Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 33

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 33.1. Drücke in $\mathbb{Q}^2$ den Vektor

$$(2,-7)$$

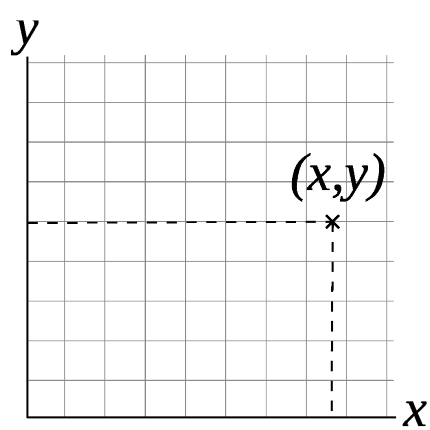
als Linearkombination der Vektoren

$$(5,-3) \text{ und } (-11,4)$$

aus.

Übungsaufgaben

Aufgabe 33.2. Bestimme die (ungefähren) Koordinaten des skizzierten Punktes (eine Kästchenlänge repräsentiere eine Einheit).



Aufgabe 33.3. Markiere die folgenden Punkte in der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$.

$$(3,-7),\ (-1,-2),\ (0,5),\ (4,4),\ (4,5),\ (-3,0),\ (0,0)\,.$$

AUFGABE 33.4. Es sei ein Punkt $P = (x,y)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben. Skizziere die Punkte

$$(-x,y),\ (x,-y),\ (-x,-y),\ (3x,3y), (-2x,-2y)\,.$$

AUFGABE 33.5. Es sei ein Punkt $P = (x,y)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben. Skizziere die Menge aller Punkte

$$(cx,cy),\ c \in \mathbb{R}\,.$$

AUFGABE 33.6. Markiere zwei Punkte P und Q in der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und addiere sie.

AUFGABE 33.7. Zeige, dass der Zahlenraum K^n zu einem Körper K mit der komponentenweisen Addition und der Skalarmultiplikation die Eigenschaften

(1) $r(su) = (rs)u$,
(2) $r(u+v) = ru + rv$,
(3) $(r+s)u = ru + su$,
(4) $1u = u$,

erfüllt.

AUFGABE 33.8. Im Rahmen einer Werbeaktion verkauft ein Baumarkt Schraubensets, die jeweils große, mittlere und kleine Schrauben enthalten. Set A enthält 10 große, 10 mittlere und 5 kleine Schrauben, Set B enthält 15 große, 5 mittlere und 20 kleine Schrauben, Set C enthält 8 große, 12 mittlere und 6 kleine Schrauben. Da das Angebot sehr günstig ist, läuft der Verkauf hervorragend. Allerdings gibt es kaum jemand, der genau eines der vorgebenen Sets brauchen kann, daher entwickelt sich auf dem Parkplatz eine rege Tauschbörse für Schrauben. Lässt sich jeder Schraubenwunsch mit den gegebenen Sets exakt erfüllen?

AUFGABE 33.9. Finde für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^2$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

AUFGABE 33.10. Finde für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^3$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Aufgabe 33.11. Es sei K ein Körper und K^n der n-dimensionale Zahlenraum. Es sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren im K^n und $w \in K^n$ ein weiterer Vektor. Es sei vorausgesetzt, dass die Familie

$$w, v_i, i \in I\,,$$

ein Erzeugendensystem von K^n ist und dass sich w als Linearkombination der v_i, $i \in I$, darstellen lässt. Zeige, dass dann schon v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von K^n ist.

Aufgabe 33.12. Zeige, dass im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 33.13. Bestimme, ob im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 33.14. Es sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass der Matrizenraum $\operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ in natürlicher Weise ein Vektorraum ist.

Aufgabe 33.15.*

Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 8 & 3 & 1 & 0 & -5 \\ 6 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33.16. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33.17.*

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation von quadratischen Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

Aufgabe 33.18. Bestimme das Matrizenprodukt

$$e_i \circ e_j \,,$$

wobei links der i-te Standardvektor (der Länge n) als Zeilenvektor und rechts der j-te Standardvektor (ebenfalls der Länge n) als Spaltenvektor aufgefasst wird.

Aufgabe 33.19. Es sei M eine $m \times n$-Matrix. Zeige, dass das Matrizenprodukt Me_j mit dem j-ten Standardvektor (als Spaltenvektor aufgefasst) die j-te Spalte von M ergibt. Was ist e_iM, wobei e_i der i-te Standardvektor (als Zeilenvektor aufgefasst) ist?

Zu einer quadratischen Matrix M bezeichnet man mit M^n die n-fache Verknüpfung (Matrizenmultiplikation) mit sich selbst. Man spricht dann auch von n-ten *Potenzen* der Matrix.

Aufgabe 33.20. Berechne zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Potenzen

$$M^i,\ i = 1, \ldots, 4.$$

Aufgabe 33.21. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und M eine $n \times n$-Matrix. Beschreibe DM und MD.

Aufgabe 33.22. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ein n-Tupel über einem Körper K, und es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Variablentupel. Welche Besonderheiten erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$Dx = c,$$

und wie löst man es?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 33.23. (2 Punkte)

Drücke in $\mathbb{Q}^2$ den Vektor

$$(5, -8)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(6, -4) \text{ und } (-3, 7)$$

aus.

Aufgabe 33.24. (3 Punkte)

Finde für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^3$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Aufgabe 33.25. (3 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K. Zeige, dass die vierte Potenz von M gleich 0 ist, also

$$M^4 = MMMM = 0.$$

Für die folgende Aussage wird sich bald ein einfacher Beweis über die Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen ergeben.

Aufgabe 33.26. (4 Punkte)

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist. Genauer: Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix und C eine $p \times r$-Matrix über K. Zeige, dass $(AB)C = A(BC)$ ist.

Aufgabe 33.27. (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Finde und beweise eine Formel für die n-te Potenz der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 33.28. (2 Punkte)

Finde neben den beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vier weitere Matrizen M mit der Eigenschaft $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Abbildungsverzeichnis