

## Analysis I

### Vorlesung 14

#### Gleichmäßige Stetigkeit

Die Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto 1/x,$$

ist stetig. In jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}_+$  gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$ . Dabei hängt das  $\delta$  nicht nur von der Zielgenauigkeit  $\epsilon$ , sondern auch von  $x$  ab. Je kleiner  $x$  wird, desto steiler wird der Funktionsgraph und desto kleiner muss  $\delta$  gewählt werden, damit das Bild der  $\delta$ -Umgebung innerhalb der  $\epsilon$ -Umgebung von  $f(x)$  landet. Es gibt natürlich auch Funktionen, bei denen man zu jedem  $\epsilon$  ein  $\delta$  findet, dass für alle  $x$  die Stetigkeitseigenschaft sichert.

DEFINITION 14.1. Es sei  $T \subseteq \mathbb{K}$  eine Teilmenge,

$$f: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann heißt  $f$  *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle  $x, x' \in T$  mit  $d(x, x') \leq \delta$  ist  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ .

Der Unterschied zwischen stetig und gleichmäßig stetig liegt also allein in der Reihenfolge der Quantoren. Das  $\delta$ , das es in beiden Konzepten zu einem vorgegebenen  $\epsilon$  geben muss, hängt bei stetig nicht nur von  $\epsilon$ , sondern auch vom Punkt  $x$  ab, bei gleichmäßig stetig dagegen nur von  $\epsilon$ .

LEMMA 14.2. *Eine stetige Funktion*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall ist gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $f$  nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$  mit der Eigenschaft, dass es für alle  $\delta > 0$  ein Punktepaar  $x, y \in [a, b]$  mit  $|x - y| \leq \delta$  und  $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$  gibt.<sup>1</sup> Insbesondere gibt es somit für jedes  $n \in \mathbb{N}_+$  eine Punktepaar  $x_n, y_n \in [a, b]$  mit  $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$  und  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ . Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge  $x_n$  eine in  $\mathbb{R}$  konvergente Teilfolge, deren Grenzwert, nennen wir ihn  $x$ , wegen der Abgeschlossenheit zum Intervall gehören muss. Die Glieder der Teilfolge besitzen die eingangs beschriebenen Eigenschaften, deshalb können

<sup>1</sup>Von der Negation der gleichmäßigen Konvergenz her steht hier eigentlich  $> \epsilon$ , doch  $\geq \epsilon$  reicht für den anvisierten Widerspruch

wir direkt annehmen, dass die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  konvergiert. Die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nach Aufgabe 6.5 ebenfalls gegen  $x$ . Wegen der Stetigkeit konvergieren dann nach dem Folgenkriterium auch die beiden Bildfolgen  $f(x_n)$  und  $f(y_n)$  gegen  $f(x)$ . Es sei nun  $\epsilon' < \frac{\epsilon}{2}$ . Dann ist für  $n$  hinreichend groß sowohl  $|f(x_n) - f(x)| \leq \epsilon'$  als auch  $|f(y_n) - f(x)| \leq \epsilon'$ . Dies ergibt mit der Dreiecksungleichung einen Widerspruch zu  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ .  $\square$

### Fortsetzung von stetigen Funktionen

DEFINITION 14.3. Es sei  $T \subseteq \mathbb{K}$  eine Teilmenge,

$$f: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine stetige Funktion und es sei  $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \mathbb{K}$ . Dann heißt eine Abbildung

$$\tilde{f}: \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine *stetige Fortsetzung* von  $f$ , wenn  $\tilde{f}$  stetig ist und  $\tilde{f}(x) = f(x)$  für alle  $x \in T$  gilt.

Eine stetige Funktion besitzt im Allgemeinen keine stetige Fortsetzung auf einen größeren Definitionsbereich. Beispielsweise kann die auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  definierte Funktion  $x \mapsto x^{-1}$  nicht stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  ausgedehnt werden. Ferner muss eine stetige Fortsetzung (oder Ausdehnung), wenn sie denn existiert, nicht eindeutig sein. Für beide Fragestellungen ist die Existenz von Funktionslimiten in Berührungspunkten der Definitionsmenge entscheidend.

DEFINITION 14.4. Es sei  $T \subseteq \mathbb{K}$ . Ein Punkt  $x \in \mathbb{K}$  heißt *Berührungspunkt* von  $T$ , wenn es (mindestens) eine Folge  $x_n \in T$  gibt, die gegen  $x$  konvergiert.

SATZ 14.5. Es sei  $T \subseteq \mathbb{K}$  eine Teilmenge,

$$f: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine stetige Funktion und es sei  $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \mathbb{K}$ , wobei  $\tilde{T}$  aus Berührungspunkten von  $T$  bestehe. Für jedes  $a \in \tilde{T} \setminus T$  existiere der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Dann ist die durch

$$\tilde{f}(a) := \begin{cases} f(a), & \text{falls } a \in T, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & \text{falls } a \in \tilde{T} \setminus T, \end{cases}$$

definierte Abbildung eine stetige Fortsetzung von  $f$  auf  $\tilde{T}$ .

