始

伊藤徳之助著

ベクトル解析

1929

岩波書店刊行

はしがき

ベクトルと名づける幾何學的の概念,或はベクトルによつて表はせる物理學的概念の研究をするベクトル解析法は,その主眼とする點の相違,用ゐる符號の差異,符號を結合する法則の異同によつて,今日種々の系統流派が存在し,又生まれやうとしてゐる。

然し多くのベクトル解析法を大別すれば,主として幾何學的の立場に據るものと,代數學的の見地に立つものとの二つに別けることができる。前者は主として點,線,面等といふ幾何的概念の空間的性質に重きをおき,後者は取り扱ふ概念の代數的性質に着眼する。

幾何學的の系統は Möbius の Barycentrisches Calcul, Grassmann の Ausdehnungslehre の流を汲むものであつて,純粋の幾何學としては Study の Geometrie der Dynamen 或は Saussure, Cailler 等の幾何,ベクトル解析として Föppl, Abraham, Bucherer, Fischer, Ignatowsky, Gans, Valentiner, Runge 等の著書主としてドイツ系統のものを擧げることができる。

今世紀に到りイタリアの Burali-Forti 及び Marcolongo が研究したベクトル解析もこの系統に屬するものと云へる。然し彼等はベクトル一次函數としては Hamilton の影響をうけついで, Gibbs の Dyadic の代りに Omografie を創始した。

一方代數學的のものはイギリスの Hamilton 先生の Quaternion の研究に端を發し, Clifford の Biquaternion, Peirce の Linear Associative Algebra, Macaulay の Multenion, Combébiac の Triquaternion の傾向を辿

るもので,イギリスの Heaviside の電磁氣學に於ける應用より,アメリカの Gibbs の Dyadic の理論の發展は寔に眼覺ましいものである。

この方面の新らしい研究としては Gibbs の高弟 Wilson と Lewis の相對性理論に於ける發展及びオーストラリアの Weatherburn の積分方程式並びに四次元空間のベクトルの研究は忘れることができない。

元來數個の自變數に關する數學上の問題は,ベクトル解析の問題となり得るのであるから,解析幾何の如きはベクトル解析の一部分と考へられる。從つて三次元空間に於いて三つの坐標軸を用ゐる Descartes の方法は,軈てベクトルに解析法の誕生を告げるものである。[1]

然しベクトルを或る特殊な坐標を用ゐて成分にわけることをさけて,直接に扱ふ解析法が必要であることが識者の間に認められてゐたけれども長い間成功しなかつた。

Newton 先生とともに微積分學の鼻祖と崇められる Leibniz[2] も 1679 年の頃幾何學の定理に一種の記號を用ゐる觀念を抱いたらしいけれども,近代の意味に於ける解析法には遂に成功しなかつた。

數の概念が整數分數無理數と次第に發展し,漸く第十六世紀の中葉に及んでイタリアの Cardano の三次方程式の解に虛數が表はれるに到つたが,當時に於いてはかゝる數は無意味なものであ

1) 旣に紀元前第三世紀 Apollonius は坐標の考を有し, Fermat も 1636 年九月十二日 Roberval に送つた手紙で同じ考をもつてゐたことが知られる。
2) Mathematische Schriften, Berlin, 1850 Bd II, Abt. 1, S. 20.

り,實用上役に立つとは夢想だにしなかつた。

複素數を平面內のベクトルで表はす方法は,初めてデンマークの測量家 Wessel によつて 1797 年に發見された。[1] これが抑近代的ベクトル解析法の曙光であらう。これと同じ方法が後にフランスの Argand[2] 及びドイツの Gauss[3] によつて研究されたのが,今日 Argand の名で知られてゐる方法である。

共面ベクトルによつて複素數を表はすこの方法は,複素數の理論に於いて極めて重要なもので,今尙ほ交流理論等の應用に役立つものであるけれども,同時に實數なるベクトル量の理論も複素數によらなければならないといふ誤つた觀念を深く植ゑつけた。

Wessel は平面內の問題に限らず,更に三次元の空間に於いて方向ある線分によつて,超越數を表はさうと試みたが成功しなかつた。もしこの考が一層發展したら Hamilton に先だつこと半世紀既に Quaternion を發見したであらう。

1813 年に到り Servois は三次元空間の方向ある線分は,超越數の一種を定義するといふ問題を考へたが,惜しくも解決を得ないで了つた。かくて Bellavitis の Calcolo delle Equipollenze の考案をへて,遂に偉大なる Hamilton 先生によつてその解決がつけられ,今日のベクトル解析法の芽が萠え初めた。

William Rowan Hamilton 先生は 1805 年八月四日 Dublin 市に呱々の聲を擧げた。十九歲にして Trinity College に入學し,すばらしい數學的才能の閃き,未だ業を卒へない中に旣に Dublin 大學の星學

1) Om Directiones analytiske Betejning, 1797.
2) Essai sur une manière de représentation des quantités imaginaires dans les constructions géométriques, 1806.
3) Theoria residuorum biquadraticum, 1831.

教授の椅子に就くことさへ薦められた程であつた。1837 年には Royal British Academy の會長に任ぜられ,1865 年九月二日死に到る迄の數學上の功積は今更言ふ迄もない。

嚴正な科學の研究にあたり成見を抱くことは大きな誤を惹き起すもとになり易い,只一個の機械と化し,少しも自己を交へずに自然の現象に接しなければならないことは疑ないことであり乍ら,しかもすぐれた科學者の直觀が如何に屢偉大な發見を齎らすかは,科學の歴史に徴して明かである。これは非凡の才を俟つてはじめてなされることで,凡庸の徒の企て及ぶところではない。

Hamilton 先生の Quaternion の發見も,全く思ひもよらぬ不時の出來事であつた。1843 年十月十六日,學會の會合に出席する途上,偶々 Royal Canal の岸を急ぐ時に,不圖胸に閃いた光こそ Quaternion 解決の鑰となつた。その日の會合の席上,その豫想を述べ,次の會合の十一月十三日を期してその發表を約した。[1] かくてし數年の間にその問題は發展し,1853 年 ,,Lectures on Quaternions" として Dublin で上梓され,更に先生の歿後 1866 年 London に於いて ,,Elements of Qurternions" が發見された。

これよりさき 1827 年 Möbius は,空間に於ける點を他の點から, ,,Addition" と稱する演算によつて誘導する方法を發表して Barycentrisches Calcul と名づけ幾多の幾何學の問題に應用した。この Addition は, Hamilton 先生とともにベクトル解析の祖述者として崇むべき Hermann Günther Grassmann 先生によつて發展された。

先生は 1809 年四月十五日 Stettin に生れ, 1877 年同地で生を終

1) On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions.

へる迄,身は僅に同地の高等學校の教師にすぎなかつたけれども,その業蹟たるや赫々たるものである。

1844 年八月 ,,Die Lineare Ausdehnungslehre" の初版は Leipzig で發行された。それには幾何學的實體を他の幾何學的實體から導くいくつかの ,,Multiplikation" と名づける演算が用ゐられてゐる。對稱的,圓狀,線狀;—線狀には代數的及び外面的,更にこの後者には進化的及び退化的,その二つから導く内面的等と名づける Multiplikation の演算によつて研究を進める。

ベクトル解析に於いて乘積と名づける觀念,從つて Multiplikation といふ演算を考へる點に著るしい特徴が見出される。

元來ベクトル量は三つのスカラー量 (x, y, z) の一組として表はされる。この一組を形づくる x, y, z は物理的には當然のことであるが,數學的にも同じ元の量であることは暗に認められてゐる。是等の量が同じ元の量でなければ,乘積の意味が不明になつて了ふことが多い。この乘積は勝手に幾通りでも作ることができるが,その意義が坐標軸の解析の撰み方に依存するやうなものならば,解析すべてが或る特殊の坐標軸を離れて單獨には意味のないものとなる。さうでないためには,乘積の定義を表はす式が,特殊な軸の一組に無關係であるやうに撰ばなければならない。或る坐標軸の變換に際し,夫等の式の一組が不變 (Invariant) であるやうにすればベクトル解析法の或る系統を得る。

一般相對性原理への應用に於いて勝れた業蹟を示したオランダの Schouten (スハウテン)のベクトル解析法はこの見解に基づいて發展したものであるが,數學的には立派な方法乍ら,物理學徒にとつては餘りに數理に捕はれて,直接自然の問題に應用するには

迂遠な路を辿るやうに思はれる。

Grassmann 先生の Ausdehnungslehre も亦その憾がある。先生の考は,空間の射影的變換により密接に關聯してゐるので,數量的應用には些間接になりすぎる。卽ち直接に距離,角度,面積などを用ふる代りに多くは複分,點,線,面によつて表はすやうになる。

Hamilton 先生の Quaternion は二つのベクトルの商として定義されるが,つまりスカラー量とベクトル量との和の一種である。この二つの系統の批評は Gibbs が Nature の誌上[1]に悉しく論じてゐる。

要するに Hamilton の方法も, Grasmann の系統も,そのまゝ物理學の問題に直接應用するには餘りに一般的であり複雜にすぎる。今日でも Shaw の如き, Quaternion が實用上竝びに理論上最も簡單であつて,他のベクトル解析法は畢竟 "Short hand" のやうなものであると難じてゐるけれども,これには反對せざるを得ない。

物理學竝びにその應用する諸科學に於けるベクトル量及びスカラー量に含まれる概念は, Hamiltonや Grassmann の理論に於ける夫等の量よりも遙に簡單なものである。そのために自然の現象に適切にかなふ方法を覓めて現在のベクトル解析法が發展を遂げた以上,何の必要あつて徒に複雜なものに還る必要があらう。すなはち主としてドイツでは Grassmann の研究の跡を辿つて今日のベクトル解析法に達し,一方イギリスにては Haviside, アメリカにては Gibbs が Hamilton の Quaternion を出でてベクトル解析法を大成したのである。

Yale 大學教授 Josiah Willard Gibbs はアメリカには珍らしい

1) Nature, (1891) Vol. 43, Vol. 44; (1892) Vol. 47; (1893) Vol. 48.

理論物理学
実験物理学

理論物理學者であつた。先生の統計力學に於ける功獻,電磁光學に於ける研究は,今日に到つても尙ほ燦然として輝いてゐる。Quaternion, Ausdehnungslehre の荊棘を拓いて,容易いベクトル解析の路に導いたのも先生である。

當時イギリスの電氣學者 Oliver Heaviside は Quaternion の方法の煩はしさを除くために,獨特のベクトル解析法を硏鑽し, Gibbs のものと全く同じ方法を編み出してゐたが,偶々 Gibbs の小冊子を手にして心から推賞してやまなかつた。Hamilton の高弟 Tait が Gibbs の方法に苛酷な批評を施したのに對して, Heaviside の投げた辛辣な皮肉は,彼の不朽の名著 "Electromagnetic Theory" の中に窺はれる。

三次元のベクトルの解析法はかくして歸趨が定まつた秋,今世紀の初め Einstein の相對性原理が生まれるとともに,新な研究の部門が展開した。

Minkowski の四次元時空の世界に對する方法は, Cayley の Matrix 解析の流を汲むものであつて,それとともに續いで多くの四元ベクトルに對する解析が試みられるやうになつた。

Abraham,[1] Sommerfeld,[2] Lewis,[3] Frank,[4] Laue[5] の四次元世界に對するベクトル解析法は,三次元の空間のベクトルと同樣な推理を試み,四元及び六元ベクトルの概念を導き,遂に Lewis 及び Wilson[6]

1) Sull' elektrodinamica di Minkowski, 1910.
2) Zur Relativitätstheorie, 1910.
3) On four dimensional vectoranalysis, 1910.
4) Verhalten der elektromagnetischen Feldgleichungen gegenüber linearen Transformationen der Raumzeitkoordinaten, 1911.
5) Das Relativitätsprizip, 1911.
6) The Space-time manifold of relativity, 1912.

が完成するに到つた。後には Jahnke[1] はベクトル竝びに dyadic の理論をつくり, Ausdehnungslehre との關係を論じた。

Waelsch[2] は四次元世界に於ける Binäranalyse を組述して Quaternion 及び四次元世界に於ける球函數の關係を導き,新な系統を樹てた。

然し 1916年一般相對性原理により重力に對する新らしい解釋が起るとともに, Euclid 或は Lobachewski の空間を去つて Riemann の空間に於けるベクトルの研究をしなければならなかつた。加ふるに一般相對論の定理は,任意の變換に對して共變 (Covariant) でなければならないために,再び坐標軸を用ゐる方法を採り,直接にベクトル量を扱ふ解析が得られなかつた。Einstein, Grossmann 等はベクトルの用語を用ゐたとはいへ, Levi-Cività 及び Ricci の絶對微分學が成分を扱ふに留まつてベクトル量に直接即した扱ひ方でないために,一般相對性原理の數學が益々難しいものとなつた。この方面の研究者として Fokker, Shaw, Jung 等の名を擧げることができる。

遂に Schouten[3] はこの空間に於けるベクトル解析を構成することは乘積を定義するのが困難なのではなく微分の意義であることを悟り,新に ,, Geodetisch Mitbewegtes Koordinatensystem " と理想ベクトルの乘積 ,, Produkt idealer Vektoren " といふ二つの概念を導くことによつて,解析法を完成し, Weyl の理論への進展を示した。又別に Weatherburn は Matrix 及び Dyadic の方法によつて四元

1) Zur Theorie der vierdimensionalen Vektoren und Dyaden, 1917.
2) Binäranalyse des vierdimensionalen Raumes, 1916.
3) Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, 1919.

ベクトルの解析を論じてゐる。

行き暮れて惱む野路のはてに,思はぬ朽葉がくれの足跡を見出でる喜にも似て,學者の不斷の精進により,日に新に荆棘はひらかれてゆく。

昭和三年八月

草香江の里にて

伊藤德之助

目　次

第一編　ベクトル

第一章　ベクトルとスカラー

§1.1　ベクトル量とスカラー量 1
§1.2　極性ベクトルと軸性ベクトル 2
§2.1　ベクトル量の表はし方 4
§3.1　等しいベクトル 5
§3.2　負のベクトル 6
§3.3　自由ベクトルと束縛ベクトル 6
§4.1　ベクトルの加法 7
§4.2　ベクトルの減法 9
§4.3　Lami の定理とベクトル多邊形 10
§4.4　例題 11
§5.1　ベクトル量とスカラー量の積 12
§5.2　單位ベクトルと率 14
§5.3　逆ベクトル 14
§6.1　ベクトルの誘導 15
§6.2　共面ベクトルの誘導 15
§6.3　共面でないベクトルの誘導 17
§6.4　成分と分ベクトル 18
§7.1　基本ベクトル 19
§7.2　直角成分 20

*印をつけた節は後に廻して研究せらるべし

§7.3 等しいベクトルと成分 …… 21
§7.4 合ベクトルの成分 …… 22
§7.5 單位ベクトルの成分 …… 23
§7.6 例題 …… 25

第二章　ベクトルの積

§8.1 スカラー積 …… 34
§8.2 例題 …… 39
§8.3* 斜交軸 …… 42
§9.1 ベクトル積 …… 43
§9.2 ベクトル積の直角成分 …… 47
§9.3 例題 …… 48
§10.1 能率 …… 51
§10.2 直線に關する能率 …… 53
§11.0 三つのベクトルの積 …… 54
§11.1 スカラー立方積 …… 54
§11.2 ベクトル立方積 …… 59
§11.3 例題 …… 64
§12.1 相逆系 …… 66

第三章　ベクトルの微分

§13.1 ベクトルの微分 …… 71
§13.2 スカラー變數に關する微分 …… 71
§13.3 ベクトルの和の微分 …… 72
§13.4 スカラー量との積の微分 …… 72

§14.1 スカラー積の微分 …… 74
§14.2 ベクトル積の微分 …… 74
§14.3 例題 …… 74
§14.4 Taylorの級數 …… 76

第四章　空間曲線

§15.1* 空間曲線 …… 76
§15.2* 切線ベクトル …… 77
§15.3* 法平面 …… 78
§15.4* 曲率 …… 79
§15.5* 主法線 …… 80
§15.6* 副法線 …… 81
§15.7* 切觸平面 …… 82
§15.8* 歪率 …… 83
§15.9* Fresnet の公式 …… 84

第五章　ベクトルの積分

§16.1 ベクトルの定積分 …… 92
§16.2 ベクトルの不定積分 …… 94
§16.3 積分の公式 …… 96
§16.4 線積分 …… 97
§16.5 面積分 …… 98

第六章　運動學

§17.1 運動と變位 …… 99

§17.2 速度 …… 101
§17.3 加速度 …… 106
§17.4 ホドグラフ …… 110
§17.5 不變加速度運動 …… 113
§17.6 相對運動 …… 114
§17.7 面積速度 …… 118

第七章 質點の力學

§18.1 質點 …… 120
§18.2 運動量 …… 120
§19.1 Newton の第二法則 …… 121
§19.2 Newton の第一法則 …… 122
§19.3 D'Alembert の原理 …… 123
§19.4 力積 …… 124
§19.5 撃力 …… 124
§20.1 仕事 …… 125
§20.2 エネルギー …… 126
§21.1 力の場 …… 128
§21.2 ポテンシャル …… 128
§21.3 力の保存系 …… 130
§22.1 角運動量 …… 132
§23.1 中心力 …… 134
§23.2 楕圓調和運動 …… 136
§23.3 單振動 …… 138
§23.4 非週期運動 …… 139

§23.5 惑星の運動 …… 139
§26.1 彈道學 …… 143
§25.0 質點振子 …… 145
§25.1 單振子 …… 145
§25.2 球面振子 …… 146
§25.3 サイクロイド振子 …… 149
§26.0 假設變位 …… 151
§26.1 假設變位の原理 …… 152
§26.2 拘束された運動 …… 152

第八章 質點系の力學

§27.1 反作用の法則 …… 154
§27.2 質量の中心 …… 156
§27.3 重心運動の定理 …… 157
§27.4 運動保存の法則 …… 158
§28.1 質點系に作用する力の能率 …… 158
§28.2 角運動量保存の法則 …… 160
§28.3 面積速度 …… 161
§28.4 運動量保存の法則 …… 162

第九章 剛體の力學

§29.1 剛體 …… 163
§29.2 運動の調べ方 …… 163
§29.3 運動のエネルギー …… 166
§30.1 螺旋運動 …… 166

§30.2 瞬間軸 167
§30.3 慣性能率と慣性乘積 168
§31.1 運動する坐標軸 171
§31.2 廻轉軸する坐標軸 172
§31.3 Coriolis の定理 173
§32.1 一點固定した剛體の運動 174
§32.2 Euler の方程式 175
§32.3 對稱的獨樂 176

第二編 ベクトルの場

第一章 偏微分

§33.1 ベクトルの場と點函數 184
§33.2 準面 186
§33.3 數個の自變數をもつ函數 187
§33.4 スカラー點函數の勾配 189
§33.5 全微分 194
§33.6 方向微係數 197
§34.1 發散 201
§34.2 轉囘 201
§34.3 公式 202
§35.1 Taylor の定理 206
§35.2 全微分の條件 207
§35.3 Euler の定理の擴張 208
§36.1 第二階誘導函數 209

§36.2 Laplace の方程式と調和函數 211
§36.3 rot rot F 212
§36.4 例題 213

第二章 定積分の定理

§37.1 線積分 216
§37.2 發散の定理 220
§37.3 Stokes の定理 227
§37.4 Green の定理 238
§37.5 Gauss の積分 246
§37.6 Green の函數 250
§37.7 Helmholtz の定理 254

第三章 拘束運動

§38.1 保存力に於ける假設變位 259
§38.2 一つの面に拘束された運動 259
§38.3 一つの線に拘束された運動 262

第四章 曲線

§39.1* 直交曲線坐標 266
§39.2* 基本の式 268
§39.3* 曲線坐標に於ける ∇ 269
§39.4* Stokes の定理の證明 274
§39.5* 發散と轉囘 277

第五章 一般坐標と n 次元のベクトル

§40.1* 一般坐標 279

§ **40.2*** 自由度 280
§ **40.5*** 拘束運動の自由度 280
§ **40.4*** 質點の自由運動 281
§ **40.5*** 質點の拘束運動 283
§ **40.6*** 質點組合の運動 285
§ **40.7*** 拘束された場合 285
§ **40.8*** n 次元のベクトル 287
§ **41.1*** 激衝運動 287
§ **41.2*** 質點組合の激衝運動 289
§ **42.1*** 保存系の力 290
§ **42.2*** 運動のエネルギー 292
§ **42.3*** Lagrange の方程式 294
§ **42.4*** Lagrange の函數 296
§ **42.5*** Hamilton の函數 297
§ **42.6*** エネルギー保存の原理 297
§ **42.7*** Hamilton の運動方程式 298
§ **42.8*** Hamilton の原理 300
§ **42.9*** 最小作用の原理 302

第六章　電磁氣學

§ **43.1** ポテンシャル 306
§ **43.2** 全垂直力 311
§ **43.3** 磁氣能率 316
§ **43.4** 帶磁の强さ 318
§ **43.5** 磁氣感應 319
§ **44.1** 電氣變位 321

§ **44.2** 不連續面 323
§ **44.3** 電場及び磁場のエネルギー 325
§ **45.1** 電流の磁氣作用 328
§ **45.2** 磁殼と輪道との關係 331
§ **45.3** 感應 333
§ **46.1** 變位電流 336
§ **46.2** 電磁場の方程式 339
§ **46.3** 電磁波 340
§ **46.4*** 電磁ポテンシャル 341
§ **46.5** Poynting ベクトル 347
§ **46.6** 一樣な磁場に於ける電子の運動 349

第七章　完全な流體の力學

§ **47.1** 特性方程式 353
§ **47.2** 局部的變化と個々の變化 354
§ **47.3** 連續の方程式 356
§ **47.4** 境界條件 358
§ **47.5** Euler の方程式 360
§ **47.6** 激衝運動 362
§ **47.7** エネルギー 364
§ **47.8** 流體の釣合 366
§ **47.9** 流の線と渦の線 367
§ **48.1** 速度ポテンシャル 371
§ **48.2** 源と排け口 373
§ **48.3** 環流量 376

§48.4 渦の運動 …… 379
§48.5* ベクトル速度ポテンシヤル …… 382
§48.6 Helmholtz の定理 …… 385
§48.7 渦の組合のエネルギー …… 387

第三編 ベクトル一次函數

第一章 Dyad と Dyadic

§49.1 一次函數 …… 391
§49.2 Dyadic …… 392
§49.3 積に關する法則 …… 395
§49.4 Dyadic の標準形 …… 397
§49.5 不定積 …… 401
§49.6 Dyadic の內積 …… 404
§49.7 Dyadic の外積 …… 408
§50.1 還元因子 …… 410
§50.2 逆の dyadic …… 414
§50.3 共軛 dyadic の性質 …… 419
§50.4 Dyadic とベクトル積の關係 …… 425
§50.5 完全 dyadic と不完全 dyadic …… 426
§50.6 範式 …… 430
§50.7 問題 …… 435

第二章 幾何光學

§51.1* Fermat の原理 …… 436
§51.2* 屈折の法則 …… 439

§51.3* 反射の法則 …… 442

第三章 二次曲面

§52.1 二次曲面の方程式 …… 444
§52.2 切平面 …… 445
§52.3 徑面 …… 447
§52.4 極平面 …… 448
§52.5 主軸 …… 449

第四章 剛體の廻轉運動

§53.1 慣性 dyadic …… 451
§53.2 外力の作用しない運動 …… 454
§53.3 剛體の廻轉運動 …… 455

第五章 不變量

§54.1* 二重乘積 …… 459
§54.2 Dyadic の函數 …… 461
§54.3 不變量とマトリツクス …… 462

第六章 Dyadic の微分

§55.1 微分 …… 466
§55.2 微分の公式 …… 472
§55.3* 自變數の變換 …… 474

第七章 Dyadic の積分とベクトル積分方程式

§56.1 線積分 …… 477
§56.2 線積分と面積分との關係 …… 488

§56.3 面積分と容積積分との關係 478
§56.4* 電磁歪力 480
§56.5* 積分方程式 482

第八章 彈性體の力學

§57.1 歪 485
§57.2 歪力 491
§57.3 歪力方程式 499
§57.4 等方體 501
§57.5* 歪エネルギー函數 503

第九章 粘る流體の力學

§58.1 流體内の壓力 506
§58.2 運動方程式 509

第十章 四次元時空のベクトル

§59.1* 四次元時空のベクトル 511
§59.2* Lorentz 變換 512
§59.3* 四元ベクトルと六元ベクトル 513
§60.1* 共變及び反變ベクトル 514
§60.2* 基本テンソル 516

補 遺

1. 記號 518
2. 公式 519
3. 時間に關する微分 529
4. 參考書 532

索 引 539

ベクトル解析

第一編
ベクトル

第一章 ベクトルとスカラー

§1.1 ベクトル量とスカラー量

ベクトルは大さ,方向及び向きによつて定まる量である。

方向といふ言葉は,向きを區別した意味の時と,區別しないで用ゐる時とがあつて紛らはしい。例へば「東西の方向」といふときは,東から西とか,西から東といふ意味の區別はなく,單に東西に亘つた線上にあることを意味するものである。

物理學で扱ふ量には,物體の「延び」のやうに,方向は區別すべきも,向きの區別を必要としないものがある。これはベクトルとは別種の量である。從つて方向といふ言葉は,嚴密に向きと區別して用ゐるか,或は向きを區別した方向と謂ふことにする。

方向竝びに向きの區別がなく,單に大さだけもつてゐる量をスカラー量といふ。

例へば 變位,速度,加速度,力,運動量,電氣力等の如きはベクトル量で,質量,時間,溫度,エネルギー等の如きはスカラー量である。

§1.11 スカラー量は適當な單位を擇べば數で表はすことができる。例へば物體の質量はグラムを單位にとれば,十とか二十とかいふ數値によつて表はすことができる。從つて普通の數學の法則によつて計算される。ところがベクトル量は,大さの他に方向及び向きの區別をしなければならない。ベクトルを或る坐標軸に關する成分(§6.4)にわければ,成分はスカラー量であるから通常の數學で取り扱へるが,それには二つもしくは三つの聯立式を同時に解かなければならない。その計算は中々煩らはしい。ベクトル解析法は,ベクトルを必ずしも一々或る特別な坐標軸に關する成分にわけて扱はないで,方向向きを有する量自身をそのまゝ取り扱ふことを研究する自然な扱ひ方である。

スカラー量を代數的の量とすれば,これに對してベクトル量は幾何的の量といふことができる。

§1.2 極性ベクトルと軸性ベクトル

物體の運動を定める變位,速度等といふやうな種類の量は,量それ自身の既に向きの區別をもつてゐるから,ベクトル量であることは明かである。

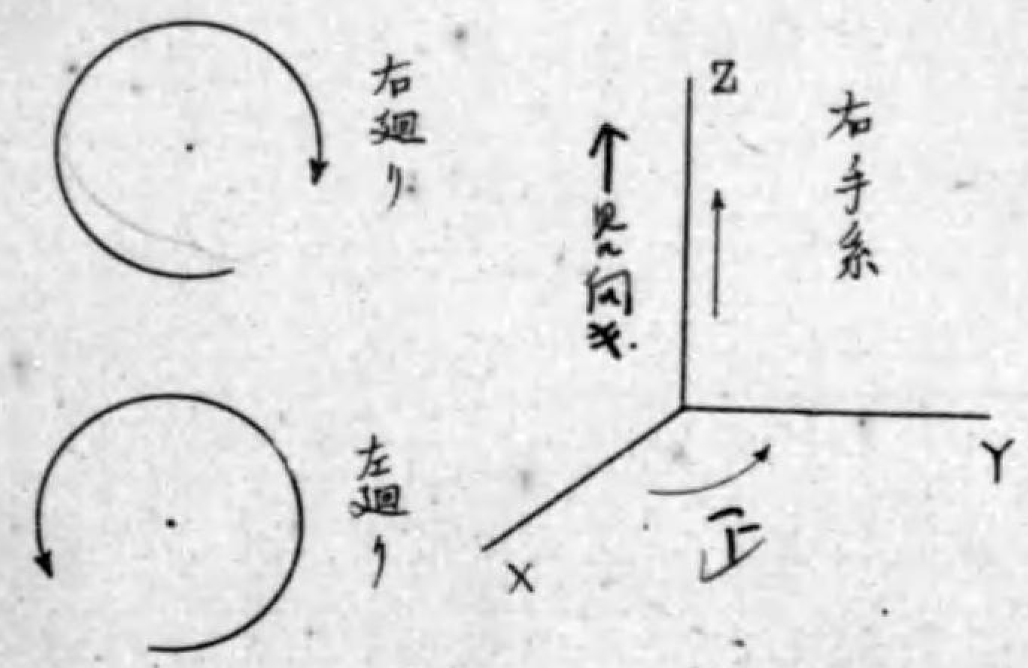
然るに力の能率とか廻轉速度,角運動量といふやうな量は,廻轉軸に關係しその廻轉の向きが右廻りか左廻りか,自然的に區別があるものではない。その廻轉の向きの區別には豫め規約を設けなければならない。卽ち廻轉軸に沿つた向きによつてその差違を表はし,方向は廻轉軸で示すことに規約するならば,このやうな量もベクトルとして扱ふことができる。然しその區別の仕方は便宜上のものであつて,量そのものは本質的に左右の區別がある

のではない。

量の性質上,自ら向きの區別のあるものを**極性ベクトル量**,廻轉軸によつて向きを區別すべきものを**軸性ベクトル量**といふ。

こゝに注意しなければならないのは,「右廻り」「左廻り」といふ言葉である。

第一圖



普通右廻りといふのは上から見て時計の針と同じ廻り方である。數學に用ゐる直角坐標軸の右手系(右旋系)といふのは,普通の螺旋と同じ向きにXの正軸をYの正軸の方に廻すとき,螺旋の進む向きがZの正軸のあたるもので,つまりZの正軸の側から見れば,$X-Y$軸は左廻りに,負軸の側から見れば右廻りになる。

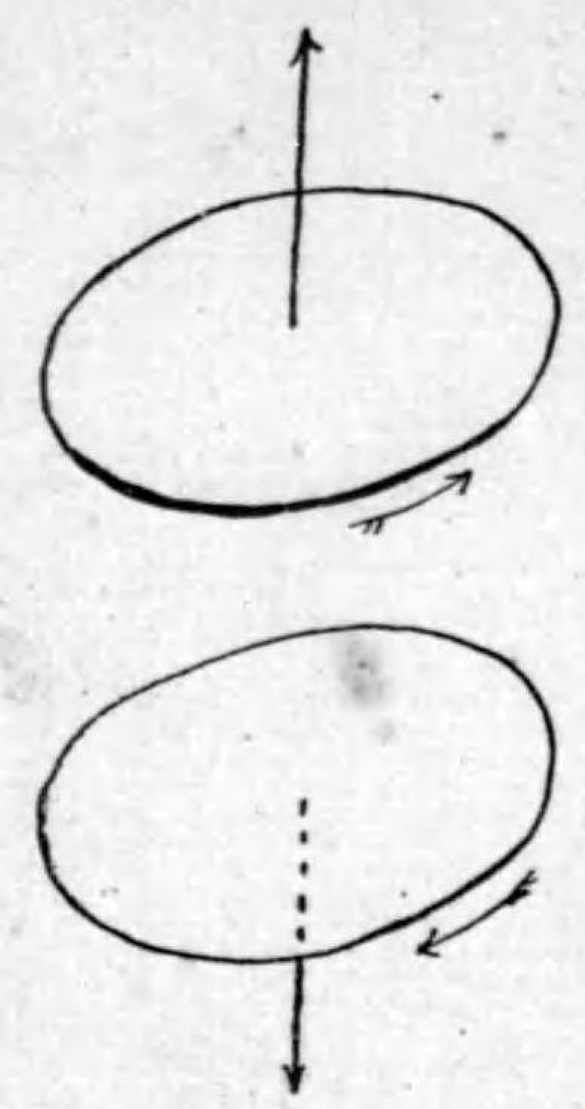
植物學でフヂ,アサガホ,マメ等の纏りかたと,動物學で貝殼等の捻りかたを言ひ表はすときとでは,その見る向きが反對で,從つて右廻り左廻りが反對に用ゐられるから,この言葉には注意しなくてはならない。

こゝでは,その誤解を防ぐために,右旋(右手系もしくは正系)とか左旋(左手系もしくは負系)といふ言葉を用ゐることにする。

前に述べた角運動量,廻轉速度ばかりでなく,面積の如きも適當に規約すれば,軸性ベクトルとして表はすことができる。

面積を求めやうとする區域がいつも左手の側にあるやうに,その周緣を辿つて測つたときの面積を正として,これをその面に垂直で,向きは普通の螺旋の進む向き,大さは面積に比例した長さのベクトル量で表はすと規約する。從つて周邊を反對の向きにいつも區域が右手にあるやうに辿つて測れば,大さは等しく向きの反對のベクトルによつて表はされる負の面積と考へればよい。一つ面積が,その測り方によつて正或は負となることは可笑しなことのやうであるけれども,一直線上の二點の相互の位置を表はすのにも,右に向つて測るのを正とするか左に向ふのを正にするかによつて正負は變るのと同樣に,少しも變なことはない。殊に面に表裏があるものと見做せば,面の一方の側の面積を正にすれば,他の側は負と見做すことは非常に便利な規約である。

第　二　圖



§2.1　ベクトル量の表はし方

ベクトル量を表はすのに普通二通りの方法がある,一つは圖示により,他は符號によつて示すのである。

§2.11　ベクトルを圖で示すには,一つの矢を劃く。適當の單位を擇び,ベクトル量の大さに比例する長さの矢 (OA) を劃いて示す。

矢の方向はベクトルの方向を,その尖端 (A) は向きを,その尾端 (O) はベクトルの位置を表はすものとする。(第三圖參照)

これを記號で OA, 或は $\overrightarrow{OA}$ と書く。

單に OA と書いてベクトルを表ばしたらば,その文字の順序に注意しなければいけない。AO と OA とは,向きの反對なベクトルを示すことになる。

§2.12　解析的に扱ふには,前節の記號は不便であるから,ベクトル量は肉太文字 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 等,スカラー量には普通の文字を用ゐる。然し筆記體にはこれは書き難いから,ドイツ文字を用ゐるがよい,ドイツ派の學者は在來多くドイツ文字を用ゐてきた。其他中世紀の Tudor 文字 $\mathfrak{T}$,$\mathfrak{K}$ 或はギリシァ文字等を用ゐる人もあるが,印刷には肉太,筆記にはドイツ文字が經驗上便利である。

ベクトル解析程,著者が勝手な記號を用ゐてゐるものはない。この統一をはかることは既に遲い憾がある。然し實際使用してみると, Gibbs の用ゐた記號が最も便利であることは,學者間に次第に認められてきたやうで,漸次その記號を用ゐた著書や論文が勢力を占めてきた。こゝでは主として Gibbs の記號を用ゐ,他の主な記號との比較は別に表にして卷尾に纏めておくことにする。

§3.1　等しいベクトル

位置の如何に拘らず,すべて大さ,方向,向きの等しい二つのベク

トルは等しいと考へる。

これを

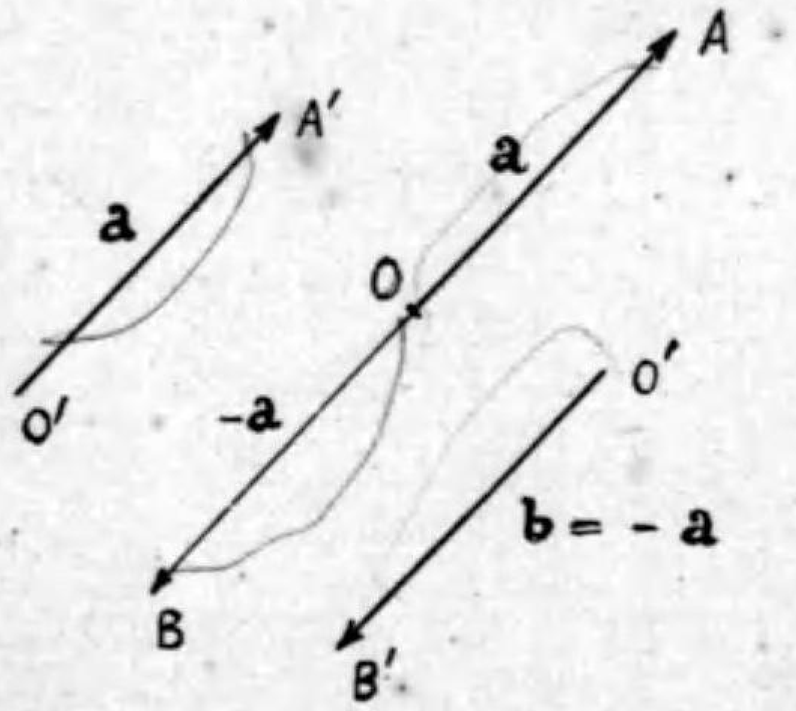
$$\vec{OA}=\vec{O'A'}$$

或ひは

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$$

で表はす。

第三圖



このベクトルの等式は,單に大さ許りでなく,方向も向きも等しいといふ意味を表はしてゐることを忘れてはならない。

従つて三つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が,もし

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$$

ならば,

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$$

である, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ とはベクトルとして等しいことを示してゐる。

§3.2 負のベクトル

$\boldsymbol{a}$ と大さ及び方向が等しく,向きが反對のベクトルを $\boldsymbol{a}$ の負ベクトルといひ $-\boldsymbol{a}$ で表はす即ち $\vec{OA}=\boldsymbol{a}$ ならば

$$\vec{AO}=-\boldsymbol{a}$$

§3.3 自由ベクトルと束縛ベクトル

ベクトルの等しい定義のやうに位置を考に入れないでよいやうなベクトルを自由なベクトルといふ。

然し剛體に働く力のやうなものは,その作用する線の位置を考へる必要がある。同じ大さ方向向きの力でも,剛體に作用するときは,その作用する線の位置が變れば,異なつた影響が起る。このやうなベクトルは束縛されたベクトルといふ。

束縛されたベクトルの中で作用線が等しいときにのみ等しいベクトルは英語で Glissant といふ人もある。又動徑ベクトルや剛體に働く力の能率のやうに,作用點が等しいときにのみ等しいベクトルは英語で Radial ともいふ。

然しこのやうな束縛されたベクトルの作用は,一般にそのベクトルの能率(§10)といふ量をとつて考へれば,其他のことは自由ベクトルと同様にして取り扱へるから,これからは殊更に斷らない限り,自由ベクトルに就いて研究することにする。

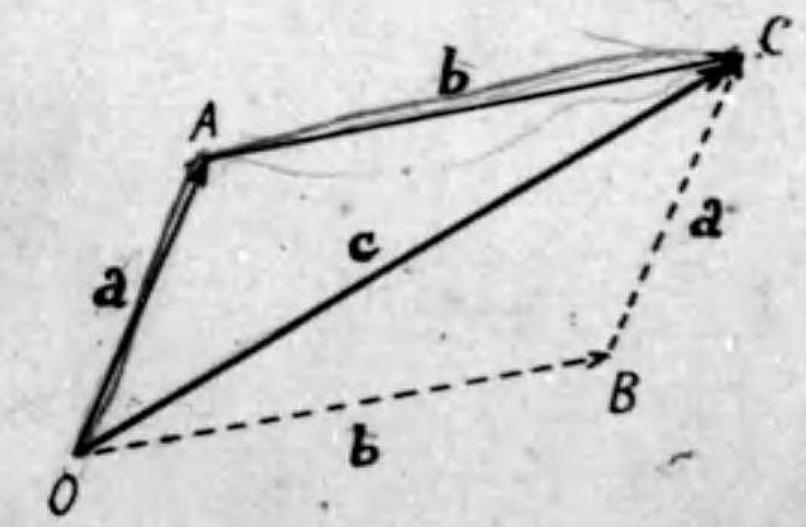
$\vec{OA}=a$
$\vec{AO}=-a$

ベクトルの合成

§4.1 ベクトルの加法

二つの同種類のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とを加へるには, $\boldsymbol{a}$ の尖端 A から $\boldsymbol{b}$ を代表するベクトルをひく,その尖端を C とすれば $\vec{OC}$ で代表されるベクトルを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との**合成ベクトル**又は和といふ。式で表はせば

第四圖



$$\vec{OA}+\vec{AC}=\vec{OC}$$

$\vec{OC}=\boldsymbol{c}$ と書けば

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

と書いてもよい。

この式は，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{b}$ をベクトル的に加へればベクトル $\boldsymbol{c}$ に等しいといふことを意味してゐる。これは一つのベクトル方程式であつて，式の兩邊にあるベクトルは互に大さ，方向及び向きが皆等しいことを表はしてゐる。

方向，向き及び大さが等しければ，その位置に拘らず二つのベクトルは等しいから，點 O から先づ $\boldsymbol{b}$ を代表するベクトル $\overrightarrow{OB}$ をひき，次に B から $\boldsymbol{a}$ を代表するベクトルをひけば，その終點は C 點になることは明かである。卽ち

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$$

(§ 3.3) により

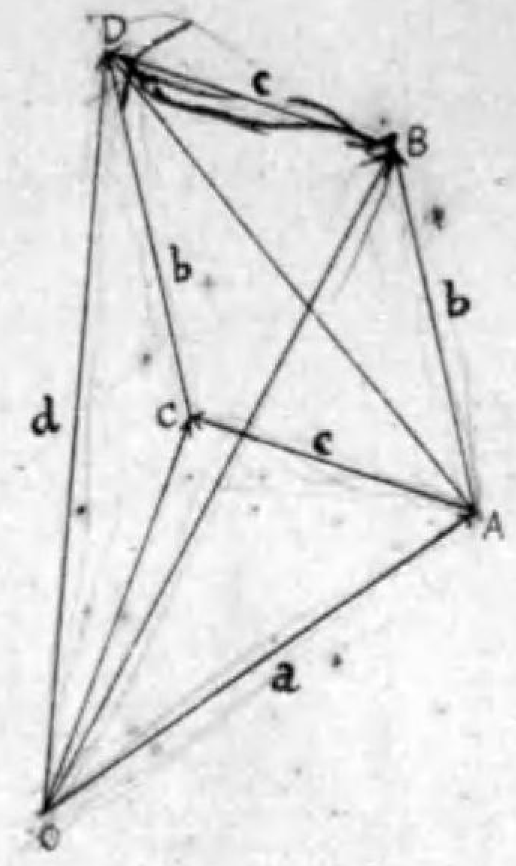
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

この式は交換の法則を表はすもので，二つの同種類のベクトルを加へる時には，加へ合ばせる量の順序には關係しないことを示してゐる。卽ちベクトル量の加法には交換の法則が成り立つ。

二つの同種類のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とを加へることは，共通の點 O から $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を代表するベクトルをひき，それを二邊とする平行四邊形をつくれば，O を過る對角線が，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の和を表はすことは明かである。このやうに作圖したのをベクトルの平行四邊形といふ。

三つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の和は，第 5 圖によつて自から明かである。卽ち

第 五 圖.



