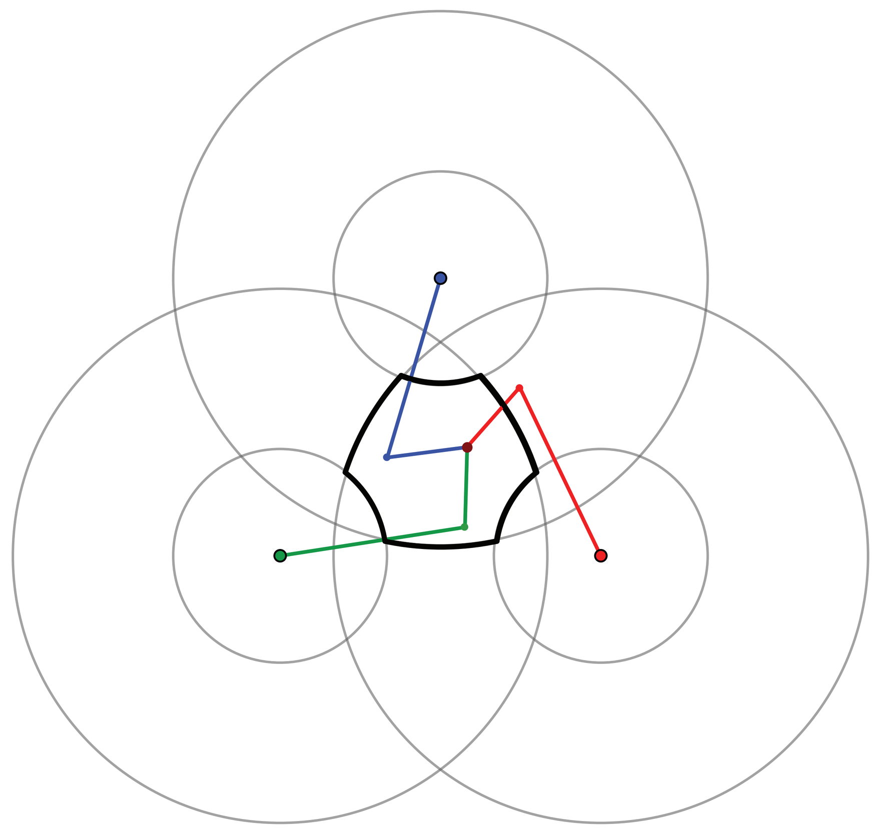
TOPOLOGIA DOS BRAÇOS ARTICULADOS

1

O espaço de configurações deste mecanismo de 6 segmentos só pode ser entendido por meio da topologia.

Em primeiro lugar é preciso perceber que o conjunto de pontos do plano acessíveis ao ponto central é um *hexágono* cujas arestas são segmentos de círculos (ver figura ao lado). Esse hexágono é a intersecção de três anéis, centrados nas articulações fixadas no quadro.

