3

212363

(2)

虞明禮編著

復興高級中學教科書

代數學

上冊

商務印書館發行

編輯大意

本書依據教育部最近頒布課程標準編輯,供高級中學代數科教本之用.

本書分四大段.第一章爲一段,略論全部代數的基本.第二章至第十一章爲一段,詳論各種代數式的重要運算.第十二章至第二十二章爲一段,詳論方程式及不等式的解法和理論.第二十三章以後爲一段,略論方程式以外的實際問題,如序列,組合,或然率,級數等問題.各章各節之間力謀前後銜接,一矯往昔教科書各章獨立之弊.

本書注重學生自動研習.例如,複習初中代數部份時,往往只列標題,使學生將固有智識自行回味,並加整理.又如,習題及備註中,往往有補充正課之不足者,亦只略予提示,使學者自行探討,以培養自學的習慣.

本書除於理論方面嚴密注意外,關於應用技

能亦極注意.例如,初中教材之切實複習,各章習題之豐富充實,開方,根式,對數之反覆說明,在在均以訓練演算純熟爲目標.

本書論述一次方程式較遲.因一次方程式在初中代數中雖宜儘量提早,以示代數之功用;但在高中代數則不然.高中代數,關於方程式方面,應注重同根原理及根之變化等等.理論較嚴,講授不宜過早也.

本書對於各種方程式集中論述,以應學習心理的需求.蓋當一次方程式學完之後,學者切望易瞭一次以上之方程式.本書由一次而二次,三次,四次以至n次,連續討論,而不間以他種教材.原原本本,一貫相承,比之分期敍述,零零碎碎,實有事半功倍之效.

本書將行列式緊接聯立一次方程式之後.因學生在求解多元聯立一次方程式,正苦手續繁難時,忽然利用行列式,予以極簡便的解法,使前此消元困難完全免除.此在學習,心理上實有無上的愉快.學者於此,自然折服算學家心思之巧,

油然起向上之心.

本書將序列,組合等等移置方程式通論之後.因求解序列,組合等問題,較之求解方程式通論中問題,有難無易故也.

本書不濫用函數名稱.蓋函數雖爲高等算學中重要觀念之一;但其意義,乃在研究函數與其所含變數二者相應變化之關係,和代數式之各種基本運算,實爲兩事.故本書非至確有需要時,決不濫用函數名稱,以免頭緒繁多,學者感受辨別不淸之苦.

本書圖解扼要.圖解本屬解析幾何範圍以內,其在代數之應用,不過說明方程式之性質及解法.故本書關於圖解亦只以此部爲限.

本書極富彈性.如學生程度較有根底,則於附有星標*諸節,可擇要複習或全部略去;如學生程度較低,則較難習題可以不做,艱深理論可取簡易者代之.〔例如,論高級行列式可取四級爲代表;論 n 元一次方程組,可取特例 $n=4$ 言之,不必詳論其通例.〕斟酌損益,是在教師之活用耳.

本書原稿在江蘇省立松江女中高二甲乙組,由編者及沈式寰先生試用一年,成績均甚圓滿.修正時承沈先生根據試教經驗,對於教材之取合編排,多方予以良好指正;又承胡春池先生審閱第一章,鈕庭來君校閱全部,使此書減少許多錯誤.編者曷勝感激!謹書於此,以誌不忘!

編者學識淺陋,錯誤自知不免.海內專家倘肯進而教之,俾此書漸臻完善,則幸甚矣.

民國二十三年七月編者.

目　錄

代數學

上　册

第一章

總　論

§1. **代數之目的.** 初等算學大別爲二類.一類論形,一類論數.論形者爲幾何;論數者則爲算術及代數.算術之目的,在於研究數量的運算;代數之目的乃繼續算術,對於數量之運算作進一步的探求.代數的方法比算術巧,代數的範圍比算術廣.英人牛頓曰"代數者,廣義之算術也."其言洵有至理.

§2. **代數之方法.** 代數中如何能將算術的範圍推廣?端賴下列兩種方法.

第一法 用文字表數,使(a)運算的形式簡明,(b)答數的範圍加廣,(c)解題的工具銳利.今依次舉例明之.

〔例一〕 設有問題:“大小二數之和爲140,自小數3倍減去大數2倍,所得之差爲30.求此二數.”

算術解法. 因小數+大數是140,

所以2倍小數+2倍大數是280.

又因3倍小數−2倍大數是30.

所以2倍小數+2倍大數+3倍小數−2倍大數是280+30.

所以5倍小數是310.

所以小數是310÷5=62. 大數是140−62=78.

代數解法: 設$x=$小數, $y=$大數,則

$$\begin{cases} x+y=140 \cdots\cdots(1) \\ 3x-2y=30 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

2(1)得 $$2x+2y=280 \cdots\cdots(1')$$

(1′)+(2)得 $$5x=310$$

$$\therefore \quad x=62=\text{小數}$$

代入(1)得 $$y=140-62=78=\text{大數}.$$

學者試觀代數解法比之算術解法何等簡明!

〔例二〕 仍就前例來說.在算術,依四則解法能解例一之問題,得其答數爲

$$(A)\quad \begin{cases} \text{小數} = 62 \\ \text{大數} = 78 \end{cases}$$

在代數,應用文字代表已知數,則可解範圍更廣之問題:"大小兩數之和爲 a;自小數 m 倍減去大數 n 倍,所得之差爲 b.求此二數."依代數解法,得其答數爲

$$(B)\quad \begin{cases} \text{小數} = \dfrac{na+b}{m+n} \\ \text{大數} = \dfrac{ma-b}{m+n} \end{cases}$$

學者注意(B)式所表答數比(A)式範圍加廣矣!蓋在此類問題中,任設 m, n, a, b 爲何值,所求大小二數皆可由(B)式求得之.故(B)式代表一類問題之答數;至於(A)式,則僅表單獨一個問題之答數.二者適用的範圍自有廣狹之不同也.

〔例三〕 設有問題:"某數 7 倍與其平方之和爲 198,求該數."此問題,在算術無法解決;在代數則由方程式 $x^2+7x=198$ 可立得其答數爲 11 或 -18.代數之解法,不亦神妙乎哉!

第二法. 創造新數以濟運算之窮.算術上的

運算往往有相當限制;逾此限制,算法便不通行,例如,在算術減法中,減數如大於被減數,則此減法便不通;代數上創造負數,減法乃無不可行.又如在算術開方中,被開方數如不爲完全整方,則此不盡根數之眞值便無法求得,其性質因亦不能明瞭;代數上引用無理數,此類根式的性質及算法乃能全部了然.不特如此,即在代數開方中,倘所論之數只限於正負數,則當被開方數爲負數時,此開方算法亦不能通行.故又創立虛數以濟其窮.自有虛數,開方算法乃毫無限制矣.

§3. **代數之數系.** 如上(第二法)所述,代數上爲濟算法之窮計,常創立新數以求其通,故代數上所論之數比算術上所論者範圍加廣;而且除1外,各類新數皆由適應算法的需要而來,茲列表明之於下:—

算法	新數			
加法	正整數			
減法[被減數小於減數時]	負數	有理數		
除法[不能整除時]	分數		實數	
開方[開方不盡時]		無理數		代數數
開方[被開方數爲負數時]			虛數	

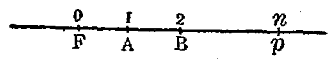
正数
負数

正数
負数

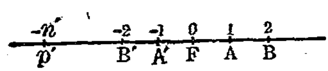
集合上表所列各數乃完成代數的數系.

§4. **代數數之圖形表示.** 代數系中任何一數,皆可用平面上之一點表之.略陳其說如下:—

(1) 正實數. 在一直線上取定點 F 表零,定長 FA 爲單位1,則無論 n 爲有理數抑爲無理數,由幾何作圖法恆可得 $FP=nFA=n$. 故任何數 n 可以適當之 P 點表之.



(2) 負實數. 在上述直線上 F 之左側取 P' 使 $FP'=-nFA=-n$, 則此 P' 點便可代表 $-n$



(3) 虛數. 詳見第十八章.

§5. **代數之基礎.** 代數上一切運算之基礎全在幾條假設,此類假設是否眞確,理論上無法證明.不過按之實際,無往不符,所以算學家乃將此類假設認爲公理或公律.代數上所有公律可分爲兩類:

第一類. 關於數之運算者名曰運算公律.列舉於下:—

(Commutative law)

(1)　在加法有對易律: $a+b=b+a$

結合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$

$=(a+c)+b.$

(2)　在乘法有對易律: $ab=ba$

(Associative law

結合律: $(ab)c=a(bc)=(ac)b.$

配分律 $a(b+c)=ab+ac.$

(Distributive law

上述三律(對易,結合,配分)乃代數上虛實各數運算之基本公律.此類公律的來源,最初是由正整數算法的啓示.其後乃假定此三律爲天經地義,凡由舊算所生之一切新數,其算法須經適當的規定(新數既然是新的,其算法照理可以隨便規定;但爲符合上述三律起見,此規定便不能隨便),務使此三律仍能完全符合.

例如,在初中代數,吾人巳知下列幾種算法:

I.　$a+(-b)=a-b$　　II.　$a-(-b)=a+b.$

III.　$a(-b)=-ab$　　IV.　$(-a)(-b)=ab.$

何以知上列算法果爲正確乎?無他,以其能合前述三律之故也.試就算法III, IV考之.

(a)　先驗乘法對易律能否符合?

依IV,　$(-a)(-b)=ab,$　$(-b)(-a)=ba.$

但 a,b 俱為正數,其乘算服從對易律: $ab=ba$.

$$\therefore \quad (-a)(-b)=(-b)(-a).$$

(b) 次驗乘法結合律能否符合?

依 IV, $(-a)(-b)=ab$

所以 $[(-a)(-b)](-c)=ab(-c)=-abc$ 〔依 III.〕

又依 IV, $(-b)(-c)=bc$

所以 $(-a)[(-b)(-c)]=(-a)bc=-abc$ 〔依 III.〕

同樣 $[(-a)(-c)](-b)=-abc$

$$\therefore [(-a)(-b)](-c)=(-a)[(-b)(-c)]=[(-a)(-c)](-b)$$

(c) 再驗乘法配分律能否符合?

因 $(-a)[(-b)+(-c)]=(-a)[-(b+c)]=a(b+c)$

$$=ab+ac$$

又 $(-a)(-b)+(-a)(-c)=ab+ac$

$$\therefore \quad (-a)[(-b)+(-c)]=(-a)(-b)+(-a)(-c).$$

同樣,依上述 I, II, III, IV 幾條算法,加法中對易結合兩律亦均能適合.學者試自驗之.

第二類. 關於等式之推演者名曰等式推演公律.推演公律共有四條:

若 $a=b,\ c=d,$ 則 $a+c=b+d.$

$$\text{若 } a=b,\ c=d,\qquad \text{則 } a-c=b-d.$$

$$\text{若 } a=b,\ c=d,\qquad \text{則 } ac=bd.$$

$$\text{若 } a=b,\ c=d\neq 0,\ \text{則 } a\div c=b\div d.$$

其中 a, b, c, d 任爲何數.

以上四律,又名**等量公理**.等量公理,在代數上致用極廣.無論解方程式或證恆等式,凡由一個等式推出另一等式,莫不以此諸律爲根據,讀者愼勿以其平凡淺易而忽之也.

習題一

1. 依初中代數方法解下列諸方程(其中 a, b 俱爲正整數),並察其根各爲數系中的何種數.

$$ax-b=0 \qquad \left(\frac{b}{a}\neq\text{整數.}\right)$$

$$ax+b=0$$

$$x^2-b=0$$

$$x^2+b=0$$

$$x^2+x+1=0 \qquad \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$

然則各種新數的產生,是否又可視爲解方程式的結果?　是

2. 幾何的基礎,是否也在幾條不可證明的假設?這些假設便是公理和公法.試本所知儘量說出代數幾何的異同.

3. 完成 §5〔第一類〕最後一句.

第二章

整式四則

§6* 定義. 下列諸名詞,學者在初中代數中皆已學過,能各舉數例詳釋其意義否?

(1) 代數式.

(2) 代數式之值.

(3) 項.

(4) 因數.

(5) 係數.

(6) 同類項,不同類項.

(7) 整式,分式.

(8) 有理式,無理式.

(9) 有理整式.

(10) 單項式,二項式,多項式.

(11) 指數,冪.

(12) 項之次數.(項之含有一個文字者,含有多個文字者,各如何決定?)

(13) 式之次數.

(14) 昇冪,降冪,順列.

(15) 齊次式(等次式).

習題二

1. 指數與係數有何區別?試舉例以明之.

2. 因數與係數之區別何在?舉例說明之.

3. 項與式之區別何在?舉例說明之.

4. 下列諸式中各有幾項?

(a) $a+b-c\times d\div e.$ 2

(b) $a\div b\times c\div d\times e\div f\div g\times h.$

(c) $1+2-3+4+5x-6y.$

(d) $x^3-x^2+x+1.$ 4

5. 設 $a=1, b=2, c=3, d=4, e=5, f=6, g=7, h=8, y=9, x=10,$ 求上題各式之值.

6. 第4題中,何者爲單項式?二項式?三項式?多項式?

7. 整式與多項式有何區別?舉例明之.

8. 下列諸式中,何者爲x之整式?何者爲y之整式?何者爲x,y之整式?何者非x之整式?何者非y之整式?

(a) $x^2+y^2+3xy.$ (b) $x^2+x\div y$

(c) $y^3+y^2+y\div x.$ (d) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{xy}{9}.$ 整式

(e) $\dfrac{abc}{x+y}+x-y.$　　(f) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+xy.$

9. 下列諸式,依 x 之昇冪排列,其形如何?依降冪排列又如何?

(a) $x^3+3x+8-x^4+5x^6.$

(b) $x^4+5xy^3+4x^2y^2+y^4.$

10. a^3 與 b^3 爲同類項否? $3a^2b$, $3ab^2$ 爲同類項否?

a^3 與 a^2 爲同類項否? $-3x^my^n$, $100x^my^n$ 爲同類項否?

§7* 正負數算法. 正負數四則,亦爲初中代數所已詳述者,茲爲複習計,再將此類問題,分條列舉於下:—

(1) 加法.

(a) 正數 + 正數,如何計算?

(b) 負數 + 負數,如何計算?

(c) 正數 + 負數,如何計算?

可見(甲)同號兩數相加,其代數和之符號如何?絕對值如何?

(乙)異號兩數相加其代數和之符號如何?絕對值如何?

(2) 減法.

(a) 任何數 − 正數,如 $x-(+a)=?$ 〔$=x+(-a)$〕

(b) 任何數－負數，如 $x-(-a)=?\,[=x+(+a)]$

可見欲做減法，如何可變爲加法去做？

(3) 乘法.

(a) 正數×正數：$(+a)(+b)=?$

(b) 正數×負數：$(+a)(-b)=?$

(c) 負數×負數：$(-a\,(-b)=?$

可見(甲)同號兩數相乘，其積之絕對值如何？符號如何？

(乙)異號兩數相乘，其積之絕對值如何？符號如何？

(4) 除法. 除法爲乘法之還原，由乘法可答下之問題：—

(a) $\dfrac{\text{正數}}{\text{正數}}$ 如 $\dfrac{+ab}{+a}=?$

(b) $\dfrac{\text{正數}}{\text{負數}}$ 如 $\dfrac{+ab}{-a}=?$

(c) $\dfrac{\text{負數}}{\text{正數}}$ 如 $\dfrac{-ab}{+a}=?$

(d) $\dfrac{\text{負數}}{\text{負數}}$ 如 $\dfrac{-ab}{-a}=?$

然則(甲)同號兩數相除，其商之絕對值如何？符號如何？

(乙)異號兩數相除,其商之絕對值如何?符號如何?

練習題三

1　設 $a=5,\ b=-2,\ x=-4,\ y=-1$,試求下列各式之值.

(a) $x+b+x+y.$　　(b) $a+b+x-y.$

(c) $a-b-x-y.$　　(d) $a-b+x-y.$

(e) $2a-3b+4x-5y.$　　(f) $10a-9b-8x-7y.$

(g) $a^2+b^2+x^2+y^2.$　　(h) $a^3+b^3+x^3+y^3.$

(i) $a^3-b^3-x^3\div y^3.$　　(j) $a^2b^3-x^3y^2+x^3\div y^3.$

(k) $a^3x^3+b^3y^3.$　　(l) $a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3.$

2.　化簡下列各式:—

(a) $(-1)^2(-2)^3(-1)^5=?$

(b) $(-1)^3\div(-2)^3\times(-2)^4\div(-1)^5=?$

(c) $(-1)^2(-1)^{11}(-1)^0\div(-1)^{30}=?$ $1(-1)\cdot(-1)\div(-\ )=1$

(d) $(-2)^8\div(-1)^4=?.$

(e) $(-6)^5\div(-3)^5=?$　　(f) $(-6)^5\div(-2)^4=?$

§8* 整式四則複習之三. 仿上節仍將此中應有之問題分條列舉於下:—

(1) 加法.

(a) 同類單項式相加,如何求和?

〔例〕 求 $ax, bx, -cx$ 三者之和.

(b) 不同類單項式相加,如何求和?

〔例〕 求 $x^2, 2x, 3y$ 之和.

(c) 單項式與多項式相加,如何求和?

〔例〕 求 $8x^3, -5x^2, x^3+x^2-6x+7$ 三者之和.

(d) 多項式與多項式相加,如何求和?演算形式有幾種?排列法何者最簡?何者不易致誤?

〔例〕 求 $3x^2+5x+6y$, $7x^2-8x+2y$, $5x^3-8y$ 三式之和.

(2) 減法. 如何利用加法以演算減法?

(3) 乘法.

(a) 單項式相乘. 如何定其積之(1)符號,(2)係數,(3)文字及指數. ($x^m \cdot x^n = ?$)

〔例〕

$$-3a^2 \times 5ab^3 = ?$$

$$(-3a)(-6b)(-7abc) = ?$$

(b) 單項式與多項式相乘. 如

$$A(B+C-D) = ?$$

用語言表之,其規則如何?

〔例〕 $-8xy(1+7xy-9x^2y^2+6x^3-7y^4) = ?$

(c) 多項式相乘. 如

$$(A+B)(C+D-E)=?$$

用語言表之,其規則如何?

〔例一〕 $(3x^2+5x+1)(3-8x)$

$=9x^2+15x+3-24x^3-40x^2-8x$

$=?$

但在實際運算上有時是否先如下排列,再行乘算?

$$\begin{array}{r} 3x^2+5x+1 \\ -8x\ +3 \\ \hline \end{array}$$

此種排法,好處何在?

〔例二〕 求 $8x+7x^3-8x^2+1$ 與 $3x-9+2x^2$ 之積.

(4) 除法.

(a) 單項式相除. 如何求其商之(1)符號,(2)係數,(3)文字及指數? ($x^m \div x^n=?$)

〔例〕 $25a^3b^2c\div(-5abc)=?$

$-25a^3b^2c\div(-6abc)=?$

$-2x\div x^2=?$

(b) 以單項式除多項式. 如

$(A+B-C)\div D=A\div D+B\div D-C\div D$, 然否?

用語言表之,其規則如何?

〔例〕 $(24x^5-18x^4+12x^2-6x)\div(-6x)=?$

(c) 多項式相除. 如

$$(A+B-C)\div(D+E)=(A+B-C)\div D+(A+B-C)\div E,$$ 然否?

然則多項相除之規則究應如何?先就下列試演之.

〔例〕 $(x^4+4x^2+9)\div(2x+3+x^2)=?$

然則多項式相除之規則如何?

習題四

1. 由加減法推出撤去括號之規則:—

(a) 括號前有"+"號者去括號後括號內各項原有之符號應否改變?

(b) 括號前有"−"號者又如何?

2. 由前題所述撤去括號之規則,推出插入括號之規則.

3. 欲將 $13+(8-9+5\times6-40)$ 化簡爲一數,不去括號可乎?但欲將 $3x+5y-6z-(7x-8y+9z)+(x+85y-10z)$ 化爲一簡短之式,不去括號可乎?然則去括號之手續,實際上有此需要否?

4. 一式之中如所含括號不止一層者,去括號時應遵守如何之秩序?

5. 化簡下列各式(去括號而整理其結果):—

(a) $x-(-x-2y+z)+(-x+y)$.

(b) $2x-\overline{x-y}+(-x+y)$.

(c) $m+n-[(n+m)-(m-n)]$.

(d) $3x-[3y+\{3z-(z-x)+y\}-2x]$. $=3x-[3y+3z-z+x+y-2x]$

$=3x-[3y+3z+z-x-y-2x]$

$=3x-3y-3z-z+x+y+2x$

$=9x-2\ldots$

(e) $m-3-[-\{-(-a+\overline{a+b})\}]$.

6. 下列各式內,試將首三項置入前有"+"號之括號內,其他各項置入前有"−"號之括號內.

(a) $a+2b-3c+d-e+f+g-h+k+l$.

(b) $x^3+5x^2-6x+7+8y-9z$.

(c) $-9xy+6x^2y-7xy^2-m+n-l$.

7. 求下列各組式之代數和:

(a) $x+y+z,\ x+y-z,\ x-y+z,\ -x+y+z$.

(b) $x^3-x^2+8x+9,\ 8+7x-x^2-7x^3,\ -5x^4+3x^2-7$.

(c) $x^3+3x^2y-3xy^2+y^3,\ xy^2-x^3+y^3+x^2y,\ 8x^3-7x^2y$.

8. 於下列各題中,各求出一式,使其加入右式能得左式:

(a) x^3+y^3,　　$x^2+3x^2y^2+3xy+y^2$.

(b) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$,　　$7x^3-8x^2y+8xy^2-9y^3$.

(c) a^3+5a^2-6a+7,　　$8a^3-7a^2+9a-19$.

9. (自 $x^3+x^2+5x-6,\ -2x^3-3x^2-5x+8$)之和,減去 ($8x^3-5x^2+6x-9,\ -x^2+5x+8,\ x^3+3x-5$)之和.

10. 自 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 減去 $a^2+b^2+c^2,\ a^3+3b^3+4c^3,\ -2a^2+8b^2-7c^2,\ a^2-9b^2+6c^2+3abc$ 之和.

11. 演下列乘法:—

(a) $(x^2+4x+4)(x^2-4x+4)$.

(b) $(6x+9+x^2)(9+x^2-6x)$.

(c) $(x^3+y^3+x^2y+xy^2)(x-y)$.

(d) $(x^4+y^4-x^3y-xy^3+x^2y^2)(x+y)$.

(e) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

(f) $(x+2y-3)(x^2+4y^2+9-2xy-3x-6y)$.

12. 演下列乘法,並熟記其結果:—

(a) $(x+y)^2$.

(b) $(x-y)^2$

(c) $(x+y)^3$.

(d) $(x-y)^3$.

(e) $(x+y)(x-y)$.

(f) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

(g) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

(h) $(x+m)(x+n)$.

(i) $(ax+b)(cx+d)$.

(j) $(x+y+z)^2$.

13. 演下列除法:—

(a) $(x^3+y^3)\div(x+y)$.

(b) $(x^3-y^3)\div(x-y)$.

(c) $(x^4+y^4)\div(x+y)$.

(d) $(x^4-y^4)\div(x-y)$.

(e) $(x^5+y^5)\div(x+y)$.

(f) $(x^4+9x^2+16)\div(x^2+3x+4)$.

(g) $(x^3+y^3-9xy+27)\div(x+y+3)$.

(h) $(x^3+y^3+z^3-3xyz)\div(x+y+z)$.

§9. 分離係數法. 前節所述之代數乘除法雖適用於任何問題,然而有時非至簡之法也.試看下例:—

〔例一〕 求$(x^2+x+3)(x^2-x+3)$之積.

〔解法〕 先依常法演之,應爲

$$
\begin{array}{r}
x^2+x+3 \\
x^2-x+3 \\
\hline
x^4+x^3+3x^2 \\
-x^3-x^2-3x \\
3x^2+3x+9 \\
\hline
x^4+0x^3+5x^2+0x+9
\end{array}
$$

若在乘算手續中,各項只取係數(暫時略去文字及指數),俟乘出結果(積)後再行補入文字及指數,則其演算之式當較簡.

$$
\begin{array}{r}
1+1+3 \\
1-1+3 \\
\hline
1+1+3 \\
-1-1-3 \\
3+3+9 \\
\hline
1+0+5+0+9
\end{array}
$$

乘式被乘式皆爲二次,故積爲四次,由是得所求結果爲x^4+5x^2+9.

此類只取係數以行演算之法,名曰分離係數法.

〔注意一〕 (1) 用分離係數以演乘法時,乘式被乘式應否同依昇冪(或降冪)排列?

(2) 用此簡法時乘式被乘式中倘有缺項,應否以0作爲該項之係數?

〔例二〕 求$(3a^3+2a^2b+5b^3)(2a^2-3b^2)$之積.

〔解法〕

$$
\begin{array}{r}
3+2+0+5 \\
2+0-3 \\
\hline
6+4+0+10 \\
-9-6+0-15 \\
\hline
6+4-9+4+0-15
\end{array}
$$

所求之積爲$6a^5+4a^4b-9a^3b^2+4a^2b^3-15b^5$.

〔注意二〕 (1) 積之各項皆爲五次,其中,a之指數依次減小,b之指數依次增大.

(2) 當乘式(或被乘式)含有兩個文字,但非齊次式時,可否如上法行之?

〔例三〕 試以 $xy+2x^2+3y^2$ 除 $5x^3y+6x^4+7xy^3+18x^2y^2+8y^4$.

〔解法〕 將除式被除式各依x之降冪排列,再行除算如下:

$$
\begin{array}{l|l}
6+5+18+7+8 & 2+1+3\text{(除式各項之係數)} \\
\cline{2-2}
6+3+9 & 3+1+4\text{(商式各項之係數)} \\
\cline{1-1}
2+9+7 & \\
2+1+3 & \\
\cline{1-1}
8+4+8 & \\
8+4+12 & \\
\cline{1-1}
-4 &
\end{array}
$$

故所求之商為$3x^2+xy+4y^2$,餘式為$-4y^4$.

習題五

用分離係數法演算:

1. $(x^3-2x^2+4x-8)(x+2)$.

2. $(x^4+3x^3+9x^2+27x+81)(x-3)(x+3)$.

3. $(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)(a^2+b^2+2ab)$.

4. $(x^5+2x^3+3x+5)(x^2-2x+1)$.

5. $(x^4-2x^2+5)(x^4+2x^2+5)$.

〔注意〕 本題內,乘式被乘式各項均為偶次,所缺奇次項之係數,應各以0補足之否?不補可否?

6. $(m^4-19m^2n^2+9n^4)(m^2-5mn+3n^2)(m^2+5mn+3n^2)$.

7. $(x^3+125)\div(x+5)$.

8. $(a^5-243b^5)(a+3b)$.

9. $(10p^4q+8p^5-2p^2q^3-19p^3q^2+21pq^4-18q^5)\div(2p^2+pq-3q^2)$.

10. 乘式被乘式(或除式被除式)中,(a)同含某一文字,分離係數恆能適用否?(b)同含兩個文字,且均為齊次式分離係數法恆能適用否?(c)同含兩個文字,但非均為齊次式〔例如 $(3x+y+2)^2=?$〕則如何?(d)同含三個文字〔例如 $(x+2y-z)$ 不能 $(2x-y+z)=?$〕又如何?

§10 待定係數法. 用分離係數法以演除法,已較用通常除法為簡,但有時更有可得而簡者,試看下例.

〔例一〕 試以 $x-3$ 除 $3x^4-5x^3-19x^2+26x-15$.

〔解法〕 因除式爲 x 的一次式,被除式爲 x 的四次式,故所求商式是 x 的三次式,餘式不含 x. 假定商式爲 ax^3+bx^2+cx+d, 餘式爲 R. 然後設法去求 a, b, c, d 及 R 之值:

依"除式 × 商式 + 餘式 = 被除式"之理,應得

$$(x-3)(ax^3+bx^2+cx+d)+R=3x^4-5x^3-19x^2+26x-15,$$

即
$$\begin{array}{r|r|r|r} ax^4+\ b & x^3+\ c & x^2+\ d & x+\ R \\ -3a & -3b & -3c & -3d \end{array}$$

$$=3x^4-5x^3-19x^2+26x-15.$$

$$\text{故}\begin{cases} a=3 \\ b-3a=-5 \\ c-3b=-19 \\ d-3c=26 \\ R-3d=-15 \end{cases}\quad \text{即}\begin{cases} a=3 \\ b=-5+3a=-5+3\cdot3=4 \\ c=-19+3b=-19+3\cdot4=-7 \\ d=26+3c=26+3(-7)=5 \\ R=-15+3d=-15+3\cdot5=0 \end{cases}$$

∴ 所求商式爲 $3x^3+4x^2-7x+5$, 餘式爲 0.