$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BD}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})$$
$$=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AB}$$

卽ち

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}$$

ベクトルの和は，その結合の方法には關係しない，卽ちベクトルの和には結合の法則が成立するから，括弧を挿んだり省いたりすることが隨意にできる。

§4.2 ベクトルの減法

第 4 圖に於いてもし $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が，大さ等しく向きが反對なベクトルであつたとすれば，その合成ベクトルの尖端 C は O と一致し和は零になる。これをもベクトルと見做せば，**零ベクトル**は大さ零で，向きの不定なベクトルと解することもできる。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$$

然るに (§ 3.3) の定義により $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ の負ベクトルであるから

$$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$$

よつて

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$$

任意のベクトルに，その負ベクトルを加へることは，恰かも同じベクトルを減ずることと見做すことができるので，演算の記號＋を省いて

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=0$$

と書いて差支ない。

つまりベクトル$\boldsymbol{c}$から同種のベクトル$\boldsymbol{a}$を減ずることは,$\boldsymbol{c}$に$\boldsymbol{a}$の負ベクトルを加へることを意味する

$$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{a})$$

§4.3 Lamiの定理とベクトル多邊形

もし

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

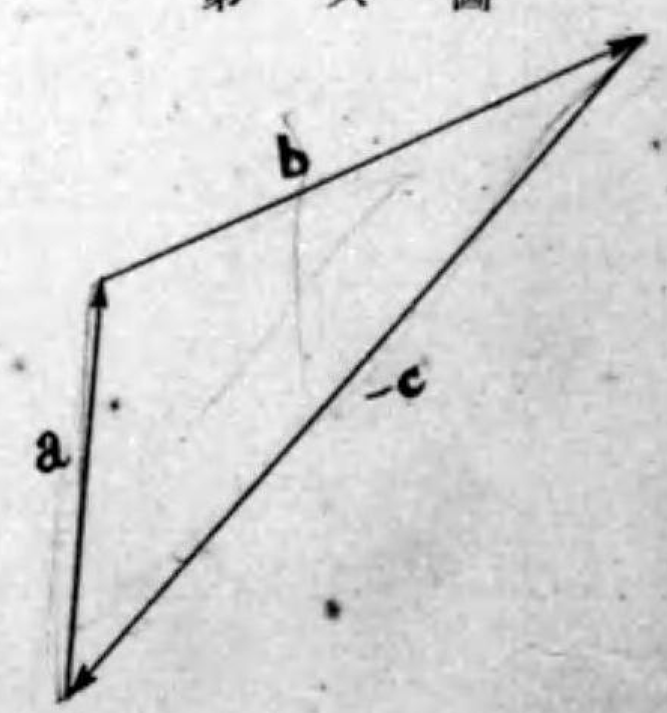
ならば,三つのベクトル$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$及び$-\boldsymbol{c}$は一つの三角形を形づくり次の關係がある

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{c})=0 \quad\text{......(1)}$$

卽ち三つのベクトルの和が零ならば,そのベクトルを邊とする三角形ができる,逆に又三角形が作れれば三つのベクトルの和は零となる。

一點に働く三つの力の合力が零になれば,その力を代表するベクトルを邊として作つた三角形を力の三角形といひ,これは力の釣合に必要な條件である(Lamiの定理)。

第六圖



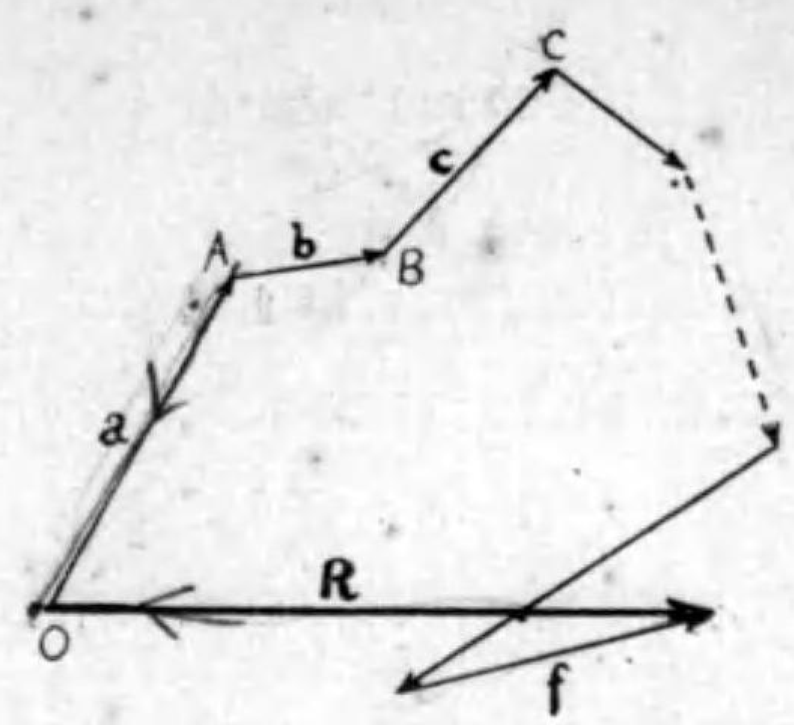
この考を一般に推し擴めて,同種類の多くのベクトルの和は,ベクトルを表はす矢で多邊形を作れば求まる。

任意の一つのベクトルの尖端から,他の一つのベクトルをひき,その尖端から又次の一つをひく。つぎつぎに總てのベクトルを

ひけば(その順序には關係しない)最後のベクトルの尖端に,原點からひいた矢($\boldsymbol{R}$)は,すべてのベクトルの和を表はす。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\dots+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{R} \quad\text{....(2.1)}$$

第七圖



もし最終の點が原點に一致すれば,合成ベクトル$\boldsymbol{R}$は零となり,ベクトルの和は閉ぢた多邊形になる。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\dots\dots+\boldsymbol{f}=0$$

例へば$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,...... が一點に作用する力であれば,その和の終點と合力の向きを反對にしたベクトルとは,一つの閉ぢた多邊形をつくる,これを力の多邊形といふ。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\dots\dots+\boldsymbol{f}+(-\boldsymbol{R})=0 \quad\text{......(2.2)}$$

§4.4 例題

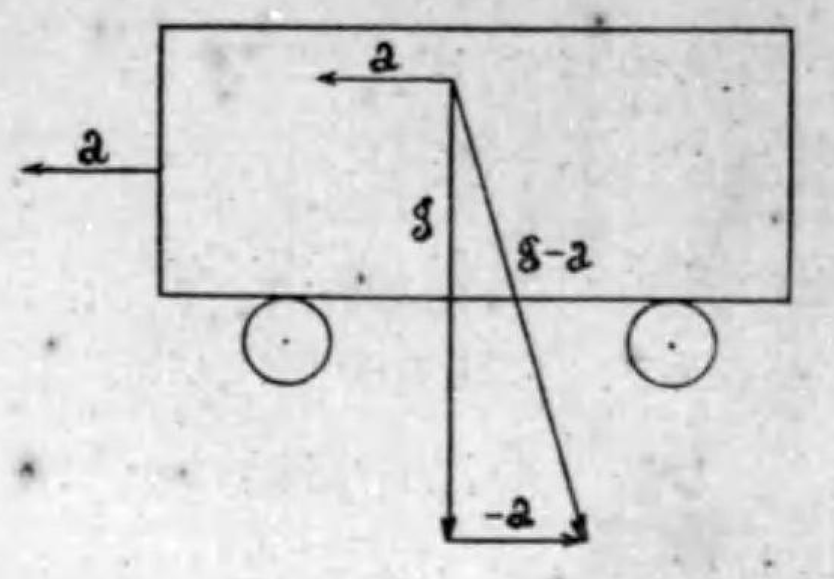
(1) 地面に對して$\boldsymbol{q}$の速度で動いてゐる列車内に$\boldsymbol{v}$の速度で動いてゐる人は,地面に對して$\boldsymbol{q}+\boldsymbol{v}$の速度をもつてゐる。

(2) 風が$\boldsymbol{q}$の速度で海上を吹き亘つてゐるとき,汽船の速度が$\boldsymbol{v}$ならば,船上で感ずる風の速度は$\boldsymbol{q}-\boldsymbol{v}$である。

(3) 重力の加速度を$\boldsymbol{g}$とする,列車が一定の加速度$\boldsymbol{a}$で運動してゐるならば,列車内で自由落下をする物體のもつ加速度は,列車に對して$\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}$である。

もし初めに靜止してゐて,その位置から墜ちるとすれば墜ちる方向は $\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}$ の方向である。

第八圖



列車に對して靜止してゐて,自由に懸つてゐる錘(振子)は,この見懸け上の重力の方向を示し,車內に置いた水準器の示す水準線はその方向に垂直である。

§5.1 ベクトル量とスカラー量との積

ベクトル $\boldsymbol{b}$ がベクトル $\boldsymbol{a}$ の n 倍 (n は正の整數)の大さをもち,方向及び向きは $\boldsymbol{a}$ に等しければ

$$\boldsymbol{b}=n\boldsymbol{a}$$

で表はすことは (§2) の規約竝びに (§3) の定義に適つた表はし方であり, (§4)の合成の考によれば, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ を n 個加へたものに等しい。

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\ldots\ldots(n\text{個})$$

從つて,逆に $\boldsymbol{b}$ をもとにして考へれば

$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{n}\boldsymbol{b}$$

である。

もし $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ と向きの反對なものならば

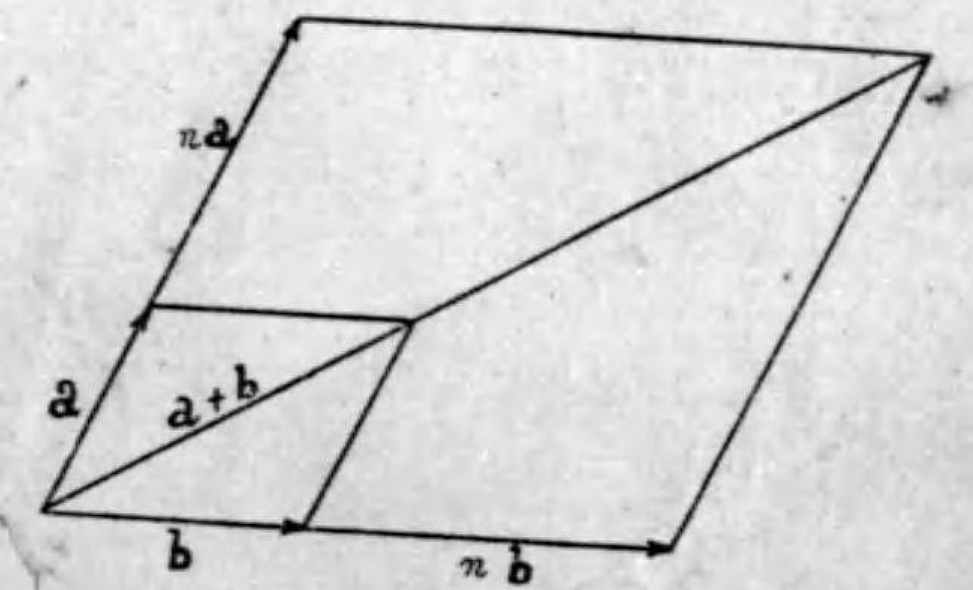
$$\boldsymbol{b}=-(n\boldsymbol{a})$$
$$=n(-\boldsymbol{a})$$

卽ち $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ の負ベクトルの n 倍と見做されるし,或は n を負の整數として $\boldsymbol{a}$ の n 倍と考へてもよい。

n は必ずしも整數でなくてもよい。この考を擴張して, n を任意の實數として, $n\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と方向等しく,向きは n が正か負かによつて等しいか反對であつて,大さは $\boldsymbol{a}$ の大さの n 倍に等しいベクトルを表はすものと定義する。

n が只の實數であるときは, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは同じ種類の量であるが,更にこの考を擴充して, n が一般のスカラー量卽ち元 (dimension) を有する物理的の量であるならば, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは異つた元を有する量となる。例へば n を質量, $\boldsymbol{a}$ を加速度とすれば, $n\boldsymbol{a}$ は力,又 $\boldsymbol{a}$ が,速度ならば $n\boldsymbol{a}$ は運動量であつて $\boldsymbol{a}$ とは別種のベクトル量であることに注意しさへすれば, n を一般のスカラー量としてベクトル $\boldsymbol{a}$ との積 $n\boldsymbol{a}$ の意味は自ら前の定義で定められる。

第九圖



この定義から直にスカラー量 n とベクトル量 $\boldsymbol{a}$ との積は,交換竝びに結合の法則に從ふことが言へる。式で表はせば

$$n\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}n$$
$$(n+m)\boldsymbol{a}=n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}$$
$$m(n\boldsymbol{a})=(nm)\boldsymbol{a}=n(m\boldsymbol{a})$$

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ をともに n 倍して作つた平行四邊形

は, $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ を二邊とする平行四邊形に相似で,對角線の長さは n 倍であるから,明かに

$$n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$$

の關係が成り立つ。

§5.2　單位ベクトルと率

$\boldsymbol{a}$ と同じ方向及び向きをもち,大さが1に等しいベクトルを $\boldsymbol{a}_1$ (時には Weatherburn の用ゐた記號 $\boldsymbol{a}$ が便利である)と書き,これを $\boldsymbol{a}$ の**單位ベクトル**といふ。

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大さはスカラー量であるから,その記號と同じ文字を普通の書體 a で書くか,或は $|\boldsymbol{a}|$ で表はせば,明かに

$$\boldsymbol{a}=a\,\boldsymbol{a}_1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$\boldsymbol{a}_1$ の大さは1であるから

$$|\boldsymbol{a}_1|=1$$

と書ける。

即ち任意のベクトルは大さを表はすスカラー量と,方向及び向きを示すその單位ベクトルとの積として表はせる。

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大さを, $\boldsymbol{a}$ の**率**又は**絶對値**と云ふ.單位ベクトルの率は1である。

§5.3　逆ベクトル

$\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といふのは大さ及び向きが $\boldsymbol{a}$ に等しく,率が $\boldsymbol{a}$

の率の逆數に等しいベクトルで, $\boldsymbol{a}^{-1}$ 又は $\dfrac{1}{\boldsymbol{a}}$ の記號で表はす。

$$\boldsymbol{a}^{-1}=\frac{1}{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}_1}{a} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

單位ベクトルの逆ベクトルは,それ自身に等しいことは明らかである。又 $\boldsymbol{a}^{-1}$ の逆ベクトルは $\boldsymbol{a}$ であるから, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}^{-1}$ とは互に相逆の關係を保つてゐる。

§6.1　ベクトルの誘導

前節によれば,ベクトル $\boldsymbol{a}$ に平行な任意のベクトル $\boldsymbol{p}$ は, $\boldsymbol{a}$ に正又は負の數 x を乘ずれば得られる。

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a} \qquad (x\gtrless 0)$$

自由ベクトルではベクトルの位置は關係ないから,平行なベクトルは同一線上にある共線なベクトルであると見做せる。共線な二つのベクトルは他のベクトルにスカラー量を乘じて導くことができる。

逆にもし任意のベクトル $\boldsymbol{p}$ が, $\boldsymbol{a}$ に對して $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}$ (但し $x\neq 0$) の關係が成立すれば, $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{a}$ に平行である。即ち方向は等しく,向きは x が正か負かによつて $\boldsymbol{a}$ に等しいか又は反對である。

§6.2　共面ベクトルの誘導

もし二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行でないとき(方向も向きも等しくない),他のベクトル $\boldsymbol{q}$ がこの二つのベクトルに對して

$$\boldsymbol{q}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$$

(x, y は實數)の關係をもつてゐるならば, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ は或る一つの

平面に平行である。

それは與へられた式の右邊を移項すれば直ちに知れる；

$$\boldsymbol{q}+(-x\boldsymbol{a})+(-y\boldsymbol{b})=0$$

(§4.3) により,三つのベクトル $\boldsymbol{q}$, $(-x\boldsymbol{a})$ 及び $(-y\boldsymbol{b})$ は一つの三角形を形づくるから,この三つは同一平面内に横たはらなければならない。即ち共面である。

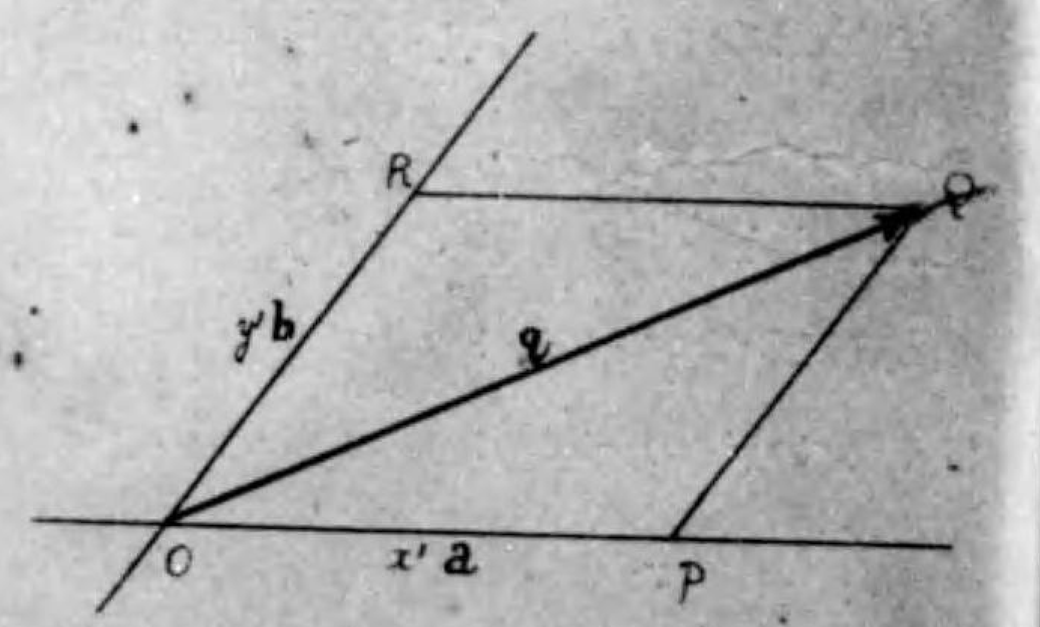
然しベクトルは,大さ,方向,向きさへ等しければ變りないから,そのまゝ如何なる位置に移してもよい。從つて三つのベクトルは同一平面内に横たはらなくても,或る一つの平面に皆平行ならば三角形をつくることができる。ベクトルが共面であるといふことは,此のやうな廣い意味に解釋すれば,三つのベクトルは共面であると言つて差支ない。

§6.21 逆にもしベクトル $\boldsymbol{q}$ が一つの平面に平行であれば,その平面内に横たはる平行でない任意の二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ によつて

$$\boldsymbol{q}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$$

として表はすことができる。

第十圖



$\boldsymbol{q}$ の原點 O を過つて, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とに平行な二直線をひき,平行四邊形 $OPQR$ (第10圖)を作れ

ば, (§6.1) によつて

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}, \qquad \overrightarrow{OR}=y\boldsymbol{b}$$

であるから

$$\boldsymbol{q}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b} \quad \cdots\cdots(6)$$

になることが知られる。

§6.22 これを定理の形に纏めておけば

[定理] 平行でない二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ から導かれるベクトルはすべて,同一の平面に平行である。

逆に,任意のベクトルは,それに平行な任意の平面内の,平行でない二つの任意のベクトルで表はすことができる。

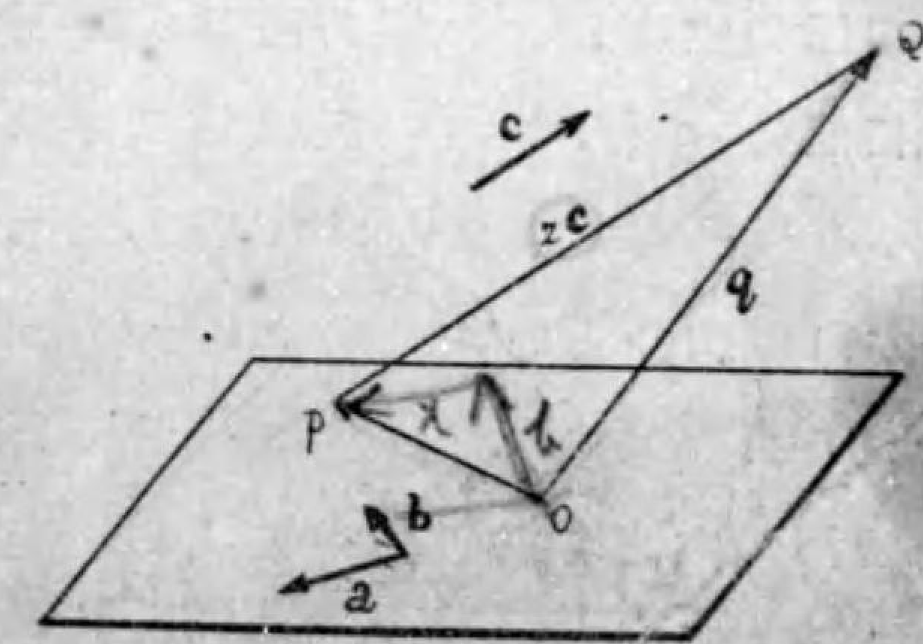
§6.3 共面でないベクトルの誘導

三つの互に平行でないベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は,何れの一つも他の二つから導くことができないならば——即ちこの三つのベクトルは共面でない——任意のベクトル $\boldsymbol{q}$ は

$$\boldsymbol{q}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c} \quad \cdots\cdots(7)$$

の形で表はせる。但し x,y,z は正又は負の實數である。

第十一圖



第11圖で示すやうに, $\boldsymbol{q}$ の原點を過つて, $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ に平行な平面をつくる。

もし $\boldsymbol{q}$ がこの平面内に

横たはるならば, z は零に等しく, $\mathbf{q}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ とで表はせる (§6.2)。

$\mathbf{q}$ が $\mathbf{a}$-$\mathbf{b}$ 面内にないならば, $\mathbf{q}$ の尖端 Q を過つて $\mathbf{c}$ に平行な線をひけば, $\mathbf{c}$ は $\mathbf{a}$ 及び $\mathbf{b}$ に平行でないから $\mathbf{a}$-$\mathbf{b}$ 面と交はる,その交點を P とすれば,ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は前章により

$$\overrightarrow{OP}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$$

$\overrightarrow{PQ}$ は $\mathbf{c}$ に平行であるから

$$\overrightarrow{PQ}=z\mathbf{c}$$

從つて

$$\overrightarrow{OQ}\equiv\mathbf{q}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$$

この定理の逆は (§6.22) と同樣にして證明できる。そして $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が與へられれば, $\mathbf{q}$ の分け方は唯一通りしかないことも簡單にわかる,よつて次の定理が導かれる。

[定理] 任意のベクトルは,共面でない三つの任意のベクトルで表はすことができる。その分け方は唯一である。

§6.41　成分

前節の定理によれば,共面でない三つのベクトルの一組を用ゐて,任意のベクトル $\mathbf{q}$ を表はすことができる。

$\mathbf{q}$ を分解した形においたとき, x, y, z を夫々ベクトル $\mathbf{q}$ の $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 方向の**成分**といふ。成分 x, y, z は $\mathbf{q}$ の長さの $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の方向に於ける射影であつて,スカラー量である。

前節の定理を言ひ換へて次の重要な定理を得る。

[定理] 共面でない任意の三つのベクトルの方向に於ける成分が與へられゝば,ベクトルは唯一に定まる。

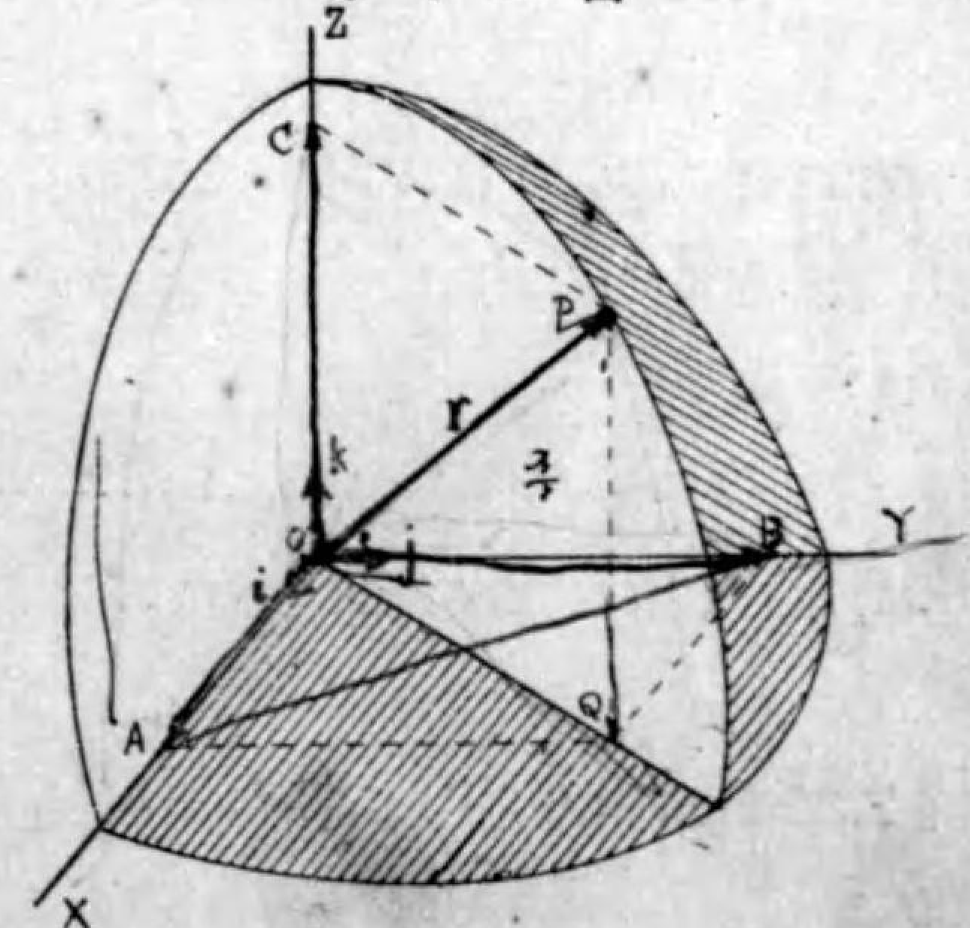
§6.42　分ベクトル

既に (§4.3) で述べたやうに,一つのベクトルは,數個のベクトルを合成して得られる。合成ベクトルに對して,ベクトル多邊形の邊を形づくる多くのベクトルを**分ベクトル**と名付ける。

$\mathbf{q}$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の方向に分けて得られる, $x\mathbf{a}, y\mathbf{b}, z\mathbf{c}$ は $\mathbf{q}$ のその方向に於ける分ベクトルであつて, $\mathbf{q}$ の成分 (x, y, z) とは異ふ意味をもつてゐる量であることを忘れてはならない。

§7.1　基本ベクトル

第十二圖



直交坐標軸の X, Y, Z 軸の正の向きに沿ふて三つの單位ベクトルをとり,夫々 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする。

任意のベクトル $\mathbf{r}$ は前章によつて, X, Y, Z 軸の方向の分ベクトルもしくは成分(直交坐標軸に關しては正射影)が與へられゝば定まる即ち

$$\mathbf{r}\equiv\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}$$
$$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OC}$$
$$\therefore\ \mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

x, y, z は適當な實數である。

互に直交する三つの單位ベクトルの一組 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を**基本(單位)ベクトル**といひ,(x, y, z) を適當に擇めば如何なるベクトルでも基本ベクトルから導くことができる。

§7.2 直角成分

$\boldsymbol{r}$ の率を r, OP の方向餘弦を (λ, μ, ν), 坐標軸となす角を (α, β, γ) とすれば

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\alpha = \lambda r \\ y &= r\cos\beta = \mu r \\ z &= r\cos\gamma = \nu r \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(9)$$

(x, y, z) は $\boldsymbol{r}$ の直角成分である。

$$\boldsymbol{r} = r(\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}) \quad \cdots\cdots(10)$$

§7.21 (λ, μ, ν) は方向餘弦であるから

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$$

故に

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \cdots\cdots(11)$$

$\boldsymbol{r}$ の率を直角成分で表はした式である。

§7.22 前章 (§6.41) に得た定理は,次のやうに言ひ換へることができる。

[定理] 直角成分が與へられゝばベクトルは唯一に定まる。

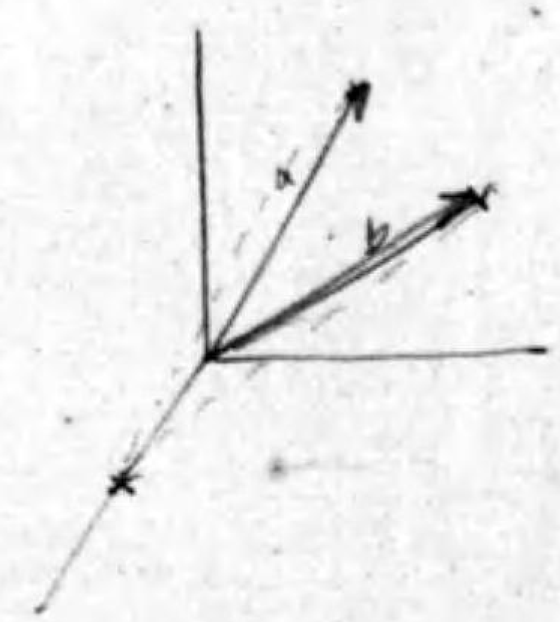
§7.3 等しいベクトルの成分

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が等しければ,上に得た定理によつて,直角成分は夫々等しくなければならないし,又直角成分が等しい二つのベクトルは,互に等しくならなければならない。

これは大切な定理であるが,前章の定理により既に證明する迄もないけれど,練習のために,この後の場合を單獨に證明してみよう。

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の方向餘弦を夫々 (λ, μ, ν), (l, m, n); 直角成分を夫々 (a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z) とすれば,直角成分が互に等しいから

$$a_x=b_x, \quad a_y=b_y, \quad a_z=b_z$$



方向餘弦は自乘の和が1になるから

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$$

$$l^2+m^2+n^2=1$$

然るに

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}$$

故に

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$$

$a_x = |a|\lambda = |b|\lambda$
$b_x = |b|l$

即ち大さは等しい。

又. $a_x = \lambda|a|$ $b_x = l|b|$
$a_y = \mu|a|$ $b_y = m|b|$
$a_z = \nu|a|$ $b_z = n|b|$
$a_x = b_x$
$\therefore \lambda|a| = l|b|$
然るに $|a| = |b|$ $\therefore \lambda = l$
同様に $\mu = m$, $\nu = n$

從つて

$$\lambda=l, \quad \mu=m, \quad \nu=n$$

方向並に向きが等しい。

即ち

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$$

であることが知られる。

この逆も簡單に證明されるから試みてみられるがよい。

§7.4 合成ベクトルの成分

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

と書けば,成分はスカラー量であるから,夫々纏めて

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}$$

即ち,二つのベクトルの和の成分は,その成分の和を成分とするベクトルである。

つまりベクトルは複素數のやうに考へればよい。二つの複素數の和は,各々の實數値及び虚數値の和を,夫々實數値及び虚數値とする複素數であるやうに,基本ベクトルを夫々異る虚數として扱へばよい。ベクトルは複素數を更に一般化した超越數である。この點に於いて Hamilton の創案になる**四元數** (Quaternion) といふ $x_0+x_1i_1+x_2i_2+x_3i_3$ (i_1, i_2, i_3 は夫々虚數の單位)の形の數に結びつくものであるが,是等の悉しい研究は今のところ必要がない,只こゝでは複素數のやうに取り扱へることを覺えておけばよい。

§7.41 $\boldsymbol{r}$ が多くのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$,....$\boldsymbol{a}_n$ の和であれば,$\boldsymbol{r}$ の成分はその分ベクトルの成分の和である,即ち

$$\boldsymbol{r}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{i}\sum a_x+\boldsymbol{j}\sum a_y+\boldsymbol{k}\sum a_z$$

$$\because\quad \left.\begin{aligned} r_x&=\sum a_x\\ r_y&=\sum a_y\\ r_{\cancel{x}\,z}&=\sum a_{\cancel{x}\,z}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(12)$$

§7.5 單位ベクトルの成分

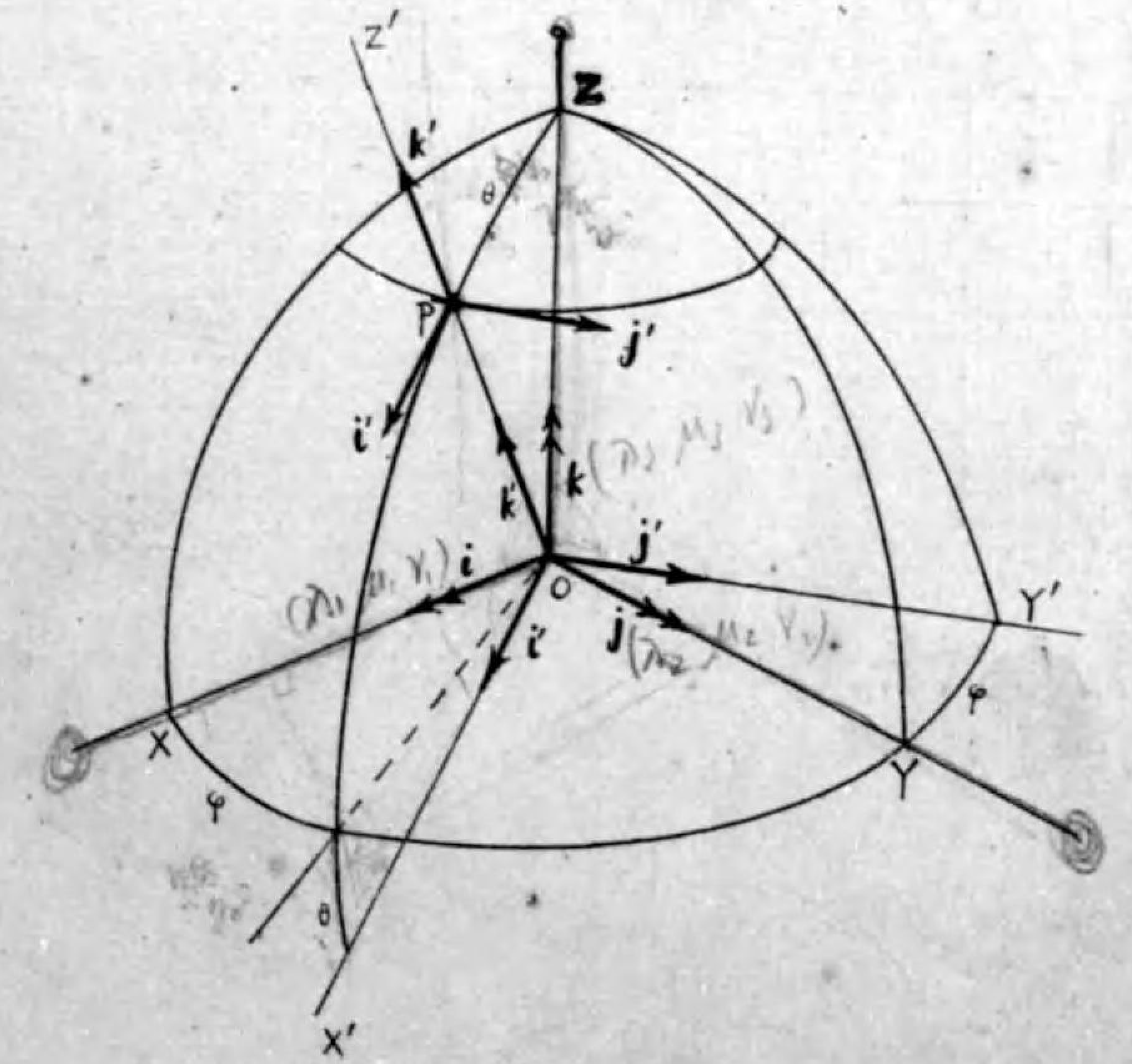
$$\boldsymbol{a}=a\,(\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma)$$

とおけるから, $\boldsymbol{a}$ と方向,向きの等しい單位ベクトルは

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{\boldsymbol{a}}{a}=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma$$

$$=\boldsymbol{i}\lambda+\boldsymbol{j}\mu+\boldsymbol{k}\nu\quad\cdots\cdots\cdots(13)$$

第 十 三 圖



即ち,單位ベクトルの成分は,その方向餘弦に等しい。

§7.51　點の位置を示すために,坐標軸の原點からその點にひいた位置ベクトルを動徑ベクトル又は略して單に**動徑**といふ。

或る點の方向は,その動徑の方向餘弦を求めれば知れる,つまり單位動徑ベクトルの直角成分を求めればよい。

[例]　原點を中心とする半徑 r の球面上の點 P に於いて, Z' 軸は動徑の方向に, X' 軸は子午圏に切し, $\cancel{X'}$ Y 軸は緯度圏に切する直交坐標軸をとる(第十三圖)。

XYZ 軸と $X'Y'Z'$ 軸との間の方向餘弦の關係は下の左の表で示される。P 點の經度を φ, 餘緯度を θ とすれば, (λ, μ, ν) の値は圖から容易に方向餘弦が求まる。

	X	Y	Z
X'	λ_1	μ_1	ν_1
Y'	λ_2	μ_2	ν_2
Z'	λ_3	μ_3	ν_3

	1	2	3
λ	$\cos\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\cos\varphi$	$-\sin\varphi$
μ	$\cos\theta\sin\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\varphi$
ν	$\sin\theta$	$-\cos\theta$	0

右の表の列の上の數字は, (λ, μ, ν) の添字を示す。

$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, $(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$ を夫々二つの直交坐標軸の基本ベクトルとすれば,その關係は

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{i}&=\lambda_1\boldsymbol{i}'+\lambda_2\boldsymbol{j}'+\lambda_3\boldsymbol{k}'\\ \boldsymbol{j}&=\mu_1\boldsymbol{i}'+\mu_2\boldsymbol{j}'+\mu_3\boldsymbol{k}'\\ \boldsymbol{k}&=\nu_1\boldsymbol{i}'+\nu_2\boldsymbol{j}'+\nu_3\boldsymbol{k}'\end{aligned}\right\}$$

又

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{i}'&=\lambda_1\boldsymbol{i}+\mu_1\boldsymbol{j}+\nu_1\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{j}'&=\lambda_2\boldsymbol{i}+\mu_2\boldsymbol{j}+\nu_2\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{k}'&=\lambda_3\boldsymbol{i}+\mu_3\boldsymbol{j}+\nu_3\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&=\cos\theta\cos\varphi\, i+\cos\theta\sin\varphi\, j+\sin\theta\, k\\ &=\sin\theta\cos\varphi\, i+\sin\theta\sin\varphi\, j+\cos\varphi\, k\\ &=\sin\theta\, i+(-\cos\theta)\, j+0\, k\end{aligned}$$

で應用の多い關係式である。

(注意すべき事)

ベクトルを表はすには,(1)方向及び向きを示す量と,(2)大さを表はす量とが必要である。則ち(1)方向餘弦 (λ, μ, ν) と,(2)大さ $|\boldsymbol{a}|$ を知ればよい,然しこの四つの量の中,三つだけが獨立して定まる。方向餘弦は三つあるけれども, $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$ の關係が成り立つために,獨立したものは二つであるから結局三つの獨立した量によつてベクトルを定めることができる。或は又三つの直角成分を知れば,直角成分は $\lambda|\boldsymbol{a}|$, $\mu|\boldsymbol{a}|$, $\nu|\boldsymbol{a}|$ であるから,方向も大さも定まる。或は坐標軸の方向の分ベクトルが與へられるか,若しくは任意の共面でない三つのベクトルの方向の成分又は分ベクトルを知ればよい。

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分を $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$, $\boldsymbol{a}_z$ と書いた書物もあるが,分ベクトルの意味に用ゐることが多い。成分は代數的の量であるが,分ベクトルはベクトル量である,此の書物では肉太文字はベクトルの意味に用ゐるから, $\boldsymbol{a}_z$ のやうな記號は分ベクトルを表はすことにする。

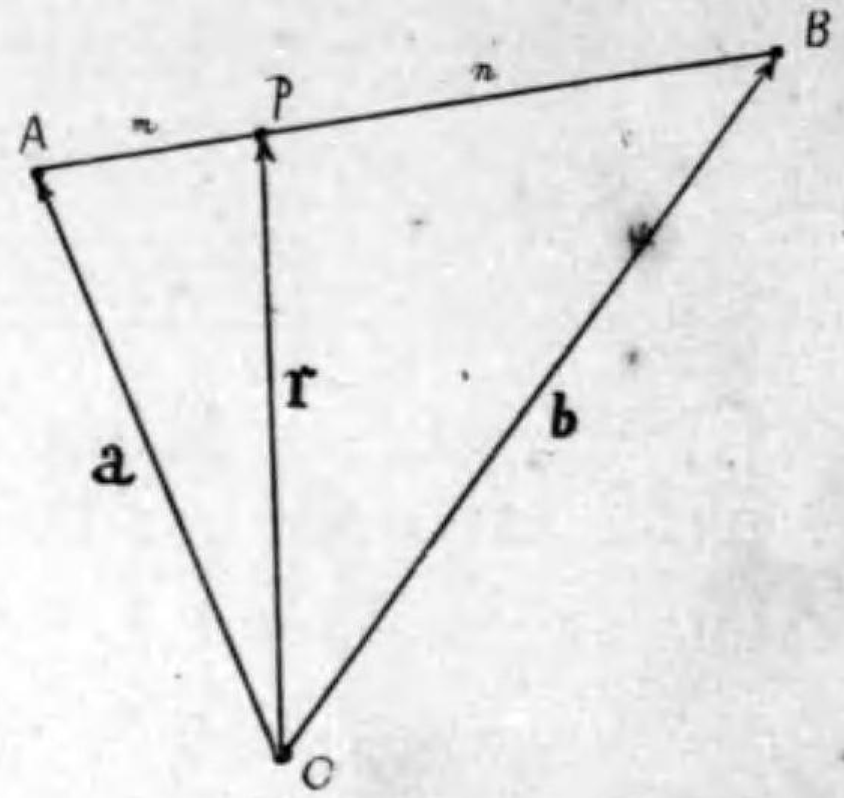
§7.6　例題

(1)　二點 A, B 間を m と n との比に分つ點の位置を求めよ。

任意の原點 O から A, B にひいた位置ベクトルを夫々 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$; 求める點 P の動徑を $\boldsymbol{r}$ とすれば,問題により

$$n\overline{AP}=m\overline{PB}$$

第十四圖



$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

よつて

$$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

$$\therefore\ \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$$

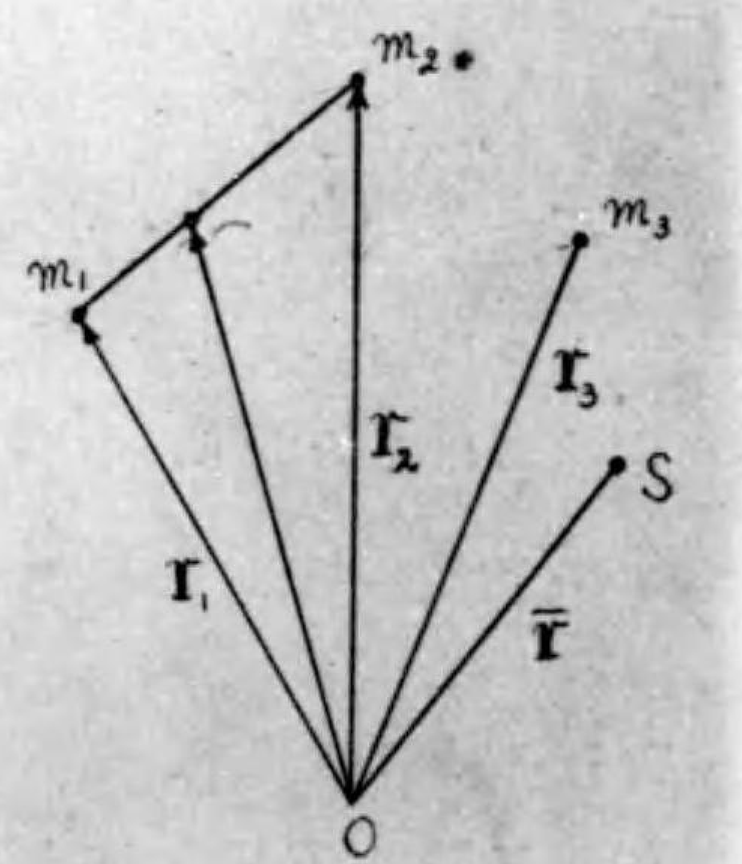
$$=\boldsymbol{a}+\frac{m}{m+n}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

$$=\frac{n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}}{m+n}$$

(2) 重心

n 個の質點の質量を夫々 $m_1, m_2, \dots, m_n$, 動徑を夫々 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_n$ とする。

第十五圖



m_1 と m_2 との重心は,その二點の距離を,質量の比に反比例するやうに分つ點である。

その二つの質點の重心への動徑を $\boldsymbol{r}_{12}$ とすれば,前例により

$$\boldsymbol{r}_{12}=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}$$

これと m_3 との重心を $\boldsymbol{r}_{12,3}$ とすれば

$$\boldsymbol{r}_{12,3}=\frac{(m_1+m_2)\boldsymbol{r}_{12}+m_3\boldsymbol{r}_3}{(m_1+m_2)+m_3}$$

$$=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+m_3\boldsymbol{r}_3}{m_1+m_2+m_3}$$

これは m_1, m_2, m_3 の重心への動徑である。

以下同樣にして求めてゆけば,n 個の質點の重心 S への動徑 $\bar{\boldsymbol{r}}$ は

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+\dots+m_n\boldsymbol{r}_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}=\frac{\sum m\boldsymbol{r}}{\sum m}$$

n 個の質點の全體の質量を M とすれば, $\sum m=M$ であるから

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\frac{\sum m\boldsymbol{r}}{M} \quad\dots\dots\dots\dots(14.1)$$

もし質點が密集して連續體をなしてゐるものを固體と考へるならば,その重心は容易く

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\frac{\int \boldsymbol{r}\,dm}{\int dm}=\frac{\int \boldsymbol{r}\,dm}{M}$$

積分は固體全體についてとればよい。

固體の密度を ρ, $d\tau$ を容積要素とすれば,重心は

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\frac{\int \rho\boldsymbol{r}\,d\tau}{\int \rho\,d\tau}=\frac{\int \rho\boldsymbol{r}\,d\tau}{M} \quad\dots\dots\dots\dots(14.2)$$

である。

是等の關係式を直角成分で表はせば,

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\bar{x}\boldsymbol{i}+\bar{y}\boldsymbol{j}+\bar{z}\boldsymbol{k},$$

質點の組合にては

$r_t=x_t\,i+y_t\,j+z_t\,k,\qquad (t=1,\ 2,\ldots.n)$

とおけば

$$M\bar{x}=\sum mx,\ \text{etc.}$$

連續體にては

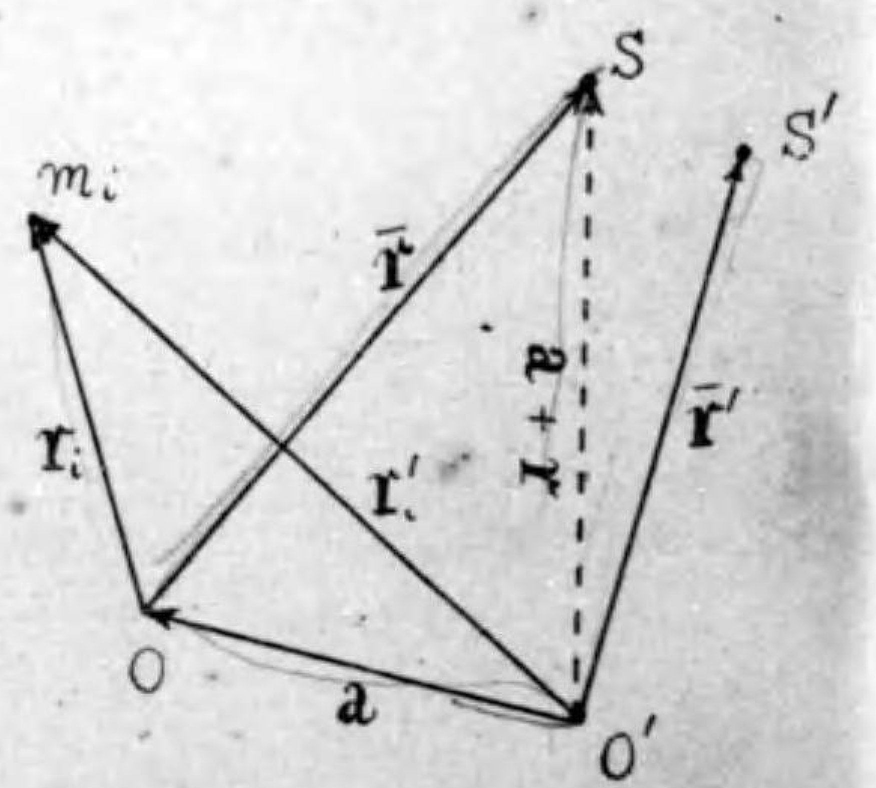
$$\bar{x}=\frac{\iiint \rho x\,dx\,dy\,dz}{\iiint \rho\,dx\,dy\,dz},\ \text{etc.}$$

