Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 5

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1.*

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist.

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}\,.$$

Aufgabe 5.2.*

Es stehen zwei Gläser auf einem Tisch, wobei das eine mit Rotwein und das andere mit Weißwein gefüllt ist, und zwar gleichermaßen. Nun wird ein kleineres leeres Glas (ein Fingerhut oder ein Schnapsglas) in das Rotweinglas voll eingetaucht und der Inhalt in das Weißweinglas überführt und dort gleichmäßig vermischt (insbesondere gibt es Platz für diese Hinzugabe). Danach wird das kleinere Glas in das Weißweinglas voll eingetaucht und der Inhalt in das Rotweinglas überführt. Befindet sich zum Schluss im Rotweinglas mehr Rotwein als im Weißweinglas Weißwein?

Aufgabe 5.3.*

Eine Bahncard 25, mit der man ein Jahr lang 25 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 62 Euro und eine Bahncard 50, mit der man ein Jahr lang 50 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 255 Euro. Für welchen Jahresgesamtnormalpreis ist keine Bahncard, die Bahncard 25 oder die Bahncard 50 die günstigste Option?

Aufgabe 5.4.*

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

Aufgabe 5.5. Zeige, dass in einem angeordneten Körper die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $1 \geq 0$.
(2) Es ist $a \geq 0$ genau dann, wenn $-a \leq 0$ ist.

(3) Es ist $a \geq b$ genau dann, wenn $a - b \geq 0$ ist.
(4) Es ist $a \geq b$ genau dann, wenn $-a \leq -b$ ist.
(5) Aus $a \geq b$ und $c \geq d$ folgt $a + c \geq b + d$.
(6) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$.
(7) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.
(8) Aus $a \geq b \geq 0$ und $c \geq d \geq 0$ folgt $ac \geq bd$.
(9) Aus $a \geq 0$ und $b \leq 0$ folgt $ab \leq 0$.
(10) Aus $a \leq 0$ und $b \leq 0$ folgt $ab \geq 0$.

Aufgabe 5.6.*

Auf dem kürzlich entdeckten Planeten Trigeno lebt eine rechenbegabte Spezies. Sie verwenden wie wir die rationalen Zahlen mit „unserer“ Addition und Multiplikation. Sie verwenden ferner eine Art „Ordnung“ auf den rationalen Zahlen, die sie mit $\succeq$ bezeichnen. Diese trigenometrische Ordnung stimmt mit unserer Ordnung überein, wenn beide Zahlen $\neq 0$ sind. Dagegen gilt bei ihnen

$$0 \succeq x$$

für jede rationale Zahl x. Die renommierte Ethnomathematikerin Dr. Eisenbeis vermutet, dass dies damit in Zusammenhang steht, dass sie die 0 als heilig verehren.

Zeige, dass $\succeq$ die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(1) Für je zwei Elemente $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt entweder $a \succ b$ oder $a = b$ oder $b \succ a$.
(2) Aus $a \succeq b$ und $b \succeq c$ folgt $a \succeq c$ (für beliebige $a, b, c \in \mathbb{Q}$).
(3) Aus $a \succeq 0$ und $b \succeq 0$ folgt $a + b \succeq 0$.
(4) Aus $a \succeq 0$ und $b \succeq 0$ folgt $ab \succeq 0$.

Welche Eigenschaft eines angeordneten Körpers erfüllt $(\mathbb{Q}, \succeq)$ nicht?

Aufgabe 5.7. Zeige, dass in einem angeordneten Körper die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) Es ist $a^2 \geq 0$.
(2) Aus $a \geq b \geq 0$ folgt $a^n \geq b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(3) Aus $a \geq 1$ folgt $a^n \geq a^m$ für ganze Zahlen $n \geq m$.

Aufgabe 5.8.*

Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} positiv ist.

Aufgabe 5.9. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \geq 1$. Zeige, dass für das inverse Element $x^{-1} \leq 1$ gilt.

Aufgabe 5.10. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y > 0$. Zeige, dass für die inversen Elemente $x^{-1} < y^{-1}$ gilt.

Aufgabe 5.11. Es sei K ein angeordneter Körper und seien x, y positive Elemente. Zeige, dass $x \geq y$ zu $\frac{x}{y} \geq 1$ äquivalent ist.

Aufgabe 5.12.*

Es sei K ein angeordneter Körper und $b \in K$, $b > 1$. Zeige, dass es dann Elemente $c, d > 1$ mit $b = cd$ gibt.