上面商式中的假定係數 a, b, c, d 及餘式 R 皆稱待定係數,利用待定係數以解問題的方法,名曰未定係數法.

〔例二〕 試以 x^2-x+1 除 x^4+x^3+3x-1.

〔解法〕 假定所求商式爲 x^2+ax+b; 餘式爲 $cx+d$, 則

$$x^4+x^2+3x-1=(x^2-x+1)(x^2+ax+b)+cx+d$$

$$=\begin{array}{r|r|r|r} x^4+a & x^3+1 & x^2+a & x+b \\ -1 & -a & -b & +d \\ & +b & +c & \end{array}$$

$$\text{故}\left\{\begin{array}{l} a-1=0 \\ 1-a+b=1 \\ a-b+c=3 \\ b+d=-1 \end{array}\right. \qquad \text{即}\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=3 \\ d=-2 \end{array}\right.$$

$\therefore$ 所求商式爲 x^2+x+1, 餘式爲 $3x-2$.

〔註〕 待定係數法應用甚廣,不僅在演算除法而已.學者在本書中以後當可隨時見之.

§11. 綜合除法.

凡以 $x-r$ 除 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 均可用更簡之法演之.

仿前節,設所求商式爲

$$b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n;$$

餘式爲 R. 則依"被除式 = 除式 × 商式 + 餘式"之

理,得 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$

$$=(x-r)(b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n)+R.$$

$$\text{故}\begin{cases} a_0=b_1 \\ a_1=b_2-rb_1 \\ a_2=b_3-rb_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1}=b_n-rb_{n-1} \\ a_n=R-rb_n \end{cases}\qquad \text{卽}\begin{cases} a_0 & =b_1 \\ a_1+rb_1 & =b_2 \\ a_2+rb_2 & =b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1}+rb_{n-1} & =b_n \\ a_n+rb_n & =R \end{cases}$$

把上式橫列爲下形,便得一種簡明適用的算式:

$$\begin{array}{rcccccc|l} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3\cdots\cdots & a_{n-1} & a_n & \underline{r} \\ +) & & b_1r & b_2r & b_3r\cdots\cdots & rb_{n-1} & rb_n & \\ \hline & b_1(=a_0) & b_2 & b_3 & b_4\cdots\cdots & b_n & R & \end{array}$$

其中 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ 順次爲商式各項的係數,R 爲餘數,這種簡短的除法,名曰綜合除法.

〔例一〕 試以 $x-3$ 除 $3x^4-5x^3-19x^2+26x-15$.

〔解法〕

$$\begin{array}{rccccc|l} & 3 & -5 & -19 & 26 & -15 & \underline{3} \\ +) & & +9 & +12 & -21 & +15 & \\ \hline & 3 & 4 & -7 & 5 & 0 & \end{array}$$

故所求商式爲 $3x^3+4x^2-7x+5$, 餘式爲 0.

〔例二〕 試以 $x+5$ 除 x^5-3125.

〔解法〕

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
1+0 & +\ 0 & +\ 0 & +\ 0 & -3125 & & -5 \\
 -5 & +25 & -125 & +625 & -3125 & & \\
\hline
1\quad 5 & +25 & -125 & +625 & \underline{\underline{-6250}} & &
\end{array}
$$

故所求之商爲 $x^4-5x^3+25x^2-125x+625$, 餘數爲 -6250.

〔注意〕除式如不爲 $x-r$ 而爲 $mx-r$, 應將 $mx-r$ 視爲 $m\left(x-\dfrac{r}{m}\right)$, 再以 $x-\dfrac{r}{m}$ 爲除式仿上法除之.但如此演得之商式是否即爲所求之商式?演得之餘數是否即爲所求之餘數?

〔註〕除式如爲三項以上,則綜合除法演算之形式又須略加改變,以其在實際應用不廣,故略之.

習題六

試用綜合除法及待定係數法演下列諸題.

1. $(x^3+4x^2-3x+2)\div(x+2)$.
2. $(3x^6-15x^5+5x^4+25x^3+4x+25)\div(x-5)$.
3. $(x^5-243)\div(x+3)$.
4. $(x^6+4x^4-3x^2+10)\div(x^2+5)$.

〔注意〕本題除式與被除式各項均爲偶次,所缺奇次項可否不以0補足之? 不用补0

5. $(x^6-125)\div(x^2-5)$.

6. $(81x^4-16)\div(3x-2)$. $=(81x^4-16)\div 3(x-\frac{2}{3})$

7. $(81x^4-16)\div(3x+2)$. $=(81x^4-16)\div(x-\frac{2}{3})\div 3$

8. $(243x^5+32)\div(3x-2)$.

第三章

因子分解 乘法之倒置

§12* 引論. 下列諸端,學者在初中時均已學過,能舉例申述其意義否?

(1) 因子分解之定義.

(2) 因子分解之限制. 要因式不能分

(3) 因子分解之用途. 解方程式 檢查乘是否對

(4) 因子分解與乘除法之比較.

(5) 因子分解何以比除法為難?

(6) 因子分解有無通法可以適用於任何問題? 只靠經驗可分某類題

§13* 因子分解之初步範式. 因子分解問題既無通法可以適用於任何問題.故必需分類研究.研究之方,即熟記乘法中幾種重要公式作為各類範式;再將欲分解之式化為某一範式之形,

便可依該範式之分解方法求得其因子.茲先就初中代數所已學習者分類作簡要之複習於下:

第一類. 各項有共同因子者,其模範式爲

$$ax+ay+az$$

〔分法〕 $ax+ay+az=a(x+y+z)$

〔例一〕 $3x^2+6xy-21x=3x(x+2y-7).$

〔例二〕 $m(x+y)(x+z)-m(x+y)(a-b)$

$$=m(x+y)(x+z-a+b).$$

第二類. 利用分組法可以分解因子者,其模範式爲 $ax+ay+bx+by$

〔分法〕 此式之各項雖無共同因子,不能利用前類之法;但若分爲兩組,亦可求得其因子

$$\begin{aligned} &ax+ay+bx+by \\ &\quad=(ax+ay)+(bx+by) \\ &\quad=a(x+y)+b(x+y) \\ &\quad=(a+b)(x+y). \end{aligned}$$

〔例〕 $ap+bp+cp+aq+bq+cq$

$$\begin{aligned} &=(ap+aq)+(bp+bq)+(cp+cq) \\ &=a(p+q)+b(p+q)+c(p+q) \\ &=(p+q)(a+b+c). \end{aligned}$$

第三類. 二項式之為$\boxed{\text{二個平方之差}}$者，其模範式為x^2-y^2.

〔分法〕 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$.

$a^4+b=(a^2)^2-(b^2)^2$
$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$
$(a^2-b^2)(a+b)(a-b$

〔例一〕 $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

$$=(a^2+b^2)(a+b)(a-b).$$

〔例二〕 $(a+b)^2-\frac{c^2}{4}=\left(a+b+\frac{c}{2}\right)\left(a+b-\frac{c}{2}\right).$

第四類. $\boxed{\text{三項式之為完全平方}}$者，其模範式為$x^2\pm 2xy+y^2$.

〔分法〕 $x^2\pm 2xy+y^2=(x\pm y)^2$.

〔例一〕 $4m^2-12mn+9n^2=(2m-3n)^2$.

〔例二〕 $4a^2+4ab+b^2-\frac{c^2}{9}=(2a+b)^2-\left(\frac{c}{3}\right)^2.$

$$=\left(2a+b+\frac{c}{3}\right)\left(2a+b-\frac{c}{3}\right).$$

第五類. 二項式之為兩個立方之和或差者，其模範式為$x^3\pm y^3$.

〔分法〕 $x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)$.

〔例一〕 $m^3+8n^3=(m+2n)(m^2-2mn+4n^2)$.

〔例二〕 $\frac{a^3}{8}-\frac{b^3}{27}=\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a^4}{4}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{9}\right).$

1)係數不同
2)次〃〃
3)文字〃〃

1);2);3)
1)2);3)
1);3);13.

第六類 四項式之爲完全立方者.其模範式爲 $x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$.

〔分法〕 $x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3$.

〔例一〕 $p^3 + 6p^2q + 12pq^2 + 8q^3 = (p + 2q)^3$.

〔例二〕 $8m^6 - 36m^4n + 54m^2n^2 - 27n^3 = (2m^2 - 3n)^3$.

$-3(2m^2)^2(3n)+3(2m^2)(3n)^2$

習 題 七

試求下列各式之因子:

1. $a^3x^3 + b^2x^2 + c^4x^4 + d^5x^5$.
2. $7a^2x^2 - 14a^2xy - 49abxz + 56axw$.
3. $(x+y)(x+z) + (x+y)(x-t)$.
4. $a^2b^2(x+y)^2 - mn(x+y)^2(x-y) - (x+y)^2$.
5. $2c(r-2s) - 5d(2s-r)$.
6. $x^2 + 3yz + 2ax^2 + 6ayz$.
7. $4a^3 - 3ab - 8a^2b + 6b^2$.
8. $-x^2y + 3xy - 5y + x^2z - 3xz + 5z$.
9. $361x^4 - 625y^4$.
10. $\frac{x^4}{81} - \frac{y^4}{625}$.
11. $27x^4 - 75$.
12. $32c^4 - 162d^4$.
13. $\frac{m^2}{3} - \frac{3n^2}{4}$.
14. $ab(x+y)^2 - ab(p+q)^2$.
15. $m^2 + 4n^2 - 4mn$.
16. $4p^3 - 20p^2q^4 + 25pq^8$.
17. $\frac{m^2}{4} - \frac{mn}{3} + \frac{n^2}{9}$.
18. $27a^4 - 36a^2b^3 + 12b^6$.
19. $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab + 2cd$.
20. $m^2 + n^2 - 2mn + am - an$.
21. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$. $=(a^2+b^2+2ab)-(c^2-2cd+d^2)$

〔注意〕 本題之結果甚爲重要,爲節省手續計,通常恆將

$=(a+b)^2-(c-d)^2$

$=[(a+b)+(c-d)][(a+b)-(c-d)]$

$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)$

(33) $=(x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3)+(x^2+4xy+4y^2)+(2x+4y)$
$=[x^3+3x^2(2y)+3x(2y)^2+(2y)^3]+[x^2+\cancel{2x(2y)}+(2y)^2]+2(x+2y)$

此結果用爲公式以解同類之問題,試本此意以求下列兩式的因子.

22. $x^2+y^2+9+6x+6y+2xy.$

23. $4p^2+9q^2+r^2+12pq-4pr-6qr.$

24. m^6-n^6

25. $8m^6+27n^6.$

26. $\frac{a^3}{8}-\frac{b^3}{27}.$

27. $\frac{3x^3}{64}+\frac{y^3}{9}.$

28. $x^3+y^3+x^2-y^2.$

29. $x^3-y^3+x^2-y^2-x+y.$ $=5a^3+3(5a)^2(2b^2)+3(5a)(2b^2)^2+(2b$

30. $27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3.$

31. $125a^3+150a^2b^2+60ab^4+8b^6.$

32. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-x^2+y^2-x+y.$

33. $x^3+8y^3+6x^2y+12xy^2+x^2+4y^2+4xy+2x+4y.$

第七類. 三項式之爲x^2+px+q之形者.

〔分法〕 先將q分爲兩個因子,m,n;再察其代數和$m+n$是否爲p.如果爲p,則

$$x^2+px+q=(x+m)(x+n).$$

〔例〕 $x^2-5x-24=(x-8)(x+3).$

〔註〕 -24 可分爲 $\pm1,\mp24$; $\pm2,\mp12$; $\pm3,\mp8$; $\pm4,\mp6$ 八組因子,其中只有 $+3,-8$ 一種,其兩個因子之代數和爲 -5.

第八類. 三項式之爲ax^2+bx+c之形者.

〔分法 A〕 十字相乘法.先將a分爲兩個因子p,q;c分爲兩個因子m,n,使$pn+qm=b$,則

pqx² + npx + mqx + mn
pqx² + (mp + nq)x + mn

p·q = a
mp + nq = b
mn = c

$$ax\ +bx+c\equiv(px+m)(qx+n).$$

〔例一〕 分解$6x^2+23x+20$之因子.

〔解法〕 6之因子有1, 6; 2, 3兩種, 20之因子有1, 20; 2, 10, 4, 5三種.其中惟有$2\times4+3\times5=23$.故得

$$6x^2+23\times20=(2x+5)(3x+4).$$

〔例二〕 $6x^2+9x-20=6x^2+9x-20$.(沒有因子.)

〔註〕

$$\begin{array}{c}1\pm\ 1\\ 6\mp20\\ \hline \mp9\end{array}\qquad\begin{array}{c}1\pm\ 2\\ 6\mp10\\ \hline \mp9\end{array}\qquad\begin{array}{c}1\ \pm4\\ 6\ \mp5\\ \hline \mp9\end{array}\qquad\begin{array}{c}2\pm\ 1\\ 3\mp20\\ \hline \mp9\end{array}$$

$$\begin{array}{c}2\pm\ 2\\ 3\mp10\\ \hline \mp9\end{array}\qquad\begin{array}{c}2\ \pm4\\ 3\ \mp5=12\\ \hline \mp9\end{array}\qquad\begin{array}{c}1\pm20\\ 6\mp\ 1\\ \hline \mp9\end{array}\qquad\begin{array}{c}1\pm10\\ 6\mp\ 2\\ \hline \mp9\end{array}\qquad\begin{array}{c}1\ \pm5\\ 6\ \mp4\\ \hline \mp9\end{array}$$

$$\begin{array}{c}2\ \pm20\\ 3\ \mp\ 1\\ \hline \mp9\end{array}\qquad\begin{array}{c}2\ \pm10\\ 3\ \mp\ 2\\ \hline \mp9\end{array}\qquad\begin{array}{c}2\ \pm5\\ 3\ \mp4\\ \hline \mp9\end{array}$$

〔分法B〕 分裂中項法.先求二數h, k,使

$$\begin{cases}h+k=b.\\ hk=ac.\end{cases}$$

則原式之第二項可裂爲兩項,全式共有四項,然後仿第二類分組解法以求其因子.

〔例〕
$$\begin{aligned}&6x^2+7x-20\\&=6x^2+15x-8x-20\\&=3x(2x+5)-4(2x+5)\\&=(2x+5)(3x-4).\end{aligned}\qquad \because \begin{cases}6\cdot 20=120=15\cdot 8\\ 7=15-8\end{cases}$$

〔分法 C〕 乘除首係法. 先以原式之首項係數

$= \frac{1}{a}(a^2x^2+abx-ac)$

乘除全式,則原式 $=\frac{1}{a}[(ax)^2+b(ax)+ac]$,乃將 ax 視之爲一數(如 y)仿第七類之法解之.

〔例二〕
$$\begin{aligned}6x^2+7x-20&=\frac{1}{6}[(6x)^2+7(6x)-120]\\&=\frac{1}{6}[6x+15][6x-8]\\&=(2x+5)(3x-4).\end{aligned}$$

第九類. 能用配方法者. 能用此法之式,其形不一.總而言之,凡式之可由適當方法(通常於原式加減以適當之同數)配成

(a) 兩平方之差,

(b) 兩立方之差,

或 (c) 兩立方之和,

者,皆屬此類,其因子,在配方手續完成之後,不難仿前數類之法以求之.

〔例一〕 $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$

$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

〔例二〕 $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

$$=a\left[x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right].$$

〔例三〕 $a^3+9a^2b+27ab^2+26b^3$ $= a^3+3a^2(3b)+3a(3b)^2$

$$=a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3-b^3=(a+3b)^3-b^3$$

$$=[(a+3b)-b][(a+3b)^2+b(a+3b)+b^2]$$

$$=(a+2b)(a^2+7ab+13b^2).$$

習題八

試求下列各式之因子:

1. $x^2-4x-5.$ $(x-5)(x+1)$　　2. $x^2+4x-5.$ $(x+5)(x-1)$
3. $x^2-23x+132.$　　4. $x^2+x-132.$
5. $x^2-12x-133.$ $(x-19)(x+7)$　　6. $x^2+12x-133.$ $=(x+19)(x-7)$
7. $x^2-9x-682.$　　8. $x^2+9x-682.$

9. $x^2-10x-144.$　　10. $x^2+10x-144.$ $(x+18)(x-8)$

試用四個方法求下列各題之因子(11—16).

11. $6x^2+13x+6.$　　12. $6x^2+5x-6.$

13. $6x^2+37x+6.$　　14. $6x^2-37x+6.$

15. $24x^2+2x-15.$　　16. $24x^2-2x-15.$

用適宜方法求下列各式之因子.

17. $12x^2-x-6.$　　18. $12x^2+x-6.$

19. $21x^2+42x-8.$　　20. $221x^2-120x-221.$ $(17x+13)(13x-17)$

21. $221x^2-458x+221.$　　22. $90x^2+19x-90.$ $(9x+10)(10x-9)$

23. $x^2-xy-6y^2-x+3y.$　　24. $5x^2-26xy+5y^2-3x+15y.$ $=(x-5y)(5x-y-3)$

用配方法求下列各式之因子:

25. $x^4+x^2y^2+y^4.$

〔解法〕 原式 $=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-y^2=(\quad)(\quad)$

26. $x^4+2x^2y^2+9y^4$　　27. $x^4-11x^2y^2+y^4.$

28. $x^4+4.$　　29. $x^4+\frac{1}{4}.$

30. $2x^5+128x$　　31. $3a^6-42a^4b^2+3a^2b^4.$

32. $x^3+3x^2+13x+28$　　33. $26x^3+27x^2+9x+1.$

34. $a^3+b^3+3a^2+3b^2+3a+3b+2.$　　35. $x^3+6x^2+12x-19.$

§14. 餘數定理. 前節所述之因子分解法,只在被分解之式可化爲某一範式之形時可以適用,其法雖簡,而爲用不廣.例如欲求 x^3-6x+5 之因子,則非前節諸法所能奏效矣.今若利用因子定理,則一望便知 $x-1$ 爲此式之一因子,其便利

爲何如也！但因子定理係從餘數定理得來，故先述餘數定理.

設以 $px-r$ 除 x 之多項式 $a_0x^n+a_1x^{n}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$，則得商式爲 x 之另一多項式（以 $b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n$ 表之）；此外又得一餘數不含 x，以 R 表之. 據"被除式＝除式×商式＋餘數"之理，應得下之關係.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
$$=(px-r)(b_1x^n+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_n)+R.$$

此相等關係在 x 任爲何值時，無不成立. 故當 $x=\frac{r}{p}$ 時，上之等式變爲

$$a_0r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}r+a_n=0+R=R$$

由是乃得一定理：

定理. 凡以 $px-r$ 除 x 之多項式，其應得之餘數 R 等於在被除式中以 $\frac{r}{p}$ 代換 x 所得之值.

〔例一〕 求以 $x+2$ 除 x^5+x^3-6x+8 所得之餘數.

〔解〕 ∵ 除式爲 $x+2=x-(-2)$,

被除式爲 x^5+x^3-6x+8.

∴ 餘數$=(-2)^5+(-2)^3-6(-2)+8=-20$.

〔例二〕 求以$3x-2$除$81x^4+16$所得之餘數.

〔解〕 餘數$R=81\left(\frac{2}{3}\right)^4+16=16+16=32.$

§15. **因子定理一.** 在特例,當$x=\frac{r}{p}$時,x之多項式P之值若爲零,則依餘數定理,卽爲"以$px-r$除P,所得之餘數應爲零".換言之,"$px-r$能整除P".亦卽謂"$px-r$爲P式之一因子也".故得

定理. 當$x=\frac{r}{p}$時,x之多項式P之值若爲零,則$px-r$爲P之因子;反之,當$x=\frac{r}{p}$時,P式之值若不爲零,則$px-r$非P之因子.(以此時$px-r$不能整除P式也.)

〔例一〕 分解x^3-6x+5之因子.

〔分法〕 當$x=1$時原式之值爲$1^3-6+5=0$,故$x-1$爲式之因子,乃用綜合除法求得他一因子爲x^2+x-5.

$$\therefore\quad x^3-6x+5=(x-1)(x^2+x-5)$$

〔例二〕 分解$4x^4+16x^3+17x^2-x-6$之因子.

〔分法〕 (1) 設$x=-1$,則原式之值爲

$$4-16+17+1-6=0.$$

故$x+1$爲原式因子之一,用綜合除法求他一因

子,乃得

$$4x^4+16x^3+17x^2-x-6=(x+1)(4x^3+12x^2+5x-6).$$

(2) 再仿(1)之步驟. 求 $4x^2+12x+5x-6$ 之因子.於是,原式 $=(x+1)(x+2)(4x^2+4x-3)$

$$=(x+1)(x+2)(2x+3)(2x-1).$$

§16. **因子定理二.** 如有一式 $3x^3+2x+6$,今設 $x=\pm1, \pm2, \pm3$,等,原式之值俱不爲零,然則原式究有因子乎,抑無因子乎?判斷該式之有無一次式因子,此類代換手續究應演至何時爲止?此不能不求解決之問題也.解決之道,依下

定理. 若 $px-r$ 爲多項式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 之因子,則 p 必能整除 a_0,且 r 必能整除 a_n.

〔證〕 $px-r$ 旣爲 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ 之因子,則依因子之定理,應有

$$\frac{a_0r^n}{p^n}+\frac{a_1r^{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{a_2r^{n-2}}{p^{n-2}}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}r}{p}+a_n=0$$

卽 $a_0r^n+a_1r^{n-1}p+a_2r^{n-2}p^2+\cdots+a_{n-1}rp^{n-1}+a_np^n=0$

卽 $a_0r^{n-1}+a_1r^{n-2}p+a_2r^{n-3}p^2+\cdots+a_{n-1}p^{n-1}=-\dfrac{a_np^n}{r}.$

故 r 能整除 a_np^n. 然原設不能整除 p,自然亦不

$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$
$x^4+y^4=$

能整除p^n.

$\therefore$ p必能整除a_n.

同樣,由(A)亦能證得"p必能整除a_0".

〔例一〕 分解$3x^3+2x+6$之因子.

〔解法〕 3之因子爲$\pm1, \pm3$; 6之因子爲$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$, 故應以$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$等數代替原式之$x$察原式之值是否爲零,但因原式各項俱爲正號,故不必以正數代入.

於是僅以$-1, -2, -3, -6, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$代入可矣.

今以$-1, -2, -3, -6, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$代入原式之$x$,而原式之值俱不爲0,故$3x^2+2x+6$無一次式因子.

又因原式爲三次,如可分解因子,必有一次式因子.今旣無一次式因子,故原式亦必無其他因子也.

〔例二〕 分解$3x^4-2x^3+3x^2+4x-4$之因子.

〔解法〕 仿例一,本題只應以$\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$代$x$考察原式之值是否爲零,而不必以他數試之.

試得$x=-1$時原式之值爲零,故

$$原式=(x+1)(3x^3-5x^2+8x-4).$$

再依上法求得$3x^3-5x^2+8x-4=(3x-2)(x^2-x+2)$

$$\therefore\ 原式=(x+1)(3x-2)(x^2-x+2).$$

習 題 九

1. 分解下列各式之因子:—

(a) $x^3-4x^2+x+6.$ (b) $6x^3-31x^2+3x+10.$

(c) $2m^4-2m^3+3m^2-2m-1.$ (d) $3x^3+x^2+4x-4.$

(e) $x^4-2x^3+x^2-x-2.$ (f) $x^3-ax^2+2ax-8a^3.$

2. 用因子定理分解下列各式之因子:—

(a) $x^2-y^2.$ (b) $x^3-y^3.$

(c) $x^3+y^3.$ (d) $x^2+2xy+y^2.$

(e) $x^2-2xy+y^2.$ (f) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$

(g) $x^2+(b+c)x+bc.$ (h) $mnx^2+(np+mq)x+pq.$

(i) $ax+by+ay+bx.$ (j) $ax+ay+by+bx+cx+cy.$

3. 下列諸式中,如有因子,試用因子定理分解之:—

(a) $x^{2m+1}+y^{2m+1}.$ (b) $x^{2m+1}-y^{2m+1}.$

(c) $x^{2n}-y^{2n}.$ (d) $x^{2n}+y^{2n}.$

〔註〕本題之結果頗爲有用學者,試熟記之.

4. 下列諸式中有因子者試分解之.

(a) $x^6-2x^4y-11x^2y^2+12y^3.$

〔提示: 設$x^2=y$原式之值爲零否?〕

对称式之和差積商仍为对称式 (2)

(b) $2x^9+5x^6y^2-x^3y^4-6y^6$.

(c) $x^6+x^4y+4y^3$.

5. $x^4+x^2y^2+y^4$ 有因子否? x^4+4 有因子否? 設用因子定理能將上式分解否?何故?然則因子定理應用雖廣,究亦有時而窮歟?

6. 設 $a=-(b+c)$ 則 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之值爲零否?然則 $a+b+c$ 是否爲 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之一因子?試用除法再求他一因子,用此結果爲公式以求下列各式之因子.

(a) $x^3+8y^3+z^3-6xyz$.

(b) $x^3+8y^3+27z^3-18xyz$.

(c) $m^3-n^3+64p^3+12mnp$.

§17. 對稱式 在一個代數式中,將所含幾個文字兩兩對調,若其形式不變,則此式稱爲該幾個文字的完全對稱式.例如 $2x+2y$, $ax^2+bxy+ay^2$, lx^3+ly^3 之類,皆爲 x, y 的完全對稱式;而 $3x+2y$, x^2-y^2 則非 x, y 的完全對稱式.又如 $ax+ay+az$, $xy+yz+zx$, $lx^3+ly^3+lz^3$ 之類皆爲 x, y, z 的完全對稱式.

在一個代數式中,將所含幾個文字依次輪換,若其形式不變,則此式稱爲輪換對稱式.例如在 $a^2b+b^2c+c^2a$ 中,將 a 換爲 b, b 換爲 c, c 換爲 a,所成

{绝对对称式 $a+b+c$. $a^3+b^3+c^3-3abc$
{完全对称式 同形式之项之係数相同 (1)

新式 $b^2c+c^2a+a^2b$ 仍與原式同形. 姑原式爲 a, b, c 的輪換對稱式. 又如 $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$, $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$ 亦皆爲所含文字的輪換對稱式.

凡完全對稱式或輪換對稱式, 通常皆可用因子定理及未定係數法以求其因子, 舉例如下:—

〔例一〕 試求 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 之因子.

〔解法〕 設 $a=b$ 則原式之值變爲 $b^3(b-c)+b^3(c-b)+0=0$, 故由因子定理, 知 $a-b$ 爲原式之一因子.

又因原式爲 a, b, c 的輪換對稱式, 故 $b-c$, $c-a$ 亦皆爲原式之因子.

因原式爲四次齊次式, 而 $a-b$, $b-c$, $c-a$ 各爲一次齊次式. 故所餘另一因子必爲一次齊次式.

又因原式爲 a, b, c 的輪換對稱式, 故所餘因子又爲 a, b, c 的輪換對稱式.

故所餘另一因子應爲 $l(x+y+z)$, 其中 l 爲待定係數, 所以原式 $=l(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

又因原式中 a^3b 的係數爲 1, $l(a-b)(b-c)(c-a)$

(1) 完全对称式皆为轮换对称式而轮换对称式则不必为完全对称式

輪換对称式之性质、
1) 輪換对称式之和,差,積,商,仍为輪換对称式
2) 在輪換对称式所有之諸項內同形式之項之係数相等

$(a+b+c)$ 中 a^3b 的係數爲 $-l$,故得 $-l=1$ 即 $l=-1$.

$\therefore$ 原式 $\equiv-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

〔例二〕 試求 $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$ 的因子.

〔解法〕 設 $a=b$, 則原式之值爲零,故 $a-b$ 爲原式之一因子.