で示される。

(3) 重心は原點の擇み方に關係しないことを證明なさい。

$O,\ O'$ を二つの原點; O' からひいた各質點の動徑へは符號 (′) をつけて $r_t'(t=1,2,\ldots.n)$ で表はす。

第 十 六 圖



$$\overrightarrow{OS}=\bar{r}=\frac{\sum mr}{\sum m}$$

假りに,原點を O' にしたために,重心の位置が變るものとして,その重心を S', 動徑を $\bar{r}'$ とすれば

$$\overrightarrow{O'S'}=\bar{r}'=\frac{\sum mr'}{\sum m}$$

$\overrightarrow{O'O}=a$ とおけば

$r_t'=a+r_t,\ (t=1,\ 2,\ldots.n)$

よつて

$$\bar{r}'=\frac{\sum m_t(a+r_t)}{\sum m_t}=a+\frac{\sum mr}{\sum m}$$

$$=a+\bar{r}=\overrightarrow{O'S}$$

即ち

$$\overrightarrow{O'S'}=\overrightarrow{O'S}$$

S と S' とは畢竟同じ點になるから,重心は原點の擇み方に關係しないことがわかる。

重心を原點に擇べば $\bar{r}=0$ であるから,重心に關しては恒に

$$\sum mr=0$$

が成り立つことは重心の大切な性質である。

(4) n 個のベクトル $q_1,\ q_2,\ldots.q_n$ の間に

$$x_1q_1+x_2q_2+\ldots.+x_nq_n=0$$

のベクトル方程式が,原點の擇び方に關係なく成立つためには,係數の和が恒に零にならなければならない。

原點を今 O から O' に變へ, $\overrightarrow{O'O}=a$ とすれば,方程式は

$$x_1(q_1+a)+x_2(q_2+a)+\ldots.+x_n(q_n+a)=0$$

即ち

$$(x_1q_1+x_2q_2+\ldots.+x_nq_n)+a(x_1+x_2+\ldots.+x_n)=0$$

$$\therefore\ a(x_1+x_2+\ldots.+x_n)=0$$

即ち $\boldsymbol{a}$ の値に拘らず成り立つためには,是非とも

$$x_1+x_2+\dots+x_n=0$$

(4) (3)の問題について考へれば

$$\left(\sum m\right)\bar{\mathbf{r}}-(m\,\mathbf{r}_1+m\,\mathbf{r}_2+\dots+m_n\mathbf{r}_n)=0$$

即ち係數の間には

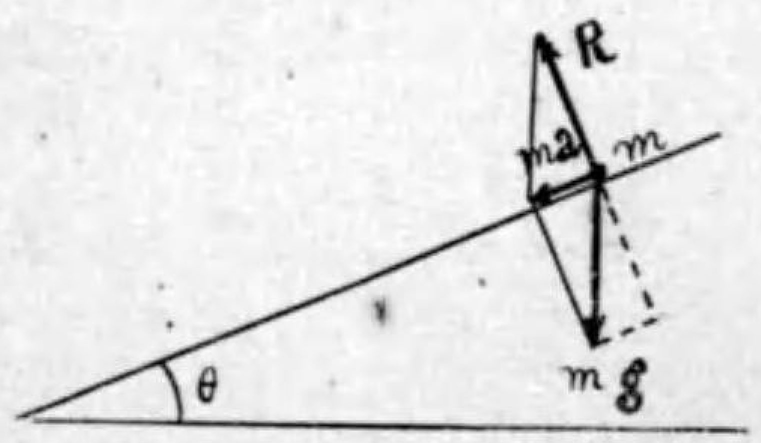
$$\sum m-(m_1+m_2+\dots+m_n)=0$$

の關係が成立すること明かである。

(5) 質點が滑らかな斜面の上を落下するときの運動を調べよ。

質點の質量を m とすれば,重力は鉛直に $m\boldsymbol{g}$ ($\boldsymbol{g}$ は重力の加速度); 斜面は滑らかであるから,斜面の及ぼす反作用の力 $\mathbf{R}$ は面に垂直に働く,質點の受ける力は $m\boldsymbol{g}+\mathbf{R}$, 質點はこの力の作用を受けて斜面の上を滑る,加速度を $\boldsymbol{a}$ とすれば

第十七圖



$$m\boldsymbol{g}+\mathbf{R}=m\boldsymbol{a}$$

斜面の傾斜角を θ とし,面に平行竝に垂直な方向の成分に分ければ

$$\left.\begin{aligned}R-m\,g\cos\theta&=0\\ m\,g\sin\theta&=ma\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}R&=m\,g\cos\theta\\ a&=g\sin\theta\end{aligned}\right\}$$

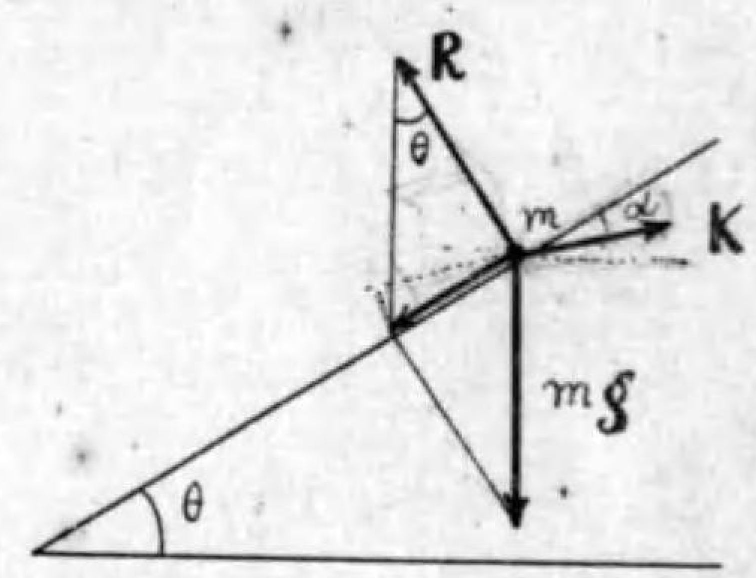
(6) 質量 m の質點を,傾斜角 θ の滑らかな面の上で支へるための力竝びに面の反作用の力を求める。

必要な力を $\mathbf{K}$ とすれば,質點は靜止してゐるから,質點に働く力の合力は零である。即ち

$$\mathbf{K}+m\,\boldsymbol{g}+\mathbf{R}=0$$

$$\therefore\quad \mathbf{K}=-\mathbf{R}-m\,\boldsymbol{g}$$

第十八圖



X 軸を面に沿ふて上方に, Y 軸を面に垂直に上方に向けてとる, $\mathbf{K}$ の成分を X, Y とすれば

$$\left.\begin{aligned}X&=m\,g\sin\theta\\ Y&=-R+m\,g\cos\theta\end{aligned}\right\}$$

(a) 假りに力を面に沿ふて働かせるとすれば

$$Y=0$$

$$\therefore\quad K=X=mg\sin\theta$$

$$R=mg\cos\theta$$

(b) もし力が水平に作用すれば

$$X=K\cos\theta=mg\sin\theta$$

$$Y=K\sin\theta=-R+mg\cos\theta$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}K&=mg\tan\theta\\ R&=mg\sec\theta\end{aligned}\right\}$$

(c) もし力が面と α の角をしてゐれば

$$K=\frac{mg\sin\theta}{\cos(\alpha-\theta)}$$

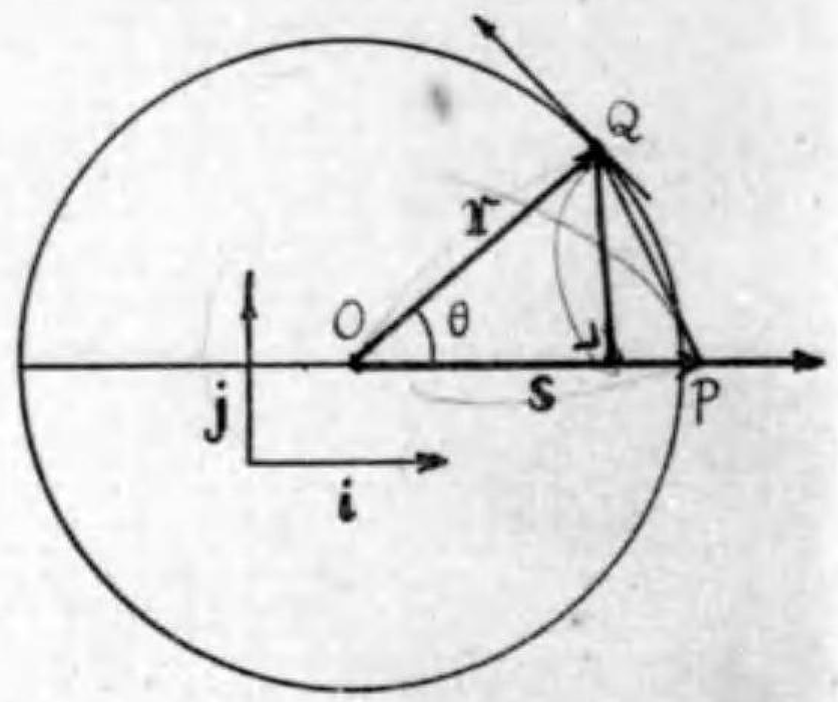
$$R=\frac{mg\sin\theta}{\cos(\alpha-\theta)}$$

(7) 二つの質點, Q は半徑 a の圓周上を, P はその直徑の上を, 同じ速さ v で動いてゐるとき,二點の距離を求める。

時刻 t に於ける, P の動徑を $\mathbf{s}$, Q の動徑を $\mathbf{r}$ とし,圓の中心を原點に, P の運動する直徑を X 軸に, Y 軸をこれに垂直にとれば,

$$\mathbf{s}=(vt+b)\,\mathbf{i}$$

第十九圖



但し b は最初 ($t=0$ の時) に於ける P と中心との距離。

θ を OP と OQ とのつくる角とすれば

$$\theta=\frac{v}{a}t+\varepsilon$$

ε は $t=0$ に於ける Q 點の位相。

よつて

$$\mathbf{r}=a\cos\theta\,\mathbf{i}+a\sin\theta\,\mathbf{j}$$

$\vec{PQ}=\mathbf{q}$ とおけば

$$\mathbf{q}=\mathbf{r}-\mathbf{s}$$

は P に對する Q の位置を示す。

乃ち

$$q_x=a\cos\theta-(vt+b)$$

$$q_y=a\sin\theta$$

二點の距離は $\mathbf{q}$ の率 q に等しい,

$$q=\sqrt{q_x^2+q_y^2}$$

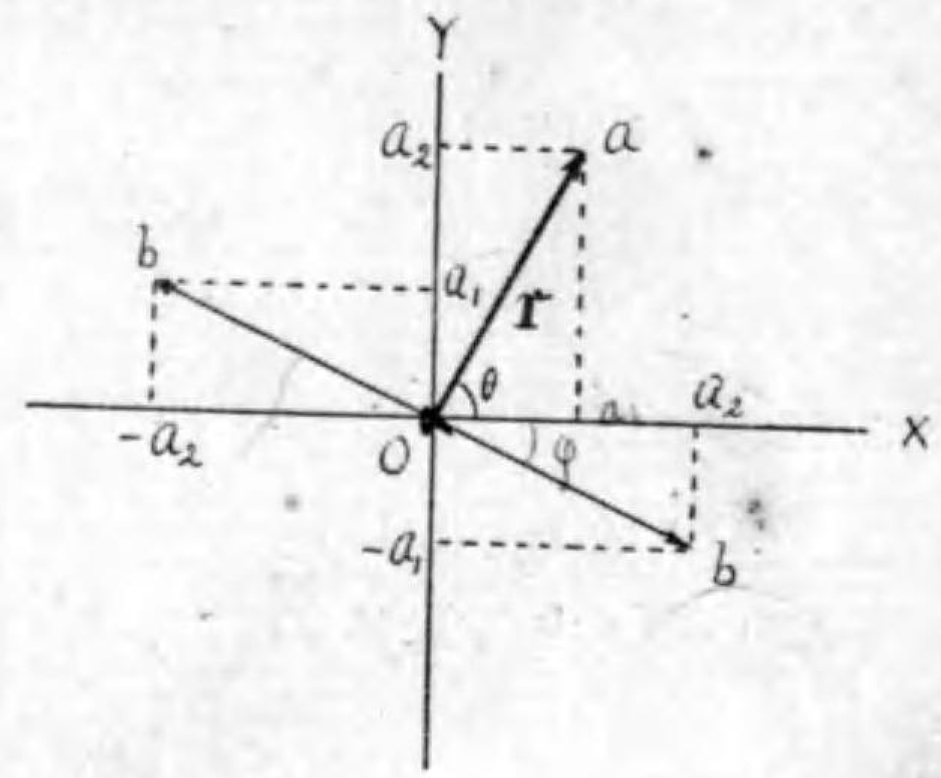
もし $t=0$ の時, P は O に, Q が直徑上にあれば $b=0$, $\varepsilon=n\pi$ (n は整數),

$$q=\sqrt{v^2t^2+a^2-2\,avt\cos\left(\frac{v}{a}t\right)}$$

(8) ベクトル $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$ に垂直で,長さの等しい,同一平面内にあるベクトルをもとめる。

X 軸と $\mathbf{a}$ との交角を θ とすれば

第二十圖



$$a_1=a\cos\theta,$$

$$a_2=a\sin\theta.$$

$\mathbf{a}$ に垂直なベクトル $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}$ と X 軸との交角を φ とすれば

$$b_1=b\cos\varphi,$$

$$b_2=b\sin\varphi.$$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は互に垂直であるから

$$\varphi=\theta\pm\frac{\pi}{2}$$

長さが等しいから

$$b=a$$

從つて

$$b_1=a\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=\mp a_2$$

$$b_2=a\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm a_1$$

卽ち

$$\mathbf{b}=\pm(a_2\mathbf{i}-a_1\mathbf{j})$$

第二章 ベクトルの積

§8.1 スカラー積

スカラー量の積の概念を擴張して,こゝにベクトル量の積を研究する。先づその土臺になるスカラー積とベクトル積とを考へよう。

§8.11 [定義] 二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の率の積にそのベクトルのつくる角度の餘弦を乘じたものを, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**スカラー積**といひ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ で表はす。

θ を二つのベクトルの間の角度とすれば

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a\,b\cos\theta \quad\cdots\cdots(15)$$

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは異る種類の量であつて差支ない。そのスカラー積はスカラー量であり,一般に $\boldsymbol{a}$ や $\boldsymbol{b}$ とは異ふ元の量である。

§8.111 スカラー積を表はすためにこゝに用ゐた記號・は,前に述べたやうに Gibbs の用ゐたもので,ドイツ系統では括弧(·)で括るか,又は何も符號なしに只 $\boldsymbol{ab}$ と書いた書物が多い。然し實際使用してみると,括弧は非常に紛らはしい,符號なしに並べたものは,後に到つて,ベクトルよりも一層高次の量を表はすに用ゐるので,矢張り Gibbs の記號がよいものと思はれる。

§8.12 定義から直に

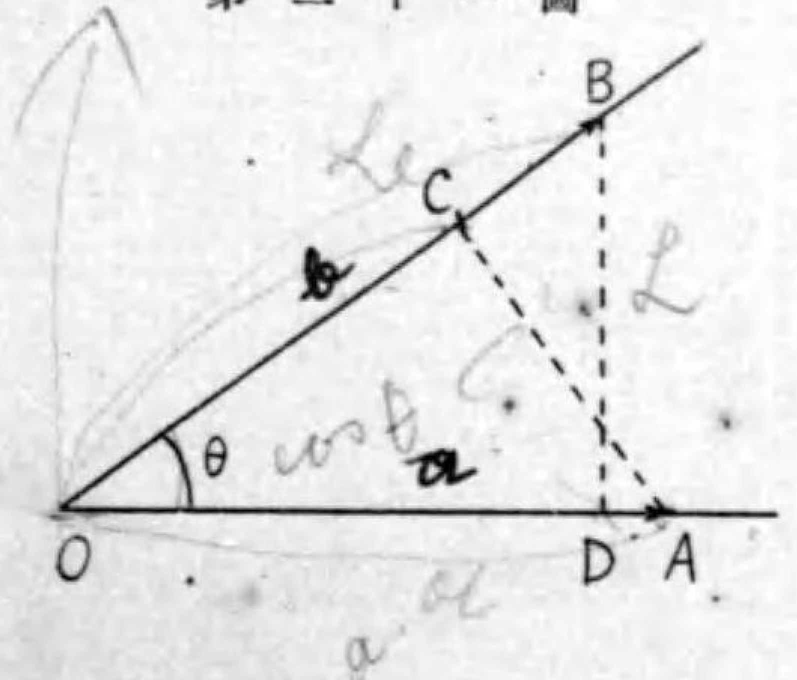
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \quad\cdots\cdots(16)$$

スカラー積は交換の法則に從ふ,これはスカラー積の特徴で,後に述べるベクトル積と異ふ著るしい點である。

第21圖からわかることは

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\overline{OA}\,.\,\overline{OD}=\overline{OB}\,.\,\overline{OC}$$

第二十一圖



即ち $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のスカラー積は, $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ の方向に於ける成分と b の積或は $\boldsymbol{a}$ の方向に於ける $\boldsymbol{b}$ の成分と a の積とも見られる。

從つてもし $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{b}$ に垂直ならば $(\cos\theta=0)$,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \quad\cdots\cdots(16.1)$$

もし $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{b}$ に平行ならば $(\cos\theta=1)$,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a\,b \quad\cdots\cdots(16.2)$$

特に $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ ならば

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a^2 \quad\cdots\cdots(16.3)$$

略して此の場合には $\boldsymbol{a}^2$ と書くことにする,

$$\boldsymbol{a}^2\equiv\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a^2$$

この關係によつて,任意のベクトルの率を求めるには,それ自身のスカラー積の平方根を求めればよいことがわかる。

$a=\sqrt{aa}$

注意しなければならないことは，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ の時普通のスカラー量の積のやうにして，$\boldsymbol{a}=0$ 若しくは $\boldsymbol{b}=0$ としてはならない。その式は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが互に垂直であるといふことを示してゐる。然しその一つのベクトル,例へば $\boldsymbol{b}$ が任意などんなベクトルであるにしても恆に

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

の關係が成り立つならば

$$\boldsymbol{a}=0$$

でなければならない。この後の考へ方は,積分の式から微分方程式をつくる時,或は假想的の變化を與へて釣合の狀態を求める場合等に,屢々用ゐられる大切な推理の方法である。

§8.13　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が基本ベクトルであるときは,定義により直に

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1 \\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0 \end{array}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots(17)$$

これは極めて重要な關係式である。

§8.14　第22圖を見れば,積に於ける一つのベクトルが合成ベクトルであるときの關係が求まる。

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{c}=\overline{OB'}\times\overline{OC}$$
$$=(\overline{OA'}+\overline{A'B'})\times\overline{OC}$$
$$=\overline{OA'}\times\overline{OC}+\overline{A'B'}\times\overline{OC}$$

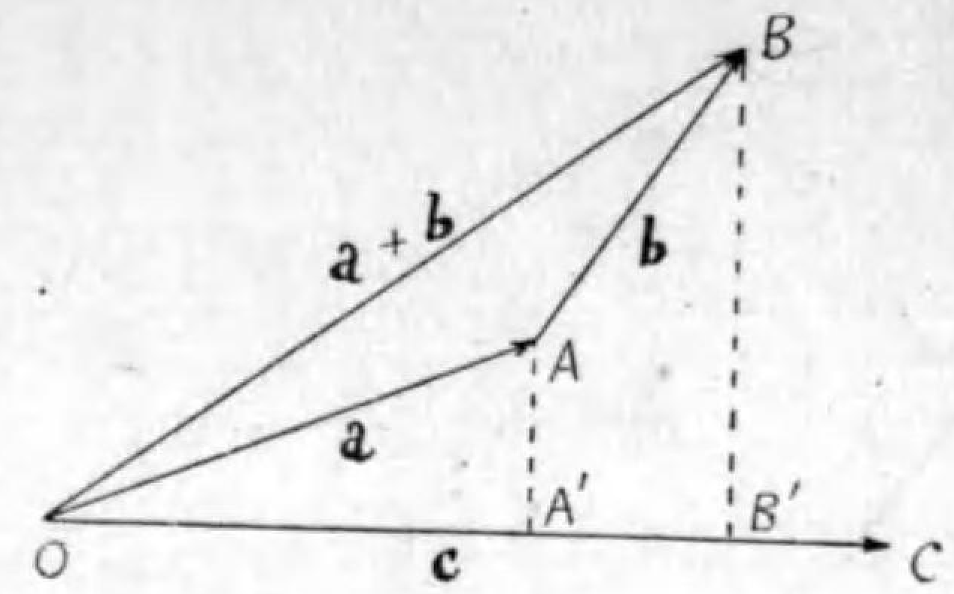
$$\therefore\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{c}=\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c}+\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{c}\quad\cdots\cdots\cdots(18)$$

~~(a+b)·c ⟹ a·c+b·c デアルガ逆ニ~~
~~a·c+b·c = (a+b)·c トハ一般ニ成立ス。~~

ベクトルの和と他のベクトルとのスカラー積は,スカラー積の和に等しい。

即ちスカラー積は配分の法則に從ふ。

第　二　十　二　圖



この結果は直に數個のベクトルの和に擴張することができる：即ち

$$\left(\sum \boldsymbol{a}\right)\cdot\boldsymbol{b}=\sum \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

§8.15　ベクトルを成分にわけたものについてスカラー積の成分の形を調べておく必要がある。

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の直角成分を夫々 (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) とすれば

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1\,\boldsymbol{i}+a_2\,\boldsymbol{j}+a_3\,\boldsymbol{k})\cdot(b_1\,\boldsymbol{i}+b_2\,\boldsymbol{j}+b_3\,\boldsymbol{k})$$

前二節の關係を應用すれば　$a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\quad\cdots\cdots\cdots(19)$$

二つのベクトルのスカラー積は,相當する方向の直角成分の積の和に等しい.これをスカラー積の定義にしてもよい。

§8.16　スカラー量 $n(=n'n'')$ を $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ に乘ずれば

$$n(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=n\,a\,b\cos\theta$$
$$=(n\,\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(n\,\boldsymbol{b})$$
$$=(n'\,\boldsymbol{a})\cdot(n''\,\boldsymbol{b})\quad\cdots\cdots\cdots(20)$$

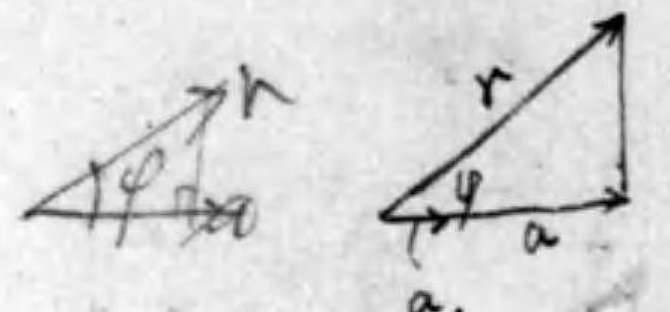
即ち二つのベクトルのスカラー積を n 倍したものは,その何れか一つのベクトルを n 倍したものと他のベクトルのスカラー積,

或は n を任意に分割して二つのベクトルに分けて乗ずることもできる。

unit Vektor

§ 8.17 もしベクトル $\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{a}$ と角度 φ の傾をしてゐるとき, $\boldsymbol{a}$ の方向の分ベクトルは

$$r\cos\varphi\,\boldsymbol{a}_1=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}}{a^2}\boldsymbol{a}$$



$\boldsymbol{a}$ に垂直な分ベクトルは

$$\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}}{a^2}\boldsymbol{a}$$

である。(§ 11.22 參照)

§ 8.18 任意のベクトル $\boldsymbol{q}$ の成分は

$$q_x=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{i},\quad q_y=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{j},\quad q_z=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k}$$

であるから

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$$

といふ形になる。

$(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}$ のやうなベクトル量は括弧を省いて $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}$ と書いても當然 $(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}$ の意味に解すべきで, $\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{i}\boldsymbol{i})$ のやうに見做すことは今迄のところその括弧の中の量が如何なる意味をもつてゐるかわからないから許されない(第三編參照)。從つて括弧を省いて記した $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}$ は, $\boldsymbol{i}$ と同じ方向の大さ $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{i}$ のベクトルと解すべきであるから

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}$$

と書くことができる。

§ 8.19 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ を二つの單位ベクトルとすれば

$$\boldsymbol{a}_1=\lambda_1\boldsymbol{i}+\mu_1\boldsymbol{j}+\nu_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{b}_1=\lambda_2\boldsymbol{i}+\mu_2\boldsymbol{j}+\nu_2\boldsymbol{k}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1=\cos\theta=\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2 \qquad (21)$$

これは二つのベクトルのつくる角の餘弦を,各々の方向餘弦によつて表はす式である。 §8.15 から直に導かれる

§ 8.191 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ならば

$$c^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$=a^2+b^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

は,幾何學で知つてゐる

$$c^2=a^2+b^2+2ab\cos\theta \qquad (22)$$

の關係をベクトルで表はしたのである。

§ 8.2 例題

(1) 質點に力 $\boldsymbol{K}$ が働いて, $\boldsymbol{s}$ だけ變位したとき,力のする仕事 W は

$$W=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{s}$$

で表はせる。

もし力が變位に垂直ならば,力のする仕事は零になる。

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{s}=0 \quad 從つて \quad W=0$$

數個の力 $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \ldots \boldsymbol{K}_n$ が作用してゐるときは

$$W=\sum(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{s})=\left(\sum\boldsymbol{K}\right)\cdot\boldsymbol{s}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{s}$$

こゝに

$$\boldsymbol{R}=\sum\boldsymbol{K}$$

仕事は合力 **R** のする仕事に同等である。

力の直角成分を (X, Y, Z), 變位の成分を (x, y, z) とすれば,仕事を直角成分で表はした式を得る。 $K=Xi+Yj+Zk$, $s=xi+yj+zk$ の scalar product.

$$W=Xx+Yy+Zz$$

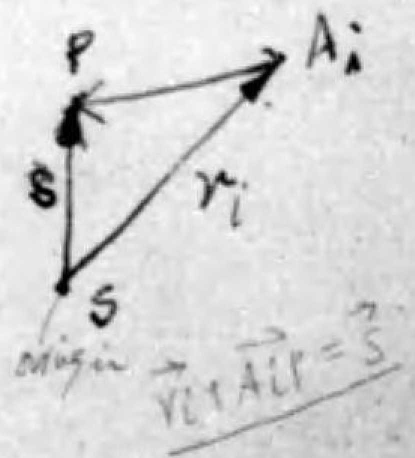
(2)　質量 $m_1, m_2, \ldots . m$ の質點が,夫々 $A_1, A_2, \ldots . A_n$ の點にあつて,その重心が S にあるとき,任意の點 P に關して

$$m_1\overline{A_1P}^2+m_2\overline{A_2P}^2+\ldots .+m_n\overline{A_nP}^2$$
$$=m_1\overline{A_1S}^2+m_2\overline{A_2S}^2+\ldots .+m_n\overline{A_nS}^2+(\Sigma\, m)\overline{PS}^2.$$

になることを證明しよう。

重心 S を原點にとつて,各點へひいた動徑を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots . \mathbf{r}_n$ とすれば, (§ 7.6 の例 3) により

$$\sum_{i=1}^{n} m\,\mathbf{r}_i=0$$



$\overrightarrow{SP}=\mathbf{s}$ とおけば

$$\overrightarrow{A_iP}=\mathbf{s}-\mathbf{r}_i,\ (i=1, 2, \ldots . n)$$

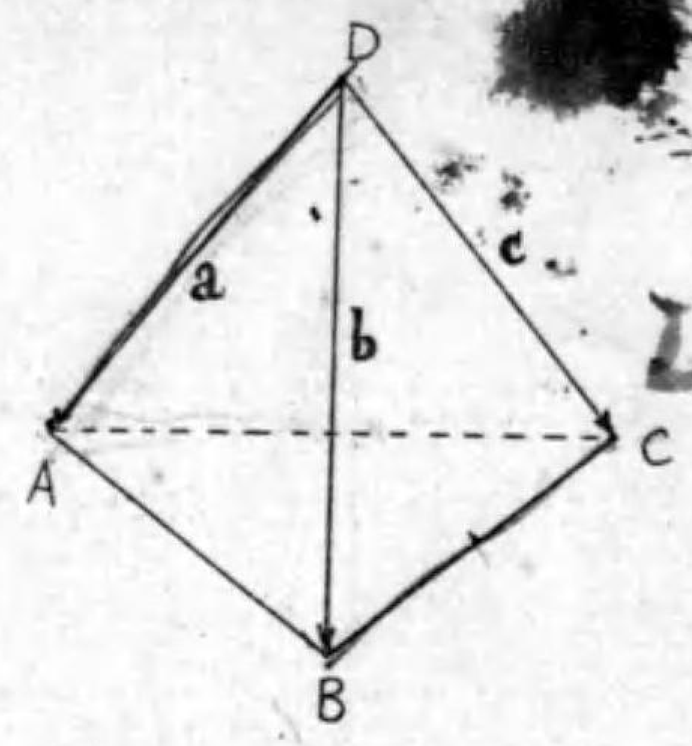
よつて

$$\sum m_i\,\overline{A_iP}^2=\sum m_i\,(\mathbf{s}-\mathbf{r}_i)^2$$
$$=\sum m_i\,(\mathbf{s}^2-2\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}_i+\mathbf{r}_i^2)$$
$$=\mathbf{s}^2\sum m_i-2\,\mathbf{s}\cdot\sum m_i\mathbf{r}_i+\sum m_i\mathbf{r}_i^2$$
$$=\overline{SP}^2\left(\sum m_i\right)+\sum m_i\,\overline{A_iS}^2$$

これは剛體の場合に於ける,慣性能率に關する定理に相當するものである。

(3)　四面體の二對の相對する邊が,夫々互に垂直なときは,(i) 殘の一對の相對する邊は互に垂直で(ii)且つ相對する邊の平方の和は相等しい。

第 二 十 三 圖



四面體の一つの頂點 D から,他の三つの頂點にひいたベクトルを $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ とすれば

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a},$$
$$\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a},$$
$$\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}-\mathbf{c}.$$

(i)　今 BD と AC が互に垂直ならば

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$$
$$\therefore\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

又 DA が BC に垂直ならば

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$
$$\therefore\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$$

從つて

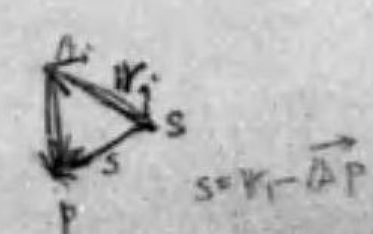
$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$$

卽ち CD は BA に垂直になる

(ii)　次に,今 DA と BC の一對について考へれば,

$$\overline{DA}^2+\overline{BC}^2=\mathbf{a}^2+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2$$
$$=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$

然るに $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ であるから,この和は,すべての一對の相對する邊について一定の値をもつ。



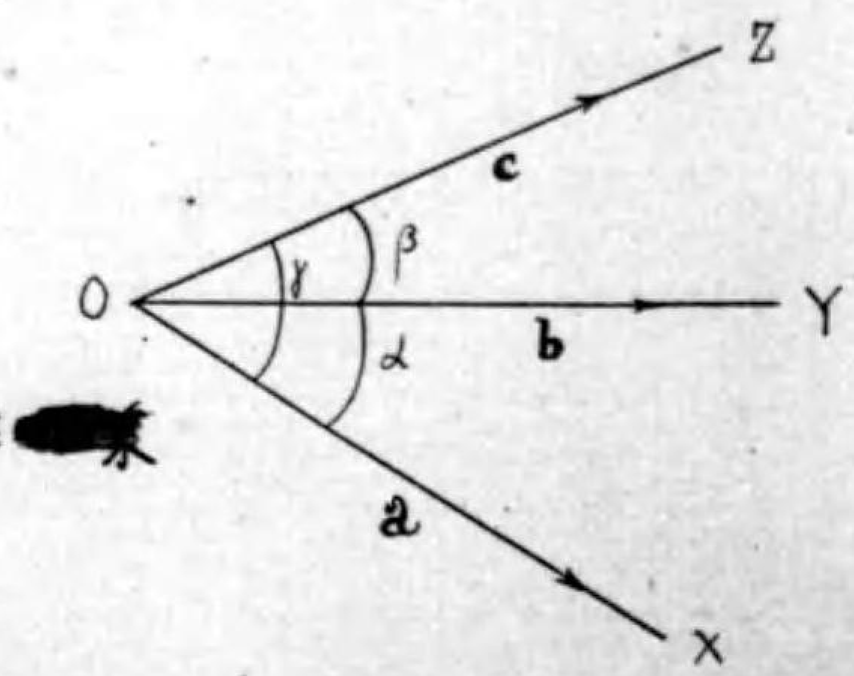
§ 8.3　斜交軸

斜交軸に關する問題は,ベクトルによつて容易く解くことができるから,こゝに二三の例を示しておく。

(1)　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を斜交軸に沿ふてとつた單位ベクトル,軸角を α, β, γ とすれば

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\cos\alpha,\quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\cos\beta,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\gamma$$

第二十四圖



(2)　任意の點 P の動徑 $\boldsymbol{r}$ は(§ 6.3)により共面でないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ によつて

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$$

となる,從つて原點からの距離[redacted]は

$$\boldsymbol{r}^2=(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c})^2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2xy\cos\gamma$$

である。

(3)　二點 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) 間の距離は

$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+2(y_2-y_1)(z_2-z_1)\cos\alpha+\ldots\ldots$$

で與へられる。

(4)　P にひいた動徑の方向餘弦を (λ, μ, ν) とすれば,λ は $\boldsymbol{a}$ 軸と $\overrightarrow{OP}$ との挾む角の餘弦である。即ち

$$\lambda=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{x+y\cos\gamma+z\cos\beta}{\sqrt{x^2+\ldots\ldots+2yz\cos\alpha+\ldots\ldots}}$$

μ, ν も同樣にして得られる。

(5)　二點 P_1, P_2 間の角距離 φ は,動徑 $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ の挾む角度であるから,各單位ベクトルのスカラー積はその角度の餘弦になる。

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}{r_1r_2}=\frac{1}{r_1r_2}\{x_1x_2+\ldots\ldots+(y_1z_2+y_2z_1)\cos\alpha+\ldots\ldots\}$$

§ 9.1　ベクトル積

スカラー量の乘積や,ベクトル量のスカラー積でも,今迄吾々が知つてゐる數量の積はどれでも交換の法則に從はないものはなかつた。これから研究しようといふベクトル積は,交換の法則に從はない量の一つで,近代の數學や物理學に於いては,このやうな種類の量が極めて重要な役目をしてゐる(第三編參照)。

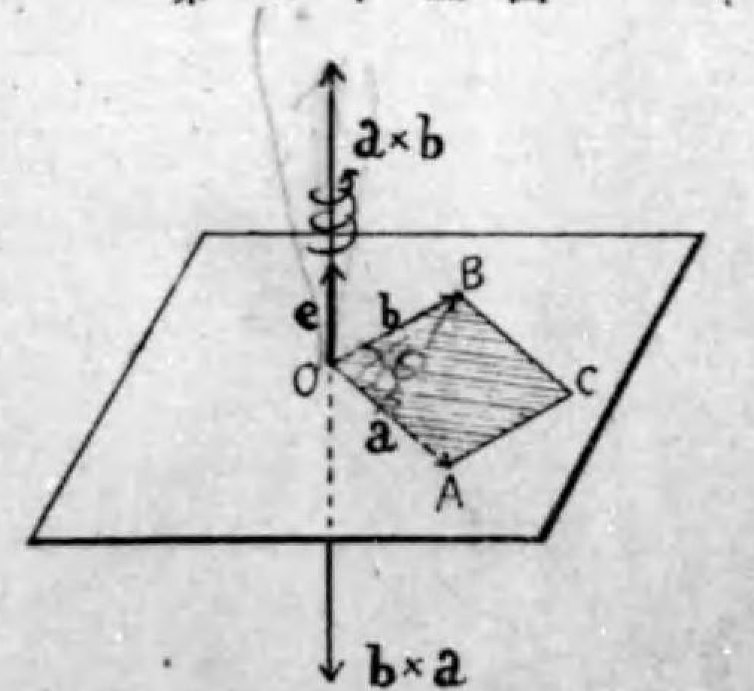
§ 9.11　[定義]

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**ベクトル積** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}ab\sin\theta, \qquad\ldots\ldots(23)$$

$\boldsymbol{e}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の面に垂直な單位ベクトルで,その向きは,普通の螺旋を初めに書いたベクトル $(\boldsymbol{a})$ から次のベクトル $(\boldsymbol{b})$ の方へ廻したとき螺旋の進む向きをさしてゐるやうにきめる。

第二十五圖



ベクトル積の記號には,Grassmann

の記號 [$\boldsymbol{ab}$] を用ゐた書物が多いが,括弧は極めて紛らはしいので,矢張り Gibbs の記號 × を用ゐるのが便利である。

ベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はベクトル量であつて,定義により $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の双方に垂直な方向にあり,その大さは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とを二邊にする平行四邊形の面積に等しい。

$$\square OACB = ab\sin\theta = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$$

§9.12　定義によつて明かに,もし $\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ の方に螺旋を廻轉すれば,螺旋の進む向きは逆になるから,符號が反對になる。卽ち

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \quad\cdots\cdots(24)$$

ベクトル積は交換の法則に從はない。

§9.13　もし $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{b}$ に平行ならば, $\sin\theta=0$ であるから

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0 \quad\cdots\cdots(24.1)$$

當然その結果として

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0 \quad\cdots\cdots(24.2)$$

である。

スカラー積のとき注意したやうに, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$ は必ずしも $\boldsymbol{a}=0$, $\boldsymbol{b}=0$ といふことを意味しない。一般に $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは平行であることを示すので,只そのいづれか一つ,例へば $\boldsymbol{a}$ が如何なるベクトルであつても,恆に $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とのベクトル積が零であるならば, $\boldsymbol{b}=0$ でなければならない。] 等ン 大23.

§9.14 基本ベクトルのベクトル積

二つの基本ベクトルのベクトル積は,大さは 1 で,方向は他の基本ベクトルと同じ方向になるから,正坐標軸については次の關係になることは明かである。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} &= \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} &= \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} &= \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(25.1)$$

ベクトル積をとる順序は $\boldsymbol{ijk}$ の輪廻順,卽ち ijk, jki, kij の順を保つてゐればよいが,その順が狂ふと符號も變ることに注意する必要がある。

ベクトル自身のベクトル積は恆に零である。

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0 \quad\cdots\cdots(25.2)$$

是等は極めて重要な關係式である。

§9.15　(§8.16) と同樣に,任意のスカラー量 n を,ベクトル積に乘するのは,その何れのベクトルに乘じてもよいし,又は任意に二つに分けて乘じても差支ない。卽ちベクトル積とスカラー量との積は結合の法則に從ふ。

$$n(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(n\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(n\boldsymbol{b})=(n'\boldsymbol{a})\times(n''\boldsymbol{b})$$

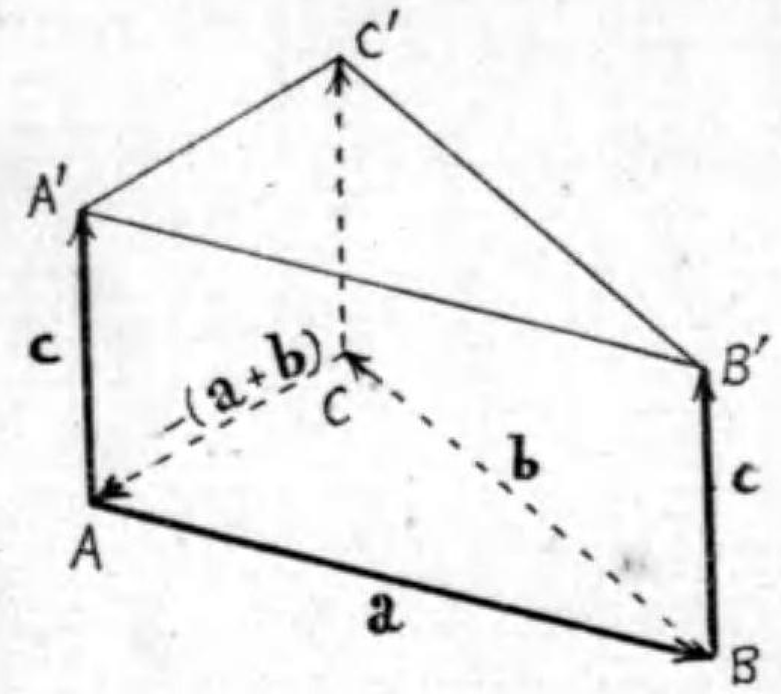
§9.16　ベクトル積が配分の法則に從ふことは種々の證明が試みられてゐる。こゝには物理的に證明してみよう。

閉ぢた多面體を靜水中に沈めると,その各面に働く壓力は面に

垂直な所謂**靜水壓**であつて,力は釣合ひの狀態になつてゐる。各面に働く力はその面の面積に比例するから,法線の方向にとつた面に作用する全壓力に比例する長さのベクトルで力を代表することができる。

力が釣合つてゐることの條件は(§4.3)によつて,その力を代表するベクトルで作つた多邊形か閉ぢればよい。即ち合力が零になることである。

第二十六圖



この事はどんな曲面をもつ多面體でも成り立たねばならないから,證明には一番簡單な多面體,乃ち平面で限られた極めて小さい三稜體(プリズム)をとつて考へよう。

三角形の邊を順次 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ とすれば,任意のベクトル $\boldsymbol{c}$ を稜,三角形を底面とした三稜體が考へられる。この三稜體の面の面積をベクトルで表はせば,

$$ABB'A'=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}, \qquad BCC'B'=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

$$CAA'C'=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}, \qquad ABC=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

$$A'B'C'=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

三稜體はいくら小さくてもよいから極めて小さくて各面に働く壓力(單位面積に働く力)は等しいと考へて差支ないので,全壓力の合力が零といふことは,全體の和が零になることになる。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+\cancel{\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}-\cancel{\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}=0$$

即ち

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \quad\cdots\cdots\cdots(26)$$

これはベクトル積が配分の法則に從ふことを示してゐる。

§9.161 いくつかのベクトルの和のベクトル積は,配分の法則を順次に應用すれば求まる。

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$$

因数?

