

復興初級中學教科書

三角

周元瑞 編著
周元谷

國民政府教育部審定

按照新課程
標準編輯

商務印書館發行

復興初級中學教科書

三 分 角 分

周元瑞 編 著
周元谷

商務印書館發行

編輯大意

1. 本書依據最近部頒初中算學課程標準編輯,只講數值三角。(Numerical trigonometry)。

2. 本編習題之選擇,僅及實際問題,以切於學生生活狀況者爲限。

3. 本編除應用上必需之三角函數公式外,其他一切恆等式概從省略。

4. 本編共計六章,適於一學期每週二小時教授之用。如時間尙感不足時,可將第四章及第五章之教材,酌量縮短,或將第六章完全省去。

復興初中教科書三角

目 錄

第一章	三角比	1—12
1.	間接量度法	1
2.	正切	3
3.	正弦和餘弦	4
4.	三角比	6
5.	三角函數	6
6.	六種三角比	8
7.	仰角和俯角	9
第二章	基本公式	13—22
8.	餘角函數公式	13
9.	特別角的三角函數	15
10.	同角函數的基本公式	17
11.	解三角方程式的例	19
第三章	三角函數及其應用	23—43
12.	三角函數表	23
13.	三角函數表的說明	28

14.	三角函數表檢查法	24
(1)	已知角度找正函數	24
(2)	已知角度找餘函數	32
(3)	已知函數找角度	33
(4)	角度帶有分秒的檢查法	36
15.	直角三角形解法	37
第四章 對數解法		44—64
16.	對數	44
17.	對數的性質	45
18.	常用對數	48
19.	定位部與定值部	49
20.	對數表及三角函數對數表	51
21.	餘對數	54
22.	用對數解直角三角形	56
23.	應用問題上幾個名詞	62
第五章 任意三角形的解法		65—92
24.	純角三角函數	65
25.	補角函數公式	67
26.	解任意三角形	69
27.	解任意三角形所根據的定律	70

28.	第一類	已知一邊與任兩角73
29.	第二類	已知二邊與一非夾角75
30.	第三類	已知二邊與一夾角 81
31.	第四類	已知三邊 82
32.	已知三邊	求面積 85
33.	三角形內切圓的半徑	 88
34.	三角形外接圓的半徑	89
第六章 三角法的應用		 93—103
35.	三角法在物理上的應用	93
36.	三角法在測量上的應用	96

附表

正餘弦表 25
正餘切表 27
分秒化度,度化分秒, 29
對數表104
正餘弦對數表 108
正餘切對數表 112

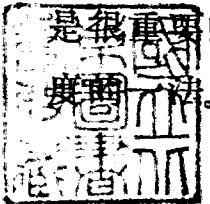
初級中學教科書

三 角

第一章 三角比

1. 間接量度法。平常實際的工作上量度距離，有時須用間接方法。因為直接量度，有時很不容易精確，並且手續上或許非常麻煩，甚至在事實上，有辦不到的。要測水塔或房屋的高，若用直接量法，還不過手續上比較麻煩，同時不能得到精確的結果罷了；至於要求天空星辰的距離或大洋輪艦的航線，直接量度在實際上就不可能了。所以間接度量，也

是很重要的一件實際工作。下例就是間接量



如圖1, AB 是一垂直在地面上的電桿, C 點是一小木樁, AC 表示聯 AB 的頂點 A 和 C 點的直線。若已知 C 點到 AB 着地點 B 的距離是 150 尺, $\angle ACB$ 是 60° , 求 AB 的高 h

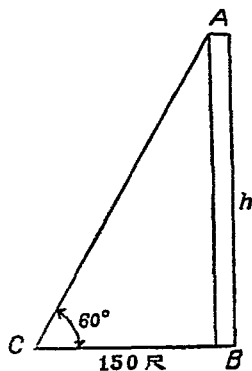


圖 1

解: 照題意 $AB \perp CB$ 所以 $\triangle ABC$ 是一直角三角形。

設圖2, $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的縮小圖形, 那末 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 是兩個相似直角三角形。根據相似三角形的原理就有

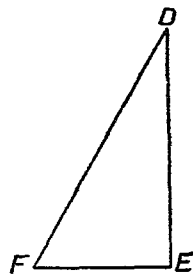


圖 2

$$\frac{AB}{CB} = \frac{DE}{FE} \text{ 何故?} \dots\dots\dots (1)$$

或 $\frac{h}{150} = \frac{DE}{FE}$

$$\therefore h = 150 \cdot \frac{DE}{FE} \dots\dots\dots (2)$$

從 (1) 可以曉得凡相似直角三角形等角兩對應邊的比是一定的。

從 (2) 可以曉得若已知 $\frac{DE}{FE}$ 的比值, b 就可以求出。

2. **正切** 畫一直角三角形, 使一銳角等於 30° 如圖 3。量出 30° 的對邊 a 和 30° 角的底邊 b , 求出 $\frac{a}{b}$ 的比值。

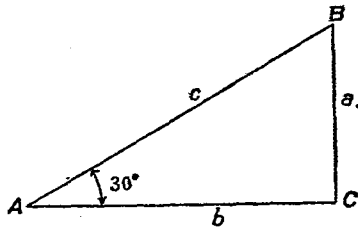


圖 3

同樣畫銳角等於 $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 的三個直角三角形, 量各銳角對邊和底邊的長, 而求出他們相互間的比值。將各比值排成一表。

角度	比值
0°	0.00
30°	0.58
45°	1.00
60°	1.73
75°	3.73

各人所得等角的比值。是否相同?
和右表比值行內的數字有幾位相同?

上表的各個比值都是直角三角形一銳角的對邊和牠的底邊的比,在三角法上叫做這角的正切;譬如 30° 角的正切, A 角的正切,算式上寫做 $\tan 30^\circ$, $\tan A$ 。根據求得的比值,就可以寫做 $\tan 30^\circ = 0.58$ 。這表示角的正切的表,叫做正切表。

應用例: 如圖4, AB 是 P 池對岸 A, B 兩點的距離。若某測量員用儀器測量, 取得 AC 線段垂直於 AB , 並量得 $AC = 300$ 尺, $\angle ACB = 60^\circ$ 求 AB 的長 l

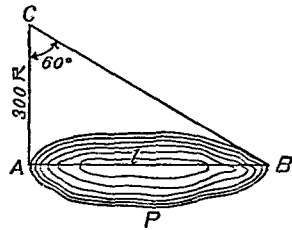


圖 4

$$\text{解: } \because \frac{l}{300} = \tan 60^\circ,$$

$$\therefore l = 300 \tan 60^\circ,$$

$$\text{照上表 } \tan 60^\circ = 1.73,$$

$$\text{所以 } l = 300 \times 1.73 = 519 \text{ 尺}$$

3. 正弦和餘弦 如圖5, $\angle ABC = 30^\circ$ 若在 BC 邊上任一點 D 引 $DE \perp BA$, 那末 $\triangle BDE$ 是

一直角三角形。

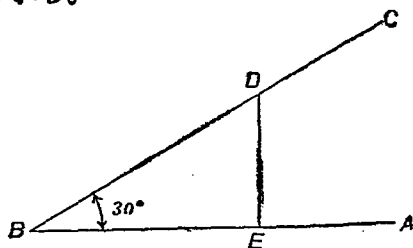


圖 5

照求正切的方法,量出 B 角的對邊 DE 和斜邊 BD 的長,并求出 $\frac{DE}{BD}$ 的比值。凡直角三角形一銳角的對邊和斜邊的比,叫做這角的正弦;例如 30° 的正弦, B 角的正弦,算式上寫做 $\sin 30^\circ, \sin B$ 。

同樣畫銳角等於 $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 各直角三角形,量各該角的對邊和斜邊的長,求出各角的正弦。何以等角的正弦是一定數?

又如圖 5, $\frac{BE}{BD}$ 叫做 B 角或 30° 角的餘弦。用話來說,就是直角三角形一銳角的底邊和斜邊的比,叫做這角的餘弦,算式上寫做 $\cos B, \cos 30^\circ$ 。

照求正切,正弦的方法求出 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$

各角的餘弦。等角的餘弦是一定的麼？何故？

4. **三角比** 正切, 正弦, 餘弦的比值是表示一角的對邊, 底邊及斜邊任何兩邊和這角的關係, 所以牠們的總名叫做三角比。凡等角的三角比都是一定的。但是我們求出各等角的比不能完全相同, 大半是由於儀器不很精密的緣故。不過三角比的用處很大, 若每次應用的時候, 再去求牠, 也很麻煩; 前人爲便利準確計, 已經用很精密的儀器和計算, 將各種角度的三角比求出, 列成表式。本章末頁的表是 0° 到 90° 角的正弦, 餘弦和正切的表。表中第一行是角度數, 第二行是正弦, 第三行是餘弦, 第四行是正切。

看表中角度從 0° 到 90° , 正弦是從0漸漸增加到1; 但是餘弦卻相反, 從1漸漸減小到0。又看正切也是和角度相應的增加。可見三角比和角度是很有密切的關係。

5. **三角函數** 三角比都是跟着角度在

改變的。在角度一定的時候，三角比就有一定的數值。如果角度改變，三角比也就相應的改變。那末照函數的定義說，三角比是角的函數，所以三角比又叫做三角函數。

習題一

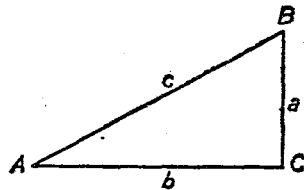
1. 如圖已知下列各值求 a ,

(a) $b=26$ $A=23^\circ$

(b) $c=62$ $A=36^\circ$

(c) $b=28.7$ $A=75^\circ$

(d) $c=49.7$ $A=80^\circ$



2. 仍照一題的圖求 A

(a) 使 $a=8$, $b=8$

解: $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{8}{8} = 1$

檢表求得正切等于 1 的相應角是 45°

$\therefore A=45^\circ$

(b) $a=21.445$ $b=10$

(c) $a=14.862$ $c=20$

(d) $b=7.314$ $c=10$

3. (a) 比較 $2 \sin 8^\circ$ 和 $\sin(2 \times 8^\circ)$

(b)比較 $3 \sin 10^\circ$ 和 $\sin(3 \times 10^\circ)$;

又和 $\sin(2 \times 10^\circ)$

4. 用題 3 的結果說明 $\sin(20^\circ + 30^\circ)$ 是否可以等於 $\sin 20^\circ + \sin 30^\circ$

6. **六種三角比** 在直角三角形 ABC 中, 三角法上常用 A, B 表兩銳角; C 表直角; a 表 A 角對邊的長度; b 表 A 角底邊, 或 B 角對邊的長度; c 表斜邊, 或 C 角對邊的長度;

如圖 6。那麼

$\frac{a}{c}$ 是 A 角的正弦, 寫做 $\sin A$ 。

$\frac{b}{c}$ 是 A 角的餘弦, 寫做 $\cos A$ 。

$\frac{a}{b}$ 是 A 角的正切, 寫做 $\tan A$ 。

這三種三角比我們已經學

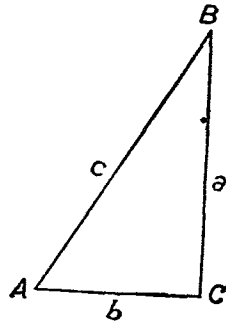


圖 6

過, 所以在直角三角形中任一銳角的

正弦 = $\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$

餘弦 = $\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$

正切 = $\frac{\text{對邊}}{\text{底邊}}$

除這三種三角比外, 還有三種牠們的倒

數比,就是

$\frac{c}{a}$ 叫做 A 角的餘割,寫做 $\csc A$ 。

$\frac{c}{b}$ 叫做 A 角的正割,寫做 $\sec A$ 。

$\frac{b}{a}$ 叫做 A 角的餘切,寫做 $\cot A$ 。

牠們的比值,也可以照求正弦餘弦,和正切的方法,先量兩邊的長度求的。不過這三種函數用處較少,並且是前三種的倒數,所以祇要知道了前三個,這三種的比值就可以算出來。

7. 仰角和俯角 這兩個名詞應用題上常遇到,所以特別加以解釋。

若某人在 P 點向上看一物體 O,如圖,P 點

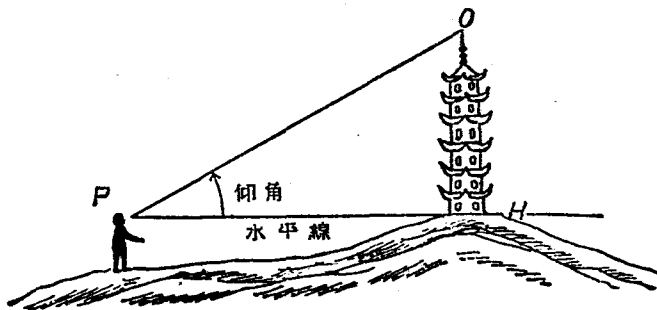


圖 7 (a)

叫視點, PO 叫做視線。視線和通過視點的水平線 PH 所成的角叫做仰角。

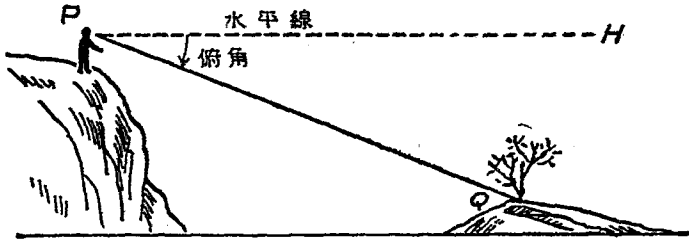


圖 7 (b)

同理某人在 P 點向下看一物體 Q, 如圖, 視線 PQ 和通過視點的水平線 PH 所成的角叫做俯角。

所以仰角或俯角是視線和通過視點的水平線所成的角。

習 題 二

1. 照求正弦, 餘弦, 正切的方法求 $10^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 度的餘切, 正割和餘割。

2. 在直角三角形 ABC 中, 若已知下列各數值求 a.

$$(1) c=112 \quad A=10$$

$$\text{解: } \sin A = \frac{a}{c} \quad \therefore a = c \sin A.$$

$$= 112 \times .1736 = 19.4432$$

$$(2)c=126 \quad A=15^\circ \quad (3)c=608, \quad A=45^\circ$$

3. 已知下列各數值,求 b .

$$(1)c=106 \quad A=10^\circ \quad (2)c=49.7, \quad A=75^\circ$$

4. 已知下列各值,求 A 的最近值.

$$(1)c=20.9 \quad a=14.58$$

$$(2)c=40.3 \quad a=13.68$$

$$(3)c=187 \quad b=93.5$$

$$(4)c=50.6 \quad b=52.25$$

5. 某樹地面影子長 7.5 尺,看太陽的仰角是 56° ,求此樹之高.

6. 380 尺高的烟囪,照在地面的影子是 215 尺,求看太陽的仰角.

7. 正六邊形外接圓的半徑是 15 寸,求每邊到圓心的距離.

8. 正五邊形對角線的長是 16 寸求邊長.

9. 若在 175 尺高的屋頂看一塊石的俯角是 30° ,求石塊和這屋基的距離.

10. 等腰三角形各邊的長是 60 尺,90 尺和 90 尺,求各角的度數.

11. 旗竿離竿頂 44 尺的地方,被風折斷,但仍和下段連接. 若竿頂着地點和竿腳的距離是 11 尺,求折斷部分和地面所成之角. 又求竿的原長.

12. 在離池岸的水平面十尺高的地方,測得池邊樹頂的仰角是 48° ,若看樹腳的俯角是 10° ,求樹高.

角 x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	角 x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
1°	.0175	.9998	.0175	46°	.7193	.6947	1.0355
2°	.0349	.9994	.0349	47°	.7314	.6820	1.0724
3°	.0523	.9986	.0524	48°	.7431	.6691	1.1106
4°	.0698	.9976	.0699	49°	.7547	.6561	1.1504
5°	.0872	.9962	.0875	50°	.7660	.6428	1.1918
6°	.1045	.9945	.1051	51°	.7771	.6293	1.2349
7°	.1219	.9925	.1228	52°	.7880	.6157	1.2799
8°	.1392	.9903	.1405	53°	.7986	.6018	1.3270
9°	.1564	.9877	.1584	54°	.8090	.5878	1.3764
10°	.1736	.9848	.1763	55°	.8192	.5736	1.4281
11°	.1908	.9816	.1944	56°	.8290	.5592	1.4826
12°	.2079	.9781	.2126	57°	.8387	.5446	1.5399
13°	.2250	.9744	.2309	58°	.8480	.5299	1.6003
14°	.2419	.9703	.2493	59°	.8572	.5150	1.6643
15°	.2588	.9659	.2679	60°	.8660	.5000	1.7321
16°	.2756	.9613	.2867	61°	.8746	.4848	1.8040
17°	.2924	.9563	.3057	62°	.8829	.4695	1.8807
18°	.3090	.9511	.3249	63°	.8910	.4540	1.9626
19°	.3256	.9455	.3443	64°	.8988	.4384	2.0503
20°	.3420	.9397	.3640	65°	.9063	.4226	2.1445
21°	.3584	.9336	.3839	66°	.9135	.4067	2.2460
22°	.3746	.9272	.4040	67°	.9205	.3907	2.3559
23°	.3907	.9205	.4245	68°	.9272	.3746	2.4751
24°	.4067	.9135	.4452	69°	.9336	.3584	2.6051
25°	.4226	.9063	.4663	70°	.9397	.3420	2.7475
26°	.4384	.8988	.4877	71°	.9455	.3256	2.9042
27°	.4540	.8910	.5095	72°	.9511	.3090	3.0777
28°	.4695	.8829	.5317	73°	.9563	.2924	3.2709
29°	.4848	.8746	.5543	74°	.9613	.2756	3.4874
30°	.5000	.8660	.5774	75°	.9659	.2588	3.7321
31°	.5150	.8572	.6009	76°	.9703	.2419	4.0108
32°	.5299	.8480	.6249	77°	.9744	.2250	4.3315
33°	.5446	.8387	.6494	78°	.9781	.2079	4.7046
34°	.5592	.8290	.6745	79°	.9816	.1908	5.1446
35°	.5736	.8192	.7002	80°	.9848	.1736	5.6713
36°	.5878	.8090	.7265	81°	.9877	.1564	6.3138
37°	.6018	.7986	.7536	82°	.9903	.1392	7.1154
38°	.6157	.7880	.7813	83°	.9925	.1219	8.1443
39°	.6293	.7771	.8098	84°	.9945	.1045	9.5144
40°	.6428	.7660	.8391	85°	.9962	.0872	11.4301
41°	.6561	.7547	.8693	86°	.9976	.0698	14.3006
42°	.6691	.7431	.9004	87°	.9986	.0523	19.0811
43°	.6820	.7314	.9325	88°	.9994	.0349	28.6363
44°	.6947	.7193	.9657	89°	.9998	.0175	57.2900
45°	.7071	.7071	1.0000	90°	1.0000	.0000	∞

第二章 基本公式

8. 餘角函數公式 兩角相加的和是90度, 這兩角就互相叫做餘角。普通寫做A和 $90 - A$ 。

在圖8直角三角形中。

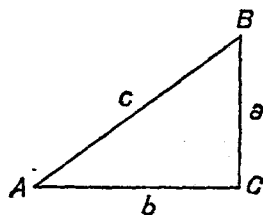


圖 8

$$\angle A + \angle B = 90^\circ;$$

所以 $\angle B = 90^\circ - \angle A \dots (1)$

因爲

$\sin A = \cos B$	}	何故?.....(2)
$\cos A = \sin B$		
$\tan A = \cot B$		
$\cot A = \tan B$		
$\sec A = \csc B$		
$\csc A = \sec B$		

將(1)代入(2)中, 就有

$$\left. \begin{array}{l} \sin A = \cos (90^\circ - A) \\ \cos A = \sin (90^\circ - A) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan A &= \cot(90^\circ - A) \\ \cot A &= \tan(90^\circ - A) \\ \sec A &= \csc(90^\circ - A) \\ \csc A &= \sec(90^\circ - A) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

這一套公式極容易記得。用普通語言來講,就是“凡銳角的正函數等於餘角的餘函數;銳角的餘函數等於餘角的正函數”。

習 題 三

1. 寫出下列各函數的餘函數:

$$\sin 30^\circ \quad \tan 89^\circ \quad \csc 18^\circ 10' \quad \cot 82^\circ 19'$$

$$\cos 45^\circ \quad \cot 15^\circ \quad \cos 37^\circ 24' \quad \csc 54^\circ 46'$$

2. 用小於 45° 的角的函數表示下列各式:

$$\sin 60^\circ \quad \tan 75^\circ \quad \csc 69^\circ 2' \quad \cot 89^\circ 59'$$

$$\cos 75^\circ \quad \cot 84^\circ \quad \cos 85^\circ 39' \quad \csc 45^\circ 1'$$

3. 設 $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; 求 $\cot 60^\circ$ 。

4. 設 $\tan A = \cot A$; 求 A 。

5. 設 $\cos A = \sin 2A$; 求 A 。

6. 設 $\sin A = \cos 2A$; 求 A 。

7. 設 $\cos A = \sin(45^\circ - \frac{1}{2}A)$; 求 A 。

8. 設 $\cot \frac{1}{2}A = \tan A$; 求 A .
9. 設 $\tan (45^\circ + A) = \cot A$; 求 A .
10. 試求 A , 設 $\sin A = \cos 4A$.
11. 試求 A , 設 $\cot A = \tan 8A$.