因原式爲 a, b, c 的輪換對稱式,故 $b-c$, $c-a$ 亦皆爲原式之因子.

故原式

$=(a-b)(b-c)(c-a)[l(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)]$.

其中 l, m 爲未定係數.

在原式中 a^4b 的係數爲 -5; 在所求因子之積中 a^4b 的係數爲 $-l$. 故 $-5=-l$, 卽 $l=5$.

故原式

$=(a-b)(b-c)(c-a)[5(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)]$.

又因這個相等關係在 a, b, c 任爲何值時皆能成立,故設 $a=0, b=1, c=-1$ 代入上式以求 m. 得 $m=-5$.

$\therefore$ 原式 $=5(a-b)(b-c)(c-a)$

$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

〔註〕欲定 m 之值,亦可仿求定 l 的方法,比較原式中 a^3b^2 的係數與所求因子之積中 a^3b^2 的係數;惟其手續稍繁耳.

習 題 十

分解下列各式之因子:

1. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$.
2. $a^3+b^3+c^3-3abc$.
3. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.
4. $a^2b^2(a^2-b^2)+b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)$.
5. $ab(a^3-b^3)+bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3)$.
6. $a^2(b^2-c^2)^3+b^2(c^2-a^2)^3+c^2(a^2-b^2)^3$.
7. $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$.
8. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$.
9. $(a+b+c)^5-(a^5+b^5+c^5)$.
10. $(ab+bc+ca)^2-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

§18. 因子分解之通則. 以上諸節已將因子分解之重要方法分類詳述,學者苟能於每類方法確切瞭解,應用自如,則不特於分類問題,求解極易,即於雜題之下當亦不見其難也.爲複習計,茲再述其通則如下:

第一步. 先察各項中如有共同單項因子,取

出單項因子,同時便得一多項因子.

第二步. 次察此所得多項因子屬於下列何類,即依該類之法分解之.

(1) x^2-y^2.　　(2) $^3\pm y^3$.

(3) $^2\pm 2xy+y^2$.　　(4) $x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$.

(5) x^2+px+q.　　(6) ax^2+bx+c.

(7) $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$.

(8) $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

(9) 能用配方法者.

(10) 對稱式.

第三步. 如不屬上列九種之一,試用分組分解法.

第四步. 直接分組有困難時,即試用因子定理.

第五步. 分得之因子,如仍有因子可分,再仿第二步,第三步,第四步繼續分解,直至分得之因子皆爲質因子而止.

習題十一(雜題)

分解下列各式之因子:—

1. $32n^3+48n^2-28n^4$.　　2. $a^3+a+b+a^2b$.

3. $a^5+a-a^3-1.$

4. $x^4-9x^2-x+3.$

5. $3a^5+192ab^4.$

6. $a^4-a^2+a+1.$

7. $1+x^6-x-x^7.$

8. $192+3c^5.$ $3(c^5+2^5)$

9. $x^3-6x^2y+12xy^2-7y^3$

10. $x^3+3x+4.$ $(x+1)(x^2-x+4)$

11. $x^3+xy^2+2y^3.$

12. $x^7\pm y^7.$

13. $2x^4+7x^3+10x^2+11x+6.$ $(x+1)(x+2)(2x^2+x+3)$

14. $2x^4+x-34.$

15. $81x^4-9x^2-12.$ $3(3x-2)(3x+2)(3x^2+1)$

16. $12x^3-11x-24.$

17. $4a^2-a^4+81+10a^2x-36a-25x^2.$

18. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}-\dfrac{xy}{3}-\dfrac{xz}{5}+\dfrac{yz}{15}.$

19. $a^3+b^3+3a^2+12b^2+3a+48b+65.$

20. $a^3+a^2+6a^2b+ab+12ab^2-2b^2+8b^3.$

21. $x^3+8y^3+27z^3-18xyz.$

22. $x^3-64y^3-8-24xy.$

23. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y).$

24. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3).$

25. $(x+y)^5-x^5-y^5.$

26. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc.$

∵ f(x) 之各項係數之代數和不為 0

∴ f(x) 沒有一個因子是 x−1

設 $\alpha x-\beta$ 為 f(x) 之一個因式（α 為 2 之因數，β 為 6 之因數）

則 $\alpha=\pm1,\pm2$；$\beta=\pm1\ \pm2\ \pm3\ \pm6$

∵ $\alpha x-\beta$ 為一因式 ∴ $(x-\frac{\beta}{\alpha})$ 亦為一因式

$\beta/\alpha=-1,-2,-3,-6,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$

第四章

公因式 公倍式

§19* 引論. 下列諸端,學者在初中代數均已學過,能舉例詳釋其意義否?

(1) 何謂公因式?

(2) 何謂公倍式?

(3) 何謂最高公因式H. C. F.?

(4) 何謂最低公倍式L. C. M.?

(5) 公因式有最低者否?

(6) 公倍式有最高者否?

(7) 在算術上最大公約,最小公倍各有何用?對於分式之計算有何關係?

§20* H. C. F. 求法之一. 當一式(或諸式)易於分解因子時,諸式之最高公因式H. C. F. 如何求法,學者已於初中學過,能用自已語言重述其規

則否？參看下例：

〔例〕 求 $6x^2-3xy-3y^2$, $4x^4-5x^2y^2+y^4$ 之 H. C. F.

〔解〕 (1) $6x^2-3xy-3y^2=3(2x^2-xy-y^2)$

$$=3(2x+y)(x-y)$$

(2) $4ax^4-5ax^2y^2+ay^4=a(4x^2-y^2)(x^2-y^2)$

$$=a(2x+y)(2x-y)(x+y)(x-y)$$

$\therefore$ H. C. F. $=(2x+y)(x-y)$.

§ 21* **L. C. M. 求法之一.** 當諸式容易分解因子時,諸式之最低公倍式 L. C. M. 如何求法,學者亦於初中學過,參考下例,試用自己語言重述其規則.

〔例一〕 求 x^2-y^2, $2x^2-xy-y^2$, $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ 之 L. C. M.

〔解〕 $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

$$2x^2-xy-y^2=(x-y)(2x+y)$$

$$x^3-3x^2y+3xy-y^3=(x-y)^3$$

$\therefore$ L. C. M. $=(x-y)^3(x+y)(2x+y)$.

〔例二〕 求 $a^2+ab-6b^2$, $2a^2-5ab+2b^2$, $3a^2+10ab+3b^2$ 之 L. C. M.

〔解〕 (1) $a^2+ab-6b^2=(a+3b)(a-2b)$.

(2) $2a^2-5ab+2b^2=(2a-b)(a-2b)$.

(3) $3a^2+10ab+3b^2=(3a+b)(a+3b)$.

$\therefore$ L. C. M. $=(a+3b)(a-2b)(2a-b)(3a+b)$.

習題十二

1. 有三個以上之代數式,其中若有一式容易分解因子,而其他諸式不易分解因子時,欲求諸式之 H. C. F. 有無通法? 欲求諸式之 L. C. M. 有無通法? 困難何在?

例如求 x^2-1, x^4+x+3, x^4+x^2+8 之 H. C. F. 及 L. C. M. 何者較難? 其故何在?

2. 試求以下各組整式之 H. C. F. 及 L. C. M.

(a) $x+y$, x^3+y^3, x^4-y^4.

(b) $a^2-4ab+4b^2$, a^3-8b^3, a^4-16b^4.

(c) $8a^3-1$, $8a^2+4a+2$, $16a^4+4a^2+1$.

(d) x^3-x, x^4-7x^2+6, $x^4-3x^3+5x^2+3x-6$.

(e) $1-a$, $a-1$, a^2-1, $1-a^4$, a^8-1.

(f) $a^2+b^2-c^2+2ab$, $a^2-b^2-c^2-2bc$, $c^2-a^2-b^2+2ab$.

(g) x^5+x^4+4x+4, x^3+2x^2+2x, x^3+3x^2+4x+2.

(h) $6x^2+13x+6$, $42x^2-85x+42$, $14x^2+9x-18$.

(i) x^3+2x-3, x^3+4x^2-5, $2x^3+5x-7$.

第一. A,B之公因式即MA+NB與A之公因式(基本

第二 { MA+NA與A之公因式即A,B之公因式
非A,B之公式即非MA+NB與A之公因式(仿

(j) $x^5+y^5,\ x^3+y^3,\ x^4+x^2y+xy^2-y^4.$

(k) $x^3-5x^2+6x-2,\ 3x^3+2x-5,\ 3x^3-7x+4.$

§22. **H.C.F. 求法之二.** 前於§21所述H.C.F之求法,其手續雖簡,但只能適用於因子容易分解之時,非通法也.其較有普遍性者則有下法:

〔方法〕 當A,B兩式之H.C.F.不易直接求得時,可求 $MA+NB$ 與 A 兩式(或$MA+NB$與B)之H.C.F. 所得結果卽爲A,B二式之H.C.F.(M與B無公因子,N與A無公因子.)

〔證〕 第一層: 若 A,B 有公因式 k, 則 $A=ak$, $B=bk$, 依等量公理, 應得

$$MA+NB=Mak+Nbk=k(Ma+Nb).$$

卽"凡爲A,B之公因式者,仍爲A, $MA+NB$(或B, $MA+NB$)之公因式."

第二層: 若A,B二式無公因式,則$A=ak$,$B=bk$, (a與b,h無公因子,k與b,h亦無公因子)依等量公理,應得

$$MA+NB=Mak+Nbh \doteqdot k(\qquad) \doteqdot h(\qquad)$$

卽"凡非A,B之公因式者,仍非A, $MA+NB$ (或B,

設A為B則C為D
∴C為D則A為B
∴A不為B則C不為D
設C不為D則A不為B

專是回是異

$A=ka$ $B=kb$ $MA+NB=Mka+Nkb$ A,B之[illegible]

又为A,B之任一公因式 ∴ $A=ka$ $B=kb$ $MA+Nb$

$Mka+Nkb=k(Ma+Nb)$ 即k为MA+NB之一[illegible]

∴ A,B之公因式亦为MA+NB之公因式

$MA+NB=Mka+Nkb$

$MA+NB$)之公因式."

綜上兩層觀之,可見 $A, MA+NB$ 之 H. C. F. 卽爲 A, B 之 H. C. F. (因由第一層,前者之 H. C. F. 不低於後者之 H. C. F.; 由第二層,前者之 H. C. F. 亦不高於後者之 H. C. F. 也.)

〔例一〕 求 $3x^4+4x-10$, $2x^4-5x^3+2$ 之 H. C. F. 没有公因式

〔解法〕 本題 $A=3x^4+4x-10$, $B=2x^4-5x^3+2$. 取 $M=2$, $N=-3$, 則 A, B 二式之最高次項可以消去,而得一較低之三次式,易於求解其因子矣.今

$$2(3x^4+4x-10)-3(2x^4-5x^3+2)=15x^3+8x-26.$$

用因子定理,求得此式不可再分爲因子.又以此式除 A 式,不能整除,故此式與 A 無公因式,故 A, B 亦無公因式.

〔例二〕 求 $x^4+x^3+2x^2+x+1$, $x^4-2x^3-x^2-2x+1$, $2x^4+2x^3+3x^2+x+1$ 之 H. C. F.

〔解法〕 本題, $A=x^4+x^3+2x^2+x+1$. $B=x^4-2x^3-x^2-2x+1$, $C=2x^4+2x^3+3x^2+x+1$.

先求 A, C 之 H. C. F. 如下:

$2A-C=x^2+x+1$, 此式不可再分爲因子.

以不能除尽b 因为[illegible]除尽b [illegible]能除尽B 而A,B之公因式 但此假设矛盾 故k不能除尽b.

但此式能整除A式,故此式卽爲A,C之H.C.F.

又此式亦能整除B式,故亦爲B式之因子.

$\therefore\ x^2+x+1$卽爲A,B,C之H.C.F.

§23. **H.C.F.求法之三.** 上節所述求H.C.F.之法,適用範圍雖較§20所述者爲廣,然諸式各在五次以上時,往往應付亦窮,故仍非通法.通法如何?卽下面所述的輾轉相除法是也.

〔方法〕 設A,B各爲x之多項式,並設A,B無公共單因子.欲求A,B之H.C.F.可如下行之:

(1) 先以次數較低之A式除B式得餘式R_1.

(2) 次以R_1除A,得餘式R_2.

(3) 再以R_2除R_1,得餘式R_3.

(4) 再以R_3除R_2,得餘式R_4.

(5) 如此繼續進行,直至最後餘數R_n不含x爲止.

(a) 若R_n爲零,則R_{n-1}爲A,B之H.C.F.

(b) 反之,若R_n不爲零,則A,B無公因式.

〔證〕 先將上法列成算式(爲簡便計,假定R_4不含x)如下:

若A則B
∴B∴A
∴不A則不B.
∴∴B∴不A

$$
\begin{array}{llll}
A)\,B\,\underline{|Q_1} & & & \\
\underline{AQ_1} & & & \\
R_1)\,A\,\underline{|Q_2} & & & \\
& \underline{R_1Q_2} & & \\
& R_2)\,R_1\,\underline{|Q_3} & & \\
& & \underline{R\,Q_3} & \\
& & R_3)\,R_2\,\underline{|Q_4} & \\
& & & \underline{Q_4R_3} \\
& & & R_4
\end{array}
$$

因 $R_1=B-Q_1A$, 故 R_1, A 之 H. C. F. 卽爲 A, B 之 H. C. F. (§ 22)

因 $R_2=A-Q_2R_1$, 故 R_2, R_1 之 H. C. F. 卽爲 R_1, A 之 H. C. F. (§ 22)

因 $R_3=R_1-Q_3R_2$, 故 R_3,R_2 之 H. C. F. 卽爲 R_2, R_1 之 H. C. F. (§ 22)

$\therefore$ R_3, R_2 之 H. C. F. 卽爲 A. B 之 H. C. F.

(*a*) 若 $R_4=0$, 則 R_3, R_2 之 H. C. F. 顯然爲 R_3. 故 A, B 之 H. C. F. 爲 R_3.

(*b*) 反之, 若 $R_4\neq 0$, 則 R_3, R_2 顯然無公因子, 故 A, B 亦無公因子.

〔例一〕 求 x^3+2x-3, x^3-1 之 H. C. F.

〔解〕 依上法輾轉相除如下式:

```
1+1+0-2)1+0+0-1|1
        1+1+0-2
       -1+0+1)1+1+0-2|-1-1
              1+0-1
                1+1-2
                1+0-1
                   1-1)-1+0+1|-1-1
                        -1+1
                           -1+1
                           -1+1
                              0
```

$\therefore$ H. C. F. $=x-1$.

〔例二〕 求 $2x^4+4x^2-6x$, $6ax^3-6a$ 之 H. C. F.

〔解〕 先將各式分出單項因子如下:

$$2x^4+4x^2-6x=2x(x^3+2x-3)$$

$$6ax^3-6a=6a(x^3-1).$$

再仿上例,用輾轉相除法求得 x^3-1, x^2+2x-3 之 H. C. F. 爲 $x-1$.

故所求之 H. C. F. $=2(x-1)=2x-2$.

〔例三〕 求 $A=x^3-2x^2-2x-3$, $B=2x^3+x^2+x-1$ 之 H. C. F.

〔解〕 仿上法演之如下:

```
1-2-2-3)2+1+1-1|2
        2-4-4-6
          5+5+5)1-2-2-3|
```

在此一步除算中,若直接以 $5x^2+5x+5$ 除 A

式,其商式必得分數,爲避免分數計,乃以5先除 $5x^2+5x+5$, 如此並不影響 A,B 之H.C.F.因5原非 A,B 之公因子也.由是乃續得下式:

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
5 & \underline{5+5+5} & 1-2-2-3 & \underline{1-3} \\
 & 1+1+1 & \underline{1+1+1} & \\
 & & -5-3-3 & \\
 & & \underline{-3-3-3} & \\
 & & 0 &
\end{array}
$$

故所求之H.C.F.$=x^2+x+1$.

〔例四〕　求 $A=4x^3+2x^2+x-7$, $B=4x^4+3x^3+2x^2+4x-13$ 之H.C.F.

〔解〕

$$
\begin{array}{r|l}
4+2+1-7)\,4+3+2+4-13 & \underline{1} \\
\underline{4+2+1-7} & \\
1+1+11-13 &
\end{array}
$$

在此一步除算中,若直接以 A 式除 $x^3+x^2+11x-13$ 其商亦將爲分數爲避免分數計,乃以4先乘 $x^3+x^2+11x-13$. 如此並不影響 A,B 之H.C.F. 因4非 A 式之因子,故以4乘 $x^3+x^2+11x-13$, 不致改變 A 與 $x^3+x^2+11x-13$ 之H.C.F.卽不致改變 A,B 之H.C.F.也,由是乃得全部算式如下:

求三个代数式之H.C.F时可先求A.B之H.C.F(设为M)然後求M与C之H.C.F 此最後所求得之H.C.F即为A.B C.之H.C.F

证 因A B之H.C.F为M故除M外無一式能同时整除A.B 故C之因式雖不必皆全包括M内並以其不能同时整除A.B者视为A B之公因式又M 之 [illegible] 不能整除C, C者始能同时整除A.B 故M与C之公因式能同时整除A B C 此外無一式能同时整除A B C 故M.C之H.C.F即为A.B C之H.C.F


```
4+2+1-7)4+3+2+4-13(1+1
        4+2+1-7
        ---------------
        1+1+11-13
        4
        ---------------
        4+4+44-52
        4+2+ 1- 7
        ---------------
           2+43-45)4+2+1-7(2-42
                   4+86-90
                   --------------
                    -84+91-7
                    -84-1806+1890
                  ----------------
                  1897)1897-1897
                       ----------
                         1-1)2+43-45(2+45
                              2-2
                              -----
                                45-45
                                45-45
                                -----
                                    0
```

故 A, B 之 H. C. F. $=x-1$.

〔例五〕 求 $A=3x^3-x^2-12x+4$, $B=x^3-2x^2-5x+6$, $C=7x^3+19x^2+8x-4$ 之 H. C. F.

〔提示〕 先用輾轉相除求 A, B 兩式之 H. C. F. 得 M 式.

再用上法求 M, C 之 H. C. F., 所得結果卽爲 A, B, C 三式之 H. C. F.

習題十三

1. 說明例五之理.

試求下列各題之 H. C. F.

2. $a^4+a^3+2a^2+a+1$, $a^5+2a^3+a^2+a+1$.

3. $x^5+x^3y^2-2x^2y^3$, $x^5y+3x^4y^2-x^3y^3-2x^2y^4$.

$L.C.M = \frac{A \cdot B}{H.C.F}$

4. $x^4+2x^2y^2+xy^3+2y^4,\ x^4-x^3y+x^2y^2+2y^4.$

5. $m^5+3m^3+m^2+2m+2,\ 4m^5+9m^3+5m^2+2m+10.$

6. $x^3+3x^2-8x-24,\ x^3+3x^2-3x-9.$

7. $2x^3+4x^2-7x-14,\ 6x^3-10x^2-21x+35.$

8. $4a^5+14a^4+20a^3+70a^2,\ 8a^7+28a^6-8a^5-12a^4+56a^3.$

9. $1+p+p^3-p^5,\ 1-p^4-p^5+p^7.$

10. $x^3+ax^2-3x-3a,\ x^3-x^2-3x+3,\ x^3+x^2-3x-3.$

§24. L.C.M求法之二. 當 A, B 二式不易分解因子時,欲求 A, B 之L.C.M.,須用下之定理.

定理. A, B 之H.C.F.與 A, B 之L.C.M.二者相乘之積等於 A, B 之積.

〔證〕 設 A, B 之H.C.F.爲 k, A, B 之L.C.M.爲 m, 則應有下列三式: $A=ak,\quad B=bk,\quad m=abk.$

依等量公理,得

$$AB=ak\cdot bk=(abk)k=mk.$$

卽"A, B 之積等於其H.C.F.與L.C.M.之積"也.

推論. A, B 之L.C.M. $=\dfrac{A}{A, B\text{ 之 H.C.F.}}\times B.$

故欲求 A, B 之L.C.M.可先求 A, B 之H.C.F.(用前二節之法),再以此H.C.F.除 A, B 卽得.

〔例一〕 求 $x^5+2x-3,\ x^3-1$ 之L.C.M.

〔解〕 用輾轉相除法求得此二式之H. C. F. 爲 $x-1$, 故其最低公倍式爲

$$\text{L. C. M.}=\frac{x^3+2x-3}{x-1}(x^3-1)=(x^2+x+3)(x^3-1)$$
$$=x^5+x^4+3x^3-x^2-x-3.$$

〔例三〕 有 A, B, C, 三式 $A=x^4+2x^2+x+2$,

$$B=x^4+2x^3+5x^2+4x+3,\quad C=x^4+3x^2+2x+3,$$

求 A, B, C 的 L. C. M.

〔解〕 仿上例,先求得 A, B 的 L. C. M. 爲

$$D=\frac{x^4+2x^2+x+2}{x^2+x+1}(x^4+2x^3+5x^2+4x+3)$$
$$=(x^2-x+2)(x^4+2x^3+5x^2+4x+3).$$

次求得 C, D 的 L. C. M. 爲

$$\frac{(x^2-x+2)(x^4+2x^3+5x^2+4x+3)}{x^2+x+1}(x^4+3x^2+2x+3)$$
$$=(x^2-x+2)(x^2+x+3)(x^4+3x^2+2x+3)$$

亦卽爲 A, B, C 的 L. C. M.

習題十四

1. 設 $A=ahls$ (a, b, c; h, l; h, m; l, m; 無公因子).

$B=bhms$

$C=clms$

則　(1)　A, B, C 之 H. C. F. =?

(2)　A, B, C 之 L. C. M. =?

(3)　A, B, C 之 H. C. F × A, B, C 之 L. C. M. = A, B, C 否?

然則欲求 A, B, C 之 L. C. M. 可否先求 A, B, C 之 H. C. F?

2.　欲求 A, B, C 三式之 L. C. M. 可先求 A, B 之 L. C. M. 得 D 式,再求 C, D 兩式之 L. C. M., 所得結果即為 A, B, C 三式之 L. C. M., 試證其理.

3.　試求習題十三 2—10 各題之 L.C.M.

第五章

分式　H.C.F.及L.C.M.之應用

§25* 引論. 下列諸端,學者皆已學過,能舉例詳釋其意義否?

(1) 何謂分式?分子,分母?

(2) 分式記法.

(3) 分式與除法之關係.

(4) 分式之需要.

(5) 分式問題之分類.(通分,約分,四則.)

§26* 分式符號之變化. 依正負數除法定則,如下之關係:

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{A}{-B}=-\frac{-A}{B}$$

據此關係,在通分,加減等運算中,往往可將演算手續,變至甚簡,學者於以下幾節內,當見此理

之效用,今茲所應注意者,分式中分子分母須如何變號方不致影響分式之值耳.

〔例一〕 $\frac{x-y}{a-b}=\frac{-x-y}{-a-b}=-\frac{-x-y}{a-b}=-\frac{x-y}{-a-b}$. 對否? 对

〔例二〕 $\frac{x-y}{a-b}=\frac{-x+y}{-a+b}=-\frac{-x+y}{a-b}=-\frac{x-y}{-a+b}$. 對否? 不对

§27* **分式變形之原理.** 關於分式之種種演算,大都基於下之原理:—

$$\frac{mA}{mB}=\frac{A}{B}\cdots\cdots(1)\qquad\qquad \frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}\cdots\cdots(2)$$

即謂"分式中分子分母儘可乘以(或除以)非零之同數,決不影響分式之結果."證之如下:—

設　$\frac{A}{B}=x.$

依除法應得　$A=Bx.$

依等量公理　$mA=mBx.$

又依除法得　$\frac{mA}{mB}=x.$

又依等量公理得　$\frac{mA}{mB}=\frac{A}{B}.$　(1)

亦即　$\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}.$　(2)

〔例一〕 $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\dfrac{(x-y)\cancel{(x+y)}}{(x+y)\cancel{(x+y)}}=\dfrac{x-y}{x+y}$.

〔例二〕 $\dfrac{1}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{x+y}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.

〔例三〕 $\dfrac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(2x+y)+z}=\dfrac{x+y}{2x+y+z}$. 對否? 不对 不能相消

§28* **約分.** 依前節公式(I),可見分子分母如有相同因子,便可相消,而不變分式之結果,由此乃得約分之規則如下:—

先求分子分母之H.C.F.變原分式$\dfrac{A}{B}$為$\dfrac{A'\times\text{H.C.F.}}{B'\times\text{H.C.F.}}$次,消H.C.F.得$\dfrac{A'}{B'}$.即為所求之最簡分式(分子分母次數最低).如此,由$\dfrac{A}{B}$化為$\dfrac{A'}{B'}$之手續名曰約分.

〔例一〕 $\dfrac{a^3-b^3}{2a^4+2a^3b-a^2b^2-3ab^3-3b^4}$

$$=\frac{(a-b)\cancel{(a^2+ab+b^2)}}{(2a^2-3b^2)\cancel{(a^2+ab+b^2)}}=\frac{a-b}{2a^2-3b^2}.$$

〔例二〕 $\dfrac{x^4-16}{x^4-x^3-2x^2-4x-24}=\dfrac{\cancel{(x^2+4)}(x^2-4)}{\cancel{(x^2+4)}(x^2-x-6)}=\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$. [illegible]

$=\dfrac{(x^4-16)\div(x^3+2x^2+4x+8)}{(x^4-x^3-2x^2-4x-24)\div(x^3+2x^2+4x+8)}=\dfrac{x-2}{x-3}$

約分手續已完全否? 不完全

〔例三〕 $\dfrac{(x-y)(x+y)+2(a-b)}{(x+y)(x^2+y^2)+m(a-b)}=\dfrac{x-y+2}{x^2+y^2+m}$.

對否? 不对

§ 29* **通分.** 在分式加減法中,有時須將幾個分母不同之分數,化爲分母相同之分數而不變各個分式之值.此類手續名曰通分,通分之原理基於§19公式(2),依此原理乃得通分之手續如下:

先求諸分母之L. C. M. 次於各分式中,各以適當之數同乘分子分母,使各分式之新分母皆爲諸分母之L. C. M.

第一步 先求分母之L.C.M.
第二步 依次以各分式之分母除L.C.M.
第三步 以所得之商乘各分式之分子[illegible]

〔例〕 試將 $\dfrac{1}{x^2-y^2}, \dfrac{3x-y}{y^2-x^2}, \dfrac{1}{2x^2-xy-y^2}$ 通分.

〔解〕 諸分母之L. C. M. $=(x-y)(x+y)(2x+y)$.

$$\frac{1}{x^2-y^2}=\frac{1}{(x+y)(x-y)}=\frac{2x+y}{(x+y)(x-y)(2x+y)}$$

$$\frac{3x-y}{y^2-x^2}=\frac{3x-y}{(y+x)(y-x)}=\frac{y-3x}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{(y-3x)(2x+y)}{(x+y)(x-y)(2x+y)}.$$

$$\frac{1}{2x^2-xy-y^2}=\frac{1}{(2x+y)(x-y)}=\frac{x+y}{(x+y)(2x+y)(x-y)}.$$

第四步 以L.C.M.去除以上所得之結果即化為同分母之分式

〔注意〕第二分式中分子分母之符號何故須先加改變?

習題十五

1. 補足下列諸等式:—

(a) $\frac{m}{(a-b)^3}=\frac{?}{(b-a)^3}=\frac{?}{-(b-a)^3}=-\frac{?}{(b-a)^3}=-\frac{?}{-(b-a)^3}$.

(b) $\frac{m}{(a-b)^4}=\frac{?}{(b-a)^4}=\frac{?}{-(b-a)^4}=-\frac{?}{(b-a)^4}=-\frac{?}{-(b-a)^4}$.

(c) $-\frac{a-b}{x-y}=-\frac{?}{y-x}=\frac{?}{x-y}=\frac{?}{y-x}=\frac{-a+b}{?}$.

(d) $-\frac{a-b}{(x-y)^2}=-\frac{?}{(y-x)^2}=\frac{?}{(x-y)^2}=\frac{?}{(y-x)^2}=\frac{-a+b}{?^2}$.

2. 試將以下諸分式約至最簡:—

(a) $\frac{x^3+y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$ (b) $\frac{x^5+3x^3+x^2+3}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$.

