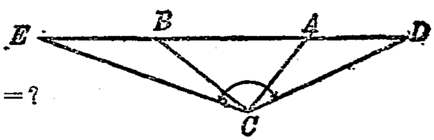


23. 上題如已知 $\angle DAB=\angle EBC=\angle FCA$，求證 $\triangle A'B'C'$ 也是等邊三等形.

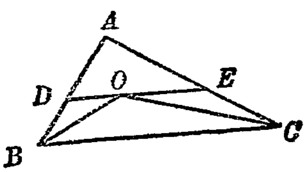
24. 右圖 D 是 BC 中點，F 是 AC 中點. 又 $AD=DE$，$BF=FG$，試證 E,C,G 三點在一直線上.



25. 右圖中 $AC\perp BC$，$AD=AC$，$BE=BC$，試求 $\angle ECD=?$



26. $\triangle ABC$ 中，$\angle B$，$\angle C$ 平分線 BO,CO 交於 O，過 O 作 $DE\,/\!/\,BC$，證 $DE=BD+CE$.



27. 在等腰三角形底邊上任一點 P 作兩腰的垂線，則其和等於腰的高，點在底的延長線上如何?

28. 從等邊三角形內任一點向三邊作三垂線，試證此三垂線和爲定量，而等於此三角形的高.

29. 試證等腰三角形腰上的中線必等長.

30. 上題的逆定理能否成立?何故?

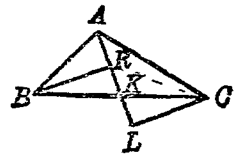
31. 證等腰三角形等角平分線等長.

32. 證上題的逆定理.

提示 證明如二角不等，則大角的分角線必較長.

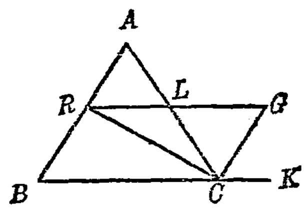
33. 右圖K爲BC中點，BR及CL，垂直AK及其延長線，試證

$BR=CL$.



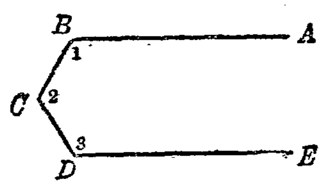
34. $\triangle ABC$爲等腰三角形. 延長一腰BA至K，使$AK=BA$，引KC，試證$\triangle BCK$爲 rt. $\triangle$.

35. 將$\triangle ABC$的BC邊延長至K，引$\angle ACB$的平分線CR交AB於R，過R引BC的平行線交AC於L，又交$\angle ACK$的平分線於G，則$RL=LG$.



36. 右圖中$\angle 1+\angle 2+\angle 3$等於四直角，試證$BA \parallel DE$.

37. 上題的逆定理能不能成立?如能成立，試加證明.



38. 某犯人欲避法官詢問，故意裝聾，法官無法．後來，叫人在犯人背後突然放一空鎗，犯人嚇了一跳，因此斷定犯人不是眞聾．這種推斷的理由何在？

39. n 角形的對角線共有$\frac{1}{2}n(n-3)$ 條，試加證明．

40. 對角線有 20 條，35 條，80條的多角形，各有幾邊？

41. 有一多角形，其內角的和二倍其外角的和，此形有多少邊？

42. 有沒有凹的正多角形？什麼緣故？

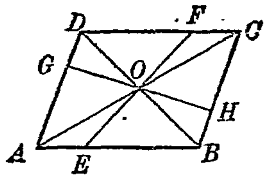
43. 在任意多邊形外一點，順次作和各邊平行的直線．由此以推證多角形外角和的定理．(須用第五編雜題第 10題)．

44. 聯任意四邊形各邊中點所成的形，爲一平行四邊形，今試詳細討論，如果原來四邊形是平形四邊形，結果怎樣？長方形呢？菱形呢？正方形呢？

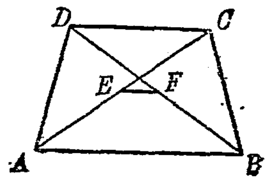
45. 平行四邊形四角分角線圍成一個矩形．但若原來平形四邊形改作長方形，菱形，正方形，結果如何？

46. $\square ABCD$中，$\angle B$ 爲 $120°$，對角線BD 與 AD 交成直角，再作 $DK \perp AB$，試證 $BD=2DK$．

47. 在$\square ABCD$ 上，取$AE=CF$，又取$AG=CH$，則 AC，BD，EF，GH 四線交於一點．試加證明．(見下頁上圖)

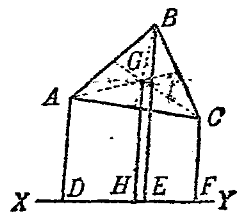


48. 試證梯形二對角線中點的距離等於上下二底差的一半.