たゞ積に於いて項の順序を變へないやうに注意しなくてはならない。更に一般に

$$\sum_i \boldsymbol{a}_i \times \sum_j \boldsymbol{b}_j = \sum_{ij} \boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{b}_j$$

§9.2 ベクトル積の直角成分

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の成分を夫々 (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) とすれば

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$$

a_3 b

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k} \quad\cdots\cdots\cdots(27.1)$$

これは形式上からいつて行列式の形に纏めることができて,記憶にはその方が覺えよいであらう。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots(27.2)$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の直角成分は,この行列式の第一行の項に對する小行列式で表はせる: 即ち

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|_x=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

4|28

[illegible]同向vectorと見做して

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行ならば $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$, 行列式に於いて二つの行が比例するから $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$ となる。又第一行の項に對する小行列式は,面積の坐標軸面上の射影を意味することは解析幾何學の定理で明なことである。卽ちこの行列式は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の圍む面積を示すこともわかる。ベクトル積をこの行列式によつて定義してもよい。

ベクトル積の率を直角成分で表はせば

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

$(a_2b_3-a_3b_2)^2$

§9.3 例題

(1)　$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ を單位ベクトル,その直角成分(方向餘弦)を $(\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1)$, $(\lambda_2,\ \mu_2,\ \nu_2)$ とすれば

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{e}\sin\theta=(\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1)\,\boldsymbol{i}+(\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1)\,\boldsymbol{j}+(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)\,\boldsymbol{k}$$

$$\therefore\quad \sin^2\theta=(\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1)^2+(\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1)^2+(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)^2$$

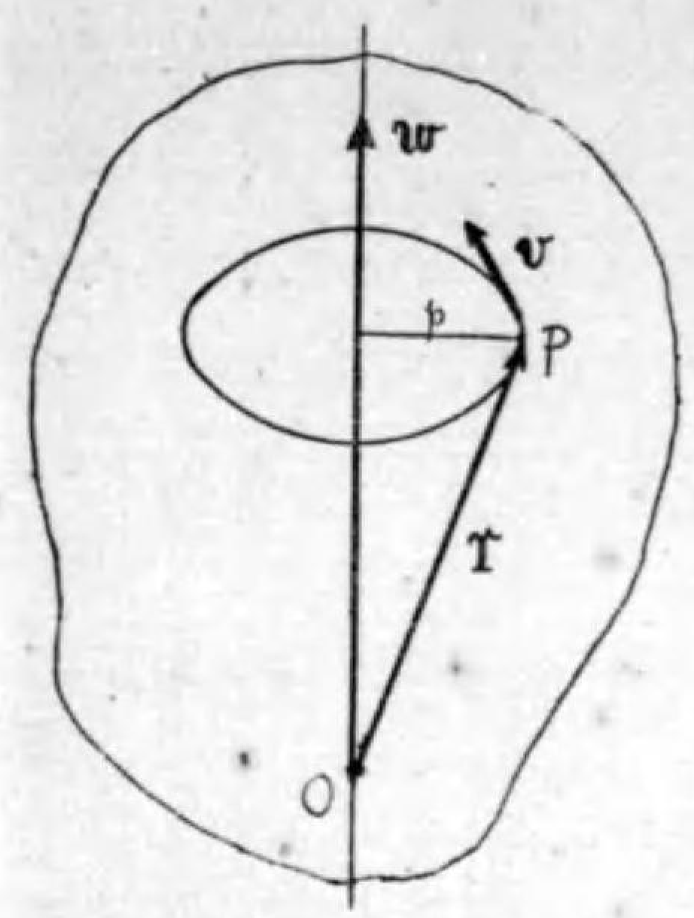
(2)　ベクトル積を行列式 (2.72) で定義すれば,配分の法則は行列式の性質によつて直にもとまる。

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

第二十七圖



(3)　剛體の廻轉

一直線を軸として,廻轉速度 $\boldsymbol{w}$ で廻る剛體の運動を考へる。剛體の一點 P の動徑 $\boldsymbol{r}$, その點の速度を $\boldsymbol{v}$, 速さを v, 軸からの距離を p とすれば

$$p=|\boldsymbol{r}|\sin(\boldsymbol{w},\boldsymbol{r})$$

故に P 點の速さは

$$v=|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{w}|\,p$$
$$=|\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}|$$

P 點の速度の方向は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{w}$ との平面に垂直で,向きは $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{r}$ の方に廻したとき螺旋の進む向きと同じであるから,ベクトルとして

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$$

で表はせる。

剛體が $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ の二つの廻轉速度を同時にもつてゐれば,P に於ける速度は

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{w}_1\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{w}_2\times\boldsymbol{r}$$
$$=(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)\times\boldsymbol{r}$$

然るに結果としては剛體は一つの角速度 $\boldsymbol{w}$ をもつて廻轉してゐるわけだから

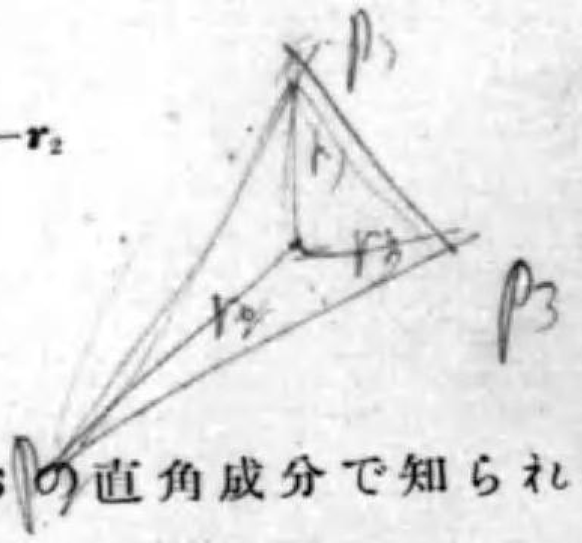
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2$$

卽ち廻轉速度はベクトル合成に從ふ。

物理學に於ける種々の量が,ベクトルとして表はせるときでも,それが合成に從ふかどうか調べなければならない。有限な廻轉は明らかにベクトル量である。然し二つの廻轉を順次に行ふときは,その順序によつて違ふことがある。但し同時に起つた二つの廻轉はベクトル合成に從ふ。數學で導いた結果が果して自然現象の說明にあふかどうかは調べた上でなければ用ゐられない。

(4)　三角形の頂點 P_1, P_2, P_3 へひいた動徑を夫々 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ とすれば



$$\overrightarrow{P_1P_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\qquad \overrightarrow{P_2P_3}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2$$

よつて面積は

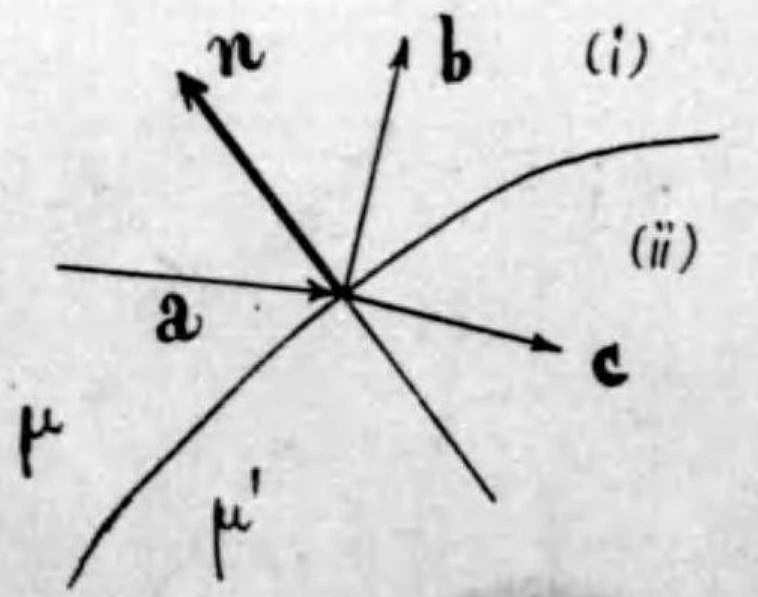
$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)$$

坐標軸面上の射影の面積は, $\mathbf{S}$ の直角成分で知られる。例へば X-Y 面上の面積は z 成分である。

$$S_z=\frac{1}{2}\{(x_2-x_1)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y_2-y_1)\}$$

(5) 反射屈折の法則

第二十八圖



二つの媒質の境界面に樹てた法線の單位ベクトル(以下單に法線ベクトルといふことにする) $\mathbf{n}$, 入射反射屈折光線に對する單位ベクトルを夫々 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ とする。第一,第二の媒質の屈折率を夫々 $\mu\,\mu'$ とすれば

反射の法則　$\mathbf{a}\times\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{n}$

屈折の法則　$\mu\mathbf{a}\times\mathbf{n}=\mu'\mathbf{c}\times\mathbf{n}$

で表はせる。Snellius の法則をベクトル式で表はしたもので,入射反射屈折光線と法線が同一平面内にあることも,角度の間の關係も,ともにこの式の中に含まれてゐる。

§10.1　能率

前章迄研究してきたものは自由ベクトルであつて,その位置はどこであつても,方向と向き竝びに大きさが等しければ,悉く等しいと見做されるものである。然し既に述べたやうに glissant, radial 等と呼ばれるベクトルはその位置が關係する。

ベクトルが束縛されてゐて,位置をも考へねばならないやうな場合には,主としてベクトルの能率 moment といふ量によつて影響されるから,能率を考に入れれば,自由ベクトルだけを研究すればよいことになる。

§10.11　一點に關するベクトルの能率

ベクトル $\mathbf{q}$, その作用する點の位置ベクトルが $\mathbf{r}$ ならば, $\mathbf{q}$ の能率 $\mathbf{N}$ といはれる量はベクトルであつて

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{q}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

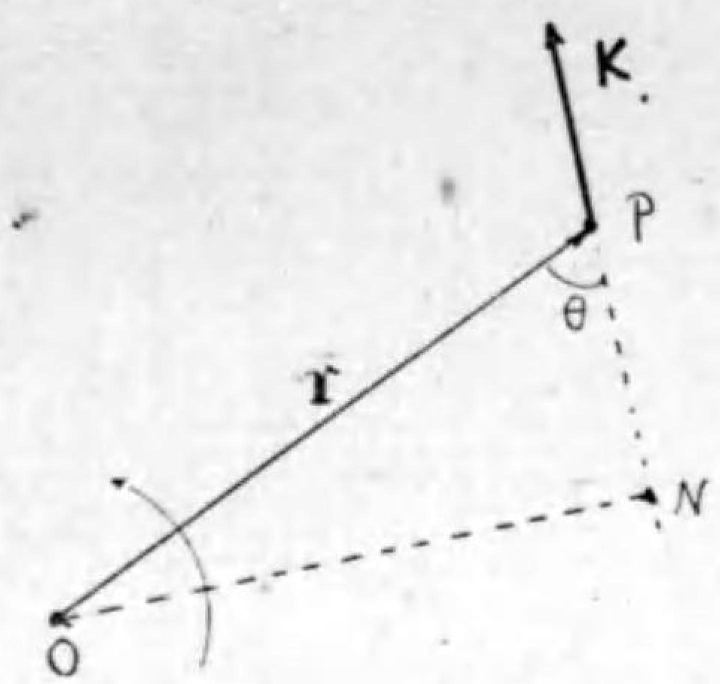
で定義する。$\mathbf{N}$ は原點に關する $\mathbf{q}$ 能率である。

§10.12　力の能率

力 $\mathbf{K}$ の原點 O に關する能率 $\mathbf{M}$ の大さ M は

$$M=K\times\overline{ON}=K\times\overline{OP}\times\sin\theta$$

第二十九圖



向きは時針の廻る向きと反對に廻るとき正で,紙の面に垂直に上方に向ふベクトルであるから,

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{K}$$

で表はせる。卽ち力學上の**力の能率**といふ概念は,ベクトル $\mathbf{K}$ の原點に關する能率である。

從つて n 個の力 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots \mathbf{K}_n$ が一點 P に作用する時は,合力 $\mathbf{K}$ の能率は,各の力の能率の和に等しいことが知れる。

$$\mathbf{K}=\sum_{i=n}^{i=n}\mathbf{K}_i$$

$$\mathbf{r}\times\mathbf{K}=\mathbf{r}\times\sum\mathbf{K}$$

$$=\sum\mathbf{r}\times\mathbf{K}_i$$

§10.13 角運動量

質點の運動量 $m\boldsymbol{v}$ の原點に關する能率 $\boldsymbol{H}$ を**角運動量**といふ。

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$$

$$=m(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})$$

剛體を極めて微小な部分 $d\tau$ に分ち,連續體と見做せば

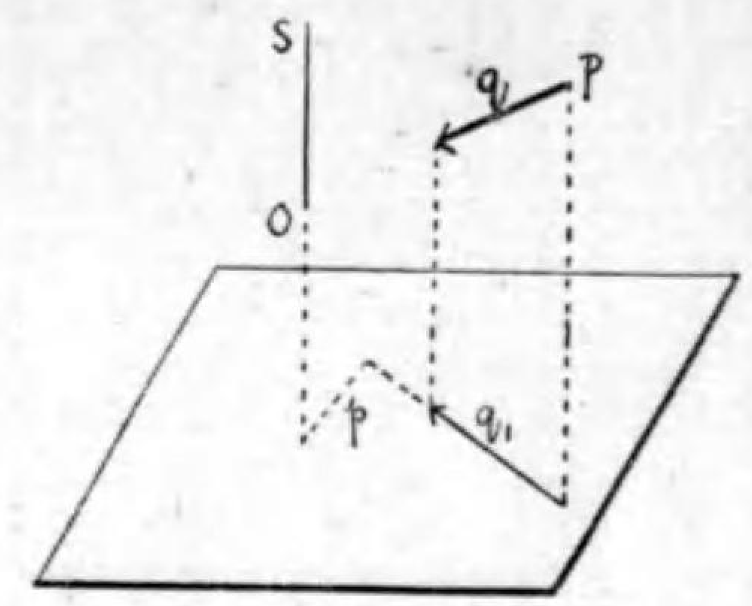
$$\boldsymbol{H}=\int\rho(\mathbf{r}\times\boldsymbol{v})d\tau$$

は角運動量である(積分については,§16 參照)。

§10.2 直線に關する能率

一點に關するベクトルの能率はベクトル量であるが,屢一直線に關する能率といふ量を考へる。これはスカラー量である。

第三十圖



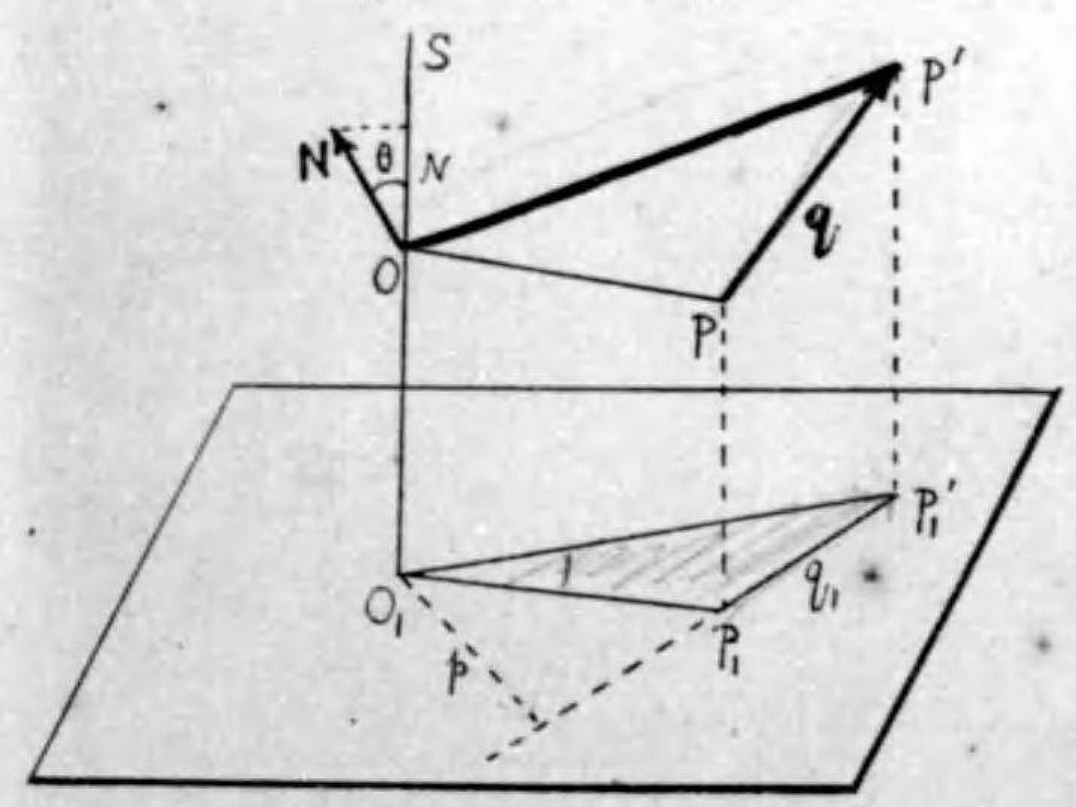
P 點に於けるベクトル $\boldsymbol{q}$ の,原點を過る直線 OS に關する能率 N は,直線 OS に垂直な平面上の $\boldsymbol{q}$ の正射影の長さを q_1 とすれば, OS と平面と截り合ふ點から, $\boldsymbol{q}$ の正射影に下した垂線の長さ p と q_1 との積である。

$$N=pq_1 \qquad (29.1)$$

§10.21

$\boldsymbol{N}$ と N との關係は第31圖から容易にもとまる。

第三十一圖



$$N=2\triangle O_1P_1P_1'$$

$$\therefore\ N=|\mathbf{N}|\cos\theta$$

$$=(\mathbf{N})_{os}$$

卽ち O 點を過る直線に關する能率は, O 點に關する能率の,その直線の方向の直角成分に等しい。

§10.22

從つて力 (X, Y, Z) の能率 $\mathbf{M}$ の直角成分 M_x, M_y, M_z

$$M_z=yZ-zY,\ \text{etc.}$$

は,この定理によつて坐標軸 X, Y, Z 軸に關する能率と見做すことができる。

§11.0　三つのベクトルの積

三つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について積の組合せをつくると次の六種のものが考へられる。

(1)	$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$	ベクトル
(2)	$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$	スカラー
(3)	$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$	ベクトル
(4)	$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$	*dyad* (第三編)
(5)	$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$	不合理
(6)	$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$	不合理

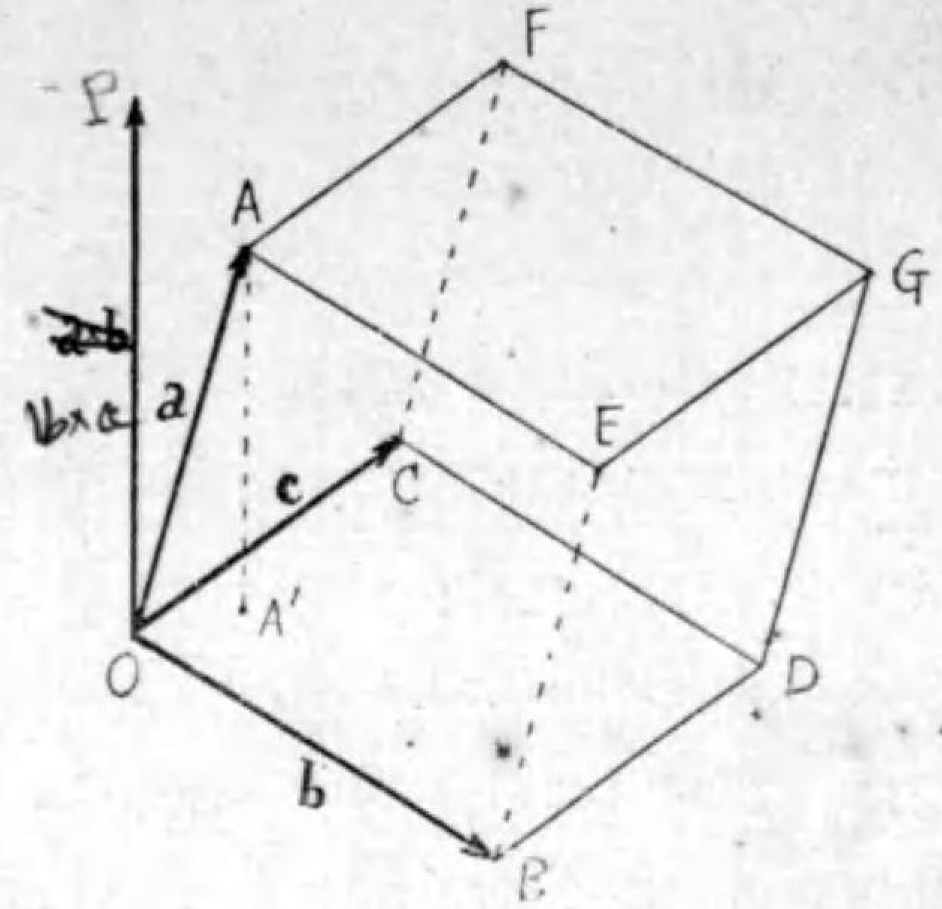
この中(1)は既に(§8.18)で述べたやうに $\boldsymbol{a}$ に共線なベクトルで,(4)は Gibbs が *dyad* と稱へた量,本書の第三編で研究するから,今茲では考へない。(5)はベクトルとスカラーのスカラー積,(6)はベクトルとスカラーのベクトル積で,ともに無意味であるから,僅に(2)と(3)とを研究すれば足りる。

§11.1　スカラー立方積 Scalar triple product

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は記號の規約から云つて,當然 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ と解釋しなければならない。(6)の形にとることは意味のないものであるから,括弧を省いて單に $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ と書いてもよい。これは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を三邊とする平行六面體の容積 v を表はし,**スカラー立方積**と呼ばれる。

第 32 圖に於いて,$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は底面 $OBDC$ の面積であるから,それに垂直にたてた $\overrightarrow{OP}$ で表はせる。$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OA}(=\boldsymbol{a})$ とのスカラー積は

第三十二圖



A から底面へおろした垂線と底面との積で,つまり平行六面體の容積であつて $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$ の中何れか二つのベクトル積と他の一つとのスカラー積に等しい。

$$V=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$$
$$=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \quad \cdots\cdots(30)$$

ベクトル $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ が夫々 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と鋭角をつくるとき容積 V が正になると定めれば,鈍角をつくるときは負と考へればよい。

§11.11　Heaviside の法則

スカラー立方積はその項の中のベクトル積の因子の順序か變れば符號が變る。

$$\left.\begin{aligned}V&=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}\\&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(30)$$

これを Heaviside の法則といふ。

一見大變複雜してゐるやうであるが,すぐ次の簡單な性質をもつことがわかる。

(1)　因子の輪廻順($a\,b\,c$ の順)さへ保つてゐればどんな順に竝べても變りない。

(2)　輪廻順が一つ變る毎に符號が變る。

(3) 記號・と×とは隨意にいれかへることができる。

括弧は前に述べたやうにとり去つても紛れる惧はないから省いて書い差支ない。

§11.12 Grassmann の記號

Heaviside の法則でわかる通り, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ は因子の順序に符號が關係するだけであつて,・と×の交換は自由であるから,只 $\mathbf{abc}$ 三つのベクトルの一組がスカラー立方積をなしてゐるといふことを表はしさへすれば充分である。それには寧ろ Grassman の記號に倣ひ $[\mathbf{abc}]$ によつてスカラー立方積を表はすことも都合がよい。

$$[\mathbf{abc}]\equiv\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$$

卽ち[ ]の中の文字の順序が輪廻順を保つてゐるならば變りがない。順が變れば符號を變へることに注意すれば足りる。

§11.13

直角成分で表はせばスカラー立方積は容積を示すのであるから行列式の形に書けることは察せられる。實際(27.2)の式により

$$[\mathbf{abc}]=\mathbf{a}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ [\mathbf{abc}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(31)}$$

Heaviside の法則は行列式の性質からすぐ導くことができる。

この形をスカラー立方積の定義としてもよい。

§11.14 擬似スカラー量

物理的の性質により自然に定まつてゐるスカラー量は,坐標軸との間に別段規約をつくる必要がないから,どんな坐標軸をとつてもそれに關係しない。はじめ正系の坐標軸に關して言ひ表はしてゐた量を,負系の坐標軸に變へても符號の變るわけはない。然しスカラー量といはれるものの中に,坐標軸の擇み方について規約を設けてあるものがある;坐標軸を正から負に變へたときに,初めの軸に對する公式と同じ公式が成りたつためには,一般に符號を變へなければならない。このやうなスカラー量を**擬似スカラー量**といふ。

容積或は磁氣ポテンシヤルの如きはこの擬似スカラー量である。

§11.15

スカラー立方積には配分の法則が成り立つ

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}+\mathbf{d}]=[\mathbf{abc}]+[\mathbf{abd}] \qquad \text{(32)}$$

又スカラー量の因數について

$$[a\mathbf{a},\ b\mathbf{b},\ c\mathbf{c}]=abc[\mathbf{abc}]$$

$$=[b\mathbf{a},\ c\mathbf{b},\ a\mathbf{c}]=[c\mathbf{a},\ a\mathbf{b},\ b\mathbf{c}]\ \text{etc.}$$

§11.16

スカラー立方積において, $\mathbf{abc}$ の何れか二つが平行ならば零である,かりに $\mathbf{a}$ が $\mathbf{b}$ に平行ならば, $\mathbf{b}=s\mathbf{a}$ とおけるから

$$[\mathbf{a},\ s\mathbf{a},\ \mathbf{c}]=(\mathbf{a}\times s\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}\equiv0$$

從つて

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c}]=0 \quad \cdots\cdots (33)$$

§11.17 三つのベクトルが共面でないための條件

三つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が共面ならば,その三つのベクトルによつて平行六面體をつくることはできない。卽ち三つのベクトルの圍む容積は零である。從つて

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=0$$

は，$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}$ の何れの二つも平行でない場合において,三つが共面であるための條件であり,共面でないためには必ず

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]\neq 0 \quad \cdots\cdots (34)$$

でなければならない。これはよく用ゐられる條件である。

§11.18 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ を共面でない三つのベクトルとすれば，(§6.3) により $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ はこの三つのベクトルから導ける

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{l}+a_2\boldsymbol{m}+a_3\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{l}+b_2\boldsymbol{m}+b_3\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{l}+c_2\boldsymbol{m}+c_3\boldsymbol{n}$$

よつて

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\cdot\left\{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}+\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{l}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m}\right\}$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{l}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m}$$

$$\therefore\ [\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}[\boldsymbol{l}\,\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{n}] \quad \cdots\cdots (35)$$

§11.2 ベクトル立方積 (Vector triple product)

三つのベクトルの積で次に研究すべきは，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ でこれを**ベクトル立方積**と名付ける。

この積は明かにベクトルであつて,スカラー立方積とちがひ括弧を省くわけにはゆかない。

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$

卽ちベクトル立方積は結合の法則に從はない。

この積は交換の法則にも從はない。$\boldsymbol{a}$ と $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ との順序を變へたり，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の順を變へると符號が變る。

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})$$

いま

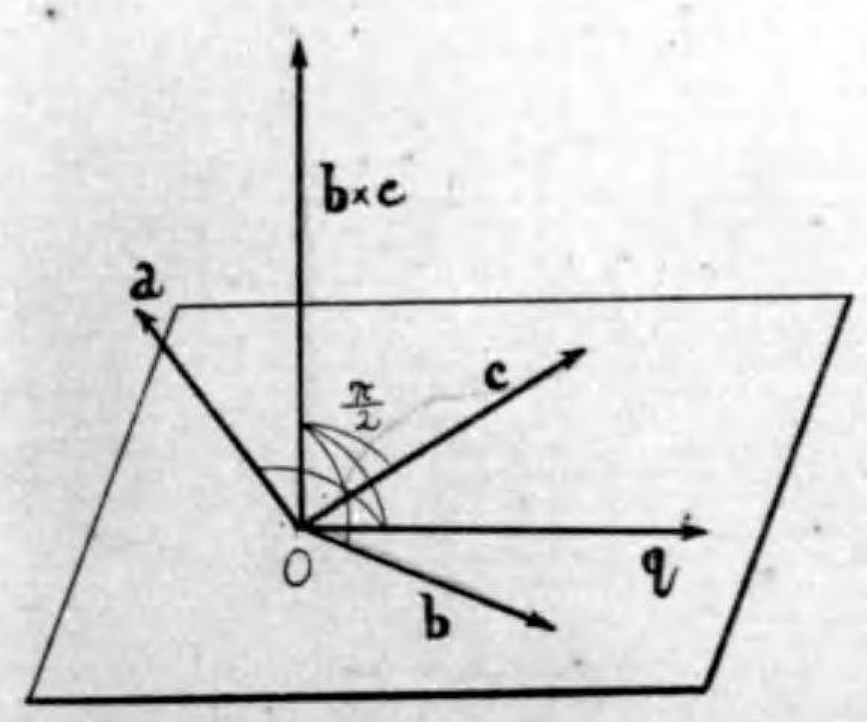
$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

とおけば，$\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{a}$ 及び $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ に垂直であるから

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}=0$$

$$\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$$

第三十三圖



然るに $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{b}$ 及び $\boldsymbol{c}$ に垂直なベクトルだから，$\boldsymbol{q}$ は是非とも $\boldsymbol{b}$ 及び $\boldsymbol{c}$ と共面でなければならない(第33圖)

§11.21 ベクトル立方積を展開するのに用ゐる次の式は記憶しておく必要がある。

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \quad \cdots\cdots (36)$$

この公式は度々用ゐられ,非常に大切な式である.證明の方法も澤山ある中,こゝには三つ擇んで載せることにする.證明としては

19.1.7.

その中の一つを知ればよいわけであるが,種々のベクトル計算の方法に慣れるために煩らはしさを忍ぶことにする.讀者は最初には一番器械的な第一の證明法を讀み,他の二つの方法は一層ベクトルの研究が進んだ上で後に戻つて讀まれるがよからう。

§11.211　(證明第一)　これは一番器械的な方法で,ベクトルを皆直角成分にわけて計算する。

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ \begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

よつて $\boldsymbol{q}$ の x 成分 q_x は

$$q_x=a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)$$
$$=b_1(a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_2b_2+a_3b_3)$$

第一の項に $a_1\,b_1\,c_1$ 第二の項に $-a_1\,b_1\,c_1$ を加へても全體として變らないから

$$q_x=b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$
$$=b_1\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-c_1\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

同様に

$$q_y=b_2\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-c_2\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$
$$q_z=b_3\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-c_3\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

よつて

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

§11.212　(證明第二)　(§11.2) で述べたやうに $\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ と共面であるから,

$$\boldsymbol{q}=x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}$$

の形に置ける,よつて問題は x と y を定めることになる。

$\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{a}$ にも垂直であるから,

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}=0=x\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+y\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

今

$$\frac{x}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}=-\frac{y}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=n$$

とおけば

$$x=n\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$
$$y=-n\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

從つて

$$\boldsymbol{q}=n\{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\}$$

乃ち問題は n がベクトルの大さや方向に關係しない量であることを證明すればよい。

n はスカラー量であるから,隨意にどのベクトルとでも結合させることができるし取ることもできる,從つて n はベクトルの大さには關係しない筈である。結局 n がベクトル相互の向きに關係あるかないかだけ吟味することになる。

もし特別に $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ の場合には

$$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=n\{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\}$$

兩邊に $\boldsymbol{c}$ をスカラー的に乘ずれば

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=n\{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2-\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2\}$$

然るに Heaviside の法則第三によつて×と・を入れ換へれば

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{c}\times\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$
$$=-(\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2$$

故に

$$n\{(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})^2-b^2c^2\}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2$$

然るに

$$(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})^2+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2=b^2c^2\cos^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+b^2c^2\sin^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$
$$=b^2c^2$$

$$\therefore\quad nb^2c^2=b^2c^2$$

$$\therefore\quad n=1$$

$$\therefore\quad \mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mp\mathbf{c}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})$$

よつて $\mathbf{a}$ が $\mathbf{b}$ に等しくない場合でも n が 1 になることが證明されればよい。

$\mathbf{q}$ と $\mathbf{b}$ とのスカラー積をつくれば

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=n\{\mathbf{b}^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\}$$
$$=n\mathbf{a}\cdot[\mathbf{c}\mathbf{b}^2-\mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})]$$

[ ] の中は上に得た許りのものであるから

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=-n\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$$

左邊は Heaviside の法則によつて, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ との順を變へれば符號が變るから

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=n\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$$

$$\therefore\quad n=1$$

よつて $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$

§11.213 (證明第三)

今 $\mathbf{c}=\mathbf{s}+\mathbf{t}$ とすれば

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times(\mathbf{s}+\mathbf{t})]$$
$$=n[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{s}+\mathbf{t})\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}(\mathbf{s}+\mathbf{t})]$$

卽ち $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{s})+\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{t})=n[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{s}+\mathbf{t})\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}(\mathbf{s}+\mathbf{t})]$

$$\therefore\quad s[\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\mathbf{s}]+t[\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\mathbf{t}]=n[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{s}+\mathbf{t})\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}(\mathbf{s}+\mathbf{t})]$$

$\mathbf{b}, \mathbf{s}$ 及び $\mathbf{t}$ は共面でないやうに, $\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ とを擇べば,この式の兩邊の $\mathbf{b}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$ の係數は夫々等しくなければならない。

($\mathbf{b}$ の係數) $s\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}+t\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}=n\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{s}+\mathbf{t})$

($\mathbf{s}$ の係數) $-s\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-n\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

($\mathbf{t}$ の係數) $-t\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-n\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

$$\therefore\quad s=t=n$$

卽ち n は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に無關係な常數であるから,何か或る特別な場合についてその値を求めればよい。

$\mathbf{a}=\mathbf{c}=\mathbf{i}, \mathbf{b}=\mathbf{j}$ とすれば

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{i})=n(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}\,\mathbf{j}-\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}\,\mathbf{i})$$

卽ち

$$\mathbf{i}\times(-\mathbf{k})=n\mathbf{j}$$

$$\therefore\quad \mathbf{j}=n\mathbf{j}$$

$$\therefore\quad n=1$$

よつて

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

§11.22 (§8.17) で求めたベクトル $\mathbf{r}$ の $\mathbf{a}$ に垂直な分ベクトルはベクトル立方積によつて

$$\frac{\mathbf{a}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})}{a^2}$$

と書ける。

$(\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{r}-(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{a}$

$=a^2\vec{r}-$

§11.3 例題

(1) 次の四つのベクトルの積は, Stokes の定理 (§37.3) を證明するとき役に立つ

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$$
$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\ (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\ (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$
$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(37)$$

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$?

$$=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{b} \quad \cdots\cdots\cdots(38)$$

(3) $\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]=\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})]$

$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\ (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})\ (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

(4) (例 2) を書き換へれば

$$\boldsymbol{c}\,[\boldsymbol{abd}]-\boldsymbol{d}\,[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{cda}]-\boldsymbol{a}[\boldsymbol{cdb}]$$

となる。一邊に移項すれば

$$\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bcd}]-\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{acd}]+\boldsymbol{c}\,[\boldsymbol{abd}]-\boldsymbol{d}\,[\boldsymbol{abc}]=0$$

$\boldsymbol{d}$ の代りに $\boldsymbol{q}$ と書けば

$$\boldsymbol{q}\,[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{qbc}]+\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{qca}]+\boldsymbol{c}\,[\boldsymbol{qab}]$$

或は

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}\frac{[\boldsymbol{qbc}]}{[\boldsymbol{abc}]}+\boldsymbol{b}\frac{[\boldsymbol{qca}]}{[\boldsymbol{abc}]}+\boldsymbol{c}\frac{[\boldsymbol{qab}]}{[\boldsymbol{abc}]}.$$

これは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が共面でないときに, $\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ から導くときに用ゐられる式で, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の係數は其方向に於ける $\boldsymbol{q}$ の成分である。

(5) $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\}$ [aab][bcc]

$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\{[\boldsymbol{abc}]\,\boldsymbol{c}-[\boldsymbol{bcc}]\,\boldsymbol{a}\}$$
$$=[\boldsymbol{abc}]\ [\boldsymbol{abc}]$$
$$=[\boldsymbol{abc}]^2 \quad \cdots\cdots\cdots(39)$$

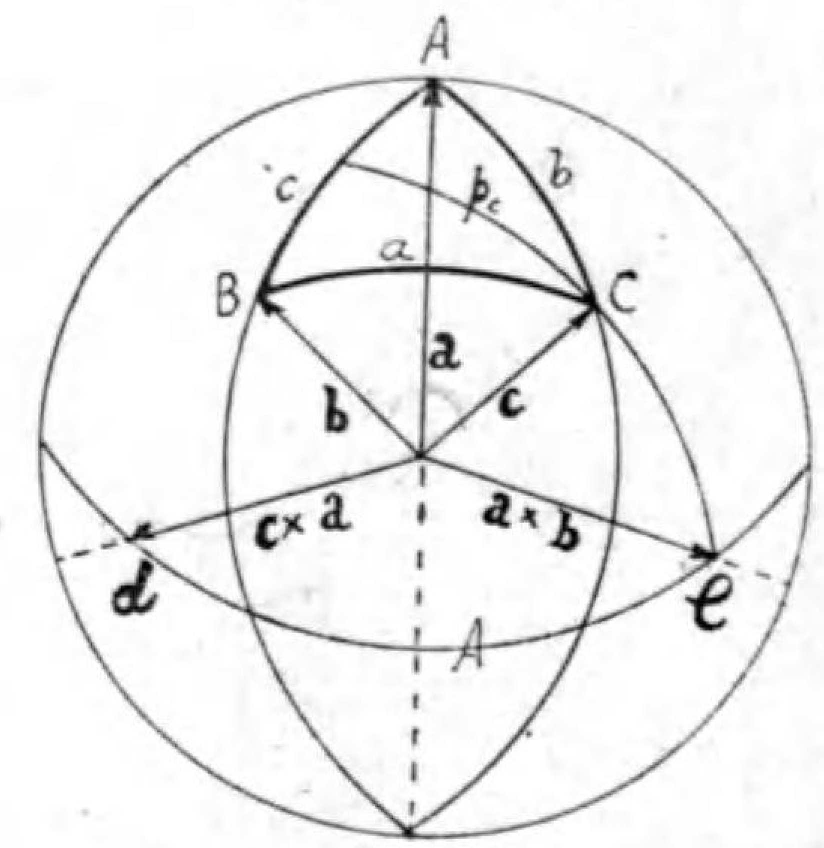
om.

§11.31 球面三角の公式

(例1) (例2) の公式を應用して球面三角の公式を導いてみよう。

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を單位ベクトルとし,原點を中心に半徑 1 の球面を劃く (第 34 圖)

第三十四圖



(i) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

圖により

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}\sin c,$$
$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{d}\sin b$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\cos b,\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\cos c$$
$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\cos a$$

故に

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\sin c\ \sin b\ \ \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{d}=\sin c\ \sin b\ \cos(\pi-A)$$
$$=-\sin b\ \sin c\ \cos A$$

a^2 は 1 であるから上の公式より

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

etc.

(ii) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=[\boldsymbol{abc}]\,\boldsymbol{a}$ (38)より

$$[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\sin C\ \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}$$

Cからひいた $\widehat{AB}$ に直交する弧を張る角を p_c とすれば

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-p_c\right)=\sin p_c$$

$$\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{d}=-\sin A\ \boldsymbol{a}$$

$$\therefore\quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=-\sin C\sin b\ \ \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{d}$$

$$=\sin b\sin C\sin A\ \boldsymbol{a}$$

$$\therefore\quad \sin p_c=\sin b\sin A$$

etc.

又は

$$\sin b\sin C\sin A\ \boldsymbol{a}=[\boldsymbol{abc}]\,\boldsymbol{a}$$

$$\therefore\quad \sin b\sin C\sin A=[\boldsymbol{abc}]$$

同様に

$$\sin c\sin A\sin B=[\boldsymbol{bca}]$$

$$\sin a\sin B\sin C=[\boldsymbol{cab}]$$

よつて

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

§12.1 相逆系

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 及び $\boldsymbol{c}$ が共面でなければ(§11.17)により

$$[\boldsymbol{abc}]\neq 0$$

である,任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は,三つの共面でないベクトルから導くことができて,その導いた形は唯一通りしかない。

即ち

$$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$$

この兩邊に $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ をスカラー的に乘ずれば

$$[\boldsymbol{vbc}]=x[\boldsymbol{abc}]+y[\boldsymbol{bbc}]+z[\boldsymbol{cbc}]$$

然るに

$[\boldsymbol{bbc}]=0$, $[\boldsymbol{cbc}]=0$ であるから

$$[\boldsymbol{vbc}]=x[\boldsymbol{abc}]$$

$$\therefore\quad x=\frac{[\boldsymbol{vbc}]}{[\boldsymbol{abc}]},$$

同様にして

$$y=\frac{[\boldsymbol{vca}]}{[\boldsymbol{abc}]}$$

$$z=\frac{[\boldsymbol{vab}]}{[\boldsymbol{abc}]}$$

故に

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\frac{[\boldsymbol{vbc}]}{[\boldsymbol{abc}]}+\boldsymbol{b}\frac{[\boldsymbol{vca}]}{[\boldsymbol{abc}]}+\boldsymbol{c}\frac{[\boldsymbol{vab}]}{[\boldsymbol{abc}]}.$$

或は

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{[\boldsymbol{abc}]}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{[\boldsymbol{abc}]}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{[\boldsymbol{abc}]}\boldsymbol{c}$$

と書き換へてみると面白い結果が得られる。

三つのベクトル $\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{[\boldsymbol{abc}]}$, $\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{[\boldsymbol{abc}]}$, $\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{[\boldsymbol{abc}]}$ は夫々 $(\boldsymbol{bc})$ 面, $(\boldsymbol{ca})$ 面, $(\boldsymbol{ab})$ 面に垂直である,これを

$$\boldsymbol{a}^*=\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{[\boldsymbol{abc}]},\ \boldsymbol{b}^*=\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{[\boldsymbol{abc}]},\ \boldsymbol{c}^*=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{[\boldsymbol{abc}]}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

とおく。

この $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$ の一組のベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の一組の**相逆系**と名付ける, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が共面でないから,その相逆系も共面ではない,これを用ゐれば

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}^*)\,\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}^*)\,\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{c}^*)\,\boldsymbol{c}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(41.1)$$

と書くことができる。これは重要な關係である。

§12.11 a^*, b^*, c^* が a, b, c の相逆系であれば，a, b, c は a^*, b^*, c^* の相逆系である，卽ち互に相逆關係になつてゐる。この證明は次のやうにしてされる。

a^*, b^*, c^* は共面でないから

$$v=x'a^*+y'b^*+z'c^*$$

とおける，

a^*, b^*, c^* を a, b, c によつて表はした式をいれれば

$$[abc]v=x'b\times c+y'c\times a+z'a\times b$$

a とのスカラー積をつくれば

$$[abc]\ v\cdot a=x'[abc]$$

$$\therefore\quad x'=v\cdot a$$

同樣に

$$y'=v\cdot b$$

$$z'=v\cdot c$$

$$\therefore\quad v=(v\cdot a)a^*+(v\cdot b)b^*+(v\cdot c)c^* \qquad (41.2)$$

卽ち a, b, c と a^*, b^*, c^* とは互に相逆關係になつてゐることがわかる。

§12.12 相逆なベクトルの間には重要な關係がある。

$$a^*=\frac{b\times c}{[abc]}$$

であるから

$$a\cdot a^*=\frac{a\cdot b\times c}{[abc]}=1$$

$$a\cdot b^*=\frac{a\cdot c\times a}{[abc]}=0,$$

卽ち

$$\left.\begin{aligned}&a\cdot a^*=b\cdot b^*=c\cdot c^*=1\\&a\cdot b^*=a^*\cdot b=b\cdot c^*=b^*\cdot c=c\cdot a^*=c^*\cdot a=0\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

§12.13 逆に二組のベクトル (u, v, w) と (a, b, c) とが

$$u\cdot a=v\cdot b=w\cdot c=1$$

$$u\cdot b=a\cdot v=u\cdot c=a\cdot w=v\cdot c=b\cdot w=0$$

の條件を充たすとき，この二組は相逆系である。

今 (a, b, c) の相逆系 (a^*, b^*, c^*) によつて u, v, w を表はせば

$$u=u\cdot a\,a^*+u\cdot b\,b^*+u\cdot c\,c^*$$

$$v=v\cdot a\,a^*+v\cdot b\,b^*+v\cdot c\,c^*$$

$$w=w\cdot a\,a^*+w\cdot b\,b^*+w\cdot c\,c^*$$

これに與へられた條件をいれれば，

$$u=a^*,\ v=b^*,\ w=c^*$$

となつて，(u, v, w) は (a, b, c) の相逆系に他ならない。

§12.14 (a, b, c) は (a^*, b^*, c^*) の相逆系であるから

$$a=\frac{b^*\times c^*}{[a^*b^*c^*]},\ b=\frac{c^*\times a^*}{[a^*b^*c^*]},\ b=\frac{a^*\times b^*}{[a^*b^*c^*]}, \qquad (40.2)$$

§12.15 基本ベクトル (i, j, k) の相逆系は，それ自身で，このやうなのは**自己相逆系**といふ。

$$[i\,j\,k]=1 \qquad i^*=j\times k=i,\ \text{etc.}$$

§12.16 (a, b, c) と (a^*, b^*, c^*) とが相逆系ならば

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]\,[\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*]=1$$

になる。

$$[\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*]=\left[\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{[\boldsymbol{abc}]}\quad\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{[\boldsymbol{abc}]}\quad\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{[\boldsymbol{abc}]}\right]$$

$$=\frac{[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]}{[\boldsymbol{abc}]^3}$$

右邊の分子は前章の(例5)により $[\boldsymbol{abc}]^2$ である。

よつて

$$[\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*]\,[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=1 \qquad (43)$$

12.17 例題

(1)　$[\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]\,[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]$ を求める。

$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]\neq 0$ ならば

$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^*+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{b}^*+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{c}^*$, etc.