(c) $\frac{3x^3+x^2+4x-4}{9x^3-9x^2+5x-2}$ (d) $\frac{a^5-a^4+2a^3+1}{a^5-a^4+3a^3-a+a+1}$.

3. 試將下列各組分式通分使有最低之公分母.

(a) $\frac{1}{x^2-4y^2}$, $\frac{b}{4y^2-x^2}$, $\frac{3x-y}{2x^2-5xy+2y^2}$.

(b) $\frac{2y-x}{2a^2-5ab+b^2}$, $\frac{x+y}{b^2-4ab+a^2}$, $\frac{3x-2y}{-a^2+4ab-b^2}$.

(c) $\frac{p^4+p^2q^2+q^4}{p^3+q^3}$, $\frac{p^4+p^2q^2+q^4}{p^3-q^3}$, $\frac{2p^3+p^2q+pq^2-q^3}{p^3-p^2q-pq^2-2q^3}$.

(d) $\frac{1}{a^2-(b-c)^2}$, $\frac{1}{b^2-(a-c)^2}$, $\frac{1}{c^2-(b-a)^2}$.

§30* **分式加減法.** (a) 同分母者:由除法分配定則,得

$$\frac{A+B-C}{D}=\frac{A}{D}+\frac{B}{D}-\frac{C}{D}$$

今逆其次序,應得 $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}-\frac{C}{D}=\frac{A+B-C}{D}$

即謂"同分母之諸分式相加減,即將諸分式之分子依其原有之符號相加減,以其結果作爲所求分式之分子,而以原有分母作所求分式之分母."

(b) 異分母者:用通分法先將諸公式化爲同分母之分式,再依上法加減之.

〔例一〕
$$\frac{x^2}{x^3+y^3}-\frac{xy}{x^3+y^3}+\frac{y^2}{x^3+y^3}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3}$$
$$=\frac{1}{x+y}.$$

〔例二〕
$$\frac{x-y}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}+\frac{x+y}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}$$
$$=\frac{x-y}{(x+y)(x^2+y^2)}+\frac{x+y}{(x-y)(x^2+y^2)}$$
$$=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$$
$$=\frac{2}{x^2-y^2}.$$

〔例三〕 $\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(a-c)}+\frac{1}{(c-a)(b-a)}$

$$=\frac{1}{(a-b)(b-c)}-\frac{1}{(b-c)(c-a)}-\frac{1}{(c-a)(a-b)}$$

$$=\frac{(c-a)-(a-b)-(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{2\cancel{(c-a)}}{(a-b)(b-c)\cancel{(c-a)}}$$

$c-a+b-b+c$

$$=\frac{2}{(a-b)(b-c)}.$$

〔注意〕 在本例解法中,第二分式,第三分式變號之作用何在?

§ 31* **分式乘法.** 兩分式 $\frac{A}{B},\frac{C}{D}$ 相乘即將 A, C 相乘作爲積之分子;B, D 相乘作爲積之分母. 即

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}.$$

〔證〕 設　　$\frac{A}{B}=x,\quad \frac{C}{D}=y.$

依除法之理,得　　$A=Bx,\quad C=Dy.$

依等量公理,得　　$AC=Bx\cdot Dy=BD\cdot xy.$

又依除法之理,得　　$xy=\frac{AC}{BD}.$ 是即所欲證.

〔例一〕 $\frac{x^3+y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}\cdot\frac{x^3-y^3}{x^2-2xy-3y^2}$

$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$$=\frac{\cancel{(x+y)}\cancel{(x^2-xy+y^2)}(x-y)\cancel{(x^2+xy+y^2)}}{\cancel{(x^2+xy+y^2)}\cancel{(x^2-xy+y^2)}(x-3y)\cancel{(x+y)}}$$

$$=\frac{x-y}{x-3y}.$$

$=\frac{y^2}{y^2}+\frac{xy}{y^2}+\frac{x^2}{y^2}=\frac{y^2+xy+x^2}{y^2}$

〔例二〕 $\left(1+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\left(\frac{1}{x-y}-\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}\right)$

$$=\frac{x^2+xy+y^2}{y^2}\cdot\frac{x^2+xy+y^2-(x-y)^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

$$=\frac{3xy}{y^2(x-y)}=\frac{3x}{y(x-y)}.$$

§32* **分式除法** (a) 第一法 兩分式相除,就原理說,亦可"以除式之分子除被除式之分子,作為商之分子,以除式之分母除被除式之分母,作為商之分母"證之如下:

〔證〕 設 $\frac{A}{B}=x,\quad \frac{C}{D}=y.$

依分式定義 $A=Bx,\quad C=Dy.$

依等量公理 $\frac{A}{C}=\frac{Bx}{Dy}=\frac{B}{D}\cdot\frac{x}{y}.$

依除法定義 $\frac{A}{C}\div\frac{B}{D}=\frac{x}{y}.$

即 $\frac{A}{C}\div\frac{B}{D}=\frac{A}{B}\Big/\frac{C}{D}.$

〔例〕 $$\frac{x^2-9y^2}{x^2-25y^2}\div\frac{x+3y}{x+5y}=\frac{\cancel{(x+3y)}(x-3y)}{\cancel{(x+5y)}(x-5y)}\div\frac{\cancel{x+3y}}{\cancel{x+5y}}$$

$$=\frac{x-3y}{x-5y}.$$

(b) 第二法. 但爲手續便利計,有時可"將除式之分子分母顚倒之,以與被除式相乘."其理何在? 學者試自證之.

〔例〕 $$\frac{a^2-(b-c)^2}{c^2-(a-b)^2}\div\frac{b^2-(c-a)^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(c+a-b)(c-a+b)}$$

$$\times\frac{(b+c+a)\cancel{(b+c-a)}}{\cancel{(b+c-a)}(b-c+a)}=\frac{b+c+a}{b+c-a}.$$

習題十六

1. 試將下列各式化爲整式與分式之和:—

(a) $\frac{x^3+3x^2+5x+6}{x+2}$. ($b$) $\frac{x^5+y^5}{x-y}$.

(c) $\frac{x^4+16y^4}{x+2y}$. (d) $\frac{16y^4+x^4}{2y+x}$.

2. 化簡下列諸式:—

(a) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$.

(b) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

(c) $\frac{x^3+x^2y}{x^4+xy^3+x^3y+y^4}-\frac{x^2y-xy^2}{x^4-x^3y+xy^3-y^4}+\frac{y^2}{x^3+y^3}$.

$$\frac{-3}{\;\begin{matrix}-\\ \end{matrix}\; -6 \quad +3} \qquad \frac{-6 \quad -3}{-3} \qquad \frac{-3 \quad +6}{-9} \qquad \frac{3 \quad -3}{3}$$

(d) $\dfrac{x+2}{2x^3+5x^2-x+4}-\dfrac{x-1}{2x^3+7x^2+2x-8}$.

(e) $\dfrac{1}{x^4+4}+\dfrac{1}{x^4+4x^3+4x^2-4}+\dfrac{1}{x^4-4x^2+8x-4}$.

(f) $\dfrac{4x^2-9y^2}{25x^2-16y^2}\cdot\dfrac{5x^2+xy-4y^2}{2x^2+5xy+3y^2}\cdot\dfrac{5x^2-xy-4y^2}{2x^2-5xy+3y^2}$.

(g) $\dfrac{x^4-x^2+3x^2-2x-1}{x^3-4x^2-3}\cdot\dfrac{x^4+3x^2+9}{x^4+2x^3+3x^2+7x+2}\cdot\dfrac{x+2}{ax^2+3ax+a}$.

(h) $\dfrac{1}{x^2-(a+b)x+ab}\div\dfrac{1}{x^2-(b+c)x+bc}\cdot\dfrac{x^2-b^2}{x^2-c^2}$.

(i) $\dfrac{m^8-n^8}{x^{12}-b^{12}}\div\dfrac{m^4+n^4}{x^6+y^6}\div\dfrac{m^2+n^2}{x^3+y^3}\div\dfrac{m+n}{x+y}$.

(j) $\left(1+\dfrac{x^3}{y^3}\right)\div\left(1+\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)\div\left(1-\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)\times\left(1-\dfrac{x^3}{y^3}\right)$.

(k) $(x^4+4x^2+16)\div\left(x^2+2x+4+\dfrac{16}{x-2}\right)\div\left(x^2-2x+4-\dfrac{16}{x+2}\right)$.

8. 利用對稱式求和:—

(a) $\dfrac{y+z}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{z+x}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{x+y}{(z-x)(z-y)}$.

(b) $\dfrac{a+b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b+c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c+a-b}{(c-a)(c-b)}$.

(c) $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$.

(d) $\dfrac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y^2-xz}{(y+x)(y+z)}+\dfrac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}$.

(e) $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$.

§33* 疊分式之化簡. 分式中,分母分子不盡爲整式者名曰疊分式.疊分式者,實即分式除法

所得之商也.故疊分式化簡之法,可依分式除法演之,惟為手續簡便計,最好應用下法:—

在疊分式之分子分母中,求出所有各項之最小公分母(即各項分母之L.C.M.).以此公分母遍乘疊分式之分子分母各項,而化簡其結果.

〔例〕
$$\frac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}=?$$

〔解一〕 原式

$$=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}\div\frac{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{4xy}{x^2-y^2}\cdot\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{4x^2y^2}=\frac{x^2+y^2}{xy}.$$

〔解二〕 原式

$$=\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)\left[\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right]}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)\left[\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]}$$

$$=\frac{(x+y)^2(x^2+y^2)-(x-y)^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}=\frac{4xy(x^2+y^2)}{4x^2y^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{xy}.$$

§34. 連分式之化簡. 凡分式之為$a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{l+\cdots}}$之形者,名曰連分式.連分式之特性甚多,此處不能詳舉.(欲知其詳,參考 Hall and Knight: Higher Algebra 第二十五,二十七兩章). 僅述此類分式之宜如何化簡.

欲將連分式化簡為尋常最簡分式,其法亦多,但最好自最下一層分式起,依次化簡,既省手續亦少錯誤.

〔例〕
$$\frac{1}{1-\cfrac{a^2-1}{a+\cfrac{1}{a-1}}}=\frac{1}{1-\cfrac{a^2-1}{\cfrac{a^2-a+1}{a-1}}}=\frac{1}{1-\cfrac{a^3-a}{a^2-a+1}}$$
$$=\frac{1}{\cfrac{a^2+1-a^3}{a^2-a+1}}=\frac{a^2-a+1}{-a^3+a^2+1}$$

習題十七

化簡下列各式:—

1. $\dfrac{a-2}{a-2-\cfrac{a}{a-\cfrac{a-1}{a-2}}}$

2. $\dfrac{1}{x-\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}-\dfrac{1}{x+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x}}}$

3. $$\cfrac{x}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}}$$

4. $$x+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}}}$$

5. $$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$$

6. $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}}$$

7 $$\frac{\dfrac{m-n}{m+n}-\dfrac{m+n}{m-n}}{1-\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^3}}.$$

8. $$\frac{\dfrac{8xy}{x^2-y^2}}{\dfrac{x^3-y^3}{x+y}-\dfrac{x^3+y^3}{x-y}}.$$

9. $$\frac{\dfrac{b^3}{a^2-b^2}}{\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}-\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}}.$$

10. $$\frac{1+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{y}}\div\frac{\dfrac{1}{y}}{y-1+\dfrac{1}{y}}\times\frac{\dfrac{1}{y}}{y^2+\dfrac{1}{y}}.$$

11 $$\frac{x+\dfrac{x-y}{1+xy}}{1-\dfrac{(x-y)y}{1+xy}}-\frac{x-\dfrac{x-y}{1-xy}}{1-\dfrac{x(x-y)}{1-xy}}.$$

12. $$\frac{\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}-1}{\dfrac{m^2}{n^2}+\dfrac{m}{n}+1}\times\frac{1+\dfrac{n}{m}}{m-n}\div\frac{1+\dfrac{n^3}{m^3}}{\dfrac{m^2}{n}-\dfrac{n^2}{m}}.$$

13. $$\left(\frac{a+x}{a^2-ax+x^2}-\frac{a-x}{a^2+ax+x^2}\right)\div\left(\frac{a^2+x^2}{a^3-x^3}-\frac{a^2-x^2}{a^3+x^3}\right).$$

14. $$\left(\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{a+x}{a^2+x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+a}{x^2+a^2}}+\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{a-x}{a^2+x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x-a}{x^2+a^2}}\right)\div\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}\right).$$

第六章 起

比及比例 變數法

I. 比及比例.

§35.* **引論.** 下列諸端,學者在初中代數,均已學過,能詳釋其意義否?

(1) 何謂比?複比?二乘比?三乘比?

(2) 比與分數之異同.

(3) 比與除法之關係.

(4) 比之記法,比之兩項.

(5) 比例.

(6) 比例之內項外項.

(7) 兩數之比例第三項,兩數之比例中項.

(8) 三數之比例第四項.

§36 **比之重要定理.** 若$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots$

$=\frac{a_n}{b_n}$,則

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

〔證〕 設以k表相等諸比之值，卽

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k.$$

則依等量公理，得
$$\begin{cases} a_1=b_1k \\ a_2=b_2k \\ a_3=b_3k \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n=b_nk \end{cases}$$

故
$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}&=\frac{b_1k+b_2k+b_3k+\cdots\cdots+b_nk}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}\\ &=\frac{(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)k}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}\\ &=k\\ &=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}.\end{aligned}$$

推論. 若$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$，則

$$\sqrt[m]{\frac{p_1a_1^m+p_2a_2^m+p_3a_3^m+\cdots\cdots+p_na_n^m}{p_1b_1^m+p_2b_2^m+p_3b_3^m+\cdots\cdots+p_nb_n^m}}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

〔提示〕本推論可仿上法證之,亦可應用本節定理直接推得之.

〔注意〕本節定理及推論,二者固甚重要;但本節定理的證法,則尤爲重要.善用此證法,則於等比的一般問題未有不能解者.茲舉兩例於下:—

〔例一〕若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, 求證

$$\frac{pa^2+qc^2}{pb^2+qd^2}=\frac{lc^2+me^2+ng^2}{ld^2+mf^2+nh^2}.$$

〔證法一〕因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 故 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$.

依上推論,得 $$\frac{pa^2+qc^2}{pb^2+qd^2}=\frac{c^2}{d^2}.$$

又因 $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, 故 $\frac{c^2}{d^2}=\frac{e^2}{f^2}=\frac{g^2}{h^2}$.

依上推論,得 $$\frac{lc^2+me^2+ng^2}{ld^2+mf^2+nh^2}=\frac{c^2}{d^2}.$$

$$\therefore\ \frac{pa^2+qc^2}{pb^2+qd^2}=\frac{lc^2+me^2+ng^2}{ld^2+mf^2+nh^2}.$$

〔證法二〕設 $k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, 則

$$a=bk,\ c=dk,\ e=fk,\ g=hk.$$

於是
$$\frac{pa^2+qc^2}{pb^2+qd^2}=\frac{pb^2k^2+qd^2k^2}{pb^2+qd^2}=k^2,$$

且
$$\frac{lc^2+me^2+ng^2}{ld^2+mf^2+nh^2}=\frac{ld^2k^2+mf^2k^2+nh^2k^2}{ld^2+mf^2+nh^2}=k^2.$$

$$\therefore\quad \frac{pa^2+qc^2}{pb^2+qd^2}=\frac{lc^2+me^2+ng^2}{ld^2+mf^2+nh^2}.$$

〔例二〕 若 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, 求證

$$\frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}+\frac{y^3+b^3}{y^2+b^2}+\frac{z^3+c^3}{z^2+c^2}=\frac{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}$$

〔證〕 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$, 則

$$x=ak,\ y=bk,\ z=ck.$$

於是
$$\frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}=\frac{a^3k^3+a^3}{a^2k^2+a^2}=\frac{(k^3+1)a}{k^2+1}.$$

由此
$$\frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}+\frac{y^3+b^3}{y^2+b^2}+\frac{z^3+c^3}{z^2+c^2}=\frac{(k^3+1)a}{k^2+1}+\frac{(k^3+1)b}{k^2+1}$$
$$+\frac{(k^3+1)c}{k^2+1}=\frac{(k^3+1)(a+b+e)}{k^2+1}$$

同樣,
$$\frac{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}$$
$$=\frac{(ak+bk+ck)^3+(a+b+c)^3}{(ak+bk+ck)^2+(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{(k^3+1)(a+b+c)^3}{(k^2+1)(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{(k^3+1)(a+b+c)}{k^2+1}$$

$$\therefore\quad \frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}+\frac{y^3+b^3}{y^2+b^2}+\frac{z^3+c^3}{z^2+c^2}$$

$$=\frac{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}.$$

〔注意〕 若應用本節定理以證例二,比上法難易何如?

習題十八

1. 求$x+y:x-y$的二乘比,三乘比,

2. 求$a+b:a-b$及$\frac{1}{a^2+ab+b^2}:\frac{1}{a^2-ab+b^2}$的複比.

3. 求$a+b:a-b$的二乘比與$a-b:a+b$的三乘比二者的複比.

4. 比的兩項應否爲同類量?比值應爲名數,抑爲不名數?比值是否必爲有理數?正方形對角線與其一邊之比爲有理數否?正方形面積與其一邊能相比否?何故?

5. 若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$,用二法求證

$$\frac{2a^5b^2+5a^2e^3-7e^5f^4}{2b^7+5b^2f^3-7f^9}=\frac{c^5}{d^5},$$

6. 若 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$,用二法證 $\sqrt{\frac{a^5+b^2c^2+a^3c^2}{b^4c+d^4+b^2cd^2}}=\frac{a}{d}$

7. 若 $\frac{x+y}{pa+qb}=\frac{y+z}{pb+qc}=\frac{z+x}{pc+qa}$, 用二法求證

$$\frac{2(x+y+z)}{a+b+c}=\frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{bc+ca+ab}.$$

8. 若 $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$, 用二法求證

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)}$$

9. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, 求證 $\sqrt[5]{\frac{pa^5+qe^5}{pb^5+qf^5}}=\sqrt[3]{\frac{lc^3-me^3-ng^3}{ld^3-mf^3-nh^3}}$.

10. 若 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, 求證

$$\frac{x^4+a^4}{x^3+a^3}+\frac{y^4+b^4}{y^3+b^3}+\frac{z^4+c^4}{z^3+c^3}=\frac{(x+y+z)^4+(a+b+c)^4}{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}.$$

§37. 比例之重要定理. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則

(1) $$ad=bc$$

(2) $$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

(3) $$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\ \text{又}\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a}.$$

(4) $$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}.$$

(5) $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

上列諸定理,學者在初中代數均已學過.試各用二法證明之.

〔提示〕(1)仿前節證法.(2)他法.

§38. **比例問題解法舉例.** 欲解關於比例的問題,大抵可用三法,茲舉例明之.

〔例〕 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,求證 $\frac{la^2+mc^2}{pab+qcd}=\frac{lab+mcd}{pb^2+qd^2}$.

〔證法一〕 $\because\quad a:b=c:d$

$\therefore\quad a^2:ab=c^2:cd$ | 又 $ab:b^2=cd:d^2$

$\therefore\quad \frac{la^2+mc^2}{lab+mcd}=\frac{a^2}{ab}=\frac{a}{b}$ | 又 $\frac{pab+qcd}{pb^2+qd^2}=\frac{ab}{b^2}=\frac{a}{b}$

$$\therefore\quad \frac{la^2+mc^2}{lab+mcd}=\frac{pab+qcd}{pb^2+qd^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{la^2+mc^2}{pab+qcd}=\frac{lab+mcd}{pb^2+qd^2}.$$

〔證法二〕 設 $k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,則 $a=bk$, $c=dk$.

於是 $$\frac{la^2+mc^2}{pab+qcd}=\frac{lb^2k^2+md^2k^2}{pb^2k+qd^2k}=\frac{lb^2+md^2}{pb^2+qd^2}\cdot k$$

且 $$\frac{lab+mcd}{pb^2+qd^2}=\frac{lb^2k+md^2k}{pb^2+qd^2}=\frac{lb^2+md^2}{pb^2+qd^2}\cdot k$$

$$\therefore\qquad \frac{la^2+mc^2}{pab+qcd}=\frac{lab+mcd}{pb^2+qd^2}.$$

〔證法三〕 I. 分析. 假定 $\dfrac{la^2+mc^2}{pab+qcd}=\dfrac{lab+mcd}{pb^2+qd^2}$ (1)

則 $(la^2+mc^2)(pb^2+qd^2)=(pab+qcd)(lab+mcd).$ (2)

即 $lpa^2b^2+mqc^2d^2+lqa^2d^2+mpc^2b^2$

$=pla^2b^2+mqc^2d^2+(.q+mp)abcd.$ (3)

即 $lqa^2d^2+mpb^2c^2=lqabcd+mpabcd.$ (4)

即 $lqad(ad-bc)=mpbc(ad-bc).$ (5)

即 $ad-bc=0.$ (6)

即 $a:b=c:d.$ (7)

II. 逆之. 依等量公理, 由 (7) 可得 (6), 由 (6) 可得 (5), (4), (3), (2), (1). 故當 (7) 成立時 (1) 亦必成立.

試證 a, b, c, d 成比例.

習題十九

1. 求 a, b 的比例中項, 求 a, b 的比例第三項,

2. 求 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ 與 $\dfrac{a}{b}$ 的比例中項, 及其比例第三項.

3. 若 $a:b=c:d$, 求證

(1) $a^2c+ac^2:b^2d+bd^2=(a+c)^3:(b+d)^3$

(2) $a+c:b+d=\sqrt[3]{a^3-c^3}:\sqrt[3]{b^3-d^3}$

(3) $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt[4]{a^2c^2+\frac{c^5}{a}}:\sqrt[4]{b^2d^2+\frac{d^5}{b}}$.

4. 若 $a:b=b:c=c:d$, 試證

(1) $2a+5d:2a^3+5b^3=3a-7d:3a^3-7b^3$.

(2) $(ab+bc+cd)^2=(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$

5. 若 $a:b=b:c=c:d=d:e$, 求證

$$(ab+bc+cd+de)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)(b^2+c^2+d^2+e^2)$$

6. 若 a, b, c, d 成比例, 試證

$$a+d-b-c=(a-b)(a-c):a$$

7. 若 $a:b=c:d$ 且 $m:n=p:q$, 求證

$$amx+bny:amx-bny=cpx+dqy:cpx-dqy.$$

8. 若 $\frac{2ma+6mb+3nc+9nd}{2ma-6mb+3nc-9nd}=\frac{2ma+6mb-3nc-9nd}{2ma-6mb-3nc+9nd}$

II. 變數法

§39. 常數, 變數. 在一個問題中, 所含各數(或量)之值有一定不變者, 亦有變換不定者, 前者名曰常數(或常量), 後者名曰變數(或變量).

例如, 在 $3x^2+5x+8$ 中, x 可爲任何值, 故爲變數; 全式 $3x^2+5x+8$ 之值亦可爲任何值, 故亦爲變數. 至於 3, 2, 5, 8 等則爲固定之值而無可變易, 故皆爲常數.

又如, 火車每時行 60 市里, x 時內行 $60x$ 市里. 在

$60x$中，60為常數；x則為變數，$60x$亦為變數.

又如，在$y=3x+2$中，x,y俱為變數；2，3則皆為常數.

又如，在$3x+2=0$中，3，2固為常數；x亦為常數，因x之值只能為$-\frac{2}{3}$，無可變易故也.

§ **40.** **正變.** 兩個變數x,y之間如恆有$\frac{y}{x}=k=$常數之關係，則謂y隨x而正變.正變之關係常以“$y \propto x$”表之.

例如，圓周(1)隨半徑r而正變，因為$\frac{c}{r}=2\pi=$常數.

又如，圓面積A不隨半徑r而正變，因$\frac{A}{r}=\pi r \neq$常數故也.

又如，圓面積A隨半徑平方r^2而正變，因$\frac{A}{r^2}=\pi=$常數.

又如，在$y=2x-3$中，y不隨x而正變，因$\frac{y}{x} \neq$常數.

倒（逆反）

§ **41.** **例變.** 若y隨$\frac{1}{x}$而正變，則謂y隨x而倒變，倒變的關係常以“$y \propto \frac{1}{x}$”表之.

為便於解決倒變問題計，常用下之

定理. 若 $y \propto \frac{1}{x}$, 則 $xy=k$; 反之, 若 $xy=k$, 則 $y \propto \frac{1}{x}$.

此理顯然, 學者試自證之.

§42. 正變, 例變與比例之關係. 正變倒變各爲比例之一種, 試分兩層觀之. 若二变量之二对应值之比为一常数则此二变量称为正变

(A) 關於正變者. 設 x 由 x_0 變爲 x_1 時, y 由 y_0 變爲 y_1, 則因 $\frac{y}{x}=k$, 故得

$$\frac{y_0}{x_0}=k, \frac{y_1}{x_1}=k$$

$$\therefore \quad \frac{y_0}{x_0}=\frac{y_1}{x_1} \text{ 是即正比例也.}$$

(B) 關於倒變者. 設 x 由 x_0 變爲 x_1 時, y 由 y_0 變爲 y_1, 則 $xy=k$, 故得

$$x_0y_0=k, \ x_1y_1=k.$$

$$\therefore \quad x_0y_0=x_1y_1$$

$$\therefore \quad \frac{x_0}{x_1}=\frac{y_1}{y_0}, \text{ 是即反比例也.}$$

§43. 聯變. 當 z 隨 x, y 之積而正變, 則謂 z 隨 x, y 而聯變. 其簡式爲 "$z \propto xy$".

例如, 長方形面積 A 隨長 l 闊 b 而聯變, 簡記爲 "$A \propto lb$".

又如,物體進行時所行距離 s 隨所具速度 v 與所經時間 t 而聯變.簡記為“$s \propto vt$”.

為便於解決聯變問題計,亦常用下之

定理. 若當 x 不變時,z 隨 y 而正變;且當 y 不變時,z 隨 x 而正變,則當 x, y 俱變時,z 必隨 x, y 而聯變.

〔證〕 先設 x 之值為常數 x_0.當 y 由 y_0 變為 y_1 時,z 由 z_0 變為 z'.則 $\frac{z_0}{z'}=\frac{y_0}{y_1}$.

次設 y 為常數 y_1,當 x 由 x_0 變為 x_1 時,z 由 z' 變為 z_1,則 $\frac{z'}{z_1}=\frac{x_0}{x_1}$.

故
$$\frac{z_0}{z'}\cdot\frac{z'}{z_1}=\frac{y_0}{y_1}\cdot\frac{x_0}{x_1}.$$

$$\therefore\quad \frac{z_0}{z_1}=\frac{x_0y_0}{x_1y_1}.$$

$$\therefore\quad \frac{z_0}{x_0y_0}=\frac{z_1}{x_1y_1}=\text{常數}.$$

$$\therefore\quad z \propto xy.$$

§44. 變數法問題解法舉例. 關於變數法的問題.大抵可用二法求解.茲以下列二例明之.

〔例一〕 當 s 不變時，$y \propto t^2$；當 t 不變時，$y \propto \frac{1}{s^3}$.
設 $s_0=1$, $t_0=1$ 時，$y_1=10$, 問 $s_2=10$, $t_2=5$ 時，$y_2=$？

〔解法一〕 依題意及聯變定理得 $y=\frac{kt^2}{s^3}$. $\qquad (A)$

以 s_0, t_0, y_0 諸值代入 (A)，得 $10=\frac{k\cdot 1^2}{1^3}=k$.

故
$$y=\frac{10t^2}{s^3} \qquad (B)$$

再以 s_2, t_2 之值代入 (B)，得 $y_2=\frac{10\cdot 5^2}{10^3}=\frac{1}{4}$.

〔解法二〕 依題意及聯變定理得 $y \propto \frac{t^2}{s^3}$.

依正變與比例之關係，得
$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{t_2^{\,2}}{s_2^{\,3}} \div \frac{t_1^{\,2}}{s_1^{\,3}}.$$

以 s_1, t_1, s_2, t_2, y_1 等值代入上式，即得
$$\frac{y_2}{10}=\frac{5^2}{10^3} \div \frac{1^2}{1^3}.$$
$$\therefore \quad y_2=\frac{1}{4}$$

〔例二〕 若 $x \propto y$，求證 $x^2+y^2 \propto x^2-y^2$.