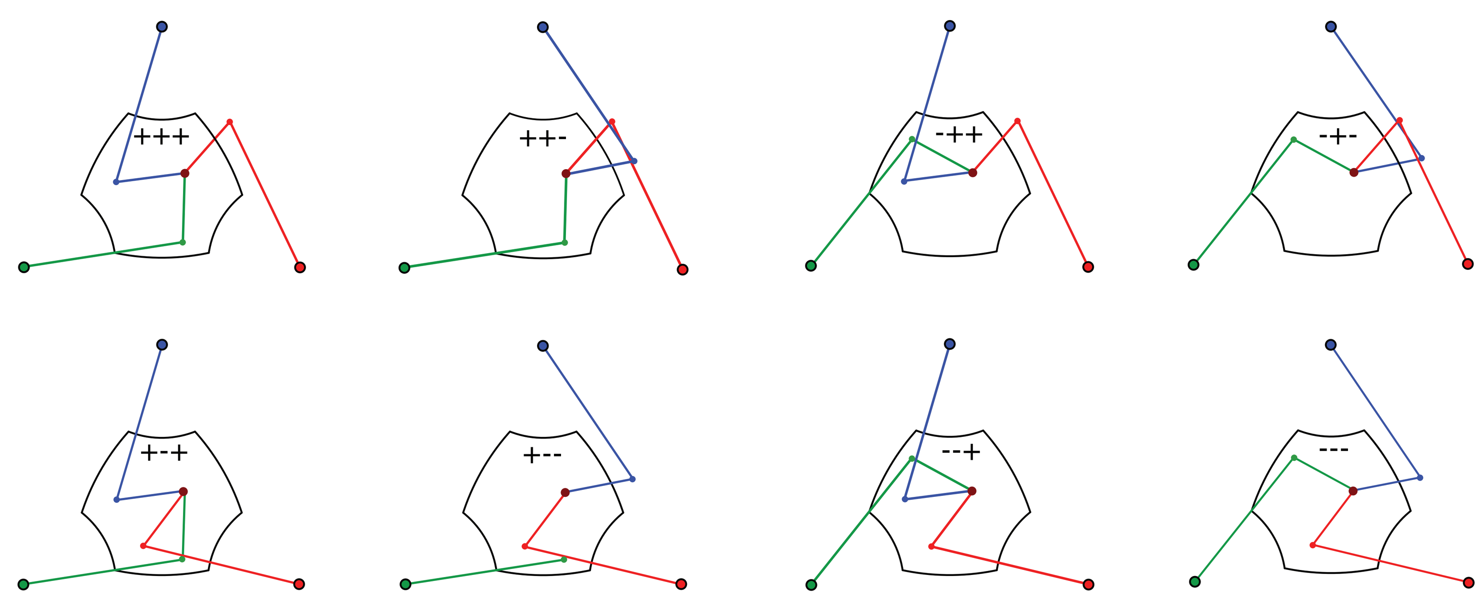
As relações de tamanhos dos braços são importantes: essa figura de pontos acessíveis pode ser um polígono com menos lados e o resultado da análise a seguir seria diferente, de acordo com as diversas possibilidades.



2

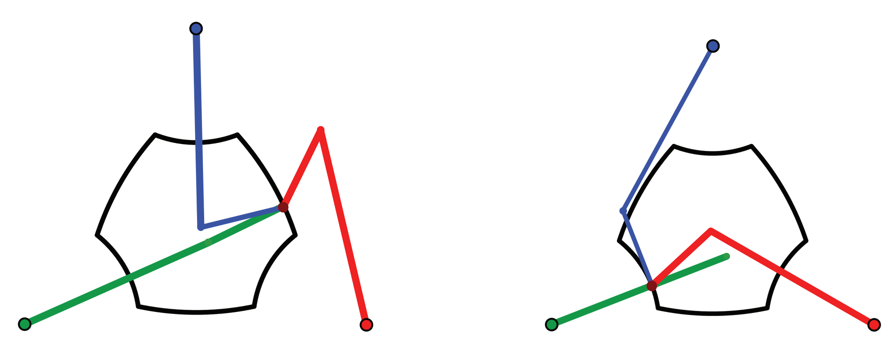
Cada ponto do interior do hexágono pode ser atingido de oito maneiras diferentes, se forem levadas em conta as posições dos três cotovelos, que indicamos por três sinais, como mostra a figura ao lado (os sinais correspondem à ordem verde-vermelho-azul).

Então o espaço de todas as configurações do mecanismo é uma *união de oito hexágonos.*



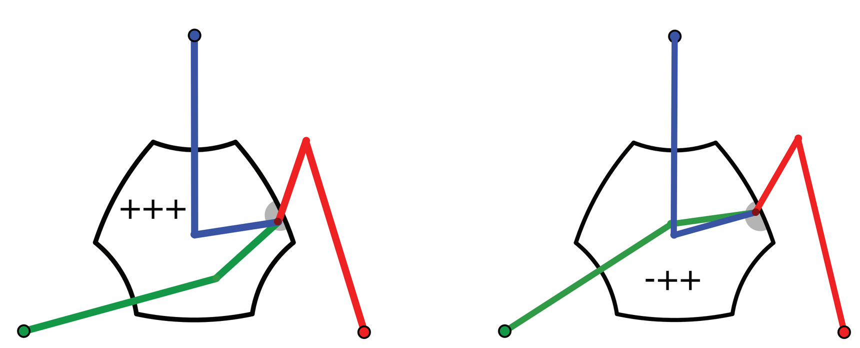
3

Os pontos nas arestas (mas não nos vértices) do hexágono só podem ser atingidos com um dos cotovelos fazendo ângulo de 0 ou 180 graus, portanto sem sinal definido. Veja na figura um exemplo com o braço verde em duas posições, que permitem ao ponto central atingir os segmentos do anel centrado no ponto verde.