よつて

$$[\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix}[\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*]$$

然るに

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]\,[\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*]=1$$

$$\therefore\ [\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]\,[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix}$$

(2)　前問題と同樣にして

$$[\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{r}]\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{r}\end{vmatrix}$$

第三章　ベクトルの微分

§13.1　ベクトルの微分

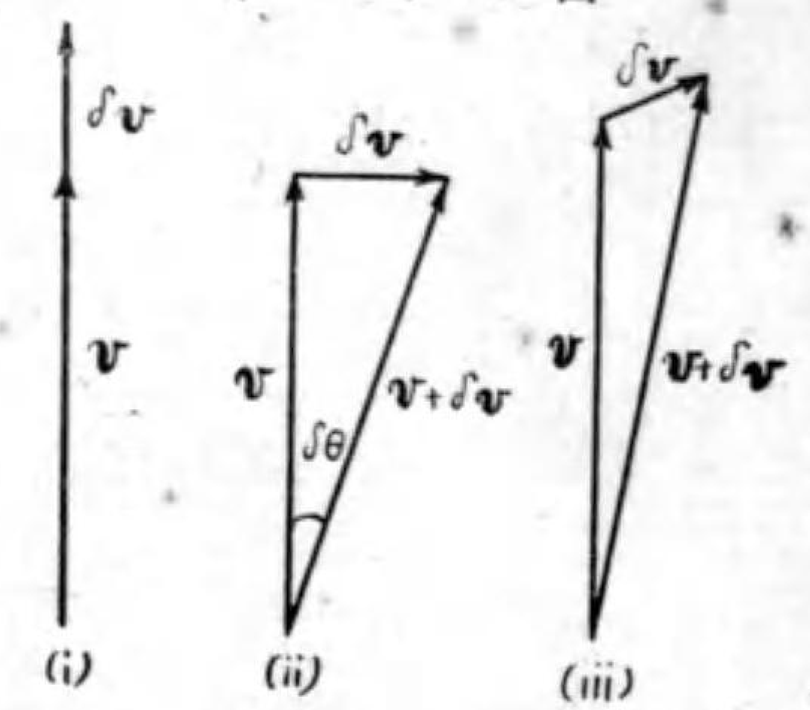
ベクトル $\boldsymbol{v}$ に,微小なベクトル $\delta\boldsymbol{v}$ を加へて合成したベクトル $\boldsymbol{v}+\delta\boldsymbol{v}$ は, $\boldsymbol{v}$ とは一般に方向も長さも變つたベクトルである。

(i)　$\delta\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}$ に平行ならば,方向は變らないが大さが $|\delta\boldsymbol{v}|=\delta v$ だけ變る。

(ii)　$\delta\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}$ に直角ならば,大さは變らないが,方向が變り $\boldsymbol{v}$ に對して $\delta\theta=\dfrac{|\delta\boldsymbol{v}|}{v}$ だけ傾く。

(iii)　從つて一般に $\boldsymbol{v}+\delta\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ に對して方向も大さも變る。

第三十五圖



δv　が極めて小さければ,第一階の微小量までとつてそれ以上の小さいものを無視すれば一般に合成したベクトルの大さは δv 增し,方向は $\delta\theta$ だけ變る。

§13.2　スカラー變數に關する微分

ベクトル $\boldsymbol{v}$ がスカラー量 t の函數であるとすれば,

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$$

t の値がわかれば, $\boldsymbol{v}$ の大さ,方向,向きは定まる。即ち $\boldsymbol{v}$ はベクトル函數である。

t が t_1 の値をとる時 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP_1}$

t が t_2 の値をとる時 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP_2}$

であれば,

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{v}(t_2)-\boldsymbol{v}(t_1).$$

これを t_2-t_1 でわつたものは,t_2-t_1 の間に於ける $\boldsymbol{v}$ の變化の平均上の割合である

$$\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{t_2-t_1}=\frac{\boldsymbol{v}(t_2)-\boldsymbol{v}(t_1)}{t_2-t_1}$$

t_2-t_1 を限りなく小さくした極限に於ける,この極限値を,t についてとつた $\boldsymbol{v}$ の微分係數といひ,微分記號を用ゐて表はす

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\operatorname*{Lim}_{t_2-t_1\sim 0}\frac{\boldsymbol{v}(t_2)-\boldsymbol{v}(t_1)}{t_2-t_1}$$

$t_2-t_1=\delta t$, $\overrightarrow{P_1P_2}=\delta\boldsymbol{v}$ とおけば

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\operatorname*{Lim}_{\delta t\sim 0}\frac{\boldsymbol{v}(t_1+\delta t)-\boldsymbol{v}(t_1)}{\delta t}=\operatorname*{Lim}_{\delta t\sim 0}\frac{\delta\boldsymbol{v}}{\delta t}$$

第三十六圖

§13.3 ベクトルの和の微分

$\boldsymbol{v}$ が合成したベクトルのとき

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$$

ならば,普通の微分と全く同樣にして

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\quad\cdots\cdots(44)$$

であることは容易にしれる。

§13.4 スカラー量との積の微分

u は t のスカラー函數,$\boldsymbol{w}$ はベクトル函數で

$$\boldsymbol{v}=u\,\boldsymbol{w}$$

ならば

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\mathrm{Lim}\frac{u(t_2)\boldsymbol{w}(t_2)-u(t_1)\boldsymbol{w}(t_1)}{t_2-t_1}$$

$$=\mathrm{Lim}\left(\frac{u(t_2)\boldsymbol{w}(t_2)-u(t_1)\boldsymbol{w}(t_2)}{t_2-t_1}+\frac{u(t_1)\boldsymbol{w}(t_2)-u(t_1)\boldsymbol{w}(t_1)}{t_2-t_1}\right)$$

$$\therefore\ \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{du}{dt}\boldsymbol{w}+u\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\quad\cdots\cdots(45)$$

§13.41 この式から,$\boldsymbol{v}$ を直角成分にわけたものの微分係數がもとまる。

$$\boldsymbol{v}=v_1\,\boldsymbol{i}+v_2\,\boldsymbol{j}+v_3\,\boldsymbol{k}.$$

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, は長さ方向向きの一定したベクトルであるから,坐標軸を變へない限り變化しない。t が變つても變らないから,t について微分したものは零である。よつて

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv_1}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dv_2}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dv_3}{dt}\boldsymbol{k}\quad\cdots\cdots(46)$$

これを更に t について微分したもの $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)$ を $\dfrac{d^2\boldsymbol{v}}{dt^2}$ と書くことにすれば

$$\frac{d^2\boldsymbol{v}}{dt^2}=\frac{d^2v_1}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2v_2}{dt^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2v_3}{dt^2}\boldsymbol{k}$$

一般に t について n 度微分した係數を,第 n 階の微分係數といひ

$$\frac{d^n\boldsymbol{v}}{dt^n}=\frac{d^nv_1}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{d^nv_2}{dt^n}\boldsymbol{j}+\frac{d^nv_3}{dt^n}\boldsymbol{k}\quad\cdots\cdots(46.1)$$

で與へられる。

§14.1　スカラー積の微分

スカラー積 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ に於いて, $\boldsymbol{v}$ 及び $\boldsymbol{w}$ が夫々 $\delta\boldsymbol{v}, \delta\boldsymbol{w}$ 増すとき,第二階以上の微小な量を棄てれば

$$\delta(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{v}+\delta\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{w}+\delta\boldsymbol{w})-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$$
$$=\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{w}$$

従つて微係數は,その極限値として

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} \quad\cdots\cdots(47)$$

$=\frac{dv}{dt}w+\frac{dw}{dt}\cdot v$, ト出来ル

§14.2　ベクトル積の微分

同様にして

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} \quad\cdots\cdots(48)$$

スカラー積の場合とちがひ,この場合には積の中の項の順序を變へないことに留意する必要がある。もし順を入れ換へたらば符號も變へることを忘れないやうに。

§14.3　例題

(1)　ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大さが不變ならば

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a^2=\text{一定}$$

この微分をとれば

$$d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0 \quad\cdots\cdots(49)$$

卽ち $d\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ に垂直なベクトルである。

もし $\boldsymbol{a}$ が一定のベクトル(大さ,方向,向きが一定)でなく,只大さだけ不變ならば

$$\boldsymbol{a}^2=\text{const.}$$

は,一點より等距離にある點の軌跡——半徑 a の球面である,中心より球面上の一點にひいた動徑 $\boldsymbol{a}$ に對して, $d\boldsymbol{a}$ は垂直卽ち $d\boldsymbol{a}$ は切平面内にあることを示してゐる。

(2)　$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ の第二階の微分係數

$$\frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right)$$

$\left\{\frac{d^2v}{dt^2}\cdot w+\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dw}{dt}+\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dw}{dt}+v\frac{d^2w}{dt^2}\right\}$

$$=\frac{d^2\boldsymbol{v}}{dt^2}\cdot\boldsymbol{w}+2\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{w}}{dt^2} \quad\cdots\cdots(50)$$

(3)　スカラー立方積の微分係數

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{uvw}]=\left[\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\boldsymbol{vw}\right]+\left[\boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{w}\right]+\left[\boldsymbol{uv}\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right]$$

(4)　$$\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\Big)=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+\boldsymbol{u}\times\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\times\boldsymbol{w}\right)+\boldsymbol{u}\times\left(\boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right)$$

(5)　もし　$\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}=0$　ならば

$\boldsymbol{r}$ の單位ベクトルを $\boldsymbol{r}_1$ とすれば,

$$\boldsymbol{r}_1\times d\boldsymbol{r}_1=0$$

$\boldsymbol{r}_1$ を兩邊にベクトル的に乘じて展開する

$$\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_1\times d\boldsymbol{r}_1)=\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_1\cdot d\boldsymbol{r}_1)-d\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1^2=0$$

$\boldsymbol{r}_1$ は單位ベクトルであるから

$$\boldsymbol{r}_1\cdot d\boldsymbol{r}_1=0$$

よつて　$d\boldsymbol{r}_1=0$

卽ち　$\boldsymbol{r}_1=\text{const.}$

(6)　$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}_1$ とおけば

$$d\boldsymbol{r}=dr\,\boldsymbol{r}_1+r\,d\boldsymbol{r}_1$$

$\boldsymbol{r}_1\cdot$ を乘ずれば

$$\boldsymbol{r}_1\cdot d\boldsymbol{r}=dr+r\,\boldsymbol{r}_1\cdot d\boldsymbol{r}_1=dr$$

$$\therefore\quad dr=\boldsymbol{r}_1\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{1}{\boldsymbol{r}_1}\cdot d\boldsymbol{r}$$

又は　$$\frac{d\boldsymbol{r}}{r}=\frac{1}{\boldsymbol{r}_1}\cdot d\boldsymbol{r}$$

§ 14.4　Taylor の級數

ベクトル $\boldsymbol{q}$ がスカラー變數 t の變數である時，t が δt 增したときの $\boldsymbol{q}$ の增し高 $\delta\boldsymbol{q}$ は，Taylor の級數によつて求まる。

$$\delta\boldsymbol{q}=\frac{d\boldsymbol{q}}{dt}\delta t+\frac{1}{2!}\frac{d^2\boldsymbol{q}}{dt^2}(\delta t)^2+\frac{1}{3!}\frac{d^3\boldsymbol{q}}{dt^2}(\delta t)^3+\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (51)$$

この式は別の形に書きかへられることを後に調べよう。

8.14

第四章　空間曲線

§ 15.1　空間曲線

原點から任意の點 P にひいた動徑 $\boldsymbol{r}$ はスカラー變數 s の函數として

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}(s)$$

で與へられる，s の或る値に對して $\boldsymbol{r}$ は定まつた一つの値をとるベクトル函數であれば，s が連續的に變化すれば，ベクトル $\boldsymbol{r}$ の尖端の軌跡は，一つの空間曲線を劃くであらう。

これを直角成分で示せば，三つの聯立方程式

$$x=q_1(s)$$

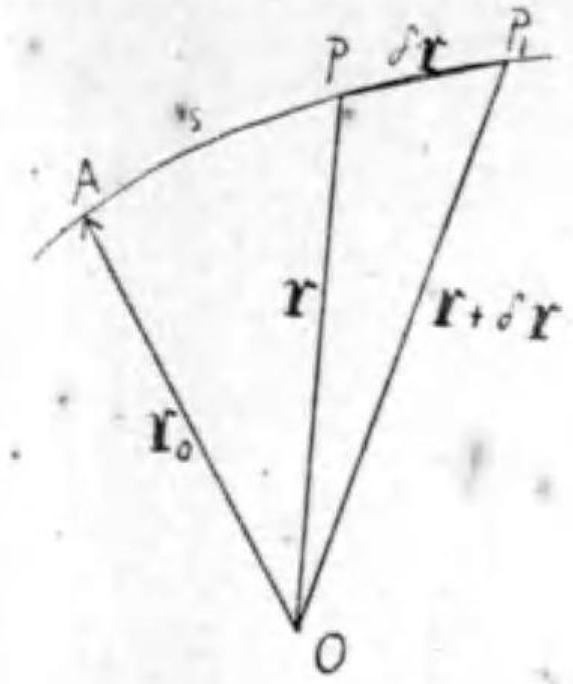
$$y=q_2(s)$$

$$z=q_3(s)$$

となり，是等の式から s を消去すれば，二つの曲面の方程式を得る，

その二曲面の交線として一つの曲線が決定される。

§ 15.2　切線ベクトル



曲線 $\boldsymbol{r}$ の上の任意の點 A から曲線に沿つて測つた弧の長さを s とすれば，曲線上の任意の點の位置ベクトル(動徑) $\boldsymbol{r}$ は s の函數である。

P に極めて隣接した點 P_1 への動徑を $\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}$ とすれば，P_1 が限りなく P に近接した極根に於いては，割線 PP_1 は P に於ける切線と一致し，$\delta\boldsymbol{r}$ は曲線に切するベクトルを表はす。

$\dfrac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta s}$ はその極限に於いて，P に於ける切線の方向の單位ベクトルで，P に於いて曲線の弧の長さ1に對して動徑の變る割合を示す。

s が增す向きに，切線(單位)ベクトルの向きをとれば，

$$\boldsymbol{t}=\operatorname*{Lim}_{\delta s\sim 0}\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta s}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (52)$$

$\boldsymbol{t}$ を**ベクトル切線**或は**單位切線**といふことにする。

$\boldsymbol{t}$ の成分 $(a_1,\ a_2,\ a_3,)$ は切線の方向餘弦で

$$a_1=\frac{dx}{ds},\ a_2=\frac{dy}{ds},\ a_3=\frac{dz}{ds}$$

こゝに

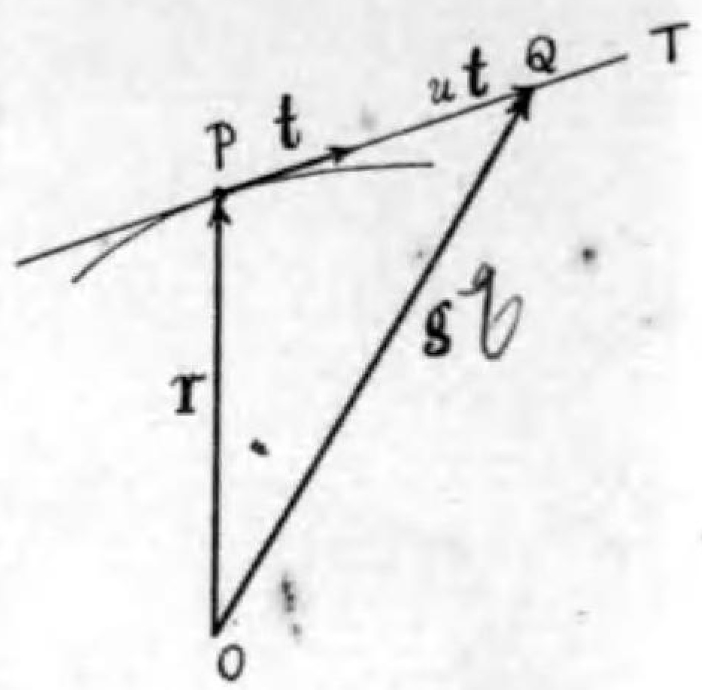
$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

§ 15.21　切線の方程式

P に於ける切線上の任意の點 Q にひいた動徑を $\boldsymbol{g}$ とすれば

$$\overrightarrow{PQ}=u\boldsymbol{t}=\boldsymbol{g}-\boldsymbol{r}$$

第三十八圖



u は Q の位置によつて變る正又は負の數で, u の値によつて Q の位置が切線上に定まる。

従つて

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{r}+u\boldsymbol{t}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(52.1)$$

は u をパラメターとしてとつた切線の方程式である。

この方程式は別の形にすることができる。

$\overrightarrow{PQ}$ は切線上にあるから恒に $\boldsymbol{t}$ と共線でなければならない。平行な二つのベクトルのベクトル積は零であるから,

$$\boldsymbol{t}\times(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{r})=0$$

も亦切線の方程式である,即ち

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{r})=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(52.2)$$

は切線の微分方程式である

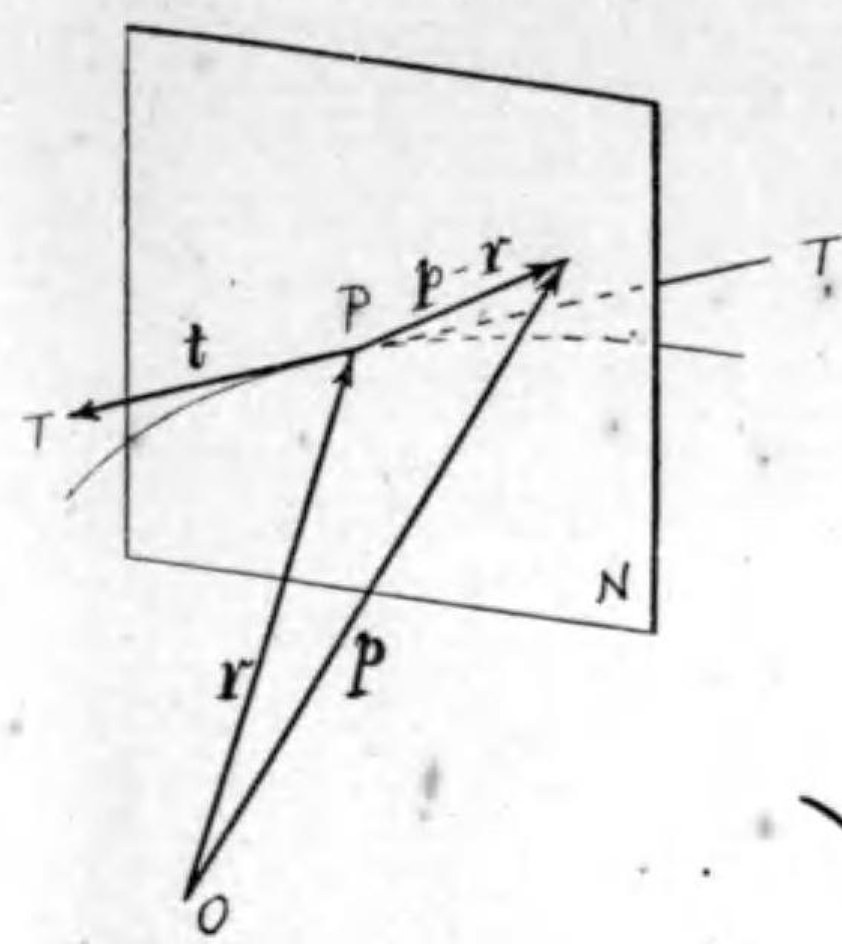
$\boldsymbol{g}$ の成分を $(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$ とすれば,この微分方程式はよく知られてゐる方程式

$$\frac{x-\xi_1}{\dfrac{dx}{ds}}=\frac{y-\xi_2}{\dfrac{dy}{ds}}=\frac{z-\xi_3}{\dfrac{dz}{ds}}$$

となる。

§15.3 法平面

第三十九圖



切點 P を過つて, 切線に垂直な平面を**法平面**といふ。

法平面上の任意の點にひいた動徑を $\boldsymbol{p}$ とすれば, $\boldsymbol{t}$ は $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}$ に垂直であるから

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=0\quad\ldots.(53)$$

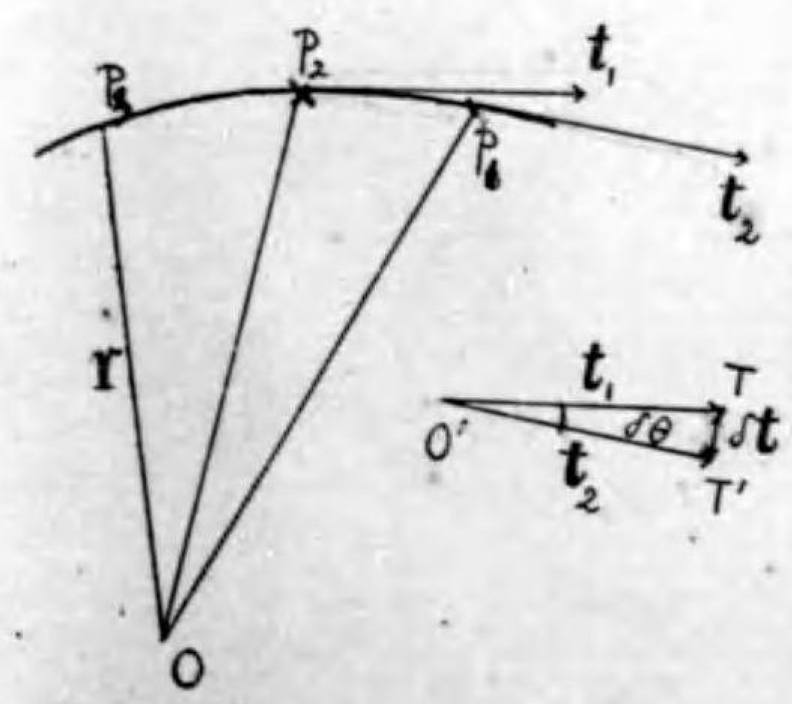
は法平面の微分方程式である。

§15.4 曲率

曲線上の近接した三點 P_1, P_2, P_3 を考へる, P_1 に於ける切線と, P_2 に於ける切線との挾む角を $\delta\theta$, 弧 $\widehat{P_1P_2}$ の長さを δs とすれば, P_2 が P_1 に限りなく近接したときの $\frac{\delta\theta}{\delta s}$ の極限値を P_1 に於ける曲線の**曲率**といひ κ で表はせば

$$\kappa=\lim_{\delta s\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta s}=\frac{d\theta}{ds}\quad\ldots.(54.1)$$

第四十圖



κ は恒に正ときめる,即ち s が増す方向に θ を測ることに規約する。

P_1 に於ける切線ベクトル $\boldsymbol{t}_2$ と, P_2 に於ける $\boldsymbol{t}_2$ とを夫々 $O'T$, $O'T'$ とすれば(第40圖), $\overrightarrow{TT'}$ は $\delta\boldsymbol{t}$ 角 TOT' は $\delta\theta$ に等しい。

よつて P_2 が P_1 に限りなく近接したとき, $\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta s}$ の極限値は $\boldsymbol{t}$ に垂直であつて $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ になる,これを P_1 に於ける**曲率ベクトル**といふ。

$\boldsymbol{c}$ を曲率ベクトルとすれば

$$\mathbf{c}=\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\quad\cdots\cdots(54.2)$$

c は隣接する二つの切線ベクトルに垂直で,その二つを含む平面上にある。

§15.41　曲率半徑

曲率ベクトルの逆ベクトル**R**の大さを**曲率半徑**(R)といふ,即ち

$$\mathbf{R}=\mathbf{c}^{-1}=\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^{-1}\quad\cdots\cdots(54.3)$$

$= \frac{\vec{c}}{c}$

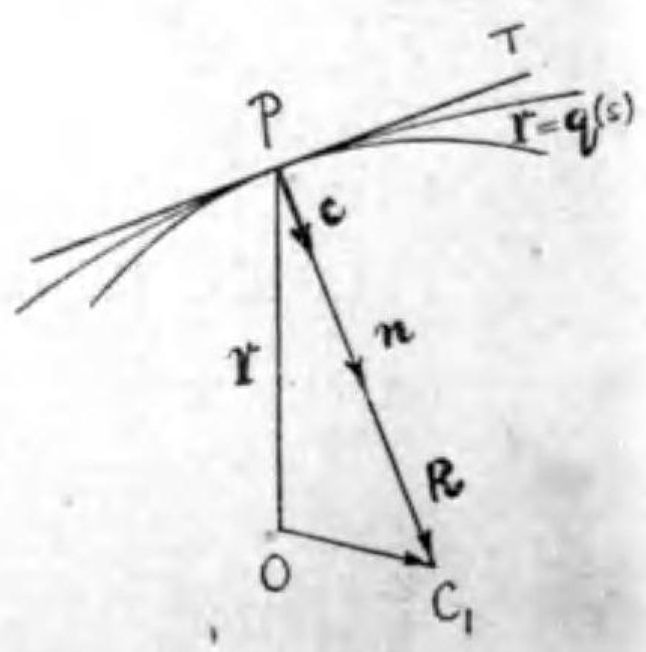
$$R=\frac{1}{\kappa}$$

第 41 圖に於いて

$$\overrightarrow{OC_1}=\mathbf{r}+\mathbf{R}$$

にあたる點 C_1 を**曲率の中心**といふ,曲線上三點が近接した極限に於いて三點を過る圓は P にて接する**接觸圓**又は**曲率圓**と呼ばれる。C_1 はその中心である。

第四十一圖



§15.5　主法線

曲率ベクトル **c** の單位ベクトルを**主法線ベクトル**といひ **n** と書けば　$\vec{r_1}=\vec{c}$　$\vec{r_1}=\frac{\vec{c}}{c}$

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{c}}{\kappa}=R\mathbf{c}=R\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\quad\cdots\cdots(54.41)$$

切點を過り切線ベクトルに垂直なベクトルは皆法平面の中にあるからいつれも法線であつて無數にある,その中で**曲率平面**(曲率ベクトルと切線とを含む面)の中にある法線ベクトルを主法線

ベクトルといふ。卽ち法平面と曲率平面との交線の方向に横たはる。

上の式は

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\kappa\mathbf{n}\quad\cdots\cdots(54.42)$$

$\mathbf{t}$ は單位ベクトルであるから, $d\mathbf{t}$ は $\mathbf{t}$ の廻轉する方向を示し從つて $\mathbf{n}$ は $\mathbf{t}$ の方向の變りを示すことになる。

曲率中心の位置は

$$\overrightarrow{OC_1}=\mathbf{r}+R\mathbf{n}$$

で與へられる。

§15.6　副法線

主法線に垂直な法線は副法線である。曲率平面に垂直な單位ベクトル $\mathbf{b}$ を**副法線ベクトル**といふことにする。

$\mathbf{b}$ は $\mathbf{t}$ 及び $\mathbf{n}$ に垂直である。その方向及び向きを

$$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$$

になるやうに定めれば(55.41)式により

$$\mathbf{b}=R\frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\quad\cdots\cdots(55)$$

動徑 $\mathbf{r}$ の點に於ける副法線の方程式は,その線上の任意の點の動徑を $\mathbf{g}$ とすれば, u をパラメターにして

$$\mathbf{g}=\mathbf{r}+u\mathbf{b}$$

又は

$$\mathbf{g}=\mathbf{r}+v\frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$$

こゝに $v(=uR)$ はパラメターで正又は負の數である。

§15.7 切觸平面

曲線上の三點 P_1, P_2, P_3 を過ぎて一つの平面を劃く，P_2 及び P_3 が曲線上を傳はつて,限りなく P_1 に近づいた極限に於いて,その三點を過る平面を，P_1 に於ける曲線の**切觸平面**といふ。これは結局曲率平面であつて,局所的平面とも云ふ。

切觸平面は主法線と切線とを含むこと明かであるから,その平面上の任意の點 Q にひいた動徑を $\boldsymbol{g}$ とすれば(第42圖), $\overrightarrow{PQ}$, $\boldsymbol{n}$ 及び $\boldsymbol{t}$ は同一平面内にあつて

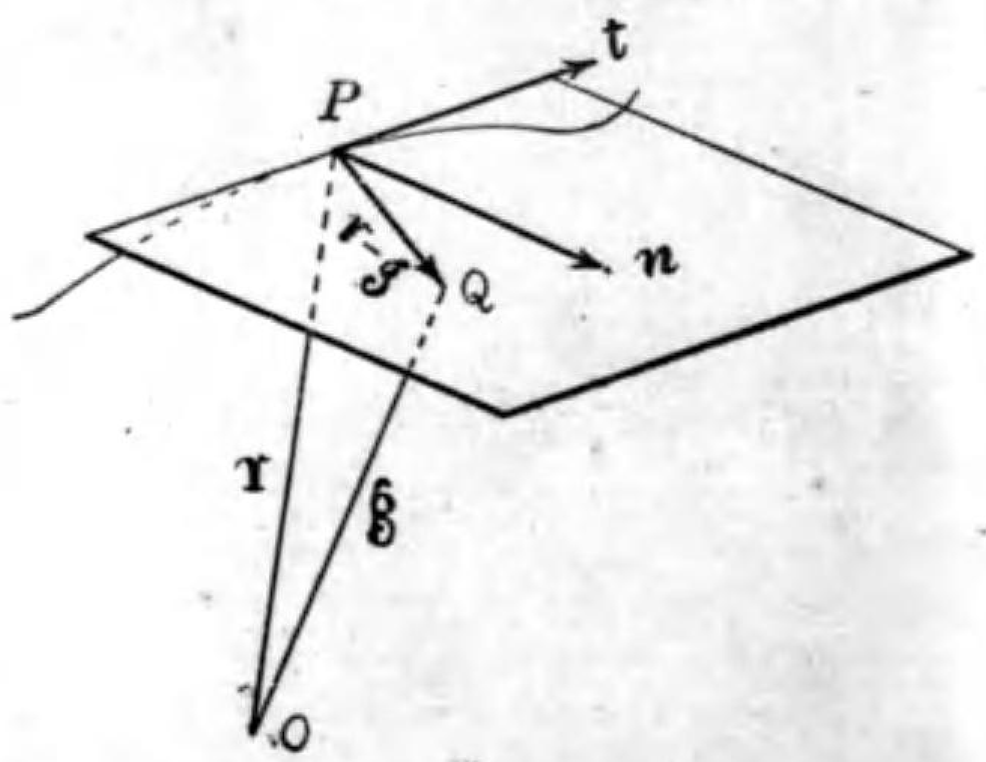
$$[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{g}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}]=0$$

卽ち

$$\left[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{g}, \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right]=0 \quad \text{(56)}$$

は切觸平面の微分方程式である。

第四十二圖



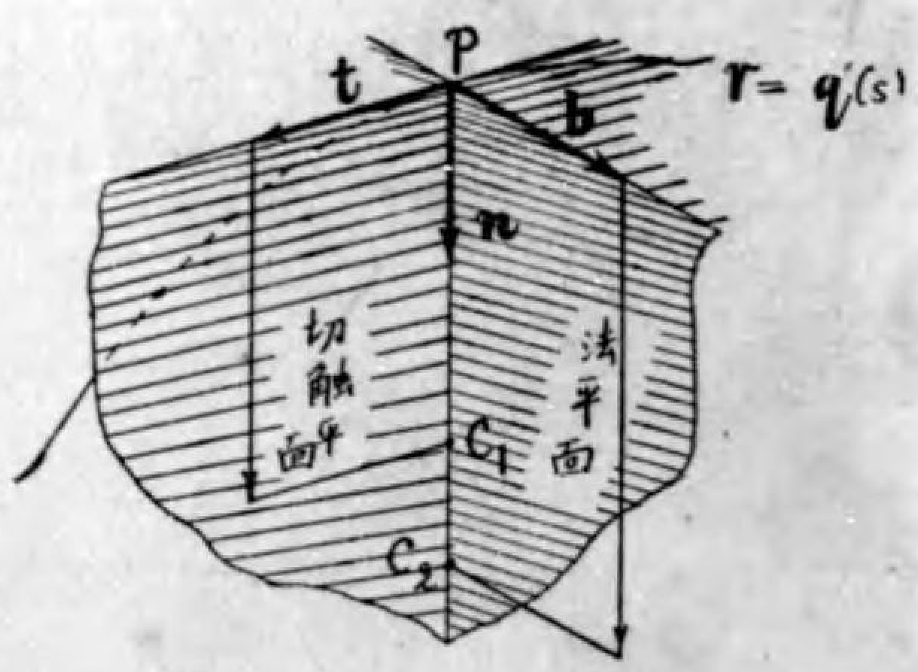
§15.71 三つの單位ベクトル $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ 及び $\boldsymbol{b}$ は,右旋系の直交坐標軸を形づくる。從つて

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t}=0$$

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1$$

となり曲線の性質を調べるときに,この三つの方向を曲線上の各點に於いて,局所的の坐標軸にとれば便利である。

第四十三圖



§15.8 歪率

隣接してゐる二點 P_1, P_2 に於ける切觸平面の間の角度を $\delta\varphi$ とすれば, P_2 が P_1 に限りなく近接したときの $\frac{\delta\varphi}{\delta s}$ の極限値を, P_1 に於ける曲線の**歪率** λ. その逆數を曲線の**歪半徑**といつて τ で表はせば

$$\lambda=\frac{1}{\tau}=\frac{d\varphi}{ds}$$

C_2 を P_1 から τ に等しい距離に $\boldsymbol{n}$ の向きにとれば, C_2 は**歪率の中心**といはれる(第43圖)。

切觸平面の間の角度は,それ等に對する法線卽ち副法線の間の角度であるから,歪率は $\boldsymbol{b}$ の變る割合によつて定まる。

$$\boldsymbol{T}=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \quad \text{(57)}$$

$\boldsymbol{T}$ を**歪率ベクトル**といつて,これによつて歪率が與へられる。

§15.81 $\boldsymbol{b}$ は單位ベクトルであるから, $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ は $\boldsymbol{b}$ に垂直なベクトルになる。

又

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

これを s について微分すれば

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{t}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=0$$

ところが(54,42)により

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\kappa\boldsymbol{n}$$

更に

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

よつて

$\frac{dt}{dt}=\frac{dt}{ds}\frac{ds}{dt}=\kappa \boldsymbol{n} v$

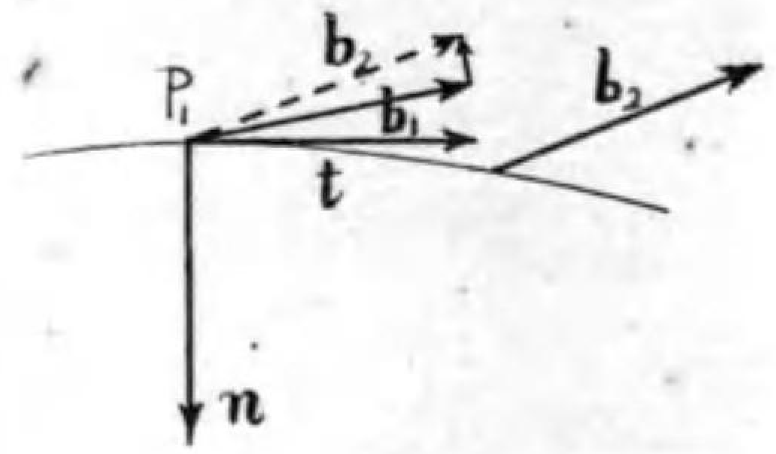
$$\boldsymbol{t}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=0$$

従つて $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ 即ち $\boldsymbol{T}$ は $\boldsymbol{b}$ に垂直な許りでなく $\boldsymbol{t}$ にも垂直であるから, $\boldsymbol{n}$ に平行である。よつて

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=-\lambda\boldsymbol{n}$$

と置けば, λ は單位ベクトル $\boldsymbol{b}$ の變る割合を示す量である。

第四十四圖



s が増すにつれて, $\boldsymbol{b}$ に對して右旋の場合正になるやうにするために負の記號をつける。第44圖でわかるやうに, $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ は $\boldsymbol{n}$ と反對の向きである。

$$\boldsymbol{T}=-\lambda\boldsymbol{n}$$

曲率を第一曲率といふのに對して,歪率を第二曲率といふこともある。曲率半徑 R は常に正であるやうに定めたが, λ は曲線が右旋か左旋かに從つて正又は負になるやうにきまる。

§15.9 Fresnet の公式

主法線の變る割合は

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\frac{d}{ds}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t})$$
$$=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{t}+\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$$
$$=-\lambda\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t}+\boldsymbol{b}\times(\kappa\boldsymbol{n})$$
$$=+\lambda\boldsymbol{b}-\kappa\boldsymbol{t}$$

前に得た三つの式とこの公式を併せて空間曲線の Fresnet の公

式といふ。

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}&=\boldsymbol{t}\\ \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}&=\kappa\boldsymbol{n}\\ \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}&=-\lambda\boldsymbol{n}\\ \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}&=\lambda\boldsymbol{b}-\kappa\boldsymbol{t}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(58)$$

讀者は練習のために,是等の式を直角成分について表はした微分幾何學の十二の式を作つてみられるがよい。

§15.91

歪率 λ を $\boldsymbol{r}$ のみの導來函數の形で表はしたものも必要なことがある。

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$
$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\kappa\boldsymbol{n}$$
$$\therefore\ \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}=\frac{d}{ds}(\kappa\boldsymbol{n})$$
$$=\frac{d\kappa}{ds}\boldsymbol{n}+\kappa\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$$

$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$, $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$, $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}$ のスカラー立方積を求めれば

$$\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right]=\left[\boldsymbol{t},\kappa\boldsymbol{n},\frac{d}{ds}(\kappa\boldsymbol{n})\right]$$
$$=\left[\boldsymbol{t},\kappa\boldsymbol{n},\kappa\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right]$$
$$=\left[\boldsymbol{t},\kappa\boldsymbol{n},\kappa(\lambda\boldsymbol{b}-\kappa\boldsymbol{t})\right]$$
$$=\left[\boldsymbol{t},\kappa\boldsymbol{n},\kappa\lambda\boldsymbol{b}\right]$$

$$= \kappa^2\lambda\left[\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}\boldsymbol{b}\right]$$

$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ は互に基本ベクトルの一組であるから,

$$[\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}\boldsymbol{b}]=1.$$

$$\therefore\quad \left[\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\ \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\ \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right]=\kappa^2\lambda$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{1}{\kappa^2}\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\ \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\ \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(59.1)$$

然るに

$$\kappa\boldsymbol{n}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$$ であるから

$$\kappa^2=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$$

よつて

$$\lambda=\frac{\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\ \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\ \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right]}{\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(59.2)$$

§15.92　例題

(1)　**螺旋**

母線(圓柱の軸)に對して一定の角度を保つてゐる曲線を圓柱の表面に劃けば,その曲線は螺旋である。

圓柱の半徑を a, 母線に對する角を $\frac{\pi}{2}-\alpha$ とし, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を互に垂直な等しい長さ l のベクトルとすれば,螺旋の式は,その上の一點への動徑を $\boldsymbol{r}$ として, $\boldsymbol{w}$ を母線に平行にとれば

$$\boldsymbol{r}=a\cos\theta\ \boldsymbol{u}+a\sin\theta\ \boldsymbol{v}+a\theta\tan\alpha\ \boldsymbol{w}$$

と書くことができる。

s について微分すれば

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=a\frac{d\theta}{ds}\ (-\sin\theta\ \boldsymbol{u}+\cos\theta\ \boldsymbol{v}+\tan\alpha\,\boldsymbol{w})$$

$\boldsymbol{t}$ を自乘すれば, $\boldsymbol{u}^2=\boldsymbol{v}^2=\boldsymbol{w}^2=l^2$ であるから

$$1=a^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\sec^2\alpha\ l^2$$

$$\therefore\quad \frac{d\theta}{ds}=\frac{\cos\alpha}{al}=\text{const.}$$

曲率 κ を見出すために, $\boldsymbol{t}$ を更に s について微分すれば

$$\kappa\boldsymbol{n}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=-a\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2(\cos\theta\ \boldsymbol{u}+\sin\theta\ \boldsymbol{v})$$

即ち主法線は $\boldsymbol{w}$ に垂直,從つて圓柱の軸に垂直である。

兩邊を自乘すれば

$$\kappa^2=a^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^4 l^2$$

よつて

$$\kappa=\frac{\cos^2\alpha}{a\,l}=\text{const.}$$

即ち曲率は到る處一定である。

歪率を知るには,更に一度微分すれば

$$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}=a\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^3(\sin\theta\ \boldsymbol{u}-\cos\theta\ \boldsymbol{v})$$

そつて

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}=a^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^5\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$$

$$\therefore\quad \kappa^2\lambda=\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\ \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\ \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right]=a^3\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^6\tan\alpha\left[\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}\right]$$

然るに

$$[\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]=\pm l^3$$

右邊にある複號は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を右旋にとれば正號を,左旋にとれば負號をとるものとする。

$$\therefore\ \lambda=\pm\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha}{a\,l}$$

もし $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, を右旋系の基本ベクトルにとれば

$$\lambda=\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha}{a}$$

$$\kappa=\frac{\cos\alpha}{a}$$

即ち曲率及び歪率はいづれも一定した値をもつてゐる。

(2) 螺旋について $\mathbf{R}$ と R を求めなさい。

§15.93 球曲率

空間曲線と切觸する種々の曲線が考へられる。曲線上の隣接した二つの點を曲線と共有する,換言すれば曲線と第一階の切觸をする曲線は切線である。曲線と第二階の切觸をするのは切觸圓である。

今曲線上の四つの隣接した點を過る球を考へる。四點が無限に近づいた極限に於いて,その球を曲線の**接觸球**といひ,その半徑の逆數を**球曲率**といふ。

接觸球の中心 M の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$, 接觸點 P の動徑を $\boldsymbol{r}$ とすれば

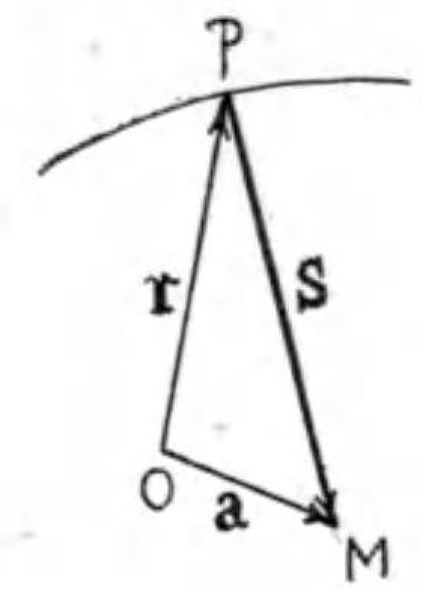
$$\overrightarrow{PM}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r}$$

によつて半徑が定まる。このベクトルを $\mathbf{S}$ 大さを S とする。

球と曲線とは隣接した四點が共通であるから, $\boldsymbol{a}$ と $\mathbf{S}^2$ の s に關する第三階迄の誘導函數は零になる。

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r})^2=\mathbf{S}^2$$

第四十五圖



これを微分すれば

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (a)$$

尙ほ一度微分して

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r})\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}-\boldsymbol{t}^2=0$$

即ち

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r})\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=1\ \ldots\ldots\ldots\ (b)$$

更に

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r})\cdot\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}=0\ \ldots\ldots\ldots\ (c)$$

(a) と (c) によつて $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r}$ 即ち $\mathbf{S}$ は $\boldsymbol{t}$ 及び $\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}$ に垂直なことが知れる。よつて

$$\mathbf{S}=l\,\boldsymbol{t}\times\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}$$

とおき,兩邊に $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ をスカラー的に乘ずれば (b) によつて

$$1=-l\left[\boldsymbol{t}\ \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\ \frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}\right]$$

l の値をこの式によつて入れれば

$$\mathbf{S}=\frac{\dfrac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}\times\boldsymbol{t}}{\left[\boldsymbol{t}\ \dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}\ \dfrac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}\right]}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (60.1)$$

然るに

$$\left[\boldsymbol{t}\ \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\ \frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}\right]=\kappa^2\lambda$$

又

$$\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}=\frac{d}{ds}(\kappa\boldsymbol{n})$$

であるから,

$$\mathbf{S}=-\frac{1}{\kappa^2\lambda}\boldsymbol{t}\times\frac{d}{ds}(\kappa\boldsymbol{n})$$

$$=-\frac{1}{\kappa^2\lambda}\boldsymbol{t}\times\left(\frac{d\kappa}{ds}\boldsymbol{n}+\kappa\lambda\boldsymbol{b}-\kappa^2\boldsymbol{t}\right)$$

$$\therefore\ \mathbf{S}=\frac{\boldsymbol{n}}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{b}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(60.2)$$

よつて

$$S^2=\frac{1}{\kappa^2}+\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa}\right)^2$$

$$=R^2+\tau^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(60.3)$$

§15.931 球曲率を次のやうな考で求めるのも面白い。

切觸圓の中心は $\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{n}$ であるが,切觸球は二つの隣接する點 P, P_1 に於ける切觸圓を過る球と見られるから,その中心の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{n}+l\boldsymbol{b}$ と書ける。l は接觸平面から中心迄の距離を示す正又は負の量である,そして l はベクトル $\overrightarrow{P_1M}$ の長さが $\sqrt{R^2+l^2}$ になることから計算できる。

$$\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}$$

とすれば ($\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}$ は夫々 P_1, P の動徑)

$$\overrightarrow{M_1P}=\boldsymbol{r}_1-\overrightarrow{OM}$$

$$=(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{n}+l\boldsymbol{b})$$

よつて

$$(\delta\boldsymbol{r}-R\boldsymbol{n}-l\boldsymbol{b})^2=R^2+l^2$$

左邊を展開すれば

$$\delta\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}-2\delta\boldsymbol{r}\cdot(R\boldsymbol{n}+l\boldsymbol{b})=0\ldots\ldots(a)$$

これを計算するには,先づ $\delta\boldsymbol{r}$ を Taylor の定理によつて展開し

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{t},\quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{\boldsymbol{n}}{R}$$

とおけば

$$\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{t}\,\delta s+\frac{\boldsymbol{n}}{R}\frac{(\delta s)^2}{2!}+\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}\frac{(\delta s)^3}{3!}+\ldots\ldots$$

扨て $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}=0$ であるから

$$\delta\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=(\delta s)^2+\text{(四次以上の項)}$$

$$2R\,\delta\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=(\delta s)^2+\frac{1}{3}R^2\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}(\delta s)^3+\ldots\ldots$$

$$2\delta\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}\cdot\boldsymbol{b}(\delta s)^3+\ldots\ldots$$

然るに

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{R^3}\frac{dR}{ds}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}\cdot\boldsymbol{b}=R\left[\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}\ \boldsymbol{t}\ \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right]=R\kappa^2\lambda=\frac{1}{R\tau}$$

是等の値を (a) に代入すれば

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{ds}-\frac{l}{R\tau}\right)(\delta s)^3+\ldots\ldots=0$$

δs が零になる極限に於いて

$$l=\tau\frac{dR}{ds}$$

よつて

$$\mathbf{S}=R\boldsymbol{n}+\tau\frac{dR}{ds}\boldsymbol{b}\quad\cdots\cdots(60.21)$$

を得る

§15.94 如何なる曲線にても

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=-\kappa\lambda$$

$$1+\lambda^2\mathbf{S}^2=\frac{1}{\kappa^4}\left(\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right)^2$$

になることを證明なさい。

［註］ ベクトルを用ゐた幾何學の參考書としては G. Bouligand 及び G. Rabaté の Initiation aux Méthodes vectorielles 及び Leçons de Géométrie vectorielle がある。但しベクトル積の記號に $\boldsymbol{ab}$ を用ゐてゐることに注意して讀まれたい。

第五章 ベクトルの積分

§16.1 ベクトル定積分

ベクトル $\boldsymbol{f}(t)$ はスカラー變數 t の函數で, t の値が (a, b) の區域内に於いては有限連續なベクトル函數であると考へる。

$(b-a)$ を n 個の微小な部分に分ける點を $a, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}, b$ とする。

t_1-a に於ける函數の一つの値を $\boldsymbol{f}(t_1)$, t_2-t_1 に於ける値を $\boldsymbol{f}(t_2)$,

t_2-t_1 に於ける値を $\boldsymbol{f}(t_2)$ 以下同樣に考へ,次の和をとる。

$$\boldsymbol{R}=(t_1-a)\boldsymbol{f}(t_1)+(t_2-t_1)\boldsymbol{f}(t_2)+\ldots+(b-t_{n-1})\boldsymbol{f}(t_n)$$

各小部分を δt に添字をつけて表はせば

$$\boldsymbol{R}=\delta t_1\boldsymbol{f}(t_1)+\delta t_2\boldsymbol{f}(t_2)+\ldots\ldots+\delta t_n\boldsymbol{f}(t_n)$$