〔證法一〕 因 $x \propto y$，故 $x=ky$.

故
$$x^2+y^2=k^2y^2+y^2=(k^2+1)y^2.$$
且
$$x^2-y^2=k^2y^2-y^2=(k^2-1)y^2.$$

$$\therefore\quad \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(k^2+1)y^2}{(k^2-1)y^2}=\frac{k^2+1}{k^2-1}=k'.$$

$$\therefore\quad x^2+y^2\propto x^2-y^2.$$

〔證法二〕 因$x\propto y$,故$\dfrac{x}{y}=\dfrac{k}{1}$.

故 $$\frac{x^2}{y^2}=\frac{k^2}{1^2}.$$

故 $$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{k^2+1}{k^2-1}=k'.$$

$$\therefore\quad x^2+y^2\propto x^2-y^2.$$

〔證法三〕 設x由x_1變爲x_2時,y由y_1變爲y_2.依正變與比例之關係,得$\dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}$.

故 $$\frac{{x_1}^2}{{y_1}^2}=\frac{{x_2}^2}{{y_2}^2}.$$

故 $$\frac{{x_1}^2+{y_1}^2}{{x_1}^2-{y_1}^2}=\frac{{x_2}^2+{y_2}^2}{{x_1}^2-{y_1}^2}=\text{常數}$$

$$\therefore\quad x^2+y^2\propto x^2-y^2.$$

習題二十

1. 已知$y\propto\dfrac{1}{x^2}$,且$x_1=y_1=2$,問$x_2=5$, $y_2=?$

2. 已知$x+y\propto x-y$且$x_1=2$時,$y_1=5$,問$y_2=10$時$x_2=?$

3. 在x不變時，F隨y^2而正變；y不變時，F隨$\frac{x-1}{x+1}$而倒變．設$x_1=y_1=2$時，$F_1=9$，問$x_2=3$，$y_2=4$時，$F_2=?$

4. T隨$\sqrt{l}$，$\sqrt{\frac{1}{g}}$而聯變．在$l=g=980$時，$T=3$；問$l=490$，$g=980$時，$T=?$

5. 若$x\propto y$，求證

(1) $x^2+xy+y^2\propto x^2-xy+y^2$

(2) $x^3+x^2y-xy^2-y^3\propto x^3-x^2y+xy^2-y^3$.

6. 若$x\propto y$，$y\propto z$，求證

(1) $x\propto z$

(2) $lx^2+mxz+nz^2\propto l'x^2+m'xz+n'z^2$

7. 若$x+y\propto x-y$，$y+z\propto y-z$，求證

$lx^3+mx^2z+nxz^2+pz^3\propto l'x^3+m'x^2z+n'xz^2+p'z^3$.

8. 若$x+y\propto\frac{1}{x-y}$，求證$x^2-y^2+1\propto x^2-y^2-1$.

9. 球之體積V隨其半徑立方而正變，球之面積S隨其半徑平方而正變．當$V=36\pi$時，$S=36\pi$；問(a)當$V=288\pi$時，$S=?$ (b)當$S=100\pi$時，$V=?$

10. 電線的阻力依線之長度而正變，依線之直徑平方而倒變．電線的重量依線之直徑平方及長度而聯變．其電線l之長度爲100呎．其直徑爲.02吋．今欲另得一線使其重量爲l的$\frac{2}{5}$，而其電阻力爲l的2倍．求該線之長度及其直徑.

2

5

第七章

二項式定理 數學歸法納

§41. **引論.** 欲求二項式 $a+b$ 的低次冪,例如 $(a+b)^2=?$ 或 $(a+b)^3=?$ 之類,由直接乘算(或已乘得的公式)均可立得其結果.此吾人所已知者.但若求 $(a+b)^{100}=?$ 或 $(a+b)^n=?$ 則非另有公式不可.這公式是

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-1}b^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n.$$

其證法很多,現在只講一種利用數學歸納法的證明.為求易於了解起見,先自數學歸納法說起.

§42. **數學歸納法.** 數學歸納法應用甚廣,不僅能證上述公式而已.今以二例明之.

〔例一〕 證 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots\cdots+n(n+1)$
$=\frac{n}{3}(n+1)(n+2).$ $\qquad(A)$

〔證〕 第一步. 假定在$n=k$時(A)式成立,求證在$n=k+1$時(A)式亦能成立.其算式如下:—

假定. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$,

則 $$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)+(k+2)$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$

$$=(k+1)\frac{k^2+2k+3k+6}{3}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}$$

第二步. 設$n=1$(或 $n=2,3,4$ 之類)代入(A)式察其兩邊是否相等.

設$n=1$則(A)式變爲$1\cdot2=\frac{1}{3}(1+1)(1+2)=2$. 左右相等.故在$n=1$時$(A)$式確能成立.

由上兩步,立得如下之推演:—

$n=1$ 時(A)式既能或立,則依第一步, $n=1+1=2$時(A)式也能成立.

$n=2$ 時(A)式既能成立,則依第一步, $n=2+1$

=3時(A)式也能成立.

如此繼續推演,n為任何正整數時(A)式無不成立.

$$\therefore\quad 1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{n}{3}(n+1)(n+2).$$

〔例二〕 設n為正整數求證$9^{n+1}-8n-9=64\times$整數. $\qquad (B)$

〔證〕 第一步. 假定$9^{k+1}-8k-9=64m$ (m為整數),則$9^{k+2}-8(k+1)-9=\underline{9\cdot9^{k+1}-9\cdot8k-9\cdot9+64k+64}$

$$=9(9^{k+1}-8k-9)+64(k+1).$$

$$=9\cdot64m+64(k+1)$$

$$=64[9m+k+1]=64m'.$$

可見當$n=k$時(B)式如能成立,則當$n=k+1$時(B)式也能成立.

第二步. 設$n=1$時,則(B)式變為$9^{1+1}-8\cdot1-9=64\times$整數,即$64=64\times$整數,左右確能適合.

由上兩步,故知當n為任何正整數時(A)式無不成立.

§43. **歸納法中何以要證兩步?** 如前節兩例所述凡用數學歸納法以證一個等式,應有下列兩步:—

I. 先證該等式在 $n=k$ 時如能成立,則在 $n=k+1$ 時該等式也能成立.

II. 次設 $n=1$ (或 2, 3, 4……等諸數之一) 代入該等式兩邊驗其是否相合.

此 I. II. 兩步是否皆爲必需? 觀下兩例自明.

〔例一〕 譬如說"$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{n}{3}(n+1)(n+2)+100$",此等式當然不對,〔由前節例一可知〕.但若用數學歸納法的第一步去試驗則並無不合.可見某等式雖合第一步未必便能成立.所以還要試驗第二步.

〔例二〕 中國古算學家說"若 n 不是質數,則 $2^{n-1}-1$ 不能被 n 整除".這話自然不對,因爲設 $n=341$ 則 $2^{341-1}-1$ 能被 341 整除.但若用 $n=4$,〔或 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15,……, 340 等數〕代入驗算,則也確能符合.可見某定理雖合第二步,未必便能普遍成立,所以也要推究第一步.

習題二十一 習作

用數學歸納法證下列各等式:

1. $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$

2. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

3. 首n個奇數各自平方之和$=\frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$.

4. $2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n=2(2^n-1)$.

5. $x^n-y^n=M(x-y)$. (其中M爲含x,y的整式.)

6. $9^{n+1}-1=4m$. (其中m爲整數.)

7. $3^{2n}-1=8m$, (其中m爲整數.)

8. $3n^2+15n+6=6m$. (其中m爲整數.)

9 $3^{2n}-8n-1=64m$ (其中m爲整數.)

10. 論數學歸納法與他種科學上所用歸納法的異同.

§**44. 二項式定理**. 既明數學歸納法,便可證明二項式的n次冪的展開公式:—

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n. \quad (A)$$

這公式(A)名曰**二項式定理**.其證法如下:

〔證〕 第一步. 假定在$n=k$時(A)式成立,即

$$(a+b)^k=a^k+ka^{k-1}b+\cdots\cdots$$

$$+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{k-r}b^r+\cdots\cdots+b^k.$$

則 $(a+b)^{k+1}=(a+b)(a+b)^k$

$$=(a+b)\left[a^k+ka^{k-1}b+\cdots\cdots+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)}\times\right.$$

$$\left.a^{k-r+1}b^{r-1}+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{k-r}b^r+\cdots\cdots+b^k\right]$$

$$=a^{k+1}+ka^kb+\cdots\cdots+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)}a^{k-r}b^{r-1}$$

$$+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{k-r+1}b^r+\cdots\cdots+ab^k+a^kb$$

$$+\cdots+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)}a^{k-r+1}b^r+\cdots+b^{k+1}$$

$$=a^{k+1}+(k+1)a^kb+\cdots\cdots$$

$$+\left[\frac{k(k+1)\cdots(k-r+1)}{1\cdot2\cdots\cdots r}+\frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)}\right]$$

$$ak^{k-r+1}b^r+\cdots\cdots+b^{k+1}=a^{k+1}+(k+1)a^kb+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(k+1)k\cdots(k+2-r)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{k-r+1}b^r+\cdots\cdots+b^{k+1}.$$

故"(A) 式在 $n=k$ 時如能成立，則在 $n=k+1$ 時也能成立。"

第二步. 設 $n=2$ 代入 (A) 式,則應有

$$(a+b)^2=a^2+2a^{2-1}b+\frac{2(2-1)}{1\cdot 2}a^{2-2}b^2=a^2+2ab+b^2.$$

左右確能適合,換言之:"在 $n=2$ 時 (A) 式確能成立."

由上兩步,便可推得 n 爲任何正整數時 (A) 式總能成立.

〔註〕 這個公式 (A) 不但在 $n=$ 正整數時是眞確,即在 n 爲任何其他實數時,公式 (A) 無往不眞.學者欲知其詳,可參考 Hall and Knight: Higher Algebra.

習題二十二

1. 證公式 (A) 中 a^pb^q 的係數與 a^qb^p 的係數相等.(利用對稱式)

2. 求下列各式的展式:

   (a) $(3x+y)^{10}$,　　(b) $(3x-y)^{10}$

   (c) $(x+y)^{10}(x-y)^{10}$　　(d) $(m+2)^5(m^2-2m+4)^5$

3. (a) 求 $(m+n)^6$ 中第幾項的係數最大? 7, 4

   (b) 求 $(m+n)^7$ 中第幾項的係數最大? 4, 5

4. 在 $(x-2)^{100}$ 中,求 (a) 首四項, (b) 最後四項, (b) 第九十項

(d) 第 r 項. (e) x^r 的係數.

5. 在 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{100}$ 中, 求 (a) 首四項, (b) 最後四項, (c) 第九十項, (d) x^{188} 的係數. (e) 第 r 項, (f) x^r 的係數.

6. 證公式 (A) 中各項係數之和爲 2^n.

[提示: 設 $a=b=1$. 代入 (A) 化簡之.]

7. 證公式 A 中第 1, 3, 5, 7,……諸項係數之和等於第 2, 4, 6, 8,……諸項係數之和. [illegible]

二項係數之特性

第 $r+1$ 項稱為二項定理之普通項

$(a^2+b)^{10}$

求在展式中含 a^{12} 之項之係數

設 $r+1$ 項為含 a^{12} 之項 則該項為

$$\frac{10\cdots(10-r+1)}{1\cdot2\cdot3}(a^2)^{10-r}b^r$$

在此項內 a 之指數為 $2(10-r)$

$\therefore (10-r)=12$

$10-r=6$

$r=4$

第八章

開方 二項定理之逆用

§45. **引論.** 何謂開方?方根?被開方式?根指數?已有一式 A, 欲求 $A^n=?$ 此算法名曰乘法.學者已知之矣.反之,已知一式 B, 欲求 $B=?^n$, 此手續卽爲開方.開方所得之結果(卽上式中之"?"),名曰方根.以簡式記之,其形如下:

根指數

$$\sqrt[n]{B}=? \quad (實卽\ B=?^n)$$

其中, B 爲被開方式, n 爲根指數, "?" 名曰 B 之 n 次根.

例如, $32=2^5$, 故 $\sqrt[5]{32}=2$, 卽 2 爲 32 之五次根:

又如, $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$. 故

$$\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}=x+1.$$

卽 $x+1$ 爲 x^3+3x^2+3x+1 之三次根.

〔註〕 (a) 三次根又名立方根.二次根又名平

方根.

(*b*) 論平方根時,根指數 2 恆略而不書,但在二次以上之方根,其根指數則不可省略.例如 $\sqrt[2]{64}=8$ 恆省寫成 $\sqrt{64}=8$. 又如 $\sqrt{(x+y)^2}=x+y$. $\sqrt[3]{A^6}=A^2$.

§46. 用因子分解法開方. 當被開方式容易分解因子時,無論欲開幾次方,其方根恆可由開方定義立得之.舉例於下:—

大=開1
等=適當
小=不能

〔例一〕 求 $64a^6$ 之平方根及其立方根.

〔解〕 $\because\ 64a^6=(8a^3)^2 \quad \therefore\ \sqrt{64a^6}=8a^3.$

$\because\ 64a^6=(4a^2)^3 \quad \therefore\ \sqrt[3]{64a^6}=4a^2.$

〔例二〕 求 $4x^4-20x^2y^3+25y^6$ 之平方根.

〔解〕 因 $4x^4-20x^2y^3+25y^6=(2x^2-5y^3)^2$.

故 $\sqrt{4x^4-20x^2y^3+25y^6}=2x^2-5y^3$.

$2x^2 \quad 5y^3$
$2x \quad 5y^3$

〔例三〕 求 $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ 之立方根.

〔解〕 用因子分解法得 $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$
$=(2x-3y)^3$.

故 $\sqrt[3]{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3}=2x-3y$.

§47. 開平方之通法. 但當被開方式不易分

$\sqrt{(x+y)^5(y+z)^7(z+x)^3}=$
$\{(x+y)^3(y+z)^3(z+x)\}^3 (x+y)^2(y+z)$
$(x+y)(y+z)(z+x)\sqrt[3]{(x+y)^2(y+z)}$

倍商試入進商試 → 開平方

解因子時，則欲求其方根非另有通法不可. 本節先述求平方根之通法.

求平方根之法，非基於若何奇異之新理；仍不過將二項式定理，略加變化逆轉應用而已. 蓋由二項定理得

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

即 $$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b.$$

細察上式，乃得被開方式與其平方根二者之關係如下：

(1) 平方根之首項 a 即為被開方式首項 a^2 之平方根.

(2) 平方根之第二根 b 即為被開方式第二項 $2ab$ 除以 $2a$ (此 $2a$ 亦名試除式) 所得之商.

(3) 二項式 $a+b$ 之平方不為 a^2+b^2 而為 $a^2+2ab+b^2$，亦即 $a^2+(2ab+b)b$，故某式之平方根如為 $a+b$，則自該式減去 a^2 後再減去 $(2a+b)b$. 其結果應為零.

將此關係另以整齊方便之算式表之如下：—

多項式開平方之方法
1) 求首項的平方根，記在商方式之右方，是為初商
2) 由原式減去初商的平方，得第一餘式
3) 倍初商，以初商的二倍試除第一餘式之首項，得次商，記在初商的右

4) 由第一餘式內減去初商的二倍及次商的和與次商的乘積，得第二餘式

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2+2ab+b^2 \;\big|\; a+b\ (\text{所求平方根}) \\
 & a^2 \\
\hline
2a+b & 2ab+b^2 \\
 & 2ab+b^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

5) 如果未完，再以初商及次商的和作為初商，以初商的二倍試除第二餘式之首項，得三商，記在初商之後

據此算式，乃得平方根之普遍求法.

〔例一〕 求 $4x^2-12xy+9y^2$ 之平方根.

6) 由第二餘式內減去初商的二倍及三商的和與三商的乘積，得第三餘式
照此法繼續下去直到開盡為止

〔解法〕

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2-12xy+9y^2 \;\big|\; 2x-3y \\
 & 4x^2 \\
\hline
4x-3y & -12xy+9y^2 \\
 & -12xy+9y^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

〔說明〕 (1) 將被開方式首項 $4x^2$ 開平方得 $2x$ 是爲所求平方根之首項.

乃自被開方式減去方根首項之平方，得第一餘式 $-12xy+9y^2$.

(2) 以試除式 $2(2x)$ 除第一餘式之第一項 $-12xy$ (亦即被開方式第二項). 得 $-3y$, 是爲所求平方根之第二項.

乃自第一餘式減去 $[2(2x)-3y],(-3y)$, 得第二餘式爲零.

故 $2x-3y$ 果爲 $4x^2-12xy+9y^2$ 之平方根.

〔例二〕 求 $12x^3+5x^2+4x^4-6x+1$ 之平方根.

〔解法〕

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^4+12x^3+5x^2-6x+1 \;\underline{|\,2x^2+3x-1} \\
 & 4x^4 \\ \hline
2(2x^2)+3x & 12x^3+5x^2-6x+1 \\
 & 12x^3+9x^2 \\ \hline
2(2x^2+3x)-1 & -4x^2-6x+1 \\
 & -4x^2-6x+1 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

〔說明〕 (1) 先將被開方式依 x 之降冪排列之.

(2) 乃仿例一求得平方根之首二項爲 $2x^2+3x$.

(3) 將 $2x^2+3x$ 視爲一項(視爲平方根之首項),再仿例一以求平方根之第三項,得 -1.

〔例三〕 $\sqrt{9x^2-12xy+24x+4y^2-16y+16}=?$

〔解法〕

$$
\begin{array}{r|l}
 & 9x^2-12xy+24x+4y^2-16y+16 \;\underline{|\,3x-2y+4} \\
 & 9x^2 \\ \hline
2(3x)-2y & -12xy+24x+4y^2-16y+16 \\
 & -12xy \qquad +4y^2 \\ \hline
2(3x-2y)+4 & 24x \qquad -16y+16 \\
 & 24x \qquad -16y+16 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\ \sqrt{9x^2-12xy+24x+4y^2-16y+16}=3x-2y+4.$

$16x^6-24x^5+25x^4-20x^3+10x^2-4x+1$

習題二十三

試求下列各式之平方根:—

1. $196x^2-364xy+169y^2$　$(14x-13y)^2$

2. $289x^4-782x^2y^3+529y^6$

3. $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc.$　$(a^2+2ab+b^2)+c^2-2bc-2ca$ $=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2$ $=(a+b-c)^2$

4. $9x^2-24xy-30xz+16y^2+40yz+25z^2.$

5. $x^5+4x^4-12x^3+4x^2-24x+36.$

6. $16x^6-24x^5+25x^4-20x^3+10x^2-4x+1.$

試求下列各式平方根之首三項.

7. $x^4+6x^3+11x^2+6x+9$

8. $a^2+6a+16.$

9. $16+6a+a^2$ (勿依降冪排列將所得結果與上題比較).

10. $x^4+4x^3+12x^2+12x+4$ 爲完全平方否? 試求其平方根至第四項.

下列諸式各爲完全平方, 試求 m, n 之值.

11. $nx^2-15x+m.$　$=n\left(x^2-\frac{15}{n}x+\frac{m}{n}\right)$

12. $x^4+4x^3-2x^2+mx+9.$

13. $9y^4-30y^3+37y^2+my+n.$

§48. 開立方之通法 當被開方式不易分解因子時, 求欲該式之立方根, 亦可將二項定理逆轉應用. 蓋由二項定理得

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

三倍的初商自乘
〃〃〃〃〃乘次商
次商的自乘
加商之的乘以次商

即 $$\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=a+b.$$

細察上式,乃得被開方式與其立方根二者之關係如下:—

(1) 立方根之首項 a 即爲被開方式首項 a^3 之立方根.

(2) 立方根之第二項 b 即爲以 $3a^2$ (此 $3a^2$ 亦名試除式).除被開方式第二項 $3a^2b$ 所得之商.

(3) 二項式 $a+b$ 之立方不爲 a^3+b^3, 而爲 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 亦即 $a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$, 故某式之立方根如爲 $a+b$, 則自該式減去 a^3 後再減去 $(3a^2+3ab+b^2)b$. 其餘式應爲零.

將此關係另以整齊方便之算式表之如下:—

$$
\begin{array}{l|l}
 & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \ \underline{|\, a+b\text{(所求之立方根)}.} \\
 & \underline{a^3} \\
3a^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\quad +3ab & \\
\qquad\quad \underline{+b^2} & \\
3a^2+3ab+b^2 & \underline{3a^2b+3ab^2+b^3} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

據此算式,乃得立方根之普遍求法.

〔例一〕 求 $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ 之立方根.

$(2x)^3$ 〔解法〕

$$\begin{array}{r|l}
 & 8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3 \;\; \underline{|\,2x+y} \\
 & \underline{8x^3} \\
3(2x)^2 = 12x^2 & 12x^2y+6xy^2+y^3 \\
+3(2x)y = 6xy & \\
+y^2 & \\
\hline
12x^2+6xy+y^2 & \underline{12x^2y+6xy^2+y^3} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

〔說明〕 (1) 將被開方式首項 $8x^3$ 開立方得 $2x$, 是為所求立方根之首項.

乃自被開方式減去方根首項之立方,得第一餘式 $12x^2y+6x^2y+y^3$.

(2) 以試除式 $3(2x)^2$ 除第一餘式之第一項 $12x^2y$ (亦即被開方式第二項) 得 y, 是為所求方根之第二項.

乃自第一餘式減去 $[3(2x)^2+3(2x)y+y^2]y$, 得第二餘式為零.

故 $2x+y$ 果為 $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ 之立方根.

〔例二〕 $\sqrt[3]{3x^4-28x^3-9x^2+6x^5+x^6-27+54x}=?$

〔算式〕

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^6+6x^5+3x^4-28x^3-9x^2+54x-27 \;\underline{|\, x^2+2x-3} \\
 & x^6 \\
\hline
3(x^2)^2= & 6x^5+3x^4-28x^3-9x^2+54x-27 \\
+3x^2(2x) & \\
+(2x)^2 & \\
\hline
3x^4+6x^3+4x^2 & 6x^5+12x^4+8x^3 \\
\hline
3(x^2+2x)^2=3x^4+12x^3+12x^2 & -9x^4-36x^3-9x^2+54x-27 \\
+3(x^2+2x)(-3)=\ -9x^2-18x & \\
+(-3)^2=\qquad +9 & \\
\hline
3x^4+12x^2+3x^2-18x+9 & -9x^4-36x^3-9x^2+54x-27 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

〔說明〕 (1) 將被開方式依 x 之降冪排列之.

(2) 乃仿例一求得立方根之首二項爲 x^2+2x.

(3) 將 x^2+2x 視爲一項(視爲立方根之首項), 再仿例一以求立方根之第三項得 -3.

習題二十四

試求下列各式之立方根:

1. $27a^3-108a^2b+144ab^2-64b^3$
2. $125m^6-225m^4+135m^2-27$
3. $8x^6+48x^5+60x^4-80x^3-90x^2+108x-27$
4. $x^6-9x^5y^2+15x^4y^4+45x^3y^6-60x^2y^8-144xy^{10}-64y^{12}$
5. $a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$.
6. $x^3+6x^2y-6x^2+12xy^2-24xy+12x+8y^3-24y^2+24y-8$.

下列各式如不爲完全立方, 試求其立方根至首三項:

7. $x^3+6x^2+12x+11$

8. $8x^3+12x^2+6x+1$

9. $27x^3+27x^2+10x+4$

下列二式各爲完全立方.試求m, n, l之值.

10. $8x^3-36x^2+mx+n$

11. $a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+ma^2b^4+nab^5-lb^6$

§49. 開四方之通法. 第一法: 欲將一式A開四次方,可先開平方,再將所得平方根開平方,此最後所得平方根卽爲所求之四次方根.

第二法. 欲將一式開四次方,亦可仿開平方,開立方之法將二項定理逆轉應用以求其根.蓋由二項定理,得

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

卽
$$\sqrt[4]{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}=a+b.$$

細察上式乃得被開式與其四次方根二者之關係如下:—

(1) 四次方根之首項a卽爲被開方式a^4之四次方根.

(2) 四次方根之第二項b卽爲以$4a^3$(此$4a^3$亦爲試除式),除$4a^3b$所得之商.

$\sqrt{64a^4}=64^{\frac{1}{2}}a^{4\cdot\frac{1}{2}}$
$=2^{6\cdot\frac{1}{2}}\cdot a^{4\cdot\frac{1}{2}}$
$=2^3 2^2$

$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{2}$　　$2^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{2^3}$
$2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$　　$2^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{2^5}$
$2^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{2}$　　$2^{\frac{q}{p}}=\sqrt[p]{2^q}$

2的指次 = $\boxed{2^n\sqrt{}}$

3的指次方次 = $\boxed{3^n\sqrt{}}$

(3) $a+b$ 之四方不爲 a^4+b^4 而爲 $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$，亦卽 $a^4+(4a^3+6a^2b+4ab^2+b^3)b$. 故某式之四次方根如爲 $a+b$，則自該式減去 a^4 後，再減去 $(4a^3+6a^2b+4ab^2+b^3)b$，其餘式應爲零.

將此關係表以簡明整齊之算式如下:—

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \;\underline{\big|\, a+b \text{ (所求之四次方根)}} \\
 & a^4 \\
\hline
4a^3 & 4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
+6a^2b & \\
+4ab^2 & \\
+b^3 & \\
\hline
4a^3+6a^2b+4ab^2+b^3 & 4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

據此算式，乃得開四次方之通法，如下例:—

〔例〕 求 $\sqrt[4]{81x^4-216x^3+216x^2-96x+16}=?$

〔解法〕

$$
\begin{array}{r|l}
 & 81x^4-216x^3+216x^2-96x+16 \;\underline{\big|\, 3x-2} \\
 & 81x^4 \\
\hline
4(3x)^3=108x^3 & -216x^3+216x^2-96x+16 \\
6(3x)^2(-2)=-108x^2 & \\
4(3x)(-2)^2=\quad 48x & \\
(-2)^3=\quad -8 & \\
\hline
108x^3-108x^2+48x-8 & -216x^3+216x^2-96x+16 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

四倍的頭商的立方
六〃〃〃〃〃平〃乘次商
四〃〃〃〃〃乘次商的平方
次商的立方

習題二十五

試求下列各式之四次方根:—

1. $16m^4-32m^3+24m^2-8m+1$

2. $81y^8+216y^6+216y^4+96y^2+16$.

3. $x^8+4x^7+14x^6+28x^5+49x^4+56x^3+56x^2+32x+16$.

4. $a^8-8a^7b+26a^6b^2-48a^5b^3+59a^4b^4-48a^3b^5+26a^2b^6-8ab^7+b^8$.

5. 由二項定理得公式,

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

試本此公式推出開五次方之法則.

6. 求 $32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1$ 之五次方根.

7. 求 $\frac{x^4}{y^4}+\frac{4x^4}{y^3}+\frac{10x^2}{y^2}+\frac{12x}{y}+9$ 之平方根.

8. 求 $\frac{a^{12}}{b^6}+\frac{6a^{10}}{b^5}+\frac{21a^8}{b^4}+\frac{44a^6}{b^3}+\frac{63a^4}{b^2}+\frac{54a^2}{b}+27$ 之立方根.

9. 求 $\sqrt{7}$ 至小數第三位.

10. 求 $\sqrt[3]{7}$ 至小數第二位.

11. 求 $\sqrt[3]{.38756}$ 至小數第三位.

12. 求 $\sqrt[3]{.38756421}$ 至小數第三位.

13. 本二項定理推出開 7 次方之規則.

第九章

根式

§50 引論. (1) 何謂根式? 凡式之前冠以根號.如 $\sqrt[m]{A}$ 之形者,統名曰根式.例如 $\sqrt{5}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{x+y}$, $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ 之類皆爲根式.

(2) 何謂根式之主值? 將一式開方,有時可兼得正負兩個實數.其正者叫做根式之主值(僅得一個實數時,該實數即爲根式的主值).主值恆以 $\sqrt[m]{A}$ 表之.例如,$\sqrt{16}=4$; $\sqrt[3]{8}=2$; $\sqrt[3]{-8}=-2$. $\sqrt[4]{16}=2$.

通常論根式時,非經特別說明者,皆指主值而言,如欲兼指正負兩值時,應以 $\pm\sqrt[m]{A}$ 表之;如欲單言負值時,則應以 $-\sqrt[m]{A}$ 表之.例如 $\pm\sqrt{16}=\pm 4$, $\pm\sqrt[4]{81}=\pm 3$, $-\sqrt{25}=-5$.