9. **特別角的三角函數** 有幾個特別的角度, 如 $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$; 他的三角函數, 用幾何的方法很容易推算他的準確數值, 看下兩節便知道。

這幾個角度用處很多, 你們最好把他的數值或者簡直連那找出這數值的方法, 牢牢記住。

a. 45° 角的函數 圖9 $\triangle ABC$ 是一等腰直角三角形, 設斜邊 $AB = 1$; 因為 $AC = BC, \angle A = 45^\circ$ 。

又 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 1$, 所以
 $2\overline{AC}^2 = 1$, 即 $AC = \sqrt{\frac{1}{2}}$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$. 用公式表示可以寫做:

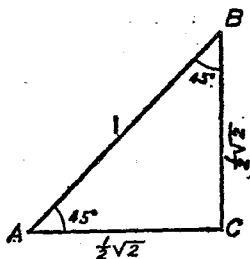


圖 9

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 45^\circ = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

b. 30° 及 60° 角的函數 圖 10 $\triangle ABC$ 是等邊三角形, 設各邊都等於 1; 又直線 CD 平分 C 角。同時又是 AB 的

中點垂線。所以 AD

$$= \frac{1}{2}, CD = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}。在$$

三角形 ADC 中, $\angle CAD$

$= 30^\circ$ 何故? $\angle CAD = 60^\circ$ 何故?

依照公式(3)就有:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

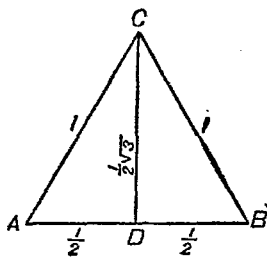


圖 10

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\csc 30^\circ = \sec 60^\circ = 2$$

10. 同角函數的基本公式 同是 A 角的函數都互相有關係的, 這種關係中, 最要緊的有三個:

a. 在圖 11 中, 依畢達哥拉定理, (Pythagorean theorem) 直角三角形 ABC 中, $a^2 + b^2 = c^2$

或 $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$

或 $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$

但是 $\frac{a}{c} = \sin A,$

$$\frac{b}{c} = \cos A$$

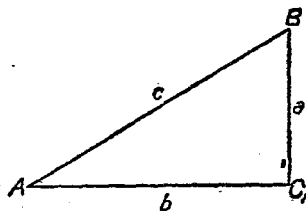


圖 11

所以 $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

爲方便起見, 常寫做

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \dots\dots\dots (1)$$

(1) 式叫做平方關係式, 用普通語言來說就是
‘正弦平方同餘弦平方的和等於 1.’

用公式 (1) 可以由餘弦去找正弦, 或由正

弦去找餘弦：

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

b. 因為 $\frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$

但是 $\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \cos A$ 又 $\frac{a}{b} = \tan A$

所以 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \dots \dots \dots (2)$

(2) 式叫做分式關係式, 用普通語言來說就是“正切等於餘弦除正弦的商”。

c. 因為 $\frac{a}{c} \times \frac{c}{a} = 1$; $\frac{b}{c} \times \frac{c}{b} = 1$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

但是 $\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \cos A$, $\frac{a}{b} = \tan A$

$$\frac{b}{a} = \cot A, \frac{c}{b} = \sec A, \frac{c}{a} = \csc A$$

所以 $\left. \begin{array}{l} \sin A \times \csc A = 1 \\ \cos A \times \sec A = 1 \\ \tan A \times \cot A = 1 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$

這叫做倒數關係式, 用普通語言來說就是“正

弦和餘割；餘弦和正割；正切和餘切；都互相成爲倒數。”

d. 從(2) $\tan^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$ ，兩端加1，得

$$1 + \tan^2 A = 1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

但 $1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A$

$$\therefore 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \dots\dots\dots [4]$$

又從 (3)與(2), $\cot^2 A = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$ ，兩端加1，得

$$1 + \cot^2 A = 1 + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$$

但 $1 + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A} = \csc^2 A$

$$\therefore 1 + \cot^2 A = \csc^2 A \dots\dots\dots [5]$$

這兩式叫做切割平方關係式。用普通語言來說，就是「正切(或餘切)的平方加1，等於正割(或餘割)的平方」。

11 解三角方程式的例 從三角方程式給與的同角各函數的關係，求那角的度數，叫做解三角方程式。請看下列：

1. 已知 $2\cos A = \sec A$ ，求 A 。

$$\sec A = \frac{1}{\cos A},$$

所以原式可改做 $2\cos A = \frac{1}{\cos A},$

$$\therefore 2\cos^2 A = 1, \cos^2 A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos A = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

檢表求得 A 角等於 45° 。

2. $\tan A + \cot A = 2$ 求 A。

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

所以原式可變做 $\tan A + \frac{1}{\tan A} = 2$

$$\therefore \tan^2 A + 1 = 2\tan A$$

$$\tan^2 A - 2\tan A + 1 = 0$$

$$(\tan A - 1)^2 = 0, \therefore \tan A - 1 = 0,$$

$$\tan A = 1,$$

檢表求得 A 角等於 45° 。

習題四

- 1 a. 設 $\sin 31.3$ 爲 0.5195 求 $\cos 31.3$
- b. 設 $\sin 66^\circ$ 爲 0.9135 求 $\csc 66^\circ$ 及 $\cos 24^\circ$
- c. 設 $\cos 43.3$ 爲 0.7278 求 $\sec 43.3$ 及 $\sin 46.7$
- d. 設 $\tan 52.4$ 爲 1.2985 求 $\cot 52.4$ 及 $\tan 37.6$

e. 設 $\sin 38^\circ.4$ 爲 0.6211, 求 $\cos 38^\circ.4$, $\tan 38^\circ.4$ 及 $\cot 38^\circ.4$.

2. 試證明 a. $\sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$

b. $\cos A = \frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$

試證明下列各題:

3. $\cos A \csc A \tan A = 1$

4. $\tan^2 A \cos^2 A + \cos^2 A = 1$

5. $\sec A - \cos A = \sin A \tan A$

6. $\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$

7. $\cot x = \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$

8. 正方形的對角線等於 2, 求牠的邊。

9. 等腰三角形的底角等於 35° 底邊等於 8, 求牠的高。

10. 已知下列函數之值, 求其餘各函數之值。

(a) $\cos B = \frac{1}{3}$

解: $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$\cos B = \frac{1}{3} \quad \therefore \cos^2 B = \frac{1}{9}$

$$\therefore \sin^2 B + \frac{1}{9} = 1, \sin^2 B = \frac{8}{9}$$

$$\sin B = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2};$$

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

尚有 $\sec B, \csc B$ 及 $\cot B$ 三函數值可用 § 10 公式[3] 求得之。

$$(b) \sin B = \frac{1}{4}$$

$$(c) \csc B = 2$$

$$(d) \sec B = \sqrt{2}$$

$$(e) \tan B = 7.5$$

$$(f) \cot B = 3$$

11. 解下列各三角方程式:

$$(a) \tan A = 2 \sin A$$

$$(b) 4 \sin A = \csc A$$

$$(c) \sin^2 A = 3 \cos^2 A$$

$$(d) 3 \tan^2 A - \sec^2 A = 1$$

$$(e) \tan^2 A + \csc^2 A = 3$$

若同角各函數的關係如下, 求 $\sin A, \cos A, \tan A$ 之值。

$$(1) 2 \sin A = \cos A,$$

$$(2) 4 \sin A = \tan A,$$

第三章 三角函數及其應用

12. **三角函數表** 角的函數,都有一定的數值,前人把他們算出,列成表式,叫做三角函數表;所以我們現在要求某角函數的數值,可到表裏去找。第一章所列的表,也是三角函數表,不過僅有整度的角,若遇到有小數的度數或分秒數,這個表就不能應用。必須用下面幾頁三角函數表。

13. **三角函數表的說明** 請看後面的表,譬如正餘弦表,他的組成是分爲三大部分:

a. 中間的一大部分每組數字表每個函數的數值,左右兩旁邊緣上每行所記的數字是角的度數。找正弦的時候,在左邊的一行從上向下讀,找餘弦的時候,在右邊的一行從下向上讀;都是從 0° 到 90° 。所以找正弦是順讀的,找餘弦是要倒讀的,理由是兩角的和是 90° ,牠們的正弦和餘弦互爲正餘,故正弦和餘弦可

以合做一表,同理正切餘切等也是如此。

b. 在表頂的邊緣上,有橫列兩排一位的數字,倒順都可以讀的,是角度的第一位小數,找正弦從左向右順讀黑字,找餘弦從右向左倒讀白字,同理正切餘切等也是一樣的。

c. 還有表邊的附表,分做 12345 五行排列,是找角度的第二位小數用的,用法看下節。

14. **三角函數表檢查法** 三角函數的檢查分四種:(1)已知角度找正函數,(2)已知角度找餘函數,(3)已知函數找角度,(4)帶有分秒角度的檢查法。

(1) 已知角度找正函數

a. 求 $\sin 55^\circ = ?$

在正餘弦表上第一行 sine 字的行下順次找到 55° , 再平行橫看中部函數部分的第一行(表頂對準從左到右的 0 字)便是 0.8192,

$$\therefore \sin 55^\circ = 0.8192$$

Sine		正餘弦表										Cosine		表尾差					
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			1	2	3	4	5	
0°	0.00000	001745	003491	005236	006981	008727	010472	012217	013962	015707	017452	89	178	50	82	88	873	0.00000	00°
1	01745	01920	02094	02269	02443	02618	02792	02967	03141	03316	03490	88	17	56	82	76	87		
2	03490	03664	03839	04013	04188	04362	04536	04711	04885	05059	05234	87	17	45	82	70	87		
3	05234	05408	05582	05756	05931	06105	06279	06453	06627	06802	06976	86	17	35	82	70	87		
4	06976	07150	07324	07498	07672	07846	08020	08194	08368	08542	08716	85	17	26	82	70	87		
5	08716	08890	09064	09238	09411	09585	09758	09932	10106	10279	10453	84	17	16	82	68	87		
6	10453	10626	10800	10973	11147	11320	11494	11667	11840	12014	12187	83	17	06	82	68	87		
7	12187	12360	12533	12706	12880	13053	13226	13399	13572	13744	13917	82	17	05	82	68	87		
8	13917	14090	14263	14436	14608	14781	14954	15126	15299	15471	15644	81	17	05	82	68	88		
9	15644	15816	15988	16160	16333	16505	16677	16849	17021	17193	0.17365	80°	17	04	82	68	88		
10°	0.1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79	2	3	5	7	9		
11	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78	2	3	5	7	9		
12	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77	2	3	5	7	9		
13	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76	2	3	5	7	8		
14	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75	2	3	5	7	8		
15	2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74	2	3	5	7	8		
16	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73	2	3	5	7	8		
17	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72	2	3	5	7	8		
18	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71	2	3	5	7	8		
19	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0.3420	70°	2	3	5	7	8		
20°	0.3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69	2	3	5	7	8		
21	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68	2	3	5	6	8		
22	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67	2	3	5	6	8		
23	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66	2	3	5	6	8		
24	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65	2	3	5	6	8		
25	4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64	2	3	5	6	8		
26	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63	2	3	5	6	8		
27	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62	2	3	5	6	8		
28	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61	2	3	5	6	8		
29	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0.5000	60°	2	3	5	6	8		
30°	0.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59	2	3	5	6	8		
31	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58	1	3	4	6	7		
32	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57	1	3	4	6	7		
33	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56	1	3	4	6	7		
34	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55	1	3	4	6	7		
35	5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54	1	3	4	6	7		
36	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53	1	3	4	6	7		
37	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52	1	3	4	6	7		
38	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51	1	3	4	6	7		
39	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	0.6428	50°	1	3	4	6	7		
40°	0.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49	1	3	4	6	7		
41	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48	1	3	4	6	7		
42	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47	1	3	4	6	7		
43	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46	1	3	4	6	7		
44	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0.7071	45°	1	2	4	6	8		
45°	0.7071																		

Tangent		正餘切表										Cotangent		表尾差				
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0			1	2	3	4	5
0		1	2	3	4	5	6	7	8	9	1.0000							
45°	1.0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	0355	44	4	7	11	14	18	
46	0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	0724	43	4	7	11	15	18	
47	0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	1106	42	4	8	11	15	19	
48	1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	1504	41	4	8	12	16	20	
49	1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	1.918	40°	4	8	12	17	21	
50°	1.918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	2349	39	4	9	13	17	22	
51	2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	2799	38	5	9	14	18	23	
52	2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	3270	37	5	9	14	19	24	
53	3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	3764	36	5	10	15	20	25	
54	3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	1.4281	35	5	10	16	21	26	
55	1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	4826	34	5	11	16	22	27	
56	4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	5399	33	6	11	17	23	29	
57	5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	6003	32	6	12	18	24	30	
58	6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	6643	31	6	13	19	26	32	
59	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	1.7321	30°	7	14	20	27	34	
60°	1.732	1.739	1.746	1.753	1.760	1.767	1.775	1.782	1.789	1.797	1.804	29	1	1	2	3	4	
61	1.804	1.811	1.819	1.827	1.834	1.842	1.849	1.857	1.865	1.873	1.881	28	1	2	3	4		
62	1.881	1.889	1.897	1.905	1.913	1.921	1.929	1.937	1.946	1.954	1.963	27	1	2	3	4		
63	1.963	1.971	1.980	1.988	1.997	2.006	2.014	2.023	2.032	2.041	2.050	26	1	2	3	4	4	
64	2.050	2.059	2.069	2.078	2.087	2.097	2.106	2.116	2.125	2.135	2.145	25	1	2	3	4	5	
65	2.145	2.154	2.164	2.174	2.184	2.194	2.204	2.215	2.225	2.236	2.246	24	1	2	3	4	5	
66	2.246	2.257	2.267	2.278	2.289	2.300	2.311	2.322	2.333	2.344	2.356	23	1	2	3	4	5	
67	2.356	2.367	2.379	2.391	2.402	2.414	2.426	2.438	2.450	2.463	2.475	22	1	2	4	5	6	
68	2.475	2.488	2.500	2.513	2.526	2.539	2.552	2.565	2.578	2.592	2.605	21	1	3	4	5	7	
69	2.605	2.619	2.633	2.646	2.660	2.675	2.689	2.703	2.718	2.733	2.747	20°	1	3	4	6	7	
70°	2.747	2.762	2.778	2.793	2.808	2.824	2.840	2.855	2.872	2.888	2.904	19	2	3	5	6	8	
71	2.904	2.921	2.937	2.954	2.971	2.989	3.006	3.024	3.042	3.060	3.078	18	2	3	5	7	9	
72	3.078	3.096	3.115	3.133	3.152	3.172	3.191	3.211	3.230	3.251	3.271	17	2	4	6	8	10	
73	3.271	3.291	3.312	3.333	3.354	3.376	3.398	3.420	3.442	3.465	3.487	16	2	4	6	9	11	
74	3.487	3.511	3.534	3.558	3.582	3.606	3.630	3.655	3.681	3.706	3.732	15	2	5	7	10	12	
75	3.732	3.758	3.785	3.812	3.839	3.867	3.895	3.923	3.952	3.981	4.011	14	3	6	8	11	14	
76	4.011	4.041	4.071	4.102	4.134	4.165	4.198	4.230	4.264	4.297	4.331	13	3	6	10	13	16	
77	4.331	4.366	4.402	4.437	4.474	4.511	4.548	4.586	4.625	4.665	4.705	12						
78	4.705	4.745	4.787	4.829	4.872	4.915	4.959	5.005	5.050	5.097	5.145	11						
79	5.145	5.193	5.242	5.292	5.343	5.396	5.449	5.503	5.558	5.614	5.671	10°						
80°	5.671	5.730	5.789	5.850	5.912	5.976	6.041	6.107	6.174	6.243	6.314	9						
81	6.314	6.386	6.460	6.535	6.612	6.691	6.772	6.855	6.940	7.026	7.115	8						
82	7.115	7.207	7.300	7.396	7.495	7.596	7.700	7.806	7.916	8.028	8.144	7						
83	8.144	8.264	8.386	8.513	8.643	8.777	8.915	9.058	9.205	9.357	9.514	6						
84	9.514	9.677	9.846	10.018	10.193	10.369	10.548	10.730	10.916	11.106	11.300	5						
85	11.300	11.504	11.709	11.918	12.129	12.342	12.558	12.776	13.000	13.227	13.458	4						
86	13.458	13.698	13.948	14.200	14.454	14.711	14.971	15.234	15.500	15.768	16.040	3						
87	16.040	16.318	16.600	16.886	17.176	17.470	17.768	18.070	18.376	18.686	19.000	2						
88	19.000	19.314	19.632	19.954	20.280	20.610	20.944	21.282	21.624	21.970	22.320	1						
89	22.320	22.674	23.032	23.394	23.760	24.130	24.504	24.882	25.264	25.650	26.040	0°						

此處之表尾
差難得準確

分秒化度

度化分秒

I	〇
0'	0 ⁰ .00 000
1'	.01 666..
2'	.03 333..
3'	.05
4'	.06 666..
5'	.08 333..
6'	.10
7'	.11 666..
8'	.13 333..
9'	.15
10'	0 ⁰ .16 666..
1	.18 333..
2	.20
3	.21 666..
4	.23 333..
15'	.25
6	.26 666..
7	.28 333..
8	.30
9	.31 666..
20'	0 ⁰ .33 333..
1	.35
2	.36 666..
3	.38 333..
4	.40
25'	.41 666..
6	.43 333..
7	.45
8	.46 666..
9	.48 333..
30'	0 ⁰ .50
1	.51 666..
2	.53 333..
3	.55
4	.56 666..
35'	.58 333..
6	.60
7	.61 666..
8	.63 333..
9	.65
40'	0 ⁰ .66 666..
1	.68 333..
2	.70
3	.71 666..
4	.73 333..
45'	.75
6	.76 666..
7	.78 333..
8	.80
9	.81 666..
50'	0 ⁰ .83 333..
1	.85
2	.86 666..
3	.88 333..
4	.90
55'	.91 666..
6	.93 333..
7	.95
8	.96 666..
9	.98 333..
60'	1 ⁰ .00

兩小點(·)表示末位繼續重複。

II	〇
0'	0 ⁰ .00 000
1'	.00 027..
2'	.00 055..
3'	.00 083..
4'	.00 111..
5'	.00 138..
6'	.00 166..
7'	.00 194..
8'	.00 222..
9'	.00 25
10'	0 ⁰ .00 277..
1	.00 305..
2	.00 333..
3	.00 361..
4	.00 388..
15'	.00 416..
6	.00 444..
7	.00 472..
8	.00 5
9	.00 527..
20'	0 ⁰ .00 555..
1	.00 583..
2	.00 611..
3	.00 638..
4	.00 666..
25'	.00 694..
6	.00 722..
7	.00 75
8	.00 777..
9	.00 805..
30'	0 ⁰ .00 833..
1	.00 861..
2	.00 888..
3	.00 916..
4	.00 944..
35'	.00 972..
6	.01
7	.01 027..
8	.01 055..
9	.01 083..
40'	0 ⁰ .01 111..
1	.01 138..
2	.01 166..
3	.01 194..
4	.01 222..
45'	.01 25
6	.01 277..
7	.01 305..
8	.01 333..
9	.01 361..
50'	0 ⁰ .01 388..
1	.01 416..
2	.01 444..
3	.01 472..
4	.01 5
55'	.01 527..
6	.01 555..
7	.01 583..
8	.01 611..
9	.01 638..
60'	0 ⁰ .01 666..

