Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 15

Übungsaufgaben

Aufgabe 15.1. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x\,|x|\,,$$

differenzierbar ist, aber nicht zweimal differenzierbar.

Aufgabe 15.2. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom, $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass P genau dann ein Vielfaches von $(X-a)^n$ ist, wenn a eine Nullstelle sämtlicher Ableitungen $P, P', P'', \ldots, P^{(n-1)}$ ist.

Aufgabe 15.3. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ gerade,} \\ \lfloor x \rfloor - x + 1, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade,} \end{cases}$$

definiert ist. Untersuche f in Hinblick auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Extrema.

Aufgabe 15.4.*

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer vierten Potenz, vermindert um das Doppelte ihrer dritten Potenz, gleich dem Negativen der Quadratwurzel von 42 ist?

Aufgabe 15.5.*

Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon [-2,5] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

Aufgabe 15.6. Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon [-4,4] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 3.$$

Aufgabe 15.7. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Finde die Punkte $a \in [-3,3]$ derart, dass die Steigung der Funktion in a gleich der Durchschnittssteigung zwischen -3 und 3 ist.

Aufgabe 15.8. Die Stadt $S=(0,0)$ soll mit den beiden Städten $T=(a,b)$ und $U=(a,-b)$ mit $a \geq 0, b>0$ durch Schienen verbunden werden. Dabei sollen die Schienen zunächst entlang der x-Achse verlaufen und sich dann in die beiden Richtungen verzweigen. Bestimme den Verzweigungspunkt, wenn möglichst wenig Schienen verlegt werden sollen.

Aufgabe 15.9. An einen geradlinigen Fluss soll ein rechteckiges Areal der Fläche $1000m^2$ angelegt werden, dessen eine Seite der Fluss ist. Für die drei anderen Seiten braucht man einen Zaun. Mit welcher Zaunlänge kann man minimal auskommen?

Aufgabe 15.10. Es seien
$$f,g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt und es gelte
$$f(a)=g(a) \text{ und } f'(x)=g'(x) \text{ für alle } x\,.$$
Zeige, dass
$$f(x)=g(x) \text{ für alle } x \text{ gilt}\,.$$

Aufgabe 15.11.*

Es seien
$$f,g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte
$$f(a)\geq g(a) \text{ und } f'(x)\geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$
Zeige, dass
$$f(x)\geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt}\,.$$

Aufgabe 15.12.*

Es sei
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetig differenzierbare Funktion, die mit der Diagonalen zwei Schnittpunkte $P \neq Q$ besitze. Zeige, dass der Graph der Ableitung f' einen Schnittpunkt mit der durch $y=1$ definierten Geraden besitzt.

Aufgabe 15.13.*

Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
vom Grad $d \geq 1$ maximal $d-1$ lokale Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Intervalle unterteilen lassen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 15.14. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und
$$F\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine rationale Funktion. Zeige, dass F genau dann ein Polynom ist, wenn es eine höhere Ableitung mit $F^{(n)}=0$ gibt.

Aufgabe 15.15.*

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-fach stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass die n-te Ableitung überall positiv ist. Zeige, dass f maximal n Nullstellen besitzt.

Aufgabe 15.16. Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{2x-3}{5x^2-3x+4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 15.17.*

Es sei

$$f(x) \,=\, x^3 + x - 1.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im reellen Intervall $[0,1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0,1]$ derart an, dass $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Aufgabe 15.18. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine auf einem offenen Intervall definierte stetig differenzierbare Funktion und sei $a \in I$ ein Punkt mit $f'(a) \neq 0$. Zeige, dass es offene Intervalle $J \subseteq I$ mit $a \in J$ und $J' \subseteq \mathbb{R}$ derart gibt, dass die eingeschränkte Funktion $f\colon J \to J'$ bijektiv ist.

Aufgabe 15.19. Begründe den Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Aufgabe 15.20.*

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1}$$

im Punkt 1, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Aufgabe 15.21. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x^3-4x^2+x+6}$$

mittels Polynomdivision (vergleiche Beispiel 15.11).

Aufgabe 15.22. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^3-2x^2+x+4}{x^2+x}$$

im Punkt -1.

Aufgabe 15.23. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}} .$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.24. (5 Punkte)

Aus einem Blatt Papier der Seitenlängen 20 cm und 30 cm soll eine Schachtel (ohne Deckel) mit möglichst großem Volumen gebastelt werden, indem ringsherum ein Rand hochgefaltet wird (die überlappenden Eckränder werden verklebt). Mit welcher Randbreite (=Schachtelhöhe) erreicht man das maximale Volumen?

Aufgabe 15.25. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 15.26. (5 Punkte)

Zeige, dass eine nichtkonstante rationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

(mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a, c \neq 0$), keine lokalen Extrema besitzt.

Aufgabe 15.27. (4 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad $d \geq 1$. Es sei m die Anzahl der lokalen Maxima von f und n die Anzahl der lokalen Minima von f. Zeige, dass bei d ungerade $m = n$ und bei d gerade $|m - n| = 1$ ist.

Aufgabe 15.28. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}{2x^3-x^2-4x+3}$$

im Punkt 1.

Abbildungsverzeichnis