(3) 何謂不盡根式? 將根式依其根指數所

示之次數開方,此開方手續或為有窮,或為無窮,(參看下節)有窮者名曰有盡根式,無窮者名曰不盡根式.例如$\sqrt{25}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt{(x+y)^2}$皆為有盡根式.$\sqrt{24}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt[3]{x^3+1}$皆為不盡根式.

§51. **根式何以會不盡?** 細察下例,其理自明.

〔例一〕 試將$\sqrt{3}$依開平方之手續演之,得1.73……其小數之位數可多至無限,且此無限小數始終不循環.換言之,開方手續可演至無窮,其理由何在?證之如下:

〔證〕 假若$\sqrt{3}$=有限小數或循環小數,則依小數化為分數之理,$\sqrt{3}$應可化為分數如$\frac{a}{b}$(既約分數).但若

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b}.$$

則依等量公理,應得 $(\sqrt{3})^2=\frac{a^2}{b^2}$.

即 $$3=\frac{a^2}{b^2}.$$

此結果不通,因b既不能除盡a,自然亦不能除盡a^2, b既不能除盡a^2,自然b^2亦不能除盡a^2故也.

故 $\sqrt{3} \neq \frac{a}{b}$ 即 $\sqrt{3}$ 不爲有限小數或循環小數.

同様,可證 $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$. 等等皆非有限小數或循環小數.

〔例二〕 試將 $\sqrt{4x^2+4x+3}$ 依開平方法演之,得平方根之首二項 $2x+1$ 之後,開方手續不能適盡.若依法繼續演之,續得 $\frac{1}{2x}+\cdots\cdots$ 其手續亦無止境,理由何在?亦可如下證之.

〔證〕 假定 $\sqrt{4x^2+4x+3}=2x+1+\frac{1}{2x}+\cdots\cdots$ (項數有限).

則依分式加法,應得 $\sqrt{4x^2+4x+3}=\frac{A}{B}$.

其中 A, B 爲 x 之多項式且無公共因子.

於是
$$4x^2+4x+3=\frac{A^2}{B^2}.$$

此亦不通,因 B 旣不能整除 A, B^2 自然不能整除 A^2 故也.

故 $\sqrt{4x^2+4x+3} \neq \frac{A}{B}$,即亦不能爲有限項分數之和.故 $\sqrt{4x^2+4x+3}$ 之項數應爲無限.

§52. 不盡根式之眞值與近似值. 不盡根式如 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$. 之類的眞值,不能以小數表之,已

如上述,但依開方法,吾人恆可用小數以表此類不盡根式之近似值,使其準確任至小數若干位,例如準確至小數三位時,$\sqrt{2}$之值爲 1.414, 準確至小數四位時,$\sqrt{2}$之值爲1.4142是也.所當注意者.此1.414與1.4142皆爲$\sqrt{2}$之近似值而非$\sqrt{2}$之眞值.$\sqrt{2}$之眞值卽爲$\sqrt{2}$.其特性爲$(\sqrt{2})^2=2$.推之$(\sqrt[m]{A})^m=A$.

同樣,不盡根式如$\sqrt{x^2+2x+5}$, $\sqrt[3]{x^3+y^3}$之類,雖不能以有限項分數之和表示其眞值,但依開方法亦可求方根之近似值任至首若干項.例如$\sqrt{x^2+2x+5}$之首三項爲$2x+1+\frac{2}{x}$,首四項爲$2x+1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$,所當注意者此$2x+1+\frac{2}{x}$與$2x+1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$皆非$\sqrt{x^2+2x+5}$之眞值不過各爲其近似值耳.$\sqrt{x^2+2x+5}$之眞值卽爲$\sqrt{x^2+2x+5}$其特性爲$(\sqrt{x^2+2x+5})^2=x^2+2x+5$.

§53. 根式變形之原理. 根式之一切變形不外下列幾種原理.

(1) $$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}.$$

(2) $$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

(3) $$\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^n}$$

(4) $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

(5) $$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}.$$

證之如下:

〔證 1〕
$$(\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b})^m=(\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m$$
$$=ab$$
$$=(\sqrt[m]{ab})^m$$
$$\therefore\ \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$$

〔證 2〕
$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m}$$
$$=\frac{a}{b}$$
$$=\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m$$
$$\therefore\ \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

〔證 3, 4, 5.〕 學者試自證之.

§54. **不盡根式之化簡.** 據前節所述諸原理，往往可將不盡根式化為較簡之形．舉例如下:

〔例一〕 (1) $\sqrt[3]{72}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{9}=2\sqrt[3]{9}$

(2) $\sqrt[3]{a^5b^4}=\sqrt[3]{a^3b^3\cdot a^2b}=ab\sqrt[3]{a^2b}$

(3) $\sqrt{(x+y)^3}=(x+y)\sqrt{x+y}.$

〔例二〕 (4) $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$

(5) $\sqrt[6]{a^3b^6c^9}=\sqrt[6]{a^3c^3}\cdot\sqrt[6]{b^6c^6}=bc\sqrt[6]{a^3c^3}$

$=bc\sqrt{ac}$

(6) $\sqrt[4]{x^2+2xy+y^2}=\sqrt[4]{(x+y)^2}=\sqrt{x+y}.$

〔例三〕 (7) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

(8) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{18}{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{18}}{3}$

(9) $\sqrt{\dfrac{a}{c}}=\sqrt{\dfrac{ac}{c^2}}=\dfrac{\sqrt{ac}}{c}.$　分母不代根式

由上諸例觀之，可見任何根式如 $\sqrt[m]{A}$ 之類，可依適當手續變化其形式，使合下列標準:—

(1) 被開方式為整式．(參看例三)

(2) 被開方式諸因子之指數不與根指數再有公因子．(參看例二)

$\frac{x}{y}\sqrt[m]{\frac{x^{m+1}}{y^{m-1}}} = \frac{x}{y}\cdot\frac{\sqrt[m]{x^{m+1}}}{\sqrt[m]{y^{m-1}}} = \frac{x}{y}\cdot\frac{\sqrt[m]{x^m\cdot x^1}}{\sqrt[m]{y^{m-1}}} = \frac{x}{y}\cdot\frac{x\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y^{m-1}}}$

$= \frac{x}{y}\cdot\frac{x\sqrt[m]{x}\cdot\sqrt[m]{y}}{\sqrt[m]{y^{m-1+1}}\,y} = \frac{x}{y}\cdot\frac{x\sqrt[m]{xy}}{y} = \frac{x^2}{y^2}\cdot\sqrt[m]{xy}$

(3) 被開方式各因子之指數無有大於根指數者(參看例一)

符合上述三項標準之根式是為**最簡根式**.

習題二十六

將試下列諸根式化為最簡之形:—

1. $\sqrt{200}$ $=10\sqrt{2}$　　2. $\sqrt{243}$

3. $\sqrt[3]{108}$　　4. $\sqrt[3]{375}$

5. $\sqrt[3]{432}$　　6. $\sqrt[3]{a^6b^3xy^2}$

7. $\sqrt[3]{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$　　8. $\sqrt[3]{x^4-x^3}$

9. $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$　　10. $\sqrt[3]{\frac{125}{3}}$

11. $\sqrt[4]{49}$　　12. $\sqrt[4]{225}$

13. $\sqrt[4]{3600}$　　14. $\sqrt[6]{216a^6b^9c^3}$

15. $\sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^3}$　　16. $\sqrt[3]{-162}$

17. $\sqrt{\frac{5}{27}}$　　18. $\sqrt[5]{\frac{8x^2}{(x+y)^8}}$

19. $\frac{x}{y}\sqrt[m]{\frac{x^{m+1}}{y^{m-1}}}$　　20. $\sqrt[15]{x^3y^{15}z^5}$

利用根式變形原理,化下列諸根式使其僅含一個根號.

21. $\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}$　　22. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27x^3y^6z^9}}$ $=\sqrt[3\times4]{3^3x^3y^6z^9}$

23. $a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{d}}}$　　24. $\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$ $=\sqrt[3\times4]{(3xy^2z^3)^3}$

25. $\sqrt[3]{3\sqrt{4}}$　　26. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$

$\sqrt[5]{\frac{8x^2}{(x+y)^8}} = \frac{\sqrt[5]{8x^2}}{\sqrt[5]{(x+y)^8}} = \frac{\sqrt[5]{2^3x^2}}{\sqrt[5]{(x+y)^5\cdot(x+y)^3}} = \frac{\sqrt[5]{2^3\cdot x^2(x+y)^2}}{(x+y)\sqrt[5]{(x+y)^3\cdot(x+y)^2}}$

$= \frac{\sqrt[5]{2^3x^2(x+y)^2}}{(x+y)^2}$

$\sqrt{x} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^3}}} = \sqrt[8]{x^7} = \sqrt[8]{x^{15}} = \sqrt[10]{x^{15}}$

根号是4故x入括号内当自乘四次

用最簡之法求下列各式之值

27. $\sqrt[4]{81^5}$　　　　28. $\sqrt[5]{32^3}$

29. $\sqrt[4]{1331^2}$　　　　30. $\sqrt[4]{625^3}$

§55. **同類根式.** 兩個根式化簡之後,至多只有係數不同者,名曰**同類根式**,非同類根式名曰**不同類根式**.

根次同
根号内之
数(式)相
亦同

例如　$3\sqrt{2}$, $-8\sqrt{2}$ 爲同類根式. $\sqrt[3]{5}$, $8\sqrt[3]{5}$; $a\sqrt{x}$, $b\sqrt{x}$; $m\sqrt[p]{r}$, $n\sqrt[p]{r}$ 等亦皆爲同類根式.

至於　$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 則非同類根式. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}$; $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{a}$; $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$. 等亦皆非同類根式.

〔注意〕有時兩個根式,驟視之似非同類根式,但若化簡之後,則又爲同類根式,學者不可不察也.

例如　$\sqrt{8}$ 與 $\sqrt{18}$ 似非同類根式,但若化簡各式,如

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

則見　$\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$ 實爲同類根式矣.

又如 $\sqrt{ac}$, $\sqrt{\frac{a}{c^2}}$, $\sqrt{\frac{c}{a^2}}$ 似非同類根式,其實不然!

§56. 不盡根式之加減. 本問題分同類根式與不同類根式兩層論之.

(*A*) 同類根式之加減,卽將各根式之係數依其原有之符號加減之,以其結果作爲公共根式之係數.卽

$$a\sqrt{x}+b\sqrt{x}-c\sqrt{x}=(a+b-c)\sqrt{x}.$$

〔例一〕 $5\sqrt{x}-6\sqrt{x}+9\sqrt{x}=8\sqrt{x}$

〔例二〕 $\sqrt{50}+\sqrt{32}+\sqrt{\frac{1}{2}}=5\sqrt{2}+4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$=\left(5+4+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}=\frac{19}{2}\sqrt{2}$$

〔例三〕 $\sqrt{ac}+\sqrt{\frac{a}{c^2}}+\sqrt{\frac{c}{a}}=\sqrt{ac}+\frac{\sqrt{ac}}{c}+\frac{\sqrt{ac}}{a}$

$$=\left(1+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\sqrt{ac}$$

(*B*) 不同類根式之加減.卽以加減符號聯結所欲加減之根式而已.其有不可合併者,不可妄爲合併也.

〔例一〕 $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

〔例二〕 $\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}=\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}$

〔例三〕 $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-8\sqrt{2}=7\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

〔例四〕 $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}-c\sqrt{x}+d\sqrt{y}=(a-c)\sqrt{x}+(b+d)\sqrt{y}$

〔例五〕 $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$ 對否？何故？ 不对

〔例六〕 $8\sqrt{2}+4\sqrt{5}=12\sqrt{7}$ 乎？ $12\sqrt{2}$ 乎？ $12\sqrt{5}$ 乎？

不能

習題二十七

化簡下列各式：—

1. $5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-8\sqrt{2}+9\sqrt{2}$?
2. $7\sqrt[3]{3}+8\sqrt[3]{7}-9\sqrt[3]{3}+10\sqrt[3]{3}$
3. $5\sqrt{2}+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}-9\sqrt{3}$
4. $4\sqrt{2}+4\sqrt{3}-4\sqrt{5}$
5. $a\sqrt{x}+b\sqrt{x}-c\sqrt{x}+d\sqrt{y}$
6. $a\sqrt{x}-a\sqrt{y}+a\sqrt{z}$
7. $\sqrt{98}+\sqrt{50}+\sqrt{72}+\sqrt{128}$
8. $\sqrt{75}-\sqrt{108}+\sqrt{48}-\sqrt{27}$
9. $\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{3}+\sqrt{243}-\sqrt{300}$

10. $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{625}+\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

11. $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{\frac{1}{32}}+\sqrt{\frac{1}{128}}$

12. $\sqrt[3]{\frac{a}{9}}+\sqrt[3]{\frac{3a}{125}}-\sqrt{\frac{a}{243}}+\sqrt[3]{\frac{a}{576}}$

13. $\sqrt[4]{81a^7}-2\sqrt[4]{16a^7}+5\sqrt[4]{625a^7}$

14. $\sqrt{a^3+a^2b}+\sqrt{ab^2+b^3}+\sqrt{(a-b)(a^2-b^2)}$

15. $\sqrt[3]{m^4+m^3n}+\sqrt[3]{mn^3+n^4}-\sqrt[3]{(m^2-n^2)(m-n)^2}$

16. $\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{1}{ab}}+\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2}+\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}$

17. $\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{a^5b^5}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+3a+3b}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}-3a+3b}$

18. $\sqrt[4]{27}+\sqrt{300}-\sqrt{363}+\sqrt[3]{81}$

19. $\sqrt[4]{144}+\sqrt{768}-\sqrt[6]{1728}+\sqrt{\frac{625}{27}}$

20. $(a-c)\sqrt[3]{ac}+\sqrt[3]{\frac{c}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{a}{c^2}}+\sqrt[3]{\frac{(a-c)^3}{a^2c^2}}$

§57. 不盡根式之乘法. 本問題亦可分為同次根式與不同次根式兩層論之.

根次同
法、

(A) 根式為同次者,諸同次根式相乘,即依§53根式變形原理1,將諸被開方數相乘,而於其積冠以公有之根號與根指數,再行化簡可矣.以式表之如下:

$$\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[m]{B}\cdot\sqrt[m]{C}=\sqrt[m]{ABC}.$$

$\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[3]{4}$

$\sqrt[2\times3]{3\cdot3^2}$ $\sqrt[3\times2]{4\cdot4}$

〔例一〕 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{3\cdot6\cdot8}=12$ 為何

〔例二〕 $\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[3]{bc}\cdot\sqrt[3]{ca^2}=\sqrt[3]{a^3b^2c^2}=a\sqrt[3]{b^2c^2}$

〔例三〕 $\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})=\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{5}$

$-\sqrt{2}\sqrt{7}=\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{14}$

〔例四〕 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{7}+\sqrt{8})=\sqrt{12}$

$-\sqrt{14}+\sqrt{16}+\sqrt{18}-\sqrt{21}+\sqrt{24}=2\sqrt{3}$

$-\sqrt{14}+4+3\sqrt{2}-\sqrt{21}+2\sqrt{6}$

(*B*) 根式非同次者.先依§53變形原理2,將諸根式化爲同次根式,再仿(*A*)乘之.

〔例五〕 $\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^4}\cdot\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{5^7}=5\sqrt[6]{5}.$

〔例六〕 $\sqrt[4]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{bc}\cdot\sqrt[3]{ab^2c}\cdot\sqrt{bcd}$

$=\sqrt[12]{a^3b^9}\cdot\sqrt[12]{b^2c^2}\cdot\sqrt[12]{a^4b^8c^4}\cdot\sqrt[12]{b^6c^6d^6}$

$=\sqrt[12]{a^3b^9\cdot b^2c^2\cdot a^4b^8c^4\cdot b^6c^6d^6}$

$=b^2c\sqrt[12]{a^7bd^6}$

〔例七〕 $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3})=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}$

$+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}$

$=\sqrt[6]{2^5}+\sqrt[3]{6}-\sqrt{6}-\sqrt[6]{3^5}$

$=\sqrt[6]{32}+\sqrt[3]{6}-\sqrt{6}-\sqrt[6]{243}.$

習題二十八

試求以下各式所示之積:—

1. $\sqrt{5}\sqrt{7}\sqrt{6}$

2. $\sqrt{15}\sqrt{12}\sqrt{20}$

3. $\sqrt[3]{ab}\sqrt[3]{bc}\sqrt[3]{cd}$

4. $\sqrt[5]{a^4b^3c^2}\sqrt[5]{ab^2c^3}\sqrt[5]{x^2y^3}$

5. $\sqrt[3]{3}\sqrt{2}$

6. $\sqrt{3}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}\sqrt{6}$

7. $\sqrt[3]{4}\sqrt{2}\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$

8. $\sqrt{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[6]{2}$

9. $\sqrt{30}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

10. $\sqrt{70}(\sqrt{2}+\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{28}-\sqrt{10}-\sqrt{14})$

11. $\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2}\right)$

12. $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2})\sqrt{32}$

13. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{a})\sqrt[6]{a^5b^5c^5}$

14. $(\sqrt{3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{3\sqrt{3}}+\sqrt{3\sqrt[3]{3}})\sqrt{3}$

15. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$

16. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{60}+\sqrt{24})$

17. $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2})$

18. $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})$

19. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[5]{c})(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[5]{c})$

20. $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b},\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt{b^3})$

21. 試求下列各式之結果並熟記之.

(a) $\sqrt[n]{B^{n-p}}\cdot\sqrt[n]{B^p}=?$

(b) $(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})=?$

(c) $(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})=?$

(d) $(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})=?$

22. 由根式乘法證下列各式是否左右相等?

(a) $$(\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B})(\sqrt[n]{A^{n-1}}+\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^2}+\cdots\cdots$$
$$+\sqrt[n]{B^{n-1}})=A-B.$$

(b) $$(\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B})[\sqrt[n]{A^{n-1}}-\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^2}-\cdots\cdots$$
$$-(-1)^n\sqrt[n]{B^{n-1}}]=A-(-1)^nB$$

§58　幾個重要乘積. 由前節題21——22或由根式乘法,可得下列諸公式,此種公式,在根式除法極爲有用.學者宜細究之.　Rational factor

(1) $\sqrt[n]{A^{n-p}}\cdot\sqrt[n]{A^p}=A.$

(2) $(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})=A-B.$

(3) $(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})=A+B.$

(4) $(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})=A-B.$

(5) $$(\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B})(\sqrt[n]{A^{n-1}}+\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^2}+\cdots$$
$$\cdots+\sqrt[n]{B^{n-1}}=A-B.$$

(6) $$(\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B})[\sqrt[n]{A^{n-1}}-\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^2}-\cdots$$
$$\cdots-(-1)^n\sqrt[n]{B^{n-1}}]=A-(-1)^nB.$$

〔註〕 消根因子. 由上列諸公式觀之,可見在

適當情形下,甲乙二式雖各含根式,其積卻可不含根式.當甲乙二式具有此種性質時,甲式名曰乙式之消根因子,乙式亦爲甲式之消根因子.

"有理化因式"

例如 $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ 爲 $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ 之消根因子, ~~$\sqrt{A}$~~

"有理化因式"

$\sqrt{A}-\sqrt{B}$ 亦爲 $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ 之消根因子.

又如 $\sqrt{A}+\sqrt[3]{B}$ 與 $\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$ 互爲消根因子.

上列諸公式之要義,卽在明示吾人以如何求出已知根式之消根因子.

〔例一〕 求 $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$ 之消根因子.

〔解法〕 因 $(\underset{A}{\sqrt[3]{2}}\underset{-}{-}\underset{B}{\sqrt[3]{3}})(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})=2-3=-1.$ $\sqrt{A^2}+\sqrt{AB}+\sqrt{B^2}$

故 $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$ 之消根因子爲 $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}.$

〔例二〕 求 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 之消根因子.

〔解法〕 $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5=2\sqrt{6}.$$

$$2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=2\cdot 6=12.$$

故 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 之消根因子爲 $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}.$

習題二十九

求下列各式之消根因子:—

1. $\sqrt[3]{180}$	2. $\sqrt{135}$
3. $\sqrt[3]{ab^2c^3}$	4. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$
5. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$	6. $\sqrt{2}-\sqrt{5}$
7. $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}$	8. $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}$
9. $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7}$	10. $\sqrt[5]{2}-\sqrt[5]{3}$
11. $\sqrt[6]{2}-\sqrt[6]{3}$	12. $1+\sqrt[4]{2}$
13. $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$	14. $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$
15. $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$	16. $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$

§59. 不盡根式之除法. 演算根式除法,卽以根式之消根因子同乘被除式與除式,而化簡其結果.

〔例一〕 $$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

〔例二〕 $$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}.$$

〔例三〕 $$\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{60}(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-6}$$

$$=\frac{(2\sqrt{30}+10\sqrt{3}+6\sqrt{10})(2\sqrt{10}-1)}{(2\sqrt{10}-1)(2\sqrt{10}+1)}$$

$$=\frac{400\sqrt{3}+24\sqrt{30}+120-2\sqrt{30}-10\sqrt{3}-6\sqrt{10}}{39}$$

$$=\frac{30\sqrt{3}+18\sqrt{30}-6\sqrt{10}+120}{39}$$

$$=\frac{390\sqrt{3}-6\sqrt{10}+120}{39}.$$

$$=\frac{10\sqrt{3}+6\sqrt{30}-2\sqrt{10}+40}{13}$$

〔註〕 演根式除法何以須將除式中之根式消去？例如欲求$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$之近似值至小數三位，由原式計算應爲$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2.236+1.414}=\frac{1}{3.650}=?$

但若先消分母中的根式，則

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}=\frac{2.236-1.414}{3}$$

$$=\frac{.822}{3}=?$$

$\frac{1}{3.650}$與$\frac{.822}{3}$之結果雖均爲 .274，但由後式求商，較之由前式求商，二者孰便？然則演根式除算時，必將除式中之根式消去者，豈無故歟？

習題三十

化簡下列各式：—

26. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{8}-\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{(4\sqrt{2}-4\sqrt{5})(\sqrt{2}+4\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$

$\frac{\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{10}+\sqrt{20}}{2-5}=\frac{2+4\sqrt{2}+\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{-3}$

$\frac{1+\sqrt2-\sqrt3}{1+\sqrt2+\sqrt3} = \frac{[(1+\sqrt2)-\sqrt3][(1+\sqrt2)-\sqrt3]}{[(1+\sqrt2)+\sqrt3][(1+\sqrt2)-\sqrt3]} = \frac{(1+\sqrt2)^2-2(1+\sqrt2)\sqrt3+3}{(1+\sqrt2)^2-3}$

$= \frac{1+2\sqrt2+2-2\sqrt3-2\sqrt3\sqrt2+3}{1+2\sqrt2+2-3} = \frac{(6+2\sqrt2-2\sqrt3-2\sqrt6)\sqrt2}{2\sqrt2\cdot\sqrt2}$

$= \frac{6\sqrt2+2\cdot2-2\sqrt6-2\sqrt{12}}{4} = \frac{6\sqrt2+4-2\sqrt6-4\sqrt3}{4} = \frac{2+3\sqrt2-2\sqrt3-\sqrt6}{2}$

1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　　2. $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}$

3. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}$　　4. $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

5. $\frac{1}{\sqrt{27}}$　　6. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

7 $\frac{\sqrt[3]{45}}{\sqrt[3]{80}}$　　8. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

9. $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$　　10. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

11. $\frac{9}{3+\sqrt{5}}$　　12. $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+5}$

13. $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{8}}$　　14. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

15. $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$　　16. $\frac{\sqrt{10}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

17. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}+1}$　　18. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}$

19. $\frac{1}{\sqrt[6]{3}-\sqrt[5]{2}}$　　20. $\frac{1}{\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3}}$

21. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$　　22. $\frac{1}{\sqrt[4]{25}+\sqrt[3]{2}}$

23. $\frac{4}{2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}}$　　24. $\frac{100}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}$

25. $\frac{(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{27}} = \frac{(\sqrt[4]2-\sqrt[4]3)\cdot 2\sqrt[4]4\,(\sqrt[4]2+\sqrt[4]3)}{(\sqrt[4]{2^3}-\sqrt[4]{2^2\cdot3}+\sqrt[4]{3^2\times2}-\sqrt[4]{3^3})(\sqrt[4]2+\sqrt[4]3)}$

26. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{(\sqrt[8]{2}-\sqrt[8]{5})(\sqrt[8]{2}+\sqrt[8]{5})(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{5})}$

$\frac{(\sqrt[4]2-\sqrt[4]3)\cdot2\sqrt[4]4(\sqrt[4]2+\sqrt[4]3)}{-1} = -(\sqrt[4]4-\sqrt[4]9)\,2\sqrt[4]4 =$

$\sqrt[4]{16}-2\sqrt[4]{36} = 2\sqrt[4]{36}-2\sqrt[4]{16} = 2\sqrt[4]{2^2 3^2}-2\cdot2 = 2\sqrt{2\cdot3}-4 =$
$= 2\sqrt6-4$

§60 兩個重要定理. 下列兩個定理,在根式問題中,頗爲重要,學者應加注意.

定理一 任何二次根式,決不能化爲根式與非根式之和,即 $\sqrt{a} \neq b+\sqrt{c}$.

〔證〕 假定 $\sqrt{a}=b+\sqrt{c}$

則依等量公理,得 $(\sqrt{a})^2=(b+\sqrt{c})^2$

即 $$a=b^2+c+2b\sqrt{c}$$

於是 $$\frac{a-b^2-c}{2b}=\sqrt{c}$$

此結果不通.〔參看§51(3)例一,例二之證明〕.

故 $$\sqrt{a} \neq b+\sqrt{c}$$

〔註 1〕 本定理在消極方面,可以糾正一種嚴重錯誤.例如在演算 $\sqrt{55}$ 時,因依開方手續應得算式 $\begin{array}{r|l} 55 & 7 \\ 49 & \\ \hline 6 & \end{array}$ 遂謂 $\sqrt{55}=7+\sqrt{6}$. 此大誤矣!學者苟能明瞭上述定理,則此種錯誤,自可免去,因按之上理,$\sqrt{55}$ 不但不能化爲 $7+\sqrt{6}$,且亦不能化爲 $7+\sqrt{\text{任何數}}$ 也.

〔註 2〕 同樣,關於二次以上之根式亦有與上

述定理類似之定理：$\sqrt[m]{a}\neq b+\sqrt[m]{c}$.

以其為用不廣，故略之.

定理二　若 $a+\sqrt{x}=b+\sqrt{y}$，則 $a=b$，$x=y$.

〔證〕　因 $a+\sqrt{x}=b+\sqrt{y}$.

故　$\sqrt{x}=b-a+\sqrt{y}$.

在此等式中如 $a-b$ 不為零，則與定理一矛盾矣.

故 $a-b$.

必等於零. 故　$a=b$.

由是又得　$x=y$.

§61. 兩項二次根式之平方根. 依據前節定理二，可得根式之開方法. 根式開方之法，在原理上原不限於兩項二次根式，亦不限於開平方，特在實際上，究以兩項二次根式之開平方為最簡而有用. 本節所述故以此類問題為限.