0 ⁰ .00 = 0 ⁰ 0'	0 ⁰ .50 = 30'
1	0 ⁰ 36"
2	1 ⁰ 12"
3	1 ⁰ 48"
4	2 ⁰ 24"
5	3 ⁰
6	3 ⁰ 36"
7	4 ⁰ 12"
8	4 ⁰ 48"
9	5 ⁰ 24"
0 ⁰ .10	6 ⁰
1	6 ⁰ 36"
2	7 ⁰ 12"
3	7 ⁰ 48"
4	8 ⁰ 24"
5	9 ⁰
6	9 ⁰ 36"
7	10 ⁰ 12"
8	10 ⁰ 48"
9	11 ⁰ 24"
0 ⁰ .20	12 ⁰
1	12 ⁰ 36"
2	13 ⁰ 12"
3	13 ⁰ 48"
4	14 ⁰ 24"
5	15 ⁰
6	15 ⁰ 36"
7	16 ⁰ 12"
8	16 ⁰ 48"
9	17 ⁰ 24"
0 ⁰ .30	18 ⁰
1	18 ⁰ 36"
2	19 ⁰ 12"
3	19 ⁰ 48"
4	20 ⁰ 24"
5	21 ⁰
6	21 ⁰ 36"
7	22 ⁰ 12"
8	22 ⁰ 48"
9	23 ⁰ 24"
0 ⁰ .40	24 ⁰
1	24 ⁰ 36"
2	25 ⁰ 12"
3	25 ⁰ 48"
4	26 ⁰ 24"
5	27 ⁰
6	27 ⁰ 36"
7	28 ⁰ 12"
8	28 ⁰ 48"
9	29 ⁰ 24"
0 ⁰ .50	30 ⁰
1	30 ⁰ 36"
2	31 ⁰ 12"
3	31 ⁰ 48"
4	32 ⁰ 24"
5	33 ⁰
6	33 ⁰ 36"
7	34 ⁰ 12"
8	34 ⁰ 48"
9	35 ⁰ 24"
0 ⁰ .60	36 ⁰
1	36 ⁰ 36"
2	37 ⁰ 12"
3	37 ⁰ 48"
4	38 ⁰ 24"
5	39 ⁰
6	39 ⁰ 36"
7	40 ⁰ 12"
8	40 ⁰ 48"
9	41 ⁰ 24"
0 ⁰ .70	42 ⁰
1	42 ⁰ 36"
2	43 ⁰ 12"
3	43 ⁰ 48"
4	44 ⁰ 24"
5	45 ⁰
6	45 ⁰ 36"
7	46 ⁰ 12"
8	46 ⁰ 48"
9	47 ⁰ 24"
0 ⁰ .80	48 ⁰
1	48 ⁰ 36"
2	49 ⁰ 12"
3	49 ⁰ 48"
4	50 ⁰ 24"
5	51 ⁰
6	51 ⁰ 36"
7	52 ⁰ 12"
8	52 ⁰ 48"
9	53 ⁰ 24"
0 ⁰ .90	54 ⁰
1	54 ⁰ 36"
2	55 ⁰ 12"
3	55 ⁰ 48"
4	56 ⁰ 24"
5	57 ⁰
6	57 ⁰ 36"
7	58 ⁰ 12"
8	58 ⁰ 48"
9	59 ⁰ 24"
1 ⁰ .00	60 ⁰

0 ⁰ .000 = 0 ⁰ 0	
1	3 ⁰ .6
2	7 ⁰ .2
3	10 ⁰ .8
4	14 ⁰ .4
0 ⁰ .005	18 ⁰ .
6	21 ⁰ .6
7	25 ⁰ .2
8	28 ⁰ .8
9	32 ⁰ .4
0 ⁰ .010	36 ⁰ .

b. 求 $\sin 21^\circ.6 = ?$

在正餘弦表上 sine 字的行下找到 21° , 再平行向右橫看, 找到直對表頂.6 字一行下面的數字(從左到右黑字的.6 字), 讀得 0.3681, 就是 $21^\circ.6$ 的正弦。

$$\therefore \sin 21^\circ.6 = 0.3681$$

c. 求 $\sin 76^\circ.62 = ?$

這問題有兩位小數, 所以要用到附表, 照前例先找到 $\sin 76^\circ.6 = 0.9728$ 。再看附表上分 12345 的五行。本題的第二位小數是 2, 在附表上 2 字下直對到 76° 一排上找得 1。將 1 加在 $\sin 76^\circ.6 = 0.9728$ 的末一位上, 就得

$$\sin 76^\circ.62 = 0.9728 + 0.0001 = 0.9729$$

d. 求 $\sin 35^\circ.87 = ?$

這問題和前例不同的地方, 在第二位小數 7 大過附表末行的 5。因為 $.87 = .90 - .03$ 。所以我們先去找出 $\sin 35^\circ.90 = 0.5864$, 再看在附表 3 字下對準 35° 一排是 4 字。然後從 $\sin 35^\circ.90$

= 0.5864 的末位減去4就得。

$$\begin{aligned}\sin 35^{\circ}.87 &= \sin 35^{\circ}.90 - 0.0004 = \\ &= 0.5864 - 0.0004 \\ &= 0.5860\end{aligned}$$

上面的四例是找正弦的方法, 找正切等照此類推。

習 題 五

試在上表中找下列各函數:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. $\sin 28^{\circ}$ | 2. $\sin 63^{\circ}.7$ |
| 3. $\tan 27^{\circ}$ | 4. $\tan 67^{\circ}.3$ |
| 5. $\sin 22^{\circ}.44$ | 6. $\tan 61^{\circ}.32$ |
| 7. $\tan 86^{\circ}.9$ | 8. $\tan 0^{\circ}.78$ |
| 9. $\tan 89^{\circ}.2$ | 10. $\sin 89^{\circ}.2$ |
| 11. $\sin 0^{\circ}.8$ | 12. $\sin 89^{\circ}.23$ |
| 13. $\tan 27^{\circ}.42$ | 14. $\tan 0^{\circ}.8$ |
| 15. $\sin 15^{\circ}.2$ | 16. $\tan 49^{\circ}.46$ |
| 17. $\sin 29^{\circ}.66$ | 18. $\tan 8^{\circ}.97$ |
| 19. $\sin 89^{\circ}.67$ | 20. $\sin 10^{\circ}.35$ |
| 21. $\sin 2^{\circ}.35$ | 22. $\tan 89^{\circ}.67$ |

23. $\sin 37^\circ.68$

24. $\tan 50^\circ.03$

(2) 已知角度找餘函數

a. 求 $\cos 55^\circ = ?$

在正餘弦表靠右面 cosine 字行中從底下倒看上去來,找得 55° ,再平行往左看,在對準頂上從右到左的白字數字的 0 行下面,就可以找到

$$\cos 55^\circ = 0.5736$$

b. 求 $\cos 21^\circ.6 = ?$

先照 a 法找到 $\cos 21^\circ$ 之後,再平行向左讀到表頂白字(從右到左數字).6 字下的行裏就可找到。

$$\cos 21^\circ.6 = 0.9298$$

c. 求 $\cos 71^\circ.62 = ?$

先照 b 法找得 $\cos 71^\circ.6 = 0.3156$,但是要注意角度加大,餘弦反減小,和正弦是相反的。所以在附表 2 字下對準 71° 一排讀得的 3,應該從 $\cos 71^\circ.6 = 0.3156$ 的末位減去。(與正弦相反)

$$\therefore \cos 71^\circ.62 = \cos 71^\circ.6 - 0.0003$$

$$= 0.3156 - 0.0003$$

$$= 0.3153$$

d. 求 $\cos 35^\circ.87 = ?$

這個問題和上面檢查正弦法是一樣。但是角度減小；餘弦是增大的，所以結果不是減，却是加。譬如先找出 $\cos 35^\circ.9 = 0.8100$ ，在附表3字行下對準 35° 橫行一排讀得是3。

$$\therefore \cos 35^\circ.87 = \cos 35^\circ.9 + 0.0003$$

$$= 0.8100 + 0.0003$$

$$= 0.8103$$

上面四例是找餘弦的方法，找餘切等照此類推。

(3) **已知函數找角度** 已知函數找角度只要將上面所講的方法反過來應用便是。

a. 已知 $\sin x = 0.3681$ 檢表求 $x = ?$

在正餘弦表中尋得 0.3681，平行在左面靠邊的一行角度是 21° ，頂上所對的黑字小數是 6。

$$\therefore x = 21^{\circ}.6.$$

b. 已知 $\sin x = 0.9729$ 檢表求 $x = ?$

表中找不着這數，但是找得一個最近的數值是 0.9728，牠是在角度 76° 的橫行裏面，黑字 .6 行的下面，可見這數的角度還要比較 $76^{\circ}.6$ 大些。又兩數相差只有 0.0001，同時附表上有一個 1 字，這 1 字在附表這行頂上的數是 2；所以知道 $\sin 76.62 = 0.9729$ ，

$$\therefore x = 76^{\circ}.62.$$

c. 已知 $\sin x = 0.8560$ 檢表求 $x = ?$

照 b 找得最近數 0.8563 的角度是 $58^{\circ}.9$ ，相差最小數字是 3。在附表上對準 3 的一行頂上數字是 4。正弦函數小，角度也小；所以這個 4 要從 $58^{\circ}.90$ 末位減去。

$$\begin{aligned} \therefore \sin(58^{\circ}.90 - 0.04) &= \sin 58^{\circ}.86 \\ &= 0.8560, \end{aligned}$$

$$\therefore x = 58^{\circ}.86.$$

d. 已知 $\cos x = 0.8103$ 檢表求 $x = ?$

在正餘弦表上找得最近數 0.8100 的角度是 $35^{\circ}.9$, 相差最小數字是 3, 再看在附表上 3 的一行, 頂上數字是 3。但是餘弦角度小, 函數反大,

$$\begin{aligned}\therefore \cos(35^{\circ}.9 - 0.03) &= \cos 35^{\circ}.87 \\ &= 0.8103\end{aligned}$$

$$\therefore x = 35^{\circ}.87$$

正切餘切等從函數找角度照此類推。

習 題 六

試用上表找下列各函數:

1. $\cos 0^{\circ}.3$
2. $\cos 89^{\circ}.7$
3. $\cot 43^{\circ}.12$
4. $\cot 89^{\circ}.5$
5. $\cot 82^{\circ}.65$
6. $\cos 10^{\circ}.09$
7. $\cot 10^{\circ}.09$
8. $\cos 33^{\circ}.33$
9. $\cos 66^{\circ}.66$
10. 已知 $\sin x = 0.7009$, 檢表找 $x = ?$
11. 已知 $\cos x = 0.7547$, 檢表找 $x = ?$
12. 已知 $\sin x = 0.7980$, 檢表找 $x = ?$
13. 已知 $\cos x = 0.5860$, 檢表找 $x = ?$

14. 已知 $\cot x = 13.617$, 檢表找 $x = ?$
15. 已知 $\tan x = 0.0787$, 檢表找 $x = ?$
16. 已知 $\tan x = 1.6984$, 檢表找 $x = ?$
17. 已知 $\cot x = 1.768$, 檢表找 $x = ?$
18. 已知 $\cot x = \infty$ 檢表找 $x = ?$

(4) 角度帶有分秒的檢查法 上面所用的表, 祇有度數的十進小數, 沒有六十進的分秒。所以碰到有分秒的問題, 就要用分秒化度表或度化分秒表。

- a. 用上列表找 $\sin 63^\circ 23' 36'' = ?$

先在分秒變度表中找得

$$23' = 0^\circ.38333$$

$$\underline{36'' = 0^\circ.01}$$

共計得 $0^\circ.39333$

用四捨五入方法, $23' 36'' = 0^\circ.39$

$$\therefore \sin 63^\circ 23' 36'' = \sin 63^\circ.39$$

檢表得 $\quad \quad \quad = 0.8941$

- b. 已知 $\cos x = 0.7112$ 檢表找 $x = ?$ 以分

秒計。

$$\cos x = 0.7112 \quad x = 44^\circ.67.$$

再將 $0^\circ.67$ 在度化分秒表中找得 $40'12''$

$$\therefore x = 44^\circ 40' 12''$$

習 題 七

檢表找下列各函數：

1. $\sin 23^\circ 12' 37''$
2. $\cos 9^\circ 6' 8''$
3. $\tan 51^\circ 42' 26''$
4. $\cot 48^\circ 40' 12''$
5. 已知 $\sin x = 0.4215$, 試找 x 的度分秒=?
6. 已知 $\cos x = 0.6552$, 試找 x 的度分秒=?
7. 已知 $\tan x = 3.734$, 試找 x 的度分秒=?
8. 已知 $\cot x = 0.5769$, 試找 x 的度分秒=?

15. **直角三角形解法** 有了三角函數表, 就可應用這函數來解直角三角形, 不過所欲解的直角三角形, 除直角外, 至少還要知道兩個條件。這兩個條件中, 至少有一個是邊。

所以有五種如下：

- a. 一銳角及斜邊
- b. 一銳角及對邊
- c. 一銳角及底邊

d. 斜邊及另一邊

c. 對邊及底邊

(a) 已知一銳角和斜邊, 解直角三角形。在圖 12, 已知 $A = 43^\circ.7$, $c = 26$, 求 B , a 和 b 。

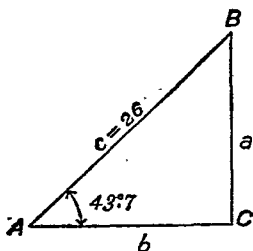


圖 12

解: (1) $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 43^\circ.7 = 46^\circ.3$.

$$(2) \frac{a}{c} = \sin A \quad \therefore a = c \sin A$$

檢表得 $\sin 43^\circ.7 = 0.6909$

$$\therefore a = 26 \times 0.6909 = 17.9634$$

$$(3) \frac{b}{c} = \cos A, \quad \therefore b = c \cos A$$

檢表得 $\cos 43^\circ.7 = 0.7230$

$$\therefore b = 26 \times 0.7230 = 18.798.$$

(b) 已知一銳角和對邊, 解直角三角形。在圖 13, 已知 $A = 13^\circ.6$, $a = 15.2$, 求 B , b , 和 c 。

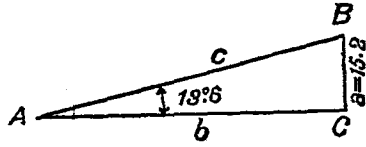


圖 13

解: (1) $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 13.6 = 76.4$

(2) $\frac{b}{a} = \cot A, \therefore b = a \cot A.$

檢表得 $\cot 13.6 = 4.134,$

$\therefore b = 15.2 \times 4.134 = 62.8368.$

(3) $\frac{a}{c} = \sin A, \therefore c = \frac{a}{\sin A};$

檢表得 $\sin 13.6 = 0.2351,$

$\therefore c = \frac{15.2}{0.2351} = 64.65.$

(c) 已知一銳角及底邊, 解直角三角形。

在圖14, 已知 $A = 27.2, b = 31,$ 求 B, a 和 c

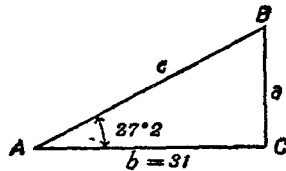


圖 14

解: (1) $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 27.2 = 62.8.$

$$(2) \frac{a}{b} = \tan A, \quad \therefore a = b \tan A.$$

檢表得 $\tan 27^\circ.2 = 0.5139$,

$$\therefore a = 31 \times 0.5139 = 15.9309.$$

$$(3) \frac{b}{c} = \cos A, \quad \therefore c = \frac{b}{\cos A}$$

檢表得 $\cos 27^\circ.2 = 0.8894$

$$\therefore c = \frac{31}{0.8894} = 34.9$$

(d) 已知斜邊和另一邊, 解直角三角形。

在圖 15, 已知 $a = 47$, $c = 63$, 求 A, B 和 b

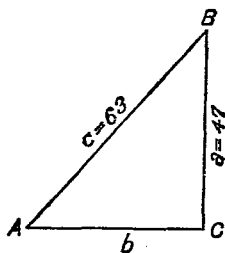


圖 15

解: (1) $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{47}{63} = 0.7460$,

檢表得 $A = 48^\circ.24$,

$$(2) B = 90^\circ - A = 90^\circ - 48^\circ.24 = 41^\circ.76.$$

$$(3) b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)},$$

$$\text{因爲 } c+a=63+47=110,$$

$$c-a=63-47=16,$$

$$\text{所以 } b=\sqrt{110 \times 16}=\sqrt{1760}=41.95$$

(e) 已知對邊及底邊, 解直角三角形。

在圖16, 已知 $a=40, b=27$ 求 A, B 和 c

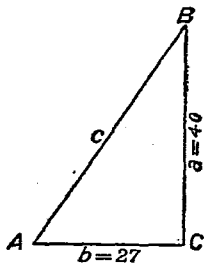


圖 16

$$\text{解: (1) } \tan A = \frac{a}{b} \therefore \tan A = \frac{40}{27} = 1.4815,$$

檢表得 $A = 55^\circ.98$ 。

$$(2) B = 90^\circ - A = 90^\circ - 55^\circ.98 = 34^\circ.02.$$

$$(3) a^2 = 1600, b^2 = 729,$$

$$\begin{aligned} \therefore c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1600 + 729} \\ &= \sqrt{2329} = 48.26. \end{aligned}$$

c 也可以用別的關係式求得, 譬如求出

$\tan A$ 以後,就可以求得 $\sin A$,然後再用 $c = \frac{a}{\sin A}$ 求出;不過數字位數不多的時候,上面所用的方法比較工作簡省。

習 題 八

在直角三角形中已知:

1. $a=3$, $b=4$, 求 A , B , c ,
2. $a=7$, $c=13$, 求 A , B , b ,
3. $a=5.3$, $A=12^\circ.3$, 求 B , b , c ,
4. $a=10.4$, $B=43^\circ.18$, 求 A , b , c ,
5. $c=26$, $A=37^\circ.42$ 求 B , a , b ,
6. $c=140$, $B=24^\circ.12$ 求 A , a , b ,
7. $b=19$, $c=23$ 求 A , B , a ,
8. $b=98$, $c=135.2$ 求 A , B , a ,
9. $b=42.4$, $A=32.14$ 求 B , a , c ,
10. $b=200$, $B=46^\circ.11$ 求 A , a , c ,
11. $a+c=18$, $b=12$ 求 A , B , a , c ,
12. $a+b=9$, $c=8$ 求 A , B , a , b ,
13. 在湖的兩岸,立兩標竿 A 和 B 。在沿湖的一邊已經取得一線段 BC 垂直 AB , 並量得 $BC=500$ 公尺, $\angle ACB=50^\circ$, 求湖寬 AB 的長。

14. 若等腰三角形等邊的長是75公分,底角是 $15^{\circ}20'$,解這等腰三角形。
15. 正八邊形外接圓的半徑是49公分求每邊的長。
16. 正方立體的對角線和牠一面的對角線相交在頂角,求兩對角線所夾的角。
17. 梯長45尺一端靠在牆頂,另一端是在地上;若牆和梯所成的角是 60° ,求牆高及梯和牆在地面的距離。
18. 塔高300公尺,從另一塔頂看第一塔頂的仰角是 12° ,看塔基的俯角是 53° ,求兩塔的距離。

第四章 對數解法

16. 對數 三角上的算術計算,前面已經見過,往往是很麻煩的。要免去這種麻煩,我們就要用到一種新方法,叫做對數。

若有任何數 b , 牠的 x 次乘方 (x 也是任意數) 是 N , 便有下列式:

$$b^x = N \dots \dots \dots (1)$$

我們現在要特別看重這指數 x , 叫牠為 N 用 b 做底的對數, 用記號表示, 就有

$$x = \log_b N \dots \dots \dots (2)$$

(1) 叫做指數式,

(2) 叫做對數式。

他們表示的關係, 完全是同樣的; 不過寫法不同就是了。譬如 $2^3 = 8$, 那末 3 就是 8 用 2 做底的對數; 對數的記法就應寫做 $\log_2 8 = 3$ 。同樣 $3^2 = 9$, $2^5 = 32$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $x^y = Z$, 可寫做 $\log_3 9 = 2$, $\log_2 32 = 5$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$, $\log_x Z = y$ 。

習題九

1. 試將下列各等式寫成對數式:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}; \quad \sqrt[3]{125} = 5; \quad 2^{-4} = \frac{1}{16}; \quad 10^{-2} = .01; \quad P^2 = Q$$

2. 設底數為 5, 那末 1, 5, 25, 125, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$ 等的對數是什麼?

3. 試尋出下列各對數的底:

$$\log 64 = 2; \quad \log 121 = 2; \quad \log 625 = 4; \quad \log \frac{1}{25} = -2$$

4. 證明下列各式:

$$\log_{10} 1000 + \log_{10} 100 + \log_{10} 10 + \log_{10} 1 = 6$$

5. 試求:

$$2 \log_a a + 2 \log_a \frac{1}{a} + \log_a 1 = ?$$

17. 對數的性質

A. 兩數積的對數, 等於兩數對數之和。

設兩數是 M 及 N, 牠們的對數是 x 及 y, 公共底是 b, 就有

$$\log_b M = x \quad \log_b N = y \dots\dots\dots I$$

寫成指數式,

$$b^x = M \text{ 及 } b^y = N \dots\dots\dots II$$

若兩數相乘,就有 $b^x \times b^y = M \times N$

照指數原理,就有 $b^{x+y} = MN$ III

將 III 又寫成對數式,即得,

$$\log_b MN = x + y = \log_b M + \log_b N$$

同理在兩個以上數的積,等於各個數的對數和。

B. 兩數商的對數,等於兩數的對數之差,和 A 一樣,先寫出

$$\log_b M = x \text{ 及 } \log_b N = y$$

寫成指數式就有

$$b^x = M \text{ 及 } b^y = N$$

將 N 去除 M 就有

$$b^x \div b^y = M \div N$$

照指數原理,就有

$$b^{x-y} = \frac{M}{N}$$

寫成對數式就有

$$\begin{aligned} \log_b \frac{M}{N} &= x - y \\ &= \log_b M - \log_b N \end{aligned}$$

C. 某數 P 次乘方的對數, 等於牠的對數的 P 倍,

$$\text{設} \quad \log_b N = x$$

$$\text{或} \quad b^x = N$$

設兩邊都用 P 次乘方, 就有

$$b^{Px} = N^P$$

再寫成對數式, 就有

$$\log_b N^P = Px = P \log_b N$$

D. 某數的 r 次開方的對數, 等於牠的對數的 $\frac{1}{r}$ 倍

$$\text{設} \quad \log_b N = x$$

$$b^x = N$$

兩邊都開 r 方, 即得

$$b^{\frac{x}{r}} = N^{\frac{1}{r}}$$

再寫成對數式

$$\begin{aligned} \log_b N^{\frac{1}{r}} &= \frac{x}{r} = \frac{\log_b N}{r} \\ &= \frac{1}{r} \log_b N \end{aligned}$$

習題十

1. 已知 $\log_{10}4=0.6021$; $\log_{10}3=0.4771$, 求 $\log_{10}12$; $\log_{10}24$.
2. 求 $\log_{10}\sqrt{1000}+\log_{10}\sqrt{.01}=?$
3. 問 $\log 25$ 是否等於 $\log 5 \log 5$ 或 $5 \log 5$?
4. $\frac{\log 28}{\log 9}$ 是否等於 $\log \frac{28}{9}$ 或 $\frac{28}{9}$?
5. 試證明

$$\log_{10}\sqrt[3]{100}-\log_{10}(.01)^2=\frac{14}{3}$$

18. **常用對數** 凡正數中除 1 外, 任何數都可以做對數的底, 普通所用的對數, 用 10 做底, 叫做常用對數, 這個 10 字往往省去不寫, 譬如 $\log_{10}100=2$, 只須寫做 $\log 100=2$

現在且將幾個對數是整數的寫在下面, 因為 $10^4=10,000$ 所以 $\log 10,000=4$

$$10^3=1,000 \quad \log 1,000=3$$

$$10^2=100 \quad \log 100=2$$

$$10^1=10 \quad \log 10=1$$

$$10^0=1 \quad \log 1=0$$

$$10^{-1} = 0.1 \qquad \log 0.1 = -1$$

$$10^{-2} = 0.01 \qquad \log 0.01 = -2$$

$$10^{-3} = 0.001 \qquad \log 0.001 = -3$$

$$10^{-4} = 0.0001 \qquad \log 0.0001 = -4$$

在上面各排裏面,我們可以看出真數增加時,對數也增加;並且凡在100到1000中間的數,牠們的對數在2到3之間;同理在.1到.01中間的數,牠們的對數在-1到-2之間。

19. **定位部與定值部** 因為對數完全是整數的很少,大多數的對數都有整數和小數兩部分。

例如,4587是一個介在 10^3 到 10^4 中間的數,所以,

$$\log 4587 = 3 + \text{小數}$$

同理,因為 0.0067 是一個介在 10^{-3} 到 10^{-2} 中間的數,所以

$$\begin{aligned} \log 0.0067 &= -(2 + \text{小數}) \\ &= -2 - \text{小數} \end{aligned}$$