と書ける。

n が無限に大きくなれば各 δt は限りなく小さくなり, $(b-a)$ の區域の分け方の如何に拘らず $\boldsymbol{R}$ は有限の一定の値に近づくことは,普通の積分に於けると同じやうに考へられる。

極限に於いて $\boldsymbol{R}$ の値は, $\boldsymbol{f}(t)$ の不定積分である $\boldsymbol{F}(t)$ の b と a とに於ける値の差に等しくなる。これをベクトル函數 $\boldsymbol{f}(t)$ の b, a の限界内に於ける定積分と名づけて

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(t)\,dt$$

で表はす。即ち

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(t)\,dt=\lim_{\delta t\sim 0}\sum_a^b \boldsymbol{f}(t)\,\delta t=\boldsymbol{F}(b)-\boldsymbol{F}(a)\quad\cdots\cdots(61.1)$$

よつて次にはベクトルの不定積分の意味を考へる必要がある。

§16.11 物體の質量中心を考へるには,物體を無限に多くの小部分に分ち,極限に於いてその小容積を限りなく零に近づける,今 $\delta\tau$ を物體中の一點 P の周圍にとつた小容積(容積要素)とし, P への動徑を $\boldsymbol{r}$, ρ をその點に於ける密度とすれば, P に於ける小容積の質量は $\rho\delta\tau$ である。然るに質點系の質量中心は

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\frac{\sum m\boldsymbol{r}}{\sum m}$$

であるから,物體を無限に多數の質點群の極限に於ける連續體と考へれば,$\delta\tau$ が限りなく零に近づく極根に於いて

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{Lim}\sum \boldsymbol{r}\rho\delta\tau}{\mathrm{Lim}\sum \rho\delta\tau}=\frac{\int \rho\boldsymbol{r}\,d\tau}{\int \rho\,d\tau}$$

となる。積分の限界は物體の占める空間全體についてとればよい。

§16.2 ベクトルの不定積分

ベクトル函數の積分とは,その微係數が與へられたベクトル函數になるベクトルである。

ベクトル $\boldsymbol{r}$ がスカラー量 t の函數ならば,その積分 $\boldsymbol{s}$ を

$$\boldsymbol{s}(t)=\int \boldsymbol{r}(t)\,dt$$

で表はす。これは畢竟

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}=\boldsymbol{r}$$

になることを記號で表はしたものである。

一定の大さ方向のベクトルは微分すれば零になるから,$\boldsymbol{s}$ に他の一定のベクトル $\boldsymbol{c}$ を加へても,與へられた關係を滿足する,卽ち

$$\int \boldsymbol{r}(t)\,dt=\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{c} \quad\text{......(61.2)}$$

$\boldsymbol{c}$ は微分すれば消えてしまふ。

從つて $\boldsymbol{s}$ は $\boldsymbol{c}$ が定まらない限り不定である,$\boldsymbol{c}$ は何であつても與へられた關係を滿足するわけで,積分したために現はれる定量である。

實際問題にては,$\boldsymbol{c}$ は最初の狀態或は幾何學的關係等によつて定められるのが普通である。

積分する度每に,このやうな定量が入つてくることは,普通の不定積分の積分常數と同樣であるが只ベクトル量であることを注意しなくてはならない。

§16.21 今 a をスカラー常數(略して常數といふことにする)とすれば

$$\int a\,\boldsymbol{r}\,dt=a\int \boldsymbol{r}\,dt \quad\text{......(62)}$$

$\varphi(t)$ をスカラー函數とすれば

$$\int \varphi(t)\boldsymbol{r}(t)\,dt=\varphi(t)\boldsymbol{s}(t)-\int \varphi'(t)\boldsymbol{s}(t)\,dt \quad\text{......(62.1)}$$

或は $\varphi(t)$ の不定積分を $\psi(t)$ とすれば

$$\int \varphi(t)\boldsymbol{r}(t)\,dt=\psi(t)\boldsymbol{r}(t)-\int \psi(t)\boldsymbol{r}'(t)\,dt \quad\text{......(62.2)}$$

又は $\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}=\boldsymbol{r}$ であるから

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}\,dt$$

從つて

$$\int \varphi(t)\boldsymbol{r}(t)\,dt=\int \varphi(t)\,d\boldsymbol{s} \quad\text{......(62.3)}$$

とも書ける。

$$\frac{d}{dt}\left(v \times \frac{dv}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} \times \frac{dv}{dt} + v \times \frac{d^2v}{dt^2} = v \times \frac{d^2v}{dt^2}$$
63.6

§16.3 積分の公式

スカラー積,ベクトル積等の微分公式から直に次の重要な公式が得られる。

$$\int\left(\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{w}}{dt}+\mathbf{w}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)dt=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{c} \quad\cdots\cdots(63.1)$$

$$\int\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dt=\frac{1}{2}\,\mathbf{v}^2+\mathbf{c} \quad\cdots\cdots(63.2)$$

$$\int\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2+c \quad\cdots\cdots(63.4)$$

$$\int\left(\frac{1}{v}\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}-\frac{dv}{dt}\,\frac{\mathbf{v}}{v^2}\right)dt=\frac{\mathbf{v}}{v}+\mathbf{c} \quad\cdots\cdots(63.5)$$

$$\int\mathbf{v}\times\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\,dt=\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\mathbf{c} \quad\cdots\cdots(63.6)$$

もし $\mathbf{a}$ が一定のベクトルならば

$$\int\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dt=\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}+c \quad\cdots\cdots(63.7)$$

$$\int\mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dt=\mathbf{a}\times\mathbf{v}+\mathbf{c} \quad\cdots\cdots(63.8)$$

§16.31 例へば

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-n^2\mathbf{r}$$

はベクトル微分方程式である,この積分を求めるには,普通の第二階微分方程式

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-n^2r$$

に於いて $\frac{dr}{dt}$ を兩邊に乘じて求めるやうに,ベクトル方程式にては兩邊に $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\right)$ を乘ずれば積分することができる

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-n^2\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

卽ち

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2=c-\frac{n^2}{2}\mathbf{r}^2$$

c は最初の狀況で定まる。$t=0$ の時の $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r}_0$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=0$ とすれば

$$c=\frac{n^2}{2}\mathbf{r}_0^2$$

よつて

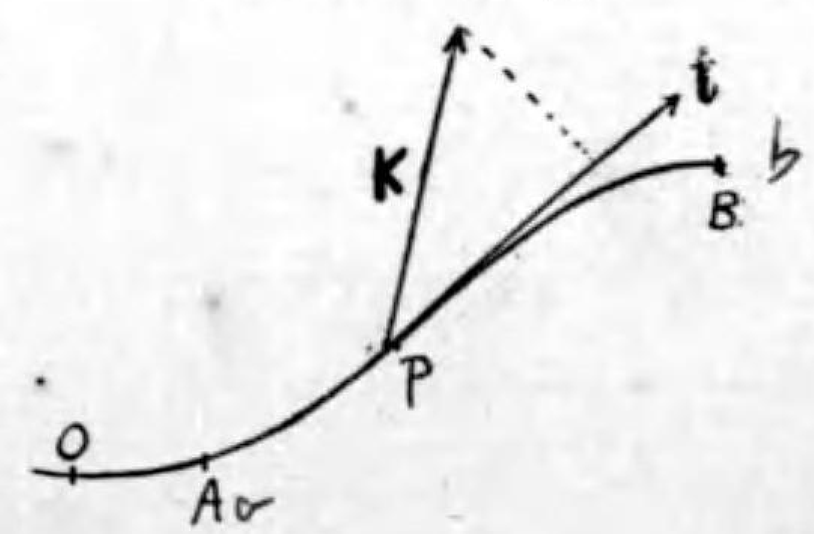
$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2=n^2(\mathbf{r}_0^2-\mathbf{r}^2)$$

§16.4 線積分

曲線上の定點 O から曲線に沿つて測つた弧の長さを s とし,s のベクトル函數 $\mathbf{K}(s)$ を考へる。

曲線上の二點 A, B に於ける s の値を夫々 a, b とする。$\mathbf{t}$ を曲線の單位切線とすれば,$\mathbf{K}$ と $\mathbf{t}$ のスカラー積 $\mathbf{K}\cdot\mathbf{t}$ は,切線の方向に於ける $\mathbf{K}$ の成分を示し,s の函數であるから,a から b の限界についてそれの定積分をとることができる

第四十六圖



$$\int_a^b(\mathbf{K}\cdot\mathbf{t})ds=\lim_{\delta s=0}\sum(\mathbf{K}\cdot\mathbf{t})\delta s$$

これは A から B 迄の間の $\boldsymbol{K}$ の**切線線積分**といふスカラー量である。

然るに $\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ であるから

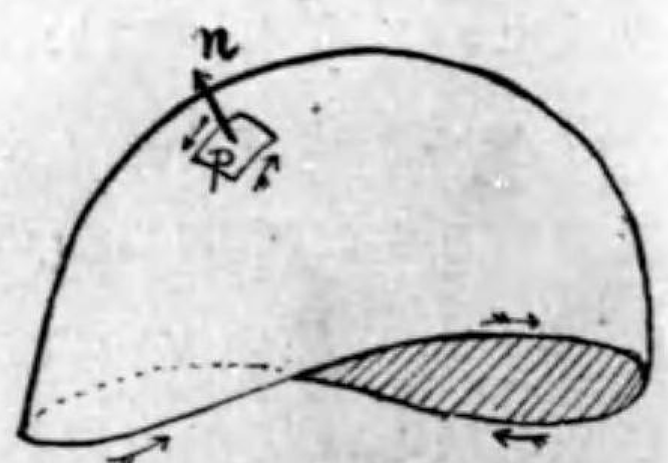
$$\int_{(A)}^{(B)}\boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{r}=\mathrm{Lim}\sum\boldsymbol{K}\cdot\delta\boldsymbol{r}$$

と書ける。$(A),(B)$ は夫々 A,B に於ける値である。

この切線の方向にとつた切線線積分は極めて重要な概念で,殊に屢々用ゐられる。$\boldsymbol{K}$が力を示せば,その線積分は A から B 迄の間に力のする仕事を示し,$\boldsymbol{K}$が電氣力ならば,線積分はAとBとに於ける電動力つまり電位差を示す。又$\boldsymbol{K}$が流體の速度ならば環流量である。線積分については後に(§37.1)で更に研究する。

§16.5 面積分

第四十七圖



曲面上のすべての點に於いて,ベクトル函數$\boldsymbol{H}$は一定の有限な値をもつものとする。曲面上の任意の點Pに於ける單位法線ベクトルを$\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$の向きは,閉ぢた曲面ならば外方に向ひ,閉ぢてなければ面積が常に正になる向きにとる)とすれば,$\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}$ は法線の方向に於ける $\boldsymbol{H}$ の成分である。

曲面を無限に多くの微小な部分に分ち,その微小面積をδSとして

$$A=\sum\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\delta S$$

を曲面の全面について求めれば,δSを無限に小さくした極限に於けるベクトル函數$\boldsymbol{H}$の(垂直)**面積分**といふスカラー量である。

$$\int\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\mathrm{Lim}\sum\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

面積をベクトルで表はせば,面積要素 $\boldsymbol{n}dS$ は $d\boldsymbol{S}$ であるから

$$\int\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S}=\mathrm{Lim}\sum\boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{S}$$

これは第二編に於いて屢用ゐられる大切な積分の一つである。

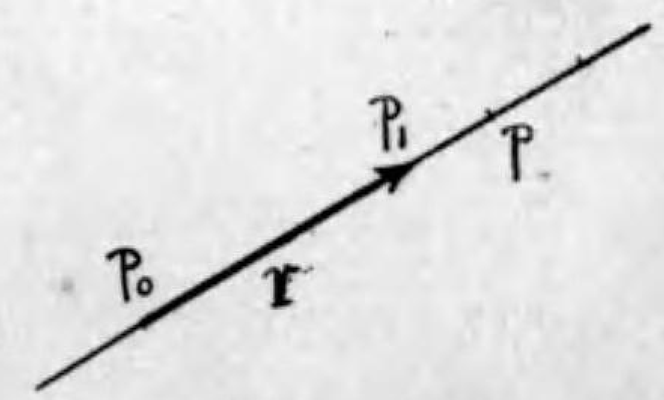
第六章 運動學

§17.1 運動と變位

ベクトル解析法の應用としてこれから力學に於ける扱ひ方を研究することにする。讀者は直に第二編を繙いて,ベクトル解析法を學んだ上でこの應用を研究してもよい。

先づ運動の原因となる力を考へに入れないで,只物體の位置の變化のみを論ずる運動學を調べてみよう。

§17.11 運動



第四十八圖

運動の最も簡單な場合は,一様な速さで一直線上を動いてゐる時である。時刻 t_0 の時に P_0 に在つた點が,t_1 の時 P_1 に到つたとすれば,

$\overrightarrow{P_0P_1}$ は t_0 から測つた時間 t の函數として知られる。

$$\overrightarrow{P_0P_1}=\boldsymbol{r}$$

とおけば

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$$

$\boldsymbol{r}$ は t のベクトル函數として定められる。

P 點は必ずしも一直線上を運動してゐなくてもよい。任意の原點 O から P にひいた動徑 $\boldsymbol{r}$ の尖端の軌跡は空間曲線を畫き,運動の初まりからの時間 t の連續函數として

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$$

で定められるから任意の時刻に於ける P 點の位置が求まる。

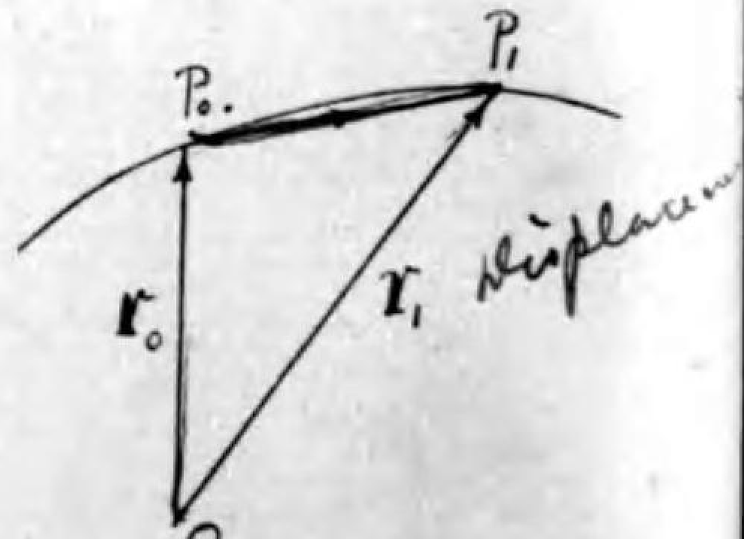
§17.12 變位

運動する點の位置の變りだけに眼をつければ

$$\overrightarrow{P_0P_1}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0$$

を**變位**と稱へる。

變位 $\overrightarrow{P_0P_1}$ といふ概念は, P_0 から P_1 に到る間途中の路が曲つてゐるとかゐないとかいふことや,實際にとつた路筋或はその間に要した時間には關係なく,只位置の變りだけを言ひ表はす量である。



第四十九圖

問題(1) 變位を直角坐標を用ゐて表はせ。

(2) 極坐標柱面坐標にて表はせ。

§17.2 速度

P_0 から P_1 に到る時間を t_1, P_2 に到る時間を t_2 とすれば,變位 $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$ は時間の函數として

$$\overrightarrow{P_0P_1}=\boldsymbol{s}(t_1)$$

$$\overrightarrow{P_0P_2}=\boldsymbol{s}(t_2)$$

變位 $\overrightarrow{P_1P_2}$ を, P_1 から P_2 に到るに要する時間 t_2-t_1 で割つたものは,その間の P の**平均速度**である,卽ち

$$\frac{\boldsymbol{s}(t_2)-\boldsymbol{s}(t_1)}{t_2-t_1}$$

P_0 から P の動く曲線に沿つて測つた弧の長さを s とすれば, P_1 から P_2 に到る間の運動點の平均の速さは

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

P_2 が限りなく P_1 に接近した極限に於ける,平均の速さの極限値を, P_1 に於ける速さと定義して v とおけば

$$v=\frac{ds}{dt}=\lim_{t_2-t_1=0}\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

速さはスカラー量である。

これと同樣に P_2 が P_1 に限りなく接近した極限に於ける,平均速度の極限値を, P_1 に於ける**速度**とする,

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}=\lim_{t_2-t_1=0}\frac{\boldsymbol{s}(t_2)-\boldsymbol{s}(t_1)}{t_2-t_1}$$

任意の原點 O から P_1, P_2 へひいた動徑を夫々 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ とすれば,速度 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\lim_{t_2-t_1=0}\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}$$

である。

曲線上の位意の點 P への動徑を $\mathbf{r}$, 最初の點 P_0 の動徑を $\mathbf{r}_0$ とすれば,

$$\mathbf{s}=\overrightarrow{P_0P}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$$

これを t について微分すれば, Pに於ける速度 $\mathbf{v}$ を得る

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{...(64)}$$

§17.21 點Pへの動徑 $\mathbf{r}$ は, tの函數であるが,同時にP_0から曲線に沿つて測つた距離 s の函數として, s が t の函數であると見做してよい。

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

然るに

$$\mathbf{t}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

は Pに於ける單位切線であるし,

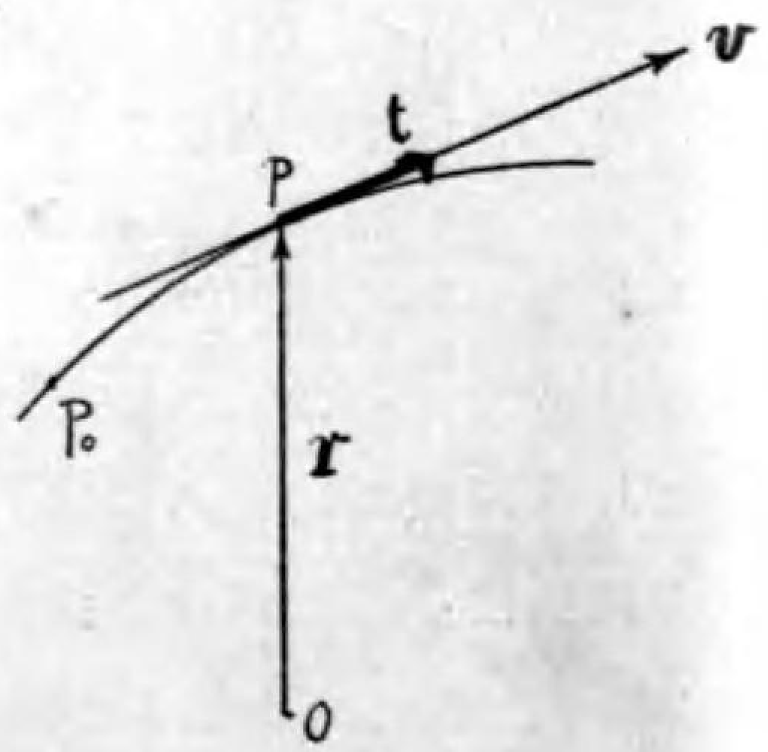
$$\frac{ds}{dt}=v$$

は速さであるから,Pに於ける速度は

$$\boxed{\mathbf{v}=v\mathbf{t}} \quad \text{.............(64.1)}$$

卽ち, 速度は切線の方向にあつて大さは速さに等しいベクトル量である。

第五十圖



種々の坐標軸に關して速度の成分を表はすことは,非常に重要であるから,煩を厭はずに調べておかう。

§17.22 速度の直角成分

直角坐標に關するものは到つて容易い, $\mathbf{r}$ の成分を (x, y, z) とすれば

$$\mathbf{v}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad \text{..............................(64.2)}$$

從つて速さは

$$v=|\mathbf{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad \text{..................(64.21)}$$

§17.23 平面極坐標に關する成分

$\mathbf{r}_1$を動徑の方向にとつた單位ベクトルとすれば

$$\mathbf{r}=r\mathbf{r}_1$$

これを時間 t について微分すれば

$$\mathbf{v}=\frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1+r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

さて, $\mathbf{r}_1$ は單位ベクトルであるから, (§14,3の例1) により $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$ は $\mathbf{r}_1$ に垂直になる,この $\mathbf{r}_1$ に垂直な單位ベクトルを $\mathbf{s}_1$ とすれば(第51圖)

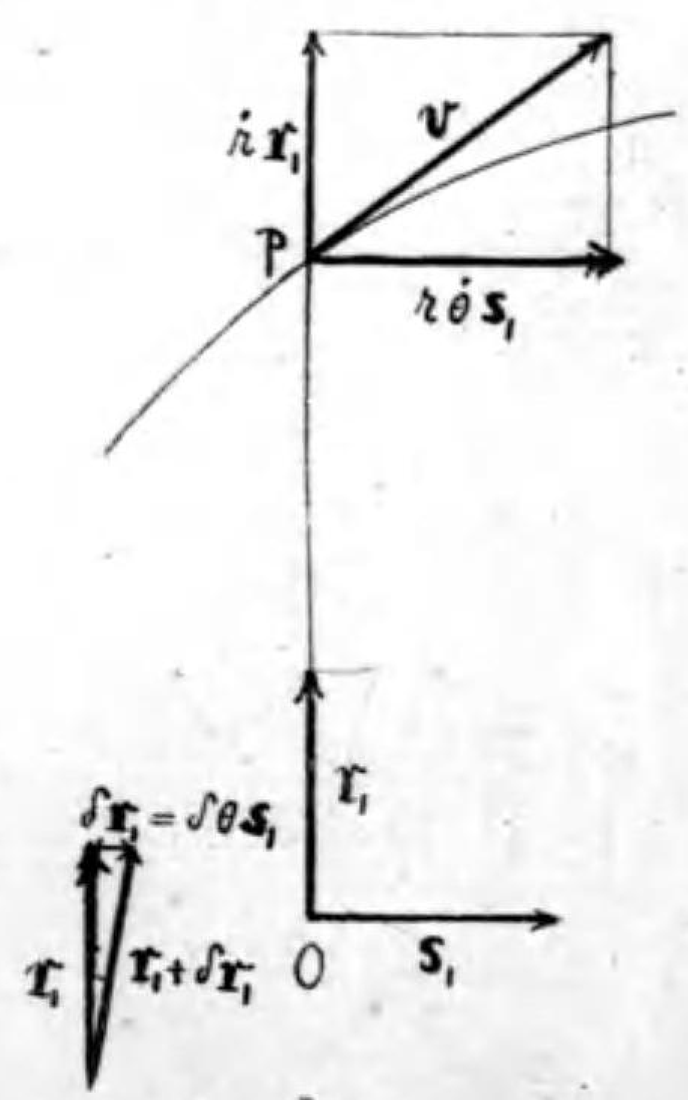
$$\delta\mathbf{r}_1=\delta\theta\,\mathbf{s}_1$$

$\delta\theta$ は $\mathbf{r}_1$の方向の變りを示す小さい角度である。

よつて

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\mathbf{s}_1 \quad \text{.......(64.3)}$$

第五十一圖



$\frac{d\theta}{dt}$ は廻轉速度卽ち角速度の大さである。

卽ち

$$\boxed{\mathbf{v}=\frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1+r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{s}_1} \quad \text{...(64.4)}$$

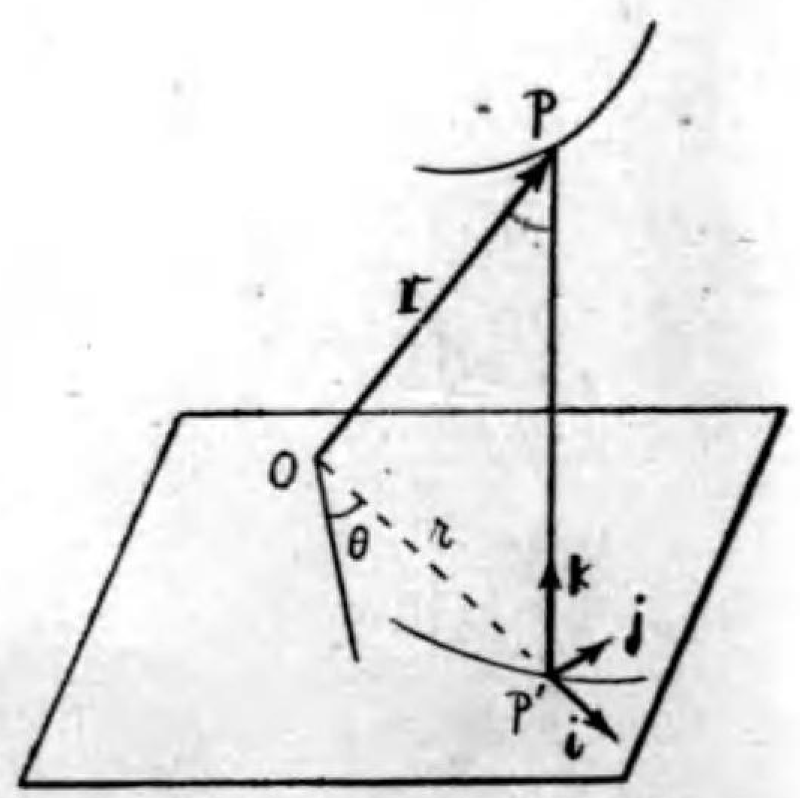
所謂徑速度(動徑の方向の分ベクトル)を$\boldsymbol{v}_r$,横速度(動徑に垂直な分ベクトル)を$\boldsymbol{v}_\theta$とすれば

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v}_r=\dot{r}\,\boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{v}_\theta=r\dot{\theta}\,\boldsymbol{s}_1 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(64.41)$$

§17.24 柱面(圓柱)坐標に關する成分

原點を過る平面上の P の射影點P'へひいた動徑の方向に單位ベクトル $\boldsymbol{i}$ をとり,それに垂直に平面内に $\boldsymbol{j}$, 鉛直に $\boldsymbol{k}$ をとれば,$(\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{k})$ は一組の直交坐標軸である(第52圖)

第五十二圖



$$\overrightarrow{OP}\equiv\boldsymbol{r}$$
$$=r\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}$$

但し

$$r=OP',\quad z=P'P$$

よつて

$$\boldsymbol{v}=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{i}+r\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}+z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}$$

然るに(64.3)式により

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{j}$$

$\boldsymbol{k}$ は恒に鉛直で變らないから

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=0$$

よつて

$$\boldsymbol{v}=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{i}+r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}\cdots\cdots\cdots\cdots(64.5)$$

徑速度$\boldsymbol{v}_r$,横速度$\boldsymbol{v}_\theta$,垂直速度$\boldsymbol{v}_z$で表はせば

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_\theta+\boldsymbol{v}_z$$

こゝに

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v}_r=\dfrac{dr}{dt}\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{v}_\theta=r\dfrac{d\theta}{dt}\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v}_z=\dfrac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(64.51)$$

從つて

$$v=\sqrt{\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2+\dot{z}^2}$$

§17.25 極(球面)坐標に關する成分

第13圖を參照して,Pにひいた動徑の方向の單位ベクトルを $\boldsymbol{i}$, Pを過る子午圏について餘緯度 θ の増す向きの單位切線を $\boldsymbol{j}$, 緯度圏についてφの増す向きの單位切線を$\boldsymbol{k}$とすれば,$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$は右旋系の坐標軸になる。

$$\overrightarrow{OP}\equiv\boldsymbol{r}=r\,\boldsymbol{i}$$

よつて

$$\boldsymbol{v}=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{i}+r\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}$$

さて

$$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}$$

故に

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\times\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}\times\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}$$

圖より明かに

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{i}$$

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=-\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\,\boldsymbol{i}-\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta\,\boldsymbol{j}$$

故に

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\times\boldsymbol{k}=-\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}\times\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=-\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\,\boldsymbol{k}$$

従つて

$$\boldsymbol{v}=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{i}+r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{j}+r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{k}\quad\cdots\cdots(64.6)$$

徑速度$\boldsymbol{v}_r$，緯圏速度$\boldsymbol{v}_\theta$，經圏速度$\boldsymbol{v}_\varphi$とすれば

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_\theta+\boldsymbol{v}_\varphi$$

こゝに

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{v}_r&=\dot{r}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{v}_\theta&=r\dot{\theta}\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{v}_\varphi&=r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(64.61)$$

従つて

$$v=\sqrt{\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2+(r\sin\theta\,\dot{\varphi})^2}$$

§ 17.3　加速度

變位の時間に對して變る割合を速度と定義したやうに，速度の時間に對して變る割合を**加速度**といふ。 Hodograph上における velocity ナリ

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\\ &=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(65)$$

即ち變位のtに關する第二階の微分係數である。

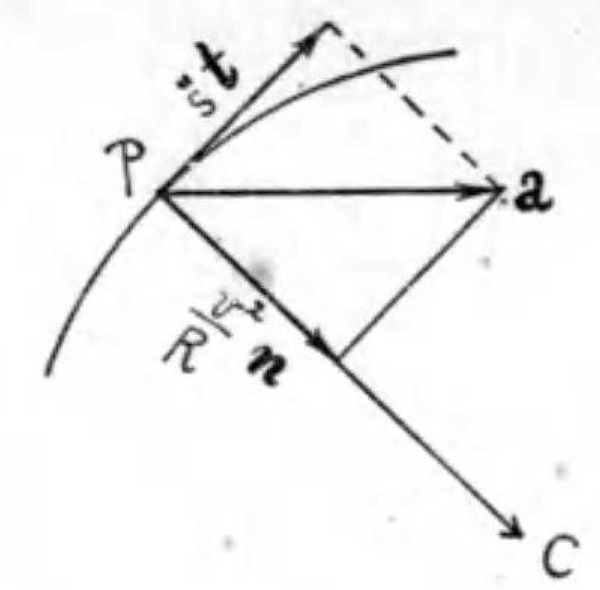
§ 17.31　加速度の切線及び法線成分

(64.1)式を微分すれば

$$\boldsymbol{a}=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{t}+\frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}$$ $\vec{v}=v\vec{t}$

然るにFresnetの空間曲線の公式(58)を用ゐれば

第五十三圖



$$\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{\boldsymbol{n}}{R}$$

$\boldsymbol{n}$はPに於ける單位法線ベクトル，Rは曲率半徑である。故に

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{t}+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\boldsymbol{n}}{R}\quad\cdots\cdots(65.1)}$$

即ち加速度は一般に切線の方向の成分$\ddot{s}$と，法線の方向に$\dfrac{v^2}{R}$の成分がある。一直線上の運動にては$R=\infty$であるから，只直線に沿つて$\ddot{s}$の成分だけを持つてゐる。

§ 17.32　加速度の直角成分

直角坐標にて表はせば

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}}\quad\cdots\cdots(65.2)$$

加速度の大さは

$$|\boldsymbol{a}|=a=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

§ 17.33　平面極坐標

前章に於ける平面極坐標で表はした速度 (64.4) 式を時間について微分すれば

$$\boldsymbol{a}=\frac{d^2r}{dt^2}\boldsymbol{r}+\frac{dr}{dt}\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}+\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\boldsymbol{s}_1+r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{s}_1}{dt}$$

然るに

$$\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{s}_1$$

又

$$\frac{d\boldsymbol{s}_1}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_1)$$

$$=\boldsymbol{k}\times\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}=\boldsymbol{k}\times\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{s}_1=-\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{r}_1$$

これを代入すれば

$$\boxed{\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{r}_1+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\boldsymbol{s}_1} \quad\cdots\cdots(65.3)$$

$\boldsymbol{r}_1$ の係數は動徑の方向の成分, $\boldsymbol{s}_1$ の係數はそれに垂直な成分である。

$\boldsymbol{a}$ の大さ a はこれを自乘すれば求まる。

$$a=\sqrt{(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)^2+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})^2} \quad\cdots\cdots(65.31)$$

§ 17.31　圓運動に於ける加速度

半徑 c の圓周上の運動にては

$$r=c,\quad \dot{r}=o,\quad \ddot{r}=o$$

であるから,

$$\boldsymbol{a}=c\ddot{\theta}\boldsymbol{s}_1-c\dot{\theta}^2\boldsymbol{r}_1$$

$$=\dot{v}\boldsymbol{s}_1+\frac{v^2}{c}\boldsymbol{r}_1$$

卽ち圓の中心に向ふ加速度 $\frac{v^2}{c}$ と,切線の方向の加速度 $\dot{v}$ とがある。前者は速さの變化には影響を及ぼさない只運動が圓周上に拘束されるために生じ,後者は單位時間に速さの變る割合を示してゐる。

§ 17.34　柱面坐標

讀者自ら練習のために試みられたい。

§ 17.35　極坐標に關する加速度ゐ成分

(64.5) 式の $\boldsymbol{v}$ の値を t について微分すれば

$$\boldsymbol{a}=\ddot{r}\boldsymbol{i}+\dot{r}\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+(r\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\boldsymbol{j}+r\dot{\theta}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}$$

$$+(\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi}+r\cos\theta\,\dot{\theta}\varphi+r\sin\theta\,\ddot{\varphi})\boldsymbol{k}+r\sin\theta\dot{\varphi}\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}$$

然るに

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=-\dot{\theta}\,\boldsymbol{i}$$

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=-\dot{\varphi}\,(\sin\theta\,\boldsymbol{i}+\cos_\theta\,\boldsymbol{j})$$

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\times\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}\times\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}$$

$$=-\dot{\theta}\,(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})-\sin\theta\,\varphi\,(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})$$

$$=\dot{\theta}\,\boldsymbol{j}+\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{k}$$

さて $\boldsymbol{a}$ の動徑の成分を a_r, 子午圈成分を a_θ, 緯圈成分を a_φ とすれば

$$\boldsymbol{a}=a_r\,\boldsymbol{i}+a_\theta\,\boldsymbol{j}+a_\varphi\,\boldsymbol{k}$$

上の式を整理すれば次の關係が求まる。

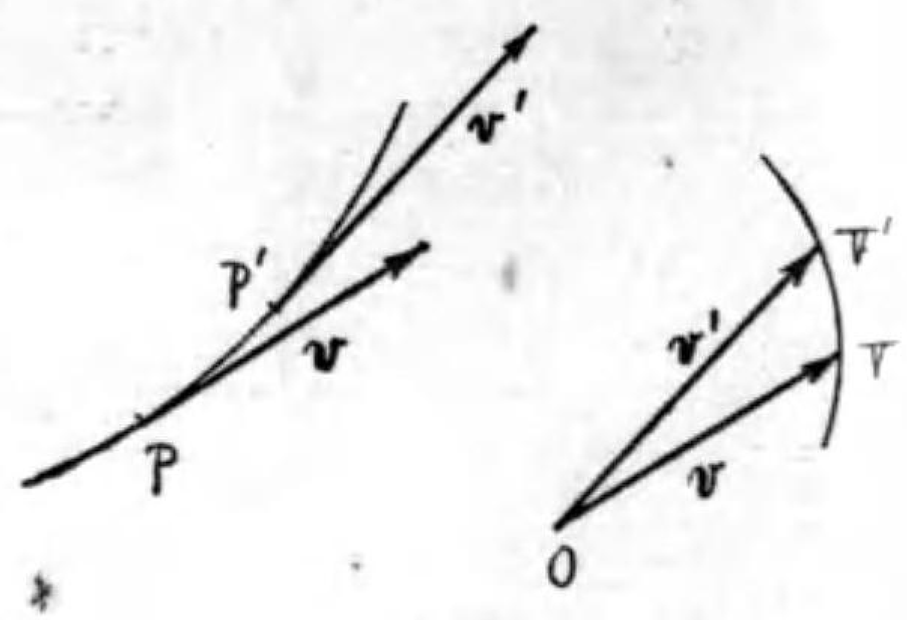
$$\left.\begin{aligned}a_r&=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\\a_\theta&=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}-r\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\\a_\varphi&=2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi}+r\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}+r\sin\theta\,\ddot{\varphi}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(65.41)$$

§17.4 ホドグラフ

任意の點Oから速度を代表するベクトルをひくとき,そのベクトルの尖端の軌跡は一般に一つの空間曲線を劃く。

この曲線の上で加速度と速度との關係は,速度と動徑との關係と同じになる。

第五十四圖



このやうにして作つた速度を代表するベクトルの尖端の軌跡をHamilton先生がhodographと名付けた。この名はあまり適切なものとは云へないが一般に用ゐられる。

$\boldsymbol{v}$と$\boldsymbol{v}'$を時間の初めと終りの速度とすれば,$\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}$は$t$時間に於ける速度の變化を示す。

動點の劃く路筋の方程式が

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$$

で與へられるとき,ホドグラフの方程式は

$$\overrightarrow{OV}\equiv\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{f}'(t)$$

の形になる。

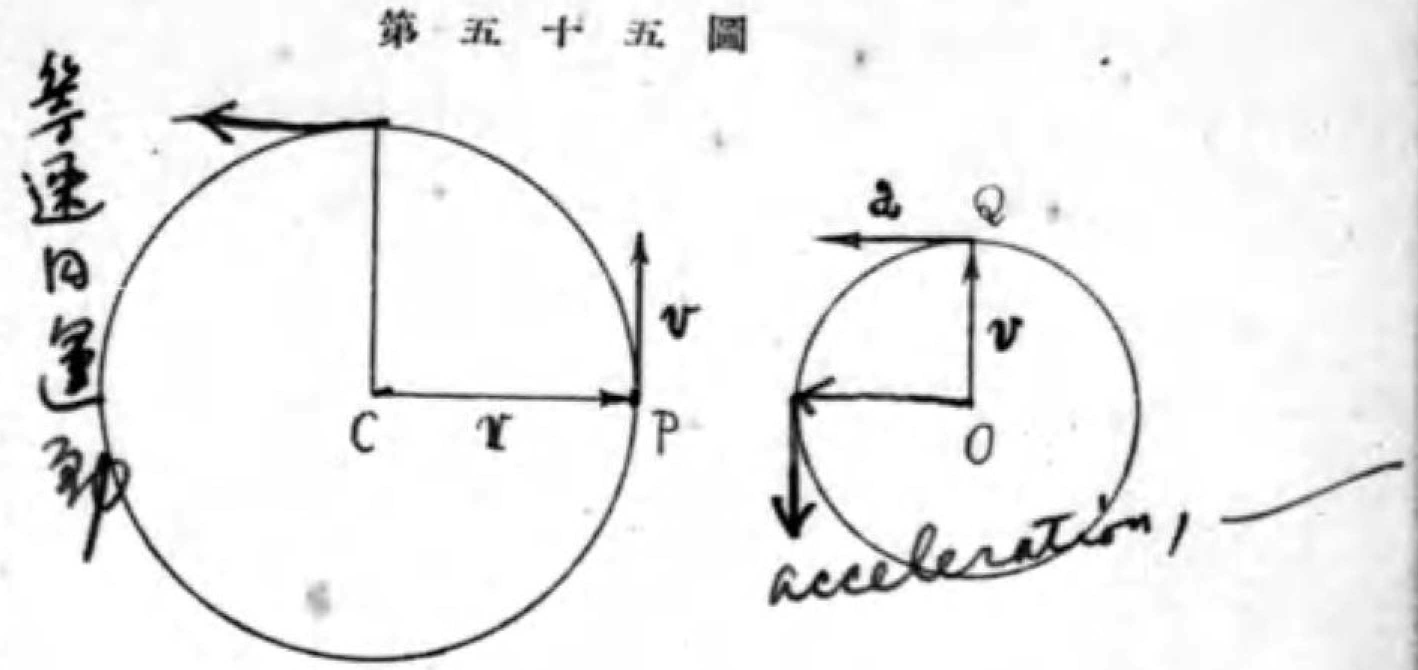
從つて簡單な次の場合の結論は證明する迄もない。

靜止してゐる點のホドグラフは,任意の原點に於ける一つの點で示される。

一直線上の一様な運動のホドグラフは,速度を代表するベクトルの尖端に於ける一點である。

一直線上に一様に加速される運動のホドグラフは,一定の速さで動く點の劃く,その直線に平行な直線である。

第五十五圖



圓周(C)上の一様な運動のホドグラフは速さに等しい長さの半徑を有する圓である,速度は恒にC圓周の動徑に垂直であるから,圓周上のP點に相當するホドグラフ上のQ點は$\frac{\pi}{2}$だけ位相が進んだ點になる。

PとQとは共に等しい角速度で廻轉し,Q點の速度はPの加速度に等しい。

PとQとは同じ時間で圓周を一週するから

$$\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi v}{a}$$

$$\therefore\quad a=\frac{v^2}{r}$$

§17.41 複雜な運動では,更にホドグラフのホドグラフを考へると便利である。

その方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{f}''(t)$$

である。

△§17.42　楕圓調和運動

離心角φが時間に比例して増すやうな楕圓上の運動は，CA, CBを主軸とすれば

$$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{CP}\equiv\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos\varphi+\boldsymbol{b}\sin\varphi$$

但し

$$\varphi=\omega t+\varepsilon$$

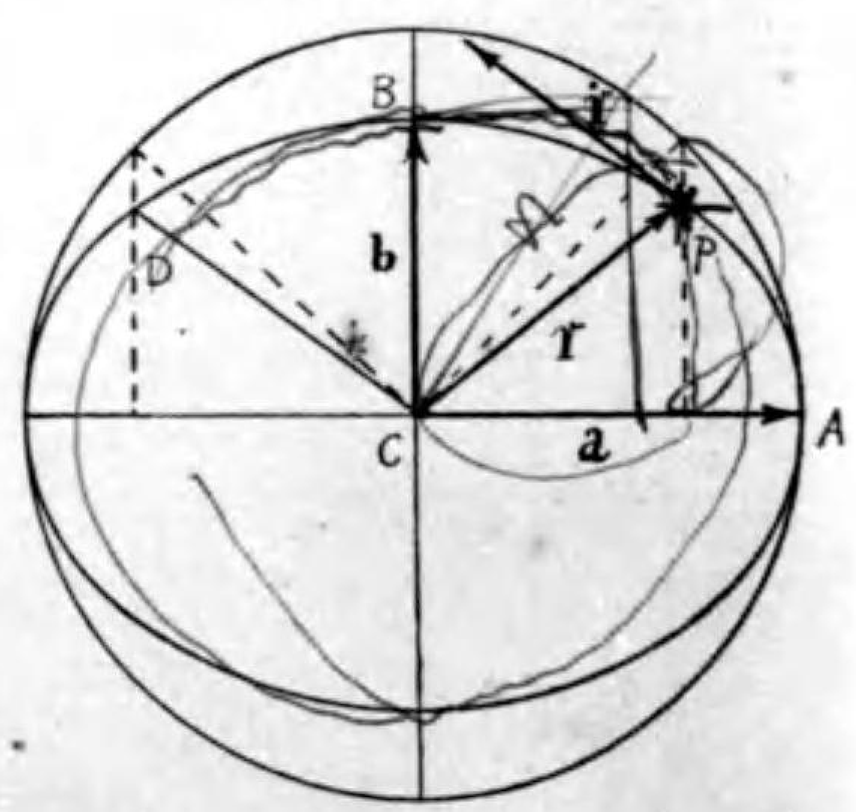
で表はせる，εは位相差である。

従つてホドグラフを示すベクトルは

$$\dot{\boldsymbol{r}}=-\omega\sin\varphi\,\boldsymbol{a}+\omega\cos\varphi\,\boldsymbol{b}$$

$$=\omega\overrightarrow{CD}$$

第五十六圖



CD は CP に共軛な半徑である。

即ちホドグラフは全體の寸法がω倍になつた相似の楕圓で，Pに於ける速度は$\omega\overrightarrow{CD}$に等しい，ホドグラフ上で$P$に相當する點$Q$の離心角は$\varphi+\frac{\pi}{2}$である。

P點の加速度は

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\omega^2\boldsymbol{r}=\omega^2\overrightarrow{PC}$$

即ちホドグラフのホドグラフは，もとの楕圓と相似で，加速度は中心に向つてゐることが知れる。このやうな運動を**楕圓調和運動**

といふ。

（注意）$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$は必ずしも主軸の方向にとる必要はない。一般にベクトル$2\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{b}$, を邊とする平行四邊形に內接する楕圓の方程式は，nが實數ならば

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos nt+\boldsymbol{b}\sin nt$$