〔例〕　求　$\sqrt{9+2\sqrt{18}}=?$

〔解法〕　假定 $\sqrt{9+2\sqrt{18}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

則　$9+2\sqrt{18}=x+y+2\sqrt{xy}$

故　$\begin{cases} x+y=9 \\ xy=18 \end{cases}$

乃將18分為各組因子得1, 18; 2, 9; 3, 6三種,其中3, 6之和為9. 故知$x=3$, $y=6$.

$$\therefore\quad \sqrt{9+2\sqrt{18}}=\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

習題三十一

試求下列各式之平方根:—

1. $18+2\sqrt{56}$
2. $11-\sqrt{96}$
3. $15+4\sqrt{14}$
4. $26-4\sqrt{42}$
5. $34+2\sqrt{1377}$
6. $\sqrt{80}+2\sqrt{15}$ $=\sqrt{4\sqrt{5}+2\sqrt{15}}$ $=\sqrt{\sqrt{5}(4+2\sqrt{3})}$ $=\sqrt[4]{5}(1+\sqrt{3})$
7. $18(\frac{7}{3}+\sqrt{5})$
8. $ax-2a\sqrt{ax-a^2}$
9. $2x+2\sqrt{x^2-y^2}$
10. $x+\sqrt{x^2-4y^2}$
11. $3a-\sqrt{5a^2+4ab-b^2}$
12. $1+m^2+\sqrt{1+m^2+m^4}$
13. $16\sqrt{2}+4\sqrt{30}$
14. $\sqrt{500}+\sqrt{480}$
15. $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$
16. $\sqrt{248-32\sqrt{60}}$

C 本 先生 算 七

原式 $=\sqrt{3a-\sqrt{5a^2+4ab-b^2}}=$

$3a-2\sqrt{\frac{5a^2+4ab-b^2}{4}}=(x+y)-2\sqrt{xy}$

$\therefore (x+y)=2\sqrt{xy}$

$x-y=3a \cdots (1)$

$xy=\frac{5a^2+4ab-b^2}{4} \cdots (2)$

$(3a-y)y=\frac{5a^2+4ab}{4}$

$12ay-4y^2=5a^2+4ab$

$4y^2-12ay+(5a^2+4ab$

第十章

指數論

§62. 正整指數三大定律. 當 m, n 爲正整數時,依指數定義,可得下列三種定律:

(1) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

(2) $$(a^m)^n = a^{mn}$$

(3) $$(ab)^n = a^n b^n$$

〔證 1〕 $a^m = a \cdot a \cdot a \cdots\cdots$ 到 m 個 a

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots\cdots$ 到 n 個 a

$\therefore\ a^m a^n = a \cdot a \cdot a \cdots\cdots$ 到 $(m+n)$ 個 a

$= a^{m+n}$

〔證 2〕 $(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots\cdots$ 到 n 個 a^m.

$= a^{m+m+m+\cdots\cdots+}$ 到 n 個 m.

$= a^{mn}$.

〔證 3〕 $(ab)^n=ab\cdot ab\cdot ab\cdots\cdots$到 n 個 ab.

$=[a\cdot a\cdot a\cdots\cdots$到 n 個 $a]$

$\times[b\cdot b\cdot b\cdots\cdots$到 n 個 $b]$

$=a^n b^n$

§63. **指數意義之推廣.** 前節所述諸律中,指數 m,n 均限於正整數;不能爲負數,亦不能爲分數.此種限制,使指數定律應用之範圍不廣.算學家嫌其不便,乃將指數之意義推廣,使上述諸律,不特在指數爲正數時可以適用,即在指數爲分數或負指數時,亦無不通行,此指數意義推廣之目的也.如何推廣? 說來甚長,本節所述,其大綱焉.以下數節(§§ 63——69),再分論之.

依指數最初意義,a^n 者,將 a 自乘 n 次也.今若 n 爲負數,例如 -5,則 a^{-5} 者豈非將 a 自乘 -5 次乎? 又若 n 爲分數,例如 $\frac{2}{3}$,則 $a^{\frac{2}{3}}$ 者豈非將 a 自乘 $\frac{2}{3}$ 次乎? 二者之無意義,不待辨而自明.故在 n 爲分數或負數時,a^n 者,決非將 a 自乘 n 次之謂,必須另予以新意義矣.

在正整指數定義中,原不包含負指數或分指

數.負指數分指數之與正整指數乃截然不同之兩物.對於此種新物(負指數,分指數),就論理方面言,本可任下其定義,但為適合前節諸律起見,所下定義,又非與前節諸律一致不行.

乃任取上節諸律之一,假定新指數亦能適合該律,以察新指數有何必要的意義.卽依此意以定此新指數之意義,本此定義,再證上節諸律是否一一適合.如其合也,則在指數諸律中,指數不必限於正整數,而指數推廣之目的達矣.

§64. **分指數的意義.** $a^{\frac{p}{q}}=?$可用指數第一律以求其意義如下:—

〔特例〕 求 $a^{\frac{2}{3}}=?$

依指數第一律得 $a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=a^2$

卽 $$(a^{\frac{2}{3}})^3=a^2$$

可見 $$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$$

〔通例〕 求 $a^{\frac{p}{q}}=?$

依指數第一律,得

$a^{\frac{p}{q}}.a^{\frac{p}{q}}.a^{\frac{p}{q}}.$ ………到 q 個 $a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots\cdots\text{+到 } q \text{ 個} \frac{p}{q}}$

分子

即 $$(a^{\frac{p}{q}})^q = a^p$$

可見 $$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

〔例一〕 $$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

〔例二〕 $$125^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{125^4} = (\sqrt[3]{125})^4 = 5^4$$

$$= 625.$$

§65. 零指數的意義. $a^0 = ?$ 亦可用指數第一律以求其意義如下:—

依指數第一律得 $$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n.$$

故 $$a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$$ 因數的乘方之意[illegible]

可見 $$\boxed{a^0 = 1.}$$

例如 $2^0 = 1, 3^0 = 1, 5^0 = 1, 100^0 = 1, 1000^0 = 1,$

$(x^2 + y^2)^0 = 1.$

§66. 負指數的意義. $a^{-n} = ?$ 亦可用指數第一律以求其意義如下:—

依指數第一律得 $$a^n a^{-n} = a^{n-n} = a^0$$

故 $$a^{-n} = \frac{a^0}{a^n}$$

可見 $$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

〔例一〕　$3^{-4}=\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{1}{81}.$

〔例二〕　$64^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{64^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{64^2}}=\dfrac{1}{16}$

習題三十二　不作

化簡下列各式:—

1. $4^{\frac{3}{2}}$
2. $100^{\frac{5}{2}}$
3. 2^{-6}
4. $25^{-\frac{1}{2}}$
5. $64^{-\frac{2}{3}}$
6. $81^{-\frac{3}{4}}$
7. $(729)^{\frac{4}{3}}$
8. $(256)^{-\frac{3}{4}}$
9. $1350^{\frac{1}{3}}$
10. $(-27)^{-\frac{4}{3}}$
11. $1125^{-\frac{1}{2}}$
12. $(3^{9^9}+8^{8^8})^0$
13. $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$
14. $a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{4}}$
15. $\sqrt{ac}\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}+2\right)^{\frac{1}{2}}$
16. $(x^2-2yx+y^2)^{\frac{3}{2}}$
17. $(x^6y^2z^4)^{\frac{1}{2}}$
18. $(729a^6b^9c^3)^{\frac{2}{3}}$
19. $\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}}$
20. $\dfrac{64^{-\frac{1}{2}}}{72^{-\frac{2}{3}}}$
21. $\dfrac{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{xy}$
22. $\dfrac{xy}{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}$
23. $\dfrac{x^{-2}y^{-3}}{a^{-2}b^{-3}}$
24. $\dfrac{x^{-2}+y^{-3}}{a^{-2}+b^{-3}}$

§67. 零指數,分指數,負指數的定義. 由上三節觀之,可得下列三個定義.

(一) 分指數的定義: $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$

以語言表之: $a^{\frac{p}{q}}$ 即爲 a^p 的 q 次根.

(二) 零指數的定義: $a^0=1.$

以語言表之: 任何數的0次冪皆爲1.

(三) 負指數的定義: $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}.$

以語言表之: a^{-n} 即爲 a^n 的倒數.　　適合指數定律

依此三種定義,在指數爲負數,分數或零時,指數三律是否皆能適合,尙不可知!欲得其詳,仍須一一證明.下節先證第一律,其他兩律學者可自證之.

§68. 當 m, n 爲任何有理數時,證 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

本定律可分五層證之

(一) 求證 $a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$ (p, q, r, s 爲正整數.)

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}\qquad\text{(分指數定義.)}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{qr}}\qquad\text{(§53公式3.)}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}} \qquad (\S 53\text{公式}1.)$$

$$=a^{\frac{ps+qr}{qs}} \qquad (\text{分指數定義.})$$

$$=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

(二) 當 $\frac{p}{q}>\frac{r}{s}$ 時，求證 $a^{\frac{p}{q}}a^{-\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

$$a^{\frac{p}{q}}.a^{-\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\div\sqrt[s]{a^r} \qquad (\text{分指數負指數定義.})$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps}}\div\sqrt[qs]{a^{qr}} \qquad (\S 53\text{公式}3.)$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps}\div a^{qr}} \qquad (\S 53\text{公式}2.)$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps-qr}} \qquad [\S 62\text{公式}1, \S 67(\text{三}).]$$

$$=a^{\frac{ps-qr}{qs}} \qquad (\text{分指數定義.})$$

$$=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

(三) 當 $\frac{p}{q}<\frac{r}{s}$ 時，求證 $a^{\frac{p}{q}}.a^{-\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

$$a^{\frac{p}{q}}.a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{r}{s}}} \qquad (\text{負指數定義.})$$

$$=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}} \qquad [\text{本節(二).}]$$

$$=\frac{1}{a^{-\left(\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right)}} \qquad (\text{插入括號.})$$

$$=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}} \qquad (\text{負指數定義.})$$

兩数指乘二、两指数相

(四) 求證 $a^{-\frac{p}{q}}.a^{-\frac{r}{s}}=a^{-\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$.

$$a^{-\frac{p}{q}}.a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}\qquad\text{(負指數定義.)}$$

$$=\frac{1}{a^{\frac{q}{p}+\frac{r}{s}}}\qquad\text{〔本節(一).〕}$$

$$=a^{-\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)}\qquad\text{(負指數定義.)}$$

$$=a^{-\frac{p}{p}-\frac{r}{s}}$$

(五) 求證 $a^m\cdot a^0=a^{m+0}$.

$$a^m\cdot a^0=a^m\cdot 1\qquad\text{(零指數定義.)}$$

$$=a^m$$

習題三十三

1. 證 $a^m\div a^n=a^{m-n}$. (m, n 爲任何有理數.)

〔提示〕 試由指數第一律推得之,

2. 證指數定律: $(ab)^m=a^mb^m$. (m 爲任何有理數),

〔注意〕 本定律應分三層證之.

3. 證指數定律: $(a^m)^n=a^{mn}$. (m, n 爲任何有理數.)

〔注意〕 本定律應分下列三層證之:

1. m 爲任何數, n 爲正整數,
2. m 爲任何數, n 爲負分數,
3. m 爲任何數, n 爲負有理數.

§69. 關於指數之結論. 由前節及習題三十三觀之,可見依 §67 所下負指數,零指數,分指數之定義, §62 所述指數,三大定律均能成立.換言之,此類指數定律可以適用於任何有理指數,而不限於正整指數矣.〔註:指數不但爲有理數,並且可爲無理數,虛數等等,其詳非本書範圍所可及.〕於是乃有下列諸算法.

〔例一〕 $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=abc^{\frac{1}{2}}$

〔例二〕 $(5x^3+x^2y-xy^2+10y^3)\div x^{\frac{1}{2}}$

$$=5x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{3}{2}}y-x^{\frac{1}{2}}y^2+10x^{-\frac{1}{2}}y^3$$

〔例三〕 $(x-y)\div(\sqrt{x}+\sqrt{y})=(x-y)\div(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$

$$=x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$$

〔例四〕 $(x+y)\div(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=\left[(x^{\frac{1}{3}})^3+(y^{\frac{1}{3}})^3\right]$

$$\div(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$$

〔例五〕 $(32x^{-6}+12x^{-4}+10x^{-2}-12)\div(2x^{-2}-1)$

$$=16x^{-4}+14x^{-2}+12$$

〔算式〕

$$
\begin{array}{r|l}
2x^{-2}-1)\ 32x^{-6}+12x^{-4}+10x^{-2}-12 & 16x^{-4}+14x^{-2}+12 \\
\underline{32x^{-6}-16x^{-4}\qquad\qquad\qquad} & \\
28x^{-4}+10x^{-2}-12 & \\
\underline{28x^{-4}-14x^{-2}\qquad} & \\
24x^{-2}-12 & \\
\underline{24x^{-2}-12} & \\
0 &
\end{array}
$$

〔例六〕 $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=x[x(x\cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$

$$=x\cdot x^{\frac{1}{2}}(x\cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$$

$$=x\cdot x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}}$$

$$=x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=x\sqrt[8]{x^7}$$

〔例七〕 證 $\sqrt[m]{a^n}=(\sqrt[m]{a})^n$.

〔證法〕 $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}=(a^{\frac{1}{m}})^n=(\sqrt[m]{a})^n$

〔注意〕 由上二例觀之,可見根式問題往往可變為指數問題以求其解,且經此一變之後,運算手續亦可簡便不少.

〔例八〕 試變$\dfrac{a^{-m}b^n}{x^{-p}y^q}$使分子不含$a,b$,分母不含$x,y$.

〔解法〕
$$\frac{a^{-m}b^n}{x^{-p}y^q}=\frac{\frac{1}{a^m}b^n}{\frac{1}{x^p}y^q}=\frac{x^p.b^n}{y^q.a^m}$$

$$=\frac{x^py^{-q}}{\frac{a^m}{b^n}}=\frac{x^py^{-q}}{a^mb^{-n}}$$

〔注意〕 由本例觀之,可見分子中任何因子可移至分母;分母中任何因子亦可移至分子,只須改變該因子原有指數之符號而已.

〔例九〕 試求　$x+1+4x^{\frac{3}{4}}+4x^{\frac{1}{4}}+6x^{\frac{1}{2}}$ 之平方根

〔解法〕

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+4x^{\frac{3}{4}}+6x^{\frac{2}{4}}+4x^{\frac{1}{4}}+1 \;\Big|\; x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}}+1 \\
 & x \\ \hline
2x^{\frac{1}{2}} & 4x^{\frac{3}{4}}+6x^{\frac{2}{4}}+4x^{\frac{1}{4}}+1 \\
+2x^{\frac{1}{4}} & \\ \hline
2x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}} & 4x^{\frac{3}{4}}+4x^{\frac{2}{4}} \\ \hline
2x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{4}} & 2x^{\frac{2}{4}}+4x^{\frac{1}{4}}+1 \\
+1 & \\ \hline
2x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{4}}+1 & 2x^{\frac{2}{4}}+4x^{\frac{1}{4}}+1 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

故所求之平方根爲 $x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}}+1$.

習題三十四

化簡下列諸式,並使其結果不含負指數.

1. $\dfrac{2x^{-3}}{\sqrt[5]{32^{-4}}}$　　2. $\dfrac{x^{-1}+y}{z}$

3. $\left(\dfrac{81x^{-8}y^{5}}{25a^{4}b^{-10}}\right)^{-\frac{3}{2}}$　　4. $\dfrac{x^{-3}y^{-2}z^{-1}}{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}$

5. $\left(\dfrac{x^{3}y^{2}z}{ab^{2}c^{3}}\right)^{-2}$　　6. $\left(\dfrac{x^{3}y^{2}z}{ab^{2}c^{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$

(9)

$= \left(\frac{3^{3}a^{-3}b^{-6}c^{-9}}{4^{3}x^{-3}y^{-1}z^{-6}}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3^{3(-\frac{1}{3})}a^{(-3)(-\frac{1}{3})}b^{(-6)(-\frac{1}{3})}c^{(-9)(-\frac{1}{3})}}{4^{3(-\frac{1}{3})}x^{(-3)(-\frac{1}{3})}y^{(-1)(-\frac{1}{3})}z^{(-6)(-\frac{1}{3})}}$

$= \frac{3^{-1}ab^{2}c^{3}}{4^{-1}xy^{\frac{1}{3}}z^{2}} = \frac{4ab^{2}c^{3}}{3xy^{\frac{1}{3}}z^{2}}$

7. $\left(\frac{x^{-3}y^{-2}z^{-1}}{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}\right)^{-\frac{2}{3}}$　　8. $\left(\frac{(-3)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{x^{-5}}}{(\frac{4}{5})^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[9]{y^{-4}}}\right)^{-\frac{9}{4}}$

9. $\left(\frac{27a^{-3}b^{-6}c^{-9}}{64x^{-3}y^{-1}z^{-6}}\right)^{-\frac{1}{3}}$　　10. $\left\{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^{7}}}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[6]{a}}{b^{-\frac{1}{2}}}\right\}^{2}$

11. $4m^{\frac{n}{3}}, 3m^{-\frac{n}{3}}\div 6m^{-\frac{2n}{3}}$　　12. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$

13. $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[18]{5}$　　14. $\sqrt[4]{x}\div(\sqrt[6]{x^{5}}\cdot\sqrt[9]{x^{4}})$

15 $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\div\sqrt[6]{32}$　　16. $\sqrt[a+b]{x^{a}}\cdot\sqrt[a-b]{x^{b}}\div\sqrt[a^{2}-b^{2}]{x^{2ab}}$

17. $\sqrt[m]{x^{-2}y^{-3}z^{-1}}\div\sqrt[2m]{x^{m-4}y^{m-6}z^{m-2}}$

18. $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{1\div\sqrt{a^{7}}}\right)^{2}}$　　19. $\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}}\div\frac{9^{n-1}}{3^{n^{2}-1}}$

20. $\left\{\frac{a^{m+n}}{\sqrt[n]{a^{m^{2}-mn}}}\cdot a^{-m}\right\}^{-\frac{1}{m}}$　　21. $\sqrt[a]{\frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[c]{x}}}\cdot\sqrt[b]{\frac{\sqrt[c]{x}}{\sqrt[a]{x}}}\cdot\sqrt[c]{\frac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[b]{x}}}$.

22. $\frac{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}{\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}}$　　23. $\left(\frac{a^{-6}b^{-3}}{x^{-3}y^{-9}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{x^{-2}y^{-4}}{a^{-2}b^{-6}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

題習三十五

演下列各乘除法:—

1. $(2x^{2}-3x^{-1}+2x-3)\cdot 6x^{\frac{1}{2}}y^{-2}$

2. $(3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{4}})\cdot 12x^{12}$

3. $(a+a^{-1})^{2}$

4. $(a+a^{-1})(a^{2}-1+a^{-2})$

5. $(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$

$18-7a+2a^{\frac{3}{2}}-3a^{\frac{1}{2}}) \div (2a^{\frac{1}{2}}+3) = 2a^2-9a-3a^2+18 = a-5a^{\frac{1}{2}}+6$

6. $(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})$

7. $(x^{-1}y^{-1}+z^{-1})^2$

8. $(a^m+a^{-m})^2$

9. $(a^{-m}+b^{-m})^2$

10. $(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})$

11. $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{c}{b}}\right)$

12. $(x+3x^{-1}-4)\div(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})$

13. $(4a^2+30a^{-1}-9-25a^{-2})\div(2+3a^{-1}-5a^{-2})$

14. $(x^n-2+x^{-n}-x^{-2n})(x^n+x^{-n}+1)$

15. $(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{ab}+2\sqrt[3]{b^2})$

16. $(\sqrt[3]{a^4}-4\sqrt[3]{b^2}-6a\sqrt[3]{b}+9\sqrt[3]{a^2b^2})\div(2\sqrt[3]{b^2}-3\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a^2})$

17. $(18-7a+2a^{\frac{3}{2}}-3a^{\frac{1}{2}})\div(2a^{\frac{1}{2}}+3) = a-5a^{\frac{1}{2}}+6$

試求下列三式之平方根.(題 18—20.)

18. $x^2-2x\sqrt{a}+3a-\frac{2a\sqrt{a}}{x}+\frac{a^2}{x^2}$

$-15a^{\frac{1}{2}}-7a$

19. $25a^2+9a^{-2}+40a+24a^{-1}+46$

$-15a^{\frac{1}{2}}-10a$

20. $2x^m+2x^{-m}+x^{2m}+x^{-2m}+3.$

$3a+2a^{\frac{3}{2}}$

$5a+2a^{\frac{3}{2}}$

21. 化簡$\left(\frac{4a}{9\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}+\frac{19}{12}-\frac{3\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{a}}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$.

22. 化簡$\left[x+3x^{\frac{2}{3}}+6\sqrt[3]{x}+7+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+x^{-1}\right]^{\frac{1}{3}}$

1) 定義
2) 重要的定律
3) 查表
4) 應用

$a^b = c$ 冪

$\log_a c = b$

$a = \sqrt[b]{c}$

第十一章

對　　數

§70. **對數之需要.** 〔問題一〕 有345^{50}欲求其積之首四位,能以極簡手續行之否?

〔問題二〕 有$.123\times45.6\div78.9\div98.7\times4.65\div3.21\times213.4\div65.78$,欲其值使其首四位數完全準確,有最簡之法否?

〔問題三〕 $\sqrt[50]{345}=$? 欲求其值至小數三位,其法如何?

在此三例中,一二兩題依尋常乘除法雖亦可得其解,然手續至繁,非歷時甚久不爲功.至於最後一例,則依尋常開方法,根本無入手之方,遑論手續之繁簡乎哉?

然則欲解上列諸題.非另有新法不行!新法維何?卽利用對數是也.利用對數,如何便能解決此

類問題? 說來甚長. 以下數節 (§§ 71——79), 當詳論之.

§ 71　對數之意義. 在等式 $a^x=M$ 中, 已知 a, x 求指数 底 數
M 三者之二, 可求其他:—

$M=a^{\wedge}$

(1)　已知 a, x 求 $a^x=?$ 是爲乘方, 其中"?"名曰 a 之 x 次羃.

$a=\sqrt[x]{M}$

(2)　已知 x, M 求 $M=?^x$ 是爲開方, 其中"?"名曰 M 之 x 次根.　以a为底求M的对数

(3)　已知 a, M 求 $M=a^?$ 是爲求對數, 其中"?"名曰 M (底 a) 之對數.

在開方, 算學家嫌算式 $M=?^x$ 不便於用, 別創算式 $\sqrt[x]{M}=?$ 以代之. 故算式 $M=?^x$ 與算式 $\sqrt[x]{M}=?$ 實表同一之關係.

同樣, 在對數, 算學家亦感算式 $M=a^?$ 之不便於用, 乃別創 $\log_a M=?$ 以代之. 故算式 $\log_a M=?$ 與算式 $M=a^?$ 亦表同一之關係: 不過在對數, 前式較後式爲便耳.

〔例一〕　求　　　$\log_2 32=?$

〔解法〕　　$\because\quad 32=2\times2\times2\times2\times2=2^5$

$81 = 27^{\frac{4}{3}}$
$3^4 = (3^3)^{\frac{4}{3}}$

$$\therefore \quad \log_2 32 = 5$$

〔例二〕 求 $\quad \log_{27} 81 = ?$

〔解法〕 $\quad \because \quad 81 = 3^4 = 3^{3\times\frac{4}{3}} = 27^{\frac{4}{3}}$

$$\therefore \quad \log_{27} 81 = \frac{4}{3}.$$

〔例三〕 求 $\quad \log_5 \frac{1}{125} = ?$

〔解法〕 $\quad \because \quad \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$

$$\therefore \quad \log_5 \frac{1}{125} = -3.$$

習題三十六

1. 求 $\log_{10}100 = ?$ $\qquad \log_{10}1000 = ?$

   $\log_{10}10000 = ?$ 4 $\qquad \log_{10}100000 = ?$

2. 求 $\log_3 9 = ?$ $\qquad \log_3 27 = ?$

   $\log_3 81 = ?$ $\qquad \log_3 243 = ?$

3. 求 $\log_5 25 = ?$ 2 $\qquad \log_5 125 = ?$

   $\log_5 625 = ?$ $\qquad \log_5 3125 = ?$ 5

4. 求 $\log_6 36 = ?$ $\qquad \log_6 216 = ?$

   $\log_6 1296 = ?$ $\qquad \log_6 7776 = ?$

若底与数相同
对数为1

5. 求 $\log_{10}10 = ?$ 1 $\qquad \log_3 3 = ?$

   $\log_5 5 = ?$ $\qquad \log_6 6 = ?$

6. 求 $\log_{2}1=?$ 0　　$\log_{3}1=?$　　$\log_{5}1=?$

7. 求 $\log_{a}a=?$　　$\log_{a}1=?$

[注意] 本題結果,頗爲重要,學者須熟記之.

8. $\log_{4}2=?$　　$\log_{4}27=?$

　$\log_{4}32=?$　　$\log_{4}128=?$

9. $\log_{9}3=?$　　$\log_{9}27=?$

　$\log_{9}243=?$　　$\log_{9}2187=?$

10. $\log_{8}2=?$ $\frac{1}{3}$　　$\log_{8}16=?$　　$\log_{8}128=?$

11. $\log_{27}3=?$　　$\log_{27}81=?$　　$\log_{27}2187=?$

12. $\log_{8}\frac{1}{8}=?$　　$\log_{8}\frac{1}{16}=?$　　$\log_{8}\frac{1}{128}=?$

13. $\log_{27}\frac{1}{3}=?$　　$\log_{27}\frac{1}{81}=?$　　$\log_{27}\frac{1}{2187}=?$

14. $\log_{10}10=?$　　$\log_{10}1=?$

　$\log_{10}\cdot1=?$　　$\log_{10}\cdot01=?$ $\log_{10}\frac{1}{100}=-2$

　$\log_{10}\cdot001=?$ $\log_{10}\frac{1}{1000}=-3$　　$\log_{10}\cdot0001=?$

　$\log_{10}\cdot00001=?$　　$\log_{10}\cdot000001=?$

§72. 對數三大定律. 依上節對數定義可得三大定律.此三大定律,乃對數中一切變化之基本,有之,則對數之功用乃彰;無之,則對數之效率不存,學者於此三律,不可不深致意焉.三律爲何?述之如下:—

任意二數之積的對數等於二數之對數之和

$$\text{I.}\quad \log_a(MN)=\log_a M+\log_a N.$$

II. $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N,$

III. $\log_a(M^N)=N\log_a M.$

〔證 I〕 設 $\log_a M=x,\quad \log_a N=y.$

則 $M=a^x,\qquad N=a^y.$

故 $MN=a^x\cdot a^y=a^{x+y}.$

即 $\log_a(MN)=x+y.$

$\therefore\quad \log_a(MN)=\log_a M+\log_a N.$

〔證 II〕 仍設 $\log_a M=x,\quad \log_a N=y.$

則 $M=a^x,\qquad N=a^y.$

故 $\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}.$

$\therefore\quad \log_a\left(\frac{M}{N}\right)=x-y=\log_a M-\log_a N.$

〔證 III〕 設 $\log_a M=x.$

則 $M=a^x.$

故 $M^N=(a^x)^N=a^{Nx}$

$\therefore\quad \log_a(M^N)=Nx=N\log_a M.$

〔例一〕 已知 $\log_{10}8975=3.95303.$

$\log_{10}5798=3.76328.$

求 $\log_{10}(8975\times5798)=?$

〔解法〕 $\log_{10}(8975\times5798)=\log_{10}8975$

$+\log_{10}5798.$

$=3.95303+3.96328=7.71631.$

〔例二〕 已知 $\log_{10}8975=3.95303.$

$\log_{10}5798=3.76328.$

求 $$\log_{10}\frac{8978}{5798}=?$$

〔解法〕 $$\log_{10}\frac{8975}{5798}=\log_{10}8975-\log_{10}5798$$

$=3.95303-3.96328=1.18975.$

〔例三〕 已知 $\log_{10}3=.47712$

求 (1) $\log_{10}3^{100}=?$ (2) $\log_{10}\sqrt[100]{3}=?$

〔解法〕 (1) $\log_{10}3^{100}=100\log_{10}3=100\times.47712$

$=47.712.$

(2) $$\log_{10}\sqrt[100]{3}=\log_{10}\left(3^{\frac{1}{100}}\right)=\frac{1}{100}\log_{10}3=\frac{.47712}{100}$$

$=.0047712.$

〔注意〕 由上三例觀之;可見應用本節三律,則

(*a*) 欲求積之對數,不必先求積,然後再求其對數.

(b) 欲求商之對數,不必先求商,然後再求其對數.

(c) 欲求冪之對數,不必先求冪,然後再求其對數.

(d) 欲求方根之對數,不必先求方根,然後再求其對數.

因此,在計算時可省去手續不少,對數之所以有用卽在於此.