實際上，爲了要便於計算，

$$\begin{aligned}\log 0.0067 &= (-2) + (-\text{小數}) \\ &= (-1-2) + (1-\text{小數}) \\ &= -3 + \text{新的小數}\end{aligned}$$

這樣一改變的意思，是使常用對數的小數部分總是正數；再舉一例，

$$\begin{aligned}\log .004712 &= -2.3268 \\ &= -2 - .3268 \\ &= (-1-2) + (1-.3268) \\ &= \overline{3}.6732\end{aligned}$$

這種寫法的意思，就是 3 是負數，而 .6732 卻是正數。那末祇要數字相同，不管是整數小數，牠的對數的小數部分都是一樣的。

諸如上述情形，可見對數中的整數部分，與真數的位數有關，因此叫做**定位部**。

又對數中的小數部分，可以決定對數的大小，因此叫做**定值部**。

例如 $\log 357 = 2.5527$ 及 $\log 3.57 = 0.5527$ ；

$\log .004712 = \overline{3}.6732$ 及 $\log 4712 = 3.6732$, 其中 $2, 0, \overline{3}$ 及 3 都是定位部, 而 $.5527, .5527, .6732$ 及 $.6732$ 都是定值部。

20. 對數表及三角函數對數表 指定一數做底, 任何數都可以找出他的對數, 爲便利起見, 前人已將常用對數開列成表。本書末尾附有對數表及三角函數對數表, 各表都有四位數, 檢表方法略述如下:

在後兩面(第106—107面)是由1到10的各數, 定位部是0。有了這表, 一切對數的定值部都可以找到, 定位部則隨位數變換。

因爲要免去附表的手續, 自1至2中間各數的對數另列一表(第104—105面)。

又如已知某數的對數, 反過來求這個數時, 方法也是一樣。不過於定位部須特別注意, 以定小數點的位置。尤其是在定位部爲負數的時候。

例如已知某數的對數是 3.9786 , 檢表得

952, 但是因爲定位部是 3, 所以這個數就是 9520。

又如已知某數的對數是 -2.3268 , 因爲定位部是負數, 所以應該改寫做 $3.\overline{6732}$, 檢表得 4712, 已知定位部是 -3 , 所以這個數就是 .004712。

三角函數對數表, 是已將三角函數找好了對數的表, 在應用時不必先去找得函數, 再由函數找對數, 只要直接由角度, 在表中便可以找出三角函數的對數。

在正餘弦對數表(第 110—111 面)之前, 另有一表載 0° 至 10° 各角的正弦及 80° 至 90° 各角的餘弦對數, 而在正餘切對數表(第 114—115 面)之前後, 另有 0° 至 10° 各角度的正餘切及 80° 至 90° 各角度的正餘切的對數。因爲這些函數的變化甚大, 所以不能應用附表。

在三角函數對數表內, 定位部都已印好, 有正的, 也有負的。負定位部如 $\overline{1}, \overline{2}$ 等, 在計算時, 最好改爲 $9-10$ 及 $8-10$ 等較爲便利。

例如 $\log \sin 4^\circ.22 = \overline{2}.8668$, 倘改寫作 $8.8668 - 10$, 於計算時便當不少。

習 題 十 一

1. 求下列各數的對數

- | | |
|--------------|--------------|
| a. 1.852 | b. 36.78 |
| c. 0.7384 | d. 0.09381 |
| e. 0.006842 | f. 2,346,000 |
| g. 3,406,000 | h. 789.1 |
| i. 9876 | |

2. 設某數的對數為

- | | |
|--------------|--------------|
| a. 0.7752 | b. 1.7683 |
| c. 3.3162 | d. 9.7348-10 |
| e. 8.4084-10 | f. 2.7960 |

求各個某數。

3. 求下列各數之值

- $\log \sin 63^\circ.21$
- $\log \sin 70^\circ.83$
- $\log \cos 21^\circ.78$
- $\log \cos 42^\circ.98$
- $\log \tan 78^\circ.25$

f. $\log \tan 5^\circ.44$

g. $\log \cot 82^\circ.31$

h. $\log \cot 8^\circ.34$

4. 求下列各式中 x 之值

a. $\log \sin x = 9.7608 - 10$

b. $\log \sin x = 9.9107 - 10$

c. $\log \cos x = 9.8223 - 10$

d. $\log \cos x = 9.6197 - 10$

e. $\log \tan x = 0.4418$

f. $\log \tan x = 1.4792$

21. **餘對數** 凡數的倒數的對數叫做這數的餘對數。用 colog 記之。

$$\text{colog } n = \log \frac{1}{n} = \log 1 - \log n$$

所以 $\text{colog } n = 0 - \log n$

$$\begin{aligned} \text{或 } \text{colog } n &= (10 - 10) - \log n \\ &= 10 - \log n - 10 \end{aligned}$$

爲便利起見,只要從 10 上減去該數的對數,而後面寫上 -10 就是餘對數。

$$\text{例如 } \log 71.24 = 1.8527$$

$$\begin{aligned}\operatorname{colog} 71.24 &= 10 - 1.8527 - 10 \\ &= 8.1473 - 10\end{aligned}$$

在計算時，只須略用心算，不必像上面的列成式子，只要將結果直接寫出就是。

餘對數的便利處是在用加可以代減，

$$\text{例如 } \log \frac{m}{np} = \log m - \log n - \log p$$

改用餘對數後，即得

$$\log \frac{m}{np} = \log m + \operatorname{colog} n + \operatorname{colog} p$$

習 題 十 二

1. 求下列各數的餘對數

- | | |
|--------------|-----------|
| a. 345.0 | b. 67.89 |
| c. 9874 | d. 1.632 |
| e. 0.05431 | f. 0.2468 |
| g. 0.008342 | h. 998600 |
| i. 0.0003694 | |

2. 求下列各數之值：

- $\operatorname{colog} \sin 20^\circ.78$
- $\operatorname{colog} \sin 78^\circ.82$
- $\operatorname{colog} \cos 83^\circ.64$

d. $\text{colog } \cos 1^\circ.63$

e. $\text{colog } \tan 89^\circ.34$

f. $\text{colog } \tan 28^\circ.74$

22. 用對數解直角三角形 從前直角三角形的解法，數目乘除的時候，非常麻煩，現在採用對數，就可省去。

例 I 圖 17 中

$$A = 48^\circ.28$$

$$c = 324, \quad \text{解}$$

直角三角形，並求

牠的面積。

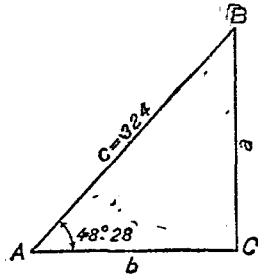


圖 17

解: $B = 90^\circ - A = 41^\circ.72$

$$a = c \sin A$$

$$\log a = \log c + \log \sin A$$

檢表即得

$$\begin{aligned} \log c &= 2.5105 \\ +) \log \sin A &= 9.8730 - 10 \\ \hline \log a &= 12.3835 - 10 \\ &= 2.3835 \end{aligned}$$

檢表即得

$$a = 241.8$$

$$b = c \cos A$$

$$\log b = \log c + \log \cos A$$

檢表即得

$$\log c = 2.5105$$

$$\begin{aligned} +) \log \cos A &= 9.8231 - 10 \\ \hline \log b &= 12.3336 - 10 \\ &= 2.3336 \end{aligned}$$

檢表即得

$$b = 215.6$$

驗誤

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad \text{何故?}$$

$$a^2 = (c+b)(c-b) \quad \text{何故?}$$

$$2 \log a = \log(c+b) + \log(c-b)$$

$$\log a = \frac{1}{2} \{ \log(c+b) + \log(c-b) \}$$

據上所得

$$c+b = 539.6 \text{ 及 } c-b = 108.4$$

$$\log(c+b) = 2.7321$$

$$\begin{aligned} +) \log(c-b) &= 2.0350 \\ \hline 2 \log a &= 4.7671 \end{aligned}$$

$$\log a = 2.3835$$

所驗結果相同,故知無錯誤。

直角三角形的面積是高底相乘之半,
就是

$$\text{面積 } A = \frac{ab}{2}$$

$$\log A = \log a + \log b - \log 2$$

$$\log a = 2.3835$$

$$+) \log b = 2.3336$$

$$4.7171$$

$$-) \log 2 = 0.3010$$

$$4.4161$$

檢表得面積 $A = 26,070$

例 II 已知 $b = 15.12$, $c = 30.81$,

解直角三角形(圖18)

解 $\cos A = \frac{b}{c}$

$$\therefore \log \cos A = \log b - \log c$$

$$\log b = 11.1796 - 10$$

$$-) \log c = 1.4887$$

$$\log \cos A = 9.6909 - 10$$

$$\therefore A = 60^\circ.61$$

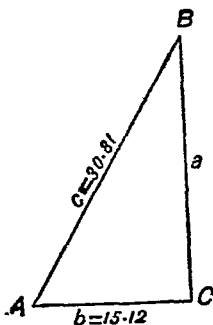


圖 18

$$\begin{aligned} B &= 90^\circ - A \\ &= 90^\circ - 60^\circ.61 \\ &= 29^\circ.39 \end{aligned}$$

求 a 時用公式

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{a}{b} \\ a &= b \tan A \\ \log a &= \log b + \log \tan A \\ \log b &= 1.1796 \\ +) \log \tan A &= 0.2493 \\ \hline \log a &= 1.4289 \\ \therefore a &= 26.85 \end{aligned}$$

驗誤:

$$a^2 = (c+b)(c-b)$$

$$\log a = \frac{1}{2} \{ \log(c+b) + \log(c-b) \}$$

據上式得

$$c + b = 45.93$$

$$c - b = 15.69$$

$$\log(c + b) = 1.6621$$

$$\log(c - b) = 1.1956$$

$$\frac{2}{2} \log a = 2.8577$$

$$\log a = 1.4289$$

驗得結果相同,故知無錯誤。

例 III 已知 $B = 2^\circ.305$, $a = 1875.3$,

解直角三角形(圖19)

$$\begin{aligned} \text{解: } A &= 90^\circ - B \\ &= 90^\circ - 2^\circ.305 \\ &= 87^\circ.695 \end{aligned}$$

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$c = \frac{a}{\sin A}$$

$$\log c = \log a - \log \sin A$$

$$\log a = 13.2731 - 10$$

$$\begin{array}{r} -) \log \sin A = 9.9996 - 10 \\ \hline \log c = 3.2735 \end{array}$$

$$\therefore c = 1877$$

求 b , 用公式

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$b = \frac{a}{\tan A}$$

$$\log b = \log a - \log \tan A$$



圖 19

$$\log a = 13.2731 - 10$$

$$\begin{array}{r} -) \log \tan A = 11.3953 - 10 \\ \hline \log b = 1.8778 \end{array}$$

$$\therefore b = 75.49$$

驗誤時可用下列二式

$$a^2 = (c+b)(c-b); \quad b = c \sin B.$$

習 題 十 三

用對數法試解下列各直角三角形： $C=90^\circ$

- | | | | |
|-----|----|-----------------|-----------|
| 1. | 已知 | $A=43^\circ.5$ | $c=11.2$ |
| 2. | 已知 | $B=68^\circ.83$ | $a=729.3$ |
| 3. | 已知 | $B=62^\circ.93$ | $b=47.7$ |
| 4. | 已知 | $a=.624$ | $c=.91$ |
| 5. | 已知 | $A=72^\circ.12$ | $a=83.4$ |
| 6. | 已知 | $b=2.887$ | $c=5.11$ |
| 7. | 已知 | $A=52^\circ.68$ | $b=4247$ |
| 8. | 已知 | $a=101$ | $b=116$ |
| 9. | 已知 | $A=43^\circ.37$ | $a=158.3$ |
| 10. | 已知 | $a=204.2$ | $c=275.3$ |
| 11. | 已知 | $B=10^\circ.85$ | $c=.7264$ |
| 12. | 已知 | $a=638.5$ | $b=501.2$ |

- | | | | |
|-----|----|-------------------------|--------------|
| 13. | 已知 | $b = .02497$ | $c = .04792$ |
| 14. | 已知 | $B = 2^\circ.195$ | $a = 1875.3$ |
| 15. | 已知 | $B = 20^\circ 33' 51''$ | $a = .8211$ |
| 16. | 已知 | $A = 74^\circ 6' 18''$ | $c = 275.6$ |
| 17. | 已知 | $B = 34^\circ 14' 37''$ | $b = 120.2$ |
| 18. | 已知 | $a = 10.107$ | $b = 17.303$ |
| 19. | 已知 | $a = 24.67$ | $b = 33.02$ |
| 20. | 已知 | $A = 78^\circ.17'$ | $a = 203.8$ |

23. 應用問題上幾個名詞 三角上的應用問題很多,其中所用的專門名詞也不少,所以要特別解釋,纔能明白。

I. 在地面上任何點上所引直線通過地心的就叫做這點的**直垂線**。經過直垂線的平面叫做**直垂面**。和直垂線成直角的線或平面叫做**水平線**或**水平面**。

II. 仰角俯角的解釋,見第一章第七節。

仰角有時叫做高度。譬如太陽的高度就是太陽的仰角。

III. 線的方向 平常所說線的方向就是該線和正南或正北線相交的角度。例如圖20的OP在北向東 45° 就寫作 $N 45^\circ E$;若以在東向北記OP之方向,就寫作 $E 45^\circ N$ 。同樣OQ是在南向西 20° 所以寫做 $S 20^\circ W$;若以在西向南記OQ之方向,就寫做 $W 70^\circ S$ 。

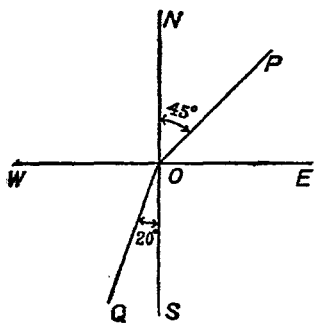


圖 20

再如說甲地在乙地的 $S 36^\circ E 20$ 里,就是表示甲地在乙地的南方再向東 36° ,並且兩地的距離是20里。

習 題 十 四

1. 甲乙兩站同在一平線上,相隔三公里。若在甲站垂直的空中汽球上看乙站,量得俯角是 $8^\circ.15$,求汽球的高。

2. 從南岸量得北岸土山頂的仰角為 $14^\circ 30' 21''$ 。已知北岸土山頂高出水面130公尺,求河的闊。

3. 用38尺長繩子縛在29尺高的樹頂上,順手拉繩的他端使和地平拄着,求繩和樹間所成的角度。
4. 5尺長的人,站在距燈光4尺的地方而成18尺的影子,求燈光的高。
5. 113尺高的海邊岩石的影子,能遮住離牠93尺的船隻。求此時太陽的高度。
6. 一樹被風折斷,牠的頂點倒在離樹根15尺地方而和牠成 $42^{\circ}28'$ 的角度,求樹高多少!
7. 在地上仰望對街高121尺房屋的仰角為 $65^{\circ}.3'$ 。求街面的闊。
8. 兩腳規的長為7寸。設將兩腳分開到 43° 時,求中間距離多少寸!

第五章 任意三角形的解法

24. 鈍角三角函數 在第一章已經講過銳角的三角函數,以後並利用這種函數解直角三角形,但是三角形的三隻角不必都是銳角,其中可以含有直角,或鈍角的;所以要解任意三角形,先要研究鈍角的各三角函數。

如圖21,銳角 $\angle POX$ 可以說是直線 OX 從 O 的位置繞着一端點 O ,依反時針向旋轉到 OP 的位置發生的。直線 OX 叫做這角的始線,直線

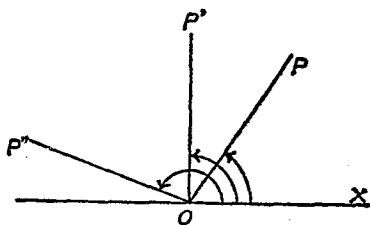


圖 21

OP 叫做牠的終線。從始線旋轉到 90° 的時候,例如到 OP' 的位置, $\angle P'OX$ 就是直角;若再繼續旋轉,例如到 OP'' 的位置, $\angle P''OX$ 就是鈍角。

設在圖22, $\angle POX$ 是一銳角,用 A 來表示牠;又 $\angle P'OX$ 是一鈍角,用 B 來表示牠。今在 $\angle A$

的終線上取一點 P 向始線 OX 作垂線 PM , 那麼 OM 叫做 OP 在始線上的正射影, PM 叫做 P 點的射線。同樣 $\angle B$ 終線 OP' , 在始線上的正射影是在 OX 反向引長線上的 OM' , 而 OM' 的垂線 $P'M'$, 叫做 P' 點對於始線的射線。若用正射影

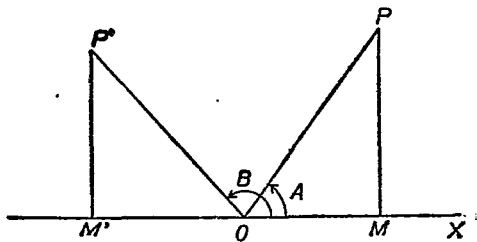


圖 22

的關係來表示各三角函數, 就有

$$\sin A = \frac{P \text{ 點射線}}{A \text{ 角終線}} = \frac{PM}{OP}, \quad \sin B = \frac{P' \text{ 點射線}}{B \text{ 角終線}} = \frac{P'M'}{OP'}$$

$$\cos A = \frac{A \text{ 角終線正射影}}{A \text{ 角終線}} = \frac{OM}{OP}, \quad \cos B = \frac{B \text{ 角終線正射影}}{B \text{ 角終線}} = \frac{OM'}{OP'}$$

$$\tan A = \frac{P \text{ 點射線}}{A \text{ 角終線正射影}} = \frac{PM}{OM}, \quad \tan B = \frac{P' \text{ 點射線}}{B \text{ 角終線正射影}} = \frac{P'M'}{OM'}$$

$$\cot A = \frac{A \text{ 角終線正射影}}{P \text{ 點射線}} = \frac{OM}{PM}, \quad \cot B = \frac{B \text{ 角終線正射影}}{P' \text{ 點射線}} = \frac{OM'}{P'M'}$$

$$\sec A = \frac{A \text{ 角終線}}{A \text{ 角終線正射影}} = \frac{OP}{OM}, \quad \sec B = \frac{B \text{ 角終線}}{B \text{ 角終線正射影}} = \frac{OP'}{OM'}$$

$$\csc A = \frac{A \text{ 角終線}}{P \text{ 點射線}} = \frac{OP}{PM}, \quad \csc B = \frac{B \text{ 角終線}}{P' \text{ 點射線}} = \frac{OP'}{P'M'}$$

25. 補角函數公式 在普通初等幾何學上,直線祇論長度;但在三角法上再要加一種方向。通例以一點做標準,向右所引的直線段是正,向左引的,就是反向所引的直線是負;例如上節圖 22, OM 是正, OM' 是負。直線的方向有了正負,鈍角的三角函數,就可以用補角的三角函數來表示。所謂補角就是兩角相加,等於 180° 。例如 $A + B = 180^\circ$, 那末 A 和 B 叫做互為補角。

設在圖 23, $\angle POX$ 和 $\angle P'OX'$ 是兩相等的銳角,那末 $\angle POX + \angle P'OX = \angle P'OX + \angle P'OX' = 180^\circ$ 或 $\angle A + \angle B = \angle B + \angle A' = 180^\circ$ 。同時假定 $OP = OP'$, PM 和 $P'M'$ 均垂直於 $X'X$, $PM = P'M'$, 那末依上節所講的鈍角三角函數定義和

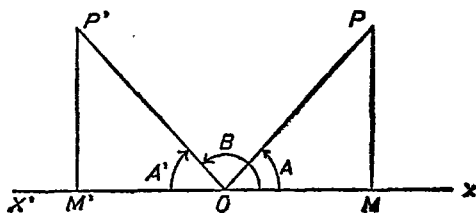


圖 23

直線方向的正負號,就有

$$\sin B = \frac{P'M'}{OP'} = -\frac{PM}{OP} = \sin A$$

$$\cos B = \frac{OM'}{OP'} = -\frac{OM}{OP} = -\cos A$$

$$\tan B = \frac{P'M'}{OM'} = -\frac{PM}{OM} = -\tan A$$

$$\cot B = \frac{OM'}{P'M'} = -\frac{OM}{PM} = -\cot A$$

$$\sec B = \frac{OP'}{OM'} = -\frac{OP}{OM} = -\sec A$$

$$\csc B = \frac{OP'}{P'M'} = \frac{OP}{PM} = \csc A$$

用普通語言來說,就是“鈍角各三角函數和牠互為補角的銳角各三角函數的數值(即絕對值)是相等的;但是除正弦餘割之外,其他各函數的正負號卻都相反”。

所以要找鈍角各函數,祇要從牠的補角(當然是銳角)求得,同時應改號的再改變正負號。

習 題 十 五

1. 在方格紙上畫出 120° , 135° 和 150° 各鈍角,照第一章求銳角各三角函數的方法,求這三種角的各三角

函數。

2. 用正射影的關係,說明正弦,餘弦和正切的變化。

(a) 角度從 0° 到 90°

(b) 角度從 90° 到 180°

26. **解任意三角形** 有了鈍角的三角函數,就可以解任意三角形。三角形共有三邊和三角,彼此有相互的關係,只要知道了其中三件,就不難將其牠三件找出。但所知的三件之中,至少要一件是邊。所以解任意三角形的的方法,可分做四類:

I 已知一邊與兩角

II 已知二邊與一非夾角

III 已知二邊與一夾角

IV 已知三邊

此外還有三角形的面積;頂垂線,(三角形的高度);中線;分角線;內接圓徑及外接圓徑等等,也都可以從三邊三角推算出來。

27. 解任意三角形所根據的定律 在從前解直角三角形, 牠的 $\angle C = 90^\circ$, 就是任意三角形中的一種特殊情形。所以現在所採用的定律, 可以將以前的

$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$

$$a = c \sin A$$

及 $a^2 + b^2 = c^2$

約略改變一下即得,

I 三角和的定律

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \dots \dots \dots \text{I}$$