4

Isto permite passar continuamente de um hexágono para outro no espaço de configurações. Na vizinhança da figura acima à esquerda podemos encontrar qualquer uma das posições vistas ao lado.



5

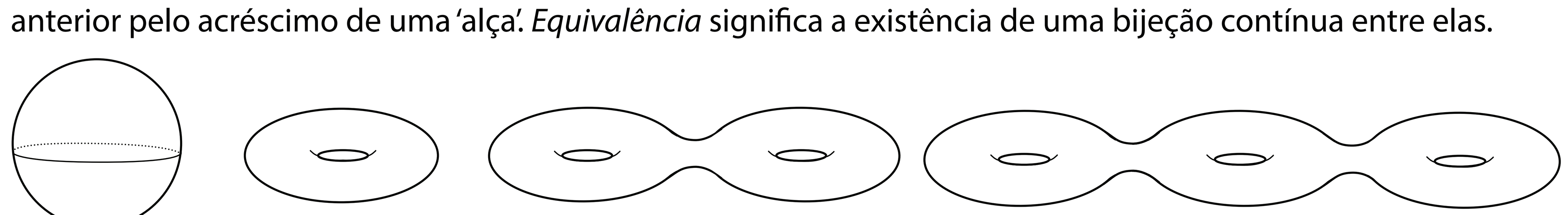
Em qualquer hexágono, sair por uma aresta significa entrar em outro hexágono. Os oito hexágonos estão colados um ao outro, definindo um espaço bidimensional que não tem bordo. É uma *variedade topológica bidimensional* ou *superfície topológica.*

6

Essa superfície, além de não ter bordo, é *orientável*. Isto porque podemos definir um sentido para os ponteiros dos relógios, por exemplo, adotando o sentido convencional sobre os oito hexágonos da maneira como estão desenhados acima, e um relógio *nunca muda de orientação ao passar de um hexágono a outro* (convença-se disso!)

7

Ora, o Teorema de Classificação das Superfícies diz que qualquer superfície orientável sem bordo é equivalente a uma das superfícies da lista infinita "esfera, toro, bitoro, tritoro, etc", cada uma delas obtida da anterior pelo acréscimo de uma 'alça'. *Equivalência* significa a existência de uma bijeção contínua entre elas.



8

Como saber que superfície é o espaço de configurações desse mecanismo?

Uma possibilidade seria ir montando o quebra-cabeça de hexágonos, ligando-os pelas arestas que eles partilham entre si. Não há jeito de fazer isso sem deformá-los bastante, e no final é bastante complicado visualizar todo o processo (ou mesmo materializá-lo!).

9

Felizmente existe outro jeito. Basta computar a *característica de Euler* da superfície. É um número que pode ser obtido por meio da divisão da superfície em regiões poligonais e que não depende de como é feita essa divisão (respeitando-se certas regras, é claro). Além disso, esse número é um *invariante:* superfícies equivalentes obrigatoriamente têm a mesma característica de Euler.

10

É simples: divida a superfície em regiões poligonais, conte o número de regiões (F), de arestas (A) e de vértices (V), e tome o número $F - A + V$. Por exemplo, faça isso com qualquer poliedro convexo e o resultado será igual a 2. É que esses poliedros nada mais são do que diferentes maneiras de dividir a *esfera* em regiões poligonais, e 2 é a característica de Euler da esfera.

A característica de Euler do toro é 0, a do bitoro é -2, a do tritoro é -4, etc. Cada alça acrescentada a diminui de duas unidades. Como os valores não se repetem nessa lista, se computarmos a característica de Euler de nossa superfície de oito hexágonos saberemos exatamente de qual delas se trata.

11

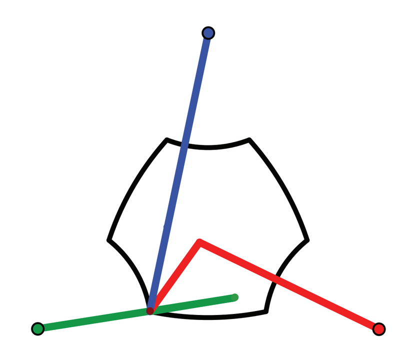
Veja que os oito hexágonos já fazem o papel da tal divisão poligonal da superfície. Portanto já temos $F = 8$.

