

## Einführung in die mathematische Logik

### Arbeitsblatt 26

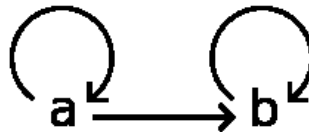
### Übungsaufgaben

AUFGABE 26.1. Für die Aussagenvariablen  $p, q, r$  gelte

$$a \models \neg p, q, r \text{ und } b \models \neg p, \neg q, r.$$

Bestimme in beiden Weltpunkten die Wahrheitswerte von

- (1)  $p \rightarrow \Box r$ ,
- (2)  $\Box q \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(r \wedge p))$ ,
- (3)  $(p \vee \Box \Box r) \rightarrow \Diamond r$ ,
- (4)  $\Diamond \Box \neg q \rightarrow (\Box \Diamond r \vee \neg p)$ .



AUFGABE 26.2. Definiere die modallogische Verschachtelungstiefe für modallogische Ausdrücke.

AUFGABE 26.3. Zeige, dass bei einer Belegung der Aussagenvariablen durch die Definition 26.2 der Wahrheitswert für jeden modallogischen Ausdruck in jedem Punkt eines modallogischen Modelles eindeutig festgelegt ist.

AUFGABE 26.4. Es sei  $(M, R)$  der trivale Graph in dem Sinne, dass  $M$  einpunktig ist und dieser Punkt mit sich in Relation steht. Zeige, dass

$$(M, R) \models \alpha$$

genau dann bei jeder Belegung gilt, wenn  $\alpha$  nicht paradox ist.

AUFGABE 26.5. Zeige durch Angabe eines modallogischen Modelles, dass im  $K$ -System der Ausdruck

$$\Box(p \vee q) \rightarrow \Box p \vee \Box q$$

nicht ableitbar ist.

AUFGABE 26.6. Zeige durch Angabe eines modallogischen Modelles, dass im  $K$ -System der Ausdruck

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$$

nicht ableitbar ist. Insbesondere lässt sich also Lemma 24.5 (1) nicht internalisieren.

AUFGABE 26.7. Zeige durch Angabe eines modallogischen Modelles, dass im  $K$ -System der Ausdruck

$$(\Box\alpha \rightarrow \Box\beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\beta)$$

nicht ableitbar ist.

AUFGABE 26.8. Zeige durch Angabe eines modallogischen Modelles, dass im  $K$ -System der Ausdruck

$$(\Box\alpha \rightarrow \Box\beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

nicht ableitbar ist.

AUFGABE 26.9. Zeige durch Angabe eines modallogischen Modelles, dass im  $K$ -System der Ausdruck

$$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

nicht ableitbar ist.

AUFGABE 26.10. Zeige durch Angabe eines modallogischen Modelles, dass das System S4 nicht äquivalent zum System S5 ist.

AUFGABE 26.11. Seien  $r \in \mathbb{N}$ . Charakterisiere das modallogische Axiomenschema

$$\vdash \alpha \leftrightarrow \Diamond^r \alpha$$

graphentheoretisch.

AUFGABE 26.12. Seien  $r, s \in \mathbb{N}$ . Charakterisiere das modallogische Axiomenschema

$$\vdash \Diamond^r \alpha \rightarrow \Diamond^s \alpha$$

graphentheoretisch.

### Aufgaben zum Abgeben

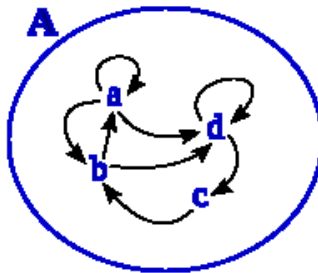
AUFGABE 26.13. (6 Punkte)

Für die Aussagenvariablen  $p, q, r$  gelte

$$a \models \neg p, q, \neg r, b \models \neg p, \neg q, r, c \models \neg p, \neg q, r, d \models p, q, r.$$

Bestimme in den vier Weltpunkten die Wahrheitswerte von

- (1)  $\Diamond q \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(r \wedge p))$ ,
- (2)  $(p \vee \Box\Box\neg r) \rightarrow \Diamond(\neg p \rightarrow r)$ ,
- (3)  $\Box\Diamond\Box\neg q \rightarrow (\Box\Diamond r \vee \neg p)$ .



AUFGABE 26.14. (2 Punkte)

Zeige durch Angabe eines modallogischen Modelles, dass im  $K$ -System der Ausdruck

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\beta)$$

nicht ableitbar ist.

AUFGABE 26.15. (5 Punkte)

Zeige die folgenden modelltheoretischen Charakterisierungen für modallogische Axiomenschemata.

- (1) In einem gerichteten Graphen  $(M, R)$  gilt das Leerheitsaxiom genau dann, wenn die Relation  $R$  leer ist (wenn es also gar keine Pfeile gibt).
- (2) In einem gerichteten Graphen  $(M, R)$  gilt das Autismusaxiom genau dann, wenn  $R$  nur aus Schleifen besteht.
- (3) In einem gerichteten Graphen  $(M, R)$  gilt das Fatalismusaxiom genau dann, wenn  $R$  genau aus allen Schleifen besteht.
- (4) In einem gerichteten Graphen  $(M, R)$  gilt das Phantasiearmutsaxiom genau dann, wenn von jedem Punkt höchstens ein Pfeil ausgeht.
- (5) In einem gerichteten Graphen  $(M, R)$  gilt das Ideologieaxiom genau dann, wenn von jedem Punkt genau ein Pfeil ausgeht.



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Baby Category 2.svg , Autor = Benutzer Melikamp auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	1
Quelle = Relación binaria 01.svg , Autor = Benutzer HiTe auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	3