II 正弦定律 在圖24, 左右兩圖中,

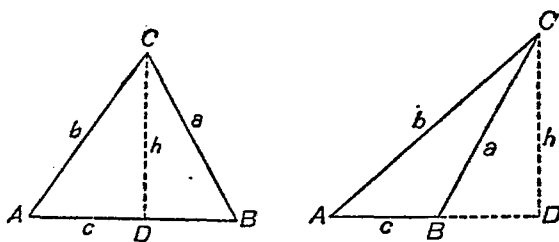


圖 24

A, B, C, 爲 $\triangle ABC$ 的三隻角, a, b, c 爲 $\triangle ABC$ 的三邊。作 $CD \perp AB$ 和 AB 或引長線相遇

於 D。 叫 $CD = h$ ，於是

$$\frac{h}{b} = \sin A$$

在左圖 $\frac{h}{a} = \sin B$

在右圖 $\frac{h}{a} = \sin (180^\circ - B) = \sin B$

$$\therefore \frac{h}{b} \div \frac{h}{a} = \sin A \div \sin B$$

得 $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$

同理 $\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}$ 或 $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$

於是即得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \dots\dots\dots \text{II}$$

這就叫做正弦定律。

III 餘弦定律

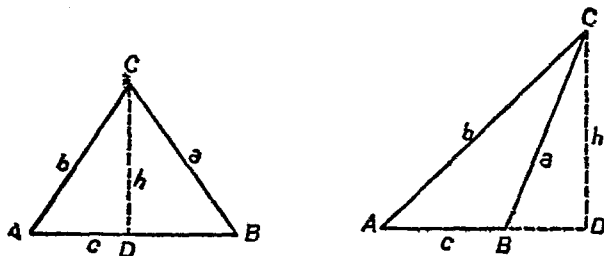


圖 25

在圖25左右兩圖中,

$$a^2 = h^2 + \overline{BD}^2 \dots\dots\dots (1)$$

左圖中 $BD = c - AD$

右圖中 $BD = AD - c$

總之 $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - 2c \times AD + c^2$

代入 (1)中

$$a^2 = h^2 + \overline{AD}^2 + c^2 - 2c \times AD \dots\dots\dots (2)$$

但是 $h^2 + \overline{AD}^2 = b^2$

$$AD = b \cos A$$

代入 (2)中

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \dots\dots\dots \text{III}$$

同理即得

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

這就叫做餘弦定律。

有了這三個定律,我們就可以解任何三角形。因爲在正弦定律中可以:

(一) 用一邊兩角去再找一邊 第一類

(二) 二邊非夾角去再找一角 第二類
在餘弦定律中可以

(三) 用二邊夾一角去找第三邊 第三類。

(四) 用三邊去找一角 第四類

28. 第一類 已知一邊與任兩角

例 設如圖26中, 已知 $b=20$,

$$A = 104^\circ \quad B = 19^\circ$$

求解這三角形

$$\begin{aligned} \text{解} \quad C &= 180^\circ - (A + B) \\ &= 180^\circ - 123^\circ = 57^\circ \end{aligned}$$

$$\text{求} a \text{ 用 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

$$\log a = \log b + \log \sin A - \log \sin B$$

$$\log b = 1.3010$$

$$\begin{array}{r} +) \log \sin A = 9.9869 - 10 \\ \hline 11.2879 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -) \log \sin B = 9.5126 - 10 \\ \hline \log a = 1.7753 \end{array}$$

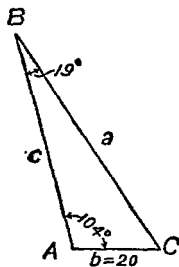


圖 26

檢表得 $a = 59.61$

求 c 用 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}$$

$$\log c = \log b + \log \sin C - \log \sin B$$

$$\log b = 1.3010$$

$$+) \frac{\log \sin C = 9.9236 - 10}{11.2246 - 10}$$

$$-) \frac{\log \sin B = 9.5126 - 10}{\log c = 1.7120}$$

標表得 $c = 51.52$

習 題 十 六

求解下列三角形 ABC , 已知

- | | | | |
|----|-----------|-----------------|--------------------|
| 1. | $a=10$ | $A=38^\circ$ | $B=77'10''$ |
| 2. | $a=795$ | $A=79^\circ59'$ | $B=44^\circ.41$ |
| 3. | $b=29.01$ | $A=87^\circ40'$ | $C=33^\circ15'$ |
| 4. | $c=161$ | $A=35^\circ15'$ | $C=123^\circ39'$ |
| 5. | $b=2056$ | $A=60^\circ52'$ | $B=70^\circ$ |
| 6. | $b=8$ | $A=80^\circ$ | $B=2^\circ15'46''$ |

- | | | | |
|-----|-------------|------------------|-------------------|
| 7. | $c = .0059$ | $B = 75^\circ$ | $C = 36^\circ.57$ |
| 8. | $b = 8000$ | $A = 24^\circ.5$ | $B = 86^\circ.49$ |
| 9. | $c = 59$ | $A = 2^\circ.08$ | $B = 112^\circ$ |
| 10. | $a = 500$ | $A = 10^\circ.2$ | $B = 46^\circ.6$ |

29. 第二類 已知二邊與一非夾角 這一類情形中，有時會沒有解答的。若三角形 ABC ，已知 a, b 和 A 三項，可應用正弦定律

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

以求 B ；但是在用對數算時，設使得到的結果是

$$\log \sin B = 0, \quad \sin B = 1, \quad B = 90^\circ,$$

那末就是直角三角形。

設 $\log \sin B > 0$ ，即 $\sin B > 1$ ，那是命題的錯誤，因為決無此理的。

設 $\log \sin B < 0$ 及 $b < a$ ，那末只有一個答數。

設 $\log \sin B < 0$ 而 $b > a$ ，那可得到兩個答數。

要明白上述的情形,最好看下面各例

a. 若 $a=36$, $b=80$, $A=28^\circ$, 解三角形。

解 先求 $\sin B$,

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore \sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$$

$$\log b = 1.9031$$

$$+) \frac{\log \sin A = 9.6716 - 10}{11.5747 - 10}$$

$$-) \frac{\log a = 1.5563}{\log \sin B = 10.0184 - 10}$$

$$\therefore \log \sin B = 0.0184$$

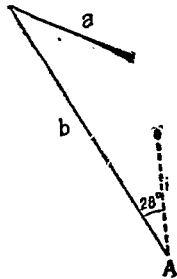


圖 27

因爲 $\log \sin B > 0$ $\sin B > 1$ 所以不能有解答的。

b. 已知 $a = 7.42$ $b = 3.39$ $A = 105^\circ$

解 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$$

$$\log b = 0.5302$$

$$+) \log \sin A = \frac{9.9849 - 10}{10.5151 - 10}$$

$$-) \frac{\log a = 0.8704}{\log \sin B = 9.6447 - 10}$$

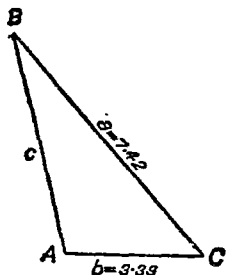


圖 28

因爲 $\log \sin B < 0$, 而 $b < a$,

所以祇有一個解答;

$$\therefore B = 26^\circ 11'$$

$$\angle C = 180^\circ - (A + B)$$

$$= 180^\circ - 131^\circ 11' = 48^\circ 49'$$

求 c 用 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$

$$\log a = 0.8704$$

$$+) \frac{\log \sin C = 9.8766 - 10}{10.7470 - 10}$$

$$-) \frac{\log \sin A = 9.9849 - 10}{\log c = 0.7621}$$

$$\therefore c = 5.783$$

c. 已知 $a = 732$, $b = 1015$, $A = 40^\circ$

解 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$$

$$\log b = 3.0065$$

$$+) \frac{\log \sin A = 9.8081 - 10}{12.8146 - 10}$$

$$-) \frac{\log a = 2.8645}{\log \sin B = 9.9501 - 10}$$

因爲 $\log \sin B < 0$, 而 $b > a$ 。

所以我們可以得到兩個解答, 如圖 29 中,

$B_1 = 63^\circ 3'$ 而另外還有一個 B 就是

$$B_2 = 180^\circ - B_1 = 116^\circ 57'$$

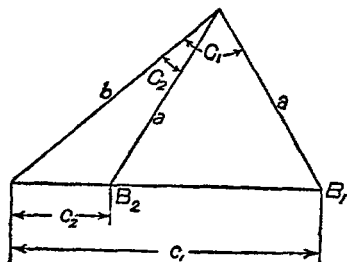


圖 29

$$\begin{aligned}\text{同理 } \angle C_1 &= 180^\circ - (A + B_1) = 180^\circ - 103^\circ 3' \\ &= 76^\circ 57'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle C_2 &= 180^\circ - (A + B_2) = 180^\circ - 156^\circ 57' \\ &= 23^\circ 3'\end{aligned}$$

$$\text{求 } c_1 \text{ 用 } c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A}$$

$$\log c_1 = \log a + \log \sin C_1 - \log \sin A$$

$$\log a = 2.8645$$

$$+) \frac{\log \sin C_1 = 9.9886 - 10}{12.8531 - 10}$$

$$-) \frac{\log \sin A = 9.8081 - 10}{\log c_1 = 3.0450}$$

$$\therefore c_1 = 1109.3$$

同理
$$c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A}$$

$$c_2 = 445.9$$

習 題 十 七

求解下列各三角形,已知

- | | | | |
|-----|---------|---------|-------------|
| 1. | a=50 | c=66 | A=123°11' |
| 2. | a=5.08 | b=3.59 | A=63°50' |
| 3. | a=62.2 | b=74.8 | A=27°.18 |
| 4. | b=.2337 | c=.1982 | B=109° |
| 5. | a=107 | c=171 | C=31°.53 |
| 6. | b=3069 | c=1223 | C=55°52' |
| 7. | b=5.161 | c=6.84 | B=44°3' |
| 8. | a=8.656 | c=10 | A=59°57' |
| 9. | a=214.8 | b=284.8 | B=104°20' |
| 10. | a=32.16 | c=27.08 | C=52°24' |
| 11. | b=811.3 | c=606.4 | B=126°5'20" |
| 12. | b=9.399 | c=9.197 | B=120°.4 |
| 13. | b=.048 | c=.0621 | B=57°.62 |
| 14. | a=34 | c=22 | C=30°.35 |

30. 第三類 已知二邊與一夾角

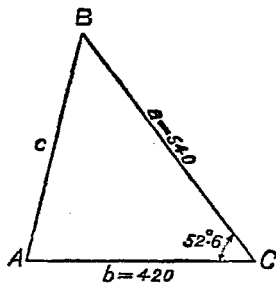


圖. 30

例如圖30中, $a = 540$, $b = 420$, $C = 52^{\circ}6'$,
應用餘弦定律,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\begin{aligned} \therefore c &= \sqrt{540^2 + 420^2 - 2 \times 540 \times 420 \cos 52^{\circ}6'} \\ &= \sqrt{291600 + 176400 - 278700} \\ &= \sqrt{189300} \\ &= 435.1 \end{aligned}$$

求A,

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c}$$

$$\log \sin A = \log a + \log \sin C - \log c$$

$$\log a = 2.7324$$

$$+) \frac{\log \sin C = 9.8971 - 10}{= 12.6295 - 10}$$

$$-) \frac{\log c = 2.6386}{\log \sin A = 9.9909 - 10}$$

檢表得 $A = 78^{\circ}18'$

$$\begin{aligned} \angle B &= 180^{\circ} - (A + C) = 180 - 130^{\circ}24' \\ &= 49^{\circ}36' \end{aligned}$$

習 題 十 八

求解下列各三角形,已知

- | | | | |
|----|--------------|--------------|-------------------|
| 1. | $a=27$ | $c=15$ | $B=46^{\circ}$ |
| 2. | $a=486$ | $b=347$ | $C=51^{\circ}36'$ |
| 3. | $a=53.27$ | $b=41.61$ | $C=78^{\circ}33'$ |
| 4. | $b=\sqrt{5}$ | $c=\sqrt{3}$ | $A=35^{\circ}53'$ |
| 5. | $a=101$ | $b=29$ | $C=32^{\circ}18'$ |
| 6. | $b=6$ | $c=9$ | $A=88^{\circ}.9$ |
| 7. | $a=12$ | $b=19$ | $C=5^{\circ}.24$ |
| 8. | $c=45$ | $b=29$ | $A=42^{\circ}.8$ |

31. 第四類 已知三邊

例 求解圖31中三角形，已知 $a=51$
 $b=65$ 及 $c=20$

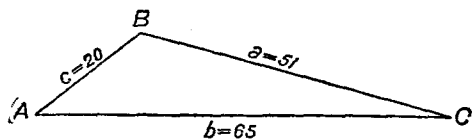


圖 31

解 求A 從 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\therefore \cos A = \frac{65^2 + 20^2 - 51^2}{2 \times 65 \times 20} = \frac{2024}{2600} = 0.7784$$

檢表得 $A = 38^\circ.9$

求C從 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$$\text{即 } \sin C = \frac{c \sin A}{a}$$

$$\log \sin C = \log c + \log \sin A - \log a$$

$$\log c = 1.3010$$

$$+) \frac{\log \sin A = 9.7979 - 10}{11.0989 - 10}$$

$$-) \frac{\log a = 1.7076}{\log \sin C = 9.3913 - 10}$$

檢表得 $C = 14^\circ.24$

$$B = 180 - (A + C)$$

$$= 180 - 53^\circ.14$$

$$= 126^\circ.86$$

習 題 十 九

求解下列各三角形,已知

1. $a=2$ $b=3$ $c=4$

2. $a=2.5$ $b=2.79$ $c=2.33$

3. $a=5.6$ $b=4.3$ $c=4.9$

4. $a=111$ $b=145$ $c=40$

5. $a=79.3$ $b=94.2$ $c=66.9$

6. $a=321$ $b=361$ $c=402$

7. $a=.641$ $b=.529$ $c=.702$

8. $a=73$ $b=52$ $c=91$

9. $a=1.9$ $b=3.4$ $c=4.9$

10. $a=\sqrt{5}$ $b=\sqrt{6}$ $c=\sqrt{7}$

32. 已知三邊求面積

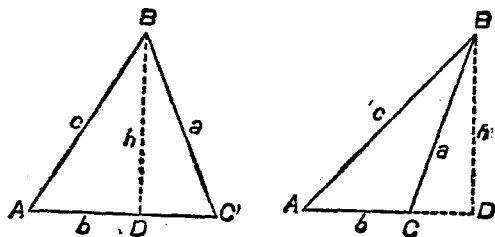


圖 32

因爲 $\sin A = \frac{BD}{c}$

$$BD = c \sin A$$

$$\text{面積} = \frac{1}{2} h b$$

$$h = BD$$

$$\therefore \text{面積 } F = \frac{1}{2} c \sin A \times b$$

$$= \frac{1}{2} cb \sin A$$

同理 $F = \frac{1}{2} a b \sin C$ }
 $= \frac{1}{2} b c \sin A$ } 1
 $= \frac{1}{2} a c \sin B$ }

因爲 $F = \frac{1}{2}bc \sin A$

$$\begin{aligned} F^2 &= \frac{1}{4}b^2 c^2 \sin^2 A \\ &= \frac{1}{4}b^2 c^2 (1 - \cos^2 A) \\ &= \frac{1}{4}b^2 c^2 (1 + \cos A)(1 - \cos A) \end{aligned}$$

用餘弦定律

$$F^2 = \frac{1}{4}b^2 c^2 \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

簡化後

$$= \frac{1}{16}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$$

.....II

假定三角形的全周叫做 $2s$, 那末

$$a + b + c = 2s$$

$$b + c - a = 2(s - a)$$

$$a + c - b = 2(s - b)$$

$$a + b - c = 2(s - c)$$

代入II中,

$$\begin{aligned} F^2 &= \frac{1}{16} \times 2s \times 2(s-a) \times 2(s-b) \times 2(s-c) \\ &= s(s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

$$\therefore F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

例 求三角形 ABC 的面積，已知
 $a = 12.53$, $b = 24.9$, $c = 18.91$

解 $2s = a + b + c = 12.53 + 24.9 + 18.91 = 56.34$

$$\therefore s = 28.17$$

$$s - a = 28.17 - 12.53 = 15.64$$

$$s - b = 28.17 - 24.9 = 3.27$$

$$s - c = 28.17 - 18.91 = 9.26$$

$$\therefore F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore \log F = \frac{1}{2} [\log s + \log(s-a) + \log(s-b) + \log(s-c)]$$

$$\log s = 1.4498$$

$$\log(s-a) = 1.1942$$

$$\log(s-b) = 0.5145$$

$$\log(s-c) = 0.9666$$

$$\underline{\underline{2 \mid 4.1251}}$$

$$\log F = 2.0626$$

$$\therefore F = 115.5$$

習題二十

求下列三角形的面積,已知

- | | | | |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 1. | $b=142.8$ | $c=89.6$ | $a=59$ |
| 2. | $a=79$ | $b=94$ | $c=67$ |
| 3. | $a=23.1$ | $b=19.7$ | $c=25.2$ |
| 4. | $a=58.2$ | $b=6$ | $c=4.26$ |
| 5. | $a=4$ | $b=7$ | $c=6$ |
| 6. | $a=56$ | $b=43$ | $c=49$ |
| 7. | $a=.0291$ | $b=.0184$ | $c=.0358$ |
| 8. | $a=80$ | $b=90$ | $c=100$ |

33. 三角形內切圓的半徑 在圖33中, 設內切圓的半徑叫做 r , 將三角形 ABC 的面積分作三部分計算,可得

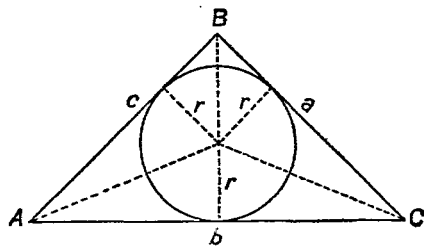


圖 33

$$F = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)r = s r \dots\dots\dots(I)$$

因爲 $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

將(1)代入,即得

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

34. 三角形外接圓的半徑 在圖 34 中

假定 R 是 $\triangle ABC$ 外接圓的半徑, O 是中心, $OM \perp BC$, 於是得到

$$BM = R \sin BOM$$

$$= R \sin A \quad \text{何故?}$$

$$\therefore BC \text{ 或 } a = 2 R \sin A$$

同理 $b = 2 R \sin B \quad c = 2 R \sin C$

$$\therefore 2 R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \dots\dots\dots(I)$$

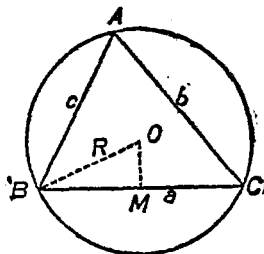


圖 34

但是 $F = \frac{1}{2}ac \sin B$

用 $2R = \frac{b}{\sin B}$ 或 $\sin B = \frac{b}{2R}$

$\therefore F = \frac{abc}{4R} \dots\dots\dots(II)$

習題二十一

求三角形 ABC 的內切圓及外接圓的半徑,已知

- | | | | |
|----|---------|---------|---------|
| 1. | a=40 | b=13 | c=37 |
| 2. | a=8 | c=5 | b=9 |
| 3. | a=.23 | b=.26 | c=.198 |
| 4. | a=61.3 | b=84.7 | c=47.6 |
| 5. | a=705 | b=43 | c=49 |
| 6. | a=2.51 | b=2.79 | c=2.33 |
| 7. | a=.21 | b=.26 | c=.31 |
| 8. | a=513.4 | b=726.8 | c=931.3 |

習題二十二 應用問題

1. 在岸上 AB 兩處都可望見 S 船,設量得 AB = 800 尺, S A B 角 = $67^{\circ}43'$, S B A 角 = $72^{\circ}21'$, 求船到 A 相距多少路!
2. 平行四邊形的一條對角線是 11.237, 這線和

兩邊所成的角度為 $19^{\circ}1'$ 及 $42^{\circ}54'$ 。求兩邊的長。

3. 平行四邊形的一邊長 35, 一條對角線長 63, 而兩對角線交叉角是 $21^{\circ}37'$ 。求另一對角線長多少!

4. 水上兩浮標相距 2789 尺, 一船和較近的浮標相距 4325 尺。由船到兩浮標的連線所成的角度是 $16^{\circ}13'$ 。求船和較遠的浮標相距多少!

5. 兩列火車同時在同一車站出發。軌道相交成 30° 角。設其一的速度為每小時三十公里, 另一列的速度是每小時 40 公里。問半小時後兩列車相距多少里!

6. A B 兩樹, 隔池而生。設在 C 點上量得 $AC = 297.6$ 尺, $BC = 864.4$ 尺, 及 $\angle ACB = 87^{\circ}.72$, 求兩樹相距多少尺!

7. ABC 三城的距離為 $AB = 165$ 里, $AC = 72$ 里, $BC = 185$ 里。設 B 城在 A 城的正東, 求 C 城對 A 城的方向。

8. 已知三角形的面積是 12。設 $a = 60$, $\angle B = 40^{\circ}35'$, 求內切圓半徑是多少!

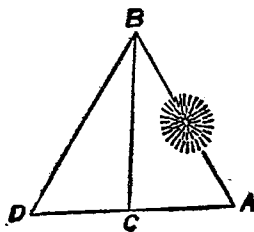
9. 某甲順路向東走, 看見一塔在他的 $N 87^{\circ}.62 E$

的方向 走了3.5里之後,那塔卻在他的 $N 40^{\circ}.3 E$ 了,問他和塔相距多少遠?

10. A B 兩燈塔相距50里。一船 S 從 A 塔出發,每小時行35里,經三小時半後, A S B 成 36° 角,問此船和 A B 各距多少里?

11. 山峯上有塔一座。在平地的一點望得塔頂的仰角為 30° 向前行400公尺,望得塔頂的仰角為 57° , 塔基仰角 42° 。問山高及塔高各多少?

