

**Mathematik für Anwender II****Arbeitsblatt 39****Übungsaufgaben**

AUFGABE 39.1. Zeige, dass das Integral zu einer stetigen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  unabhängig von der gewählten Basis ist.

AUFGABE 39.2. Formuliere und beweise den *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für stetige Kurven

$$g: I \longrightarrow V,$$

wobei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum sei.

AUFGABE 39.3. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über  $[a, b]$ , und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

AUFGABE 39.4. Sei

$$\gamma: [2, 7] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2 - 1, t + 3),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y) = (y^2 - x, -3xy - y^3).$$

AUFGABE 39.5. Sei

$$\gamma: [1, 6] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, t^3, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^2 - xz^2, xy, -3xz - y^3z).$$

## AUFGABE 39.6.\*

Berechne das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (y, x),$$

längs des Weges

$$\gamma: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, e^t).$$

## AUFGABE 39.7.\*

Sei

$$\gamma: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, -t^2 + 1, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^2 - xz, xyz, 5x^2z - yz).$$

## AUFGABE 39.8. Sei

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (\cos t, \sin t, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y - z^3, x^2, -xz).$$

## AUFGABE 39.9.\*

Berechne das Wegintegral zur archimedischen Spirale

$$[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t \cos t, t \sin t),$$

im Vektorfeld

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (y, -x).$$

AUFGABE 39.10. Seien  $a, b, c, d, r, s \geq 1$  natürliche Zahlen. Wir betrachten die stetig differenzierbare Kurve

$$[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^r, t^s).$$

Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d).$$

## AUFGABE 39.11. Sei

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zu den folgenden Vektorfeldern.

- a)  $F(x, y) = (x, y),$
- b)  $F(x, y) = (x, -y),$
- c)  $F(x, y) = (y, x),$
- d)  $F(x, y) = (y, -x).$

AUFGABE 39.12. Es sei

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein stetiges Vektorfeld und

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein stetig differenzierbarer Weg. Es sei  $G$  eine Stammfunktion zu  $F$ . Zeige

$$\int_{\gamma} F = G(\gamma(b)) - G(\gamma(a)).$$

AUFGABE 39.13.\*

Es sei

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld, wobei die  $i$ -te Komponente nur von der  $i$ -ten Variablen abhängen möge. Es sei

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

ein stetig differenzierbarer Weg. Zeige, dass das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  nur von  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  abhängt.

AUFGABE 39.14. Wir betrachten das identische Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, P \longmapsto P.$$

Zeige, dass für je zwei Punkte  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  und für jeden stetig differenzierbaren Weg

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

mit  $\gamma(a) = P$  und  $\gamma(b) = Q$  das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  gleich  $\frac{1}{2}(\|Q\|^2 - \|P\|^2)$  ist.

AUFGABE 39.15.\*

Es sei  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung, aufgefasst als lineares Vektorfeld.

- (1) Man gebe ein Beispiel für ein diagonalisierbares  $F$  (mit  $n = 2$ ) und eine stetig differenzierbare Kurve

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$  derart an, dass das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  nicht 0 ist.

- (2) Es sei nun  $F$  diagonalisierbar bezüglich einer Orthonormalbasis. Zeige, dass

$$\int_{\gamma} F = 0$$

für jede stetig differenzierbare Kurve  $\gamma$  mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$  ist.

AUFGABE 39.16. Es sei  $U \subseteq V$  eine offene Teilmenge in einem euklidischen Vektorraum,

$$F, G: U \longrightarrow V$$

stetige Vektorfelder und

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Für  $r, s \in \mathbb{R}$  ist

$$\int_{\gamma} rF + sG = r \int_{\gamma} F + s \int_{\gamma} G.$$

(2) Es ist

$$\int_{-\gamma} F = - \int_{\gamma} F,$$

wobei  $-\gamma$  den umgekehrt durchlaufenen Weg bezeichnet.

(3) Wenn

$$\delta: [b, c] \longrightarrow U$$

ein weiterer (stückweise) stetig differenzierbarer Weg mit  $\delta(b) = \gamma(b)$  ist, so ist

$$\int_{\gamma * \delta} F = \int_{\gamma} F + \int_{\delta} F,$$

wobei  $\gamma * \delta$  den aneinander gelegten Weg bezeichnet.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 39.17. (3 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über  $[a, b]$ , und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

AUFGABE 39.18. (5 Punkte)

Sei

$$\gamma: [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, -t^3, t^2 - t + 4),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^3 - x^2 z^2, x^2 y, 5x^3 z - y^2 z).$$

AUFGABE 39.19. (5 Punkte)

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t, -t, t^2),$$

und das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x^2, xz, y^2).$$

a) Berechne das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$ .

b) Es sei

$$g: [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0, 1], s \longmapsto \sin s,$$

und  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$ . Berechne (unabhängig von a))  $\int_{\tilde{\gamma}} F$

AUFGABE 39.20. (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - e^y, xy + \cos x).$$

Bestimme das Wegintegral längs des gegen den Uhrzeigersinn einmal durchlaufenen Einheitsquadrates.

AUFGABE 39.21. (6 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left( \frac{x^3 - xy + 2y^2}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Bestimme das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs des linearen Weges von  $(0, -2)$  nach  $(3, 4)$ .

AUFGABE 39.22. (5 Punkte)

Wir betrachten das konstante Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, P \longmapsto v.$$

Zeige, dass für zwei Punkte  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  und jeden stetig differenzierbaren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma(a) = P$  und  $\gamma(b) = Q$  das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  gleich  $\langle Q - P, v \rangle$  ist.



## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7