Aufgabe 5.13.*

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

Aufgabe 5.14. Es seien $x < y$ reelle Zahlen. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

Aufgabe 5.15.*

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das das arithmetische Mittel aus zwei vorgegebenen nichtnegativen rationalen Zahlen berechnet.

- Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die natürliche Zahlen enthalten können.
- Er kann die Summe von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.
- Er kann das Produkt von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.
- Er kann Speicherinhalte ausdrucken und vorgegebene Texte ausdrucken.
- Es gibt einen Haltebefehl.

Die Anfangskonfiguration sei

$$(a, b, c, d, 0, 0, 0, \ldots)$$

mit $b, d \neq 0$. Dabei sind a/b und c/d die rationalen Zahlen, von denen das arithmetische Mittel berechnet werden soll. Das Ergebnis soll ausgedruckt werden (in der Form Zähler Nenner) und anschließend soll das Programm anhalten.

Aufgabe 5.16. Man untersuche die Verknüpfung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

AUFGABE 5.17. Ein Bakterium möchte entlang des Äquators die Erde umrunden. Es ist ziemlich klein und schafft am Tag genau 2 Millimeter. Wie viele Tage braucht es für eine Erdumrundung?

AUFGABE 5.18. Wie viele Billionstel braucht man, um ein Milliardstel zu erreichen?

AUFGABE 5.19.*

Im Wald lebt ein Riese, der 8 Meter und 37 cm groß ist, sowie eine Kolonie von Zwergen, die eine Schulterhöhe von 3 cm haben und mit dem Kopf insgesamt 4 cm groß sind. Hals und Kopf des Riesen sind $1,23$ Meter hoch. Auf der Schulter des Riesen steht ein Zwerg. Wie viele Zwerge müssen aufeinander (auf den Schultern) stehen, damit der oberste Zwerg mit dem Zwerg auf dem Riesen zumindest gleichauf ist?

AUFGABE 5.20.*

Zeige, dass in einem archimedisch angeordneten Körper die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) Zu jedem $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{1}{n} < x$.
(2) Zu zwei Elementen $x < y$ gibt es eine rationale Zahl n/k (mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_+$) mit
$$x < \frac{n}{k} < y.$$

AUFGABE 5.21. Berechne die Gaußklammer
$$\left\lfloor \frac{513}{21} \right\rfloor .$$

AUFGABE 5.22. Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|\,,$$
(dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).
(8) Es ist $|x + y| \geq |x| - |y|$.

AUFGABE 5.23. Es seien $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen. Zeige durch Induktion die Abschätzung
$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

Die Idee zu den folgenden Aufgaben stammt von
http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/Challenge/Challenge.html,
siehe auch http://www.vier-zahlen.bplaced.net/raetsel.php .

Aufgabe 5.24. Wir betrachten die Abbildung
$$\Psi\colon \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$
die einem Vierertupel (a,b,c,d) das Vierertupel
$$(|b-a|\,, |c-b|\,, |d-c|\,, |a-d|)$$
zuordnet. Es bezeichne Ψ^n die n-fache Hintereinanderschaltung von Ψ.

(1) Berechne
$$\Psi(6,5,2,8),\ \Psi^2(6,5,2,8),\ \Psi^3(6,5,2,8),\ \Psi^4(6,5,2,8)\,...\,,$$
bis das Ergebnis das Nulltupel $(0,0,0,0)$ ist.

(2) Berechne
$$\Psi(1,10,100,1000),\ \Psi^2(1,10,100,1000),$$
$$\Psi^3(1,10,100,1000),\ \Psi^4(1,10,100,1000)\,...,$$
bis das Ergebnis das Nulltupel $(0,0,0,0)$ ist.

(3) Zeige $\Psi^4(0,0,n,0) = (0,0,0,0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5.25. Wir betrachten die Abbildung
$$\Psi\colon \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$
die einem Vierertupel (a,b,c,d) das Vierertupel
$$(|b-a|\,, |c-b|\,, |d-c|\,, |a-d|)$$
zuordnet. Bestimme, ob Ψ injektiv und ob Ψ surjektiv ist.

Aufgabe 5.26.*

Wir betrachten die Abbildung
$$\Psi\colon \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$
die einem Vierertupel (a,b,c,d) das Vierertupel
$$(|b-a|\,, |c-b|\,, |d-c|\,, |a-d|)$$
zuordnet. Zeige, dass sich bei jedem Starttupel (a,b,c,d) nach endlich vielen Iterationen dieser Abbildung stets das Nulltupel ergibt.