12. A B 兩地,中間隔一山,如下圖。設先另找 CD 兩點,都可看見 A B,量得 $A C = 236$ 尺, $C D = 216$ 尺, $\angle A C B = 113^{\circ}20'$, $\angle C D B = 74^{\circ}.15$ 。求 A B 的距離。



第六章 三角法的應用

35. 三角法在物理上的應用

a. 力的圖解 力有方向大小,及作用點; 線段有方向,長短及起點; 故用線段來表示力最爲便當。

例 甲乙兩力,都作用在 O 點上,互相做成一只 38° 的角。甲力爲 13 公斤,乙力爲 17 公斤。求合力的大小及方向。

依照物理上合力的平行四邊形定律得圖 35 所示的平行四邊形 $OACB$, R 表示合力, $\angle x$ 可以表示 R 的方向。

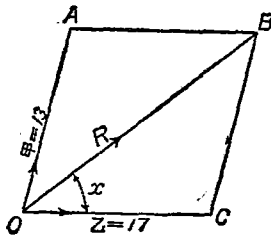


圖 35

解 $\triangle OBC$, 依任意三角形解法第三類,

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{13^2 + 17^2 - 2 \times 13 \times 17 \cos 142^\circ} \\ &= 28.39 \text{ 公斤} \end{aligned}$$

$$\sin x = \frac{\sin 142^\circ}{28.39} \times 13$$

$$\log \sin x = \log \sin 142^\circ + \log 13 - \log 28.39$$

$$\therefore x = 16.37$$

b. 速度的圖解 速度和力一樣也可以用線段來表示。

例 若南北兩碼頭, 北碼頭在南碼頭北偏西 20° 地方, 如圖 36, 若汽船速度每小時 30 里, 水流由西向東每小時是 10 里。問這汽船應取什麼方向可以由南岸碼頭直駛到北岸碼頭。

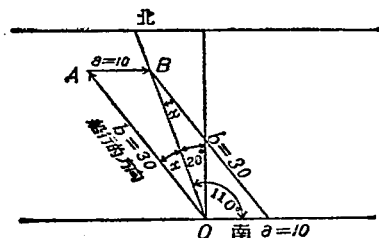


圖 36

依速力的平行四邊形定律,如圖36 $\angle x + 20^\circ$ 是為船應取的方向。

這是屬於任意三角形解法第二類的,要求 $\angle x$, 可先解 $\triangle OAB$,

$$\sin x = \frac{\sin 110^\circ}{30} \times 10 = \frac{\sin 110^\circ}{3}$$

$$\begin{aligned}\log \sin x &= \log \sin 110^\circ - \log 3 \\ &= 9.4959 - 10\end{aligned}$$

$$\therefore x = 18^\circ.26$$

所以汽船應取的方向是 $x + 20^\circ = 38^\circ.26$, 就是應取正北徧西 $38^\circ.26$ 的方向。

習 題 二 十 三

1. 有 a 力 19 公斤, b 力 26 公斤, 都作用在 O 點上, 在 a b 方向間的角度為 84° 時, 求合力的大小與方向。

2. 兩火車同時在同站出發向兩直進軌道交叉角為 $67^\circ.75$ 進行。若兩車的速度為 32 里及 46 里, 求 3 小時後兩車相隔多少里。

3. 甲乙兩力的合力是 10 公斤; 甲力為 8 公斤, 同合力成 36° 角度, 求乙力的大小及方向。

4. 一球在平地上滾動,每秒鐘行10尺;若用棒改向 45° 方向擊去,而棒擊速度為20尺,求球的結果速度及方向。

5. 每小時行22里的汽船,從岸上開向東偏南 10° 的小島駛去。潮流每小時向北流10里。問用什麼方向此船可恰到小島。

36. 三角法在測量上的應用 三角法在應用上最有功效的就是幫助測量。田畝的面積,往往不能成正方;然而直線所成的田邊,大約都可以劃成幾個三角形。其他如築路的問題,都可應用三角法來解決。

例a. 某測量員量得地一塊,製成圖形,如圖37所示。從A點出發依 $N27^\circ E$,度量到B,是10丈,然後依 $N56^\circ.15' E$ 度量8丈到C,再依 $S5^\circ W$ 度量24丈到D,終依 $N40^\circ 44' W$

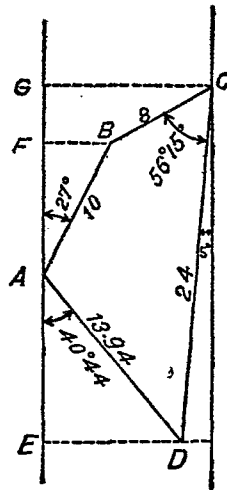


圖 37

度量 13.94 丈回到 A。求此 ABCD 的面積。

由圖上看得，

$$ABCD = GCDE - (GCBF + \triangle FBA + \triangle ADE)$$

先求 DE, 因為 $DE = AD \sin 40^\circ 44'$

$$= 13.94 \sin 40^\circ 44'$$

$$DE = 13.94 \times .6525 = 9.096 \text{ 丈}$$

$$BF = AB \sin 27^\circ = 10 \sin 27^\circ$$

$$= 10 \times .4540 = 4.54 \text{ 丈}$$

$$GC = BF + 8 \cos(90 - 56^\circ 15')$$

$$= BF + 8 \cos 33^\circ 45'$$

$$= 4.54 + 8 \times .8315$$

$$= 4.54 + 6.65 = 11.19 \text{ 丈}$$

$$GE = GF + FA + AE$$

$$= 8 \sin(90 - 56^\circ 15') + 10 \cos 27^\circ$$

$$+ 13.94 \times \cos 40^\circ 44'$$

$$= 8 \sin 33^\circ 45' + 10 \cos 27^\circ$$

$$+ 13.94 \times \cos 40^\circ 44'$$

$$= 4.445 + 8.91 + 10.56 = 23.975 \text{ 丈}$$

$$\begin{aligned} \text{GCDE} &= \text{GE} \times \frac{\text{GC} + \text{DE}}{2} \\ &= 23.915 \times \frac{11.19 + 9.096}{2} \end{aligned}$$

$$= 242.57 \text{ 方丈}$$

$$\text{GCBF} = \text{GF} \times \frac{\text{BF} + \text{GC}}{2}$$

$$= 4.445 \times \frac{4.54 + 11.19}{2}$$

$$= 34.96 \text{ 方丈}$$

$$\triangle \text{FBA} = \frac{\text{FA} \times \text{BF}}{2} = \frac{8.91 \times 4.54}{2}$$

$$= 20.23 \text{ 方丈}$$

$$\triangle \text{ADE} = \frac{\text{DE} \times \text{AE}}{2} = \frac{9.096 \times 10.56}{2} = 48.02 \text{ 方丈}$$

$$\therefore \text{ABCD} = \text{GCDE} - (\text{GCBF} + \triangle \text{FBA} + \triangle \text{ADE})$$

$$= 242.57 - (34.96 + 20.23 + 48.02)$$

$$= 139.36 \text{ 方丈}$$

b. 有許多人跡不便到的地方,要直接度量,比較費事,爲避重就輕又能得同樣結果起見,可把那容易度量的先量出來再推算。這種方法也是要用三角學來幫助的。

例1. 某人在海岸上A B兩處測P島的遠近,(如圖38)先測得 $\angle A = 47^{\circ}31'$, $\angle B = 76^{\circ}23'$, 又量得AB長12.5里, 問P島離A, B各多少里!

依第一類方法解 $\triangle ABP$:

$$\begin{aligned}\angle P &= 180^{\circ} - (\angle A + \angle B) \\ &= 56^{\circ}6'\end{aligned}$$

$$\therefore PA = \frac{12.5}{\sin 56^{\circ}6'} \times \sin 76^{\circ}23'$$

$$= 14.64 \text{ 里}$$

$$PB = \frac{12.5}{\sin 56^{\circ}6'} \times \sin 47^{\circ}31'$$

$$= 11.11 \text{ 里}$$

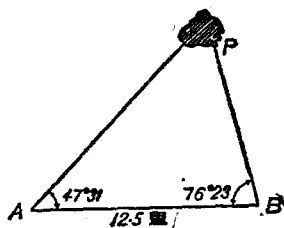


圖 38

例2. 如圖39, AC 爲一湖的長, 量得 $AB = 400$ 尺, $BC = 351$ 尺, $\angle B = 50^{\circ}.3$, 求湖長。

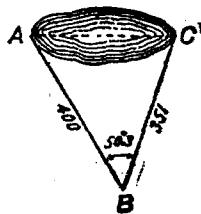


圖 39

依第三類方法解 $\triangle ABC$

$$\begin{aligned}AC &= \sqrt{400^2 + 351^2 - 2 \times 400 \times 351 \cos 50^{\circ}.3} \\ &= 322.2\end{aligned}$$

例 3. 山頂一塔, 在地面上測得塔頂的仰角是 31° , 山頂的仰角是 13° ; 直上到離地 29 尺的屋頂上, 又測得塔頂的仰角是 25° , 山頂的仰角是 5° , 如圖 40. 求塔高。

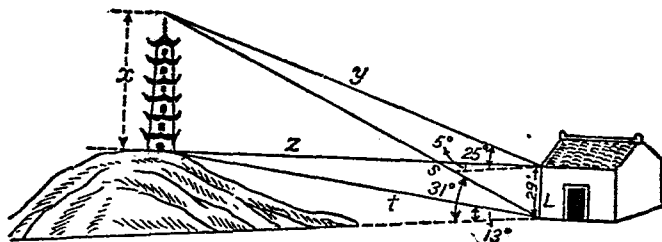


圖 40

設 x = 塔的高, 依第三類方法解 $\triangle xyz$

$$x = \sqrt{y^2 + z^2 - 2yz \cos(25^\circ - 5^\circ)}$$

但是依第一類方法解 $\triangle SyL$, 得

$$y = \frac{29 \sin(90^\circ - 31^\circ)}{\sin\{180^\circ - (25^\circ + 90^\circ + 59^\circ)\}} = \frac{29 \sin 59^\circ}{\sin 6^\circ}$$

$$= 237.8$$

依第一類方法解 $\triangle tzL$ 得

$$z = \frac{29 \sin(90^\circ - 13^\circ)}{\sin\{180^\circ - (5^\circ + 90^\circ + 90^\circ - 13^\circ)\}} = \frac{29 \sin 77^\circ}{\sin 8^\circ}$$

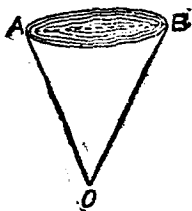
$$= 203$$

$$\begin{aligned}\therefore x &= \sqrt{237.8^2 + 203^2 - 2 \times 237.8 \times 203 \cos 20^\circ} \\ &= 83.8\end{aligned}$$

習 題 二 十 四

1. 某測量家從A點量起,得S 50°25'E 60.4尺,而後S 58°10' W 41.5尺,再N 28°12' W 51尺,最後回到A點。求最後一次所量得之方向,及回到A點的距離。並求所包圍的面積。

2. AB是P湖對岸的兩株大樹。如下圖,設在O點測好 $\angle O = 51^\circ.8$,又量得OA=143尺, OB=194尺,求AB兩樹相隔多少尺。



3. 有A及B兩船,相距二里。在A船測得B船和砲臺的方向差為 $35^\circ 14'$ 。在B船上測得A船和砲臺的方向差為 $42^\circ 12'$ 。問兩船各距離砲臺多少?

4. 在樹下望塔,其仰角為 40° 。爬上樹頂望之,仰角為 $35^\circ 30'$ 。設樹高為18尺,問塔高多少?

5. 在城外地上,測得城樓頂的仰角是 41° , 城牆頂(即城樓底)的仰角是 $30^\circ 3'$ 。直上 51 尺的屋頂上,又測得城樓頂的仰角為 24° , 城牆頂的仰角是 10° 。問這城樓有多少高!

6. 天空飛機經過時,甲乙二人同時在相隔 3000 尺地方測量。甲得仰角 $42^\circ 13'$; 乙得仰角 $61^\circ 8'$ 。求飛機的高度,及和甲乙二人相距多少遠。

7. 有人在山脚見山頂的仰角是 47° 。上山行 1000 尺,則見山頂的仰角為 77° 。若山的斜度是 32° , 問山高多少尺!

8. 有人在平地見山頂的仰角為 60° 。這人向前走了 800 尺,就到了山脚。再上山 800 尺,測得山頂仰角為 75° 。若山的斜度是 30° , 問山高多少尺!

9. 某人在船上看見,甲乙兩燈塔和船成一直線,在船的 $N 15^\circ E$ 。其後船向正西北走了五里,則見甲塔在船的正東,乙塔在船的正東北,求兩塔的距離。

10. A, B 兩點和 C 點隔江相望。今欲測牠們的距離又無量角器。設假定另設 a, b 兩點, a, A, C 及 b, B, C 都各在一直線上量得。

$$AB = 500$$

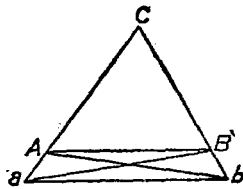
$$aA = 100 \text{ 尺}$$

$$aB = 560$$

$$bB = 100$$

$$Ab = 550$$

問C與A,B相距各多少尺!



11. 在平地上測得屋頂旗竿的仰角為 $48^{\circ}.62$ 又測得屋頂的仰角為 $27^{\circ}.43$ 。已知屋高 75 尺,求旗竿的長。

12. 從 90 尺高的塔頂測得一屋頂及屋底的俯角為 13° 及 29° 。問屋高幾何!

Log

對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.00	0.0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039	0043
1.01	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082	0085
1.02	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124	0128
1.03	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166	0170
1.04	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208	0212
1.05	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249	0253
1.06	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290	0294
1.07	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330	0334
1.08	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370	0374
1.09	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410	0414
1.10	0.0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449	0453
1.11	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488	0492
1.12	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527	0531
1.13	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565	0569
1.14	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603	0607
1.15	0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641	0645
1.16	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678	0682
1.17	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715	0719
1.18	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752	0755
1.19	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788	0792
1.20	0.0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824	0828
1.21	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860	0864
1.22	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896	0899
1.23	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931	0934
1.24	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966	0969
1.25	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0990	0993	0997	1000	1004
1.26	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035	1038
1.27	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069	1072
1.28	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103	1106
1.29	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136	1139
1.30	0.1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169	1173
1.31	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202	1206
1.32	1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235	1239
1.33	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268	1271
1.34	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300	1303
1.35	1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332	1335
1.36	1335	1339	1342	1345	1348	1351	1355	1358	1361	1364	1367
1.37	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396	1399
1.38	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427	1430
1.39	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1455	1458	1461
1.40	0.1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489	1492
1.41	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520	1523
1.42	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550	1553
1.43	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581	1584
1.44	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611	1614
1.45	1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641	1644
1.46	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670	1673
1.47	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700	1703
1.48	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729	1732
1.49	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758	1761

對 數 表

Log

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.50	0.1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787	1790
1.51	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816	1818
1.52	1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844	1847
1.53	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872	1875
1.54	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901	1903
1.55	1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928	1931
1.56	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956	1959
1.57	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984	1987
1.58	1987	1989	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011	2014
1.59	2014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2033	2036	2038	2041
1.60	0.2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066	2068
1.61	2068	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092	2095
1.62	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119	2122
1.63	2122	2125	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146	2148
1.64	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172	2175
1.65	2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198	2201
1.66	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225	2227
1.67	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251	2253
1.68	2253	2256	2258	2261	2263	2266	2269	2271	2274	2276	2279
1.69	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302	2304
1.70	0.2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327	2330
1.71	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353	2355
1.72	2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378	2380
1.73	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403	2405
1.74	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428	2430
1.75	2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453	2455
1.76	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477	2480
1.77	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502	2504
1.78	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526	2529
1.79	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550	2553
1.80	0.2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574	2577
1.81	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598	2601
1.82	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622	2625
1.83	2625	2627	2629	2632	2634	2636	2639	2641	2643	2646	2648
1.84	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669	2672
1.85	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693	2695
1.86	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716	2718
1.87	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739	2742
1.88	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762	2765
1.89	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785	2788
1.90	0.2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808	2810
1.91	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831	2833
1.92	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853	2856
1.93	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876	2878
1.94	2878	2880	2882	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898	2900
1.95	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920	2923
1.96	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942	2945
1.97	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964	2967
1.98	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986	2989
1.99	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	3006	3008	3010

乘數為真數自1至10之常用對數。移動真數之小數點n位向右(或向左)若乘加n(或-n)於其對數。 例如: $\log 0.17458 = 0.2419 - 2 = \bar{2}.2419$

當 x 在 0° 與 $1^\circ.1$ 之間時 當 x 在 $88^\circ.8$ 與 90° 之間時

公式(一)	$\log \sin x = \bar{2}.2419 + \log(x^\circ)$	$\log \cos x = \bar{2}.2419 + \log(90^\circ - x^\circ)$
公式(二)	$\log \tan x = \bar{2}.2419 + \log(x^\circ)$	$\log \cot x = \bar{2}.2419 + \log(90^\circ - x^\circ)$
公式(三)	$\log \cot x = 1.7581 - \log(x^\circ)$	$\log \tan x = 1.7581 - \log(90^\circ - x^\circ)$

Log

對數表

	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10										表尾差					
											1	2	3	4	5	
1.0	0.0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	0414	用到此十列之表 尾差時看前一表。				
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	0792					
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	1139					
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	1461					
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	1761					
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	2041					
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	2304					
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2553					
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2788					
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	3010					
2.0	0.3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	3222	2	4	6	8	11
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	3424	2	4	6	8	10
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	3617	2	4	6	8	10
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	3802	2	4	5	7	9
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	3979	2	4	5	7	9
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	4150	2	3	5	7	9
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	4314	2	3	5	7	8
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	4472	2	3	5	6	8
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	4624	2	3	5	6	8
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	4771	1	3	4	6	7
3.0	0.4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	4914	1	3	4	6	7
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	5051	1	3	4	6	7
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	5185	1	3	4	5	7
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	5315	1	3	4	5	6
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	5441	1	3	4	5	6
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	5563	1	2	4	5	6
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	5682	1	2	4	5	6
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	5798	1	2	3	5	6
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	5911	1	2	3	5	6
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	6021	1	2	3	4	6
4.0	0.6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	6128	1	2	3	4	5
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	6232	1	2	3	4	5
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	6335	1	2	3	4	5
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	6435	1	2	3	4	5
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	6532	1	2	3	4	5
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	6628	1	2	3	4	5
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	6721	1	2	3	4	5
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	6812	1	2	3	4	5
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	6902	1	2	3	4	4
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	6990	1	2	3	4	4

Log

對數表

	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10										表尾差					
											1	2	3	4	5	
5.0	0.6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	7076	1	2	3	4	
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	7160	1	2	3	4	
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	7243	1	2	3	4	
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	7324	1	2	3	4	
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	7404	1	2	3	4	
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	7482	1	2	3	4	
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	7559	1	2	3	4	
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	7634	1	2	3	4	
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	7709	1	1	2	3	4
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7782	1	1	2	3	4
6.0	0.7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7853	1	1	2	3	4
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7924	1	1	2	3	4
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	7993	1	1	2	3	4
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	8062	1	1	2	3	4
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	8129	1	1	2	3	4
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	8195	1	1	2	3	4
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	8261	1	1	2	3	4
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	8325	1	1	2	3	4
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	8388	1	1	2	3	4
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	8451	1	1	2	3	4
7.0	0.8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	8513	1	1	2	3	4
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	8573	1	1	2	3	4
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	8633	1	1	2	3	4
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	8692	1	1	2	3	4
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	8751	1	1	2	3	4
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	8808	1	1	2	3	4
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	8865	1	1	2	3	4
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	8921	1	1	2	3	4
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	8976	1	1	2	3	4
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	9031	1	1	2	3	4
8.0	0.9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	9085	1	1	2	3	4
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	9138	1	1	2	3	4
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	9191	1	1	2	3	4
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	9243	1	1	2	3	4
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	9294	1	1	2	3	4
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	9345	1	1	2	3	4
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	9395	1	1	2	3	4
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	9445	0	1	1	2	2
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	9494	0	1	1	2	2
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	9542	0	1	1	2	2
9.0	0.9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	9590	0	1	1	2	2
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	9638	0	1	1	2	2
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	9685	0	1	1	2	2
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	9731	0	1	1	2	2
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	9777	0	1	1	2	2
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	9823	0	1	1	2	2
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	9868	0	1	1	2	2
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	9912	0	1	1	2	2
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	9956	0	1	1	2	2
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996		0	1	1	2	2