で表はせる。

△§17.5　不變加速度運動

スカラー變數に關する積分の例としてこゝに加速度が一定の場合の運動を調べよう。

加速度が一定な運動は一定の時間內に於ける速度の變化が恆に等しいから，そのホドグラフは一定の速さの點の劃く直線である。

加速度$\boldsymbol{a}$は變らないから

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{a}$$

をtについて積分すれば

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{v}_0$$

$\boldsymbol{v}_0$は$t=0$の時に於けるPの初速度である。

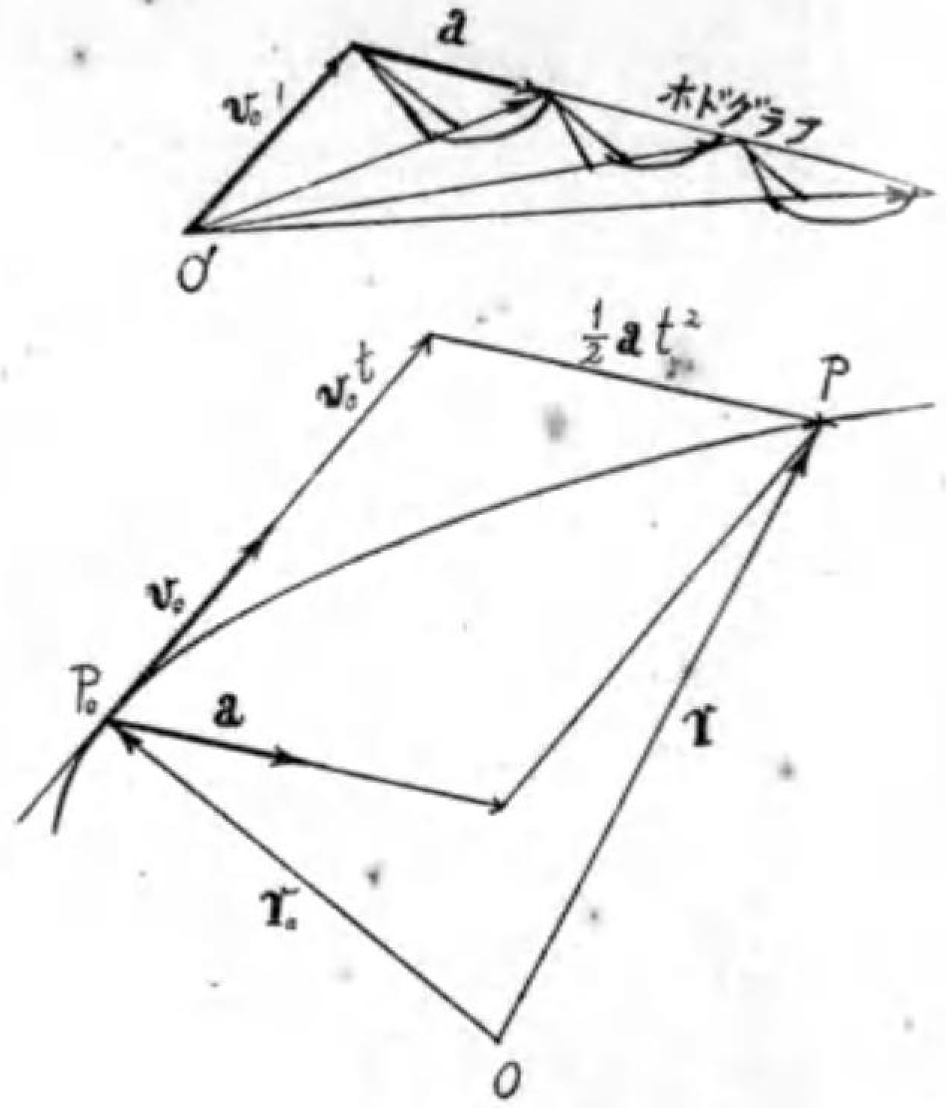
これを更にtついて積分すれば

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{v}_0t+\boldsymbol{r}_0$$

$\boldsymbol{r}_0$はt=0に於けるPの位置$\overrightarrow{OP_0}=\boldsymbol{r}_0$である,

即ち$\boldsymbol{r}$の軌跡はtに關する二次曲線で,$\boldsymbol{r}_0$の尖端を過る拋物線である。

第五十七圖



重力だけが作用する時,投げ出された物體は,加速度$\boldsymbol{a}$が恒に鉛直に下方に向ふから拋物線を劃き,ホドグラフは垂直な直線で示される。

原點を投射點に,重力の加速度を$\boldsymbol{g}$とすれば,

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2+\boldsymbol{v}_0t$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{g}t+\boldsymbol{v}_0$$

となる。

§17.6　相對運動

Q點のP點に對する關係位置を表はすベクトル$\overrightarrow{PQ}$は,任意の原點に關するQ及びPの動徑$\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_1$の差である。

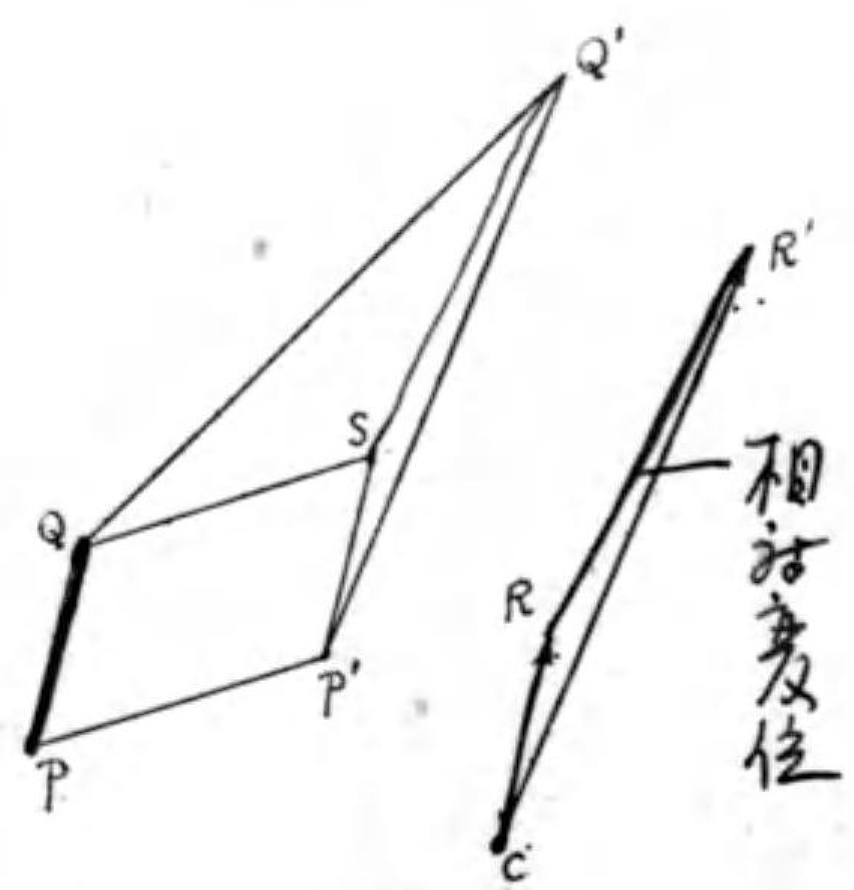
$$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

§17.61　相對變位

もしP,Qがともに運動してゐるならば,QのPに對する**相對變位**は,Q及びPの變位(或る原點に對する)の差であることは數學としては單にベクトル和の定理から導かれるけれど,物理學的には,數學的の結論が果して現象の說明にあふか一應調べてみた上で,變位が數學的のベクトルとしてベクトル解析の法則に從ふことを知るのが順當である(50頁參照)。

任意の定點CからベクトルCRを$\overrightarrow{PQ}$に等しくひく,今P及びQが運動してゐると考へれば,Rの軌跡はQのPに對する變位を示す。

第五十八圖



P,Q及びP',Q'を運動する點の二つの相當する位置とし,$\overrightarrow{CR}$, $\overrightarrow{CR'}$が夫々$\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{P'Q'}$に等しいベクトルとすれば,$\overrightarrow{RR'}$は相對變位である。

さて平行四邊形PP'SQをつくれば,$\Delta CRR'$と$\Delta P'SQ'$とは相似であるから

$$\overrightarrow{RR'}=\overrightarrow{SQ'}=\overrightarrow{QQ'}-\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{QQ'}-\overrightarrow{PP'}$$

即ち相對變位はQ, Pの變位の差である。

變位を$\delta\boldsymbol{r}$で表はせば,相對變位は

$$\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\delta\boldsymbol{r}_2-\delta\boldsymbol{r}_1 \qquad \text{(66.1)}$$

と書ける。

§17.62　相對速度及び相對加速度

Q の P に對する**相對速度**は,相對變位を時間について微分すれば得られる

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}-\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1 \quad\cdots\cdots(66.2)$$

從つて Q の P に對する**相對加速度**は,Q と P の加速度の差である。

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1 \quad\cdots\cdots(66.3)$$

もし P が一定の速度で運動してゐるならば

$$\boldsymbol{a}_1=0$$

であるから,Q の P に對する相對加速度は,Q 自身の加速度に等しい。

§17.63 周轉圓運動

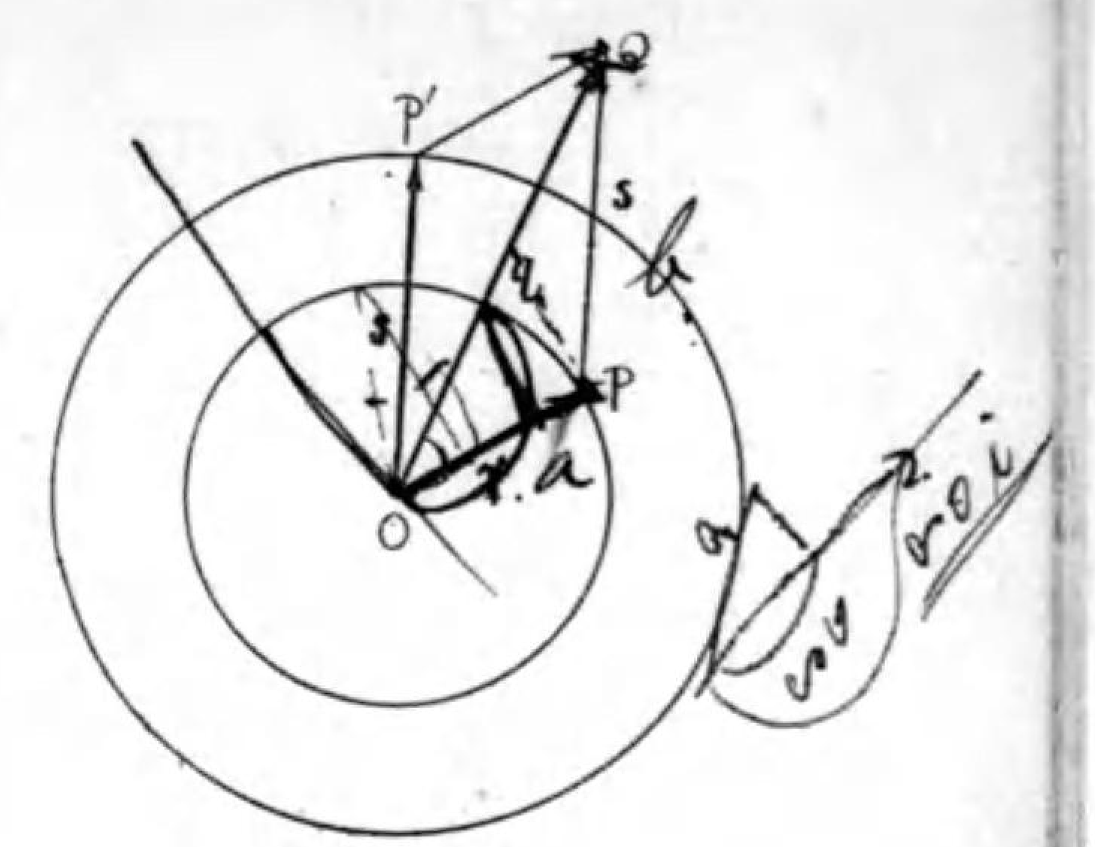
相對運動の興味ある例は,周轉圓の運動で示される。惑星の運動は軌道が一平面内に限られてゐる圓運動とすれば,地球から見た他の惑星の見懸けの運動,即ち天球上の惑星の運動は周轉圓の運動となるので,古く紀元前二世紀 Alexandria の Ptolemeus は,太陽系の運行を同心圓の運動と考へず周轉圓の運動として說明してゐる。

§17.631 定點 O の周圍を P 點は一定の大さの角速度 ω_1 で半徑 a の圓を劃き,Q 點は P を中心とする半徑 b の圓周上を大さ ω_2 の角速度で運動するとき(同一平面內),Q 點の軌跡を**周轉圓**と稱へる。

さて

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r},\quad \overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{s}$$

第五十九圖



$\overrightarrow{OP'}$ を $\overrightarrow{PQ}$ に平行にひけば

$$\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{q}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}$$

平面上に直交坐標軸をとれば

$$\boldsymbol{r}=a\cos(\omega_1 t+\epsilon_1)\,\boldsymbol{i}+a\sin(\omega_1 t+\epsilon_1)\,\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{s}=b\cos(\omega_2 t+\epsilon_2)\,\boldsymbol{i}+b\sin(\omega_2 t+\epsilon_2)\,\boldsymbol{j}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は位相差である。

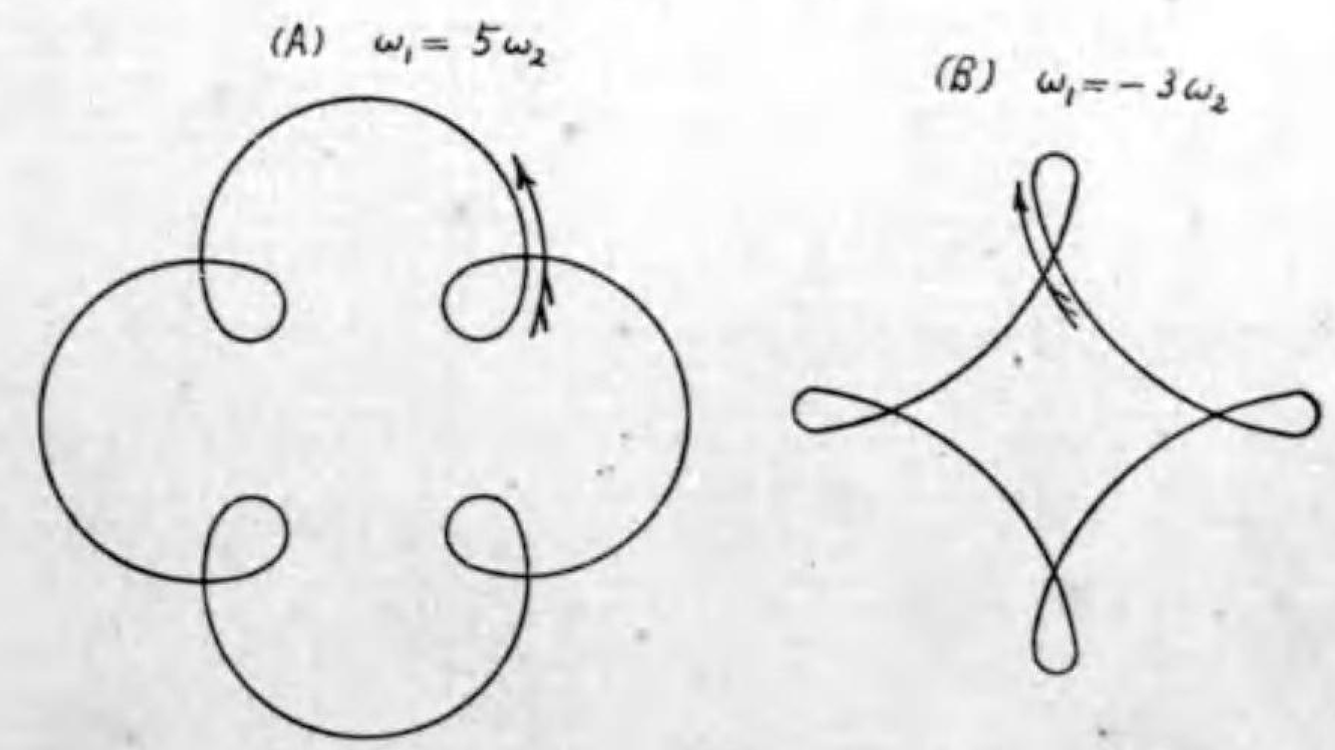
故に Q 點の劃く路筋への動徑は

$$\boldsymbol{q}=\{a\cos(\omega_1 t+\epsilon_1)+b\cos(\omega_2 t+\epsilon_2)\}\boldsymbol{i}$$
$$+\{a\sin(\omega_1 t+\epsilon_1)+b\sin(\omega_2 t+\epsilon_2)\}\boldsymbol{j}$$

この式から明かに Q 點の軌跡は,P' 點の周圍を Q が ω_1 の大さの角速度で半徑 a の圓を劃き,P' 點は O を中心とする半徑 b の圓周上を,大さ ω_2 の角速度で運行すると見做すことができる。

§17.632 ω_1 と ω_2 とが同じ符號をもつとき,即ち P も Q も同じ向きに週轉するときの周轉圓を**順周轉圓**,ω_1 と ω_2 とが反對の符號

第六十圖



をとるときを**逆周轉圓**といふ。

ω_1 と ω_2 との比が整數の比になるときは,周轉圓は閉曲線になるが,整數の比にならないとき曲線は閉ぢない。

§17.633 惑星はほゞ同一平面上にあるから,同心圓を劃く P と P' との相對運動と考へればよい。

$$\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OP}$$

$$=\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}$$

卽ち§17.631の式に於いての符號を變へるか,ε_1 を π だけ增加した場合と同じであるから,地球より見た他の惑星の見懸けの運動は周轉圓の運動として映るわけで, Ptolemeus の樹てた說も當時としては非常に勝れた說である。

(問題) 直線上を一様に運動する點に對して,一定の加速度で運動する點の相對運動の路筋は拋物線になることを證明なさい。

§17.7 面積速度

動徑が單位時間に劃く面積を**面積速度**といふ。δt 時間内に動徑の劃く面積 $\delta\boldsymbol{S}$ は

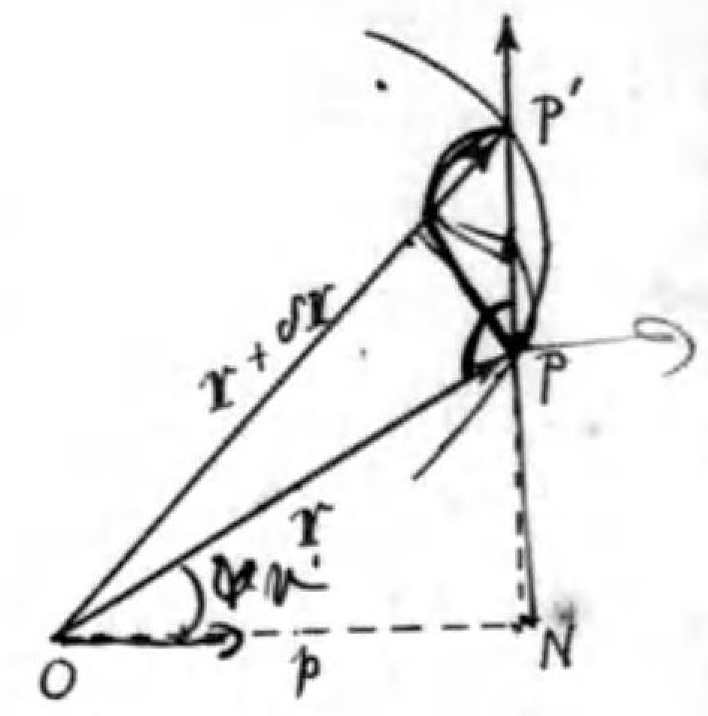
$$\delta\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\delta\boldsymbol{r}$$

P' が P に極めて接近した極限に於いて,$\delta\boldsymbol{S}$ を δt で割つたものの極限値は,P 點に於ける面積速度 $\boldsymbol{A}$ である。

$$\boldsymbol{A}=\frac{d\boldsymbol{S}}{dt}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$$

第六十一圖



O から P に於ける切線に下した垂線の足を N,長さを p とすれば,

$$ON=p=r\sin(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$$

$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ との定める平面に垂直な單位ベクトルを $\boldsymbol{k}$, 向きは $\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{v}$ に向つてとつたベクトル積が正になるやうにとれば

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=pv\boldsymbol{k}$$

然るに(64.4)式に於いて $\dot{\theta}=\omega$ とおけば

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\,\boldsymbol{r}_1+r\omega\,\boldsymbol{s}_1$$

であるから

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}\times(\dot{r}\,\boldsymbol{r}_1+r\omega\boldsymbol{s}_1)$$

$$=\dot{r}\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}_1+r\omega\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}_1$$

$$=r^2\omega\,\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{s}_1=r^2\omega\,\boldsymbol{k}.$$

從つて

$$pv=r^2\omega$$

故に

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{dt}=\frac{1}{2}pv\boldsymbol{k}=\frac{1}{2}r^2\omega\boldsymbol{k}\quad\cdots\cdots\quad(67.2)$$

第七章 質點の力學

§ 18.1 質點

運動學に於いては,幾何學的の點の運動だけを考へて,その運動を起す原因たるべき力は全く考に入れなかつた。運動學は運動の狀態の變化と,その變る割合の幾何學的考察にすぎないが,力學に於いてはその變化の起る原因を考にとり入れる。

前章にては,運動するものは幾何學的の點であるが,實際にはそのやうなものは存在しない。力學に於いては運動體として主として質點,質點の組合及び剛體を扱ふ。

質點として考へるものは,有限の質量を有する點である。然し實際には大さのない幾何學的の點の如きは存在しないが,吾々の扱ふ問題に應じて,地球の如きものも太陽の周圍の公轉を論ずる場合には質點として扱つて差支ないとともに,小さな物體でもそれ自身の廻轉を考へなくてはならない時には,質點と見做すことはできない。

つまり力學的に質點といふ概念は,有限の質量を有し,それ自身の廻轉は考へないですむものに言ふ。

§ 18.2 運動量

質點m(質量mの質點といふのを略して言ふことにする)が,速度$\boldsymbol{v}$で運動してゐるとき

$$\boldsymbol{M}=m\boldsymbol{v}$$

をその質點の**運動量**と稱へる。

運動量の元は$[MLT^{-1}]$で速度と同じ向きを有するベクトル量である。

これをtについて微分すれば

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=\frac{dm}{dt}\boldsymbol{v}+m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

mは變らないから

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=m\boldsymbol{a}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(68.2)$$

卽ち運動量の變化する割合は,加速度に質量を乘じたものに等しい。

§ 19.1 Newton の第二法則

Newton の第二法則は,

「運動の變化は作用力に比例し,力の作用した直線の方向に起る」

といふので,こゝに「運動」といふのは今日吾々の運動量「作用力」といふのは「力積」(§ 19.4)を意味してゐる。

單位を適當に擇んで

$$\boldsymbol{K}=\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(68.31)$$

卽ち

$$\boldsymbol{K}=m\boldsymbol{a}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(68.32)$$

とおけば加速度$\boldsymbol{a}$によつて$\boldsymbol{K}$なる力の作用を測ることを表はしてゐる。

質點 m に n 個の力 $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \ldots \boldsymbol{K}_n$ が作用して,加速度 $\boldsymbol{a}$ が生じたとする。今是等の力が單獨に作用したときに生ずる加速度を夫々 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ とすれば

$$m\boldsymbol{a}=\sum \boldsymbol{K}_i=\sum m\,\boldsymbol{a}_i=m\sum \boldsymbol{a}_i \quad \cdots\cdots (68.4)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a}=\sum \boldsymbol{a}_i$$

卽ち多くの力が作用したために生ずる加速度は,夫等の力が單獨に作用して生ずる加速度の和に等しい。

§19.2　Newton の第一法則

Newton の第一法則は慣性の法則とも云はれる。力の作用によつて狀態が變化されない限り,物體は靜止してゐるか又は一樣な直線運動を續ける。

慣性の法則は,言ひ換へれば加速度は力の結果であり,力とともに歇むことを意味してゐる。この概念は旣に Galilei (1638) に創まるもので,Newton は他の法則とともに人類創生以來初めて自然の秘鑰を啓いた寶典といはれる "Philosophiae naturalis principia matematica," (1687) の中に述べてゐる。

力が作用しなければ $\boldsymbol{K}=0$ とおいて,(68.31)式を積分すれば

$$\boldsymbol{M}=\text{const.}$$

或は

$$\boldsymbol{v}=\text{const.}$$

卽ち質點は一定の速度(初めに靜止してゐれば恆に $\boldsymbol{v}=0$)で直線運動を續ける。

第一第二の法則には,重力の影響に就いては全く述べてゐないから,是等の法則を理想的に實驗して調べやうといふのには,全く物質のない無究遠に於ける空間か,若しくは Kelvin の考のやうに,地球の中心に穿つた球狀の空隙の中で行はなければならない。

§19.21　此の法則を應用するにあたつて注意すべきことがある。數本の絲の結び目に絲の張力が作用して釣合つてゐるやうな場合,力は釣合つてゐるから合力は零になる。

$$\sum \boldsymbol{K}=0$$

卽ち

$$m\boldsymbol{a}=0$$

m が零でなければ $\boldsymbol{a}$ は零であるけれども,絲の結び目は質量を零と考へてよいから

$$m=0$$

從つて $\boldsymbol{a}$ は必ずしも零であるとは云へない,絲の結び目は必ずしも靜止するとも,一樣な運動をするとも云へない。

§19.3　D'Alembert の原理

(68.4)の式の右邊を移項すれば

$$\sum \boldsymbol{K}+(-m\,\boldsymbol{a})=0 \quad \cdots\cdots (69)$$

と書ける。

$m\boldsymbol{a}$ は**有效力**と稱へられ,それと向きの反對の$(-m\boldsymbol{a})$を**運動抗力**

又は**慣性力**, $\mathbf{K}$は**强制力**とも言ふ。

$\sum \mathbf{K}$ は實際に質點に作用する力であるが,この式の意味は,實際に作用する力の外に慣性力を作用させればその合力は零となり質點は釣合の狀態に置かれることが知れる。

運動してゐる質點を取り扱ふ代りに,それに假想上慣性力を作用させて,質點は力の釣合の狀態にあると考へることは,非常に便利である。この原理を **D'Alembert の原理**といひ力學上應用の廣い大切な考へ方である。

§19.4 力積

質點mに或る時間の間續けて力 $\mathbf{K}$が作用すれば質點の運動量が變化する。その運動量の變りによつて力の**力積 $\mathbf{J}$**を測る。

力$\mathbf{K}$が作用してゐる間中引き續いて變らないとき,時刻 t_1, t_0 に於ける質點の速度を夫々 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_0$ とすれば

$$\mathbf{J}=m(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_0)=\mathbf{K}(t_1-t_0) \qquad \text{(70.1)}$$

もし$\mathbf{K}$が時間の函數ならば

$$\mathbf{J}=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{K}\,dt=m\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{a}\,dt=m(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_0) \qquad \text{(70.2)}$$

§19.5 擊力

極めて短い時間に著るしく大きい力が働く場合がある。例へばバットで球を打つやうな時,作用する時間は極めて短いので,その間に作用される質點の位置は眼に見えるやうには變らないが運動量は變化する,このやうな力を**擊力**又は**激衝力**といふ。擊力が作用する時は同時に普通の大さの力が作用してゐてもその影響は全く無視してもよい。

擊力を$\mathbf{F}$とすれば,その力積 $\mathbf{J}$ は

$$\mathbf{J}=\lim_{\tau\to 0}\int_t^{t+\tau}\mathbf{F}\,dt$$

で與へられる。

§20.1 仕事

質點に力 $\mathbf{K}$ が作用してその作用點が $\delta\mathbf{r}$ 變位したとき,力のする**仕事** δW は

$$\delta W=\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{r}$$

$$W=\int_{P_0}^{P}\underline{K}\cdot d\underline{r}$$

で定義される。

曲線に沿つて質點が P_0 から P 迄變位したときは,その曲線を無數に多くの小部分に分け,その小部分の間は變位 $\delta\mathbf{r}$ を直線と見做して差支ない程小さいとすれば, P_0 から P に到る迄にする力の仕事は

$$W=\sum_{(P_0)}^{(P)}\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{r}$$

極限に於いて積分の形になる。

$$W=\int_{(P_0)}^{(P)}\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r} \qquad \text{(71)}$$

これは曲線の切線の方向の力の成分の積分で,仕事は力の線積分として求まる。

もし力が曲線上到る處同一ならば,積分の記號の外に出すことができるから,

$$W=\mathbf{K}\cdot\int_{(P_0)}^{(P)}d\mathbf{r}=\mathbf{K}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)$$

卽ち力が一定してゐれば仕事は只初めと終の變位と力のスカラー積である。

力の仕事を考へるときは,質點が P_0 から P に變位するのに要する時間は全く考へてない。速く動いても遲くても,力のする仕事に變りはない。

§20.11 力の工率

質點が $\delta\mathbf{r}$ 變位するのに δt 時間かかつたとすれば, $\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}$ は單位時間に起る變位の割合である。その極限値 $\mathbf{v}$ と $\mathbf{K}$ とのスカラー積

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{K}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad\text{.......(72)}$$

を**力の工率**といふ。

力の工率は,單位時間に力のする仕事であるから, δt 時間にする仕事は $(\mathbf{K}\cdot\mathbf{v})\delta t$ である。質點が P_0 及び P に於ける時刻を夫々 t_0, t とすれば,力のする仕事は

$$W=\int_{t_0}^{t}\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}\,dt \quad\text{.......(72.1)}$$

卽ち力の工率の時間に關する積分(略して**時間積分**)で表はされる。

§20.3 エネルギー

質點 m が速度 $\mathbf{v}$ で動いてゐる時, $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ をその質點の**運動のエネルギー**(**勢力**)といふ。

$$T=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2=\frac{1}{2}mv^2 \quad\text{.......(73)}$$

これは初めて Leibniz が mv^2 に活力 (vis viva) と云ふ名を與へ,後に Young が energy と名づけた概念に基くもので, Rankine に到つて $\frac{1}{2}mv^2$ に actual energy と云つて,今日の運動のエネルギーと同じ概念を導いたのである。

§20.21 T を時間について微分すれば

$$\frac{dT}{dt}=m\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}=m\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{v} \quad\text{.......(73.1)}$$

卽ち運動のエネルギーの變化する割合は力の工率に等しい。書き換へれば

$$dT=\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}\,dt \quad\text{.......(73.2)}$$

從つて運動のエネルギーの增加は,外力の仕事に等しい。

§20.22 時刻 t_0 の時質點が速度 $\mathbf{v}$ で運動してゐる。これに力 $\mathbf{K}$ が作用して時刻 t_1 に到つて靜止したとする。

δt 時間內に質點が力に對してする仕事は,力が質點にする仕事と大さは等しく符號は反對であるから

$$-\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}\delta t=-m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\delta t$$

よつて $t-t_0$ 時間內に質點のする仕事は

$$-\int_{t_0}^{t}m\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dt=-\frac{1}{2}m\Big[\mathbf{v}^2\Big]_{t_0}^{t}=-\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2.$$

卽ち質點が靜止する迄に力に對してする仕事は,現在質點が持つ

てゐる運動のエネルギーに等しい。

§ **20.23**　力が作用して質點の速度が $\boldsymbol{v}_0$ から $\boldsymbol{v}_1$ に變つたとすれば,運動のエネルギーの差は

$$T_1-T_0=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_1^2-\boldsymbol{v}_0^2)$$

これは力のした仕事に等しい。

力の力積は

$$\boldsymbol{J}=m(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_0)$$

運動のエネルギーの差は

$$\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_1^2-\boldsymbol{v}_0^2)=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_0)\cdot(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_0)=\boldsymbol{J}\cdot\frac{\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_0}{2}$$

卽ち力のした仕事は力積と力の働く間の平均速度とのスカラー積に等しい。

§ 21.1　力の場

地球の外部の空間に於いては,重力は地球の中心からの距離の自乘に逆比例して到る處で一定の大さをもち,地球の中心と結ぶ直線上に,向きは中心に向つて働く。又電氣の荷電が存在する空間にては到る處で電氣力が一定の値を持ち向きも定まつてゐるやうに,或る區域内の到る處の點で一定の力が作用するとき,その區域は**力の場**であるといふ。

§21.2　ポテンシャル

今空間が一定の力の場であつて,質點に作用する力がいつも同

じ場所では同じであれば,$\boldsymbol{K}$ は時に無關係に $\boldsymbol{r}$ の函數として(72.1)の定積分は

$$W=\int_{(P_0)}^{(P)}\boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{r}$$

となる。

もし線上の任意の點を原點にとり,線に沿つて測つた弧を s とすれば質點の通る路筋についてとつた線積分は

$$W=\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{K}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}ds=\int_{s_0}^{s}\boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{s}$$

となる。

$-\boldsymbol{K}$ は力場の力に釣合ふ慣性力であるから,

$$-\int_{s_0}^{s}\boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{s}$$

は,力の釣合を破らないで,卽ち實在する力の狀態を擾さないやうに,無限に遲く s_0 から s_1 迄質點を動かすとき力に對してする仕事である。

これは力に對してする仕事であるから,運動のエネルギーと同じ性質の量で,**位置のエネルギー**と呼ばれる。

$$V=-\int^{s}\boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{s}\quad\cdots\cdots(74)$$

と置けば,V は位置を表はす坐標だけの函數で,時間は含まれてゐない。V を力の**ポテンシャル**といひ,力はこれによつて定める

ことができる。積分の下根は任意に擇んでよい(第二編參照)。

次に仕事と位置のエネルギーとの關係を求めれば

$$W=\int_{s_0}^{s_1}\mathbf{K}\cdot d\mathbf{s}=-(V_1-V_0)\quad\cdots\cdots(74.1)$$

力に對してすることのできる仕事は,その質點のもつ位置のエネルギーに等しい。

§21.3 力の保存系

運動の方程式

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{K}$$

の兩邊に $d\mathbf{r}$ をスカラー的に乘ずれば

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}$$

卽ち

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right]dt=\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}\right)dt=\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}$$

もし質點に作用する外力 $\mathbf{K}$ が只ポテンシャルで定められるもの許りであれば,右邊を積分すれば $-V$ になるから

$$\frac{mv^2}{2}+V=\text{const.}$$

運動のエネルギーと位置のエネルギーとの和が,運動してゐる間一定であるといふ意味をもつてゐる。卽ち**エネルギー保存の原**

理の一つの形でこのやうな力を**保存系の力**といひ,その場合には力はポテンシャルによつてのみ與へられる。更に悉しくは第二編で調べることにする。

§21.31 滑らかな面の上の運動

滑らかな面の上を質點が運動するときは,面が質點に及ぼす力 $\mathbf{R}$ の方向は,常にその面に垂直であるから, $\mathbf{R}$ が保存力であるかないかに拘らず變位 $\delta\mathbf{s}$ について力のする仕事は零である。

$$\mathbf{R}\cdot\delta\mathbf{s}=0$$

從つて質點のエネルギーの增減には關係しないから,質點のエネルギーは面が存在しないで運動してゐる場合と變りない。

例へば滑らかな面の上を,重力の作用によつてのみ下降する質點の運動では,それに働く力 $\mathbf{K}$ は

$$\mathbf{K}=-m\mathbf{g}$$

$\mathbf{g}$ は重力の加速度である。

直交軸をとつて, Z 軸は鉛直に上方に向ふとすれば,力の直角成分は

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=-mg$$

故に

$$\int^{s}\mathbf{K}\cdot d\mathbf{s}=-\int^{z}mg\,dz=-mgz+\text{const.}$$

z_0 の高さから z_1 迄降つたとすれば

$$V=mg(z-z_0)$$

これは面の上に拘束されずに,單に質點が z_0 から z_1 迄自由に降

下した場合のものと變りない。

§22.1 角運動量

運動量の原點に關する能率を角運動量 $\boldsymbol{H}$ と稱へる。

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{M}$$

$$=m\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\quad\cdots\cdots(75)$$

§22.11 角運動量が時間に對して變る割合は

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})$$

$$=m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{v}+m\,\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$=\boldsymbol{r}\times m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{K}\quad\cdots\cdots(75.1)$$

即ち原點に關する力の能率に等しい。

§22.12 もし力が動徑に平行に働くならば

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{K}=0$$

從つて

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}=0$$

$$\boldsymbol{H}=\text{const.}$$

$\boldsymbol{H}$ は時が經つても變らない。大さ許りでなく向きも方向も變らないから，$\boldsymbol{H}$ は恆に或る定まつた平面に垂直である。

これは又

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=\text{const.}$$

なることを意味してゐる。即ち面積速度

$$\boldsymbol{A}=\text{const.}$$

であつて，質點の運動は一定の平面内に限られ，その動徑は等時間内に等しい面積を劃く(§23.1 比較)。

§22.13 (例) 普通の解析法と比較するためにベクトルを成分にわけて證明してみよう。

力の直角成分を $(X,\ Y,\ Z)$，動徑を $(x,\ y,\ z)$ とすれば，力は動徑に平行することは

$$X=K\frac{x}{r},\qquad Y=K\frac{y}{r},\qquad Z=K\frac{z}{r}.$$

角運動量の直角成分を $(H_x,\ H_y,\ H_z)$ とすれば

$$H_x=m(y\dot{z}-z\dot{y}),\ \text{etc.}$$

$$\therefore\ \frac{dH_x}{dt}=m(y\ddot{z}-z\ddot{y})$$

$$=yZ-zY$$

$$=y\left(K\frac{z}{r}\right)-z\left(K\frac{y}{r}\right)=0$$

故に

$$H_x=m(y\dot{z}-z\dot{y})=\text{const}=m\,C_1\ (\text{と置く})$$

同樣にして

$$H_y=m(z\dot{x}-x\dot{z})=\text{const}=m\,C_2$$

$$H_z=m(x\dot{y}-y\dot{x})=\text{const}=m\,C_3$$

この三式に夫々 $x,\ y,\ z$ を乘じて加へれば

$$C_1x+C_2y+C_3z=0$$

即ち質點の運動は一平面内に限られてゐる。

Z 軸をこの平面に垂直にとり,原點を面上に擇めば,その面の方程式は

$$z=0$$

又

$$C_1=C_2=0$$

$$C_3=x\dot{y}-y\dot{x}$$

平面極坐標に書き換へれば

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi$$

よつて

$$C_3=r^2\dot{\varphi}=v\,p=\text{const.}$$

p は原點から速度の作用線に樹てた垂線の長さで, vp は面積速度の大さで,面積速度が一定であることがわかる。

§23.1 中心力

質點に働く力が恆に或る一點と質點とを結びつける線上に働くとき,力を**中心力**といひ,その點を**力の中心**といふ。力の大さは中心からの距離 r の函數 $f(r)$ として表はせることが多い。

力の中心を原點にとつて,質點の動徑を $\mathbf{r}$, その單位ベクトルを $\mathbf{r}_1$ とすれば,運動の方程式は

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}&=\mathbf{K}\\ \mathbf{K}&=\mathbf{r}_1 f(r)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(76)$$

である。

$\mathbf{K}$ は中心に向ふ場合(引力)と,中心と反對に向ふ場合(斥力)とある

がいづれも $\mathbf{r}$ に平行であるから,前章の定理によつて角運動量は不變でなければならない。

$$\mathbf{H}=\text{不變}$$

從つて

$$\mathbf{A}=\frac{d\mathbf{S}}{dt}=\text{不變}$$

中心力が作用する場合,質點の運動は(1)一平面内に限られ,(2)面積速度は變らない。

§23.11 運動の方程式の兩邊に $d\mathbf{r}$ をスカラー的に乘ずれば

$$\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}=f(r)\,\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}$$

然るに

$$d(\mathbf{r}^2)=2\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=2r\,dr$$

よつて

$$\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}=dr$$

故に

$$\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}=f(r)\,dr$$

これを積分すれば

$$V=-\int\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}=-\int f(r)\,dr$$

$$=C-\int^{r}f(r)\,dr$$

即ち中心力はポテンシャルをもつてゐる。C は積分常數である。

(§21.3) により

$$m\frac{v^2}{2}-\int^{r}\mathbf{K}\cdot d\,\mathbf{r}=\text{const.}$$

卽ち中心力は保存系の力である。

§ **23.12** $f(r)$ が負か正かによつて,力は中心に向ふか,反對の向きをとるか,二つに別れる。 前者は引力,後者は斥力である。

$f(r)>0$　斥力

$f(r)<0$　引力

特に重要なのは,力が距離に比例する場合と,距離の自乘に逆比例する場合である。

$$f(r)\propto r$$

$$f(r)\propto\frac{1}{r^2}$$

§ 23.2　楕圓調和運動

力は恆に中心に向ひ,大さは距離に比例すれば

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\kappa\,\mathbf{r}\quad\cdots\cdots(77)$$

κ が正の數ならば調和運動といふ。

$2\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ をスカラー的に乘ずれば

$$2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-2\kappa\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{r}$$

C を積分常數とすれば,この積分は

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2=v^2=C-\kappa\,\mathbf{r}^2\quad\cdots\cdots(77.1)$$

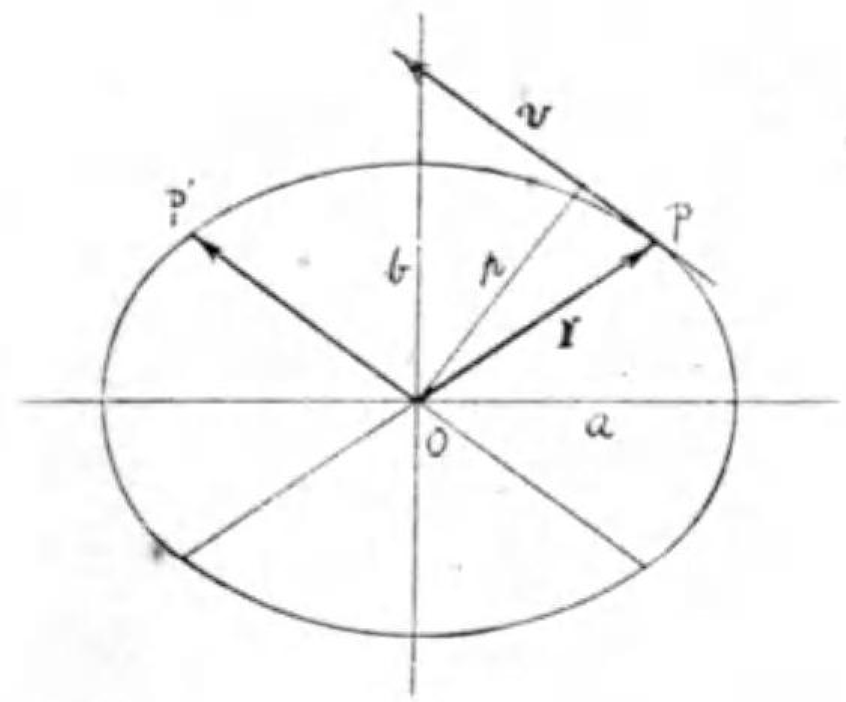
面積速度の大さを $\dfrac{h}{2}$ とおけば

$$\frac{h}{2}=\left|\frac{d\mathbf{S}}{dt}\right|=|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|$$

であるから,(77.1) を h^2 で割れば

$$\frac{v^2}{h^2}=\frac{1}{p^2}=\frac{1}{h^2}(C-\kappa\,\mathbf{r}^2)$$

第六十二圖



これは p をパラメターとする楕圓の方程式である。

主軸を $a,\ b$ とする楕圓の式

$$\frac{1}{p^2}=\frac{a^2+b^2-r^2}{a^2b^2}$$

と比較すれば

$$C=\kappa(a^2+b^2)$$

$$h=\sqrt{\kappa}\;a\,b$$

で與へられ,質點は楕圓調和運動をする。

P の位置に於いて質點の速さ v は

$$v^2=\kappa(a^2+b^2-r^2)$$

$$=\kappa\,\overline{OP'}^2$$

$\overline{OP'}$ は $\overline{OP}$ に共軛な半徑,速度は

$$\mathbf{v}=\sqrt{\kappa}\,\overrightarrow{OP'}$$

(§17.42) に於いて求めたものである。

面積速度で楕圓の全面積を割れば,楕圓の周を一囘するのに要する週期 τ が求まる。

$$\tau=\frac{\pi ab}{\frac{h}{2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

即ち $\sqrt{\kappa}$ は角速度の大さに當るものである。週期は κ の値のみによつて定まるので,楕圓の大小 a, b には全く無關係なことに注意しなければならない。

運動の方程式は第二階の微分方程式であるから,その一般解は

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos nt+\boldsymbol{b}\sin nt \quad\cdots\cdots(78)$$

とおける。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は普通の積分常數のやうに,積分したことによつて入つてくるベクトル常數で運動の最初の條件で定まり,n はこの式を微分して p の式と比較すれば

$$n^2=\kappa$$

として定まる。

$\boldsymbol{r}$ の表はす軌跡は (§17.42) の注意で述べたやうに,ベクトル $2\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{b}$ を邊とする平行四邊形に內接する楕圓である。

§23.3 單振動

質點の運動が一直線上に限られてゐるときは**單振動**であつて,運動の方程式は單に

$$\ddot{s}=-\kappa s$$

その一般解は

$$s=a\cos(\sqrt{\kappa}\,t+\varepsilon)$$

である。

共面でない任意の三つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に關して $\boldsymbol{r}$ を表はせば

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$$

であるから,楕圓調和運動の方程式は,その軸の方向の成分について

$$\ddot{x}=-\kappa x$$

$$\ddot{y}=-\kappa y$$

$$\ddot{z}=-\kappa z$$

即ち三つの任意の單振動を合成したものと見做せる。

§23.4 非週期運動

質點に働く力が斥力で,大さが距離に比例するときは,不安定な釣合の位置の近くの運動になる。運動の方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\kappa\boldsymbol{r}=n^2\boldsymbol{r} \quad\cdots\cdots(79)$$

これは

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}e^{nt}+\boldsymbol{b}e^{-nt}$$

とおけば滿足する。即ち $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を漸近線とする双曲線である。

初めの條件が適當に擇ばれた時は, $\boldsymbol{a}=0$ となり質點は漸近的に釣合の位置 ($\boldsymbol{r}=0$) に近づくが,さもなければ $\boldsymbol{r}$ は終に無限大になる。今はこれ以上悉しくは調べないでおかう。

§23.5 惑星の運動

地球から見た惑星の見懸けの運動は,略ぼ周轉圓の運動で説明されることは述べたが,太陽のみの引力に作用され,他の惑星の影響を考へない場合の惑星を質點としての運動を研究しよう。三つの質點が互に引力を及ぼしてゐる場合は,所謂三體運動であつ

て,玆二世紀に亘つて數學者を惱したが未だ完全な解の得られないものである。

萬有引力の作用により,力は距離の自乘に逆比例する引力であるときの運動の方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\frac{\kappa}{r^2}\boldsymbol{r}_1\text{..........}(80)$$

面積速度の二倍を求めると

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=r^2\omega\,\boldsymbol{k}=h\,\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{k}$ は軌道面(運動が拘束されてゐる平面)に樹てた單位法線ベクトルである。

$\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ をベクトル的に乘じて κ で割れば

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times h\,\boldsymbol{k}=-\frac{\boldsymbol{r}_1}{r^2}\times(r^2\omega\,\boldsymbol{k})=-\omega\,\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{k}$$

$$=\omega\,\boldsymbol{s}_1$$

$\boldsymbol{s}_1$ は $\boldsymbol{r}_1$ に垂直に,軌道面内にある單位ベクトルで, $\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{k}$ は右旋系を形づくるものとする。