Quantas arestas temos? Cada um dos oito hexágonos tem seis, logo são 48, mas assim estamos contando cada aresta duas vezes, pois cada uma bordeia dois dos hexágonos. Então $A = 48/2 = 24$.

Falta contarmos os vértices. Eles são 48, pela contagem nos oito hexágonos, mas precisamos saber quantas vezes estamos contando cada vértice, para obtermos o número correto.

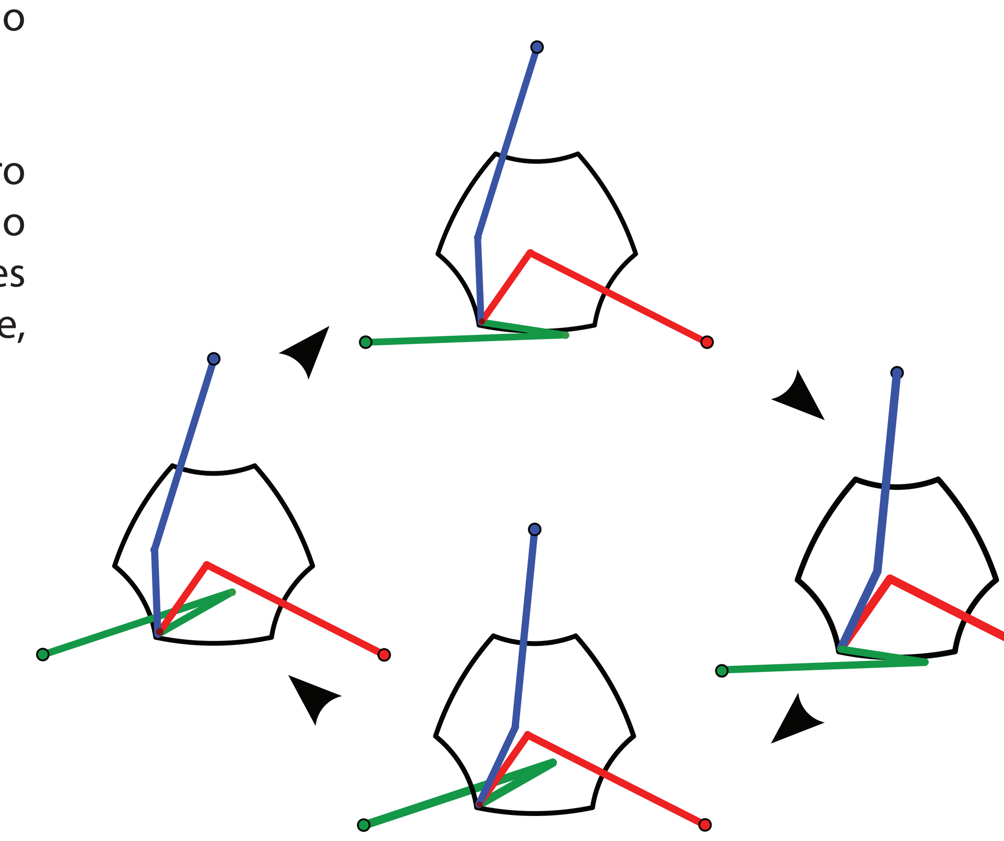
12

Como os vértices dos hexágonos são encontros de arestas, toda vez que um deles é atingido apenas um dos cotovelos tem sinal definido, como mostra a figura ao lado (em que o cotovelo vermelho tem sinal definido e o azul e o verde não).



A vizinhança desse vértice intersecta quatro dos hexágonos. Pois cada um dos dois cotovelos sem sinal definido por ser dobrado de duas maneiras.

Na figura abaixo mostramos esses quatro possíveis desdobramentos. Passando continuamente pelas quatro posições mostradas e evitando-se o próprio vértice, dá-se uma volta completa em torno dele.



13

Ou seja, em cada vértice incidem quatro hexágonos e a contagem de 48 tem que ser dividida por 4 para dar o número correto.

Portanto, $V = 12$ e a característica de Euler resulta igual a -4.

Concluímos, finalmente, que o espaço de configurações do mecanismo é um tritoro!

matemateca
IMEUSP