*Beweis.* Es sei  $a \in \tilde{T}$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Da  $a$  ein Berührungspunkt von  $T$  ist und da der Grenzwert von  $f$  in  $a$  existiert (bei  $a \in T$  existiert er aufgrund der Stetigkeit), gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $d(f(x), \tilde{f}(a)) \leq \epsilon/2$  für alle  $x \in T$ ,  $d(x, a) \leq \delta$ . Wir behaupten, dass die Stetigkeitsbedingung mit der Aufwandsgenauigkeit  $\delta/2$  erfüllt ist. Sei also ein  $y \in \tilde{T}$  mit  $d(y, a) \leq \delta/2$  gegeben. Es gibt ein  $x \in T$  mit  $d(x, y) \leq \delta/2$  und mit  $d(f(x), \tilde{f}(y)) \leq \epsilon/2$ .

Wegen der ersten Abschätzung und der Voraussetzung an  $y$  ist  $d(x, a) \leq \delta$ . Insgesamt ist daher

$$d(\tilde{f}(a), \tilde{f}(y)) \leq d(\tilde{f}(a), f(x)) + d(f(x), \tilde{f}(y)) \leq \epsilon.$$

□

SATZ 14.6. *Es sei  $T \subseteq \mathbb{K}$  eine Teilmenge und  $\bar{T}$  die Menge aller Berührungspunkte von  $T$ . Es sei*

$$f: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

*eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung*

$$\tilde{f}: \bar{T} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

*Beweis.* Aufgrund von Satz 14.5 genügt es zu zeigen, dass der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  für jedes  $a \in \bar{T} \setminus T$  existiert. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $T$ , die gegen  $a$  konvergiert. Wir zeigen, dass dann auch die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Da diese Bildfolge in  $\mathbb{K}$  ist, und  $\mathbb{K}$  vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass eine Cauchy-Folge vorliegt. Sei  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  gibt es ein  $\delta > 0$  derart, dass  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$  für alle  $x, x' \in T$  mit  $d(x, x') \leq \delta$  ist. Wegen der Konvergenz der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  handelt es sich nach Lemma 6.8 um eine Cauchy-Folge und daher gibt es ein  $n_0$  mit  $d(x_n, x_m) \leq \delta$  für alle  $n, m \geq n_0$ . Somit gilt

$$d(f(x_n), f(x_m)) \leq \epsilon$$

für alle  $n, m \geq n_0$ . Wir müssen nun noch zeigen, dass für jede gegen  $a$  konvergente Folge der Grenzwert der Bildfolge gleich ist. Dies ergibt sich aber sofort, wenn man für zwei Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge  $x_0, y_0, x_1, y_1, \dots$  betrachtet, die ebenfalls gegen  $a$  konvergiert, und für die der Limes der Bildfolge mit den Limiten der Teilbildfolgen übereinstimmt. □

KOROLLAR 14.7. *Es sei*

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung*

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 14.6 und aus  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ . □

## Reelle Exponentialfunktionen

Für jede positive reelle Zahl  $b$  und  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $b^n$  eine positive reelle Zahl, wobei die Potenzgesetze gelten, siehe Aufgabe 3.15. Für eine weitere natürliche Zahl  $m \in \mathbb{N}_+$  und eine positive reelle Zahl  $y$  ist  $y^{1/m}$  definiert. Für eine rationale Zahl  $q = n/m$  ist daher  $b^q = (b^n)^{1/m}$  definiert, und zwar ist dies unabhängig von der Wahl der Zähler und Nenner in der Darstellung von  $q$ , siehe Aufgabe 14.12.

LEMMA 14.8. *Es sei  $b$  eine positive reelle Zahl. Dann besitzt die Funktion*

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, q \longmapsto b^q,$$

*folgende Eigenschaften.*

- (1) *Es ist  $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$  für alle  $q, q' \in \mathbb{Q}$ .*
- (2) *Es ist  $b^{-q} = \frac{1}{b^q}$ .*
- (3) *Für  $b > 1$  und  $q > 0$  ist  $b^q > 1$ .*
- (4) *Für  $b < 1$  und  $q > 0$  ist  $b^q < 1$ .*
- (5) *Für  $b > 1$  ist  $f$  streng wachsend.*
- (6) *Für  $b < 1$  ist  $f$  streng fallend.*
- (7) *Es ist  $(b^q)^{q'} = b^{q \cdot q'}$  für alle  $q, q' \in \mathbb{Q}$ .*
- (8) *Für  $a \in \mathbb{R}_+$  ist  $(ab)^q = a^q \cdot b^q$ .*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 14.14. □