如將梯形改作平行四邊形,此定理應成何種情形?

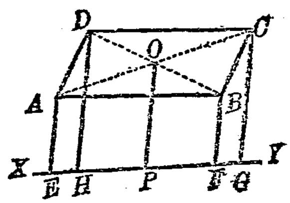
49. 過三角形重心及各頂點向三角形外任一直線 XY 作互相平行的線 AD, BE, CF, GH,證



$$AD+BE+CF=3GH.$$

但如果 XY 和三角形相交,那末上式結果如何?

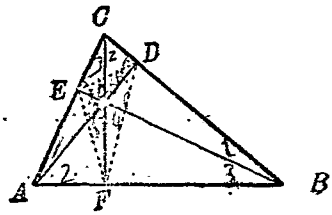
50. 過平形四邊形四頂點向形外任一直線 XY 作互相平行的線 AE, BF, CG, DH,試證



$$AE+CG=BF+DH$$

但 XY 如經過對角線交點,則上式結果如何?再 XY 如經過一頂點,則又如何?

51. 如右圖AD, BE, CF是$\triangle ABC$三邊上高，$\triangle DEF$名叫垂趾三角形．試證原三角形的垂心就是新三角形的內心．



52. 以三角形三傍心爲頂點的三角形他的垂心就是原三角形的內心．

53. 以三角形兩個傍心和一個內心爲頂點的三角形，他的垂心何在？

54. 等邊三角形的內心，外心，重心，垂心四者合而爲一，試加證明．

55. 一三角形中，其內心，外心，重心，垂心四者中有二者相合，則其餘必皆相合，試分別證明．

56. 試求三角形三傍心所成三角形中各角與原三角形各角的關係．

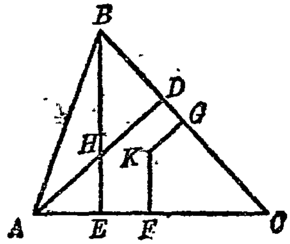
提示　宜按三角形內角和定理計算．

57. $\triangle ABC$中$AC=BC$. 在底AB上任取一點D，作線與二腰平行，相交於E及F，試證$DF+DE=AC$.

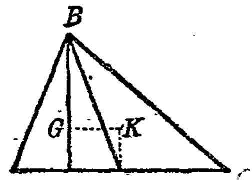
58. $\triangle ABC$爲任意三角形；AD, BE二垂線交於H；

AC, BC的垂直平分線KF,KG交於K, 試證

$$BH=2KF, AH=2KG.$$



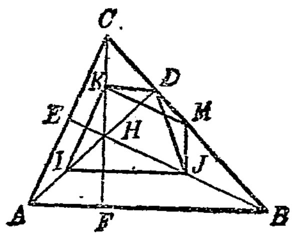
59. 試證三角形垂心外心的聯線分中線爲二段,使一段長倍於其他.



60. 試證三角形垂心, 外心, 重心三點在一直線上.

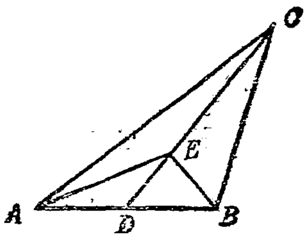
61. H爲$\triangle ABC$的垂心, I, J, K各爲HA, HB, HC的中點, M爲BC中點, 證明

$$\angle JMK+\angle JIK$$
$$=\angle JDK+\angle JIK$$
$$=2rt.\angle s.$$



62. 由中線CD上任取一點E, 聯AE, BE二線,如$\angle B>\angle A$, 則

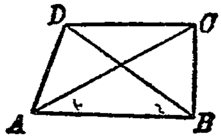
$$\therefore AE>BE.$$



如CD改作AB上的高, 結果如何?

63. 四邊形$ABCD$中，如$AD=BC$，而$\angle C<\angle D$，試證(1) $AC>BD$, (2) $\angle B>\angle A$.

64. 如梯形的二對角線相等；試證其必定是等腰梯形.