Aufgabe 5.27. Wir betrachten die Abbildung
$$\Psi\colon \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$
die einem Vierertupel (a,b,c,d) das Vierertupel
$$(|b-a|\,, |c-b|\,, |d-c|\,, |a-d|)$$

zuordnet. Man gebe ein Beispiel für ein Vierertupel (a, b, c, d) mit der Eigenschaft an, dass sämliche Iterationen $\Psi^n(a, b, c, d)$ für $n \leq 25$ nicht das Nulltupel liefern.

Überprüfe das Ergebnis auf http://www.vier-zahlen.bplaced.net/raetsel.php .

Wir werden später auch die Frage behandeln, wie es mit reellen Vierertupeln aussieht, siehe insbesondere Aufgabe 28.10.

Aufgabe 5.28. Es sei K ein angeordneter Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Abbildung
$$K_{\geq 0} \longrightarrow K,\, x \longmapsto x^n,$$
ist streng wachsend.

(2) Die Abbildung
$$K_{\leq 0} \longrightarrow K,\, x \longmapsto x^n,$$
ist bei n ungerade streng wachsend.

(3) Die Abbildung
$$K_{\leq 0} \longrightarrow K,\, x \longmapsto x^n,$$
ist bei n gerade streng fallend.

Aufgabe 5.29. Es seien
$$f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
Funktionen, die wachsend oder fallend seien, und sei $f = f_n \circ \cdots \circ f_1$ ihre Hintereinanderschaltung. Es sei k die Anzahl der fallenden Funktionen unter den f_i. Zeige, dass bei k gerade f wachsend und bei k ungerade f fallend ist.

Bei den Rechenaufgaben zu den komplexen Zahlen muss das Ergebnis immer in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit reellen Zahlen a, b angegeben werden, wobei diese so einfach wie möglich sein sollen.

Aufgabe 5.30. Berechne die folgenden Ausdrücke innerhalb der komplexen Zahlen.

(1) $(5 + 4\mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})$.
(2) $(2 + 3\mathrm{i})(2 - 4\mathrm{i}) + 3(1 - \mathrm{i})$.
(3) $(2\mathrm{i} + 3)^2$.
(4) i^{1011}.
(5) $(-2 + 5\mathrm{i})^{-1}$.
(6) $\frac{4-3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

Aufgabe 5.31.*

Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 5.32. Zeige, dass $P = \mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation kein Körper ist.

Aufgabe 5.33.*

Beweise die folgenden Aussagen zu Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen.

(1) $z = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z)\mathrm{i}$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z+w) = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(w)$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z+w) = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(w)$.
(4) Für $r \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathrm{Re}\,(rz) = r\,\mathrm{Re}\,(z) \text{ und } \mathrm{Im}\,(rz) = r\,\mathrm{Im}\,(z)\,.$$

(5) $z = \mathrm{Re}\,(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ ist.

Aufgabe 5.34.*

Zeige, dass innerhalb der komplexen Zahlen folgende Rechenregeln gelten.

(1) $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.
(4) $\overline{z} = \mathrm{Re}\,(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)$.
(5) Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Aufgabe 5.35. Zeige die folgenden Regeln für den Betrag von komplexen Zahlen.

(1) Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.
(2) Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.
(3) $|z| = |\overline{z}|$.
(4) $|zw| = |z|\,|w|$.
(5) Für $z \neq 0$ ist $|1/z| = 1/\,|z|$.
(6) $|\mathrm{Re}\,(z)|\,, |\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.36. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $x < 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} negativ ist.

Aufgabe 5.37. (2 Punkte)

Zeige, dass eine streng wachsende Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

injektiv ist.

Aufgabe 5.38. (3 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi \colon \mathbb{Q}_{\geq 0}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}^4,$$

die einem Vierertupel aus nichtnegativen rationalen Zahlen (a, b, c, d) das Vierertupel

$$(|b-a|, |c-b|, |d-c|, |a-d|)$$

zuordnet. Zeige, dass sich nach endlich vielen Iterationen dieser Abbildung stets das Nulltupel ergibt.

Tipp: Verwende Aufgabe 5.26.

Aufgabe 5.39. (3 Punkte)

Berechne die komplexen Zahlen

$$(1+\mathrm{i})^n$$

für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aufgabe 5.40. (3 Punkte)

Zeige, dass für die komplexe Konjugation die folgenden Rechenregeln gelten.

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) $\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 5.41. (5 Punkte)

Berechne die Quadratwurzeln, die vierten Wurzeln und die achten Wurzeln von i.

Aufgabe 5.42. (3 Punkte)

Man finde alle drei komplexen Zahlen z, die die Bedingung

$$z^3 = 1$$

erfüllen.

Abbildungsverzeichnis