Log Sin	正餘弦對數表											Log Cos	表尾差				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		1	2	3	4	5
5°0	Z.9403	9412	9420	9429	9437	9446	9455	9463	9472	9480	Z.9489	84.9	1	2	3	3	4
5.1	9489	9497	9506	9514	9523	9531	9539	9548	9556	9565	9573	84.8	1	2	3	3	4
5.2	9573	9581	9589	9598	9606	9614	9623	9631	9639	9647	9655	84.7	1	2	2	3	4
5.3	9655	9664	9672	9680	9688	9696	9704	9712	9720	9728	9736	84.6	1	2	2	3	4
5.4	9736	9744	9752	9760	9768	9776	9784	9792	9800	9808	9816	84.5	1	2	2	3	4
5.5	9816	9824	9831	9839	9847	9855	9863	9870	9878	9886	9894	84.4	1	2	2	3	4
5.6	9894	9901	9909	9917	9925	9932	9940	9948	9955	9963	Z.9970	84.3	1	2	2	3	4
5.7	Z.9970	9978	9986	9993	0001	0008	0016	0023	0031	0038	I.0046	84.2	1	2	2	3	4
5.8	I.0046	0053	0061	0068	0075	0083	0090	0098	0105	0112	0120	84.1	1	1	2	3	4
5.9	0120	0127	0134	0142	0149	0156	0163	0171	0178	0185	I.0192	84°0	1	1	2	3	4
6°0	I.0192	0200	0207	0214	0221	0228	0235	0243	0250	0257	0264	83.9	1	1	2	3	4
6.1	0264	0271	0278	0285	0292	0299	0306	0313	0320	0327	0334	83.8	1	1	2	3	4
6.2	0334	0341	0348	0355	0362	0369	0376	0383	0390	0397	0403	83.7	1	1	2	3	3
6.3	0403	0410	0417	0424	0431	0438	0444	0451	0458	0465	0472	83.6	1	1	2	3	3
6.4	0472	0478	0485	0492	0498	0505	0512	0519	0525	0532	0539	83.5	1	1	2	3	3
6.5	0539	0545	0552	0558	0565	0572	0578	0585	0591	0598	0605	83.4	1	1	2	3	3
6.6	0605	0611	0618	0624	0631	0637	0644	0650	0657	0663	0670	83.3	1	1	2	3	3
6.7	0670	0676	0683	0689	0695	0702	0708	0715	0721	0727	0734	83.2	1	1	2	3	3
6.8	0734	0740	0746	0753	0759	0765	0772	0778	0784	0790	0797	83.1	1	1	2	3	3
6.9	0797	0803	0809	0816	0822	0828	0834	0840	0847	0853	I.0859	83°0	1	1	2	3	3
7°0	I.0859	0865	0871	0877	0884	0890	0896	0902	0908	0914	0920	82.9	1	1	2	2	3
7.1	0920	0926	0932	0938	0945	0951	0957	0963	0969	0975	0981	82.8	1	1	2	2	3
7.2	0981	0987	0993	0999	1005	1011	1017	1022	1028	1034	1040	82.7	1	1	2	2	3
7.3	1040	1046	1052	1058	1064	1070	1076	1081	1087	1093	1099	82.6	1	1	2	2	3
7.4	1099	1105	1111	1116	1122	1128	1134	1140	1145	1151	1157	82.5	1	1	2	2	3
7.5	1157	1163	1168	1174	1180	1186	1191	1197	1203	1208	1214	82.4	1	1	2	2	3
7.6	1214	1220	1226	1231	1237	1242	1248	1254	1259	1265	1271	82.3	1	1	2	2	3
7.7	1271	1276	1282	1287	1293	1299	1304	1310	1315	1321	1326	82.2	1	1	2	2	3
7.8	1326	1332	1337	1343	1348	1354	1359	1365	1370	1376	1381	82.1	1	1	2	2	3
7.9	1381	1387	1392	1398	1403	1409	1414	1419	1425	1430	I.1436	82°0	1	1	2	2	3
8°0	I.1436	1441	1446	1452	1457	1462	1468	1473	1478	1484	1489	81.9	1	1	2	2	3
8.1	1489	1494	1500	1505	1510	1516	1521	1526	1532	1537	1542	81.8	1	1	2	2	3
8.2	1542	1547	1553	1558	1563	1568	1574	1579	1584	1589	1594	81.7	1	1	2	2	3
8.3	1594	1600	1605	1610	1615	1620	1625	1631	1636	1641	1646	81.6	1	1	2	2	3
8.4	1646	1651	1656	1661	1666	1672	1677	1682	1687	1692	1697	81.5	1	1	2	2	3
8.5	1697	1702	1707	1712	1717	1722	1727	1732	1737	1742	1747	81.4	1	1	2	2	3
8.6	1747	1752	1757	1762	1767	1772	1777	1782	1787	1792	1797	81.3	0	1	1	2	2
8.7	1797	1802	1807	1812	1817	1822	1827	1832	1837	1842	1847	81.2	0	1	1	2	2
8.8	1847	1851	1856	1861	1866	1871	1876	1881	1886	1890	1895	81.1	0	1	1	2	2
8.9	1895	1900	1905	1910	1915	1919	1924	1929	1934	1939	I.1943	81°0	0	1	1	2	2
9°0	I.1943	1948	1953	1958	1962	1967	1972	1977	1981	1986	1991	80.9	0	1	1	2	2
9.1	1991	1996	2000	2005	2010	2015	2019	2024	2029	2033	2038	80.8	0	1	1	2	2
9.2	2038	2043	2047	2052	2057	2061	2066	2071	2075	2080	2085	80.7	0	1	1	2	2
9.3	2085	2089	2094	2098	2103	2108	2112	2117	2121	2126	2131	80.6	0	1	1	2	2
9.4	2131	2135	2140	2144	2149	2153	2158	2162	2167	2172	2176	80.5	0	1	1	2	2
9.5	2176	2181	2185	2190	2194	2199	2203	2208	2212	2217	2221	80.4	0	1	1	2	2
9.6	2221	2226	2230	2235	2239	2243	2248	2252	2257	2261	2266	80.3	0	1	1	2	2
9.7	2266	2270	2275	2279	2283	2288	2292	2297	2301	2305	2310	80.2	0	1	1	2	2
9.8	2310	2314	2319	2323	2327	2332	2336	2340	2345	2349	2353	80.1	0	1	1	2	2
9.9	2353	2358	2362	2367	2371	2375	2379	2384	2388	2392	I.2397	80°0	0	1	1	2	2

Log Sin		正餘弦對數表										Log Cos		表尾差			
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10					
0°	-∞	3.2419	5429	7190	8459	9403	0260	6570	1450	1961	2.2419	89					
1	2.2419	2832	3210	3558	3880	4179	4459	4723	4971	5206	5428	88					
2	5428	5640	5842	6035	6220	6397	6557	6731	6889	7041	7186	87					
3	7186	7330	7468	7602	7731	7857	7979	8098	8213	8326	8436	86					
4	8436	8543	8647	8749	8849	8946	9042	9135	9226	9315	2.9403	85					
5	2.9403	9489	9573	9655	9736	9816	9894	9970	0046	0120	0.0192	84					
6	0.0192	0264	0334	0403	0472	0539	0605	0670	0734	0797	0859	83					
7	0859	0920	0981	1040	1099	1157	1214	1271	1326	1381	1436	82					
8	1436	1489	1542	1594	1645	1697	1747	1797	1847	1895	1943	81					
9	1943	1991	2038	2085	2131	2176	2221	2266	2310	2353	1.2397	80°					
10°	1.2397	2439	2482	2524	2565	2606	2647	2687	2727	2767	2806	79	4	8	12	16	20
11	2806	2845	2883	2921	2959	2997	3034	3070	3107	3143	3179	78	4	7	11	15	19
12	3179	3214	3250	3284	3319	3353	3387	3421	3455	3488	3521	77	3	7	10	14	17
13	3521	3554	3586	3618	3650	3682	3713	3745	3775	3806	3837	76	3	6	9	13	16
14	3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015	4044	4073	4102	4130	75	3	6	9	12	15
15	4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	4350	4377	4403	74	3	5	8	11	14
16	4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634	4659	73	3	5	8	10	13
17	4659	4684	4709	4733	4757	4781	4805	4829	4853	4876	4900	72	2	5	7	10	12
18	4900	4923	4946	4969	4992	5015	5037	5060	5082	5104	5126	71	2	5	7	9	11
19	5126	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320	1.5341	70°	2	4	6	9	11
20°	1.5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	5523	5543	69	2	4	6	8	10
21	5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717	5736	68	2	4	6	8	10
22	5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865	5883	5901	5919	67	2	4	5	7	9
23	5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6076	6093	66	2	3	5	7	9
24	6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243	6259	65	2	3	5	7	8
25	6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6371	6387	6403	6418	64	2	3	5	6	8
26	6418	6434	6449	6465	6480	6495	6510	6526	6541	6556	6570	63	2	3	5	6	8
27	6570	6585	6600	6615	6629	6644	6659	6673	6687	6702	6716	62	1	3	4	6	7
28	6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842	6856	61	1	3	4	6	7
29	6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	6950	6963	6977	1.6990	60°	1	3	4	5	7
30°	1.6990	7003	7016	7029	7042	7055	7068	7080	7093	7106	7118	59	1	3	4	5	6
31	7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205	7218	7230	7242	58	1	2	4	5	6
32	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349	7361	57	1	2	4	5	6
33	7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464	7476	56	1	2	3	5	6
34	7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575	7586	55	1	2	3	4	6
35	7586	7597	7607	7618	7629	7640	7650	7661	7671	7682	7692	54	1	2	3	4	5
36	7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785	7795	53	1	2	3	4	5
37	7795	7805	7815	7825	7835	7844	7854	7864	7874	7884	7893	52	1	2	3	4	5
38	7893	7903	7913	7922	7932	7941	7951	7960	7970	7979	7989	51	1	2	3	4	5
39	7989	7998	8007	8017	8026	8035	8044	8053	8063	8072	1.8081	50°	1	2	3	4	5
40°	1.8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	8169	49	1	2	3	4	5
41	8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	8255	48	1	2	3	4	5
42	8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	8338	47	1	2	3	4	5
43	8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	8418	46	1	2	3	4	5
44	8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	1.8495	45°	1	2	3	4	5
45°	1.8495																

表尾差
1 2 3 4 5
用到此十列之表
尾差時看前一表

Log Tan		正餘切對數表										Log Cotan		表尾差			
		0 1 2 3 4 5 6 7 8 9												1 2 3 4 5			
0°	0	∞	2.2419	5429	7190	8439	9408	0200	0870	1450	1961	2.2419	89.9				
0.1	1	3.2419	2833	3211	3558	3880	4180	4460	4723	4972	5206	5429	89.8				
0.2	2	5429	5641	5843	6036	6221	6398	6569	6732	6890	7043	7190	89.7				
0.3	3	7190	7332	7470	7604	7734	7860	7982	8101	8217	8329	8439	89.6				
0.4	4	8439	8547	8651	8754	8853	8951	9046	9140	9231	9321	9390	89.5				
0.5	5	9390	9495	9579	9662	9743	9823	9901	9978	0053	0127	2.0200	89.4				
0.6	6	2.0200	0272	0343	0412	0481	0548	0614	0680	0744	0807	0870	89.3				
0.7	7	0870	0932	0992	1052	1111	1170	1227	1284	1340	1395	1450	89.2				
0.8	8	1450	1504	1557	1610	1662	1713	1764	1814	1864	1913	1962	89.1				
0.9	9	1962	2010	2057	2104	2150	2196	2242	2287	2331	2376	2.2419	89° 0				
1°	0	2.2419	2462	2505	2548	2590	2631	2672	2713	2754	2794	2833	88.9				
1.1	1	2833	2873	2912	2950	2988	3026	3064	3101	3138	3175	3211	88.8	4 8 11 15 19			
1.2	2	3211	3247	3283	3318	3354	3389	3423	3458	3492	3525	3559	88.7	3 7 10 14 17			
1.3	3	3559	3592	3625	3658	3691	3723	3755	3787	3818	3850	3881	88.6	3 6 10 13 16			
1.4	4	3881	3912	3943	3973	4003	4033	4063	4093	4122	4152	4181	88.5	3 6 9 12 15			
1.5	5	4181	4210	4238	4267	4295	4323	4351	4379	4406	4434	4461	88.4	3 6 8 11 14			
1.6	6	4461	4488	4515	4542	4568	4595	4621	4647	4673	4699	4725	88.3	3 5 8 11 13			
1.7	7	4725	4750	4775	4801	4826	4851	4875	4900	4924	4949	4973	88.2	2 5 7 10 12			
1.8	8	4973	4997	5021	5045	5068	5092	5115	5139	5162	5185	5208	88.1	2 5 7 9 12			
1.9	9	5208	5231	5253	5276	5298	5321	5343	5365	5387	5409	2.5431	88° 0	2 4 7 9 11			
2°	0	2.5431	5453	5474	5496	5517	5538	5559	5580	5601	5622	5643	87.9	2 4 6 8 11			
2.1	1	5643	5664	5684	5705	5725	5745	5765	5785	5805	5825	5845	87.8	2 4 6 8 10			
2.2	2	5845	5865	5884	5904	5923	5943	5962	5981	6000	6019	6038	87.7	2 4 6 8 10			
2.3	3	6038	6057	6076	6095	6113	6132	6150	6169	6187	6205	6223	87.6	2 4 6 7 9			
2.4	4	6223	6242	6260	6277	6295	6313	6331	6348	6366	6384	6401	87.5	2 4 5 7 9			
2.5	5	6401	6418	6436	6453	6470	6487	6504	6521	6538	6555	6571	87.4	2 3 5 7 9			
2.6	6	6571	6588	6605	6621	6638	6654	6671	6687	6703	6719	6736	87.3	2 3 5 7 8			
2.7	7	6736	6752	6768	6784	6800	6815	6831	6847	6863	6878	6894	87.2	2 3 5 6 8			
2.8	8	6894	6909	6925	6940	6956	6971	6986	7001	7016	7031	7046	87.1	2 3 5 6 8			
2.9	9	7046	7061	7076	7091	7106	7121	7136	7150	7165	7179	2.7194	87° 0	1 3 4 6 7			
3°	0	2.7194	7208	7223	7237	7252	7266	7280	7294	7308	7323	7337	86.9	1 3 4 6 7			
3.1	1	7337	7351	7365	7379	7392	7406	7420	7434	7448	7461	7475	86.8	1 3 4 6 7			
3.2	2	7475	7488	7502	7515	7529	7542	7556	7569	7582	7596	7609	86.7	1 3 4 5 7			
3.3	3	7609	7622	7635	7648	7661	7674	7687	7700	7713	7726	7739	86.6	1 3 4 5 6			
3.4	4	7739	7751	7764	7777	7790	7802	7815	7827	7840	7852	7865	86.5	1 3 4 5 6			
3.5	5	7865	7877	7890	7902	7914	7927	7939	7951	7963	7975	7988	86.4	1 2 4 5 6			
3.6	6	7988	8000	8012	8024	8036	8048	8059	8071	8083	8095	8107	86.3	1 2 4 5 6			
3.7	7	8107	8119	8130	8142	8154	8165	8177	8188	8200	8212	8223	86.2	1 2 3 5 6			
3.8	8	8223	8234	8246	8257	8269	8280	8291	8302	8314	8325	8336	86.1	1 2 3 5 6			
3.9	9	8336	8347	8358	8370	8381	8392	8403	8414	8425	8436	2.8446	86° 0	1 2 3 4 6			
4°	0	2.8446	8457	8468	8479	8490	8501	8511	8522	8533	8543	8554	85.9	1 2 3 4 5			
4.1	1	8554	8565	8575	8586	8596	8607	8617	8628	8638	8649	8659	85.8	1 2 3 4 5			
4.2	2	8659	8669	8680	8690	8700	8711	8721	8731	8741	8751	8762	85.7	1 2 3 4 5			
4.3	3	8762	8772	8782	8792	8802	8812	8822	8832	8842	8852	8862	85.6	1 2 3 4 5			
4.4	4	8862	8872	8882	8891	8901	8911	8921	8931	8940	8950	8960	85.5	1 2 3 4 5			
4.5	5	8960	8970	8979	8989	8998	9008	9018	9027	9037	9046	9056	85.4	1 2 3 4 5			
4.6	6	9056	9065	9075	9084	9093	9103	9112	9122	9131	9140	9150	85.3	1 2 3 4 5			
4.7	7	9150	9159	9168	9177	9186	9196	9205	9214	9223	9232	9241	85.2	1 2 3 4 5			
4.8	8	9241	9250	9260	9269	9278	9287	9296	9305	9313	9322	9331	85.1	1 2 3 4 4			
4.9	9	9331	9340	9349	9358	9367	9376	9384	9393	9402	9411	2.9420	85° 0	1 2 3 4 4			

表尾差
1 2 3 4 5
用到此十一列之表尾
差時，照對數表上眉
式二，檢對數表。

Log Tan		正餘切對數表										Log Cotan		表尾差				
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0			1	2	3	4	5
0		1	2	3	4	5	6	7	8	9			1	2	3	4	5	
5°0	Z.9420	9428	9437	9446	9454	9463	9472	9480	9489	9497	Z.9506	84.9	1	2	3	4		
5.1	9506	9515	9523	9532	9540	9549	9557	9565	9574	9582	9591	84.8	1	2	3	4		
5.2	9591	9599	9608	9616	9624	9633	9641	9649	9657	9666	9674	84.7	1	2	2	3	4	
5.3	9674	9682	9690	9699	9707	9715	9723	9731	9739	9747	9756	84.6	1	2	2	3	4	
5.4	9756	9764	9772	9780	9788	9796	9804	9812	9820	9828	9836	84.5	1	2	2	3	4	
5.5	9836	9844	9852	9860	9867	9875	9883	9891	9899	9907	9915	84.4	1	2	2	3	4	
5.6	9915	9922	9930	9938	9946	9953	9961	9969	9977	9984	Z.9992	84.3	1	2	2	3	4	
5.7	Z.9992	0000	0007	0015	0022	0030	0038	0045	0053	0060	I.0068	84.2	1	2	2	3	4	
5.8	I.0068	0075	0083	0090	0098	0105	0113	0120	0128	0135	0143	84.1	1	1	2	3	4	
5.9	0143	0150	0157	0165	0172	0180	0187	0194	0202	0209	I.0216	Z.0°0	1	1	2	3	4	
6°0	I.0216	0223	0231	0238	0245	0253	0260	0267	0274	0281	0289	83.9	1	1	2	3	4	
6.1	0289	0296	0303	0310	0317	0324	0331	0338	0346	0353	0360	83.8	1	1	2	3	4	
6.2	0360	0367	0374	0381	0388	0395	0402	0409	0416	0423	0430	83.7	1	1	2	3	4	
6.3	0430	0437	0444	0451	0457	0464	0471	0478	0485	0492	0499	83.6	1	1	2	3	3	
6.4	0499	0506	0512	0519	0526	0533	0540	0546	0553	0560	0567	83.5	1	1	2	3	3	
6.5	0567	0573	0580	0587	0593	0600	0607	0614	0620	0627	0633	83.4	1	1	2	3	3	
6.6	0633	0640	0647	0653	0660	0667	0673	0680	0686	0693	0699	83.3	1	1	2	3	3	
6.7	0699	0706	0712	0719	0725	0732	0738	0745	0751	0758	0764	83.2	1	1	2	3	3	
6.8	0764	0771	0777	0784	0790	0796	0803	0809	0816	0822	0828	83.1	1	1	2	3	3	
6.9	0828	0835	0841	0847	0854	0860	0866	0873	0879	0885	I.0891	S.0°0	1	1	2	3	3	
7°0	I.0891	0898	0904	0910	0916	0923	0929	0935	0941	0947	0954	82.9	1	1	2	3	3	
7.1	0954	0960	0966	0972	0978	0984	0991	0997	1003	1009	1015	82.8	1	1	2	3	3	
7.2	1015	1021	1027	1033	1039	1045	1051	1058	1064	1070	1076	82.7	1	1	2	3	3	
7.3	1076	1082	1088	1094	1100	1106	1112	1117	1123	1129	1135	82.6	1	1	2	3	3	
7.4	1135	1141	1147	1153	1159	1165	1171	1177	1183	1188	1194	82.5	1	1	2	3	3	
7.5	1194	1200	1206	1212	1218	1223	1229	1235	1241	1247	1252	82.4	1	1	2	3	3	
7.6	1252	1258	1264	1270	1276	1281	1287	1293	1299	1304	1310	82.3	1	1	2	3	3	
7.7	1310	1316	1321	1327	1333	1338	1344	1350	1355	1361	1367	82.2	1	1	2	3	3	
7.8	1367	1372	1378	1384	1389	1395	1400	1406	1412	1417	1423	82.1	1	1	2	3	3	
7.9	1423	1428	1434	1439	1445	1450	1456	1461	1467	1473	I.1478	S.0°0	1	1	2	3	3	
8°0	I.1478	1484	1489	1494	1500	1505	1511	1516	1522	1527	1533	81.9	1	1	2	3	3	
8.1	1533	1538	1544	1549	1554	1560	1565	1571	1576	1581	1587	81.8	1	1	2	3	3	
8.2	1587	1592	1597	1603	1608	1613	1619	1624	1629	1635	1640	81.7	1	1	2	3	3	
8.3	1640	1645	1651	1656	1661	1667	1672	1677	1682	1688	1693	81.6	1	1	2	3	3	
8.4	1693	1698	1703	1709	1714	1719	1724	1729	1735	1740	1745	81.5	1	1	2	3	3	
8.5	1745	1750	1755	1761	1766	1771	1776	1781	1786	1791	1797	81.4	1	1	2	3	3	
8.6	1797	1802	1807	1812	1817	1822	1827	1832	1837	1842	1848	81.3	1	1	2	3	3	
8.7	1848	1853	1858	1863	1868	1873	1878	1883	1888	1893	1898	81.2	1	1	2	3	3	
8.8	1898	1903	1908	1913	1918	1923	1928	1933	1938	1943	1948	81.1	0	1	1	2	2	
8.9	1948	1953	1958	1963	1968	1973	1977	1982	1987	1992	I.1997	S.0°0	0	1	1	2	2	
9°0	I.1997	2002	2007	2012	2017	2022	2026	2031	2036	2041	2046	80.9	0	1	1	2	2	
9.1	2046	2051	2056	2060	2065	2070	2075	2080	2085	2089	2094	80.8	0	1	1	2	2	
9.2	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2132	2137	2142	80.7	0	1	1	2	2	
9.3	2142	2147	2151	2156	2161	2166	2170	2175	2180	2185	2189	80.6	0	1	1	2	2	
9.4	2189	2194	2199	2203	2208	2213	2217	2222	2227	2231	2236	80.5	0	1	1	2	2	
9.5	2236	2241	2245	2250	2255	2259	2264	2269	2273	2278	2282	80.4	0	1	1	2	2	
9.6	2282	2287	2292	2296	2301	2305	2310	2315	2319	2324	2328	80.3	0	1	1	2	2	
9.7	2328	2333	2337	2342	2346	2351	2356	2360	2365	2369	2374	80.2	0	1	1	2	2	
9.8	2374	2378	2383	2387	2392	2396	2401	2405	2410	2414	2419	80.1	0	1	1	2	2	
9.9	I.2419	2423	2428	2432	2437	2441	2445	2450	2454	2459	I.2463	S.0°0	0	1	1	2	2	