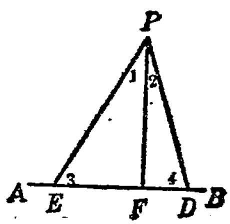


65. $\triangle ABC$ 中，$AC>AB$，在AC上取D使$AD=AB$. 證

$$\angle DBC=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C).$$

66. 右圖中 $PF\perp AB$. PD, PE 是斜交線，如 $PE>PD$，則 $EF>DF$.

再證其逆定理，并討論$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ 諸角與PD, PE, EF, DF 諸線的關係.

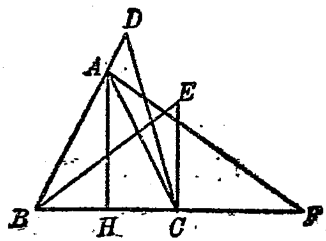


67. 右圖中$AB=AC$，試證 (a) $BD>DC$.

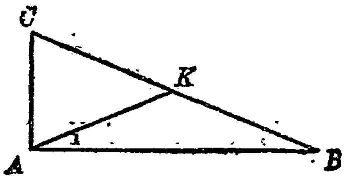
(b) $BE>EC$.

(c) $AF>AB$.

(d) $AB>AH$.



68. 右圖中 $\angle 1 = \angle B$，由此直接證明§180 的定理.



69. 延長$\triangle ABC$ 的一邊AC 到 D，使 $CD=CB$，試證

$AD > AB$.

由此題及 §180 定理，證明 §178 三角形二邊和差定理.

註　由此便可不用 §106 的幾何公理(一).

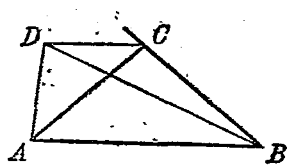
70. 證明三角形二邊的和必大於第三邊上的中線的二倍.

71. 過 $\triangle ABC$ 內任一點P，聯AP，BP，CP 交對邊於 D，E，F，試證

(1) $AD+BE+CF > \frac{1}{2}(AB+BC+CA)$，

(2) $AD+BE+CF < \frac{3}{2}(AB+BC+CA)$.

72. 上題中三線如不同過一點，則結果是否仍相同，試再證明.



73. 在$\triangle ABC$ 外角平分線上一點 D，聯DA，DB，試證 $\triangle ABD$三邊的和大於 $\triangle ABC$三邊

的和.

74. 試證自線外一點到這線上只能作二條相等而等於定長的線段.

註　由此可證圓和直線的交點至多只有二點.

75. 二三角形中，有兩邊和相對一角對應相等，而那角的對邊，不小於其他一邊，試證這二三角形是全等形.

如已知角是鈍角，上題中對邊不小於他一邊的條件，能否省去？是銳角的時候呢？

76. $\triangle ABC$ 的底邊BC長短和位置均固定，這邊上的高有定長，求頂點 A 的軌跡.

77. $\triangle ABC$ 的底邊BC長短和位置均固定，這邊上的中線有定長，求頂點 A 的軌跡.

78. 同上題，求 A 點在一與BC平行的直線移動時，這$\triangle$重心的軌跡.

79. 一長方形的底邊長短和位置均固定，求對角線交點的軌跡.

80. 一等腰梯形上下兩底有定長，而下底更有一定位置，求其對角線交點軌跡.

81. 一平行四邊形底邊長短和位置均固定，一隣邊有

定長，求其對角線交點的軌跡.

提示　注意從這交點到底邊中點的距離.

82. 二線交點很遠，不在紙上，如何去求交角的分角線.

83. 在一已知圓上，求定一點，使距另一定點的距離爲一定.

84. 在一已知圓上，求定一點，使距二已知線（相交或平行）等遠.

85. 求定一點使距二已知線等遠，又距另一已知線的距離爲定長.

86. 求作一線使過一已知點，又與一已知線成定角.

提示　如略去作已知點的條件，所得的許多線，有何種共同關係？

87. 求作一線，使過一已知點，且被二平行線所截一段的長爲一定.

88. 已知等腰三角形底邊的對角與一腰，求作這三角形.

89. 已知等腰三角形底邊的對角及一腰同底的和，求作這三角形.

提示　求$\angle 1(=\angle 2)$與已知角的關係.

90.　已知直角三角形二腰的和與一銳角，求作這三角形.

