Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 16

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 16.1. Zeige, dass zu einem K-Vektorraum V mit Dualraum V^* die Auswertungsabbildung

$$V \times V^* \longrightarrow K,\, (v,f) \longmapsto f(v),$$

bilinear ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 16.2. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+3i & 5-i \\ 3-2i & 4+i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16.3. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16.4. Zeige durch Induktion, dass bei einer oberen Dreiecksmatrix die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist.

Aufgabe 16.5. Zeige durch Induktion, dass bei einer unteren Dreiecksmatrix die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist.

Aufgabe 16.6. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass φ multilinear und alternierend ist.

Aufgabe 16.7. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Multiplikation

$$K \times K = K^2 \longrightarrow K,\, (a,b) \longmapsto a \cdot b,$$

multilinear ist. Ist sie alternierend?

Aufgabe 16.8. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Abbildung

$$K^n \times K^n \longrightarrow K, \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto (u_1, \ldots, u_n) \circ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

multilinear ist.

Aufgabe 16.9. Überprüfe die Multilinearität und die Eigenschaft, alternierend zu sein, direkt für die Determinante von 2×2-Matrizen.

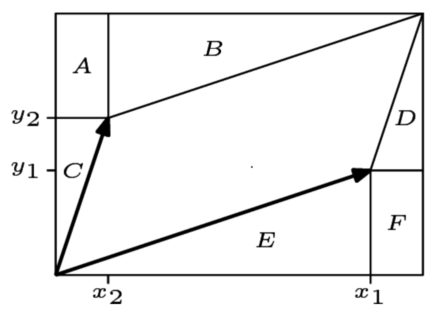
Aufgabe 16.10. Überprüfe die Multilinearität und die Eigenschaft, alternierend zu sein, direkt für die Determinante von 3×3-Matrizen.

Aufgabe 16.11. Zeige, dass für jede Elementarmatrix E die Beziehung

$$\det E = \det E^{\text{tr}}$$

gilt.

Aufgabe 16.12.*



Man mache sich anhand des Bildes klar, dass zu zwei Vektoren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Determinante der durch die Vektoren definierten 2×2-Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.

Aufgabe 16.13. Sei $z \in \mathbb{C}$ und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \, w \longmapsto zw,$$

die zugehörige Multiplikation. Bestimme die Determinante dieser Abbildung, wenn man sie als reell-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffasst.

Aufgabe 16.14. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K. Es sei

$$\Phi \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

eine multilineare Abbildung und es seien $v_{1j}, \ldots, v_{m_j j} \in V_j$ und $a_{ij} \in K$. Zeige

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{m_1} a_{i1} v_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{m_n} a_{in} v_{in}\right) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,m_1\}\times\cdots\times\{1,\ldots,m_n\}} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \Phi\left(v_{i_1 1}, \ldots, v_{i_n n}\right).$$

Aufgabe 16.15. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K. Es seien v_{i_j}, $i_j \in I_j$, Erzeugendensysteme von V_j, $j = 1, \ldots, n$. Zeige, dass eine multilineare Abbildung

$$\triangle \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

durch

$$\triangle(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$$

festgelegt ist.

Aufgabe 16.16. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\triangle \colon V \times V \longrightarrow K$$

eine multilineare und alternierende Abbildung. Es seien $u, v, w \in V$. Ziehe in

$$\triangle \begin{pmatrix} u + 2v \\ v + 3w \end{pmatrix}$$

Summen und Skalare nach außen und vereinfache.

Aufgabe 16.17. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Mat}_2(K) \longrightarrow K, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad + cb,$$

multilinear ist, aber nicht alternierend.

Aufgabe 16.18. Es sei K ein Körper. Ist die Abbildung

$$\operatorname{Mat}_2(K) \longrightarrow K, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ac - bd,$$

multilinear in den Zeilen? In den Spalten?

Aufgabe 16.19. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

für beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ und beliebige $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \in K^n$, für $u \in K^n$ und für $\lambda \in K$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \lambda u \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ u \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16.20. Es sei M eine quadratische Matrix, die man als

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A, B und D schreiben kann. Zeige

$$\det M = \det A \cdot \det D.$$

Aufgabe 16.21.*

Es sei M eine quadratische Matrix, die man als

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A, B, C und D schreiben kann. Zeige durch ein Beispiel, dass die Beziehung

$$\det M = \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C$$

im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 16.22. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Untersuche die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \times V \longrightarrow W,\ (\varphi, v) \longmapsto \varphi(v),$$

auf Multilinearität.

Aufgabe 16.23. Es sei K ein Körper, es seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K und es sei

$$\Phi\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

eine multilineare Abbildung. Zeige, dass die Menge

$$\{(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n \mid \Phi(v_1, \ldots, v_n) = 0\}$$

im Allgemeinen kein Untervektorraum von $V_1 \times \cdots \times V_n$ ist.

Aufgabe 16.24. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K. Zeige, dass die Menge aller multilinearen Abbildungen, die mit $\operatorname{Mult}_K(V_1, \ldots, V_n, W)$ bezeichnet wird, in natürlicher Weise ein Vektorraum ist.

Aufgabe 16.25. Es sei K ein Körper, seien V und W Vektorräume über K und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge aller alternierenden Abbildungen, die mit $\operatorname{Alt}_K^n(V, W)$ bezeichnet wird, in natürlicher Weise ein Untervektorraum von $\operatorname{Mult}_K(V, \ldots, V, W)$ (wobei der Vektorraum V n-fach auftritt) ist.

Aufgabe 16.26. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung und es sei

$$\triangle\colon W^m \longrightarrow K$$

eine multilineare Abbildung. Zeige, dass dann auch die verknüpfte Abbildung

$$V^m \longrightarrow K,\ (v_1, \ldots, v_m) \longmapsto \triangle(\varphi(v_1),\ \ldots,\ \varphi(v_m)),$$

multilinear ist. Zeige ebenfalls, dass wenn $\triangle$ alternierend ist, dass dann auch $\triangle \circ \varphi^n$ alternierend ist, und dass hiervon bei φ bijektiv auch die Umkehrung gilt.

Aufgabe 16.27. Berechne zur (komplexen) Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1+i & 2i & 3 \\ 0 & 1-i & -1+3i \\ 4-i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Determinante und die inverse Matrix.

Aufgabe 16.28.*

Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2+x & -x \\ -x^3+2x^2+5x-1 & x^2-x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.29. (2 Punkte)

Es sei $M \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{Q})$. Zeige, dass es egal ist, ob man die Determinante in $\mathbb{Q}$, in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ ausrechnet.

Aufgabe 16.30. (2 Punkte)

Berechne die Determinanten der Elementarmatrizen.

Aufgabe 16.31. (3 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+i & 3-2i & 5 \\ i & 1 & 3-i \\ 2i & -4-i & 2+i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16.32. (3 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16.33. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\triangle\colon V \times V \times V \longrightarrow K$$

eine multilineare und alternierende Abbildung. Es seien $u, v, w, z \in V$. Ziehe in

$$\triangle \begin{pmatrix} u+v+w \\ 2u+3z \\ 4w-5z \end{pmatrix}$$

Summen und Skalare nach außen und vereinfache.

Aufgabe 16.34. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi_i\colon V_i \longrightarrow K$$

($i = 1, \ldots, n$), lineare Abbildungen. Zeige, dass dann die Abbildung

$$\varphi\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow K,\ (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \varphi_1(v_1) \cdots \varphi_n(v_n),$$

multilinear ist.