卽ち (§18.41) により

$$\omega\,\boldsymbol{s}_1=\frac{d\,\boldsymbol{r}_1}{dt}$$

よつて

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\boldsymbol{r}}{dt}\times h\,\boldsymbol{k}\right)=\frac{d\,\boldsymbol{r}_1}{dt}$$

t について積分すれば

$$\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{v}\times h\,\boldsymbol{k}=\boldsymbol{r}_1+e\boldsymbol{a}_1$$

$e\,\boldsymbol{a}_1$ はベクトル積分常數である。

$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{a}_1$ との間の角を θ とすれば

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_1=r\cos\theta$$

であるから,上式の兩邊に $\boldsymbol{r}$ をスカラー的に乘ずれば

$$r(1+\cos\theta)=\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times h\,\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{h}{\kappa}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{k}=\frac{h^2}{\kappa}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{h^2}{\kappa}=l\ \text{(とおけば)}$$

$$\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$$

これは e を離心率として, $l=\dfrac{h^2}{\kappa}$ を準線とする二次曲線の方程式である。

卽ち $e\lesseqgtr 1$ に從つて,楕圓,拋物線又は双曲線となる。

§23.51 次に e と他の量との關係を求めよう。

$$\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{v}\times h\,\boldsymbol{k}=\boldsymbol{r}_1+e\,\boldsymbol{a}_1$$

$\boldsymbol{r}_1$ を移項して兩邊を自乘すれば

$$e^2=(e\,\boldsymbol{a}_1)^2=\left(\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{v}\times h\,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{r}_1\right)^2$$

$$=\frac{v^2h^2}{\kappa^2}-2\frac{1}{\kappa}[\boldsymbol{v},h\,\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}_1]+1$$

然るに前節により

$$[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{k}]=h$$

よつて

$$[\boldsymbol{v},h\,\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}_1]=\frac{h^2}{r}$$

$$\therefore\ e^2-1=\frac{v^2h^2}{\kappa^2}-2\frac{h^2}{\kappa r}=\frac{h^2}{\kappa^2}\left(v^2-2\frac{\kappa}{r}\right)$$

即ち $e \gtreqless 1$ に從つて　$v^2 \gtreqless 2\frac{\kappa}{r}$

結局,運動の初めに於いて,初速 v_0 が

(1)　$v_0^2<2\frac{\kappa}{r_0}$ ならば楕圓軌道をとり惑星か週期的彗星となり

(2)　$v_0^2=2\frac{\kappa}{r_0}$ ならば抛物線

(3)　$v_0^2>2\frac{\kappa}{r_0}$ ならば双曲線で,(2) (3) はともに非週期的彗星になる。

$2\frac{\kappa}{r_0}$ は萬有引力の常數にあたる。そして軌道の離心率は

$$e^2=\frac{h^2}{\kappa}\left(\frac{v_0^2}{\kappa}-\frac{2}{r_0}\right)+1$$

から定められる。

§23.52 Kepler の法則

Newton の萬有引力の法則の發表前約六十年 Johann Kepler は惑星の運行に關する法則 —— 第一第二法則は1609年に,第三法則は1619年に發表した。

(第一法則)　惑星は太陽を一つの焦點とする楕圓軌道を劃く。

(第二法則)　太陽から惑星にひいた動徑は,等時間に等面積を劃く。

(第三法則)　惑星の週期の自乘は,太陽からの平均距離の三乘に比例する。

第一法則は既に前節の證明により,第二法則は一般に中心力の場合に歸して明かであるから,玆には只第三法則を調べればすむ。

さて週期は楕圓の面積 πab を,面積速度の大さ $\frac{h}{2}$ で割つたものであるから

$$\tau=\frac{\pi ab}{\frac{h}{2}}=\frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{h}$$

$$=\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\kappa m}}$$

即ち

$$\tau^2\propto a^3$$

これは勿論近似的の値であつて,嚴密には補正をしなければならない。

§24.1 彈道學

空氣中に投け上けられた物體の運動は,運動學で調べたやうに抛物線を劃くが,實際にあたつては空氣の抵抗を無視することはできないから抛物線ではなくなる。

砲彈などは發射するときに廻轉を與へるから,質點の運動ではないが,假りに質點としても,空氣の抵抗空氣の密度の變化,空氣の渦,風等の影響が著るしく大きい。

空氣の及ぼす抵抗力の大さ R だけでも,彈丸の直徑 d の自乘と速さの函數 $f(v)$ に比例する。

$$R=nd^2f(v)$$

n は**節減係數**と呼ばれる量で,空氣の密度彈丸の形によつて異ふ常數である。$f(v)$ は速さの遲いときは v に比例し,速かなときは v

の自乘に比例する。抵抗力の向きは恒に速度を減じるやうに速度と反對の向きに起る。

§24.11 實際問題には地球の自轉も考へねばならないから,砲彈の發射された面も變つてくるが,玆には一定であるとして只空氣の抵抗力が速度に比例するならば,運動の方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{g}-\mu\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(81.1)$$

μ は摩擦係數で正の値をとる。

X 軸を發射面内に水平に,Z 軸を垂直に上方にとれば

$$\ddot{x}=-\mu\dot{x}$$

$$\ddot{z}=-g-\mu\dot{z}$$

彈丸の初速 ($t=0$ の時) を $\boldsymbol{v}_0$ (u_0, 0, w_0), 砲口を原點にとれば,この微分方狀式の解は

$$x=\frac{u_0}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)$$

$$z=-\frac{g}{\mu}+\left(\frac{w_0}{\mu}+\frac{g}{\mu^2}\right)\left(1-e^{-\mu t}\right)$$

この二つの式から t を消去すれば彈道の形が定まる。

§24.12 空氣の抵抗が速度の自乘に比例するときは次の式に據るべきで

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{g}-\mu\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(81.2)$$

$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ は單位切線ベクトルである。この方程式は玆では扱はないでおく。

§25.0 質點振子

質點振子として考へられるものには,單振子,球面振子,擺線(サイクロイド)振子等がある。その中二三を調べてみよう。

§25.1 單振子

質點の質量に較べて質量を無視することのできる細い絲のさきに質點のつけてある振子で,振幅が到つて小さい振動の時を單振子といふ。

絲の張力を $\boldsymbol{S}$ とすれば,質點に働く力 $\boldsymbol{K}$ は

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{S}+m\boldsymbol{g}$$

質點は長さ l の絲で結びつけられて,支點 O を中心とした圓弧の上を動く。圓の切線の方向にとつた力の成分を K_t, 絲の方向の成分を K_n, 鉛直線からの傾を θ とすれば

$$K_t=-mg\sin\theta$$

$$K_n=S-mg\cos\theta$$

質點の上下運動は極めて小さいので只 O の廻りの廻轉運動だけでよいとすれば,運動の方程式は

$$0=S-mg\cos\theta$$

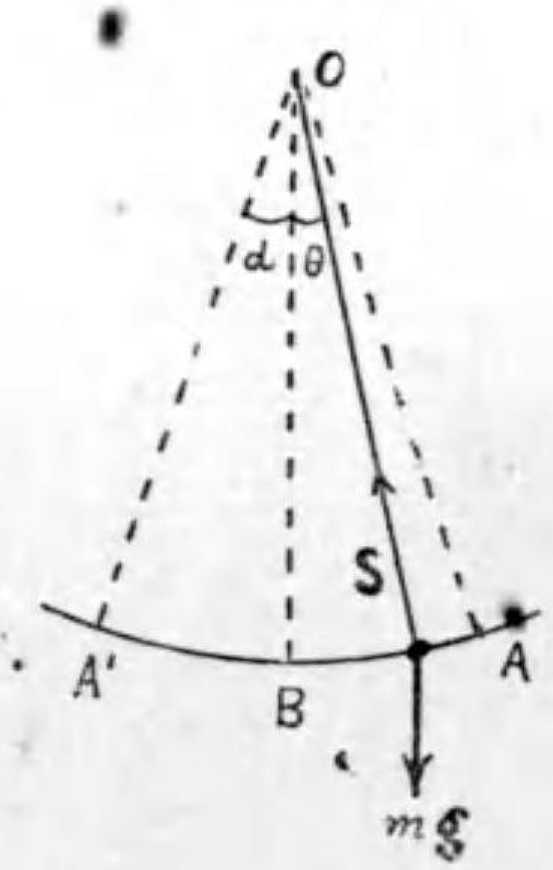
$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta$$

θ は極めて小さく θ の二次以上の項は無視できるとすれば

$$S=mg$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta$$

第六十三圖



第一の式により絲の張力は振動中常に一定であることがわかる。第二の式は $\frac{g}{l}=n^2$ とおき，$t=0$ の時，$\theta=\alpha$，$\dot{\theta}=0$ 卽ち質點が靜止の位置から振動するとすれば

$$\theta=\alpha\cos nt$$

となる。α は振幅で,振動の週期 τ_1 は nt が 2π 增す間の時間であるから

$$\tau_1=\frac{2\pi}{n}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

單振子は,振幅が小さいといふ假定のもとに,週期は振幅や質點の質量に無關係である。これを單振子の**等時性**といふ。

$t=0$ の時,質點が釣合の位置にゐて,$\theta=0$ $\dot{\theta}=0$ ならば

$$\theta=\alpha_0\cos n(t-\tau_1)$$

といふ形になる。α_0 は振幅で，$n(t-\tau_1)$ は**位相**，$n\tau_1$ は**位相差**と呼ばれる。

§25.2 球面振子

θ が相當に大きくて，θ の自乘以上が無視できなければ,運動の方程式は

$$ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=S-mg\cos\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-n^2\sin\theta$$

§25.21 この第二の式は $2\dot{\theta}$ を乘じて積分すれば

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2n^2\cos\theta+C$$

C は最初の條件によつて定まる。$t=0$ の時 $\theta=\alpha$，$\dot{\theta}=0$ として式を纒めれば

$$\frac{d\theta}{dt}=\pm2n\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$ とおいて，θ を φ に換へて積分すれば

$$nt=\pm\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}}\quad\cdots\cdots(82)$$

t は φ が φ_0 から φ 迄變るに要する時間である。

こゝに

$$\kappa=\sin\frac{\alpha}{2}<1$$

いま

$$F(\varphi,\kappa)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}}\quad\cdots\cdots(83)$$

とおけば

$$nt=\pm\{F(\varphi,\kappa)-F(\varphi_0,\kappa)\}$$

と書ける。

$F(\varphi,\kappa)$ は第一種楕圓積分，κ はその率，φ は振幅と呼ばれる。

$F(\varphi,\kappa)$ はその定義からわかるやうに

$$F(0,\kappa)=0,\qquad F(-\varphi,\kappa)=-F(\varphi,\kappa)$$

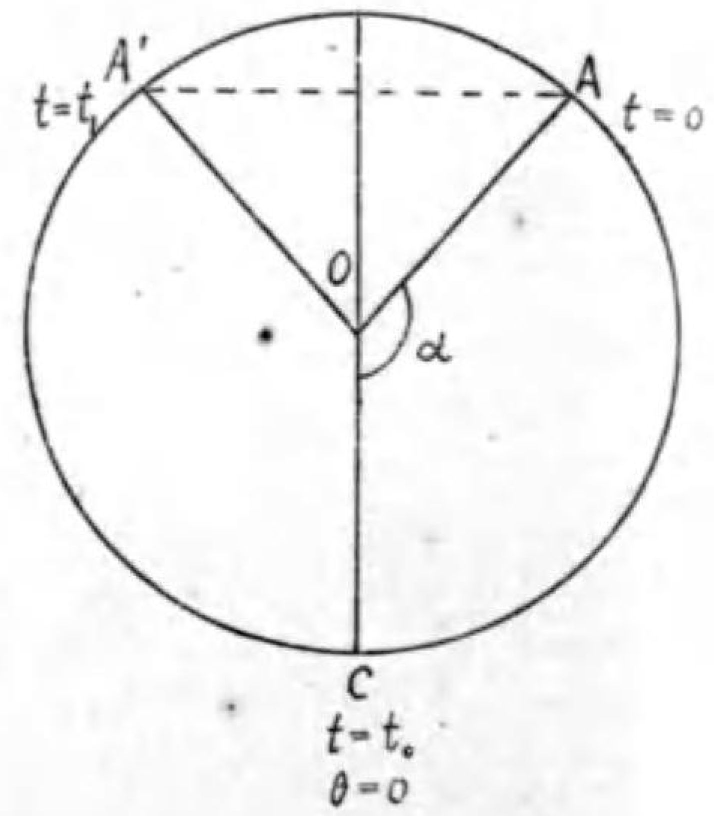
$\varphi=\frac{\pi}{2}$ の時 $F\left(\frac{\pi}{2},\kappa\right)=K(\kappa)$ 又は $F_1(\kappa)$ と書いて第一種完全楕圓積分といふ。

(註) 楕圓積分は楕圓函數の一種で Legendre の研究したものである。

楕圓函數の研究の方法は大別して, Legendre, Jacobi, Abel のとった方法と Weierstrass 等の方法とに分れる;一般に $Q(x)$ が x の四次函數の時, $\int\frac{dx}{\sqrt{Q(x)}}$ を適當に變形すれば, Legendre 或は Weierstrass の基準の形に導ける。是等の研究は此の書物の使命の外になるから讀者は Cayley 或は Greenhill の "Elliptic functions", Whittaker の "Modern Analysis", 積分の書物では Edward の "Integral Calculus, vol. II" 等適當な書物に就いて研究されたい。

§25.22 第 64 圖の C に於いて $t=t_0$, $\theta=0$, 從つて $\varphi=0$ ならば, $t_0>0$ であるから

第六十四圖



$$nt_0=F(\varphi_0,\kappa)$$

故に

$$nt=F(\varphi_0,\kappa)-F(\varphi,\kappa)$$

$$\therefore\ n(t-t_0)=-F(\varphi,\kappa)$$

§25.23

$$\frac{d\theta}{dt}=\pm 2n\kappa\sqrt{1-\sin^2\varphi}$$

A, A' にて

$$\dot{\theta}=0,\quad 從つて\quad \sin\varphi=\pm 1$$

A' にては

$$t=t_1,\quad \varphi=-\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ n(t_1-t_0)=-F\left(-\frac{\pi}{2},\kappa\right)$$

$$=F\left(\frac{\pi}{2},\kappa\right)=K(\kappa)$$

A から A' に到り又 A に戻る迄の時間は振子の週期 τ で, C から A' に達する時間の四倍かゝるから

$$\tau=\frac{4}{n}(t_1-t_0)$$

$$=4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K(\kappa)$$

$K(\kappa)$ の表は Legendre の "Traité des Fonctions Elliptiques" に初めて載せられたが, Smithonian Physical Table (p. 69) 又は Silberstein "Synopsis of Applicable Mathematics with Tables" (p. 160) 等によつて計算すればよい。

§25.24 絲の張力は,運動の方程式の第一のものから

$$S=mg\cos\theta+ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

然るに

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2g\cos\theta+C$$

故に

$$S=m(3g\cos\theta+C)$$

もし $\theta=\alpha$ の時 $\dot{\theta}=0$ ならば

$$S=mg(3\cos\theta-2\cos\alpha)$$

§25.3 擺線振子

質點が鉛直面内の滑らかな曲線上を運動してゐるとすれば,質點の受ける力 $\mathbf{K}$ は

$$\mathbf{K}=\mathbf{R}+m\mathbf{g}$$

$\boldsymbol{R}$ は曲線の及ほす抗力で,曲線は滑らかであるから $\boldsymbol{R}$ は恒に曲線の法線の方向に作用し,曲率の中心に向ふときを正とする。

曲線の切線の方向及び法線の方向の成分を夫々 K_t, K_n とすれば

$$K_t=-mg\sin\psi$$
$$K_n=R-mg\cos\psi$$

ψ は切線と水平にとつた X 軸とのつくる角度である。

曲線の上の任意の點から測つた弧の長さ s を變數にとり,質點の速さを v, 曲率半徑を ρ とすれば,運動の方程式は

$$mv\frac{dv}{ds}=-mg\sin\psi$$

$$\frac{v^2}{\rho}=R-mg\cos\psi$$

卽ち

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g\sin\psi$$

$$R=mg\cos\psi+\frac{v^2}{\rho}$$

§25.31 ψ が極めて小さい間は,曲線が水平になる點を原點にとれば,

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g\psi=-g\frac{s}{\rho_0}$$

ρ_0 は原點に於ける曲率半徑で,恰も絲の長さ ρ_0 の單振子の振動と同等になる。

§25.32 もし曲線 $s=k\sin\psi$ の上を質點が動く時は, ψ の大さに拘らず

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{k}s=0$$

となつて,全く單振動と同じになる。

$s=k\sin\psi$ は擺線の内陰方程式であつて,質點が擺線の上を動く時振動の週期 τ は

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{k}{g}}$$

卽ち振幅に拘らず等時性を保つことがわかる,この性質は初めて Huygens が發見した。

擺線の縮閉線(曲率の中心の軌跡)は又擺線になることを利用して擺線振子を作ることができる。擺線の形の曲線の上を質點を動かさずに,二つの擺線の弧の上に振子の絲が纏はるやうな裝置にする。

§26.0 假設變位

一つの質點に多くの力が作用してゐるのにも拘らず,質點が運動しないことがある。その時は質點が釣合の狀態にあつて,外力の合力は零である。釣合つてゐる力を取扱ふ力學は靜力學で卽ち

$$\boldsymbol{K}=\sum_{\nu}\boldsymbol{K}_{\nu}=0$$

になる場合を扱ふ。

§26.1 假設變位又は假設仕事の原理

任意のベクトル $\boldsymbol{q}$ と釣合の力の合力とのスカラー積は,恒に K が零であるから

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{q}=0$$

でなければならない。

今質點を釣合の位置から,力の釣合が破れない範圍內で,假りに極めて少し變位させたものと想像して,その假設上の變位を δ とすれば

$$\boldsymbol{K}\cdot\delta\boldsymbol{s}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(84)$$

この式は,假想上の變位にあたつて,力のする假設的の仕事が零になることを示してゐる。つまり逆に言へば質點に假想上少さい變位を行つた時假設仕事が零になるならば,力は釣合つてゐると見ることができる。

$\vec{K}\cdot\vec{\delta s}=0$

§26.11 D'Alembert の原理

p.124

質點に作用する强制力 $\boldsymbol{K}$ に,その反對の向きに慣性力卽ち運動抵抗力 $(-m\boldsymbol{a})$ を働かせたとすれば,質點は釣合の狀態にあると考へられることは,既に (§19.3) で述べた D'Alembert の原理である。

$$\boldsymbol{K}-m\boldsymbol{a}=0$$

この原理によつて,運動してゐる質點を靜力學の問題の範圍にもつて來て取り扱へる。

これに假設變位を施せば

$$(\boldsymbol{K}-m\boldsymbol{a})\cdot\delta\boldsymbol{s}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(85)$$

§26.2 拘束された運動

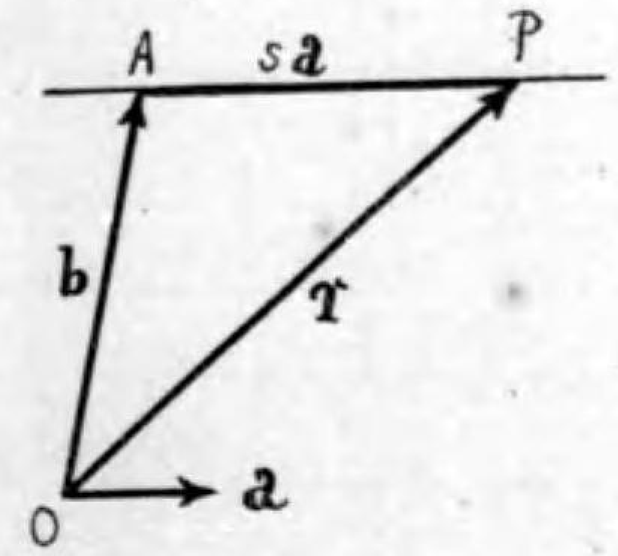
質點の運動が或る特別な表面或は線の上に限られてゐることがある。この種の運動を**拘束運動**といふ。

その制限された面或は線を表はす式を**幾何式**或は**拘束(條件)式**といふ。

例へば質點の運動が A 點を過るベクトル $\boldsymbol{a}$ に平行な直線上に限られてゐる時は,質點の動徑 $\boldsymbol{r}$ は恒に

$$\boxed{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}+s\boldsymbol{a}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(86)$$

第六十五圖



の條件を滿足しなければならない。s はパラメーターで正又は負の數, $\boldsymbol{b}$ は $s=0$ の時の動徑で,この式は $\boldsymbol{a}$ に平行な直線の方程式である。

もし質點の運動が,半徑 a の球面上に限られてゐるならば,

$$\boldsymbol{r}^2=a^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(87)$$

の條件を動徑 $\boldsymbol{r}$ は滿足することが必要である。

何等の制限のない自由運動と違ひ拘束運動に於いては,假設變位は自由運動のやうに全く自由にとることはできない。假設變位 $\delta\boldsymbol{s}$ はこの條件式を滿足するといふ制限の下に勝手にとる。

卽ち直線上の運動では,假設變位が $\boldsymbol{a}$ と同方向であるためには

$$\delta\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}\delta s \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(86.1)$$

でなければならないし,球面上の運動にては, $\delta\boldsymbol{s}$ は球面を離れてとることはできない。恒に球面上にあるためには

$$\delta\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(87.1)$$

卽ち$\delta\boldsymbol{s}$を $\boldsymbol{r}$ に直角にとらなければならない。

これを應用した定理は第二編に於いて更に調べることにしよう。

第八章　質點系の力學

§27.1　反作用の法則

二つの質點 m_A と m_B との質量の比は,相互の作用によつて生ずる加速度の大さの比に逆比例する

$$|\boldsymbol{a}_A| : |\boldsymbol{a}_B| = m_B : m_A$$

今 B が A に作用する力を $\mathbf{K}_A(B)$ で表はせば

$$m_A \boldsymbol{a}_A = \mathbf{K}_A(B)$$

逆に A が B に作用する力 $\mathbf{K}_B(A)$ は

$$m_B \boldsymbol{a}_B = \mathbf{K}_B(A)$$

この二つの力は大さが等しい

先づ A を主にして考へれば $\mathbf{K}_B(A)$ は**作用の力**であり, $\mathbf{K}_A(B)$ は**反作用の力**である。

Newton の運動の第三法則によれば,「作用と反作用とは大さ等しく向きは反對」であるから

$$\mathbf{K}_B(A) = -\mathbf{K}_A(B)$$

卽ち

$$\mathbf{K}_A(B) + \mathbf{K}_B(A) = 0$$

これを略して

$$\mathbf{K}_{AB} + \mathbf{K}_{BA} = 0$$

と書くことにする。

§27.11　合成作用

n 個の質點から成り立つ**質點系(組合)** $m_1, m_2, \ldots, m_n$ の內,二つ宛とつて相互の作用を見れば

$$\mathbf{K}_{ij} + \mathbf{K}_{ji} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots n \\ j=1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

であるから,組合全體について和をとれば

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{K}_{ij} + \mathbf{K}_{ji}) = 0$$

ところが $\mathbf{K}_{ii}$ は第 i 番質點自身の作用であるから,當然

$$\mathbf{K}_{ii} = 0, \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

今 $\mathbf{K}_\nu = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq \nu)}}^{n} \mathbf{K}_{\nu i}$ とすれば, $\mathbf{K}_\nu$ は第 ν 質點に他の $n-1$ 個の質點の及ぼす作用力の合成力であつて,上式によりその全體の和は

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{K}_\nu = 0$$

となる。

卽ち質點系の內部の相互作用の合成力の和は恒に零である。

§27.12　外力と內力

然し或る一つの質點に作用する力は,質點系の內部の力許りではなく,組合外から及ぼす力卽ち外力が存在するから $\mathbf{F}_\nu$ を內力の合力, $\mathbf{C}_\nu$ を外力とすれば

$$\mathbf{K}_\nu=\mathbf{F}_\nu+\mathbf{G}_\nu \quad \cdots\cdots(88)$$

質點全體についてとれば

$$\sum \mathbf{F}_\nu=0$$

$$\therefore \quad \sum \mathbf{K}_\nu=\sum \mathbf{G}_\nu$$

外力の合成作用は必ずしも零でなく

$$\sum \mathbf{G}_\nu \neq 0$$

であつて質點組合に作用する力の合力は,その外力の合力に等しい。

組合内の相互作用だけで,外力が全く作用しない質點系を**自由系** ($\mathbf{G}=0$), 外力も作用するものを**拘束系**といふ。

§27.2 質量の中心

n 個の質點の一組の質量の中心は (§7.6 の例 2) により

$$\bar{\mathbf{r}}=\frac{\sum m_\nu \mathbf{r}_\nu}{\sum m_\nu}$$

であつて,重心である (§27.3)。

質量の中心の位置は既に證明したやうに,原點の擇び方には無關係に物質の配置によつて定まるもので,原點をこの質量の中心に移せば,恆に

$$\sum m_\nu \mathbf{r}_\nu=0$$

となる (29頁參照)。

§27.3 重心の運動

質點 m_ν $(\nu=1, 2, \ldots . n)$ に作用する力を $\mathbf{K}_\nu$ とすれば,個々の質點に對して運動の方程式

$$m_\nu \frac{d^2 \mathbf{r}_\nu}{dt_2}=\mathbf{K}_\nu \qquad (\nu=1,2, \ldots . n)$$

が成立する。

組合全體について加へれば,內力の和は零であるから

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{d^2 \mathbf{r}_\nu}{dt^2}=\sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{K}_\nu$$

いま

$$\sum m_\nu=M$$

$$\bar{\mathbf{r}} \sum m_\nu=\sum m_\nu \mathbf{r}_\nu$$

とおけば M は組合全體の質量で

$$M \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}}{dt^2}=\sum m_\nu \frac{d^2 \mathbf{r}_\nu}{dt^2}$$

$$=\sum \mathbf{K}_\nu$$

となる。 更に $\sum \mathbf{K}_\nu=\mathbf{K}$ とおけば

$$M \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}}{dt^2}=\mathbf{K} \quad \cdots\cdots(89)$$

卽ち質點系の運動は,恰もその質量中心に全質量に等しい質量の質點があつて,組合に作用する力の合成力がそれに作用する時の運動と變りない。

しかし

$$\sum \boldsymbol{K}_\nu = \sum \boldsymbol{G}_\nu$$

であるから,只外力だけの作用で運動し,質點系の内部の力には影響しない。

これによつて質點の中心は重力の中心と見て**重心**と言ふことができる。

§27.4 運動保存の法則

質點系に外力が作用してゐなければ,

$$\sum \boldsymbol{G}_\nu = 0$$

從つて

$$\frac{d^2\bar{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = 0$$

これを積分すれば

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt} = \text{const.}$$

即ち自由系にては重心は恆に靜止してゐるか,或は等速運動を續ける,これを**運動保存の法則**といふ。

§28.1 質點系に作用する力の能率

質點系の m_ν に作用する力 $\boldsymbol{K}_\nu$, 動徑 $\boldsymbol{r}_\nu$ とすれば,運動に關係のある量は

原點に關する力の能率 (§10.12)	Nv $\boldsymbol{H}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{K}_\nu$
運動量 (§18.2)	$\boldsymbol{M}_\nu = m_\nu \boldsymbol{v}_\nu$
角運動量 (§22.1)	$\boldsymbol{H}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{M}_\nu$

(§21.11) により

$$\frac{d\boldsymbol{H}_\nu}{dt} = \boldsymbol{N}_\nu$$

である。

よつて全體の質點に關し

$$\sum \frac{d\boldsymbol{H}_\nu}{dt} = \sum \boldsymbol{N}_\nu$$

今 $\boldsymbol{H} = \sum \boldsymbol{H}_\nu$; $\boldsymbol{N} = \sum \boldsymbol{N}_\nu$ とおけば

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = \boldsymbol{N} \quad \cdots\cdots (90)$$

これは質量系の運動に關する大切な法則の一つである。 即ち質點系の原點に關する角運動量が單位時間に對して變る割合は,その組合に作用する外力の原點に關する能率に等しい。

§28.11 この定理では力の原點に關する能率に就いて述べてあるが,原點の擇び方には關係しない, $\overrightarrow{OO'} = \boldsymbol{c}$ とし, O' 點に關して式をつくれば

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{r}'_\nu$$

角運動量は

$$\boldsymbol{H} = \sum (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{r}'_\nu) \times \boldsymbol{M}_\nu$$

$$= \boldsymbol{c} \times \sum \boldsymbol{M}_\nu + \sum \boldsymbol{r}'_\nu \times \boldsymbol{M}_\nu$$

力の能率は

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{c} \times \sum \boldsymbol{K}_\nu + \sum \boldsymbol{r}'_\nu \times \boldsymbol{K}_\nu$$

いま

$$\mathbf{M}=\sum \mathbf{M}_\nu,\qquad \mathbf{K}=\sum \mathbf{K}_\nu$$

$$\mathbf{H}'=\sum \mathbf{r}'_\nu\times\mathbf{M}_\nu,\qquad \mathbf{N}'=\sum \mathbf{r}'_\nu\times\mathbf{K}_\nu$$

とおけば

$$\mathbf{H}=\mathbf{c}\times\mathbf{M}+\mathbf{H}'$$

$$\mathbf{N}=\mathbf{c}\times\mathbf{K}+\mathbf{N}'$$

$\mathbf{H}$ を t について微分すれば

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt}=\mathbf{c}\times\frac{d\mathbf{M}}{dt}+\frac{d\mathbf{H}'}{dt}=\mathbf{N}$$

$$=\mathbf{c}\times\mathbf{K}+\mathbf{N}'$$

ところが

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\mathbf{c}\times\mathbf{K}$$

よつて

$$\frac{d\mathbf{H}'}{dt}=\mathbf{N}' \quad\text{..............................(90.1)}$$

となり,原點の擇び方によらず力の能率と角運動量の間に成り立つ關係である。

§28.2 角運動量保存の法則

前にきめた記號により,質點(ν)が(μ)に作用する力を $\mathbf{K}_{\mu\nu}$ と書けば

$$\mathbf{K}_{\mu\nu}=-\mathbf{K}_{\nu\mu}$$

μ から ν にひいたベクトルを $\mathbf{s}_{\mu\nu}$ とすれば

$$\mathbf{r}_\nu=\mathbf{r}_\mu+\mathbf{s}_{\mu\nu}$$

$$\therefore\quad \mathbf{r}_\nu\times\mathbf{K}_{\nu\mu}=(\mathbf{r}_\mu+\mathbf{s}_{\mu\nu})\times\mathbf{K}_{\nu\mu}$$

然るに $\mathbf{s}_{\mu\nu}$ は $\mathbf{K}_{\nu\mu}$ に平行であるから

$$\mathbf{s}_{\mu\nu}\times\mathbf{K}_{\nu\mu}=0$$

$$\therefore\quad \mathbf{r}_\nu\times\mathbf{K}_{\nu\mu}=\mathbf{r}_\mu\times\mathbf{K}_{\nu\mu}$$

即ち

$$\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{K}_{\nu\mu}+\mathbf{r}_\mu\times\mathbf{K}_{\mu\nu}=0$$

一つの質點 ν について,他の悉くの質點の影響を考へれば

$$\sum_{\mu=1}^{n}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{K}_{\nu\mu}=\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{K}_\nu$$

であるから,質點系全部についての和をとれば

$$\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{K}_\nu=0$$

自由系デハ $\sum_{\nu=1}^{n}\vec{K}_\nu=0$

質點系に外力が作用しなければ

$$\mathbf{N}=\sum \mathbf{r}_\nu\times\mathbf{K}_\nu=0$$

よつて

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt}=0 \quad\text{..............................(90.1)}$$

即ち自由系の角運動量は(任意の點について)一定不變である。

外力の作用しない運動に於いて $\mathbf{H}$ の方向を**不變軸**, $\mathbf{H}$ に垂直な面を**不變面**と云ふ。

§28.3 面積速度

質點系について

$$\mathbf{H}=\sum \mathbf{r}_\nu\times\mathbf{M}_\nu=\sum m_\nu(\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{v}_\nu)$$

一つの質點 m_ν の面積速度は

$$\frac{d\mathbf{S}_\nu}{dt}=\frac{1}{2}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{v}_\nu$$

從つて

$$\boldsymbol{H}=2\sum m_\nu\frac{d\mathbf{S}_\nu}{dt}=2\frac{d}{dt}\sum m_\nu\mathbf{S}_\nu$$

t について積分すれば

$$\sum m_\nu\mathbf{S}_\nu=\frac{1}{2}\boldsymbol{H}t+\mathbf{C}$$

$\mathbf{C}$ は t に關係のない一定のベクトルである。

もし $m_1=m_2=\cdots=m_n=m$ ならば

$$m\sum\mathbf{S}=\frac{1}{2}\boldsymbol{H}t+\mathbf{C}\quad\cdots\cdots(91)$$

卽ち一定の時間内に,各質點の動徑の劃く面積の和は一定である。

§28.4 運動量保存の法則

自由系であれば外力が作用しないから

$$\boldsymbol{G}_\nu=0$$

よつて

$$\mathbf{K}=\sum\mathbf{K}_\nu=\sum\mathbf{F}_\nu=0$$

となるから

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=\mathbf{K}=0$$

卽ち質點系に外力が作用しなければ,運動量は恆に一定不變である。

第九章 剛體の力學

§29.1 剛體

今迄扱つてきたものは質點である。力學に於いては,それ自身の廻轉を考へないでよい物體は質點として,單に進行運動だけを調べればよい。然し進行運動の外に廻轉運動も考へるには**剛體**として研究する。

剛體は一定の大さを有して,如何なる力の作用によつても,形を變へない。然し自然に存在する物體は力を加へれば變形するから,完全な質點が實在しないと同樣に,完全な剛體も實在しない。力學に於いて剛體と考へるのは,その一部に如何なる力を加へても,他の部分に對する關係位置を變へないやうなものである。從つて剛體は,質點組合の特別な場合と見做すことができる。無數に多くの質點の集合連續體であつて,これに作用する外力に對して應力を生じ,質點相互の位置は變らないやうな對象である。

§29.11 剛體が運動してゐる時の狀態は,その中にとつた共線でない三點の位置によつて定めることができる。卽ち剛體は六つの自由度をもつてゐる。

剛體は恰も質點系統の一種と見做せるから,前章の法則は其の儘適用することができる。

§29.2 運動の調べ方

剛體の運動を調べるには D'Alembert の原理を用ゐるのが一つの方法である。

§29.21 剛體が進行運動だけしてゐるとすれば質點組合に於けると同樣に,剛體の各部に働く力を $\mathbf{K}$ とすれば,積分を剛體全部についてとれば

$$\int\left(\rho\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}-\mathbf{K}\right)d\tau=0 \qquad \text{(92)}$$

ρ は密度, $d\tau$ は容積要素である。

剛體の重心の坐標を $\bar{\mathbf{r}}$ とすれば

$$\bar{\mathbf{r}}\int\rho\, d\tau=\int\rho\,\mathbf{r}\, d\tau$$

これを t について微分すれば(92)式により

$$M\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2}=\int\mathbf{K}\, d\tau \qquad \text{(92.1)}$$

§29.211 剛體の進行運動のエネルギー T_1 は

$$T_1=\frac{1}{2}\int\rho\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 d\tau=\frac{1}{2}M\bar{\boldsymbol{v}}^2 \qquad \text{(93.1)}$$

$\bar{\boldsymbol{v}}$ は重心の速度であるが,進行運動だけしてゐる剛體では總ての點は同じ速度をもつてゐるから, $\bar{\boldsymbol{v}}$ は卽ち剛體の速度である。

§29.22 廻轉運動

剛體が廻轉運動だけしてゐるとすれば,廻轉軸の廻りに剛體の各部は同じ廻轉速度 $\boldsymbol{w}$ で廻轉してゐるから,

$$\int\left(m\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)d\tau=\frac{d}{dt}\int\left(m\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)d\tau=\int\mathbf{r}\times\mathbf{K}\, d\tau \qquad \text{(92.2)}$$

原點を廻轉軸の上にとれば,原點に關する力の能率は

$$\mathbf{N}=\int\mathbf{r}\times\mathbf{K}\, d\tau$$

角運動量 $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H}=\int\left(\rho\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)d\tau$$

よつて

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}=\mathbf{N} \qquad \text{(94)}$$

卽ち角運動量の增す割合は力の能率に等しいことも質點組合と同樣である。

§29.221 廻轉運動によるエネルギー T_2 は

$$T_2=\frac{1}{2}\int\rho\boldsymbol{v}^2 d\tau=\frac{1}{2}\int\rho(\boldsymbol{w}\times\mathbf{r})^2 d\tau \qquad \text{(93.2)}$$

剛體の總ての點に於いて $\boldsymbol{w}$ は等しいから, $\boldsymbol{w}$ の單位ベクトルを $\boldsymbol{w}_1$ とすれば

$$T_2=\frac{1}{2}w^2\int\rho(\boldsymbol{w}_1\times\mathbf{r})^2 d\tau$$

第 27 圖により

$$p^2=(\boldsymbol{w}_1\times\mathbf{r})^2$$

今

$$J\equiv\int\rho p^2 d\tau=\int\rho(\boldsymbol{w}_1\times\mathbf{r})^2 d\tau \qquad \text{(95)}$$

と置けば, J は $\boldsymbol{w}_1$ 軸に關する**慣性能率**である。卽ち

$$J=Mk^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(95.1)$$

とおけば, k は剛體の全質量 M が廻轉軸から k の距離に悉く移されたとしても,廻轉能率が變らない點の距離をを示してゐる,これを**廻轉半徑**といふ。

§29.3 運動のエネルギー

剛體の運動は一般に行進及び廻轉の運動が同時に起るから,運動のエネルギー T は,

$$\begin{aligned} T&=T_1+T_2 \\ &=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}Jw^2 \end{aligned}$$

で與へられる。

§30.1 螺旋運動

剛體の一點 P の動徑を $\boldsymbol{r}$, 時刻 t に於ける剛體の速度を $\boldsymbol{q}$ とすれば, P 點の速度 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{q}+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$$

§30.11 もし $\boldsymbol{q}$ の方向が $\boldsymbol{w}$ に垂直ならば, $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{w}$ と共面であるから,運動してゐる中に或る瞬間に於て平行になることがあるので $\boldsymbol{r}$ の値によつて

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{w}$$

になる點が存在する。

従つてその點では

$$\boldsymbol{v}=0$$

になる。

その點はその瞬間に靜止する,このやうな點の軌跡は $\boldsymbol{w}$ に平行する直線であるから,その上の任意の點 O' に原點を移し,動徑 $\overrightarrow{O'P}$ を $\boldsymbol{r}'$ と書けば

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}'$$

で表はせる

§30.12 もし $\boldsymbol{q}$ が $\boldsymbol{w}$ に垂直でないならば, $\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{w}$ に平行な $\boldsymbol{q}'$ と,垂直な $\boldsymbol{q}''$ との二つの分ベクトルに分け

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}'+\boldsymbol{q}''$$

とおいて考へれば,剛體の運動は一般に

$$\boldsymbol{q}''=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{w}$$

になるやうな線に沿つての進行運動(速度 $\boldsymbol{q}'$)と,その線の廻りの廻轉運動(それによる速度 $\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}'$)とから成り立つ**螺旋運動**と見做すことができる。

§30.2 瞬間軸

$\boldsymbol{w}$ も $\boldsymbol{q}$ もともに時間につれて變るとすれば或る瞬間に於いて剛體が廻轉してゐる軸は,絶えず方向を變へてゐるから,その軸を廻轉の**瞬間軸**と稱へる。

動徑 $\boldsymbol{r}$ の點の速度 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$$

角運動量 $\boldsymbol{H}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}&=\int\rho\,\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})d\tau \\ &=\int\rho(\boldsymbol{w}r^2-\boldsymbol{r}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r})\,d\tau \cdots\cdots\cdots(95.2) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{w}$ について一次函数である。後に(第三編)その函数の性質を調べることにする。

§30.3 慣性能率と慣性乘積

直角成分を用ゐて角運動量を表はさう。

$$\boldsymbol{r}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{w}=w_1\,\mathbf{i}+w_2\,\mathbf{j}+w_3\,\mathbf{k}$$

とすれば(95.2)により

$$\begin{aligned}\mathbf{H}=\mathbf{i}&\int\rho\left\{(y^2+z^2)\,w_1-xy\,w_2-zx\,w_3\right\}d\tau\\&+\mathbf{j}\int\rho\left\{(z^2+x^2)\,w_2-yz\,w_3-xy\,w_1\right\}d\tau\\&+\mathbf{k}\int\rho\left\{(x^2+y^2)\,w_3-zx\,w_1-yz\,w_2\right\}d\tau\end{aligned}$$

であるから，今

$$\left.\begin{aligned}&A=\int\rho(y^2+z^2)\,d\tau,\quad B=\int\rho(z^2+x^2)\,d\tau,\quad C=\int\rho(x^2+y^2)\,d\tau\\&D=\int\rho\,yz\,d\tau,\qquad E=\int\rho\,zx\,d\tau,\qquad F=\int\rho\,xy\,d\tau\end{aligned}\right\}\tag{95.3}$$

とおく。

A,B,C は夫々 x,y,z 軸に關する慣性能率，D,E,F は夫々 x,y,z 軸に關する**慣性乘積**と呼ばれる量である。

§30.31 H の直角成分を (H_1,H_2,H_3) とすれば

$$H_1=A\omega_1-F\omega_2-E\omega_3$$

$$H_2=B\omega_2-D\omega_3-F\omega_1$$

$$H_3=C\omega_3-E\omega_1-D\omega_2$$

で H_1,H_2,H_3 は坐標軸に關する角運動量である。

§30.32 慣性の主軸

剛體の各點に於いて,一般に慣性乘積が零になるやうな三つの直交軸が少くも一つは存在する。これをその點に於ける**慣性の主軸**と言ふ。

§30.321 剛體內の與へられた一點 O に於いて, O を過る軸に關する廻轉速度 $\boldsymbol{w}$ と, O に關する角運動量 $\boldsymbol{H}$ とが同じ方向になるやうな軸を考へると, λ を零でない任意の數として

$$\boldsymbol{H}=\lambda\boldsymbol{w}$$

となる。

從つて成分にわければ次の聯立方程式

$$(A-\lambda)\,\omega_1-F\omega_2-E\,\omega_3=0$$

$$-F\omega_1+(B-\lambda)\omega_2-D\,\omega_3=0$$

$$-E\omega_1-D\omega_2+(C-\lambda)\,\omega_3=0$$

が成りたつ。

この式から $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ を消去すれば

$$\begin{vmatrix}A-\lambda & -F & -E\\-F & B-\lambda & -D\\-E & -D & C-\lambda\end{vmatrix}=0$$

これは λ に關する三次方程式であつて,少くも一つの實數根 λ_1 が存在する。これを前の聯立方程式の中の任意の二式に入れれば, $\omega_1.\omega_2\ \omega_3$ の比が定まり,卽ち求める軸の方向が定まる。

その方向を今x軸に擇べば,ω_1とこの軸に關する角運動量とは平行するから $\omega_2=\omega_3=0$ となり

$$H_2=0=-F\omega_1$$

$$H_3=0=-E\omega_1$$

卽ち

$$E=F=0$$

X 軸を含む慣性乘積は零となる。

§30.322 次にこの軸に垂直で,且つ $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{H}$ に平行するやうに軸を求めよう。

その軸に關しては

$$\omega_1=0$$

$$E=F=0$$

であるから,$\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{H}$ に平行するには

$$\frac{B\omega_2-D\omega_3}{\omega_2}=\frac{C\omega_3-D\omega_2}{\omega_3}=\mu$$

とおく,從つて

$$(B-\mu)\,\omega_2-D\,\omega_3=0$$

$$-D\,\omega_2+(C-\mu)\,\omega_3=0$$

ω_2, ω_3 を消去すれば

$$\mu^2-\mu(B+C)+(BC-D^2)=0$$

この二根は實數値をもつ。その一つの値によつて前の聯立方程式の一から ω_2 と ω_3 との比が定まり,これで求める軸の方向が定まる。これを y 軸に擇べばこの軸に關する角運動量は ω_2 と同じ方向になるから

$$D=0$$

このやうに X, Y 軸を擇べば慣性乘積は皆零とすることができた。Z 軸を X, Y に垂直に擇べば,この三つが O に於ける主軸である。

λ に關する方程式が三次式であるから,このやうな軸は一般に一組存在する。

主軸に關する慣性能率を**主慣性能率**といふ。これを $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ で表はし,主軸を坐標軸に擇べば

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{A}\omega_1\,\boldsymbol{i}+\mathrm{B}\omega_2\,\boldsymbol{j}+\Gamma\omega_3\,\boldsymbol{k}, \quad\text{.....................(95.21)}$$

となる。

§31.1 運動する坐標

大さ方向向きが變らない不變ベクトルも,方向を或る特別な坐標に關聯して言ひ表はすときは,その坐標軸が運動してゐるならば,不變ベクトルの方向を言ひ表はす量が變つてくる。不變ベクトル自身には別に變化があるのではないが,その方向を表はすに用ゐた坐標に關して見懸け上の方向が變る。

普通の問題では,地球は靜止してゐると考へ,それに固着してゐる剛體を坐標にとれば固定した坐標と考へられるが,他の天體から見れば運動してゐるやうに見える。彈道,海流,低氣壓等の問題では,地球上に固定靜止してゐる坐標は,地球とともに廻轉する坐標として扱はなければならない。

二つの坐標系 S_1, S_2 を考へる。S_1 系は固定し,S_2 系はそれに對して運動してゐるものとする。S_1 に對して等速運動してゐるものでは,靜止してゐる S_1 と同樣な關係が成立するから,改めて考へるには及ばない,玆には只 S_1 に對し廻轉する軸を調べればよい。