LEMMA 14.9. *Es sei  $b$  eine positive reelle Zahl. Dann ist die Funktion*

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, q \longmapsto b^q,$$

*auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Wir betrachten Intervalle der Form  $[-n, n]$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Aufgrund der Monotonie ist

$$b^q \leq m := \max(b^n, b^{-n})$$

für alle  $q \in [-n, n]$ . Sei  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Die Folge  $(b^{1/k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert nach Aufgabe 7.21 gegen 1, daher gibt es insbesondere ein  $k$  derart, dass

$$|b^{1/k} - 1| \leq \frac{\epsilon}{m}$$

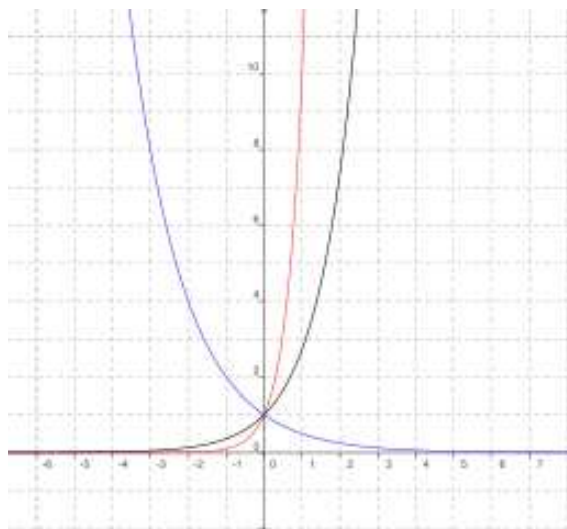
ist. Wir setzen  $\delta = 1/k$ . Dann gelten für zwei beliebige rationale Zahlen  $q, q' \in [-n, n]$  mit

$$|q' - q| \leq \delta$$

unter Verwendung der Funktionalgleichung die Abschätzungen (wir beschränken uns auf den Fall  $b \geq 1$  und  $q' \geq q$ )

$$|b^{q'} - b^q| = \left| \frac{b^{q'}}{b^q} - 1 \right| \cdot b^q \leq |b^{q'-q} - 1| \cdot m \leq \frac{\epsilon}{m} \cdot m = \epsilon.$$

□



Die Exponentialfunktionen für die Basen  $b = 10, \frac{1}{2}$  und  $e$ .

Aufgrund von Lemma 14.9 und Korollar 14.7 (mit einem beliebigen Intervall  $[-n, n]$  statt ganz  $\mathbb{Q}$ .) lassen sich die zunächst nur auf  $\mathbb{Q}$  definierten Exponentialfunktionen zu stetigen Funktionen auf den reellen Zahlen fortsetzen. In diesem Sinn ist die folgende Definition zu verstehen.

DEFINITION 14.10. Es sei  $b$  eine positive reelle Zahl. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto b^x,$$

heißt *Exponentialfunktion* zur *Basis*  $b$ .

LEMMA 14.11. *Es sei  $b$  eine positive reelle Zahl. Dann besitzt die Exponentialfunktion*

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto b^x,$$

*folgende Eigenschaften.*

- (1) *Es ist  $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$  für alle  $x, x' \in \mathbb{R}$ .*
- (2) *Es ist  $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$ .*
- (3) *Für  $b > 1$  und  $x > 0$  ist  $b^x > 1$ .*
- (4) *Für  $b < 1$  und  $x > 0$  ist  $b^x < 1$ .*
- (5) *Für  $b > 1$  ist  $f$  streng wachsend.*
- (6) *Für  $b < 1$  ist  $f$  streng fallend.*
- (7) *Es ist  $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$  für alle  $x, x' \in \mathbb{R}$ .*
- (8) *Für  $a \in \mathbb{R}_+$  ist  $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ .*

*Beweis.* Wir beweisen (1), die anderen Eigenschaften ergeben sich ähnlich, siehe Aufgabe 14.17. Es sei  $x_n$  eine rationale Folge, die gegen  $x$  konvergiert, und  $y_n$  eine rationale Folge, die gegen  $x'$  konvergiert. Dann ist nach Lemma 6.1 (1) die Folge  $x_n + y_n$  eine rationale Folge, die gegen  $x + x'$  konvergiert. Somit ist unter Verwendung der rationalen Funktionalgleichung und

von Lemma 6.1 (2) und der Stetigkeit

$$\begin{aligned} b^{x+x'} &= \lim_{n \rightarrow \infty} b^{x_n+y_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (b^{x_n} \cdot b^{y_n}) \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b^{x_n} \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b^{y_n} \right) \\ &= b^x b^{x'}. \end{aligned}$$

□

Eine besondere Rolle spielt die Exponentialfunktion zur Basis  $b = e$ . Wir werden dafür bald eine weitere Beschreibung kennenlernen, die auch für komplexe Exponenten erklärt ist.

## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Exponentials(2).svg , Autor = Benutzer HB auf Commons,  
Lizenz = CC-by-sa 3.0 5
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus  
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine  
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren  
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor  
bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias  
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und  
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7