習題三十七

1. 證 $\log_a(MNP)=\log_a M+\log_a N+\log_a P$

$\log_a(MNPQ)=\log_a M+\log_a N+\log_a P+\log_a Q.$

$\log_a(MNPQR)=\log_a M+\log_a N+\log_a P+\log_a Q+\log_a R.$

2. 證 $\log_a\frac{M}{PQ}=\log_a M-\log_a P-\log_a Q$

$\log_a\frac{M}{PQR}=\log_a M-\log_a P-\log_a Q-\log_a R$

$\log_a\frac{MN}{PQR}=\log_a M+\log_a N-\log_a P-\log_a Q-\log_a R.$

3. 已知 $\log_{10}3=.47712$. $\log_{10}4=.60206$, 求

(1) $\log_{10}12=?$　(2) $\log_{10}36=?$　(3) $\log_{10}54=?$

(4) $\log_{10}\frac{27}{32}=?$　(5) $\log_{10}2\ 25=?$　(6) $\log_{10}\sqrt[3]{1.125}=?$

(7) $\log_{10}\sqrt[50]{8}=?$　(8) $\log_{10}\sqrt[100]{\frac{2}{3}}=?$　(9) $\log_{10}(2^{30}\times3^{40})=?$

4. 已知 $\log_{10}4=.60206$, $\log_{10}5=.69897$, 求

(1) $\log_{10}2=?$　(2) $\log_{10}\sqrt[3]{2}=?$　(3) $\log_{10}40=?$

(4) $\log_{10}800=?$　(5) $\log_{10}\sqrt[5]{.016}=?$　(6) $\log_{10}62500=?$

5. 已知 $\log_{10}2=.30103$.　$\log_{10}3=.47712$.

$\log_{10}7=.84510$.　$\log_{10}5=.69897$.

求 (1) $\log_{10}\frac{3375}{6272}=?$　(2) $\log_{10}(2025\div3136)^{\frac{1}{3}}$

6. 已知 $\log_{10}5.43=.73480$,　$\log_{10}345=2.53782$, 求

(1) $\log_{10}(1\div5.43)^2=?$　2) $\log_{10}(1\div5.43^2\times345^3)^{\frac{1}{2}}=?$

(3) $\log_{10}\frac{1}{\sqrt[3]{5.43}}=?$　(4) $\log_{10}\frac{10000}{5.43^2\times\sqrt[3]{345}}=?$

7. 已知 $\log_{10}345=2.53782$. 求 $\log_{10}3450=?$ $\log_{10}34500=?$

$\log_{10}345000=?$ $\log_{10}3450000=?$ $\log_{10}34.5=?$

$\log_{10}3.45=?$ $\log_{10}.345=?$ $\log_{10}.0345=?$

$\log_{10}.00345=?$ $\log_{10}.000345=?$

§73. **常用對數.** 如上所述,對數之底 a 本可任爲何數不必限於某一特值,但爲實用便利計,通常恆以10爲底.凡以10爲底之對數名曰常用對數.此後所述,多屬此類.

常用對數之底10恆略而不寫.非常用對數,其底必須註明.例如 $\log_{10}100$, $\log_{10}150$, $\log_{10}N$ 等應省

寫爲 $\log 100, \log 150, \log N$; 而 $\log_8 64, \log_8 100, \log_3 27$, 則不能省爲 $\log 64, \log 100, \log 27$. 是故 $\log M=?$ 者, 卽 $M=10^?$ 之謂也.

§74. 定位部與定値部. 在常用對數中, 凡數之爲 10 的整次冪者, 其對數恆爲整數. 例如:

$$\log 100=2 \qquad [\because 10^2=100]$$

$$\log 10=1 \qquad [\because 10^1=10]$$

$$\log 1=0 \qquad [\because 10^0=1]$$

$$\log .1=-1 \qquad [\because 10^{-1}=.1]$$

$$\log .01=-2 \qquad [\because 10^{-2}=.01]$$

之類是. 凡數之非 10 的整次冪者, 其對數則非整數, 而爲整數與小數之和. 例如就 $\log 98=?$ 論之.

$$\because \quad 10<98<100$$

$$\therefore \quad \log 10<\log 98<\log 100$$

$$\therefore \quad 1<\log 98<2$$

$$\therefore \quad \log 98=1\cdots\cdots$$

同樣可知 $\log 982=2\cdots\cdots$

$$\log 7.8=0\cdots\cdots$$

$$\log 7128=3\cdots\cdots$$

在常用對數中,整數部分名曰定位部(如上列四例之1,2,0,3是).小數部份名曰定值部(如上列四例中小數點以後之數碼是).定值定位兩部各有其特性,詳見下節.

§75. 定位定值兩部之特性. 試取特例通例比較言之.

設a為僅含一位整數之任何數,

2.41386
定位 定值

$$1<a<10$$

$$\log 1<\log a<\log 10$$

$$0<\log a<1$$

(a)

$$\therefore\quad \log a=0\cdots\cdots$$

假定　$$\log a=0.bcde$$

(其中a, b, c, d表各位數字).

則　$$\log 10a=\log 10+\log a$$

$$=1.bcde$$

同様　$$\log 100a=2.bcde$$

$$\log 1000a=3.bcde$$

$$\log 10000a=4.bcde$$

$$\log 100000a=5.bcde$$

(b)

$$\log\frac{a}{10}=\log a-\log 10$$

$$=.bcde-1$$

$$=\bar{1}.bcde$$

$$\log\frac{a}{100}=\bar{2}.bcde$$

$$\log\frac{a}{1000}=\bar{3}.bcde$$

例如　$8.24.$

$$1<8.24<10$$

$$\log 1<\log 8.24<\log 10$$

$$0<\log 8.24<1$$

(a)

$$\therefore\quad \log 8.24=0.\cdots\cdots$$

假定　$\log 8.24=0.91593$

則　$\log 8.24=\log 10+\log 8.24$

$$=1.91593$$

同樣　$\log 8.24=2.91593$

$$\log 8.240=3\ 91593$$

$$\log 8.2400=4.91593$$

$$\log 8.24000=5.91593$$

$$(b)\begin{cases} \log .824 = \log 8.24 - \log 10 \\ \qquad\quad = 0.91593 - 1 \\ \qquad\quad = \bar{1}.91593 \\ \log .0824 = \bar{2}.91593 \\ \log .00824 = \bar{3}.91593 \end{cases}$$

由此可得二種特性如下:—

(一) 關於定位部者.(1)凡數有n位整數者,其對數之定位部爲$n-1$.〔參看(a)〕(2)凡純粹小數,在小數點與第一位非零數字之間有n個0者,其對數之定位部爲$-(n+1)$,以$\overline{n+1}$記之〔參看(b)〕.

(二) 關於定值部者,(3)兩數之間只有小數點之位置不同者,其對數之定值部相同〔參看(a),(b)〕(4)定值部恆爲正數.

〔註〕 依原理言 $\log .824 = 0.91593 - 1 = -.08407$;但在實際上,爲使上述特性(3),(4)普遍成立,便於運算計,乃將 $\log .824$ 改寫爲 $\log .824 = \bar{1}.91593$.(其中$\bar{1}$爲負值, .91593 仍爲正值).同樣, $\log .0824$, $\log .00824$ 等等各寫爲$\bar{2}.91593$, $\bar{3}.91593$等等者,亦爲便於運算耳.

習題三十八

1. 已知 log 3256 之定值部爲 51268, 試求 log 3256, log 32560 log 32560000, log 325.6 log 32.56, log .3256 log .003256.

2. 試求下列各對數之定位部:—

(a) log 3256, log 6523. log 7895, log 8769.

(b) log 37.89. log 78.72, log 22.22, log 33.46.

(c) log .0038, log .0098, log .00756, log .007896.

3. 已知 log 11=1.04139, log13=1.11394, 試求

log 143=? log 14.3=? log 1.43=? log 1.43=?

log $(.0143)^2$=? log $(.00143)^5$ =? log $\sqrt[3]{1430}$=? log $\sqrt[3]{14.3}$=?

log $\sqrt{.143}$=? log $\sqrt[5]{.0143}$=? log $\sqrt[7]{.00143}$=?

4. 已知 log x=3.48921. log y=.89726. log z=1.48726,

log s=.00312 log u=72.987, log v=$\bar{2}$.71200,

log w=321.041

求定 x, y, z, s, u, v, w 各數中小數點之位置.

5. 已知 log 458=2.66087, 求下列各式中之 x, y, z, u:—

log x=5.66087. log y=12.66087. log z=$\bar{3}$.66087, log u=.66087

6. 已知 log 3.47712, 試定 3^{100}, $\sqrt[100]{3}$, $3^{10}\div\sqrt[10]{3}$ 諸數中小數點之位置.

§ 76. 常用對數表. 如前所述, 一數之對數含有定位定值兩部. 定位部如何求法? 易由上節直接得之. 定值部如何求法? 若亦欲直接自求, 則其

手續異常繁雜，不便實用．好在昔賢爲應適此種需要計，不辭勞苦，曾將四位以內之各數，一一求得定值部．依其次第列之成表，吾人今日，但能坐享其成，按表檢查可矣．

對數中之定值部，除極少特例外，通常多爲不盡小數，爲求便於實用計，勢不得不用四捨五入法截去其較後之一部．通常計算上，只取定值部之初五位，便已足用．本書所用之蓋氏對數表卽爲五位對數之一種．

應用五位對數表所得結果，其可靠數字止於五位，且在第五位上之數字，有時亦不盡準確，故五位以後之數字依四捨五入法略之可也．

§77．**由眞數求對數．** 何謂底？何謂對數？其意義前已言之．今爲便於說明計，再添一個新的名詞，卽眞數是也．眞數之定義如下：

當甲爲乙之對數時，則乙數名曰甲數之眞數．

例如在 $\log 2 = .30103$ 中，.30103 爲 2 之對數；2 則爲 .30103 之眞數，又如 2 爲 100 之對數；100 則爲 2 之眞數．

1 若真數有n位整數，則該數之對數之定值部爲n−1

例 123456789 上數因有6位整數 所以該之對數之定值部爲 6−1=5

2 若真數至小數點後第n位上有數 則該數

之对数之定位部应为一n 并通常作 $\bar{n}$.

例：0.0000123

上数因在小数点后第5位有数所以

之对数之定位部应为一5 或写为 $\bar{5}$

已知眞數,欲求其對數,手續如下:—

〔例一〕 有眞數3456, 求 $\log 3456 = ?$

〔解法〕 先依§75求出定位部:因3456有四位整數,故其定位部爲3.

次由對數表查出定值部:在蓋氏對數表第7頁中,自N縱行內查出345,由此向右横看;再自頂上横行內查出6,由此向下直看,横直相交之處有數53857,是即3456之定值部.

$$\therefore \quad \log 3456 = 3.53857.$$

〔例二〕 求 $\log .8519 = ?$

〔解法〕 先依§75求定位部:得$\bar{1}$.

次由對數表查出定值部:依§58(二).8519之定值部與8519之定值部相同,故仿上例.在蓋氏對數表第18頁,查得8519之定值部爲.92090,亦即爲.8519之定值部.

$$\therefore \quad \log .8519 = \bar{1}.92090.$$

〔例三〕 求 $\log .0007234 = ?$

〔解法〕 檢表得7234之定值部爲.85938

$$\therefore \quad \log .0007234 = \bar{4}.85938$$

注：(1) 对数表中所有对数皆为定值部

而定值部永为正。 例 $\bar{3}.2174 = \bar{3}+.2174$

$\bar{3}.2174$ 非 -3.2174 三写为 [illegible]

$= 7.2174 - 10$

log 3456 = ?
1) 先求定位部：∵ 3456為四位整數 ∴ 定位部應為3
2) 檢即求定值部：定值應為 .53857

~~3) 所求之對數應為 3.53857~~

〔例四〕 $\log 45.678 = ?$

〔解法〕 45678之定值部不載於表內，故不能直接求出，但若用補插法，亦可求得45678之定值部如下：

88

檢表知 $\log 45.680 = 1.93237$

83

$\log 45.670 = 1.93232$

二者眞數相差 .010 .00005 (對數相差)，

今 $\log 85.678 = 1.93232 + x$

與 $\log 85.670 = 1.93232$

二者眞數相差 .008 x (對數相差)

由比例式 $.010 : .008 = .00005 : x$，求得

$$x = .00004$$

$$\therefore \log 85.678 = 1.93232 + .00004$$

$$= 1.93236.$$

〔例五〕 求 $\log 321.67 = ?$

〔解法〕

$$.07\left(\begin{array}{l}\log 321.67 = 2.50732 + x \\ \log 321.70 = 2.50745 \\ \log 321.60 = 2.50732\end{array}\right) x$$

$$.10 \qquad .00013$$

log 3.456 = ?
1) 定位部應為 0
2) 定值 〃 〃 〃 .53857
3) ∴ 又對數 = 0.53857

如定值部不能由表檢得,應查得

1) 先把原數之首部數之對數查出相減　log 34570 = 4.53[illegible]
34560 = 4.5[illegible]
10 = 0.0[illegible]

得數值增加量為10時
"表差"為0.00013

由比例式
$$\frac{.07}{10}=\frac{x}{.00013}$$

得
$$x=.00013\times\frac{7}{10}=.00005$$

$$\log 321.67=2.50732+.00005=2.50737$$

〔註〕 比例差之原理.當諸數相差甚微時,諸數之差與其對數之差殆成比例.此為例四例五所用補插法之基本原理,學者注意此比例原理只在諸數相差甚微時成立,不可亂用.例如

$$\frac{\log 8-\log 2}{\log 4-\log 2}\neq\frac{8-2}{4-2}.$$

習題三十九

試求各數之對數.

1.	3564	2.	87.64	3.	7.865	4.	.9089
5.	.00098	6.	202000	7.	$\frac{9835}{5389}$	8.	$.123\times 3.45$
9.	$1.23\div 34.5$	10.	11123	11.	33333	12.	24246
13.	87562.	14	72961	15.	.000315	16.	1389600
17.	.006311	18.	$435^2\div 346^3$	19.	132^{10}	20.	$\sqrt[15]{321}$
21.	$\sqrt[3]{.00567}$						

§78 由對數求真數. 已知對數,欲求其真數,方法如下:—

2) 由原數減去[illegible]原數所之首部數得 34567 − 34560 = 7
7為"超差"

3) 由1)得知真數增加10,定值部增加0.00013
同真數增加7時定值部應增加若干 故得比例:

$10:7 = 0.00013 : x \quad \therefore x = \frac{\quad}{10} = 0.00005$

iii) 加此x值于原数为之真数之对数之定值部上即得原数之定值部为 $.59857 + 0.00005 = .59862$

(加在对数的末字上)

先由對數表,按已知定値部求出眞數各位之數字,再由已知定位部,依 §75 決定眞數中小數點之位置.

〔例一〕 已知 $\log x = 2.79323$. 求 x.

〔解法〕 在蓋氏對數表第13頁,查出定値部(不是查眞數).79323.由此向左橫看,在 N 縱行內得621,是爲眞數之首三位,再由此向上直看,在頂上橫行內得數字2,是爲眞數之末位,故所求眞數各位數字爲6212.又因已知定位部爲2,故所求眞數有3位整數.

$$\therefore \quad x = 621.2$$

〔例二〕 已知 $\log x = \bar{3}.80862$. 求 x.

〔解法〕 仿上例檢表,得眞數 x 之各位數字爲6436.又因定位部爲 $\bar{3}$,故知 $x = .006436$.

〔例三〕 已知 $\log x = 1.38676$. 求 x.

〔解法〕 在對數表之定値部中,查不出 .38676.但與 .38676 相近者有 .38668 和 .38686 二數,定値部 .38676 既在此二定値部之間,故眞數 x 必在眞數 2436 〔.38668 之眞數〕之間,卽 x 之首四位數字應

已知对数查真数:

归纳由表中查得该对数之定值部所对应之真数的数字.

由定位部定出小数点之位置

即得该对数之真数

例：log x = 2.79323
求 x = ?
與原對數之定值部相當之真數之數字爲
∴ x = 621.2

爲 2436；其第五位如何？則不得而知.欲知第五位，須依比例差之原理，用補插法求之如下：—

兩對數之差與增加量
真　　　　之比
相鄰真數對數之差
之比

$$
\begin{array}{lll}
 & 1.38676 & = \log(24.36+d) \\
 & 1.38686 & = \log 24.37 \\
 & 1.38668 & = \log 24.36 \\
\hline
\text{差} & .00018 & \quad .01 \quad \text{差} \\
 & .00008 & \quad d
\end{array}
$$

由比例式 $\dfrac{d}{.01}=\dfrac{.00008}{.00018}$ 得 $d=.01\times\dfrac{8}{18}=.004$

$$\therefore\quad 1.38676=\log(24.36+.004)=\log 24.364$$

卽　　　　$x=24.364.$

〔注意〕上面補插法算式更可簡寫如下形：

	定値部	眞　數	
差 8	38676	24360 + d	差 d.
差 18	38686	24370	差 10
	38668	24360	

由比例 $d:10=8:18$　得 $d=10\times\dfrac{8}{18}=4.$

故眞數 x 之各位數字爲 24364. 又因定位部爲 1, 故

由表中不能直接查得真數時：
1) 將原對數之二相鄰對數(表中可直接查出者)之數相減，得表差，又求二數之差
2) 由原對數減去較小之相鄰對數，得對數之餘差

量
(3)列一比例式；
表上之对数之相当之值如[illegible]
二真数之添加量之又[illegible]题[illegible]
解比例式求出题[illegible]

$$x = 24.364.$$

〔例四〕 已知 $\log M = 1.3704$. 求 M.

〔解 I〕 檢表知13704之眞數爲1371, 故 $M = 13.71$. 對否? 何故?

〔解 II〕 檢表並用補插法得 3704 之眞數爲 23464, 故 $M = .23464$, 對否? 何故?

〔解 III〕 檢表並用補插法得 3704 之眞數爲 23464, 故 $M = 23.464$, 對否? 何故?

〔例五〕 已知 $\log N = 32.82$. 求 N.

〔解 I〕 在蓋氏對數表第 7 頁, N 縱行下查出 328, 由此向右看; 在頂上橫行查出 2, 由此向下看. 相交之處得一數 51614. 故 $N = 1.51614$, 對否? 何故?

〔解 II〕 檢表並用補插法求得 32.82 之眞數爲 21291, 故 $N = 1.21291$, 對否? 何故? 如謂 $N = 21291 \times 10^{28}$, 對否? 何故?

〔解 III〕 檢表知82000之眞數爲6607, 故 $N = 6607 \times 10^{29}$, 對否? 何故?

〔例六〕 已知 $\log M = .00087000$. 求 x.

1) 如此题解检[illegible]原数是也之对数之真数[illegible]

〔解 I〕 檢表應用補插法知 87000 之眞數爲 74132, 故 $M=7.4132$, 對否? 何故?

〔解 II〕 檢表知 00087 之眞數爲 1002, 故 $M=\bar{4}.1002$, 對否? 何故?

〔解 III〕 檢表知 .00087 之眞數爲 1002. 故 $M=1.002$. 對否? 何故?

〔註〕 以上三例之種種解法, 何者對, 何者不對? 務須愼思明辨徹底明瞭, 然後自己演算時方可免重大錯誤也.

習題四十

已知 x 之對數如下, 試求 x:—

1.	3.16286	2.	4.39777	3.	9.54332
4.	1.16077	5.	$\bar{2}.64008$	6.	8.81017
7.	15.02694	8.	8.03503	9.	$\overline{12}.00346$
10.	13.48700	11.	32.715	12.	11.79400
13.	.00130	14.	4.36530	15.	.00356
16.	9.78923	17.	10.00812	18.	21.51290
19.	1.56789	20.	.97865	21.	.00385

§ 79. 對數在計算上之應用. 前於 § 70 曾言

對數之功用在於減少計算上之繁難.茲舉例以覺其說.

〔例一〕　求　$3^{100}=?$

〔解法〕　$\log 3^{100}=100\log 3=100\times .47712=47.712.$

$\therefore\ 3^{100}=51523\times 10^{43}$

〔例二〕　求　$\sqrt[100]{3}=?$

〔解法〕　$\log\sqrt[100]{3}=\frac{1}{100}\log 3=\frac{1}{100}\times .47712=.00477$

$\therefore\ \sqrt[100]{3}=1.011.$

〔例三〕　求　$\sqrt[7]{.003586}=?$

〔解法〕　$\log\sqrt[7]{.003586}=\frac{1}{7}\log .003586$

$$=\frac{1}{7}\times\bar{3}.55461 \qquad (A)$$

$$=\frac{1}{7}\times(\bar{7}+4.55461) \qquad (B)$$

$$=\bar{1}.65066$$

$\therefore\ \sqrt[7]{.003586}=.44736$

〔注意〕　本例(A)式何以須化爲(B)式?

〔例四〕　求　$\dfrac{\sqrt[5]{.00386}\times\sqrt[3]{.0356}}{.03245^2\times .5678^3}=?$

$=\log(\sqrt[5]{.00386}\cdot\sqrt[3]{.0356})-\log(.03245^2\times .5678^3)$

$=\log\sqrt[5]{.00386}+\log\sqrt[3]{.0356}-\log .03245^2-\log .5678^3$

〔解法〕 設x=所求之值.

$$\frac{1}{5}\log .00386=\frac{1}{5}(\bar{3}.58659)=\bar{1}.51732$$

$$\frac{1}{3}\log .0356=\frac{1}{3}(\bar{2}.55145)=\bar{1}.51715$$

$$-2\log .03245=-2(\bar{2}.50121)=2.99758$$

$$\underline{-3\log .5678=-3(\bar{1}.75420)=0.73740}$$

$$\log x= \qquad 2.76945$$

$\therefore\ x=588.1$ 卽所求之值.

〔例五〕 $\sqrt{324}=?$

〔解法〕 $\sqrt{324}=\frac{1}{2}\log 324=\frac{1}{2}\times 2.51055=1.25528$

$=18.00$, 對否? 何故?

〔例六〕 $328\times 567\times \sqrt[5]{-576}=?$

〔解法〕 原式$=-328\times 567\times \sqrt[5]{576}=-N.$

$$\log 328= \qquad =.51587$$

$$\log 567= \qquad =.75358$$

$$\underline{\frac{1}{5}\log 576=\frac{1}{5}\times 2.76042=.55284}$$

$$\log N= \qquad 1.82229$$

$\therefore\ N=66.419$

$\therefore$ 原式$=-66.419$

〔註〕 若設原式之值$=M$,則

$$\log M=\log 328+\log 576+\frac{1}{3}\log(-576).$$

其中$\log(-576)=$?在常用對數中,負數有對數否?然則由上式能否求出$\log M=$?能否求出$M=$?然則在上之解法中何以先將原式化為$-N$,其故不瞭然乎?

習題四十一

用對數計算:—

1. 345^{10}
2. 1.1456^{10}
3. $.03^{20}$
4. $\sqrt[3]{8756}$
5. $\sqrt[5]{32487}$
6. $\sqrt[11]{.003856}$
7. $\sqrt[7]{.000832}$
8. $\sqrt[3]{3.489}$
9. $\sqrt[100]{.009876}$
10. $\dfrac{32456}{.23456}$
11. $\dfrac{2^{20}\times 3^{30}}{4^{11}\times 11^{4}}$
12. $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{5}}$
13. $576^{3}\div\sqrt[3]{675}$
14. $\sqrt[5]{\sqrt[7]{32}}$
15. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{84}}}$
16. $\sqrt{3\sqrt{8\sqrt{3\sqrt{3}}}}$
17. $2^{30}\div 3^{20}$
18. $9^{9^{9}}$
19. $1234\times 5678\div 8765\div 4321$
20. $3205^{2}\times 5023^{3}\div 3502^{3}\div 2053^{4}$

21. $345.67^3 \times .00352^2 \div 1350000^2 \div 51200^4$

22. 圓之半徑爲3968,試求其面積.

23. 直角三角形之斜邊爲138.45,一股爲78.42,試求他股之長.

$89725 = 2R^2$ 24. 圓之內接正方形之面積爲89725平方市尺,試求圓面積及圓周.

25. 長方體之長闊高爲3875尺,$\sqrt{872}$尺,$\sqrt{.1892}$尺,試求其體積.

§80. **複利息問題.** 複利息之計算在期數甚多時亦以引用對數爲便.本節當舉例以明之.

複利息計算公式,算術中已嘗論之,茲爲複習計,再將該公式之求法述之於下:—

設有本金p元,年利率$\frac{r}{100}$存放n年,一年一結,則在第n年之末,本利和共爲$A=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$元

〔證〕 第一年之末本利和$=p+p\cdot\frac{r}{100}$

$$=p\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

第二年之末本利和$=p\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$$+p\left(1+\frac{r}{100}\right)\cdot\frac{r}{100}=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$第三年之末本利和=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$+p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\cdot\frac{r}{100}=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

....

$$推之,第n年之末本利和=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}$$

$$+p\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}\frac{r}{100}=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$A=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

〔例一〕　本利3875元,年利率一分二釐,存放10年,一年一結.求本利和應爲若干元.

〔解法〕　$A=3875\left(1+\frac{12}{100}\right)^{10}=3875\times1.12^{10}$

$$\log A=\log 3875+10\log 1.12$$

$$=3.58827+10\times.04922$$

$$=4.08047$$

$A=12036$元.

〔例二〕　本金3875元.年利率一分二釐,半年一結,存放10年四個月,求本利和.

〔解法〕　年利率爲一分二釐,半年利率應爲六

釐,又半年爲一期10年4月應合$20\frac{2}{3}$期,故所求本利和爲

$$A=3875\left(1+\frac{6}{100}\right)^{20\frac{2}{3}}=3875\times1.06^{20\frac{2}{3}}$$

$$\log A=\log 3875+20\frac{2}{3}\log 1.06$$

$$=3.58827+20\frac{2}{3}\times.02531$$

4.11155

$$=4.21127$$

$$\therefore\quad A=16266\text{ 元}.$$

習題四十二

1 本金一元,依年利率一分一釐存放,依複利一年一結.問10年, 20年, 30年, 40年, 50年, 60年, 70年, 80年, 90年, 100年, 各得本利和若干元?

2. 本金100元,存放100年,依複利一年一結,問(a)年利率一分時,(b)年利率一分一釐時,(c)年利率一分二釐時,各得本利和若干元?

3. 本金100元,年利率一分存放100年,依複利計算.問(a) $A=$ 一年一結.(b)半年一結,(c)每三個月一結,各得本利和若干元? $A=100\left(1+\frac{5}{100}\right)^{200}$ $A=100\left(1+\frac{2.5}{100}\right)^{400}$

4. 本金100元,年利率一分二釐,存放200年,依複利一年一結,求本利和.假定中國人口爲四萬萬,將此本利和平均

分配,每人可得若干元?

5. 本金100元,年利率$\frac{12.5}{100}$,存放100年.問(a)依單利計,(b)依複利每年一結,各應得利息若干元?二者相差若干元?

6. 存款一項,依複利每年一結,15年後本利和爲本金五倍,問年利率應爲若干?

7. 本金1元,依複利存放20年,年利率一分二釐,一年一結.若改爲半年一結,問半年利率應改爲若干?本利和方無改變?

8. 有款一項,依複利存放100年,一年一結,年利各一分.問半年一結,半年利率應改爲若干,所得利息方能相等?

9. 存款一項,年利率一分二釐,依複利計,問若干年後所得利息五倍於本金?

10. 俗說"臭蟲一個每夜生小臭蟲七個,次夜大小臭蟲又各生七個,以後照此類推."今若有臭蟲三個,聽其自然繁殖,問兩星期後共有若干個?

已知 $\log_a N$，$\log_a b$

求 $\log_b N$

設 $\log_b N = x$，則 $b^x = N$

$\log_a b^x = \log_a N$

$x \log_a b = \log_a N$

$\therefore x = \boxed{\dfrac{\log_a N}{\log_a b} = \log_b N}$ 公式

$\log_b N = \underline{\underline{M}} \cdot \log_a N$

$M = \dfrac{1}{\log_a b}$

例：$\log_3 7 = ?$

$N = 7$，$b = 3$，$a = 10$

$\log_3 7 = \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 3}$

$M = a^x$ $\quad 1000 = 10^3$

$a = \sqrt[x]{M}$ $\quad 10 = \sqrt[3]{1000}$

$x = \log_a M$ $\quad 3 = \log_{10} 1000$

＊C二四四九

中華民國二十三年八月初版
中華民國二十四年七月八版

周

（57023A）

高級中學用
復興教科書 代數學 三冊
上冊定價大洋柒角
外埠酌加運費匯費

編著者 虞明禮
主編兼發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

（本書校對者胡達聰）