中西名詞對照表

二面角	Dihedral angle
弓形	Circular segment
上底	Upper base
下底	Lower base
三角形	Triangle
心	Center
內心	In-center
內角	Interior angle
反角	Reflex angle
公理	Axicm
中線	Median
中點	Middle poin.
內切圓	Inscribed circle
五角形	Pentagon
分角線	Angle bisector
內對角	Opposite interior angle
內錯角	Alternate interior angle
內接三角形	Inscribed triangle
外心	Circum center
外角	Exterior angle
平角	Straight angle
平面	Plane

半徑	Radius
切線	Tangent
切點	Point of contact
外邊	Exterior side
立體	Solid
平方公分	Square centimeter
正方形	Square
平分線	Bisector
正方體	Cube
平行面	Parallel planes
平行線	Parallel lines
半直線	Ray
平面形	Plane figure
可展面	Developable surface
外接圓	Circumscribed circle
四邊形	Quadrilateral
立方公分	Cubic centimeter
正多角形	Regular polygon
凸多角形	Convex polygon, Simple polygon
凹多角形	Concave polygon
平面幾何	Plane geometry
立體幾何	Solid geometry
外切三角形	Circumscribed triangle
平行四邊形	Parallelogram
同向	Same sense

仰角	Angle of elevation
劣角	Minor angle
曲面	Curved surface
曲線	Curve, Curved line
同心圓	Concentric circle
多角形	Polygon
全等形	Congruent figure
共軛角	Conjugate sngle
角	Angle
系	Corollary
定理	Theorem
定義	Definition
延線	Prolongation
折線	Broken line.
定一證法	Rule of identity
弦	Chord
股(或腰)	Legs
垂心	Orthocenter
周角	Perigon
直角	Right angle
垂直	Perpendicular
垂面	Perpendicular plane
直徑	Diameter
直線	Straight line
垂線	Perpendicular

命題	Proposition
直角柱	Right prism
直角錐	Right pyramid
直圓柱	Right cylinder
直圓錐	Right circular cone
直線形	Rectilinear figure
直接度量	Direct measurement
直接證法	Direct demonstration
直角三角形	Right triangle
垂直平分線	Perpendicular bisector
底	Base
弧	Arc
面	Surface
重心	Center of gravity
前提	Hypothesis
底線	Base line
長方形	Rectangle
長方體	Cuboid
逆定理	Converse theorem
表面積	Total surface
相似三角形	Similar triangle
高	Height
俯角	Angle of depression
扇形	Sector
閉形	Closed figure

軌跡	Locus
原點	Origin
旁心	Ex-center
旁切圓	Excribed circle
球	Sphere
異向	Different sense
梯形	Trapezoid
斜高	Slant hight
球帶	Sphere segment
頂點	Vertex
斜邊(或弦)	Hypotenuse
頂心距或(半徑)	Radius
側面積	Lateral surface
斜柱體	Slant prism
斜錐體	Slant pyramid
旋轉面	Surface of revolution
移形公理	Axiom of supposition
規矩作圖	Construction with ruler and compasses
間接度量	Indirect measurement
間接證法	Indirect demonstration
僞設證法	Rule of false position
理解幾何	Demonstrative geometry
稜	Edge
單位	Unit
鈍角	Obtuse angle

菱形	Rhombus
等圓	Equal circle
結論	Conclusion
距離	Distance
幾何原素	Geometrical element
等量公理	Axiom of equality
等腰梯形	Isosceles trapezoid
鈍角三角形	Obtuse triangle
等角多角形	Equiangular polygon
等腰三角形	Isosceles triangle
等邊三角形	Equilateral triangle
等邊多角形	Equilateral polygon
腰	Legs
圓	Circle
圓心	Center
補角	Supplementary angle
圓周	Circumference
圓周率	Ludolphian number
補隣角	Supplementary adjacent angle
實驗幾何	Experimental geometry
截線	Transversal
端點	Extremeties
輔助形	Auxiliary figure
補助線	Auxiliary lines
對角線	Diagonal

對頂角	Vertical angle
線	Line
銳角	Acute angle
餘角	Complementary angle
隣角	Adjacent angle
線段	Line segment
餘隣角	Complementary adjacent angle
數值三角	Numerical trigonometry
窮舉證法	Rule of conversion
銳角三角形	Acute triangle
點	Point
優角	Major angle
邊	Side
邊心距	Apothem
歸謬證法	Reductio ad absurdum (Reduction to absurdity)

民國二十七年十二月二十五日印刷
民國二十七年十二月三十日發行

初中幾何 上冊

定價六角四分

著作兼發行者 教育部編審會
北京中南海懷仁堂西四所

印刷所 新民印書館股份有限公司
北京阜成門外北禮士路

發行所 新民印書館股份有限公司
北京阜成門外北禮士路