Log Tan		正餘切對數表										Log Cotan		表尾差				
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0			1	2	3	4	5
0												90						
0°	-∞	3.2419	5429	7190	8439	9409	0200	0870	1450	1962	2.2419	89						
1	2.2419	2833	3211	3559	3881	4181	4461	4725	4973	5208	5431	88						
2	5431	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6736	6894	7046	7194	87						
3	7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336	8446	86						
4	8446	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	2.9420	85						
5	2.9420	9506	9591	9674	9756	9836	9915	9992	0068	0143	0.0216	84						
6	0.0216	0289	0360	0430	0499	0567	0633	0699	0764	0828	0891	83						
7	0891	0954	1015	1076	1135	1194	1252	1310	1367	1423	1478	82						
8	1478	1533	1587	1640	1693	1745	1797	1848	1898	1948	1997	81						
9	1997	2046	2094	2142	2189	2236	2282	2328	2374	2419	2.4663	80°						
10°	2.4663	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	2887	79	4	8	13	17	21	
11	2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	3275	78	4	8	12	16	19	
12	3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	3634	77	4	7	11	14	18	
13	3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	3968	76	3	7	10	13	17	
14	3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	4281	75	3	6	9	13	16	
15	4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4545	4575	74	3	6	9	12	15	
16	4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	4853	73	3	6	8	11	14	
17	4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	5118	72	3	5	8	11	13	
18	5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	5370	71	3	5	8	10	13	
19	5370	5394	5419	5443	5467	5491	5516	5539	5563	5587	1.5611	70°	2	5	7	10	12	
20°	1.5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	5842	69	2	5	7	10	12	
21	5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	6064	68	2	4	7	9	11	
22	6064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	6279	67	2	4	6	9	11	
23	6279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	6486	66	2	4	6	8	10	
24	6486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	6687	65	2	4	6	8	10	
25	6687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	6882	64	2	4	6	8	10	
26	6882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	7072	63	2	4	6	8	9	
27	7072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	7257	62	2	4	6	7	9	
28	7257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	7438	61	2	4	5	7	9	
29	7438	7455	7473	7491	7509	7526	7544	7562	7579	7597	1.7614	60°	2	4	5	7	9	
30°	1.7614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7736	7753	7771	7788	59	2	3	5	7	9	
31	7788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	7958	58	2	3	5	7	9	
32	7958	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	8125	57	2	3	5	7	8	
33	8125	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	8290	56	2	3	5	7	8	
34	8290	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	8452	55	2	3	5	6	8	
35	8452	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	8613	54	2	3	5	6	8	
36	8613	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	8771	53	2	3	5	6	8	
37	8771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	8928	52	2	3	5	6	8	
38	8928	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	9084	51	2	3	5	6	8	
39	9084	9099	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	1.9238	50°	2	3	5	6	8	
40°	1.9238	9254	9269	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	9392	49	2	3	5	6	8	
41	9392	9407	9422	9438	9453	9468	9483	9499	9514	9529	9544	48	2	3	5	6	8	
42	9544	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	9697	47	2	3	5	6	8	
43	9697	9712	9727	9742	9757	9772	9788	9803	9818	9833	1.9848	46	2	3	5	6	8	
44	1.9848	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	0.0000	45°	2	3	5	6	8	
45°	0.0000																	

尾差
1 2 3 4 5

尾差時，此十列之表

Log Tan 正餘切對數表 Log Cotan

	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9										0	表尾差 1 2 3 4 5	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
45°	0.0000	0015	0030	0045	0061	0076	0091	0106	0121	0136	0152	44	2 3 5 6 8
46	0152	0167	0182	0197	0212	0228	0243	0258	0273	0288	0303	43	2 3 5 6 8
47	0303	0319	0334	0349	0364	0379	0395	0410	0425	0440	0456	42	2 3 5 6 8
48	0456	0471	0486	0501	0517	0532	0547	0562	0578	0593	0608	41	2 3 5 6 8
49	0608	0624	0639	0654	0670	0685	0700	0716	0731	0746	0.0762	40°	2 3 5 6 8
50°	0.0762	0777	0793	0808	0824	0839	0854	0870	0885	0901	0916	39	2 3 5 6 8
51	0916	0932	0947	0963	0978	0994	1010	1025	1041	1056	1072	38	2 3 5 6 8
52	1072	1088	1103	1119	1135	1150	1166	1182	1197	1213	1229	37	2 3 5 6 8
53	1229	1245	1260	1276	1292	1308	1324	1340	1356	1371	1387	36	2 3 5 6 8
54	1387	1403	1419	1435	1451	1467	1483	1499	1516	1532	1548	35	2 3 5 6 8
55	1548	1564	1580	1596	1612	1629	1645	1661	1677	1694	1710	34	2 3 5 6 8
56	1710	1726	1743	1759	1776	1792	1809	1825	1842	1858	1875	33	2 3 5 7 8
57	1875	1891	1908	1925	1941	1958	1975	1992	2008	2025	2042	32	2 3 5 7 8
58	2042	2059	2076	2093	2110	2127	2144	2161	2178	2195	2212	31	2 3 5 7 9
59	2212	2229	2247	2264	2281	2299	2316	2333	2351	2368	0.2386	30°	2 3 5 7 9
60°	0.2386	2403	2421	2438	2456	2474	2491	2509	2527	2545	2562	29	2 4 5 7 9
61	2562	2580	2598	2616	2634	2652	2670	2688	2707	2725	2743	28	2 4 5 7 9
62	2743	2762	2780	2798	2817	2835	2854	2872	2891	2910	2928	27	2 4 6 7 9
63	2928	2947	2966	2985	3004	3023	3042	3061	3080	3099	3118	26	2 4 6 8 9
64	3118	3137	3157	3176	3196	3215	3235	3254	3274	3294	3313	25	2 4 6 8 10
65	3313	3333	3353	3373	3393	3413	3433	3453	3473	3494	3514	24	2 4 6 8 10
66	3514	3535	3555	3576	3596	3617	3638	3659	3679	3700	3721	23	2 4 6 8 10
67	3721	3743	3764	3785	3806	3828	3849	3871	3892	3914	3935	22	2 4 6 9 11
68	3936	3958	3980	4002	4024	4046	4068	4091	4113	4136	4158	21	2 4 7 9 11
69	4158	4181	4204	4227	4250	4273	4296	4319	4342	4366	0.4389	20°	2 5 7 10 12
70°	0.4389	4413	4437	4461	4484	4509	4533	4557	4581	4606	4630	19	2 5 7 10 12
71	4630	4655	4680	4705	4730	4755	4780	4805	4831	4857	4882	18	3 5 8 10 13
72	4882	4908	4934	4960	4986	5013	5039	5066	5093	5120	5147	17	3 5 8 11 13
73	5147	5174	5201	5229	5256	5284	5312	5340	5368	5397	5425	16	3 6 8 11 14
74	5425	5454	5483	5512	5541	5570	5600	5629	5659	5689	5719	15	3 6 9 12 15
75	5719	5750	5780	5811	5842	5873	5905	5936	5968	6000	6032	14	3 6 9 13 16
76	6032	6065	6097	6130	6163	6196	6230	6264	6298	6332	6366	13	3 7 10 13 17
77	6366	6401	6436	6471	6507	6542	6578	6615	6651	6688	6725	12	4 7 11 14 18
78	6725	6763	6800	6838	6877	6915	6954	6994	7033	7073	7113	11	4 8 12 16 19
79	7113	7154	7195	7236	7278	7320	7363	7406	7449	7493	0.7537	10°	4 8 13 17 21
80°	0.7537	7581	7626	7672	7718	7764	7811	7858	7906	7954	8003	9	
81	8003	8052	8102	8152	8203	8255	8307	8360	8413	8467	8522	8	
82	8522	8577	8633	8690	8748	8806	8865	8924	8985	9046	9109	7	
83	9109	9172	9236	9301	9367	9433	9501	9570	9640	9711	0.9784	6	
84	0.9784	9857	9932	0908	0085	0164	0244	0326	0409	0494	1.0580	5	
85	1.0580	0669	0759	0850	0944	1040	1138	1238	1341	1446	1554	4	
86	1554	1664	1777	1893	2012	2135	2261	2391	2625	2663	2906	3	
87	2906	2954	3106	3264	3429	3599	3777	3962	4155	4357	4569	2	
88	4569	4792	5027	5275	5539	5819	6119	6441	6789	7157	1.7581	1	
89	1.7581	8038	8550	9130	9800	2.0591	1561	2810	4571	7531	∞	0°	

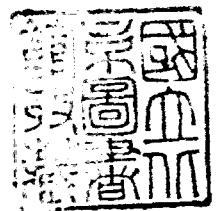
用此十列之表
尾差時
者後一表

Log Tan		正餘切對數表										Log Cotan		表尾差			
0		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0		1	2	3	4	5
80° 0	0.7537	7541	7546	7550	7555	7559	7563	7568	7572	7577	0.7581	9.9	0	1	1	2	2
80.1	7581	7586	7590	7595	7599	7604	7608	7613	7617	7622	7626	9.8	0	1	1	2	2
80.2	7626	7631	7635	7640	7644	7649	7654	7658	7663	7667	7672	9.7	0	1	1	2	2
80.3	7672	7676	7681	7685	7690	7695	7699	7704	7708	7713	7718	9.6	0	1	1	2	2
80.4	7718	7722	7727	7731	7736	7741	7745	7750	7755	7759	7764	9.5	0	1	1	2	2
80.5	7764	7769	7773	7778	7783	7787	7792	7797	7801	7806	7811	9.4	0	1	1	2	2
80.6	7811	7815	7820	7825	7830	7834	7839	7844	7849	7853	7858	9.3	0	1	1	2	2
80.7	7858	7863	7868	7872	7877	7882	7887	7891	7896	7901	7906	9.2	0	1	1	2	2
80.8	7906	7911	7915	7920	7925	7930	7935	7940	7944	7949	7954	9.1	0	1	1	2	2
80.9	7954	7959	7964	7969	7974	7978	7983	7988	7993	7998	0.8003	9° 0	0	1	1	2	2
81° 0	0.8003	8008	8013	8018	8023	8027	8032	8037	8042	8047	8052	8.9	0	1	1	2	2
81.1	8052	8057	8062	8067	8072	8077	8082	8087	8092	8097	8102	8.8	0	1	1	2	2
81.2	8102	8107	8112	8117	8122	8127	8132	8137	8142	8147	8152	8.7	1	1	2	2	3
81.3	8152	8158	8163	8168	8173	8178	8183	8188	8193	8198	8203	8.6	1	1	2	2	3
81.4	8203	8209	8214	8219	8224	8229	8234	8239	8245	8250	8255	8.5	1	1	2	2	3
81.5	8255	8260	8265	8271	8276	8281	8286	8291	8297	8302	8307	8.4	1	1	2	2	3
81.6	8307	8312	8318	8323	8328	8333	8339	8344	8349	8355	8360	8.3	1	1	2	2	3
81.7	8360	8365	8371	8376	8381	8387	8392	8397	8403	8408	8413	8.2	1	1	2	2	3
81.8	8413	8419	8424	8429	8435	8440	8446	8451	8456	8462	8467	8.1	1	1	2	2	3
81.9	8467	8473	8478	8484	8489	8495	8500	8506	8511	8516	0.8522	8° 0	1	1	2	2	3
82° 0	0.8522	8527	8533	8539	8544	8550	8555	8561	8566	8572	8577	7.9	1	1	2	2	3
82.1	8577	8583	8588	8594	8600	8605	8611	8616	8622	8628	8633	7.8	1	1	2	2	3
82.2	8633	8639	8645	8650	8656	8662	8667	8673	8679	8684	8690	7.7	1	1	2	2	3
82.3	8690	8696	8701	8707	8713	8719	8724	8730	8736	8742	8748	7.6	1	1	2	2	3
82.4	8748	8753	8759	8765	8771	8777	8782	8788	8794	8800	8806	7.5	1	1	2	2	3
82.5	8806	8812	8817	8823	8829	8835	8841	8847	8853	8859	8865	7.4	1	1	2	2	3
82.6	8865	8871	8877	8883	8888	8894	8900	8906	8912	8918	8924	7.3	1	1	2	2	3
82.7	8924	8930	8936	8942	8949	8955	8961	8967	8973	8979	8985	7.2	1	1	2	2	3
82.8	8985	8991	8997	9003	9009	9016	9022	9028	9034	9040	9046	7.1	1	1	2	2	3
82.9	9046	9053	9059	9065	9071	9077	9084	9090	9096	9102	0.9109	7° 0	1	1	2	2	3
83° 0	0.9109	9115	9121	9127	9134	9140	9146	9153	9159	9165	9172	6.9	1	1	2	2	3
83.1	9172	9178	9184	9191	9197	9204	9210	9216	9223	9229	9236	6.8	1	1	2	2	3
83.2	9236	9242	9249	9255	9262	9268	9275	9281	9288	9294	9301	6.7	1	1	2	2	3
83.3	9301	9307	9314	9320	9327	9333	9340	9347	9353	9360	9367	6.6	1	1	2	2	3
83.4	9367	9373	9380	9386	9393	9400	9407	9413	9420	9427	9433	6.5	1	1	2	2	3
83.5	9433	9440	9447	9454	9460	9467	9474	9481	9488	9494	9501	6.4	1	1	2	2	3
83.6	9501	9508	9515	9522	9529	9536	9543	9549	9556	9563	9570	6.3	1	1	2	2	3
83.7	9570	9577	9584	9591	9598	9605	9612	9619	9626	9633	9640	6.2	1	1	2	2	3
83.8	9640	9647	9654	9662	9669	9676	9683	9690	9697	9704	9711	6.1	1	1	2	2	3
83.9	9711	9719	9726	9733	9740	9747	9755	9762	9769	9777	0.9784	6° 0	1	1	2	2	3
84° 0	0.9784	9791	9798	9806	9813	9820	9828	9835	9843	9850	9857	5.9	1	1	2	2	3
84.1	9857	9865	9872	9880	9887	9895	9902	9910	9917	9925	0.9932	5.8	1	1	2	2	3
84.2	0.9932	9940	9947	9955	9962	9970	9978	9985	9993	0000	1.0008	5.7	1	2	2	2	3
84.3	1.0008	0016	0023	0031	0039	0047	0054	0062	0070	0078	0085	5.6	1	2	2	2	3
84.4	0085	0093	0101	0109	0117	0125	0133	0140	0148	0156	0164	5.5	1	2	2	2	3
84.5	0164	0172	0180	0188	0196	0204	0212	0220	0228	0236	0244	5.4	1	2	2	2	3
84.6	0244	0253	0261	0269	0277	0285	0293	0301	0310	0318	0326	5.3	1	2	2	2	3
84.7	0326	0334	0343	0351	0359	0367	0376	0384	0392	0401	0409	5.2	1	2	2	2	3
84.8	0409	0418	0426	0435	0443	0451	0460	0468	0477	0485	0494	5.1	1	2	2	2	3
84.9	1.0494	0503	0511	0520	0528	0537	0546	0554	0563	0572	1.0580	5° 0	1	2	2	2	3

Log Tan 正餘切對數表 Log Cotan

0	5 4 3 2 1 0										表尾差 1 2 3 4 5		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0			
85.0	1.0580	0589	0598	0607	0616	0624	0633	0642	0651	0660	1.0669	4.9	1 2 3 4 4
85.1	0669	0678	0687	0695	0704	0713	0722	0731	0740	0750	0759	4.8	1 2 3 4 4
85.2	0759	0768	0777	0786	0795	0804	0814	0823	0832	0841	0850	4.7	1 2 3 4 5
85.3	0850	0860	0869	0878	0888	0897	0907	0916	0925	0935	0944	4.6	1 2 3 4 5
85.4	0944	0954	0963	0973	0982	0992	1002	1011	1021	1030	1040	4.5	1 2 3 4 5
85.5	1040	1050	1060	1069	1079	1089	1099	1109	1118	1128	1138	4.4	1 2 3 4 5
85.6	1138	1148	1158	1168	1178	1188	1198	1208	1218	1228	1238	4.3	1 2 3 4 5
85.7	1238	1249	1259	1269	1279	1289	1300	1310	1320	1331	1341	4.2	1 2 3 4 5
85.8	1341	1351	1362	1372	1383	1393	1404	1414	1425	1435	1446	4.1	1 2 3 4 5
85.9	1446	1457	1467	1478	1489	1499	1510	1521	1532	1543	1.1554	4.0	1 2 3 4 5
86.0	1.1554	1564	1575	1586	1597	1608	1619	1630	1642	1653	1664	3.9	1 2 3 4 6
86.1	1664	1675	1686	1698	1709	1720	1731	1743	1754	1766	1777	3.8	1 2 3 5 6
86.2	1777	1788	1800	1812	1823	1835	1846	1858	1870	1881	1893	3.7	1 2 3 5 6
86.3	1893	1905	1917	1929	1941	1952	1964	1976	1988	2000	2012	3.6	1 2 4 5 6
86.4	2012	2025	2037	2049	2061	2073	2086	2098	2110	2123	2135	3.5	1 2 4 5 6
86.5	2135	2148	2160	2173	2185	2198	2210	2223	2236	2249	2261	3.4	1 3 4 5 6
86.6	2261	2274	2287	2300	2313	2326	2339	2352	2365	2378	2391	3.3	1 3 4 5 6
86.7	2391	2404	2418	2431	2444	2458	2471	2485	2498	2512	2525	3.2	1 3 4 5 7
86.8	2525	2539	2552	2566	2580	2594	2608	2621	2635	2649	2663	3.1	1 3 4 6 7
86.9	2663	2677	2692	2706	2720	2734	2748	2763	2777	2792	1.2806	3.0	1 3 4 6 7
87.0	1.2806	2821	2835	2850	2864	2879	2894	2909	2924	2939	2954	2.9	1 3 4 6 7
87.1	2954	2969	2984	2999	3014	3029	3044	3060	3075	3091	3106	2.8	2 3 5 6 8
87.2	3106	3122	3137	3153	3169	3185	3200	3216	3232	3248	3264	2.7	2 3 5 6 8
87.3	3264	3281	3297	3313	3329	3346	3362	3379	3395	3412	3429	2.6	2 3 5 7 8
87.4	3429	3445	3462	3479	3496	3514	3530	3547	3564	3582	3599	2.5	2 3 5 7 9
87.5	3599	3616	3634	3652	3669	3687	3705	3723	3740	3758	3777	2.4	2 4 5 7 9
87.6	3777	3795	3813	3831	3850	3868	3887	3905	3924	3943	3962	2.3	2 4 6 7 9
87.7	3962	3981	4000	4019	4038	4057	4077	4096	4116	4135	4155	2.2	2 4 6 8 10
87.8	4155	4175	4195	4215	4235	4255	4275	4295	4316	4336	4357	2.1	2 4 6 8 10
87.9	4357	4378	4399	4420	4441	4462	4483	4504	4525	4547	1.4569	2.0	2 4 6 8 11
88.0	1.4569	4591	4613	4635	4657	4679	4702	4724	4747	4769	4792	1.9	2 4 7 9 11
88.1	4792	4815	4838	4861	4883	4908	4932	4955	4979	5003	5027	1.8	2 5 7 9 12
88.2	5027	5051	5076	5100	5125	5149	5174	5199	5225	5250	5275	1.7	2 5 7 10 12
88.3	5275	5301	5327	5353	5379	5405	5432	5458	5485	5512	5539	1.6	3 5 8 11 13
88.4	5539	5566	5594	5621	5649	5677	5705	5733	5762	5790	5819	1.5	3 6 8 11 14
88.5	5819	5848	5878	5907	5937	5967	5997	6027	6057	6088	6119	1.4	3 6 9 12 15
88.6	6119	6150	6182	6213	6245	6277	6309	6342	6375	6408	6441	1.3	3 6 10 13 16
88.7	6441	6475	6508	6542	6577	6611	6646	6682	6717	6753	6789	1.2	3 7 10 14 17
88.8	6789	6825	6862	6899	6936	6974	7012	7050	7088	7127	7167	1.1	4 8 11 15 19
88.9	7167	7206	7246	7287	7328	7369	7410	7452	7495	7538	1.7581	1.0	
89.0	1.7581	7624	7669	7713	7758	7804	7850	7896	7943	7990	8038	0.9	
89.1	8038	8087	8136	8186	8236	8287	8338	8390	8443	8496	8550	0.8	
89.2	8550	8605	8660	8716	8773	8830	8889	8948	9008	9068	9130	0.7	
89.3	9130	9193	9256	9320	9386	9452	9519	9588	9657	9728	1.9800	0.6	
89.4	1.9800	9873	9947	0022	0099	0177	0257	0338	0421	0505	2.0591	0.5	
89.5	2.0591	0679	0769	0860	0954	1049	1147	1246	1349	1453	1561	0.4	
89.6	1561	1671	1783	1899	2018	2140	2266	2396	2530	2668	2810	0.3	
89.7	2810	2957	3110	3268	3431	3602	3779	3964	4157	4359	4571	0.2	
89.8	4571	4794	5028	5277	5540	5820	6120	6442	6789	7167	2.7581	0.1	
89.9	2.7581	8039	8550	9130	9800	3.0592	1561	2810	4571	7581	∞	0.0	

式(三)檢對數表。
用此十一列之表尾
差時照對數表上層公



本 書 於 二 十 四 年 七 月 經
 國 民 政 府 教 育 部 審 定
 領 到 教 字 第 六 十 七 號 執 照

中 華 民 國 二 十 二 年 七 月 初 版
 中 華 民 國 二 十 四 年 六 月 三 版

版 權 所 有
 翻 印 必 究

初 級 中 學 用
 (57311)

復 科 書 與 三 角 一 冊

每 冊 定 價 大 洋 肆 角 伍 分

外 埠 酌 加 運 費 匯 費

編 著 者 周 元 瑞

主 編 人 王 雲 五

印 刷 所 上 海 河 南 路 商 務 印 書 館

發 行 所 上 海 及 各 埠 商 務 印 書 館

◆ 025356

(本 書 校 對 者 林 國 民)

4F74



復初中三角 定價肆角伍分