

Analysis III**Arbeitsblatt 62****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 62.1. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass in M die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten x und y gibt es offene Mengen U und V mit

$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

AUFGABE 62.2.*

Zeige, dass in einem Hausdorff-Raum X jeder Punkt $x \in X$ abgeschlossen ist.

AUFGABE 62.3. Es sei X ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Zeige, dass dann auch jeder Unterraum $Y \subseteq X$ mit der induzierten Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

AUFGABE 62.4. Es sei X ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Zeige, dass es zu jeder Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit offenen Mengen U_i eine abzählbare Teilüberdeckung gibt.

AUFGABE 62.5. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Zeige, dass die Mengen

$$\{T \in \mathcal{A} \mid \mu(T) < \infty\},$$

einen Mengen-Präring, aber im Allgemeinen keine Mengen-Algebra bilden.

AUFGABE 62.6. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass durch

$$\lambda(T) := c\mu(T)$$

ein Maß auf M definiert ist.¹ Diskutiere insbesondere die Teilmengen mit $\mu(T) = \infty$.

¹Dieses Maß nennt man das mit c umskalierte Maß.

AUFGABE 62.7. Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum. Wir nennen ein Maß auf M *explosiv*, wenn es lediglich die Werte 0 und ∞ annimmt.

a) Zeige, dass (für $T \in \mathcal{A}$) durch

$$\gamma(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } T = \emptyset, \\ \infty, & \text{falls } T \neq \emptyset, \end{cases}$$

ein Maß definiert ist.

b) Es sei μ ein Maß auf (M, \mathcal{A}) . Zeige, dass durch

$$\lambda(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu(T) = 0, \\ \infty, & \text{falls } \mu(T) > 0, \end{cases}$$

ebenfalls ein Maß definiert ist.

AUFGABE 62.8. Bestimme die Belegungsfunktion zu einem Dirac-Maß.

AUFGABE 62.9. Man mache sich klar, dass die Maßtheorie auf den natürlichen Zahlen \mathbb{N} „nahezu“ äquivalent ist zur Theorie der Reihen mit nichtnegativen reellen Summanden. Warum nur nahezu? Welches maßtheoretische Konzept korrespondiert dabei zur Konvergenz der Reihe?

AUFGABE 62.10. Der Messraum $(\mathbb{N}_+, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_+))$ sei mit dem Maß versehen, bei der n den Wert $\mu(n) = \frac{1}{n}$ erhält. Bestimme für möglichst viele Teilmengen $T \subseteq \mathbb{N}_+$ den Wert $\mu(T)$.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 62.11. (4 Punkte)

Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und sei

$$f_n: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Folge von messbaren Funktionen. Zeige, dass

$$\{x \in M \mid f_n(x) \text{ konvergiert}\}$$

messbar ist.

AUFGABE 62.12. (3 Punkte)

Zeige, dass es eine abzählbare Familie von offenen Bällen im \mathbb{R}^n gibt, die eine Basis der Topologie bilden.

AUFGABE 62.13. (4 Punkte)

Es sei X ein Hausdorff-Raum und es seien $T_1, T_2 \subseteq X$ zwei disjunkte endliche Teilmengen. Zeige, dass es offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq X$ gibt mit $T_1 \subseteq U_1$, $T_2 \subseteq U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

AUFGABE 62.14. (4 Punkte)

Zeige, dass es auf jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum ein wohldefiniertes Konzept von *Borel-Mengen* gibt.

AUFGABE 62.15. (7 Punkte)

Zeige, dass die Menge der stetigen wachsenden Funktionen

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$, mit $f(\mathbb{R}_{\leq 0}) = 0$ und $f(\mathbb{R}_{\geq 1}) = 1$ überabzählbar ist.